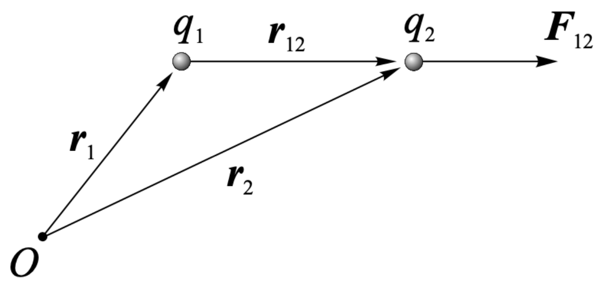
1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции.Поток электрического поля. Теорема Гаусса.

Закон Кулона

Это — экспериментально установленный закон силового взаимодействия двух точечных заряженных тел, неподвижных относительно рассматриваемой системы отсчета, согласно которому:

$$\vec{F_k} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r_{12}}}{r_{12}}$$



Введем понятие напряженности:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

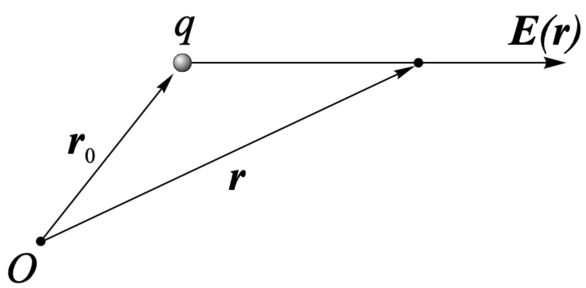
тогда силу Кулона можно перезаписать в виде:

$$\vec{F}_{12} = q_2\vec{E}_1(\vec{r}_2)$$

Напряжённость электрического поля

В общем виде напряженность имеет вид:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$



Принцип суперпозиции

Электрическое поле от системы зарядов равно сумме электрических полей от её составляющих:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Поток электрического поля

Если у нас имеется некоторая конечная поверхность S, то поток через эту поверхность вычисляется как поверхностный интеграл

$$\Phi = E_n dS$$

Теорема Гаусса

Теорема Гаусса: Поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность определяется суммарным зарядом Q, находящимся внутри этой поверхности, и равняется 4πQ:

$$\oint_S E_n ds = 4\pi Q$$

2. Дивергенция электрического поля. Распределённый заряд. Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

Дивергенция электрического поля

Вспомним теорему Гаусса для потока $\vec{E}$ через замкнутую площадь S

$$\oiint_{\delta V} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi\rho dV$$

а по теореме Остроградского-Гаусса

$$\oiint_{\delta V} \vec{E}d\vec{S} = \iiint_V div\vec{E}d\vec{V}$$

следует что для $\forall V$:

$$\iiint_V div\vec{E}d\vec{V} = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi\rho dV \Rightarrow div\vec{E} = 4\pi\rho$$

Распределённый заряд

Объемная плотность заряда:

$$dq \stackrel{df}{=} \rho dV$$

Поверхностная плотность:

$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

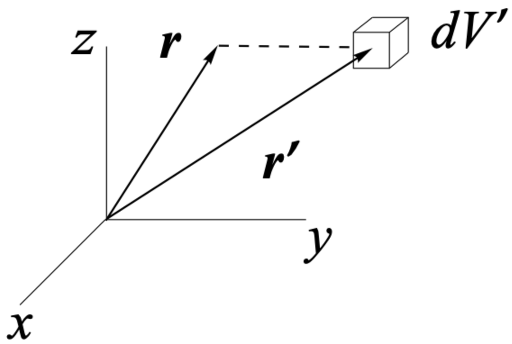
Линейная плотность:

$$dq \stackrel{df}{=} \kappa dl$$

Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

В конечной области пространства с плотностью заряда $\rho(\vec{r})$, по принципу суперпозиции скалярный потенциал этих зарядов равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r'})dV'}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$



Представление потенциала в виде интеграла по объему, занятому зарядами, часто называют частным решением уравнения Пуассона.

Для задачи с точечными зарядами интегральная форма не подойдёт, перейдём к сумме. Введём функцию Дирака δ, она задается следующими условиями:

1) при всех $\vec{r} \neq 0$ $\delta(\vec{r}) = 0$;

2) в точке $\vec{r} \neq 0$ имеем $\delta(\vec{r}) = \infty$;

3) интеграл по всему пространству $\int \delta(\vec{r})dV = 1$

4) $\int f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r_0})dV = f(\vec{r_0})$

где $f(\vec{r})$ - произвольная непрерывная функция, $\vec{r_0}$ радиус-вектор некоторой фиксированной точки.

Объёмную плотность заряда расположенного в точке $\vec{r} = \vec{r_0}$ можно перезаписать:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r_0})$$

подставляем в предыдущую формулу

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{q\delta(\vec{r} - \vec{r_0})dV'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

3. Циркуляция и ротор электрического поля. Теорема Стокса. Электрический потенциал. Работа электрического поля. Потенциал точечного заряда.

Циркуляция и ротор электрического поля

Циркуляция векторного поля $\vec{E}$ вдоль контура L

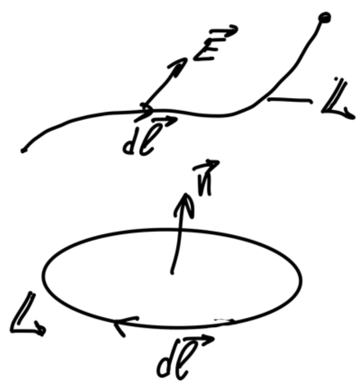
$$\int\limits_L \vec{E}d\vec{l}$$

а по замкнутому контуру

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

или в дифференциальной форме

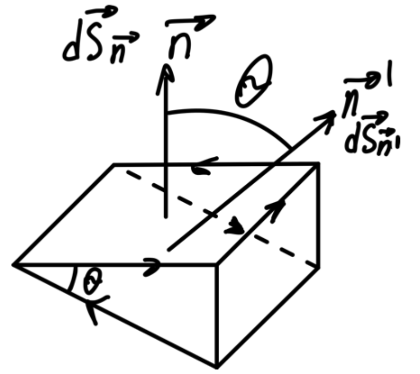
$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$$



Как следствие из теоремы о циркуляции $\vec{E}$ работа при перемещении заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории движения.

Теорема Стокса

$$\oint\limits_{\delta S} \vec{E} d\vec{l} = \iint\limits_{S} \mathrm{rot}\vec{E} d\vec{S}$$



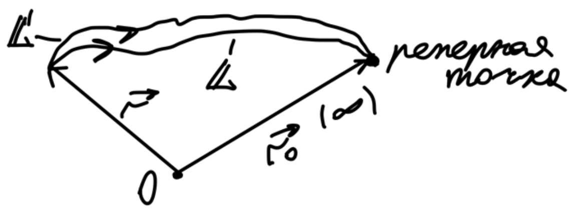
$$(\mathrm{rot}\vec{E})_{\vec{n}'} = \frac{\mathrm{rot}\vec{E}}{\frac{1}{\cos\theta}}$$

где $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{dS_{\vec{n}'}}{dS_{\vec{n}}}$, получим

$$(\mathrm{rot}\vec{E})_{\vec{n}'} = \mathrm{rot}\vec{E} \cdot \cos\theta$$

Электрический потенциал

Рассмотрим скаляроное поле



$$\varphi(\vec{r}) \stackrel{df}{=} \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} d\vec{l}$$

Чтобы определение было корректным, нужно чтобы этот интеграл не зависел от формы L.

Доказательство:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0 \Rightarrow \forall L \oint\limits_{L} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

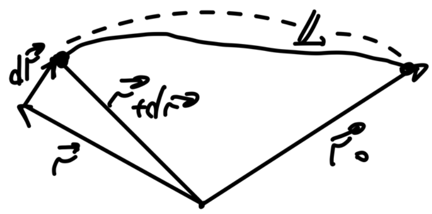
Запишем выражение при обходе $L - L'$ - сначала идем по контуру L, а потом обратно по контуру L' :

$$\oint\limits_{L-L'} \vec{E}d\vec{l} = 0 = \oint\limits_{L} \vec{E}d\vec{l} - \oint\limits_{L'} \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Такие поля называются потенциальными.

Доказано.

