

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Физический факультет  
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Сибирское отделение  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

В.И. Яковлев

# Классическая электродинамика

Часть 1

электричество и магнетизм

Учебное пособие

Новосибирск

2003

ББК В 313 я 73-1

УДК 537, 538

Я 261

Яковлев В. И. Классическая электродинамика: Учеб. пособие/ Новосибир. ун-т. Новосибирск, 2003. 267с.

Учебное пособие содержит изложение первой части годового курса электродинамики, который читается студентам физического факультета Новосибирского государственного университета.

Уровень изложения рассчитан на студентов, изучивших механику и теорию относительности, освоивших начала математического анализа, линейной алгебры и дифференциальной геометрии.

Рецензент

проф. Б. А. Луговцов

Печатается по решению методической комиссии физического факультета и решению ученого совета ИТПМ СОРАН.

- © Новосибирский государственный университет, 2003
- © Институт теоретической и прикладной механики, 2003

# Оглавление

Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА</b>	<b>9</b>
1.1. Закон Кулона . . . . .	9
1.2. Принцип суперпозиции . . . . .	10
1.3. Электрический потенциал . . . . .	11
1.4. Поток вектора $\vec{E}$ . Теорема Гаусса . . . . .	14
1.5. Основное уравнение электростатики . . . . .	18
1.6. Общее решение уравнения Пуассона в безграничном пространстве. Дельта-функция Дирака . . . . .	20
1.7. Силовые линии электрического поля . . . . .	22
1.8. Граничные условия для поля $\vec{E}$ . . . . .	25
1.9. Проводник в электрическом поле . . . . .	29
1.10. О некоторых частных решениях уравнения Лапласа. Пример математической постановки физической задачи . . . . .	30
1.11. Стандартные задачи электростатики. Единственность решения . . . . .	35
1.12. Мультипольное разложение . . . . .	41
1.13. Энергия взаимодействия электрических зарядов. Диполь во внешнем электрическом поле . . . . .	49
1.14. Плотность энергии электрического поля . . . . .	52
1.15. Полиномы Лежандра в решениях уравнения Лапласа . . . . .	58
1.16. Мультипольное разложение для осесимметричного распределения зарядов . . . . .	62
<b>Глава 2. ДИЭЛЕКТРИКИ</b>	<b>67</b>
2.1. Предварительные соображения. Вектор поляризации Электрическое поле в среде . . . . .	67

2.2. Свободные и связанные заряды. Вектор индукции. Система уравнений для поля в диэлектрике. Граничные условия . . . . .	69
2.3. Об электрическом поле в однородном диэлектрике . . . . .	72
2.4. Диэлектрический шар в однородном электрическом поле . . . . .	74
2.5. Первый вывод соотношения $\rho_{\text{св}} = -\text{div}\vec{P}$ . . . . .	76
2.6. Два типа диэлектриков. Оценки величин . . . . .	78
2.7. Второй вывод соотношения $\rho_{\text{св}} = -\text{div}\vec{P}$ . . . . .	81
2.8. Формулы Клаузиуса—Моссотти . . . . .	83
2.9. Энергия электрического поля в диэлектрике . . . . .	86
2.10. Силы, действующие на диэлектрик . . . . .	89
2.11. Тензор натяжений электрического поля . . . . .	96

### Глава 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК 101

3.1. Плотность тока . . . . .	101
3.2. Закон сохранения заряда. Уравнение непрерывности . . . . .	104
3.3. Закон Ома. Проводимость металлов. Условие применимости закона Ома . . . . .	106
3.4. Закон Джоуля—Ленца . . . . .	110
3.5. Электрические цепи. ЭДС. Законы Кирхгофа . . . . .	112
3.6. Граничные условия для полей при наличии тока . . . . .	114
3.7. Об аналогии и характерном отличии между полями в диэлектриках и проводниках . . . . .	116
3.8. Релаксация зарядов в среде . . . . .	120
3.9. Ток в газе и жидкости. Подвижности ионов и электронов. Несамостоятельный разряд в газе . . . . .	121
3.10. Несамостоятельный разряд между двумя параллельными электродами . . . . .	125
3.11. Ток в вакууме. Закон $3/2$ . . . . .	132

### Глава 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ 137

4.1. Взаимодействие постоянных токов. Магнитное поле. Сила Лоренца . . . . .	137
4.2. Закон Био—Савара. Принцип суперпозиции. Системы единиц . . . . .	139
4.3. Вектор-потенциал магнитного поля . . . . .	142
4.4. Уравнение для векторного потенциала и его общее решение в свободном пространстве . . . . .	146
4.5. Основные уравнения магнитного поля . . . . .	150

4.6. Поток и циркуляция магнитного поля . . . . .	151
4.7. Граничные условия и математическая формулировка задачи определения постоянного магнитного поля. Соленоид произвольного поперечного сечения . . . . .	155
4.8. Магнитное поле ограниченной системы токов на больших расстояниях (магнитный диполь) . . . . .	163
4.9. Сила и момент сил, действующие на магнитный диполь во внешнем магнитном поле . . . . .	167
4.10. Связь магнитного и механического моментов атомной системы . . . . .	171
4.11. Прецессия магнитного момента. Магнитный резонанс . . .	173

## **Глава 5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ 177**

5.1. Основные уравнения . . . . .	177
5.2. Доказательство соотношения $\vec{j}_m = c \operatorname{rot} \vec{M}$ . . . . .	180
5.3. Диа- и парамагнетики . . . . .	181
5.4. Интегральные соотношения и граничные условия для поля в магнетиках . . . . .	186
5.5. Примеры полей в присутствии намагничивающихся сред .	190
5.6. О применении скалярного потенциала в задачах магнитостатики . . . . .	194
5.7. Коротко о ферромагнетиках . . . . .	197
5.8. Электромагниты и постоянные магниты . . . . .	202

## **Глава 6. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТ- НЫЕ ПОЛЯ 207**

6.1. Закон электромагнитной индукции . . . . .	208
6.2. Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции. Первая пара уравнений Максвелла . . . . .	210
6.3. Потенциалы электромагнитного поля . . . . .	213
6.4. Ток смещения. Вторая пара уравнений Максвелла . . . .	214
6.5. Квазистационарное приближение . . . . .	218
6.6. Примеры вихревого электрического поля . . . . .	225
6.7. Сохранение магнитного потока. МК-генератор . . . . .	229
6.8. Квазистационарные электромагнитные поля в объемных проводниках. Диффузия поля . . . . .	232
6.9. Периодические электромагнитные поля в объемных проводниках. Скин-эффект . . . . .	239
6.10. Энергия магнитного поля . . . . .	245

6.11. Коэффициенты взаимной индукции. Плотность энергии магнитного поля . . . . .	247
6.12. Силы, действующие на проводники с током . . . . .	253
6.13. Пондеромоторные силы магнитного поля . . . . .	256
6.14. Тензор натяжений магнитного поля . . . . .	259
6.15. Закон сохранения энергии электромагнитного поля. Поток энергии . . . . .	261
Библиографический список . . . . .	267

## Предисловие

Книга является первой частью учебного пособия по *курсу* классической электродинамики для студентов физического факультета. Содержит электростатику, магнитостатику, полную систему уравнений Максвелла и завершается рассмотрением нестационарных электромагнитных процессов в квазистационарном приближении.

Изложение материала в книге следует традиции преподавания *курса* общей физики в НГУ, начало которой было положено академиком Г. И. Будкером и продолжалась в лекциях академиков Б. В. Чирикова, Д. Д. Рютова, чл.-кор. РАН И. Н. Мешкова, профессоров Г. В. Ступакова, Б. А. Князева, И. А. Котельникова. Эта традиция заключается в объединении привычного курса общей физики с элементами теоретической физики, что способствует лучшему пониманию предмета.

В данном учебном пособии значительное внимание уделено выработке первоначальных навыков использования теоретических средств для решения конкретных физических задач. С этой целью в книгу включены наборы частных решений уравнения Лапласа, получающихся разделением переменных в декартовой, цилиндрической, сферической системах координат, и набор решений одномерного уравнения диффузии. Во все разделы *курса* внесен пункт, названный *математической постановкой физической задачи*, и приведены примеры построения решений с помощью частных решений соответствующих уравнений и других структурных элементов. В результате этого *дифференциальные* уравнения электродинамики и граничные условия, возникающие в ходе изложения предмета, должны, как полагает автор, перестать казаться простыми украшениями, а становиться эффективным рабочим инструментом, использование которого во многих случаях облегчает, а в большинстве случаев представляет единственную возможность получения физического результата. При этом предполагается, что читатель достаточно свободно владеет векторным анализом.

В небольшом объеме книга содержит материал, выходящий за пределы обязательной программы, предназначенный для продвинутых студентов. Соответствующие параграфы оговорены, а отдельные пункты или примеры отмечены звездочкой в номере.

При написании работы автор широко пользовался известными учебниками, список которых представлен в конце книги. Особенно часто автор прибегал к помощи монографии Мешкова—Чирикова, а также учебников Тамма и Сивухина, отдельные фрагменты которых воспроизведены почти без изменений.

Автор выражает искреннюю признательность директору ИТПМ СО РАН чл.-кор. РАН В. М. Фомину и зав. кафедрой общей физики НГУ проф. А. М. Оришичу за создание благоприятных условий для работы над книгой, сотруднику кафедры О. Г. Батеновой за кропотливый труд по набору текста и студенту физического факультета Д. А. Максиму за помощь в создании иллюстративного материала.



# Глава 1

## ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### 1.1. Закон Кулона

Это — экспериментально установленный закон силового взаимодействия двух точечных заряженных тел, *неподвижных относительно рассматриваемой системы отсчета*, согласно которому

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{F}_{12}$  — сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ ,  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  — радиусы-векторы зарядов (рис. 1.1).

Здесь закон Кулона записан в абсолютной гауссовой системе, в которой сила измеряется в динах, расстояние — в сантиметрах, а заряд — в гауссовых единицах. Единичный заряд в гауссовой системе это заряд, который на равный себе заряд, находящийся на расстоянии 1 см, действует с силой в 1 дину.

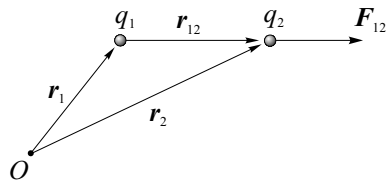


Рис. 1.1

Закон (1.1) утверждает, что *заряды, находясь на расстоянии друг от друга, взаимодействуют между собой*. Такое представление соответствует *теории дальнего действия*.

Закон Кулона можно представить в другом виде, введя понятие *электрического поля*. Для этого следует считать, что заряд  $q_1$  во всем окружающем пространстве создает электрическое поле независимо от того,

имеется в пространстве еще какой заряд или не имеется. Если же в это поле поместить заряд  $q_2$ , то на него со стороны поля действует сила

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2), \quad (1.2)$$

равная произведению величины заряда на напряженность поля  $\vec{E}_1(\vec{r})$  в месте расположения заряда, причем, как следует из формулы (1.1),

$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}.$$

Таким образом, точечный заряд  $q$ , расположенный в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}_0$ , создает в пространстве электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}(\vec{r})$  (рис. 1.2)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (1.3)$$

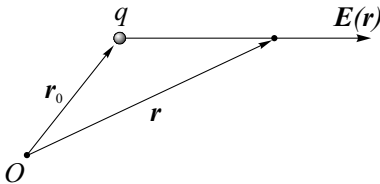


Рис. 1.2

Представление закона Кулона в виде соотношения (1.2) соответствует концепции *близкодействия*: *силовое воздействие на заряд может оказать только электрическое поле, существующее в месте расположения заряда.*

В электростатике эти две концепции (т. е. взаимодействие зарядов на расстоянии и взаимодействие посредством электрического поля) полностью эквивалентны. Только в электродинамике, где существуют свободные электромагнитные волны, независимые от зарядов, доказывається реальность электромагнитного поля.

## 1.2. Принцип суперпозиции

Для одного точечного заряда создаваемое им электрическое поле выражается формулой (1.3). Как показывают результаты экспериментов, в электродинамике справедлив принцип суперпозиции, согласно которому электрическое поле от системы зарядов равно сумме электрических

## 1.3. Электрический потенциал

11

полей от её составляющих, т. е.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (1.4)$$

где  $q_i, \vec{r}_i$  — заряд и радиус-вектор  $i$ -го заряда.

Заметим, что в электродинамике принцип суперпозиции рассматривается как абсолютно точный, пока никакие отклонения от него не обнаружены.

## 1.3. Электрический потенциал

Электрическое поле неподвижных зарядов (т. е. электростатическое поле) обладает следующим интегральным свойством: *работа электрического поля по перемещению пробного заряда  $q$  по любому замкнутому контуру равна нулю*. Это утверждение есть непосредственное следствие закона сохранения энергии, ибо в противном случае мы бы имели вечный двигатель 1-го рода.

Так как сила, действующая на пробный заряд в электрическом поле, равна

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

то рассматриваемая работа выражается через циркуляцию электрического поля по замкнутому контуру  $\ell$  :

$$A = q \oint E_\ell d\ell = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Следовательно, названное свойство может быть представлено в виде

$$\oint E_\ell d\ell = 0, \quad (1.5)$$

откуда следует, что электростатическое поле потенциально.

Из векторного анализа известно, что из потенциальности векторного поля следует существование скалярного потенциала и что поле  $\vec{E}$  можно представить в виде

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (1.6)$$

Из-за важности скалярного потенциала мы здесь не ограничимся ссылкой на векторный анализ, а проведем необходимые рассуждения, чтобы

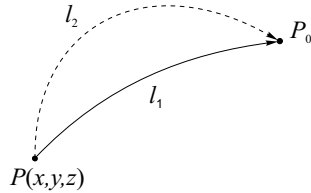
самим получить приведенное соотношение (1.6) и понять энергетический смысл потенциала.

Итак, поле  $\vec{E}$  потенциально. Отсюда следует, что работа по перемещению пробного заряда (возьмем единичный пробный заряд) из одной точки  $P$  в другую  $P_0$  не зависит от формы пути (рис. 1.3). Пусть  $P_0$  — фиксированная точка, а точка  $P$  имеет координаты  $x, y, z$ . Тогда интеграл  $\int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ , не зависящий от контура  $\ell$ , определяет однозначную скалярную функцию от координат  $x, y, z$ :

$$\int_{P(x,y,z)}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \varphi(x, y, z) \quad (1.7)$$

и именно эта величина называется скалярным потенциалом электрического поля. Следовательно, *скалярный потенциал в некоторой точке пространства равен работе, совершаемой электрическим полем при перемещении единичного пробного заряда из данной точки в ту точку, где потенциал условно принят равным нулю.*

Рис. 1.3



Иначе можно сказать: потенциал в точке  $P$  равен работе, которую мы должны совершить против поля, чтобы перенести единичный пробный заряд из фиксированной точки  $P_0$  в точку  $P$ . Таким образом, заряд  $q$ , находящийся в точке  $P$ , обладает потенциальной энергией  $U(P) = q\varphi(P)$ , причем потенциальная энергия в точке  $P_0$  принимается равной нулю.

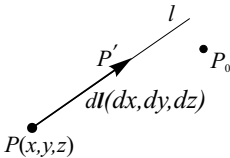


Рис. 1.4

Из формулы (1.7) видно, что если поле  $\vec{E}$  известно, то потенциал определяется с точностью до аддитивной постоянной. А как найти поле  $\vec{E}(\vec{r})$ , если известно распределение потенциала? Для этого наряду с точкой  $P(x, y, z)$  возьмем точку  $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$  (рис. 1.4) и рассмотрим работу электрического поля на перемещении  $d\vec{\ell}(dx, dy, dz)$ , равную

$$dA = \vec{E}(x, y, z) \cdot d\vec{\ell} = E_\ell d\ell.$$

С другой стороны, эта работа равна

$$dA = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_{P'}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \varphi(P) - \varphi(P') = -d\varphi,$$

## 1.3. Электрический потенциал

13

где  $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} d\ell = \text{grad}_\ell \varphi \cdot d\vec{\ell}$ . (Здесь последнее равенство записано с использованием важного свойства градиента — проекция градиента на любое направление равна производной по этому направлению.) Приравнявая полученные выражения для  $dA$ , получаем

$$E_\ell = -\text{grad}_\ell \varphi.$$

Так как направление  $\ell$  произвольно, отсюда следует требуемое соотношение

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Из полученной формулы, в частности, следует, что на *эквипотенциальной поверхности*  $\varphi = \text{const}$  электрическое поле всюду направлено по нормали (рис. 1.5). Или, другими словами, касательная составляющая поля  $\vec{E}$  на эквипотенциальной поверхности тождественно равна нулю.

*О единицах измерения.* В системе СИ единицей потенциала является вольт, в абсолютной гауссовой системе  $1(\Gamma)=300 \text{ В}$ .

*Пример 1.1. Потенциал точечного заряда.* Электрическое поле нам известно. Оно имеет только радиальную компоненту (в сферических координатах с началом в точке расположения заряда)

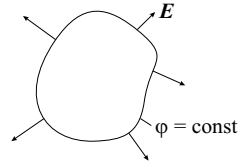


Рис. 1.5

$$E_r = \frac{q}{r^2}.$$

Примем потенциал на бесконечности равным нулю, т. е. точку  $P_0$  удалим на бесконечность. Тогда потенциал в произвольной точке  $P$  определяется как интеграл

$$\int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

не зависящий от формы пути. Для вычисления путь интегрирования удобно принять в виде радиального луча, проходящего через точку  $P$ , и в результате получить

$$\varphi(P) = \int_r^\infty \frac{q}{\xi^2} d\xi = -\frac{q}{\xi} \Big|_r^\infty = \frac{q}{r}.$$

Таким образом, потенциал точечного заряда

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} \quad (1.8)$$

зависит только от расстояния  $r$  между зарядом и точкой наблюдения, а эквипотенциальные поверхности, следовательно, представляют собой концентрические сферы с центром в точке расположения заряда.

*Обобщение.* Потенциал заряда, расположенного в точке  $\vec{r}_0$ ,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|},$$

а потенциал системы зарядов на основании принципа суперпозиции

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (1.8')$$

*Пример 1.2. Потенциал однородного поля.* Пусть  $\vec{E} = E_1\vec{e}_x + E_2\vec{e}_y + E_3\vec{e}_z$ , где  $E_1, E_2, E_3$  — константы. Воспользовавшись соотношением (1.6), легко получить искомое выражение для потенциала

$$\varphi(x, y, z) = -(E_1x + E_2y + E_3z).$$

Здесь константа интегрирования принята равной нулю; при этом точка нулевого потенциала совпадает с началом координат. Для частного случая однородного поля

$$\vec{E} = E_0\vec{e}_z,$$

направленного вдоль оси  $z$ , имеем  $\varphi = -E_0z$ . В сферических координатах последнее выражение приобретает вид

$$\varphi(r, \theta) = -E_0r \cos \theta, \quad (1.9)$$

который часто будет фигурировать в решениях задач.

## 1.4. Поток вектора $\vec{E}$ . Теорема Гаусса

По определению, поток вектора  $\vec{E}$  через элементарную площадку  $dS$  с внешней нормалью  $\vec{n}$  есть произведение величины площадки на нормальную составляющую вектора  $\vec{E}$ , т. е.

$$dN = (\vec{E} \cdot \vec{n})dS = E_n dS.$$

Если у нас имеется некоторая конечная поверхность  $S$ , то поток через эту поверхность вычисляется как поверхностный интеграл

$$N = \int E_n dS.$$

## 1.4. Теорема Гаусса

15

В электродинамике имеет место важная *теорема* (Гаусса). *Поток вектора  $\vec{E}$  через любую замкнутую поверхность определяется суммарным зарядом  $Q$ , находящимся внутри этой поверхности, и равняется  $4\pi Q$ , т. е.*

$$\oint_S E_n dS = 4\pi Q. \quad (1.10)$$

Доказательство теоремы проведем в три этапа.

1. Предположив, что электрическое поле создается одним точечным зарядом  $q$ , расположенным в точке  $O$ , вычислим поток вектора  $\vec{E}$  через элементарную площадку  $dS$ , проходящую через точку с радиусом-вектором  $\vec{r}$  и характеризующуюся внешней нормалью  $\vec{n}$  (рис. 1.6). Он равен

$$dN = \frac{q}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{n}) dS = \frac{q}{r^2} \cos(\widehat{\vec{r}, \vec{n}}) dS. \quad (a)$$

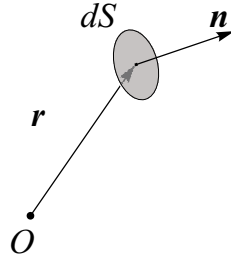


Рис. 1.6

Произведение  $\cos(\widehat{\vec{r}, \vec{n}}) dS$  равно проекции площадки  $dS$  на плоскость, перпендикулярную к вектору  $\vec{r}$  со знаком «+» или «-» в зависимости от знака косинуса, т. е.

$$\cos(\widehat{\vec{r}, \vec{n}}) dS = \pm dS',$$

где  $dS'$  — абсолютная величина рассматриваемой проекции. Это легко увидеть, если вместо пространственной картинке изобразить ее разрез плоскостью, образованной векторами  $\vec{r}, \vec{n}$  (или  $\vec{E}, \vec{n}$ ), как на рис. 1.7, где пунктирная линия отвечает плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{r}$ , а отрезки  $dS, dS'$  изображают соответствующие площадки. Из рисунка также видно, что площадка  $dS'$  совпадает с элементом сферической поверхности радиуса  $r$  с центром в точке  $O$  и может быть связана с величиной телесного угла  $d\Omega$ , под которым видна эта площадка. Под этим же углом видна и площадка  $dS$ ; приписав этому телесному углу еще и знак, можно написать

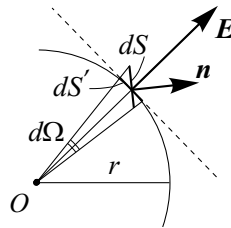


Рис. 1.7

$$d\Omega = \frac{1}{r^2} \cos(\widehat{\vec{r}, \vec{n}}) dS. \quad (b)$$

Понятно, что если из точки  $O$  видна внутренняя сторона площадки  $dS$ , как на приведенном рисунке, будем иметь  $d\Omega > 0$  (так как  $\cos(\vec{r}, \vec{n}) > 0$ ), если же видна внешняя сторона — то  $d\Omega < 0$ . С учетом (b) соотношение (a) приобретает вид

$$dN = qd\Omega,$$

т. е. в поле точечного заряда  $q$  поток вектора  $\vec{E}$  через произвольно ориентированную площадку  $dS$  зависит, кроме величины этого заряда, только от того телесного угла, положительного или отрицательного, под которым видна эта площадка из точки  $O$ , где расположен заряд  $q$ .

2. Теперь рассмотрим конечную поверхность  $S$ . Поток через эту поверхность определяется телесным углом  $\Omega$ , под которым видна поверхность  $S$  из точки  $O$ :

$$N = \int E_n dS = q \int d\Omega = q\Omega.$$

Для нас важно, что если  $S$  — замкнутая поверхность, то телесный угол может иметь только одно из двух значений: либо  $4\pi$ , либо  $0$ . Если точка  $O$  находится внутри  $S$ , то  $\Omega = 4\pi$ , внешней точке соответствует  $\Omega = 0$ .

Проиллюстрируем это утверждение с помощью рис. 1.8, ограничившись случаем внешней точки  $O$ .

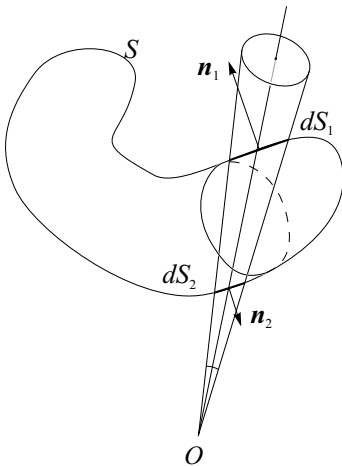


Рис. 1.8

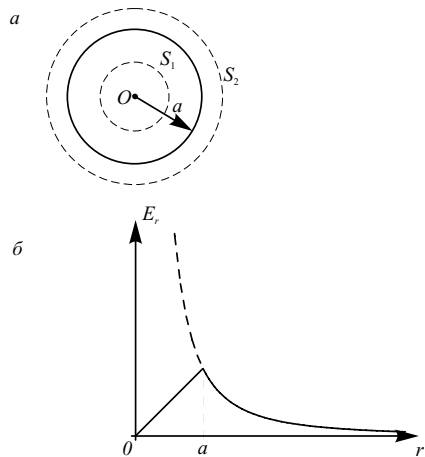


Рис. 1.9



Здесь  $S$  — некоторая замкнутая поверхность. Показан один из лучей, исходящих из точки  $O$  и пересекающих поверхность  $S$ . Конус с малым углом при вершине с осью, совпадающей с выделенным лучом, вырезает из поверхности  $S$  две площадки  $dS_1, dS_2$  с внешними нормальными  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ . Легко видеть, что площадке  $dS_1$  соответствует положительный телесный угол  $d\Omega_1 > 0$ , а площадке  $dS_2$  —  $d\Omega_2 < 0$ , причем  $|d\Omega_2| = d\Omega_1$ . Таким образом, этой паре площадок соответствует суммарный телесный угол, равный нулю. Понятно, что и всей поверхности  $S$  соответствует телесный угол  $\Omega = 0$  (точка  $O$  находилась вне поверхности). Для внутренней точки результат  $\Omega = 4\pi$  можно получить аналогичным образом.

Итак, мы получили, что суммарный поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность  $S$  равен  $N = 4\pi q$  — если заряд находится внутри  $S$ ;  $N = 0$  — для внешнего заряда.

Оба эти случая можно описать одной формулой

$$N = \oint_S E_n dS = 4\pi q,$$

если под  $q$  понимать величину заряда, находящегося внутри поверхности  $S$ . Мы получили искомую формулу, рассматривая электрическое поле одного точечного заряда.

3. Понятно, что в общем случае систему зарядов можно рассматривать как совокупность точечных зарядов и поэтому на основании принципа суперпозиции суммарный поток будет равен сумме потоков от отдельных зарядов. Следовательно,

$$\oint E_n dS = 4\pi Q, \quad Q = \sum q_i,$$

что требовалось доказать.

*Пример 1.3. Поле равномерно заряженного шара.* Нам известно, что электрическое поле точечного заряда  $\vec{E} = (q/r^3)\vec{r}$  при  $r \rightarrow 0$  стремится к бесконечности. Это обстоятельство доставляет много неприятностей в электродинамике. Сейчас мы покажем, что если заряд  $q$ , рассматривавшийся нами как точечный, в действительности равномерно распределен по объему шара произвольно малого, но конечного радиуса  $a$ , то электрическое поле этого заряда и его потенциал не имеют особенностей. Из симметрии задачи понятно, что поле  $\vec{E}$  всюду радиально. Тогда из теоремы Гаусса, воспользовавшись замкнутыми поверхностями в виде сфер  $S_1, S_2$  (рис. 1.9), мы получаем, что

$$E_r(r) = \begin{cases} (q/a^3)r & \text{при } r < a, \\ (q/r^2) & \text{при } r \geq a, \end{cases} \quad (1.11)$$

т. е. вне шара это поле совпадает с полем точечного заряда, находящегося в центре шара, а внутри шара линейно спадает до нуля в центре (рис. 1.9, б). Отсюда для потенциала имеем:

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \frac{q}{\xi^2} d\xi = \frac{q}{r} \quad (\text{вне шара}),$$

$$\varphi(r) = \int_r^a \frac{q}{a^3} \xi d\xi + \int_a^\infty \frac{q}{\xi^2} d\xi = \frac{3}{2} \frac{q}{a} - \frac{q}{2a^3} r^2 \quad (\text{внутри шара}).$$

Видно, что поле и потенциал *всюду конечны и непрерывны*.

## 1.5. Основное уравнение электростатики

С помощью теоремы Остроградского—Гаусса входящий в формулу (1.10) поверхностный интеграл можно преобразовать в интеграл по объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ ,

$$\oint E_n dS = \int \operatorname{div} \vec{E} dV.$$

Вспомним, что это преобразование допустимо, если только векторное поле во всем объеме  $V$ , включая границу  $S$ , непрерывно и конечно. Поэтому при обращении к теореме Гаусса заряды, расположенные внутри поверхности  $S$ , нельзя считать точечными. Будем их рассматривать как распределенные и задавать объемной плотностью

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}.$$

Тогда в элементе объема  $dV$  будет заряд  $\rho dV$ , полный заряд в объеме будет

$$Q = \int \rho dV$$

и теорема Гаусса приобретает вид

$$\oint E_n dS = \int \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi \int \rho dV.$$

Так как выписанное равенство двух объемных интегралов справедливо для любой области интегрирования  $V$ , отсюда следует, что подынтегральные выражения равны друг другу в каждой точке пространства,

## 1.5. Основное уравнение электростатики

19

т. е.

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (1.12)$$

Это дифференциальное уравнение является одним из основных уравнений не только электростатики, но и всей электродинамики. В декартовой системе оно имеет вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho(x, y, z);$$

в цилиндрической и сферической системах координат выражения для дивергенции следует научиться с легкостью воспроизводить, так как это необходимо для активного освоения материала.

**Уравнение для скалярного потенциала.** Подставляя представление (1.6) поля  $\vec{E}$  в уравнение (1.12), для потенциала получаем искомое уравнение

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (1.13)$$

справедливое только в электростатике. Дифференциальный оператор  $\Delta = \operatorname{divgrad}\varphi$  называется оператором Лапласа, лапласианом, уравнение (1.13) — уравнением Пуассона, а частный случай уравнения Пуассона для области, свободной от зарядов,

$$\Delta\varphi = 0$$

называется уравнением Лапласа; в декартовой системе оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.14)$$

Таким образом, скалярный потенциал электрического поля описывается дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка.

*Упражнение.* Непосредственной подстановкой убедиться, что потенциал (1.8) точечного заряда во всем пространстве вне заряда удовлетворяет уравнению (1.14). Для определенности считайте, что заряд расположен в начале координат.

## 1.6. Общее решение уравнения Пуассона в безграничном пространстве. Дельта-функция Дирака

1. Если в *конечной области пространства* задано некоторое распределение зарядов  $\rho(\vec{r})$ , то на основании принципа суперпозиции скалярный потенциал, создаваемый данными зарядами, можно представить в виде интеграла по объему, являющегося обобщением суммы (1.8') :

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.15)$$

Здесь  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$  — радиусы-векторы точки наблюдения и элементарного объёмчика  $dV'$  соответственно, в знаменателе стоит расстояние между этими точками (рис. 1.10).

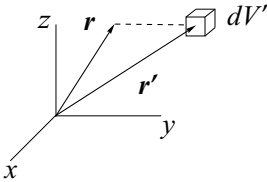


Рис. 1.10

Представление потенциала в виде интеграла (1.15) по объему, занятому зарядами, часто называют общим решением уравнения Пуассона (1.13). В принципиальном плане оно имеет важное значение (например, для получения мультипольных разложений), хотя для фактического определения  $\varphi(\vec{r})$  им редко удастся воспользоваться.

2. Мы часто пользуемся представлением о точечных зарядах. Возникает вопрос, как в этом случае воспользоваться решением (1.15) и из интеграла, являющегося, как отмечено выше, обобщением суммы (1.8'), формальным путем обратно перейти к решению в виде суммы. Отметим, что достигается это с помощью обобщенной  $\delta$ -функции Дирака.

Формально пространственная дельта-функция  $\delta(\vec{r}) = \delta(x, y, z)$  задается следующими условиями :

- а) при всех  $\vec{r} \neq 0$   $\delta(\vec{r}) = 0$ ;
- б) в точке  $\vec{r} = 0$  имеем  $\delta(0) = \infty$ ;
- в) интеграл по всему пространству  $\int \delta(\vec{r})dV = 1$ ;
- г)  $\int f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)dV = f(\vec{r}_0)$ ,

где  $f(\vec{r})$  — произвольная непрерывная функция,  $\vec{r}_0$  — радиус-вектор некоторой фиксированной точки.

## 1.6. Общее решение уравнения Пуассона

21

Объемную плотность точечного заряда  $q$ , расположенного в точке  $\vec{r} = \vec{r}_0$ , тогда можно представить в виде

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (1.16)$$

Подставляя это выражение в общее решение (1.15), из свойства «г» дельта-функции получаем

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{q\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad (1.17)$$

а для системы точечных зарядов, следовательно, из интеграла (1.15) получается сумма (1.8').

Отметим здесь математическое соотношение, которое получается при подстановке выражений (1.16), (1.17) для плотности заряда  $\rho$  и потенциала  $\varphi$  точечного заряда в уравнение (1.13):

$$\Delta \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (1.18)$$

(Для точек  $\vec{r} \neq \vec{r}_0$  получение данного результата предусматривалось в упражнении для самостоятельной работы, предложенном в предыдущем параграфе.)

3. Интеграл (1.15) здесь был назван общим решением уравнения Пуассона. Теперь формально покажем, что функция, задаваемая интегралом (1.15), удовлетворяет уравнению (1.13), т. е. что

$$\Delta \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\rho(\vec{r}).$$

Для этого, во-первых, заметим, что оператор  $\Delta$  можно внести под знак интеграла, поскольку  $\Delta$  подразумевает дифференцирование по переменным  $\vec{r}$ , а интегрирование — по переменным  $\vec{r}'$ . Во-вторых, воспользуемся соотношением (1.18) и свойством «г» дельта-функции. В результате получим искомый результат:

$$\begin{aligned} \Delta \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \int \rho(\vec{r}')\Delta \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' = \\ &= -4\pi \int \rho(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}')dV' = -4\pi\rho(\vec{r}). \end{aligned}$$

## 1.7. Силовые линии электрического поля

1. Для получения наглядных представлений о векторном поле используют картину силовых линий. По определению силовая линия — это кривая, в общем случае пространственная, касательные к которой в каждой точке совпадают с направлением вектора поля (рис. 1.11). Следовательно, силовая линия  $\vec{E}$  определяется системой двух уравнений, в декартовой системе координат имеющих вид

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z},$$

выражающих условие параллельности векторов  $d\vec{l}$  и  $\vec{E}$ , где  $d\vec{l}(dx, dy, dz)$  — вектор элемента дуги. Легко видеть, что в сферических координатах  $(r, \theta, \alpha)$ , к примеру, эти уравнения выглядят так:

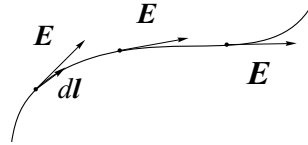


Рис. 1.11

$$\frac{dr}{E_r(r, \theta, \alpha)} = \frac{r \sin \theta d\alpha}{E_\alpha(r, \theta, \alpha)} = \frac{r d\theta}{E_\theta(r, \theta, \alpha)}. \quad (1.19)$$

2. Отметим здесь некоторые характерные особенности силовых линий *электростатического* поля зарядов, занимающих ограниченный объем пространства. Во-первых, они начинаются на зарядах и либо уходят на бесконечность, либо заканчиваются на других зарядах. Как следует из теоремы Гаусса, первый случай может иметь место, если суммарный заряд системы, создающей электрическое поле, отличен от нуля; в противном случае все силовые линии начинаются и заканчиваются на зарядах. Во-вторых, из потенциальности поля следует, что силовые линии не могут быть замкнутыми. И наконец, они не имеют других точек пересечения, кроме точек, где  $\vec{E} = 0$ .

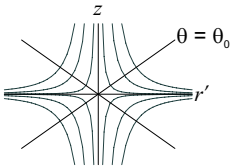


Рис. 1.12

3\*. Локальное поведение поля вблизи этих характерных точек представляет определенный интерес, поэтому здесь уместно в качестве упражнений рассмотреть несколько конфигураций силовых линий с их пересечениями. Потенциалы соответствующих полей выберем из решений уравнения Лапласа, полученных в § 1.11.

Начнем со случая осесимметричного поля, для которого потенциал, обеспечивающий нулевую напряженность в начале координат, возьмем из набора (1.25) в

виде

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 \frac{r^2}{a^2} P_2(\cos \theta) = \varphi_0 \frac{r^2}{a^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2},$$

где  $r, \theta$  — сферические координаты,  $\varphi_0, a$  — масштабные величины. Сохранив для безразмерного радиуса  $r/a$  обозначение  $r$ , для компонент поля отсюда имеем

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -E_0 r (3 \cos^2 \theta - 1),$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = E_0 r \cdot \frac{3}{2} \sin 2\theta, \quad E_0 = \frac{\varphi_0}{a}.$$

Видно, что на поверхности  $\theta = \theta_0 = \arccos(\pm 1/\sqrt{3})$  имеем  $E_r(r, \theta_0) = 0$ , а на оси симметрии и в плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно этой оси, (т. е. при  $\theta = 0, \pi, \pi/2$ )  $E_\theta = 0$ . Отсюда качественное представление о поведении поля уже можно получить. Аналитически семейство силовых линий описывается уравнением

$$-\frac{dr}{(3 \cos^2 \theta - 1)} = \frac{2}{3} \frac{r d\theta}{\sin 2\theta},$$

являющимся частным случаем системы (1.19) для рассматриваемого осесимметричного случая. С учетом тождества

$$3 \cos^2 \theta - 1 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin^2 \theta \cos \theta)$$

процесс интегрирования этого уравнения становится элементарным и приводит к результату

$$r^3 \sin^2 \theta \cos \theta = C,$$

который после перехода к цилиндрическим координатам  $z = r \cos \theta$ ,  $r' = r \sin \theta$  (обозначение  $r'$  для цилиндрического радиуса здесь не должно вызвать недоразумения) приобретает простейший вид

$$z r'^2 = C.$$

Значению константы  $C = 0$  соответствуют силовые линии (ось  $z$  и ось  $r'$ , пересекающиеся под прямым углом, а другие силовые линии, изображенные на рис. 1.12, не имеют точек пересечения. На рисунке тонкими линиями нанесены также прямые, соответствующие  $\theta = \theta_0$ ; видно, что

силовые линии их пересекают под прямым углом, как уже отмечалось выше.

В качестве второго примера рассмотрим плоские поля с потенциалами из набора (1.24), задаваемыми в цилиндрических координатах в виде

$$\varphi(r, \alpha) = \varphi_0 \frac{r^m}{a^m} \sin m\alpha.$$

При этом компоненты поля  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  равны

$$\begin{aligned} E_r &= -E_0 r^{m-1} \sin m\alpha, \\ E_\alpha &= -E_0 r^{m-1} \cos m\alpha, \end{aligned} \quad (a)$$

причем в начале координат они равны нулю, если  $m = 2; 3; \dots$ . Из выражений (а) видно, что на лучах  $\alpha_j = (\pi/2m)(1+j)$ ,  $j = 0; 1; \dots 2m-1$  имеем  $E_\alpha = 0$ ; следовательно, эти  $2m$  лучей являются пересекающимися силовыми линиями. Уравнение силовых линий

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\alpha}{E_\alpha}$$

для поля «а» имеет вид

$$\frac{dr}{r} = -\frac{1}{m} \frac{d \cos m\alpha}{\cos m\alpha},$$

общему решению которого

$$r^m |\cos m\alpha| = C$$

отвечают силовые линии, показанные на рис. 1.13 (для  $m = 2$ ) и на рис. 1.14 (для  $m = 3$ ).

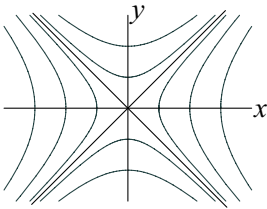


Рис. 1.13

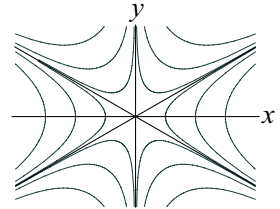


Рис. 1.14



1.8. Граничные условия для поля  $\vec{E}$ 

25

Обращаем внимание, что при  $m = 3$  через начало координат проходят три силовые линии, в то время как при  $m = 2$ , так же как в рассмотренном выше случае осесимметричного поля — только две. Связано это с тем, что в последних случаях начало координат является простым нулем поля  $\vec{E}$ , в то время как при  $m = 3$  имеем дело с нулем более высокого порядка, поскольку здесь не только  $\vec{E}$ , но и пространственные производные поля  $\vec{E}$  обращаются в нуль.

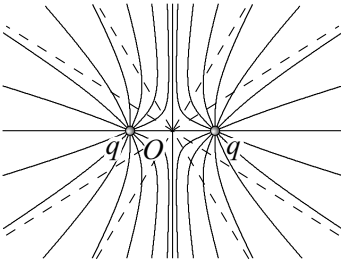


Рис. 1.15

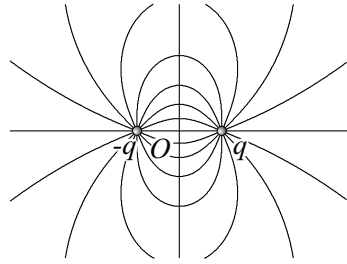


Рис. 1.16

4. Завершим параграф картиной силовых линий двух одинаковых по модулю зарядов одного знака (рис. 1.15) и противоположных знаков (рис. 1.16). Случай зарядов с противоположными знаками демонстрирует ситуацию, когда все силовые линии начинаются и заканчиваются на зарядах. При одинаковых зарядах силовые линии начинаются на зарядах и уходят в бесконечность, по мере удаления превращаясь в лучи, как бы исходящие из точки  $O$ , центра системы. Электрическое поле в центре равно нулю, локальное поведение силовых линий в окрестности этой точки соответствует показанному на рис. 1.12.

1.8. Граничные условия для поля  $\vec{E}$ 

1. Предварительные соображения. Давайте вначале те знания об электрическом поле, которыми мы на данный момент обладаем, схематически представим в виде уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = -4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \end{aligned}$$

и отвечающего им решения (1.13)

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

(Уравнение  $\text{rot} \vec{E} = 0$  здесь выписано впервые. Оно следует из потенциальности поля  $\vec{E}$  и относится к электростатике.) Отсюда видно, что если распределение зарядов во всем пространстве известно, то потенциал и электрическое поле в любой точке пространства могут быть вычислены, в принципе, с помощью последнего интеграла (1.13). Следовательно, казалось бы, никакие дополнительные знания в виде граничных условий нам не нужны. Фактически дело обстоит иначе. Во-первых, даже в том случае, если распределение зарядов известно, распределение потенциала часто легче получается как решение уравнения с соответствующими граничными условиями, чем с помощью интеграла (1.13). А в задачах, где сами заряды являются неизвестными, как, например, индуцированные заряды на поверхности проводника, дифференциальные уравнения и граничные условия составляют практически единственную возможность получения решения. (Возможность использования интегральных уравнений для решения подобных задач в данном курсе не затрагивается.)

2. Поэтому приступим к граничным условиям. Пусть имеется некоторая поверхность  $S$ , которая разделяет области 1 и 2. Для общности предположим, что поверхность  $S$  содержит распределенный заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ , определяемой как

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S},$$

где  $\Delta q$  — заряд, находящийся на элементе поверхности  $\Delta S$ . В принципе наличие объемных зарядов в окружающем пространстве не исключается; их плотность пусть будет  $\rho$ .

Для получения граничного условия для *нормальных компонент поля*  $\vec{E}$  выделим мысленно около рассматриваемой точки заряженной поверхности прямую призму с образующими  $d\vec{\ell}$ , перпендикулярными к поверхности  $S$  (рис. 1.17). Пусть эта призма вырезает из поверхности  $S$  элемент  $S'$  столь малый, что его можно принять за плоский и равномерно заряженный. Внутри призмы будет находиться суммарный заряд  $(\sigma + \rho d\ell)S'$ , складывающийся из поверхностных и объемных зарядов. Следовательно, поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность призмы по теореме

1.8. Граничные условия для поля  $\vec{E}$ 

27

Гаусса должен равняться

$$N = \oint E_n dS = 4\pi S'(\sigma + \rho d\ell).$$

Рассматриваемый поток складывается из потоков через нижнее и верхнее основания с внешними нормальными соответственно  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  (рис. 1.17) и потока через боковую поверхность призмы:

$$N = [E_1 \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{E}_1}) + E_2 \cos(\widehat{\vec{n}_2, \vec{E}_2})]S' + N'.$$

Здесь  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  — значения вектора  $\vec{E}$  у оснований призмы,  $N'$  — поток через боковую поверхность призмы.

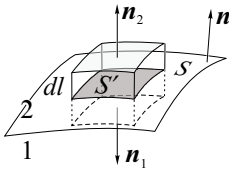


Рис. 1.17

Теперь обратим внимание на то, что направление нормали  $\vec{n}_2$  совпадает с направлением единой нормали  $\vec{n}$ , идущей из области 1 в область 2, а направление  $\vec{n}_1$  прямо противоположно  $\vec{n}$ . Следовательно,

$$E_1 \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{E}_1}) = -E_{1n}, \quad E_2 \cos(\widehat{\vec{n}_2, \vec{E}_2}) = E_{2n},$$

где  $E_{1n}, E_{2n}$  — проекции векторов  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  на нормаль  $\vec{n}$ . Таким образом, теорема Гаусса сводится к равенству

$$N = (E_{2n} - E_{1n})S' + N' = 4\pi S'(\sigma + \rho d\ell).$$

При уменьшении высоты призмы  $d\ell$  поток  $N'$ , а также произведение  $\rho d\ell$  уменьшаются и в пределе  $d\ell \rightarrow 0$  обращаются в нуль. Таким образом, после сокращения на  $S'$  из рассматриваемого равенства получается следующее граничное условие для нормальной компоненты электрического поля:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (1.20)$$

Отсюда видно, что на заряженной поверхности нормальная компонента электрического поля терпит скачок; на границе, не содержащей поверхностных зарядов, нормальная компонента поля  $\vec{E}$  непрерывна. Ещё раз подчеркнем, что граничное условие имеет вид (1.20), если общая нормаль  $\vec{n}$  к границе раздела направлена из области 1 в область 2, как показано на рис. 1.17.

3. *Условие для тангенциальных компонент электрического поля.* Пусть  $\vec{\tau}$  — некоторый единичный вектор, лежащий в плоскости, касательной к поверхности  $S$ ,  $\vec{n}$  — нормаль к этой поверхности. Рассмотрим

плоскость векторов  $\vec{n}, \vec{\tau}$  (на рис. 1.18 заштрихована), разрезающую поверхность  $S$  по кривой  $L$ , и в этой плоскости возьмем замкнутый контур  $\ell$ , образованный парой эквидистантных кривых  $p_1 p'_1, p_2 p'_2$ , проходящих по разные стороны от границы  $L$  (рис. 1.19), имеющих длину  $\Delta l$ , и двух перемычек длины  $\delta h$ . Циркуляция поля  $\vec{E}$  по этому контуру равна

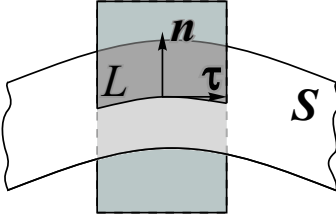


Рис. 1.18

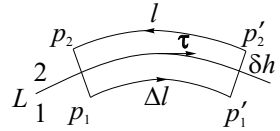


Рис. 1.19

нулю:

$$\Gamma = \oint_{\ell} E_{\ell} dl = 0.$$

Но величина  $\Gamma$  складывается из следующих составляющих:

$$\Gamma = \int_{p_1}^{p'_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_{p'_2}^{p_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} + \Gamma',$$

где через  $\Gamma'$  обозначен суммарный вклад в циркуляцию перемычек  $p_1 p_2$  и  $p'_1 p'_2$ . Пусть  $\delta h \rightarrow 0$ ; тогда  $\Gamma' \rightarrow 0$  из-за конечности поля  $\vec{E}$ , а

$$\int_{p_1}^{p'_1} \rightarrow E_{1\tau} \cdot \Delta l, \quad \int_{p'_2}^{p_2} \rightarrow -E_{2\tau} \cdot \Delta l,$$

где  $E_{1\tau}, E_{2\tau}$  — проекции полей  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  по обе стороны границы на направление  $\vec{\tau}$ . Следовательно, потенциальность поля  $\vec{E}$  приводит к непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля на любой границе раздела областей

$$\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}. \quad (1.21)$$

(Здесь равенство записано в векторном виде, имея в виду его справедливость для всех векторов  $\vec{\tau}$ , лежащих в касательной плоскости.)

4. В заключение параграфа обратим внимание на одно важное обстоятельство. Заметим, что как дифференциальные уравнения, так и

граничные условия, определяющие поле  $\vec{E}$ , получаются из соответствующих интегральных соотношений

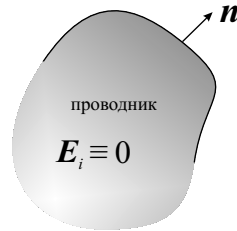
$$\oint E_n dS = 4\pi Q \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho, \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi \sigma, \end{cases}$$

$$\oint E_\ell dl = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 & (\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi), \\ \vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения «работают» в областях, где поле  $\vec{E}$  непрерывно и дифференцируемо, а на поверхностях разрыва «работают» граничные условия.

## 1.9. Проводник в электрическом поле

До сих пор мы говорили о зарядах и об электрическом поле, не упоминая о материальных средах. Теперь давайте включим в рассмотрение среды, являющиеся проводниками электрического тока. По определению, если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течет ток. Следовательно, для электростатических явлений поле внутри проводника



$$\vec{E}_i \equiv 0,$$

Рис. 1.20

а с учетом основного уравнения электростатики (1.12) и плотность заряда внутри проводника

$$\rho_i = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E}_i \equiv 0.$$

В этой связи говорят, что проводник квазинейтрален. Таким образом, заряды на проводнике могут размещаться только на его поверхности, причем поверхностная плотность зарядов связана с полем  $\vec{E}$  вне проводника через граничное условие для  $E_n$ .

Если пространство вне проводника свободно от зарядов, то здесь поле  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  и  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Необходимые граничные условия представляют собой частный случай условий (1.20), (1.21). Если  $\vec{n}$  — внешняя нормаль, исходящая из проводника, тогда

в качестве поля  $\vec{E}_1$  в условиях (1.20), (1.21) выступает поле  $\vec{E}_i \equiv 0$  (рис. 1.20), полем  $\vec{E}_2$  является искомое поле вне проводника и, следовательно, граничные условия на поверхности проводника имеют вид

$$E_n = 4\pi\sigma, \quad \vec{E}_\tau = 0. \quad (1.22)$$

В общем случае распределение зарядов  $\sigma$  по поверхности проводника неизвестно. Оно определяется в результате решения. Это мы продемонстрируем на примере в следующем параграфе. Пока обратим внимание, что согласно условиям (1.22) поле подходит к поверхности проводника по нормали, т. е. поверхность проводника является эквипотенциалью. Это естественно, так как в проводнике потенциал постоянен из-за  $\vec{E}_i = 0$ .

## 1.10. О некоторых частных решениях уравнения Лапласа. Пример математической постановки физической задачи

Как мы уже знаем, распределение потенциала в свободном пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа, которое записывается символически в виде

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

В общем случае это — уравнение в частных производных 2-го порядка (в декартовой системе координат имеет вид (1.14)) и только в простейших случаях, когда потенциал зависит лишь от одной пространственной координаты, оно превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Свойства функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа, и различные методы его решения изучаются в курсе математической физики, но научиться применять это уравнение для построения решений хотя бы простейших физических задач нам следует уже сейчас. Для этого воспользуемся так называемым методом разделения переменных и построим несколько наборов частных решений уравнения Лапласа в виде мультипликативных функций. Впоследствии этот метод мы будем применять также и к другим линейным уравнениям в частных производных.

Для демонстрации метода возьмем частный случай цилиндрической системы координат  $(r, \alpha, z)$  и рассмотрим потенциал, не зависящий от

## 1.10. О частных решениях уравнения Лапласа

31

координаты  $z$ . При этом (рис. 1.21)

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi(r, \alpha) &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha, \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(r, \alpha) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}\end{aligned}$$

и уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (1.23)$$

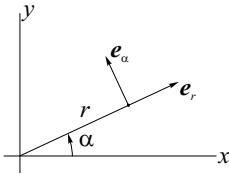


Рис. 1.21

Прделаем необходимые трафаретные шаги, связанные с построением решения указанным методом.

1. Скажем, что ищется решение в виде

$$\varphi(r, \alpha) = f(r)\Phi(\alpha) \quad (a)$$

2. Подставим представление (a) в уравнение (1.23). Получим

$$\Phi(\alpha) \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{r} f(r) \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} = 0. \quad (б)$$

3. Проведем так называемое разделение переменных, в результате чего соотношение (б) превратится в сумму, одно слагаемое в котором будет зависеть только от  $r$ , а другое — только от  $\alpha$ . Видно, что для этого равенство (б) надо умножить на  $r$  и разделить на произведение  $f(r)\Phi(\alpha)$ . В результате получится

$$\frac{r}{f(r)} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi(\alpha)} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} = 0 \quad (в)$$

4. Заметим, что сумма такого рода может равняться нулю при всех значениях  $r$  и  $\alpha$  внутри некоторой области только тогда, когда каждое из слагаемых есть константа, т. е.

$$\frac{1}{\Phi(\alpha)} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} = -\frac{r}{f(r)} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) = C.$$

Отсюда имеем обыкновенные уравнения для  $f(r)$  и  $\Phi(\alpha)$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} - C\Phi(\alpha) = 0, \quad (г)$$

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) + C f(r) = 0. \quad (\text{д})$$

5. Потребуем, чтобы функция  $\Phi(\alpha)$  была периодична с периодом  $2\pi$ , так как представляющее физический интерес решение (а) должно обладать таким свойством. Из уравнения (г) следует, что для этого необходимо, чтобы константа  $C$  была отрицательна. Представим ее в виде  $C = -m^2$ ,  $m$  — любое целое число. При этом  $\Phi(\alpha) = \cos(m\alpha + \alpha_0)$  — периодическая функция с периодом  $2\pi/m$ ,  $\alpha_0$  — произвольная константа. Нетрудно проверить, что уравнению (д) при  $C = -m^2$  удовлетворяют  $f(r) = r^{\pm m}$ , т. е. в качестве  $f(r)$  можно брать  $f(r) = Ar^m + Br^{-m}$ .

Таким образом, функция

$$\varphi(r, \alpha) = (Ar^m + Br^{-m}) \cos(m\alpha + \alpha_0) \quad (1.24)$$

при произвольных постоянных  $A, B, \alpha_0$  и  $m$  — целое число является решением уравнения Лапласа. Фактически здесь выписан бесконечный набор функций, удовлетворяющих этому уравнению.

О решениях, получающихся с помощью метода разделения переменных в сферических координатах, мы здесь упомянем только результативно, так как сам процесс получения решений более сложен, чем в приведенном случае полярных координат. Ограничимся случаем осесимметричного поля, для которого потенциал  $\varphi(r, \theta)$  не зависит от сферической координаты  $\alpha$ . При этом искомый набор решений представляется в виде произведений

$$\varphi(r, \theta) = \left( A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos \theta) \quad (\ell = 0; 1; 2 \dots), \quad (1.25)$$

в которых зависимости от угловой координаты  $\theta$ , изменяющейся от 0 до  $\pi$ , задаются так называемыми полиномами Лежандра  $P_\ell$   $\ell$ -го порядка. Первые три из них мы здесь приведем:

$$P_0(\cos \theta) = 1,$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta,$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2},$$

заметив, что все они отнормированы условием  $P_\ell(1) = 1$ . Обратим внимание, что решения, соответствующие номеру  $\ell = 0$ , т. е.  $\varphi = \text{const}$  и  $\varphi = B_0/r$  (потенциал точечного заряда (1.8)), нам уже знакомы. Из пары, соответствующей  $\ell = 1$ , пока известно только  $A_1 r \cos \theta$  — потенциал



## 1.10. О частных решениях уравнения Лапласа

33

однородного поля (1.9), а с решением  $(B_1/r^2) \cos \theta$  мы вскоре познакомимся при изучении дипольного потенциала. И наконец, номер  $\ell = 2$ ; полином  $P_2(\cos \theta)$  встретится нам в квадрупольном потенциале.

*Упражнение.* Убедиться, что решения уравнения Лапласа, получаемые методом разделения переменных в декартовых координатах  $(x, y)$ , периодические по переменной  $y$ , можно представить в виде

$$\varphi(x, y) = (A \exp(\alpha x) + B \exp(-\alpha x)) \cos(\beta y + \beta_0),$$

где  $A, B, \beta, \beta_0$  — произвольные постоянные.

Применение частных решений уравнения Лапласа для построения решения физической задачи продемонстрируем на конкретном примере, отложив вопрос о единственности решения до следующего параграфа.

*Пример 1.4.* В однородное электрическое поле

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x,$$

заполняющее все пространство, внесли бесконечно длинный незаряженный проводящий цилиндр радиуса  $a$  с осью, совпадающей с осью  $z$ . Найти, как изменится поле  $\vec{E}$ .

Сразу обратим внимание на то, что поле внутри цилиндра  $\vec{E}_i \equiv 0$ , внешнее поле здесь скомпенсировано полем индуцированных поверхностных зарядов. Их распределение неизвестно. Следовательно, просто воспользоваться принципом суперпозиции для определения искомого поля здесь принципиально невозможно и решение необходимо построить на основе дифференциальных уравнений и соответствующих граничных условий. Говорят так: требуется сформулировать *математическую постановку данной физической задачи*, понимая под этим задание, во-первых, области определения искомой функции и, во-вторых, уравнения (или уравнений) вместе с граничными условиями, которым должна удовлетворять исследуемая функция. Для рассматриваемого примера в качестве искомой функции следует брать скалярный потенциал  $\varphi(r, \alpha)$ , зависящий от полярных координат  $(r, \alpha)$  (рис. 1.22), и областью определения функции является область вне круга радиуса  $a$ , т. е.  $r > a, -\infty < \alpha < \infty$ . Так как в пространстве вне цилиндра никаких зарядов нет, то здесь искомая функция удовлетворяет уравнению

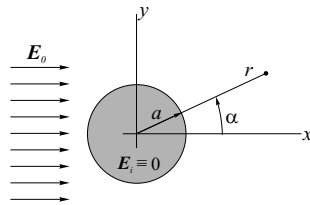


Рис. 1.22

Говорят так: требуется сформулировать *математическую постановку данной физической задачи*, понимая под этим задание, во-первых, области определения искомой функции и, во-вторых, уравнения (или уравнений) вместе с граничными условиями, которым должна удовлетворять исследуемая функция. Для рассматриваемого примера в качестве искомой функции следует брать скалярный потенциал  $\varphi(r, \alpha)$ , зависящий от полярных координат  $(r, \alpha)$  (рис. 1.22), и областью определения функции является область вне круга радиуса  $a$ , т. е.  $r > a, -\infty < \alpha < \infty$ . Так как в пространстве вне цилиндра никаких зарядов нет, то здесь искомая функция удовлетворяет уравнению

Лапласа

$$\Delta\varphi(r, \alpha) = 0.$$

Граничные условия для потенциала выпишем исходя из условий для поля  $\vec{E}$ . На бесконечности имеется невозмущенное поле  $\vec{E} = \vec{E}_0$ . В качестве потенциала однородного поля  $E_0\vec{e}_x$  можно принять  $-E_0x$ . Следовательно, соответствующее граничное условие задачи имеет вид

$$\varphi|_{\infty} = -E_0r \cos \alpha. \quad (\text{а})$$

На поверхности цилиндра компоненты поля согласно условиям (1.22) равны

$$E_r|_{r=a} = 4\pi\sigma(\alpha), \quad E_\alpha|_{r=a} = 0.$$

Для функции  $\varphi(r, \alpha)$ , следовательно, на границе  $r = a$  имеем

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}|_{r=a} = 4\pi\sigma(\alpha); \quad (\text{б})$$

$$\varphi|_{r=a} = \varphi_0 = \text{const}. \quad (\text{в})$$

Здесь  $\sigma(\alpha)$  — поверхностная плотность индуцированных зарядов, зависящая от координаты  $\alpha$ ,  $\varphi_0$  — некоторая константа, пока неопределенная. Кроме того, в связи с использованием полярных координат для получения однозначного решения требуется выполнение условия периодичности

$$\varphi(r, \alpha + 2\pi n) = \varphi(r, \alpha), \quad (\text{г})$$

$n$  — произвольное целое число.

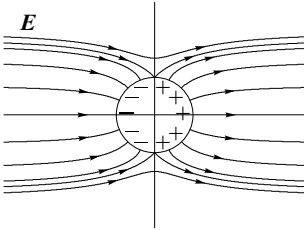


Рис. 1.23

Обратим внимание, что в граничное условие (б) входят неизвестные поверхностные заряды. Именно из этого условия они определяются после построения решения задачи.

Итак, нам нужно построить решение  $\varphi(r, \alpha)$ , удовлетворяющее уравнению Лапласа и всем перечисленным условиям. Нетрудно заметить, что искомым решением служит функция из набора (1.24), отвечающая номеру  $m = 1$  и значению

$\alpha_0 = 0$  :

$$\varphi(r, \alpha) = \left( Ar + \frac{B}{r} \right) \cos \alpha.$$

## 1.11. Единственность решения задачи электростатики

35

Эта функция удовлетворяет уравнению и граничному условию (г). Из условия (а) следует  $A = -E_0$ , условие (в) удовлетворяется, если положить  $Aa + (B/a) = 0$ ; при этом  $\varphi|_{r=a} = 0$ , т. е.  $\varphi_0 = 0$ , и  $B = E_0 a^2$ . Следовательно, искомый потенциал будет

$$\varphi(r, \alpha) = -E_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \alpha,$$

а компоненты поля  $\vec{E}$  равны соответственно

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = E_0 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \alpha,$$

$$E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -E_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \alpha.$$

Общая картина силовых линий поля  $\vec{E}$  имеет вид, показанный на рис. 1.23. Искомые поверхностные заряды распределены на поверхности цилиндра с плотностью

$$\sigma(\alpha) = \frac{1}{4\pi} E_r|_{r=a} = \frac{E_0}{4\pi} 2 \cos \alpha = \frac{E_0}{2\pi} \cos \alpha,$$

зависящей от угловой координаты  $\alpha$ . Положительные и отрицательные заряды находятся на соответствующих половинах поверхности цилиндра, как схематически изображено на рис. 1.23. Понятно, что поле  $\vec{E}$ , ими созданное, внутри цилиндра направлено против поля  $\vec{E}_0$  и поэтому суммарное поле здесь равно нулю. Вне цилиндра поле индуцированных зарядов, складываясь с  $\vec{E}_0$ , приводит к возмущенному полю, силовые линии которого и изображены на рисунке.

## 1.11. Стандартные задачи электростатики. Единственность решения

1. Начнем с подготовительного материала, каким для рассматриваемых целей служит формула Грина из векторного анализа

$$\int (\psi \Delta \varphi + \text{grad} \psi \cdot \text{grad} \varphi) dV = \oint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Эта формула получается непосредственно из теоремы Остроградского—Гаусса

$$\int \text{div } \vec{a} dV = \oint a_n dS,$$

если в качестве векторного поля взять  $\vec{a} = \psi \text{grad } \varphi$  и вспомнить правило вычисления дивергенции произведения, согласно которому

$$\text{div}(\psi \text{grad } \varphi) = \psi \text{div grad } \varphi + \text{grad } \psi \cdot \text{grad } \varphi.$$

Здесь нам понадобится формула Грина для частного случая  $\psi = \varphi$ :

$$\int [\psi \Delta \psi + (\text{grad } \psi)^2] dV = \oint \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (\text{a})$$

2. Мы уже знаем, что в электростатике задача определения векторного поля  $\vec{E}$  заменяется более простой задачей для скалярного потенциала. Обычно здесь приходится иметь дело с ситуацией, когда заряды располагаются на проводниках. Распределение и форма всех находящихся в поле проводников заданы. Необходимо определить поле этих проводников и распределение зарядов по их поверхности, если известны либо потенциал каждого проводника (в этом случае задачу назовем *задача I*), либо общий заряд каждого проводника (*задача II*).

Покажем, что этими условиями электростатическое поле, а следовательно, и распределение зарядов определяются однозначно. Для этого заметим, что во всем пространстве между заряженными проводниками (назовем область  $V$ ) потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям, задаваемым на поверхностях  $S_i$  (т. е.  $S_1, S_2$  и т. д.), примыкающих к поверхности проводников со стороны пространства  $V$ , как условно показано на рис. 1.24 для одного из проводников. Граничные условия следующие:

$$\left. \begin{aligned} \varphi|_{S_i} &= \varphi_{oi} - \text{заданные константы (для задачи I),} \\ \varphi|_{S_i} &= \text{const} \quad (\text{неопределенная}), \\ \oint_{S_i} (\partial \varphi / \partial n) dS &= 4\pi q_i, \quad q_i - \text{заряд } i\text{-го проводника} \end{aligned} \right\} \quad (\text{для задачи II})$$

Обращаем внимание: направление внешней нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S_i$  (внешняя нормаль для области  $V$ , показана на рис. 1.24) является внутренней нормалью для проводника, поэтому поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность  $S_i$   $\oint_{S_i} E_n dS$  равен  $-4\pi q_i$ , т. е. определяется зарядом  $q_i$  со знаком «-» и последнее граничное условие имеет приведенный вид. Единственность решений задач I и II доказывается от противного. Предположим, что имеются два различных решения  $\varphi$  и  $\varphi'$  и образуем разность этих решений:

$$\psi = \varphi - \varphi'.$$

## 1.11. Единственность решения задачи электростатики

37

Подставим эту функцию в формулу Грина для области  $V$ , для которой границами являются поверхности  $S_i$ . Так как

$$\Delta\psi = \Delta\varphi - \Delta\varphi' = 0,$$

то последняя приобретает вид

$$\int_V (\text{grad } \psi)^2 dV = \sum_i \oint_{S_i} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (б)$$

Для задачи I значение  $\psi$  на поверхности  $S_i$  равно нулю:

$$\psi|_{S_i} = \varphi|_{S_i} - \varphi'|_{S_i} = 0, \quad (в)$$

поэтому из формулы (б) следует, что

$$\int (\text{grad } \psi)^2 dV = 0.$$

Отсюда понятно, что во всех точках пространства  $V$   $\text{grad } \psi = 0$ , т. е.  $\psi = \varphi - \varphi' = \text{const}$ . Из условия (в) эта константа должна равняться нулю; единственность решения доказана.

Для задачи II значение  $\psi|_{S_i} = \text{const} - \text{const} = \text{const}$  не обязательно нуль. Но зато  $\oint_{S_i} (\partial\psi/\partial n) dS = 0$ . Этого достаточно, чтобы в правой части равенства (б) получить нуль. Опять получается, что  $\psi = \varphi - \varphi' = \text{const}$ , т. е. различные решения задачи II отличаются несущественной аддитивной постоянной. К тому же, если на решения наложить условие  $\varphi|_{\infty} = 0$ , то  $\varphi$  и  $\varphi'$  становятся тождественными.

Итак, однозначность решений сформулированных задач электростатики доказана. Отсюда следует, что если нам удастся каким-либо образом «угадать» функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую уравнению и необходимым граничным условиям, то можем быть уверены, что на самом деле мы получили истинное решение задачи.

Продemonстрируем этот путь угадывания решения на простейших примерах, допускающих применение так называемого «метода изображений».

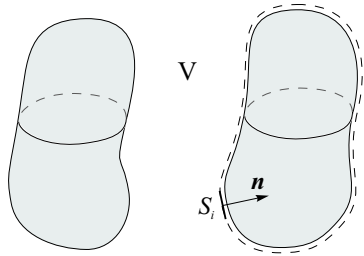


Рис. 1.24

*Пример 1.5.* Точечный заряд  $q$ , находящийся на расстоянии  $h$  от проводящего полупространства. Определить поле в свободном полупространстве и на этой основе — плотность зарядов, индуцированных зарядом  $q$  на поверхности проводника.

Вначале дадим математическую формулировку задачи. Так как в проводящем полупространстве поле  $\vec{E}_i \equiv 0$  и постоянный потенциал здесь можно принять равным нулю, областью определения  $V$  искомого поля является полупространство  $z > 0$  с выкинутой точкой (рис. 1.25). Следовательно, границами области являются плоскость  $z = 0$  и сфера малого радиуса  $S_\varepsilon$  с центром в точке расположения заряда  $q$ . Искомое поле удовлетворяет уравнению Лапласа

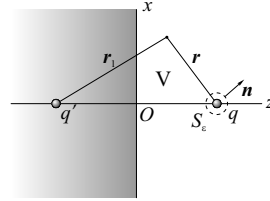


Рис. 1.25

$$\Delta\varphi = 0 \quad (\text{г})$$

и граничным условиям

$$\varphi|_{z=0} = 0, \quad \oint_{S_\varepsilon} E_n dS = 4\pi q. \quad (\text{д})$$

Первое из них обеспечивает выполнение условия (1.22) равенства нулю тангенциальной компоненты поля  $\vec{E}$ , непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля на границе заменено условием непрерывности потенциала. Так обычно всегда поступают, поэтому необходимо понимать, что непрерывность потенциала автоматически обеспечивает выполнение условия непрерывности  $\vec{E}_\tau$ . Второе из граничных условий (д) обеспечивает необходимую особенность поля в окрестности точечного заряда, при которой конечная величина потока вектора не зависит от радиуса сферы  $S_\varepsilon$ .

