Семестровые задания по курсу «Методы математической физики» (6-й семестр)

ЗАДАНИЕ № 1 (сдать до 22-го марта)

1. Найдите асимптотику интеграла $\int_0^1 (1-x^2)^n \sin(\pi x)dx$ при $n \to \infty$.
2. Найдите решение $\psi(x,t)$ уравнения Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + mgx\psi$$

с начальным условием $\psi(x,0)=A\,\exp(-|x|/a)$. Исследуйте асимптотику на больших временах. С какой скоростью движется центр пакета и как меняется его ширина?

3. Методом усреднения найдите эволюцию колебаний маятника, испытывающего трение при прохождении точки $x=a$, и сравните с точным решением уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt}\delta(x-a) + \omega_0^2 x = 0, \quad \gamma \to 0.$$

4. Найдите общее решение уравнения

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b})\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{1}{\tau}div(\boldsymbol{r}f) + S(\boldsymbol{r})$$

   где **r** – радиус-вектор, **b** – единичный вектор, τ – постоянная и $S(\boldsymbol{r})$ – произвольная функция. Как выглядят характеристики? *Указание:* удобно перейти к цилиндрическим координатам.

5. Решите уравнение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(\rho(1-\rho)\big) = 0$$

   с начальным условием $\rho(x,0)=\rho_0/(1+(x/a)^2)$. Найдите момент и координату точки опрокидывания.

ЗАДАНИЕ № 2 (сдать до 26-го апреля)

6. Определите тип уравнения $y(u_{xx}-u_{yy}) - 2xu_{xy} - u_y = 0$, приведите к каноническому виду и решите задачу Коши $u(0,y)=\frac{1}{chy}, u_x(0,y)=0$. Исследуйте разрешимость задачи Коши.

7. Эволюцию прямого вихря в вязкой жидкости можно описать азимутальной компонентой уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2}\right) = \nu\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\,\frac{\partial r\ \ \varphi}{\partial r}, \quad v_\varphi|_{t=0} = \frac{\Gamma}{r}$$

где v_φ – азимутальная компонента скорости жидкости, ν – кинематическая вязкость, Γ – завихренность. Найдите автомодельное решение, конечное при $t > 0$.

8. На границе шара радиуса R температура осциллирует как $T(t)=T_0\sin\omega t$. Найдите распределение температуры в шаре как функцию времени. Исследуйте решение при $\omega \gg \chi/R^2$, где χ – температуропроводность.
9. Тонкому стержню длины l сообщили заряд Q. Найдите электростатический потенциал и линейную плотность заряда вдоль стержня. Чему равна плотность заряда на краях стержня?

ЗАДАНИЕ № 3 (сдать до 31-го мая)

10. Форма y(x) упругого стержня длины $2l$ со свободными концами, к которому приложена распределенная сила f(x), описывается уравнением
$$y'''' = f(x), \quad y''(-l) = y''(l) = y'''(-l) = y'''(l) = 0.$$
Найдите функцию Грина и условия разрешимости. Найдите форму стержня в случае $f(x) = \delta(x-l) - 2\delta(x) + \delta(x+l)$.
11. Найдите функцию Грина неоднородного уравнения теплопроводности на поверхности цилиндра радиуса R:
$$\partial_t u = \chi \Delta u + f(z, \varphi, t)$$
Выпишите решение задачи с источником $f = Q\delta(z - Vt)$.
12. Исследуйте симметрию уравнения
$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} = e^u$$
относительно преобразований сдвига и растяжения. Напишите генератор для преобразования, относительно которого уравнение инвариантно.

   а) Сведите к уравнению с коэффициентами, не зависящими от независимой переменной. Проинтегрируйте получившееся уравнение, используя инвариантность относительно растяжений.

   б) Понизьте порядок уравнения.