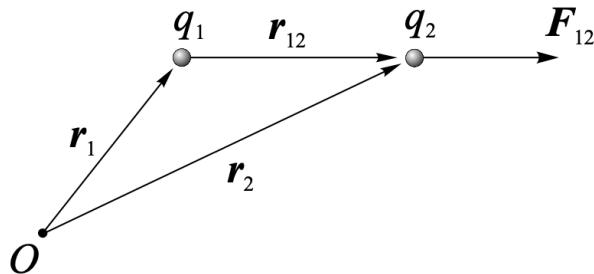


# 1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции. Поток электрического поля. Теорема Гаусса.

## Закон Кулона

Это — экспериментально установленный закон силового взаимодействия двух точечных заряженных тел, неподвижных относительно рассматриваемой системы отсчета, согласно которому:

$$\vec{F}_k = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$



Введем понятие напряженности:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

тогда силу Кулона можно перезаписать в виде:

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2)$$

## Напряжённость электрического поля

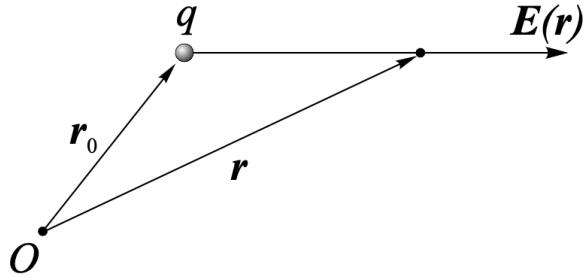
В общем виде напряженность имеет вид:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

## Принцип суперпозиции

Электрическое поле от системы зарядов равно сумме электрических полей от её составляющих:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



## Поток электрического поля

Если у нас имеется некоторая конечная поверхность  $S$ , то поток через эту поверхность вычисляется как поверхностный интеграл

$$\Phi = \int_S E_n dS$$

## Теорема Гаусса

*Теорема Гаусса:* Поток вектора  $\vec{E}$  через любую замкнутую поверхность определяется суммарным зарядом  $Q$ , находящимся внутри этой поверхности, и равняется  $4\pi Q$ :

$$\oint_S E_n dS = 4\pi Q$$

## 2. Дивергенция электрического поля. Распределённый заряд. Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

### Дивергенция электрического поля

Вспомним теорему Гаусса для потока  $\vec{E}$  через замкнутую площадь  $S$

$$\iint_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi \rho dV$$

а по теореме Остроградского-Гаусса

$$\iint_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV$$

следует что для  $\forall V$  :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi \rho dV \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

## Распределённый заряд

Объемная плотность заряда:

$$dq \stackrel{df}{=} \rho dV$$

Поверхностная плотность:

$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

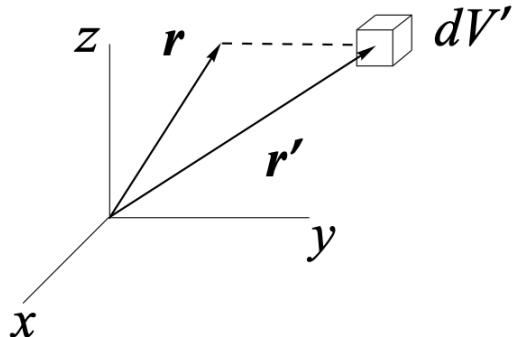
Линейная плотность:

$$dq \stackrel{df}{=} \kappa dl$$

## Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

В конечной области пространства с плотностью заряда  $\rho(\vec{r})$ , по принципу суперпозиции скалярный потенциал этих зарядов равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



Представление потенциала в виде интеграла по объему, занятому зарядами, часто называют частным решением уравнения Пуассона.

Для задачи с точечными зарядами интегральная форма не подойдёт, перейдём к сумме. Введём функцию Дирака  $\delta$ , она задается следующими условиями:

- 1) при всех  $\vec{r} \neq 0$   $\delta(\vec{r}) = 0$  ;
- 2) в точке  $\vec{r} \neq 0$  имеем  $\delta(\vec{r}) = \infty$  ;
- 3) интеграл по всему пространству  $\int \delta(\vec{r}) dV = 1$
- 4)  $\int f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = f(\vec{r}_0)$   
где  $f(\vec{r})$  - произвольная непрерывная функция,  $\vec{r}_0$  радиус-вектор некоторой фиксированной точки.

Объёмную плотность заряда расположенного в точке  $\vec{r} = \vec{r}_0$  можно перезаписать:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

подставляем в предыдущую формулу

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{q\delta(\vec{r} - \vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

### 3. Циркуляция и ротор электрического поля. Теорема Стокса. Электрический потенциал. Работа электрического поля. Потенциал точечного заряда.

#### Циркуляция и ротор электрического поля

Циркуляция векторного поля  $\vec{E}$  вдоль контура  $L$

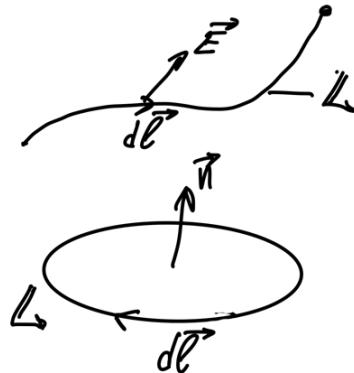
$$\int_L \vec{E} d\vec{l}$$

а по замкнутому контуру

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

или в дифференциальной форме

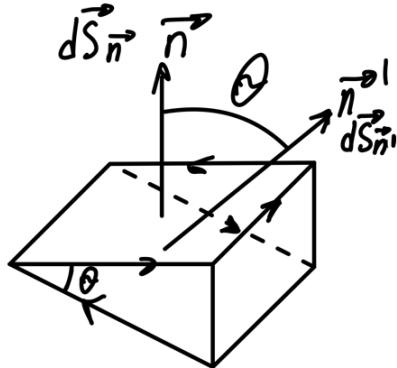
$$\text{rot } \vec{E} = 0$$



Как следствие из теоремы о циркуляции  $\vec{E}$  работа при перемещении заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории движения.

## Теорема Стокса

$$\oint_{\partial S} \vec{E} d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S}$$



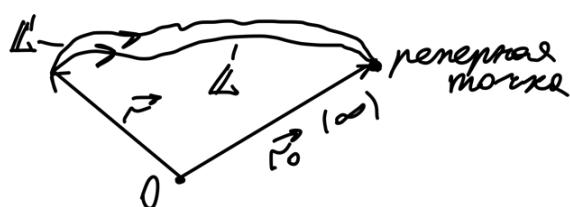
$$(\operatorname{rot} \vec{E})_{\vec{n}'} = \frac{\operatorname{rot} \vec{E}}{\frac{1}{\cos \theta}}$$

где  $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{dS_{\vec{n}'}}{dS_{\vec{n}}}$ , получим

$$(\operatorname{rot} \vec{E})_{\vec{n}'} = \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \cos \theta$$

## Электрический потенциал

Рассмотрим скалярное поле



$$\varphi(\vec{r}) \stackrel{df}{=} \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} d\vec{l}$$

Чтобы определение было корректным, нужно чтобы этот интеграл не зависел от формы  $L$ .

*Доказательство:*

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow \forall L \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

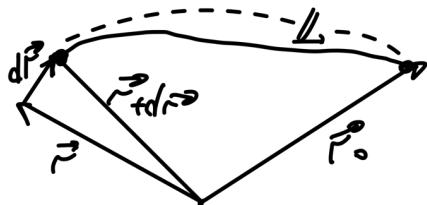
Запишем выражение при обходе  $L - L'$  - сначала идем по контуру  $L$ , а потом обратно по контуру  $L'$  :

$$\oint_{L-L'} \vec{E} d\vec{l} = 0 = \oint_L \vec{E} d\vec{l} - \oint_{L'} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Такие поля называются потенциальными.

*Доказано.*

Еще свойства потенциала:



$$\varphi(\vec{r}) = \int \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} + \int_L \vec{E} d\vec{l}$$

и

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}_0) = \int_L \vec{E} d\vec{l}$$

отсюда получим

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}_0) - \varphi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

так же используем

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \nabla \varphi$$

отсюда получим

$$\forall d\vec{r}, \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = -\nabla \varphi d\vec{r} \Rightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 = -[\nabla \times \nabla \varphi]$$

## Работа электрического поля

$$A = \int_L \vec{F} d\vec{l} = \int_L q \vec{E} d\vec{l} = q \left[ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{E} d\vec{l} - \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E} d\vec{l} \right] = q(\varphi_2 - \varphi_1) = qU$$

## Потенциал точечного заряда

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}$$

или в общем виде

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

## 4. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат.

### Уравнение Лапласа

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

В сферической системе  $(r, \theta, \alpha)$  координат

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

В цилиндрической  $(r, \alpha, z)$  координат

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

### Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат

Предположим, что в декартовых координатах переменные разделяются - это означает, что:

$$\varphi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\Delta \varphi = 0 \Rightarrow X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \Rightarrow Const_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\frac{X''}{X} = C \Rightarrow X'' = CX$$

$$(1) X(x) = \begin{cases} \text{при } C > 0, Ae^{\sqrt{C}x} \\ \text{при } C < 0, Ae^{\pm i\sqrt{C}x} \\ \text{при } C = 0, Ax + B \end{cases}$$

При  $\rho \neq 0$ . Допустим, что

$$\rho(x, y, z) = \rho \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \text{ где } X, Y, Z \text{ функции вида (1)}$$

Тогда

$$\varphi = A \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$A(X''YZ + XY''Z + XYZ'') = -4\pi\rho_0XYZ \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

Итог

$$\rho = p_1 + p_2, \Delta\varphi = -4\pi\rho, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2;$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = -4\pi\rho_1 \\ \Delta\varphi_2 = -4\pi\rho_2 \end{cases}$$

## 5. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат.

### Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат

Пусть  $\varphi(r, \theta, \alpha) = R(r) \cdot Y(\theta)$

$$\Delta\varphi(r, \theta, \alpha) = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right) = 0$$

При  $R(r) \propto r'$   
или  $R(r) \propto \frac{1}{r^{l+1}}$

$$\frac{1}{R}(r^2 R')' = C$$

ищем решение в виде  $R(r) \propto r^l$

$$\frac{1}{R}(r^2 R')' = \underset{=-(l'+1)}{l} \cdot \underset{=(-l'-1+1)=(l'+1)l'}{(l+1)}$$

При этом  $R(r) \propto \frac{1}{r^{l+1}}$  удовлетвор. уравнению с той же С  
(замена  $l' = -(l+1)$ )

## 6. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат.

### Уравнение Лапласа(повтор)

#### Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат

Пусть  $\varphi(r, \alpha) = \varphi(r, \alpha)$ . Кроме того  $\varphi(r, \alpha) = R(z)Y(\alpha)$  (то есть переменные разделяются)

$$Y(\alpha) = e^{\pm im\alpha}$$

$$\varphi(r, \alpha) = R(r)(\sum_i e^{im\alpha}), \text{ где } m \in Z$$

Пусть внутри, рассматриваемой области нет зарядов  $\Rightarrow \Delta\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 \Rightarrow e^{im\alpha} \cdot \frac{1}{r} (r R')' + R \cdot \frac{1}{r^2} (-m^2 e^{im\alpha}) = 0 \Rightarrow \frac{r(r R')'}{R} = m^2$$

Ищем решение в виде  $R(r) \propto r^l$ :

$$l^2 = m^2, \text{ т.e } l = \pm m. \text{ Т.e } \varphi(r, \alpha) = \left( \frac{C_1}{r^m} + C_2 r^m \right) e^{\pm im\alpha}$$

7. Границные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля. Поверхностная плотность зарядов. Поле вблизи поверхности металлов. Границные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал.