Решение задачи (г), (д) угадать нетрудно. Представим мысленно, что в точке, симметричной положению заряда  $q$  относительно плоскости  $z = 0$ , находится заряд  $g' = -g$ . Тогда потенциал и электрическое поле, созданные зарядом  $q$  и фиктивным зарядом  $g'$ , в правом полупространстве создают искомое поле

$$\varphi = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_1}.$$

Действительно, эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в области  $V$  как потенциал двух точечных зарядов, лежащих вне области

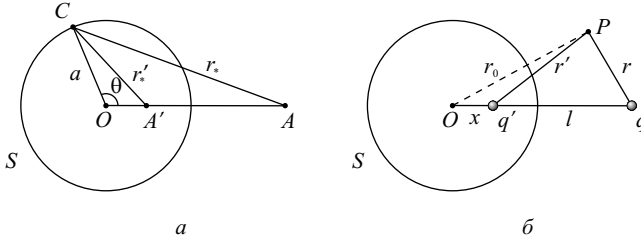


Рис. 1.26

$V$ . Во-вторых,  $\varphi|_{z=0} = 0$ , так как для точек плоскости  $r$  и  $r_1$  равны. В-третьих, поле, созданное зарядом  $q'$ , через поверхность  $S_\varepsilon$  создает поток, равный нулю (по теореме Гаусса), а поле от точечного заряда  $q$  обеспечивает выполнение соответствующего граничного условия (д). Таким образом, задача решена.

*Упражнение.* Убедиться, что плотность индуцированных на поверхности проводника зарядов, определяемая граничным условием (1.22)  $-\partial\varphi/\partial z|_{z=0} = 4\pi\sigma(x, y)$ , равна

$$\sigma(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \frac{h}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}},$$

где  $h$  — расстояние от заряда  $q$  до поверхности.

*Пример 1.6. Точечный заряд вне проводящего шара.*

Определяющим для возможности применения метода изображения для рассматриваемого случая является факт существования точек, симметричных относительно сферической поверхности. Симметричными относительно сферы  $S$  называются точки  $A$  и  $A'$  (рис. 1.26, а), расположенные на луче, исходящем из центра  $O$ , обладающие тем свойством, что расстояния от них до любой точки сферы  $r_*$ ,  $r'_*$  между собой пропорциональны, т. е.

$$r_*/r'_* = k = \text{Const.} \quad (\text{е})$$

Обозначив расстояния  $OA, OA'$  соответственно через  $\ell, x$ , соотношение (е) запишем в виде  $r_*^2 = k^2 r'^2$  и, воспользовавшись теоремой косинусов для треугольников  $OA'C, OAC$ , приведем к виду

$$[\ell^2 + a^2 - k^2(x^2 + a^2)] - 2a(\ell - k^2x) \cos \theta = 0, \quad (\text{ж})$$

где  $\theta$ —сферическая координата точки  $C$ . Равенство (ж) должно выполняться при произвольном  $\cos \theta$ , и для этого необходимо, чтобы коэффициент при  $\cos \theta$  и свободный член в этом равенстве независимо равнялись нулю. Эти два условия, определяющие неизвестные  $x, k$  запишем так:

$$x = \ell/k^2, \quad (k^2 - 1)(\ell^2 - a^2 k^2) = 0.$$

Одно из решений полученной системы:  $k^2 = 1, x = \ell$  интереса не представляет, так как при этом точки  $A'$  и  $A$  совпадают. Остается решение

$$k = \ell/a, \quad x = a^2/\ell.$$

Таким образом, точки, симметричные относительно сферы радиуса  $a$ , находятся на расстояниях от центра сферы, удовлетворяющих условию

$$x\ell = a^2,$$

при этом

$$r_*/r'_* = \ell/a. \quad (\kappa)$$

Вернемся к рассматриваемому примеру. Пусть в точке  $A$  находится заряд  $q$ , а потенциал шара принят равным нулю. Искомый потенциал в произвольной точке  $P$  вне шара в этом случае

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \quad (\lambda)$$

будет складываться из потенциалов заданного заряда  $q$  и фиктивного заряда

$$q' = -qa/\ell, \quad (\mu)$$

расположенного в точке  $A'$  (см. рис. 1.26, б). Действительно, решение (л) удовлетворяет уравнению Лапласа в своей области определения, имеет нужную особенность вблизи точечного заряда  $q$  и на поверхности шара (здесь  $r$  и  $r'$  равны соответственно  $r, r'$ ) на основании соотношений (к), (м) обращается в нуль.

Из вида решения (л) понятно, что поток вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность, примыкающую к поверхности шара  $S$ , равен  $4\pi q'$ . Следовательно, рассматриваемый шар с нулевым потенциалом несет заряд  $q'$ , определяемый равенством (м).

Рассмотрим второй вариант — точечный заряд  $q$  рядом с шаром, несущим заряд  $Q$  (при этом постоянный потенциал шара не определен). В этом случае к существующей системе зарядов  $q, q'$  необходимо



## 1.12. Мультипольное разложение

41

добавить фиктивный заряд

$$q'' = Q - q' = Q + q(a/\ell),$$

расположенный в центре шара, и тогда

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r_0}.$$

Потенциал шара при этом

$$\varphi(P) = \varphi|_S = \frac{r}{r_*} + \frac{q'}{r'_*} + \frac{q''}{a} \quad (\text{н})$$

будет равен

$$\varphi|_0 = \frac{q''}{a} = \frac{Q}{a} + \frac{q}{\ell}, \quad (\text{о})$$

так как первые слагаемые в (н) дают нуль.

Результат (о) можно написать сразу из принципа суперпозиции. Это — потенциал центра шара, складывающийся из потенциалов всех поверхностных зарядов ( $Q/a$ ) и потенциала точечного заряда  $q$ , удаленного на  $\ell$  от центра.

В заключение подчеркнем, что приведенные примеры — наипростейшие, решаемые методом изображений. С помощью данного метода решаются задачи и не слишком тривиальные. В дальнейшем возможности метода мы продемонстрируем при изучении других разделов курса. А пока отметим, что метод изображения — это метод построения решения математически точно поставленной физической задачи с помощью функций от фиктивных источников.

## 1.12. Мультипольное разложение

Нам известно, что если распределение зарядов в пространстве известно, то распределение потенциала, в принципе, также известно и задается в виде интеграла (1.15) (или суммы, в случае точечных зарядов)

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \left( \varphi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{|\vec{r} - \vec{r}'_{\alpha}|} \right). \quad (1.15)$$

Для практических расчетов эти выражения обычно малополезны. Однако имеется важный случай — исследование поля на больших расстояниях от системы зарядов, занимающих ограниченную область пространства, когда из решения (1.15) получаются простые формулы мультипольного разложения потенциала для произвольного распределения зарядов.

Итак, пусть некоторая система зарядов занимает ограниченную область пространства с характерным размером  $a$  и начало координат находится где-то внутри этой области, как показано на рис. 1.27. Тогда для радиусов-векторов  $\vec{r}'$  зарядов системы и радиуса-вектора  $\vec{r}$  далекой точки наблюдения, входящих в решение (1.15), справедливы

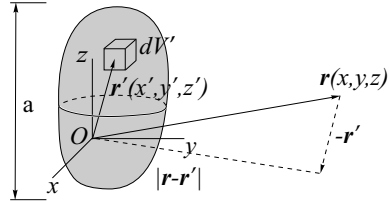


Рис. 1.27

оценки  $r' \leq a$ ,  $r \gg a$ , которые как раз и позволяют получить искомое разложение. Для этого рассмотрим дробь  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  из (1.15). Знаменатель дроби представим как расстояние от начала координат до точки с координатами  $x - x'$ ,  $y - y'$ ,  $z - z'$ , немного отличающимися от координат точки наблюдения  $x, y, z$ . (На рис. 1.27 это расстояние показано пунктирной прямой.) По известному правилу разложения функции трех переменных в ряд Тейлора отсюда для рассматриваемой дроби имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r(x - x', y - y', z - z')} = \\ &= \frac{1}{r(x, y, z)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot (-x'_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot x'_i x'_j + \dots \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь использовано тензорное правило суммирования по повторяющемуся индексу с использованием вместо  $x', y', z'$  и  $x, y, z$  обозначений  $x'_i$ ,  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

**Нулевой и первый (дипольный) члены разложения.** Пока ограничимся первыми двумя членами разложения (1.26)

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + (-\vec{r}') \cdot \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3}$$

## 1.12. Мультипольное разложение

43

и из выражения (1.15) получим

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3},$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho(\vec{r}') dV' & \left( Q = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \right), \\ \vec{d} &= \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' & \left( \vec{d} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

( $Q$  — суммарный заряд,  $\vec{d}$  — дипольный момент системы); в скобках соответствующие выражения даны для случая точечных зарядов.

Таким образом, на большом расстоянии от системы зарядов главный член разложения

$$\varphi^{(0)} = \frac{Q}{r}$$

определяется суммарным зарядом. Следовательно, на таких расстояниях поле  $\vec{E}$  совпадает с полем точечного заряда  $Q$ , находящегося в начале координат.

Следующий, дипольный член разложения

$$\varphi^{(1)} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (1.28)$$

определяемый дипольным моментом системы, является малой поправкой к кулоновскому. Дипольный потенциал становится главным, если суммарный заряд системы равен нулю. Обратим внимание, что дипольный потенциал осесимметричен относительно направления вектора  $\vec{d}$  и может быть представлен в виде

$$\varphi^{(1)} = \frac{d \cdot \cos \theta}{r^2}, \quad (1.29)$$

где  $\theta$  — угол между направлениями векторов  $\vec{d}$  и  $\vec{r}$ . Напомним, что выражение (1.29) уже фигурировало раньше как одно из решений (1.25) уравнения Лапласа в сферических координатах.

**О влиянии выбора начала координат на вектор  $\vec{d}$ .** Из самого определения (1.27) видно, что дипольный момент в общем случае зависит от выбора начала координат. При переносе его из точки  $O$  в точку  $O'$

с вектором переноса  $\overrightarrow{OO'} = \vec{b}$  радиусы-векторы зарядов  $\vec{r}'_\alpha$  заменяются на  $\vec{b} + \vec{r}'_\alpha$  и, следовательно, дипольные моменты  $\vec{d}$ ,  $\vec{d}'$  связаны соотношением  $\vec{d}' = \sum_\alpha q_\alpha \vec{r}'_\alpha = Q\vec{b} + \vec{d}$ . Отсюда видно, что при  $Q = 0$  дипольный момент не зависит от выбора начала координат и однозначно описывает пространственное распределение разноименных зарядов. При  $Q \neq 0$  всегда можно выбрать такое  $\vec{b} = \vec{d}'/Q$ , чтобы получить  $\vec{d}' = 0$ . Следовательно, дипольный момент системы характеризует смещение «центра» этой системы зарядов.

*Пример 1.7. Дипольный момент системы двух зарядов  $-e, e$ .* По определению  $\vec{d} = e(\vec{r}'_+ - \vec{r}'_-) = e\vec{a}$ , т. е. дипольный момент рассматриваемой системы определяется пространственным вектором, соединяющим два заряда (рис. 1.28).

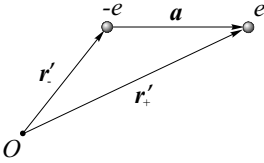


Рис. 1.28

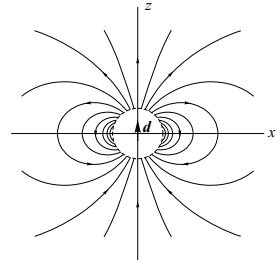


Рис. 1.29

**Поле диполя.** Здесь имеется в виду найти поле системы зарядов с суммарным зарядом  $Q = 0$ , характеризующейся дипольным моментом  $\vec{d}$ , на больших расстояниях от зарядов. Из соотношения (1.28) имеем

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad} \left( \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = - \left[ (\vec{d} \cdot \vec{r}) \text{grad} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \text{grad}(\vec{d} \cdot \vec{r}) \right] = \frac{3(\vec{d} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{d}}{r^5}. \quad (1.30)$$

С использованием единичного вектора  $\vec{n} = \vec{r}/r$ , направленного вдоль радиуса-вектора точки наблюдения, полученную формулу часто представляют в виде

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{d})\vec{n} - \vec{d}}{r^3}. \quad (1.30')$$

Данное поле  $\vec{E}$  осесимметрично относительно оси, проходящей по вектору  $\vec{d}$ , и характеризуется силовыми линиями, изображенными на рис. 1.29.

**Сила и момент сил, действующие на диполь со стороны внешнего электрического поля.** Пусть рассматриваемая система зарядов с суммарным зарядом  $Q = 0$  и характеризующаяся дипольным моментом  $\vec{d} \neq 0$ , находится во внешнем электрическом поле  $\vec{E}(\vec{r})$ . Чтобы система могла рассматриваться как диполь во внешнем поле, ее размер  $a$  должен быть существенно меньше характерного размера  $\ell$ , на котором внешнее поле заметно меняется. В этом случае напряженность поля в точке  $\vec{r}$ , входящая в выражения

$$\vec{F} = \int \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) dV, \quad \vec{N} = \int [\rho(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{E}(\vec{r})] dV$$

для суммарной силы и суммарного момента сил, может быть вычислена через поле и производные поля в *фиксированной* точке  $O$  (в «центре» диполя), т. е.

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(0) + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{E},$$

где слагаемое  $(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{E}$  (в векторном анализе называется градиентом вектора  $\vec{E}$  по направлению вектора  $\vec{r}$ ) вычисляется в точке  $O$ . Вследствие этого при интегрировании по объему  $V$  эти производные выносятся из под знака интеграла и результат для  $\vec{F}$  приобретает вид

$$\vec{F} = (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E} = d_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + d_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + d_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \quad (1.31)$$

(поле  $\vec{E}(0)$  при интегрировании пропадает из-за  $Q = 0$ ). Для суммарного момента сил при интегрировании достаточно ограничиться значением  $\vec{E}(0)$  и в результате получаем

$$\vec{N} = [\vec{d} \times \vec{E}]. \quad (1.32)$$

Таким образом, сила (1.31), действующая на диполь со стороны внешнего электрического поля, зависит от быстроты изменения этого поля в направлении вектора  $\vec{d}$ . Естественно, в однородном поле эта сила равна нулю. Момент сил (1.32), действующий на диполь, стремится повернуть диполь так, чтобы его дипольный момент стал параллелен полю  $\vec{E}$  в месте расположения диполя (рис. 1.30).

Заметим для дальнейшего, что при выводе формул (1.31), (1.32) никаких предположений относительно внешнего поля не делалось. Если же рассматривается электростатическое поле  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ , которое удовлетворяет уравнению

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (1.33)$$

формулу для силы, действующей на диполь, можно привести к виду

$$\vec{F} = -gradU,$$

связав силу с потенциальной энергией  $U$  диполя во внешнем электрическом поле. Рассмотрим два разных варианта диполей.

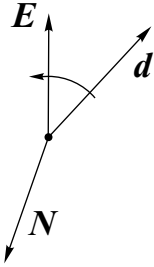


Рис. 1.30

Случай так называемого *твёрдого диполя*, когда его дипольный момент  $\vec{d}$  не зависит от положения диполя в пространстве, занятом полем. Тогда из формулы векторного анализа

$$grad(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + [\vec{a} \times rot\vec{b}] + [\vec{b} \times rot\vec{a}]$$

с учетом уравнения (1.33) и условия  $\vec{d} = const$  получается

$$grad(\vec{d} \cdot \vec{E}) = (d \cdot \nabla)\vec{E}$$

и, следовательно, формула (1.31) приобретает искомый вид

$$\vec{F} = grad(\vec{d} \cdot \vec{E}), \quad (1.34)$$

т. е.

$$U = -(\vec{d} \cdot \vec{E}),$$

если  $\vec{d} = const$ .

Случай *упругого диполя*. Существуют системы зарядов с дипольным моментом, пропорциональным полю  $\vec{E}$ , в котором находится система (например, заряды нейтральной молекулы). Для них

$$\vec{d} = \alpha \vec{E}, \quad \alpha = const.$$

При этом с помощью приведенной формулы векторного анализа получаем

$$grad(\vec{d} \cdot \vec{E}) = \alpha grad(\vec{E} \cdot \vec{E}) = \alpha \cdot 2(\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} = 2(\vec{d} \cdot \nabla)\vec{E},$$

т. е.

$$(\vec{d} \cdot \nabla)\vec{E} = \frac{1}{2}grad(\vec{d} \cdot \vec{E}).$$

Отсюда формула (1.31) приобретает вид

$$\vec{F} = \frac{1}{2}grad(\vec{d} \cdot \vec{E}); \quad (1.35)$$

следовательно,

$$U = -\frac{1}{2}(\vec{d} \cdot \vec{E}), \quad \text{если } \vec{d} = \alpha \vec{E}.$$

**Квадрупольный член разложения**  $\varphi^{(2)}$  получается как результат подстановки последнего слагаемого (1.26) в выражение (1.15):

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \int x'_i x'_j \rho(\vec{r}') dV' \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right).$$

С введением обозначения

$$Q_{ij} = \int x'_i x'_j \rho(\vec{r}') dV'$$

результат можно представить в виде

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Симметричный тензор  $Q_{ij} = Q_{ji}$  иногда принимается за тензор квадрупольных моментов. Часто, однако, несколько отличный тензор, а именно

$$D_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') dV', \quad (1.36)$$

тоже симметричный, принимают в качестве тензора квадрупольных моментов. (Здесь  $\delta_{ij}$  — символы Кронекера; в совокупности  $\delta_{ij}$  составляют единичный тензор). Удобство нового тензора связано с тем, что его след (сумма диагональных членов) равен нулю, т. е.

$$\delta_{ij} D_{ij} = D_{ii} = 0. \quad (1.37)$$

С учетом того, что функция  $1/r(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{1}{r} \right) = \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) = 0,$$

легко заметить, что

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{6} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Наконец, последовательно вычисляя производные функции  $1/r$ , нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}$$

и, следовательно,

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{6} D_{ij} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}.$$

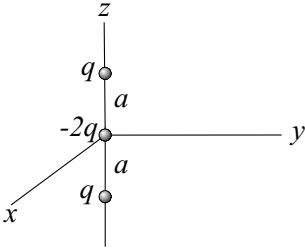
Учитывая свойство (1.37), квадрупольный потенциал можно привести к окончательному виду

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} D_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5}. \quad (1.38)$$

Отсюда видно, что с увеличением расстояния  $r$   $\varphi^{(2)}$  спадает как  $1/r^3$ , в то время как дипольный потенциал  $\sim 1/r^2$ , а кулоновский — как  $1/r$ .

Заметим, что существуют системы зарядов, у которых как суммарный заряд, так и дипольный момент равны нулю. Для таких систем именно квадрупольный потенциал является главным.

*Пример 1.8. Поле линейного квадруполья*, т. е. системы трех зарядов, показанных на рис. 1.31. Соответствующие заряды расположены на оси  $z$  в точках с координатами  $\pm a$  и  $z = 0$ . Видно, что у этой системы  $Q = 0$  и  $\vec{d} = 0$ . Оси  $x, y, z$  являются главными осями для тензора  $D_{ij}$  рассматриваемой системы зарядов, так как ось  $z$  — ось симметрии, отсюда с учетом (1.37) следует, что



$$D_{11} = D_{22} = -D, \quad D_{33} = 2D,$$

т. е. тензор  $D_{ij}$  полностью определяется значением одного диагонального элемента  $D_{33}$ . Замечаем, что заряд  $-2q$  с нулевыми координатами вклада в  $D_{33}$  не вносит и от оставшихся двух зарядов  $q$  имеем

$$D_{33} = 2q(3a^2 - a^2) = 4qa^2.$$

Рис. 1.31

Таким образом, квадрупольный потенциал равен

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2r^5} (D_{11}x^2 + D_{22}y^2 + D_{33}z^2) = \frac{D}{r^5} \left[ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z^2 \right]$$

и после перехода с сферическим координатам  $(r, \theta, \alpha)$  принимает вид

$$\varphi^{(2)} = \frac{D}{r^3} \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) = \frac{D}{r^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = \frac{D}{r^3} P_2(\cos \theta),$$



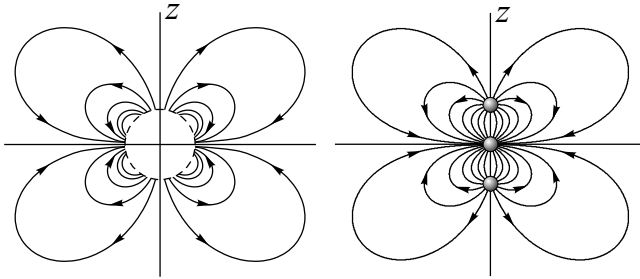


Рис. 1.32

т. е. совпадает с одним из решений (1.25) уравнения Лапласа, соответствующим номеру  $\ell = 2$ .

Силовые линии поля линейного квадруполь изображены на рис. 1.32 (слева); здесь пунктирная окружность схематически ограничивает область, внутри которой квадрупольный потенциал не соответствует истинному полю. Для сравнения на рисунке справа представлены силовые линии для трех зарядов, составляющих рассматриваемый квадруполь. Видно, что вдали от системы зарядов характер поля отвечает квадрупольному потенциалу.

### 1.13. Энергия взаимодействия электрических зарядов. Диполь во внешнем электрическом поле

При перемещении зарядов силы кулонова взаимодействия между ними совершают определенную работу. Очевидно, что всякой системе зарядов мы должны приписать определенную энергию взаимодействия  $W$ , за счет убыли которой и совершается работа  $A$  :

$$A = -dW. \quad (a)$$

Исходя из соотношения (a) подсчитаем вначале энергию взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии  $r_{12}$  друг от друга.

Пусть, например, заряд  $q_1$  неподвижен, а заряд  $q_2$  перемещается из точки  $P_2$  в точку  $P'_2$  (рис. 1.33). При этом работа электрического поля

заряда  $q_1$  по перемещению заряда  $q_2$  равна

$$A = q_2[\varphi_2(P_2) - \varphi_2(P'_2)] = -q_2 d\varphi_2,$$

где  $\varphi_2$  — потенциал заряда  $q_1$  в месте расположения заряда  $q_2$ . Следовательно, как следует из формулы (а), изменение энергии взаимодействия равно

$$dW = q_2 d\varphi_2;$$

учтя, что при бесконечном расстоянии между зарядами энергия взаимодействия равна нулю, получаем

$$W = q_2 \varphi_2 = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \quad (б)$$

Это же выражение, конечно, можно получить, рассматривая перемещение заряда  $q_1$  в поле заряда  $q_2$ .

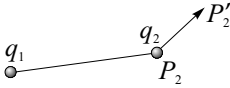


Рис. 1.33

Полезно полученное выражение прокомментировать несколько иначе. Можно сказать, что  $W$  (б) есть работа, которую мы должны совершить, чтобы перенести заряд  $q_1$  из бесконечности в точку на расстоянии  $r_{12}$  от заряда  $q_2$ .

Следовательно, энергия взаимодействия равна работе, затраченной нами на создание системы зарядов (пока системы двух зарядов).

Если имеется система  $N$  зарядов, то энергия взаимодействия равна, как нетрудно убедиться,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum q_i \varphi_{ij}, \quad (1.39)$$

где  $\varphi_{ij}$  — потенциал поля  $q_j$  в точке расположения заряда  $q_i$ . Коэффициент  $1/2$  перед суммой объясняется тем, что здесь энергия каждой пары зарядов входит дважды.

Эту формулу можно представить в другой эквивалентной форме

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (1.39')$$

где  $\varphi_i = \sum_{j \neq i} \varphi_{ij}$  — потенциал всех зарядов, кроме  $q_i$ , в месте расположения заряда  $q_i$ .

**Энергия диполя во внешнем электрическом поле.** Как неоднократно подчеркивалось в предыдущем параграфе, говоря о диполе, в общем случае мы всегда подразумеваем систему зарядов, занимающую ограниченную область пространства, имеющую нулевой суммарный заряд и характеризующуюся дипольным моментом  $\vec{d}$ . Только в частном случае это может быть система из двух зарядов, равных по модулю и противоположных по знаку, расположенных на некотором расстоянии друг от друга.

Здесь нас интересует работа электрических сил при перемещении рассматриваемой системы зарядов («диполя») в заданном «внешнем» поле других зарядов, остающихся при этом неподвижными. Взаимная энергия этих «внешних» зарядов, так же как взаимная энергия зарядов, составляющих «диполь», остается при этом неизменной; переменная энергия взаимодействия между «диполем» и «внешними» зарядами, за счет которой совершается работа электрического поля, составляет энергию, которую обычно называют *энергией диполя во внешнем поле*.

Для определенности примем, что «диполь» представлен объемным распределением зарядов  $\rho(\vec{r})$ . Тогда искомая энергия, очевидно, равна

$$W = \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dV,$$

где  $\varphi(\vec{r})$  — потенциал внешнего поля в точке расположения элемента заряда  $\rho(\vec{r})dV$ . В пределах области, занятой зарядами «диполя», внешнее поле изменяется слабо (имеет место неравенство  $a \ll \ell$  для характерных размеров  $a$  и  $\ell$ , обозначенных при выводе формул (1.31), (1.32), вследствие чего для  $\varphi(\vec{r})$  справедливо представление

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(0) + \vec{r} \cdot \text{grad} \varphi = \varphi(0) - \vec{r} \cdot \vec{E}(0).$$

Следовательно,

$$W = - \int \rho(\vec{r})\vec{r}dV \cdot \vec{E}(0) = -\vec{d} \cdot \vec{E}(0), \quad \text{т. к.} \quad \int \rho(\vec{r})dV = 0.$$

Таким образом, энергия диполя во внешнем электрическом поле

$$W = -(\vec{d} \cdot \vec{E}) \quad (1.40)$$

определяется скалярным произведением дипольного момента  $\vec{d}$  (неизменного по величине) и напряженности поля  $\vec{E}$  в месте расположения

диполя. Эта энергия зависит как от положения диполя в неоднородном поле  $\vec{E}(\vec{r})$ , так и от угла между векторами  $\vec{d}$  и  $\vec{E}$  для фиксированного положения диполя в пространстве. Отсюда непосредственно можно получить выражения

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{d} \cdot \vec{E}), \quad \vec{N} = [\vec{d} \times \vec{E}] \quad (1.41)$$

для силы и момента сил, действующих на диполь во внешнем поле, ранее выведенные в результате интегрирования по всем зарядам, составляющим рассматриваемый диполь (формулы (1.32), (1.34)).

*Упражнение.* Пользуясь принципом виртуальных перемещений из соотношения (1.40) получить выражения (1.41).

## 1.14. Плотность энергии электрического поля

Теперь предположим, что имеется непрерывное распределение зарядов, задаваемое объемной плотностью  $\rho(\vec{r})$ . Тогда в элементарном объеме  $dV$  содержится заряд

$$dq = \rho(\vec{r})dV,$$

а формула (1.39') приобретает такой вид:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dV. \quad (1.42)$$

Внесем уточнение для обоснования перехода (1.39') → (1.42). При переходе к объемному распределению под интегралом, вообще говоря, следовало писать

$$\rho(\vec{r})\varphi'(\vec{r}),$$

понимая под  $\varphi'(\vec{r})$  потенциал всех зарядов, за исключением элементарного заряда  $\rho dV$ . Мысленно представим заряд  $\rho dV$  в виде равномерно заряженного шарика малого радиуса  $\delta$  с центром в точке  $\vec{r}$  и с плотностью заряда  $\rho(\vec{r})$ . В *примере 1.3* было показано, что потенциал этого заряда в центре шарика равен  $(3/2)(q/\delta)$ , где  $q = (4/3)\pi\delta^3\rho$ , и, следовательно,

$$\varphi'(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - 2\pi\rho(\vec{r})\delta^2.$$

## 1.14. Плотность энергии электрического поля

53

Отсюда видно, что при  $\delta \rightarrow 0$   $\varphi' \rightarrow \varphi(\vec{r})$  и замена  $\varphi'(\vec{r})$  на  $\varphi(\vec{r})$ , таким образом, действительно допустима.

Осуществим тождественное преобразование выражения (1.42), заменив в последнем  $\rho$ , согласно уравнению Пуассона (1.13), на  $-(1/4\pi)\Delta\varphi$  и используя формулу векторного анализа

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) = \varphi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2;$$

в результате получим

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int [\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) - (\operatorname{grad} \varphi)^2] dV = \frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi E_n dS + \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV,$$

где  $S$  — поверхность, ограничивающая объем  $V$ , внутри которого сосредоточены все заряды. Если последние занимают ограниченный объем в пространстве, а в качестве поверхности  $S$  принять сферу сколь угодно большого радиуса  $R$ , то при  $R \rightarrow \infty$  интеграл по поверхности

$$\oint_{S_R} \rightarrow 0,$$

так как на больших расстояниях  $\varphi$  и  $E_n$  спадают по крайней мере не медленнее, чем  $1/R$  и  $1/R^2$  (если, повторим, заряды занимают конечный объем пространства), а поверхность растет как  $R^2$ .

Итак, в результате тождественного преобразования выражения (1.42) получили формулу

$$W = \int \frac{E^2}{8\pi} dV \quad (1.43)$$

в виде интеграла по всему пространству, занятому полем, которая по сравнению с исходной формулой (1.39) имеет не только новый вид, но, по существу, и новый смысл, определяя плотность энергии электрического поля в пространстве

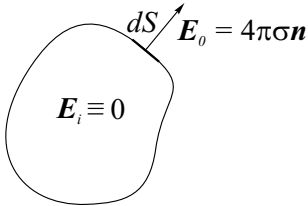
$$w = \frac{E^2}{8\pi}. \quad (1.44)$$

В то время как формула (1.39) описывает только энергию взаимодействия разных зарядов ( $i \neq j$ ), формула (1.42) и следующая из нее формула (1.43) включают также и собственную энергию каждого из этих зарядов. В терминах поля можно сказать, что формулы (1.42), (1.43) описывают полную энергию электрического поля, тогда как (1.39) — только часть этой энергии.

Представление об энергии электрического поля, распределенном в пространстве с объемной плотностью (1.44), здесь получено на основе

общих рассуждений. А теперь то же выражение (1.44) мы постараемся «увидеть» из рассмотрения конкретного примера. Для этого предварительно остановимся на следующем вопросе.

**Силы, действующие на заряды поверхности проводника.**



Мы знаем, что на точечный заряд  $q$  со стороны электрического поля  $\vec{E}$  действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

где  $\vec{E}$  — напряженность поля, возбуждаемого всеми зарядами системы, кроме самого заряда  $q$ . Когда же мы обращаемся к силам, действующим на поверхностные

заряды, возникает трудность, связанная с тем, что поле  $\vec{E}$  по разные стороны поверхности имеет разные значения, а на самой поверхности неопределено. Как мы уже обсуждали, внутри проводника поле тождественно равно нулю, а с внешней стороны поверхности имеет только нормальную компоненту, связанную с локальной поверхностной плотностью  $\sigma$  (рис. 1.34). Понятно, что представление о разрыве поля обусловлено неявным отказом от рассмотрения структуры тонкого слоя, где расположены заряды, и предположением, что этот слой представляет собой бесструктурную математическую поверхность. Такая идеализация весьма продуктивна, позволяя нам определить поля вне и внутри проводника, пользуясь простыми средствами. Определение структуры поверхностного слоя для металлических проводников проводится с учетом функции распределения Ферми—Дирака для электронов проводимости и пока для нас недоступно. Но тот факт, что поверхность проводника, где сосредоточены заряды, на самом деле обладает некоторой конечной толщиной  $\delta$ , хотя и весьма малой, где заряды распределены по объему, позволяет легко получить выражение, связывающее силы, действующие на поверхность проводника, с напряженностью поля вблизи этой поверхности.

Итак, рассмотрим выделенный на рис. 1.34 участок поверхности  $dS$  проводника. Имея в виду, что толщина слоя очень мала, кривизной поверхности можно пренебречь и считать поверхность проводника и рассматриваемый слой плоскими.

По внешней нормали к поверхности проводника проведем ось  $x$  и пусть слой, где распределены заряды, занимает область  $[0, \delta]$  (рис. 1.35). Можно считать, что поле  $\vec{E}$  внутри и вблизи слоя не зависит от координат  $y, z$  и имеет только  $x$ -компоненту  $E_x(x)$ , а объемная плотность

## 1.14. Плотность энергии электрического поля

55

заряда характеризуется функцией  $\rho(x)$ . Левее этого слоя электрическое поле равно нулю (поле внутри проводника). Следовательно,  $E_x(x)$  внутри слоя удовлетворяет уравнению

$$\frac{dE_x}{dx} = 4\pi\rho(x), \quad (*)$$

граничному условию  $E(0) = 0$  и имеет решение

$$E_x(x) = 4\pi \int_0^x \rho(\xi) d\xi.$$

Теперь нетрудно найти силу, действующую на слой,

$$\vec{f} = f_x \vec{e}_x, \quad f_x = \int_0^\delta \rho(x) E_x(x) dx,$$

приходящуюся на единицу поверхности проводника. Подставив сюда  $\rho(x)$  из уравнения (\*), получаем

$$f_x = \frac{1}{4\pi} \int_0^\delta E_x(x) \frac{dE_x}{dx} dx = \frac{1}{8\pi} \int_0^\delta \frac{d}{dx} [E_x(x)]^2 dx,$$

т. е.

$$f_x = \frac{1}{8\pi} E_0^2,$$

где  $E_0 = E_x(\delta) = 4\pi \int_0^\delta \rho(x) dx = 4\pi\sigma$  — напряженность поля на внешней поверхности проводника.

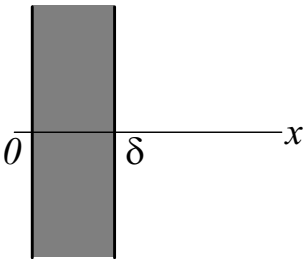


Рис. 1.35

Таким образом, сила, действующая на поверхность проводника, определяется суммарным зарядом  $\sigma = \int_0^\delta \rho(x) dx$ , приходящимся на единицу площади поверхности, и не зависит от распределения  $\rho(x)$ . Обратим внимание, что при любом знаке заряда  $\sigma$ , т. е. при любом направлении поля  $\vec{E}_0$ , сила  $\vec{f}$  направлена вдоль внешней нормали, т. е.

$$\vec{f} = \frac{E_0^2}{8\pi} \vec{n}. \quad (1.45)$$

Заметим, что результат (1.45) справедлив для любой заряженной поверхности, если только по одну сторону от поверхности напряженность поля равна нулю.

Теперь обратимся к примеру, призванному служить иллюстрацией к выражению

$$w = \frac{E^2}{8\pi}.$$

*Пример 1.9.* Пусть сферическая поверхность радиуса  $R$  равномерно заряжена с суммарным зарядом  $q$ . Рассмотрим процесс расширения сферы до радиуса  $R + dR$ , найти выражение для плотности энергии электрического поля.

В начальном состоянии имеем

$$E_r = \begin{cases} q/r^2 & \text{при } r > R, \\ 0 & \text{при } r < R, \end{cases}$$

а в конечном состоянии

$$E_r = \begin{cases} q/r^2 & \text{при } r > R + dR, \\ 0 & \text{при } r < R + dR. \end{cases}$$

Поля изображены на рис. 1.36.

Со стороны электрического поля на сферу действуют силы с плотностью

$$f_r = \frac{1}{8\pi} E_0^2, \quad E_0 = \frac{q}{R^2}.$$

Эти силы совершают работу

$$\delta A = f_r \cdot 4\pi R^2 dR = \frac{1}{8\pi} E_0^2 \cdot 4\pi R^2 dR. \quad (\text{а})$$

В процессе расширения сферы электрическое поле в пространстве  $r > R + dR$  осталось без изменения, а в сферическом слое  $(R, R + dR)$  исчезло полностью, т. е. энергия электрического поля изменилась на величину

$$dW = -w \cdot 4\pi R^2 dR, \quad (\text{б})$$

где  $w$  — искомая объемная плотность энергии.

Согласно закону сохранения энергии

$$\delta A = -dW,$$

т. е. работа  $\delta A$  электрических сил совершена за счет убыли энергии электрического поля. Подставляя сюда выражения (а) и (б), после сокращения на объем слоя  $4\pi R^2 dR$  получаем искомый результат.

*Замечание.* Этой сферой можно воспользоваться для решения обратной задачи: считая, что плотность энергии  $w$  нам известна, найти



## 1.14. Плотность энергии электрического поля

57

поверхностную силу  $f_r$ , отнесенную к единице поверхности заряженной сферы со стороны электрического поля. Решение очевидно.

В завершение параграфа вычислим энергию поля равномерно заряженного шара радиуса  $R$  (1.11):

$$E_r = \begin{cases} q/r^2 & \text{при } r \geq R, \\ q/R^3 r & \text{при } r < R. \end{cases}$$

Из выражения (1.43) имеем

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \frac{q^2}{R^6} r^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \frac{1}{8\pi} \int_R^\infty \frac{q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5} \frac{q^2}{R}.$$

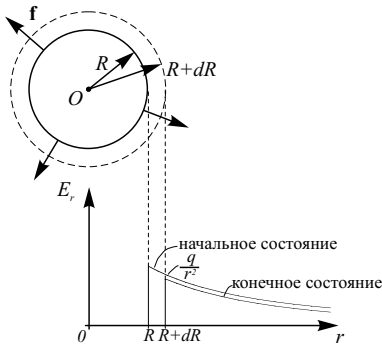


Рис. 1.36

Воспользуемся полученным результатом для введения понятия «классический радиус частицы».

Как следует из теории относительности, поле с энергией  $W$  обладает массой  $m = W/c^2$ . Следовательно, любая частица с массой  $m$  и зарядом  $q$  не может иметь размер, меньший

$$r_q = \frac{q^2}{mc^2},$$

так как масса частицы не может быть меньше массы ее поля (при выписывании этой формулы кон-

станта  $3/5$  не принимается во внимание).

Например, классический радиус электрона

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} \simeq 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

В следующем семестре мы скажем, что на таких расстояниях классическая электродинамика неприменима, а пока на этом остановимся.

## 1.15. Полиномы Лежандра в решениях уравнения Лапласа<sup>1</sup>

Чтобы несколько расширить класс задач, доступных для решения, более подробно ознакомимся с полиномами Лежандра. Для этого вернемся к построению решений уравнения Лапласа методом разделения переменных в сферических координатах, ограничившись случаем, когда искомая функция осесимметрична и зависит только от двух сферических координат  $r$  и  $\theta$ . Начнем с того, что привычный в сферических координатах оператор Лапласа

$$\Delta\varphi(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$

несколько видоизменим, заменив первое слагаемое на тождественное выражение  $(1/r)(\partial^2/\partial r^2)(r\varphi)$ . В результате уравнение Лапласа приобретает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (r\varphi) \right] = 0, \quad (\text{a})$$

решение которого ищется в виде мультипликативной функции

$$r\varphi(r, \theta) = U(r)P(\theta). \quad (\text{б})$$

Подставив представление (б) в уравнение (а), получим

$$\frac{d^2 U}{dr^2} P(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) U(r) = 0,$$

или, после умножения на  $r^2[U(r)P(\theta)]^{-1}$ , уравнение

$$\frac{r^2}{U(r)} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{\sin \theta P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0.$$

Первое слагаемое в левой части этого уравнения зависит только от  $r$ , второе — только от  $\theta$ . Представив неопределенную константу разделения переменных в виде произведения  $\ell(\ell+1)$ , откуда получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для  $U(r)$ ,  $P(\theta)$ :

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} U(r) = 0; \quad (\text{в})$$

---

<sup>1</sup>Этот и следующий параграфы при первом чтении можно опустить

1.15. Полиномы Лежандра в решениях уравнения Лапласа

59

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \ell(\ell + 1)P(\theta) = 0. \quad (г)$$

Легко заметить, что общее решение уравнения (в) для произвольного  $\ell$  есть

$$U(r) = Ar^{\ell+1} + Br^{-\ell}, \quad (д)$$

где  $A$ ,  $B$  — константы интегрирования. Уравнение (г) после перехода к независимой переменной  $x = \cos \theta$ , приобретает вид

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \ell(\ell + 1)P(x) = 0. \quad (е)$$

Функция  $P(x)$ , определяющая зависимость электростатического потенциала от угла  $\theta$ , должна быть однозначна, непрерывна и конечна на интервале  $-1 \leq x \leq 1$ . Оказывается (это утверждение здесь принимается без доказательства), что только в том случае, когда число  $\ell$  равно нулю или положительному целому числу, решение уравнения (е) обладает необходимыми свойствами. Эти решения являются полиномами  $\ell$ -й степени и для произвольного целого  $\ell$  могут быть представлены в виде

$$\tilde{P}_\ell(x) = \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell. \quad (ж)$$

(Волнистой чертой в обозначении здесь подчеркивается нетождественность функции (ж) с полиномами Лежандра.)

Докажем, что полином  $\tilde{P}_\ell(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (е). Для этого воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$(x^2 - 1)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} C_\ell^k (-1)^k x^{2(\ell-k)}$$

и,  $\ell$  раз продифференцировав последнюю сумму, выпишем полином  $\tilde{P}_\ell(x)$  в явном виде

$$\tilde{P}_\ell(x) = \sum_{k=0}^{[\ell/2]} C_\ell^k (-1)^k \frac{(2\ell - 2k)!}{(\ell - 2k)!} x^{\ell-2k}. \quad (з)$$

В этих формулах  $C_\ell^k = \frac{\ell!}{k!(\ell - k)!}$  — число сочетаний из  $\ell$  элементов по  $k$ ; максимальное значение  $k$  в последней сумме равно  $[\ell/2]$  — целой

части от числа  $\ell/2$ . При вычислении коэффициентов полинома (з) не забываем, что  $0! = 1$ .

Взяв первую и вторую производные от функции (з), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d\tilde{P}_\ell}{dx} \right] &= \frac{d^2\tilde{P}_\ell}{dx^2} - 2x \frac{d\tilde{P}_\ell}{dx} - x^2 \frac{d^2\tilde{P}_\ell}{dx^2} = \\ &= \sum_{k=0}^{[\ell/2]} C_\ell^k (-1)^k \frac{(2\ell-2k)!}{(\ell-2k)!} (\ell-2k)(\ell-2k-1) x^{\ell-2(k+1)} - \\ &- \sum_{k=0}^{[\ell/2]} C_\ell^k (-1)^k \frac{(2\ell-2k)!}{(\ell-2k)!} (\ell-2k)[2+(\ell-2k-1)] x^{\ell-2k}. \end{aligned} \quad (\text{и})$$

Первую из этих сумм заменой  $s = k + 1$  преобразуем. Сразу можно заметить, что из-за наличия множителя  $(\ell-2k)(\ell-2k-1)$  верхний предел суммирования по  $k$  можно заменить на  $[\ell/2] - 1$ . Поэтому эта сумма равна

$$\begin{aligned} &- \sum_{s=1}^{[\ell/2]} C_\ell^{s-1} (-1)^s \frac{(2\ell-2s+2)!}{(\ell-2s)!} x^{\ell-2s} = \\ &= - \sum_{s=0}^{[\ell/2]} C_\ell^s (-1)^s \frac{(2\ell-2s)!}{(\ell-2s)!} 2s(2\ell-2s+1) x^{\ell-2s}. \end{aligned}$$

(В последнем переходе использовано равенство  $C_\ell^{s-1} = C_\ell^s \frac{s}{\ell-s+1}$ .)

Подставляем полученное выражение в равенство (и), предварительно заменив немой индекс  $s$  на  $k$ , убедимся, что результатом является

$$-\ell(\ell+1) \sum_{k=0}^{[\ell/2]} C_\ell^k (-1)^k \frac{(2\ell-2k)!}{(\ell-2k)!} x^{\ell-2k} = -\ell(\ell+1) \tilde{P}_\ell(x),$$

что и доказывает высказанное утверждение.

Отметим, что под полиномами Лежандра обычно понимают полиномы

$$P_\ell = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell, \quad (\text{л})$$

получающиеся из  $\tilde{P}_\ell(x)$  умножением на нормировочный множитель. Из рассмотрения явных выражений для полиномов с начальными номера-

## 1.15. Полиномы Лежандра в решениях уравнения Лапласа

61

ми можно увидеть, что множитель, принятый в определении (л), обеспечивает выполнение условия нормировки

$$P_\ell(1) = 1.$$

(Для произвольного  $\ell$  это условие здесь не доказывается.) Заметим, что полиномы с четными и нечетными номерами являются соответственно четными и нечетными функциями своего аргумента.

Таким образом, методом разделения переменных здесь получен бесконечный набор решений уравнения Лапласа  $\varphi_\ell(r, \theta) = (1/r)U_\ell(r)P_\ell(\theta)$ . С учетом выражения (д) эти решения записываются в виде

$$\varphi_\ell(r, \theta) = \left( A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos \theta) \quad (\ell = 0; 1; 2; \dots),$$

где  $A_\ell, B_\ell$  — произвольные постоянные.

Полиномы Лежандра образуют полную систему функций, ортогональных на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$ . Ортогональность можно доказать непосредственно из уравнения (е). Напишем дифференциальное уравнение для  $P_\ell(x)$ , умножим его на  $P_{\ell'}(x)$  и проинтегрируем по интервалу  $(-1, +1)$ :

$$\int_{-1}^1 P_{\ell'}(x) \left[ \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP_\ell}{dx} \right) + \ell(\ell+1)P_\ell(x) \right] dx = 0. \quad (\text{м})$$

Вычитая из равенства (м) такое же равенство с заменой  $\ell$  на  $\ell'$  и, наоборот, приходим к условию ортогональности

$$[\ell(\ell+1) - \ell'(\ell'+1)] \int_{-1}^1 P_{\ell'}(x) P_\ell(x) dx = 0. \quad (\text{н})$$

При  $\ell \neq \ell'$  входящий в условие (н) интеграл должен быть равен нулю, а при  $\ell = \ell'$  он будет конечным. Таким образом, ортогональность полиномов Лежандра доказана. Ортонормированными они не являются; их нормировка задана условием  $P_\ell(1) = 1$ , как отмечено выше.

Из полноты системы полиномов  $P_\ell(x)$  на интервале  $-1 \leq x \leq 1$  следует, что любое осесимметричное решение уравнения Лапласа для областей с границами  $r = \text{const}$  и угловой координатой  $\theta$ , меняющейся в пределах  $[0, \pi]$ , может быть представлено в виде ряда

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos \theta). \quad (1.46)$$

Произвольные постоянные  $A_\ell, B_\ell$  определяются из граничных условий соответствующей задачи.

## 1.16. Мультипольное разложение для осесимметричного распределения зарядов

Пусть ограниченное в пространстве осесимметричное распределение зарядов характеризуется объемной плотностью  $\rho(r, \theta)$ , отличной от нуля только внутри области, ограниченной сферой радиуса  $R$ . Тогда в свободном пространстве вне этой сферы распределение потенциала можно представить разложением по полиномам Лежандра вида

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta), \quad (\text{a})$$

так как для области, простирающейся до бесконечности, где потенциал примем равным нулю, все коэффициенты  $A_\ell$  из общего решения (1.46) должны равняться нулю. Разложение (a) и есть искомое мультипольное разложение по степеням  $1/r$ . Задача, следовательно, заключается в определении коэффициентов  $B_\ell$  (мультипольных моментов) через заданную функцию  $\rho(r, \theta)$ .

В качестве подготовительных к этой задаче рассмотрим два примера, в которых потенциал, создаваемый простейшими конфигурациями зарядов, представим в виде разложения (1.46), причем коэффициенты разложения здесь могут быть определены из условий на оси симметрии, т. е. на границе  $\theta = 0$ . Эта возможность обусловлена тем, что для рассматриваемых зарядов распределение потенциала вдоль оси симметрии легко определяется и представляется в виде разложения  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k r^k$  по степеням  $r$  с известными коэффициентами. И так как, с другой стороны, это распределение, согласно решению (1.46), должно иметь вид

$$\varphi(z = r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right)$$

(при положительных  $z$ ), то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $r$ , получаем

$$A_\ell = C_\ell, \quad B_\ell = C_{-(\ell+1)}.$$

## 1.16. Мультипольное разложение

63

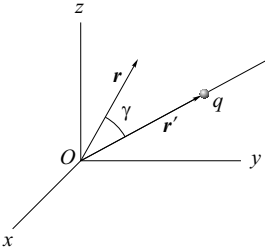


Рис. 1.37

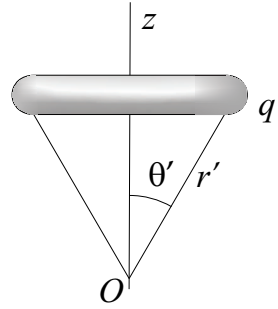


Рис. 1.38

Начнем с представления потенциала в точке  $\vec{r}$ , создаваемого точечным зарядом  $q$ , расположенным в точке  $\vec{r}'$ , в виде следующего разложения:

$$\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \begin{cases} q \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r^{\ell}}{r'^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \gamma) & \text{при } r < r', \\ q \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \gamma) & \text{при } r > r' \end{cases} \quad (6)$$

по полиномам Лежандра, где  $\gamma$  — угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$ . Действительно, во всем пространстве, кроме точки  $\vec{r}'$ , потенциал  $\varphi(\vec{r})$  удовлетворяет уравнению Лапласа, осесимметричен относительно оси  $z'$ , направленной вдоль вектора  $\vec{r}'$  (рис. 1.37), и в точках этой оси равен

$$\varphi|_{z'} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \begin{cases} \frac{q}{r' - r} = \frac{q}{r'} (1 - \frac{r}{r'})^{-1} & \text{при } r < r', \\ \frac{q}{r - r'} = \frac{q}{r} (1 - \frac{r'}{r})^{-1} & \text{при } r > r'. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

рассматриваемую функцию можно представить в виде разложения по степеням  $r$  и  $1/r$ :

$$\begin{aligned}\varphi|_{z'} &= q \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r^{\ell}}{r'^{\ell+1}} \quad \text{при } r < r', \\ \varphi|_{z'} &= q \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} \quad \text{при } r > r' .\end{aligned}$$

Из этого представления решения на границе  $\theta = 0$  получаем распределение потенциала во всем пространстве, совпадающее с разложением (б).

В качестве второго примера рассмотрим потенциал равномерно заряженного кругового кольца. Пусть ось симметрии кольца совпадает с осью  $z$ , геометрия кольца задана сферическими координатами  $r'$ ,  $\theta'$  (рис. 1.38), общий заряд кольца —  $q$ . Этот заряд можно представить в виде совокупности элементарных зарядов  $dq$ , каждый из которых на оси  $z$  создает потенциал  $d\varphi$ , определяемый из разложения (б) с заменой  $q$  на  $dq$  и  $\gamma$  на  $\theta'$ . Отсюда суммарный потенциал всего кольца в точках оси симметрии для положительных  $z$  выражается следующими разложениями:

$$\varphi(z=r) = \begin{cases} q \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') & (\text{при } r > r'), \\ q \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r^{\ell}}{r'^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') & (\text{при } r < r'). \end{cases}$$

Для произвольной точки пространства  $(r, \theta)$  потенциал получается умножением каждого члена ряда на соответствующий полином  $P_{\ell}(\cos \theta)$ , т. е.

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} q \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta) \\ \text{для области вне сферы радиуса } r', \\ \text{т. е. при } r > r', \\ q \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r^{\ell}}{r'^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta') P_{\ell}(\cos \theta) \\ \text{для области внутри сферы радиуса } r', \\ \text{т. е. при } r < r'. \end{cases} \quad (\text{в})$$

Таким образом, коэффициенты мультипольного разложения для потенциала, созданного равномерно заряженным кольцом, равны

$$B_{\ell} = q r'^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta'), \quad (\text{г})$$



## 1.16. Мультипольное разложение

65

где  $r', \theta'$  — сферические координаты точек кольца.

Произвольное осесимметричное распределение зарядов можно представить в виде совокупности заряженных колец с центрами на оси симметрии. Вклад одного такого кольца с зарядом

$$dq = \rho(r', \theta') 2\pi r'^2 \sin \theta' dr' d\theta'$$

в мультипольный момент на основании равенства (г) равен

$$dB_\ell = dq \cdot r'^\ell P_\ell(\cos \theta').$$

В результате интегрирования по всем кольцам искомым мультипольный момент заданных зарядов примет вид

$$B_\ell = \int r'^\ell P_\ell(\cos \theta') dq = 2\pi \int_0^\pi \int_0^R \rho(r', \theta') r'^{\ell+2} P_\ell(\cos \theta') \sin \theta' dr' d\theta'. \quad (\text{д})$$

Отсюда видно, что коэффициенты с номерами  $\ell = 0, 1$

$$B_0 = \int dq = Q,$$

$$B_1 = \int r' P_1(\cos \theta') dq = \int r' \cos \theta' dq = \int z' dq = d_z$$

равны, естественно, полному заряду системы и ее дипольному моменту, а коэффициент

$$B_2 = \int r'^2 \frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} dq = \frac{1}{2} (3z'^2 - r'^2) dq = \frac{1}{2} \mathcal{D}_{zz}$$

связан с единственным независимым элементом  $\mathcal{D}_{33} = \mathcal{D}_{zz}$  тензора квадрупольных моментов осесимметричной системы зарядов. Этими тремя членами разложения практически всегда приходится ограничиваться при работе в декартовой системе координат (в § 1.12 они обозначались как  $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ ), тогда как в сферических координатах, как мы только что получили, произвольный  $\ell$ -й член разложения имеет простую структуру

$$\varphi^{(\ell)} = \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta)$$

(естественно, при наличии осесимметричности) и коэффициент  $B_\ell$  определяется по формуле (д).

В заключение рассмотрим потенциал осесимметричной системы зарядов, находящихся вне сферы радиуса  $R$ . Тогда для области внутри сферы, свободной от зарядов, коэффициенты  $B_\ell$  в разложении (1.46) тождественно равны нулю и разложение потенциала имеет вид

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos \theta).$$

Коэффициенты  $A_\ell$  получаются из второй строчки результата (в) для элементарного кольца и выражаются следующей формулой:

$$A_\ell = \int \frac{dq}{r'^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta') = 2\pi \int_0^\pi \int_R^\infty \frac{\rho(r', \theta')}{r'^{\ell-1}} P_\ell(\cos \theta') \sin \theta' dr' d\theta'.$$

## Глава 2

# ДИЭЛЕКТРИКИ

До сих пор мы занимались исследованием электрического поля в вакууме и единственное исключение было сделано для проводников. Мы видели, что наличие проводящих областей в пространстве не вызывает существенных затруднений, так как внешнее поле в них компенсируется индуцированными поверхностными зарядами и поэтому  $E_{\text{внутр}} \equiv 0$ , а вне проводников определяется известной замкнутой системой уравнений

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

и соответствующими граничными условиями.

Теперь введем в рассмотрение диэлектрики, т. е. вещества, у которых проводимость равна нулю, свободных зарядов нет, а все заряды находятся в составе нейтральных атомов и молекул.

### 2.1. Предварительные соображения. Вектор поляризации. Электрическое поле в среде

1. Внешнее поле  $\vec{E}$  хотя и не компенсируется внутри диэлектрика, но наличие диэлектрика оказывает влияние на электрическое поле как внутри, так и вне диэлектрика. Это влияние обусловлено смещением зарядов среды, но в данном случае это смещение очень мало и связано с деформацией электронных орбит под действием электрического поля.

2. Физической характеристикой этого смещения зарядов, входящих в состав нейтрального атома (или молекулы), является дипольный момент атома  $\vec{d}$ . Заметим сразу, что при построении теории электрических явлений в диэлектрике важнейшее значение приобретает макроскопический параметр

$$\vec{P} = n\langle\vec{d}\rangle \quad (2.1)$$

— вектор поляризации, где  $n\frac{1}{\text{см}^3}$  — концентрация,  $\langle\vec{d}\rangle$  — среднее значение дипольного момента атомов и молекул. Таким образом,  $\vec{P}$  есть дипольный момент единицы объема диэлектрика и характеризует его поляризацию.

3. Существует и другой механизм поляризации диэлектрика, молекулы которого и без внешнего поля обладают собственным дипольным моментом ( $\vec{d}_0$ ). Из-за хаотического теплового движения при  $\vec{E} = 0$  суммарный дипольный момент в единице объема  $\vec{P} = n\langle\vec{d}_0\rangle = 0$ , но в поле  $\vec{E}$  диполи стремятся стать параллельно полю, поэтому вектор поляризации  $\vec{P}$  становится отличным от нуля.

4. Заметим, что истинное электрическое поле в среде (обозначим  $\vec{E}_{\text{микро}}$ ), созданное внешними зарядами и громадным числом зарядов самой среды, управляется уравнениями

$$\text{div}\vec{E}_{\text{микро}} = 4\pi\rho_{\text{микро}}, \quad \vec{E}_{\text{микро}} = -\text{grad}\varphi_{\text{микро}}, \quad (2.2)$$

( $\rho_{\text{микро}}, \varphi_{\text{микро}}$  — «истинные» микроскопические распределения зарядов и потенциала) и для своего определения требует знания положения всех зарядов. Понятно, что это поле сильно флуктуирует при перемещении точки наблюдения даже на очень малые расстояния порядка размеров атома.

К счастью, в макроскопической электродинамике такие поля нас не интересуют. Нам вполне достаточно знать среднюю напряженность электрического поля по областям с объемами  $\Delta V$  порядка  $10^{-6}\text{см}^3$  (т. е. с линейным размером  $\sim 10^{-2}\text{см}$ ) или даже большими. В указанном макроскопическом объеме содержится все еще громадное число молекул, поэтому усреднение по  $\Delta V$  устраняет полностью все микроскопические флуктуации.

*Результат усреднения микроскопического поля называют электрическим полем в среде.* Для него используют обозначения без всяких добавочных индексов:

$$\vec{E} = \langle\vec{E}_{\text{микро}}\rangle, \quad (2.3)$$

причем, по определению, среднее значение есть

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{E}_{\text{микро}}(\vec{r} + \vec{\xi}) d^3 \xi;$$

именно последнее соотношение выражает поле  $\vec{E}$  в произвольной точке  $\vec{r}$ .

## 2.2. Свободные и связанные заряды. Вектор индукции. Система уравнений для поля в диэлектрике. Граничные условия

1. Для получения уравнений, описывающих искомое поле  $\vec{E}$ , в качестве первого шага усредним уравнения (2.2) по макроскопическому объему  $\Delta V$ , имея в виду, что операторы усреднения и взятия производной по направлению можно поменять местами, т. е.

$$\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \rangle = \frac{\partial}{\partial \ell} \langle \varphi \rangle.$$

В результате из уравнений (2.2) получим

$$\langle \text{div} \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = \text{div} \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = 4\pi \langle \rho_{\text{микро}} \rangle,$$

$$\text{т. е.} \quad \text{div} \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{св}}) \quad (2.4)$$

и

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle &= -\langle \text{grad} \varphi_{\text{микро}} \rangle = -\text{grad} \langle \varphi_{\text{микро}} \rangle, \\ \vec{E} &= -\text{grad} \varphi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь  $\langle \rho_{\text{микро}} \rangle$  мы представили в виде  $\rho + \rho_{\text{св}}$ , где  $\rho$  — плотность (макроскопическая) свободных зарядов, не связанных с диэлектриком, а  $\rho_{\text{св}}$  — плотность связанных зарядов, обусловленных поляризацией диэлектрика. Эта последняя нам пока неизвестна.

2. Оказывается, что введенный соотношением (2.1) вектор поляризации  $\vec{P}$  определяет искомую плотность связанных зарядов

$$\rho_{\text{св}} = -\text{div}\vec{P}. \quad (2.6)$$

(Имея целью без задержек дойти до основных уравнений поля в диэлектрике, зависимость (2.6) пока приведем без доказательства. Ниже вывод этой важной формулы будет осуществлен двумя разными способами.) Видно, что выражение (2.6) не противоречит очевидному результату: если диэлектрик поляризован однородно, т. е.  $\vec{P} = \text{const}$ , то никакие объемные заряды в нем возникнуть не должны. В этом случае все заряды внутри диэлектрика скомпенсированы; нескомпенсированные заряды возникают только на поверхности диэлектрика.

Отметим здесь, что соотношение (2.6) фактически являлось главной находкой в построении рассматриваемой теории поля в диэлектрике. Именно благодаря этому соотношению неизвестные заряды  $\rho_{\text{св}}$ , обусловленные присутствием диэлектрика, удастся связать с искомым векторным полем  $\vec{E}$  и замкнуть систему уравнений (2.4), (2.5). Для этого учтем, что при всех доступных полях почти во всех диэлектриках вектор поляризации пропорционален полю  $\vec{E}$ , т. е.

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi\vec{E}(\vec{r}), \quad (2.7)$$

где  $\chi$  — безразмерный коэффициент поляризации диэлектрика. Подставив  $\rho_{\text{св}}$  из зависимости (2.6) в уравнение (2.4), получим

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi\rho - 4\pi\text{div}\vec{P}, \text{ т. е. } \text{div}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho.$$

Введем общепринятое обозначение

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}. \quad (2.8)$$

Тогда последнее уравнение приобретает вид

$$\text{div}\vec{D} = 4\pi\rho. \quad (2.9)$$

С учетом равенства (2.7) для вектора  $\vec{D}$  получается выражение, связывающее его с вектором  $\vec{E}$ :

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad (2.10)$$

где

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi. \quad (2.11)$$

Дополнив соотношения (2.9), (2.10) уравнением (2.5), мы получили полную замкнутую систему уравнений поля в диэлектрике, которую здесь выпишем еще раз:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E}, \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \varphi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Определенный соотношением (2.8) вектор  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$  называется вектором индукции и физического смысла не имеет. Это вспомогательный вектор. Вектор  $\vec{E}$  определен равенством (2.3); это «истинный» вектор напряженности электрического поля, вызванного как заданными внешними зарядами, так и зарядами, возникающими в диэлектрике в результате поляризации. Наконец, коэффициент (2.11)  $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$  называется диэлектрической проницаемостью.

3. Полученная система уравнений (2.12) замечательна тем, что в нее не входят неизвестные заряды, обусловленные поляризацией диэлектрика. Эти последние определяются из выражения

$$\rho_{\text{св}} = -(1/4\pi)\operatorname{div}[(\varepsilon - 1)\vec{E}], \quad (2.13)$$

получающегося из цепочки равенств (2.6), (2.8) и (2.10).

В этой связи отметим, что если диэлектрик однородный и не содержит объемных свободных зарядов (присутствие поверхностных зарядов не исключается), то в таком диэлектрике объемные связанные заряды не возникают. Действительно, поскольку при  $\rho = 0$ , как следует из системы (2.12),  $\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0$ , то при  $\varepsilon = \text{Const}$  из соотношения (2.13) получаем  $\rho_{\text{св}} = 0$ .

Уравнения (2.12) замечательны также тем, что очень похожи на уравнения для вакуума, особенно если их представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \varepsilon \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \varphi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

4. Уравнение для потенциала. Получается из последних уравнений и при произвольном  $\varepsilon$  имеет вид

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = -4\pi\rho,$$

а для однородного диэлектрика сводится к привычному уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho/\varepsilon. \quad (2.15)$$

5. *Граничные условия для полей в диэлектрике.* Поскольку и в присутствии диэлектриков электростатическое поле потенциально (см. уравнение (2.5)), граничное условие непрерывности тангенциальных компонент поля  $\vec{E}$ , полученное в § 1.8, остается без изменения:

$$\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}. \quad (2.16)$$

Как следует из уравнения (2.9),  $\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho$ , в случае диэлектриков аналогом теоремы Гаусса о потоке вектора  $\vec{E}$  является теорема

$$\oint_S \mathcal{D}_n dS = 4\pi Q$$

о потоке вспомогательного вектора  $\vec{D}$ , определяемом суммарным количеством *свободных* зарядов  $Q$ , находящихся внутри замкнутой поверхности  $S$ . Отсюда, как и в § 1.8, получается условие для нормальной компоненты вектора  $\vec{D}$

$$\mathcal{D}_{2n} - \mathcal{D}_{1n} = 4\pi\sigma, \quad (2.17)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность свободных зарядов.

## 2.3. Об электрическом поле в однородном диэлектрике

Для однородного диэлектрика постоянную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$  можно вынести из под знака дивергенции и первое из уравнений (2.14) записать в виде

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho/\varepsilon.$$

Иногда на основании только одного этого уравнения делается вывод, что действие однородного диэлектрика сводится просто к уменьшению плотности заряда (значит, и поля  $\vec{E}$ ) в  $\varepsilon$  раз, что в общем случае, конечно, несправедливо. Корректное утверждение можно сформулировать



так: если *все пространство, содержащее поле*, заполнено диэлектриком с  $\varepsilon = \text{const}$ , то заряды, от которых в вакууме возникает электрическое поле  $\vec{E}_0(\vec{r})$ , в диэлектрике создают поле  $\vec{E}(\vec{r}) = (1/\varepsilon)\vec{E}_0(\vec{r})$ .

Для безграничного пространства, заполненного однородным диэлектриком, это утверждение очевидно из математической формулировки задачи

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{4\pi\rho(\vec{r})}{\varepsilon}, \quad \varphi|_{\infty} = 0,$$

базирующей на уравнении (2.15) и очевидном условии на бесконечности. Если же пространство, занятое полем, не простирается до бесконечности, оно должно быть ограничено проводящей оболочкой. Поле вне оболочки тождественно равно нулю, если суммарный заряд всей внутренней области, включая оболочку, равен нулю. Для общности

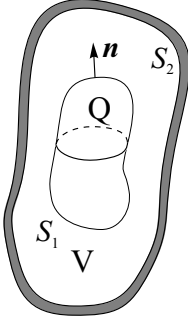


Рис. 2.1

предположим, что во внутренней области находятся как заряженные проводники, так и распределенные заряды. На рис. 2.1 изображен случай одного внутреннего проводника с поверхностью  $S_1$ , содержащего заряд  $Q$ . Внутренняя граница проводящей оболочки названа поверхностью  $S_2$ . Пространство между  $S_1$  и  $S_2$  заполнено однородным диэлектриком и составляет область  $V$  определения поля  $\vec{E}$ . Так как по условию электрическое поле во всем пространстве вне оболочки равно нулю, то потенциал оболочки может быть принят равным нулю и задача определения потенциала в области  $V$  может быть представлена соответственно в виде

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -(1/\varepsilon)4\pi\rho(\vec{r}),$$

$$\varphi|_{S_2} = 0, \quad \varphi|_{S_1} = C,$$

$$\oint_{S_1} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = -(1/\varepsilon)4\pi Q$$

(при наличии диэлектрика)

$$\Delta\varphi_0(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

$$\varphi_0|_{S_2} = 0, \quad \varphi_0|_{S_1} = C_0,$$

$$\oint_{S_1} \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} dS = -4\pi Q$$

(для случая  $\varepsilon = 1$ )

Отсюда видно, что решения  $\varphi(\vec{r})$  и  $\varphi_0(\vec{r})$  связаны соотношением

$$\varphi(\vec{r}) = (1/\varepsilon)\varphi_0(\vec{r}),$$

(причем  $C = (1/\varepsilon)C_0$ ), что и требовалось доказать.

## 2.4. Диэлектрический шар в однородном электрическом поле

Рассмотрим случай, когда только часть пространства, занятого электрическим полем, заполнено однородным диэлектриком. Продемонстрируем, что изменение поля за счет диэлектрика при этом не сводится к простому ослаблению в  $\varepsilon$  раз.

Пусть незаряженный диэлектрический шар радиуса  $R$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  вносится в однородное электрическое поле  $\vec{E}_0$ . Найдем возмущение поля  $E$  во всем пространстве, обусловленное диэлектриком, и его причину в виде связанных зарядов.

