

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Новосибирский государственный университет»

Физический факультет

Дисциплина: Электромагнетизм

Зимняя сессия

Приговор будет исполнен: 11.01.2025

*Я не несу ответственности за возможные ошибки или  
некорректность предоставленных ответов на билеты.  
Используйте их только как вспомогательный материал и  
обязательно сверяйтесь с официальными источниками.*

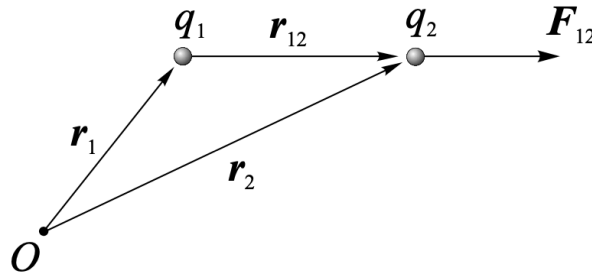
## Ответы на вопросы билета

1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции. Поток электрического поля. Теорема Гаусса.

### Закон Кулона

Это — экспериментально установленный закон силового взаимодействия двух точечных заряженных тел, неподвижных относительно рассматриваемой системы отсчета, согласно которому:

$$\vec{F}_k = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$



Введем понятие напряженности:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

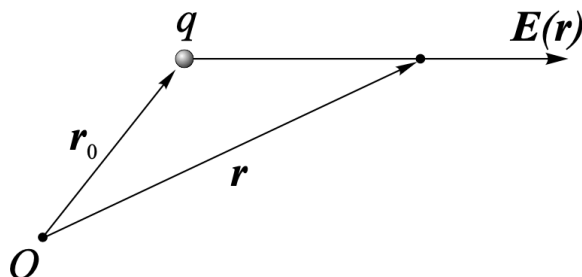
тогда силу Кулона можно перезаписать в виде:

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2)$$

## Напряжённость электрического поля

В общем виде напряжённость имеет вид:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$



## Принцип суперпозиции

Электрическое поле от системы зарядов равно сумме электрических полей от её составляющих:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

## Поток электрического поля

Если у нас имеется некоторая конечная поверхность  $S$ , то поток через эту поверхность вычисляется как поверхностный интеграл

$$\Phi = E_n dS$$

## Теорема Гаусса

*Теорема Гаусса:* Поток вектора  $\vec{E}$  через любую замкнутую поверхность определяется суммарным зарядом  $Q$ , находящимся внутри этой поверхности, и равняется  $4\pi Q$ :

$$\oint_S E_n ds = 4\pi Q$$

## 2. Дивергенция электрического поля. Распределённый заряд. Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

### Дивергенция электрического поля

Вспомним теорему Гаусса для потока  $\vec{E}$  через замкнутую площадь  $S$

$$\oint_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi \rho dV$$

а по теореме Остроградского-Гаусса

$$\oint_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV$$

следует что для  $\forall V$  :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi \rho dV \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

### Распределённый заряд

Объемная плотность заряда:

$$dq \stackrel{df}{=} \rho dV$$

Поверхностная плотность:

$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

Линейная плотность:

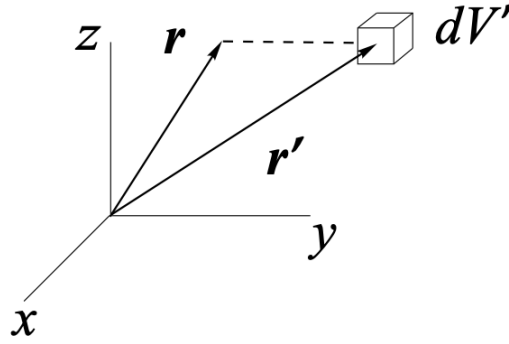
$$dq \stackrel{df}{=} \kappa dl$$

### Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

В конечной области пространства с плотностью заряда  $\rho(\vec{r})$ , по принципу суперпозиции скалярный потенциал этих зарядов равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Представление потенциала в виде интеграла по объему, занятому зарядами, часто называют частным решением уравнения Пуассона.