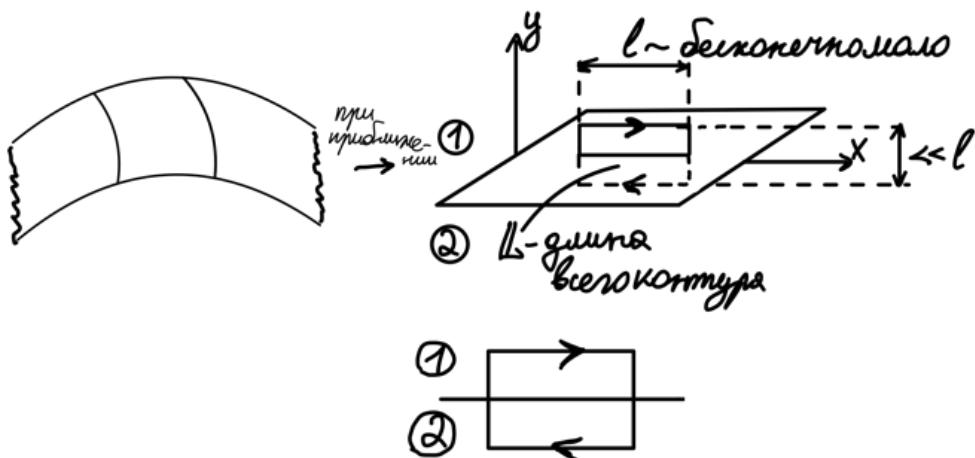
Границные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля

Тангенциальная компонента

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E} d\vec{l} \leftarrow \text{интегральная форма}$$

По теореме Стокса

$$0 = \iint_{(\forall)S} \operatorname{rot} \vec{E} dS = \oint_{(\forall)S} \vec{E} d\vec{l}$$



$$\oint \vec{E} d\vec{l} = E_x|_1 \cdot l - E_x|_2 \cdot l \Rightarrow E_x|_1 = E_x|_2$$

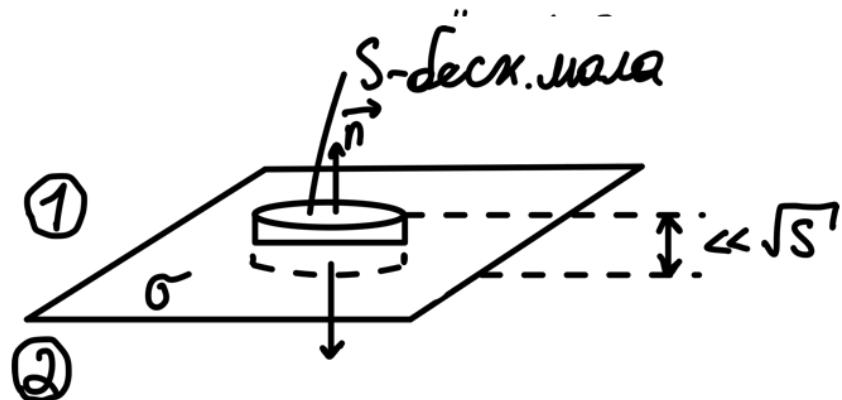
или же

$$[E_\tau|_1 = E_\tau|_2]$$

Нормальная компонента

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \iint_{(\forall)S} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_{(\forall)V} \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi \iiint_{(\forall)V} \rho dV \Rightarrow \iint_{(\forall)\delta S} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q$$



$$E_{1n} \cdot S - E_{2n} \cdot S = 4\pi Q = 4\pi\rho S$$

или же

$$|E_{1n}| - |E_{2n}| = 4\pi\rho$$

**Поверхностная плотность зарядов(???)**

$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

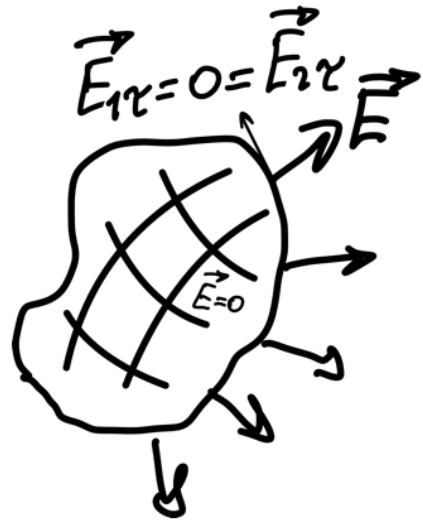
**Поле вблизи поверхности металлов**

Надо доказать что поле вблизи металлов равно

$$\vec{E} = 4\pi\sigma \vec{n}$$

Рассмотрим тангенциальную и нормальную компоненту поля  $\vec{E}$  на границе металла

Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника  $E_{1n} = 0$  отсюда



$$E_{2n} = 4\pi\sigma$$

Снаружи металла поле  $E_{2\tau} = 0$  и из граничных условий

$$E_{1\tau} = 0$$

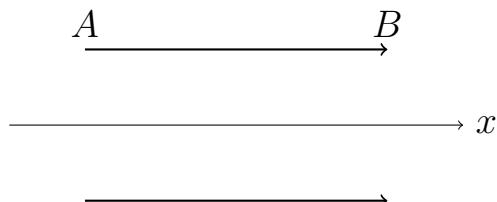
Итоговое поле равно

$$\boxed{\vec{E}_{2n} = 4\pi\sigma\vec{n}}$$

Что и требовалось доказать.

### Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал

Можно рассмотреть две точки А и В с одной стороны поверхности и С,Д с другой стороны. Найдем напряжение между парами этих точек:



Из граничных условий, что  $E_\tau$ —непрерывно следует, что:

$$E_{AB}| = E_{CD}|$$

потенциал можно выразить через напряженность так:

$$E = -\text{grad}\varphi$$

отсюда получаем, что  $\varphi_{AB}| = \varphi_{CD}| \Rightarrow \varphi$  — непрерывно

## 8. Проводники в электрическом поле. Теорема единственности.

### Проводники в электрическом поле

Очень похоже (скорее всего есть одно и тоже) на вопрос: поле вблизи поверхности металлов, ну рассмотрим повторно?



Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника  $E_i \equiv 0$  отсюда плотность заряда:

$$\rho_i = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E}_i \equiv 0$$

В этой связи говорят, что проводник квазинейтрален. Таким образом, заряды на проводнике могут размещаться только на его поверхности, причем поверхностная плотность зарядов связана с полем  $\operatorname{vec} E$  вне проводника через граничное условие для  $E_n$ .

Если пространство вне проводника свободно от зарядов, то здесь поле  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  и  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

Из граничных условий мы получаем что:

$$\vec{E}_n = 4\pi\sigma, \vec{E}_\tau = 0.$$

Заметим, что поле подходит к поверхности проводника по нормали, т.е. поверхность проводника является эквипотенциальной. Это естественно, так как в проводнике потенциал постоянен из-за  $\vec{E}_i = 0$

## Теорема единственности

Условия теоремы:

- 1) На каждом проводнике задан либо потенциал, либо заряд,
  - 2) В  $V$  нету зарядов;
- $\Rightarrow \exists$  единственное решение уравнения Пуассона вида:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

Доказательство

Пусть  $\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1$  и  $\vec{E}_2 = -\nabla\varphi_2$ . Достаточно доказать, что:

$$\iiint_V |\vec{E}_2(\vec{r}) - \vec{E}_1(\vec{r})|^2 dV = 0$$

$$\vec{E} := \vec{E}_2 - \vec{E}_1 ; \varphi := \varphi_2 - \varphi_1 ; \vec{E} = -\nabla\varphi_2 + \nabla\varphi_1 = -\nabla\varphi$$

Всюду в  $V$   $\Delta\varphi_1 = 0$  и  $\Delta\varphi_2 = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$

Рассмотрим выражение:  $\nabla(\varphi\nabla\varphi) = (\nabla\varphi)^2 + \varphi\nabla^2\varphi = (\nabla\varphi)^2$

$$\iiint |\vec{E}_2(\vec{r}) - \vec{E}_1(\vec{r})|^2 dV = \iiint |\vec{E}|^2 dV = \iiint (\nabla\varphi)^2 dV = \iiint \nabla(\varphi\nabla\varphi) dV =$$

$$= \iiint_V \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) dV = \oint_{S_\infty} \varphi \nabla\varphi d\vec{S} - \sum_i \oint_{S_i} \varphi \nabla\varphi d\vec{S} = \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} (-\nabla\varphi) d\vec{S} = \\ \rightarrow 0 (\propto \frac{1}{r})$$

$$\sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) \oint_{S_i} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) d\vec{S} = \sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) \left[ \oint_{S_i} \vec{E}_2 d\vec{S} - \oint_{S_i} \vec{E}_1 d\vec{S} \right] = \\ = 4\pi \sum_i \begin{matrix} (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) \\ (1) \end{matrix} \begin{matrix} (q_{2i} - q_{1i}) \\ (2) \end{matrix} = 0$$

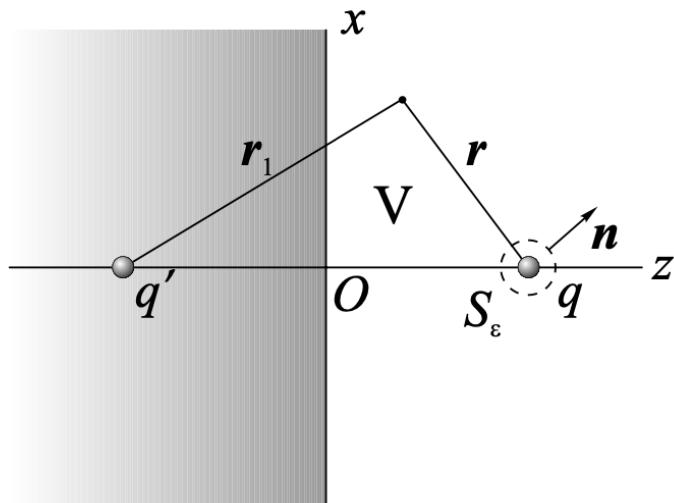
По условию теоремы либо (1) = 0, либо (2)=0

Доказано

## 9. Метод изображения для решения задач электростатики на примере плоской и сферической границ раздела проводника и непроводящего пространства.