Еще свойства потенциала:



$$\varphi(\vec{r}) = \int \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} + \int\limits_{L} \vec{E}d\vec{l}$$

и

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}_0) = \int\limits_{L} \vec{E}d\vec{l}$$

отсюда получим

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}_0) - \varphi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}$$

так же используем

$$d\varphi = d\vec{r}\ \nabla\varphi$$

отсюда получим

$$\forall d\vec{r}, \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{r} \Rightarrow \vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0 = -[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\varphi]$$

Работа электрического поля

$$A = \int\limits_L \vec{F} d\vec{l} = \int\limits_L q\vec{E} d\vec{l} = q\left[\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_0}} \vec{E} d\vec{l} - \int_{\vec{r_2}}^{\vec{r_1}} \vec{E} d\vec{l}\right] = q(\varphi_2 - \varphi_2) = qU$$

Потенциал точечного заряда

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}$$

или в общем виде

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

4. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат.

Уравнение Лапласа

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

В сферической системе (r, θ, α) координат

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

В цилиндрической (r, α, z) координат

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат

Предположим, что в декартовых координатах переменные разделяются -это означает, что:

$$\varphi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\Delta \varphi = 0 \Rightarrow X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \Rightarrow Const_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\frac{X''}{X} = C \Rightarrow X'' = CX$$

$$(1) X(x) = \begin{cases} \text{при C} > 0, Ae^{\sqrt{c}x} \\ \text{при C} < 0, Ae^{\pm i\sqrt{c}x} \\ \text{при C} = 0, Ax + B \end{cases}$$

При $\rho \neq 0$. Допустим, что

$$\rho(x, y, z) = \rho \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \text{где X,Y,Z функции вида (1)}$$

Тогда

$$\varphi = A \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$A(X''YZ + XY''Z + XYZ'') = -4\pi\rho_0 XYZ \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

Итог

$$\rho = p_1 + p_2, \Delta\varphi = -4\pi\rho, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2;$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = -4\pi\rho_1 \\ \Delta\varphi_2 = -4\pi\rho_2 \end{cases}$$

5. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат

Пусть $\varphi(r, \theta, \alpha) = R(r) \cdot Y(\theta)$

$$\Delta\varphi(r, \theta, \alpha) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right)}_{=l(l+1)} + \underbrace{\frac{1}{Y \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dY}{d\theta}\right)}_{=-l(l+1)} = 0$$

При $R(r) \propto r'$
или $R(r) \propto \frac{1}{r^{l+1}}$

$$\frac{1}{R}(r^2R')' = C$$

ищем решение в виде $R(r) \propto r^l$

$$\frac{1}{R}(r^2R')' = \underset{=-(l'+1)}{l} \cdot \underset{=(-l'-1+1)=(l'+1)l'}{(l+1)}$$

При этом $R(r) \propto \frac{1}{r^{l+1}}$ удолетвор. уравнению с той же С
(замена $l' = -(l+1)$)

6. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат

Пусть $\varphi(r, \alpha) = \varphi(r, \alpha)$. Кроме того $\varphi(r, \alpha) = R(z)Y(\alpha)$ (то есть переменные разделяются)

$$Y(\alpha) = e^{\pm im\alpha}$$

$$\varphi(r, \alpha) = R(r)(\sum_i e^{im\alpha}), \text{где m} \in Z$$

Пусть внутри, рассматриваемой области нет зарядов $\Rightarrow \Delta\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0 \Rightarrow e^{im\alpha} \cdot \frac{1}{r}\left(rR'\right)' + R \cdot \frac{1}{r^2}\left(-m^2 e^{im\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \frac{r(rR')'}{R} = m^2$$

Ищем решение в виде $R(r) \propto r^l$:

$$l^2 = m^2, \text{т.е } l = \pm m. \text{ Т.е } \varphi(r, \alpha) = \left(\frac{C_1}{r^m} + C_2 r^m\right) e^{\pm im\alpha}$$

7. Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля. Поверхностная плотность зарядов. Поле вблизи поверхности металлов. Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал.

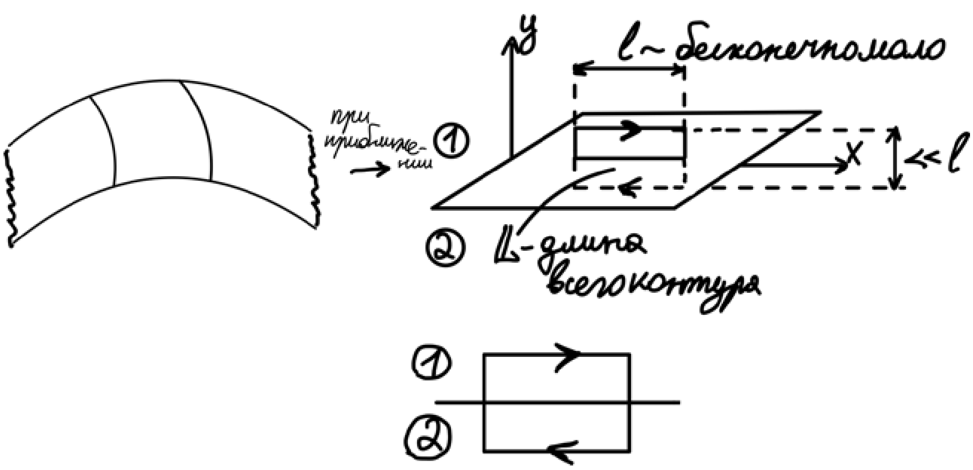
Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля

Тангенциальная компонента

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E}d\vec{l} \leftarrow \text{интегральная форма}$$

По теореме Стокса

$$0 = \iint\limits_{(\forall)S} \mathrm{rot}\vec{E}dS = \oint\limits_{(\forall)S} \vec{E}d\vec{l}$$



$$\oint \vec{E}d\vec{l} = E_x|_1 \cdot l - E_x|_2 \cdot l \Rightarrow E_x|_1 = E_x|_2$$

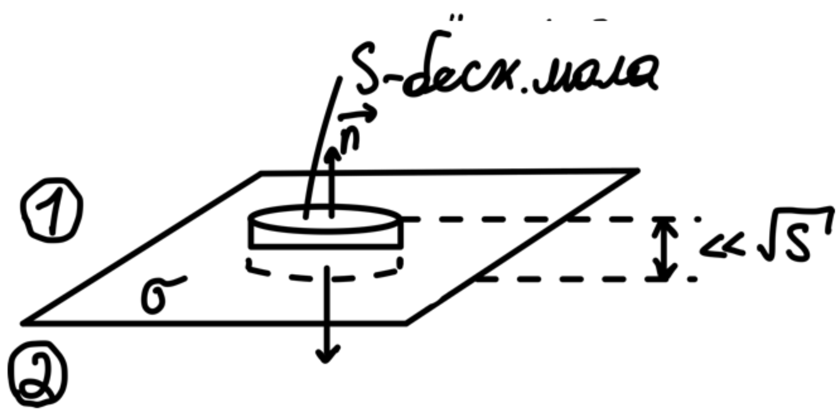
или же

$$E_\tau|_1 = E_\tau|_2$$

Нормальная компонента

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \oiint\limits_{(\forall)S} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint\limits_{(\forall)V} \mathrm{div}\vec{E}dV = 4\pi \iiint\limits_{(\forall)V} \rho dV \Rightarrow \oiint\limits_{(\forall)\delta S} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q$$



$$E_{1n}| \cdot S - E_{2n}| \cdot S = 4\pi Q = 4\pi\rho S$$

или же

$$E_{1n}| - E_{2n}| = 4\pi\rho$$

Поверхностная плотность зарядов(???)

$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

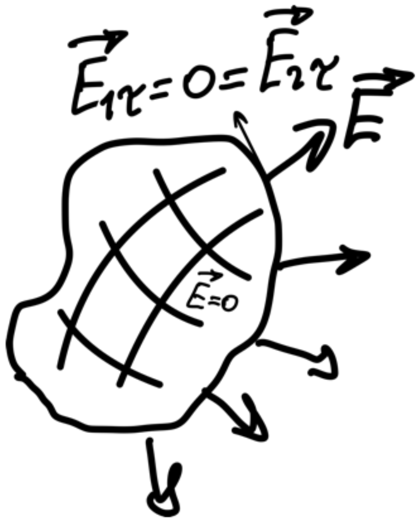
Поле вблизи поверхности металлов

Надо доказать что поле вблизи металлов равно

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Рассмотрим тангенсальную и нормальную компоненту поля $\vec{E}$ на границе металла

Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника $E_{1n} = 0$ отсюда



$$E_{2n} = 4\pi\sigma$$

Снаружи металла поле $E_{2\tau} = 0$ и из граничных условий

$$E_{1\tau} = 0$$

Итоговое поле равно

$$\vec{E}_{2n} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Что и требовалось доказать.

Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал

Можно рассмотреть две точки A и B с одной стороны поверхности и C,D с другой стороны. Найдем напряжение между парами этих точек:

Из граничных условий, что E_τ−непрерывно следует, что:

$$E_{\mathrm{AB}|} = E_{\mathrm{CD}}|$$

потенциал можно выразить через напряженность так:

$$E = -\mathrm{grad}\varphi$$

отсюда получаем, что $\varphi_{\mathrm{AB}}| = \varphi_{\mathrm{CD}}| \Rightarrow \varphi|$ − непрерывно

8. Проводники в электрическом поле. Теорема единственности.

Проводники в электрическом поле

Очень похоже (скорее всего есть одно и тоже) на вопрос: поле вблизи поверхности металлов, ну рассмотрим повторно?

Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника $E_i \equiv 0$ отсюда плотность заряда:

$$\rho_i = \frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\vec{E}_i \equiv 0$$

В этой связи говорят, что проводник квазинейтрален. Таким образом, заряды на проводнике могут размещаться только на его поверхности, причем поверхностная плотность зарядов связана с полем $vecE$ вне проводника через граничное условие для E_n.

Если пространство вне проводника свободно от зарядов, то здесь поле $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$ и φ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Из граничных условий мы получаем что:

$$\vec{E}_n = 4\pi\sigma \ , \ \vec{E}_\tau = 0.$$

Заметим, что поле подходит к поверхности проводника по нормали, т.е. поверхность проводника является эквипотенциалью. Это естественно, так как в проводнике потенциал постоянен из-за $\vec{E}_i = 0$

Теорема единственности

Условия теоремы:

1)На каждом проводнике задан либо потенциал, либо заряд,

2)В V нету зарядов;

$\Rightarrow \exists$ единственное решение уравнения Пуассона вида:

$$\vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

Доказательсвто

Пусть $\vec{E_1} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_1$ и $\vec{E_2} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_2$. Достаточно доказать, что:

$$\iiint\limits_V |\vec{E_2}(\vec{r}) - \vec{E_1}(\vec{r})|^2 dV = 0$$

$$\vec{E} := \vec{E_2} - \vec{E_2} \ ; \ \varphi := \varphi_2 - \varphi_1 \ ; \ \vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_2 + \boldsymbol{\nabla}\varphi_1 = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

Всюду в V $\Delta\varphi_1 = 0$ и $\Delta\varphi_2 = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$

Рассмотрим выражение: $\boldsymbol{\nabla}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 + \varphi\underset{\to 0}{\boldsymbol{\nabla}}\varphi = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2$

$$\iiint |\vec{E_2}(\vec{r}) - \vec{E_1}(\vec{r})|^2 dV = \iiint |\vec{E}|^2 dV = \iiint (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 dV = \iiint \boldsymbol{\nabla}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) dV =$$

$$= \iiint\limits_V \operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) dV = \underset{\to 0 (\propto \frac{1}{r})}{\underbrace{\oiint\limits_{S_\infty} \varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{S}}} - \sum_i \oiint\limits_{S_i} \varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{S} = \sum_i \varphi_i \oiint\limits_{S_i} (-\boldsymbol{\nabla}\varphi) d\vec{S} =$$

$$\sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) \oiint\limits_{S_i} (\vec{E_2} - \vec{E_1}) d\vec{S} = \sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) \left[\oiint\limits_{S_i} \vec{E_2} d\vec{S} - \oiint\limits_{S_i} \vec{E_1} d\vec{S} \right] =$$

$$= 4\pi \sum_i \underset{(1)}{(\varphi_{2i} - \varphi_{1i})} \underset{(2)}{(q_{2i} - q_{1i})} = 0$$

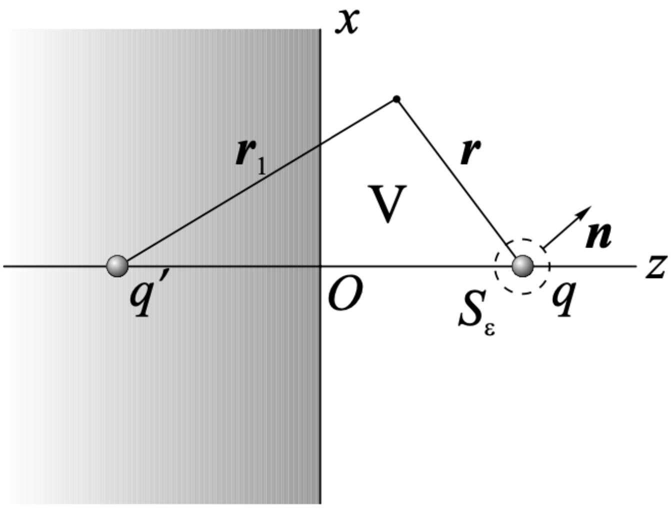
По условию теоремы либо (1) = 0, либо (2)=0

Доказано

9. Метод изображения для решения задач электростатики на примере плоской и сферической границ раздела проводника и непроводящего пространства.

Плоская граница

Точечный заряд q , находящийся на расстоянии h от проводящего полупространства. Определить поле в свободном полупространстве и на этой основе — плотность зарядов, индуцированных зарядом q на поверхности проводника.



В проводящем полупространстве поле равно нулю, постоянный потенциал можно принять за ноль, будем искать поле только в области $z > 0$ с выкинутой точкой. Искомое поле удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0$$

и граничным условиям

$$\varphi|_{z=0} = 0 \ , \ \oint\limits_{S_\varepsilon} E_n dS = 4\pi Q$$

где S_ε сфера малого радиуса с центром в точке расположения заряда q

В проводящем полупространстве будет наводится заряд $q' = -q$. Тогда потенциал и электрическое поле, созданные зарядом q фиктивным зарядом q' ,в правом полупространстве создают искомое поле:

$$\varphi = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_1}$$

Действительно, эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в области $z > 0$ как потенциал двух точечных зарядов, лежащих вне области. Во-вторых, $\varphi|_{z=0} = 0$, так как для точек плоскости r и r_1 равны.

В-третьих, поле, созданное зарядом q', через поверхность $S\varepsilon$ создает поток, равный нулю (по теореме Гаусса), а поле от точечного заряда q обеспечивает выполнение соответствующего граничного условия.

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{|\vec{r}|} - \dfrac{q}{|\vec{r_1}|}, \; z \geq 0 \\ \qquad\qquad 0, \text{ z<0} \end{cases}$$

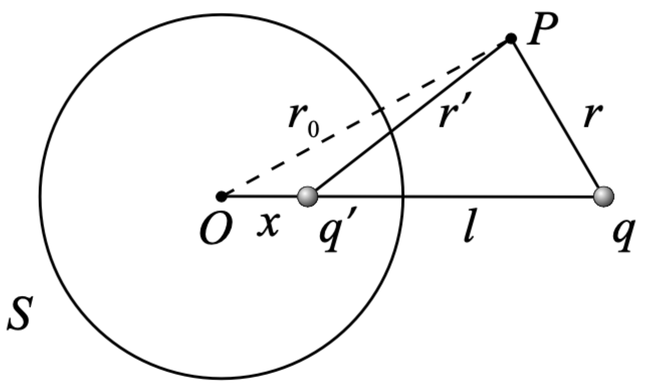
и

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{|\vec{r}|^2}\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \dfrac{q}{|\vec{r_1}|^2}\dfrac{\vec{r_1}}{|\vec{r_1}|}, \; z \geq 0 \\ \qquad\qquad 0, \text{ z<0} \end{cases}$$

Таким образом, задача решена.

Для сферической границы

Заряд q на расстоянии $l + x$ от центра шара, а потенциал шара принят равным нулю.



Искомый потенциал в произвольной точке P вне шара в этом случае:

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}$$

где $q' = -q\frac{a}{l}$

Решение удовлетворяет уравнению Лапласа в своей области определения, имеет нужную особенность вблизи точечного заряда q и удовлетворяет граничным условиям ($r_0/r'_0 = l/a$), обращаясь в нуль.

Рассмотрим второй вариант — точечный заряд q рядом с шаром, несущим заряд Q (при этом постоянный потенциал шара не определен). В этом случае к существующей системе зарядов q, q' необходимо добавить фиктивный заряд, расположенный в центре шара:

$$q'' = Q - q' = Q - q\frac{a}{l}$$

тогда

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r_*}$$

потенциал шара при этом:

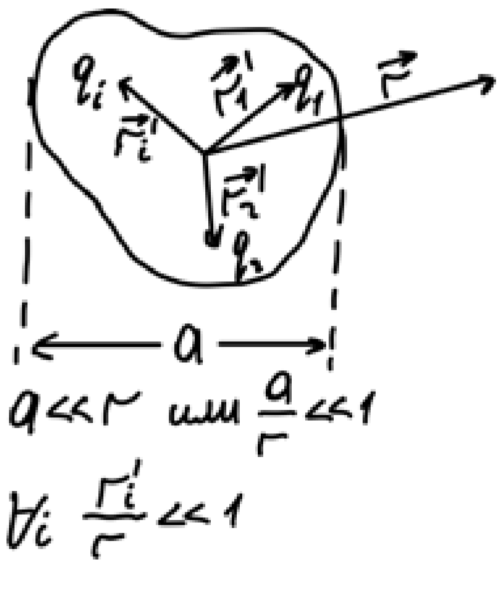
$$\varphi(P) = \varphi|_S = \frac{q}{r_0} + \frac{q'}{r'_0} + \frac{q''}{a} \Rightarrow \varphi|_0 = \frac{q''}{a} = \frac{Q}{a} + \frac{q}{l}$$

Таким образом, задача решена.