Искомое поле внутри и вне шара (соответственно области 1 и 2) задается скалярными потенциалами, зависящими от сферических координат  $r, \theta$  (рис. 2.2):

$$\vec{E}_{1,2} = -\text{grad } \varphi_{1,2}(r, \theta).$$

Функция  $\varphi(r, \theta)$  удовлетворяет уравнению (2.15), которое в отсутствие пространственных свободных зарядов сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_{1,2}(r, \theta) = 0,$$

и граничным условиям

$$\text{а) } \varphi_1 = \varphi_2|_{r=R}; \text{ б) } \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}|_{r=R}; \text{ в) } \varphi_2|_{\infty} = -E_0 r \cos \theta.$$

Условия «а», «б» обеспечивают непрерывность тангенциальной компоненты поля  $\vec{E}$  и нормальной компоненты поля  $\vec{D}$  на поверхности шара; условие «в» соответствует потенциалу невозмущенного поля  $\vec{E}_0$  на бесконечности. Дополнительно к условиям «а», «б», «в» необходимо сформулировать еще условие на границе области 1 в точке  $r = 0$  в виде требования

$$\text{г) } \varphi_1|_{r=0} \text{ не содержит особенностей.}$$

Решение данной математической задачи строится с помощью двух простейших функций из набора (1.25)

$$C_1 r \cos \theta, \quad C_2 \frac{\cos \theta}{r^2},$$

удовлетворяющих уравнению Лапласа. Первая из них соответствует однородному полю, так как  $r \cos \theta = z$ , вторая — потенциал диполя, находящегося в начале координат и направленного вдоль оси  $z$ . Решения,

## 2.4. Диэлектрический шар в однородном электрическом поле

75

удовлетворяющие условиям «в», «г» представим в виде

$$\varphi_1(r, \theta) = -E_1 r \cos \theta,$$

$$\varphi_2(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{d \cos \theta}{r^2},$$

т. е. как потенциал некоторого однородного поля  $\vec{E}_1$ , направленного по полю  $\vec{E}_0$ , — внутри шара, и как суперпозицию заданного поля  $\vec{E}_0$  с полем диполя  $\vec{d}$  — во внешнем пространстве. Величины  $E_1, d$  определяются из граничных условий «а», «б», и соответствующие векторы принимают значения

$$\vec{E}_1 = \frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0, \quad \vec{d} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0 R^3. \quad (2.18)$$

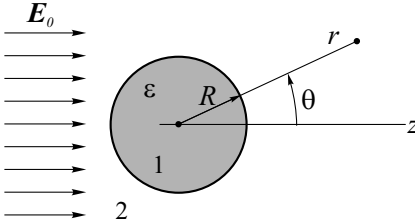


Рис. 2.2

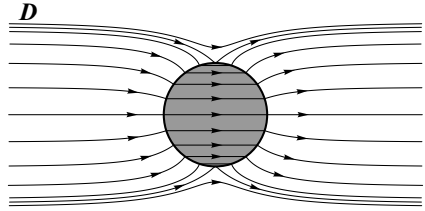


Рис. 2.3

Отсюда видно, что при  $\varepsilon > 1$  поле внутри шара  $\vec{E}_1$  меньше  $\vec{E}_0$ ; это объясняется компенсирующим влиянием связанных зарядов, возникающих на поверхности шара из-за поляризации диэлектрика. Для диэлектриков с  $\varepsilon \gg 1$  это ослабление поля весьма значительно; например, для сферической капли дисциллированной воды ( $\varepsilon \approx 81$ )  $E_1 \approx 1/28 E_0$ . Забегая немного вперед, отметим, что поверхностная плотность связанных зарядов определяется из граничного условия (2.25):

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma_{\text{св}}).$$

В рассматриваемом случае предварительно незаряженного шара  $\sigma = 0$  и, следовательно,

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{1}{4\pi} (E_{2r} - E_{1r})|_{r=R} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) |_{r=R} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 \cos \theta.$$

При  $\varepsilon > 1$  правая и левая полусферы заряжены соответственно положительными и отрицательными зарядами и обусловленное ими дополнительное поле  $\vec{E}$  внутри шара действительно направлено против поля  $\vec{E}_0$ . Отметим для дальнейшего, что разность

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_0 = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0$$

есть поле внутри шара, созданное равномерно поляризованным шаром с вектором поляризации

$$\vec{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0,$$

определяемым из соотношения  $\vec{d} = (4\pi R^3/3)\vec{P}$ . Получается, что равномерно поляризованный с вектором поляризации  $\vec{P}$  шар внутри себя создает однородное поле с напряженностью

$$\vec{E}_P = -\frac{4\pi}{3} \vec{P}. \quad (2.19)$$

Пример завершим наглядной картиной. На рис. 2.3 изображены непрерывные силовые линии вектора индукции  $\mathcal{D}$  (а не силовые линии электрического поля  $E$ , которые рвутся на зарядах  $\sigma_{св}$ ) для сферической капли воды с  $\varepsilon = 81$ .

## 2.5. Первый вывод соотношения $\rho_{св} = -div \vec{P}$

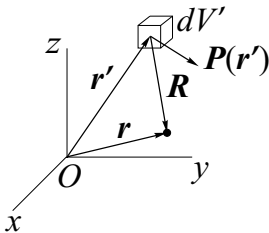


Рис. 2.4

Рассмотрим поляризованный диэлектрик, занимающий ограниченный объем пространства  $V$ . Будем считать, что диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  является непрерывной функцией пространственных координат внутри области  $V$ , включая ее границу. Тогда вектор поляризации  $\vec{P}$ , характеризующий поляризацию диэлектрика, также является непрерывной функцией, *обращающейся в нуль на внешней границе*.

Вычислим потенциал  $\varphi$  от рассматриваемого диэлектрика в произвольной точке с радиусом-вектором  $\vec{r}$ . Этот

## 2.5. Первый вывод соотношения $\rho_{\text{св}} = -\text{div} \vec{P}$ 77

потенциал, как потенциал поля зарядов  $\rho_{\text{св}}$ , определяется по формуле (1.15)

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho_{\text{св}}(\vec{r}') dV'}{R}. \quad (\text{а})$$

По другому этот же потенциал можно представить как результат суперпозиции потенциалов (1.28)  $d\varphi(\vec{r}) = d\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{R}/R^3)$  (рис. 2.4) от элементарных дипольных моментов  $d\vec{P}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') dV'$  в виде

$$\varphi(r) = \int_V \frac{d\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} = \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{R}}{R^3} dV'. \quad (\text{б})$$

Здесь заметим, что вектор  $\vec{R}$  и расстояние  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ , входящие в интегралы (б), являются функциями от  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$ , т. е. координат точки наблюдения и координат (штрихованных) элементарных объемчиков  $dV'$ . Эти функции соответственно можно дифференцировать по одним или другим координатам. Операторы, предусматривающие дифференцирование по координатам  $\vec{r}'$ , здесь и дальше в курсе, будут отмечаться штрихом. Тогда подынтегральные функции из выражения (б) можно преобразовать и представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\vec{R}}{R^3} &= -\text{grad} \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} = \text{grad}' \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')}, \\ \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{R}}{R^3} &= \vec{P}(\vec{r}') \cdot \text{grad}' \frac{1}{R} = \text{div}' \left[ \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \vec{P}(\vec{r}') \right] - \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \text{div}' \vec{P}(\vec{r}'). \end{aligned}$$

Интеграл (б) при этом разбивается на сумму двух объемных интегралов, первый из которых на основании теоремы Остроградского—Гаусса может быть заменен интегралом по поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ . Следовательно,

$$\varphi(\vec{r}) = \oint_S \frac{P_n}{R} dS + \int_V \frac{-\text{div}' \vec{P}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dV'.$$

Так как по условию  $P_n|_S \equiv 0$ , поверхностный интеграл равен нулю и  $\varphi(\vec{r})$  содержит только объемный интеграл. Сравнивая последний с выражением (а), приходим к искомому результату.

Перейдем к уточнению понятий, которые в предварительном порядке уже упоминались.

## 2.6. Два типа диэлектриков. Оценки величин

По механизму возникновения поляризации диэлектрики подразделяются на два типа, представленных далее.

а) *Диэлектрики с квазиупругими диполями.* В молекулах этих веществ (например, газы  $N_2$ ,  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$  и т. д.) в отсутствие внешнего поля  $\vec{E}$  распределение зарядов симметрично, поэтому их дипольный момент равен нулю. Внешнее поле  $\vec{E}$  изменяет распределение заряда, индуцируя в каждом атоме или молекуле соответствующий дипольный момент, пропорциональный полю  $\vec{E}$ :

$$\vec{d} = \alpha \vec{E},$$

$\alpha$  — поляризуемость атома или молекулы.

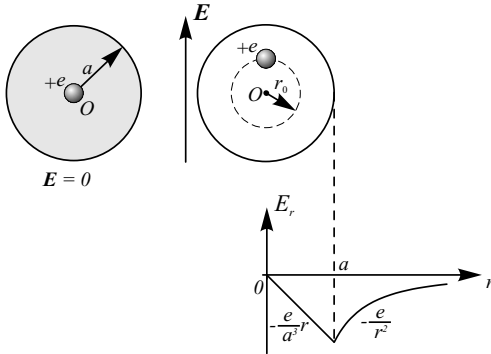


Рис. 2.5

б) *Полярные диэлектрики* — вещества, в которых молекулы так несимметрично устроены, что обладают дипольными моментами даже в отсутствие электрического поля, как, например, газы  $CO$ ,  $SO_2$ ,  $HCl$  и жидкости — вода, нитробензол. Понятно, при  $E = 0$  из-за теплового движения в них  $P = 0$  и ненулевой вектор поляризации в них появляется лишь во внешнем поле  $\vec{E}$ .

Для оценки величины *наведенного* дипольного момента рассмотрим, к примеру, атом водорода, состоящий из ядра и одного электрона. В качестве модели атома примем, что в отсутствие поля  $\vec{E}$  отрицательный электрический заряд распределен с постоянной плотностью внутри сферы радиуса  $a$ , в центре которой расположен положительный заряд. Предположим, что в поле  $\vec{E}$  отрицательный заряд сохраняет форму

шара и плотность, только смещается относительно ядра, так что ядро оказывается на некотором расстоянии  $r_0$  от центра шара, как показано на рис. 2.5. Здесь схематически также показано и распределение  $E_r(r)$  электрического поля электронного облака.

Величину  $r_0$  легко найти из рассмотрения состояния равновесия: сила, действующая на ядро со стороны поля  $\vec{E}$ , компенсируется действием электрического поля электронного облака, которое на расстоянии  $r_0$  от центра по величине равно  $er_0/a^3$ . Следовательно, в равновесии  $E = (e/a^3)r_0$  и отсюда

$$r_0 = \frac{Ea^3}{e}. \quad (\text{a})$$

Посмотрим на численное значение  $r_0$ , приняв  $a = 1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$ ,  $E = 100 \text{ абс. ед.} = 3 \cdot 10^4 \text{ В/см}$ . Получаем

$$\frac{r_0}{a} = \frac{Ea^2}{e} \approx \frac{10^2 \cdot 10^{-16}}{4,8 \cdot 10^{-10}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \ll 1.$$

Видим, что даже в сильных полях деформация атома очень мала.

Из равенства (а) следует, что наведенный дипольный момент атома имеет порядок

$$d_a \sim r_0 e = Ea^3, \text{ т.е. } \alpha \sim a^3. \quad (\text{б})$$

Таким образом, в случае *электронной поляризуемости*

$$\vec{P} = \chi \vec{E}, \quad \chi = n\alpha, \quad \alpha \sim a^3 \quad (\text{или } a_0^3), \quad (2.20)$$

где  $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  — первый борковский радиус, и, следовательно, из определения (2.11) имеем

$$\varepsilon - 1 \approx 4\pi n a_0^3. \quad (2.21)$$

В газах  $n \sim 1/\ell^3$ , где  $\ell$  — среднее расстояние между молекулами, причем  $a_0/\ell \ll 1$ . Следовательно, в газах

$$\varepsilon - 1 \sim 4\pi \left(\frac{a_0}{\ell}\right)^3 \ll 1.$$

Известно, что диэлектрическая проницаемость неполярных жидкостей близка к 2 (например, для бензола  $C_6H_6$   $\varepsilon = 2,28$ , для трансформаторного масла  $\varepsilon = 2,24$ ). Оценки  $\varepsilon$  для этих жидкостей из формулы (2.21) получить нельзя из-за несправедливости этой формулы для плотных

диэлектриков; о физической причине этого будет сказано при обсуждении формул Клаузиуса—Моссотти.

Перед тем как перейти к рассмотрению полярных диэлектриков, сделаем сравнительную оценку наведенного дипольного момента  $d_a$  и дипольного момента полярных молекул  $d_0$ . Учтя, что внутриаомные поля имеют порядок  $E_a \sim e/a^2$ , результат (б) с использованием равенства (а) можно представить в виде

$$d_a \sim er_0 = ea \frac{r_0}{a} = ea \left( \frac{E}{E_a} \right), \quad \text{т. е. } d_a \sim d_0 \frac{E}{E_a}.$$

Таккак для любых сильных полей, достижимых в лаборатории,  $E/E_a \ll 1$ , отсюда следует, что  $d_a \ll d_0$ , где  $d_0 \sim ea$  — порядок собственного дипольного момента полярной молекулы.

*Поляризация полярных диэлектриков. Зависимость диэлектрической постоянной от температуры*

Пусть  $n$  — число молекул в  $1 \text{ см}^3$ . При  $E = 0$  все направления в пространстве эквивалентны, поэтому закон распределения диполей  $\vec{d}_0$  по направлениям изотропный, т. е.  $dn = C d\Omega$  или  $dn = C \sin \theta d\theta$ . У тако-

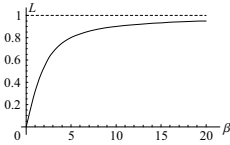


Рис. 2.6

количества молекул из числа  $n$  дипольные моменты имеют направления, характеризующиеся углами  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ , где  $\theta$  — угол между  $\vec{d}_0$  и фиксированным направлением. При наличии поля  $\vec{E}$  у диполя появляется потенциальная энергия (1.40):

$$U = -\vec{d}_0 \cdot \vec{E} = -d_0 E \cos \theta$$

(теперь угол  $\theta$  отсчитывается от направления вектора  $\vec{E}$ ) и в законе распределения дипольного момента по направлениям — больцмановский фактор. Поэтому в поле  $\vec{E}$

$$dn = C e^{-U/kT} \sin \theta d\theta = C e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad \beta = d_0 E / kT$$

и суммарный дипольный момент в единице объема

$$P = \int d_0 \cos \theta dn = C d_0 \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta,$$

где  $C$  определяется из условия

$$n = C \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta.$$



## 2.7. Второй вывод соотношения $\rho_{св} = -div\vec{P}$

81

Следовательно,

$$P = nd_0 \frac{\int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta}.$$

Легко заметить, что интеграл в числителе равен производной по параметру  $\beta$  от интеграла в знаменателе; последний вычисляется элементарно и принимает значение  $(2/\beta) \operatorname{sh} \beta$ . Отсюда для искомой величины получается выражение

$$P = nd_0 L(\beta), \quad (2.22)$$

где  $L(\beta) = \operatorname{cth} \beta - (1/\beta)$  — функция Ланжевена, показанная на рис. 2.6. В предельном случае

$$\beta = \frac{d_0 E}{kT} \ll 1$$

функцию Ланжевена можно заменить ее первым членом разложения по степеням  $\beta$  в виде  $L(\beta) \approx (1/3)\beta$  и выражение (2.22) представить в виде

$$P = nd_0 \frac{d_0 E}{3kT} = \frac{nd_0^2}{3kT} E. \quad (2.23)$$

В большинстве практически важных случаев справедлива последняя формула. Например, для  $T = 300^\circ K$ ,  $d_0 = ea_0$ ,  $E = 100$  абс. ед. параметр  $\beta$  имеет значение  $\beta \approx (4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 0,5 \cdot 10^{-8} \cdot 100) : (1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 300) \approx 0,5 \cdot 10^{-2}$ , обеспечивающее применимость выражения (2.23). Таким образом, для полярных диэлектриков получили

$$\vec{P} = \chi_{\text{полярн.}} \vec{E}, \quad \chi_{\text{полярн.}} = \frac{nd_0^2}{3kT}, \quad d_0 = ea_0.$$

Для диэлектриков с квазиупругими диполями имеем оценку (2.20)  $\chi \sim na_0^3$ ; следовательно, отношение

$$\frac{\chi_{\text{полярн.}}}{\chi} \sim \frac{e^2}{3kTa_0}$$

зависит от температуры и при  $T = 300^\circ K$  имеет порядок  $10^2$ .

## 2.7. Второй вывод соотношения $\rho_{св} = -div\vec{P}$

Рассматриваемое соотношение лежит в основе теории электрических явлений в диэлектрике. В связи с этим здесь приведем еще один, наглядный вывод этого соотношения.

Для этого в диэлектрике мысленно выделим объем  $V$ , размеры которого велики по сравнению с расстоянием между молекулами. Предположим для простоты, что в объеме  $V$  свободных зарядов, не связанных с молекулами диэлектрика, нет. Тем не менее суммарный заряд в объеме  $V$  не обязан равняться 0, так как поверхность  $S$  рассекает молекулы так, что части их зарядов остаются внутри, а части — вне  $V$ . Чтобы найти величину заряда внутри  $V$ , молекулы диэлектрика заменим эквивалентными диполями, состоящими из зарядов  $-e$  и  $+e$ , расположенных на концах вектора  $\vec{\ell}$  (рис. 2.7).

Рассмотрим физически бесконечно малый элемент поверхности  $dS$ . Пусть  $\vec{\ell}$  — среднее значение в области, прилегающей к элементу  $dS$ . Понятно, что  $\vec{\ell}$  связан с вектором поляризации

$$\vec{P} = n\vec{d} = n\vec{\ell}, \text{ откуда } \vec{\ell} = \frac{\vec{P}}{ne}.$$

Видно, что поверхность  $dS$  рассекает все те молекулы, центры которых лежат в слое толщины

$$\ell \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{\ell}}),$$

и внутри объема создаст нескомпенсированный заряд

$$-n\ell \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{\ell}})dS \cdot e = -P_n dS.$$

Общий заряд

$$Q = - \oint_S P_n dS = - \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV;$$

в то же время он равен

$$Q = \int_V \rho_{\text{св}} dV.$$

Эти два интеграла должны быть равны для любого объема  $V$ , включая физически бесконечно малый объем. Отсюда следует равенство их подынтегральных выражений, т. е. то соотношение, которое требовалось доказать.

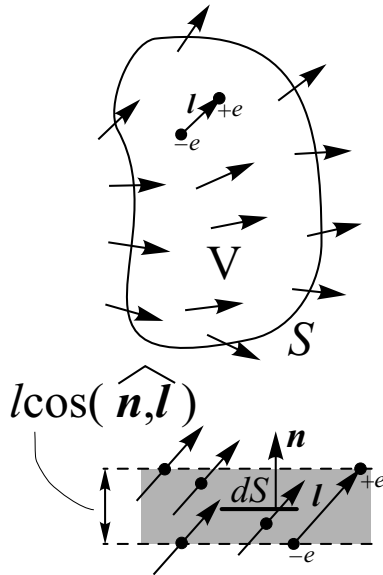


Рис. 2.7

Отметим, что если при переходе через некоторую поверхность  $S$  вектор  $\vec{P}$  испытывает резкое изменение, то эту поверхность можно рассматривать как поверхность разрыва вектора  $\vec{P}$ , а связанные заряды на этом переходе принять за поверхностные. Из приведенных рассуждений понятно, что  $\sigma_{\text{св}}$  определяется величиной разрыва нормальной компоненты вектора  $\vec{P}$  как

$$\sigma_{\text{св}} = -(P_{2n} - P_{1n}). \quad (2.24)$$

(Здесь, как везде при рассмотрении граничных условий, общая нормаль  $\vec{n}$  к поверхности раздела считается проходящей из области 1 в область 2.) С учетом определения вектора  $\vec{D}$  (2.8) и граничного условия (2.17) условие (2.24) приводится к естественному условию

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma_{\text{св}}) \quad (2.25)$$

для нормальной компоненты электрического поля. Это условие проще использовать для определения  $\sigma_{\text{св}}$ , так как в процессе решения вначале определяется поле  $\vec{E}$ , а не поле  $\vec{P}$ .

## 2.8. Формулы Клаузиуса—Моссотти

Отметим здесь приближенность полученных выше выражений (2.20), (2.23) для вектора поляризации и диэлектрической постоянной

$$\vec{P} = \chi \vec{E}, \quad \chi = n\alpha, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi n\alpha, \quad \alpha \sim a_0^3;$$

$$\vec{P} = \chi \vec{E}, \quad \chi = n \frac{d_0^2}{3kT}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi n \frac{d_0^2}{3kT}$$

соответственно для неполярных и полярных диэлектриков. При их выводе негласно предполагали, что электрическое поле, вызывающее смещение зарядов в молекуле или поворот твердого диполя, равно среднему электрическому полю  $\vec{E}$ . А это, вообще говоря, неверно. При вычислении среднего дипольного момента молекулы нас должно интересовать не среднее поле, а поле в точке, где находится данная молекула; обозначим его  $\vec{E}'$ . Следовательно, необходимо различать:  $\vec{E}$  в точке  $O$  — результат усреднения поля зарядов всех молекул, включая рассматриваемую, и  $\vec{E}'$  — учитывающее действие всех зарядов при исключении зарядов рассматриваемой молекулы. Хотя заряды одной молекулы и малы по сравнению с зарядами множества других молекул диэлектрика,

но эти заряды находятся в непосредственной близости от рассматриваемой точки и поэтому их исключение приводит к поправке конечной величины.

Различие полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{E}'$  несущественно только в газах, для которых  $\epsilon$  близко к единице. Следовательно, чтобы получить выражение для диэлектрической проницаемости плотных диэлектриков, нужно определить величину поля  $\vec{E}'$ , действующего на молекулу. Пусть точка  $O$  — центр этой молекулы. Чтобы вычислить напряженность поля в точке  $O$ , опишем из этого центра сферу физически бесконечно малого радиуса и представим искомое поле в виде суммы

$$\vec{E}' = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где  $\vec{E}_1$  — поле всех зарядов вне  $S$ , т. е. это — поле в центре сферической полости, получающейся после удаления из диэлектрика объема, ограниченного сферой  $S$ ,  $\vec{E}_2$  — поле всех зарядов, находящихся внутри  $S$ , за исключением зарядов рассматриваемой молекулы. Чтобы найти  $\vec{E}_1$ , рассудим так. Среднее поле в диэлектрике в точке  $O$  равно  $\vec{E}$ . Оно складывается из среднего значения поля однородно поляризованного шара с вектором поляризации  $\vec{P}$  (так как шар физически бесконечно малого размера), равного, как получено в решении (2.19),

$$\vec{E}_P = -\frac{4\pi}{3}\vec{P},$$

и поля от внешности сферы в точке  $O$ , т. е.  $\vec{E}_1$ . Таким образом,

$$\vec{E} = -\frac{4\pi}{3}\vec{P} + \vec{E}_1,$$

откуда 
$$\vec{E}_1 = \vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P}.$$

Что касается поля  $\vec{E}_2$ , т. е. поля, создаваемого прочими зарядами, лежащими внутри  $S$ , то это поле существенно зависит от строения диэлектрика, в частности от взаимного расположения его диполей, и поэтому, строго говоря, никакой универсальной зависимости  $\vec{E}_2$  от  $n, \alpha, \vec{E}$  не существует. Однако есть структуры диэлектрика, когда поле  $\vec{E}_2$  оказывается равным нулю:

а) строго показывается, что если диполи расположены по узлам кубической пространственной решетки, то  $\vec{E}_2 = 0$ ;

б) тот же результат справедлив в случае совершенно беспорядочного расположения молекул диэлектрика (газообразный диэлектрик). Без

## 2.8. Формулы Клаузиуса—Моссотти

85

дальнейших поисков здесь в качестве предположения примем, что для неполярных диэлектриков  $\vec{E}_2 = 0$ . Тогда искомое поле

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P}$$

и вместо формул (2.20) получим

$$\vec{d} = \alpha\vec{E}', \quad \vec{P} = n\vec{d} = n\alpha\vec{E}' = n\alpha\left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P}\right).$$

Отсюда имеем

$$\vec{P} = \frac{n\alpha}{1 - (4\pi/3)n\alpha}\vec{E}, \quad \varepsilon = 1 + \frac{4\pi n\alpha}{1 - (4\pi/3)n\alpha}$$

— формулы Клаузиуса—Моссотти. Разрешив последнее соотношение относительно  $4\pi n\alpha$ , представим его в виде

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi n\alpha}{3},$$

или, выразив концентрацию молекул  $n$  через плотность диэлектрика  $\tau$ , молекулярную массу  $M$  и число Авогадро  $N_0$ , в виде

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{N_0\alpha}{M} \tau. \quad (2.26)$$

Соотношение (2.26) показывает, что для неполярных диэлектриков величина  $(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)$  прямо пропорциональна плотности данного диэлектрика. Отсюда видно, что, измеряя величину макроскопического параметра  $\varepsilon$ , мы в состоянии определить микроскопический параметр  $\alpha$ , характеризующий внутреннюю структуру молекулы — ее поляризуемость.

В заключение отметим, что эксперименты подтверждают справедливость закономерности (2.26) не только для газообразных, но и для жидких неполярных диэлектриков. Следовательно, предположение  $\vec{E}_2 = 0$  оправдано и для них. Для полярных диэлектриков аналог формулы (2.26) несправедлив, так как предположение  $\vec{E}_2 = 0$  для них явно не годится из-за наличия корреляции в поведении соседних молекул с собственными дипольными моментами.

## 2.9. Энергия электрического поля в диэлектрике

1. Вычисление энергии электрического поля в среде начнем с простейшего примера плоского конденсатора, заполненного диэлектриком. Заряжая конденсатор, внешний источник ЭДС совершает определенную работу, которая и переходит в энергию электрического поля. Для изменения заряда конденсатора на  $dq$  внешний источник совершает работу

$$\delta A' = V dq,$$

где  $V$  — напряжение на конденсаторе. В рассматриваемом случае плоского конденсатора  $V = Eh$ ,  $dq = Sd\sigma$ . Так как поверхностную плотность зарядов на обкладке здесь можно связать со значением вектора индукции соотношением  $D = 4\pi\sigma$ , выражение для приращения энергии поля  $dW = \delta A'$  можно привести к виду  $dW = (EdD/4\pi)Sh$ , где  $S, h$  — площадь обкладок и расстояние между ними. Будучи отнесено к единице объема, занятого полем, приращение энергии поля равно

$$dw = EdD/4\pi.$$

Для линейной среды  $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$  имеем  $EdD = (1/2)d(\vec{E} \cdot \vec{D})$  и тогда

$$w = (\vec{E} \cdot \vec{D})/8\pi = \varepsilon E^2/8\pi = D^2/8\pi\varepsilon.$$

2. Перейдем к общему случаю. Пусть  $\rho(\vec{r})$  — некоторое распределение свободных зарядов в пространстве, в котором имеются как проводники, так и диэлектрики, и пусть  $\varphi(\vec{r}) = \langle \varphi_{\text{микро}}(\vec{r}) \rangle$  — распределение потенциала, обусловленное зарядами  $\rho(\vec{r})$  и зарядами, возникшими в результате поляризации диэлектрика. Рассматриваемая система занимает ограниченную область пространства и, следовательно, потенциал  $\varphi(\vec{r})$  на бесконечности спадает по крайней мере не медленнее, чем  $1/r$ .

Пусть за счет работы  $\delta A'$  внешних источников ЭДС распределение зарядов в системе получило приращение  $\delta\rho(\vec{r})$ . Тогда эта работа может быть представлена в виде следующего интеграла по всему безграничному пространству:

$$\delta A' = \int \varphi(\vec{r})\delta\rho(\vec{r})dV. \quad (2.27)$$

Приращение  $\delta\rho(\vec{r})$  приводит к изменению как электрического поля во всем пространстве, так и поляризации диэлектрика. В общем случае

процесс поляризации связан с выделением или поглощением тепла в диэлектрике, а также с изменением плотности и (или) состояния деформации проводников и диэлектриков с соответствующей работой упругих сил. Чтобы из баланса энергии эти побочные составляющие исключить, примем, что незначительными тепловыми эффектами в диэлектриках можно пренебречь и что плотность среды во всех ее точках в ходе процесса поддерживается неизменной за счет внешних сил, которые при этом работы не совершают из-за отсутствия перемещений. (Например, в случае конденсатора расстояние между его обкладками поддерживается неизменным.) В оговоренных условиях вся работа  $\delta A'$  идет на изменение энергии поля, т. е.

$$\delta A' = \delta W.$$

Чтобы интеграл (2.27) представить как приращение некоторой величины, связанной с характеристиками поля, величину  $\delta\rho(\vec{r})$  свяжем с приращением вектора  $\vec{D}$ , т. е. представим в виде

$$\delta\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \delta\vec{D}(\vec{r}),$$

и для подынтегральной функции получим выражение

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r})\delta\rho(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \varphi \operatorname{div} \delta\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \left[ \operatorname{div}(\varphi \delta\vec{D}) - \operatorname{grad} \varphi \cdot \delta\vec{D} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \operatorname{div}(\varphi \delta\vec{D}) + \vec{E} \cdot \delta\vec{D} \right]. \end{aligned}$$

После интегрирования по всему объему первое, «дивергентное» слагаемое этой суммы в оговоренных условиях пропадает и получается

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int [\vec{E}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{D}(\vec{r})] dV. \quad (2.28)$$

Мы рассматриваем линейные среды, в которых  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ . Так как, в силу принятого предположения, процесс поляризации диэлектрика происходит при постоянных плотности  $\tau$  и температуры  $T$ , диэлектрическая проницаемость диэлектрика остается неизменной. Тогда для векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  справедливо соотношение  $\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$ . При этом выражение (2.28) можно привести к виду

$$\delta W = \delta \frac{1}{8\pi} \int [\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r})] dV.$$

Отсюда видно, что совершенная против поля работа пошла на приращение выписанного интеграла. Следовательно, энергия поля равна

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E(\vec{r}) \vec{D}(\vec{r}) dV, \quad (2.29)$$

а плотность энергии

$$w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D}) = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}. \quad (2.30)$$

Интересно отметить, что полную энергию можно представить в виде известного из электростатики вакуума выражения (1.42)

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV, \quad (2.31)$$

только здесь  $\rho(\vec{r})$  — плотность свободных зарядов и  $\varphi(\vec{r})$  — потенциал, создаваемый как свободными, так и связанными зарядами. Действительно,

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int (\text{grad} \varphi \cdot \vec{D}) dV = -\frac{1}{8\pi} \int [\text{div}(\varphi \vec{D})] - \varphi \text{div} \vec{D} dV;$$

Первое слагаемое после интегрирования пропадает, а последнее с учетом  $\text{div} \vec{D} = 4\pi\rho$  приводится к требуемому виду.

3. С чисто математической точки зрения, формулы (2.29), (2.31) эквивалентны и отличаются одна от другой только по форме. Однако за формальным различием этих формул стоит и различие в физической интерпретации электрической энергии. Уравнение (2.29) можно понимать в том смысле, что *носителем электрической энергии является электрическое поле*, причем энергия поля *локализована* в пространстве и характеризуется объемной плотностью электрической энергии (2.30). Напротив, выражение (2.31) формально может быть истолковано как *потенциальная энергия взаимодействия электрических зарядов*, и притом *взаимодействия на расстоянии*. Такое истолкование исключает представление о локализации энергии в определенных участках пространства.

Какому же из этих двух представлений об электрической энергии следует отдать предпочтение? В рамках электростатики *принципиально невозможно* указать ни одного опыта, который позволил бы сделать выбор между ними. Дело в том, что в электростатике электрическое поле неотделимо от зарядов, являющихся его источниками. Величиной и



распределением зарядов однозначно определяется электростатическое поле. Обратно, заданием поля во всем пространстве также однозначно определяется плотность электрических зарядов. Не так обстоит дело в случае переменных полей. Переменные электромагнитные поля могут существовать *самостоятельно, независимо от возбуждавших их электрических зарядов*. Заряды могут нейтрализоваться, а поле, которое они возбудили, может продолжать существовать в виде электромагнитных волн, которым присущ определенный запас энергии. Эта энергия не может быть представлена как потенциальная энергия зарядов, взаимодействующих на расстоянии, поскольку самих зарядов уже нет. Формула (2.31) теряет смысл. Но формула (2.29), а также выражения (2.30), как мы увидим позже, сохраняют смысл и для переменных электромагнитных полей. Таким образом, если электростатику рассматривать как предельный случай электродинамики, то даже в электростатике следует отдать предпочтение теории поля с ее представлением о локализации электрической энергии в пространстве.

## 2.10. Силы, действующие на диэлектрик

(Иногда их называют пондеромоторными силами в диэлектриках.)

1. Воспользуемся полученными выражениями для энергии поля и принципом виртуальных перемещений для определения сил, действующих на материальные среды (диэлектрики и проводники) со стороны электрического поля.

Пусть  $\vec{q}(\vec{r})$  – бесконечно малое виртуальное перемещение находящихся в поле зарядов и диэлектриков (т. е. вектор смещения заряда и материальной частицы, находящихся в точке  $\vec{r}$ , один и тот же). Предполагаем, что  $\vec{q}(\vec{r})$  – произвольная непрерывная функция  $\vec{r}$ . Будем считать, что диэлектрик также характеризуется непрерывной функцией  $\varepsilon(\vec{r})$ : все резкие границы раздела здесь рассматриваются как размазанные. Будем полагать дальше, что распределение зарядов задается непрерывной функцией  $\rho(\vec{r})$ .

Понятно, что при виртуальном перемещении  $\vec{q}(\vec{r})$  сила  $\vec{f}dV$ , действующая на элемент объема  $dV$ , совершает работу  $\vec{q} \cdot \vec{f}dV$ , так что суммарная работа

$$A = \int \vec{q} \cdot \vec{f}dV$$

равна интегралу по всему пространству, занятому полем. Эта работа совершается за счет энергии поля и закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\delta W = - \int (\vec{q} \cdot \vec{f}) dV. \quad (\text{a})$$

Сделаем здесь небольшое замечание о виртуальных перемещениях. Записывая закон сохранения энергии в виде (а), мы исключаем из рассмотрения все другие виды преобразования энергии, кроме работы пондеромоторных сил и изменения энергии поля. Например, если электроды, создающие поле, соединены через батарею, то при реальном перемещении этих электродов или диэлектриков происходит изменение химической энергии этой батареи. Говоря о виртуальных перемещениях, мы исключаем подобные преобразования энергии; следовательно, в этом процессе электроды считаются отсоединенными от батареи.

2. Пойдем дальше. Чтобы из соотношения (а) получить выражение для  $\vec{f}$ , необходимо приращение полной энергии поля  $\delta W$  привести к виду

$$\delta W = \int [ ] \cdot \vec{q} dV. \quad (\text{б})$$

Тогда то, что находится в квадратной скобке выражения (б), и будет равно  $-\vec{f}$ . Вспомним, что  $W$  можно представить в одном из двух эквивалентных видов (2.29), (2.31):

$$W_1 = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV,$$

$$W_2 = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon (\text{grad } \varphi)^2 dV.$$

Отсюда

$$\delta W_1 = \frac{1}{2} \int (\rho \delta \varphi + \varphi \delta \rho) dV,$$

$$\delta W_2 = \frac{1}{8\pi} \int (\text{grad } \varphi)^2 \delta \varepsilon dV + \frac{1}{4\pi} \int (\varepsilon \text{ grad } \varphi \cdot \text{grad } \delta \varphi) dV.$$

Если подынтегральное выражение во втором слагаемом  $\delta W_2$  преобразовать как

$$-\vec{\mathcal{D}} \cdot \text{grad } \delta \varphi = -\text{div}(\delta \varphi \cdot \vec{\mathcal{D}}) + \delta \varphi \text{div} \vec{\mathcal{D}},$$

то после интегрирования дивергентный член пропадает, и с учетом  $\text{div} \vec{\mathcal{D}} =$

## 2.10. Силы, действующие на диэлектрик

91

$= 4\pi\rho$  выражение  $\delta W_2$  приводится к виду

$$\delta W_2 = \frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta \varepsilon dV + \int \rho \delta \varphi dV.$$

Таким образом, приращения  $\delta W$  выражаются либо через  $\delta\rho$  и  $\delta\varphi$  (в случае  $W_1$ ), либо через  $\delta\varepsilon$  и  $\delta\varphi$ . Объемная плотность зарядов  $\rho(\vec{r})$  и диэлектрическая постоянная  $\varepsilon(\vec{r})$  описывают локальные свойства среды, а их приращения  $\delta\rho$ ,  $\delta\varepsilon$  связаны с локальными характеристиками поля смещения  $\vec{q}(\vec{r})$  (см. соотношения (г), (е)). Потенциал  $\varphi(\vec{r})$  создается зарядами всего пространства; соответственно приращение  $\delta\varphi(\vec{r})$  в точке  $\vec{r}$  является интегральной величиной и не может определяться каким-либо локальным свойством векторного поля  $\vec{q}(\vec{r})$ . Это обстоятельство является помехой для возможности приведения  $\delta W_1$  или  $\delta W_2$  к требуемому виду (б), но эта трудность легко устраняется принятием в качестве  $\delta W$  разности

$$\delta W = 2\delta W_1 - \delta W_2,$$

для которой

$$\delta W = \int \varphi \delta \rho dV - \frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta \varepsilon dV. \quad (\text{в})$$

3. Заметим, что  $\rho$ , как плотность физической величины, в процессе виртуального перемещения изменяется за счет выноса или вноса этой величины через границы мысленно выделенного объема и определяется выражением

$$\delta\rho = -\text{div}(\rho\vec{q}). \quad (\text{г})$$

Действительно, поскольку суммарное количество заряда, вынесенного из объема  $V$  через границу  $S$  в результате виртуального смещения  $\vec{q}(\vec{r})$  среды и зарядов, определяется поверхностным интегралом от величины  $\rho q_n$ , то изменение плотности зарядов

$$\delta\rho = -\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \rho q_n dS}{V}$$

совпадает с выписанным выражением. Совершенно аналогично для плотности среды справедливо соотношение

$$\delta\tau = -\text{div}(\tau\vec{q}). \quad (\text{д})$$

Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(\vec{r})$  не является плотностью физической величины, а есть характеристика материальной среды, причем для

каждой материальной частицы зависит от ее состояния (в рассматриваемом случае изотропных диэлектриков от плотности  $\tau$ , так как температура рассматривается как постоянная; для анизотропных диэлектриков  $\varepsilon$  зависит еще от состояния деформации, но здесь они не рассматриваются). Изменение  $\delta\varepsilon(\vec{r})$  в данной точке  $\vec{r}$  происходит, таким образом, во-первых, из-за того, что в точку  $\vec{r}$  приходит материальная частица, которая до смещения находилась в точке  $\vec{r} - \vec{q}(\vec{r})$ , а во-вторых, за счет того, что материальная частица в процессе переноса изменяет свою плотность; следовательно,

$$\delta\varepsilon = -\vec{q} \cdot \text{grad} \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} |_T d\tau.$$

В этой формуле изменение плотности данной материальной частицы отмечено символом  $d\tau$ , чтобы подчеркнуть отличие его от локального изменения  $\delta\tau$  в данной точке пространства. Для определения величины  $d\tau$  рассмотрим материальную частицу с объемом  $V$ , ограниченную замкнутой поверхностью  $S$ . Только теперь эта поверхность не является неподвижной, через которую среда переносит какое-то количество физической величины, как при рассмотрении  $\delta\rho$ . Поверхность  $S$  в результате виртуального смещения частиц границы принимает новое положение  $S'$  и охватывает новый объем  $V'$ . Из определения дивергенции легко заметить, что  $V' = V + V \text{div} \vec{q}$ . Тогда из условия сохранения массы частицы

$$\tau V = (\tau + d\tau)(V + V \text{div} \vec{q})$$

получаем

$$d\tau = -\tau \text{div} \vec{q}.$$

Следовательно, искомое выражение для  $\delta\varepsilon$  принимает вид

$$\delta\varepsilon = -\vec{q} \cdot \text{grad} \varepsilon - \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} |_T \text{div} \vec{q}, \quad (\text{е})$$

по структуре отличный от выражения для  $\delta\rho$ .

4. *Последний шаг.* Подставим выражения (г), (е) в соотношение (в) и получим

$$\delta W = \int \left[ -\varphi \text{div}(\rho \vec{q}) + \frac{1}{8\pi} E^2 \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} |_T \text{div} \vec{q} + \frac{1}{8\pi} E^2 \text{grad} \varepsilon \cdot \vec{q} \right] dV.$$

Последнее слагаемое в этой сумме уже имеет нужный вид (б). Первые два слагаемых в подынтегральном выражении после выделения дивер-

## 2.10. Силы, действующие на диэлектрик

93

генций порождают члены

$$\rho \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{q} - \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left( E^2 \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \Big|_T \right) \cdot \vec{q},$$

не обращающиеся в нуль после интегрирования по всему объему, и в результате  $\delta W$  приобретает необходимый вид (б), где

$$[ ] = -\rho \vec{E} - \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left( E^2 \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \Big|_T \right) + \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon.$$

Отсюда получается искомая формула для объемной плотности сил, действующих на изотропный диэлектрик со стороны электрического поля:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left( E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \Big|_T \tau \right) - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon. \quad (2.32)$$

Она складывается из двух частей  $\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)}$ , где

$$\vec{f}^{(1)} = \rho \vec{E} \quad (2.33)$$

описывает силы, действующие на свободные заряды, а

$$\vec{f}^{(2)} = \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left( E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \Big|_T \tau \right) - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon, \quad (2.34)$$

содержащая зависимости от  $\partial \varepsilon / \partial \tau$  и  $\operatorname{grad} \varepsilon$ , отлична от нуля только в диэлектриках.

Из выражения (2.33) следует, что плотность  $\vec{f}^{(1)}$  пондеромоторных сил, действующих на *свободные* заряды, в диэлектрике, как и в вакууме, определяется напряженностью электрического поля. Что касается плотности пондеромоторных сил, действующих на диэлектрик, для их определения необходимо знать зависимость диэлектрической проницаемости от плотности диэлектрика. Для неполярных газообразных и жидких диэлектриков в качестве этой зависимости можно воспользоваться формулой (2.23) Клаузиуса—Моссотти. Особенно простой результат получается для слабо поляризующихся диэлектриков, для которых из-за  $\alpha \ll 1$  формула (2.23) может быть представлена в виде

$$\varepsilon - 1 = C\tau,$$

где коэффициент  $C$  не зависит от плотности. Тогда

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau = C\tau = \varepsilon - 1 \quad (2.35)$$

и из выражения (2.34) получаем

$$\vec{f}^{(2)} = \frac{1}{8\pi} \text{grad}[(\varepsilon - 1)E^2] - \frac{1}{8\pi} E^2 \text{grad} \varepsilon.$$

Таким образом, в случае, если диэлектрическая проницаемость линейно зависит от плотности, для сил, действующих на диэлектрик, справедлива формула

$$\vec{f}^{(2)} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \text{grad} E^2,$$

объясняющая, почему диэлектрик втягивается в область более сильных полей.

В качестве примера в завершение параграфа рассмотрим растягивающую силу, действующую на поверхность диэлектрической пластины, помещенной в плоский конденсатор (рис. 2.8). Пусть поле вне пластины  $E_0$ , диэлектрическая проницаемость диэлектрика  $\varepsilon_0$  (следовательно, электрическое поле внутри пластины  $E = E_0/\varepsilon_0$ ). Вначале для определения искомой силы воспользуемся непосредственно формулой (2.34). При этом вместо поверхности разрыва  $\varepsilon$  введем непрерывную резко меняющуюся на толщине  $\delta$  функцию  $\varepsilon(x)$ , как схематически изображено на рис. 2.8. Тогда электрическое поле между обкладками конденсатора определяется из условия

$$\mathcal{D}_x = \varepsilon(x)E_x = E_0, \quad (\text{ж})$$

объемные силы сосредоточены внутри переходного слоя  $\delta$  и согласно (2.34) равны

$$f_x = -\frac{E_x^2}{8\pi} \frac{d\varepsilon}{dx} + \frac{1}{8\pi} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau E_x^2 \right), \quad (\text{з})$$

а растягивающая диэлектрик сила  $p_\varepsilon$ , приходящаяся на единицу площади поверхности, определяется как

$$p_\varepsilon = \int_{-\delta}^0 f_x(x) dx.$$

С использованием соотношений (ж), (з) имеем

$$p_\varepsilon = -\frac{E_0^2}{8\pi} \int_{-\delta}^0 \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{dx} dx + \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau E_x^2 \right) \Big|_{x=-\delta}^0.$$

Заметим, что на внешней границе диэлектрика, т. е. в плоскости  $x = 0$ , где  $\varepsilon$  принимает значение 1, произведение  $(\partial \varepsilon / \partial \tau) \tau$  согласно

## 2.10. Силы, действующие на диэлектрик

95

выражению (2.35) равно нулю. Следовательно,

$$p_\varepsilon = \frac{E_0^2}{8\pi} - \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau), \quad (2.36)$$

где  $E = E_0/\varepsilon_0$  — поле внутри пластины.

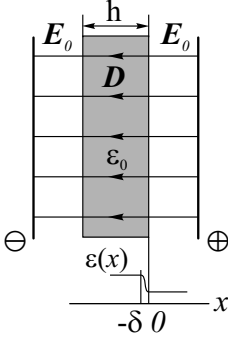


Рис. 2.8

Для наглядности эту же формулу (2.36) полезно получить непосредственно из принципа виртуальных перемещений. Здесь необходимость «размазывать» разрыв диэлектрической проницаемости уже отпадает.

Представим мысленно, что толщина  $h$  слоя диэлектрика получила бесконечно малое приращение  $\delta h$ . При этом сила  $p_\varepsilon$ , действующая на поверхность пластины со стороны электрического поля, совершила работу  $\delta A = p_\varepsilon \delta h$  за счет энергии электрического поля. Следовательно, закон сохранения энергии при виртуальном перемещении имеет вид

$$p_\varepsilon \delta h = -\delta W, \quad (\text{и})$$

где  $\delta W$  — приращение энергии электрического поля, приходящейся на единицу площади обкладок конденсатора, складывающееся из двух частей  $\delta W_1, \delta W_2$ . Причем

$$\delta W_1 = \left( \frac{\mathcal{D}^2}{8\pi\varepsilon_0} - \frac{\mathcal{D}^2}{8\pi} \right) \delta h$$

есть приращение энергии в слое  $\delta h$ , а

$$\delta W_2 = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\mathcal{D}^2}{8\pi\varepsilon} \right) h \delta \tau = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\mathcal{D}^2}{8\pi\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} h \delta \tau$$

— приращение энергии в слое  $h$ , обусловленное изменением плотности диэлектрика при виртуальном смещении границы. Из закона сохранения массы  $h\tau = (h + \delta h)(\tau + \delta \tau)$  имеем

$$\delta \tau = -\tau \frac{\delta h}{h}.$$

Следовательно,

$$\delta W_2 = \frac{\mathcal{D}^2}{8\pi} \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \delta h,$$

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = \frac{\mathcal{D}^2}{8\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_0} - 1 + \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right) \delta h$$

и из соотношения (и) получаем прежний ответ (2.36).

## 2.11. Тензор натяжений электрического поля

Силы, рассматриваемые как объемные и характеризующиеся объемной плотностью  $\vec{f}$ , в физике часто предпочтительнее заменить эквивалентной системой поверхностных натяжений, характеризующейся *тензором натяжений*.

Если мысленно выделить некоторый объем среды  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ , то равнодействующая всех сил, приложенных к телам, находящимся внутри объема  $V$ , будет равна

$$\vec{F} = \int \vec{f} dV.$$

Если объемные силы могут быть сведены к натяжениям, то той же величине должна равняться и совокупность натяжений, действующих извне на замкнутую поверхность  $S$ , т. е. должно иметь место равенство

$$\int_V \vec{f} dV = \oint_S \vec{T}_n dS. \quad (2.37)$$

Здесь поверхностная сила, действующая на некоторый элемент поверхности  $dS$  с внешней нормалью  $\vec{n}$ , обозначена как  $\vec{T}_n dS$ , так что  $\vec{T}_n$  — сила натяжения, приходящаяся на единицу поверхности, внешняя нормаль к которой направлена по  $\vec{n}$ . Индекс  $n$  под знаком вектора  $\vec{T}_n$  означает, таким образом, не проекцию некоторого вектора  $\vec{T}$  на нормаль  $\vec{n}$ , а отмечает то обстоятельство, что поверхностная сила, действующая на элемент поверхности  $dS$ , зависит не только от положения, но и от направления этой площадки.

Возможность сведения объемных сил к натяжениям является следствием закона сохранения импульса. Сила, действующая на среду в объеме  $V$ , представляет собой изменение его импульса за единицу времени. Это изменение должно быть равно количеству импульса, втекающего за тот же промежуток времени в этот объем через его поверхность. Если



## 2.11. Тензор натяжений электрического поля

97

обозначить тензор потока импульса через  $-T_{ik}$  (так что для фиксированного  $i$  тройка чисел  $-T_{i1}, -T_{i2}, -T_{i3}$  составляют вектор плотности потока  $i$ -й компоненты импульса), то закон сохранения  $i$ -й компоненты импульса можно представить в виде

$$\int f_i dV = \oint T_{ik} n_k dS, \quad (2.38)$$

где интегралы вычисляются соответственно по объему  $V$  и замыкающей этот объем поверхности  $S$ . Тензор  $T_{ik}$  называется тензором натяжений или тензором напряжений. Элемент этого тензора, например  $T_{\alpha\beta}$ , как следует из выражения (2.38), есть  $\alpha$ -компонента силы натяжения, действующего на площадку с внешней нормалью, параллельной координатной оси  $x_\beta$  (рис. 2.9).

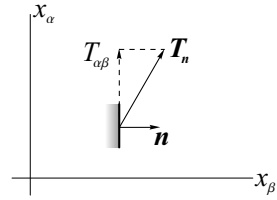


Рис. 2.9

Из сравнения выражений (2.37), (2.38) видно, что  $i$ -я компонента силы натяжения  $\vec{T}_n$ , т. е.  $T_{in}$ , выражается через компоненты тензора натяжений и вектор  $\vec{n}$  как

$$T_{in} = T_{ik} n_k. \quad (2.39)$$

Для эквивалентности объемных сил и натяжений необходимо, чтобы при замене объемных сил эквивалентными натяжениями оставались неизменными не только равнодействующая сил, приложенных к произвольному объему, но и момент этих сил. Это обстоятельство накладывает дополнительное ограничение на компоненты тензора натяжений, сводящееся к требованию симметричности тензора натяжений

$$T_{ik} = T_{ki}$$

(примем без вывода).

Преобразовав поверхностный интеграл из (2.38) в интеграл по объему, получим

$$\int f_i dV = \int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} dV,$$

и отсюда, ввиду произвольности объема интегрирования, связь между плотностью объемных сил и эквивалентной системой поверхностных натяжений

$$f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.40)$$

Вернемся к конкретным объемным силам (2.32), действующим в электрическом поле, и найдем соответствующий им тензор натяжений. Начнем с составляющей силы  $\vec{f}' = \rho \vec{E} - (1/8\pi)E^2 \text{grad} \varepsilon$ , для которой с заменой  $\rho$  на  $(1/4\pi) \text{div} \vec{D}$  имеем

$$f'_i = \frac{1}{4\pi} E_i \frac{\partial \mathcal{D}_k}{\partial x_k} - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} =$$

$$\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (E_i \mathcal{D}_k) - \frac{\partial E_i}{\partial x_k} \mathcal{D}_k \right] - \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon E^2) - \varepsilon \frac{\partial E^2}{\partial x_i} \right].$$

Второе и четвертое слагаемые полученного выражения взаимно сокращаются, так как

$$\frac{\partial E^2}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} E_k E_k = 2 \frac{\partial E_k}{\partial x_i} E_k, \quad \frac{\partial E_k}{\partial x_i} = \frac{\partial E_i}{\partial x_k}$$

(последнее равенство есть следствие уравнения  $\text{rot} \vec{E} = 0$ ). Следовательно,

$$f'_i = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} (\varepsilon E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \varepsilon E^2)$$

имеет вид связи (2.40), причем

$$T'_{ik} = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \varepsilon E^2).$$

Для силы

$$\vec{f}'' = \frac{1}{8\pi} \text{grad} (E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau})$$

соответственно

$$f''_i = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} E^2) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\frac{1}{8\pi} \delta_{ik} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} E^2),$$

$$T''_{ik} = \frac{1}{8\pi} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} E^2 \delta_{ik}.$$

Имея тензор натяжения, теперь нетрудно воспользоваться соотношением (2.39) и найти силу натяжения  $\vec{T}'_n$  электрического поля на площадку с внешней нормалью  $\vec{n}$ . Для  $i$ -й компоненты силы  $\vec{T}'_n$  имеем

$$T'_{in} = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \varepsilon E^2) n_k = \frac{1}{4\pi} [\varepsilon E_i (\vec{n} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{2} \varepsilon n_i E^2];$$

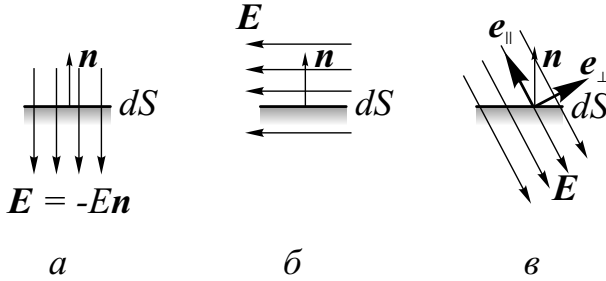


Рис. 2.10

отсюда

$$\vec{T}'_n = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon \vec{E} E_n - \frac{1}{2} \varepsilon \vec{n} E^2).$$

Аналогично

$$T''_{in} = \frac{1}{8\pi} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} E^2 \delta_{ik} n_k = \frac{1}{8\pi} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} E^2 n_i,$$

$$\vec{T}''_n = \frac{1}{8\pi} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} E^2 \vec{n}.$$

Следовательно, полная сила натяжения

$$\vec{T}_n = \frac{1}{4\pi} \varepsilon E_n \vec{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 (\varepsilon - \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}) \vec{n}. \quad (2.41)$$

Напомним, что  $\vec{T}_n$  есть сила, действующая на единичную площадку с ее внешней стороны, причем внешняя сторона площадки  $dS$  определяется указанием направления вектора внешней нормали  $\vec{n}$ . В частном случае, если рассматриваемый элемент поверхности перпендикулярен полю  $\vec{E}$  (рис. 2.10, а), т. е.  $\vec{E} = \pm E \vec{n}$ ,  $E_n = \pm E$ , выражение (2.41) приобретает вид

$$\vec{T}_n = \frac{E^2}{8\pi} (\varepsilon + \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}) \vec{n} \quad (\vec{n} \parallel \vec{E}). \quad (2.42)$$

Отсюда видно, что натяжение действует по внешней нормали и стремится как бы оторвать элемент поверхности  $dS$  от внутренней области. Результат (2.42) объясняет выражение (2.36) для силы  $p_\varepsilon$  на поверхность диэлектрической пластины. Видно, что эта сила складывается из натяжения  $E_0^2/8\pi$ , действующего со стороны вакуума, и натяжения  $E^2/8\pi(\varepsilon_0 + \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau})$  со стороны диэлектрика.

Если нормаль  $\vec{n}$  перпендикулярна полю (см. рис. 2.10, б),  $E_n = 0$ , то

$$\vec{T}_n = -\frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}) \quad (\vec{n} \perp \vec{E}) \quad (2.43)$$

и сила натяжения направлена против внешней нормали и стремится прижать элемент  $dS$  к внутренней области.

В общем случае вектор  $\vec{T}_n$ , лежащий в плоскости, образованной векторами  $\vec{n}, \vec{E}$ , удобно представлять в виде суммы двух составляющих: параллельной и перпендикулярной вектору  $\vec{E}$ . Для этого введем в плоскости  $(\vec{n}, \vec{E})$  дополнительные единичные векторы  $\vec{e}_{||}, \vec{e}_{\perp}$ , уходящие из «центра» площадки  $dS$  во внешнюю сторону, как показано на рис. 2.10, в. Тогда

$$\vec{E} = \pm E \vec{e}_{||}, E_n = \pm E(\vec{n} \cdot \vec{e}_{||}), \vec{n} = \vec{e}_{||}(\vec{n} \cdot \vec{e}_{||}) + \vec{e}_{\perp}(\vec{n} \cdot \vec{e}_{\perp});$$

и для  $\vec{T}_n$  из (2.41) получаем выражение

$$\vec{T}_n = \frac{1}{8\pi} E^2 (\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau) (\vec{n} \cdot \vec{e}_{||}) \vec{e}_{||} - \frac{E^2}{8\pi} (\varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau) (\vec{n} \cdot \vec{e}_{\perp}) \vec{e}_{\perp}.$$

Следовательно, сила  $\vec{T}_n dS$ , действующая на площадку  $dS$ , складывается из соответствующих сил, направленных вдоль  $\vec{e}_{||}$  и против  $\vec{e}_{\perp}$ , аналогичных силам (2.42), (2.43), только действующих как бы на площадки  $dS_{\perp} = (\vec{n} \cdot \vec{e}_{||}) dS, dS_{||} = (\vec{n} \cdot \vec{e}_{\perp}) dS$ , перпендикулярную и параллельную полю  $\vec{E}$ .

Таким образом, пондеромоторные силы электрического поля, приложенные к электрическим зарядам и материальным телам, несущим эти заряды, можно заменить системой натяжений. Результирующая сила, действующая на тела, находящиеся в произвольном объеме  $V$ , может быть формально представлена в виде суммы натяжений, «испытываемых» поверхностью этого объема  $S$ , притом неважно, проходит эта поверхность по вакууму или захватывает также материальные тела. Следовательно, можно оперировать с этими натяжениями и быть уверенным в правильности окончательных результатов. Принципиальное значение понятия натяжений выясняется при изучении переменных электромагнитных полей. Мы увидим, что здесь эквивалентность между пондеромоторными силами и электромагнитными натяжениями нарушается и что избыток суммы натяжений, испытываемых поверхностью объема  $V$ , над пондеромоторными силами, испытываемыми находящимися в этом объеме телами, определяет собою изменение импульса электромагнитного поля в этом объеме.

## Глава 3

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 3.1. Плотность тока

1. Под электрическим током понимается любое упорядоченное движение электрических зарядов, происходящее под действием электрического поля. Обычно заряды движутся в некоторой среде, которая при этом называется проводником, а сами заряды — носителями тока. В случае металлов носителями тока являются свободные электроны, а в электролитах и ионизованных газах — положительные и отрицательные ионы, а также электроны.

2. Электрический ток характеризуется объемной плотностью тока  $\vec{j}$ . Для ее определения рассмотрим количество зарядов, переносимых носителями через элементарную площадку  $dS$  за единицу времени. Для простоты вначале предположим, что носителями тока являются заряженные частицы одного сорта. Пусть в окрестности точки  $\vec{r}$  концентрация носителей  $N$  1/см<sup>3</sup>, а распределение по скоростям характеризуется функцией распределения  $f(\vec{v})$ . При этом частицы, обладающие скоростью  $\vec{v}$  и разбросом скорости  $d\vec{v}$ , за время  $dt$  через площадку  $dS$  переносят заряд

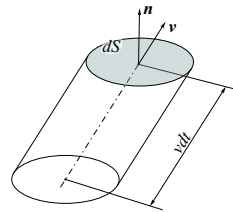


Рис. 3.1

$$qN f(\vec{v})(\vec{v} \cdot \vec{n})dSd\vec{v}dt$$

(рис. 3.1), где  $q$  — заряд носителя тока,  $\vec{n}$  — единичная нормаль к площадке, а суммарный заряд, переносимый всеми частицами за единицу времени, т. е. ток через площадку  $dS$ , будет равен

$$dI = qN \int \vec{v} f(\vec{v}) d\vec{v} \cdot \vec{n} dS.$$

Эту величину можно представить в виде

$$dI = (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS = j_n dS, \quad (3.1)$$

где вектор  $\vec{j}$ , связанный с вектором средней скорости зарядов

$$\vec{u} = \int \vec{v} f(\vec{v}) = N^{-1} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i$$

соотношением

$$\vec{j} = q \sum_{i=1}^N \vec{v}_i = qN\vec{u}, \quad (3.2)$$

и есть рассматриваемая объемная плотность тока. Из соотношения (3.1) видно, что *объемная плотность тока по величине равна току, протекающему через единичную площадку, перпендикулярную вектору  $\vec{j}$* , а размерность  $j$  в абсолютной гауссовой системе связана с размерностью  $q$  соотношением

$$[j] = [q] \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}.$$

В случае, когда в создании тока участвуют несколько типов заряженных частиц, то учитывается вклад каждого сорта и тогда

$$\vec{j} = \sum_i q_i N_i \vec{u}_i.$$

Если рассматривается некоторый конечный объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ , то суммарный заряд, выносимый из объема  $V$  через границу за единицу времени, равен

$$I = \oint_S j_n dS \quad (3.3)$$

(полный ток через поверхность  $S$ ); здесь  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ .

3. Наряду с объемно распределенными токами, характеризующимися объемной плотностью  $\vec{j}$ , часто встречаются ситуации, когда ток можно считать поверхностным и характеризовать поверхностной плотностью  $\vec{i}$ . Ток, бегущий по слою малой (по сравнению с другими размерами) толщины  $\delta$  можно считать поверхностным, если интересоваться только внешними проявлениями этого тока в пространстве вне слоя на расстояниях, существенно превышающих толщину слоя (например, магнитным полем от этого тока). При этом истинным распределением плотности тока  $\vec{j}$  по толщине слоя можно не интересоваться, толщину слоя не принимать во внимание и рассматривать слой в виде математической поверхности, по которой бежит ток с поверхностной плотностью  $\vec{i}$ . Вектор  $\vec{i}$  в каждой точке поверхности лежит в касательной плоскости и равен произведению усредненной по толщине слоя объемной плотности тока  $\langle \vec{j} \rangle$  и толщины слоя  $\delta$ , т. е.

$$\vec{i} = \langle \vec{j} \rangle \delta. \quad (3.4)$$

Если теперь на поверхности взять произвольный отрезок  $\Delta\ell$  и провести к нему нормаль  $\vec{n}$ , лежащую в касательной плоскости, то ток, протекающий через этот отрезок,

$$\Delta I = (\vec{i} \cdot \vec{n}) \Delta\ell = i_n \Delta\ell \quad (3.5)$$

фактически будет совпадать с током, протекающим через элементарное сечение  $\Delta S = \Delta\ell\delta$  реального токового слоя под отрезком  $\Delta\ell$ , так как на основании соотношения (3.4)

$$i_n \Delta\ell = \langle j_n \rangle \delta \Delta\ell = \langle j_n \rangle \Delta S.$$

*Пример 3.1.* Диэлектрический цилиндр радиуса  $R$  и высоты  $h$  заряжен так, что объемная и поверхностная плотности свободных и связанных зарядов в совокупности постоянны:

$$\rho_* = \rho + \rho_{\text{св}} = \text{Const}, \quad \Sigma_* = \Sigma + \Sigma_{\text{св}} = \text{Const}.$$

Цилиндр вращается с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси симметрии. Найти объемную ( $\vec{j}$ ) и поверхностную ( $\vec{i}$ ) плотности тока, создаваемого вращающимися зарядами.

В неподвижной цилиндрической системе координат  $(r, \alpha, z)$  (рис. 3.2) искомые плотности тока по условию задачи имеют только  $\alpha$ -компоненты

$$\vec{j} = j_\alpha \vec{e}_\alpha, \quad \vec{i} = i_\alpha \vec{e}_\alpha.$$

Для определения  $j_\alpha$  рассмотрим ток через элементарную площадку  $drdz$  радиальной плоскости  $\alpha = Const$ , равный  $dI = \rho_* \omega r dr dz$ . На основании соотношения (3.1) отсюда имеем

$$j_\alpha = \rho_* \omega r.$$

Для определения поверхностной плотности на торцах цилиндра рассмотрим радиальный отрезок  $dr$ , лежащий в плоскости торца, и заметим, что через этот отрезок за 1 с переносится заряд, равный заряду кольцевой полосы длины  $v = \omega r$  (на рис. 3.2 заштрихована). Следовательно, ток через отрезок  $dI = \Sigma_* \omega r dr$  и в соответствии с выражением (3.5),  $i_\alpha = \Sigma_* \omega r$  (на торцах  $|z| = h/2$ ). Аналогично из рассмотрения отрезка  $dz$ , расположенного вдоль образующей цилиндра, находим  $i_\alpha = \Sigma_* \omega R$  на цилиндрической поверхности  $r = R$ .

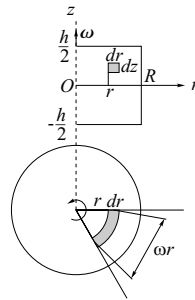


Рис. 3.2

### 3.2. Закон сохранения заряда. Уравнение непрерывности

Напомним, что все электрические заряды, встречающиеся в природе, по абсолютному значению кратны элементарному заряду, равному заряду электрона, причем этот элементарный заряд является постоянным и не зависит от скорости частицы, которая несет этот заряд. Простейшим доказательством независимости величины заряда от его скорости служит факт электронейтральности атомов, в которых заряд быстро движущихся электронов полностью компенсирует заряд ядра. Заряд любого тела также является величиной, инвариантной относительно переходов из одной инерциальной системы в другую, и это утверждение составляет один аспект закона сохранения зарядов.

Имеется и другой аспект рассматриваемого закона. Как показывает вся совокупность опытных фактов, *ни в каких физических процессах суммарное количество зарядов не изменяется*. Отсюда, конечно, не следует, что сохраняются в отдельности положительные и отрицательные заряды системы; например, в процессе аннигиляции электрон-позитронной пары число положительных и отрицательных зарядов уменьшается, но при этом суммарное количество зарядов остается неизмен-



## 3.2. Закон сохранения заряда

105

ным. *Постоянство суммарного заряда в физическом процессе представляет собой вторую сторону закона сохранения заряда.*

Таким образом, из закона сохранения заряда следует, что полный заряд системы может изменяться только за счет пересечения ее границы заряженными частицами. Это утверждение математически может быть представлено в виде соотношения между макроскопическими величинами  $\rho$  (плотность заряда) и  $\vec{j}$  (плотность тока), характеризующими процесс протекания тока. Для этого в пространстве, занятом током, мысленно выделим некоторый объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ . Суммарное количество заряда, ежесекундно уходящее из объема  $V$  через поверхность  $S$ , определяется интегралом (3.3). Обусловленная этим скорость изменения суммарного заряда в объеме  $V$  равна

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \int \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dV.$$

Приравнявая эти две величины, получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint_S j_n dS, \quad (3.6)$$

являющееся *интегральным представлением закона сохранения заряда*. Выражая входящий сюда поверхностный интеграл с помощью теоремы Остроградского—Гаусса, результат можно переписать в виде

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}\right) dV = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться для произвольного объема  $V$ , подынтегральное выражение тождественно должно равняться нулю, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (3.7)$$

Полученное уравнение называется *уравнением непрерывности*. Это есть *дифференциальное представление закона сохранения заряда*.

Если рассматривается стационарный процесс, при котором токи и заряды не меняются со временем, уравнения (3.6), (3.7) принимают вид

$$\oint_S j_n dS = 0; \quad (3.8)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (3.9)$$

Последнее уравнение является одним из основных уравнений для постоянного тока.

### 3.3. Закон Ома. Проводимость металлов. Условие применимости закона Ома

1. Обратимся к зависимости плотности тока  $\vec{j}$  в проводящей среде от напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . В слабых полях эта зависимость линейная и обычно представляется в виде

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (3.10)$$

где  $\sigma$  — коэффициент пропорциональности, имеющий в гауссовой системе размерность  $1/c$ , называемый проводимостью среды. Соотношение (3.8) устанавливает связь между *локальными* значениями плотности тока и напряженности электрического поля и является *дифференциальным законом Ома*.

2. Вывод закона Ома проведем на примере металлических проводников. Отметим сразу, что для металлов любые достижимые поля являются в рассматриваемом смысле «слабыми» и закон Ома справедлив в них всегда. Здесь носителями тока являются свободные электроны, слабо связанные с ионами кристаллической решетки, внутри которой они свободно могут перемещаться. В отсутствие электрического поля электроны совершают беспорядочное движение, аналогичное тепловому движению молекул газа. При наличии электрического поля на беспорядочное движение электронов накладывается регулярное — *дрейфовое* — движение. В пределах физически бесконечно малого объема электрическое поле можно считать однородным, и поэтому все находящиеся в этом объеме электроны имеют одну и ту же скорость дрейфового движения, которую обозначим через  $\vec{u}$ . Представив полную скорость  $\vec{v}$  электрона в виде суммы  $\vec{v} = \vec{v}_* + \vec{u}$  скоростей беспорядочного и дрейфового движений, уравнение движения можно записать в виде

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \left( \frac{d\vec{v}_*}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \right) = e\vec{E} + \vec{F}_\Sigma,$$

где  $e\vec{E}$  — сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, причем оно не обязано быть неизменным во времени,  $\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_i + \vec{F}_e$  — сила со стороны ионов и других электронов. Усредним это уравнение

по электронам, т. е. просуммируем уравнения для всех электронов рассматриваемого объемчика и разделим на число электронов. В результате скорость беспорядочного движения из уравнения выпадет, а сила  $\vec{F}_\Sigma$  заменится средней силой  $\langle \vec{F}_i \rangle$  со стороны ионов кристаллической решетки. Заметим, что силы взаимодействия между электронами при усреднении пропадают, так как эти силы не влияют на суммарный импульс  $\sum m(\vec{v}_* + \vec{u})$  всех электронов, который только и входит в вычисление среднего значения скорости  $\vec{u}$ . В отсутствие дрейфового движения средняя сила  $\langle \vec{F}_i \rangle$  равна нулю, а при  $u \neq 0$  становится отличной от нуля, причем, если  $u \ll v_*$  (в металлах данное условие, как будет показано, выполняется всегда), эту суммарную силу можно разложить по степеням  $\vec{u}$  и ограничиться первым членом разложения, представив его в виде

$$\langle \vec{F}_i \rangle = -m \frac{\vec{u}}{\tau_*}, \quad (3.11)$$

где  $\tau_*$  — постоянная, имеющая размерность времени. (Понятно, что  $\tau_*$  пропорционально среднему времени  $\tau_s$  свободного пробега электрона между двумя последовательными столкновениями с ионами.) В этом приближении уравнение для дрейфового приближения приобретает вид

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} + m \frac{\vec{u}}{\tau_*} = \frac{e}{m} \vec{E},$$

а после умножения на  $eN$  может быть переписано в виде уравнения для плотности тока  $\vec{j} = Ne\vec{u}$ :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\tau_*} = \frac{Ne^2}{m} \vec{E}. \quad (3.12)$$

При этом переходе негласно принято, что концентрация электронов неизменна во времени, а полную производную  $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$  из-за малости  $u$  можно заменить частной производной  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ .

Если поле  $\vec{E}$  не зависит от времени, то уравнение (3.12) допускает стационарное решение

$$\vec{j} = \frac{Ne^2}{m} \tau_* \vec{E},$$

представляющее собой закон Ома (3.10), где проводимость определяется выражением

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m} \tau_*. \quad (3.13)$$

Из уравнения (3.12) видно, что закон Ома верен и для переменных полей. Важно только, чтобы за время  $\tau_*$  ток менялся пренебрежимо мало, т. е. выполнялось условие

$$\left| \tau_* \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right| \ll |\vec{j}|. \quad (3.14)$$

В частности, для периодических электрических полей это означает, что период изменения поля  $T$  должен быть велик по сравнению с  $\tau_*$ .

3. Введенное выше характерное время  $\tau_*$  можно выразить через среднее время свободного пробега электрона  $\tau_s$  между двумя последовательными столкновениями с ионами решетки. Для этого обычно принимается предположение (справедливое из-за наличия тепловых колебаний кристаллической решетки), что при каждом столкновении с ионом электрон полностью утрачивает свою скорость упорядоченного движения и последующее ускоренное движение под действием электрического поля начинается с нулевой начальной скорости. В результате к следующему столкновению электрон приходит со скоростью  $e\vec{E}\tau_s/m$ , средняя скорость между двумя последовательными столкновениями будет  $\vec{u} = e\vec{E}\tau_s/(2m)$ , а плотность тока  $\vec{j} = Ne\vec{u} = Ne^2\tau_s/(2m)\vec{E}$ . Следовательно, проводимость

$$\sigma = \frac{Ne^2\tau_s}{2m} = \frac{Ne^2}{2m} \frac{\ell_s}{v_*} \quad (3.15)$$

(здесь  $\ell_s$  — средняя длина свободного пробега электрона) и из сравнения с выражением (3.13) получаем  $\tau_* = \tau_s/2$ .

4. Воспользуемся формулами (3.15), чтобы оценить микропараметры  $\ell_s, \tau_s$ , характеризующие движение электрона, через макроскопически измеряемую величину  $\sigma$ ; к примеру, для меди  $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$  1/с. Следует при этом помнить, что газ свободных электронов в металле подчиняется не классической статистике, а статистике Ферми—Дирака, и средняя скорость теплового движения не определяется параметром  $kT$ . Оказывается, что скорость хаотического движения электронов в металле составляет  $v_* \sim 10^8$  см/с даже вблизи абсолютного нуля температуры. Нагревание до температур плавления лишь незначительно увеличивает эту скорость. Что касается концентрации электронов, ее можно оценить, считая, что на каждый атом приходится один свободный электрон. Отсюда  $N = N_0\rho/A$  ( $N_0$  — число Авогадро,  $\rho$  — плотность,  $A$  — атомная

масса) и для меди находим

$$N \approx \frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 8,9}{63} \approx 8,5 \cdot 10^{22} \frac{1}{\text{см}^3}.$$

Для оценок  $\tau_s$  и  $\ell_s$  удобно формулы (3.15) переписать, выразив в них  $e^2/m$  через классический радиус электрона  $r_e = e^2/mc^2 = 2,8 \cdot 10^{-13}$  см. Тогда

$$\sigma = \frac{Nc^2r_e}{2}\tau_s = \frac{Nc^2r_e}{2v_*}\ell_s$$

и отсюда получаем

$$\ell_s = \frac{2v_*\sigma}{Nc^2r_e} \sim \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{17}}{8 \cdot 10^{22} \cdot 10^{21} \cdot 3 \cdot 10^{-13}} \sim 4 \cdot 10^{-6} \text{ см}, \quad \tau_s \sim 4 \cdot 10^{-14} \text{ с}.$$

5. Сделаем уточняющее замечание к условию  $u \ll v_*$  справедливости формулы (3.11) и вытекающего отсюда закона Ома. Чтобы понять необходимость этого условия, заметим, что процесс столкновения электрона с ионом связан с передачей последнему импульса  $\Delta\vec{p}$ , пропорционального  $m\vec{u}$ . А «сила трения»  $\langle \vec{F}_i \rangle = -\nu\Delta\vec{p}$ , испытываемая электроном со стороны ионной решетки, кроме  $\Delta\vec{p}$  зависит еще и от частоты столкновений  $\nu \sim \ell_s/|\vec{v}_* + \vec{u}|$ . Только при условии  $u \ll v_*$  эта частота есть константа, не зависящая от приложенного поля, и только при этом закон Ома действительно справедлив. В сильных полях закон Ома может нарушаться, так как линейное приближение (3.11) уже недостаточно. Сильными, таким образом, являются поля, в которых на протяжении длины свободного пробега носитель тока приобретает скорость, сравнимую со скоростью беспорядочного движения. Следовательно, условие слабости поля, использованное при выводе закона Ома, имеет вид

$$eE\tau_s \ll mv_*. \quad (3.16)$$

Для металлов это условие нарушается при достижении полей

$$E \sim \frac{mv_*}{e\tau_s} \sim \frac{1}{2}10^4 \text{ абс. ед.} = 1,5 \cdot 10^8 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Только начиная с таких полей могли бы проявиться нелинейные эффекты при прохождении электрического тока через металл. На самом деле такие поля в металле невозможны: они мгновенно превратили бы металл в пар. Следовательно, в металлах закон Ома справедлив при сколь угодно больших практически достижимых полях. А вот в проводниках типа ионизованных газов закон Ома практически не соблюдается.

6. Применим дифференциальный закон Ома к постоянному току, протекающему по тонкому длинному проводу. В этом случае можно считать, что плотность тока  $j$  постоянна по сечению и полный ток  $I = jS$ . Если сечение  $S$  не меняется вдоль провода, то во всем проводе  $j = \text{const}$ . С другой стороны, разность потенциалов на концах проводника равна  $U = E\ell$ , где  $\ell$  — длина проводника. Подставляя выражения  $j = I/S$ ,  $E = U/\ell$  в закон Ома (3.10), находим

$$U = \frac{\ell}{\sigma S} I = RI. \quad (3.17)$$

Величина  $R = \ell/\sigma S$  называется сопротивлением проводника. Именно этот закон (3.17) пропорциональности тока и напряжения металлических проводников был открыт экспериментально Омом в 1826 г. Он же ввел понятие сопротивления и нашел его зависимость от параметров проводника. Единицей сопротивления в системе СИ является 1 Ом. Это — сопротивление такого проводника, в котором при приложенном напряжении 1 В протекает ток 1 А, т. е.

$$\text{Ом} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ абс. единиц.}$$

В соответствии с этим единица проводимости в СИ есть  $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1} = 9 \cdot 10^9 \text{ 1/с.}$

### 3.4. Закон Джоуля—Ленца

Обратимся к вопросу об энергетических превращениях при прохождении электрического тока. Рассмотрим работу электрического поля над зарядами, направленное движение которых составляет электрический ток, в объеме участка трубки тока между двумя сечениями  $S_1, S_2$ , вырезанными трубкой из эквипотенциальных поверхностей  $\varphi_1 = \text{const}$ ,  $\varphi_2 = \text{const}$ , как показано на рис. 3.3. Ток в трубке равен  $I$ , напряжение между сечениями 1 и 2 равно  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ . На рисунке изображена также элементарная трубочка с током  $dI = j dS$ , являющаяся частью конечной трубки тока.

Элемент объема  $dV$  этой трубочки с сечением  $dS$  и длины  $d\ell$  содержит количество зарядов  $dQ = qNdV$ , где  $q$  — заряд носителя тока. Направленная скорость этих зарядов  $\vec{u} = \vec{j}/qN$  определяется из соотношения (3.2). За время  $dt$  в объеме  $dV$  электрическое поле совершает

## 3.4. Закон Джоуля-Ленца

111

работу над зарядами  $dA = dQ(\vec{E} \cdot \vec{u})dt = (\vec{E} \cdot \vec{j})dVdt$ . Следовательно, мощность, развиваемая электрическим полем в единице объема, занятого током,

$$p = (\vec{E} \cdot \vec{j}) \quad (3.18)$$

определяется как скалярное произведение напряженности электрического поля и объемной плотности тока.

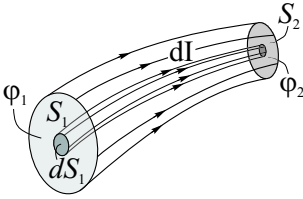


Рис. 3.3

Чтобы найти мощность электрического поля в конечном объеме трубки тока, рассмотрим вначале участок выделенной элементарной трубочки с током  $dI = j dS = \text{const}$ , в котором развивается мощность

$$dP = dI \int_1^2 E dl = dI \cdot U.$$

Отсюда электрическая мощность в конечном объеме трубки тока равна произведению силы тока на напряжение:

$$P = IU.$$

В зависимости от природы тока эта мощность расходуется по-разному. Если, к примеру, рассматривается сверхпроводящая обмотка электродвигателя, то мощность  $P$  преобразуется в механическую мощность на валу двигателя. В случае электронного пучка в вакуумном приборе электрическая мощность идет на приращение кинетической энергии электронов. Наконец, если рассматривается ток, проходящий по проводнику с омическим сопротивлением  $R$ , мощность

$$P = IU = RI^2 = U^2/R \quad (3.19)$$

тратится на преодоление сопротивления и выделяется в проводнике в виде тепла. Интенсивность тепловыделения в единичном объеме определяется из выражения (3.18) и равна

$$p = (\vec{E} \cdot \vec{j}) = \sigma E^2 = j^2/\sigma. \quad (3.20)$$

Соотношения (3.19), (3.20) носят название *закон Джоуля—Ленца*.

### 3.5. Электрические цепи. ЭДС. Законы Кирхгофа

Из опыта известно, что стационарный ток в проводнике под действием лишь электростатического поля возбужден быть не может. Действительно, из потенциальности электростатического поля следует, что работу при перемещении заряда по замкнутому контуру, по которому бежит ток, оно не совершает. Следовательно, в этих условиях стационарный ток существовать не может, поскольку он связан с необходимостью совершения работы по преодолению омического сопротивления проводников. Для существования тока необходимо, чтобы хотя бы на

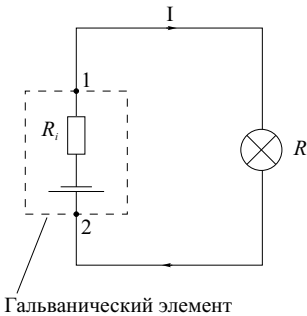


Рис. 3.4

отдельном участке проводника на заряды действовали силы неэлектростатического происхождения. Такие силы имеются в любом источнике тока; например, в гальваническом элементе они сосредоточены в тонких молекулярных слоях на границах между раствором и электродами. Изобразим простейшую электрическую цепь, состоящую из нагрузки и источника (рис. 3.4). Здесь источником тока служит гальванический элемент, а нагрузкой является электрическая лампочка. Источник характеризуют некоторой

физической величиной, которая называется *электродвижущей силой* (ЭДС)  $\mathcal{E}$  и, по определению, связана с током в цепи соотношением

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}, \quad (3.21)$$

где  $R, R_i$  — сопротивление нагрузки и внутреннее сопротивление источника соответственно. Чтобы понять физический смысл введенной здесь величины  $\mathcal{E}$ , обратим внимание на разность потенциалов  $U_{12}$  между точками 1 и 2, отмеченными на рис. 3.4. Как следует из соотношения (3.21) и закона Ома для участка цепи (3.17),

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = RI = \frac{R}{R + R_i} \mathcal{E}.$$

Для разомкнутой цепи, т. е. при  $R \rightarrow \infty$ , отсюда имеем

$$U_{12}|_{R \rightarrow \infty} = \mathcal{E}, \quad (3.22)$$



т. е. *по величине* электродвижущая сила источника равна напряжению на зажимах разомкнутого источника.

В рассмотренной простейшей цепи источник напряжения, его внутреннее сопротивление и нагрузка пространственно разделены между собой. Это так называемая цепь с сосредоточенными параметрами. В общем случае цепи с распределенными параметрами действие источника описывается заданием стороннего поля сил  $\vec{E}_{\text{стр}}$ , которое характеризует дополнительную силу, действующую на заряд внутри источника. Полная сила в этом случае равна

$$\vec{f} = e(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стр}}),$$

а дифференциальный закон Ома имеет вид

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стр}}). \quad (3.23)$$

Не рассматривая конкретные источники ЭДС, отметим, что по физической природе сторонние силы могут быть совершенно различными: механическими, как в электростатических машинах, либо силой Лоренца со стороны магнитного поля в случае динамомашии или «химические» силы — в гальваническом элементе. Таким образом, физическая природа сторонних сил различна, но для всех них есть общее свойство — они непотенциальны. И оказывается, что та физическая величина, которая была названа ЭДС в цепи, есть просто циркуляция  $\vec{E}_{\text{стр}}$  по этому замкнутому контуру, т. е.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{\text{стр}} \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.24)$$

Для доказательства возьмем замкнутый контур в виде элементарной трубки тока с током  $I$ . Плотность тока постоянна по сечению, площадь сечения  $S$  может меняться вдоль трубки, но при этом произведение  $jS = I$  остается неизменным. Тогда для циркуляции (3.24) справедлива цепочка равенств

$$\oint \vec{E}_{\text{стр}} d\vec{\ell} = \oint (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стр}}) d\vec{\ell} = \oint \frac{\vec{j} \cdot d\vec{\ell}}{\sigma} = I \oint \frac{d\ell}{\sigma S} = IR_{\Sigma} = \mathcal{E}, \quad (3.25)$$

приводящая к определению (3.24). Первый шаг в цепочке следует из потенциальности поля  $\vec{E}$ , второй — на основании равенства (3.23). Последующие шаги — из постоянства тока и определения ЭДС (3.21) через полное сопротивление в контуре.

Таким образом, по физическому смыслу ЭДС в контуре есть циркуляция  $\vec{E}_{\text{стр}}$  по этому контуру, а экспериментальное определение  $\mathcal{E}$  можно осуществить по соотношению (3.22). Сразу отметим, что в случае цепей с сосредоточенными параметрами вклад в циркуляцию (3.25) будут давать лишь небольшие участки контура и поэтому возможно даже говорить о нескольких источниках ЭДС в замкнутом контуре со своими величинами  $\mathcal{E}_i$ .

Напомним что так называемые разветвленные цепи с сосредоточенными параметрами рассчитываются по законам Кирхгофа, известным из курса радиоэлектроники. Здесь они упоминаются, чтобы указать их происхождение из общих законов электродинамики. Первый закон Кирхгофа, относящийся к узлу, утверждает, что

$$\sum_k I_k = 0,$$

т. е. сумма всех токов, исходящих из узла, равна нулю. Это есть частное проявление закона сохранения заряда, который в стационарном случае имеет вид (3.8). Второй закон

$$\sum_k R_k I_k = \sum_i \mathcal{E}_i$$

относится к любому контуру, который можно выделить в разветвленной цепи. Вывод этого соотношения является буквальным повторением цепочки рассуждений (3.25) применительно к замкнутому контуру, состоящему из отдельных участков со своими токами. Конечно же второй закон Кирхгофа является следствием потенциальности электростатического поля.

### 3.6. Граничные условия для полей при наличии тока

Как уже подчеркивалось в § 1.8, граничные условия, так же как и дифференциальные уравнения для полей, получаются из соответствующих интегральных соотношений (их часто называют интегральными законами сохранения). При наличии тока первым подобным соотношением является закон сохранения заряда (3.6), по «конструкции» напоминающий интегральную теорему Гаусса. Поэтому, буквально повторив рассуждения § 1.8, заменив при этом вектор  $\vec{E}$  на вектор  $\vec{j}$ , а  $4\pi\rho$

## 3.6. Граничные условия для полей при наличии тока

115

на  $-\partial\rho/\partial t$ , для нормальной компоненты вектора  $\vec{j}$  получим граничное условие

$$j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial\Sigma}{\partial t}, \quad (3.26)$$

где  $\Sigma$  — поверхностная плотность зарядов на границе раздела. В стационарном случае (3.26) переходит в условие непрерывности  $j_n$ :

$$j_{1n} = j_{2n}, \quad (3.27)$$

что эквивалентно требованию

$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}. \quad (3.28)$$

Из последнего соотношения следует  $E_{2n} - E_{1n} \neq 0$ , т. е. для выполнения условия (3.28) на границе обязательно присутствие поверхностных зарядов. Это обстоятельство вызывает определенную трудность с граничным условием непрерывности  $\mathcal{D}_n$  в диэлектриках. Дело в том, что любой диэлектрик обладает конечной проводимостью, хотя обычно и очень малой, и для них граничное условие должно иметь вид (3.28). Отсюда, казалось бы, можно сделать вывод, что обычное граничное условие  $\mathcal{D}_{1n} = \mathcal{D}_{2n}$  никогда не выполняется. В действительности, однако, поверхностный заряд на границе двух сред, необходимый для выполнения условия (3.28), натекает лишь через некоторое конечное время, обратно пропорциональное проводимости среды ( $\tau = \varepsilon/4\pi\sigma$ , как будет показано в следующих параграфах). Поэтому для переменного поля достаточно высокой частоты  $\omega \gg \sigma$  сохраняется обычное условие для диэлектрика, а условие (3.28) справедливо для низких частот и, в частности, для постоянного поля.

Условие непрерывности тангенциальных компонент электрического поля

$$\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau},$$

полученное в § 1.8 из потенциальности электростатического поля, остается неизменным и в присутствии тока. Интересно отметить, что, хотя в общем случае переменных электромагнитных полей циркуляция  $\oint E_e d\ell \neq 0$ , выписанное условие оказывается справедливым всегда.

### 3.7. Об аналогии и характерном отличии между полями в диэлектриках и проводниках

1. Полезно обратить внимание на то обстоятельство, что электростатические поля в диэлектрике и поля в проводниках при прохождении постоянного тока описываются одинаковыми и уравнениями, и граничными условиями, если только диэлектрики не содержат свободных зарядов. Для наглядности их здесь повторим, приписав к каждому утверждению для диэлектриков без свободных зарядов соответствующий аналог из проводников (в скобках)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0 & (\operatorname{div} \vec{j} &= 0), \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} & (\vec{j} &= \sigma \vec{E}), \\ D_{1n} &= D_{2n} & (j_{1n} &= j_{2n}) \end{aligned}$$

и подчеркнув, что соотношения

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$$

являются общими. Отсюда следует, что при наличии геометрического подобия границ и подобия в распределении свойств  $\varepsilon(\vec{r})$ ,  $\sigma(\vec{r})$  две физически разные задачи (для поля  $\vec{E}$  в диэлектрике и для тока  $\vec{j}$  в проводящей среде) при определенных дополнительных условиях могут иметь одинаковые математические формулировки.

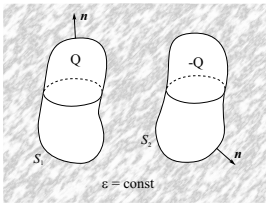


Рис. 3.5

Проиллюстрируем это утверждение на конкретном примере. Представим себе два объемных проводника, погруженных в бесконечный однородный непроводящий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (рис. 3.5). Пусть эти проводники, которые можно рассматривать как обкладки некоторого конденсатора, содержат свободные заряды  $Q$  и  $-Q$ . Тогда поле  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  в пространстве  $V$  вне границ проводников  $S_1, S_2$

определяется из задачи

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, & \varphi|_{S_1} &= \varphi_1 = \text{const}, & \varphi|_{S_2} &= \varphi_2 = \text{const}, \\ \varphi|_{\infty} &= 0, & \varepsilon \oint_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS &= -4\pi Q, & \varepsilon \oint_{S_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS &= 4\pi Q. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Здесь  $\varphi_1, \varphi_2$  — неопределенные константы (потенциалы проводников), определяемые из решения. Как результат решения отсюда, в частности, получается разность потенциалов  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  между проводниками, пропорциональная величине заряда  $Q$ , т. е. определяется величина емкости  $C = Q/U$  между проводниками.

Второй случай. Пусть эти два проводника при том же взаимном расположении помещены в однородную проводящую среду с проводимостью  $\sigma$ , обладающую еще и прежней диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Чтобы процесс протекания тока между проводниками  $S_1, S_2$  (теперь их можно рассматривать как электроды) сделать стационарным, к последним должен быть подключен постоянный источник ЭДС. При этом, конечно, интересующее нас распределение тока в проводящей среде зависит от распределения тока внутри проводников  $S_1, S_2$ . Иначе говоря, областью определения потенциала  $\varphi(\vec{r})$  теперь является все пространство, кроме  $V$  включающее еще и области внутри электродов. Следовательно, области определения функций в рассматриваемых двух задачах различаются и о совпадении их математических формулировок речь идти не может. Но если на рассматриваемую систему наложить *дополнительное ограничение*

$$\sigma_0 \gg \sigma$$

( $\sigma_0$  — проводимость материала электродов), то ситуация существенно упрощается. Теперь падением потенциала при прохождении тока по электродам можно пренебречь и считать потенциалы каждого из электродов постоянными  $\varphi_1 = const, \varphi_2 = const$ , причем за счет источника ЭДС разность  $U_1 = \varphi_1 - \varphi_2$  поддерживается постоянной.

Задача определения тока  $\vec{j} = -\sigma grad \varphi$  при этих условиях имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, \quad \varphi|_{S_1} = \varphi_1 = const, \quad \varphi|_{S_2} = \varphi_2 = const, \\ \varphi|_{\infty} &= 0, \quad \oint_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -\frac{4\pi Q_1}{\varepsilon}, \quad \oint_{S_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \frac{4\pi Q_1}{\varepsilon}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = U_1, \end{aligned}$$

почти совпадающий с (3.29); только здесь, в отличие от задачи (3.29), не только  $\varphi_1, \varphi_2$ , но и  $Q_1$  — свободная константа, которая определяется дополнительным условием  $\varphi_1 - \varphi_2 = U_1$ . Как видим, две физически различные задачи действительно имеют одинаковую математическую формулировку и, как следствие, равенство

$$\frac{Q}{U} = \frac{Q_1}{U_1} = C \quad (3.30)$$

для отношений заряда на обкладке (электроде) к разности потенциалов в двух рассматриваемых случаях.

Найдем сопротивление  $R$  при прохождении тока между электродами  $S_1, S_2$ . Суммарный ток между электродами

$$I = \oint_{S_1} j_n dS = -\sigma \oint_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} Q_1$$

с использованием последнего равенства (3.30) можно представить в виде  $I = (4\pi\sigma/\varepsilon)CU_1$ . Получается, что искомое сопротивление  $R = U_1/I$  и емкость между электродами  $C = Q_1/U_1$  связаны между собой соотношением

$$RC = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}, \quad (3.31)$$

не зависящим от геометрии проводников. Подчеркнем, что этот результат является следствием математической эквивалентности двух рассматриваемых задач.

2. Воспользовавшись случаем, рассмотрим нестационарный процесс протекания тока между электродами после отключения источника ЭДС. Теперь эти электроды можно рассматривать как обкладки соответствующего конденсатора и поставить вопрос: как из-за токов утечки заряд на обкладке будет изменяться со временем? Не имея пока возможности исследовать проблему в полном объеме, примем предположение, что разряд конденсатора происходит «медленно» и статические значения проводимости  $\sigma$  и диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  применимы для описания рассматриваемого нестационарного процесса (или, как обычно говорят, дисперсией диэлектрической проницаемости можно пренебречь). При этом предположении из цепочки равенств

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{S_1} j_n dS = - \frac{\sigma}{\varepsilon} \oint_{S_1} D_n dS = - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} Q$$

получается уравнение для искомой величины

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} Q = 0,$$

решение которого есть

$$Q = Q_0 e^{-(4\pi\sigma/\varepsilon)t}.$$

Таким образом, разряд происходит за характерное время

$$\tau = \varepsilon/4\pi\sigma \quad (3.32)$$

и при малых проводимостях действительно происходит медленно. В квазистационарном пределе для времени разряда конденсатора получился естественный результат  $\tau = RC$ , как это следует из соотношения (3.31).

3. Существует одно обстоятельство, делающее задачу определения тока в объемном проводнике намного проще по сравнению с аналогичной задачей электростатики диэлектриков. Связано оно с тем, что при изучении прохождения тока часто бывает вполне допустимо считать, что проводимость окружающего проводник пространства в точности равна нулю и ток в этом пространстве отсутствует. На основании граничного условия (3.27) отсюда следует, что нормальная компонента тока в проводнике, а следовательно, и нормальная компонента электрического поля на границе раздела  $E_n = 0$  независимо от полей в окружающем пространстве. Это означает, что задача исследования полей в пространстве расщепляется на две самостоятельные задачи. Первая из них касается полей в проводящей области пространства и решается независимо от полей в окружающем пространстве. Эта подзадача представляет самостоятельный интерес и часто ею ограничиваются, не рассматривая поля в окружающей непроводящей среде. Последние при необходимости можно на втором этапе определить, так как на границах с проводником распределение потенциала теперь уже известно из решения первой задачи.

В задаче электростатики диэлектриков подобной возможности расщепления общей задачи не существует, поскольку нет ситуаций, когда предположение  $\varepsilon = 0$  могло бы быть оправдано. Для иллюстрации сказанного выше служит следующая

**Задача 3.3.** Плоская граница раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  «испорчена» наличием полусферического выступа радиуса  $a$ , как показано на рис. 3.6. Рассматриваемая система находится в однородном внешнем электрическом поле  $\vec{E}_0$ , параллельном плоскости раздела. Требуется найти возмущение поля  $\vec{E}_0$ , вызванное возмущением границы раздела. В такой постановке поля в двух частях пространства между собой связаны через граничное условие непрерывности нормальной компоненты поля  $\vec{D}$  и простое решение задачи не имеет. (Для ее решения требуется умение обращаться с так называемыми сферическими гармониками.) Если задачу видоизменить, предположив, что выше границы раздела среда обладает некоторой проводимостью  $\sigma$  (или является проводящей средой), то общая задача разбивается на две само-

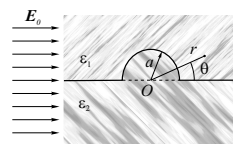


Рис. 3.6

стоятельные, последовательно решаемые задачи и первая из них, определяющая распределение поля  $\vec{E}$  и тока  $\vec{j}$  в проводнике, решается в элементарных функциях. Действительно, в сферической системе координат  $(r, \theta, \alpha)$ , связанной с центром выступа и направлением вектора  $\vec{E}_0$ , в которой плоской части границы раздела соответствуют координаты  $\alpha = 0, \alpha = \pi$ , задача определения потенциала в проводящей части пространства  $r > a, 0 < \theta < \pi, 0 < \alpha < \pi$ :

$$\Delta\varphi(r, \theta, \alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}|_{\alpha=0;\pi} = 0, \quad \varphi|_{\infty} = -E_0 r \cos\theta$$

не связана с потенциалом в соседней области и имеет решение

$$\varphi(r, \theta) = -E_0 \left( r + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^2} \right) \cos\theta,$$

не зависящее от угловой координаты  $\alpha$ . Оно в своей области определения совпадает с решением задачи об обтекании током в однородной проводящей среде сферического непроводящего включения.

### 3.8. Релаксация зарядов в среде

Частный случай этого процесса — изменение зарядов на поверхности обкладок конденсатора, был рассмотрен в предыдущем параграфе. Оказывается, что процесс медленного изменения плотности объемных зарядов  $\rho(\vec{r}, t)$  в однородной среде, обладающей, кроме диэлектрической проницаемости, еще и некоторой проводимостью, также легко решается в общем виде. Для этого из последних двух уравнений системы

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad \varepsilon\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$$

значение  $\operatorname{div}\vec{j}$  выразим через плотность зарядов и подставим в первое; в результате для  $\rho(\vec{r}, t)$  получим уравнение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r})e^{-t/\tau}, \quad \tau = \varepsilon/4\pi\sigma,$$



## 3.9. Ток в газе и жидкости. Подвижности ионов и электронов 121

где произвольная функция  $\rho_0(\vec{r}) = \rho(\vec{r}, 0)$  имеет смысл начального распределения плотности зарядов, Замечаем, что время релаксации  $\tau$ , обратно пропорциональное проводимости среды, совпадает с результатом (3.32), полученным для разряда конденсатора, и что характер распределения плотности зарядов по пространству не зависит от времени.

Интересно посмотреть на характерные значения  $\tau$ . Для лучших изоляторов это время исчисляется сутками. Для обыкновенного стекла при нормальной температуре  $\tau \sim 10$  с, для воздуха при обычных условиях  $\tau \sim 15$  мин, а вот для металлов это время чрезвычайно мало и для них условие «медленности» процесса релаксации не выполняется. Например, для меди  $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17}$  1/с,  $\tau \approx (1/2\pi)10^{-18}$  с, т. е.  $\tau \ll \tau_s$  ( $\tau_s \approx 4 \cdot 10^{-14}$  с) и действительно полученный результат для времени релаксации к металлам не применим, так как условие (3.14) справедливости закона Ома здесь не выполняется.

### 3.9. Ток в газе и жидкости. Подвижности ионов и электронов. Несамостоятельный разряд в газе

Прохождение тока через газовую среду представляет собой сложный физический процесс, содержание которого составляет самостоятельный раздел физики, часто называемый *физикой газового разряда*. В то время как в металлах носители тока (свободные электроны) существуют независимо от электрического поля, вызывающего ток, в газовой среде возникновение носителей тока (электронов и ионов) в общем случае само обусловлено приложенным электрическим полем и зависит от многочисленных атомных столкновений. С этим связана сложность процесса прохождения тока через газовую среду, вследствие чего изложение вопросов, относящихся к рассматриваемому процессу, в данном курсе электродинамики по необходимости схематично и охватывает лишь отдельные стороны начальной стадии процесса разряда при малых значениях приложенного электрического поля.

Известно, что при нормальных условиях любой объем газа содержит некоторое число заряженных частиц. Так, например, в 1 см<sup>3</sup> воздуха на уровне моря содержится в среднем около 10<sup>3</sup> пар ионов, создаваемых под действием космических лучей, ультрафиолетового излучения Солнца и естественной радиоактивности земной коры. Скорость ионизации,

обеспечивающая эту концентрацию заряженных частиц, находится в пределах  $(2-10) \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$ .

Обозначим скорость ионизации, т. е. скорость образования пар заряженных частиц в единице объема газа, через  $\dot{N}_0$ ; возникающие при этом концентрации положительных и отрицательных ионов равны

$$N^+ = N^-. \quad (3.33)$$

Если образовавшиеся ионы исчезают исключительно вследствие рекомбинации, то скорость, с которой происходит нейтрализация в объеме, будет пропорциональна произведению их концентрации, т. е. в соответствии с равенством (3.33) пропорционально  $N^2$ . Следовательно, скорость изменения концентрации заряженных частиц определяется соотношением

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N}_0 - \chi N^2,$$

где  $\chi$  — коэффициент рекомбинации. В отсутствие электрического поля имеет место равновесие, при котором скорость генерации заряженных частиц в точности равна скорости их рекомбинации. Отсюда равновесная концентрация определяется как

$$N_p = \sqrt{\dot{N}_0/\chi}. \quad (3.34)$$

Из приведенных выше данных для воздуха при нормальных условиях:  $N_p = 10^3 \text{ см}^{-3}$ ,  $\dot{N}_0 = (2-10) \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$  оценим время жизни иона  $\Delta t$ , принимая, что скорость рекомбинации равна  $N_p/\Delta t$  и уравнивается скоростью образования ионов  $\dot{N}_0$ , т. е.  $N_p/\Delta t = \dot{N}_0$ . Отсюда  $\Delta t = N_p/\dot{N}_0 \sim 100 \text{ с}$ . За такое большое время все электроны, возникшие в результате ионизации, успевают образовать отрицательные ионы, «прилипнув» к молекулам кислорода. Отсюда видно, что в обычных условиях проводимость газа в слабых полях является *ионной*. Реальная картина еще сложнее: проводимость определяется в основном *ионными кластерами*, содержащими десятки атомов газа. Вследствие этого при концентрации ионов  $N^+, N^- \sim 10^3$  проводимость воздуха при нормальных условиях составляет  $\sim 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ .

В жидкости, в отличие от газа, концентрация ионов определяется не внешней ионизацией, а диссоциацией молекул благодаря их взаимодействию между собой (электролит). Диссоциация особенно облегчается, если жидкость представляет собой раствор, причем коэффициент диссоциации сильно зависит от температуры. Электролиты обладают

## 3.9. Ток в газе и жидкости. Подвижности ионов и электронов 123

достаточно большой проводимостью порядка  $10^{10} \text{ с}^{-1}$ . Так, например, морская вода Атлантического океана имеет  $\sigma \approx 4 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ , в северных морях проводимость меньше —  $\sigma \approx (1-2)10^{10} \text{ с}^{-1}$ , а вот для десятипроцентного раствора соляной кислоты значение  $\sigma$  достигает  $10^{11} \text{ с}^{-1}$ . Но все равно эти значения на семь порядков меньше проводимости меди, что требует объяснения, если иметь в виду, что концентрация ионов в электролите не столь сильно отличается от концентрации электронов в металле.

Такая большая разница между проводимостью металлов и жидкостей объясняется различиями в величине подвижности электронов и ионов. Под подвижностью понимается коэффициент пропорциональности между скоростью направленного движения носителя тока и напряженностью электрического поля

$$u = bE, \quad (3.35)$$

где  $b$  — подвижность (напомним, что только в «слабых» полях, удовлетворяющих условию (3.16),  $u \sim E$ , т. е.  $b$  можно рассматривать как величину постоянную). Для тока в металлах имеем

$$j = \sigma E = Neu = NebE;$$

следовательно, через подвижность свободных электронов проводимость в металле выражается формулой

$$\sigma = Neb.$$

Ток в газах и электролитах создается положительными и отрицательными ионами:

$$j = N^+eu_+ + N^-eu_- = N^+e(b_+ + b_-)E;$$

отсюда  $\sigma = N^+e(b_+ + b_-)$ , где  $b_+, b_-$  — подвижности соответственно положительных и отрицательных ионов и принято условие  $N^+ = N^-$ .

Численные значения для подвижностей в практических единицах  $\text{см}^2/(\text{с} \cdot \text{В})$  для электронов проводимости в металлах простираются в пределах от 10 до 100 единиц, для газовых ионов  $b_+, b_-$  — от 0,5 до 5,0, а для ионов в электролитах они очень малы. Вот типичные значения для конкретных ионов:  $H^+(b_+ = 0,0033)$ ,  $OH^-(b_- = 0,0018)$ ,  $K^+(b_+ = 0,00067)$ ,  $Cl^-(b_- = 0,00068)$ . Чрезвычайная малость подвижности ионов в жидкости объясняется большой вязкостью, мешающей продвижению иона через жидкость. При этом существенное значение

имеет то обстоятельство, что ионы вследствие электростатического взаимодействия притягивают к себе молекулы растворителя и в результате оказываются окруженными оболочкой из молекул. Именно это обстоятельство приводит к тому, что размер движущегося иона как бы возрастает, а его подвижность вследствие этого уменьшается.

Вернемся к случаю газов. Представим себе два параллельных плоских электрода, протяженность которых велика по сравнению с шириной газового промежутка между ними. Под действием внешних причин в газе имеются заряженные частицы, равновесная концентрация которых определена соотношением (3.34). Если на электроды подать небольшую разность потенциалов, создающую электрическое поле напряженностью  $E \leq 1$  В/см, то возникнет ток, образуемый уже существующими положительными и отрицательными ионами. Достаточно слабый ток очень мало нарушает равновесие и пропорционален скорости движения ионов к электродам:

$$j = e(N^+u_+ + N^-u_-) = eN_p(b_+ + b_-)E. \quad (3.36)$$

При рассматриваемых условиях подвижности  $b_+, b_-$  приблизительно постоянны, т. е. плотность тока  $j$  пропорциональна  $E$ , газ является омическим проводником, проводимость которого зависит от скорости генерации ионов, коэффициента рекомбинации и подвижностей.

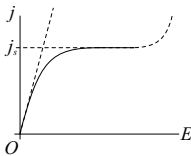


Рис. 3.7

При возрастании  $E$  и  $j$  равновесие нарушается ионами, достигающими электродов и нейтрализующимися на них. Это увеличивает эффективный коэффициент рекомбинации и уменьшает полное число заряженных частиц. В результате скорость возрастания тока с увеличением напряжения падает. Ясно, что при постоянной скорости генерации ионов и электронов будет достигнуто предельное

состояние, в котором напряженность  $E$  настолько велика, что все ионы и электроны успевают достичь электродов до рекомбинации. Тогда полный заряд, попадающий на электроды, равен полному генерируемому заряду и

$$j_s = e\dot{N}_0d, \quad (3.37)$$

где  $d$  — расстояние между электродами; здесь принято, что все генерируемые частицы однозарядны. Плотность тока теперь не зависит ни от напряженности электрического поля  $E$ , ни от подвижностей. Ее называют плотностью *тока насыщения*. Обычно плотность тока при этих

условиях очень мала — менее  $10^{-9}$  А/см<sup>2</sup>, даже если внешняя радиация создается сильным искусственным источником, а разность потенциалов на электродах достигает 10–20 В. Разряд совершенно темный, так как скорость возбуждения сравнима с низкой скоростью ионизации и излучение света слишком слабо, чтобы его можно было заметить невооруженным глазом. Разряд *несамостоятелен*, так как зависит от внешнего излучения; он является основной причиной утечки зарядов с заряженных тел и начальной стадией многих других форм разряда.

Между стадией, на которой  $j \sim E$ , и стадией насыщения зависимость  $j$  от  $E$  можно определить, рассматривая совместное влияние рекомбинации и тока к электродам на скорость исчезновения зарядов. Как ни странно, удовлетворительного аналитического выражения для этой зависимости нет. Имеющееся в книгах по газовому разряду соотношение построено с использованием допущений, которые сложно обосновать. Поэтому примем, что зависимость тока от напряженности поля в несамостоятельном разряде, схематически изображенная на рис. 3.7 сплошной линией, получается из результатов эксперимента.

### 3.10. Несамостоятельный разряд между двумя параллельными электродами<sup>1</sup>

Проведем более детальное исследование несамостоятельного разряда между двумя параллельными электродами. Необходимость в подобном исследовании выявляется из анализа простейшего результата (3.36). Дело в том, что в предположениях

$$N^+ = N^- = N, \quad E = \text{const}, \quad (3.38)$$

неявно принятых при получении соотношения (3.36), количества положительных и отрицательных зарядов  $N_{eb+}E$ ,  $N_{eb-}E$ , выносимых из газового промежутка движущимися ионами, между собой не равны. При одинаковости чисел рождающихся в газовом промежутке положительных и отрицательных зарядов  $\dot{N}_0 d$  отсюда следует, что суммарный заряд в газовом промежутке не остается постоянным. Это значит, что допущения (3.38) противоречат условию стационарности процесса и для устранения противоречия необходим анализ, свободный от этих предположений.

---

<sup>1</sup>Этот параграф при первом чтении можно опустить.

Итак, рассматривается газовый промежуток между параллельными катодом и анодом (рис. 3.8), на которые подано напряжение  $U$ . Пусть под действием внешнего ионизатора в  $1 \text{ см}^3$  газа каждую секунду рождается  $\dot{N}_0$  пар заряженных частиц. Давление газа достаточно и средняя

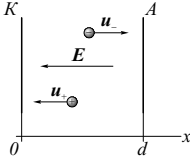


Рис. 3.8

длина свободного пробега ионов намного меньше расстояния  $d$  между электродами. При этом направленное движение ионов под действием электрического поля характеризуется подвижностями  $b_+, b_-$ , которые между собой не равны (обычно  $b_+ < b_-$ ), но они постоянны, не зависят от величины поля.

При заданной геометрии поле  $\vec{E}$ , плотности тока  $\vec{j}_+, \vec{j}_-$  положительных и отрицательных ионов, а также полный ток  $\vec{j}$  направлены против оси  $x$ . Их величины далее обозначены как  $E(x)$ ,  $j_+(x)$ ,  $j_-(x)$ ,  $j$ , причем с учетом соотношения (3.35)

$$j_+(x) = eN^+(x)u_+(x) = eb_+N^+(x)E(x); \quad (3.39)$$

$$j_-(x) = eN^-(x)u_-(x) = eb_-N^-(x)E(x); \quad (3.40)$$

$$j = j_+ + j_-. \quad (3.41)$$

В рассматриваемом случае несамостоятельного тока, обусловленного внешним объемным ионизатором, утверждение

$$j = \text{const} \quad (3.42)$$

требует доказательства. Для этого выпишем законы сохранения для положительных и отрицательных ионов:

$$\frac{\partial N^+}{\partial t} = \dot{N}_0 - \chi N^+ N^- + b_+ \frac{\partial}{\partial x}(N^+ E); \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial N^-}{\partial t} = \dot{N}_0 - \chi N^+ N^- - b_- \frac{\partial}{\partial x}(N^- E) \quad (3.44)$$

(здесь знаки перед конвективными членами различны из-за различия направлений движения соответствующих ионов). В стационарном случае имеем  $\partial/\partial t \equiv 0$ . Вычитая при этом уравнение (3.44) из (3.43), получаем результат, эквивалентный утверждению (3.42).

## 3.10. Несамостоятельный разряд

127

Дополнив уравнения (3.39) (3.40) (3.43) (3.44) основным уравнением электростатики, имеющим в данном случае вид

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi e(N^+ - N^-), \quad (3.45)$$

получим замкнутую систему уравнений для неизвестных  $N^+(x)$ ,  $N^-(x)$ ,  $j_+(x)$ ,  $j_-(x)$ ,  $E(x)$ .

Из выражений (3.39), (3.40) функции  $N^+(x)$ ,  $N^-(x)$  можно выразить через  $j_+$ ,  $j_-$ ,  $E$  или, после замены (с помощью выражения (3.41))  $j_- = j - j_+$ , через  $j_+$ ,  $E$  и  $j$ . Подставив полученные выражения для  $N^+$ ,  $N^-$  в уравнение (3.43), получим

$$\frac{dj_+}{dx} - \frac{\chi}{eb_+b_-} \frac{j_+(j - j_+)}{E^2} = -e\dot{N}_0, \quad (3.46)$$

а подстановка тех же  $N^+$ ,  $N^-$  в уравнение (3.45) дает

$$\frac{dE^2}{dx} = -8\pi \left[ j_+ \left( \frac{1}{b_+} + \frac{1}{b_-} \right) - \frac{j}{b_-} \right]$$

или, будучи разрешено относительно  $j_+$ , выражение

$$j_+ = \frac{b_+b_-}{8\pi(b_+ + b_-)} \left( \frac{8\pi j}{b_-} - \frac{dE^2}{dx} \right). \quad (3.47)$$

Подставляя последнее соотношение в (3.46), получаем нелинейное уравнение 2-го порядка

$$F \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{\chi}{8\pi e(b_+ + b_-)} \left( \frac{8\pi j}{b_-} - \frac{dF}{dx} \right) \left( \frac{8\pi j}{b_+} + \frac{dF}{dx} \right) - 8\pi e\dot{N}_0 \frac{b_+ + b_-}{b_+b_-} F = 0 \quad (3.48)$$

для квадрата напряженности электрического поля

$$F(x) = E^2(x). \quad (3.49)$$

Таким образом, задача свелась к определению функции (3.49) из уравнения (3.48), куда в качестве свободного параметра входит неизвестная плотность тока  $j$ .

Обратимся к граничным условиям. Первое из них

$$\int_0^d \sqrt{F(x)} dx = U \quad (3.50)$$

обеспечивает заданное напряжение между электродами. Условия

$$j = j_+(0), \quad j = j_-(d), \quad (3.51)$$

последнее из которых на основании равенства (3.41) можно заменить условием  $j_+(d) = 0$ , отвечают за неизменность во времени суммарного количества зарядов в газовом промежутке. Переходя, согласно выражениям (3.47), (3.49), к переменной  $F$ , условия (3.51) можно представить в виде

$$\frac{dF}{dx}(0) = -\frac{8\pi j}{b_+}, \quad \frac{dF}{dx}(d) = \frac{8\pi j}{b_-}. \quad (3.52)$$

Итак, для функции  $F(x)$  и свободного параметра  $j$  имеем уравнение 2-го порядка (3.48) и три граничных условия (3.50), (3.52); математическая формулировка задачи завершена.

Для исследования задачи перейдем к безразмерным переменным, используя в качестве масштабов для  $F$ ,  $j$ ,  $x$  соответственно  $E_0^2$ ,  $e\sqrt{\frac{\dot{N}_0}{\chi}}(b_+ + b_-)E_0$  и  $d$ , где  $E_0 = U/d$ . Для безразмерной координаты оставим прежнее обозначение  $x$ , а безразмерные  $F$ ,  $j$  снабдим волнистой чертой, так что

$$F = E_0^2 \tilde{F}, \quad j = \left( e\sqrt{\frac{\dot{N}_0}{\chi}}(b_+ + b_-)E_0 \right) \tilde{j}. \quad (3.53)$$

В безразмерных переменных задача (3.48), (3.50), (3.52) приобретает вид

$$\tilde{F} \frac{d^2 \tilde{F}}{dx^2} - p \left[ \left( \frac{d\tilde{F}}{dx} \right)^2 + \varkappa \tilde{j}_+ \frac{b_- - b_+}{\sqrt{b_+ b_-}} \frac{d\tilde{F}}{dx} + \varkappa^2 \tilde{F} - \varkappa^2 \tilde{j}_+^2 \right] = 0; \quad (3.48')$$

$$\int_0^1 \sqrt{\tilde{F}} dx = 1; \quad (3.50')$$

$$\frac{d\tilde{F}}{dx}(0) = -\varkappa \tilde{j}_+ \sqrt{\frac{b_-}{b_+}}, \quad \frac{d\tilde{F}}{dx}(1) = \varkappa \tilde{j}_+ \sqrt{\frac{b_+}{b_-}}, \quad (3.51')$$

где

$$p = \frac{\chi}{8\pi e(b_+ + b_-)}, \quad \varkappa = 8\pi e \sqrt{\frac{\dot{N}_0}{\chi}} \frac{d}{E_0} \frac{b_- + b_+}{\sqrt{b_+ b_-}}$$

— безразмерные параметры, характеризующие условия задачи, причем  $p$  определяется физическими свойствами газа, а  $\varkappa$  зависит от внешних



## 3.10. Несамостоятельный разряд

129

условий проведения опыта, характеризующихся межэлектродным расстоянием  $d$ , масштабом поля  $E_0$  и скоростью образования ионов  $\dot{N}_0$ . По численному значению  $p$  имеет порядок единицы. Так, например, для  $N_p = 10^3 \frac{1}{\text{см}^3}$ ,  $\dot{N}_0 = 2 \frac{1}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}$ , приведенных в § 3.9, имеем  $\chi = 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{см}^3}{\text{с}}$ ; приняв для подвижностей значения  $b = 1 \frac{\text{см}^2}{\text{сВ}} = 300$  абс. ед., получаем

$$p = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{8\pi \cdot 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 600} = \frac{1}{4}.$$

Параметр  $\varkappa$  может иметь значения от 0 до  $\infty$ .

Интегрирование уравнения (3.48') для произвольных значений параметров  $p$ ,  $\varkappa$  представляет большие трудности. Здесь ограничимся рассмотрением предельных случаев.

*Случай  $\varkappa \ll 1$*  сильных полей, когда приложенное электрическое поле велико по сравнению с характерным полем

$$E_* = 8\pi e \sqrt{\frac{\dot{N}_0}{\chi}} d.$$

Наличие в задаче малого параметра позволяет искомые величины представлять в виде разложений по степеням этого параметра. В данном случае решения целесообразно строить в виде разложений

$$\varkappa \tilde{j} = I_0 + I_1 \varkappa^2 + I_2 (\varkappa^2)^2 + \dots,$$

$$\tilde{F}(x) = \tilde{F}_0(x) + \tilde{F}_1(x) \varkappa^2 + \tilde{F}_2(x) (\varkappa^2)^2 + \dots$$

по степеням  $\varkappa^2$  для функции  $\tilde{F}(x)$  и комплекса  $\varkappa \tilde{j}$ , заметив, во-первых, что безразмерная плотность тока  $\tilde{j}$  входит в задачу только в составе  $\varkappa \tilde{j}$  и, во-вторых, что после такой замены в уравнении (3.48') остается параметр  $\varkappa$  только в квадрате.

Не останавливаясь на стандартных шагах по определению коэффициентов разложения, приводим результат

$$\tilde{j} = p \varkappa \frac{\sqrt{b_+ b_-}}{b_+ + b_-} \left[ 1 - \frac{1}{6} p^2 \varkappa^2 + O(\varkappa^4) \right],$$

$$\tilde{F}(x) = 1 + p/2 [(x - x_*)^2 - C_0] \varkappa^2 + O(\varkappa^4),$$

где

$$x_* = \frac{b_-}{b_+ + b_-} > \frac{1}{2}, \quad C_0 = x_*(x_* - 1) + \frac{1}{3}.$$

Отсюда для распределения электрического поля в межэлектродном пространстве  $E(x)$  и для плотности тока  $j$  получаем

$$E(x) = \sqrt{F(x)} = E_0 \sqrt{\tilde{F}(x)} = E_0 \left\{ 1 + (p\kappa^2/4) [(x - x_*)^2 - C_0] + O(\kappa^4) \right\},$$

$$j = e \sqrt{\frac{\dot{N}_0}{\chi}} (b_+ + b_-) E_0 \tilde{j} = e \dot{N}_0 d \left[ 1 - \frac{1}{6} p^2 \kappa^2 + O(\kappa^4) \right],$$

т. е. при  $E_0 \gg E_*$  плотность тока отличается от тока насыщения  $j_s$  (3.37) и электрическое поле отличается от однородного поля  $E_0$  только слагаемыми, пропорциональными  $(E_*/E_0)^2 \ll 1$ . При этом, как следует из уравнения (3.45), имеет место слабое отклонение от квазинейтральности: со стороны катода на интервале  $0 < x < x_*$  концентрация положительных ионов превалирует над отрицательными, а при  $x > x_*$  имеет место обратная ситуация.

*Второй предельный случай*  $\kappa \gg 1$  полей  $E_0 \ll E_*$ . При этом уравнение (3.48') можно упростить, оставляя в квадратной скобке лишь слагаемые, пропорциональные  $\kappa^2$ :

$$\tilde{F} \frac{d^2 \tilde{F}}{dx^2} - p\kappa^2 (\tilde{F} - \tilde{j}^2) = 0. \quad (3.54)$$

Первый интеграл этого уравнения

$$\left( \frac{d\tilde{F}}{dx} \right)^2 = 2p\kappa^2 (\tilde{F} - \tilde{j}^2 \ln C\tilde{F}) \quad (3.55)$$

получается стандартным приемом интегрирования уравнения, не содержащего независимой переменной. Второй раз проинтегрировать полученное уравнение не удастся, поэтому константа интегрирования  $C$  остается неопределенной.

Вспомнив о возможностях, предоставляемых малым параметром, можно переписать уравнение (3.54) в виде

$$\frac{1}{p\kappa^2} \tilde{F} \frac{d^2 \tilde{F}}{dx^2} - (\tilde{F} - \tilde{j}^2) = 0,$$

содержащем малый параметр, и постараться построить решение с помощью разложения по малому параметру. Но этот прием здесь не проходит, так как решение нулевого приближения

$$\tilde{F}_0 = \tilde{j}^2 = \text{const} \quad (3.56)$$

## 3.10. Несамостоятельный разряд

131

граничным условиям (3.51') удовлетворить не может. Это общее свойство так называемых уравнений с малым параметром при старшей производной. Порядок этих уравнений понижается по крайней мере на единицу при обращении малого параметра в нуль и вследствие этого их решения всем граничным условия исходного уравнения удовлетворить не могут. В математике разработаны определенные приемы построения асимптотических разложений для подобных уравнений. В случае уравнения (3.54) важно обратить внимание, что вблизи границ, где заданы условия (3.51'), решение должно быть отлично от нулевого приближения (3.56). При этом благодаря большим значениям второй производной, возникающим из-за  $\kappa \gg 1$ , решение быстро выходит на асимптотическое значение  $\tilde{F} = \tilde{F}_0$  нулевого приближения. Тогда, выбрав определенный знак для производной  $d\tilde{F}/dx$ , согласующийся с условиями (3.51'), первый интеграл (3.55) вблизи границы  $x$  запишем в виде

$$\frac{d\tilde{F}}{dx} = -\sqrt{2p} \kappa \sqrt{\tilde{F} - \tilde{F}_0 \ln C \tilde{F}}.$$

Значение константы  $C$  определим из условия  $d\tilde{F}/dx \rightarrow 0$  при  $\tilde{F} \rightarrow \tilde{F}_0$ , откуда  $\ln C \tilde{F}_0 = 1$ , и в результате получим

$$\frac{d\tilde{F}}{dx} = -\sqrt{2p\tilde{F}_0} \kappa \sqrt{\frac{\tilde{F}}{\tilde{F}_0} - 1 - \ln \frac{\tilde{F}}{\tilde{F}_0}}.$$

Из последнего выражения при учете граничного условия

$$\frac{d\tilde{F}}{dx}(0) = -\kappa \sqrt{\frac{b_-}{b_+}} \sqrt{\tilde{F}_0}$$

получается соотношение

$$\frac{\tilde{F}(0)}{\tilde{F}_0} - \ln \frac{\tilde{F}(0)}{\tilde{F}_0} = 1 + \frac{1}{2p} \frac{b_-}{b_+},$$

определяющее значение функции  $\tilde{F}(x)$  в точке  $x = 0$ . Аналогично для правого электрода (анода) имеем

$$\frac{\tilde{F}(1)}{\tilde{F}_0} - \ln \frac{\tilde{F}(1)}{\tilde{F}_0} = 1 + \frac{1}{2p} \frac{b_+}{b_-}.$$

Так как  $p \sim 1$ ,  $b_- > b_+$ , отсюда следует, что

$$\tilde{F}(0) \gtrsim e\tilde{F}_0, \quad \tilde{F}_0 < \tilde{F}(1) < \tilde{F}(0).$$

До сих пор константа  $\tilde{F}_0$  еще не определена. Для ее определения (из условия (3.50')) нужна функция  $\tilde{F}(x)$ , которая здесь точно не исследована. Качественное поведение этой функции из проведенного анализа легко представить в виде ее схематического изображения (рис. 3.9).

«Пограничные слои», в которых функция от значений  $\tilde{F}(0)$ ,  $\tilde{F}(1)$  переходит на  $\tilde{F}_0$ , имеют толщину порядка  $1/\varkappa$ , следовательно,

$$\int_0^1 \sqrt{\tilde{F}(x)} dx = \tilde{F}_0 [1 + O(1/\varkappa)],$$

и из условия (3.50') имеем

$$\tilde{F}_0 = 1 - O(1/\varkappa), \quad \tilde{j} = \sqrt{\tilde{F}_0} = 1 - O(1/\varkappa).$$

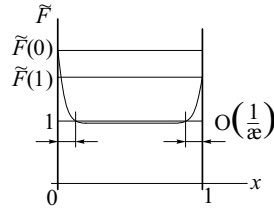


Рис. 3.9

Таким образом, в слабых полях  $E_0 \ll E_*$  плотность тока

$$j = eN_p(b_+ + b_-)E_0[1 - O(E_0/E_*)]$$

подчиняется закону Ома, но при этом распределение электрического поля и концентрации ионов в приэлектродных слоях весьма существенно отличаются от однородных. Как видно из уравнения (3.45), в этих слоях скапливаются положительные и отрицательные ионы соответственно у катода и анода.

### 3.11. Ток в вакууме. Закон $3/2$

1. Рассмотрим другой предельный случай газового разряда между параллельными электродами, схематически изображенными на рис. 3.8, когда газ не ионизирован и ток в газовом промежутке может возникнуть лишь при наличии эмиссии заряженных частиц с электродов. В зависимости от того, каким способом электронам в металле сообщается дополнительная энергия, возникают разные типы электронной эмиссии: *термоэлектронная* эмиссия, *фотоэмиссия* или фотоэлектрический ток, *вторичная электронная* эмиссия за счет бомбардировки другими частицами. Для определенности здесь рассматривается случай термоэлектронной эмиссии, когда нагретый катод испускает определенное количество электронов с единицы поверхности за единицу времени, причем при увеличении температуры катода термоэмиссия увеличивается.

## 3.11. Ток в вакууме. Закон 3.2

133

Будем считать, что газ между электродами разрежен настолько, что средняя длина свободного пробега электронов существенно превышает толщину газового промежутка, т. е.  $\ell_s \gg d$ . Тогда наличие газа не сказывается на величине тока и такой ток называют *током в вакууме* или *электронным пучком*.

2. Представим качественные соображения о зависимости плотности тока от приложенного напряжения. Пусть температура катода  $T_1$  отлична от нуля и в катоде имеются электроны, способные преодолеть потенциальный барьер величиной в работу выхода и покинуть поверхность катода. Если приложенное напряжение равно нулю, то электроны, покидающие поверхность, образуют равновесное электронное облако вблизи поверхности катода и ток через *вакуумный диод* (так называется рассматриваемая система) практически не идет. С появлением напряжения возникает ток, сначала он растет при увеличении напряжения  $U$  и при его дальнейшем повышении достигает некоторого постоянного значения  $j_s$ , называемого током насыщения (рис. 3.10). Величина  $j_s$  зависит от эмиссионной способности катода — при достаточно высоких напряжениях все покидающие поверхность катода электроны переносятся на анод и они определяют величину тока насыщения. Если увеличить эмиссионную способность катода, повысив температуру до  $T_2$ , полученная зависимость  $j(U)$  будет аналогична предыдущей, только ток насыщения теперь будет больше.

Возникает естественный вопрос: если при некотором фиксированном напряжении  $U_0$  начнем неограниченно увеличивать эмиссионную способность катода (повышением температуры или другими средствами), будет ли при этом плотность тока также увеличиваться неограниченно? Ответ будет отрицательный: при любой эмиссионной способности плотность тока в вакуумном диоде имеет *предельное значение*  $j_*(U)$ , зависящее от приложенного напряжения. Найти эту зависимость и будет целью теоретического рассмотрения. Получающийся при этом «закон трех вторых» как раз и определяет значение  $j_*$ , которое на рис. 3.10 отмечено точкой в кружочке.

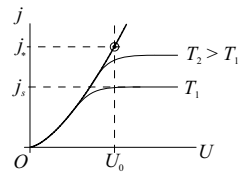


Рис. 3.10

3. Перед тем как приступить к выводу названного закона, попробуем разобраться на качественном уровне, почему при увеличении эмиссионной способности катода плотность тока при фиксированном  $U_0$  достигает предельного значения и дальше расти не может. Для этого обратим внимание на распределение потенциала в вакуумном зазоре (рис. 3.11).

При холодном катоде (т. е. при  $j = 0$ ) электрическое поле в зазоре однородно, а распределение потенциала линейно. Появление тока связано с возникновением в зазоре отрицательных объемных зарядов и, как следствие, с видоизменением электрического поля: вблизи катода поле уменьшается, а у анода увеличивается, или, как обычно говорят, возникает «провисание потенциала». На рис. 3.11 соответствующая кривая отмечена символом  $j_1$ . Важно обратить внимание, что электрическое поле на катоде еще не равно нулю и все выходящие из катода электроны испытывают силу, направленную в сторону анода. При дальнейшем

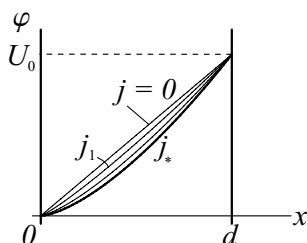


Рис. 3.11

повышении эмиссионной способности катода и увеличении тока объемная плотность электронов также увеличивается, а провисание потенциала усиливается (*пунктирная кривая* на рис. 3.11), и при дальнейшем возрастании тока наступает момент, когда провисание потенциала достигает такой степени, что поле на катоде становится равным нулю (кривая изображена жирной линией и снабжена символом  $j_*$ ). Теперь как бы дальше ни увеличили эмиссию электронов из катода, к

повышению плотности тока это не приведет, так как «новые» электроны находятся в нулевом электрическом поле и не уходят с катода.

Вывод из приведенного качественного рассмотрения такой: при прохождении предельного тока электрическое поле на поверхности катода равно нулю, т. е.

$$E(0) = 0 \quad \text{при} \quad j = j_*(U). \quad (3.57)$$

Это — определяющее условие для получения искомой зависимости  $j(U)$  тока от напряжения. Необходимо обратить внимание, что, хотя с этого места символ  $j$  будет фигурировать без нижнего индекса, все последующие результаты, опирающиеся на условие (3.57), относятся к предельному току. В частности, закон трех вторых определяет именно предельный ток в зависимости от приложенного напряжения.

4. Приступим к вычислениям. Плотность тока в межэлектродном пространстве имеет лишь  $x$ -компоненту, причем, как следует из уравнения непрерывности (3.9),  $dj_x/dx = 0$  и, следовательно,

$$j_x = -j = \text{const},$$

т. е.  $j$  не зависит от  $x$ . Объемная плотность зарядов  $\rho(x) = -eN(x)$  опре-

## 3.11. Ток в вакууме. Закон 3.2

135

деляется концентрацией электронов  $N(x)$ , а распределение потенциала в промежутке  $0 < x < d$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho(x) = 4\pi eN(x). \quad (3.58)$$

Вспомнив, что  $j = eN(x)u(x)$  и воспользовавшись законом сохранения энергии для электронов, покидающих катод с нулевой кинетической энергией

$$(m/2)u^2(x) - e\varphi(x) = \text{const} = 0,$$

правую часть уравнения (3.58) выразим через  $\varphi(x)$ :

$$4\pi eN(x) = \frac{4\pi j}{u(x)} = \frac{4\pi j}{\sqrt{2e/m}} \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}.$$

Следовательно, распределение потенциала удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{A}{\sqrt{\varphi}}, \quad A = 4\pi j \sqrt{\frac{m}{2e}} \quad (3.59)$$

и граничным условиям

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=d} = U, \quad \frac{d\varphi}{dx}|_{x=0} = 0. \quad (3.60)$$

Первые два из этих условий задают потенциалы соответственно катода и анода, а последнее есть повторение условия (3.57). Имеющееся здесь кажущееся противоречие — три граничных условия для уравнения второго порядка (3.59), разрешается тем, что константа  $A$ , входящая в уравнение, является неопределенной, поскольку связана с искомой величиной  $j$ .

Для получения первого интеграла умножим левую и правую части уравнения (3.58) на  $d\varphi/dx$  и результат запишем в виде

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 4A \frac{d}{dx} \sqrt{\varphi},$$

что после интегрирования дает

$$\left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 4A \sqrt{\varphi(x)} + C.$$

Значение постоянной интегрирования  $C = 0$  определяется из крайних условий (3.60). Проинтегрировав полученное соотношение

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\sqrt{A}\varphi^{1/4}$$

еще один раз и используя условие  $\varphi(0) = 0$ , получим

$$\frac{4}{3}\varphi^{4/3} = 2\sqrt{A}x,$$

откуда с использованием среднего условия (3.60) определяем значение константы

$$A = \frac{4}{9} \frac{U^{3/2}}{d^2}.$$

Следовательно, окончательный результат для распределения потенциала в вакуумном зазоре и для плотности тока такой:

$$\varphi(x) = U \left( \frac{x}{d} \right)^{4/3}, \quad j = \varkappa \frac{U^{3/2}}{d^2}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{1}{9\pi}.$$

Полученная зависимость плотности тока, пропорциональной приложенному напряжению в степени  $3/2$ , и называется законом трех вторых.

В заключение необходимо заметить, что экспериментальные результаты в малой окрестности точки  $j = 0$ ,  $U = 0$  несколько отличаются от теоретических: экспериментальная кривая не точно проходит через точку  $(0,0)$ . Это слабое различие обусловлено тем, что покидающие катод электроны могут обладать небольшой кинетической энергией, которая в законе сохранения энергии здесь не учитывалась.



## Глава 4

# МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### 4.1. Взаимодействие постоянных токов. Магнитное поле. Сила Лоренца

Известно что между проводниками, по которым протекают электрические токи, возникают силы взаимодействия. Точно так же, как в электростатике, где введение электрического поля позволяет удобным образом описать взаимодействие статических зарядов, здесь полезно ввести понятие *магнитного поля*. При этом задача взаимодействия токов разбивается на две более простые задачи: а) определение магнитного поля произвольного тока и б) определение сил, действующих в заданном магнитном поле на помещенный в него ток. Заметим, что в электро- и магнитостатике введение полей является некоторым искусственным приемом; физический смысл полей в полной мере проявится лишь в электродинамике, где они обретают истинную реальность.

Магнитное поле в каждой точке может быть исчерпывающим образом охарактеризовано некоторым вектором  $\vec{B}$ . По историческим причинам вектор  $\vec{B}$  во многих учебниках до сих пор называется вектором индукции, а вспомогательное поле  $\vec{H}$ , которое появляется при учете влияния намагничивающихся сред аналогично вектору  $\vec{D}$  в электростатике диэлектриков, обозначают термином «напряженность магнитного поля». В данном курсе для обозначения истинного магнитного поля с самого начала используется символ  $\vec{B}$ . Называть его вектором магнитной индукции мы не будем; будем говорить просто вектор  $\vec{B}$  или «поле  $\vec{B}$ ».

Понятно, что вводимый вектор  $\vec{B}$  приобретает смысл только после установления связи этого вектора с силой, действующей на элемент тока или на движущийся заряд, со стороны этого поля. Более удобно начинать с силы, действующей на движущийся точечный заряд. Эта сила складывается из двух частей — из известной нам силы со стороны электрического поля и дополнительной силы, обусловленной магнитным полем и возникающей при движении заряда. На основе экспериментов установлено, что эта дополнительная сила пропорциональна величине заряда, скорости его движения, напряженности поля и выражается формулой

$$\vec{F} = kq[\vec{v} \times \vec{B}].$$

Выбор константы  $k$  определяет единицу измерения напряженности поля  $\vec{B}$ . В гауссовой системе эта константа принимается равной  $1/c$ , где  $c$ , имеющая размерность скорости, называется *электродинамической постоянной*. Таким образом, сила, действующая на заряд в данном электромагнитном поле (*сила Лоренца*), равна

$$\vec{F} = q\{\vec{E} + (1/c)[\vec{v} \times \vec{B}]\}. \quad (4.1)$$

Отсюда видно, что размерности  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  в абсолютной гауссовой системе совпадают.

Теперь нетрудно получить выражения для сил, действующих со стороны магнитного поля на элемент объема с током  $\vec{j}$  и на элемент контура с током  $I$ . Рассмотрим элемент объема  $dV$ . На заряды, находящиеся внутри этого объема, действует суммарная сила

$$d\vec{f} = (1/c)[(\sum e_i \vec{v}_i) \times \vec{B}].$$

С учетом определения (3.2) объемной плотности тока это выражение приобретает вид

$$d\vec{f} = (1/c)[\vec{j} \times \vec{B}]dV. \quad (4.2)$$

Следовательно, сила, приходящаяся на единицу объема среды с током  $\vec{j}$ , равна

$$\vec{f} = (1/c)[\vec{j} \times \vec{B}]. \quad (4.3)$$

В случае тока  $I$ , бегущего по проводу, сечение которого не обязательно постоянно по длине, сила, действующая на элемент контура длины  $d\ell$ , выражается формулой

$$d\vec{f} = (I/c)[d\vec{\ell} \times \vec{B}], \quad (4.4)$$

## 4.2. Закон Био—Савара. Принцип суперпозиции

139

получающейся из выражения (4.2) заменой  $\vec{j}dV = (I/S)Sd\vec{\ell} = Id\vec{\ell}$ . Этим правилом

$$\vec{j}dV \Rightarrow Id\vec{\ell} \quad (4.5)$$

всегда пользуются с той целью, чтобы из формул, написанных для объемно распределенного тока, перейти к их аналогам для тока в контуре.

