

Примерный план семинаров по квантовой механике 2 (весна 2025 г.)

В.Г. Сербо

Семинары: февраль – 6; март – 6; апрель – 6; май – 5. **Всего 23 сем.**

1. Спин 1/2. Матрицы Паули. Спин в постоянном и переменном магнитном поле. Заряженная частица в однородном магнитном поле, уровни Ландау — 3 сем.

1. Найти $(\sigma \mathbf{a})(\sigma \mathbf{b})$; $(\sigma \mathbf{a})^n$.

2. Найти $e^{i\sigma \mathbf{a}}$; $e^{\sigma \mathbf{a}}$; $U\sigma_m U^{-1}$, где $U = e^{i\sigma_z \varphi/2}$.

3. Могут ли квадраты проекций электронного спина на оси x, y, z иметь одновременно определенные значения?

4. Задача 5.3 ГКК. Показать, что для состояния, описываемого спиновой волновой функцией

$$\chi = \begin{pmatrix} e^{i\beta} \cos \alpha \\ e^{i\gamma} \sin \alpha \end{pmatrix}$$

(это есть наиболее общий вид нормированной волновой функции спинового состояния частицы со спином $s = 1/2$ при $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $0 \leq \beta, \gamma < 2\pi$), можно указать такую ось в пространстве, проекция спина на которую имеет определенное значение $+1/2$. Найти полярный и азимутальный углы этой оси.

5. Найти

$$\int \psi^* \hat{\mathbf{I}} \psi d\Omega, \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{11} + Y_{1-1}),$$

и сравнить полученный результат с результатом предыдущей задачи.

6. Найти χ , для которой $\hat{s}_x \chi = \frac{1}{2}\chi$. То же для $\hat{s}_y \chi = \frac{1}{2}\chi$.

7. Для частицы со спином $s = 1/2$ указать закон преобразования спиновой волновой функции при вращении системы координат на угол β относительно оси, направление которой определяется единичным вектором \mathbf{n} . Показать, что при этом величины вида $\Psi^+ \Psi$ преобразуются как скаляр (не изменяются), а величины вида $\Psi^+ \boldsymbol{\sigma} \Psi$ преобразуются как вектор — СХ §36.

8. Распад $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ и проблема нарушения пространственной чётности — Фейнмановские лекции по физике, выпуск 9, гл. 15, § 5.

9. Спин в магнитном поле — задачи 7.12–7.13 ГКК.

Рассматривается нейтральная частица со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом μ , находящаяся в однородном постоянном магнитном поле \mathbf{B} . Для такой частицы найти зависимость от времени спиновой функции и средних значений компонент спина.

10. Обобщить результат предыдущей задачи на случай однородного непостоянного магнитного поля, направление которого остается неизменным, т. е. $\mathbf{B}(t) = B(t) \mathbf{n}_0$.

11. В опыте типа Штерна – Герлаха поляризованные вдоль оси x нейтроны движутся вдоль оси y , а фильтр, пропускающий нейтроны, направлен вдоль оси z . Найти отношение числа прошедших нейтронов к числу падающих. Рассмотреть такой же опыт для пучка фотонов: фотоны, поляризованные вдоль оси x , летят вдоль оси y , а фильтр, пропускающий фотоны, направлен вдоль оси z .

Ответ: для нейтронов $N_{\text{final}}/N_{\text{initial}} = 1/2$; для фотонов $N_{\text{final}}/N_{\text{initial}} = 0$.

12. Определить уровни энергии и волновые функции для заряженной частицы в постоянном и однородном магнитном поле \mathbf{B} . Выбрать векторный потенциал в виде $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$.

13. Считая известным гамильтониан частицы в электромагнитном поле, найти

- выражение для оператора скорости $\hat{\mathbf{v}}$;
- коммутационные соотношения для компонент скорости.

2. Сложение моментов. Коэффициенты Клебша-Гордана. Правила отбора для векторных операторов — 3 сем.

14. Сложение моментов $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, 1×1 , $1 \times \frac{1}{2}$ (в том числе с использованием таблиц коэффициентов Клебша-Гордана).