10. Электрический диполь. Потенциал и поле диполя.

Электрический диполь

Пусть система зарядов занимает ограниченную область пространства с характерным размером a, причем начало координат находится внутри этой области.



Распишем потенциал точечных зарядов:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|} =: \Sigma \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Используем разложение:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + (-\vec{r}') \ \nabla \frac{1}{r} + ... = \frac{1}{r} + (-r')(-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}) + ... = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3}$$

получаем

$$\varphi = \Sigma q \frac{1}{r} + \Sigma q \vec{r}' \frac{\vec{r}}{r^3} + ... = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3} + ...$$

где
Дипольный момент- $\vec{d} := \sum\limits_i q_i \vec{r_i'}$
Полный заряд системы-$Q = \sum\limits_i q_i$
Дипольный член в сферических координатах($\vec{e_z} \uparrow\uparrow \vec{d}$):

$$\varphi(r,\theta) = \frac{d}{r^2}\cos\theta$$

Потенциал и поле диполя

Из прошлого пункта:

$$\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3}$$

Найдем поле диполя:

$$\vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi = -\boldsymbol{\nabla}\left((\vec{d}\vec{r})\frac{1}{r^3})\right) = -\boldsymbol{\nabla}\left((\overset{\downarrow}{\vec{d}}\vec{r})\frac{1}{r^3}\right) - \boldsymbol{\nabla}\left((\vec{d}\vec{r})\frac{\overset{\downarrow}{1}}{r^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d}\vec{r}\right) - (\vec{d}\vec{r})\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r^3} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3\frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^4}\boldsymbol{\nabla}\vec{r} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3\frac{(\vec{d}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

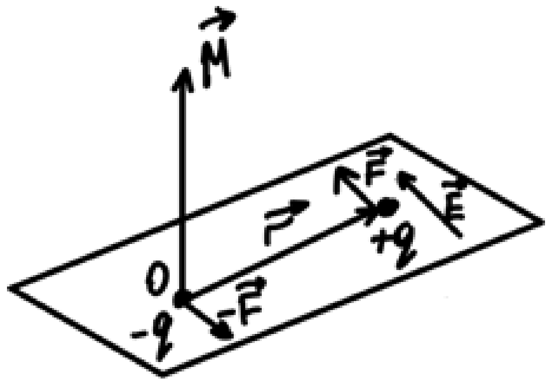
Итог, *поле диполя:*

$$\vec{E} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3\frac{(\vec{d}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

11. Сила и момент сил, действующие на диполь в слабонеоднородном электрическом поле.

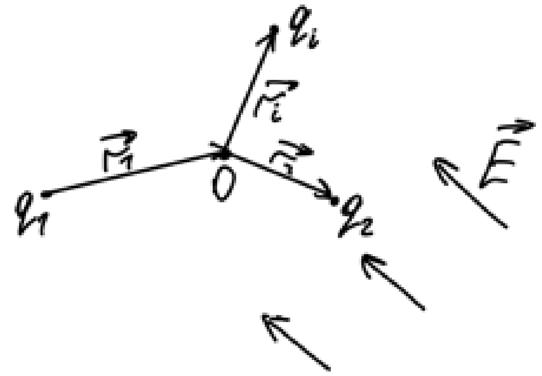
Момент сил:

Рассмотрим случай двух зарядов:



$$\vec{F} = q\vec{E}\ ,\ \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = [\vec{r} \times q\vec{E}] = [\vec{d} \times \vec{E}]$$

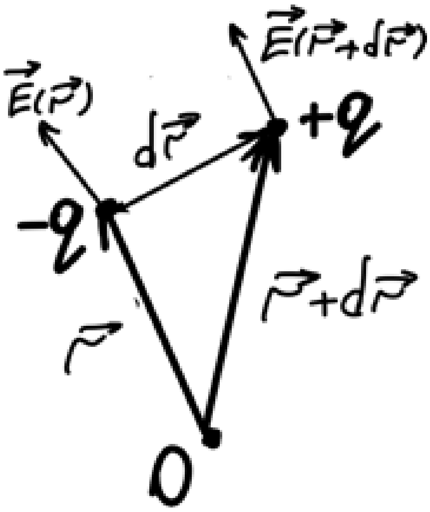
Обобщим на случай нескольких зарядов:



$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r_i} \times \vec{F_i}] = \sum_i [\vec{r_i} \times q_i\vec{E}] = \sum_i [q_i\vec{r_i} \times \vec{E}] = [(\sum_i q_i\vec{r_i}) \times \vec{E}] = [\vec{d} \times \vec{E}]$$

Сила:

Рассмотрим случай двух зарядов:



В однородном поле $F = 0$, если полный заряд равен нулю:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E} = \underset{\to 0}{(\sum_i q_i)} \vec{E} = 0$$

$$\vec{F} = q\vec{E}(d\vec{r} + d\vec{r}) - q\vec{E}(\vec{r}) = q(\vec{E}(d\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r})) = q(d\vec{r}\ \nabla)\vec{E} = (\vec{d}\ \nabla)\vec{E}$$

с учетом , что $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$:

$$0 = [\boldsymbol{\nabla} \times \vec{E}] \Rightarrow 0 = [\vec{d} \times [\boldsymbol{\nabla} \times \vec{E}]] \underset{bac-cab}{=} \boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d}\vec{E}\right) - \overset{\downarrow}{\vec{E}}(\vec{d}\boldsymbol{\nabla}) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d}\vec{E}\right) = (\vec{d}\boldsymbol{\nabla})\vec{E}$$

Получаем нашу силу:

$$\vec{F} = \ \nabla(\vec{d}\vec{E})$$

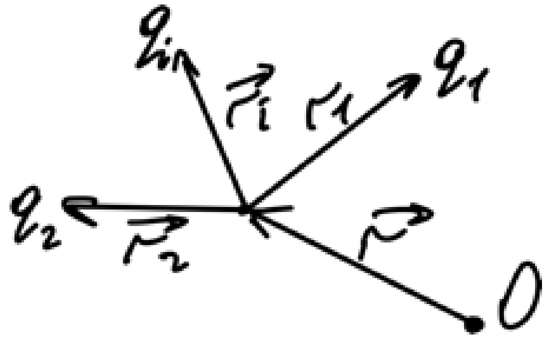
Можно ввести потенциальную функцию по общему правилу:

$$\vec{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$$

Тогда

$$U = -\vec{d}\vec{E}$$

Обобщим на случай нескольких зарядов:



Предполагается, что система мала по сравнению с масштабами изменения электрического поля:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_i(\vec{r} + \vec{r}_i)$$

с учетом, что $\sum\limits_i q_i = 0$, получим:

$$\vec{F} = \sum_i q_i(\vec{E}(\vec{r}+\vec{r}_i) - \vec{E}(\vec{r})) = \sum_i q_i(\vec{r}_i \boldsymbol{\nabla})\vec{E} = \sum_i (q_i \vec{r}_i \boldsymbol{\nabla})\vec{E} = ((\sum_i q_i)\vec{r}_i \boldsymbol{\nabla})\vec{E} = (\vec{d}\boldsymbol{\nabla})\vec{E}$$

Получим нашу силу:

$$\vec{F} = \boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d}\vec{E}\right)$$

и

$$U = -\vec{d}\vec{E}$$

В случае упругого диполя:

$$\vec{d} \stackrel{df}{=} \alpha\vec{E}$$

тогда запишем нашу силу:

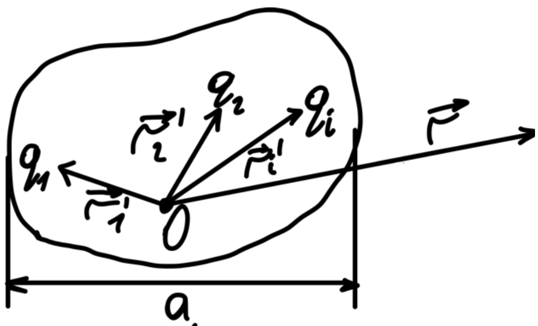
$$\vec{F} = \boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d} \cdot \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\alpha\vec{E} \cdot \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\overset{\downarrow}{\alpha}\vec{E} \cdot \vec{E}\right) + \boldsymbol{\nabla}\left(\alpha\vec{E} \cdot \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(\alpha\overset{\downarrow}{\vec{E}} \cdot \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(\overset{\downarrow}{\vec{d}} \cdot \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \vec{F}$$

с учетом $\vec{F} = -\boldsymbol{\nabla}U$, получаем $U = -\frac{1}{2}\vec{d}\vec{E}$

12. Электрический квадрупольный момент. Тензор квадрупольного момента для аксиально-симметричной системы зарядов.

