Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный университет»

Физический факультет

Дисциплина: Электромагнетизм

Зимняя сессия

Приговор будет исполнен: 11.01.2025

Я не несу ответственности за возможные ошибки или некорректность предоставленных ответов на билеты. Используйте их только как вспомогательный материал и обязательно сверяйтесь с официальными источниками.

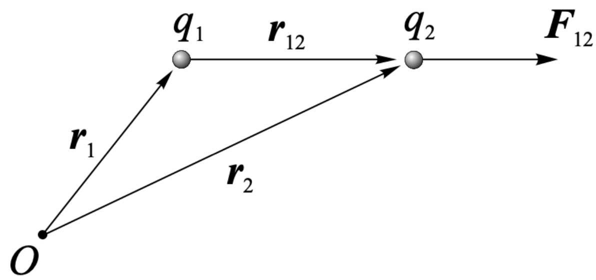
Ответы на вопросы билета

1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции.Поток электрического поля. Теорема Гаусса.

Закон Кулона

Это — экспериментально установленный закон силового взаимодействия двух точечных заряженных тел, неподвижных относительно рассматриваемой системы отсчета, согласно которому:

$$\vec{F}_k = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r_{12}}}{r_{12}}$$



Введем понятие напряженности:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

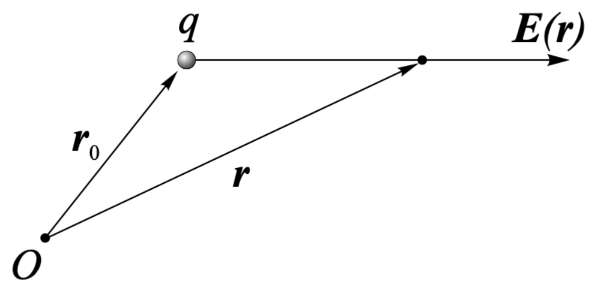
тогда силу Кулона можно перезаписать в виде:

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2)$$

Напряжённость электрического поля

В общем виде напряженность имеет вид:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$



Принцип суперпозиции

Электрическое поле от системы зарядов равно сумме электрических полей от её составляющих:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Поток электрического поля

Если у нас имеется некоторая конечная поверхность S, то поток через эту поверхность вычисляется как поверхностный интеграл

$$\Phi = E_n dS$$

Теорема Гаусса

*Теорема Гаусса:*Поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность определяется суммарным зарядом Q, находящимся внутри этой поверхности, и равняется 4πQ:

$$\oint_S E_n ds = 4\pi Q$$

2. Дивергенция электрического поля. Распределённый заряд. Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

Дивергенция электрического поля

Вспомним теорему Гаусса для потока $\vec{E}$ через замкнутую площадь S

$$\oiint\limits_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q = \iiint\limits_{V} 4\pi \rho dV$$

а по теореме Остроградского-Гаусса

$$\oiint\limits_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = \iiint\limits_{V} div \vec{E} d\vec{V}$$

следует что для $\forall V$:

$$\iiint\limits_{V} div \vec{E} d\vec{V} = 4\pi Q = \iiint\limits_{V} 4\pi \rho dV \Rightarrow div \vec{E} = 4\pi \rho$$

Распределённый заряд

Объемная плотность заряда:

$$dq \stackrel{df}{=} \rho dV$$

Поверхностная плотность:

$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

Линейная плотность:

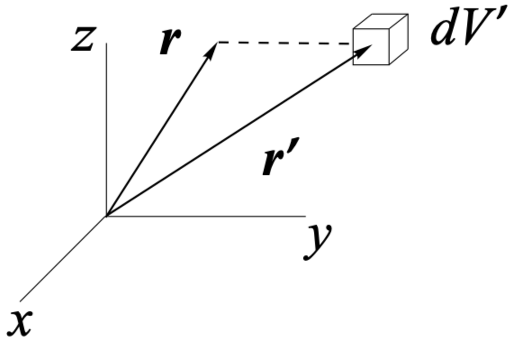
$$dq \stackrel{df}{=} \kappa dl$$

Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

В конечной области пространства с плотностью заряда $\rho(\vec{r})$, по принципу суперпозиции скалярный потенциал этих зарядов равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r'}) dV'}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Представление потенциала в виде интеграла по объему, занятому зарядами, часто называют частным решением уравнения Пуассона.