Для задачи с точечными зарядами интегральная форма не подойдёт, перейдём к сумме. Введём функцию Дирака  $\delta$ , она задается следующими условиями:

- 1) при всех  $\vec{r} \neq 0$   $\delta(\vec{r}) = 0$  ;
- 2) в точке  $\vec{r} = 0$  имеем  $\delta(\vec{r}) = \infty$  ;
- 3) интеграл по всему пространству  $\int \delta(\vec{r}) dV = 1$
- 4)  $\int f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = f(\vec{r}_0)$

где  $f(\vec{r})$  - произвольная непрерывная функция,  $\vec{r}_0$  радиус-вектор некоторой фиксированной точки.

Объёмную плотность заряда расположенного в точке  $\vec{r} = \vec{r}_0$  можно переписать:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

подставляем в предыдущую формулу

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

### 3. Циркуляция и ротор электрического поля. Теорема Стокса. Электрический потенциал. Работа электрического поля. Потенциал точечного заряда.

Циркуляция и ротор электрического поля

Циркуляция векторного поля  $\vec{E}$  вдоль контура  $L$

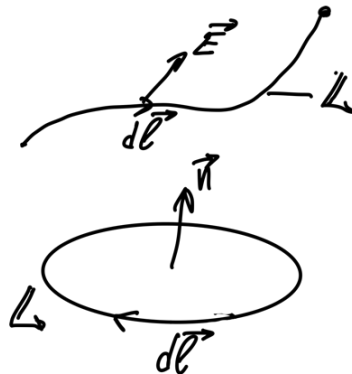
$$\int_L \vec{E} d\vec{l}$$

а по замкнутому контуру

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

или в дифференциальной форме

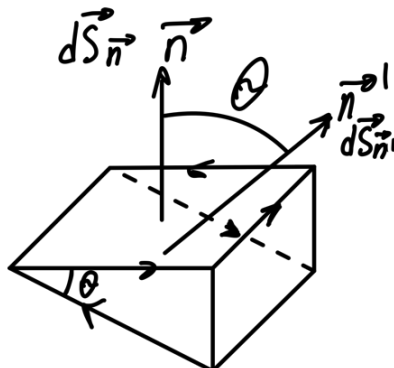
$$\text{rot} \vec{E} = 0$$



Как следствие из теоремы о циркуляции  $\vec{E}$  работа при перемещении заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории движения.

## Теорема Стокса

$$\oint_{\delta S} \vec{E} d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}$$



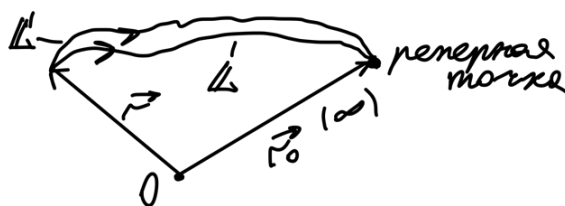
$$(\text{rot} \vec{E})_{\vec{n}'} = \frac{\text{rot} \vec{E}}{\frac{1}{\cos \theta}}$$

где  $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{dS_{\vec{n}'}}{dS_{\vec{n}}}$ , получим

$$(\text{rot} \vec{E})_{\vec{n}'} = \text{rot} \vec{E} \cdot \cos \theta$$

## Электрический потенциал

Рассмотрим скалярное поле



$$\varphi(\vec{r}) \stackrel{df}{=} \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} d\vec{l}$$

Чтобы определение было корректным, нужно чтобы этот интеграл не зависел от формы  $L$ .

*Доказательство:*

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow \forall L \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

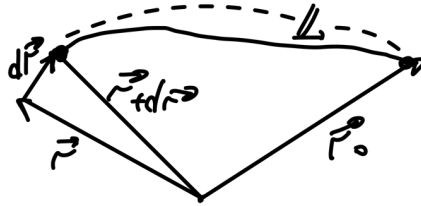
Запишем выражение при обходе  $L - L'$  - сначала идем по контуру  $L$ , а потом обратно по контуру  $L'$  :

$$\oint_{L-L'} \vec{E} d\vec{l} = 0 = \oint_L \vec{E} d\vec{l} - \oint_{L'} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Такие поля называются потенциальными.