Электрический квадрупольный момент



$$\frac{a}{r} \ll 1 \left(\forall_i \ \frac{r_i}{r} \ll 1 \right)$$

Точное решение:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r'_i}|} =: \Sigma \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Нужно разложить $\frac{1}{\vec{r} - \vec{r'}}$. Перейдем к тензорной записи:

$$\vec{r}(x, y, z) =: (x_1, x_2, x_3) \to x_\alpha, \text{ анолгично } \vec{r'} - x'_\alpha$$

Индексы $\alpha, \beta \in [1, 2, 3]$

По сути раскладываю функцию:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \underset{\substack{l=0 \\ \text{монополь}}}{\frac{1}{r}} + \underset{\substack{l=1 \\ \text{диполь}}}{(-x'_\alpha) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{r}} + \underset{\substack{l=2 \\ \text{квадруполь}}}{\frac{1}{2} (-x'_\alpha)(-x'_\beta) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r}} + \ldots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} - ?$$

Найдем:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{1}{2r^3} 2x_1 = -\frac{x_1}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{x_1}{r^3}\right) = -x_1\left(-\frac{1}{r^4}\frac{x_2}{r}\right) = \frac{3x_1x_2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{x_1}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3}\cdot 1 + \frac{3x_1x_2}{r^5}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}$$

Таким образом квадрупольный член имеет вид:

$$\varphi = \Sigma q \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta \left(\frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}\right)$$

$$Q_{\alpha\beta} := \Sigma \frac{1}{2} q x_\alpha x_\beta$$

тогда

$$\varphi = Q_{\alpha\beta}\frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}$$

$$Tr\left(\frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}\right) = \frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5} =$$

$$= \frac{-(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})r^2 + 3(x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3)}{r^5} = \frac{-3r^2+3r^2}{r^5} = 0$$

Хотим:

$$\varphi = D_{\alpha\beta}\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} \text{ Как найти } D_{\alpha\beta}?$$

$$D_{\alpha\beta} : 3Q_{\alpha\beta} - ? \cdot \delta_{\alpha\beta} r'^2 \text{ подберем ? так, чтобы } Tr(D_{\alpha\beta}) = 0, \text{так как } \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{при этом } D_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}r^2 = 0 (= D_{\alpha\beta} = 0)$$

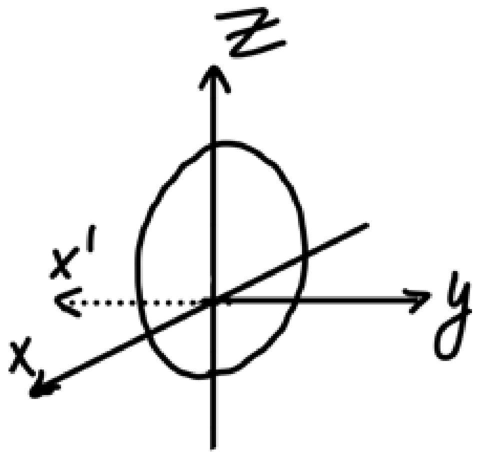
$$D_{\alpha\beta} = 3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2 \text{ Действительно } Tr(D_{\alpha\beta}) = D_{\alpha\alpha} = 3r'^2 - 3r'^2 = 0$$

Тогда

$$\varphi = \Sigma q(3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2)\cdot\frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5}$$

Таким образом $D_{\alpha\beta} = \Sigma q(3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2)$

Тензор квадрупольного момента для аксиально-симметричной системы зарядов



Вопрос:

$$D'_{xy} - ?$$
$$\parallel$$
$$D'_{12} - ?$$

– –

$$x'_1 x'_2 = x'y' = (-y)x = -xy| \text{ или } x'_1 x'_2 = -x_1 x_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D'_{12} = -D_{12}$$

Должно быть $D'_{12} = D_{12}$ из-за симметрии, поэтому имеем:

$$D_{12} = 0$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}D \end{pmatrix}$$

Что?

$$\varphi_2 = D_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5} = \frac{1}{2r^5}(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{D}{2r^5}(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -x_1/2 \\ -x_2/2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{D}{2r^5}\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_3^2\right) = \frac{D}{2r^5}\left(-\frac{x^2 + y^2}{2} + z^2\right) =$$

$$= \frac{D}{2r^5}\left(-r^2 \frac{\sin^2\theta}{2} + r^2\cos^2\theta\right) = \frac{D}{2r^3} \cdot \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

где последний член это полином Лежанра $P(\cos\theta)$

Вкратце о аксиально-симметричном тензоре:

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}D_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}D_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}$$

$$1) D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$$

$$2) D'_{xy} = -D_{yx} = -D_{xy}(\text{ свойство тензора при повороте на } 90^\circ)$$

$$D'_{xy} = D_{xy}(\text{ из симметрии })$$

$$\Downarrow$$

$$D_{xy} = 0$$

$$3) D'_{xz} = -D_{xz}(\text{ свойство тензора при повороте на } 180^\circ)$$

$$D'_{xz} = D_{xz}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{xz} = 0$$

13. Энергия электрического поля. Плотность энергии электрического поля.

В обьеме $V : \Delta\varphi = 0$ и граничные условия $\oiint\limits_{S_i}(-\ \nabla\varphi)d\vec{S} = 4\pi q_i \Rightarrow$

$\Rightarrow$задача линейна.

$$\delta A = \varphi_i dq_i \left| \begin{array}{ll} \tilde{\varphi}_i & = \alpha\varphi_i \\ \tilde{q}_i & = \alpha q_i \ ,\ \tilde{q}_i = q_i d\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1) \end{array} \right.$$

$$\Delta A = \int \sum_i \tilde{\varphi}_i d\tilde{q}_i = \int \sum_i \alpha\varphi_i d(\alpha q_i) = (\int_0^1 \alpha d\alpha) \sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2}\varphi_i q_i$$

$$\iiint\limits_V \frac{E^2}{8\pi} dV = \iiint\limits_V \frac{(-\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2}{8\pi} dV = [\boldsymbol{\nabla}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 + \varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2] =$$

$$= \iiint\limits_V \frac{1}{8\pi}\boldsymbol{\nabla}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi)dV = \frac{1}{8\pi}\left(\sum_i \oiint\limits_{S_i} \varphi(-\boldsymbol{\nabla}\varphi)d\vec{S} + \oiint\limits_{S_\infty} \varphi(\underset{\to 0}{\boldsymbol{\nabla}\varphi})d\vec{S}\right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\sum_i \varphi_i \oiint\limits_{S_i} \vec{E}d\vec{S} = [\oiint\limits_{S_i} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi q_i] = \frac{1}{2}\varphi_i q_i$$

Плотность энергии: $w = \frac{E^2}{8\pi}$, энергия $W = \iiint wdV$.

14. Электрическая ёмкость. Матрица емкостных коэффициентов, её симметричность.

Электрическая ёмкость

Конденсатор из двух проводников:

$$C = \frac{|q|}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

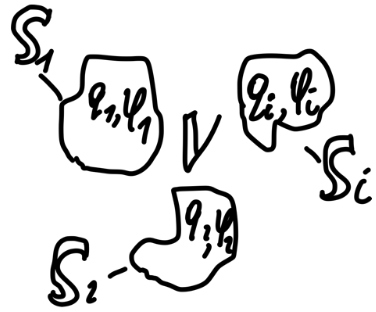
Уединенный конденсатор:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Энергия кондесатора:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2}\Sigma q_i \varphi_i$$

Матрица емкостных коэффициентов, её симметричность



$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{S} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

или в другом виде:

$$\varphi_i = S_{ij} q_j$$

где S_{ij}-*матрица потенциальных коэффициентов,*

$$q_i = C_{ij} \varphi_j$$

где $_{ij}$-*матрица емкостных коэффициентов,*$S_{ij}^{-1} = C_{ij}$-симметричны.