Для задачи с точечными зарядами интегральная форма не подойдёт, перейдём к сумме. Введём функцию Дирака δ, она задается следующими условиями:

1) при всех $\vec{r} \neq 0$ $\delta(\vec{r}) = 0$;

2) в точке $\vec{r} \neq 0$ имеем $\delta(\vec{r}) = \infty$;

3) интеграл по всему пространству $\int \delta(\vec{r}) dV = 1$

4) $\int f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r_0}) dV = f(\vec{r_0})$

где $f(\vec{r})$ - произвольная непрерывная функция, $\vec{r_0}$ радиус-вектор некоторой фиксированной точки.

Объёмную плотность заряда расположенного в точке $\vec{r} = \vec{r_0}$ можно перезаписать:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r_0})$$

подставляем в предыдущую формулу

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{q\delta(\vec{r} - \vec{r_0}) dV'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

3. Циркуляция и ротор электрического поля. Теорема Стокса. Электрический потенциал. Работа электрического поля. Потенциал точечного заряда.

Циркуляция и ротор электрического поля

Циркуляция векторного поля $\vec{E}$ вдоль контура L

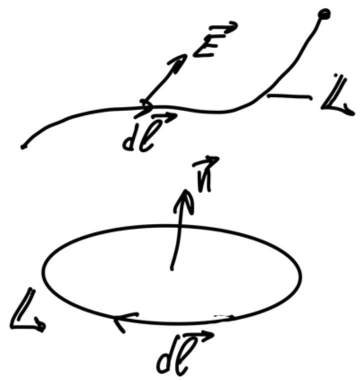
$$\int_L \vec{E} d\vec{l}$$

а по замкнутому контуру

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

или в дифференциальной форме

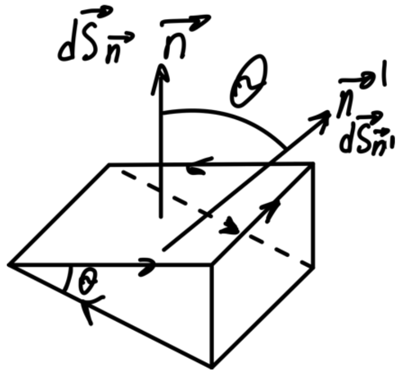
$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$$



Как следствие из теоремы о циркуляции $\vec{E}$ работа при перемещении заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории движения.

Теорема Стокса

$$\oint\limits_{\delta S} \vec{E} d\vec{l} = \iint\limits_{S} \text{rot} \vec{E} d\vec{S}$$



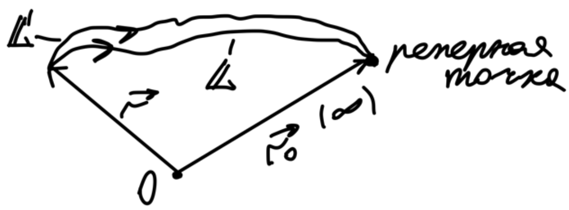
$$(\text{rot}\vec{E})_{\vec{n}'} = \frac{\text{rot}\vec{E}}{\frac{1}{\cos\theta}}$$

где $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{dS_{\vec{n}'}}{dS_{\vec{n}}}$, получим

$$(\text{rot}\vec{E})_{\vec{n}'} = \text{rot}\vec{E} \cdot \cos\theta$$

Электрический потенциал

Рассмотрим скаляроное поле



$$\varphi(\vec{r} \stackrel{df}{=} \int_{\vec{r}}^{\vec{r_0}} \vec{E} d\vec{l}$$

Чтобы определение было корректным, нужно чтобы этот интеграл не зависел от формы L.

Доказательство:

$$\text{rot}\vec{E} = 0 \Rightarrow \forall L \oint\limits_{L} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

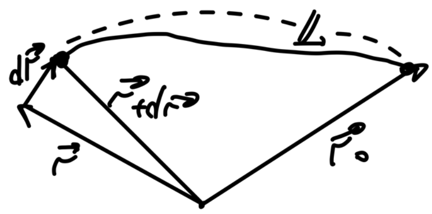
Запишем выражение при обходе $L - L'$ - сначала идем по контуру L, а потом обратно по контуру L' :

$$\oint\limits_{L-L'} \vec{E}d\vec{l} = 0 = \oint\limits_{L} \vec{E}d\vec{l} - \oint\limits_{L'} \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Такие поля называются потенциальными.

Доказали.

