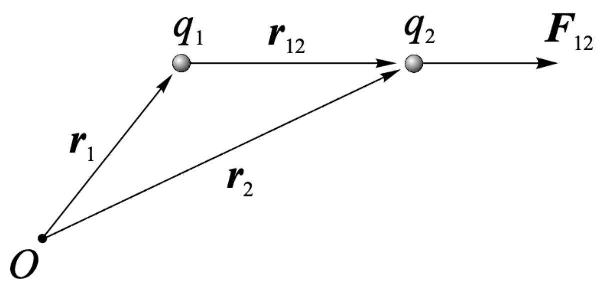
1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции.Поток электрического поля. Теорема Гаусса.

Закон Кулона

Это — экспериментально установленный закон силового взаимодействия двух точечных заряженных тел, неподвижных относительно рассматриваемой системы отсчета, согласно которому:

$$\boxed{\vec{F}_k = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r_{12}}}{r_{12}}}$$



Введем понятие напряженности:

$$\boxed{\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}}$$

тогда силу Кулона можно перезаписать в виде:

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2)$$

Напряжённость электрического поля

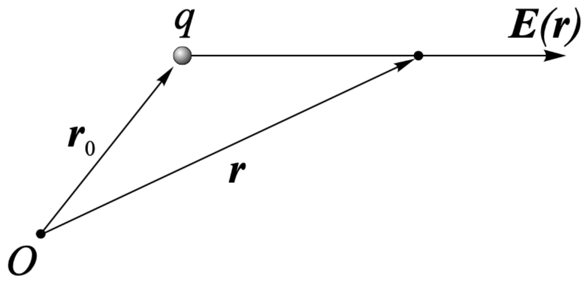
В общем виде напряженность имеет вид:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}}$$

Принцип суперпозиции

Электрическое поле от системы зарядов равно сумме электрических полей от её составляющих:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})} = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$



Поток электрического поля

Если у нас имеется некоторая конечная поверхность S, то поток через эту поверхность вычисляется как поверхностный интеграл

$$\boxed{\Phi = E_n dS}$$

Теорема Гаусса

*Теорема Гаусса:*Поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность определяется суммарным зарядом Q, находящимся внутри этой поверхности, и равняется 4πQ:

$$\boxed{\oint_S E_n ds = 4\pi Q}$$

2. Дивергенция электрического поля. Распределённый заряд. Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

Дивергенция электрического поля

Вспомним теорему Гаусса для потока $\vec{E}$ через замкнутую площадь S

$$\oiiint_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi\rho dV$$

а по теореме Остроградского-Гаусса

$$\oiiint_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V div\vec{E} d\vec{V}$$

следует что для $\forall V$:

$$\iiint_V div\vec{E} d\vec{V} = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi\rho dV \Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho}$$

Распределённый заряд

Объемная плотность заряда:

$$dq \stackrel{df}{=} \rho dV$$

Поверхностная плотность:

$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

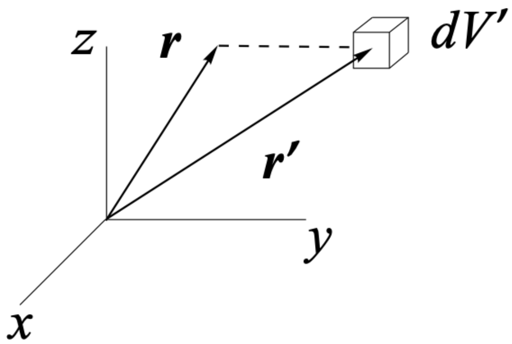
Линейная плотность:

$$dq \stackrel{df}{=} \kappa dl$$

Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

В конечной области пространства с плотностью заряда $\rho(\vec{r})$, по принципу суперпозиции скалярный потенциал этих зарядов равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r'})dV'}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$



Представление потенциала в виде интеграла по объему, занятому зарядами, часто называют частным решением уравнения Пуассона.

Для задачи с точечными зарядами интегральная форма не подойдёт, перейдём к сумме. Введём функцию Дирака δ, она задается следующими условиями:

1) при всех $\vec{r} \neq 0$ $\delta(\vec{r}) = 0$;

2) в точке $\vec{r} \neq 0$ имеем $\delta(\vec{r}) = \infty$;

3) интеграл по всему пространству $\int \delta(\vec{r})dV = 1$

4) $\int f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r_0})dV = f(\vec{r_0})$

где $f(\vec{r})$ - произвольная непрерывная функция, $\vec{r_0}$ радиус-вектор некоторой фиксированной точки.

Объёмную плотность заряда расположенного в точке $\vec{r} = \vec{r_0}$ можно перезаписать:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r_0})$$

подставляем в предыдущую формулу

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \int \frac{q\delta(\vec{r} - \vec{r_0})dV'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r'}|}}$$

3. Циркуляция и ротор электрического поля. Теорема Стокса. Электрический потенциал. Работа электрического поля. Потенциал точечного заряда.

Циркуляция и ротор электрического поля

Циркуляция векторного поля $\vec{E}$ вдоль контура L

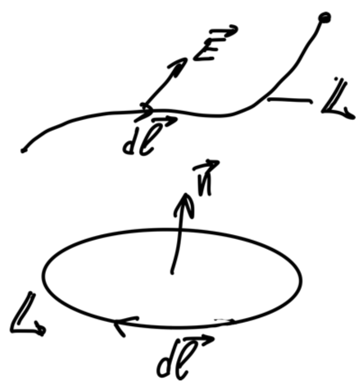
$$\int\limits_L \vec{E}d\vec{l}$$

а по замкнутому контуру

$$\boxed{\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 0}$$

или в дифференциальной форме

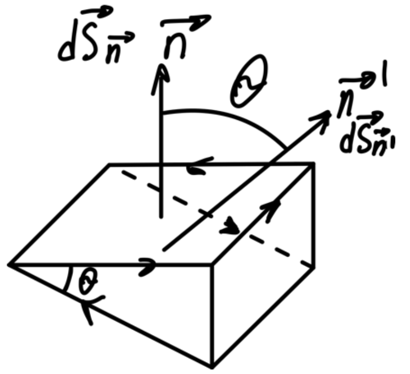
$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{E} = 0}$$



Как следствие из теоремы о циркуляции $\vec{E}$ работа при перемещении заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории движения.

Теорема Стокса

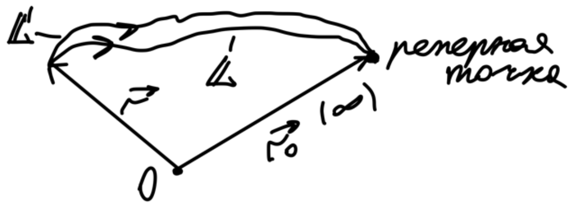
$$\boxed{\oint\limits_{\delta S} \vec{E} d\vec{l} = \iint\limits_{S} \mathrm{rot} \vec{E} d\vec{S}}$$



$$\left. \begin{array}{l} (\mathrm{rot}\vec{E})_{\vec{n}'} = \frac{\mathrm{rot}\vec{E}}{\frac{1}{\cos\theta}} \\ \frac{1}{\cos\theta} = \frac{dS_{\vec{n}'}}{dS_{\vec{n}}} \end{array} \right| \Rightarrow (\mathrm{rot}\vec{E})_{\vec{n}'} = \mathrm{rot}\vec{E} \cdot \cos\theta$$

Электрический потенциал

Рассмотрим скаляроное поле



$$\boxed{\varphi(\vec{r}) \overset{df}{=} \int_{\vec{r}}^{\vec{r_0}} \vec{E} d\vec{l}}$$

Чтобы определение было корректным, нужно чтобы этот интеграл не зависел от формы L.

Доказательство:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0 \Rightarrow \forall L \oint\limits_{L} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

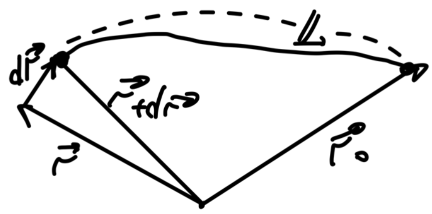
Запишем выражение при обходе $L - L'$ - сначала идем по контуру L, а потом обратно по контуру L' :

$$\oint\limits_{L-L'} \vec{E}d\vec{l} = 0 = \oint\limits_{L} \vec{E}d\vec{l} - \oint\limits_{L'} \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Такие поля называются потенциальными.

Доказано.

Еще свойства потенциала:



$$\varphi(\vec{r}) = \int \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} + \int\limits_{L} \vec{E}d\vec{l}$$

и

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r_0}) = \int\limits_{L} \vec{E}d\vec{l}$$

отсюда получим

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r_0}) - \varphi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}$$

так же используем

$$d\varphi = d\vec{r}\ \nabla\varphi$$

отсюда получим

$$\forall d\vec{r}, \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{r} \Rightarrow \vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0 = -[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\varphi]$$

Работа электрического поля

$$A = \int\limits_L \vec{F} d\vec{l} = \int\limits_L q\vec{E} d\vec{l} = q\left[\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_0}} \vec{E} d\vec{l} - \int_{\vec{r_2}}^{\vec{r_1}} \vec{E} d\vec{l}\right] = q(\varphi_2 - \varphi_2) = qU$$

Потенциал точечного заряда

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}$$

или в общем виде

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

4. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат.

Уравнение Лапласа

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

В сферической системе (r, θ, α) координат

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0$$

В цилиндрической (r, α, z) координат

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0$$

Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат

Предположим, что в декартовых координатах переменные разделяются -это означает, что:

$$\varphi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\Delta\varphi = 0 \Rightarrow X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \Rightarrow Const_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\frac{X''}{X} = C \Rightarrow X'' = CX$$

$$(1) X(x) = \begin{cases} \text{при C} > 0, Ae^{\sqrt{c}x} \\ \text{при C} < 0, Ae^{\pm i\sqrt{c}x} \\ \text{при C} = 0, Ax + B \end{cases}$$

При $\rho \neq 0$. Допустим, что

$$\rho(x, y, z) = \rho \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \text{где X,Y,Z функции вида (1)}$$

Тогда

$$\varphi = A \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$A(X''YZ + XY''Z + XYZ'') = -4\pi\rho_0 XYZ \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

Итог

$$\rho = p_1 + p_2, \Delta\varphi = -4\pi\rho, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2;$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = -4\pi\rho_1 \\ \Delta\varphi_2 = -4\pi\rho_2 \end{cases}$$

5. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат

Пусть $\varphi(r, \theta, \alpha) = R(r) \cdot Y(\theta)$

$$\Delta\varphi(r, \theta, \alpha) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}_{=l(l+1)} + \underbrace{\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dY}{d\theta}\right)}_{=-l(l+1)} = 0$$

При $R(r) \propto r'$
или $R(r) \propto \frac{1}{r^{l+1}}$

$$\frac{1}{R}(r^2R')' = C$$

ищем решение в виде $R(r) \propto r^l$

$$\frac{1}{R}(r^2R')' = \underset{=-(l'+1)}{l} \cdot \underset{=(-l'-1+1)=(l'+1)l'}{(l+1)}$$

При этом $R(r) \propto \frac{1}{r^{l+1}}$ удолетвор. уравнению с той же С
(замена $l' = -(l+1)$)

6. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат

Пусть $\varphi(r, \alpha) = \varphi(r, \alpha)$. Кроме того $\varphi(r, \alpha) = R(z)Y(\alpha)$ (то есть переменные разделяются)

$$Y(\alpha) = e^{\pm im\alpha}$$

$$\varphi(r, \alpha) = R(r)(\underset{i}{\Sigma} e^{im\alpha}), \text{где m} \in Z$$

Пусть внутри, рассматриваемой области нет зарядов $\Rightarrow \Delta\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0 \Rightarrow e^{im\alpha}\cdot\frac{1}{r}\left(rR'\right)' + R\cdot\frac{1}{r^2}\left(-m^2e^{im\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \frac{r(rR')'}{R} = m^2$$

Ищем решение в виде $R(r) \propto r^l$:

$$l^2 = m^2, \text{т.е } l = \pm m. \text{ Т.е } \varphi(r, \alpha) = \left(\frac{C_1}{r^m} + C_2r^m\right)e^{\pm im\alpha}$$

7. Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля. Поверхностная плотность зарядов. Поле вблизи поверхности металлов. Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал.