Свойства матриц:

$$dW = \sum_i \varphi_i dq_i = \varphi_i dq_i$$

и

$$W = \frac{1}{2} \varphi_i q_i = dW = \frac{1}{2} \varphi_i dq_i + \frac{1}{2} q_i d\varphi_i$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_i dq_i = q_i d\varphi_i$$

где $\varphi_i = S_{ij} q_j$

$$0 = S_{ij} q_j dq_i - q_i S_{ij} dq_i = S_{ij} q_j dq_i - q_j S_{ji} dq_i = (S_{ij} - S_{ji}) q_i dq_j$$

получаем:

$$S_{ij} = S_{ji}$$

$$\Downarrow$$

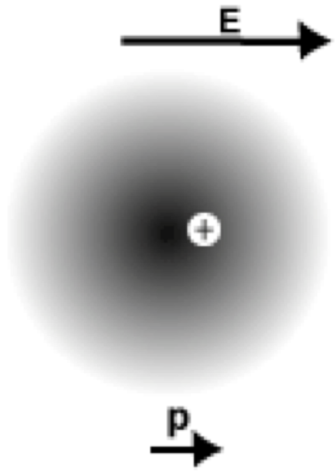
$$C_{ij} = C_{ji}$$

это справедливо $\forall q_i$ и $\forall dq_i$.

15. Диэлектрики. Связанный заряд. Вектор поляризации. Электрическое поле в диэлектрике. Вектор индукции. Диэлектрическая проницаемость.

Диэлектрики

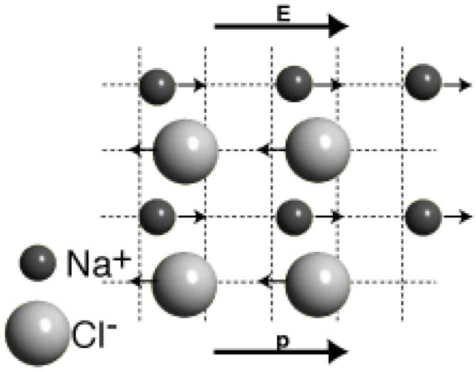
Неполярный диэлеткрик(к примеру H_2, O_2):



$$\vec{d_i} = 0$$

Под действием поля $\vec{E}$ происходит смещение электронного облака и $< \vec{d_i} \neq 0 >$

Ионный диэлектрик:

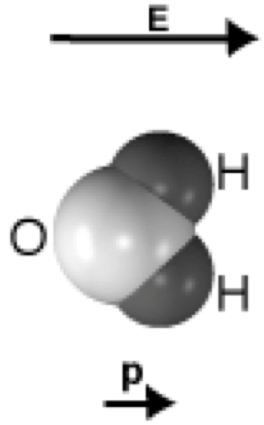


$$\vec{d_i} = 0$$

$$\text{Если } \vec{E} = 0 \Rightarrow < \vec{d_i} >= 0$$

$$\text{Если } \vec{E} \neq 0 \Rightarrow U = -\vec{d}\vec{E}, \ < \vec{d} > \neq 0$$

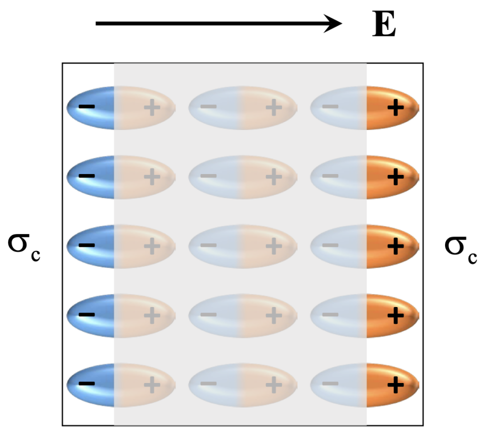
Полярный диэлектрик:



$$\vec{d}_i \neq 0$$

$$\text{Если } \vec{E} = 0 \Rightarrow < \vec{d} >= 0,\, U = -\vec{d}\vec{E}$$

Связанный заряд и Вектор поляризации



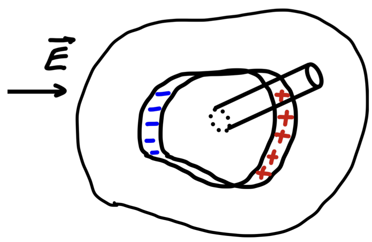
$$\iiint < \rho_c > dV = 0,\, \rho_c\text{-связанные заряды}$$

$$< \rho_c >= \frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_V \rho_c(\vec{r} + \vec{\xi})d\vec{\xi},\, \Delta V \sim 10^{-6}\text{см}^3$$

Определение *вектора поляризации:*

$$< \rho_c >=: -\text{div}\vec{P}$$

Вне тела $\vec{P} = 0$



По формуле Остроградского-Гаусса (1):

$$\iiint <\rho_c> dV = -\iiint \mathrm{div}\vec{D}dV \overset{(1)}{=} -\oiint \vec{P}d\vec{S} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_n = -\sigma_c$$

Связь вектора поляризации и дипольного момента:

$$\vec{d} = \iiint <\rho_c> \vec{r}dV = -\iiint \vec{r}(\boldsymbol{\nabla}\vec{P})dV = -\iiint \boldsymbol{\nabla}(\underset{\to 0}{\vec{P}\vec{r}})dV + \iiint (\vec{r}\boldsymbol{\nabla})\vec{P}dV =$$

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\vec{P}\vec{r}\right) = \vec{r}(\boldsymbol{\nabla}\vec{P}) + (\vec{r}\boldsymbol{\nabla})\vec{P}\ ,\ (\vec{r}\boldsymbol{\nabla})\vec{P} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)(P_1, P_2, P_3) = \vec{P}$$

$$= \iiint \vec{P}dV$$

$$\Rightarrow \vec{P} = n <\vec{d}>$$

Вектор поляризации $\vec{P}$ равен дипольному моменту единицы объема поляризованного диэлектрика.

$$\vec{P} = \chi\vec{E}, \chi\text{-поляризуемость.}$$

Электрическое поле в диэлектрике и Вектор индукции и Диэлектрическая проницаемость

$$\begin{cases} \mathrm{div} <\vec{E}> = 4\pi(\rho + <\rho_c>) \\ \mathrm{rot}\vec{E} = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{div}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho \Rightarrow \mathrm{div}\vec{D} = 4\pi\rho \\ \vec{D} := \vec{E} + 4\pi\vec{P}(\text{нет физического смысла}) \end{array}$$

$<\vec{E}> := \vec{E}$-напряженность электрического поля,
$\vec{D}$-*вектор индукции электрического тока.*
По теореме Гаусса:

$$\oiint \vec{D}d\vec{S} = 4\pi Q$$

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{E}d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi,\ \varphi = -\int \vec{E}d\vec{l}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\chi\vec{E} = (1 + 4\pi\chi)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

ε-диэлектрическая проницаемость$(\varepsilon \geq 1)$

$$\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi}$$

$$\rho_c = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi}\right) = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E}\right) = \frac{1 - \varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\vec{E} - \vec{E}\frac{\boldsymbol{\nabla}\varepsilon}{4\pi}$$

Итого имеем:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{D} = 4\pi\rho & \qquad \oiint \vec{D}d\vec{S} = 4\pi Q \\ \mathrm{rot}\vec{E} = 0 & \qquad \oint \vec{E}d\vec{S} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} & \end{cases}$$

16. Уравнения электрического поля в диэлектрике. Граничные условия.

Уравнения электрического поля в диэлектрике

$$\text{Усреднение:} \begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi(\langle\rho_c\rangle + \rho) & \qquad \langle\rho_c\rangle = -\mathrm{div}\,\vec{P} \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 & \qquad \vec{P} = \chi\langle\vec{E}\rangle \end{cases}$$

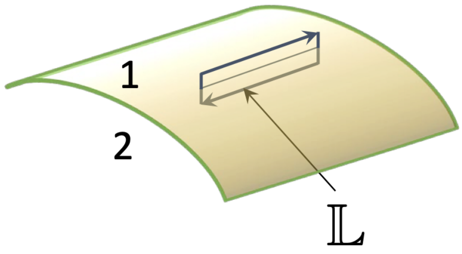
$$\text{Обозначения:}\ \begin{matrix} <\vec{E}> =: \vec{E} \\ \vec{E} + 4\pi\vec{P} =: \vec{D} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{D} = 4\pi\rho \\ \mathrm{rot}\vec{E} = 0 \qquad \vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi \end{cases}$$

$$\text{Вектор индукции: } \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\chi)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

Граничные условия

Тангенсальная компонента:

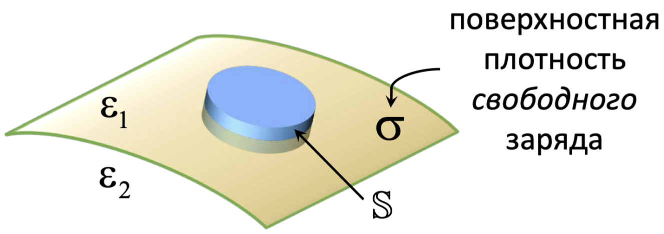


$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = 0 \\ \oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 0 \end{cases} \Rightarrow E_{1\tau}| = E_{2\tau}|$$

То есть тангенсальная компонента вектора напряжённости электрического поля на границе непрерывна, а так же:

$$\varphi_1| = \varphi_2|$$

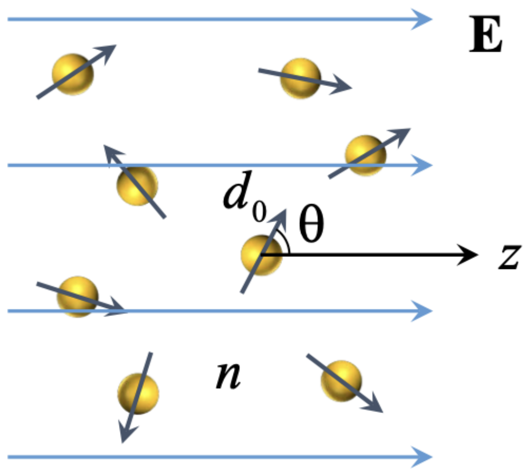
Нормальная компонента:



$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{D} = 4\pi\rho \\ \oiint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi Q \end{cases} \Rightarrow D_{1n}| - D_{2n}| = 4\pi\sigma \text{ или } \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = 4\pi\sigma$$

То есть нормальная компонента вектора индукции электрического поля терпит разрыв.

17. Оценка диэлектрической проницаемости полярного диэлектрика (газа).



Вероятность нахождения для $\theta + d\theta$:

$$W \sim e^{-\frac{U}{kT}}, \text{ где } U = -\vec{d_0}\vec{E} = -d_0 \cos\theta$$

$$n = \frac{N}{V} : dn = Ae^{(\frac{d_0 E \cos\theta}{kT})} d\Omega, \text{ где } d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$$

$$\int Ae^{(\frac{d_0 E \cos\theta}{kT})} d\Omega = n$$

Для вектора поляризации $\vec{P} = n < \vec{d} >$:

$$\vec{P} = n < \vec{d_z} >= n \frac{\int d_0 \cos\theta e^{\frac{d_0 E \cos\theta}{kT}} \cdot 2\pi \sin\theta d\theta}{\int e^{\frac{d_0 E \cos\theta}{kT}} \cdot 2\pi \sin\theta d\theta} = \left[\alpha = \frac{d_0 E}{kT}\right] =$$

$$= n \frac{\int d_0 \cos\theta e^{\alpha\cos\theta} d\cos\theta}{\int e^{\alpha\cos\theta} d\cos\theta} = n^2 d_0 \frac{\frac{d}{d\alpha}\int_{-1}^{1} e^{\alpha\cos\theta} d\cos\theta}{\int_{-1}^{1} e^{\alpha\cos\theta} d\cos\theta} =$$

$$= n^2 d_0 \frac{d}{d\alpha} \ln\left[\frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{1} e^{\alpha\cos\theta} d(\alpha\cos\theta)\right] = n^2 d_0 \frac{d}{d\alpha} \ln\left[\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{\alpha}\right] =$$

$$= n^2 d_0 \frac{d}{d\alpha} \ln\left[2\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}\right] = n^2 d_0 \frac{\alpha}{2\operatorname{sh}\alpha}\left(\frac{2\operatorname{ch}\alpha}{\alpha} - \frac{2\operatorname{sh}\alpha}{\alpha^2}\right) = n^2 d_0 \left(\operatorname{cth}\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Где $\operatorname{cth}\alpha - \frac{1}{\alpha} = \underset{\alpha<<1}{L(\alpha)}$ функция Ланжевена.

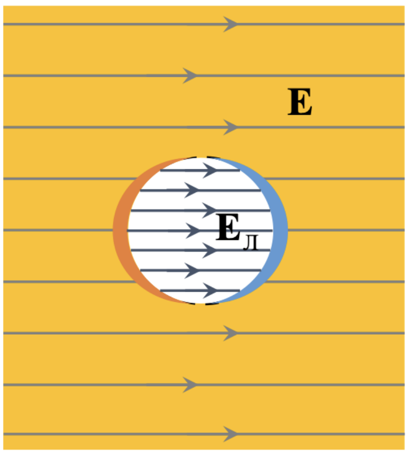
$$\operatorname{cth}\alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{45}$$

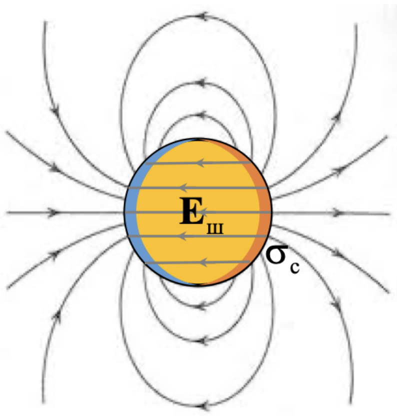
$$P_z = n^2\frac{d_0^2 E_z}{kT}, \text{ где } n = \frac{6\cdot 10^{23}}{22,4\cdot 10^3} = \frac{N_A}{V_A} \text{ и } d_0 = e\cdot l = 4,8\cdot 10^{-10}\cdot 0,5\cdot 10^{-8}$$

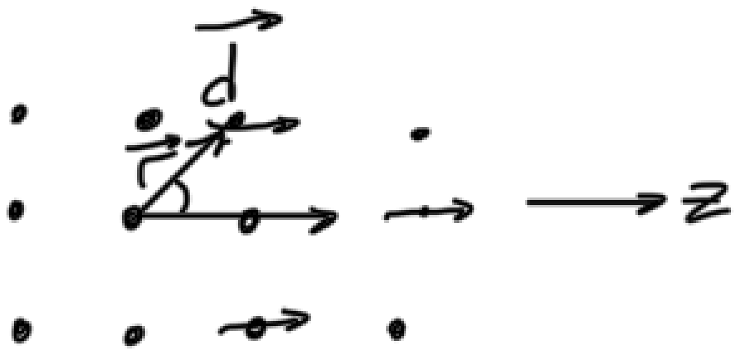
$$\chi = \frac{nd_0^2}{kT} = \frac{6\cdot 10^{23}}{22,4\cdot 10^3}\cdot\frac{(4,8\cdot 10^{-10}\cdot 0,5\cdot 10^{-8})^2}{1,38\cdot 10{-}16} \approx 4\cdot 10^{-3}$$

18. Локальное поле в диэлектрике (поле Лоренца). Формула Клаузиуса – Моссотти.

Локальное поле в диэлектрике (поле Лоренца)







При усреднении по углам:

$$< r^2 > = < x^2 + y^2 + z^2 > \underset{\text{изотропность}}{=} 3 < z^2 >$$

$$< \vec{E} > = \left\langle -\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{3(d\vec{d}\vec{r})\vec{r}}{r^5} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{r^3}(-r^2 + 3z^2)\vec{e_z} \right\rangle = 0$$

$$\vec{E}_{л} = \vec{E} - \vec{E}_{ш} \text{(по принципу суперпозиции)}$$

$$E_\tau|_A - \text{непр.} : -\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{3(\overset{\to 0}{\vec{d}\vec{r}})\vec{r}}{r^5}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{л} = \vec{E} - \vec{E}_{ш} = \vec{E} + \frac{\vec{d}}{r^3} \\ \vec{d} = \frac{4}{3}\pi r^3 \vec{P} \end{cases}$$

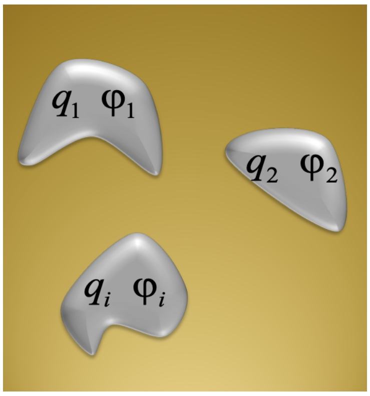
$$\Rightarrow \vec{E}_{л} = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}$$

Формула Клаузиуса-Моссотти

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d} = l\vec{E}_l \\ \vec{P} = n\vec{d} \\ \vec{E}_{л} = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P} \\ \varepsilon\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow (\varepsilon - 1)\vec{E} = 4\pi\vec{P} \Rightarrow \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon-1}\vec{P} \\ \vec{E}_{л} = \frac{4\pi}{\varepsilon-1}\vec{P} + \frac{4}{3}\pi\vec{P} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon-1}\right)\vec{P} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon-1}\right)n\alpha\vec{E}_{л} \Rightarrow \\ \Rightarrow \textit{формула Клазиуса-Моссоти:} \\ \qquad \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon-1} = \frac{4\pi}{3}n\alpha \end{array}$$

19. Энергия электрического поля в диэлектрике.