### Плоская граница

Точечный заряд  $q$ , находящийся на расстоянии  $h$  от проводящего полупространства. Определить поле в свободном полупространстве и на этой основе — плотность зарядов, индуцированных зарядом  $q$  на поверхности проводника.



В проводящем полупространстве поле равно нулю, постоянный потенциал можно принять за ноль, будем искать поле только в области  $z > 0$  с выкинутой точкой. Искомое поле удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0$$

и граничным условиям

$$\varphi|_{z=0} = 0, \oint_{S_\varepsilon} E_n dS = 4\pi Q$$

где  $S_\varepsilon$  сфера малого радиуса с центром в точке расположения заряда  $q$

В проводящем полупространстве будет наводится заряд  $q' = -q$ . Тогда потенциал и электрическое поле, созданные зарядом  $q$  фиктивным зарядом  $q'$ , в правом полупространстве создают искомое поле:

$$\varphi = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_1}$$

Действительно, эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в области  $z > 0$  как потенциал двух точечных зарядов, лежащих вне области. Во-вторых,  $\varphi|_{z=0} = 0$ , так как для точек плоскости  $r$  и  $r_1$  равны.

В-третьих, поле, созданное зарядом  $q'$ , через поверхность  $S\varepsilon$  создает поток, равный нулю (по теореме Гаусса), а поле от точечного заряда  $q$  обеспечивает выполнение соответствующего граничного условия.

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{|\vec{r}|} - \frac{q}{|\vec{r}_1|}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

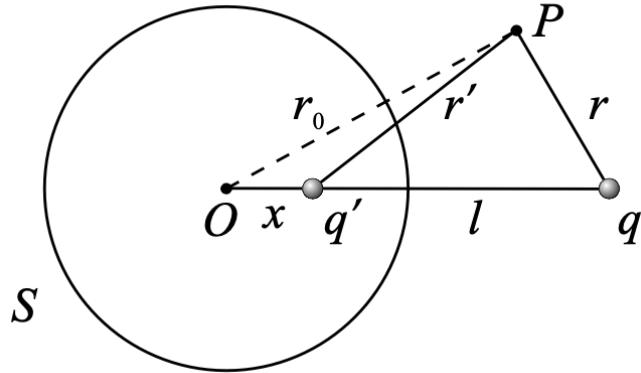
и

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \frac{q}{|\vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

Таким образом, задача решена.

*Для сферической границы*

Заряд  $q$  на расстоянии  $l+x$  от центра шара, а потенциал шара принят равным нулю.



Искомый потенциал в произвольной точке  $P$  вне шара в этом случае:

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}$$

где  $q' = -q \frac{a}{l}$

Решение удовлетворяет уравнению Лапласа в своей области определения, имеет нужную особенность вблизи точечного заряда  $q$  и удовлетворяет граничным условиям ( $r_0/r'_0 = l/a$ ), обращаясь в нуль.

Рассмотрим второй вариант — точечный заряд  $q$  рядом с шаром, несущим заряд  $Q$  (при этом постоянный потенциал шара не определен). В этом случае к существующей системе зарядов  $q, q'$  необходимо добавить фиктивный заряд, расположенный в центре шара:

$$q'' = Q - q' = Q - q \frac{a}{l}$$

тогда

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r_*}$$

потенциал шара при этом:

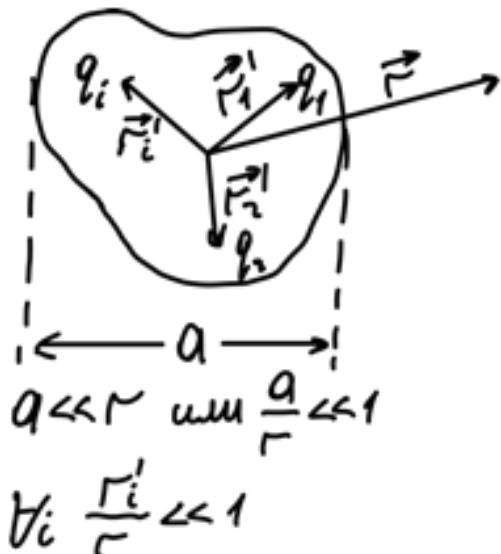
$$\varphi(P) = \varphi|_S = \frac{q}{r_0} + \frac{q'}{r'_0} + \frac{q''}{a} \Rightarrow \varphi|_0 = \frac{q''}{a} = \frac{Q}{a} + \frac{q}{l}$$

Таким образом, задача решена.

## 10. Электрический диполь. Потенциал и поле диполя.

### Электрический диполь

Пусть система зарядов занимает ограниченную область пространства с характерным размером  $a$ , причем начало координат находится внутри этой области.



Распишем потенциал точечных зарядов:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} =: \sum \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Используем разложение:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + (-\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{r} + \dots = \frac{1}{r} + (-\vec{r}') \left( -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}$$

получаем

$$\varphi = \sum q \frac{1}{r} + \sum q \vec{r}' \frac{\vec{r}}{r^3} + \dots = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$$

где

$$\text{Дипольный момент} - \boxed{\vec{d} := \sum_i q_i \vec{r}_i'}$$

$$\text{Полный заряд системы} - Q = \sum_i q_i$$

Дипольный член в сферических координатах ( $\vec{e}_z \uparrow\uparrow \vec{d}$ ):

$$\varphi(r, \theta) = \frac{d}{r^2} \cos \theta$$

### Потенциал и поле диполя

Из прошлого пункта:

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3}}$$

Найдем поле диполя:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \varphi = -\nabla \left( (\vec{d} \cdot \vec{r}) \frac{1}{r^3} \right) = -\nabla \left( (\vec{d} \cdot \vec{r}) \frac{1}{r^3} \right) - \nabla \left( (\vec{d} \cdot \vec{r}) \frac{1}{r^3} \right) = \\ &= -\frac{1}{r^3} \nabla (\vec{d} \cdot \vec{r}) - (\vec{d} \cdot \vec{r}) \nabla \frac{1}{r^3} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r})}{r^4} \nabla \vec{r} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \end{aligned}$$

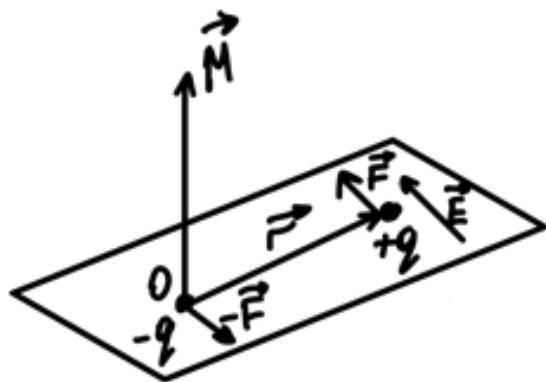
Итог, поле диполя:

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5}}$$

## 11. Сила и момент сил, действующие на диполь в слабонеоднородном электрическом поле.

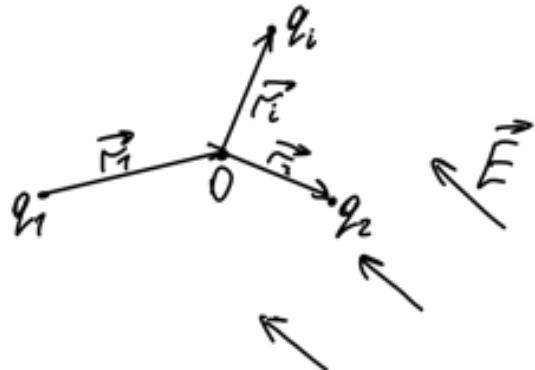
*Момент сил:*

Рассмотрим случай двух зарядов:



$$\vec{F} = q\vec{E}, \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = [\vec{r} \times q\vec{E}] = [\vec{d} \times \vec{E}]$$

Обобщим на случай нескольких зарядов:

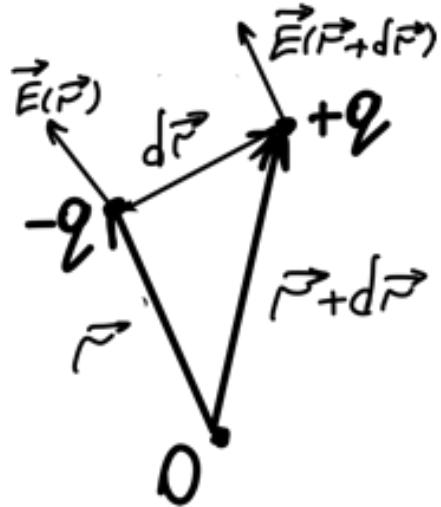


$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum_i [\vec{r}_i \times q_i \vec{E}] = \sum_i [q_i \vec{r}_i \times \vec{E}] = [(\sum_i q_i \vec{r}_i) \times \vec{E}] = [\vec{d} \times \vec{E}]$$

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{d} \times \vec{E}]}$$

Сила:

Рассмотрим случай двух зарядов:



В однородном поле  $F = 0$ , если полный заряд равен нулю:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E} = (\sum_i q_i) \vec{E} = 0$$

$$\vec{F} = q \vec{E}(d\vec{r} + d\vec{r}) - q \vec{E}(\vec{r}) = q(\vec{E}(d\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r})) = q(d\vec{r} \cdot \nabla) \vec{E} = (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E}$$

с учетом , что  $\text{rot} \vec{E} = 0$ :

$$0 = [\nabla \times \vec{E}] \Rightarrow 0 = [\vec{d} \times [\nabla \times \vec{E}]] \underset{bac-cab}{=} \nabla \left( \vec{d} \cdot \vec{E} \right) - \vec{E} \cdot \vec{d} \nabla \Rightarrow \nabla \left( \vec{d} \cdot \vec{E} \right) = (\vec{d} \nabla) \vec{E}$$

Получаем нашу силу:

$$\vec{F} = \nabla (\vec{d} \cdot \vec{E})$$

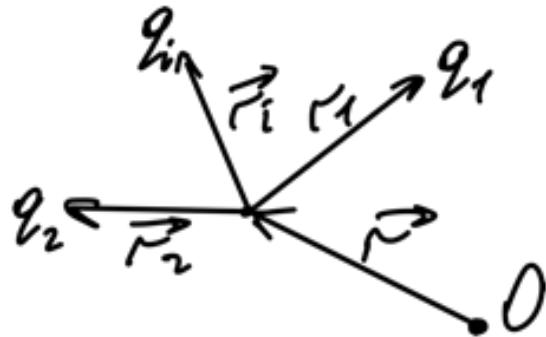
Можно ввести потенциальную функцию по общему правилу:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Тогда

$$U = -\vec{d} \cdot \vec{E}$$

Обобщим на случай нескольких зарядов:



Предполагается, что система мала по сравнению с масштабами изменения электрического поля:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_i (\vec{r} + \vec{r}_i)$$

с учетом, что  $\sum_i q_i = 0$ , получим:

$$\vec{F} = \sum_i q_i (\vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_i) - \vec{E}(\vec{r})) = \sum_i q_i (\vec{r}_i \nabla) \vec{E} = \sum_i (q_i \vec{r}_i \nabla) \vec{E} = ((\sum_i q_i) \vec{r}_i \nabla) \vec{E} = (\vec{d} \nabla) \vec{E}$$

Получим нашу силу:

$$\boxed{\vec{F} = \nabla (\vec{d} \cdot \vec{E})}$$

и

$$U = -\vec{d} \cdot \vec{E}$$

В случае упругого диполя:

$$\vec{d} \stackrel{df}{=} \alpha \vec{E}$$

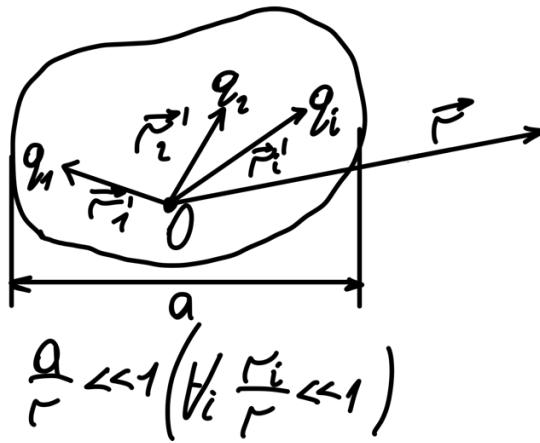
тогда запишем нашу силу:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \nabla \left( \vec{d} \cdot \vec{E} \right) = \nabla \left( \alpha \vec{E} \cdot \vec{E} \right) = \frac{1}{2} \left[ \nabla \left( \alpha \vec{E} \cdot \vec{E} \right) + \nabla \left( \alpha \vec{E} \cdot \vec{E} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \nabla \left( \alpha \vec{E} \cdot \vec{E} \right) = \frac{1}{2} \nabla \left( \vec{d} \cdot \vec{E} \right) = \vec{F} \end{aligned}$$

с учетом  $\vec{F} = -\nabla U$ , получаем  $U = -\frac{1}{2} \vec{d} \cdot \vec{E}$

## 12. Электрический квадрупольный момент. Тензор квадрупольного момента для аксиально-симметричной системы зарядов.

Электрический квадрупольный момент



Точное решение:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} =: \sum_i \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Нужно разложить  $\frac{1}{\vec{r} - \vec{r}'}$ . Перейдем к тензорной записи:

$$\vec{r}(x, y, z) =: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_\alpha, \text{ аналогично } \vec{r}' - x'_\alpha$$

Индексы  $\alpha, \beta \in [1, 2, 3]$

По сути раскладываем функцию:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \underbrace{\frac{1}{r}}_{\substack{l=0 \\ \text{монароль}}} + \underbrace{(-x'_\alpha) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{r}}_{l=1 \text{ диполь}} + \underbrace{\frac{1}{2} (-x'_\alpha) (-x'_\beta) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r}}_{l=2 \text{ квадруполь}} + \dots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} - ?$$

Найдем:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{1}{2r^3} 2x_1 = -\frac{x_1}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{x_1}{r^3} \right) = -x_1 \left( -\frac{1}{r^4} \frac{x_2}{r} \right) = \frac{3x_1 x_2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{x_1}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} \cdot 1 + \frac{3x_1 x_2}{r^5}$$

↓

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{-\delta_{\alpha\beta} r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}$$

Таким образом квадрупольный член имеет вид:

$$\varphi = \Sigma q \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta \left( \frac{-\delta_{\alpha\beta} r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5} \right)$$

$$Q_{\alpha\beta} := \Sigma \frac{1}{2} q x_\alpha x_\beta$$

тогда

$$\begin{aligned} \varphi &= Q_{\alpha\beta} \frac{-\delta_{\alpha\beta} r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5} \\ Tr \left( \frac{-\delta_{\alpha\beta} r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5} \right) &= \frac{-\delta_{\alpha\beta} r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5} = \\ &= \frac{-(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) r^2 + 3(x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3)}{r^5} = \frac{-3r^2 + 3r^2}{r^5} = 0 \end{aligned}$$

Хотим:

$$\varphi = D_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} \text{ Как найти } D_{\alpha\beta}?$$

$D_{\alpha\beta} : 3Q_{\alpha\beta} - ? \cdot \delta_{\alpha\beta} r'^2$  подберем ? так, чтобы  $Tr(D_{\alpha\beta}) = 0$ , так как  $\rightarrow$

$\rightarrow$  при этом  $D_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} r^2 = 0 (= D_{\alpha\beta} = 0)$

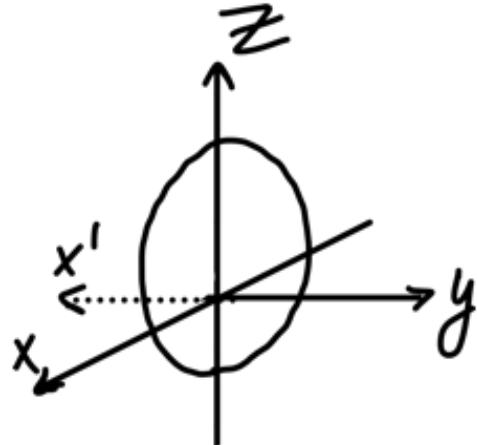
$$D_{\alpha\beta} = 3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2 \text{ Действительно } Tr(D_{\alpha\beta}) = D_{\alpha\alpha} = 3r'^2 - 3r'^2 = 0$$

Тогда

$$\varphi = \Sigma q (3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2) \cdot \frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5}$$

Таким образом  $D_{\alpha\beta} = \Sigma q (3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2)$

Тензор квадрупольного момента для аксиально-симметричной системы зарядов



Вопрос:

$$D'_{xy} - ?$$

||

$$D'_{12} - ?$$

$$x'_1 x'_2 = x' y' = (-y)x = -xy \quad \text{или} \quad x'_1 x'_2 = -x_1 x_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow D'_{12} = -D_{12}$$

Должно быть  $D'_{12} = D_{12}$  из-за симметрии, поэтому имеем:

$$D_{12} = 0$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}D \end{pmatrix}$$

Что?

$$\varphi_2 = D_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5} = \frac{1}{2r^5} (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ = \frac{D}{2r^5} (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -x_1/2 \\ -x_2/2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{D}{2r^5} \left( -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_3^2 \right) = \frac{D}{2r^5} \left( -\frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 \right) = \\ = \frac{D}{2r^5} \left( -r^2 \frac{\sin^2 \theta}{2} + r^2 \cos^2 \theta \right) = \frac{D}{2r^3} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$$

где последний член это полином Лежанра  $P(\cos \theta)$

Вкратце о аксиально-симметричном тензоре:

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}D_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}D_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}$$

$$1) D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$$

$$2) D'_{xy} = -D_{yx} = -D_{xy} (\text{ свойство тензора при повороте на } 90^\circ)$$

$$D'_{xy} = D_{xy} (\text{ из симметрии })$$

↓

$$D_{xy} = 0$$

$$3) D'_{xz} = -D_{xz} (\text{ свойство тензора при повороте на } 180^\circ)$$

$$D'_{xz} = D_{xz}$$

↓

$$D_{xz} = 0$$

### 13. Энергия электрического поля. Плотность энергии электрического поля.

В объеме  $V : \Delta\varphi = 0$  и граничные условия  $\oint\limits_{S_i} (-\nabla\varphi)d\vec{S} = 4\pi q_i \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  задача линейна.



$$\delta A = \varphi_i dq_i \left| \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_i = \alpha \varphi_i \\ \tilde{q}_i = \alpha q_i, \tilde{q}_i = q_i d\alpha (0 \leq \alpha \leq 1) \end{array} \right.$$

$$\Delta A = \int \sum_i \tilde{\varphi}_i d\tilde{q}_i = \int \sum_i \alpha \varphi_i d(\alpha q_i) = \left( \int_0^1 \alpha d\alpha \right) \sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2} \varphi_i q_i$$

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{E^2}{8\pi} dV &= \iiint_V \frac{(-\nabla\varphi)^2}{8\pi} dV = [\nabla(\varphi\nabla\varphi) = (\nabla\varphi)^2 + \varphi\nabla\varphi = (\nabla\varphi)^2] = \\
&= \iiint_V \frac{1}{8\pi} \nabla(\varphi\nabla\varphi) dV = \frac{1}{8\pi} \left( \sum_i \iint_{S_i} \varphi(-\nabla\varphi) d\vec{S} + \iint_{S_\infty} \varphi(\nabla\varphi) d\vec{S} \right) = \\
&= \frac{1}{8\pi} \sum_i \varphi_i \iint_{S_i} \vec{E} d\vec{S} = [\iint_{S_i} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q_i] = \frac{1}{2} \varphi_i q_i
\end{aligned}$$

Плотность энергии:  $w = \frac{E^2}{8\pi}$ , энергия  $\boxed{W = \iiint w dV}$ .