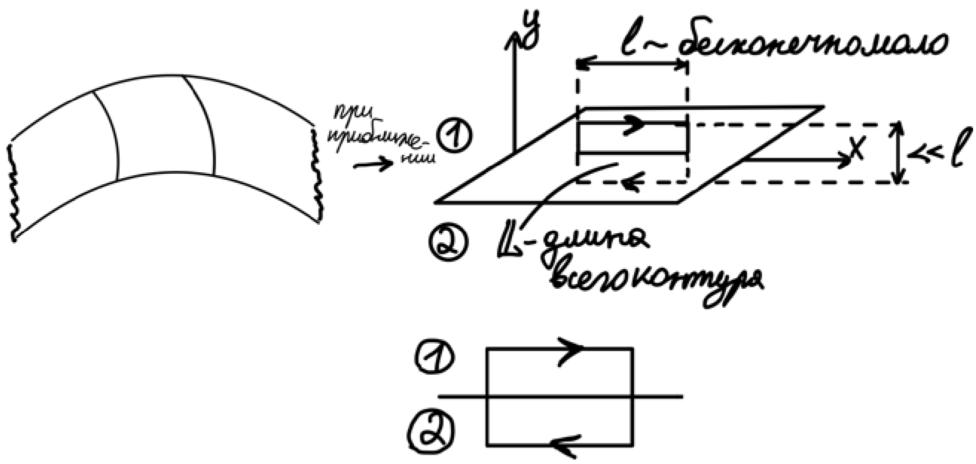
Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля

Тангенциальная компонента

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E}d\vec{l} \leftarrow \text{интегральная форма}$$

По теореме Стокса

$$0 = \iint\limits_{(\forall)S} \mathrm{rot}\vec{E}dS = \oint\limits_{(\forall)S} \vec{E}d\vec{l}$$



$$\oint \vec{E}d\vec{l} = E_x|_1 \cdot l - E_x|_2 \cdot l \Rightarrow E_x|_1 = E_x|_2$$

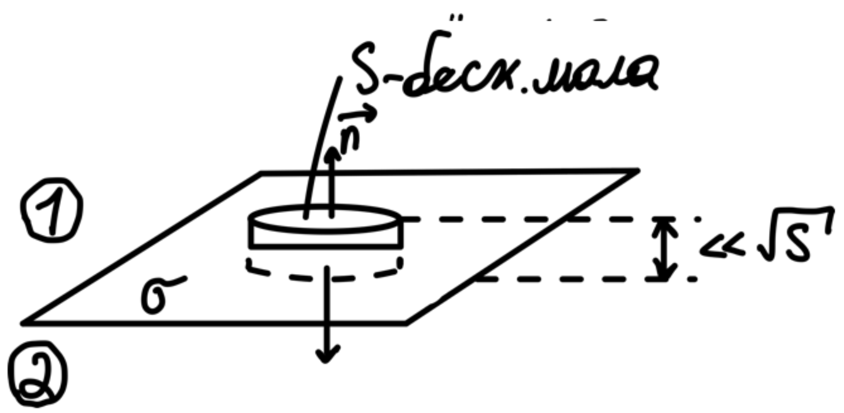
или же

$$\boxed{E_\tau|_1 = E_\tau|_2}$$

Нормальная компонента

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \oiint\limits_{(\forall)S} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint\limits_{(\forall)V} \mathrm{div}\vec{E}dV = 4\pi \iiint\limits_{(\forall)V} \rho dV \Rightarrow \oiint\limits_{(\forall)\delta S} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q$$



$$E_{1n}| \cdot S - E_{2n}| \cdot S = 4\pi Q = 4\pi\rho S$$

или же

$$\boxed{E_{1n}| - E_{2n}| = 4\pi\rho}$$

Поверхностная плотность зарядов(???)

$$dq \overset{df}{=} \sigma dS$$

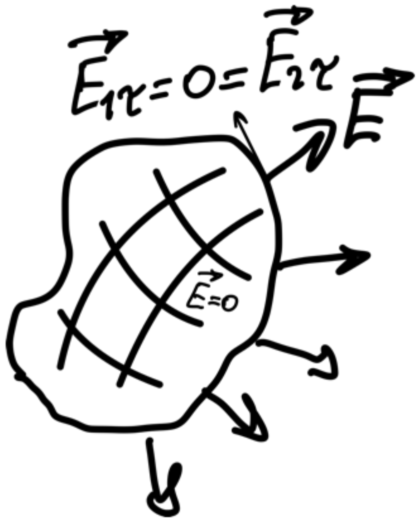
Поле вблизи поверхности металлов

Надо доказать что поле вблизи металлов равно

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Рассмотрим тангенсальную и нормальную компоненту поля $\vec{E}$ на границе металла

Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника $E_{1n} = 0$ отсюда



$$E_{2n} = 4\pi\sigma$$

Снаружи металла поле $E_{2\tau} = 0$ и из граничных условий

$$E_{1\tau} = 0$$

Итоговое поле равно

$$\boxed{\vec{E}_{2n} = 4\pi\sigma\vec{n}}$$

Что и требовалось доказать.

Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал

Можно рассмотреть две точки A и B с одной стороны поверхности и C,D с другой стороны. Найдем напряжение между парами этих точек:

Из граничных условий, что E_τ−непрерывно следует, что:

$$E_{\text{AB}|} = E_{\text{CD}}|$$

потенциал можно выразить через напряженность так:

$$E = -\text{grad}\varphi$$

отсюда получаем, что $\varphi_{\text{AB}}| = \varphi_{\text{CD}}| \Rightarrow \varphi|$ – непрерывно

8. Проводники в электрическом поле. Теорема единственности.

Проводники в электрическом поле

Очень похоже (скорее всего есть одно и тоже) на вопрос: поле вблизи поверхности металлов, ну рассмотрим повторно?

Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника $E_i \equiv 0$ отсюда плотность заряда:

$$\rho_i = \frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\vec{E}_i \equiv 0$$

В этой связи говорят, что проводник квазинейтрален. Таким образом, заряды на проводнике могут размещаться только на его поверхности, причем поверхностная плотность зарядов связана с полем $vecE$ вне проводника через граничное условие для E_n.

Если пространство вне проводника свободно от зарядов, то здесь поле $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$ и φ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Из граничных условий мы получаем что:

$$\vec{E}_n = 4\pi\sigma \ , \ \vec{E}_\tau = 0.$$

Заметим, что поле подходит к поверхности проводника по нормали, т.е. поверхность проводника является эквипотенциалью. Это естественно, так как в проводнике потенциал постоянен из-за $\vec{E}_i = 0$

Теорема единственности

Условия теоремы:

1)На каждом проводнике задан либо потенциал, либо заряд,

2)В V нету зарядов;

$\Rightarrow \exists$ единственное решение уравнения Пуассона вида:

$$\boxed{\vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi}$$

Доказательсвто

Пусть $\vec{E}_1 = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_1$ и $\vec{E}_2 = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_2$. Достаточно доказать, что:

$$\iiint\limits_V |\vec{E}_2(\vec{r}) - \vec{E}_1(\vec{r})|^2 dV = 0$$

$$\vec{E} := \vec{E}_2 - \vec{E}_2 \ ; \ \varphi := \varphi_2 - \varphi_1 \ ; \ \vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_2 + \boldsymbol{\nabla}\varphi_1 = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

Всюду в V $\Delta\varphi_1 = 0$ и $\Delta\varphi_2 = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$

Рассмотрим выражение: $\boldsymbol{\nabla}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 + \varphi\underset{\to 0}{\boldsymbol{\nabla}}\varphi = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2$

$$\iiint |\vec{E}_2(\vec{r}) - \vec{E}_1(\vec{r})|^2 dV = \iiint |\vec{E}|^2 dV = \iiint (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 dV = \iiint \boldsymbol{\nabla}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) dV =$$

$$= \iiint\limits_V \operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) dV = \underbrace{\oiint\limits_{S_\infty} \varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{S}}_{\to 0(\propto \frac{1}{r})} - \sum_i \oiint\limits_{S_i} \varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{S} = \sum_i \varphi_i \oiint\limits_{S_i} (-\boldsymbol{\nabla}\varphi) d\vec{S} =$$

$$\sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) \oiint\limits_{S_i} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) d\vec{S} = \sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) \left[\oiint\limits_{S_i} \vec{E}_2 d\vec{S} - \oiint\limits_{S_i} \vec{E}_1 d\vec{S} \right] =$$

$$= 4\pi \sum_i \underset{(1)}{(\varphi_{2i} - \varphi_{1i})} \underset{(2)}{(q_{2i} - q_{1i})} = 0$$

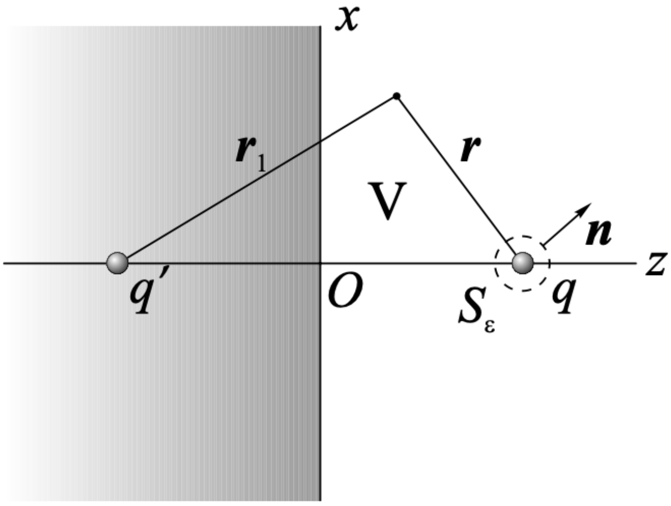
По условию теоремы либо (1) = 0, либо (2)=0

Доказано

9. Метод изображения для решения задач электростатики на примере плоской и сферической границ раздела проводника и непроводящего пространства.

Плоская граница

Точечный заряд q , находящийся на расстоянии h от проводящего полупространства. Определить поле в свободном полупространстве и на этой основе — плотность зарядов, индуцированных зарядом q на поверхности проводника.



В проводящем полупространстве поле равно нулю, постоянный потенциал можно принять за ноль, будем искать поле только в области $z > 0$ с выкинутой точкой. Искомое поле удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0$$

и граничным условиям

$$\varphi|_{z=0} = 0 \ , \ \oint\limits_{S_\varepsilon} E_n dS = 4\pi Q$$

где S_ε сфера малого радиуса с центром в точке расположения заряда q

В проводящем полупространстве будет наводится заряд $q' = -q$. Тогда потенциал и электрическое поле, созданные зарядом q фиктивным зарядом q' ,в правом полупространстве создают искомое поле:

$$\varphi = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_1}$$

Действительно, эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в области $z > 0$ как потенциал двух точечных зарядов, лежащих вне области. Во-вторых, $\varphi|_{z=0} = 0$, так как для точек плоскости r и r_1 равны.

В-третьих, поле, созданное зарядом q', через поверхность $S\varepsilon$ создает поток, равный нулю (по теореме Гаусса), а поле от точечного заряда q обеспечивает выполнение соответствующего граничного условия.

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{|\vec{r}|} - \dfrac{q}{|\vec{r_1}|}, \ z \geq 0 \\ \qquad\qquad 0, \text{ z<0} \end{cases}$$

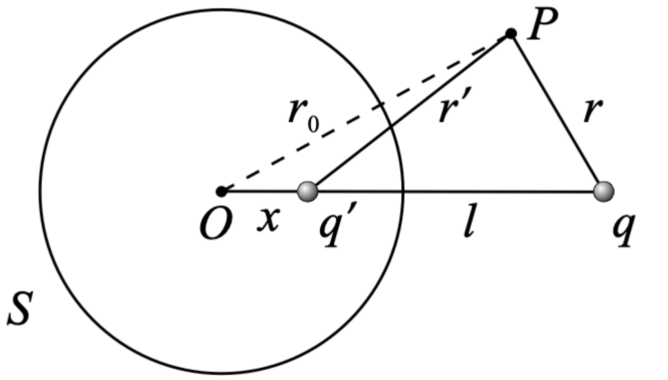
и

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{|\vec{r}|^2}\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \dfrac{q}{|\vec{r_1}|^2}\dfrac{\vec{r_1}}{|\vec{r_1}|}, \ z \geq 0 \\ \qquad\qquad 0, \text{ z<0} \end{cases}$$

Таким образом, задача решена.

Для сферической границы

Заряд q на расстоянии $l+x$ от центра шара, а потенциал шара принят равным нулю.



Искомый потенциал в произвольной точке P вне шара в этом случае:

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}$$

где $q' = -q\frac{a}{l}$

Решение удовлетворяет уравнению Лапласа в своей области определения, имеет нужную особенность вблизи точечного заряда q и удовлетворяет граничным условиям ($r_0/r_0' = l/a$), обращаясь в нуль.

Рассмотрим второй вариант — точечный заряд q рядом с шаром, несущим заряд Q (при этом постоянный потенциал шара не определен). В этом случае к существующей системе зарядов q, q' необходимо добавить фиктивный заряд, расположенный в центре шара:

$$q'' = Q - q' = Q - q\frac{a}{l}$$

тогда

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r_*}$$

потенциал шара при этом:

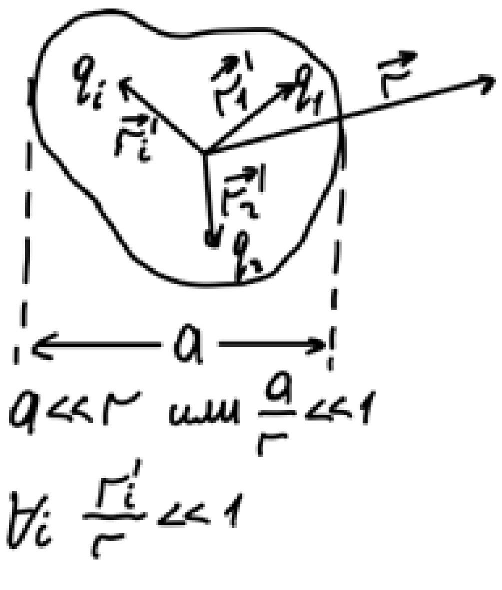
$$\varphi(P) = \varphi|_S = \frac{q}{r_0} + \frac{q'}{r_0'} + \frac{q''}{a} \Rightarrow \varphi|_0 = \frac{q''}{a} = \frac{Q}{a} + \frac{q}{l}$$

Таким образом, задача решена.