Еще свойства потенциала:



$$\varphi(\vec{r}) = \int \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} + \int\limits_{L} \vec{E}d\vec{l}$$

и

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r_0}) = \int\limits_{L} \vec{E}d\vec{l}$$

отсюда получим

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r_0}) - \varphi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}$$

так же используем

$$d\varphi = d\vec{r}\ \nabla\varphi$$

отсюда получим

$$\forall d\vec{r}, \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{r} \Rightarrow \vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0 = -[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\varphi]$$

Работа электрического поля

$$A = \int\limits_L \vec{F} d\vec{l} = \int\limits_L q\vec{E} d\vec{l} = q\left[\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_0}} \vec{E} d\vec{l} - \int_{\vec{r_2}}^{\vec{r_1}} \vec{E} d\vec{l}\right] = q(\varphi_2 - \varphi_2) = qU$$

Потенциал точечного заряда

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}$$

или в общем виде

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

4. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат.

Уравнение Лапласа

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

В сферической системе (r, θ, α) координат

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0$$

В цилиндрической (r, α, z) координат

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0$$

Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат

Предположим, что в декартовых координатах переменные разделяются -это означает, что:

$$\varphi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\Delta\varphi = 0 \Rightarrow X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \Rightarrow Const_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\frac{X''}{X} = C \Rightarrow X'' = CX$$

$$(1)X(x) = \begin{cases} \text{при C} > 0, Ae^{\sqrt{c}x} \\ \text{при C} < 0, Ae^{\pm i\sqrt{c}x} \\ \text{при C} = 0, Ax + B \end{cases}$$

При $\rho \neq 0$. Допустим, что

$$\rho(x, y, z) = \rho \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \text{где X,Y,Z функции вида (1)}$$

Тогда

$$\varphi = A \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$A(X''YZ + XY''Z + XYZ'') = -4\pi\rho_0 XYZ \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

Итог

$$\rho = p_1 + p_2, \Delta\varphi = -4\pi\rho, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2;$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = -4\pi\rho_1 \\ \Delta\varphi_2 = -4\pi\rho_2 \end{cases}$$

5. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат

Пусть $\varphi(r, \theta, \alpha) = R(r) \cdot Y(\theta)$

$$\Delta\varphi(r, \theta, \alpha) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}_{=l(l+1)} + \underbrace{\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dY}{d\theta}\right)}_{=-l(l+1)} = 0$$

При $R(r) \propto r'$
или $R(r) \propto \frac{1}{r^{l+1}}$

$$\frac{1}{R}(r^2R')' = C$$

ищем решение в виде $R(r) \propto r^l$

$$\frac{1}{R}(r^2R')' = \underbrace{l}_{=-(l'+1)} \cdot \underbrace{(l+1)}_{=(-l'-1+1)=(l'+1)l'}$$

При этом $R(r) \propto \frac{1}{r^{l+1}}$ удолетвор. уравнению с той же C
(замена $l' = -(l+1)$)

6. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат

Пусть $\varphi(r, \alpha) = \varphi(r, \alpha)$. Кроме того $\varphi(r, \alpha) = R(z)Y(\alpha)$ (то есть переменные разделяются)

$$Y(\alpha) = e^{\pm im\alpha}$$

$$\varphi(r, \alpha) = R(r)(\sum_i e^{im\alpha}), \text{где m} \in Z$$

Пусть внутри, рассматриваемой области нет зарядов $\Rightarrow \Delta\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=0 \Rightarrow e^{im\alpha}\cdot\frac{1}{r}\left(rR'\right)'+R\cdot\frac{1}{r^2}\left(-m^2e^{im\alpha}\right)=0 \Rightarrow \frac{r(rR')'}{R}=m^2$$

Ищем решение в виде $R(r) \propto r^l$:

$$l^2 = m^2, \text{т.е } l = \pm m. \text{ Т.е } \varphi(r,\alpha) = \left(\frac{C_1}{r^m} + C_2 r^m\right) e^{\pm im\alpha}$$

7. Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля. Поверхностная плотность зарядов. Поле вблизи поверхности металлов. Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал.