## 4.2. Закон Био—Савара. Принцип суперпозиции. Системы единиц

1. Закон Био—Савара является обобщением опытных данных и описывает магнитное поле, создаваемое элементом тока  $\vec{j}(\vec{r}')dV'$  в точке наблюдения с радиусом-вектором  $\vec{r}$  в виде

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{R}]}{R^3} dV'. \quad (4.6)$$

Тогда от элемента линейного тока  $Id\vec{\ell}$  по правилу (4.5) будем иметь

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \frac{[d\vec{\ell} \times \vec{R}]}{R^3}. \quad (4.7)$$

В этих формулах  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  — радиус-вектор, начинающийся в элементе тока и заканчивающийся в точке наблюдения (рис. 4.1). Следовательно,

поле  $d\vec{B}$  от элемента тока  $\vec{j}(\vec{r}')dV'$  во всех точках пространства направлено по касательной к окружности с центром на продолжении линии  $\vec{j}(\vec{r}')$  и лежащей в плоскости, перпендикулярной этой линии, а силовые линии этого поля представляют собой концентрические окружности описанного типа. Суммарное магнитное поле, создаваемое всем контуром или всем объемом тока, определяется из принципа суперпозиции контурным или объемным

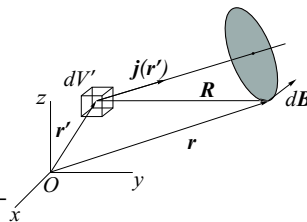


Рис. 4.1

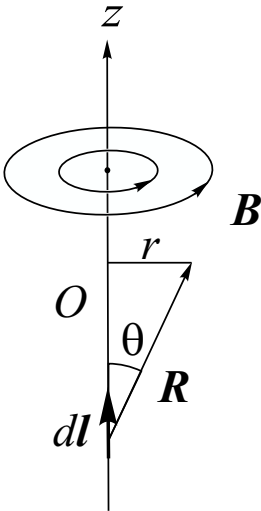
интегралом соответственно:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint \frac{[d\vec{\ell} \times \vec{R}]}{R^3}, \quad (4.8)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{R}]}{R^3} dV'.$$

В принципе, теперь у нас есть все для описания магнитного взаимодействия постоянных токов: закон Био—Савара (4.6) позволяет определить вектор  $\vec{B}$  в любой точке пространства от заданного распределения тока, а сила со стороны этого поля на помещенные в поле токи определяется выражением (4.2). Необходимо заметить, что именно пара соотношений (4.2), (4.6) описывает взаимодействие элементов постоянных токов и фактически составляет определение вектора  $\vec{B}$ . Следует обратить внимание, что оба названные выражения записаны с одним и тем же коэффициентом пропорциональности, т. е. это симметричная пара, причем во всех системах единиц эта симметрия сохраняется.

*Пример 4.1. Поле бесконечно прямого провода с током.* Здесь



речь идет о контуре с током, содержащем прямой участок длины  $\ell$ , когда точка наблюдения находится вблизи середины этого участка на расстояниях  $r$  от провода, удовлетворяющих условиям

$$r_0 \ll r \ll \ell,$$

где  $r_0$  — радиус сечения провода. В этих условиях влиянием непрямолинейных замыкающих участков контура можно пренебречь и воспользоваться идеализацией бесконечного прямого провода с током  $I$ , когда (см. рис. 4.2)

$$d\vec{\ell} = dz\vec{e}_z,$$

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{[d\vec{\ell} \times \vec{R}]}{R^3} = \frac{I}{c} \frac{[\vec{e}_z \times \vec{R}]}{R^3} dz = \frac{I \sin \theta}{c R^2} dz \cdot \vec{e}_\alpha$$

Рис. 4.2

и полное поле можно найти интегрированием по  $z$  в пределах от  $-\infty$

## 4.2. Закон Био—Савара. Принцип суперпозиции

141

до  $\infty$ . Более удобной переменной интегрирования является здесь угол  $\theta$  и с учетом геометрических связей

$$z = -r \operatorname{ctg} \theta, \quad R = \frac{r}{\sin \theta}$$

искомое поле сводится к выражению

$$B_\alpha(r) = \frac{I}{cr} \int_0^\pi \sin \theta d\theta.$$

Следовательно, поле бесконечного прямого провода с током равно

$$\vec{B} = \frac{2I}{cr} \vec{e}_\alpha \quad (4.9)$$

и силовые линии представляют собой концентрические окружности, лежащие в плоскостях  $z = \text{const}$ , как схематически показано на рис. 4.2.

2. Теперь нетрудно рассчитать силовое взаимодействие двух бесконечно длинных параллельных токов  $I_1$ ,  $I_2$ . Первый в месте расположения второго создает поле, перпендикулярное к этому току, равное по величине  $2I_1/cr_{12}$ , где  $r_{12}$  — расстояние между токами. Это поле действует на участок длины  $\ell$  тока  $I_2$  с силой притяжения, определяемой согласно формуле (4.4) и равной по величине

$$F = \frac{2I_1 I_2}{c^2 r_{12}} \ell.$$

Измерив  $F$ , можно по этой формуле вычислить значение электродинамической постоянной  $c$ . Измерения привели к поразительному результату: постоянная  $c$  совпадает со скоростью света в пустоте. Позже мы покажем, что из уравнений Максвелла этот результат получается как следствие электромагнитной природы света.

3. Знание числового значения  $c$  открывает возможность рационального построения системы единиц в электродинамике. Если ввести обозначение  $q^{(m)} = q/c$ , то основные формулы (4.4), (4.7) переписутся без множителя  $c$ :

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= I^{(m)} [d\vec{\ell} \times \vec{B}], \\ d\vec{B} &= I^{(m)} \frac{[d\vec{\ell} \times \vec{R}]}{R^3}. \end{aligned}$$

Тем самым вводятся новые единицы тока (и заряда) — в  $c$  раз больше соответствующих электростатических единиц и отличающиеся от них

размерностью. На них основана так называемая *магнитная система* CGS, обозначаемая кратко CGSM. Десятая доля CGSM-единицы заряда называется кулоном, а силы тока — ампером. Это точные определения кулона и ампера. (Не совсем точные определения, которыми мы пользовались до сих пор, опирались на приближенное значение электродинамической постоянной  $c \approx 3 \cdot 10^{10}$  см/с.)

Теперь можно дать определение единицы напряженности поля  $\vec{B}$ , которая называется *гауссом*. Переписав выражение для магнитной части силы Лоренца в виде

$$\vec{f} = q^{(m)}[\vec{v} \times \vec{B}],$$

можно сказать, что поле  $\vec{B}$  в один гаусс действует на заряд в одну CGSM-единицу с силой в одну дину, если заряд движется перпендикулярно магнитному полю со скоростью 1 см/с. Для конкретного представления о гауссе заметим, что напряженность земного магнитного поля меняется приблизительно от 0,4 Гс (на экваторе) до 0,7 Гс (на полюсе).

Система CGSE применяется только для измерения чисто электрических величин: заряда; напряженности электрического поля; потенциала; электродвижущей силы; электрической проводимости и пр. Система CGSM, напротив, применяется лишь для измерения чисто магнитных величин: напряженности магнитного поля, магнитного потока, коэффициентов само- и взаимной индукции и пр. Ни одна из этих систем никогда не используется как единая система для измерения всех электрических и магнитных величин. Гауссова система, которой мы пользуемся, является комбинированной. Единицы чисто электрических величин в ней совпадают с единицами CGSE, а единицы чисто магнитных величин — с единицами CGSM.

### 4.3. Вектор-потенциал магнитного поля

1. Приведенных выше сведений о магнитном поле пока недостаточно и исследование магнитного поля необходимо продолжить. Здесь мы введем потенциал для описания магнитного поля  $\vec{B}$ , но он теперь не может, в общем случае, быть скалярным.

Для введения вектор-потенциала обратимся к закону Био—Савара

для суммарного поля (4.8) в точке  $\vec{r}$ . Имея в виду, что

$$\frac{\vec{R}(\vec{r}, \vec{r}')}{R^3} = -grad \frac{1}{R},$$

а также формулу для ротора произведения, подынтегральную функцию (4.8) преобразуем:

$$\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} = \left[ grad \frac{1}{R} \times \vec{j}(\vec{r}, \vec{r}') \right] = rot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} - \frac{1}{R} rot \vec{j}(\vec{r}').$$

Здесь векторные операторы  $grad$  и  $rot$  (без штрихов) предусматривают дифференцирование по координатам точки наблюдения, т. е. координатам вектора  $\vec{r}$ ; поэтому второй член в написанной сумме равен нулю. Следовательно,

$$\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} = rot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R};$$

вынеся оператор  $rot$  из под знака интеграла, закон Био—Савара приведем к виду

$$\vec{B}(\vec{r}) = rot \int \frac{1}{c} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dV'.$$

(Здесь принято, что токи  $\vec{j}(\vec{r}')$  занимают конечную область пространства и объемный интеграл в полученном выражении имеет смысл.) Таким образом, результат преобразований сводится к двум равенствам:

$$\vec{B}(\vec{r}) = rot \vec{A}(\vec{r}); \quad (4.10)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dV', \quad (4.11)$$

причем в случае линейного тока выражение (4.11) по правилу (4.5) заменяется контурным интегралом

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint \frac{d\vec{\ell}}{R}. \quad (4.12)$$

Первое из полученных равенств дает связь поля  $\vec{B}$  с вектор-потенциалом  $\vec{A}$ , а второе определяет  $\vec{A}$  по заданному распределению токов.

Справедливо *утверждение*: вектор-потенциал  $\vec{A}$ , определяемый интегралом (4.11) или (4.12), удовлетворяет условию

$$div \vec{A} = 0. \quad (4.13)$$

Действительно, из выражения (4.11) имеем

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \operatorname{div} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dV'.$$

Подынтегральная функция

$$\operatorname{div} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} = \frac{1}{R} \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}') + \operatorname{grad} \frac{1}{R} \cdot \vec{j}(\vec{r}') = -\operatorname{grad}' \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \cdot \vec{j}(\vec{r}'),$$

так как первое слагаемое из суммы равно нулю, а во втором  $\operatorname{grad}(1/R)$  можно заменить на  $-\operatorname{grad}'(1/R)$ . Прделав еще одно преобразование с использованием формулы для дивергенции произведения

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad}' \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \cdot \vec{j}(\vec{r}') &= -\left\{ \operatorname{div}' \left[ \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \vec{j}(\vec{r}') \right] - \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}') \right\} = \\ &= -\operatorname{div}' \left[ \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \vec{j}(\vec{r}') \right] \end{aligned}$$

(здесь учли уравнение непрерывности  $\operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}') = 0$  для постоянного тока), искомую величину можем свести к поверхностному интегралу

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int \operatorname{div}' \left[ \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \vec{j}(\vec{r}') \right] dV' = -\frac{1}{c} \oint \frac{j_n}{R} dS$$

по поверхности  $S$ , охватывающей все токи. А раз так, то на этой поверхности  $j_n \equiv 0$  и для  $\operatorname{div} \vec{A}$  получается требуемый результат (4.13).

2. *О неединственности вектор-потенциала  $\vec{A}$ .* По известному распределению  $\vec{A}(\vec{r})$  магнитное поле  $\vec{B}$  по формуле (4.10) определяется однозначно. Наоборот, если известно поле  $\vec{B}(\vec{r})$ , то очевидно, что из соотношения (4.10) вектор-потенциал может быть определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Действительно, если взять

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f(x, y, z),$$

то из тождества  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0$  следует

$$\operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \vec{A},$$

т. е. вектор-потенциалы  $\vec{A}'$  и  $\vec{A}$  описывают одно и то же поле  $\vec{B}$ .



Выбор конкретного потенциала называют *калибровкой* потенциала, а дополнительное условие, накладываемое на  $\vec{A}(\vec{r})$ , — *условием калибровки*. В частности, в качестве условия калибровки часто используется равенство (4.13) (называют кулоновской калибровкой). Мы видели, что вектор-потенциал, определяемый интегралом (4.11), удовлетворяет именно этому условию.

*Пример 4.2.* Для однородного магнитного поля  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ , заполняющего безграничное пространство, найти вектор-потенциал, удовлетворяющий условию кулоновской калибровки.

Искомое векторное поле удовлетворяет уравнениям

$$\text{rot} \vec{A} = B_0 \vec{e}_z, \quad \text{div} \vec{A} = 0. \quad (4.14)$$

Так как условия на бесконечности для  $\vec{A}$  не заданы, задача допускает бесчисленное множество решений. В качестве первого варианта рассмотрим векторное поле

$$\vec{A}_1 = A_1 \vec{e}_x,$$

имеющее только  $x$ -компоненту. При этом

$$\text{rot} \vec{A}_1 = \frac{\partial A_1}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial A_1}{\partial y} \vec{e}_z, \quad \text{div} \vec{A}_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x}$$

и уравнения (4.14) эквивалентны трем скалярным уравнениям

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = -B_0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial x} = 0,$$

которым удовлетворяет решение  $A_1 = -B_0 y$ . Таким образом,

$$\vec{A}_1 = -B_0 y \vec{e}_x$$

является одним из возможных решений задачи. Аналогично можно получить решение

$$\vec{A}_2 = B_0 x \vec{e}_y$$

в виде векторного поля с одной  $y$ -компонентой.

Из линейности уравнений (4.14) следует, что линейная комбинация  $\vec{A} = \gamma \vec{A}_1 + (1 - \gamma) \vec{A}_2$  при произвольном  $\gamma$  также является решением задачи. Физический интерес представляет результат, соответствующий  $\gamma = 1/2$ , т. е.

$$\vec{A}_3 = \frac{1}{2} B_0 (x \vec{e}_y - y \vec{e}_x) = \frac{1}{2} B_0 [\vec{e}_z \times \vec{r}],$$

где  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$  — двумерный радиус-вектор точки наблюдения. Входящее сюда векторное произведение есть вектор  $r\vec{e}_\alpha$ , заданный в цилиндрических координатах, и, следовательно, данный вектор-потенциал

$$\vec{A}_3 = \frac{1}{2} B_0 r \vec{e}_\alpha \quad (4.15)$$

имеет лишь одну  $\alpha$ -компоненту в цилиндрической системе координат. Результат (4.15) можно получить непосредственно из уравнений (4.14), расписав  $\text{rot}$  и  $\text{div}$  в цилиндрических координатах; пусть это будет задание для самостоятельного выполнения.

Итак, здесь представлены три варианта решения для вектор-потенциала однородного поля. Понятно, что между собой они отличаются градиентом скалярной функции; например, как легко видеть,  $\vec{A}_2 - \vec{A}_1 = B_0 \text{grad}(xy)$ .

#### 4.4. Уравнение для векторного потенциала и его общее решение в свободном пространстве

Подобный вопрос для скалярного потенциала  $\varphi(\vec{r})$  в электростатике обсуждался в § 1.5, 1.6. Было показано, что потенциал удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных (1.13):

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

(уравнение Пуассона) и что для зарядов, занимающих конечную область пространства, распределение потенциала, удовлетворяющее уравнению (1.13) и обеспечивающее ноль на бесконечности, определяется интегралом (1.15):

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{R(\vec{r}, \vec{r}')},$$

где  $R(\vec{r}, \vec{r}') = |\vec{r} - \vec{r}'|$  (общее решение уравнения Пуассона в безграничном пространстве).

Для векторного потенциала у нас фактически имеется решение (4.11). Если ввести произвольную декартову систему координат  $(x, y, z)$ , это решение можно переписать для компонент вектора  $\vec{A}$ :

$$A_x(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{j_x(\vec{r}')dV'}{R(\vec{r}, \vec{r}')}, \quad A_y(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{j_y(\vec{r}')dV'}{R(\vec{r}, \vec{r}')}$$

## 4.4. Уравнение для векторного потенциала и его общее решение 147

и аналогично для  $A_z$ . Каждое из этих выражений полностью повторяет структуру решения (1.15). Следовательно,  $A_x, A_y, A_z$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta A_x = -\frac{4\pi}{c}j_x, \quad \Delta A_y = -\frac{4\pi}{c}j_y, \quad \Delta A_z = -\frac{4\pi}{c}j_z,$$

которые можно объединить в одно векторное дифференциальное уравнение

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Дифференциальный оператор этого уравнения, называемый по аналогии лапласианом векторного поля, пока определен только в декартовой системе координат соотношением

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}.$$

Чтобы понять его смысл для работы в других системах координат (например, если поле  $\vec{A}$  задано своими сферическими компонентами  $A_r(r, \theta, \alpha)$ ,  $A_\theta(r, \theta, \alpha)$ ,  $A_\alpha(r, \theta, \alpha)$ ), необходимо этот оператор в декартовой системе координат выразить через другие операторы, инвариантный смысл которых известен. Для этого рассмотрим оператор *rot rot*.

Если последовательно дважды применить оператор *rot* к векторному полю  $\vec{A}$ , заданному в декартовой системе, то в результате можно прийти к такому выражению:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A},$$

где последний оператор это тот, который нас интересует. Вместо этих громоздких шагов мы здесь воспользуемся символическим оператором «набла», представим  $\text{rot rot } \vec{A}$  в виде  $[\nabla \times (\nabla \times \vec{A})]$  и разложив тройное векторное произведение по правилам векторной алгебры, сразу получим

$$\text{rot rot } \vec{A} = [\nabla \times (\nabla \times \vec{A})] = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A},$$

т. е. нужный ответ; следовательно, *инвариантное определение* для оператора  $\Delta \vec{A}$  таково:

$$\Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}.$$

Теперь повторим полученный результат. Вектор-потенциал  $\vec{A}$ , удовлетворяющий условию калибровки  $\text{div } \vec{A} = 0$ , подчиняется дифференциальному уравнению

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad (4.16)$$

общее решение которого в свободном пространстве имеет вид (4.11):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R(\vec{r}, \vec{r}')}.$$

или, в случае тока в контуре, (4.12):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint \frac{d\vec{\ell}}{R}.$$

*Пример 4.3.* Для магнитного поля (4.9) бесконечного прямого тока найти вектор-потенциал вида  $\vec{A} = A(r)\vec{e}_z$ .

Воспользуемся уравнением  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ . В рассматриваемом случае поля  $\vec{B}$  и  $\text{rot}\vec{A} = -(dA/dr)\vec{e}_\alpha$  имеют только  $\alpha$ -компоненты; приравняв их, получаем уравнение

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{2I}{cr},$$

решение которого

$$A(r) = -\frac{2I}{c} \ln \frac{r}{r_0}$$

( $r_0$  — радиус цилиндрической поверхности, на которой принято  $A = 0$ ) дает искомое выражение

$$\vec{A}(r) = -\frac{2I}{c} \ln \frac{r}{r_0} \vec{e}_z. \quad (4.17)$$

Обратим внимание, что идеализация бесконечно протяженного тока лишает нас возможности непосредственно воспользоваться выражением (4.12)

$$\vec{A}(r) = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \vec{e}_z,$$

так как получающийся интеграл является расходящимся. Здесь нет неожиданности, поскольку выражения (4.11), (4.12) получены для токов, занимающих конечную область пространства.

*Пример 4.4.* Воспользовавшись выражением (4.12), найти вектор-потенциал магнитного поля, создаваемого круговым витком с током.

Пусть круговой виток радиуса  $a$  с током  $I$  расположен в плоскости  $z = 0$  с центром в начале координат и положение точки наблюдения  $P$  задано сферическими координатами  $(r, \theta)$  (рис. 4.3). Ортогональную проекцию точки  $P$  на плоскость кольца на рисунке отметим символом

4.4. Уравнение для векторного потенциала и его общее решение 149

$P'$ . Через точку  $P'$  проведем луч, исходящий из начала координат, и обратим внимание на то, что два векторных элемента контура  $d\vec{\ell}_1, d\vec{\ell}_2$ , симметричные относительно луча, находятся на одинаковых расстояниях  $R$  от точки наблюдения  $P$ . Сумма  $d\vec{\ell}_1 + d\vec{\ell}_2$  есть вектор, перпендикулярный лучу  $OP'$  и равный  $2a \cos \alpha' d\alpha' \vec{e}_\alpha$ , где  $\vec{e}_\alpha$  — единичный орт сферической системы координат, а угловая координата  $\alpha'$  характеризует положение элемента контура  $d\vec{\ell}_1$  (точки  $K$  на рис. 4.3). Следовательно, вклад этих двух элементов в интеграл из соотношения (4.12) равен  $(2a \cos \alpha' d\alpha' / R) \vec{e}_\alpha$  и искомый вектор-потенциал в точке  $P$  таков:

$$\vec{A}(r, \theta) = \frac{2Ia}{c} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha' d\alpha'}{R} \vec{e}_\alpha.$$

Расстояние  $R$  (см. на рис. 4.3 отрезок  $KP$ ) равно гипотенузе прямоугольного треугольника  $KP'P$  с катетами

$$KP' = \sqrt{a^2 + r^2 \sin^2 \theta - 2ar \sin \theta \cos \alpha'}, \quad PP' = r \cos \theta.$$

Следовательно,  $R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \alpha'}$  и

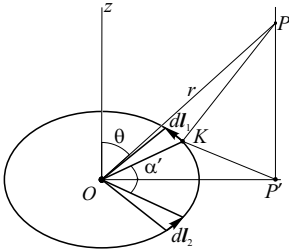


Рис. 4.3

$$\vec{A}(r, \theta) = \frac{2Ia}{c} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha' d\alpha'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \alpha'}} \vec{e}_\alpha. \quad (4.18)$$

При произвольных  $r/a$  полученный интеграл в элементарных функциях не выражается. Для предельных случаев  $r/a \ll 1$ ,  $r/a \gg 1$  (т. е. для областей вблизи центра кольца и на больших расстояниях от кольца) подынтегральное выражение можно разложить по степеням малого параметра  $r/a$  или  $a/r$ :

$$\frac{\cos \alpha'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \alpha'}} = \begin{cases} \frac{\cos \alpha'}{a} \left[ 1 + \frac{r}{a} \sin \theta \cos \alpha' + O\left(\frac{r^2}{a^2}\right) \right], \\ \frac{\cos \alpha'}{r} \left[ 1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \alpha' + O\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \right] \end{cases}$$

и в результате интегрирования получить выражения  $\vec{A}$  для соответствующих областей

$$\vec{A}(r, \theta) = \frac{1}{2} r \sin \theta B_0 \vec{e}_\alpha \left[ 1 + O\left(\frac{r}{a}\right) \right]; \quad (4.19)$$

$$\vec{A}(r, \theta) = \frac{m}{r^2} \sin \theta \vec{e}_\alpha \left[ 1 + O\left(\frac{a}{r}\right) \right]. \quad (4.20)$$

Здесь  $B_0 = 2\pi I/ca$ ,  $m = I\pi a^2/c$  — константы, причем  $B_0$ , как легко убедиться с помощью закона Био—Савара, есть величина поля  $\vec{B}$  в центре кольца, направленного по оси  $z$ . Из сравнения с выражением (4.15) видно, что главный член разложения (4.19) представляет собой вектор-потенциал однородного поля  $B_0 \vec{e}_z$ . Константа  $m$ , входящая в разложение (4.20), как показано ниже, равна величине магнитного момента рассматриваемого витка с током, а главный член разложения (4.20) есть вектор-потенциал соответствующего магнитного диполя.

## 4.5. Основные уравнения магнитного поля

Из соотношения (4.10)

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

и тождества  $\text{div} \text{rot} \equiv 0$  получается первое из искомых дифференциальных уравнений

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (4.21)$$

Если взять ротор от обеих частей выражения (4.10)

$$\text{rot} \vec{B} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A},$$

и воспользоваться уравнением для векторного потенциала (4.16), удовлетворяющего условию  $\text{div} \vec{A} = 0$ , то отсюда получится второе уравнение для магнитного поля:

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.22)$$

Уравнения (4.21), (4.22) составляют полную систему основных уравнений магнитного поля *постоянных* токов. В области пространства без токов поле  $\vec{B}$  удовлетворяет уравнениям

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{rot} \vec{B} = 0.$$

Например, поле (4.9)

$$\vec{B} = (2I/cr) \vec{e}_\alpha$$

от прямого провода с током в пространстве  $r > 0$  вне провода удовлетворяет этим уравнениям и поэтому может быть использовано в процессе «конструирования» решений более сложных задач.

## 4.6. Поток и циркуляция магнитного поля

Из дифференциальных уравнений (4.21), (4.22) легко получаются их интегральные аналоги. Так, если уравнение (4.21) проинтегрируем по объему  $V$ , ограниченному некоторой замкнутой поверхностью  $S$ , получим

$$\int \operatorname{div} \vec{B} dV = 0.$$

Отсюда с использованием теоремы Остроградского—Гаусса следует интегральный аналог уравнения (4.21)

$$\oint_s B_n ds = 0, \quad (4.23)$$

утверждающий, что *поток вектора  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю*. Это положение равносильно утверждению об отсутствии магнитных зарядов, вследствие чего силовые линии поля  $\vec{B}$  ни в каких точках не могут ни начинаться, ни заканчиваться. Они являются либо замкнутыми линиями, либо идут из бесконечности в бесконечность, либо возможны случаи, когда силовая линия не является замкнутой, не уходит на бесконечность, а плотно заполняет некоторую ограниченную поверхность.

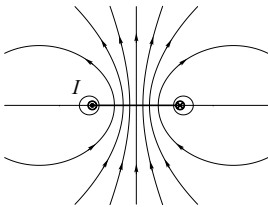


Рис. 4.4

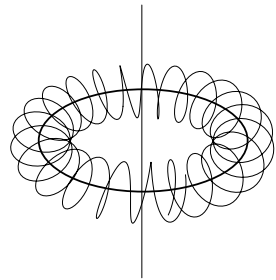


Рис. 4.5

Эти случаи проиллюстрируем схематическими рисунками силовых линий поля  $\vec{B}$  от кругового кольца с током (рис. 4.4) и от системы кольца и прямого провода с током, проходящего по оси симметрии кольца (рис. 4.5). В первом случае все силовые линии являются плоскими кривыми, лежащими в радиальной плоскости, проходящей через ось симметрии кольца, и замкнутыми, за исключением линии, проходящей вдоль оси симметрии. Во втором случае силовые линии навиваются на поверхность определенного тороида. В зависимости от соотношения между величинами токов  $I_1$  (в кольце) и  $I_2$  (в прямом проводе) силовые линии могут быть как замкнутыми, так и незамкнутыми, плотно заполняющими упомянутую поверхность тороида.

Вторая важная интегральная характеристика векторного поля связана с величиной циркуляции. Если циркуляция векторного поля по любому замкнутому контуру равна нулю (как для поля  $\vec{E}$  в электростатике), такое векторное поле называется потенциальным и может характеризоваться скалярным потенциалом. В противном случае векторное поле непотенциальное, или по-другому — *вихревое*. Так как  $\text{rot}\vec{B} \neq 0$ , понятно, что  $\vec{B}$  — вихревое поле.

Для вычисления циркуляции поля  $\vec{B}$  по замкнутому контуру  $\ell$  воспользуемся теоремой Стокса из векторного анализа, согласно которой циркуляция  $\vec{B}$  по замкнутому контуру  $\ell$  равна

$$\oint B_\ell d\ell = \int \text{rot}_n \vec{B} ds$$

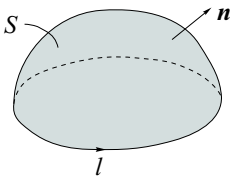


Рис. 4.6

— потоку вектора  $\text{rot}\vec{B}$  через поверхность  $S$ , натянутую на контур  $\ell$ . При этом направление обхода контура  $\ell$  и положительное направление нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  взаимно согласованы (рис. 4.6). Отсюда с использованием уравнения (4.22) получаем, что

$$\oint_\ell B_\ell d\ell = \frac{4\pi}{c} \int_s j_n ds,$$

где интеграл в правой части представляет собой полный ток, пронизывающий контур  $\ell$ . Естественно, величина этого интеграла не зависит от выбора поверхности, опирающейся на контур  $\ell$ , поскольку на основе интегрального представления закона сохранения заряда (3.8) для стационарного тока поток вектора  $\vec{j}$  по любой замкнутой поверхности равен



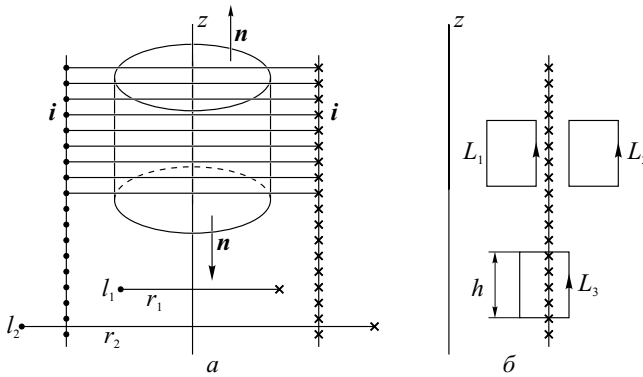


Рис. 4.7

нулю. Таким образом, второе интегральное соотношение для постоянного магнитного поля, часто называемое теоремой о циркуляции, имеет вид

$$\oint B_{\ell} d\ell = \frac{4\pi}{c} I \quad (4.24)$$

и утверждает, что циркуляция магнитного поля постоянных токов по всякому замкнутому контуру равна суммарному току, пронизывающему этот контур, умноженному на  $4\pi/c$ .

Заметим в заключение, что как теорема Гаусса в электростатике позволяет вычислять поле  $\vec{E}$  в задачах с симметрией, совершенно так же интегральные теоремы (4.23), (4.24) могут использоваться для вычисления магнитного поля.

*Пример 4.5. Магнитное поле бесконечно длинного соленоида кругового сечения.* Пусть ток в витке —  $I$ , число витков на единицу длины соленоида —  $N$ , радиус витка —  $a$ . С соленоидом свяжем цилиндрическую систему координат  $(r, \alpha, z)$  с осью  $z$ , совпадающей с осью симметрии. На рис. 4.7 схематично изображено сечение соленоида радиальной плоскостью, проходящей через ось  $z$ ; точки и крестики символически указывают направление тока в витках. Игнорируя некоторые тонкости, будем считать, что соленоид с током эквивалентен поверхностному току с плотностью

$$\vec{j} = NI\vec{e}_{\alpha},$$

распределенному по цилиндрической поверхности радиуса  $a$ .

Из осевой симметрии следует, что компоненты искомого поля  $\vec{B}$  могут зависеть только от координаты  $r$ , т. е.

$$B_r = B_r(r), \quad B_\alpha = B_\alpha(r), \quad B_z = B_z(r).$$

Докажем, что  $B_\alpha \equiv 0$ . Для этого вычислим циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по круговым контурам  $\ell_1, \ell_2$  с центрами на оси соленоида ( $r_1 < a, r_2 > a$ , см. рис. 4.7, *a*). Плоскости контуров перпендикулярны оси  $z$ . Так как токи через контуры  $\ell_1$  и  $\ell_2$  равны нулю, то из соотношения (4.24) следует, что рассматриваемые циркуляции равны нулю, т. е.

$$2\pi r_1 B_\alpha(r_1) = 0, \quad 2\pi r_2 B_\alpha(r_2) = 0$$

и, следовательно,  $B_\alpha = 0$  как внутри, так и вне соленоида.

Покажем, что  $B_r \equiv 0$ . Это следует из рассмотрения потока вектора  $\vec{B}$  через замкнутую поверхность в виде цилиндра с доньшком и крышкой (см. рис. 4.7, *a*). Доньшко и крышка вкладывают в поток не дают, так как  $B_z(r)$  от  $z$  не зависит. Следовательно, поток через цилиндрическую поверхность на основании уравнения (4.23) должен равняться нулю и отсюда  $B_r = 0$ , причем полученный результат справедлив как внутри, так и вне соленоида.

Итак, только одна  $z$ -компонента искомого магнитного поля может быть отлична от нуля. Для ее определения обратимся к контурам  $L_1, L_2, L_3$ , лежащим в радиальной плоскости, показанным на рис. 4.7, *б*. Из рассмотрения контура  $L_1$ , циркуляция по которой должна равняться нулю, следует, что внутри соленоида  $B_z = B_0 = \text{const}$  не зависит от  $r$ . Аналогично из условия  $\oint_{L_2} B_\ell d\ell = 0$  получаем, что вне соленоида вплоть до бесконечности поле  $B_{\text{внеш}} = \text{const}$ . Исходя только из интегральных теорем (4.23), (4.24), эту величину определить нельзя. Нужны дополнительные соображения. Ниже показано, что  $B_{\text{внеш}} \equiv 0$ . Наконец, перейдем к контуру  $L_3$ . Для указанного направления обхода контура ток, пронизывающий этот контур, отрицателен и по модулю равен  $hNI$  (размер  $h$  показан на рис. 4.7, *б*). Из теоремы (4.24) имеем

$$\oint_{L_3} B_\ell d\ell = h(B_{\text{внеш}} - B_0) = -(4\pi/c)hNI,$$

откуда  $B_0 = 4\pi NI/c$ . Таким образом, поле внутри соленоида

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z, \quad B_0 = 4\pi NI/c. \quad (4.25)$$

## 4.7. Граничные условия и математическая формулировка задачи 155

Заметим, что при замене соленоида поверхностным током мы проигнорировали шаг спирали соленоида и, следовательно, полученный результат наклон витков не учитывает. Кроме того, он неприменим в непосредственной близости от проволоки, а также внутри нее.

## 4.7. Граничные условия и математическая формулировка задачи определения постоянного магнитного поля. Соленоид произвольного поперечного сечения

1. Из интегральных теорем (4.23), (4.24) легко получить условия, которым должен удовлетворять вектор  $\vec{B}$  на границе раздела двух областей. Соотношение (4.23) формально не отличается от теоремы Гаусса в электростатике (1.10) при отсутствии электрических зарядов. Отсюда следует, что нормальные компоненты поля  $\vec{B}$  на границе раздела непрерывны:

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (4.26)$$

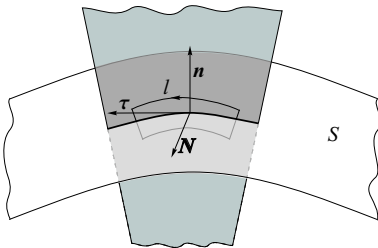


Рис. 4.8

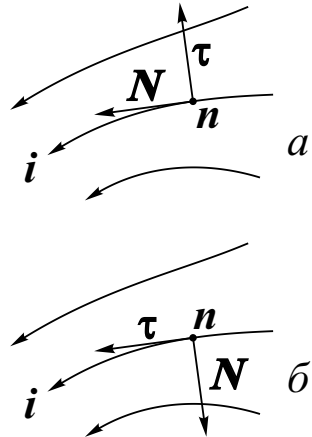


Рис. 4.9

Условие для тангенциальных компонент магнитного поля является

следствием теоремы о циркуляции (4.24). Предположим для общности, что поверхность раздела  $S$  содержит ток с поверхностной плотностью  $\vec{i}$ , определяемой соотношениями (3.4), (3.5). Рассмотрим циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по контуру  $\ell$ , изображенному на рис. 4.8. Этот рисунок является объединением рис. 1.18 и рис. 1.19 из гл. 1 и дополнен единичным вектором  $\vec{N} = [\vec{n} \times \vec{\tau}]$ , так же как вектор  $\vec{\tau}$  лежащим в плоскости, касательной к поверхности  $S$ . Вектор  $\vec{N}$  является нормалью для плоского контура  $\ell$  и суммарный ток  $I$ , пронизывающий этот контур, определяется проекцией  $i_N = (\vec{i} \cdot \vec{N})$  только поверхностного тока на направление  $\vec{N}$ ; объемные токи, если они имеются, вклада в  $I$  не дают, так как величина площадки, опирающейся на контур  $\ell$ , при уменьшении ширины перемычки  $\delta h$  (см. рис. 1.19) стремится к нулю. Повторив рассуждения, представленные при выводе условия (1.21), получим, что

$$\oint_{\ell} B_{\ell} d\ell = (B_{\tau_2} - B_{\tau_1}) \Delta\ell.$$

С другой стороны, на основе теоремы (4.24) этот интеграл должен равняться  $(4\pi/c)i_N\Delta\ell$ . Приравнявая эти две величины, получаем требуемое условие для тангенциальных компонент магнитного поля:

$$B_{\tau_2} - B_{\tau_1} = \frac{4\pi}{c}i_N. \quad (4.27)$$

Напомним, что цифрами 1 и 2 здесь отмечены области соответственно по одну и другую сторону поверхности  $S$ , причем нормаль  $\vec{n}$  проходит из области 1 в область 2.

Таким образом, при наличии поверхностного тока тангенциальная компонента магнитного поля при переходе границы раздела терпит разрыв, причем величина разрыва определяется проекцией плотности тока  $\vec{i}$  на направление  $\vec{N}$ . Для наглядности на рис. 4.9 изображены картины силовых линий тока  $\vec{i}$  в некоторой малой окрестности точки на поверхности  $S$  (вид с конца вектора  $\vec{n}$  на касательную плоскость) и два варианта расположения единичных векторов  $\vec{\tau}, \vec{N}$ . В варианте «а»  $\vec{\tau}$  перпендикулярен току  $\vec{i}$  так, что  $i_N = \max$ ; при этом тангенциальные компоненты  $B_{\tau_2}, B_{\tau_1}$  будут не равны, причем  $B_{\tau_2} > B_{\tau_1}$ . В варианте «б»  $\vec{\tau} \parallel \vec{i}$ ,  $i_N = 0$ , и, следовательно, для такого направления  $\vec{\tau}$  разрыва тангенциальных компонент вектора  $\vec{B}$  не будет, т. е.  $B_{\tau_2} = B_{\tau_1}$ .

Условие (4.27) для тангенциальных компонент поля  $\vec{B}$  можно представить в векторном виде. Для этого воспользуемся тем, что  $\vec{\tau} = [\vec{N} \times \vec{n}]$ .

## 4.7. Граничные условия и математическая формулировка задачи 157

Тогда

$$B_\tau = (\vec{B} \cdot \vec{\tau}) = \vec{B} \cdot [\vec{N} \times \vec{n}] = [\vec{n} \times \vec{B}] \cdot \vec{N},$$

$$i_N = (\vec{i} \cdot \vec{N}).$$

Подставив это в условие (4.27), получим

$$\left( [\vec{n} \times \vec{B}]_2 - [\vec{n} \times \vec{B}]_1 \right) \cdot \vec{N} = \frac{4\pi}{c} \vec{i} \cdot \vec{N}.$$

Так как  $\vec{N}$  — произвольный единичный вектор касательной плоскости, отсюда имеем

$$[\vec{n} \times \vec{B}]_2 - [\vec{n} \times \vec{B}]_1 = \frac{4\pi}{c} \vec{i} \quad (4.28)$$

— условие, которому должны удовлетворять касательные составляющие вектора  $\vec{B}$  при наличии поверхностных токов на границе раздела.

2. Математическая постановка задачи определения поля  $\vec{B}$  (или, как часто говорят, математическая модель физической задачи) в данном случае включает в себя уравнения (4.21), (4.22) для ротора и дивергенции и граничные условия (4.26), (4.27). Изящество в получении результата, достигаемое использованием математической модели, здесь продемонстрируем на конкретном примере поля бесконечно длинного цилиндрического соленоида произвольного поперечного сечения (рис. 4.10, *a*). Ток в соленоиде будем считать поверхностным, направленным перпендикулярно к образующим цилиндра, как на рис. 4.10, *б*, и неизменным вдоль этих образующих. Тогда поля  $\vec{B}$  внутри и вне соленоида (области 1 и 2 соответственно) не зависят от координаты  $z$  и удовлетворяют однородным уравнениям

$$\operatorname{div} \vec{B}_{1,2} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B}_{1,2} = 0.$$

Граничные условия задаются на контуре  $\Gamma$ , представляющем собой линию пересечения поверхности  $S$  соленоида с плоскостью  $z = \text{const}$ . Первое условие непрерывности нормальной компоненты  $\vec{B}$

$$B_{n1} = B_{n2}|_\Gamma$$

в комментариях не нуждается. Тангенциальными компонентами в данном случае являются  $B_z$  и  $B_t$ , где символом  $\vec{t}$  обозначен единичный

касательный вектор, лежащий в плоскости  $z = \text{const}$ , а другой касательный вектор  $\vec{e}_z$  на рис. 4.10, а представлен жирной точкой. Граничные условия для  $B_t$  и  $B_z$  получаются из общего условия (4.27) после установления соответствия между тройкой векторов  $\vec{n}, \vec{\tau}$  из рис. 4.8 и векторами рис. 4.10, а.

Пусть вектор  $\vec{t}$  выступает в качестве единичного касательного вектора  $\vec{\tau}$ , фигурирующего в условии (4.27). Тогда вектором  $\vec{N} = [\vec{n} \times \vec{\tau}] = [\vec{n} \times \vec{t}]$  в данном случае является орт  $\vec{e}_z$ . Вдоль соленоида ток не течет,  $i_N = i_z = 0$ , и поэтому, как следует из (4.27),  $t$ -компонента поля  $\vec{B}$  непрерывна при переходе границы:

$$B_{t1} = B_{t2}|_{\Gamma}.$$

Теперь пусть касательный вектор  $\vec{e}_z$  является вектором  $\vec{\tau}$ ; тогда  $\vec{N} = [\vec{n} \times \vec{\tau}] = [\vec{n} \times \vec{e}_z] = -\vec{t}$ ,  $i_N = -i \neq 0$  и условие (4.27) превращается в

$$B_{1z} - B_{2z} = 4\pi i/c.$$

(Воспользовавшись случаем, здесь подчеркнем, что реализация граничного условия (4.27) для тангенциальных компонент магнитного поля в каждом конкретном случае требует внимательного подхода.)

Приведенные условия необходимо дополнить условием на бесконечности в плоскости  $(x, y)$ , в качестве которого примем условие

$$\vec{B}_2|_{\infty} = 0,$$

уже использовавшееся для частного случая соленоида в предыдущем параграфе (пока без доказательства). Математическая формулировка задачи завершена.

Решение задачи легко «угадать», заметив, что поле  $\vec{B} = \text{const}$  удовлетворяет однородным уравнениям; если при этом принять, что  $\vec{B}_{1,2} =$

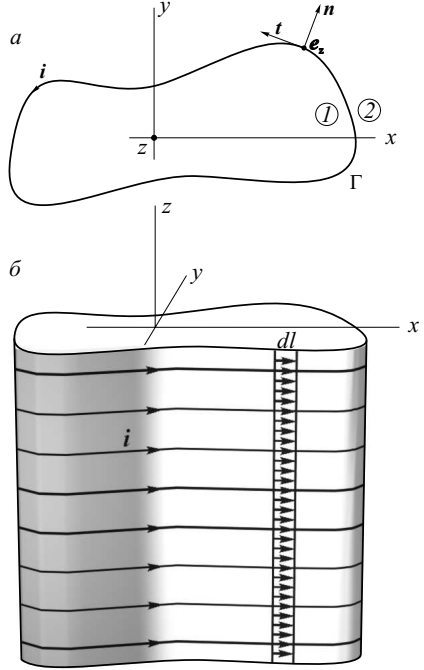


Рис. 4.10

## 4.7. Граничные условия и математическая формулировка задачи 159

$= B_{1,2}\vec{e}_z$  направлены по оси  $z$ , то  $B_n|_\Gamma \equiv 0$ ,  $B_t|_\Gamma \equiv 0$  и граничные условия для  $B_n, B_t$  удовлетворяются автоматически. Выбрав

$$B_1 = 4\pi i/c, \quad B_2 = 0,$$

удовлетворяем остающимся условиям. Таким образом, в цилиндрическом соленоиде произвольного поперечного сечения поле однородно и определяется решением (4.25), полученным раньше для соленоида кругового сечения.

В заключение заметим, что данную задачу, в которой токи, создающие искомое магнитное поле, известны, можно решить и без обращения к дифференциальным уравнениям и граничным условиям. Можно просто воспользоваться принципом суперпозиции и законом Био—Савара, для чего систему токов необходимо рациональным образом мысленно разбить на отдельные элементы, найти магнитное поле в пространстве от каждого элемента и полученные поля просуммировать. В рассматриваемом случае соленоида такой путь можно реализовать и получить нужный результат, если в качестве элементов тока принять узкие полоски ширины  $d\ell$  между образующими цилиндра, как показано на рис. 4.10, б. Из-за громоздкости ход подобных вычислений здесь не приводится.

*Упражнение.* Пусть тороидальный соленоид, изображенный на рис. 4.11, состоит из  $N \gg 1$  плоских витков с током  $I$ , равномерно распределенных по поверхности тора. Витки находятся в радиальных плоскостях  $\alpha = \text{const}$  цилиндрической системы координат с осью  $z$ , совпадающей с осью симметрии тороида.

Воспользовавшись теоремой о циркуляции (4.24) применительно к замкнутым контурам в виде окружностей  $\ell_1, \ell_2$ , показать, что  $\alpha$ -компоненты магнитного поля внутри (область 1) и вне соленоида (область 2) равны

$$B_{1\alpha} = 2NI/cr, \quad B_{2\alpha} = 0.$$

Показать, что других, отличных от нуля компонент поле тороидального соленоида не имеет, если витки густо расположены и ток в соленоиде можно считать поперечным. Для этого необходимо убедиться, что поля

$$\vec{B}_1 = (2NI/cr)\vec{e}_\alpha, \quad \vec{B}_2 = 0$$

удовлетворяют уравнениям (4.21), (4.22) и граничным условиям (4.26), (4.27) на поверхности соленоида.

3. Говоря о математической формулировке задач магнитостатики, уместно вспомнить опыт электростатики, когда переход от векторного

поля  $\vec{E}(\vec{r})$  к скалярному потенциалу  $\varphi(\vec{r})$  существенно упрощает задачу. Магнитное поле в общем случае скалярным потенциалом не описывается. А переход от векторного поля  $\vec{B}(\vec{r})$  к вектор-потенциалу  $A(\vec{r})$ , как замена одного искомого векторного поля другим, на первый взгляд не обещает никаких преимуществ. Но фактически дело обстоит несколько иначе: существуют ситуации, в которых вектор-потенциал обладает только одной отличной от нуля компонентой, в то время как магнитное поле является двухкомпонентным; понятно, что переход к вектор-потенциалу в подобных случаях целесообразен.

Пусть, например, магнитное поле создается системой токов, которые можно представить в виде набора бесконечно длинных токовых нитей, направленных вдоль одной оси (оси  $z$ ). Результатом суперпозиции полей (4,9) от отдельных нитей тока в этом случае будет плоское векторное поле

$$\vec{B} = B_x(x, y)\vec{e}_x + B_y(x, y)\vec{e}_z \quad (\text{в декартовых координатах}),$$

$$\vec{B} = B_r(r, \alpha)\vec{e}_r + B_\alpha(r, \alpha)\vec{e}_z \quad (\text{в цилиндрических координатах}),$$

не зависящее от координаты  $z$ , в то время как при использовании векторного потенциала складываются функции вида (4.17) от отдельных токовых нитей и результатом суперпозиции будут

$$\vec{A} = A(x, y)\vec{e}_z \quad \text{либо} \quad \vec{A} = A(r, \alpha)\vec{e}_z,$$

характеризующиеся одной скалярной функцией. Полезно заметить, что при этом силовыми линиями поля  $\vec{B}$  являются кривые  $A(x, y) = \text{const}$ . Действительно, дифференциальное уравнение силовых линий, которое в рассматриваемом случае плоского поля можно записать в виде

$$B_y(x, y)dx - B_x(x, y)dy = 0,$$

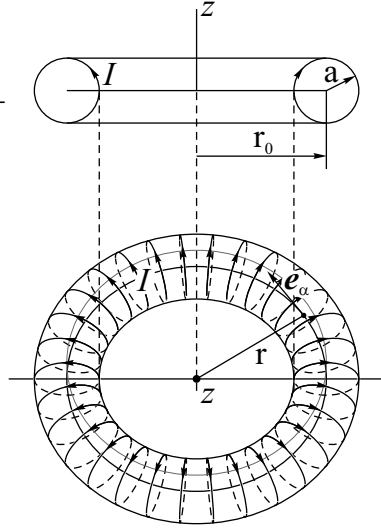


Рис. 4.11



#### 4.7. Граничные условия и математическая формулировка задачи 161

после перехода к вектор-потенциалу принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = dA = 0,$$

подтверждая, таким образом, высказанное утверждение.

Вот другой случай подобного типа — осесимметричное магнитное поле, в сферической или цилиндрической системах координат представляемое в виде

$$\vec{B} = B_r(r, \theta)\vec{e}_r + B_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta, \quad \text{либо} \quad \vec{B} = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z.$$

Это поле создается системой концентрических трубок тока, и для него вектор-потенциал, как следует из результатов (4.18)—(4.20), будет характеризоваться одной скалярной функцией  $A_\alpha(r, \theta)$  или  $A_\alpha(r, z)$ .

Для иллюстрации сказанного рассмотрим

*Пример 4.6.* По поверхности бесконечно длинного цилиндра радиуса  $a$  вдоль его оси симметрии течет ток с поверхностной плотностью

$$i_z(\alpha) = i_0 \sin m\alpha,$$

где  $i_0 = \text{const}$  — амплитуда,  $m = 1; 2; 3; \dots$  — произвольное целое число,  $\alpha$  — угловая координата (рис. 4.12). Найти распределение магнитного поля внутри (область 1) и вне цилиндра (область 2), созданного данным распределенным током. Здесь мы имеем дело с системой токовых нитей  $i_z(\alpha)d\alpha$ , параллельных оси  $z$ . Следовательно, искомое магнитное поле с компонентами  $B_r(r, \alpha)$ ,  $B_\alpha(r, \alpha)$  в каждой из областей описывается одной скалярной функцией  $A(r, \alpha)$  как

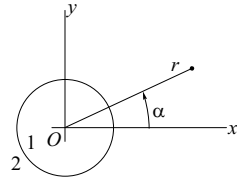


Рис. 4.12

$$\vec{B}_{1,2} = \text{rot}[A_{1,2}(r, \alpha)\vec{e}_z] = \frac{1}{r} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial \alpha} \vec{e}_r - \frac{\partial A_{1,2}}{\partial r} \vec{e}_\alpha.$$

Так как в системе нет объемных токов, уравнение (4.16) для вектор-потенциала сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta A_{1,2}(r, \alpha) = 0. \quad (4.29)$$

Граничные условия

$$A_1 = A_2|_{r=a}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial r} - \frac{\partial A_2}{\partial r}|_{r=a} = \frac{4\pi}{c} i_0 \sin m\alpha \quad (4.30)$$

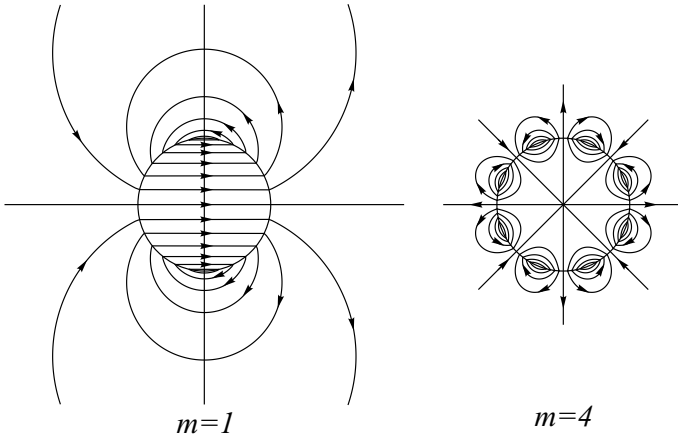


Рис. 4.13

обеспечивают выполнение условий (4.26), (4.27) для нормальной  $B_r$  и тангенциальной  $B_\alpha$  компонент поля  $\vec{B}$  на границе  $r = a$ . Кроме того, на оси симметрии ( $r = 0$ ) поле  $\vec{B}_1$  не должно иметь особенностей, а на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) необходимо обеспечить  $\vec{B}_2 \rightarrow 0$ . Для выполнения этих условий достаточно на  $A_1$ ,  $A_2$  наложить требования ограниченности соответственно при  $r = 0$  и  $r \rightarrow \infty$ , т. е. условия

$$A_1|_{r=0} \neq \infty, \quad A_1|_{r \rightarrow \infty} \neq \infty. \quad (4.31)$$

Решение математической задачи (4.29)–(4.31) «сконструируем» из набора функций (1.24), удовлетворяющих уравнению Лапласа. С учетом условий (4.31) примем

$$A_1(r, \alpha) = C_1 r^m \sin m\alpha, \quad A_2(r, \alpha) = C_2 r^{-m} \sin m\alpha.$$

Вычислив из граничных условий (4.30) значения произвольных постоянных  $C_1, C_2$  и подставив их в предыдущие выражения, получим

$$A_1(r, \alpha) = \frac{2\pi i_0 a}{cm} \left(\frac{r}{a}\right)^m \sin m\alpha, \quad A_2(r, \alpha) = \frac{2\pi i_0 a}{cm} \left(\frac{a}{r}\right)^m \sin m\alpha.$$

Результат решения проиллюстрируем картиной силовых линий поля  $\vec{B}$  для частных случаев  $m = 1$  и  $m = 4$ , представленных на рис. 4.13.

## 4.8. Магнитное поле ограниченной системы токов на больших расстояниях (магнитный диполь)

1. Предположим, что токи с плотностью  $\vec{j}$  сосредоточены в некоторой области пространства, которую можно заключить в сферу конечного радиуса  $a$ . Тогда, как и в случае электростатики, для вектор-потенциала

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R(\vec{r}, \vec{r}')}$$

множитель  $1/R(\vec{r}, \vec{r}')$  заменим первыми двумя членами

$$\frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}$$

из разложения (1.26), и в результате найдем вектор-потенциал, описывающий поле на больших расстояниях  $r \gg a$  от этой системы токов, в виде суммы

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{cr} \int_V \vec{j}(\vec{r}') dV' + \frac{1}{cr^3} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dV' = \vec{A}_0(\vec{r}) + \vec{A}_1(\vec{r}). \quad (4.32)$$

Для вычисления  $\vec{A}_0, \vec{A}_1$  рассмотрим систему постоянных объемных токов мысленно разобьем на элементарные замкнутые трубки тока. Воспользовавшись правилом (4.5), вклад трубки с током  $dI$ , схематически изображенной на рис. 4.14, в искомый вектор-потенциал представим в виде

$$d\vec{A}_0 = \frac{dI}{cr} \oint d\vec{\ell}, \quad d\vec{A}_1 = \frac{dI}{cr^3} \oint (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{\ell}.$$

Так как для любого замкнутого контура  $\oint d\vec{\ell} = 0$ , отсюда следует, что

$$\int_V \vec{j}(\vec{r}') dV' = 0 \quad (4.33)$$

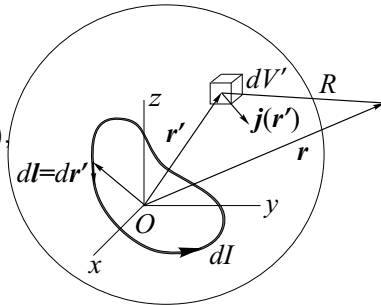


Рис. 4.14

и нулевой член разложения в выражении (4.32)

$$\vec{A}_0 \equiv 0.$$

В контурном интеграле, входящем в  $d\vec{A}_1$ , векторный элемент контура  $d\vec{\ell}$  заменим на  $d\vec{r}'$  (см. рис. 4.14). Тогда

$$d\vec{A}_1 = \frac{dI}{cr^3} \oint (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{r}',$$

и, выполнив два простых преобразования, входящий в подынтегральное выражение вектор  $\vec{r}$ , не зависящий от переменной интегрирования, вынесем за знак интеграла. Для этого, во-первых, воспользуемся тройным векторным произведением и подынтегральное выражение представим в виде

$$(\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' = [[\vec{r}' \times d\vec{r}'] \times \vec{r}] + \vec{r}' (\vec{r} \cdot d\vec{r}'). \quad (4.34)$$

Затем последнее слагаемое (4.34) преобразуем, выделив полный дифференциал:

$$\vec{r}' (\vec{r} \cdot d\vec{r}') = d'[\vec{r}' (\vec{r} \cdot \vec{r}')] - (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.35)$$

(штрих при знаке  $d$  указывает переменную дифференцирования). При интегрировании по замкнутому контуру полный дифференциал дает нуль, а последний элемент в тождестве (4.35) с точностью до знака совпадает с подынтегральным выражением. В результате получаем

$$dI \oint (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' = (dI/2) \oint [\vec{r}' \times d\vec{r}'] \times \vec{r}$$

или, после обратного перехода к объемным интегралам,

$$\int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dV' = \frac{1}{2} \left[ \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] dV' \times \vec{r} \right]. \quad (4.36)$$

Следовательно, искомый вектор-потенциал приобретает вид

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{[\vec{m} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad (4.37)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] dV'. \quad (4.38)$$

Здесь  $\vec{m}$  — магнитный момент системы. Таким образом, как характеристика ограниченной системы токов (магнитного диполя), магнитный

момент  $\vec{m}$  определяет распределение поля  $\vec{B}$  на больших расстояниях от системы токов. Полученный первый член (4.37) мультипольного разложения магнитного поля является главным, если только магнитный момент системы  $\vec{m} \neq 0$ ; легко заметить, что вследствие свойства (4.33)  $\vec{m}$  не зависит от выбора начала координат.

2. Магнитное поле диполя  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}_1$ . Для вычисления ротора векторного поля (4.37) воспользуемся формулой для ротора произведения, откуда

$$\vec{B} = \text{rot} \frac{[\vec{m} \times \vec{r}]}{r^3} = \frac{1}{r^3} \text{rot}[\vec{m} \times \vec{r}] + [\text{grad} \frac{1}{r^3} \times [\vec{m} \times \vec{r}]].$$

Обратившись к формуле для ротора векторного произведения и приняв во внимание, что  $\vec{m} = \text{const}$ ,  $\text{div} \vec{r} = 3$ ,  $(\vec{m} \cdot \nabla) \vec{r} = \vec{m}$ , получим

$$\text{rot} [\vec{m} \times \vec{r}] = \vec{m} \text{div} \vec{r} - \vec{r} \text{div} \vec{m} + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{r} = 2\vec{m}.$$

Так как  $\text{grad} 1/r^3 = -3\vec{r}/r^5$ , окончательный результат будет иметь вид

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \quad (4.39)$$

или с введением единичного вектора  $\vec{n} = \vec{r}/r$ , направленного вдоль радиуса-вектора точки наблюдения:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{m})\vec{n} - \vec{m}}{r^3}. \quad (4.40)$$

Формулы (4.39), (4.40) получаются из соответствующих формул (1.30), (1.30') для электрического поля диполя заменой дипольного момента  $\vec{d}$  на магнитный момент  $\vec{m}$ . Следовательно, картина силовых линий магнитного диполя полностью повторяет соответствующую картину электрического поля диполя, схематически изображенную на рис. 1.29.

*Пример 4.7. Магнитный момент плоского витка с током.* Для витка с током  $I$  магнитный момент выражается контурным интегралом

$$\vec{m} = \frac{I}{2c} \oint [\vec{r}' \times d\vec{r}'].$$

Если начало координат поместить в плоскости витка, то из геометрического смысла векторного произведения  $[\vec{r}' \times d\vec{r}'] = 2dS\vec{n}$ , где  $dS$  — площадь заштрихованного треугольника (рис. 4.15),  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к плоскости витка. Следовательно, магнитный момент

$$\vec{m} = (IS/c)\vec{n} \quad (4.41)$$

определяется произведением площади витка на силу тока и не зависит от формы контура.

*Пример 4.8. Магнитное поле вне бесконечно длинного соленоида произвольного поперечного сечения.* Пусть точка наблюдения находится на расстоянии  $r \gg a$  от оси  $z$ , проходящей внутри соленоида, где  $a = \sqrt{S}$  — характерный размер поперечного сечения  $S$ . Мысленно соленоид разобьем на отдельные элементы длины  $dz$ , являющиеся плоскими витками с током  $dI = idz = INdz$ ,  $i = IN$  — поверхностная плотность тока. Каждый виток для рассматриваемой точки наблюдения можно характеризовать магнитным моментом  $d\vec{m} = (dI \cdot S/c)\vec{e}_z$  и вектор-потенциал от элемента соленоида будет

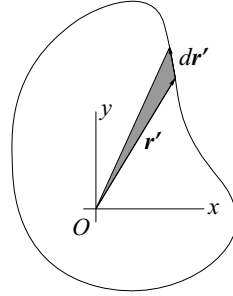


Рис. 4.15

$$d\vec{A} = \frac{d\vec{m} \times \vec{R}}{R^3} = \frac{dm \sin \theta}{R^2} \vec{e}_\alpha$$

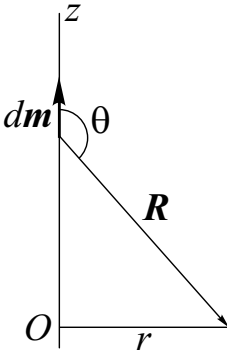


Рис. 4.16

(обозначения — на рис. 4.16), осесимметричен и имеет только  $\alpha$ -компоненту в цилиндрической системе координат  $r, \alpha, z$ . Для интегрирования по соленоиду в качестве переменной интегрирования примем угол  $\theta$ , изменяющийся от 0 до  $\pi$  при изменении  $z$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . С учетом геометрических связей

$$R \sin \theta = r, \quad z = -r \operatorname{ctg} \theta$$

имеем

$$dA_\alpha = \frac{iS}{c} dz \cdot \frac{\sin \theta}{R^2} = \frac{iS}{cr} \sin \theta d\theta,$$

откуда

$$dA_\alpha(r) = \frac{iS}{cr} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2iS}{cr},$$

т. е. вектор-потенциал на больших расстояниях от соленоида имеет структуру

$$\vec{A} = \frac{\Lambda}{r} \vec{e}_\alpha, \quad \Lambda = \text{const},$$

для которой  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \equiv 0$ . Таким образом, условие  $\vec{B}|_{\infty} = 0$ , использовавшееся при решении задачи о поле соленоида в § 4.6, 4.7, доказано. Следовательно, вне бесконечно длинного соленоида поле  $\vec{B}$  тождественно равно нулю.

## 4.9. Сила и момент сил, действующие на магнитный диполь во внешнем магнитном поле

1. Если некоторое распределение тока  $\vec{j}$ , не изменяющееся со временем, находится во внешнем постоянном магнитном поле, то суммарная сила  $\vec{F}$  и суммарный момент сил  $\vec{N}$ , действующие на систему токов, на основании формулы (4.2) определяются как интегралы по всему объему, занятому токами,

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')] dV'; \quad (4.42)$$

$$\vec{N} = \frac{1}{c} \int [\vec{r}' \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')] ] dV'. \quad (4.43)$$

2. В случае тока, занимающего ограниченный объем  $V$  с характерным размером  $a$ , находящегося в *слабонеоднородном внешнем* магнитном поле  $\vec{B}(\vec{r})$  (магнитный диполь во внешнем магнитном поле)  $\vec{F}$  и  $\vec{N}$  можно выразить через магнитный момент системы токов  $\vec{m}$ .

Слабонеоднородность поля  $\vec{B}(\vec{r})$  означает, что на расстояниях порядка  $a$  поле меняется незначительно и, следовательно, в пределах объема  $V$  для поля  $\vec{B}$  можно воспользоваться первыми членами разложения в ряд Тейлора

$$\vec{B}(\vec{r}') = B(O) + (\vec{r}' \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{r})|_O, \quad (4.44)$$

где  $O$  — начало координат («центр» магнитного диполя — рис. 4.17). Обратим внимание, что оператор  $\nabla$  предусматривает дифференцирование по координатам радиус-вектора  $\vec{r}$ , поэтому входящий в равенство (4.44) вектор  $\vec{r}'$  для оператора  $\nabla$  является постоянным. Из того, что  $\vec{B}(\vec{r})$  — внешнее поле, для которого в области  $V$   $\text{rot} \vec{B} \equiv 0$ , следует

$$(\vec{r}' \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{r}) = \text{grad}(\vec{r}' \cdot \vec{B}(\vec{r})). \quad (4.45)$$

Действительно, из формулы градиента скалярного произведения имеем

$$\text{grad}(\vec{r}' \cdot \vec{B}) = (\vec{r}' \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{r}' + [\vec{r}' \times \text{rot}\vec{B}] + [\vec{B} \times \text{rot}\vec{r}'];$$

так как все три «лишние» слагаемые правой части данного выражения равны нулю, утверждение (4.45) справедливо и разложение (4.44) можно представить в виде

$$\vec{B}(\vec{r}') = B(O) + \text{grad}(\vec{r}' \cdot \vec{B}(\vec{r}))|_O. \quad (4.46)$$

3. Подставим выражение (4.46) в интеграл (4.42), приняв во внимание равенство (4.33), и получим

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{c} \int_V [\vec{j}(\vec{r}') \times \text{grad}(\vec{r}' \cdot \vec{B}(\vec{r}))|_O] dV' = \\ &= -\frac{1}{c} \text{rot} \left[ \int_V (\vec{r}' \cdot \vec{B}(\vec{r})) \vec{j}(\vec{r}') dV' \right] |_O \end{aligned}$$

(последний шаг сделан с учетом того, что вектор  $\vec{j}(\vec{r}')$  для оператора  $\text{rot}$  является постоянным). Заметим, что последний интеграл получается из левой части равенства (4.36) заменой одного постоянно-го вектора  $\vec{r}$  на другой —  $\vec{B}(\vec{r})$ . Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{1}{c} \int (\vec{r}' \cdot \vec{B}(\vec{r})) \vec{j}(\vec{r}') dV' = \frac{1}{2c} \left[ \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] dV' \times \vec{B}(\vec{r}) \right] = [\vec{m} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

и суммарная сила действительно выражается через магнитный момент  $\vec{m}$  системы токов как

$$\vec{F} = \text{rot}[\vec{B}(\vec{r}) \times \vec{m}]|_O.$$

Указание на точку  $O$  из этой формулы можно убрать и представить ее в виде

$$\vec{F} = \text{rot}[\vec{B} \times \vec{m}],$$

так как очевидно, что ротор векторного поля  $[\vec{B} \times \vec{m}]$ , где  $\vec{m}$  — постоянный вектор, надо вычислять в точке расположения магнитного поля.

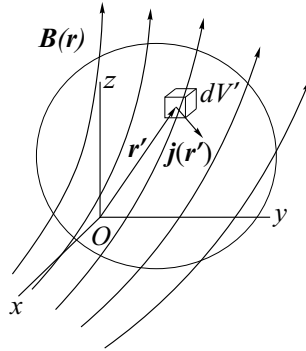


Рис. 4.17



Выражение для силы в таком виде обычно не оставляют. Раскрыв ротор векторного произведения и воспользовавшись тем, что  $\text{div} \vec{B} = 0$ ,  $\vec{m} = \text{const}$ , легко получить

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (4.47)$$

или, если воспользоваться равенством (4.45) с заменой  $\vec{r}'$  на  $\vec{m}$ , другое выражение

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B}). \quad (4.48)$$

В случае статических полей выражения (4.47), (4.48), как мы видели, между собой эквивалентны. В общем случае переменных полей только последняя из формул оказывается справедливой.

Заметим, что полученные формулы полностью аналогичны формулам (1.31), (1.34) для диполя во внешнем электрическом поле. Здесь их объединим и представим в виде двух столбцов:

$$\vec{F} = \left\| \begin{array}{l} (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E} \\ \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} \text{grad}(\vec{d} \cdot \vec{E}) \\ (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \end{array} \right\|$$

В первом столбце находятся формулы, справедливые в общем случае, а второй столбец состоит из формул, «работающих» в стационарных полях.

4. Для определения суммарного момента сил  $\vec{N}$  достаточно в выражение (4.43) подставить нулевой член разложения (4.44) вместо  $\vec{B}(\vec{r}')$ , откуда

$$\begin{aligned} \vec{N} = \frac{1}{c} \int_V [\vec{r}' \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{O})]] dV' = \frac{1}{c} \int_V (\vec{r}' \cdot \vec{B}(\vec{O})) \vec{j}(\vec{r}') dV' - \\ - \frac{1}{c} \vec{B}(\vec{O}) \int_V (\vec{r}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')) dV'. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Используя вспомогательную формулу (4.36) (с заменой  $\vec{r}$  на  $\vec{B}(\vec{O})$ ) и определение (4.38), легко заметить, что первое слагаемое правой части (4.49) равно  $[\vec{m} \times \vec{B}(\vec{O})]$ . Интеграл, входящий во второе слагаемое, равен нулю. Для доказательства опять используем методику разбиения объемного интеграла на контурные для отдельных трубок тока. Тогда для одной трубки с током  $I$  исследуемый интеграл превратится в

$$I \oint (\vec{r}' \cdot d\vec{r}') = I \oint d' \frac{(\vec{r}')^2}{2} = 0,$$

т. е. будет равен нулю как интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру. Следовательно, интеграл по всему объему  $V$ , занятому токами, также будет равен нулю.

Таким образом, искомый момент сил

$$\vec{N} = [\vec{m} \times \vec{B}], \quad (4.50)$$

откуда видно, что этот момент стремится повернуть магнитный диполь так, чтобы совместить его направление с направлением поля  $\vec{B}$ .

5. Выражение (4.48) для силы  $\vec{F}$  можно представить в виде

$$\vec{F} = -\text{grad } U$$

и считать, что магнитный диполь во внешнем поле обладает потенциальной энергией

$$U \equiv -(\vec{m} \cdot \vec{B}). \quad (4.51)$$

Значение  $U$  меняется при перемещении диполя из точки в точку, а в фиксированной точке пространства зависит от угла между векторами  $\vec{m}$  и  $\vec{B}$ ; минимального значения  $U_{\min} = -mB$  потенциальная энергия достигает при направлении магнитного момента, совпадающем с направлением поля  $\vec{B}$  в данной точке.