15. Найти среднее значение магнитного момента электрона в состоянии $p_{1/2}$ с $j_z = 1/2$ двумя способами: а) используя результаты предыдущей задачи; б) используя формулу усреднения векторного оператора.

16. Задача 22 из §4 НГУ. Система состоит из двух спинов $s_1 = s_2 = 1/2$, взаимодействие которых имеет вид $\hat{V} = K\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2$. Найти уровни энергии системы во внешнем постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, если гиromагнитные отношения равны g_1 и g_2 .

17. Найти правила отбора для матричных элементов дипольного $\langle |l'm'|x_j|lm\rangle$ и квадрупольного $\langle l'm'|3x_jx_k - \mathbf{r}^2\delta_{jk}|lm\rangle$ моментов.

3. Тождественность частиц, принцип Паули. Атом гелия — 2 сем.

18. Два невзаимодействующих друг с другом бозона со спином $s_1 = s_2 = 1$ находятся в центральном поле в состояниях с одинаковыми квантовыми числами l , m и n_r . Найти возможные значения полного спина, предполагая, что

- бозоны разные;
- бозоны тождественные.

19. В системе из двух одинаковых бесспиновых бозонов одна частица находится в состоянии, описываемом кулоновской функцией $\psi_{100}(\mathbf{r})$, а другая — волновой функцией $\psi_{210}(\mathbf{r})$. Найти в указанном состоянии системы распределение по координатам одной частицы при произвольном (не фиксированном) положении другой. Какова вероятность того, что

- одна частица;
- обе частицы

находятся в области пространства $z \geq 0$? Сравнить полученные значения со случаем различных частиц.

20. Найти по теории возмущений поправку к энергии атома Не за счёт взаимодействия электронов для основного состояния $1s^2$. То же самое, используя вариационный метод. Обсудить качественно влияние спина на уровни возбужденных состояний (задачи 11.5–11.6 и 11.10 ГКК).

4. Электронные конфигурации и атомные термы. Правило Хунда. Тонкая структура уровней атома — 2 сем.

21. Указать все возможные термы конфигураций электронов $nsn'p$; $nnp'n'p$; p^2 ; p^3 ; d^2 (задача 11.14 ГКК).

22. Найти термы и магнитные моменты основных состояний атомов H–Ne, P, Cr, S, V, Al, Fe, Ti.

23. Найти тонкую структуру первых двух уровней атома водорода.

5. Оценки в модели атома Томаса – Ферми — 1 сем.

§56 СХ; 11.21 ГКК.

6. Сверхтонкая структура уровней атома — 1 сем.

24. Найти СТС для основного состояния атома водорода, вычисляя непосредственно $\mathbf{B}(0)$ — магнитное поле электрона в районе ядра (задача 11.2 ГКК).

7. Эффекты Зеемана и Пашена-Бака — 2 сем.

25. Определить расщепления терма с $S = 1/2$ в эффекте Пашена-Бака (задача 1 к §113 ЛЛ). Рассмотреть в основном предельные случаи сильных и слабых полей.

8. Теория возмущений, зависящих от времени. Вероятности переходов при адиабатических, внезапных и периодических возмущениях — 2 сем.

26. Найти вероятность ионизации атома водорода под действием электрического поля $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-|t|/\tau}$ (рассмотреть случай, когда конечный электрон можно рассматривать как свободный).

9. Излучение атомов. Вероятности электрических и магнитных дипольных переходов. Правила отбора — 3 сем.

27. Фотоэффект (задача 14.18 ГКК и 186 из Флюгге).

28. а) Излучение при переходе $2p_{\text{т}} \rightarrow 1s$ для атома водорода. Определить $dw/d\Omega$, w , τ , Γ , поляризацию излученного фотона (задача 14.1 ГКК).

б) Как изменится этот ответ при наличии нескольких фотонов с частотой перехода в начальном состоянии электромагнитного поля?

в) Обсудить случай, когда начальное состояние атома $n, l = n - 1, m = l$ при $n \gg 1$.