10. Электрический диполь. Потенциал и поле диполя.

Электрический диполь

Пусть система зарядов занимает ограниченную область пространства с характерным размером a, причем начало координат находится внутри этой области.



Распишем потенциал точечных зарядов:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|} =: \Sigma \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Используем разложение:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{1}{r} + (-\vec{r'}) \ \nabla \frac{1}{r} + ... = \frac{1}{r} + (-r')(-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}) + ... = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r'}}{r^3}$$

получаем

$$\varphi = \Sigma q \frac{1}{r} + \Sigma q \vec{r'} \frac{\vec{r}}{r^3} + ... = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3} + ...$$

где

Дипольный момент- $\boxed{\vec{d} := \sum_i q_i \vec{r'_i}}$

Полный заряд системы-$Q = \sum_i q_i$

Дипольный член в сферических координатах($\vec{e_z} \uparrow\uparrow \vec{d}$):

$$\varphi(r, \theta) = \frac{d}{r^2} \cos\theta$$

Потенциал и поле диполя

Из прошлого пункта:

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3}}$$

Найдем поле диполя:

$$\vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi = -\boldsymbol{\nabla}\left((\vec{d}\vec{r})\frac{1}{r^3})\right) = -\boldsymbol{\nabla}\left((\vec{d}\overset{\downarrow}{\vec{r}})\frac{1}{r^3}\right) - \boldsymbol{\nabla}\left((\vec{d}\vec{r})\frac{\overset{\downarrow}{1}}{r^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d}\vec{r}\right) - (\vec{d}\vec{r})\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r^3} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3\frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^4}\boldsymbol{\nabla}\vec{r} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3\frac{(\vec{d}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

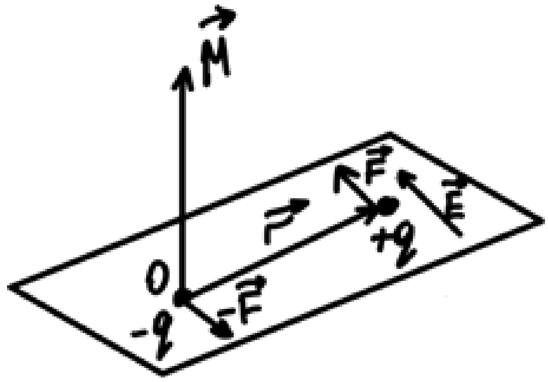
Итог, *поле диполя:*

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3\frac{(\vec{d}\vec{r})\vec{r}}{r^5}}$$

11. Сила и момент сил, действующие на диполь в слабонеоднородном электрическом поле.

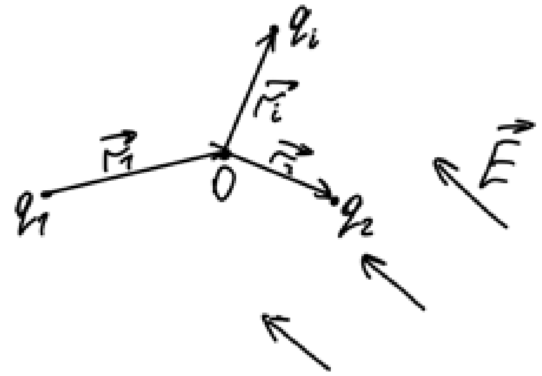
Момент сил:

Рассмотрим случай двух зарядов:



$$\vec{F} = q\vec{E}\ ,\ \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = [\vec{r} \times q\vec{E}] = [\vec{d} \times \vec{E}]$$

Обобщим на случай нескольких зарядов:

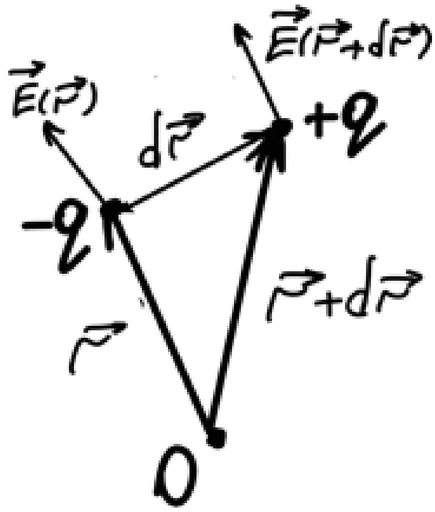


$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r_i} \times \vec{F_i}] = \sum_i [\vec{r_i} \times q_i\vec{E}] = \sum_i [q_i\vec{r_i} \times \vec{E}] = [(\sum_i q_i\vec{r_i}) \times \vec{E}] = [\vec{d} \times \vec{E}]$$

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{d} \times \vec{E}]}$$

Сила:

Рассмотрим случай двух зарядов:



В однородном поле $F = 0$, если полный заряд равен нулю:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E} = (\underset{\to 0}{\sum_i q_i})\vec{E} = 0$$

$$\vec{F} = q\vec{E}(d\vec{r} + d\vec{r}) - q\vec{E}(\vec{r}) = q(\vec{E}(d\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r})) = q(d\vec{r}\ \nabla)\vec{E} = (\vec{d}\ \nabla)\vec{E}$$

с учетом , что $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$:

$$0 = [\boldsymbol{\nabla}\times\vec{E}] \Rightarrow 0 = [\vec{d}\times[\boldsymbol{\nabla}\times\vec{E}]] \underset{bac-cab}{=} \boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d}\vec{E}\right) - \overset{\downarrow}{\vec{E}}(\vec{d}\boldsymbol{\nabla}) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d}\vec{E}\right) = (\vec{d}\boldsymbol{\nabla})\vec{E}$$

Получаем нашу силу:

$$\vec{F} = \ \nabla(\vec{d}\vec{E})$$

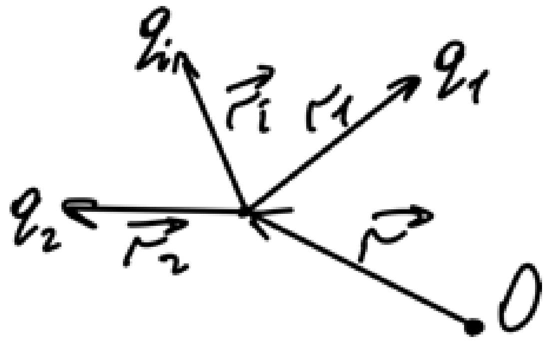
Можно ввести потенциальную функцию по общему правилу:

$$\vec{F} = -\boldsymbol{\nabla}U$$

Тогда

$$U = -\vec{d}\vec{E}$$

Обобщим на случай нескольких зарядов:



Предполагается, что система мала по сравнению с масштабами изменения электрического поля:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_i(\vec{r} + \vec{r_i})$$

с учетом, что $\sum_i q_i = 0$, получим:

$$\vec{F} = \sum_i q_i(\vec{E}(\vec{r}+\vec{r_i}) - \vec{E}(\vec{r})) = \sum_i q_i(\vec{r_i}\boldsymbol{\nabla})\vec{E} = \sum_i (q_i\vec{r_i}\boldsymbol{\nabla})\vec{E} = ((\sum_i q_i)\vec{r_i}\boldsymbol{\nabla})\vec{E} = (\vec{d}\boldsymbol{\nabla})\vec{E}$$

Получим нашу силу:

$$\boxed{\vec{F} = \boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d}\vec{E}\right)}$$

и

$$U = -\vec{d}\vec{E}$$

В случае упругого диполя:

$$\vec{d} \overset{df}{=} \alpha\vec{E}$$

тогда запишем нашу силу:

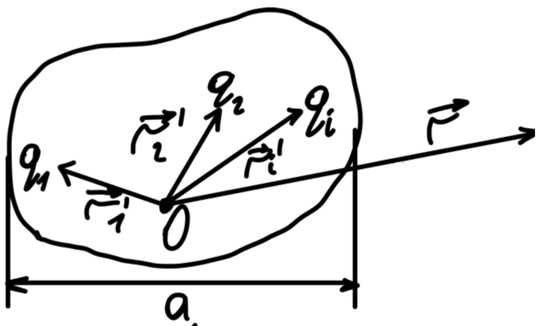
$$\vec{F} = \boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\alpha\vec{E}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\alpha\overset{\downarrow}{\vec{E}}\cdot\vec{E}\right) + \boldsymbol{\nabla}\left(\alpha\vec{E}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{E}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(\alpha\overset{\downarrow}{\vec{E}}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(\overset{\downarrow}{\vec{d}}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \vec{F}$$

с учетом $\vec{F} = -\boldsymbol{\nabla}U$, получаем $U = -\frac{1}{2}\vec{d}\vec{E}$

12. Электрический квадрупольный момент. Тензор квадрупольного момента для аксиально-симметричной системы зарядов.

Электрический квадрупольный момент



$$\frac{a}{r} \ll 1 \left(\forall_i \frac{r_i}{r} \ll 1 \right)$$

Точное решение:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|} =: \Sigma \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Нужно разложить $\frac{1}{\vec{r} - \vec{r}'}$. Перейдем к тензорной записи:

$$\vec{r}(x, y, z) =: (x_1, x_2, x_3) \to x_\alpha, \text{ анолгично } \vec{r}' - x_\alpha'$$

Индексы $\alpha, \beta \in [1, 2, 3]$

По сути раскладываю функцию:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \underset{\substack{l=0 \\ \text{монополь}}}{\frac{1}{r}} + \underset{\substack{l=1 \\ \text{диполь}}}{(-x_\alpha') \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{r}} + \underset{\substack{l=2 \\ \text{квадруполь}}}{\frac{1}{2} (-x_\alpha')(-x_\beta') \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r}} + ...$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} - ?$$

Найдем:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{1}{2r^3} 2x_1 = -\frac{x_1}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{x_1}{r^3}\right) = -x_1\left(-\frac{1}{r^4}\frac{x_2}{r}\right) = \frac{3x_1x_2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{x_1}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3}\cdot 1 + \frac{3x_1x_2}{r^5}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}$$

Таким образом квадрупольный член имеет вид:

$$\varphi = \Sigma q\frac{1}{2}x'_\alpha x'_\beta\left(\frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}\right)$$

$$Q_{\alpha\beta} := \Sigma\frac{1}{2}qx_\alpha x_\beta$$

тогда

$$\varphi = Q_{\alpha\beta}\frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}$$

$$Tr\left(\frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}\right) = \frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5} =$$

$$= \frac{-(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})r^2 + 3(x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3)}{r^5} = \frac{-3r^2+3r^2}{r^5} = 0$$

Хотим:

$$\varphi = D_{\alpha\beta}\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} \text{ Как найти } D_{\alpha\beta}?$$

$$D_{\alpha\beta} : 3Q_{\alpha\beta} - ?\cdot\delta_{\alpha\beta}r'^2 \text{ подберем ? так, чтобы } Tr(D_{\alpha\beta}) = 0, \text{так как } \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{при этом } D_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}r^2 = 0 (= D_{\alpha\beta} = 0)$$

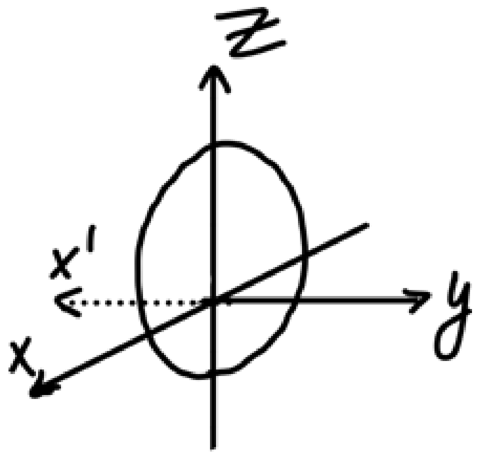
$$D_{\alpha\beta} = 3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2 \text{ Действительно } Tr(D_{\alpha\beta}) = D_{\alpha\alpha} = 3r'^2 - 3r'^2 = 0$$

Тогда

$$\boxed{\varphi = \Sigma q(3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2)\cdot\frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5}}$$

Таким образом $D_{\alpha\beta} = \Sigma q(3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2)$

Тензор квадрупольного момента для аксиально-симметричной системы зарядов



Вопрос:

$$D'_{xy}-?$$
$$||$$
$$D'_{12}-?$$

$$-----------------------------$$

$$x'_1x'_2 = x'y' = (-y)x = -xy| \text{ или } x'_1x'_2 = -x_1x_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D'_{12} = -D_{12}$$

Должно быть $D'_{12} = D_{12}$ из-за симметрии, поэтому имеем:

$$D_{12} = 0$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}D \end{pmatrix}$$

Что?

$$\varphi_2 = D_{\alpha\beta}\frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5} = \frac{1}{2r^5}(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{D}{2r^5}(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -x_1/2 \\ -x_2/2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{D}{2r^5}\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_3^2\right) = \frac{D}{2r^5}\left(-\frac{x^2 + y^2}{2} + z^2\right) =$$

$$= \frac{D}{2r^5}\left(-r^2\frac{\sin^2\theta}{2} + r^2\cos^2\theta\right) = \frac{D}{2r^3}\cdot\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

где последний член это полином Лежанра $P(\cos\theta)$

Вкратце о аксиально-симметричном тензоре:

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}D_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}D_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}$$

$$1) D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$$

$$2) D'_{xy} = -D_{yx} = -D_{xy} (\text{ свойство тензора при повороте на } 90^\circ)$$

$$D'_{xy} = D_{xy} (\text{ из симметрии })$$

$$\Downarrow$$

$$D_{xy} = 0$$

$$3) D'_{xz} = -D_{xz} (\text{ свойство тензора при повороте на } 180^\circ)$$

$$D'_{xz} = D_{xz}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{xz} = 0$$

13. Энергия электрического поля. Плотность энергии электрического поля.