*Доказано.*

Еще свойства потенциала:



$$\varphi(\vec{r}) = \int \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} + \int_L \vec{E} d\vec{l}$$

и

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}_0) = \int_L \vec{E} d\vec{l}$$

отсюда получим

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}_0) - \varphi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

так же используем

$$d\varphi = d\vec{r} \nabla \varphi$$

отсюда получим

$$\forall d\vec{r}, \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = -\nabla \varphi d\vec{r} \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\nabla \varphi$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0 = -[\nabla \times \nabla \varphi]$$



## Работа электрического поля

$$A = \int_L \vec{F} d\vec{l} = \int_L q \vec{E} d\vec{l} = q \left[ \int_{r_1}^{r_0} \vec{E} d\vec{l} - \int_{r_2}^{r_1} \vec{E} d\vec{l} \right] = q(\varphi_2 - \varphi_1) = qU$$

## Потенциал точечного заряда

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}$$

или в общем виде

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

## 4. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат.

### Уравнение Лапласа

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

В сферической системе  $(r, \theta, \alpha)$  координат

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

В цилиндрической  $(r, \alpha, z)$  координат

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

### Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат

Предположим, что в декартовых координатах переменные разделяются -это означает, что:

$$\varphi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\Delta \varphi = 0 \Rightarrow X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \Rightarrow Const_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\frac{X''}{X} = C \Rightarrow X'' = CX$$

$$(1) X(x) = \begin{cases} \text{при } C > 0, Ae^{\sqrt{C}x} \\ \text{при } C < 0, Ae^{\pm i\sqrt{C}x} \\ \text{при } C = 0, Ax + B \end{cases}$$

При  $\rho \neq 0$ . Допустим, что

$$\rho(x, y, z) = \rho \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \text{ где } X, Y, Z \text{ функции вида (1)}$$

Тогда

$$\varphi = A \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$A(X''YZ + XY''Z + XYZ'') = -4\pi\rho_0XYZ \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

Итого

$$\rho = p_1 + p_2, \Delta\varphi = -4\pi\rho, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2;$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = -4\pi\rho_1 \\ \Delta\varphi_2 = -4\pi\rho_2 \end{cases}$$

## 5. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат

Пусть  $\varphi(r, \theta, \alpha) = R(r) \cdot Y(\theta)$

$$\Delta\varphi(r, \theta, \alpha) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right)}_{=l(l+1)} + \underbrace{\frac{1}{Y \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right)}_{=-l(l+1)} = 0$$

При  $R(r) \propto r^{l'}$   
или  $R(r) \propto \frac{1}{r^{l'+1}}$

$$\frac{1}{R} (r^2 R')' = C$$

ищем решение в виде  $R(r) \propto r^l$

$$\frac{1}{R} (r^2 R')' = \underbrace{l}_{=-(l'+1)} \cdot \underbrace{(l+1)}_{=(-l'-1+1)=(l'+1)l'}$$

При этом  $R(r) \propto \frac{1}{r^{l'+1}}$  удовлетвор. уравнению с той же C  
(замена  $l' = -(l+1)$ )

## 6. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат

Пусть  $\varphi(r, \alpha) = \varphi(r, \alpha)$ . Кроме того  $\varphi(r, \alpha) = R(z)Y(\alpha)$  (то есть переменные разделяются)

$$Y(\alpha) = e^{\pm im\alpha}$$

$$\varphi(r, \alpha) = R(r) \left( \sum_i e^{im\alpha} \right), \text{ где } m \in Z$$

Пусть внутри, рассматриваемой области нет зарядов  $\Rightarrow \Delta\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 \Rightarrow e^{im\alpha} \cdot \frac{1}{r} (rR')' + R \cdot \frac{1}{r^2} (-m^2 e^{im\alpha}) = 0 \Rightarrow \frac{r(rR')'}{R} = m^2$$

Ищем решение в виде  $R(r) \propto r^l$ :

$$l^2 = m^2, \text{ т.е. } l = \pm m. \text{ Т.е. } \varphi(r, \alpha) = \left( \frac{C_1}{r^m} + C_2 r^m \right) e^{\pm im\alpha}$$