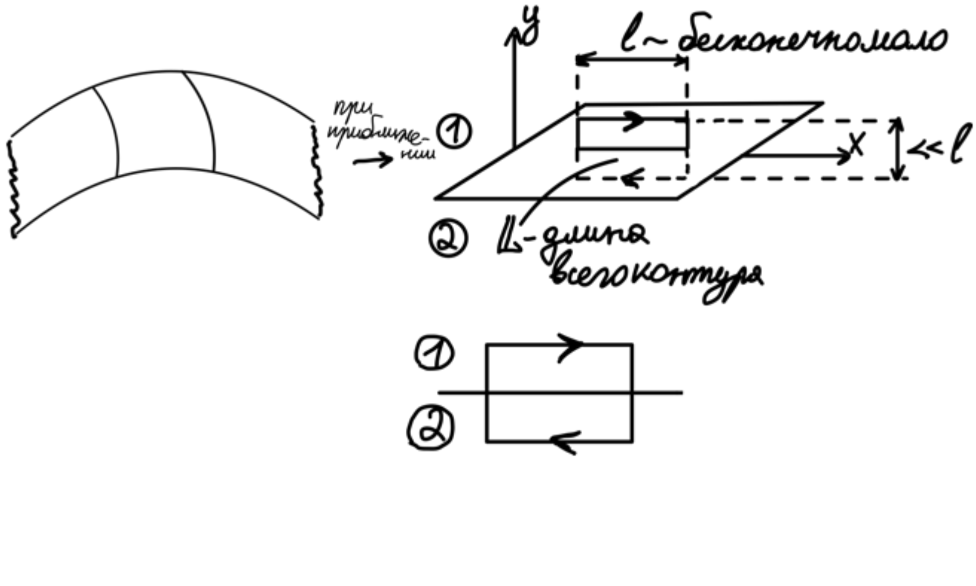
Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля

Тангенциальная компонента

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E}d\vec{l} \leftarrow \text{интегральная форма}$$

По теореме Стокса

$$0 = \iint\limits_{(\forall)S} \mathrm{rot}\vec{E}dS = \oint\limits_{(\forall)S} \vec{E}d\vec{l}$$



$$\oint \vec{E}d\vec{l} = E_x|_1 \cdot l - E_x|_2 \cdot l \Rightarrow E_x|_1 = E_x|_2$$

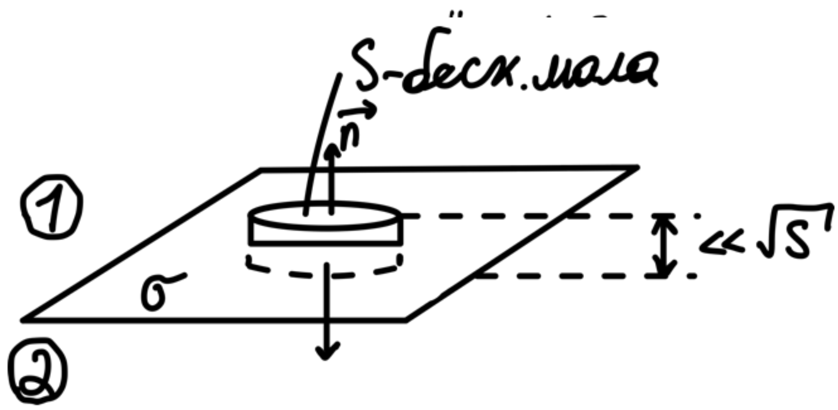
или же

$$E_\tau|_1 = E_\tau|_2$$

Нормальная компонента

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \oiint\limits_{(\forall)S} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint\limits_{(\forall)V} \mathrm{div}\vec{E}dV = 4\pi \iiint\limits_{(\forall)V} \rho dV \Rightarrow \oiint\limits_{(\forall)\delta S} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q$$



$$E_{1n}| \cdot S - E_{2n}| \cdot S = 4\pi Q = 4\pi\rho S$$

или же

$$E_{1n}| - E_{2n}| = 4\pi\rho$$

Поверхностная плотность зарядов(???)

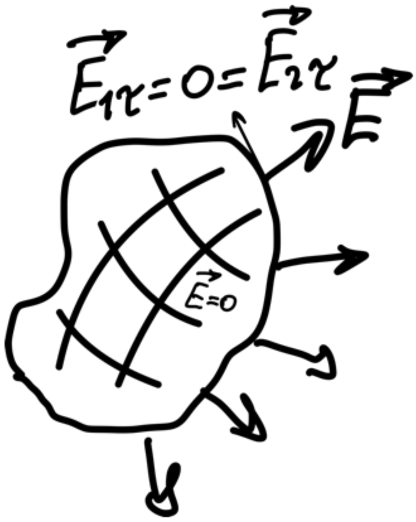
$$dq \overset{df}{=} \sigma dS$$

Поле вблизи поверхности металлов

Надо доказать что поле вблизи металлов равно

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Рассмотрим тангенсальную и нормальную компоненту поля $\vec{E}$ на границе металла



Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника $E_{1n} = 0$ отсюда

$$E_{2n} = 4\pi\sigma$$

Снаружи металла поле $E_{2\tau} = 0$ и из граничных условий

$$E_{1\tau} = 0$$

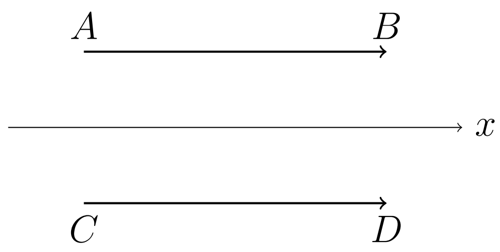
Итоговое поле равно

$$\vec{E}_{2n} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Что и требовалось доказать.

Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал

Можно рассмотреть две точки A и B с одной стороны поверхности и C,D с другой стороны. Найдем напряжение между парами этих точек:



Из граничных условий, что E_τ−непрерывно следует, что:

$$E_{\text{AB}|} = E_{\text{CD}}|$$

потенциал можно выразить через напряженность так:

$$E = -\text{grad}\varphi$$

отсюда получаем, что $\varphi_{\text{AB}}| = \varphi_{\text{CD}}| \Rightarrow \varphi|$ – непрерывно

8. Проводники в электрическом поле. Теорема единственности.

Проводники в электрическом поле

Очень похоже (скорее всего есть одно и тоже) на вопрос: поле вблизи поверхности металлов, ну рассмотрим повторно?

Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника $E_i \equiv 0$ отсюда плотность заряда:

$$\rho_i = \frac{1}{4\pi} \mathrm{div} \vec{E_i} \equiv 0$$

В этой связи говорят, что проводник квазинейтрален. Таким образом, заряды на проводнике могут размещаться только на его поверхности, причем поверхностная плотность зарядов связана с полем $vecE$ вне проводника через граничное условие для E_n.

Если пространство вне проводника свободно от зарядов, то здесь поле $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$ и φ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Из граничных условий мы получаем что:

$$\vec{E_n} = 4\pi\sigma \ , \ \vec{E_\tau} = 0.$$

Заметим, что поле подходит к поверхности проводника по нормали, т.е. поверхность проводника является эквипотенциалью. Это естественно, так как в проводнике потенциал постоянен из-за $\vec{E_i} = 0$

Теорема единственности

Условия теоремы:

1)На каждом проводнике задан либо потенциал, либо заряд,

2)В V нету зарядов;

$\Rightarrow \exists$ единственное решение уравнения Пуассона вида:

$$\vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

Доказательсвто

Пусть $\vec{E_1} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_1$ и $\vec{E_2} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_2$. Достаточно доказать, что:

$$\iiint\limits_V |\vec{E_2}(\vec{r}) - \vec{E_1}(\vec{r})|^2 dV = 0$$

$$\vec{E} := \vec{E_2} - \vec{E_2} \ ; \ \varphi := \varphi_2 - \varphi_1 \ ; \ \vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_2 + \boldsymbol{\nabla}\varphi_1 = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

Всюду в V $\Delta\varphi_1 = 0$ и $\Delta\varphi_2 = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$

Рассмотрим выражение: $\boldsymbol{\nabla}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 + \varphi\underset{\to 0}{\boldsymbol{\nabla}}\varphi = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2$

$$\iiint |\vec{E_2}(\vec{r}) - \vec{E_1}(\vec{r})|^2 dV = \iiint |\vec{E}|^2 dV = \iiint (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 dV = \iiint \boldsymbol{\nabla}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) dV =$$

$$= \iiint\limits_V \mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) dV = \underset{\substack{S_\infty \\ \to 0(\propto \frac{1}{r})}}{\oiint} \varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{S} - \sum_i \underset{S_i}{\oiint} \varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{S} = \sum_i \varphi_i \underset{S_i}{\oiint} (-\boldsymbol{\nabla}\varphi) d\vec{S} =$$

$$\sum_i(\varphi_{2i}-\varphi_{1i})\oiint\limits_{S_i}(\vec{E}_2-\vec{E}_1)d\vec{S}=\sum_i(\varphi_{2i}-\varphi_{1i})\left[\oiint\limits_{S_i}\vec{E}_2d\vec{S}-\oiint\limits_{S_i}\vec{E}_1d\vec{S}\right]=$$

$$=4\pi\sum_i\underset{(1)}{(\varphi_{2i}-\varphi_{1i})}\underset{(2)}{(q_{2i}-q_{1i})}=0$$

По условию теоремы либо (1) = 0, либо (2)=0

Доказано

9. Метод изображения для решения задач электростатики на примере плоской и сферической границ раздела проводника и непроводящего пространства.

Плоская граница