29. Излучение осциллятора (задача 14.2 ГКК).

30. Возможные дипольные переходы между уровнями $n = 3$ и $n = 2$ (α -линия серии Бальмера) с учетом их тонкой структуры (по Дираку и по Клейну-Фоку-Гордону).

31. Оценки вероятностей переходов между компонентами СТС основного состояния атома водорода (задача 14.9 ГКК).

32. Атом водорода находится в постоянном однородном магнитном поле B (НГУ задача 8 из §8). Рассмотреть переходы $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2} + \gamma$. Каковы поляризации и частоты фотонов, летящих: а) вдоль поля, б) перпендикулярно полю, если энергия взаимодействия с полем мала или велика по сравнению с интервалами тонкой структуры? Каковы относительные интенсивности спектральных линий?

33. Радиационный переворот спина нейтрона в магнитном поле (задача 14.7 ГКК).

34. Упругое и неупругое рассеяние фотонов сферическим ротатором (задача 14.13–14.14 ГКК).

10. Трёхмерное рассеяние. Борновское приближение. Фазовая теория — 3 сем.

35. Рассеяние на потенциальной яме в борновском приближении (ЛЛ задача 1 к § 126). Обсудить условия применимости борновского приближения.

36. То же для потенциала Юкавы $U(r) = (\alpha/r) e^{-r/a}$.

37. То же для кулоновского потенциала $U(r) = \alpha/r$ (как предельный случай потенциала Юкавы при $a \rightarrow \infty$).

38. Вычислить сечение упругого рассеяния быстрых электронов атомом водорода в основном состоянии (ЛЛ задача 1 к § 139).

39. Найти сечение рассеяния медленных частиц в случае: а) сферической прямоугольной потенциальной ямы (включая и резонансное рассеяние — см. 13.45 ГКК); б) сферического прямоугольного потенциального барьера.

40. Найти фазовые сдвиги $\delta_l(k)$ в поле $U(r) = \alpha/r^2$, $\alpha > 0$. Выполнить суммирование ряда, представляющего разложение амплитуды по парциальным волнам, в случае $m\alpha/\hbar^2 \ll 1$ при произвольных углах рассеяния. Найти $d\sigma/d\Omega$ и σ (13.19а ГКК). Сравнить с классическим случаем при рассеянии на малые углы.

11. Двухатомная молекула — 1 сем.

41. Задача 8 из §8 ГК. Определить момент инерции и расстояние между ядрами в молекуле H^1Cl^{35} если разность частот двух соседних линий во вращательно-колебательной (инфракрасной) полосе спектра этой молекулы равна $\Delta\nu = \Delta E/(2\pi\hbar c) = 20,9 \text{ см}^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] ЛЛ — Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика*, М.: Наука, 1989.
- [2] СХ — В.Г. Сербо, И.Б. Хриплович, *Лекции по квантовой механике*, Москва-Ижевск: ИКИ, 2023.
- [3] В.Г. Зелевинский, *Лекции по квантовой механике*, Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2002.
- [4] И. Ф. Гинзбург, *Основы квантовой механики (нерелятивистская теория)*, Новосибирск, НГУ, 2012.
- [5] НГУ — Л.М. Альтшуль, В.Г. Зелевинский, Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо, С.А. Хейфец, И.Б. Хриплович, В.Л. Черняк, *Сборник задач по квантовой механике*, Новосибирск: Ротапринтное издание НГУ, 1974.
- [6] Ю.М. Белоусов, С.Н. Бурмистров, А.И. Тернов, *Задачи по теоретической физике*, МФТИ, 2013
- [7] ГКК — В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.И. Коган, *Задачи по квантовой механике*, М.: Едиториал УРСС, 2001
- [8] ГК — И.И. Гольдман, В.Д. Кривченков, *Сборник задач по квантовой механике*, М.: ГИТПЛ, 1957.
- [9] В.Г. Зелевинский, *Квантовая физика*, Новосибирск: 1 том РИЦ НГУ, 2014; 2 и 3 том РИЦ НГУ, 2015.