**7. Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля. Поверхностная плотность зарядов. Поле вблизи поверхности металлов. Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал.**

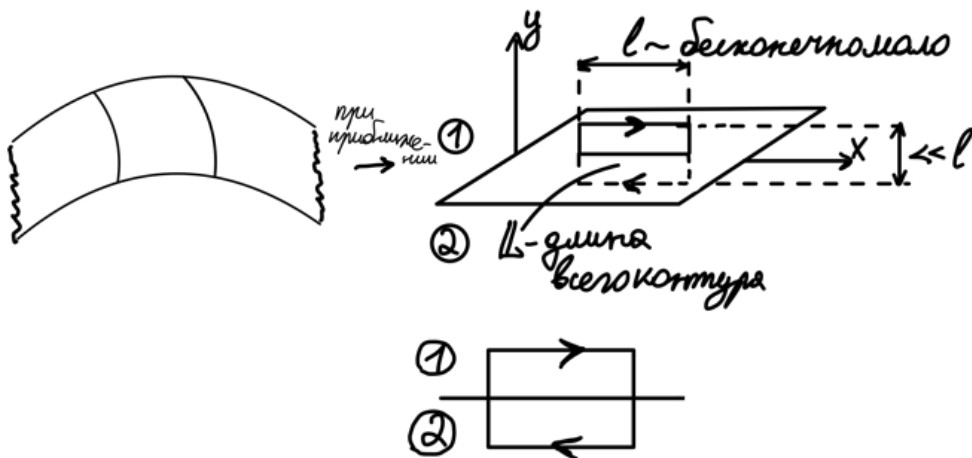
Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля

*Тангенциальная компонента*

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E} d\vec{l} \leftarrow \text{интегральная форма}$$

По теореме Стокса

$$0 = \iint_{(\forall)S} \text{rot} \vec{E} dS = \oint_{(\forall)S} \vec{E} d\vec{l}$$



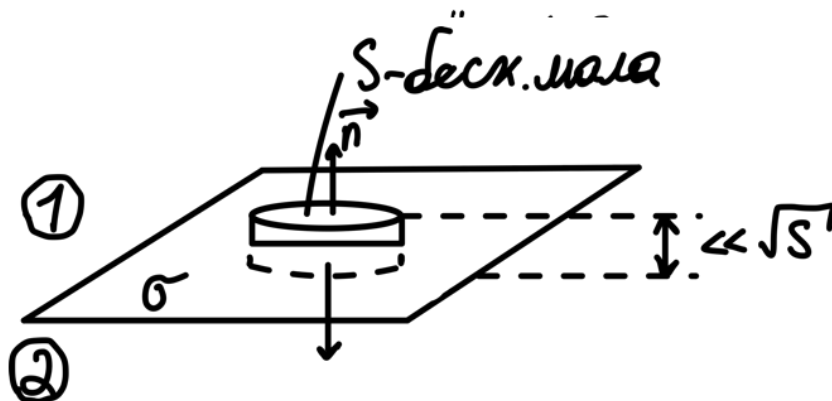
$$\oint \vec{E} d\vec{l} = E_x|_1 \cdot l - E_x|_2 \cdot l \Rightarrow E_x|_1 = E_x|_2$$

или же

$$E_\tau|_1 = E_\tau|_2$$

Нормальная компонента

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho &\Rightarrow \oint\oint_{(\forall)S} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q \Rightarrow \\ &\Rightarrow \iiint_{(\forall)V} \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi \iiint_{(\forall)V} \rho dV \Rightarrow \oint\oint_{(\forall)\delta S} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q \end{aligned}$$



$$E_{1n}| \cdot S - E_{2n}| \cdot S = 4\pi Q = 4\pi\rho S$$

или же

$$E_{1n}| - E_{2n}| = 4\pi\rho$$

Поверхностная плотность зарядов(???)