#### 14. Электрическая ёмкость. Матрица ёмкостных коэффициентов, её симметричность.

##### Электрическая ёмкость

Конденсатор из двух проводников:



$$C = \frac{|q|}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Уединенный конденсатор:

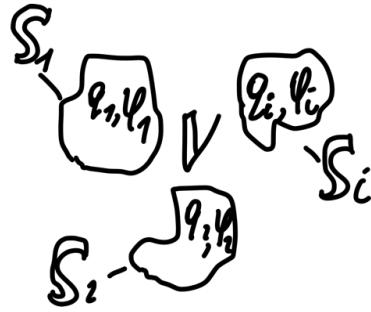


$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Энергия конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$

## Матрица емкостных коэффициентов, её симметричность



$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & \hat{S} & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

или в другом виде:

$$\varphi_i = S_{ij}q_j$$

где  $S_{ij}$ -матрица потенциальных коэффициентов,

$$q_i = C_{ij}\varphi_j$$

где  $i,j$ -матрица емкостных коэффициентов,  $S_{ij}^{-1} = C_{ij}$ -симметричны.  
Свойства матриц:

$$dW = \sum_i \varphi_i dq_i = \varphi_i dq_i$$

и

$$W = \frac{1}{2} \varphi_i q_i = dW = \frac{1}{2} \varphi_i dq_i + \frac{1}{2} q_i d\varphi_i$$

↓

$$\varphi_i dq_i = q_i d\varphi_i$$

где  $\varphi_i = S_{ij}q_j$

$$0 = S_{ij}q_j dq_i - q_i S_{ij} dq_i = S_{ij}q_j dq_i - q_j S_{ji} dq_i = (S_{ij} - S_{ji})q_i dq_j$$

получаем:

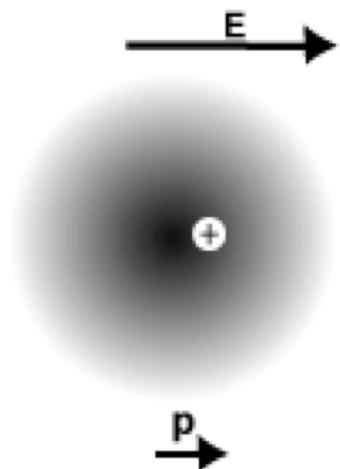
$$\begin{aligned} S_{ij} &= S_{ji} \\ &\Downarrow \\ C_{ij} &= C_{ji} \end{aligned}$$

это справедливо  $\forall q_i$  и  $\forall dq_i$ .

## 15. Диэлектрики. Связанный заряд. Вектор поляризации. Электрическое поле в диэлектрике. Вектор индукции. Диэлектрическая проницаемость.

### Диэлектрики

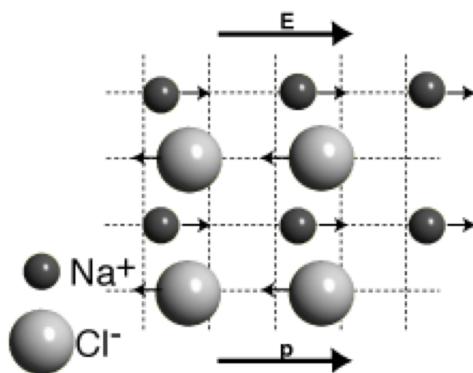
*Неполярный диэлектрик*(к примеру  $H_2, O_2$ ):



$$\vec{d}_i = 0$$

Под действием поля  $\vec{E}$  происходит смещение электронного облака и  $\langle \vec{d}_i \neq 0 \rangle$

*Ионный диэлектрик:*

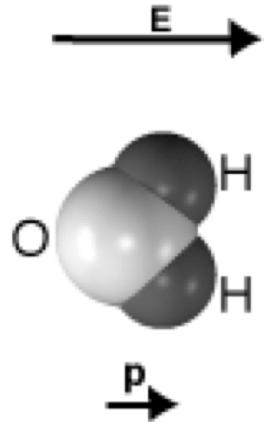


$$\vec{d}_i = 0$$

Если  $\vec{E} = 0 \Rightarrow \langle \vec{d}_i \rangle = 0$

Если  $\vec{E} \neq 0 \Rightarrow U = -\vec{d}\vec{E}, \langle \vec{d} \rangle \neq 0$

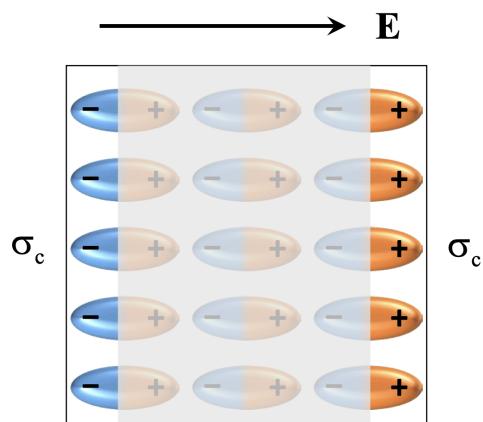
Полярный диэлектрик:



$$\vec{d}_i \neq 0$$

Если  $\vec{E} = 0 \Rightarrow \langle \vec{d} \rangle = 0$ ,  $U = -\vec{d}\vec{E}$

### Связанный заряд и Вектор поляризации



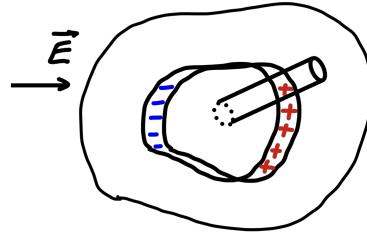
$$\iiint \langle \rho_c \rangle dV = 0, \text{ } \rho_c\text{-связанные заряды}$$

$$\langle \rho_c \rangle = \frac{1}{\Delta V} \iint_V \rho_c(\vec{r} + \vec{\xi}) d\xi, \Delta V \sim 10^{-6} \text{ см}^3$$

Определение вектора поляризации:

$$\boxed{\langle \rho_c \rangle = -\operatorname{div} \vec{P}}$$

Вне тела  $\vec{P} = 0$



По формуле Остроградского-Гаусса (1):

$$\iiint <\rho_c> dV = - \iiint \operatorname{div} \vec{D} dV \stackrel{(1)}{=} - \oint \vec{P} d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n = -\sigma_c}$$

Связь вектора поляризации и дипольного момента:

$$\vec{d} = \iiint <\rho_c> \vec{r} dV = - \iiint \vec{r} (\nabla \vec{P}) dV = - \iiint_{\rightarrow 0} \nabla (\vec{P} \vec{r}) dV + \iiint (\vec{r} \nabla) \vec{P} dV =$$

$$\nabla (\vec{P} \vec{r}) = \vec{r} (\nabla \vec{P}) + (\vec{r} \nabla) \vec{P}, (\vec{r} \nabla) \vec{P} = \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) (P_1, P_2, P_3) = \vec{P}$$

$$= \iiint \vec{P} dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = n <\vec{d}>}$$

Вектор поляризации  $\vec{P}$  равен дипольному моменту единицы объема поляризованного диэлектрика.

$$\boxed{\vec{P} = \chi \vec{E}}, \chi\text{-поляризуемость.}$$

### Электрическое поле в диэлектрике и Вектор индукции и Диэлектрическая проницаемость

$$\begin{cases} \operatorname{div} <\vec{E}> = 4\pi(\rho + <\rho_c>) \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E} + 4\pi \vec{P}) &= 4\pi\rho \Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \\ \vec{D} &:= \vec{E} + 4\pi \vec{P} \text{ (нет физического смысла)} \end{aligned}$$

$<\vec{E}>$ :=  $\vec{E}$ -напряженность электрического поля,  
 $\vec{D}$ -вектор индукции электрического тока.

По теореме Гаусса:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi Q$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi, \varphi = - \int \vec{E} d\vec{l}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\chi\vec{E} = (1 + 4\pi\chi)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

$\varepsilon$ -диэлектрическая проницаемость ( $\varepsilon \geq 1$ )

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi}}$$

$$\rho_c = -\nabla \left( \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} \right) = -\nabla \left( \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E} \right) = \frac{1 - \varepsilon}{4\pi} \nabla \vec{E} - \vec{E} \frac{\nabla \varepsilon}{4\pi}$$

Итого имеем:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho & \iint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi Q \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 & \oint \vec{E} d\vec{S} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} & \end{cases}$$

## 16. Уравнения электрического поля в диэлектрике. Границные условия.

### Уравнения электрического поля в диэлектрике

Усреднение:  $\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\langle \rho_c \rangle + \rho) & \langle \rho_c \rangle = -\operatorname{div} \vec{P} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 & \vec{P} = \chi \langle \vec{E} \rangle \end{cases}$

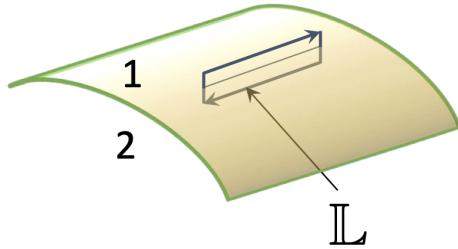
Обозначения:  $\begin{aligned} \langle \vec{E} \rangle &=: \vec{E} \\ \vec{E} + 4\pi \vec{P} &=: \vec{D} \end{aligned}$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 & \vec{E} = -\nabla \varphi \end{cases}$$

Вектор индукции:  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = (1 + 4\pi\chi)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$

## Границные условия

Тангенсальная компонента:

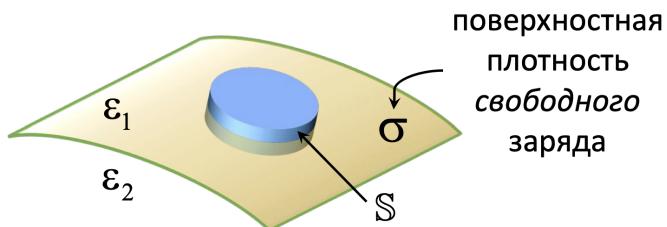


$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \end{cases} \Rightarrow |E_{1\tau}| = |E_{2\tau}|$$

То есть тангенсальная компонента вектора напряжённости электрического поля на границе непрерывна, а так же:

$$\varphi_1| = \varphi_2|$$

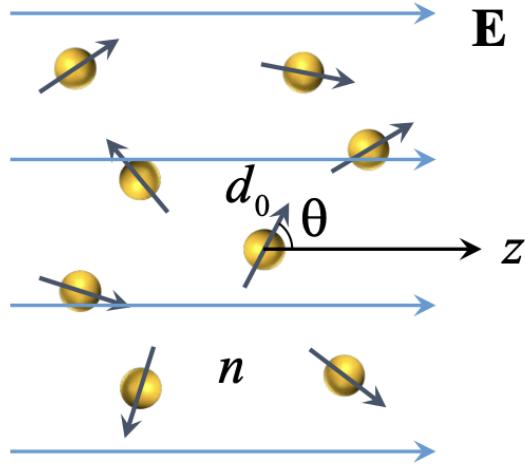
Нормальная компонента:



$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \\ \iint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi Q \end{cases} \Rightarrow D_{1n}| - D_{2n}| = 4\pi\sigma \text{ или } |\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n}| = 4\pi\sigma$$

То есть нормальная компонента вектора индукции электрического поля терпит разрыв.