При использовании понятия «потенциальная энергия магнитного диполя во внешнем поле» необходимо проявлять определенную осторожность, не забывая, что  $U$  не определяет полную энергию диполя в поле  $\vec{B}$ . При внесении диполя  $\vec{m}$  на занимаемое им место в магнитном поле необходимо еще совершить работу по поддержанию токов  $\vec{j}$ , обеспечивающих постоянство  $\vec{m}$ . Это — работа против ЭДС индукции и подробно об этом можно будет говорить только после изучения закона электромагнитной индукции.

Дальше нам предстоит обратиться к изучению магнитного поля в материальных средах. Влияние среды на магнитное поле обусловлено появлением молекулярных токов, которые в свою очередь связаны с так называемым вектором намагниченности, представляющим собой магнитный момент, приходящийся на единицу объема материальной среды. Таким образом, изучение магнитного поля в средах касается вопросов, так или иначе связанных с поведением атомных систем в магнитном поле. Правильное понимание подобных вопросов и доказательные утверждения здесь могут быть построены только на основе квантовой механики. Но оказывается, что некоторые результаты, полученные в классическом приближении, находят подтверждение при точном квантовомеханическом рассмотрении. На них мы здесь остановимся.

## 4.10. Связь магнитного и механического моментов атомной системы

Рассмотрим классическую модель атома и представим, что электрон вращается по круговой орбите вокруг ядра под действием центральных сил. Оказывается, что для любой заряженной частицы с зарядом  $q$  и массой  $m_q$ , вращающейся по круговой орбите (рис. 4.18), магнитный момент  $\vec{m}$  и момент импульса  $\vec{J}$  связаны определенным соотношением, которое здесь получим. Для этого круговую орбиту примем за плоский виток, усредненная величина тока в котором определяется величиной заряда и частотой вращения как

$$I = q(v/2\pi r).$$

По формуле (4.41) магнитный момент этого тока равен

$$\vec{m} = \frac{IS}{c}\vec{n} = q\frac{v}{2\pi r}\frac{\pi r^2}{c}\vec{n} = \frac{qvr}{2c}\vec{n}$$

и направлен по нормали к плоскости орбиты. Момент импульса частицы

$$\vec{J} = [\vec{r} \times m_q \vec{v}] = rm_q v \vec{n}$$

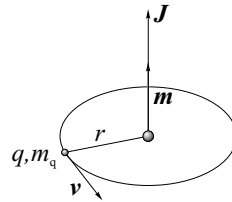


Рис. 4.18

имеет то же направление. Отсюда видно, что магнитный момент орбитального движения заряженной частицы прямо пропорционален ее механическому моменту, т. е.

$$\vec{m} = \frac{q}{2m_q c} \vec{J},$$

причем коэффициент пропорциональности не зависит ни от скорости частицы  $v$ , ни от радиуса орбиты  $r$ . Для электрона, заряд которого равен  $-e$ , имеем

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e c} \vec{J} \quad (\text{для электрона на орбите}).$$

Это — первое соотношение, которое получается при классическом рассмотрении и остается справедливым в квантовой механике. Кроме орбитального движения электрон совершает «вращение» вокруг собственной оси (*спин*), чему соответствуют магнитный момент и момент импульса. По чисто квантовомеханическим причинам отношение  $\vec{m}$  к  $\vec{J}$

для собственного вращения электрона в два раза больше, чем для орбитального движения:

$$\vec{m} = -\frac{e}{m_e c} \vec{J} \quad (\text{спин электрона}).$$

В любом атоме, вообще говоря, имеется несколько электронов, и его полный момент импульса и полный магнитный момент представляют некоторую комбинацию спиновых и орбитальных моментов. И без каких-либо на то классических оснований в квантовой механике (для изолированного атома) направление магнитного момента всегда противоположно направлению момента импульса. Отношение их не обязательно должно быть  $-e/2m_e c$  или  $-e/m_e c$ ; оно расположено где-то между ними, ибо здесь «перемешиваются» вклады от спинов и орбит. Связь можно представить в виде

$$\vec{m} = -g \left( \frac{e}{2m_e c} \right) \vec{J}, \quad (4.52)$$

где множитель  $g$  ( $g$ -фактор) характеризует состояние атома.

Оказывается, что аналогичное положение справедливо для атомного ядра. Здесь протоны и нейтроны двигаются по своего рода орбитам и вращаются вокруг собственных осей, а вот магнитный момент опять-таки оказывается параллелен моменту импульса:

$$\vec{m} = g \left( \frac{e}{2m_p c} \right) \vec{J} \quad (\text{для ядра}).$$

В этой формуле  $m_p$  — масса протона,  $g$  — ядерный  $g$ -фактор. Известно, что для протона  $g$ -фактор спинового магнитного момента не равен 2, как у электрона. Он равен  $\approx 5,6 = 2 + 3,6$ , где «2» соответствовало бы точечному протону, а добавка 3,6 обусловлена его структурой.

Удивительно, что спиновый магнитный момент есть и у нейтрона. Для него  $g \simeq -3,8$ . Получается, что нейтрон в магнитном смысле не является в точности «нейтральным». Он напоминает маленький магнитик и имеет такой же магнитный момент, как вращающийся отрицательный заряд.

## 4.11. Прецессия магнитного момента. Магнитный резонанс

Перейдем ко второму примеру, когда классический подход приводит к результату, подтверждающемуся при точном квантовомеханическом рассмотрении. Рассмотрим задачу классической механики о движении атомного магнетика в однородном магнитном поле. Суммарная сила (4.48) на магнетик в этом случае не действует, существует лишь момент сил  $\vec{N}$  (4.50), стремящийся повернуть магнитный момент  $\vec{m}$  так, чтобы совместить его с вектором  $\vec{B}$ . Так как рассматриваемая атомная система кроме магнитного момента обладает и моментом импульса, действие  $\vec{N}$  не приводит к повороту магнетика в сторону поля  $\vec{B}$ , а сводится, как нетрудно убедиться, к прецессии вокруг направления вектора  $\vec{B}$ .

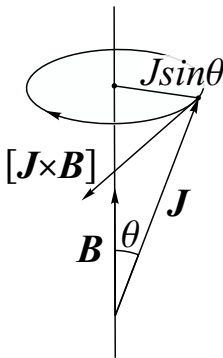


Рис. 4.19

Не конкретизируя значения коэффициента пропорциональности, связь между магнитным и механическим моментами изобразим в виде

$$\vec{m} = g_0 \vec{J}$$

( $|g_0|$  называется гиромагнитным отношением). Тогда уравнение движения магнетика  $d\vec{J}/dt = [\vec{m} \times \vec{B}]$  под действием момента сил принимает вид

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = g_0 [\vec{J} \times \vec{B}], \quad (4.53)$$

откуда следует, что производная вектора  $\vec{J}$  по времени перпендикулярна самому вектору и, следовательно,  $|\vec{J}|$  не меняется со временем. Вектор  $\vec{J}$  совершает вращение вокруг направления вектора  $\vec{B}$  (рис. 4.19) с угловой скоростью  $\vec{\Omega}_p$ , величину которой можно определить, приравнявая скорость перемещения конца вектора  $\vec{J}$ , т. е.  $J \sin \theta \Omega_p$ , величине  $g_0 J B \sin \theta$ , даваемой уравнением (4.53). Отсюда для угловой скорости прецессии имеем

$$\vec{\Omega}_p = -g_0 \vec{B}. \quad (4.54)$$

Таков результат классического рассмотрения. Квантовая теория приводит к тому же результату. Только смысл «прецессии» в ней совсем иной и чтобы его «увидеть», здесь приведем несколько результатов квантовой

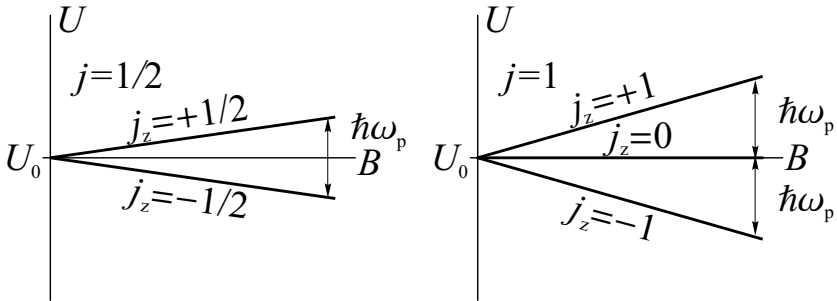


Рис. 4.20

механики, имеющих непосредственное отношение к рассматриваемому вопросу.

Самое главное, из квантовой механики следует, что момент импульса не может иметь произвольных значений. Любая система, в частности атом или ядро с заданной энергией, имеет характерное число  $j$  — *спин атомной системы* (квантовое число полного момента импульса — либо целое, либо полуцелое) такое, что компонента момента импульса по любому фиксированному направлению (назовем  $J_z$ ) может принимать только одно из значений

$$J_z = j\hbar, (j-1)\hbar, \dots, -j\hbar$$

из набора  $(2j+1)$  величин, где  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$  эрг  $\cdot$  с — постоянная Планка. Соответственно и магнитный момент может принимать лишь фиксированные значения

$$m_z = g_0 J_z. \quad (4.55)$$

Теперь вспомним, что система с магнитным моментом  $\vec{m}$  в магнитном поле обладает потенциальной энергией  $U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m_z B$ . Отсюда следует, что энергия атомной системы в магнитном поле *расщепляется* на несколько уровней, разность между которыми

$$\Delta U = \Delta m_z B$$

пропорциональна полю  $B$ . Расщепление энергетических уровней в атомной системе со спинами  $1/2, 1$  показано на рис. 4.20, где символом  $j_z$

## 4.11. Прецессия магнитного момента. Магнитный резонанс

175

отмечены значения безразмерных величин  $J_z/\hbar$ . (Здесь учтено соотношение (4.52), согласно которому для любого расположения электронов магнитный момент всегда направлен противоположно моменту импульса.) Так как вследствие (4.55)  $\Delta m_z = |g_0|\Delta J_z$ , а  $\Delta J_z = \hbar$ , следовательно,

$$\begin{aligned}\Delta U &= \hbar\omega_p, \\ \omega_p &= |g_0|B,\end{aligned}$$

где  $\omega_p$  – как раз та частота, которая в формуле (4.54) фигурирует как угловая скорость прецессии.

Известно, что если энергетические уровни атома отличаются на  $\Delta U$ , это может вызвать переход с верхнего уровня на нижний с излучением кванта света с частотой  $\omega$ , причем

$$\hbar\omega = \Delta U.$$

То же самое может произойти с атомами в магнитном поле. Но здесь разность энергий мала и соответствующие частоты – это частоты СВЧ диапазона или радиочастоты. Так, для атома, как следует из соотношения (4.52),  $|g_0| = g(e/2m_e c)$  и для соответствующей частоты  $f_p = \omega_p/2\pi$  имеем

$$\begin{aligned}f_p &= \frac{1}{2\pi} \frac{e}{2m_e c} gB \simeq \left( \frac{1}{2\pi} \frac{4,8 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-28} 3 \cdot 10^{10}} \frac{\text{Гц}}{\text{Гс}} \right) gB \simeq \\ &\simeq \left( 1,4 \frac{\text{МГц}}{\text{Гс}} \right) gB.\end{aligned}$$

При  $g = 2$ ,  $B = 10^4 \text{ Гс}$  отсюда получаем  $f_p \approx 2,8 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$ , что соответствует длине волны  $\lambda \sim 1 \text{ см}$ . Аналогично для ядра

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \frac{e}{2m_p c} gB \simeq \left( 0,76 \frac{\text{кГц}}{\text{Гс}} \right) gB$$

и при  $g = 5, 6$ ,  $B = 10^4 \text{ Гс}$  имеем  $f_p \approx 4 \cdot 10^7 \text{ Гц}$  или  $\lambda \sim 10^3 \text{ см}$ .

Переход с нижнего на верхний энергетический уровень также может происходить; в случае атомов в магнитном поле — с поглощением энергии СВЧ волн. Если на атом, находящийся в сильном постоянном магнитном поле, подействовать переменным полем частоты  $\omega$ , то имеется вероятность перевести его с нижнего энергетического уровня на верхний, т. е. перевернуть атомный магнетик, если частота близка к  $\omega_p$  (частоте «прецессии»), являющейся *резонансной*. Экспериментально

эту резонансную частоту фиксируют по поглощению энергии генератора переменного магнитного поля, идущей на перемагничивание образца. Измеряя таким образом частоту этого резонанса в известном магнитном поле, можно с очень большой точностью определить магнитный момент, т. е.  $g(e/2m_0c)$ .



## Глава 5

# МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ

### 5.1. Основные уравнения

1. Орбитальные и спиновые вращения электронов и атомных ядер, которые упоминались в конце предыдущей главы, в отношении возбуждаемого ими магнитного поля эквивалентны микротокам, циркулирующим в атомах вещества. Они получили общее название молекулярных токов. Влияние материальной среды на магнитное поле обусловлено именно этими токами. Говорят, что среда в магнитном поле намагничивается, подразумевая под этим, что из-за *молекулярных токов* любой физически бесконечно малый объем среды в поле  $\vec{B}$  приобретает магнитный момент  $d\vec{m} = \vec{M}dV$ , где

$$\vec{M} = N \langle \vec{m} \rangle \quad (5.1)$$

— вектор намагниченности, представляющий собой магнитный момент единицы объема. Здесь  $N$  — концентрация атомов или молекул,  $\langle \vec{m} \rangle$  — их средний магнитный момент.

2. Магнитное поле в среде  $\vec{B}$  есть результат усреднения истинного, *микроскопического* поля  $\vec{B}_{\text{микро}}$ , которое удовлетворяет уравнениям (4.21), (4.22):

$$\text{rot} \vec{B}_{\text{микро}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{микро}},$$

$$\operatorname{div} \vec{B}_{\text{микро}} = 0.$$

Следовательно, поле в среде

$$\vec{B} = \langle \vec{B}_{\text{микро}} \rangle$$

управляется следующими уравнениями:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{микро}} \rangle; \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (5.3)$$

получающимися из предыдущих в результате усреднения. Входящий в (5.2) усредненный ток можно представить в виде суммы

$$\langle \vec{j}_{\text{микро}} \rangle = \vec{j} + \vec{j}_m \quad (5.4)$$

и уравнение (5.2) переписать в виде

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_m), \quad (5.5)$$

где первое слагаемое  $\vec{j}$  объединяет известные токи, каковыми могут быть токи проводимости в среде, токи электронных или ионных пучков или токи, бегущие по проводам, если они имеются. Второе слагаемое  $\vec{j}_m$  представляет собой результат усреднения молекулярных токов и будет называться плотностью молекулярных токов. Таким образом, как подчеркивается уравнением (5.5), в создании магнитного поля в среде участвуют не только «внешние» токи  $\vec{j}$ , но и токи, циркулирующие в пределах атомов и молекул, усредненной характеристикой которых служит плотность молекулярных токов  $\vec{j}_m$ .

3. Очевидно, что  $\vec{j}_m$  каким-то образом связана с результатом усреднения магнитных моментов атомов и молекул, т. е. с вектором намагниченности  $\vec{M}$ . Как оказывается, эта зависимость имеет такой вид:

$$\vec{j}_m = c \operatorname{rot} \vec{M}, \quad (5.6)$$

откуда, в частности, следует, что если  $\vec{M} = \text{const}$ , т. е. среда намагничена однородно, то в этом случае объемные молекулярные токи в среде не возникают (аналогия с однородно поляризованным диэлектриком). Доказательство соотношения (5.6) будет приведено ниже, а пока с его

## 5.1. Основные уравнения

179

помощью из уравнения (5.5) исключим  $\vec{j}_m$  и результат запишем в виде уравнения

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (5.7)$$

для вспомогательного вектора

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}, \quad (5.8)$$

вводимого аналогично вектору  $\vec{D}$  в диэлектриках.

Для обычных сред (т. е. не для ферромагнетиков и сверхпроводников) вектор  $\vec{M}$  (5.1) пропорционален локальному полю  $\vec{B}$ , являющемуся причиной возникновения намагниченности:

$$\vec{M}(\vec{r}) = \kappa \vec{B}(\vec{r}), \quad (5.9)$$

поэтому вспомогательный вектор  $\vec{H}$  также пропорционален  $\vec{B}$ . По историческим причинам эту зависимость изображают в виде

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.10)$$

и коэффициент пропорциональности  $\mu$  называют магнитной проницаемостью среды.

4. Уравнения (5.3), (5.7), (5.10) составляют полную систему для описания стационарного магнитного поля в среде. В компактном виде ее здесь воспроизведем рядом с аналогичной системой для электростатики диэлектриков

$$\left( \begin{array}{l} \text{div} \vec{B} = 0, \\ \text{rot} \vec{H} = (4\pi/c) \vec{j}, \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = 0, \\ \text{div} \vec{D} = 4\pi \rho, \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \end{array} \right),$$

чтобы подчеркнуть их логическую схожесть. Точно так же, как в электростатике дивергенция вспомогательного поля  $\vec{D}$  определялась свободными зарядами (не зависела от неизвестных связанных зарядов), в магнитостатике ротор вспомогательного поля  $\vec{H}$  не зависит от молекулярных токов  $\vec{j}_m$ . При необходимости их нетрудно найти после определения поля  $\vec{B}$ , воспользовавшись уравнениями (5.5) (5.7), (5.10), откуда

$$\vec{j}_m = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \left( \frac{\mu - 1}{\mu} \vec{B} \right). \quad (5.11)$$

В частности, если некоторая область пространства  $V$  заполнена однородной средой с  $\mu = \text{const}$ , а объемные токи  $\vec{j}$  в ней отсутствуют

(т. е.  $\text{rot}\vec{H} = 0$  и  $\text{rot}\vec{B} = 0$ ), то в области  $V$  объемные молекулярные токи не возникают,  $\vec{j}_m = 0$ , что непосредственно следует из соотношения (5.11). Молекулярные токи могут появиться только на границе области в виде поверхностных токов  $\vec{i}_m$ , о которых сказано ниже.

5. Согласно определению (5.8), векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  имеют одинаковую размерность. Они должны иметь и общую единицу. Единицей измерения  $\vec{B}$  в гауссовой системе является *гаусс*. Та же единица применяется для измерения  $\vec{H}$ , но при этом ее называют *эрстедом*, хотя между этими двумя единицами абсолютно нет никакой разницы.

## 5.2. Доказательство соотношения $\vec{j}_m = c \text{rot}\vec{M}$

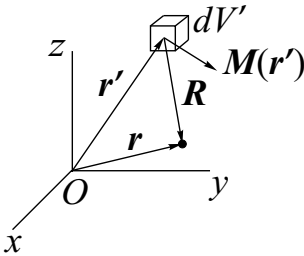


Рис. 5.1

Пусть  $\vec{M}(\vec{r})$  описывает распределение вектора намагниченности в пространстве. Будем считать, что существует замкнутая поверхность  $S$ , на которой и вне ее  $\vec{M} \equiv 0$ . Найдём вектор-потенциал  $\vec{A}(\vec{r})$  в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}$ , обусловленный распределёнными магнитными моментами (рис. 5.1). Каждый элемент объёма  $dV'$  обладает магнитным моментом  $\vec{M}(\vec{r}')dV'$ , поэтому на основании принципа суперпозиции и результата (4.37) искомый вектор-потенциал

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{[\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{R}(\vec{r}, \vec{r}')] }{R^3(\vec{r}, \vec{r}')} dV' \quad (5.12)$$

определяется интегралом по объёму  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ . Воспользовавшись представлением

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \text{grad}' \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')},$$

подынтегральное выражение преобразуем при помощи формулы ротора произведения

$$\frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{R}(\vec{r}, \vec{r}')}{R^3} = \left[ \vec{M}(\vec{r}') \times \text{grad}' \frac{1}{R} \right] =$$

$$= -\text{rot}' \left[ \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \vec{M}(\vec{r}') \right] + \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \text{rot}' \vec{M}(\vec{r}').$$

Первое слагаемое полученной суммы после интегрирования по объему  $V$ , как интеграл от ротора, пропадает (покажем это в конце параграфа), в результате выражение (5.12) принимает вид

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\text{rot}' \vec{M}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dV'.$$

Из сравнения его с общим решением (4.11) для вектор-потенциала

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R(\vec{r}, \vec{r}')}.$$

находим, что распределенные магнитные моменты эквивалентны объемному току

$$\vec{j}_m = c \text{rot}' \vec{M}(\vec{r}').$$

Следовательно, требуемое соотношение получено. Для завершения доказательства осталось убедиться, что

$$\int_V \text{rot} \vec{a} dV = 0,$$

где  $\vec{a}$  – некоторое непрерывное в  $V$  векторное поле, равное нулю на поверхности  $S$ . Для этого вычислим проекцию векторного интеграла на направление, задаваемое единичным вектором  $\vec{e} = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \int_V \text{rot} \vec{a} dV &= \int_V (\vec{e} \cdot \text{rot} \vec{a}) dV = \\ &= \int_V \text{div} [\vec{a} \times \vec{e}] dV = \oint_S [\vec{a} \times \vec{e}]_n dS = 0. \end{aligned}$$

Так как вектор  $\vec{e}$  произвольный, отсюда следует искомый ответ.

## 5.3. Диа- и парамагнетики

Как отмечено соотношением (5.9), для обычных веществ, исключая ферромагнетики и сверхпроводники, вектор намагниченности  $\vec{M}$  пропорционален локальному полю  $\vec{B}$ , т. е.

$$\vec{M} = \kappa \vec{B}.$$

Отсюда для вспомогательного вектора  $\vec{H}$  из соотношения (5.8) имеем  $\vec{H} = (1 - 4\pi\kappa)\vec{B}$ , и, следовательно, магнитная проницаемость вещества связана с магнитной восприимчивостью  $\kappa$  соотношением  $\mu = 1/(1 - 4\pi\kappa)$ , что при  $\kappa \ll 1$  принимает вид

$$\mu - 1 = 4\pi\kappa.$$

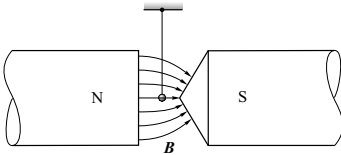


Рис. 5.2

Встречаются два сорта веществ:

1) в первых вектор намагниченности  $\vec{M}$  (следовательно, и магнитные моменты атомов или молекул) направлены против поля  $\vec{B}$ , т. е.  $\kappa < 0$ , и магнитная проницаемость таких веществ  $\mu < 1$ ;

2) в других материалах вектор  $\vec{M}$  направлен по полю  $\vec{B}$ , в них  $\mu > 1$ .  
Материалы первого типа называются *диамагнетиками*, вторые — *парамагнетиками*. В тех и других отличие  $\mu$  от 1 чрезвычайно мало:

$$|\mu - 1| \ll 1,$$

хотя экспериментально влияние магнитного поля на такие материалы можно заметить. Например, если кусочек соответствующего материала поместить в сильное магнитное поле с большим градиентом между полюсами электромагнита, показанного на рис. 5.2, то на этот кусочек действует сила

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{B} \delta V = \kappa (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \delta V = \kappa \text{grad}(B^2/2) \delta V.$$

Отсюда видно, что диамагнитный кусочек будет выталкиваться из области сильного поля (т. е. отталкиваться от заостренного полюсного наконечника), а парамагнитный, наоборот, втягиваться. Данные экспериментов для некоторых материалов приведены в таблице.

	$\frac{\mu - 1}{4\pi} \cdot 10^6$	
Вода	-0,72	Диамагнетики
Серебро	-0,20	
Висмут	-1,38	
Алюминий	0,65	Парамагнетики
Платина	1,10	

**Оценка магнитной проницаемости диамагнетиков.** Атомы диамагнитных веществ не имеют постоянных магнитных моментов — у них спиновые и орбитальные магнитные моменты электронов сбалансированы так, что суммарный магнитный момент, приходящийся на один атом, равен нулю. Но если такой атом поместить в магнитное поле, то в атоме индуцируется дополнительный магнитный момент, направленный против  $\vec{B}$ . Механизм его возникновения можно объяснить с помощью классической планетарной модели атома с электронами, движущимися по круговым орбитам вокруг ядра. При изложении закона электромагнитной индукции будет показано, что если электрон, движущийся по круговой орбите радиуса  $r$  вокруг ядра, попадает в магнитное поле  $\vec{B}$ , то в этом поле электрон приобретает дополнительную скорость, а вместе с нею и дополнительный орбитальный магнитный момент

$$\Delta\vec{m} = -\frac{e^2 r^2}{4m_e c^2} \vec{B}. \quad (5.13)$$

Таким образом, индуцированный магнитный момент пропорционален вектору  $\vec{B}$  и направлен против  $\vec{B}$ . Если теперь вспомнить, что 1г большинства веществ содержит

$$n \simeq \frac{6 \cdot 10^{23} \text{ электронов}}{2 \text{ г}},$$

тогда концентрация электронов будет  $N_e = \rho n$ , где  $\rho \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$  — плотность среды, и вектор намагниченности  $\vec{M} = N_e \Delta\vec{m} = \rho n \Delta\vec{m}$ . Отсюда для разности

$$\frac{|\mu - 1|}{4\pi} = \frac{M}{B} = \rho n \frac{e^2 r^2}{4m_e c^2}$$

можно получить оценочное значение (приняв для радиуса орбиты значение  $r = 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ ):

$$\kappa = \frac{|\mu - 1|}{4\pi} \simeq \rho \frac{3 \cdot 10^{23} \cdot (4,8 \cdot 10^{-10})^2 \cdot (0,5 \cdot 10^{-8})^2}{4 \cdot 0,9 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{20}} \approx \rho \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{см}^3}{\text{г}}.$$

Найденный порядок величины не противоречит приведенным экспериментальным данным.

Заметим, что явление электромагнитной индукции имеет место во всех средах. Поэтому и обусловленный им диамагнетизм есть универсальное явление, которое должно проявляться во всех средах. Однако в

тех случаях, когда атомы обладают собственными магнитными моментами, диамагнитный эффект перекрывается значительно более сильным парамагнитным эффектом.

**Магнитная проницаемость парамагнетиков.** Парамагнетизм наблюдается у тех веществ, атомы которых обладают собственными магнитными моментами. Пока нет магнитного поля, атомы совершают беспорядочное тепловое движение, а их магнитные моменты ориентированы в пространстве так же беспорядочно и вектор намагниченности  $\vec{M} = 0$ . В магнитном поле потенциальная энергия (4.51) атомных магнетиков  $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$  минимальна при совпадении  $\vec{m}$  с вектором  $\vec{B}$ . Благодаря этому при внесении парамагнетика в магнитное поле в соответствии с распределением Больцмана возникает преимущественная ориентация магнитных моментов его атомов в направлении поля  $\vec{B}$  и появляется намагниченность. При этом вектор намагниченности  $\vec{M} = \kappa \vec{B}$  направлен по полю  $\vec{B}$  и магнитная восприимчивость  $\kappa > 0$ .

Здесь уместно обратить внимание на то, что, как мы убедились в § 4.11, магнитное поле непосредственно не изменяет угла наклона магнитного момента атома к направлению поля, а лишь заставляет магнитную ось атома прецессировать вокруг направления поля при том же угле наклона к нему. Если до возбуждения поля направления осей атомов были распределены хаотически, то и в магнитном поле векторная сумма моментов отдельных атомов должна остаться равной нулю. Следовательно, *непосредственное воздействие* поля на магнетик сводится к диамагнитному эффекту. Переориентировка магнитных моментов в соответствии с распределением Больцмана происходит в результате столкновений и взаимодействий атомов между собой.

Таким образом, механизм намагничивания парамагнетиков аналогичен механизму поляризации диэлектриков с твердыми диполями. Различие заключается лишь в использовании формулы (4.51) вместо формулы (1.40). Поэтому выражение для вектора намагниченности парамагнетиков

$$\vec{M} = \frac{Nm_0^2}{3kT} \vec{B}, \quad (5.14)$$

справедливое при  $m_0 B/kT \ll 1$ , получается из соотношения (2.20) простой заменой обозначений. Квантовое рассмотрение, подтверждая этот результат, уточняет, что следует в этой формуле понимать под магнитным моментом  $m_0$ . Вспомним, что атомные системы могут иметь лишь дискретный набор значений для любой компоненты момента импульса,



## 5.3. Диа- и парамагнетики

185

например  $z$ -компоненты

$$J_z : j\hbar, (j-1)\hbar, (j-2)\hbar, \dots, -j\hbar,$$

где  $j$  – спин атомной системы. В отсутствие поля  $\vec{B}$  все эти  $(2j+1)$  состояний равновероятны; каждое из них характеризуется  $z$ -компонентой магнитного момента (4.52):

$$m_z = -g \frac{e}{2m_e c} J_z.$$

В магнитном поле, направленном по оси  $z$ , состояние с магнитным моментом  $m_z$  характеризуется энергией  $U = -m_z B$ , поэтому его вероятность пропорциональна больцмановскому фактору  $e^{-U/kT}$ .

Возьмем простейший случай атомов со спином  $j = 1/2$ . При этом имеются всего два состояния:

$$J_z = \frac{1}{2}\hbar, \quad m_z = -g \frac{e}{2m_e c} \frac{1}{2}\hbar = -g \frac{1}{2} m_B, \quad U = m_* B,$$

$$J_z = -\frac{1}{2}\hbar, \quad m_z = g \frac{e}{2m_e c} \frac{1}{2}\hbar = g \frac{1}{2} m_B, \quad U = -m_* B.$$

Здесь

$$m_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}, \quad m_* = g \frac{1}{2} m_B;$$

$m_B$  – элементарный магнитный момент, называемый *магнетоном Бора*. Концентрации атомов с  $m_z = \pm m_*$  соответственно равны

$$N_{\pm} = C e^{\pm\beta},$$

где введено обозначение

$$\beta = m_* B / kT. \quad (5.15)$$

Нормировочная постоянная  $C$  определяется из условия  $N = N_+ + N_-$ , что дает  $C(e^\beta + e^{-\beta}) = N$ . Следовательно, для намагниченности  $M = (N_+ - N_-)m_*$  получаем

$$M = N m_* \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{e^\beta + e^{-\beta}} = N m_* \tanh \beta.$$

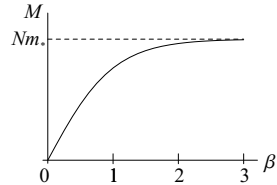


Рис. 5.3

На рис. 5.3 схематически изображена зависимость  $M(\beta)$ . Отсюда видно, что при сильных полях или при низкой температуре (т. е. при  $\beta \gg 1$ ) наступает насыщение, когда все атомные магнетики выстраиваются в направлении поля  $\vec{B}$ . При комнатных температурах и умеренных полях имеем  $\beta \ll 1$  (например, для  $T = 300^\circ K$ ,  $B = 10^4 \text{ Гс}$ ,  $m_* = m_B = 0,93 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс}$  из выражения (5.15) получаем  $\beta \simeq 0,2 \cdot 10^{-2}$ ) и  $\hbar\beta$  можно заменить на  $\beta$ , вследствие чего зависимость  $\vec{M}$  от  $\vec{B}$  становится линейной:

$$\vec{M} = N \frac{m_*^2}{kT} \vec{B} = Ng^2 \frac{m_B^2}{4kT} \vec{B}.$$

Такой результат получается для атомов со спином  $j = 1/2$ . Для произвольного спина ответ следующий:

$$\vec{M} = Ng^2 \frac{j(j+1)}{3} \cdot \frac{m_B^2}{kT} \vec{B}.$$

Из сравнения этих формул с классическим результатом (5.14) видно, что в качестве собственного магнитного момента парамагнитных атомов  $m_0$  следует брать магнетон Бора  $m_B = 0,93 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс}$ .

## 5.4. Интегральные соотношения и граничные условия для поля в магнетиках

1. Присутствие намагничивающейся среды приводит, как видно из сравнения уравнений (5.3), (5,7) и (4.21), (4.22), к замене  $\text{rot} \vec{B}$  на  $\text{rot} \vec{H}$ , как к единственному изменению в уравнениях поля. Следовательно, теорема (4.23) о потоке вектора  $\vec{B}$  и вытекающее отсюда условие непрерывности  $B_n$  на границах областей

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (5.16)$$

при этом остаются неизменными. Теорема о циркуляции (4.24) при наличии намагничивающейся среды переходит в интегральную теорему

$$\oint_{\ell} H_{\ell} d\ell = \frac{4\pi}{c} I \quad (5.17)$$

## 5.4. Интегральные соотношения и граничные условия

187

для вспомогательного вектора  $\vec{H}$ , в которой полный ток  $I = \int (\vec{j} \cdot d\vec{S})$ , пронизывающий контур  $\ell$ , не учитывает молекулярные токи, а граничные условия для тангенциальных компонент принимают вид

$$H_{\tau 2} - H_{\tau 1} = \frac{4\pi}{c} i_N; \quad (5.18)$$

$$[\vec{n} \times \vec{H}_2] - [\vec{n} \times \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \vec{i}. \quad (5.19)$$

Циркуляция поля  $\vec{B}$ , как видно из уравнения (5.5), определяется суммарным током  $I + I_m$ , включающим и молекулярные токи:

$$\oint_{\ell} B_{\ell} d\ell = \frac{4\pi}{c} (I + I_m). \quad (5.20)$$

Из интегральных соотношений (5.20), (5.17) имеем

$$\oint_{\ell} (B_{\ell} - H_{\ell}) d\ell = 4\pi \oint_{\ell} M_{\ell} d\ell = \frac{4\pi}{c} I_m,$$

т. е. суммарный молекулярный ток

$$I_m = \int (\vec{j}_m \cdot d\vec{S})$$

через контур  $\ell$  определяется циркуляцией вектора  $\vec{B} - \vec{H} = 4\pi \vec{M}$ . Естественно, этот результат

$$I_m = c \oint M_{\ell} d\ell \quad (5.21)$$

получается и непосредственно из уравнения (5.6).

2. В связи с формулой (5.6) выше отмечено, что в однородно намагниченном магнетике объемные молекулярные токи отсутствуют, т. е.  $\vec{j}_m = 0$ . Теперь покажем, что при этом молекулярные токи возникают на поверхности магнетика. Для примера возьмем цилиндр с вектором намагниченности  $\vec{M}_0 = M_0 \vec{e}_z$ , находящийся в пустоте. Рассмотрим прямоугольный контур  $\ell$ , расположенный в радиальной плоскости, как показано на рис. 5.4, а, для которого циркуляция вектора  $\vec{M}$  равна  $M_0 h$ . Следовательно, для суммарного молекулярного тока  $I_m = i_m h$ , пронизывающего контур, из соотношения (5.21) имеем  $i_m h = c M_0 h$ , т. е. плотность молекулярных токов на поверхности цилиндра:

$$\vec{i}_m = c M_0 \vec{e}_{\alpha}. \quad (5.22)$$

Понятно, что суммарный магнитный момент участка цилиндра высоты  $h$  с объемом  $V = Sh$ , равный  $\vec{m} = \vec{M}_0 V$ , создается током  $I_m = i_m h$ , текущим по цилиндрическому поясу ширины  $h$ . Магнитный момент этого тока  $\vec{m} = (I_m S/c) \vec{e}_z$  при учете соотношения (5.22) действительно приводит к  $\vec{m}_0 V$ . Наглядно возникновение поверхностных молекулярных токов (5.22) иллюстрирует рис. 5.4, б. Намагниченность означает, что внутри цилиндра имеются микроскопические молекулярные токи, схематически изображенные в виде маленьких кружочков. Во внутренних точках цилиндра эти токи компенсируют друг друга, оставляя нескомпенсированными только токи на поверхности, которые и складываются в макроскопический поверхностный ток с плотностью  $i_m$ , циркулирующий по боковой поверхности цилиндра.

3. Граничные условия (5.16), (5.18) совместно с уравнениями (5.3), (5.7), (5.10) лежат в основе математической формулировки задачи определения стационарного магнитного поля в присутствии намагничивающихся сред от заданного распределения объемных и поверхностных токов. В качестве простейшего следствия названных уравнений и граничных условий докажем *справедливость следующего утверждения*: если все пространство, занятое полем, заполнено однородным магнетиком с  $\mu = \text{const}$ , то это магнитное поле  $\vec{B}(\vec{r})$  в  $\mu$  раз больше поля  $\vec{B}_0(\vec{r})$ , создаваемого заданными токами в пустоте. (Это утверждение аналогично соответствующему положению для электрического поля в диэлектрике, рассмотренному в § 2.3.) Для случая, когда область, занятая полем, простирается до бесконечности, результат получается непосредственно из уравнений (5.3), (5.7), (5.10), которые при  $\mu = \text{const}$  эквивалентны системе уравнений

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{rot} \vec{B} = (4\pi/c) \mu \vec{j},$$

совпадающих с уравнениями для поля  $\vec{B}$  в вакууме от токов  $\mu \vec{j}(\vec{r})$ .

Если область  $V$ , занятая полем, ограничена в пространстве, отсю-

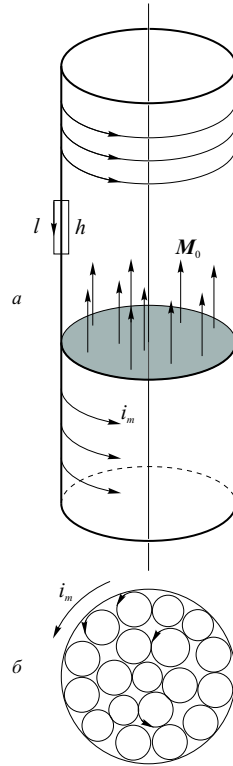


Рис. 5.4

да следует, что имеется поверхность  $S$ , вне которой поле  $\vec{B}_2 \equiv 0$ , а по внутреннюю сторону —  $\vec{B}_1 \neq 0$ . Названную поверхность будем рассматривать как границу области  $V$ , причем на этой границе имеется разрыв поля  $\vec{B}$ . Так как по условию (5.16)  $B_n$  непрерывна, то скачок терпят только тангенциальные компоненты  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . Это значит, что по границе  $S$  текут поверхностные токи  $\vec{i}$  (не молекулярные), связанные с полем  $\vec{H}_1$  на границе  $S$  соотношением (5.19), которое в рассматриваемом случае  $\vec{H}_2 \equiv 0$  имеет вид

$$\frac{4\pi\vec{i}}{c} = - \left[ \vec{n} \times \vec{H}_1 \right].$$

Таким образом, поля  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{H}_1$  в области  $V$  определяются из задачи, формулировка которой здесь приводится параллельно с задачей для поля  $\vec{B}_0(\vec{r})$  в пустоте:

$$\left( \begin{array}{l} \text{div} \vec{B}_1 = 0 \\ \text{rot} \vec{H}_1 = (4\pi/c) \vec{j} \\ \vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1 \\ B_{1n} = 0 \\ [\vec{n} \times \vec{H}_1] = - (4\pi\vec{i}/c) \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{l} \text{div} \vec{B}_0 = 0 \\ \text{rot} \vec{B}_0 = (4\pi/c) \vec{j} \\ B_{0n} = 0 \\ [\vec{n} \times \vec{B}_0] = - (4\pi\vec{i}/c) \end{array} \right).$$

Отсюда видно, что в оговоренных условиях вспомогательный вектор  $\vec{H}_1$  совпадает с полем  $\vec{B}_0$  в пустоте, создаваемым заданными токами  $\vec{j}$  и  $\vec{i}$ , т. е.  $\vec{H}_1(\vec{r}) = \vec{B}_0(\vec{r})$ . Следовательно, искомое поле в области  $V$ , заполненной однородной средой,

$$\vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1 = \mu \vec{B}_0$$

действительно в  $\mu$  раз больше поля в вакууме  $\vec{B}_0(\vec{r})$ . Конечно, это усиление поля происходит за счет молекулярных токов. Например, если пространство внутри бесконечно длинного соленоида, рассмотренного в гл. 4, или внутри тороидального соленоида заполнить однородным магнетиком, то конфигурация поля не изменится, а по величине поле усилится в  $\mu$  раз. В данном случае это усиление поля происходит за счет поверхностных молекулярных токов, эффективно увеличивающих заданные токи до  $\mu\vec{i}$ ; следовательно, поверхностная плотность молекулярных токов

$$\vec{i}_m = (\mu - 1) \vec{i}.$$

Забегая несколько вперед, отметим, что ферромагнетики в некотором приближении также могут характеризоваться магнитной проницаемостью  $\mu$ , в этом случае достигающей значений до  $10^4$ . С помощью этих

материалов достигается большое усиление магнитного поля, и поэтому они широко применяются в технике.

## 5.5. Примеры полей в присутствии намагничивающихся сред

В общем случае соотношение  $\vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{B}_0(\vec{r})$ , конечно, несправедливо и решения для  $\vec{B}(\vec{r})$ ,  $\vec{H}(\vec{r})$  необходимо строить на основе уравнений и соответствующих граничных условий. Здесь рассмотрим три примера, в которых границами раздела сред являются либо бесконечная плоскость, либо цилиндрическая поверхность кругового поперечного сечения, а источником поля является ток, бегущий по прямому проводу.

В двух последних примерах в качестве магнетика будем рассматривать железо, имея в виду замечание, сделанное в конце предыдущего параграфа.

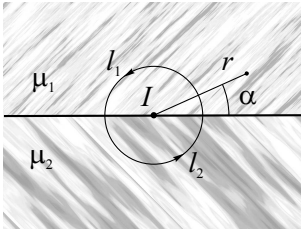


Рис. 5.5

*Пример 5.1.* Бесконечный прямой провод с током  $I$  проходит по плоской границе раздела однородных сред с магнитными проницаемостями  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ . Найти поля  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  в областях 1, 2, определяемых условиями  $r > 0$ ,  $0 < \alpha < \pi$  (область 1) и  $r > 0$ ,  $\pi < \alpha < 2\pi$  (область 2), где  $r, \alpha$  – цилиндрические координаты, указанные на рис. 5.5. Искомые поля в областях с постоянными  $\mu$  и свободных от токов, удовлетворяют однородным урав-

нениям

$$\operatorname{div} \vec{B}_{1,2} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B}_{1,2} = 0. \quad (1)$$

На границах  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \pi$  выполняются условия

$$B_{1\alpha} = B_{2\alpha}, \quad (1/\mu_1) B_{1r} = (1/\mu_2) B_{2r} \quad (2)$$

непрерывности нормальных компонент поля  $\vec{B}$  и тангенциальных компонент поля  $\vec{H}$ . Граница  $r = 0$  (ось  $z$ ), по которой бежит ток  $I$ , выдвигает требование

$$\oint_{\ell} H_{\ell} d\ell = (4\pi/c) I,$$

## 5.5. Примеры полей в присутствии намагничивающихся сред 191

чтобы циркуляция вспомогательного поля  $\vec{H}$  по контуру  $\ell$ , охватывающему ось  $z$ , равнялась заданной величине. Взяв  $\ell$  в виде двух полуокружностей  $\ell_1, \ell_2$ , проходящих по областям 1 и 2 (рис. 5.5), последнее условие можно привести к виду

$$\frac{1}{\mu_1} \int_{\ell_1} B_{1\ell} d\ell + \frac{1}{\mu_2} \int_{\ell_2} B_{2\ell} d\ell = \frac{4\pi}{c} I. \quad (3)$$

Граничные условия (2) подсказывают, что решение задачи должно иметь вид поля в пустоте (4.9) от прямого провода с неопределенным током  $kI$ , т. е.

$$\vec{B}_{1,2} = k \frac{2I}{cr} \vec{e}_\alpha, \quad (4)$$

удовлетворяющего уравнениям (1). Граничные условия (2) при этом удовлетворяются автоматически. Для определения коэффициента  $k$  следует условие

$$k \frac{2I}{cr} \pi r \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) = \frac{4\pi}{c} I,$$

откуда  $k = 2\mu_1\mu_2 / (\mu_1 + \mu_2)$ .

Таким образом, поле  $\vec{B}$ , определяемое формулой (4), во всем пространстве пропорционально полю  $\vec{B}_0 = (2I/cr) \vec{e}_\alpha$ , создаваемому заданным током в пустоте, т. е.

$$\vec{B}(r) = k \vec{B}_0(r), \quad (5)$$

но коэффициент пропорциональности  $k$ , единый для обеих областей, конечно, не совпадает ни с одним из  $\mu_1, \mu_2$ . Из соотношения (5) ясно, что молекулярные токи сосредоточены только на поверхности провода с током, увеличивая суммарный ток до эффективного значения  $kI$ . Действительно, на границах  $\alpha = 0, \alpha = \pi$  токи отсутствуют, как легко усмотреть из того, что поля  $\vec{B}, \vec{H}$  подходят к этим границам по нормали; объемные молекулярные токи в областях 1, 2 не возникают по причине, указанной в п. 4 § 5.1.

*Пример 5.2.* Бесконечно длинный цилиндр радиуса  $a$  из ферромагнетика («железа»), по образующей которого проходит провод с током  $I$ , находится в воздухе. Найти поле  $\vec{B}$  во всем пространстве. Для решения задачи воспользуемся методом изображения и искомые поля  $\vec{B}_\text{ж}, \vec{B}_\text{в}$  соответственно в железе и в воздухе представим в виде линейных

комбинаций векторных полей  $\vec{B}'_1, \vec{B}_1$ :

$$\begin{aligned}\vec{B}_B &= k\vec{B}_1 + p\vec{B}'_1, \\ \vec{B}_Ж &= k\vec{B}_1,\end{aligned}\quad (6)$$

где  $\vec{B}'_1$  — поле в пустоте от фиктивного провода с током  $I$ , проходящего по оси цилиндра,  $\vec{B}_1$  — поле в пустоте от реального тока  $I$ . (Силовые линии этих векторных полей на рис. 5.6 изображены тонкими линиями.) Коэффициенты  $p, k$ , входящие в решение (6), определяются из граничных условий, причем непрерывность  $B_n$  на поверхности цилиндра уже обеспечена выбором одинаковых коэффициентов  $k$  при  $\vec{B}_1$  в обоих выражениях (6). Возможность выполнения условия непрерывности  $H_\tau$  на границе и, следовательно, возможность представления решения в виде (6) базируется на одном замечательном свойстве векторного поля  $\vec{B}_1$ , которое будет использовано еще раз в следующей главе.

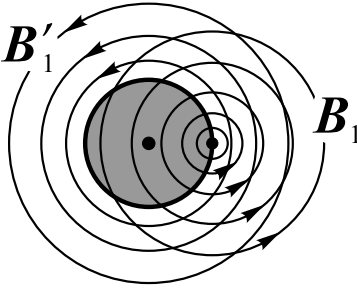


Рис. 5.6

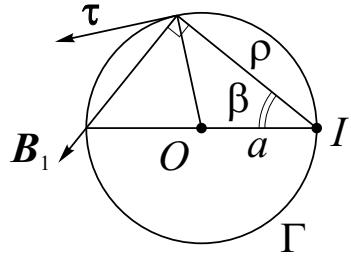


Рис. 5.7

Справедливо *утверждение*: тангенциальная компонента поля  $\vec{B}'_1$  прямого провода на поверхности некоторого цилиндра радиуса  $a$  есть величина постоянная, равная

$$B_{1\tau} = I/ca, \quad (5.23)$$

если провод с током проходит по образующей цилиндра. Действительно, в точках контура  $\Gamma$  (рис. 5.7) вектор  $\vec{B}_1$  имеет величину  $B_1 = 2I/(c\rho)$ , а его проекция на касательное направление определяется как  $B_{1\tau} = B_1 \cos \beta = 2I \cos \beta / (c\rho)$ . Так как  $\rho = 2a \cos \beta$ , отсюда следует результат (5.23).



### 5.5. Примеры полей в присутствии намагничивающихся сред 193

Следовательно, непрерывность  $H_\tau$  на границе выполняется, если коэффициенты  $p, k$  из решения (6) удовлетворяют условию

$$p \frac{2I}{ca} + k \frac{I}{ca} = \frac{k}{\mu} \frac{I}{ca}, \quad \text{т. е.} \quad 2p = \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) k. \quad (7)$$

Следующее граничное условие связано с величиной циркуляции вектора  $\vec{H}$  по контуру, охватывающему реальный ток  $I$ . Этот контур весь может проходить по воздуху, например, совпасть с одной из силовых линий поля  $\vec{B}'_1$ , изображенных на рис. 5.6. Тогда условие на циркуляцию примет вид

$$p \oint_{\ell_0} \vec{B}'_{1\ell} d\ell + k \oint_{\ell_0} \vec{B}_{1\ell} d\ell = \frac{4\pi}{c} I.$$

Обе входящие в левую часть этого равенства циркуляции равны  $4\pi I/c$ . Следовательно, выписанное условие дает

$$p + k = 1. \quad (8)$$

Как видно из условий (7), (8), коэффициенты  $p, k$  от радиуса  $a$  не зависят. (Заметим, что можно взять другой контур, частично проходящий по воздуху, а частично по железу, как, например, контур, совпадающий с одной из силовых линий поля  $\vec{B}_1$  в виде окружности радиуса, меньшего  $a$ . Результат этого рассмотрения сразу приводит к ответу  $k = 2\mu/(\mu + 1)$ .)

Окончательный результат такой:

$$\vec{B}_B = \frac{2\mu}{\mu + 1} \vec{B}_1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \vec{B}'_1 \quad \left( \vec{B}_B = 2\vec{B}_1 - \vec{B}'_1 \right),$$

$$\vec{B}_Ж = \frac{2\mu}{\mu + 1} \vec{B}_1 \quad \left( \vec{B}_Ж = 2\vec{B}_1 \right).$$

(Выражения в скобках отвечают предельному случаю  $\mu \gg 1$ .) Отсюда видно, что поле  $\vec{B}$  в железе совпадает с полем реального тока  $I$ , увеличенного в  $2\mu/(\mu + 1)$  раз. В воздухе к этому полю добавляется поле тока изображения, текущего по оси цилиндра и равного  $-(\mu - 1)/(\mu + 1) I$ .

*Пример 5.3.* Обобщением предыдущего примера является случай нескольких проводов с суммарным током, равным нулю. Для двух проводов с одинаковыми по величине, противоположно направленными токами, протянутых по образующим ферромагнитного цилиндра, картина

схематически показана на рис. 5.8. В этом случае суммарный ток изображения равен нулю и исследуемое поле во всем пространстве (внутри и вне цилиндра)

$$\vec{B} = \frac{2\mu}{\mu + 1} \vec{B}_0$$

равно полю в пустоте  $\vec{B}_0$ , создаваемому двумя параллельными проводниками, усиленному в  $2\mu/(\mu + 1)$  раз. Так же как в примере 5. 1, наличие магнетика не оказывает влияния на конфигурацию поля, а просто усиливает его в  $2\mu/(\mu + 1)$  раз (в два раза в предельном случае  $\mu \gg 1$ ). Понятно, что подобное положение справедливо и для произвольного числа проводов, если суммарный ток в них равен нулю.

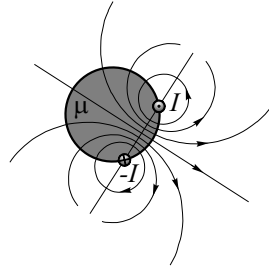


Рис. 5.8

## 5.6. О применении скалярного потенциала в задачах магнитостатики

В общем случае магнитное поле описывается векторным потенциалом  $\vec{A}$ . Однако имеются случаи, когда во всем пространстве, занятом магнитным полем,  $\text{rot} \vec{H} \equiv 0$ , следовательно, вспомогательное поле

$$\vec{H} = -\text{grad} \Psi \quad (5.24)$$

выражается через скалярный потенциал и задача определения магнитного поля сводится к соответствующему электростатическому аналогу. Подобная ситуация возникает, если вся область, занятая полем, свободна от немоллекулярных токов и односвязна, а все «внешние токи», создающие магнитное поле, находятся только на границах областей и на бесконечности. (Подробное обсуждение данного вопроса можно найти в учебнике Тамма.)

Тривиальный случай однородного магнитного поля  $\vec{B}_0 = \text{const}$ , заполняющего бесконечное пространство, для которого  $\Psi(\vec{r}) = -(\vec{B}_0 \cdot \vec{r})$ , интереса не представляет. А возмущение этого поля телом из однородного магнитного материала с  $\mu = \text{const}$  составляет пример нетривиаль-

ной задачи, решение которой упрощается при использовании скалярного потенциала. Соответствующие результаты для шара и толстостенной сферы здесь приведем, чтобы на этих примерах показать характерные особенности магнитного поля, обусловленные присутствием в нем тел с большой магнитной проницаемостью.

*Пример 5.4.* В однородное магнитное поле  $\vec{B}_0$  вносится шар радиуса  $a$  с магнитной проницаемостью  $\mu = \text{const}$ . Определить результирующее поле  $\vec{B}$  во всем пространстве и распределение молекулярных токов.

Данная задача полностью эквивалентна задаче электростатики о диэлектрическом шаре в однородном внешнем электрическом поле, рассмотренной в гл. 2. Действительно, для поля  $\vec{H}$  здесь справедливо представление (5.24). Скалярный потенциал как внутри шара с  $\mu = \text{const}$  (область 1), так и во внешнем пространстве  $\mu = 1$  (область 2) удовлетворяет уравнению Лапласа. На поверхности шара выполняются условия непрерывности  $\vec{H}_\tau$  и  $B_n$ . На бесконечности поле  $\vec{H}_2 = \vec{B}_2$  равно невозмущенному полю  $\vec{B}_0$ . Отсюда понятно, что искомые поля  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  в рассматриваемой магнитной задаче являются магнитными аналогами полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  и получаются заменой  $\varepsilon$  на  $\mu$ ,  $\vec{E}_0$  на  $\vec{B}_0$  из соответствующих решений электростатической задачи, представленной в § 2.4. В частности, однородное поле внутри шара равно

$$\vec{H}_1 = \frac{3}{\mu + 2} \vec{B}_0, \quad \vec{B}_1 = \frac{3\mu}{\mu + 2} \vec{B}_0,$$

а вне шара  $\vec{B}_2 = \vec{H}_2$  складывается из невозмущенного поля  $\vec{B}_0$  и поля диполя

$$\vec{d} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \vec{B}_0 a^3,$$

т. е.

$$\vec{B}_2 = -\text{grad} \Psi_2, \quad \Psi_2 = -B_0 r \cos \theta + (d/r^2) \cos \theta.$$

Молекулярные токи сосредоточены на поверхности шара, имеют  $\alpha$ -компоненты и по величине определяются разрывом  $B_{2\theta} - B_{1\theta}$  на поверхности шара. Так как на этой границе  $H_{1\theta} = H_{2\theta} = B_{2\theta}$ , то  $B_{2\theta} - B_{1\theta} = H_{1\theta} - \mu H_{1\theta} = (1 - \mu) H_{1\theta}$  и, следовательно,

$$i_m = \frac{c}{4\pi} (1 - \mu) H_{1\theta} = \frac{c}{4\pi} (\mu - 1) \frac{3}{\mu + 2} B_0 \sin \theta.$$

Интересно обратить внимание на характерную особенность полученного решения при  $\mu \gg 1$ . В этом случае шар «втягивает» в себя си-

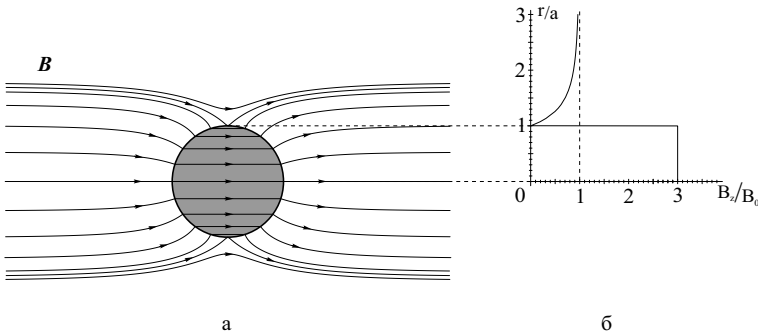


Рис. 5.9

ловые линии и ослабляет поле  $\vec{B}$  вне шара, как это видно из картины силовых линий поля  $\vec{B}$ , представленных на рис. 5.9, а. Чтобы результат концентрации поля внутри шара сделать более наглядным, на рис. 5.9, б дополнительно приведено распределение поля в плоскости, проходящей через центр шара перпендикулярно направлению  $\vec{B}_0$ . Это поле внутри шара при  $\mu \gg 1$  равно  $B_1 \approx 3B_0$ , вне шара определяется как  $B_z = -B_\theta$  ( $\theta = \pi/2$ )  $\approx B_0 \left[1 - (a/r)^3\right]$ , т. е. на внешней границе шара почти равняется нулю, при  $r = \sqrt[3]{2}a$  достигает значения  $B_0/2$ , а при дальнейшем удалении от поверхности шара асимптотически выходит на  $B_0$ . Отметим, что указанный сильный разрыв тангенциальной компоненты поля  $\vec{B}$  на поверхности шара при  $\mu \gg 1$  есть результат неперывности  $\vec{H}_\tau$ .

**Пример 5.5.** Толстостенная сфера из магнитного материала помещена в однородное внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$ . Найти поле  $\vec{B}$  внутри сферы. Рассмотрев случай  $\mu \gg 1$ , убедиться в возможности магнитного экранирования с помощью рассматриваемой сферы. Скалярный потенциал  $\psi$ , определяющий поле  $\vec{H}$  (5.24), во всех трех областях (рис. 5.10) удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\psi_{1,2,3} = 0$  и следующим граничным условиям:

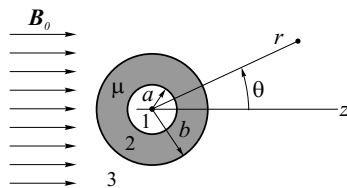


Рис. 5.10

## 5.7. Коротко о ферромагнетиках

197

на границе  $r = a$   $\psi_1 = \psi_2$ ,  $\partial\psi_1/\partial r = \mu\partial\psi_2/\partial r$ ;  
 на границе  $r = b$   $\psi_2 = \psi_3$ ,  $\mu\partial\psi_2/\partial r = \partial\psi_3/\partial r$ ;  
 на бесконечности  $\psi_3 = -B_0 r \cos \theta$ ;  
 при  $r = 0$   $\psi_1(r, \theta)$  не имеет особенностей.

Решение имеет вид

$$\psi_1(r, \theta) = -B_1 r \cos \theta,$$

$$\psi_2(r, \theta) = -H_2 r \cos \theta + \left(d/r^2\right) \cos \theta,$$

$$\psi_3(r, \theta) = -B_0 r \cos \theta + \left(D/r^2\right) \cos \theta,$$

где константы  $B_1$ ,  $H_2$ ,  $d$ ,  $D$  находятся из условий на границах  $r = a$ ,  $r = b$ . В результате вычислений для константы  $B_1$ , определяющей величину однородного поля внутри сферы, получается выражение

$$B_1 = \frac{9\mu}{(2\mu + 1)(\mu + 2)} \left[ 1 - \frac{2(\mu - 1)^2}{(2\mu + 1)(\mu + 2)} \frac{a^3}{b^3} \right]^{-1} B_0,$$

из которого при  $\mu \gg 1$  и  $(a/b)^3 \ll 1$  имеем

$$B_1 \approx (9/2\mu) B_0 \ll B_0.$$

Таким образом, рассматриваемый сферический экран из магнитного материала существенно ослабляет поле во внутренней полости и действительно осуществляет магнитную экранировку этой области.

## 5.7. Коротко о ферромагнетиках

1. Здесь мы рассмотрим поведение материалов типа железа, никеля, кобальта и многих сплавов, обладающих наиболее сильными магнитными свойствами, на много порядков превышающими то, что встречается в пара- и диамагнетиках. Индуцируемые в этих материалах магнитные моменты настолько велики, что обусловленные ими усредненные молекулярные токи вносят главный вклад в наблюдаемые магнитные поля.

Не пытаясь дать этому явлению полноценное объяснение, отметим лишь, что в ферромагнитных веществах специфические квантовые причины заставляют спины некоторых электронов внутренних оболочек атомов ориентироваться параллельно друг другу и вследствие этого

вызывать самопроизвольное (говорят — спонтанное) намагничение вещества без всякого внешнего поля. Правда, в отсутствие внешнего поля размер области, в которой намагничение имеет определенное направление, достаточно мал, имеет размеры порядка  $10^{-2}$  мм. Области эти называются *доменами*. Соседние домены, как правило, намагничены в противоположных направлениях, чтобы магнитные силовые линии одного домена замыкались через соседние и силовые линии не выходили за пределы ферромагнетика. Таким образом, в отсутствие внешнего поля макроскопический образец, содержащий большое число доменов, практически не намагничен.

Во внешнем поле домены перемагничиваются в направлении поля, так что в конце концов весь образец намагничивается в одном направлении, намагниченность достигает максимального значения

$$M_S = m_B N,$$

где  $m_B$  — магнетон Бора,  $N$  — концентрация электронов, участвующих в создании спонтанной намагниченности. Оказывается, для этого нужны, как правило, сравнительно небольшие внешние поля  $H \sim 1$  Э, при этом поле внутри ферромагнетика достигает значений  $B \sim 10^4$  Гс, т. е. эффективное значение магнитной проницаемости  $\mu \sim 10^4$ . (Смысл данного утверждения, содержащего сомнительное словосочетание «внешнее поле  $H$ », станет понятным после прочтения п. 3, 4 данного параграфа.) Заметим, что приведенные цифры достаточно условны, так как зависимость  $B(H)$  для ферромагнитных материалов сильно нелинейна и даже неоднозначна.

Сказанным ограничимся в попытке объяснения причин ферромагнетизма и сосредоточим внимание на постановке экспериментов для определения соотношений между  $B$  и  $H$  или между  $M$  и  $B$  для этих материалов, а также на результатах экспериментов и на их особенностях.

2. Начнем с замечания, что уравнения (5.3), (5.7), (5.8)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = (4\pi/c) \vec{j},$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$$

справедливы для любых материальных сред, в том числе и ферромагнитных. В обычных средах приведенная система замыкается уравнением  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ; в случае ферромагнетиков это соотношение в общем случае

несправедливо и задачей соответствующего эксперимента как раз и является установление недостающей связи между  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  или между  $\vec{M}$  и  $\vec{B}$ .

Известно, что намагниченность куска ферромагнитного материала, находящегося в определенном магнитном поле, не определяется однозначно значением этого поля, а зависит от всей его предистории. В общем случае вектор намагниченности  $\vec{M}(\vec{r})$  в данной точке ферромагнетика может иметь значение, даже по направлению не согласующееся с полем  $\vec{B}(\vec{r})$ . Понятно, что в подобной ситуации задача установления зависимости  $\vec{M}(\vec{B})$  не совсем определена. Но возможна ситуация, характеризующаяся простой предысторией, когда в предварительно ненамагниченном ферромагнетике магнитное поле начинает увеличиваться от нуля и направление его в каждой точке материала остается неизменным. Тогда очевидно, что в случае изотропного материала направления векторов  $\vec{M}$ ,  $\vec{B}$  (следовательно, и  $\vec{H}$ ) в любой точке материала будут между собой параллельны:

$$\vec{M} \parallel \vec{B} \quad \text{или} \quad \vec{B} \parallel \vec{H}. \quad (5.25)$$

Только в этих условиях задача установления зависимости  $\vec{M}$  от  $\vec{B}$  или  $\vec{B}$  от  $\vec{H}$  становится определенной. Для ее решения необходимо иметь экспериментальное устройство, в котором распределение вспомогательного поля  $\vec{H}$  было бы известно и не зависело от среды, а получающееся при наличии исследуемого ферромагнетика поля  $\vec{B}$  можно было бы измерить.

3. В случае линейных сред возможность создания такого экспериментального устройства следует из утверждения, доказанного в п. 3 § 5.4. Например, им может быть соленоид, токи которого в случае вакуума создают магнитное поле  $\vec{B}_0$ , сосредоточенное внутри соленоида. Если соленоид заполнить однородным магнетиком с  $\mu = \text{const}$ , вспомогательное поле  $\vec{H}$  в нем, равное полю  $\vec{B}_0$ , будет однозначно определяться величиной тока в обмотке соленоида.

Оказывается, аналогичное положение справедливо и при заполнении соленоида однородным изотропным ферромагнетиком при условии (5.25), что его намагниченность при нулевом токе в соленоиде равна нулю. Покажем это на примере тороидального соленоида, рассмотренного в п. 2 § 4.7. Предположим, что найденное там в отсутствие среды поле  $\vec{B}$  можно принять за поле  $\vec{H}$  внутри соленоида, заполненного ферромагнетиком, т. е.

$$\vec{H} = (2NI/cr) \vec{e}_\alpha. \quad (5.26)$$

Это поле удовлетворяет уравнению (5.7) и необходимому граничному условию (5.19), которое в данном случае имеет вид  $[\vec{n} \times \vec{H}] = -(4\pi/c)\vec{i}$ .

При этом возникающее в ферромагнетике поле  $\vec{B}$  во всех точках параллельно  $\vec{H}$ , причем в точках с одинаковыми значениями модуля  $\vec{H}$  (т. е. вдоль силовой линии  $\vec{H}$ ) имеет равные значения. Следовательно, поле в ферромагнитном сердечнике имеет структуру

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\alpha,$$

удовлетворяющую как уравнению (5.3), так и граничному условию (5.16)  $B_n = 0$  на поверхности соленоида. Таким образом, при заполнении соленоида намагничивающейся средой с произвольной зависимостью величины  $B$  от  $H$  поле  $\vec{H}$  (5.26) внутри соленоида действительно остается неизменным. Это означает, что данным соленоидом, заполненным исследуемым ферромагнетиком, действительно можно воспользоваться для установления искомой зависимости  $B(H)$ .

Например, можно взять отоженный до высокой температуры железный тор, плотно намотать на него обмотку из медного провода и по проводу пропустить постоянный ток. Измеряя величину магнитного поля  $B$  в сердечнике при разных значениях тока в обмотке и, следовательно, при разных  $H$  в железе, можно получить искомую зависимость.

Измерение поля  $B$  основано на законе электромагнитной индукции (излагается в следующей главе) и осуществляется, например, с помощью вспомогательных витков, охватывающих сердечник. Это измерение определяет среднее по сечению значение поля  $B$ . Поэтому для получения зависимости  $B$  от  $H$  необходимо, чтобы поля  $B$  и  $H$  были по возможности однородны по сечению соленоида. Как можно увидеть из соотношения (5.26), для этого необходимо брать тонкий тор, поперечник которого намного меньше его радиуса, т. е. выполняется условие  $a \ll r_0$ , где размеры  $a$ ,  $r_0$  указаны на рис. 4.11. При этом условии можно считать, что как поле  $H = 2NI/cr_0$ , так и измеряемое поле  $B$  постоянны по сечению и рассматриваемое устройство вполне пригодно для исследований.

4. В качестве характерного примера на рис. 5.11 представлен результат эксперимента для сердечника из мягкого железа. Когда ток в соленоиде включается в первый раз, увеличение  $B$  с  $H$  происходит по кривой 1, которая называется *кривой намагничивания*. Следует обратить внимание на различие масштабов по осям  $B$  и  $H$ ; вначале, чтобы получить большое  $B$ , необходимо относительно слабое  $H$  (т. е. слабый ток в соленоиде). Поле  $B$  в железе намного больше, чем было бы без



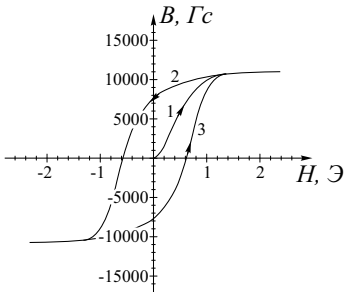


Рис. 5.11

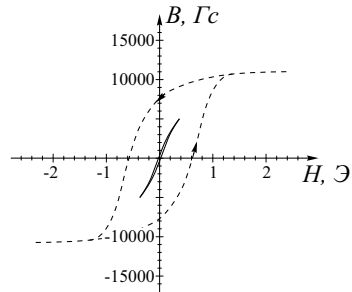


Рис. 5.12

него (напомним, что без железа было бы  $B = H$ ). Обусловлено это, конечно, большой намагниченностью  $M$ , эквивалентной молекулярному току на поверхности железа, на много порядков превышающему ток в обмотке. При больших  $H$  поле  $B$  начинает выравниваться; говорят—железо насыщается. При дальнейшем увеличении  $H$  намагниченность достигает максимально возможного значения  $M_S$  и поле

$$B = H + 4\pi M_S \approx 4\pi M_S = B_S$$

становится почти постоянным. Небольшим ростом  $B$  за счет  $H$  в области насыщения можно обычно пренебречь и считать, что  $B \approx B_S$ . Если теперь начнем уменьшать ток в обмотке, изменение  $B$  пойдет по другой кривой 2. Когда значение  $H$  достигает нуля, поле  $B$  еще не равно нулю, т. е. при выключенном токе в обмотке в железе сохраняется *остаточное поле*  $B_r$ . Только при значении  $H = -H_c$  ( $H_c$  называется *коэрцитивной силой*)  $B$  обращается в нуль и при дальнейшем увеличении обратного намагничивающего тока пойдет по кривой 2 до тех пор, пока железо не намагнитится до насыщения в противоположном направлении. Обратная кривая 3 будет симметрична кривой 2. Кривые 2 и 3 в совокупности составляют так называемую *петлю гистерезиса*.