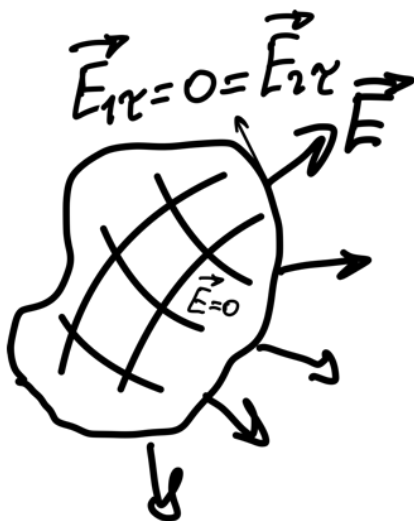
$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

## Поле вблизи поверхности металлов

Надо доказать что поле вблизи металлов равно

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Рассмотрим тангенсальную и нормальную компоненту поля  $\vec{E}$  на границе металла



Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника  $E_{1n} = 0$  отсюда

$$E_{2n} = 4\pi\sigma$$

Снаружи металла поле  $E_{2\tau} = 0$  и из граничных условий

$$E_{1\tau} = 0$$

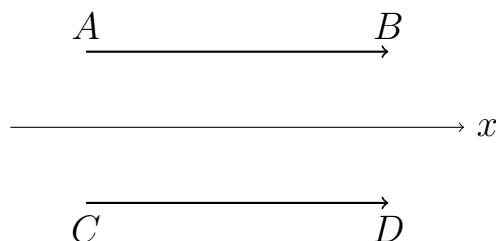
Итоговое поле равно

$$\vec{E}_{2n} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Что и требовалось доказать.

## Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал

Можно рассмотреть две точки А и В с одной стороны поверхности и С, D с другой стороны. Найдем напряжение между парами этих точек:



Из граничных условий, что  $E_\tau$  — непрерывно следует, что:

$$E_{AB}| = E_{CD}|$$

потенциал можно выразить через напряженность так:

$$E = -\text{grad}\varphi$$

отсюда получаем, что  $\varphi_{AB}| = \varphi_{CD}| \Rightarrow \varphi|$  — непрерывно

## 8. Проводники в электрическом поле. Теорема единственности.

### Проводники в электрическом поле

Очень похоже (скорее всего есть одно и тоже) на вопрос: поле вблизи поверхности металлов, ну рассмотрим повторно?



Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника  $E_i \equiv 0$  отсюда плотность заряда:

$$\rho_i = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E}_i \equiv 0$$

В этой связи говорят, что проводник квазинейтрален. Таким образом, заряды на проводнике могут размещаться только на его поверхности, причем поверхностная плотность зарядов связана с полем  $\operatorname{vec} E$  вне проводника через граничное условие для  $E_n$ .

Если пространство вне проводника свободно от зарядов, то здесь поле  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  и  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

Из граничных условий мы получаем что:

$$\vec{E}_n = 4\pi\sigma, \quad \vec{E}_\tau = 0.$$

Заметим, что поле подходит к поверхности проводника по нормали, т.е. поверхность проводника является эквипотенциалью. Это естественно, так как в проводнике потенциал постоянен из-за  $\vec{E}_i = 0$

## Теорема единственности

*Условия теоремы:*

- 1) На каждом проводнике задан либо потенциал, либо заряд,
  - 2) В  $V$  нету зарядов;
- $\Rightarrow \exists$  единственное решение уравнения Пуассона вида:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

*Доказательство*

Пусть  $\vec{E}_1 = -\nabla \varphi_1$  и  $\vec{E}_2 = -\nabla \varphi_2$ . Достаточно доказать, что:

$$\iiint_V |\vec{E}_2(\vec{r}) - \vec{E}_1(\vec{r})|^2 dV = 0$$

$$\vec{E} := \vec{E}_2 - \vec{E}_1; \quad \varphi := \varphi_2 - \varphi_1; \quad \vec{E} = -\nabla \varphi_2 + \nabla \varphi_1 = -\nabla \varphi$$

Всюду в  $V$   $\Delta \varphi_1 = 0$  и  $\Delta \varphi_2 = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0$