## 17. Оценка диэлектрической проницаемости полярного диэлектрика (газа).



Вероятность нахождения для  $\theta + d\theta$ :

$$W \sim e^{-\frac{U}{kT}}, \text{ где } U = -d_0 \vec{E} = -d_0 \cos \theta$$

$$n = \frac{N}{V} : dn = A e^{\left(\frac{d_0 E \cos \theta}{kT}\right)} d\Omega, \text{ где } d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

$$\int A e^{\left(\frac{d_0 E \cos \theta}{kT}\right)} d\Omega = n$$

Для вектора поляризации  $\vec{P} = n < \vec{d} >$ :

$$\vec{P} = n < \vec{d}_z > = n \frac{\int d_0 \cos \theta e^{\frac{d_0 E \cos \theta}{kT}} \cdot 2\pi \sin \theta d\theta}{\int e^{\frac{d_0 E \cos \theta}{kT}} \cdot 2\pi \sin \theta d\theta} = \left[ \alpha = \frac{d_0 E}{kT} \right] =$$

$$= n \frac{\int d_0 \cos \theta e^{\alpha \cos \theta} d \cos \theta}{\int e^{\alpha \cos \theta} d \cos \theta} = n^2 d_0 \frac{\frac{d}{d\alpha} \int_{-1}^1 e^{\alpha \cos \theta} d \cos \theta}{\int_{-1}^1 e^{\alpha \cos \theta} d \cos \theta} =$$

$$= n^2 d_0 \frac{d}{d\alpha} \ln \left[ \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 e^{\alpha \cos \theta} d(\alpha \cos \theta) \right] = n^2 d_0 \frac{d}{d\alpha} \ln \left[ \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{\alpha} \right] =$$

$$= n^2 d_0 \frac{d}{d\alpha} \ln \left[ 2 \frac{\sinh \alpha}{\alpha} \right] = n^2 d_0 \frac{\alpha}{2 \sinh \alpha} \left( \frac{2 \cosh \alpha}{\alpha} - \frac{2 \sinh \alpha}{\alpha^2} \right) = n^2 d_0 \left( \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$$

Где  $\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} = L(\alpha)$  функция Ланжевена.

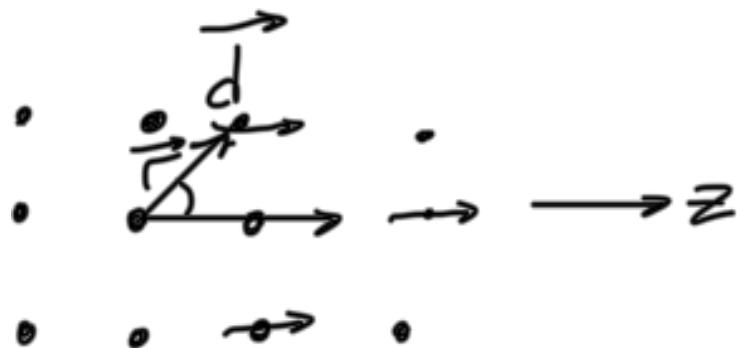
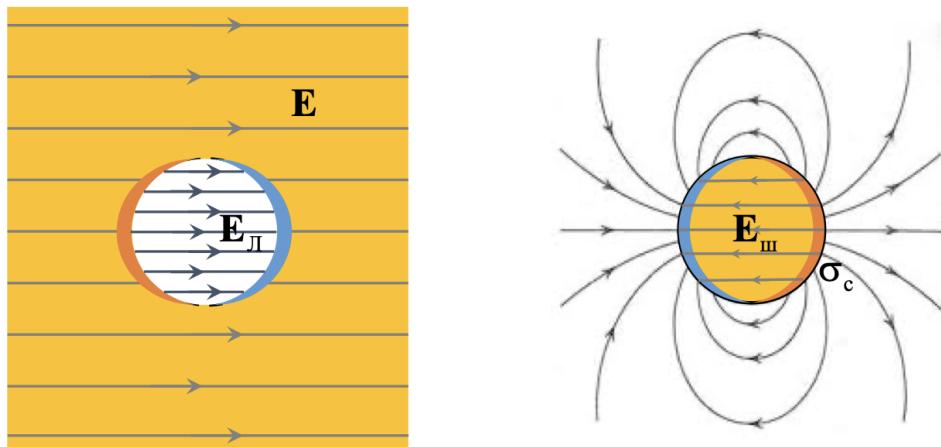
$$\operatorname{cth} \alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{45}$$

$$P_z = n^2 \frac{d_0^2 E_z}{kT}, \text{ где } n = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22,4 \cdot 10^3} = \frac{N_A}{V_A} \text{ и } d_0 = e \cdot l = 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 0,5 \cdot 10^{-8}$$

$$\chi = \frac{nd_0^2}{kT} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22,4 \cdot 10^3} \cdot \frac{(4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 0,5 \cdot 10^{-8})^2}{1,38 \cdot 10^{-16}} \approx 4 \cdot 10^{-3}$$

## 18. Локальное поле в диэлектрике (поле Лоренца). Формула Клаузиуса – Мессотти.

Локальное поле в диэлектрике (поле Лоренца)



При усреднении по углам:

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle \underset{\text{изотропность}}{=} 3 \langle z^2 \rangle$$

$$\langle \vec{E} \rangle = \left\langle -\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{3(d\vec{r})\vec{r}}{r^5} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{r^3}(-r^2 + 3z^2)\vec{e}_z \right\rangle = 0$$

$$\vec{E}_{\text{л}} = \vec{E} - \vec{E}_{\text{ш}} \text{ (по принципу суперпозиции)}$$

$$E_{\tau}|_A - \text{непр.} : -\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{3(\vec{d}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{\text{л}} = \vec{E} - \vec{E}_{\text{ш}} = \vec{E} + \frac{\vec{d}}{r^3} \\ \vec{d} = \frac{4}{3}\pi r^3 \vec{P} \end{cases}$$

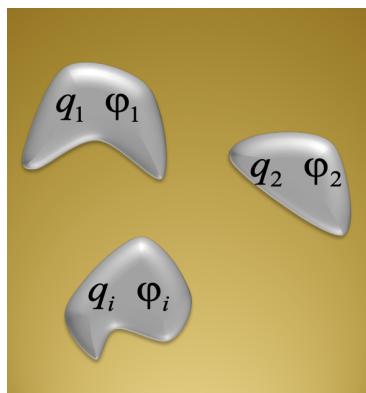
$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{л}} = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi \vec{P}$$

### Формула Клаузиуса-Моссотти

$$\left| \begin{array}{l} \vec{d} = l\vec{E}_l \Rightarrow (\varepsilon - 1)\vec{E} = 4\pi \vec{P} \Rightarrow \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon - 1} \vec{P} \\ \vec{P} = n\vec{d} \Rightarrow \vec{E}_{\text{л}} = \frac{4\pi}{\varepsilon - 1} \vec{P} + \frac{4}{3}\pi \vec{P} = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon - 1} \right) \vec{P} = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon - 1} \right) n\alpha \vec{E}_{\text{л}} \Rightarrow \\ \vec{E}_{\text{л}} = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi \vec{P} \Rightarrow \text{формула Клаузиуса-Моссотти:} \\ \varepsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \Rightarrow \boxed{\frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon - 1} = \frac{4\pi}{3} n\alpha} \end{array} \right.$$

### 19. Энергия электрического поля в диэлектрике.

Линейная среда ( $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \vec{P} = \chi \vec{E}$ ), все похоже на вакуум.



$$\delta W = \varphi_i dq_i \Rightarrow W = \frac{1}{2} \varphi_i q_i$$

$$\tilde{q}_i = \alpha q_i \text{ и } \tilde{\varphi}_i = \alpha \varphi_i, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq 1$$

Перепишем энергию:

$$W = \int dW = \int \tilde{\varphi}_i d\tilde{q}_i = \int_0^1 \alpha \varphi_i q_i d\alpha = \frac{1}{2} \varphi_i q_i$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned}
 W &= \iiint_V \frac{\vec{E} \vec{D}}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \iiint_V (-\nabla \downarrow \varphi) \vec{D} dV = \\
 &\text{Применим: } (\nabla(\varphi \vec{D})) = \vec{D} \nabla \varphi + \varphi \nabla \vec{D} \\
 &= -\frac{1}{8\pi} \iiint_V \nabla(\varphi \vec{D}) dV + \frac{1}{8\pi} \iiint_V \varphi \nabla \vec{D} dV = \\
 &= \sum_i \iint_{S_i} \frac{1}{8\pi} \varphi \vec{D} d\vec{S} - \iint_{S_\infty} \varphi \vec{D}_{\rightarrow 0(\propto 1)} d\vec{S} = \frac{1}{8\pi} \sum_i \varphi_i \iint_{S_i} \vec{D} d\vec{S} = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2} \varphi_i q_i
 \end{aligned}$$

*Доказано.*

Нелинейная среда:  $\delta W = \varphi_i \delta q_i \neq W = \frac{1}{2} \varphi_i d q_i$

В предыдущем пункте всюду меняем:

$$\begin{aligned}
 W &= \delta W, q_i \rightarrow \delta q_i, \vec{D} = \delta \vec{D} \\
 \delta W &= \iiint \frac{\vec{E} \delta \vec{D}}{8\pi} dV
 \end{aligned}$$

## 20. Электрический ток, дрейфовая скорость, подвижность. Объемная и поверхностная плотность тока. Электропроводность. Закон Ома.

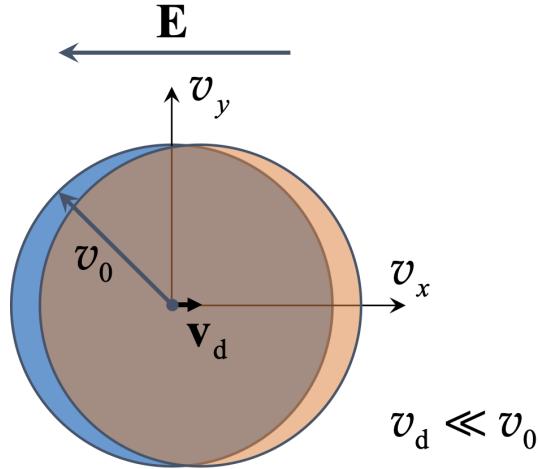
**Электрический ток, дрейфовая скорость, подвижность**

Скорость Ферми в Me(metal?):

$$v_F \sim 10^6 \text{ м/с}$$

$$\frac{4}{3} \pi v_F^3 \propto n$$

Пространство скоростей квазиэлектронов(?):



При  $\vec{E} = 0$ , то  $\langle \vec{v} \rangle = 0$

При конченом малом  $\vec{E}$ , то  $\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_d \rangle$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{E}e}{m}t$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_0 \rangle_{\rightarrow 0} + \frac{\vec{E}e}{m} \langle t \rangle$$

Где  $\langle t \rangle = \tau$  – время релаксации импульса.