Из сказанного видно, что в случае ферромагнетика невозможно написать функциональное соотношение типа  $B = f(H)$ , так как  $B$  в любой момент зависит не только от  $H$  в тот же момент, но и от всей предистории материала. Только в слабых полях, где петля гистерезиса достаточно узкая, как схематически изображено на рис. 5.12, в качестве  $B(H)$  в

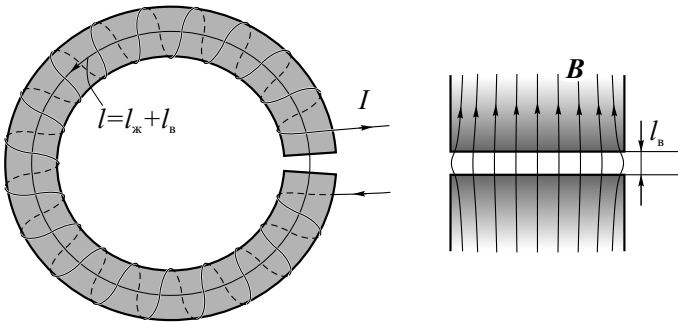


Рис. 5.13

первом приближении можно использовать простую зависимость

$$\vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Типичная проницаемость обычного железа равна нескольким тысячам. Однако существуют специальные сплавы, типа так называемого «супермаллоя», проницаемость которых может быть порядка миллиона.

## 5.8. Электромагниты и постоянные магниты

Воспользуемся рассмотренным в предыдущем параграфе тороидальным соленоидом с железным сердечником в качестве модели для электромагнита и постоянного магнита. Единственное изменение в экспериментальную установку внесем — удалив часть железа, в сердечнике организуем узкий воздушный зазор, как показано на рис. 5.13. Здесь фрагмент сердечника и воздушного зазора ширины  $l_{\text{в}}$  вместе с силовыми линиями  $\vec{B}$  в крупном масштабе изображен еще и отдельно. При узком зазоре краевыми эффектами можно пренебречь и считать, что поле в зазоре совпадает с полем в железе:

$$\vec{B} = \vec{H} = \vec{B}_{\text{ж}}. \quad (5.27)$$

Так как эти поля перпендикулярны поверхностям раздела, граничным условиям непрерывности  $B_n$  и  $\vec{H}_\tau$  они удовлетворяют. Для определения полей в железе  $H_{\text{Ж}}$ ,  $B_{\text{Ж}}$  (а следовательно, и интересующего нас поля  $B$  в зазоре) при заданном токе  $I$ , числе витков в обмотке  $N$  необходимы два уравнения. В качестве первого служит теорема о циркуляции поля  $\vec{H}$  по замкнутому контуру  $\ell$ , составленному из  $\ell_{\text{Ж}}$  и  $\ell_{\text{В}}$  (рис. 5.13):

$$H_{\text{Ж}}\ell_{\text{Ж}} + H\ell_{\text{В}} = (4\pi/c)NI, \quad (5.28)$$

что с учетом равенств (5.27) дает

$$B_{\text{Ж}} = -H_{\text{Ж}}\frac{\ell_{\text{Ж}}}{\ell_{\text{В}}} + \frac{4\pi}{c}NI\frac{1}{\ell_{\text{В}}}. \quad (5.29)$$

Второе необходимое соотношение содержится в кривой намагничивания железа, представленной графически на рис. 5.14. Совместные решения этого функционального соотношения и уравнения (5.29), т. е.

точки пересечения прямой (5.29) и кривой намагничивания, определяют искомые  $H_{\text{Ж}}$ ,  $B_{\text{Ж}}$  (см. рис. 5.14). Из рисунка видно, что при заданном токе  $I$  существуют несколько решений, зависящих от того, каким путем к данному значению тока мы пришли. Например, если магнит новый и мы включили ток  $I$ , то искомые поля будут определяться точкой  $a$ . Если же сначала увеличить ток до большой величины, а потом снизить до значения  $I$ , то поля  $H_{\text{Ж}}$ ,  $B_{\text{Ж}}$  будут определяться

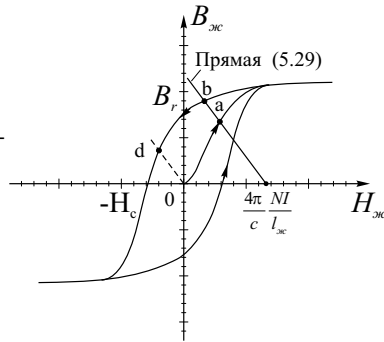


Рис. 5.14

точкой  $b$  верхней петли гистерезиса. Обратим внимание, что прямая (5.29) пересекает ось  $H_{\text{Ж}}$  в точке  $H_* = (4\pi/c)(NI/\ell_{\text{Ж}})$ , причем значение  $H_*$  при  $\ell_{\text{В}} \ll \ell_{\text{Ж}}$  практически совпадает с полем  $B_0$  в соленоиде без железного сердечника. Тангенс угла наклона этой прямой к оси  $H_{\text{Ж}}$  равен  $-\ell_{\text{Ж}}/\ell_{\text{В}}$ . Отсюда видно, что при  $H_* > (\ell_{\text{В}}/\ell_{\text{Ж}})B_r$  точка  $b$  пересечения прямой (5.29) с петлей гистерезиса находится в первом квадранте и, следовательно, поле в зазоре электромагнита  $B = B_{\text{Ж}}$  больше остаточного поля  $B_r$ . Например, если  $\ell_{\text{В}}/\ell_{\text{Ж}} = 10^{-2}$ , в зазоре электромагнита можно получить поле  $B = B_r = 10^4 \text{ Гс}$ , если соленоид запитать током, в отсутствие железа обеспечивающим всего  $B_0 = 10^2 \text{ Гс}$ . Иными слова-

ми, присутствие железного сердечника с данным воздушным зазором обеспечило увеличение поля в 100 раз.

В предельном случае узкой петли гистерезиса в качестве кривой намагничивания железа можно воспользоваться зависимостью  $B_{\text{Ж}} = \mu H_{\text{Ж}}$ . Тогда для поля в воздушном зазоре  $B = B_{\text{Ж}}$  из соотношения (5.29) получается выражение

$$B = \frac{4\pi NI}{c} \frac{1}{\ell_{\text{В}} + (\ell_{\text{Ж}}/\mu)}. \quad (5.30)$$

Считая, что  $\mu \gg \ell_{\text{Ж}}/\ell_{\text{В}}$ , выражение (5.30) можно представить как

$$B = B_0 \ell_{\text{Ж}}/\ell_{\text{В}},$$

чтобы еще раз увидеть то усиление поля, о чем говорилось выше.

Теперь предположим, что намагничивающий ток в обмотке уменьшили до нуля (но перед этим железо доводили до насыщения). Тогда прямая (5.29) на рисунке займет положение, показанное пунктиром, а поле  $B = B_{\text{Ж}}$  примет значение, определяемое точкой  $d$ . Получается так: намагничивающего тока нет (следовательно, обмотку вообще можно снять), а поле в зазоре не равно нулю, т. е. рассматриваемое устройство теперь является *подковообразным постоянным магнитом*.

Из приведенного качественного рассмотрения понятно, что материал для изготовления постоянных магнитов должен обладать широкой петлей гистерезиса с возможно большими значениями остаточного поля  $B_r$  и коэрцитивной силы  $H_c$  (как говорят, магнитный материал должен быть жестким). Разработано очень много специальных материалов для постоянных магнитов. В качестве иллюстрации на рис. 5.15 представлены части петель гистерезиса (из второго квадранта) для некоторых давнишних сплавов на основе железа, кобальта и относительно новых материалов (кривые  $A, B$ ) на основе редкоземельных элементов (самарий—кобальт).

Как уже говорилось, поле в зазоре магнита графически определяется точкой  $d$  пересечения прямой

$$B_{\text{Ж}} = -H_{\text{Ж}}(\ell_{\text{Ж}}/\ell_{\text{В}}),$$

изображенной на рис. 5.14 пунктиром, с соответствующей ветвью петли гистерезиса. Для узкого зазора, когда  $\ell_{\text{Ж}}/\ell_{\text{В}} \gg 1$ , точка  $d$  находится близко к оси  $B_{\text{Ж}}$  и, следовательно, искомое поле лишь ненамного меньше остаточного поля  $B_r$ . Но отличие  $B = B_{\text{Ж}}$  от  $B_r$  имеет принципиальный характер: всегда  $B < B_r$ . Возникает вопрос, почему в сплошном

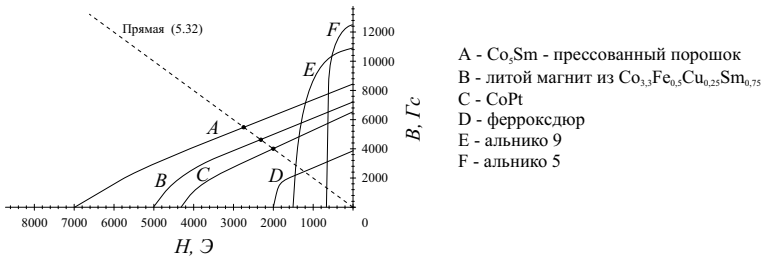


Рис. 5.15

сердечнике при выключенном токе в обмотке имеем  $B_{\text{ж}} = B_r$ , а при наличии небольшого воздушного зазора это поле уменьшается. Причиной служит так называемое *размагничивающее поле*  $H_{\text{ж}}$  в железе, которое при наличии воздушного зазора, как следует из выражения (5.28) и  $I = 0$ , обязательно появляется в железе, чтобы обеспечить нулевую величину циркуляции поля  $\vec{H}$  по замкнутому контуру  $\ell = \ell_{\text{ж}} + \ell_{\text{в}}$  (см. рис. 5.13). Если поле в зазоре равно  $B$ , то в железе возникает

$$H_{\text{ж}} = -(\ell_{\text{в}}/\ell_{\text{ж}})B, \quad (5.31)$$

и именно из-за этого поля значение  $B_{\text{ж}} = B$  становится меньше  $B_r$ . Отметим, что в рассматриваемом случае подковообразного магнита с узким воздушным зазором размагничивающее поле (5.31) мало и практически для всех материалов, характеристики которых представлены на рис. 5.15, поле в зазоре будет весьма близко к остаточному полю  $B_r$ . Из сказанного понятно, что в постоянных магнитах можно получить весьма значительные поля, так как остаточное поле для специальных магнитных материалов, как видно из рис. 5.15, достигает значения  $10^4 \text{ Гс}$  (1 Тл) и даже больше. Правда, у рассматриваемого подковообразного магнита есть существенный недостаток — его рабочий объем слишком мал и составляет незначительную долю от объема, занятого магнетиком. Поэтому интересно выяснить, поля какой величины можно создать с помощью постоянного магнита, представляющего собой конечный объем намагниченного до насыщения магнитного материала после его удаления из намагничивающего внешнего поля.

Простейшим телом конечных размеров, для которого подобную задачу легко решить, является шар. Как модельный объект, шар удобен

тем, что внутренние поля в нем всегда оказываются однородными. Здесь мы убедимся, что и в случае предварительного намагниченного ферромагнитного шара подобное положение остается справедливым.

Направим ось  $z$  по направлению вектора намагниченности. Предположим, что  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{H}_1$  внутри шара однородны, причем поле  $\vec{B}_1$  направлено вдоль  $\vec{M}$ ; тогда размагничивающее поле  $\vec{H}_1$  будет иметь противоположное направление, т. е.

$$\vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_z, \quad \vec{H}_1 = -H_1 \vec{e}_z.$$

Поле вне шара примем в виде поля диполя

$$\vec{B}_2 = \vec{H}_2 = -\text{grad} \left( \frac{D}{r^2} \cos \theta \right).$$

Эти поля внутри и вне шара, удовлетворяющие уравнениям  $\text{rot} \vec{H} = 0$ ,  $\text{div} \vec{B} = 0$ , удовлетворяют также граничным условиям непрерывности  $B_r$ ,  $H_\theta$  на поверхности шара  $r = a$ :

$$B_1 \cos \theta = \frac{2D}{a^3} \cos \theta, \quad H_1 \sin \theta = \frac{D}{a^3} \sin \theta.$$

Исключив из этих условий неопределенную константу  $D$ , получим первое из необходимых соотношений

$$H_1 = \frac{1}{2} B_1, \quad (5.32)$$

определяющее величину размагничивающего поля  $\vec{H}$  в материале. Второе задается графически в виде соответствующего участка петли гистерезиса материала шара, и точка пересечения прямой (5.32) с петлей гистерезиса определяет значение искомого поля  $B_1$  внутри шара, а следовательно, и на его поверхности в районе полюсов магнита (см. рис. 5.15, где прямая (5.32) нанесена пунктиром, точки пересечения для соответствующих материалов также выделены). В данном случае шарообразного магнита размагничивающее поле, в отличие от значения (5.31), всего вдвое меньше поля  $B$  и в этой связи требования к характеристикам материала существенно ужесточаются. Как видно из рис. 5.15, только при использовании материала с большим значением  $H_c$  шарообразный магнит обеспечивает достаточно высокие поля  $5 \cdot 10^3 \text{ Гс}$  и выше. В связи с названной конкретной цифрой следует иметь в виду, что кривая  $A$  из рис. 5.15 не является последним достижением в магнитных материалах; по крайней мере, значения  $B_r = 10^4 \text{ Гс}$  и  $H_c = 9,5 \cdot 10^3 \text{ Э}$  уже освоены.

## Глава 6

# КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

До сих пор мы ограничивались рассмотрением стационарных электромагнитных явлений, когда электрическое поле, токи в проводниках и обусловленное ими магнитное поле не меняются во времени. В стационарных явлениях взаимное влияние электрического и магнитного полей еще не проявляет себя в полной форме. Здесь электрическое поле через создаваемые им токи в проводящих средах определяет магнитное поле, но обратное влияние магнитного поля на электрические явления не наблюдается.

Только при исследовании переменных полей выявляется, что изменяющееся во времени магнитное поле приводит к дополнительному электрическому полю, а переменное электрическое поле, в свою очередь, порождает магнитное поле. Установлением этих закономерностей в виде знаменитой системы уравнений Максвелла, в основном, и было завершено создание фундамента классической электродинамики, к изложению которого мы здесь приступаем.

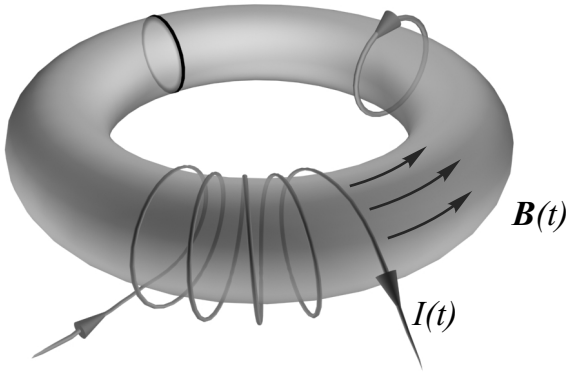


Рис. 6.1

## 6.1. Закон электромагнитной индукции

Первое из названных явлений, явление электромагнитной индукции, было экспериментально открыто в 1831 г. Фарадеем, установившим возникновение электрического тока в замкнутом проводнике при изменении магнитного потока через этот контур. В современных обозначениях закон индукции Фарадея выражается формулой

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad \left( \Phi = \int B_n dS \right), \quad (6.1)$$

связывающей ЭДС индукции в контуре  $\mathcal{E}$  со скоростью изменения магнитного потока  $\Phi$  через контур. Магнитный поток представляет собой поток вектора  $\vec{B}$  через поверхность  $S$ , натянутую на контур  $\ell$ , причем положительное направление обхода контура и направление нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  составляют правовинтовую систему. При этом знак «минус» в выражении (6.1) для  $\mathcal{E}$  означает, что возникающая при изменении магнитного потока ЭДС создает в контуре ток такого направления, чтобы создаваемое им магнитное поле препятствовало изменению магнитного потока (правило Ленца). Например, в проводящем кольце, надетом на железный тороид (рис. 6.1), индукционный ток потечет в направлении, указанном стрелкой – при увеличении тока в питающей обмотке, и в обратном направлении – при ослаблении этого тока.

Фарадей установил, что ток в проводящем контуре возникает при



любом способе изменения магнитного потока через этот контур. Можно поместить контур в изменяющееся магнитное поле (например, вдвигать в катушку или выдвигать из нее постоянный магнит). Можно изменять поток и за счет перемещения или деформации контура в неизменном магнитном поле (в общем случае неоднородном). Эти способы могут действовать и одновременно, приводя к изменению магнитного потока через контур.

Нетрудно заметить, что, если это изменение обусловлено деформацией или перемещением контура в неизменном во времени магнитном поле, появление ЭДС в контуре объясняется магнитной частью силы Лоренца. Покажем это на простейшем примере контура, находящегося в однородном магнитном поле, одно звено которого имеет возможность перемещаться (рис. 6.2). Магнитное поле  $\vec{B}_0$  перпендикулярно плоскости контура, скорость подвижного звена равна  $\vec{v}$ , положительное направление обхода контура выбрано так, чтобы соответствующее направление нормали к плоскости контура совпадало с  $\vec{B}_0$ .

Мы знаем, что ЭДС в контуре (3.24)

$$\mathcal{E} = \oint \vec{f}_{\text{стр}} \cdot d\vec{\ell}$$

равна циркуляции сторонних сил, действующих на единичный положительный заряд, находящийся в соответствующих точках контура. В рассматриваемом случае отличная от нуля сила (магнитная часть силы Лоренца) действует лишь на заряды, движущиеся вместе с проводником. Эта сила, отнесенная к заряду, равна  $\vec{f} = (1/c) [\vec{v} \times \vec{B}_0]$  и направлена против направления обхода контура. Следовательно, ЭДС индукции в контуре

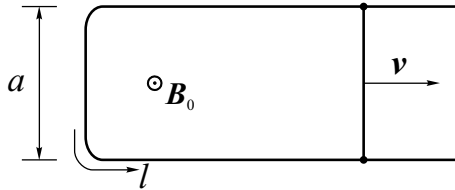


Рис. 6.2

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} v B_0 a,$$

что в действительности совпадает с  $-(1/c) (d\Phi/dt)$ , так как  $d\Phi/dt = v B_0 a$ .

## 6.2. Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции. Первая пара уравнений Максвелла

Итак, индукционный ток в проводнике, движущемся в постоянном магнитном поле, вызывается магнитной частью силы Лоренца. Какая же сила возбуждает индукционный ток в неподвижном контуре, находящемся в переменном магнитном поле? Ответ был дан Максвеллом. Согласно Максвеллу, всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве непотенциальное (вихревое) электрическое поле. Последнее и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике. Максвеллу принадлежит следующая углубленная формулировка закона электромагнитной индукции.

*Всякое изменение магнитного поля во времени возбуждает в пространстве вихревое электрическое поле. Циркуляция вектора напряженности  $\vec{E}$  этого поля по любому неподвижному замкнутому контуру определяется выражением*

$$\oint E_{\ell} d\ell = -\frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) dS = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial B_n}{\partial t} dS. \quad (6.2)$$

Между максвелловым и фарадеевым пониманием явления электромагнитной индукции имеется существенное различие. Согласно Фарадею, электромагнитная индукция состоит в *возбуждении электрического тока*. Для ее наблюдения необходимо наличие замкнутого проводника. Максвелл, напротив, видит сущность электромагнитной индукции прежде всего в *возбуждении электрического поля*, а не тока. Электромагнитная индукция может наблюдаться и тогда, когда в пространстве вообще нет никаких проводников. Появление индукционного тока в замкнутом проводнике при внесении последнего в переменное магнитное поле есть *лишь одно из проявлений* электрического поля  $\vec{E}$ , возникшего в результате изменения поля магнитного. Но поле  $\vec{E}$  может производить и другие действия, например поляризовать диэлектрик, вызвать пробой воздушного промежутка, ускорять и тормозить заряженные частицы и т. п.

*Пример 6.1.* Вычислить изменение орбитального магнитного момента электрона под действием магнитного поля.

Теперь у нас есть возможность получить оценочную формулу (5.13), которая в § 5.3 была использована для объяснения диамагнитного эф-

фекта. Для этого рассмотрим электрон, вращающийся по круговой орбите вокруг ядра (рис. 6.3). Чтобы не усложнять процедуру получения оценочной формулы, плоскость орбиты будем считать перпендикулярной вектору  $\vec{B}$ . Пусть  $B$  меняется от нуля до значения  $B_1$ . При этом по закону электромагнитной индукции в системе возникает вихревое электрическое поле. В точках орбиты оно, конечно, не обязано быть направленным по орбите. Поле  $\vec{E}$  и орбита могут иметь взаимное расположение, например, схематически указанное на рис. 6.4, где поле  $\vec{E}$  осесимметрично и силовые линии — концентрические окружности, а центр орбиты не находится на оси симметрии. Но закон электромагнитной индукции однозначно определяет среднее значение  $\langle E_\ell \rangle$  тангенциальной компоненты поля  $\vec{E}$  вдоль орбиты из соотношения

$$2\pi r \langle E_\ell \rangle = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad \langle E_\ell \rangle = -\frac{r}{2c} \frac{dB}{dt}.$$

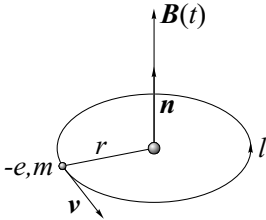


Рис. 6.3

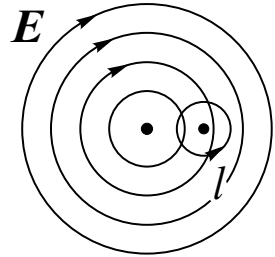


Рис. 6.4

Таким образом, на электрон действует средняя тангенциальная сила  $-e \langle E_\ell \rangle$  и для изменения орбитальной скорости имеем уравнение классической механики

$$m_e \frac{dv}{dt} = -e \langle E_\ell \rangle = r \frac{e}{2c} \frac{dB}{dt}$$

(релятивистские эффекты можно не учитывать, так как у захваченного на орбиту электрона для скорости справедлива оценка  $v/c \sim e^2/\hbar c \approx 1/137$ ). Отсюда полное приращение скорости при изменении  $B$  от 0 до  $B_1$

$$\Delta v = \frac{e}{2m_e c} r B_1,$$

а для орбитального магнитного момента  $\vec{m} = -(evr/2c)\vec{n}$  приращение равно

$$\Delta\vec{m} = -\frac{er}{2c}\Delta v\vec{n} = -\frac{e^2r^2}{4m_e c^2}\vec{B}_1.$$

Следовательно, искомая формула получена.

Интегральный закон электромагнитной индукции (6.2) является одним из основных законов электродинамики. Так как равенство (6.2) справедливо для любого контура, то, воспользовавшись теоремой Стокса

$$\oint E_\ell d\ell = \oint \text{rot}_n \vec{E} dS,$$

из интегрального соотношения (6.2) можно получить новое дифференциальное уравнение для электрического поля

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \quad (6.3)$$

Это — дифференциальная форма закона электромагнитной индукции. Естественно, при постоянном магнитном поле уравнение (6.3) превращается в уравнение электростатики  $\text{rot}\vec{E} = 0$ .

Если от обеих частей уравнения (6.3) взять дивергенцию, то с учетом тождества  $\text{div rot} \equiv 0$  отсюда получается равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{div}\vec{B} = 0 \quad (6.4)$$

о неизменности  $\text{div}\vec{B}$  во времени в любой точке пространства. Так как для стационарного магнитного поля

$$\text{div}\vec{B} = 0, \quad (6.5)$$

то из равенства (6.4) можно заключить, что уравнение (6.5) выполняется в общем случае нестационарных электромагнитных полей.

Система уравнений (6.3), (6.5)

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div}\vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

составляет первую пару уравнений Максвелла.

### 6.3. Потенциалы электромагнитного поля

Как видно из уравнения (6.3), электрическое поле в общем случае не является потенциальным и не может описываться с помощью скалярного потенциала. Теперь поля  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  одновременно выражаются через скалярный и векторный потенциалы. Действительно, подставим выражение (4.10)

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (6.6)$$

удовлетворяющее требованию (6.5), в соотношение (6.3) и получим уравнение

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi. \quad (6.7)$$

Как видим, поля  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  выражаются через потенциалы соотношениями (6.6) и (6.7).

Раньше, при изучении постоянного магнитного поля, отмечалось, что для заданного  $\vec{B}$  вектор-потенциал определяется с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Аналогичное положение сохраняется в общем случае: здесь скалярный и векторный потенциалы  $\varphi$ ,  $\vec{A}$  допускают преобразование

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} f(\vec{r}, t), \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t},$$

оставляющие поля  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  неизменными при произвольной функции  $f(\vec{r}, t)$  (*калибровочное* преобразование). Вследствие этого на потенциалы  $\varphi$ ,  $\vec{A}$  можно наложить дополнительное требование в виде одного скалярного уравнения. Выбор требования или, как говорят, условия калибровки, определяется соображениями удобства. Так, в магнитостатике мы пользовались вектор-потенциалом, удовлетворяющим условию

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad (6.8)$$

(*кулоновская калибровка*). В динамических задачах используется другая, *лоренцевская калибровка*

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (6.9)$$

с которой мы встретимся при изучении электромагнитных волн. А пока остановимся на одном полезном применении вектор-потенциала для вычисления магнитного потока через контур. Как следует из выражения (6.6) и теоремы Стокса, справедлива цепочка равенств

$$\Phi = \int_S B_n dS = \int_S \text{rot}_n \vec{A} dS = \oint_{\ell} A_{\ell} d\ell,$$

приводящая к формуле

$$\Phi = \oint_{\ell} A_{\ell} d\ell, \quad (6.10)$$

согласно которой *магнитный поток через контур равен циркуляции вектор-потенциала по этому контуру.*

## 6.4. Ток смещения. Вторая пара уравнений Максвелла

Как уже говорилось в связи с уравнениями (6.3), (6.5), переменное магнитное поле порождает в пространстве вихревое электрическое поле. Максвелл считал, что электрическое и магнитное поля в уравнения должны входить некоторым симметричным образом и, в частности, переменное электрическое поле должно аналогично возбуждать дополнительное магнитное поле. Известное до Максвелла уравнение (5.7)

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

или его интегральный аналог (5.17)

$$\oint_{\ell} H_{\ell} d\ell = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS$$

этому условию явно не удовлетворяют. К тому же непригодность уравнений (5.7), (5.17) для описания нестационарных электромагнитных процессов очевидна и по другим, объективным причинам. Во-первых, уравнение (5.7) противоречит закону сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0,$$

так как из уравнения (5.7) следует  $\text{div} \vec{j} = 0$ . Во-вторых, интегральное соотношение (5.17) очевидно неприменимо, например, к незамкнутому току, протекающему по сплошному цилиндрическому проводнику с

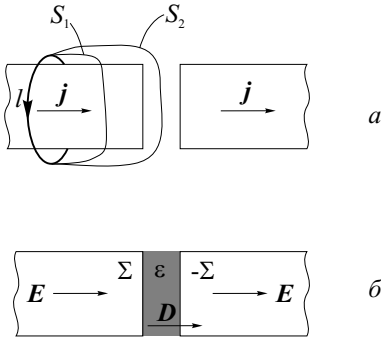


Рис. 6.5

узким разрезом, схематически изображенному на рис. 6.5, а. Действительно, если в качестве поверхности, опирающейся на контур  $\ell$ , брать  $S_1$ , пересекающую цилиндрический провод, то для нее суммарным током является  $I = \pi a^2 j$  ( $a$  – радиус провода); если же за поверхность принять  $S_2$ , проходящую по узкому зазору, имеем  $I = 0$ . Следовательно, в рассматриваемом случае правая часть соотношения (5.17) не определена.

Для разрешения последнего из двух названных противоречий обратим внимание на свободные поверхностные заряды, возникающие на поверхностях разреза при прохождении тока по проводникам (для общности примем, что зазор заполнен диэлектриком). Пусть  $\Sigma$  – поверхностная плотность свободных зарядов на левой стороне разреза; тогда из закона сохранения заряда имеем

$$j = \frac{\partial \Sigma}{\partial t}. \quad (6.11)$$

Поверхностная плотность зарядов из граничного условия (2.17) определяет разрыв между полем  $D$  в зазоре и полем  $E$  в проводнике (см. рис. 6.5, б):

$$D - E = 4\pi \Sigma.$$

Следовательно, плотность тока в проводнике (6.11) связана с полями  $E$ ,  $D$  соотношением

$$j = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t},$$

которое целесообразно представить в виде

$$j + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (6.12)$$

Так вот, для устранения обсуждаемого противоречия Максвелл предложил считать, что через разрез течет ток с плотностью, определяемой соотношением  $(1/4\pi) \partial \vec{D} / \partial t$ , и с названием ток смещения.

Точнее, Максвелл предположил, что в общем случае в создании магнитного поля кроме токов проводимости на равноправной основе участвуют токи смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.13)$$

и поэтому вместо (5.7) основное уравнение для магнитного поля следует записывать в виде

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6.14)$$

Отсюда видно, что полный ток

$$\vec{j}_{\Sigma} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}} = \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

в общем случае складывающийся из тока проводимости и тока смещения, удовлетворяет уравнению

$$\text{div} \vec{j}_{\Sigma} = 0.$$

Следовательно, линии полного тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются; в частности, для разреза изображенного на рис. 6.5 типа справедливо соотношение (6.12), согласно которому суммарный ток в проводнике через диэлектрический промежуток проходит в виде тока смещения.

Из последнего уравнения следует, что

$$\text{div} \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{D} = 0;$$

с учетом

$$\text{div} \vec{D} = 4\pi\rho \quad (6.15)$$

это полностью совпадает с законом сохранения заряда. Таким образом, введение гипотезы о существовании токов смещения вида (6.13) устраняет оба названные для нестационарных полей противоречия, не внося при этом никаких изменений в законы стационарных электрического и магнитного полей. Опыт полностью подтверждает справедливость как этой гипотезы, так и уравнения (6.14). Уравнение (6.14) совместно с (6.15) составляют вторую пару уравнений Максвелла.



Итак, теперь мы имеем полную систему уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (6.16)$$

которая для стационарного случая расщепляется на системы уравнений для электрического (2.12) и магнитного (5.3), (5.7) полей.

Чтобы подчеркнуть симметрию, полную систему приведем здесь для случая непроводящей ( $j = 0$ ) незаряженной ( $\rho = 0$ ) среды, когда полный ток сводится к току смещения:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что электрическое и магнитное поля в уравнения входят симметричным образом. Некоторое нарушение этой симметрии в общем случае обусловлено членами  $4\pi\vec{j}/c$  и  $4\pi\rho$  во второй строке уравнений (6.16), тогда как в ответных уравнениях первой строки соответствующие члены, связанные с возможными магнитными зарядами и магнитными токами, отсутствуют. Может оказаться, что это обстоятельство является временным, так как физики-экспериментаторы не теряют надежды и поиск магнитных зарядов в природе не прекращают. Если этот поиск приведет к положительному результату, место в уравнениях Максвелла для него давно приготовлено.

*Замечание к названию «ток смещения».* Ток смещения в вакууме  $(1/4\pi)\partial\vec{E}/\partial t$ , конечно, ни с какими движениями зарядов не связан. А вот для диэлектрика в составе тока смещения

$$j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

действительно имеются токи, вызванные смещением зарядов в молекулах диэлектрика (*поляризационные токи*), поскольку, как следует из определения вектора поляризации  $\vec{P}$  (2.1), частная производная  $\partial\vec{P}/\partial t$  равна сумме произведений величины заряда на его скорость  $\sum e_i \vec{v}_i$  по

всем зарядам, приходящимся на единицу объема диэлектрика. Следовательно, для диэлектрика

$$\begin{aligned}\vec{j}_{\text{см}} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{поляри}}, \\ \vec{j}_{\text{поляри}} &= \frac{\partial \vec{P}}{\partial t},\end{aligned}\tag{6.17}$$

т. е. в состав тока смещения входят поляризационные токи  $\vec{j}_{\text{поляри}}$ .

## 6.5. Квазистационарное приближение

1. Как показывают уравнения Максвелла, в нестационарных процессах электрическое поле возбуждается не только электрическими зарядами, но и переменным магнитным полем (закон электромагнитной индукции). Аналогично этому магнитное поле возбуждается не только движениями зарядов (токи проводимости), но и переменным электрическим полем (токи смещения).

Оказывается, в очень широком круге явлений с переменными полями главный эффект связан с электромагнитной индукцией, т. е. возбуждением электрического поля изменяющимся магнитным полем, а влиянием токов смещения можно пренебречь. Такие явления называются квазистационарными и описываются уравнениями Максвелла без токов смещения.

Возникает естественный вопрос об условиях применимости квазистационарного приближения. Интуитивно понятно, что «медленные» процессы должны происходить подобно стационарным и роль токов смещения в них должна быть незначительна. Но тогда вопрос о критерии медленности процесса остается открытым.

Для проводников (проводящих областей пространства) проблема решается легко. Здесь токи смещения в уравнении (6.14) действуют совместно с токами проводимости и их, следовательно, можно сравнивать. Для нестационарного процесса с характерным временем  $\tau = 2\pi/\omega$  плотности тока смещения и тока проводимости характеризуются следующими порядками величин:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \sim \frac{1}{4\pi\tau} \varepsilon E \sim \varepsilon \omega E, \quad j = \sigma E.$$

Следовательно, условие  $j_{\text{см}} \ll j$  в проводниках сводится к требованию

$$\varepsilon \omega \ll \sigma.\tag{6.18}$$

Проводимость металлов меняется в пределах  $10^{16} - 10^{18} 1/c$ . Поэтому условие (6.18) в металлических проводниках выполняется для всех частот, применяемых в технике, и нарушается только в области частот, соответствующих инфракрасной части спектра. Для проводников типа электролитов ( $\sigma \sim 10^{12} 1/c$ ) частоты  $\omega < 10^{10} 1/c$  еще можно считать низкими.

Таким образом, в проводящих средах почти всегда токами смещения можно пренебречь.

При рассмотрении окружающего непроводящего пространства возможность подобного сравнения отсутствует, так как здесь ток проводимости равен нулю и полный ток состоит только из тока смещения. Следовательно, требование (6.18) здесь теряет смысл и условие применимости квазистационарного приближения определяется из других соображений.

Для пренебрежения токами смещения теперь необходимо, чтобы магнитное поле, создаваемое этими токами, было мало по сравнению с полем  $\vec{B}$ , создаваемым токами проводимости. Как нам известно, в предельном случае медленноменяющегося процесса токи смещения отсутствуют и магнитное поле в пространстве определяется через токи проводимости по закону Био—Савара (4.8). Естественнo предположить, что и для достаточно медленных процессов с токами  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , зависящими от времени, решение вида (4.8), т. е.

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}', t) \times \vec{R}]}{R^3} dV', \quad (6.19)$$

должно быть приближенно верным. Из этого представления следует, что поле  $\vec{B}$  от времени зависит как от параметра, т. е. в любой точке  $\vec{r}$  в момент времени  $t$  поле  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  полностью определяется токами, взятыми в тот же момент времени. Отсюда ясно, что, отбросив токи смещения, мы потеряли эффект запаздывания при распространении электромагнитного сигнала, обусловленного конечной скоростью его распространения. Понятно, что пренебрежение запаздыванием тем менее достоверно, чем дальше точка наблюдения находится от источника.

Таким образом, если  $\ell$  – характерный размер области наблюдения, включающей в себя также все токи,  $\tau$  – характерное время изменения токов в системе, то условие применимости квазистационарного приближения можно представить в виде

$$\ell \ll c\tau \quad (6.20)$$

(время, необходимое сигналу для прохождения расстояния  $\ell$  должно быть мало по сравнению с характерным временем процесса). Впоследствии мы увидим, что  $c\tau$  есть характерная длина электромагнитной волны, излучаемой системой, поэтому условие (6.20) равносильно требованию

$$\ell \ll \lambda, \quad \lambda = c\tau, \quad (6.21)$$

чтобы размер системы был мал по сравнению с характерной длины волны, излучаемой системой.

2. После выяснения условий (6.18), (6.20) есть смысл обсудить, что означает квазистационарность, например, для тока в проводящем контуре.

Во-первых, из возможности пренебречь токами смещения вытекает следующая цепочка уравнений:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \oint j_n dS = 0$$

и как следствие последнего интегрального соотношения – *постоянство величины тока  $I(t)$  во всех сечениях контура*, как в случае стационарного тока.

Во-вторых, поскольку дифференциальный закон Ома (3.23)  $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стр}})$  имеет широкую область применимости и для переменного тока (см. п. 2 § 3.3), то для квазистационарного тока  $I(t)$  справедлив закон Ома для замкнутого контура

$$RI(t) = \mathcal{E}(t).$$

Электродвижущая сила в контуре в общем случае складывается из ЭДС индукции (6.1) и сторонней ЭДС. В свою очередь, ЭДС индукции также может быть разделена на две части: одна, обусловленная изменением внешнего магнитного поля и не зависящая от тока в контуре, может быть отнесена к  $\mathcal{E}_{\text{стр}}$ , а другая, возникающая из-за изменения магнитного поля, создаваемого током в самом контуре (собственная ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ ), представляет главный интерес при исследовании тока в контуре.

С учетом сказанного закон Ома для замкнутого контура запишем в виде

$$RI = \mathcal{E}_{\text{стр}} + \mathcal{E}_{\text{инд}} \quad (6.22)$$

и обратимся к вычислению  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ . Так как величина тока вдоль контура неизменна, то соотношение (6.19) для магнитного поля в окрестности

контура с током по правилу (4.5) приобретает вид

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{I(t)}{c} \oint \frac{d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^3}.$$

Отсюда видно, что магнитный поток  $\Phi$  через рассматриваемый контур, создаваемый собственным магнитным полем, пропорционален току  $I(t)$  (если в окружающем пространстве нет ферромагнитных тел).

В гауссовой системе единиц  $\Phi$  представляется в виде

$$\Phi = \frac{L}{c} I. \quad (6.23)$$

Коэффициент пропорциональности здесь взят в виде отношения  $L/c$ , где  $c$  – скорость света,  $L$  – физический параметр, называемый коэффициентом самоиндукции или индуктивностью контура и зависящий от его геометрии. Как нетрудно увидеть,  $L$  имеет размерность длины и измеряется в сантиметрах.

Таким образом, собственная ЭДС индукции в рассматриваемом контуре, неизменном по геометрии ( $L = \text{const}$ ) такова:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt}; \quad (6.24)$$

это есть третье основное свойство квазистационарного тока в контуре. После подстановки выражения (6.24) в уравнение (6.22) находим, что ток в контуре с индуктивностью  $L$  и омическим сопротивлением  $R$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_{\text{стр}}(t). \quad (6.25)$$

Отсюда, в частности, видно, что в отсутствие сторонней ЭДС начальный ток  $I_0$  в контуре затухает как

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad (6.26)$$

с характерным временем  $\tau = L/Rc^2$ .

Напомним в заключение, что если рассматриваем замкнутый проводящий контур с током частоты  $\omega$ , то ток в контуре будет квазистационарным, если протяженность контура меньше длины волны  $\lambda = c2\pi/\omega$ . Например, для технического тока с частотой 50 Гц длина волны  $\lambda \approx 6$  тыс. км. Поэтому если нас интересуют вопросы, связанные с распределением тока по проводникам в пределах города, то ток

можно считать квазистационарным. Но если речь идет о передаче тока на многие тысячи километров, то необходимо принять во внимание его переменность вдоль линии передачи и нельзя считать его квазистационарным.

3. В качестве первого нетривиального квазистационарного процесса рассмотрим процесс затухания тока, распределенного по тонкому плоскому проводящему слою. В то время как затухание тока в контуре (6.26) получается непосредственно из уравнения (6.25), изменение во времени и в пространстве тока, распределенного по поверхности, определяется только как результат исследования полей в пространстве по обе стороны поверхности.

Представим себе, что в проводящей безграничной плоскости (плоскость  $z = 0$ ) текут поверхностные токи, в начальный момент времени характеризующиеся плотностью тока

$$\vec{i} = i_0(r) \vec{e}_\alpha, \quad (6.27)$$

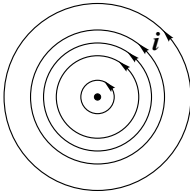


Рис. 6.6

так что линии тока представляют собой концентрические окружности, как схематически изображено на рис. 6.6. Примем, что размер области, занятой током, ограничена, так что  $i_0(r) \neq 0$  лишь при  $r < R_0$ . Квазистационарное магнитное поле, создаваемое токами (6.27) в окружающем свободном пространстве, задано вектор-потенциалом

$$\vec{A}_0(r, z) = A_0(r, z) \vec{e}_\alpha,$$

имеющим лишь  $\alpha$ -компоненту, зависящую от других цилиндрических координат  $r, z$  (см. выражение (4.18)). Считая, что ток в слое удовлетворяет закону Ома

$$\vec{i} = \sigma_* \vec{E}, \quad (6.28)$$

найдем законы затухания поля  $\vec{B}$  во всем пространстве и тока  $\vec{i}$  в плоскости при  $t > 0$ .

Очевидно, что осевая симметрия в распределениях тока и магнитного поля сохраняется со временем; при этом

$$\vec{A}(r, z, t) = A(r, z, t) \vec{e}_\alpha.$$

Вследствие этого задача сводится к определению одной скалярной функции  $A(r, z, t)$ , так как  $i_\alpha(r, t)$  из граничных условий выражается через  $A(r, z, t)$ .

При математической формулировке задачи учтем, что функция  $A(r, z, t)$  симметрична относительно плоскости  $z = 0$ , вследствие чего в качестве области определения можно рассматривать полупространство  $z > 0$ . При этом для компонент  $B_r = -\partial A / \partial z$ ,  $B_z = (1/r) \partial(rA) / \partial r$  поля  $\vec{B}$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} B_r(r, -z, t) &= -B_r(r, z, t), \\ B_z(r, -z, t) &= B_z(r, z, t). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Искомая функция  $A(r, z, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot} [A(r, z, t) \vec{e}_\alpha] = 0,$$

которое после раскрытия роторов приводится к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = 0. \quad (6.30)$$

(Заметим сразу, что начальное распределение  $A_0(r, z)$  удовлетворяет этому уравнению.) Условие непрерывности  $B_z$  на границе  $z = 0$  автоматически выполняется из условия симметрии (6.29). Скачок тангенциальной компоненты  $B_r = H_r$  с учетом условия (6.29) для  $B_r$  дает  $2B_r(r, 0, t) = (4\pi/c)i_\alpha(r, t)$ , т. е.

$$-\frac{\partial A}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi}{c} i_\alpha(r, t). \quad (6.31)$$

Из закона Ома (6.28)  $i_\alpha(r, t) = \sigma_* E_\alpha(r, 0, t)$  и соотношения

$$E_\alpha(r, z, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial A(r, z, t)}{\partial t},$$

получающегося из выражения (6.7) при  $\varphi \equiv 0$ , условие (6.31) приобретает вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{2\pi\sigma_*}{c^2} \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{z=0}. \quad (6.32)$$

Наконец, необходимо удовлетворить еще начальному условию, которое сводится к требованию

$$A(r, z, 0) = A_0(r, z). \quad (6.33)$$

Соотношения (6.30), (6.32), (6.33) составляют математическую формулировку задачи.

Граничное условие (6.32) и то обстоятельство, что  $A_0(r, z)$  удовлетворяет уравнению (6.30), подсказывают решение

$$A(r, z, t) = A_0(r, \xi), \quad \xi = z + Vt \quad (6.34)$$

в виде начального поля, поступательно перемещающегося против направления оси  $z$  (в верхнем полупространстве) со скоростью

$$V = \frac{c^2}{2\pi\sigma_*}. \quad (6.35)$$

Действительно, вследствие  $\partial^2 A / \partial z^2 = \partial^2 A_0 / \partial \xi^2$  функция  $A(r, z, t)$  из (6.34) удовлетворяет уравнению (6.30); так как

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A_0}{\partial \xi} V, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A_0}{\partial \xi},$$

граничное условие удовлетворяется, если величина скорости определяется соотношением (6.35).

Из решения (6.34) следует, что в рассматриваемом верхнем полупространстве к моменту времени  $t$  остается поле, в начальный момент занимавшее полупространство  $z > Vt$ . Область пространства в полосе  $0 < z < Vt$  вместе с содержащимся здесь начальным полем  $\vec{B}_0(r, z)$  как бы исчезает, уходя вниз за пределы области определения, что иллюстрируется картинками силовых линий на рис. 6.7. Здесь для частного вида распределения тока  $i_0(r)$ , описанного ниже в § 6.8, представ-

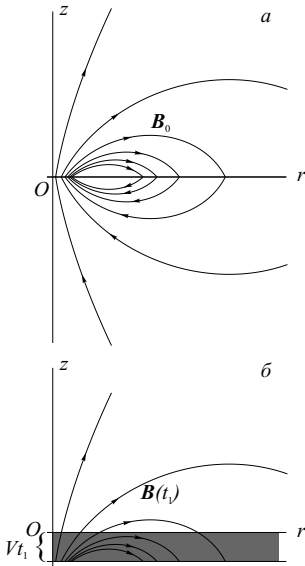


Рис. 6.7

лены силовые линии поля  $\vec{B}$ , лежащие в радиальной плоскости, проходящей через ось  $z$ . На рис. 6.7, а изображены силовые линии, соответствующие начальному моменту времени, для верхнего и (симметричного) для нижнего полупространств. В момент времени  $t_1 > 0$  поле  $\vec{B}$  в верхнем полупространстве характеризуется силовыми линиями остающимися вне заштрихованной полосы ширины  $Vt_1$ , как показано на рис. 6.7, б.



Понятно из решения (6.34) и приведенной иллюстрации, что если начальное поле  $\vec{B}_0(r, z)$ , созданное током (6.27), занимает полуполосу с характерным размером  $\ell$  по оси  $z$ , то за промежуток времени  $\Delta t$ , определяемом условием

$$V\Delta t = \ell,$$

поле в пространстве вместе с током в проводящей плоскости исчезают. Скорость  $V$ , выражаемая формулой (6.35), зависит от величины «проводимости»  $\sigma_*$  тонкого слоя, которая, как следует из соотношения (3.4), определяется произведением  $\sigma_* = \sigma\delta$  проводимости  $\sigma$  материала и реальной толщины  $\delta$  проводящего слоя. Следовательно, характерное время затухания начального тока определяется выражением

$$\Delta t = 2\pi\sigma\ell\delta/c^2 \quad (6.36)$$

и, кроме свойств  $\sigma, \delta$ , зависит от протяженности области, занятой током. (Без обсуждения некоторых тонкостей мы здесь приняли, что размер  $R_0$  области, занятой током, и характерный размер  $\ell$  совпадают.) Заметим, что для произвольного момента времени  $t > 0$  распределение тока в плоскости определяется из граничного условия (6.31) и в соответствии с решением (6.34) имеет вид

$$i_\alpha(r, t) = -\frac{c}{2\pi} \frac{\partial A}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{c}{2\pi} \frac{\partial A_0(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=Vt}. \quad (6.37)$$

Знание характерного времени  $\tau$  (6.36) показывает, что условие квазистационарности (6.21) для исследуемого процесса выполняется при условии

$$\frac{\sigma\delta}{c} \gg 1.$$

Например, для медной пластины ( $\sigma = 5 \cdot 10^{17} \text{1/c}$ ) с толщиной  $\delta = 0,1$  см этот параметр имеет порядок  $10^6$  и с большим запасом обеспечивает квазистационарность процесса.

## 6.6. Примеры вихревого электрического поля

Обратимся к вопросу о вихревом поле, возникающем под действием переменного магнитного поля.

Как мы выяснили, в квазистационарном приближении магнитное поле создается только токами проводимости. Вихревое электрическое поле при этом удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (6.38)$$

Видно, что для известного магнитного поля  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  соответствующее электрическое поле  $\vec{E}$  системой (6.38) не определяется однозначно, так как новое векторное поле

$$\vec{E}' = \vec{E} + \operatorname{grad} \psi(\vec{r}, t),$$

полученное из  $\vec{E}$  добавлением градиента произвольной скалярной функции, также удовлетворяет уравнениям (6.38), если только  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = 0$ .

Формально это обстоятельство напоминает неоднозначность векторного потенциала для заданного магнитного поля, обсуждавшуюся в § 4.3 и 6.3. Физически неоднозначность решения системы (6.38) объясняется тем, что одно и то же магнитное поле  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  может быть создано с помощью различных магнитных систем; каждая из них имеет свою границу, на которой задается условие непрерывности тангенциальной компоненты поля  $\vec{E}$  и, следовательно, порождает свое решение.

В этой связи необходимо заметить, что условие непрерывности  $\vec{E}_\tau$ , выведенное в § 1.8 из интегрального соотношения  $\oint E_\tau dl = 0$ , на первый взгляд кажется несовместимым с интегральным законом электромагнитной индукции (6.2), так как циркуляция  $\vec{E}$  по замкнутому контуру  $p_1 p'_1 p'_2 p_2$  (см. рис. 1.9) в общем случае не равна нулю и определяется скоростью изменения магнитного потока через этот контур. Но такой вывод несостоятелен, поскольку в любом случае поле  $\vec{B}$  конечно и магнитный поток через рассматриваемый контур стремится к нулю при стягивании контура к средней линии. Следовательно, условие непрерывности  $\vec{E}_\tau$  справедливо в общем случае переменных полей.

Остановимся на определении вихревого электрического поля для одного важного частного случая, когда рассматриваемое переменное магнитное поле однородно в пространстве (в своей области определения) и направлено вдоль оси  $z$ :

$$\vec{B} = B(t) \vec{e}_z. \quad (6.39)$$

При этом задача определения поля  $\vec{E}$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -(1/c) \dot{B}(t) \vec{e}_z, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (6.40)$$

## 6.6. Примеры вихревого электрического поля

227

с точностью до обозначений совпадает с задачей (4.14) определения вектора-потенциала для однородного магнитного поля  $\vec{B}_0$ , рассмотренной в гл. 4 (пример 4.2). Два из бесчисленного множества возможных решений здесь выпишем:

$$\vec{E}_1 = -\frac{r}{2c}\dot{B}(t)\vec{e}_\alpha; \quad (6.41)$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{x}{2c}\dot{B}(t)\vec{e}_y. \quad (6.42)$$

В § 6.7 показано, что эти простейшие решения реализуются, например, в МК-генераторах соответствующей геометрии. А пока на одном конкретном примере продемонстрируем вихревое поле более сложной конфигурации, чем (6.41), (6.42), возникающее в том же однородном магнитном поле (6.39).

*Пример 6.2\**. Низкочастотный «колебательный контур» состоит из плоского конденсатора, обкладки которого соединены тонкой цилиндрической оболочкой, как показано на рис. 6.8. Геометрические размеры удовлетворяют условиям  $d \ll (b, \ell)$ ,  $\ell \gg a$ . При этом частота колебаний тока в системе

$$\omega_0 = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{d}{\pi b}}$$

и соответствующая длина волны  $\lambda = c2\pi/\omega = 2\pi a\sqrt{\pi b/d}$  удовлетворяет условию  $\lambda \gg a$ . Последнее означает, что к системе применимо квазистационарное приближение и, следовательно, поверхностную плотность тока  $i(t)$  можно считать одинаковой по всей цилиндрической оболочке и магнитное поле внутри цилиндрической области радиуса  $a$  совпадает с полем (6.39), где  $B(t) = 4\pi i(t)/c$ .

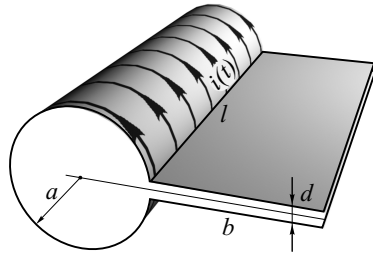


Рис. 6.8

Требуется определить вихревое электрическое поле в цилиндрической области, занятой однородным полем  $\vec{B}(t)$ .

Здесь мы имеем конкретное устройство, в рассматриваемой области создающее однородное магнитное поле. Следовательно, у нас есть возможность сформулировать необходимое граничное условие для искомого

го поля  $\vec{E}$ , которое в предположении идеальной проводимости цилиндрической оболочки сводится к требованию отсутствия тангенциальной компоненты электрического поля на границе  $r = a$ :

$$E_\alpha(a, t) = 0. \quad (6.43)$$

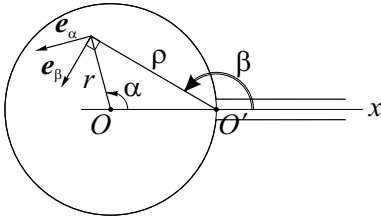


Рис. 6.9

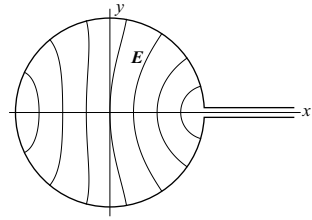


Рис. 6.10

Условие (6.43) совместно с уравнениями (6.40) составляют математическую формулировку рассматриваемой задачи. Решение задачи с необходимостью складывается из двух векторных полей. Первое из них есть (6.41), заданное в полярных координатах  $(r, \alpha)$  (рис. 6.9), удовлетворяющее уравнениям (6.40), но на границе  $r = a$   $E_{1\alpha} = -(a/2c)\dot{B}(t)$  не удовлетворяет условию (6.43). Поэтому в состав решения необходимо включить дополнительное векторное поле, удовлетворяющее однородным уравнениям  $\text{rot}\vec{E}_* = 0$ ,  $\text{div}\vec{E}_* = 0$ , имеющее во всех точках границы постоянную  $\alpha$ -составляющую. Такое потенциальное векторное поле существует, как было показано в гл. 5 при рассмотрении примера 5.2 (формула (5.23)). Это — магнитное поле прямого провода с током, проходящего по образующей цилиндра  $r = a$  через точку пересечения окружности  $r = a$  с осью  $x$ . Считая эту точку  $O'$  началом другой полярной системы координат  $(\rho, \beta)$  (рис. 6.9), поле  $\vec{E}_*$  представим в виде

$$\vec{E}_* = \frac{2\Lambda(t)}{c\rho} \vec{e}_\beta$$

и отметим его свойство

$$E_{*\alpha}|_{r=a} = \frac{\Lambda(t)}{ca},$$

установленное раньше в примере 5.2. Нетрудно заметить, что если принять  $\Lambda(t) = (a^2/2)\dot{B}(t)$ , то сумма  $\vec{E}_1 + \vec{E}_*$ , удовлетворяя уравнениям

(6.40) и условию (6.43), представляет собой искомое решение для вихревого электрического поля:

$$\vec{E} = \frac{\dot{B}(t)}{2c} \left( -r\vec{e}_\alpha + \frac{2a^2}{\rho}\vec{e}_\beta \right);$$

конфигурацию поля характеризуют силовые линии, изображенные на рис. 6.10. Отметим, что полученное решение имеет смысл во всей области  $r < a$ , за исключением малой окрестности точки  $0'$ , где истинная граница представляет пересечение цилиндрической оболочки и плоских обкладок конденсатора.

## 6.7. Сохранение магнитного потока. МК-генератор

Допустим, что проводящий виток находится в произвольном магнитном поле – постоянном или переменном. Пусть он еще деформируется и перемещается произвольным образом. Тогда в витке возбуждается индукционный ток, согласно соотношениям (6.22), (6.1) равный

$$I = \frac{1}{R}\mathcal{E} = -\frac{1}{cR} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Если омическое сопротивление равно нулю, то должно быть  $d\Phi/dt$ , так как в противном случае в проводнике возникли бы бесконечно большие токи, что физически невозможно. Таким образом, для *идеально проводящего замкнутого провода, находящегося в магнитном поле, магнитный поток, пронизывающий контур, остается неизменным при всех возможных изменениях как внешнего магнитного поля, так и геометрии контура*. Это положение, называемое законом сохранения магнитного потока, обеспечивается индукционными токами, которые, согласно правилу Ленца, препятствуют всякому изменению магнитного потока через контур. Магнитный поток, обусловленный внешним магнитным полем, не остается постоянным. Магнитный поток, создаваемый индукционными токами, также меняется во времени. Однако сумма этих двух потоков сохраняется постоянной.

Идеализация бесконечной проводимости среды и соответственно представление о сохраняющемся магнитном потоке широко используется в магнитной гидродинамике применительно к плазме в астрофизических

приложениях. Но эти проблемы мы здесь обсуждать не можем, а кратко остановимся на работе так называемого магнитокумулятивного генератора (МК-генератор), используемого для получения импульсных сверхсильных магнитных полей методом обжатия магнитного потока при помощи проводящих стенок.

Представим себе полый цилиндр из меди, заполненный однородным магнитным полем  $\vec{B}_0$ , направленным вдоль оси цилиндра. (Это начальное поле может быть создано, например, коаксиальным соленоидом с радиусом, превышающим радиус медного цилиндра.) Пусть теперь материалу стенок трубы сообщили радиальное движение к оси симметрии, как схематически изображено на рис. 6.11, например, под действием сходящейся цилиндрической детонационной волны; при этом давление превышает предел текучести материала и медный цилиндр деформируется как жидкий.

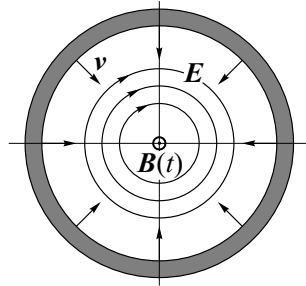


Рис. 6.11

На первом этапе процесса схлопывания стенок трубы омическим сопротивлением материала можно пренебречь и магнитный поток внутри сжимающегося цилиндра считать неизменным. Тогда магнитное поле здесь будет расти обратно пропорционально квадрату внутреннего радиуса  $R(t)$

$$\vec{B}(t) = B_0 \frac{R_0^2}{R^2(t)} \vec{e}_z, \quad (6.44)$$

где  $R_0$  — начальный радиус цилиндрической полости. В последующем рост поля останавливается из-за процесса диффузии магнитного поля в материал проводника (этот процесс рассматривается в следующем параграфе) и вследствие потери устойчивости границы жидкого цилиндра при торможении в сильном магнитном поле.

На этом пути достигнуты уникальные результаты. Максимальное поле, зарегистрированное в МК-эксперименте, составляет 28 МГс и получено в одной из лабораторий Советского ядерного центра, известного под названием Арзамас-16. Плотность энергии в таком поле в 400 раз превышает плотность энергии взрывчатого вещества. Институт гидродинамики Сибирского отделения РАН (группа Биченкова) долгое время представлял один из четырех мировых центров по изучению явлений магнитной кумуляции.

Процесс обжата магнитного потока может быть осуществлен в МК-генераторе плоской геометрии, схематически представленном на рис. 6.12. (Неподвижные проводящие стенки  $y = \pm b = \text{const}$ , ограничивающие систему в направлении  $y$ , здесь не показаны.) Положение подвижного плоского «поршня» задается координатой  $a(t)$  и из условия сохранения магнитного потока имеем

$$\vec{B}(t) = B_0 \frac{a_0}{a(t)} \vec{e}_z.$$

Таким образом, в этих двух геометрически отличающихся устройствах получаются пространственно однородные магнитные поля, меняющиеся во времени. Естественно поставить вопрос о конфигурации вихревого электрического поля в этих двух случаях.

В первом случае для этого можно воспользоваться цилиндрической симметрией и интегральным законом электромагнитной индукции (6.2) применительно к контуру в виде окружности радиуса  $r < R(t)$ . Отсюда имеем

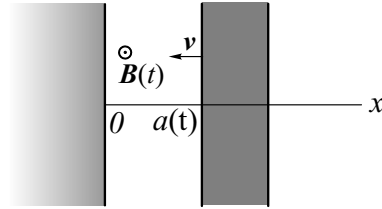


Рис. 6.12

$$2\pi r E_\alpha(r, t) = -\frac{1}{c} \pi r^2 \frac{dB}{dt},$$

т. е. результат  $E_\alpha(r, t) = -(r/2c) \dot{B}(t)$ , ранее выписанный в виде (6.41). Подставив сюда выражение  $B(t)$  из формулы (6.44), получим

$$E_\alpha(r, t) = \frac{r}{R(t)} \frac{dR/dt}{c} B(t), \quad (6.45)$$

откуда видно, что поле  $E$  линейно растет с увеличением радиуса и максимального значения

$$\frac{|v|}{c} B(t)$$

достигает на границе жидкого цилиндра.

В случае плоской геометрии вихревое поле ищется как решение дифференциальных уравнений (6.40), удовлетворяющее граничным условиям отсутствия тангенциальных компонент поля на неподвижных участках границы:  $E_x = 0$  — на стенках  $y = \pm b$ ;  $E_y = 0$  — на стенке  $x = 0$ .

Решение имеет вид  $\vec{E} = -(x/c) \dot{B}(t) \vec{e}_y$ , совпадающий с (6.42). После подстановки соответствующего выражения для  $B(t)$  отсюда получаем

$$E_y(x, t) = \frac{x}{a(t)} \frac{da/dt}{c} B(t). \quad (6.46)$$

Заметим, что при построении решений для  $\vec{E}$  мы вынужденно не договариваем об условиях на подвижных границах, так как их обсуждение требует знания законов преобразования полей при переходе из одной системы отсчета к другой — подвижной системе. В соответствующем месте курса мы убедимся, что приведенные здесь выражения (6.45), (6.46) удовлетворяют граничным условиям также и на подвижных границах.

## 6.8. Квазистационарные электромагнитные поля в объемных проводниках. Диффузия поля

1. Переменный ток, протекающий по проводнику, и переменные поля в проводнике обладают характерной особенностью, обусловленной электромагнитной индукцией. В общем случае нестационарного процесса эта особенность выражается в диффузном характере изменения распределения полей по объему проводника, а в случае периодического во времени процесса — в локализации тока и полей в слое проводника, прилегающем к его поверхности (скин-эффект).

2. Для исследования нестационарных электромагнитных полей в проводящей среде служат уравнения

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}, \quad \text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (6.47)$$

получающиеся из уравнений Максвелла (6.16) после исключения тока смещения и использования дифференциального закона Ома для тока проводимости.

Рассмотрим однородный проводник, в котором  $\sigma, \varepsilon, \mu$  — величины постоянные. Тогда, исключив из системы (6.47) поле  $\vec{E}$ , получим уравнение для  $\vec{B}$ :

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -c \text{rot}\vec{E} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rotrot}\vec{H},$$

т. е.

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \text{rotrot}\vec{B}.$$

Введя лапласиан векторного поля

$$\Delta\vec{B} = -\text{rotrot}\vec{B} + \text{graddiv}\vec{B},$$



определенный в § 4.4, и воспользовавшись уравнением  $\text{div} \vec{B} = 0$ , откуда имеем

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \Delta \vec{B}. \quad (6.48)$$

Точно такое же уравнение

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \Delta \vec{E} \quad (6.49)$$

получается после исключения из системы (6.47) поля  $\vec{B}$ , считая, что плотность свободных зарядов в проводнике  $\rho = 0$ .

Скалярный аналог уравнений (6.48), (6.49) в математической физике называется уравнением диффузии или уравнением теплопроводности.

3. Процесс диффузии поля качественно можно понять из рассмотрения простейшей модели в виде длинного соленоида с поверхностным током  $i$ , внутри которого соосно расположен сплошной проводящий цилиндр (рис. 6.13). Пусть до момента времени  $t = 0$  ток в соленоиде поддерживает стационарное однородное магнитное поле, которое внутри проводящего цилиндра равно  $B_z = \mu 4\pi i / c$ ,  $\mu$  – магнитная проницаемость материала цилиндра. В момент  $t = 0$  ток в соленоиде быстро (по сравнению с характерным временем  $\tau$ , которое определено ниже) уберем. Очевидно, что магнитное поле внутри цилиндра сразу вслед за внешним током обратиться в нуль не может, так как этому препятствуют круговые токи, индуцируемые вихревым электрическим полем. Эти объемные токи в цилиндре направлены в ту же сторону, куда был направлен ток в соленоиде, чтобы препятствовать быстрому исчезновению магнитного потока через сечение проводника. В данной простейшей ситуации индуцированные токи можно рассматривать как систему вставленных друг в друга соленоидов, не создающих магнитного поля вне цилиндра, и, следовательно, магнитное поле на внешней поверхности цилиндра при  $t > 0$  равно нулю.

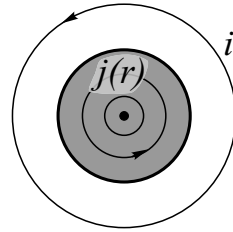


Рис. 6.13

Таким образом, задача определения поля  $B_z(r, t)$  внутри цилиндра  $r \leq a$  для  $t > 0$  сводится к уравнению

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \quad (6.50)$$

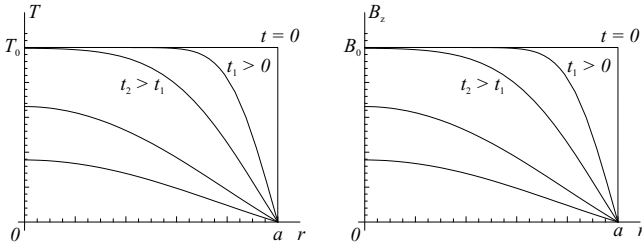


Рис. 6.14

к граничному условию  $B_z(a, t) = 0$  (при  $t > 0$ ) и начальному условию  $B_z(r, 0) = B_0 = \mu 4\pi i/c$ .

Эта задача полностью эквивалентна тепловой задаче остывания равномерно нагретого теплопроводного цилиндра. Здесь диффузия тепла из внутренних областей вызывает изменение распределения температуры  $T$  со временем, которое для различных моментов времени качественно изображено на рис. 6.14. Рядом эти кривые воспроизведены в качестве зависимости  $B_z$  от  $r$  для тех же моментов времени, показывая характер процесса затухания поля со временем внутри проводящего цилиндра.

Для цилиндрической геометрии ограничимся приведенными качественными соображениями, так как точные решения уравнения (6.50) выражаются через функции Бесселя, знакомство с которыми здесь не предполагается. Для получения количественных результатов упростим ситуацию, заменив соленоид кругового сечения и проводящий цилиндр на плоский соленоид и проводящую плиту с толщиной  $2a$  (рис. 6.15). Тогда математическая формулировка задачи определения  $B_z(x, t)$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial t} &= \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}, \quad (|x| < a, \quad t > 0), \\ B_z(-a, t) &= B_z(a, t) = 0 \quad (\text{при } t > 0), \\ B_z(x, 0) &= B_0 \quad (|x| \leq a). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Для решения сформулированной задачи выпишем вначале набор решений одномерного уравнения диффузии в виде мультипликативных функций

$$B_z(x, t) = f(t) F(x), \quad (a)$$

После выполнения первых трафаретных шагов метода разделения переменных, приведенных в §1.10, для  $f(t)$ ,  $F(x)$  имеем уравнения

$$\frac{f'(t)}{\nu f(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -k^2. \quad (б)$$

Здесь принято обозначение  $\nu = c^2/4\pi\sigma\mu$  и константа разделения сразу взята с определенным знаком в виде  $-k^2$  ( $k$  — произвольная), так как интересующие нас решения должны описывать поле, затухающее со временем. Подставив решения уравнений (б) в выражение (а), искомый бесконечный набор решений уравнения диффузии получим в виде

$$e^{-\nu k_n^2 t} (C_n \cos k_n x + D_n \sin k_n x). \quad (в)$$

Теперь для построения решения задачи (6.51) остается составить ряд Фурье (по косинусам, так как искомая функция четная по переменной  $x$ ), приняв  $k_n = (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{a}$ :

$$B_z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\nu k_n^2 t} \cos k_n x. \quad (г)$$

При этом нулевые условия на границах  $x = \pm a$  удовлетворены. Неопределенные коэффициенты ряда определяются из начального условия. Для этого начальную функцию надо представлять в виде ступенчатой периодической функции, в пределах  $|x| \leq a$  принимающей постоянное значение  $B_0$ , а на границах  $|x| = a, 3a, 5a, \dots$  меняющей знак на противоположный. Все коэффициенты разложения  $C_n$  здесь не имеет смысла выписывать. Отметим лишь значение  $C_1 = (4/\pi)B_0$ .

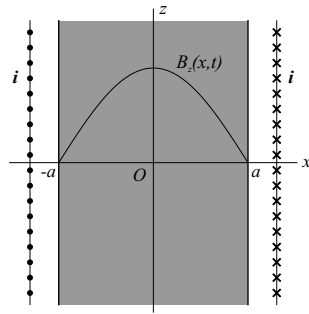


Рис. 6.15

Показатели экспонент ряда (г) показывают, что чем выше номер пространственной гармоники, тем гармоника затухает со временем быстрее. Поэтому очень скоро после начала процесса остается одна первая гармоника и искомое решение для моментов времени  $t > \tau$  принимает вид

$$B_z(x, t) = \frac{4}{\pi} B_0 \cos \frac{\pi x}{2a} e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{4\pi\sigma\mu (2a)^2}{\pi^2 c^2}.$$

Отсюда видно, что распределение поля по координате  $x$  во все последующие моменты времени остается подобным выбранному начальному распределению, только масштаб поля со временем экспоненциально затухает с характерным временем  $\tau$ .