В обьеме $V : \Delta\varphi = 0$ и граничные условия $\oiint\limits_{S_i}(-\ \nabla\varphi)d\vec{S} = 4\pi q_i \Rightarrow$

$\Rightarrow$задача линейна.

$$\delta A = \varphi_i dq_i \Big| \begin{array}{ll} \tilde{\varphi}_i & = \alpha\varphi_i \\ \tilde{q}_i & = \alpha q_i \ , \ \tilde{q}_i = q_i d\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1) \end{array}$$

$$\Delta A = \int \sum_i \tilde{\varphi}_i d\tilde{q}_i = \int \sum_i \alpha\varphi_i d(\alpha q_i) = (\int_0^1 \alpha d\alpha) \sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2}\varphi_i q_i$$

$$\iiint\limits_V \frac{E^2}{8\pi} dV = \iiint\limits_V \frac{(-\nabla\varphi)^2}{8\pi} dV = [\nabla(\varphi\nabla\varphi) = (\nabla\varphi)^2 + \varphi\nabla\varphi = (\nabla\varphi)^2] =$$

$$= \iiint\limits_V \frac{1}{8\pi}\nabla(\varphi\nabla\varphi) dV = \frac{1}{8\pi}\left(\sum_i \oiint\limits_{S_i} \varphi(-\nabla\varphi) d\vec{S} + \oiint\limits_{S_\infty} \underbrace{\varphi(\nabla\varphi)}_{\to 0} d\vec{S}\right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\sum_i \varphi_i \oiint\limits_{S_i} \vec{E} d\vec{S} = [\oiint\limits_{S_i} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q_i] = \frac{1}{2}\varphi_i q_i$$

Плотность энергии: $w = \frac{E^2}{8\pi}$, энергия $\boxed{W = \iiint wdV}$.

14. Электрическая ёмкость. Матрица ёмкостных коэффициентов, её симметричность.

Электрическая ёмкость

Конденсатор из двух проводников:

$$C = \frac{|q|}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

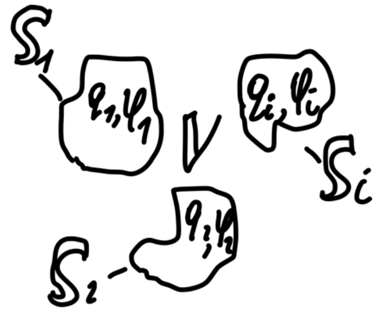
Уединенный конденсатор:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Энергия кондесатора:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2}\Sigma q_i\varphi_i$$

Матрица емкостных коэффициентов, её симметричность



$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{S} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

или в другом виде:

$$\varphi_i = S_{ij} q_j$$

где S_{ij}-*матрица потенциальных коэффициентов,*

$$q_i = C_{ij} \varphi_j$$

где $_{ij}$-*матрица емкостных коэффициентов,*$S_{ij}^{-1} = C_{ij}$-симметричны.

Свойства матриц:

$$dW = \sum_i \varphi_i dq_i = \varphi_i dq_i$$

и

$$W = \frac{1}{2}\varphi_i q_i = dW = \frac{1}{2}\varphi_i dq_i + \frac{1}{2} q_i d\varphi_i$$
$$\Downarrow$$

$$\varphi_i dq_i = q_i d\varphi_i$$

где $\varphi_i = S_{ij} q_j$

$$0 = S_{ij} q_j dq_i - q_i S_{ij} dq_i = S_{ij} q_j dq_i - q_j S_{ji} dq_i = (S_{ij} - S_{ji}) q_i dq_j$$

получаем:

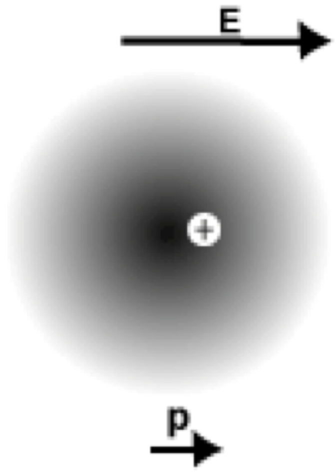
$$S_{ij} = S_{ji}$$
$$\Downarrow$$
$$C_{ij} = C_{ji}$$

это справедливо $\forall q_i$ и $\forall dq_i$.

15. Диэлектрики. Связанный заряд. Вектор поляризации. Электрическое поле в диэлектрике. Вектор индукции. Диэлектрическая проницаемость.

Диэлектрики

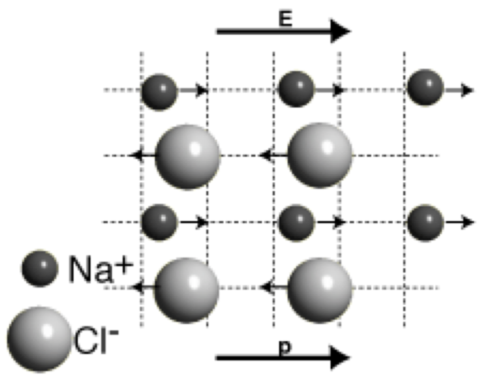
Неполярный диэлеткрик(к примеру H_2, O_2):



$$\vec{d_i} = 0$$

Под действием поля $\vec{E}$ происходит смещение электронного облака и $< \vec{d_i} \neq 0 >$

Ионный диэлектрик:

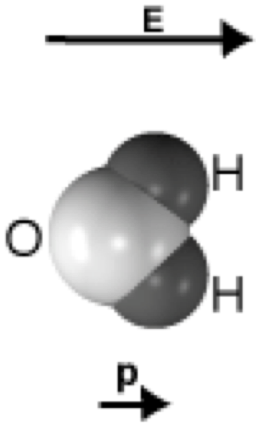


$$\vec{d_i} = 0$$

$$\text{Если } \vec{E} = 0 \Rightarrow < \vec{d_i} >= 0$$

$$\text{Если } \vec{E} \neq 0 \Rightarrow U = -\vec{d}\vec{E}, \; < \vec{d} > \neq 0$$

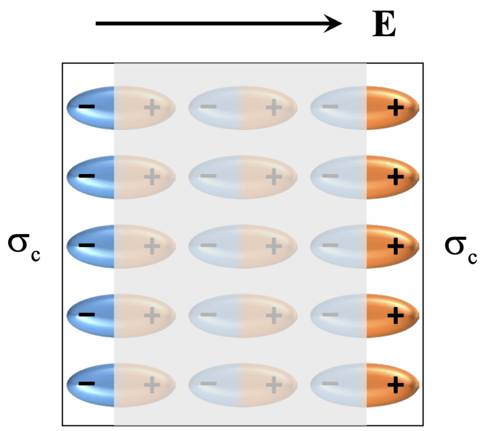
Полярный диэлектрик:



$$\vec{d}_i \neq 0$$

$$\text{Если } \vec{E} = 0 \Rightarrow < \vec{d} >= 0,\, U = -\vec{d}\vec{E}$$

Связанный заряд и Вектор поляризации



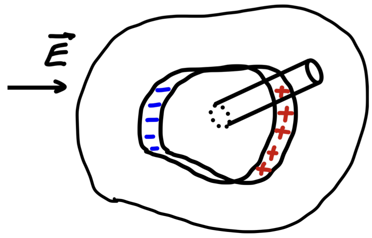
$$\iiint < \rho_c > dV = 0, \rho_c\text{-связанные заряды}$$

$$< \rho_c >= \frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_V \rho_c(\vec{r}+\vec{\xi})d\vec{\xi},\, \Delta V \sim 10^{-6}\text{см}^3$$

Определение *вектора поляризации:*

$$\boxed{< \rho_c >=: -\mathrm{div}\vec{P}}$$

Вне тела $\vec{P} = 0$



По формуле Остроградского-Гаусса (1):

$$\iiint <\rho_c> dV = -\iiint \mathrm{div}\vec{D}dV \overset{(1)}{=} -\oiint \vec{P}d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n = -\sigma_c}$$

Связь вектора поляризации и дипольного момента:

$$\vec{d} = \iiint <\rho_c> \vec{r}dV = -\iiint \vec{r}(\boldsymbol{\nabla}\vec{P})dV = -\iiint \boldsymbol{\nabla}(\underset{\to 0}{\vec{P}\vec{r}})dV + \iiint (\vec{r}\boldsymbol{\nabla})\vec{P}dV =$$

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\vec{P}\vec{r}\right) = \vec{r}(\boldsymbol{\nabla}\vec{P}) + (\vec{r}\boldsymbol{\nabla})\vec{P}\ ,\ (\vec{r}\boldsymbol{\nabla})\vec{P} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)(P_1, P_2, P_3) = \vec{P}$$

$$= \iiint \vec{P}dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = n <\vec{d}>}$$

Вектор поляризации $\vec{P}$ равен дипольному моменту единицы объема поляризованного диэлектрика.

$$\boxed{\vec{P} = \chi\vec{E}},\ \chi\text{-поляризуемость.}$$

Электрическое поле в диэлектрике и Вектор индукции и Диэлектрическая проницаемость

$$\begin{cases} \mathrm{div} <\vec{E}> = 4\pi(\rho + <\rho_c>) \\ \mathrm{rot}\vec{E} = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{div}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho \Rightarrow \mathrm{div}\vec{D} = 4\pi\rho \\ \vec{D} := \vec{E} + 4\pi\vec{P}(\text{нет физического смысла}) \end{array}$$

$<\vec{E}> := \vec{E}$-напряженность электрического поля,
$\vec{D}$-*вектор индукции электрического тока.*
По теореме Гаусса:

$$\oiint \vec{D}d\vec{S} = 4\pi Q$$

$$\oint\limits_{\Gamma}\vec{E}d\vec{l}=0\Rightarrow\vec{E}=-\boldsymbol{\nabla}\varphi,\ \varphi=-\int\vec{E}d\vec{l}$$

$$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\chi\vec{E}=(1+4\pi\chi)\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$$

ε*-диэлектрическая проницаемость*$(\varepsilon\geq 1)$

$$\boxed{\vec{P}=\frac{\vec{D}-\vec{E}}{4\pi}}$$

$$\rho_c=-\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\vec{D}-\vec{E}}{4\pi}\right)=-\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\vec{E}\right)=\frac{1-\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\vec{E}-\vec{E}\frac{\boldsymbol{\nabla}\varepsilon}{4\pi}$$

Итого имеем:

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec{D}=4\pi\rho & \oiint\vec{D}d\vec{S}=4\pi Q\\ \mathrm{rot}\vec{E}=0 & \oint\vec{E}d\vec{S}=0\\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E}\end{cases}$$

16. Уравнения электрического поля в диэлектрике. Граничные условия.