Релаксация импульса:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{E}e}{m}\tau = \vec{v}_d \Rightarrow \frac{e\tau}{m}\vec{E} = \vec{v}_d$$

Или

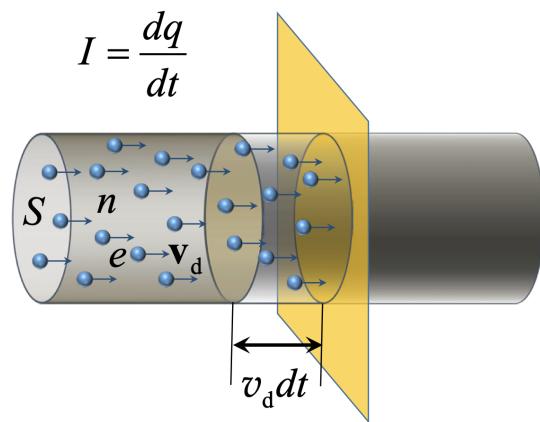
$$\vec{v}_d = \mu \vec{E}$$

где  $\mu = \frac{e\tau}{m}$  – подвижность носителей заряда.

## Объемная и поверхностная плотность тока

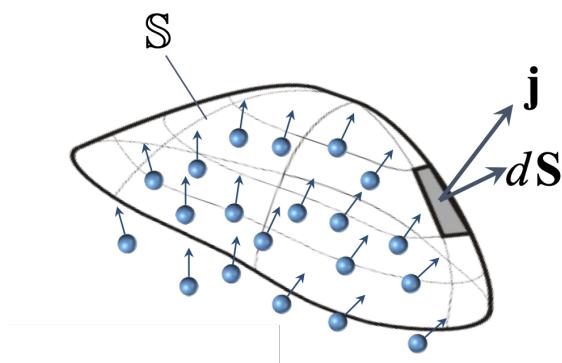
Ток-это заряд в единицу времени.

*Ток в проводе:*



$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{env dt \cdot S_0}{dt} = ne \vec{v} \cdot \vec{S}$$

Электрический ток через  $\vec{S}$ :



$$\begin{aligned} I &\stackrel{df}{=} \iint_S \vec{j} d\vec{S} \\ I &= \iint_S ne \vec{v}_d d\vec{S} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \vec{j} = ne \vec{v}_d \\ \vec{j} = \rho \vec{v}_d \end{array} \right.$$

*Ток по поверхности:*



$$dI = i dl, \text{ где } i - \text{поверхностная плотность тока.}$$

## Электропроводность

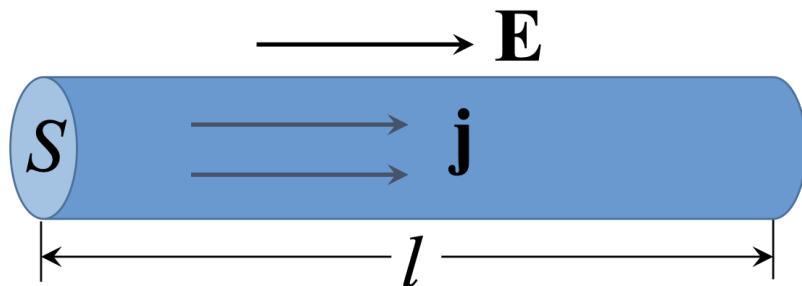


$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , где  $\sigma$  – электропроводность (проводимость).

$$\begin{aligned} \vec{j} &= ne\vec{v}_d & \Rightarrow \boxed{\sigma = ne\mu = \frac{ne^2\tau}{m}} \\ \vec{v}_d &= \frac{e\tau}{m}\vec{E} = \mu\vec{E} \\ \sigma &= ne\mu = \frac{ne^2\tau}{m} - \text{формула Пауля Друде.} \end{aligned}$$

## Закон Ома

Закон Ома в дифференциальной форме:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$



$$jV = \sigma EV$$

$$jSl = \sigma ElS \Rightarrow I \cdot l = \sigma US \Rightarrow U = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} I$$

Со школы:  $U = \rho \frac{l}{S} I$ ,

$$\rho = \frac{1}{\sigma} - \text{удельное сопротивление.}$$

## 21. Закон сохранения заряда. Уравнение непрерывности. Закон Джоуля-Ленца.

### Закон сохранения заряда

Заряд:

1. Заряд является величиной инвариантной относительно переходов в различные СО;
2. Величина заряда не зависит от скорости частицы;
3. Ни в каких физических процессах  $\Sigma$  количества заряда не меняется.

### Уравнение непрерывности

Закон сохранения заряда:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = -I & \Rightarrow \iiint_V \frac{d\rho}{dq} dV + \oint_{\delta V} \vec{j} d\vec{S} = 0 \\ I = \oint_{\delta V} \vec{j} d\vec{S} & \quad \left| \iiint_V \left( \frac{d\rho}{dq} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\rho}{dq} + \operatorname{div} \vec{j} = 0} \right. \\ q = \iint_V \rho dV & \end{aligned}$$

Где  $\rho$ —плотность заряда,  $\vec{j}$ —плотность потока заряда.

Если процесс стационарный, при котором токи и заряды не меняются со временем, то:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

### Закон Джоуля-Ленца

$$\frac{d\check{Q}}{dV} = \langle \vec{F} \vec{v} \rangle n = e \vec{E} \langle \vec{v} \rangle n = \vec{j} \vec{E} (\vec{j} = ne \langle \vec{v} \rangle)$$

## 22. Уравнения постоянного тока. Границные условия.

### Уравнения постоянного тока

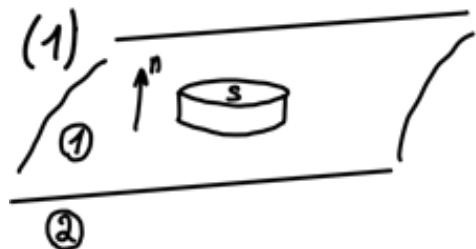
Требуется помочь для корректного ответа на вопрос!

$$I = \frac{U}{R}$$

### Границные условия

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j} = 0 & \quad (1) & (1) \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV = \oint_{\delta V} \vec{j} d\vec{S} = 0 & \quad (1') \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} & \quad \left| \Rightarrow \operatorname{rot} \frac{\vec{j}}{\sigma} = 0 \right. & (2) & \quad (2) \Rightarrow \iint_S \operatorname{rot} \frac{\vec{j}}{\sigma} dS = \oint_{\delta S} \frac{\vec{j}}{\sigma} dl = 0 & \quad (2') \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 & & & & \end{aligned}$$

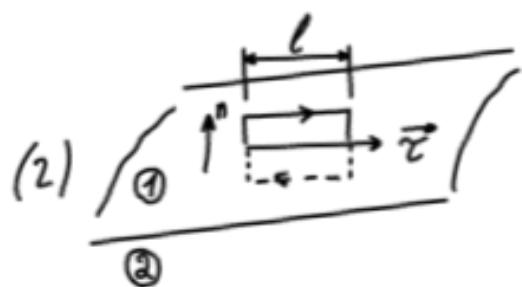
Нормальная составляющая



$$(1') = j_{1n}|S - j_{2n}|S = 0 \Rightarrow j_{1n} = j_{2n}$$

$j_n$  — непр.

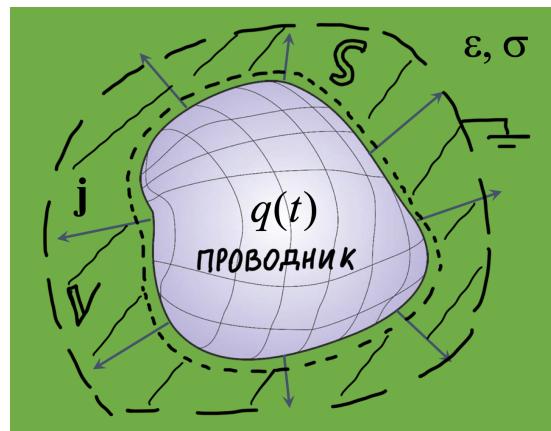
Тангенциальная составляющая



$$(2') \Rightarrow \frac{j_{1\tau}}{\sigma_1} \Big| l - \frac{j_{2\tau}}{\sigma_2} \Big| l = 0 \Rightarrow \frac{|j_{1\tau}|}{\sigma_1} = \frac{|j_{2\tau}|}{\sigma_2}$$

$\frac{j_\tau}{\sigma}$  — непр.

## 23. Максвелловская релаксация зарядов в среде.



Где  $V$  – объем занятый однородной средой.

По условию:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Уравнение непрерывности в объеме  $V$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j} = -\operatorname{div} \sigma \vec{E} = -\sigma \operatorname{div} \vec{E} = -\sigma \operatorname{div} \frac{\vec{D}}{\epsilon} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \operatorname{div} \vec{D} = -\frac{\sigma}{\epsilon} 4\pi \rho$$

Получили уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho}{\tau}, \text{ где } \tau := \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$$

В интегральной форме:

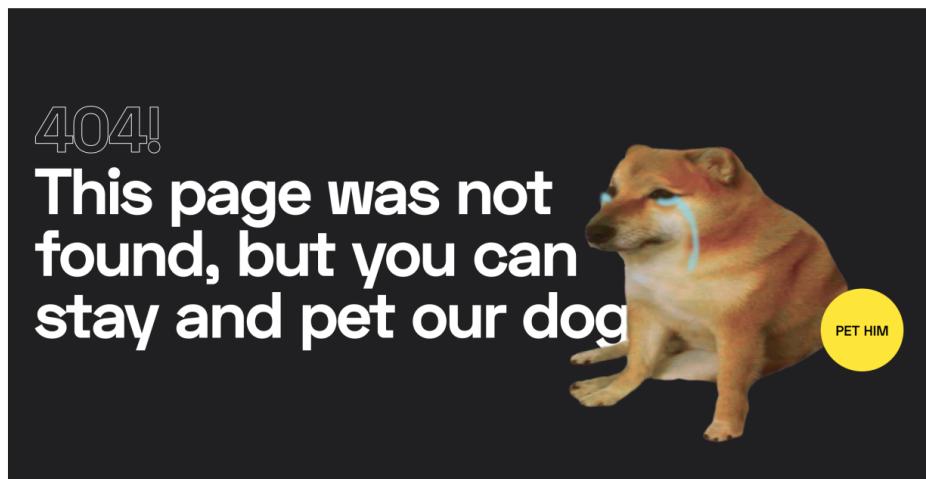
$$\frac{dq}{dt} = -I = -\iint_S \vec{j} d\vec{S} = -\iint_S \sigma \vec{E} d\vec{S} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \iint_S \vec{D} d\vec{S} = -\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} q$$

Уравнение релаксации:  $\boxed{\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{\tau}}, \text{ где } \tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}.$

Решение:  $q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

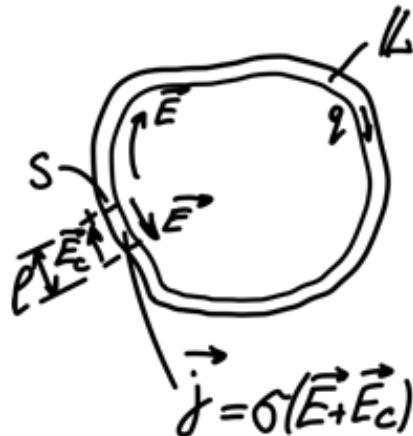
## 24. Метод конформных отображений для расчёта сопротивления тонких плёнок произвольной формы.