Заметим, что по порядку величины время  $\tau$ , необходимое для проникновения поля (магнитного или электрического) на глубину  $\ell$  (либо для затухания поля в объемном проводнике с характерным размером  $\ell$ ) оценивается непосредственно из уравнений (6.48), (6.49) в виде соотношения

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \frac{1}{\ell^2}. \quad (6.52)$$

Например, для медного шара ( $\sigma = 5 \cdot 10^{17} \text{1/c}$ ) радиуса  $R = 0,5 \cdot 10^2 \text{см}$  это время  $4\pi\sigma R^2/c^2$  имеет порядок четверти минуты.

Характерное время (6.52) пропорционально проводимости среды и квадрату характерного размера. Полезно его сопоставить с аналогичной по смыслу оценкой (6.36), полученной для затухания поля в случае проводящего слоя, который характеризуется размерами:  $\delta$  – толщина слоя и  $\ell$  – протяженность области, занятой током или полем; в этом случае характерное время (6.36) пропорционально произведению этих двух характерных размеров и существенно больше, чем время, необходимое для проникновения поля на глубину  $\delta$ .

Здесь уместно вернуться к задаче затухания поверхностного тока, конкретизируя вид его начального распределения. Рассмотрим пример, восходящий к самому Максвеллу, демонстрирующий нетривиальное применение метода изображения.

*Пример 6.3\*.* «Бегущие» изображения в задаче затухания поверхностного тока.

Конкретизируем вид начального распределения тока (6.27) в тонком плоском слое. Примем, что над проводящей плоскостью на высоте  $h \gg \delta$  расположен проводящий контур в виде кольца с радиусом  $r_0$  (рис. 6.16). В контуре быстро возбуждается ток  $I_0$  и в дальнейшем поддерживается постоянным. Токи, возникающие при этом в плоском слое из-за электромагнитной индукции, и принимаются как начальные токи (6.27).

Если плоский слой имеет толщину  $\delta$  и проводимость  $\sigma$ , то время проникновения магнитного поля через слой, определяемое из соотношения (6.52),  $\tau_0 \sim 4\pi\sigma\delta^2/c^2$ . Понятно, что если ток в контуре возбуждается за время, меньшее  $\tau_0$ , то индуцируемые при этом в плоском слое токи полностью экранируют поле в нижнем полупространстве. Поэтому

примем, что в момент времени  $t = 0$  ток в кольце равен  $I_0$ , а в плоскости  $z = 0$  созданы поверхностные токи  $i_0(r)\vec{e}_\alpha$ , которые обеспечивают нулевое магнитное поле в нижнем полупространстве.

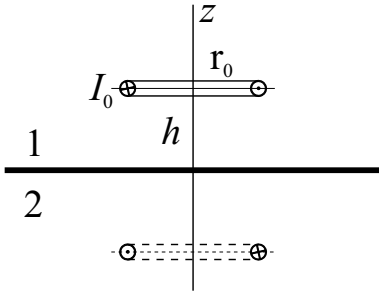


Рис. 6.16

ласти  $z > 0$  и представляющее собой вектор-потенциал фиктивного витка-изображения, находящегося в нижнем полупространстве;  $A'(r, z)\vec{e}_\alpha$  — определенный в области  $z < 0$  вектор-потенциал изображения, находящегося в верхнем полупространстве. Витки изображения симметричны относительно плоскости  $z = 0$  (см. рис. 6.16), причем верхнее изображение пространственно совпадает с реальным витком. Токи в обоих фиктивных витках направлены против тока  $I_0$  в реальном контуре. Функции  $A(r, z)$ ,  $A'(r, z)$  не имеют особенностей в своих областях определения и симметричны относительно плоскости  $z = 0$ .

Нетрудно видеть, что вектор-потенциалы в областях 1, 2 (см. рис. 6.16) для начального момента времени необходимо представить в виде сумм:

$$A_1 = A_*(r, z) + A(r, z),$$

$$A_2 = A_*(r, z) + A'(r, z).$$

Отсюда видно, что в нижнем полупространстве поле  $\vec{B}_2$  есть сумма полей от заданного витка с током  $I_0$  и витка-изображения с противоположным током, пространственно совпадающих. Следовательно,  $\vec{B}_2|_{(t=0)} = 0$  и  $A'(r, z)$  в области 2 описывает поле начального поверхностного тока  $i_0(r)$ . Тогда очевидно, что  $A(r, z)$ , симметричное  $A'(r, z)$  относительно  $z = 0$ , описывает то же поле в верхнем полупространстве.

Итак, функции  $A(r, z)$ ,  $A'(r, z)$ , каждая в своей области определения, описывают начальное поле  $\vec{B}$ , созданное поверхностными токами

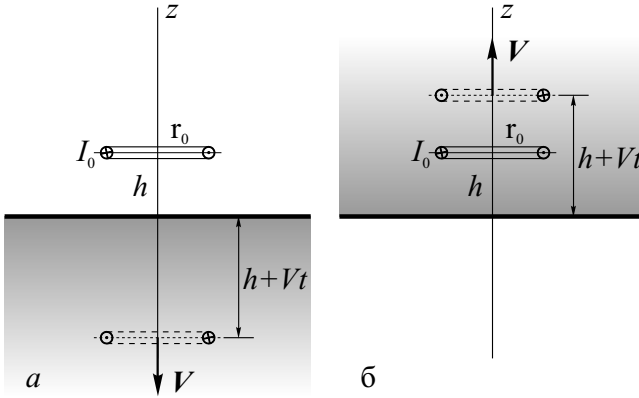


Рис. 6.17

$i_0(r)\vec{e}_\alpha$ . Поэтому решение для последующих моментов времени на основании предложения (6.34) и его аналога для нижнего полупространства можно сразу выписать:

$$A_1(r, z, t) = A_*(r, z) + A(r, z + Vt),$$

$$A_2(r, z, t) = A_*(r, z) + A'(r, z - Vt);$$

сюда входит скорость  $V$ , определенная соотношением (6.35). Видно, что магнитное поле в каждом из полупространств складывается из поля, создаваемого реальным витком (на рис. 6.17 *а, б* показан сплошными линиями) с током  $I_0$ , и полем одного из «бегущих» фиктивных витков-изображений с токами  $-I_0$ , на рис. 6.17 представленных штрихами. Витки-изображения находятся вне рассматриваемой области на расстоянии  $h + Vt$  от плоского слоя.

Обратимся к поверхностным токам. Примем для простоты, что  $h$  и  $r_0$  удовлетворяют условию  $h \gg r_0$  и витки с токами можно заменить на магнитные диполи с моментами

$$\vec{m} = (I_0 \pi r_0^2 / c) \vec{e}_z.$$

Тогда магнитное поле, создаваемое поверхностным током  $i_\alpha(r, t)$ , представляет собой поле от нижнего (для области 1) и верхнего диполя (для

области 2), показанных на рис. 6.18. В момент  $t = 0$  эти диполи расположены в точках  $z = \pm h$ . Именно поле  $\vec{B}$ , ими обусловленное, на рис. 6.7 было изображено в качестве начального поля  $\vec{B}_0$ . Простые вычисления дают следующий результат для  $r$ -компонент  $\vec{B}$ :

$$B_{1r|z=0} = -B_{2r|z=0} = \frac{3m(h+Vt)r}{\left[(h+Vt)^2 + r^2\right]^{5/2}}$$

и для плотности тока:

$$i_\alpha(r, t) = \frac{c}{2\pi} B_{1r|z=0} = \frac{3mc}{2\pi} \frac{(h+Vt)r}{\left[(h+Vt)^2 + r^2\right]^{5/2}};$$

$$i_0(r) = i_\alpha(r, 0).$$

Плотность тока максимальна при  $r_* = (h+Vt)/2$ , причем

$$i_\alpha(r, t)_{\max} = \frac{24}{25\sqrt{5}} \frac{I_0 r_0^2}{(h+Vt)^3} = i_{0\max} \left(1 + \frac{Vt}{h}\right)^{-3}.$$

Видно, что ток в проводящем слое спадает не экспоненциально; характерное время затухания, определяемое условием  $V\tau = h$ , совпадает с выражением (6.36), причем в качестве характерного размера  $\ell$  здесь выступает  $h$ .

Интересно время  $\tau$  сравнить с временем проникновения поля на толщину проводящего слоя  $\tau_0$ . Видим, что  $\tau = \tau_0(h/2\delta) \gg \tau_0$ . Отсюда следует, что в процессе медленного затухания поверхностный ток в каждый момент времени успевает равномерно распределиться по толщине слоя и поэтому распределением можно было не интересоваться, рассматривая слой как геометрическую поверхность и ток в нем – как поверхностный.

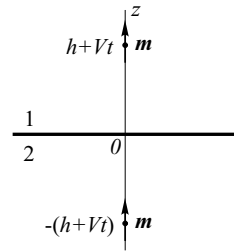


Рис. 6.18

## 6.9. Периодические электромагнитные поля в объемных проводниках. Скин-эффект

1. Здесь ограничимся периодическими гармоническими процессами, в которых все физические величины являются синусоидальными функ-

циями времени. Как известно, оперирование с периодическими функциями весьма упрощается при пользовании комплексными выражениями. Поэтому любую физическую величину, зависящую от координат и меняющуюся во времени с частотой  $\omega$ , мы будем представлять в виде

$$f(\vec{r}, t) = \hat{f}(\vec{r}) e^{i\omega t}, \quad (6.53)$$

где  $\hat{f}(\vec{r})$  – комплексная амплитуда данной физической величины, а функция  $e^{i\omega t}$  обладает тем замечательным свойством, что в процессе дифференцирования не меняет своего вида. Непосредственное физическое значение имеет, конечно, лишь вещественная часть комплексного выражения (6.53). Мы можем, однако, воспользоваться тем обстоятельством, что вещественная часть результатов, получаемых при выполнении *линейных* операций над комплексными выражениями, совпадает с результатами выполнения этих операций над одними лишь вещественными частями исходных выражений. Поэтому переход к вещественной части комплексных выражений может быть совершен как до, так и после выполнения этих операций. Лишь при нелинейных операциях (например, умножений) необходимо переходить к вещественным частям комплексных выражений до выполнения над ними этих операций (ибо вещественная часть произведения комплексных величин не равна произведению их вещественных частей).

Возвращаясь к представлению (6.53), отметим, что комплексную амплитуду можно выразить через модуль и аргумент в виде  $|\hat{f}(\vec{r})| e^{i\alpha(\vec{r})}$ . Следовательно, рассматриваемая физическая величина равна

$$f(\vec{r}, t) = \text{Re} \hat{f}(\vec{r}) e^{i\omega t} = \left| \hat{f}(\vec{r}) \right| \cos[\omega t + \alpha(\vec{r})], \quad (6.54)$$

откуда видно, что *модуль комплексной амплитуды определяет амплитуду изменения рассматриваемой физической величины*. Понятно, что одна лишь вещественная часть комплексной амплитуды физического смысла не имеет.

Отметим, что как непосредственно следует из выражения (6.54), средний квадрат физической величины равен половине квадрата модуля комплексной амплитуды, т. е.

$$\langle f^2(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \left| \hat{f}(\vec{r}) \right|^2. \quad (6.55)$$

2. Вернемся к уравнениям (6.48), (6.49). Подставляя сюда решения в виде

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{\vec{B}}(\vec{r}) e^{i\omega t}, \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{\vec{E}}(\vec{r}) e^{i\omega t}$$



## 6.9. Периодические поля. Скин-эффект

241

(«шляпкой» над символом мы везде будем отмечать комплексную амплитуду физической величины), получаем дифференциальные уравнения для комплексных амплитуд, которые с использованием обозначения

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}} \quad (6.56)$$

приводятся к виду

$$\Delta \hat{B} - \frac{2i}{\delta^2} \hat{B} = 0, \quad \Delta \hat{E} - \frac{2i}{\delta^2} \hat{E} = 0. \quad (6.57)$$

Здесь  $\delta$  – параметр с размерностью длины, и, как будет показано ниже, имеющий смысл глубины проникновения поля в толщу проводника.

Процесс проникновения периодического магнитного поля в проводящую среду и формирования скин-слоя рассмотрим на той же модели плоской плиты (см. рис. 6.15), которая уже использовалась. Только теперь поверхностный ток в соленоиде предполагаем периодическим с плотностью  $i_0 e^{i\omega t}$ , а начало координат совмещаем с левой поверхностью плиты. Магнитное поле имеет  $z$ -компоненту

$$B_z(x, t) = \hat{B}(x) e^{i\omega t}; \quad (6.58)$$

$\hat{B}(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \hat{B}}{dx^2} - \frac{2i}{\delta^2} \hat{B} = 0. \quad (6.59)$$

Граничные условия сформулируем, предполагая, что  $2a \gg \delta$ , т. е. толщина плиты намного больше глубины проникновения; при этом, как вскоре будет показано, распределение поля вблизи левой поверхности плиты  $x = 0$ , например, не чувствует влияния правой границы (и наоборот). Тогда условия вблизи границы  $x = 0$  можно представить в виде

$$\hat{B}(0) = B_0, \quad \hat{B}(\infty) = 0 \quad (B_0 = \mu 4\pi i_0 / c), \quad (6.60)$$

мысленно плиту конечной толщины заменяя на проводящее полупространство  $x > 0$ . Уравнение (6.59) имеет два линейно независимых решения

$$e^{\pm \sqrt{2i}x/\delta} = e^{\pm(1+i)x/\delta},$$

а решение, удовлетворяющее условиям (6.60), будет таким:

$$\hat{B}(x) = B_0 e^{-(1+i)x/\delta} = B_0 e^{-x/\delta} e^{-ix/\delta}.$$

После подстановки полученного выражения в соотношение (6.58) и взятия реальной части для искомой величины получаем

$$B_z(x, t) = B_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right).$$

Отсюда видно, что амплитуда колебаний поля, совпадающая, согласно представлению (6.54), с модулем

$$|\hat{B}(x)| = B_0 e^{-x/\delta},$$

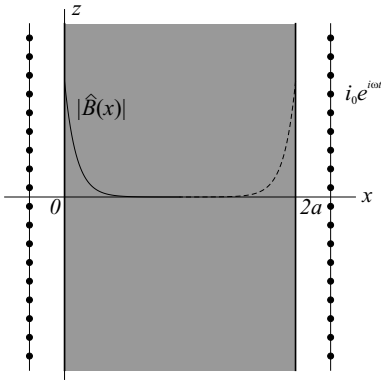


Рис. 6.19

экспоненциально спадает по мере удаления от границы вглубь проводника. На глубине  $\delta$   $|\hat{B}(x)|$  падает в  $e$  раз, а на нескольких  $\delta$  практически обращается в нуль (рис. 6.19). Если  $2a \gg \delta$ , то поле, проникающее со стороны границы  $x = 0$ , действительно не влияет на процесс проникновения со стороны границы  $x = 2a$ , на рис. 6.19 отмеченный штриховой линией, и эти два процесса независимы. Следовательно, применение модели проводящего полупространства оправданно.

Таким образом,  $\delta$  действительно имеет смысл глубины проникновения поля и называется толщиной скин-слоя. А само явление локализации переменного поля в поверхностном слое проводника называется скин-эффектом.

По найденному  $\vec{B}$  электрическое поле в проводнике определяется из первого уравнения (6.47). В рассматриваемом случае отсюда имеем

$$\hat{E}_y(x) = -\frac{c}{4\pi\sigma\mu} \frac{d\hat{B}}{dx} = \frac{c}{4\pi\sigma\mu} \frac{1+i}{\delta} B_0 e^{-(1+i)x/\delta},$$

что после преобразования коэффициента пропорциональности при экспоненте приобретает вид

$$\hat{E}_y(x) = \sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma\mu}} B_0 e^{-x/\delta} e^{i\pi/4} e^{-ix/\delta}.$$

Отсюда видно, что электрическое поле, а следовательно, и ток в проводнике также сосредоточены в поверхностном слое. Таким образом, толщину скин-слоя  $\delta$  можно рассматривать как глубину, на которой амплитуда плотности переменного тока в проводнике спадает в  $e$  раз. Как видно из равенства (6.56),  $\delta$  зависит от частоты. Например, для меди ( $\mu = 1$ ,  $\sigma = 5 \cdot 10^{17} \text{ 1/c}$ ) при частоте 50 Гц ( $\omega = 100\pi$ ) имеем  $\delta \approx 1 \text{ см}$ , а при увеличении частоты в 100 раз уменьшается до  $\delta = 0,1 \text{ см}$ .

3. Результаты, полученные на модели проводящего полупространства, остаются качественно применимыми и к практически интересному случаю цилиндрических проводников. И в этом случае переменный ток концентрируется в поверхностном слое, причем тем сильнее, чем выше частота тока. Концентрация тока у поверхности влечет за собой изменение сопротивления проводника, которое, таким образом, зависит от частоты тока.

Распределение тока  $I_0 e^{i\omega t}$  по сечению цилиндрического провода радиуса  $a$  определяется как

$$j_z(r, t) = \sigma E_z(r, t) = \sigma \hat{E}(r) e^{i\omega t}.$$

Комплексная амплитуда  $\hat{E}(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \hat{E}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{E}}{dr} - \frac{2i}{\delta^2} \hat{E} = 0, \quad (6.61)$$

получающемуся из (6.57) после раскрытия лапласиана в цилиндрических координатах, и условиям на границах  $r = 0$ ,  $r = a$ :

$$\hat{E}(0) \text{ конечна, } \hat{E}(a) = E_0, \quad (6.62)$$

где  $E_0$  — константа, определяемая амплитудой суммарного тока  $I_0$  из соотношения

$$\sigma \int_0^a \hat{E}(r) 2\pi r dr = I_0. \quad (6.63)$$

Решение задачи (6.61)—(6.63) в общем случае выражается через функцию Бесселя. В предельном случае

$$a \gg \delta,$$

когда искомая функция  $\hat{E}(r)$  отлична от нуля только в близкой окрестности точки  $r = a$ , вторым слагаемым левой части уравнения (6.61),

имеющим порядок величины  $E_0/(a\delta)$ , по сравнению с другими слагаемыми порядка  $E_0/\delta^2$  можно пренебречь и (6.61) привести к виду

$$\frac{d^2 \hat{E}}{dr^2} - \frac{2i}{\delta^2} \hat{E} = 0,$$

совпадающему с уравнением (6.59). Соответственно решение задачи приобретает вид

$$\hat{E}(r) = E_0 e^{-(1+i)(a-r)/\delta},$$

экспоненциально затухающий при увеличении расстояния  $\xi = a - r$  от поверхности до внутренней точки цилиндра.

Чтобы  $E_0$  выразить через  $I_0$ , обратимся к условию (6.63). При малой толщине скин-слоя интеграл упростим, заменив под интегралом  $r$  на  $a$  и приняв пределы интегрирования по  $\xi$  от 0 до  $\infty$ . Тогда условие (6.63) принимает вид

$$-2\pi a \sigma E_0 \int_0^\infty e^{-(1+i)\xi/\delta} d\xi = I_0,$$

откуда

$$E_0 = \frac{1+i}{2\pi\sigma a\delta} I_0 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sigma a\delta} I_0 e^{i\pi/4}.$$

Следовательно,

$$\hat{E}(r) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sigma a\delta} I_0 e^{-(a-r)/\delta} e^{i\pi/4} e^{-i(a-r)/\delta}. \quad (6.64)$$

Определим величину сопротивления  $R$  переменному току, приходящегося на участок проводника длины  $\ell$ . Для этого вычислим усредненную по времени интенсивность тепловыделения в этом участке, определяемую, согласно выражению (3.19), искомым сопротивлением как

$$\langle Q \rangle = R \langle I^2(t) \rangle = (1/2) R I_0^2.$$

По-другому эту величину можно найти интегрированием по объему мощности потерь (3.20)  $\sigma \langle E_z^2(r, t) \rangle$ , равной, согласно равенству (6.55) и решению (6.64),

$$\frac{1}{2} \sigma \left| \hat{E}(r) \right|^2 = \frac{\sigma}{(2\pi\sigma a\delta)^2} I_0^2 e^{-2\xi/\delta}.$$

В результате получаем

$$\langle Q \rangle = -2\pi a \ell \frac{\sigma}{(2\pi\sigma a \delta)^2} I_0^2 \int_0^\infty e^{-2\xi/\delta} d\xi = \frac{\ell}{2\pi\sigma a \delta} \frac{1}{2} I_0^2. \quad (6.65)$$

Из сравнения с предыдущим выражением отсюда находим, что

$$R = \frac{\ell}{\sigma 2\pi a \delta}.$$

Таким образом, при условии  $a \gg \delta$  сопротивление цилиндрического проводника переменному току равно сопротивлению тонкостенного цилиндра с сечением  $2\pi a \delta$ .

## 6.10. Энергия магнитного поля

1. После ознакомления с явлением электромагнитной индукции имеется возможность обратиться к вопросу о магнитном взаимодействии токов и об энергии магнитного поля.

Начнем с рассмотрения замкнутого электрического контура, в котором под действием внешнего источника ЭДС возбуждается ток  $I$ . Сопротивление контура будем считать равным нулю. Тогда работа внешнего источника в контуре не тратится на джоулево тепло и всецело идет на энергию магнитного поля  $W$ , созданного током в контуре.

Мощность, развиваемая в контуре внешним источником, равна  $\mathcal{E}_{\text{стр}} I$ . Следовательно, для приращения энергии магнитного поля за время  $dt$

$$dW = \mathcal{E}_{\text{стр}}(t) I(t) dt$$

из уравнения (6.25) при  $R = 0$  получаем

$$dW = \frac{L}{c^2} I dI.$$

Так как в отсутствие тока в контуре и энергия магнитного поля равна нулю, отсюда имеем

$$W = \frac{L I^2}{2c^2} = \frac{\Phi^2}{2L}. \quad (6.66)$$

Видно, что выражение для энергии магнитного поля контура с током по структуре напоминает формулу кинетической энергии  $mv^2/2 = p^2/2m$ ;

в равенствах (6.66) роль массы играет индуктивность  $L$ , скорости  $-I/c$ , а вместо импульса  $p = mv$  выступает произведение  $LI/c = \Phi$ .

2. Для дальнейшего отметим, что выражение (6.66) для энергии магнитного поля, созданного током в контуре (квазистационарным), можно привести к интегралу

$$W = \frac{1}{2c} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV \quad (6.67)$$

по объему, занятому током. Для этого воспользуемся формулой (6.10)  $\Phi = \oint (\vec{A} \cdot d\vec{\ell})$ , справедливой в общем случае переменных полей, и из равенств (6.66), (6.23) получим

$$W = \frac{1}{2c} \Phi I = \frac{1}{2c} I \oint_{\ell} (\vec{A} \cdot d\vec{\ell}) = \frac{1}{2c} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV.$$

Последний шаг в этой цепочке, приводящий к выражению (6.67), выполнен на основании правила (4.5), согласно которому интеграл по контуру с током эквивалентен объемному интегралу, получающемуся заменой  $I d\vec{\ell}$  на  $\vec{j} dV$ .

3. Применим формулу (6.66) к полю длинного соленоида, чтобы в пренебрежении концевыми эффектами в первый раз увидеть предположительное выражение для плотности энергии магнитного поля в пространстве. Для этого, воспользовавшись формулой (6.23), предварительно вычислим индуктивность соленоида. Как известно, поле внутри соленоида однородно и равно  $B = \mu 4\pi N I / c\ell$ , где  $\ell$  – длина соленоида,  $N$  – число его витков. Магнитный поток через один виток  $\Phi_0 = BS$  и ЭДС индукции, обеспечиваемая одним витком, равна  $-(1/c)d\Phi_0/dt$ . Так как в создании  $\mathcal{E}$  участвуют все  $N$  витков, в качестве магнитного потока служит  $\Phi = N\Phi_0$ , т. е.

$$\frac{LI}{c} = N\Phi_0 = \mu \frac{4\pi N^2 S}{c\ell} I.$$

Отсюда имеем

$$L = \mu \frac{4\pi N^2 S}{\ell}, \quad (6.68)$$

а энергию магнитного поля соленоида (6.66)

$$W = \frac{LI^2}{2c^2} = \mu \frac{4\pi N^2 S}{2c^2 \ell} I^2$$

### 6.11. Коэффициенты взаимной индукции. Плотность энергии 247

можно выразить через поля  $B, H$  внутри соленоида, его объем  $V = S\ell$  и представить в виде

$$W = \frac{B^2}{8\pi\mu} V = \frac{\mu H^2}{8\pi} V.$$

Отсюда естественно предположить, что величину

$$w = \frac{B^2}{8\pi\mu} = \frac{BH}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi} \quad (6.69)$$

можно интерпретировать как плотность энергии магнитного поля (в среде, подчиняющейся зависимости  $B = \mu H$ ).

## 6.11. Коэффициенты взаимной индукции. Плотность энергии магнитного поля

1. Для одного контура с током мы имеем выражение для энергии магнитного поля (6.66), где  $L$  – индуктивность, определяемая как коэффициент пропорциональности в выражении (6.23) для магнитного потока.

Теперь обратимся к случаю  $n$  проводников с токами, чтобы найти выражение для энергии магнитного поля и на этой основе определить силы, действующие на проводники со стороны магнитного поля. Как энергия, так и действующие силы зависят от величины и конфигурации токов, но не зависят от омического сопротивления проводников. Поэтому для упрощения вычислений примем, что во всех  $n$  контурах сопротивления отсутствуют, потери на джоулево тепло равны нулю и, как следствие (6.22), справедливо равенство  $\mathcal{E}_{\text{стр}} + \mathcal{E}_{\text{инд}} = 0$ . Тогда суммарная работа внешних источников против ЭДС индукции в контурах за время  $\Delta t$

$$\mathcal{E}_{\text{стр}}^{(i)} I_i \Delta t = -\Delta t \left( -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_i}{dt} \right) I_i = \Delta W$$

идет на приращение энергии магнитного поля  $\Delta W$ . (В этой и последующих формулах по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование от 1 до  $n$ .) Магнитный поток в  $i$ -контуре, создаваемый всеми токами, в соответствии с принципом суперпозиции (который и при

наличии в пространстве ферромагнитных тел в слабых полях иногда приближенно применим) можно представить в виде

$$\Phi_i = (1/c)L_{ik}I_k,$$

где  $L_{ik}$  ( $i \neq k$ ) – коэффициенты взаимной индукции контуров  $i$  и  $k$ , а  $L_{ii}$  – коэффициент самоиндукции соответствующего контура. Примем, что возбуждение тока в рассматриваемой системе происходит при фиксированной геометрии проводников, когда все коэффициенты  $L_{ik}$  являются неизменными. При этом

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{1}{c}L_{ik}\frac{dI_k}{dt}$$

и для изменения энергии магнитного поля имеем

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{c^2}L_{ik}I_i\frac{dI_k}{dt}. \quad (6.70)$$

2. Воспользовавшись этим промежуточным результатом, докажем сначала свойство симметрии матрицы коэффициентов  $L_{ik}$ . Для этого из системы мысленно выделим два произвольных контура, обозначив их номерами 1, 2, и рассмотрим процесс, в котором только в этих контурах токи претерпевают изменения. Тогда для производной  $dW/dt$  из выражения (6.70) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{dI_1}{dt} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{dI_2}{dt} = \\ &= \frac{1}{c^2} \left( L_{11}I_1\frac{dI_1}{dt} + L_{12}I_1\frac{dI_2}{dt} + L_{21}I_2\frac{dI_1}{dt} + L_{22}I_2\frac{dI_2}{dt} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{1}{c^2}(L_{11}I_1 + L_{21}I_2), \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{1}{c^2}(L_{12}I_1 + L_{22}I_2).$$

Приравнявая смешанные вторые частные производные  $W$  по  $I_1, I_2$ , получаем искомый результат  $L_{12} = L_{21}$ , что ввиду произвольности выделенной пары можно представить в виде

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (6.71)$$

Физически это означает, что если ток  $I$ , пропускаемый по контуру  $i$ , создает поток  $\Phi$  через контур  $k$ , то тот же ток, пропущенный по контуру  $k$ , через контур  $i$  создаст точно такой же магнитный поток.



## 6.11. Коэффициенты взаимной индукции. Плотность энергии 249

*Пример 6.4.* С помощью прямого вычисления магнитных потоков для двух простейших контуров в виде соосных колец, лежащих в одной плоскости, убедиться в справедливости соотношения (6.71). Пусть их номера будут 1 и 2, радиусы колец взяты  $r_1 \ll r_2$ . Выберем положительные направления обхода контуров и соответствующее им одно положительное направление нормали  $\vec{n}$ , как показано на рис. 6.20. Чтобы вычислить  $\Phi_{12}$  – магнитный поток через контур 1, вызванный током  $I_2$ , заметим, что магнитное поле в центре кругового витка по закону Био–Савара равно

$$\vec{B}_2 = \frac{2\pi I_2}{cr_2} \vec{n}.$$

Тогда за  $\Phi_{12}$  можно принять произведение  $\pi r_1^2 B_2$ , т. е.

$$\Phi_{12} = \frac{2\pi^2 r_1^2}{cr_2} I_2.$$

Магнитный поток  $\Phi_{21}$  через большое кольцо от тока  $I_1$  проще всего вычисляется с помощью формулы (6.10). Малое кольцо с током эквивалентно магнитному диполю  $\vec{m} = (\pi r_1^2 I_1 / c) \vec{n}$ , вектор-потенциал которого  $\vec{A}_1 = [\vec{m} \times \vec{r}] / r^3$  в точках контура 2 направлен по контуру и по величине равен  $A_1 = m / r_2^2$ . Тогда, согласно формуле (6.10),

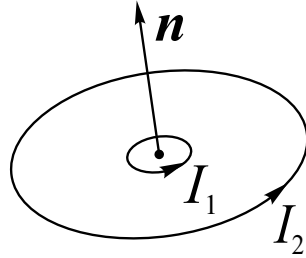


Рис. 6.20

$$\Phi_{21} = 2\pi r_2 A_1 = \frac{2\pi^2 r_1^2}{cr_2} I_1.$$

Отсюда видно, что при  $I_1 = I_2 = I$  получается искомое соотношение  $\Phi_{12} = \Phi_{21} = \Phi$ .

3. Пойдем дальше. Воспользуемся симметрией (6.71) и выражение (6.70) перепишем в виде

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2c^2} (L_{ik} + L_{ki}) I_i \frac{dI_k}{dt} = \frac{1}{2c^2} L_{ik} \left( I_i \frac{dI_k}{dt} + I_k \frac{dI_i}{dt} \right),$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2c^2} L_{ik} \frac{d}{dt} (I_i I_k).$$

Отсюда, принимая во внимание, что в отсутствие токов  $W = 0$ , для энергии магнитного поля получаем окончательный результат

$$W = \frac{1}{2c^2} L_{ik} I_i I_k, \quad (6.72)$$

являющийся обобщением выражения (6.66) на случай системы из  $n$  проводников с токами.

4. Заметим, что полученное выражение по форме напоминает энергию взаимодействия зарядов (1.39) в электростатике и может, вообще говоря, рассматриваться как энергия магнитного взаимодействия токов. Нетрудно, однако, выразить энергию (6.72) в форме интеграла

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad (6.73)$$

по всему объему поля токов и получить возможность интерпретировать  $W$  как энергию магнитного поля, а не энергию взаимодействия токов. Для этого выражение (6.72) перепишем в виде интеграла (6.67):

$$W = \frac{1}{2c} \int (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV$$

по объему, содержащему все  $n$  проводников. (Доказательство полностью совпадает с приведенным выше в связи с интегралом (6.67).) Подставляя сюда вместо  $\vec{j}$  выражение  $(c/4\pi) \text{rot} \vec{H}$ , получающееся из уравнения (6.14) в *пренебрежении токами смещения*, получаем

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H}) dV,$$

что с использованием тождества  $\text{div} [\vec{H} \times \vec{A}] = \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A}$  и связи  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  дает

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H} \times \vec{A})_n dS + \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV.$$

Если интегрирование распространить на весь объем квазистационарного магнитного поля токов, то поверхностный интеграл обратится в нуль и выражение для  $W$  примет нужный вид (6.73), подтверждая то выражение (6.69) для плотности энергии поля, которое было получено из рассмотрения частного примера.

*Пример 6.5.* Найти изменение магнитной энергии при внесении в магнитное поле некоторого тела с магнитной проницаемостью  $\mu$  и объемом  $V$ . Внешние токи, создающие магнитное поле, фиксированны (т. е. в течение процесса не меняются). Для определенности считать, что в начальном состоянии пространство было пустое.

## 6.11. Коэффициенты взаимной индукции. Плотность энергии 251

Данный пример позволит понять смысл тех оговорок, которые были сделаны при написании выражения (4.51):

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

для потенциальной энергии магнитного диполя во внешнем магнитном поле. Для квазиупругого диполя это выражение имеет вид

$$U = -\frac{1}{2}\vec{m} \cdot \vec{B}_0, \quad (1)$$

что фактически было показано при выводе формулы для силы, действующей на кусочек магнитного материала в неоднородном магнитном поле в § 5.3.

Искомое изменение энергии определяется интегралом, взятым по бесконечному пространству:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_{(\infty)} (\vec{B} \cdot \vec{H} - \vec{B}_0 \cdot \vec{H}_0) dV, \quad (2)$$

где  $\vec{B}_0(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r})$  – начальное поле,  $\vec{B}(\vec{r})$ ,  $\vec{H}(\vec{r})$  характеризуют магнитное поле после внесения тела. Ниже мы покажем, что из выражения (2) можно получить следующий физически содержательный ответ:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{M} \cdot \vec{B}_0) dV, \quad (3)$$

где  $\vec{M}(\vec{r})$  – распределение вектора намагниченности по объему тела в его конечном положении.

Чтобы осмыслить результат (3), рассмотрим частный случай, когда размер тела  $a \ll \ell$  ( $\ell$  – характерный размер неоднородности поля  $\vec{B}_0$ ). Тогда  $\vec{B}_0$  можно вынести из-под интеграла и ответ записать в виде

$$W = \frac{1}{2} (\vec{m} \cdot \vec{B}_0), \quad \vec{m} = \int_V \vec{M} dV, \quad (4)$$

где  $\vec{m}$  – магнитный момент, приобретенный телом в его конечном положении.

Из сравнения этого результата с выражением (1) для потенциальной энергии рассматриваемого магнитного диполя в поле  $\vec{B}_0$  имеем

$$U = -W. \quad (5)$$

Видим, что  $W$  и  $U$  отличаются только знаками. Получили интересный результат: внесение кусочка магнитного материала с  $\mu > 1$  (при этом  $\vec{m}$  направлен вдоль  $\vec{B}_0$ ) в магнитное поле приводит к увеличению его энергии  $W$ , в то время как работа, которую нужно затратить, чтобы внести этот кусочек в поле  $\vec{B}_0$  (т. е.  $U$ ), отрицательна – кусочек сам старается втянуться в это поле. Таким образом, внешние силы совершают отрицательную работу, а энергия магнитного поля тем не менее растет.

Кажущееся противоречие вызвано тем, что пока упускается из вида еще один участник этого процесса – сторонние ЭДС, которые поддерживают токи, создающие поле  $\vec{B}$ , постоянными. Этот источник совершает работу  $A'$  против ЭДС индукции в контурах и с учетом этой работы закон сохранения энергии имеет вид

$$A' + U = W,$$

т. е. работа внешнего источника ЭДС вместе с механической работой внешних сил идут на приращение энергии магнитного поля. Имея в виду равенство (5), отсюда получаем

$$A' = W - U = 2W.$$

Следовательно, внешний источник ЭДС совершает работу, вдвое превышающую изменение энергии магнитного поля. Половина этой работы нейтрализует отрицательную механическую работу внешних сил, а вторая половина обеспечивает нужный прирост энергии магнитного поля.

*Вывод соотношения (3).* Воспользуемся тождеством

$$\vec{B} \cdot \vec{H} - \vec{B}_0 \cdot \vec{H}_0 = \vec{B} \cdot \vec{H}_0 - \vec{B}_0 \cdot \vec{H} + (\vec{B} + \vec{B}_0) \cdot (\vec{H} - \vec{H}_0).$$

По условию задачи внешние токи фиксированны, откуда  $\text{rot} \vec{H} = \text{rot} \vec{H}_0 = 4\pi \vec{j}/c$  и, следовательно,  $\text{rot}(\vec{H} - \vec{H}_0) = 0$ ,  $\vec{H} - \vec{H}_0 = \text{grad} \psi$ . Отсюда

$$\begin{aligned} (\vec{B} + \vec{B}_0) \cdot (\vec{H} - \vec{H}_0) &= \text{grad} \psi \cdot (\vec{B} + \vec{B}_0) = \\ &= \text{div} \left[ \psi (\vec{B} + \vec{B}_0) \right], \end{aligned}$$

так как  $\text{div} (\vec{B} + \vec{B}_0) = 0$ , и интеграл по полному полю дает 0:

$$\int_{(\infty)} (\vec{B} + \vec{B}_0) \cdot (\vec{H} - \vec{H}_0) dV = \oint_{S_R, R \rightarrow \infty} \psi (\vec{B} + \vec{B}_0)_n dS = 0.$$

Итак,

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_{(\infty)} \left( \vec{B} \cdot \vec{H}_0 - \vec{B}_0 \cdot \vec{H} \right) dV. \quad (6)$$

Вне тела  $\left( \vec{B} \cdot \vec{H}_0 - \vec{B}_0 \cdot \vec{H} \right) \equiv 0$  так как здесь  $\vec{B} = \vec{H}$ ,  $\vec{B}_0 = \vec{H}_0$  и, таким образом, интеграл (6) сводится к интегралу по объему  $V$ , занятому телом. Отсюда

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \left( \vec{B} \cdot \vec{H}_0 - \vec{B}_0 \cdot \vec{H} \right) dV,$$

что с учетом  $\vec{H}_0 = \vec{B}_0$ ,  $\vec{B} - \vec{H} = 4\pi\vec{M}$  приводится к искомому выражению (3).

## 6.12. Силы, действующие на проводники с током

Для вычисления сил воспользуемся выражением (6.72) для энергии магнитного поля и методом виртуальных перемещений. Предположим, что некоторой обобщенной координате  $\xi$ , характеризующей конфигурацию  $i$ -го контура, сообщили бесконечно малое приращение  $d\xi$ . При этом силы, действующие на проводник с током со стороны магнитного поля, совершают определенную работу, пропорциональную  $d\xi$ . Эту работу представляем в виде произведения  $F_\xi d\xi$ , где  $F_\xi$  называется обобщенной силой, отвечающей обобщенной координате  $\xi$ .

Для примера приведем несколько пар обобщенных координат и обобщенных сил: длина кругового витка  $\ell$ , сила натяжения витка; угол поворота витка относительно некоторой оси, момент сил относительно оси; радиус-вектор «центра» витка, равнодействующая сил, действующих на виток. Еще две пары, относящиеся к длинному соленоиду, названы в приведенных ниже примерах 6.6, 6.7.

Начнем с рассмотрения варианта метода, когда приращение  $d\xi$  считается происходящим при фиксированных токах  $I_i = \text{const}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). При этом изменение  $\xi$ , связанное с деформацией или перемещением контура и с изменением всех коэффициентов  $L_{ik}$ , приводит к изменению магнитного потока в каждом из  $n$  контуров на величину

$$\delta\Phi_i = (1/c) \delta L_{ik} I_k,$$

что может быть обеспечено только за счет внешних источников ЭДС. Так как в контуре без омического сопротивления  $\mathcal{E}_{\text{стр}}^{(i)} = (1/c)d\Phi_i/dt$ , то работа  $\mathcal{E}_{\text{стр}}^{(i)}$  в процессе изменения магнитного потока на величину  $\delta\Phi_i$  равна  $\delta A'_i = (1/c)I_i\delta\Phi_i$  ( без суммирования по  $i$ ). Следовательно, суммарная работа внешних источников во всех контурах

$$\delta A' = (1/c) \sum_i I_i \delta\Phi_i = (1/c^2) \sum_{ik} \delta L_{ik} I_i I_k. \quad (6.74)$$

С учетом этой работы внешних источников закон сохранения энергии при виртуальном перемещении  $\xi$  можно представить в виде

$$\delta A' = \delta W + F_\xi \delta\xi; \quad (6.75)$$

входящее сюда приращение энергии магнитного поля согласно выражению (6.72) равно

$$\delta W = \frac{1}{2c^2} \sum_{ik} \delta L_{ik} I_i I_k. \quad (6.76)$$

Из соотношений (6.74) и (6.76) видно, что в рассматриваемом процессе, протекающем при фиксированных токах,

$$\delta A' = 2\delta W, \quad (6.77)$$

т. е. работа внешних источников вдвое превышает величину приращения энергии поля. Следовательно, как следует из равенств (6.74), (6.75), для искомой обобщенной силы имеем выражение

$$F_\xi = \left. \frac{\partial W}{\partial \xi} \right|_{I=\text{const}} = \frac{1}{2c^2} \sum_{ik} \frac{\partial L_{ik}}{\partial \xi} I_i I_k. \quad (6.78)$$

В качестве второго варианта рассмотрим процесс изменения обобщенной координаты  $\xi$  при неизменных магнитных потоках  $\Phi_i$ , т. е. без участия внешних источников ЭДС. В этом случае закон сохранения энергии имеет простейший вид

$$\delta W|_{\Phi=\text{const}} = -F_\xi \delta\xi,$$

откуда

$$F_\xi = - \left. \frac{\partial W}{\partial \xi} \right|_{\Phi=\text{const}}.$$

Чтобы воспользоваться этим выражением, энергию магнитного поля необходимо выразить через магнитные потоки  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Для этого систему  $n$  уравнений

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} (I_k/c)$$

разрешим относительно  $I_i/c$  в виде

$$I_i/c = L_{ik}^{-1} \Phi_k, \quad (6.79)$$

где  $L_{ik}^{-1}$  — элементы обратной матрицы, т. е.  $L_{ik} L_{kp}^{-1} = \delta_{ip}$ . Подставим равенство (6.79) в выражение (6.72) для энергии и в результате простейших операций с матрицами  $L_{ik}$  и  $L_{ik}^{-1}$  получим

$$W = (1/2) L_{ik}^{-1} \Phi_i \Phi_k$$

и, следовательно,

$$F_\xi = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (L_{ik}^{-1}) \Phi_i \Phi_k.$$

*Пример 6.6.* Определить давление магнитного поля на стенки длинного соленоида кругового сечения.

Для этого в качестве обобщенной координаты, характеризующей геометрию магнитной системы, следует брать радиус соленоида, т. е.  $\xi = R$ . Так как при изменении радиуса  $R$  на  $\delta R$  внутреннее давление  $p$  совершает работу  $p 2\pi R \ell \delta R$ , соответствующей обобщенной силой является  $F_R = p 2\pi R \ell$ . Следовательно для искомого давления из формулы (6.78) и выражения (6.68) для  $L$  (при  $\mu = 1$ ) имеем

$$p 2\pi R \ell = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial L}{\partial R} I^2, \quad L = \frac{4\pi N^2}{\ell} \pi R^2,$$

откуда

$$p = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{4\pi N I}{c\ell} \right)^2 = \frac{B^2}{8\pi}.$$

Назовем величину характерного поля, создающего давление в одну атмосферу. Таким полем является  $B = 5 \cdot 10^3$  Гс = 0,5Тл, так как для него

$$p \approx \frac{25 \cdot 10^6}{8\pi} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \approx 10 \frac{H}{\text{см}^2}.$$

*Пример 6.7.* Найти силу, растягивающую соленоид в продольном направлении. Обобщенной координатой в данном случае является длина соленоида  $\ell$ . При этом обобщенная сила

$$F_\ell = \frac{I^2}{2c^2} \frac{\partial L}{\partial \ell} = -\frac{I^2}{2c^2} \frac{4\pi N^2}{\ell^2} S = -\frac{B^2}{8\pi} S$$

отрицательна. Следовательно, продольная сила, действующая на соленоид, является сжимающей и по величине равна так называемому натяжению силовых линий  $B^2/8\pi$ , умноженному на площадь поперечного сечения.

### 6.13. Пондеромоторные силы магнитного поля

В предыдущем параграфе силы, действующие на проводники с током, найдены исходя из представлений о магнитном взаимодействии токов (6.72). Теперь для определения сил, действующих на элементы материальной среды (проводники и магнетики), воспользуемся выражением энергии магнитного поля (6.73), распределенного по объему. При этом ход рассуждений, в основном, будет повторением шагов (с необходимой модификацией), сделанных в § 2.10 при определении пондеромоторных сил электрического поля, поэтому мотивы соответствующих действий здесь не будут полностью воспроизведены.

Воспользуемся принципом виртуальных перемещений. Пусть произвольная непрерывная функция  $\vec{q}(\vec{r})$  описывает бесконечно малое виртуальное перемещение находящихся в поле проводников с током и магнетиков. Будем считать, что распределения тока  $\vec{j}(\vec{r})$  и магнитной проницаемости  $\mu(\vec{r})$  также непрерывные функции  $\vec{r}$ .

Как подчеркивалось раньше, силы, действующие со стороны магнитного поля, и энергия поля не зависят явно от проводимости, а определяются распределениями плотности тока и напряженности поля. Поэтому, не снижая общности рассуждений, проводники будем считать идеальными и потери энергии на джоулев нагрев в законе сохранения энергии опускаем. Примем, кроме того, что виртуальные перемещения производятся при неизменных токах в проводниках. Это означает, что поток вектора  $\vec{j}$  через поверхность  $S$ , опирающуюся на произвольный контур  $\ell$ , в процессе его виртуального изменения остается неизменным:

$$\delta I = \delta \oint_S \vec{j}_n dS = 0. \quad (6.80)$$

Напомним, что для выполнения этого условия необходимы внешние источники ЭДС, причем, как известно из соотношения (6.77), работа этих источников  $\delta A'$  при виртуальном перемещении вдвое превышает приращение энергии магнитного поля.

В этих условиях закон сохранения энергии

$$\delta A' = \delta W + \delta A,$$

где  $\delta A = \int (\vec{f} \cdot \vec{q}) dV$  – механическая работа, совершаемая пондеромо-



торными силами плотности  $\vec{f}$ , сводится к равенству

$$\delta W = \int (\vec{f} \cdot \vec{q}) dV.$$

Чтобы отсюда найти плотность пондеромоторных сил  $\vec{f}$ , приращение энергии поля  $\delta W$  необходимо привести к виду

$$\delta W = \int [\ ] \cdot \vec{q} dV; \quad (6.81)$$

тогда выражение в квадратной скобке и будет  $\vec{f}$ .

Для магнитного поля  $W$  представляется в виде одного или другого из интегралов (6.67), (6.73). Соответственно для  $\delta W$  имеем два эквивалентных представления

$$\delta W_1 = \frac{1}{2c} \int (\delta \vec{A} \cdot \vec{j}) dV + \frac{1}{2c} \int (\vec{A} \cdot \delta \vec{j}) dV,$$

$$\delta W_2 = \frac{1}{8\pi} \int B^2 \delta \left( \frac{1}{\mu} \right) dV + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{\mu} (\vec{B} \cdot \delta \vec{B}) dV.$$

Так как  $\delta \vec{B} = \delta \text{rot} \vec{A} = \text{rot} \delta \vec{A}$ , второе слагаемое в  $\delta W_2$  можно выразить через  $\delta \vec{A}$ , заметив, что

$$(1/\mu) (\vec{B} \cdot \delta \vec{B}) = (\vec{H} \cdot \text{rot} \delta \vec{A}) = \text{div} [\delta \vec{A} \times \vec{H}] + (\delta \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H}),$$

и воспользовавшись тем, что дивергентный член после интегрирования по всему полю обращается в нуль, а  $\text{rot} \vec{H} = (4\pi/c) \vec{j}$ . В результате получается

$$\delta W_2 = \frac{1}{8\pi} \int B^2 \delta \left( \frac{1}{\mu} \right) dV + \frac{1}{c} \int (\delta \vec{A} \cdot \vec{j}) dV.$$

Теперь нетрудно заметить, что  $\delta W$ , взятое в виде

$$\delta W = 2\delta W_1 - \delta W_2 = \frac{1}{c} (\vec{A} \cdot \delta \vec{j}) dV - \frac{1}{8\pi} \int B^2 \delta \left( \frac{1}{\mu} \right) dV, \quad (6.82)$$

выражается через величины  $\delta \vec{j}$ ,  $\delta(1/\mu)$ , связанные с локальными характеристиками поля смещения  $q(\vec{r})$ .

Для определения виртуального изменения плотности тока  $\vec{j}$  обратимся к условию (6.80). Заметим, что суммарное изменение  $\delta I$  тока

через контур  $\ell$  в процессе виртуального смещения  $\vec{q}(\vec{r})$  вызывается, во-первых, изменением плотности тока  $\delta\vec{j}$  в точках поверхности  $S$  и, во-вторых, деформированием контура  $\ell$ , благодаря чему увеличится или уменьшится ее общая площадь. Если  $d\vec{\ell}$  есть элемент контура, то при смещении  $\vec{q}$  этот элемент опишет площадку  $d\vec{S} = [\vec{q} \times d\vec{\ell}]$  (рис. 6.21) и общее изменение площади  $S$  складывается из всех площадок  $d\vec{S}$ . Следовательно,

$$\delta I = \int_S \delta j_n dS + \oint_{\ell} \left( \vec{j} \cdot [\vec{q} \times d\vec{\ell}] \right).$$

Преобразуя последний интеграл по теореме Стокса, получаем

$$\oint_{\ell} \left( \vec{j} \cdot [\vec{q} \times d\vec{\ell}] \right) = \oint_{\ell} \left( [\vec{j} \times \vec{q}] \cdot d\vec{\ell} \right) = \int_S \text{rot}_n [\vec{j} \times \vec{q}] dS.$$

Внося это в предшествующее равенство и учтя требование (6.80)  $\delta I = 0$ , ввиду произвольности поверхности  $S$  получаем окончательно

$$\delta\vec{j} = -\text{rot} [\vec{j} \times \vec{q}]. \quad (6.83)$$

Процесс вычисления приращения  $\delta(1/\mu)$  полностью повторяет вычисление  $\delta\varepsilon$  из § 2.10, и поэтому искомый результат получается простой заменой  $\varepsilon$  на  $1/\mu$  в выражении (2.41). Следовательно,

$$\delta \left( \frac{1}{\mu} \right) = -\vec{q} \cdot \text{grad} \frac{1}{\mu} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\mu} \right) \tau \text{div} \vec{q}. \quad (6.84)$$

Теперь выражения (6.83), (6.84) подставим в соотношение (6.82) и получим

$$\begin{aligned} \delta W = & -\frac{1}{c} \int \vec{A} \cdot \text{rot} [\vec{j} \times \vec{q}] dV + \frac{1}{8\pi} \int B^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\mu} \right) \tau \text{div} \vec{q} dV + \\ & + \frac{1}{8\pi} \int B^2 \left( \text{grad} \frac{1}{\mu} \cdot \vec{q} \right) dV. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в этой сумме уже имеет нужный вид (6.81). Первые два слагаемых в подынтегральных выражениях после выделения дивергенции порождают члены

$$-\frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{q}] \cdot \text{rot} \vec{A} - \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left[ B^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\mu} \right) \tau \right] \cdot \vec{q} =$$

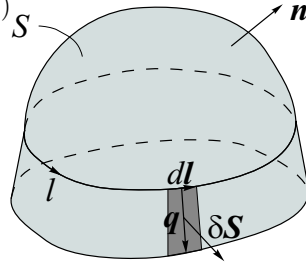


Рис. 6.21

$$= \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] \cdot \vec{q} - \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left[ B^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\mu} \right) \tau \right] \cdot \vec{q},$$

не обращающиеся в нуль после интегрирования, и в результате  $\delta W$  приобретает вид (6.81). Отсюда для плотности пондеромоторных сил имеем результат:

$$\vec{f} = \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] + \frac{1}{8\pi} B^2 \text{grad} \frac{1}{\mu} - \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left[ B^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\mu} \right) |_T \tau \right].$$

Таким образом, пондеромоторные силы складываются из сил плотности

$$\vec{f}^{(1)} = \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}], \quad (6.85)$$

действующих на токи проводимости, и из сил плотности

$$\vec{f}^{(2)} = \frac{1}{8\pi} B^2 \text{grad} \frac{1}{\mu} - \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left[ B^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\mu} \right) \tau \right],$$

действующих на находящиеся в поле магнетики. Полезно заметить, что если в последней формуле  $\vec{B}$  заменить через  $\mu \vec{H}$  и выполнить простые преобразования, то она принимает вид

$$\vec{f}^{(2)} = \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left( H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \tau \right) - \frac{1}{8\pi} H^2 \text{grad} \mu, \quad (6.86)$$

совершенно аналогичный выражению (2.44) пондеромоторных сил, испытываемых диэлектриками в электрическом поле: формула (6.86) получается из выражения (2.44) заменой  $\vec{E}$  на  $\vec{H}$  и  $\varepsilon$  на  $\mu$ .

## 6.14. Тензор натяжений магнитного поля

Возможность замены объемных сил эквивалентной системой натяжений, а также процедура получения соответствующего тензора напряжений подробно обсуждались в гл. 2 на примере сил, действующих со стороны электрического поля.

Чтобы получить выражение для тензора напряжений магнитного поля, плотность сил в котором определяется суммой  $\vec{f}^{(1)}$ ,  $\vec{f}^{(2)}$ , начнем с преобразования  $\vec{f}^{(1)}$  (6.85), заменив  $\vec{j}$  на  $(c/4\pi) \text{rot} \vec{H}$  и воспользовавшись формулой векторного анализа

$$\text{grad} \frac{H^2}{2} = [\vec{H} \times \text{rot} \vec{H}] + (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H}.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned}\vec{f}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \left[ \text{rot} \vec{H} \times \vec{B} \right] = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \text{rot} \vec{H} \times \vec{H} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{H} - \frac{1}{8\pi} \mu \text{grad} H^2.\end{aligned}$$

Прибавив сюда выражение (6.86), получим

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi} \left( \vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{H} + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left( H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) - \frac{1}{8\pi} \text{grad} (\mu H^2). \quad (6.87)$$

Так как  $i$ -я компонента вектора  $(1/4\pi) (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{H}$  из (6.87) с учетом уравнения  $\text{div} \vec{B} = \partial B_k / \partial x_k = 0$  имеет вид

$$\frac{1}{4\pi} \left[ \left( \vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{H} \right]_i = \frac{1}{4\pi} B_k \frac{\partial H_i}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} (H_i B_k),$$

из равенства (6.87) следует

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{4\pi} \mu H_i H_k - \frac{1}{8\pi} \delta_{ik} \mu H^2 + \frac{1}{8\pi} \delta_{ik} H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right).$$

Согласно соотношению (2.53), скобка в этом выражении есть искомый тензор натяжений магнитного поля. Видно, что этот тензор

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ \mu H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \left( \mu H^2 - \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \tau H^2 \right) \right] \quad (6.88)$$

получается из соответствующих результатов (2.54), (2.55) для электрического поля заменой  $\varepsilon$ ,  $\vec{E}$  на  $\mu$ ,  $\vec{H}$ . Следовательно, сила натяжения магнитного поля имеет вид

$$\vec{T}_n = \frac{1}{4\pi} \mu H_n \vec{H} - \frac{1}{8\pi} H^2 \left( \mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \vec{n}, \quad (6.89)$$

получающийся из формулы (2.56) оговоренной заменой, и действие этой силы натяжения полностью аналогично случаю электрического поля.

## 6.15. Закон сохранения энергии электромагнитного поля. Поток энергии

Говоря об энергии электрического и магнитного полей, до сих пор мы всегда имели в виду, что в каких-то областях пространства внешние силы совершают работу над зарядами и эта работа переходит в энергию электрического или магнитного полей. Иначе говоря, мы фактически всегда получали энергию электрического взаимодействия зарядов или магнитного взаимодействия токов. Правда, окончательные выражения для энергии при этом представлялись в виде интегралов (2.33), (6.73) по всему пространству, занятому полями  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , и формально интерпретировались как энергии поля с плотностями  $\varepsilon E^2/8\pi$ ,  $\mu H^2/8\pi$  соответственно для электрического и магнитного полей.

Но мы нигде не видели, каким образом эти локальные плотности энергии связаны с локальным производством электромагнитной энергии в областях, где работают внешние источники, и с локальной диссипацией энергии, где находится потребитель энергии и где, например, выделяется джоулево тепло. Другими словами, у нас до сих пор не сформулирован *локальный закон сохранения энергии*, объединяющий процессы производства энергии и преобразования различных форм энергии друг в друга.

Для получения локального закона сохранения энергии электромагнитного поля обратимся к мощности, развиваемой электрическим полем над зарядами, направленное движение которых составляет электрический ток. Эта мощность (3.18), отнесенная к единице объема, определяется как

$$p = (\vec{E} \cdot \vec{j}).$$

Опираясь на систему уравнений Максвелла (6.16), включающую токи смещения, можно увидеть, как мощность  $p$  связана со скоростью изменения локальной плотности энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi}. \quad (6.90)$$

Для этого уравнение (6.14) разрешим относительно плотности тока проводимости

$$\vec{j} = \frac{1}{4\pi} \left( c \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

и выражение для  $p$  представим в виде

$$(\vec{E} \cdot \vec{j}) = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot \left( \text{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - \frac{c}{4\pi} \vec{H} \cdot \left( \text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right),$$

добавив сюда второе слагаемое, тождественно равное нулю вследствие уравнения (6.3). В результате получается равенство

$$(\vec{E} \cdot \vec{j}) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E}) - \frac{1}{4\pi} \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right),$$

после замены первой скобки на  $-\text{div}[\vec{E} \times \vec{H}]$  приобретающее вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = -(\vec{E} \cdot \vec{j}), \quad (6.91)$$

где

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (6.92)$$

Это и есть локальный закон сохранения энергии электромагнитного поля, по структуре напоминающий закон сохранения заряда (3.7):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0,$$

но, в отличие от последнего, содержащий ненулевой «источниковый» член в правой части, связанный с токами проводимости.

Из соотношения (6.91) видно, что в тех областях пространства, где  $\vec{j} = 0$ , изменение плотности энергии электромагнитного поля  $w$  происходит за счет перетекания энергии совершенно так же, как изменение плотности зарядов  $\rho$  происходит из-за перетекания зарядов. В качестве вектора плотности потока зарядов в уравнении (3.7) выступает объемная плотность тока  $\vec{j}$ , а вектор плотности потока электромагнитной энергии  $\vec{S}$ , как видно из выражения (6.92), определяется векторным произведением напряженностей полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ . Но, в отличие от зарядов, энергия электромагнитного поля может не только перетекать в соседние области пространства, но и порождаться за счет работы заряженных частиц против электрического поля.

Таким образом, создаваясь в тех областях пространства, где имеются внешние источники, электромагнитная энергия доставляется в другие области пространства потоком энергии с плотностью потока  $\vec{S}$

## 6.15. Закон сохранения энергии

263

(6.92). Вектор  $\vec{S}$  обычно называют вектором Пойнтинга, хотя еще за 10 лет до Пойнтинга закон сохранения энергии с помощью понятия потока энергии в общей форме был сформулирован профессором Московского университета Н. А. Умовым (1874).

Приведем интегральное представление закона сохранения электромагнитного поля для конечного объема  $V$ , ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \oint_S S_n dS = - \int_V (\vec{E} \cdot \vec{j}) dV \quad \left( W = \int_V w dV \right), \quad (6.93)$$

получающееся в результате интегрирования соотношения (6.91) по объему  $V$ . (Здесь единый символ  $S$  использован как для вектора Пойнтинга, так и для поверхности. Это не должно вызвать недоразумений, так как при обозначении вектора Пойнтинга символ либо сопровождается нижним индексом  $n$ , либо записывается как векторная величина.) Рассмотрим несколько характерных случаев порождения и потери электромагнитной энергии в объеме.

а) Пусть имеющиеся внутри объема  $V$  токи проводимости созданы свободными заряженными частицами. Пусть их общее число внутри объема неизменно и равно  $N$ . Легко увидеть, что интеграл

$$\int_V (\vec{E} \cdot \vec{j}) dV = \sum_{i=1}^N e_i (\vec{E}_i \cdot \vec{v}_i)$$

( $\vec{E}_i$  – электрическое поле в месте расположения  $i$ -го заряда), входящий в правую часть равенства (6.93), при этом равен скорости изменения суммарной кинетической энергии заряженных частиц  $d\mathcal{E}_{\text{кин}}/dt$ . Действительно, из выражения силы Лоренца

$$\vec{f}_i = e_i \left( \vec{E}_i + [\vec{v}_i \times \vec{B}_i] / c \right)$$

и уравнения движения  $i$ -й частицы, в общем случае релятивистской,  $d\vec{P}_i/dt = \vec{f}_i$ , имеем

$$e_i (\vec{E}_i \cdot \vec{v}_i) = (\vec{f}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{d\vec{P}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{d\mathcal{E}_i}{dt}, \quad \mathcal{E}_i = m_i c^2 \left( \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} \right)^{-1}.$$

Последний шаг в этой цепочке равенств следует из релятивистского соотношения

$$\mathcal{E}_i^2 / c^2 = P_i^2 + m_i^2 c^2,$$

откуда  $(1/c^2) \mathcal{E}_i d\mathcal{E}_i/dt = (\vec{P}_i \cdot d\vec{P}_i/dt)$ , что с учетом тождества  $\vec{P}_i = \mathcal{E}_i \vec{v}_i/c^2$  приводит к нужному соотношению  $\vec{v}_i d\vec{P}_i/dt = d\mathcal{E}_i/dt$ . Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\int_V (\vec{E} \cdot \vec{j}) dV = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i = \frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt}$$

и закон сохранения энергии (6.93) приобретает вид

$$\frac{d}{dt} (W + \mathcal{E}_{\text{кин}}) = - \oint_S S_n dS. \quad (6.94)$$

Таким образом, изменение суммарного количества энергии в объеме  $V$ , складывающегося из энергии электромагнитного поля и кинетической энергии всех находящихся в объеме заряженных частиц, вызывается переносом энергии электромагнитного поля через поверхность, ограничивающую объем  $V$ . (Напоминаем, что заряженные частицы границу объема не пересекают.)

б) Пусть имеющиеся внутри объема  $V$  токи проводимости подчиняются закону Ома (3.23)  $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стр}})$ , где  $\vec{E}_{\text{стр}}$  – сторонние электродвижущие силы. Тогда

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{E}_{\text{стр}}, \quad (\vec{E} \cdot \vec{j}) = \frac{j^2}{\sigma} - \vec{E}_{\text{стр}} \cdot \vec{j},$$

и, введя обозначение  $Q = \int_V (j^2/\sigma) dV$  для интенсивности джоулева тепловыделения в объеме  $V$ , интегральный закон сохранения энергии представим в виде

$$\frac{dW}{dt} = -Q + \int_V (\vec{E}_{\text{стр}} \cdot \vec{j}) dV - \oint_S S_n dS. \quad (6.95)$$

Отсюда видно, что скорость изменения суммарной энергии поля в объеме определяется интенсивностью джоулевых потерь, суммарной мощностью сторонних сил и переносом энергии электромагнитного поля через внешнюю границу рассматриваемого объема.

В случае стационарных полей, когда  $dW/dt = 0$ , соотношение (6.95), будучи записано для безграничного пространства, сводится к равенству

$$\int_{(\infty)} (\vec{E}_{\text{стр}} \cdot \vec{j}) dV = \int_{(\infty)} (j^2/\sigma) dV, \quad (6.96)$$



## 6.15. Закон сохранения энергии

265

так как поток вектора Пойнтинга через безграничную замыкающую поверхность при этом равен нулю. Иными словами, в стационарном процессе работа сторонних ЭДС полностью переходит в тепло. (При наличии движущихся проводников утверждение (6.94) несправедливо, но электродинамику движущихся сред мы здесь не затрагиваем и вопрос оставляем без обсуждения.)

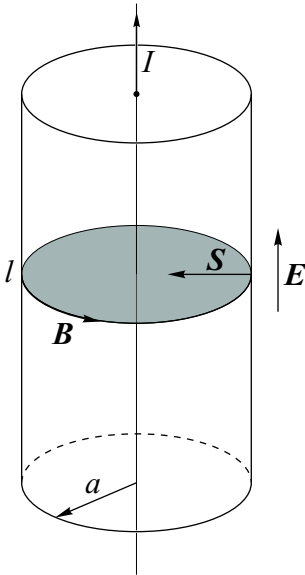


Рис. 6.22

Обратим внимание в связи с равенством (6.96), что сторонние ЭДС совершают работу в тех областях, обычно небольших, где  $\vec{E}_{\text{стр}}$  отлично от нуля, в то время как джоулево тепло выделяется во всем объеме проводника. Покажем, что энергия, необходимая для компенсации джоулевых потерь, в участок проводника доставляется в виде потока электромагнитной энергии. Рассмотрим для этого отрезок цилиндрического провода длины  $\ell$  и радиуса  $a$ , по которому течет ток  $I$  (рис. 6.22). Тогда в качестве поля  $\vec{B} = \vec{H}$  на внешней поверхности провода можно принять поле бесконечного провода (4.9):

$$H_{\alpha} = \frac{2I}{ca}.$$

Считаем, что в рассматриваемом участке провода  $\vec{E}_{\text{стр}} = 0$ , поэтому электрическое поле внутри провода  $\vec{E} = \vec{j}/\sigma$ . Поле  $\vec{E}$  вне цилиндра нам неизвестно. Но вследствие граничного условия непрерывности его тангенциальных компонент на внешней границе цилиндра известна компонента

$$E_z = \frac{I}{\sigma \pi a^2}.$$

Следовательно, радиальная компонента вектора Пойнтинга на поверхности цилиндра, определяющая поток электромагнитной энергии из окружающего пространства в проводник, также известна:

$$S_r = -\frac{c}{4\pi} E_z H_{\alpha} = -\frac{c}{4\pi} \frac{I}{\sigma \pi a^2} \frac{2I}{ca}.$$

Видно, что в рассматриваемый отрезок проводника каждую секунду втекает энергия в количестве

$$|S_r| 2\pi a \ell = I^2 \frac{\ell}{\sigma \pi a^2} = I^2 R,$$

в точности равно джоулеву теплу (3.19), выделяющемуся на участке проводника с омическим сопротивлением  $R = \ell / (\sigma \pi a^2)$ .

Таким образом, в тех участках проводника, в которых  $\vec{E}_{\text{стр}} = 0$ , выделяемое током тепло компенсируется энергией, втекающей в проводник из окружающего пространства. В это пространство она должна, очевидно, поступать из тех участков провода, в которых совершается работа сторонних ЭДС.

*Пример 6.8.* Усредненную интенсивность тепловыделения  $\langle Q \rangle$  в цилиндрическом проводе с переменным током  $I_0 e^{i\omega t}$ , найденную в § 6.9 (см. формулу (6.65)), найти как поток вектора Пойнтинга через поверхность проводника.

Необходимые для определения  $r$ -компоненты вектора  $\vec{S}$  поля в данном случае равны

$$H_\alpha(a, t) = \frac{2I_0}{ca} e^{i\omega t},$$

$$E_z(a, t) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sigma a\delta} I_0 e^{i\pi/4} e^{i\omega t}$$

(последнее взято из решения (6.64)). Подставляя в выражение

$$S_r(a, t) = -\frac{c}{4\pi} E_z(a, t) H_\alpha(a, t)$$

вещественные части от комплексных выражений соответствующих полей, получаем

$$S_r(a, t) = -\frac{c}{4\pi} \frac{\sqrt{2}I_0}{2\pi\sigma a\delta} \frac{2I_0}{ca} \cos \omega t \cos(\omega t + \pi/4).$$

Имея в виду результат усреднения произведения косинусов  $\langle \cos \omega t \cos(\omega t + \pi/4) \rangle = \sqrt{2}/4$ , для усредненного по времени потока вектора  $\vec{S}$  через поверхность цилиндра длины  $\ell$  получаем результат

$$|\langle S_r \rangle| 2\pi a \ell = \frac{\ell}{4\pi\sigma a\delta} I_0^2,$$

совпадающий с  $\langle Q \rangle$  формулы (6.65).

## Библиографический список

*Мешков И. Н., Чириков Б. В.* Электромагнитное поле. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. Ч. 1.

*Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1978.

*Сивухин Д. В.* Общий курс физики. М.: Наука, 1996. Т. 3. Ч. 1.

*Фейнман Р. и др.* Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. М.: Мир, 1966. Т. 5—7.

*Джесксон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.

*Матвеев А. Н.* Электричество и магнетизм. М.: Высш. шк., 1983.

*Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1982.

*Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.* Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970.

*Жданова Т. А., Меледин Г. В.* Задачи по электродинамике с решениями. Новосибирск: НГУ, 1990. Ч. 1, 2.

*Меледин Г. В. и др.* Задачи по электродинамике частиц и полей / Г. В. Меледин, Г. В. Росляков, Ю. И. Эйдельман. Новосибирск: НГУ, 1986.