Уравнения электрического поля в диэлектрике

$$\text{Усреднение:}\begin{cases}\mathrm{div}\,\vec{E}=4\pi(\langle\rho_c\rangle+\rho) & \langle\rho_c\rangle=-\mathrm{div}\,\vec{P}\\ \mathrm{rot}\,\vec{E}=0 & \vec{P}=\chi\langle\vec{E}\rangle\end{cases}$$

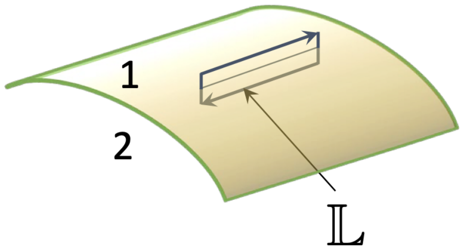
$$\text{Обозначения:}\ \begin{matrix}<\vec{E}>=:\vec{E}\\ \vec{E}+4\pi\vec{P}=:\vec{D}\end{matrix}$$

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec{D}=4\pi\rho\\ \mathrm{rot}\vec{E}=0 \qquad \vec{E}=-\boldsymbol{\nabla}\varphi\end{cases}$$

$$\text{Вектор индукции: }\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}=(1+4\pi\chi)\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$$

Граничные условия

Тангенсальная компонента:

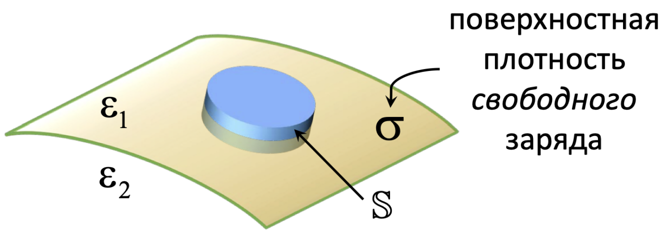


$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = 0 \\ \oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E_{1\tau}| = E_{2\tau}|}$$

То есть тангенсальная компонента вектора напряжённости электрического поля на границе непрерывна, а так же:

$$\varphi_1| = \varphi_2|$$

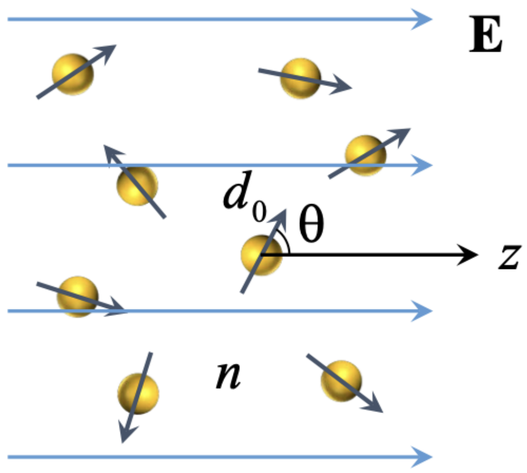
Нормальная компонента:



$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{D} = 4\pi\rho \\ \oiint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi Q \end{cases} \Rightarrow D_{1n}| - D_{2n}| = 4\pi\sigma \text{ или } \boxed{\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = 4\pi\sigma}$$

То есть нормальная компонента вектора индукции электрического поля терпит разрыв.

17. Оценка диэлектрической проницаемости полярного диэлектрика (газа).



Вероятность нахождения для $\theta + d\theta$:

$$W \sim e^{-\frac{U}{kT}}, \text{ где } U = -\vec{d_0}\vec{E} = -d_0 \cos\theta$$

$$n = \frac{N}{V} : dn = Ae^{(\frac{d_0 E\cos\theta}{kT})} d\Omega, \text{ где } d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$$

$$\int Ae^{(}\frac{d_0 E \cos\theta}{kT}) d\Omega = n$$

Для вектора поляризации $\vec{P} = n < \vec{d} >$:

$$\vec{P} = n < \vec{d_z} >= n\frac{\int d_0 \cos\theta e^{\frac{d_0 E\cos\theta}{kT}} \cdot 2\pi \sin\theta d\theta}{\int e^{\frac{d_0 E\cos\theta}{kT}} \cdot 2\pi \sin\theta d\theta} = \left[\alpha = \frac{d_0 E}{kT}\right] =$$

$$= n\frac{\int d_0 \cos\theta e^{\alpha\cos\theta} d\cos\theta}{\int e^{\alpha\cos\theta} d\cos\theta} = n^2 d_0 \frac{\frac{d}{d\alpha}\int_{-1}^{1} e^{\alpha\cos\theta} d\cos\theta}{\int_{-1}^{1} e^{\alpha\cos\theta} d\cos\theta} =$$

$$= n^2 d_0 \frac{d}{d\alpha} \ln\left[\frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{1} e^{\alpha\cos\theta} d(\alpha\cos\theta)\right] = n^2 d_0 \frac{d}{d\alpha} \ln\left[\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{\alpha}\right] =$$

$$= n^2 d_0 \frac{d}{d\alpha} \ln\left[2\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}\right] = n^2 d_0 \frac{\alpha}{2\operatorname{sh}\alpha}\left(\frac{2\operatorname{ch}\alpha}{\alpha} - \frac{2\operatorname{sh}\alpha}{\alpha^2}\right) = n^2 d_0 \left(\operatorname{cth}\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Где $\operatorname{cth}\alpha - \frac{1}{\alpha} \underset{\alpha<<1}{=} L(\alpha)$ функция Ланжевена.

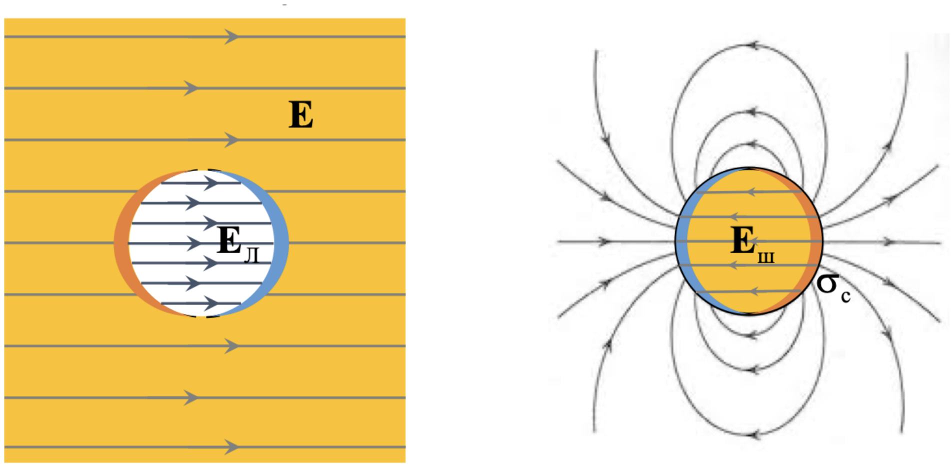
$$\operatorname{cth}\alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{45}$$

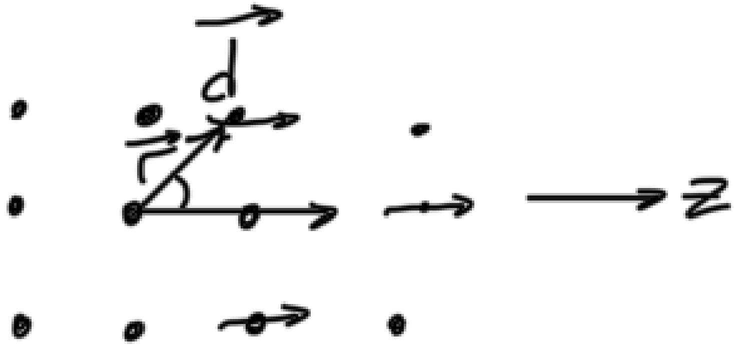
$$P_z = n^2\frac{d_0^2 E_z}{kT}, \text{ где } n = \frac{6\cdot 10^{23}}{22,4\cdot 10^3} = \frac{N_A}{V_A} \text{ и } d_0 = e\cdot l = 4,8\cdot 10^{-10}\cdot 0,5\cdot 10^{-8}$$

$$\chi = \frac{nd_0^2}{kT} = \frac{6\cdot 10^{23}}{22,4\cdot 10^3}\cdot\frac{(4,8\cdot 10^{-10}\cdot 0,5\cdot 10^{-8})^2}{1,38\cdot 10{-}16} \approx 4\cdot 10^{-3}$$

18. Локальное поле в диэлектрике (поле Лоренца). Формула Клаузиуса – Моссотти.

Локальное поле в диэлектрике (поле Лоренца)





При усреднении по углам:

$$< r^2 > = < x^2 + y^2 + z^2 > \underset{\text{изотропность}}{=} 3 < z^2 >$$

$$< \vec{E} > = \left\langle -\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{3(d\vec{dr})\vec{r}}{r^5}\right\rangle = \left\langle \frac{d}{r^3}(-r^2 + 3z^2)\vec{e_z}\right\rangle = 0$$

$$\vec{E}_{л} = \vec{E} - \vec{E}_{ш}(\text{по принципу суперпозиции})$$

$$E_{\tau}|_A - \text{непр.}: -\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{\overset{\to 0}{3(\vec{d}\vec{r})\vec{r}}}{r^5}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{л} = \vec{E} - \vec{E}_{ш} = \vec{E} + \frac{\vec{d}}{r^3} \\ \vec{d} = \frac{4}{3}\pi r^3 \vec{P} \end{cases}$$

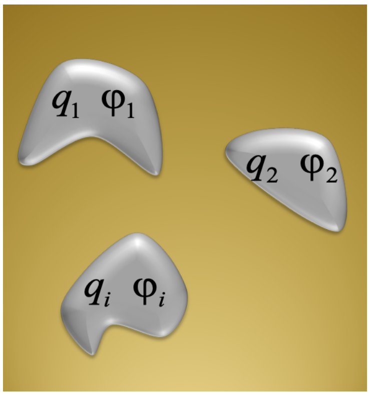
$$\Rightarrow \vec{E}_{л} = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}$$

Формула Клаузиуса-Моссотти

$\vec{d} = l\vec{E}_l$	$\Rightarrow (\varepsilon - 1)\vec{E} = 4\pi\vec{P} \Rightarrow \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon-1}\vec{P}$
$\vec{P} = n\vec{d}$	$\vec{E}_{л} = \frac{4\pi}{\varepsilon-1}\vec{P} + \frac{4}{3}\pi\vec{P} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon-1}\right)\vec{P} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon-1}\right)n\alpha\vec{E}_{л} \Rightarrow$
$\vec{E}_{л} = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}$	$\Rightarrow$ *формула Клазиуса-Моссоти:*
$\varepsilon\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$	$\boxed{\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon-1} = \frac{4\pi}{3}n\alpha}$

19. Энергия электрического поля в диэлектрике.

Линейная среда ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{P} = \chi\vec{E}$), все похоже на вакуум.



$$\delta W = \varphi_i dq_i \Rightarrow W = \frac{1}{2}\varphi_i q_i$$

$$\widetilde{q}_i = \alpha q_i \text{ и } \widetilde{\varphi}_i = \alpha\varphi_i, \text{ где } 0 \le \varphi \le 1$$

Перепишем энергию:

$$W = \int dW = \int \widetilde{\varphi}_i d\widetilde{q}_i = \int_0^1 \alpha\varphi_i q_i d\alpha = \frac{1}{2}\varphi_i q_i$$

Доказательство:

$$W = \iiint\limits_V \frac{\vec{E}\vec{D}}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \iiint\limits_V (-\nabla \overset{\downarrow}{\varphi})\vec{D} dV =$$

$$\text{Примемени}м:(\nabla\left(\varphi\vec{D}\right)) = \vec{D}\nabla\varphi + \varphi\nabla\vec{D}$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\iiint\limits_V \nabla\left(\varphi\vec{D}\right) dV + \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_V \varphi\underset{\to 0}{\nabla\vec{D}} dV =$$

$$= \sum_i \oiint\limits_{S_i} \frac{1}{8\pi}\varphi\vec{D}d\vec{S} - \oiint\limits_{S_\infty} \varphi \underset{\to 0(\propto 1)}{\vec{D}} d\vec{S} = \frac{1}{8\pi}\sum_i \varphi_i \oiint\limits_{S_i} \vec{D}d\vec{S} = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2}\varphi_i q_i$$

Доказано.
Нелинейная среда: $\delta W = \varphi_i \delta q_i \neq> W = \frac{1}{2}\varphi_i dq_i$
В предыдущем пункте всюду меняем:

$$W = \delta W, q_i \to \delta q_i, \vec{D} = \delta\vec{D}$$

$$\delta W = \iiint \frac{\vec{E}\delta\vec{D}}{8\pi} dV$$

20. Электрический ток, дрейфовая скорость, подвижность. Объемная и поверхностная плотность тока. Электропроводность. Закон Ома.