Линейная среда ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{P} = \chi\vec{E}$), все похоже на вакуум.



$$\delta W = \varphi_i dq_i \Rightarrow W = \frac{1}{2}\varphi_i q_i$$

$$\widetilde{q}_i = \alpha q_i \text{ и } \widetilde{\varphi}_i = \alpha\varphi_i, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq 1$$

Перепишем энергию:

$$W = \int dW = \int \widetilde{\varphi}_i d\widetilde{q}_i = \int_0^1 \alpha\varphi_i q_i d\alpha = \frac{1}{2}\varphi_i q_i$$

Доказательство:

$$W = \iiint\limits_V \frac{\vec{E}\vec{D}}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \iiint\limits_V (-\mathbf{\nabla} \overset{\downarrow}{\varphi}) \vec{D} dV =$$

$$\text{Примеменим:} (\mathbf{\nabla}\left(\varphi\vec{D}\right)) = \vec{D}\mathbf{\nabla}\varphi + \varphi\mathbf{\nabla}\vec{D}$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \iiint\limits_V \mathbf{\nabla}\left(\varphi\vec{D}\right) dV + \frac{1}{8\pi} \iiint\limits_V \varphi \underset{\to 0}{\mathbf{\nabla}} \vec{D} dV =$$

$$= \sum_i \oiint\limits_{S_i} \frac{1}{8\pi} \varphi \vec{D} d\vec{S} - \oiint\limits_{S_\infty} \varphi \underset{\to 0 (\propto 1)}{\vec{D}} d\vec{S} = \frac{1}{8\pi} \sum_i \varphi_i \oiint\limits_{S_i} \vec{D} d\vec{S} = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2} \varphi_i q_i$$

Доказано.
Нелинейная среда: $\delta W = \varphi_i \delta q_i \neq> W = \frac{1}{2} \varphi_i dq_i$
В предыдущем пункте всюду меняем:

$$W = \delta W, q_i \to \delta q_i, \vec{D} = \delta\vec{D}$$

$$\delta W = \iiint \frac{\vec{E}\delta\vec{D}}{8\pi} dV$$

20. Электрический ток, дрейфовая скорость, подвижность. Объемная и поверхностная плотность тока. Электропроводность. Закон Ома.

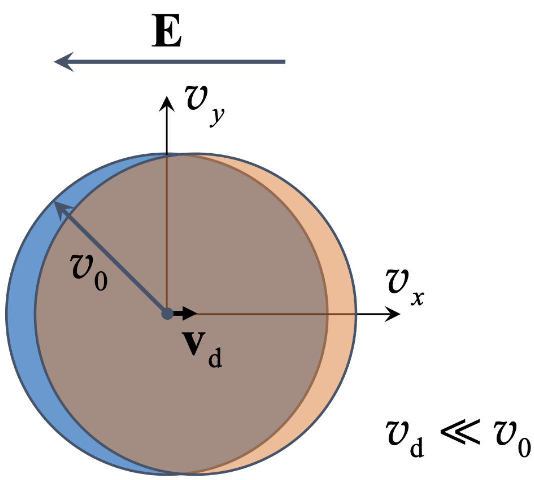
Электрический ток, дрейфовая скорость, подвижность

Скорость Ферми в Me(metal?):

$$\upsilon_F \sim 10^6 \text{ м/с}$$

$$\frac{4}{3} \pi \upsilon_F^3 \propto n$$

Пространство скоростей квазиэлектронов(?):



При $\vec{E} = 0$, то $< \vec{v} >= 0$
При конченом малом $\vec{E}$, то $< \vec{v} >=< \vec{v_d} >$

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \frac{\vec{E}e}{m}t$$

$$< \vec{v} >=< \underbrace{\vec{v_0}}_{\to 0}> + \frac{\vec{E}e}{m} < t >$$

Где $< t >= \tau-$ время релаксации импульса.
Релаксация импульса:

$$< \vec{v} >= \frac{\vec{E}e}{m}\tau = \vec{v_d} \Rightarrow \frac{e\tau}{m}\vec{E} = \vec{v_d}$$

Или

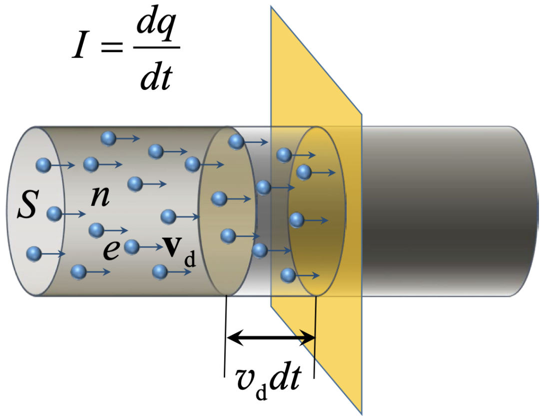
$$\vec{v_d} = \mu\vec{E}$$

где $\mu = \frac{e\tau}{m}-$*подвижность носителей заряда.*

Объемная и поверхностная плотность тока

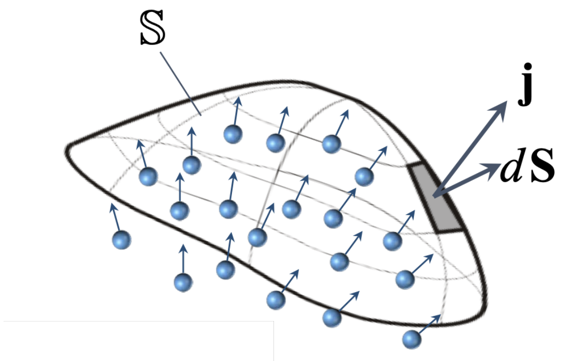
Ток-это заряд в единицу времени.

Ток в проводе:



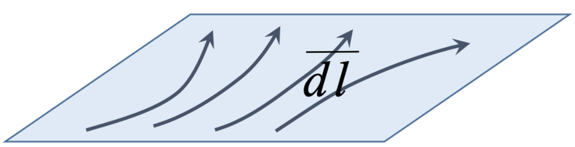
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{env\,dt \cdot S_0}{dt} = ne\,\vec{v} \cdot \vec{S}$$

Электрический ток через $\vec{S}$:



$$\begin{array}{l|l} I \overset{df}{=} \iint\limits_S \vec{j} d\vec{S} & \Rightarrow \vec{j} = ne\vec{v}_d \\ I = \iint\limits_S ne\vec{v}_d d\vec{S} & \vec{j} = \rho\vec{v}_d \end{array}$$

Ток по поверхности:



$dI = idl$, где i – поверхностная плотность тока.

Электропроводность

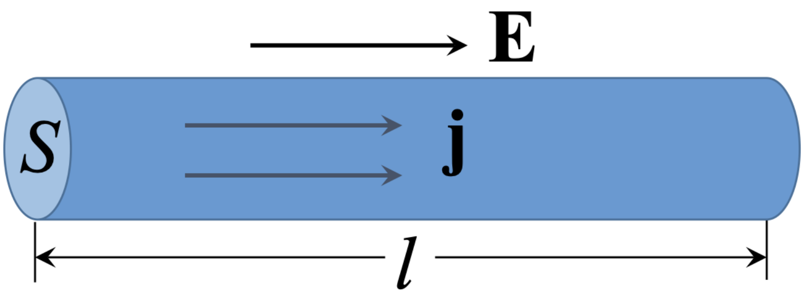
$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \text{ где } \sigma - \textit{электропровдность(проводимость)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{j} = ne\vec{v}_d \\ \vec{v}_d = \frac{e\tau}{m}\vec{E} = \mu\vec{E} \end{array}\right| \Rightarrow \sigma = ne\mu = \frac{ne^2\tau}{m}$$

$$\sigma = ne\mu = \frac{ne^2\tau}{m} - \textit{формула Пауля Друде.}$$

Закон Ома

Закон Ома в дифференциальной форме: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$



$$jV = \sigma EV$$

$$jSl = \sigma ElS \Rightarrow I \cdot l = \sigma US \Rightarrow U = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}I$$

Со школы:$U = \rho\frac{l}{S}I$,

$$\rho = \frac{1}{\sigma} - \text{удельное сопротивление.}$$

21. Закон сохранения заряда. Уравнение непрерывности. Закон Джоуля-Ленца.