Рассмотрим выражение:  $\nabla(\varphi \nabla \varphi) = (\nabla \varphi)^2 + \varphi \nabla \varphi \xrightarrow{\rightarrow 0} (\nabla \varphi)^2$

$$\begin{aligned} \iiint_V |\vec{E}_2(\vec{r}) - \vec{E}_1(\vec{r})|^2 dV &= \iiint_V |\vec{E}|^2 dV = \iiint_V (\nabla \varphi)^2 dV = \iiint_V \nabla(\varphi \nabla \varphi) dV = \\ &= \iiint_V \operatorname{div}(\varphi \nabla \varphi) dV = \oint_{S_\infty} \varphi \nabla \varphi d\vec{S} - \sum_i \oint_{S_i} \varphi \nabla \varphi d\vec{S} = \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} (-\nabla \varphi) d\vec{S} = \\ &\quad \rightarrow 0 (\propto \frac{1}{r}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) \oint_{S_i} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) d\vec{S} &= \sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) \left[ \oint_{S_i} \vec{E}_2 d\vec{S} - \oint_{S_i} \vec{E}_1 d\vec{S} \right] = \\ &= 4\pi \sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) (q_{2i} - q_{1i}) = 0\end{aligned}$$

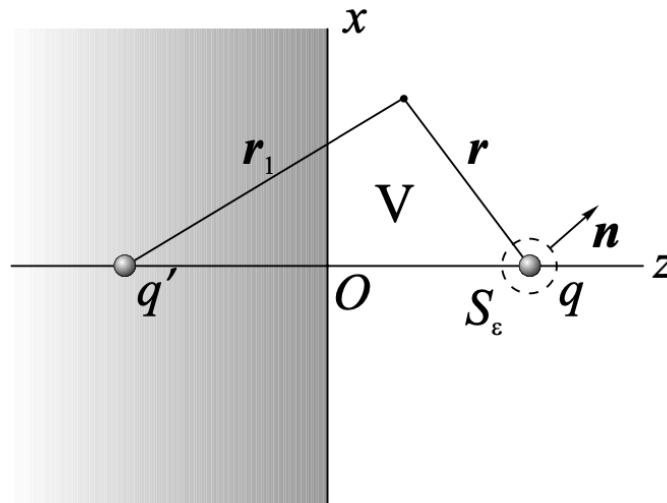
По условию теоремы либо (1) = 0, либо (2)=0

*Доказано*

## 9. Метод изображения для решения задач электростатики на примере плоской и сферической границ раздела проводника и непроводящего пространства.

### *Плоская граница*

Точечный заряд  $q$ , находящийся на расстоянии  $h$  от проводящего полупространства. Определить поле в свободном полупространстве и на этой основе — плотность зарядов, индуцированных зарядом  $q$  на поверхности проводника.



В проводящем полупространстве поле равно нулю, постоянный потенциал можно принять за ноль, будем искать поле только в области  $z > 0$  с выкинутой точкой. Искомое поле удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0$$

и граничным условиям

$$\varphi|_{z=0} = 0, \quad \oint_{S_\varepsilon} E_n dS = 4\pi Q$$

где  $S_\varepsilon$  сфера малого радиуса с центром в точке расположения заряда  $q$

В проводящем полупространстве будет наводиться заряд  $q' = -q$ . Тогда потенциал и электрическое поле, созданные зарядом  $q$  фиктивным зарядом  $q'$ , в правом полупространстве создают искомое поле:

$$\varphi = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_1}$$

Действительно, эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в области  $z > 0$  как потенциал двух точечных зарядов, лежащих вне области. Во-вторых,  $\varphi|_{z=0} = 0$ , так как для точек плоскости  $r$  и  $r_1$  равны. В-третьих, поле, созданное зарядом  $q'$ , через поверхность  $S_\varepsilon$  создает поток, равный нулю (по теореме Гаусса), а поле от точечного заряда  $q$  обеспечивает выполнение соответствующего граничного условия.

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{|\vec{r}|} - \frac{q}{|\vec{r}_1|}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

и

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \frac{q}{|\vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

Таким образом, задача решена.

*Точечный заряд вне проводящего шара*

Заряд  $q$  на расстоянии  $l + x$  от центра шара, а потенциал шара принят равным нулю. Искомый потенциал в произвольной точке  $P$  вне шара в этом случае