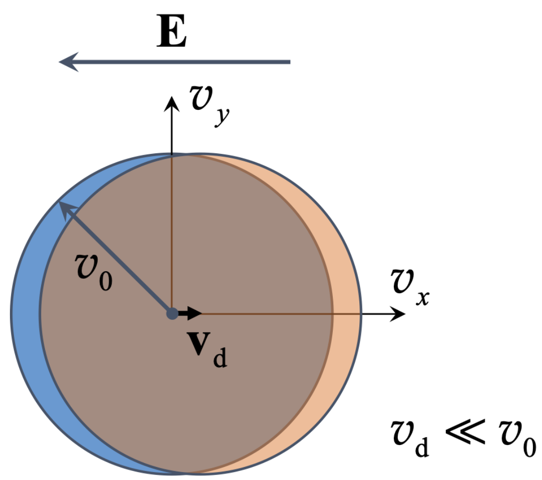
Электрический ток, дрейфовая скорость, подвижность

Скорость Ферми в Me(metal?):

$$\upsilon_F \sim 10^6 \text{ м/с}$$

$$\frac{4}{3}\pi\upsilon_F^3 \propto n$$

Пространство скоростей квазиэлектронов(?):



При $\vec{E}=0$, то $<\vec{v}>=0$
При конченом малом $\vec{E}$, то $<\vec{v}>=<\vec{v_d}>$

$$\vec{v}=\vec{v_0}+\frac{\vec{E}e}{m}t$$

$$<\vec{v}>=\underbrace{<\vec{v_0}>}_{\to 0}+\frac{\vec{E}e}{m}<t>$$

Где $<t>=\tau-$ время релаксации импульса.
Релаксация импульса:

$$<\vec{v}>=\frac{\vec{E}e}{m}\tau=\vec{v_d}\Rightarrow\frac{e\tau}{m}\vec{E}=\vec{v_d}$$

Или

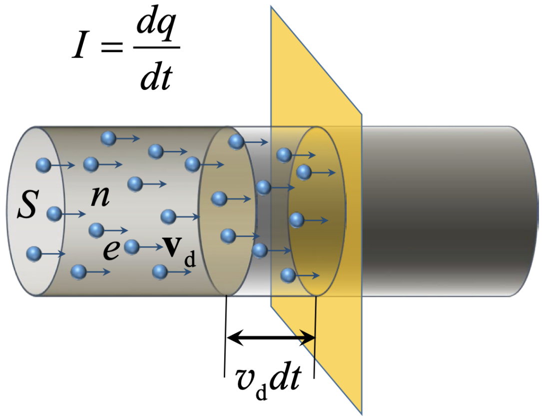
$$\vec{v_d}=\mu\vec{E}$$

где $\mu=\frac{e\tau}{m}-$*подвижность носителей заряда.*

Объемная и поверхностная плотность тока

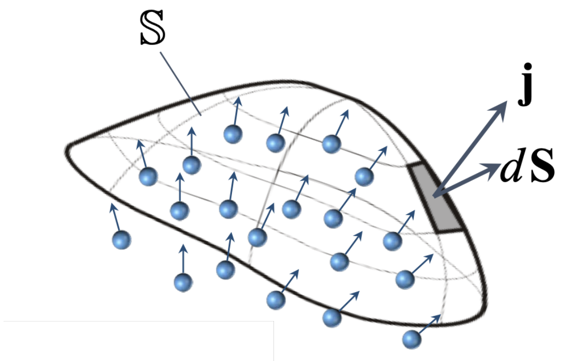
Ток-это заряд в единицу времени.

Ток в проводе:



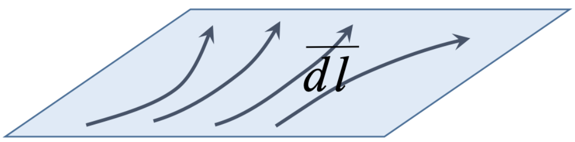
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{env\,dt \cdot S_0}{dt} = ne\,\vec{v} \cdot \vec{S}$$

Электрический ток через $\vec{S}$:



$$\begin{array}{l|l} I \overset{df}{=} \iint\limits_S \vec{j} d\vec{S} & \Rightarrow \vec{j} = ne\vec{v}_d \\ I = \iint\limits_S ne\vec{v}_d d\vec{S} & \vec{j} = \rho\vec{v}_d \end{array}$$

Ток по поверхности:



$dI = idl$, где i – поверхностная плотность тока.

Электропроводность

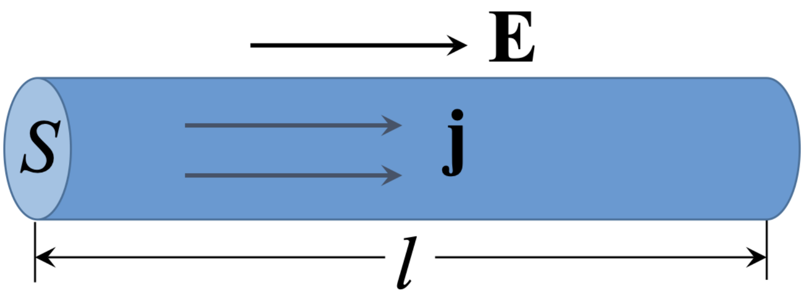
$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \text{ где } \sigma - \textit{электропровдность(проводимость).}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{j} = ne\vec{v_d} \\ \vec{v_d} = \frac{e\tau}{m}\vec{E} = \mu\vec{E} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\sigma = ne\mu = \frac{ne^2\tau}{m}}$$

$$\sigma = ne\mu = \frac{ne^2\tau}{m} - \textit{формула Пауля Друде.}$$

Закон Ома

Закон Ома в дифференциальной форме: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$



$$jV = \sigma EV$$

$$jSl = \sigma ElS \Rightarrow I \cdot l = \sigma US \Rightarrow U = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}I$$

Со школы:$U = \rho\frac{l}{S}I$,

$$\rho = \frac{1}{\sigma} - \text{удельное сопротивление.}$$

21. Закон сохранения заряда. Уравнение непрерывности. Закон Джоуля-Ленца.

Закон сохранения заряда

Заряд:

1. Заряд является величиной инвариантной относительно переходов в различные СО;
2. Величина заряда не зависит от скорости частицы;
3. Ни в каких физических процессах Σ количества заряда не меняется.

Уравнение непрерывности

Закон сохранения заряда:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dq}{dt} = -I \\ I = \oiint\limits_{\delta V} \vec{j} d\vec{S} \\ q = \iiint\limits_{V} \rho dV \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow \iiint\limits_{V} \frac{d\rho}{dq} dV + \oiint\limits_{\delta V} \vec{j} d\vec{S} = 0 \\ \iiint\limits_{V} \left(\frac{d\rho}{dq} + \mathrm{div}\vec{j} \right) dV = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{d\rho}{dq} + \mathrm{div}\vec{j} = 0} \\ \qquad\quad \forall V \end{array}$$

Где ρ—плотность заряда, $\vec{j}$—плотность потока заряда.

Если процесс стационарный, при котором токи и зардя не меняются со временем, то:

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0$$

Закон Джоуля-Ленца

$$\frac{d\check{Q}}{dV} =< \vec{F}\vec{v} > n = e\vec{E} < \vec{v} > n = \vec{j}\vec{E} (\vec{j} = ne < \vec{v} >)$$

22. Уравнения постоянного тока. Граничные условия.

Уравнения постоянного тока

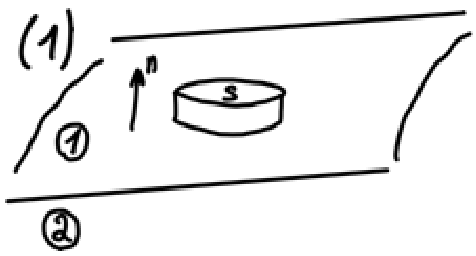
$$\boxed{\text{Требуется помощь для коректного ответа на вопрос!}}$$

$$I = \frac{U}{R}$$

Граничные условия

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div}\vec{j} = 0 \quad (1) \\ \left.\begin{array}{l} \vec{j} = \sigma\vec{E} \\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \operatorname{rot}\frac{\vec{j}}{\sigma} = 0 \quad (2) \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \Rightarrow \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{j}dV = \oiint\limits_{\delta V}\vec{j}d\vec{S} = 0 \quad (1') \\ (2) \Rightarrow \iint\limits_S \operatorname{rot}\frac{\vec{j}}{\sigma}dS = \oint\limits_{\delta S}\frac{\vec{j}}{\sigma}d\vec{l} = 0 \quad (2') \end{array}$$

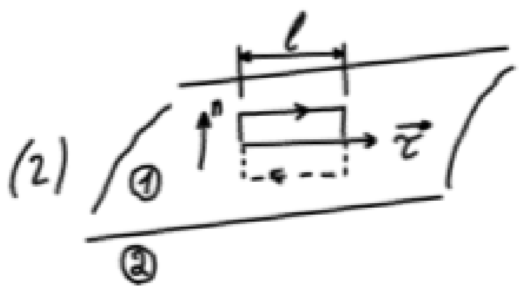
Нормальная состовляющая



$$(1') = j_{1n}|S - j_{2n}|S = 0 \Rightarrow j_{1n} = j_{2n}$$

$$\boxed{j_n - \text{непр.}}$$

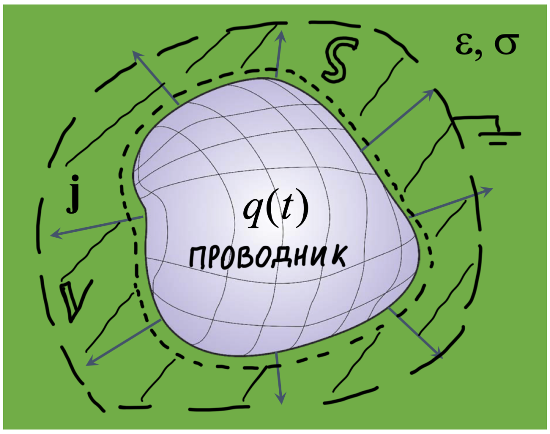
Тангенсальная состовляющая



$$(2') \Longrightarrow \frac{j_{1\tau}}{\sigma_1}\bigg| l - \frac{j_{2\tau}}{\sigma_2}\bigg| l = 0 \Rightarrow \frac{j_{1\tau}|}{\sigma_1} = \frac{j_{2\tau}|}{\sigma_2}$$

$$\boxed{\frac{j_\tau}{\sigma} - \text{непр.}}$$

23. Максвелловская релаксация зарядов в среде.



Где V−обьем занятый однородной средой.
По условию:
$\vec{j} = \sigma \vec{E}$
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
Уравнение непрерывности в обьеме V:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{j} = -\mathrm{div}\sigma\vec{E} = -\sigma\mathrm{div}\vec{E} = -\sigma\mathrm{div}\frac{\vec{D}}{\varepsilon} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathrm{div}\vec{D} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}4\pi\rho$$

Получили уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho}{\tau}, \text{ где } \tau := \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$$

В интегральной форме:

$$\frac{dq}{dt} = -I = -\oiint_S \vec{j}d\vec{S} = -\oiint_S \sigma\vec{E}d\vec{S} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\oiint_S \vec{D}d\vec{S} = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}q$$

Уравнение релаксации: $\boxed{\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{\tau}}$, где $\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$.

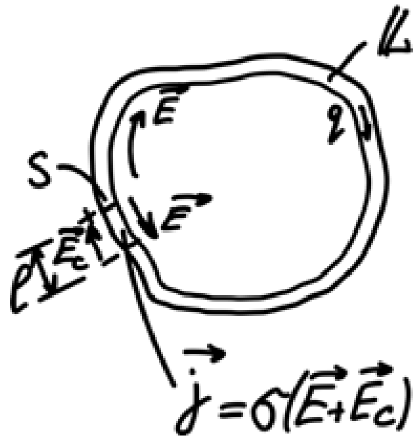
Решение: $q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$.

24. Метод конформных отображений для расчёта сопротивления тонких плёнок произвольной формы.

Требуется стороная помощь, для нахождения качественного ответа!
Возможно смена данной темы на тему про диод!

25. Электродвижущая сила. Электрические цепи. Законы Кирхгофа.

Электродвижущая сила



$\vec{F}$—стороняя сила, действующая на единичный заряд.
Сторонее "электрическое"поле $\vec{E}_c = \frac{\vec{F}_c}{q}$.

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_c = q(\vec{E} + \vec{E}_c)$$

$$\oint\limits_L \vec{F} d\vec{l} = q\left(\oint\limits_L \underbrace{\vec{E} d\vec{l}}_{\to 0} + \oint\limits_L \vec{E}_c d\vec{l}\right) = q\oint\limits_L \vec{E}_c d\vec{l}$$

$$-jV = \sigma V(E - E_c) \Rightarrow -jSl = \sigma S(El - E_c l)$$

$$\left.\begin{array}{l} -jSl = \sigma S(El - E_c l) \\ \varepsilon \stackrel{df}{=} \oint\limits_L \vec{E}_c d\vec{l} \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow -Il = \sigma S(U - \varepsilon) \\ U = -\frac{q}{\sigma}\frac{l}{S} I + \varepsilon \end{array}$$

Напоминание:$\frac{q}{\sigma} = \rho, \rho\frac{l}{S} = r$—внутрение сопротивление источника.

Итог: $\boxed{U = \varepsilon - Ir}$

Электрические цепи и законы Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа (закон токов):

$$\sum_i I_i = 0,$$

где:

- I_i — сила тока, текущего в узел (положительное значение для входящих токов и отрицательное для выходящих).

Физический смысл: Сумма токов, входящих в узел электрической цепи, равна сумме токов, выходящих из него. Это выражение закона сохранения заряда.