Требуется стороная помощь, для нахождения качественного ответа!  
Возможно смена данной темы на тему про диод!



## 25. Электродвижущая сила. Электрические цепи. Законы Кирхгофа.

### Электродвижущая сила



$\vec{F}$  – стороняя сила, действующая на единичный заряд.  
Стороннее "электрическое" поле  $\vec{E}_c = \frac{\vec{F}_c}{q}$ .

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_c = q(\vec{E} + \vec{E}_c)$$

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = q \left( \oint_L \vec{E} d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_c d\vec{l} \right) = q \oint_L \vec{E}_c d\vec{l}$$

$$-jV = \sigma V(E - E_c) \Rightarrow -jSl = \sigma S(El - E_c l)$$

$$\begin{aligned} -jSl &= \sigma S(El - E_c l) \\ \varepsilon &\stackrel{df}{=} \oint_L \vec{E}_c d\vec{l} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow -Il = \sigma S(U - \varepsilon) \\ U = -\frac{q}{\sigma} \frac{l}{S} I + \varepsilon \end{array} \right.$$

Напоминание:  $\frac{q}{\sigma} = \rho$ ,  $\rho \frac{l}{S} = r$  – внутренне сопротивление источника.

Итог:  $U = \varepsilon - Ir$

## Электрические цепи и законы Кирхгофа

*Первый закон Кирхгофа (закон токов):*

$$\sum_i I_i = 0,$$

где:

- $I_i$  — сила тока, текущего в узел (положительное значение для входящих токов и отрицательное для выходящих).

*Физический смысл:* Сумма токов, входящих в узел электрической цепи, равна сумме токов, выходящих из него. Это выражение закона сохранения заряда.

*Второй закон Кирхгофа (закон напряжений):*

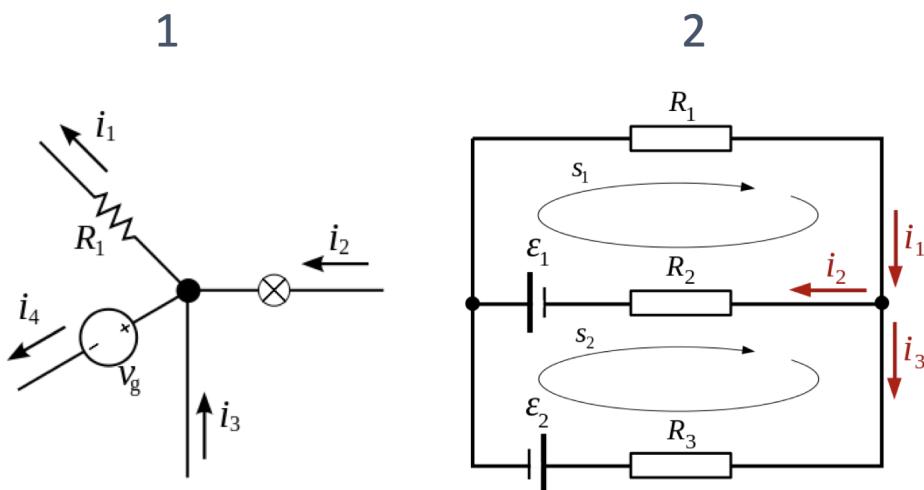
$$\sum_k \mathcal{E}_k - \sum_j I_j R_j = 0,$$

где:

- $\mathcal{E}_k$  — электродвижущая сила (ЭДС) источников в контуре, измеряется в вольтах (В);
- $I_j$  — сила тока в ветви, измеряется в амперах (А);
- $R_j$  — сопротивление элементов в контуре, измеряется в омах ( $\Omega$ ).

*Физический смысл:* Алгебраическая сумма ЭДС и падений напряжений на всех элементах любого замкнутого контура электрической цепи равна нулю. Это следствие закона сохранения энергии.

*Пример применения:*



1. Для узла: Если три тока подходят к узлу, а два выходят, то:

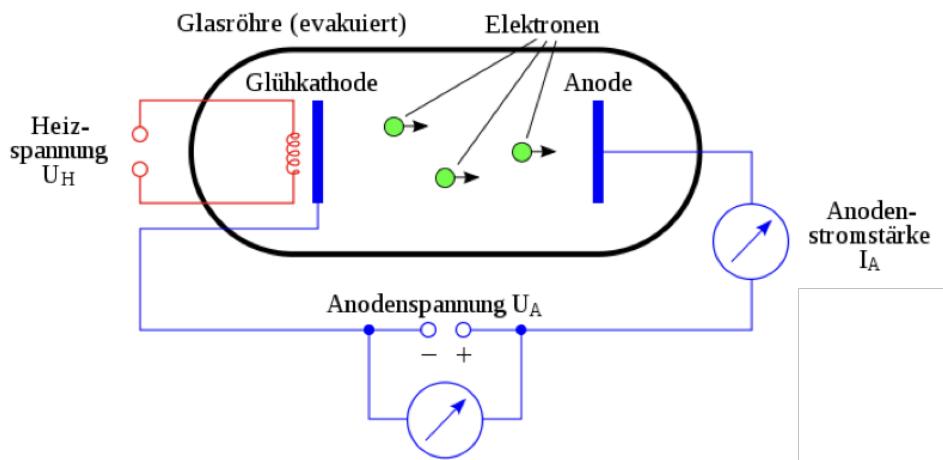
$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

2. Для замкнутого контура: Для цепи с ЭДС  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ , сопротивлениями  $R_1, R_2, R_3$ , и токами  $I_1, I_2, I_3$ :

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0.$$

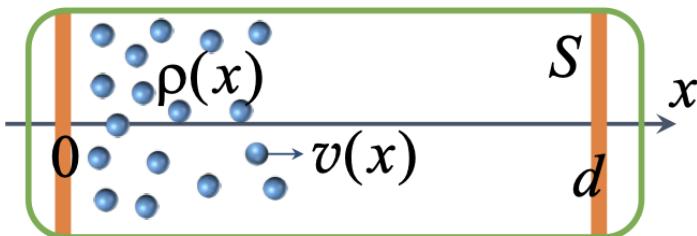
## 26. Ток в вакууме. Закон «трёх вторых».

Вакуумный диод:



Термоэлектронная эмиссия - из нагретого электрода вылетают электроны.

Режим насыщения-при больших напряжениях электрон эмитировал и тут же его притянуло к положительному электроду.



$\Delta\varphi = -4\pi\rho = -4\pi ne$ , где  $n$  плотность электронов, зависит от  $x$

$$I = jS. \text{ Из уравнения непрерывности: } \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right)^0 \text{ (стационарный режим)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0 \text{, т.e } j = \text{const} = \frac{I}{S}$$

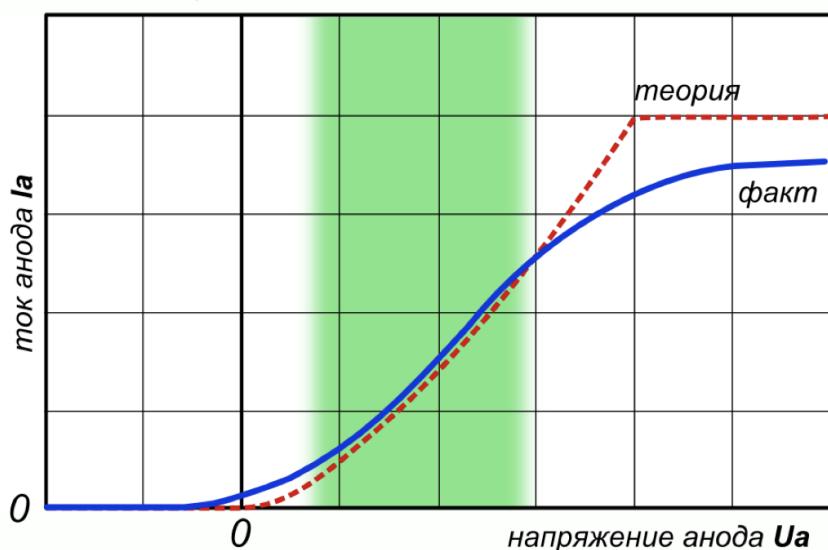
$$\begin{cases} \varphi'' = -4\pi ne \\ \text{const} = \frac{I}{S} = nev \\ \frac{mv^2}{2} = e\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \sqrt{\frac{2e}{m}} \varphi^{\frac{1}{2}} \\ ne = -\frac{I}{S} \frac{1}{v} \end{cases}$$

Гран.условия: 1)  $\varphi'|_{x=0} = 0$ ; 2)  $\varphi|_{x=0} = 0$ ; 3)  $\varphi|_{x=d} = U$ .

$$\begin{aligned} v = \sqrt{\frac{2e}{m}} \varphi^{\frac{1}{2}} & \Rightarrow ne = \sqrt{\frac{m}{2e}} \frac{I}{S} & \Rightarrow \varphi' \varphi'' = 4\pi \sqrt{\frac{m}{2e}} \varphi^{\frac{1}{2}} \frac{I}{S} \varphi^{-\frac{1}{2}} \varphi' \\ ne = -\frac{I}{S} \frac{1}{v} & \quad \varphi'' = -4\pi en & \quad \frac{1}{2} (\varphi'^2)' = 4\pi \sqrt{\frac{m}{2e}} (\varphi^{\frac{1}{2}})' \cdot 2 \\ & & \varphi'^2 = 16\pi \underbrace{\sqrt{\frac{m}{2e}} \frac{I}{S} \varphi^{\frac{1}{2}}}_a + \mathcal{O}^{0(\text{Гран.услов.})} \\ & & \varphi' = \sqrt{a} \varphi^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sqrt{a} \varphi^{\frac{1}{4}} \\ & & \frac{4}{3} \varphi^{\frac{1}{4}} = \sqrt{a} x + \mathcal{O}^{0(\text{Гран.услов.})} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3} U^{\frac{3}{4}} = \sqrt{ad} \Rightarrow a = \frac{16}{9} \frac{1}{d^2} U^{\frac{3}{2}} = 16\pi \sqrt{\frac{m}{2e}} \frac{I}{S} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{S}{d^2} U^{\frac{3}{2}}$$

<b>область отсечки</b>	<b>область малых напряжений</b>	<b>область действия закона</b>	<b>область перехода в насыщение</b>	<b>область насыщения</b>
------------------------	---------------------------------	--------------------------------	-------------------------------------	--------------------------



27. Магнитное поле. Сила Ампера. Закон Био – Савара. Сила Лоренца. Движение заряда в магнитном поле. Дрейф в скрещенных полях.