Второй закон Кирхгофа (закон напряжений):

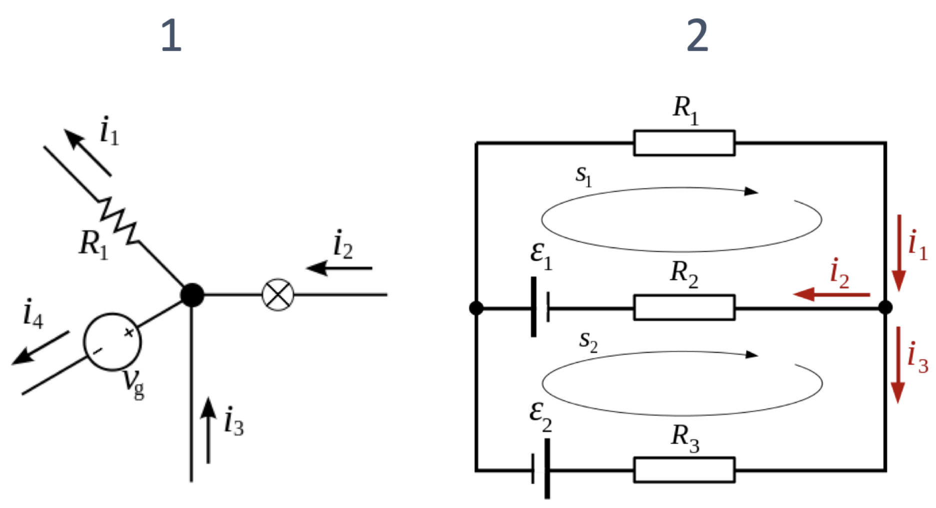
$$\sum_k \mathcal{E}_k - \sum_j I_j R_j = 0,$$

где:

- $\mathcal{E}_k$ — *электродвижущая сила (ЭДС)* источников в контуре, измеряется в вольтах (В);
- I_j — *сила тока* в ветви, измеряется в амперах (А);
- R_j — *сопротивление* элементов в контуре, измеряется в омах (Ω).

Физический смысл: Алгебраическая сумма ЭДС и падений напряжений на всех элементах любого замкнутого контура электрической цепи равна нулю. Это следствие закона сохранения энергии.

Пример применения:



1. Для узла: Если три тока подходят к узлу, а два выходят, то:

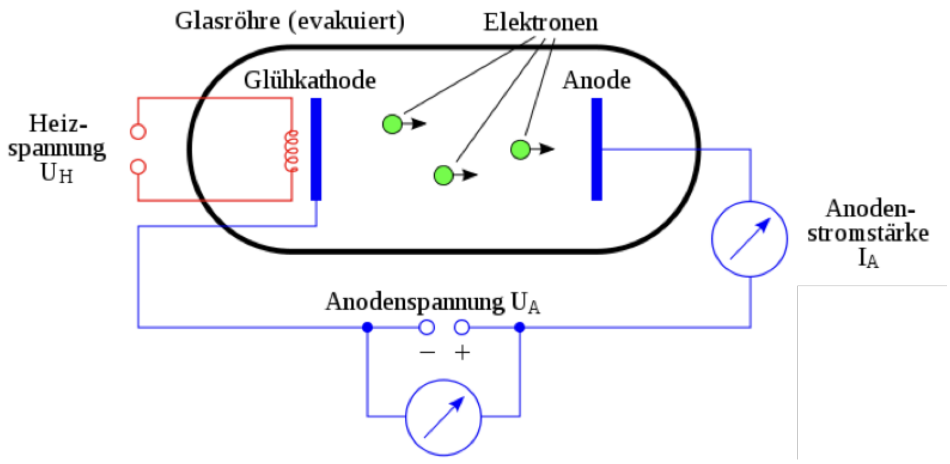
$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

2. *Для замкнутого контура:* Для цепи с ЭДС $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, сопротивлениями R_1, R_2, R_3, и токами I_1, I_2, I_3:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - I_1R_1 - I_2R_2 - I_3R_3 = 0.$$

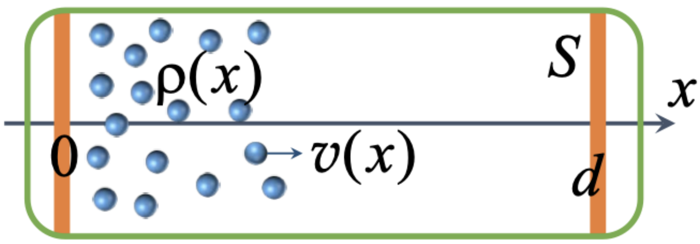
26. Ток в вакууме. Закон «трёх вторых».

Вакуумный диод:



Термоэлекронная эмисия -из нагретого электрода вылетают электроны.

Режим насыщения-при больших напряжениях электрон эмисировал и тут же его прятнуло к положительному электроду.



$$\Delta\varphi = -4\pi\rho = -4\pi ne, \text{ где } n \text{ плотность электронов, зависит от x}$$

$$I = jS.\text{Из уравнения непрерывности: } \left(\overset{0\ (\text{стационарный режим})}{\cancel{\frac{\partial\rho}{\partial t}}} + \operatorname{div}\vec{j}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0 \text{ ,т.е } j = \text{const} = \frac{I}{S}$$

$$\begin{cases} \varphi'' = -4\pi ne \\ \text{const} = \frac{I}{S} = nev \\ \frac{mv^2}{2} = e\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \sqrt{\frac{2e}{m}}\varphi^{\frac{1}{2}} \\ ne = -\frac{I}{S}\frac{1}{v} \end{cases}$$

$$\text{Гран.условия:}1)\varphi'|_{x=0} = 0; 2)\varphi|_{x=0} = 0; 3)\varphi|_{x=d} = U.$$

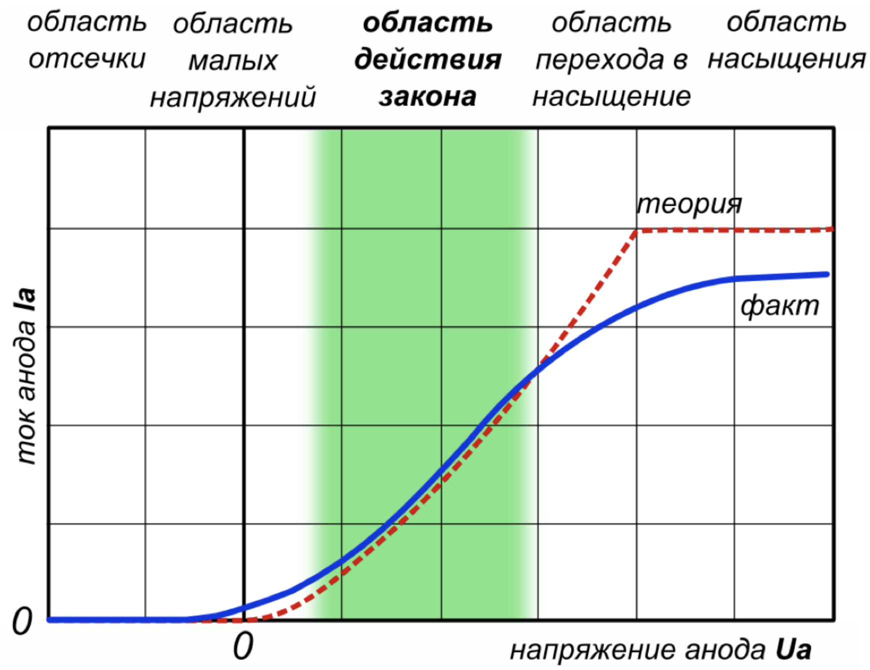
$$\begin{array}{l|l|l} v = \sqrt{\frac{2e}{m}}\varphi^{\frac{1}{2}} & \Rightarrow ne = \sqrt{\frac{m}{2e}}\frac{-I}{S} & \Rightarrow \varphi'\varphi'' = 4\pi\sqrt{\frac{m}{2e}}\varphi^{\frac{1}{2}}\frac{I}{S}\varphi^{-\frac{1}{2}}\varphi' \\ ne = -\frac{I}{S}\frac{1}{v} & \varphi'' = -4\pi en & \frac{1}{2}(\varphi'^2)' = 4\pi\sqrt{\frac{m}{2e}}(\varphi^{\frac{1}{2}})' \cdot 2 \end{array}$$

$$\varphi'^2 = \underbrace{16\pi\sqrt{\frac{m}{2e}\frac{I}{S}}}_{a}\varphi^{\frac{1}{2}} + \cancel{C}^{0(\text{Гран.услов.})}$$

$$\varphi' = \sqrt{a}\varphi^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \sqrt{a}\varphi^{\frac{1}{4}}$$

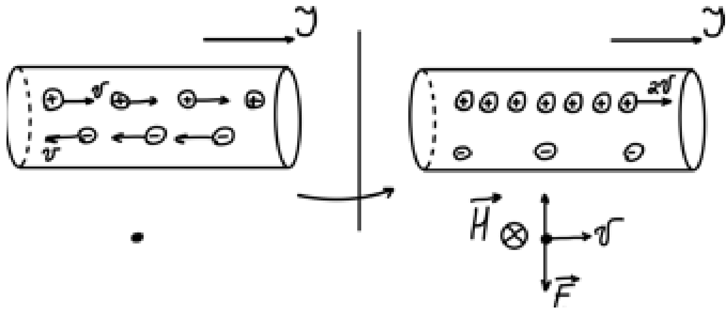
$$\frac{4}{3}\varphi^{\frac{1}{4}} = \sqrt{a}x + \cancel{C}^{0(\text{Гран.услов.})}$$

$$\frac{4}{3}U^{\frac{3}{4}} = \sqrt[1]{a}d \Rightarrow a = \frac{16}{9}\frac{1}{d^2}U^{\frac{3}{2}} = 16\pi\sqrt{\frac{m}{2e}\frac{I}{S}} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m}\frac{S}{d^2}}U^{\frac{3}{2}}}$$



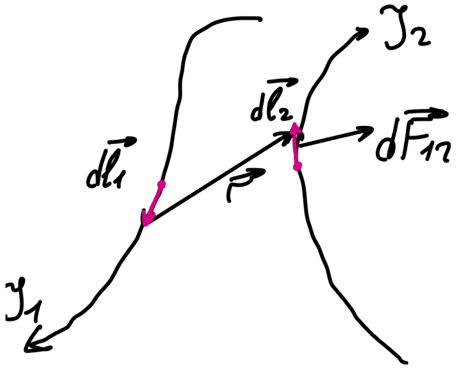
27. Магнитное поле. Сила Ампера. Закон Био – Савара. Сила Лоренца. Движение заряда в магнитном поле. Дрейф в скрещенных полях.

Магнитное поле



Известно что между проводниками, по которым протекают электрические токи, возникают силы взаимодействия. Точно так же, как в электростатике, где введение электрического поля позволяет удобным образом описать взаимодействие статических зарядов, здесь полезно ввести понятие *магнитного поля.*

Магнитное поле в вакууме:



$$d\vec{F_{12}} = \frac{I_1 I_2}{c^2}\frac{[d\vec{l_2} \times [d\vec{l_1} \times \vec{r}]]}{r_3}$$

Постулируем, но понимаем, что: $dF_{12} \neq dF_{21}$

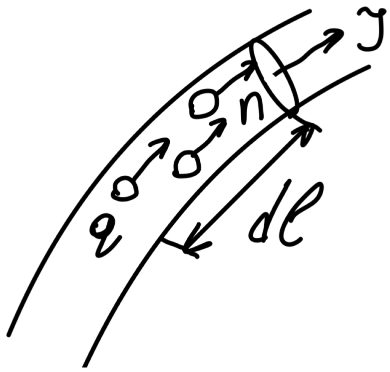
Сила Ампера и Закон Био – Савара

$$dF_{12} = \frac{I_2}{c}[d\vec{l} \times \vec{H}] - \textit{сила Ампера}$$

Где $\vec{H}$:

$$dH = \frac{I}{c}\frac{[dl \times r]}{r^3} - \textit{закон Био-Савара}$$

Сила Лоренца



Сила Лоренца-это сила, которая дейтвует на заряд со стороны магнтиного поля.

$$dF = \frac{I}{c}[d\vec{l} \times \vec{H}], \vec{j} = qn\vec{v}$$

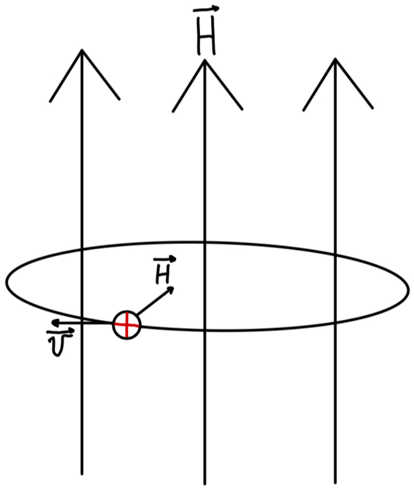
$$Id\vec{l} = \vec{j}dV \Rightarrow Idl = jSdl$$

$$dF = \frac{1}{c}[Id\vec{l} \times \vec{H}] = \frac{1}{c}[\vec{j}dv \times \vec{H}] = \frac{1}{c}[dV \cdot nq\vec{v} \times \vec{H}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{для единичного заряда: } \vec{F} = \frac{q}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]$$

Если есть $\vec{H}$ и $\vec{E}$, то: $\boxed{\vec{F} = q\left[\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]\right]}$

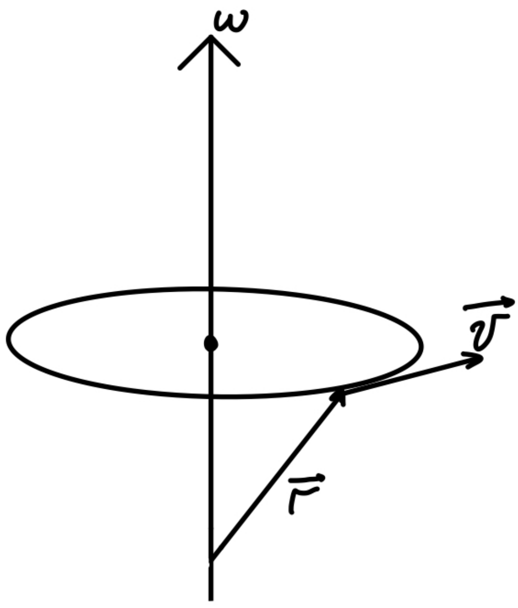
Движение заряда в магнитном поле



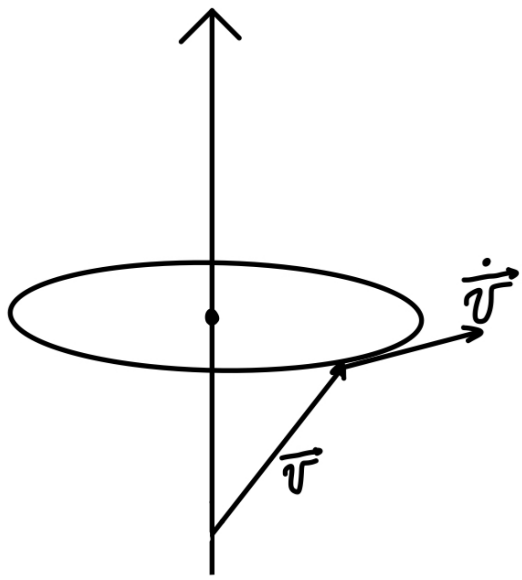
$$\vec{F} = \gamma m \dot{\vec{v}} = \frac{q}{c}[\vec{v} \times \vec{H}] \Rightarrow \dot{\vec{v}} = \left[\left(-\frac{q\vec{H}}{\gamma m c} \right) \times \vec{v} \right]$$

$$\vec{\omega_c} = -\frac{q\vec{H}}{\gamma m c}$$

$\vec{v} \perp \vec{B}$



$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$

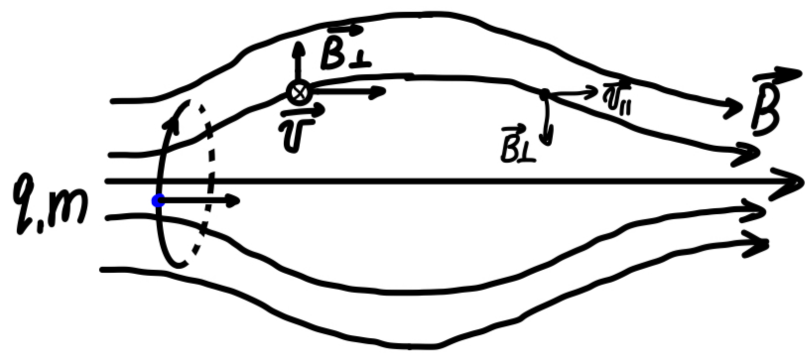


$\dot{\vec{v}} = [\vec{\omega_c} \times \vec{v}]$

При малых скоростях: $\omega_c = \frac{qH}{mc}$.

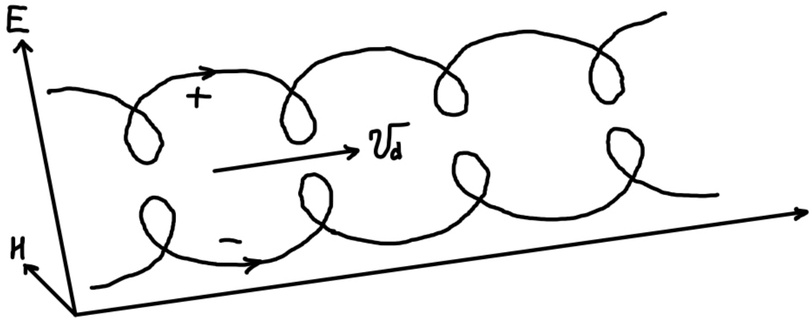
$$\omega_c r = v_0 \Rightarrow r = \frac{v_0}{\omega_c}$$

Неоднородное магнитное поле:



В магнитном поле: $\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow$ статичексое магнитное поле не совершает работу.

Дрейф в скрещенных полях



$$\vec{v} = \vec{\mathcal{U}} + \vec{\omega}$$

Дрейфовая скорость, которая не зависит от $t - \vec{\omega}$;

Движение по окружнсоти + движение вдоль $\vec{H}$ с постоянной скоростью $- \vec{\mathcal{U}}$.

$$m\dot{\vec{v}} = q\left(\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]\right)$$

Пусть $\mathcal{U}$ есть решение уравнения без $\vec{E} : m\dot{\vec{\mathcal{U}}} = \frac{q}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]$

$$\cancel{m\dot{\vec{\mathcal{U}}}} + m\dot{\vec{\omega}} = q\vec{E} + \cancel{\frac{q}{c}[\vec{\mathcal{U}} \times \vec{H}]} + \frac{q}{c}[\vec{\omega} \times \vec{H}]$$

Предпологаем, что $\vec{\omega} = \text{const}$ и $\vec{\omega} \perp \vec{H}$, тогда $\dot{\vec{\omega}} = 0$:

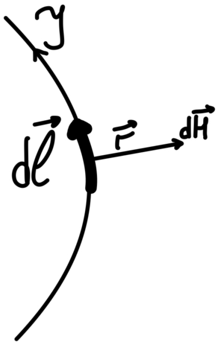
$$q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{\omega} \times \vec{H}] = 0 \Rightarrow [\vec{H} \times \vec{E}] + \frac{1}{c}[\vec{H} \times [\vec{\omega} \times \vec{H}]] = 0$$

$$c[\vec{H} \times \vec{E}] + \vec{\omega}H^2 + H^2(\vec{\omega}\vec{H}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \frac{c[\vec{E} \times \vec{H}]}{H^2}} \; E < H$$

Заряд движется вдоль эквипотенциали.

28. Дивергенция магнитного поля. Вектор-потенциал. Кулоновская калибровка.

Дивергенция магнитного поля



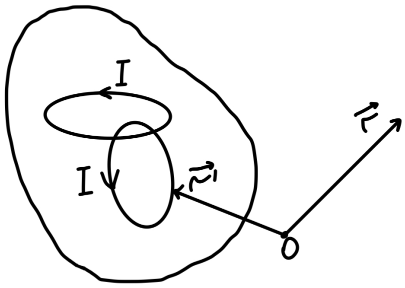
$d\vec{H} = \frac{I}{c}\left[d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}\right]$ Надо доказать, что: $\mathrm{div}\vec{H} = 0$
Принцип суперпозиции: $\vec{H} = \int d\vec{H}$
Достаточно доказать, что $\mathrm{div}d\vec{H}$, так как div−линеный оператор.

$$d\vec{H} = \frac{I}{c}\left[d\vec{l} \times \left(-\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right]$$

Напомним:

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\boldsymbol{\nabla}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mathrm{div}d\vec{H} = \frac{I}{c}\boldsymbol{\nabla}\left[d\vec{l} \times \left(-\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right] = \frac{I}{c}\left(d\vec{l}\underbrace{\left[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right]}_{=0}\right) = 0$$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{H} = \sum_i \frac{I_i}{c}\int\left[d\vec{r'} \times \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\right] \\ d\vec{l} \equiv d\vec{r'} \\ Id\vec{l} = \vec{j}dV' \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} \Rightarrow \text{ т.о } \vec{H} = \iiint\limits_V \frac{1}{c}\frac{[\vec{j}\times(\vec{r}-\vec{r'})]}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}dV' \\ \vec{H} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \left[\vec{j} \times \left(-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)\right]dV' \end{array}\right.$$

Напомним:

$$\boldsymbol{\nabla} := \frac{\partial}{\partial\vec{r}}; \boldsymbol{\nabla}' := \frac{\partial}{\partial\vec{r'}}$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \left(\boldsymbol{\nabla}\left[\vec{j}\times\boldsymbol{\nabla}\left(-\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)\right]\right)dV' = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \left(\vec{j}\,\underbrace{\left[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right]}_{=0}\right)dV'$$

Вектор-потенциал

$\mathrm{div}\vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H}$ можно подставить в виде rot некоторого вектора.

$$\vec{H} \overset{df}{=} \mathrm{rot}\vec{A}$$

Определить вектор поля одним только rot нельзя.

$$\left.\begin{cases}\mathrm{div}\vec{A}_1 = \mathrm{div}\vec{A}_2 & \vec{A} = \vec{A}_1 - \vec{A}_2 \\ \mathrm{rot}\vec{A}_1 = \mathrm{rot}\vec{A}_2 & \end{cases}\right| \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{div}\vec{A} = 0 \\ \mathrm{rot}\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{A} = \boldsymbol{\nabla}\varphi \\ \Delta\varphi = 0\end{cases}$$

Можно взять $\vec{A} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV'$(где V предыдущий объём)

Покажем, что $\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{H}$ и $\mathrm{div}\vec{A} = 0$:

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \left[\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right]dV' = \frac{1}{c}\iiint \left[\vec{j}\times\left(-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)\right]dV' = \vec{H} \quad \blacksquare$$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \boldsymbol{\nabla}\vec{j}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV' = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \vec{j}\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV'\boxed{=}$$

Уточнение:

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = -\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

$$\boxed{=} - \frac{1}{c}\iiint\limits_V \vec{j}(\vec{r'})\boldsymbol{\nabla}'\frac{\overset{\downarrow}{1}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV' = -\frac{1}{c}\iiint\limits_V \overset{\downarrow}{\vec{j}}(\vec{r'})\boldsymbol{\nabla}'\frac{\overset{\downarrow}{1}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV' +$$

$$+\frac{1}{c}\iiint\limits_V \overset{\downarrow}{\vec{j}}(\vec{r'})\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV'\boxed{=}$$

$$\boxed{=} -\frac{1}{c}\iiint\limits_V \operatorname{div}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\right)dV' + \frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\operatorname{div}(\cancelto{0}{\vec{j}(\vec{r'})})dV' \boxed{=}$$

$$\boxed{=} \underbrace{-\frac{1}{c} \oiint\limits_{\delta V}\frac{\cancelto{0}{\vec{j}(\vec{r'})}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dS'}_{\text{на границе нет токов}} + \underbrace{0}_{\text{по З.С.З}} = 0 \quad \blacksquare$$

Закон сохранения заряда:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0, \text{ стационарный случай } \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

Ротор магнитного тока:

$$(\overset{a}{\boldsymbol{\nabla}} \times [\overset{b}{\boldsymbol{\nabla}} \times \overset{c}{\vec{A}}]) \overset{bac-cab}{=} \boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{A}] - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\cdot\vec{A}$$

Вспомним $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}, \\ \text{где } \vec{A} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \end{array}\right| \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{H} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A}) = \operatorname{grad}(\cancelto{0}{\operatorname{div}\vec{A}}) - \Delta\vec{A} \boxed{=}$$

$$\boxed{=}\frac{1}{c}\iiint\limits_V \vec{j}(\vec{r'})\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV' = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \vec{j}(\vec{r'})4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'})dV' =$$

$$= \frac{4\pi}{c}\iiint\limits_V \vec{j}(\vec{r'})\delta(\vec{r}-\vec{r'})dV' = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})$$

$$\text{Итог: } \boxed{\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$

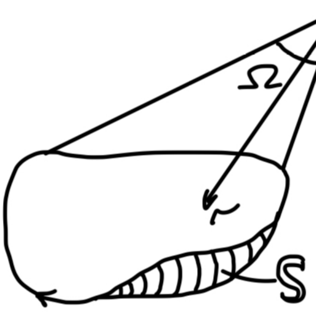
Кулоновская калибровка

Кулоновская калибровка — выбор векторного потенциала магнитного поля $\vec{A}$ с дополнительным условием

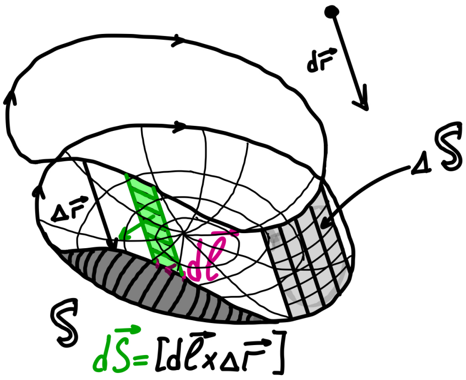
$$\operatorname{div}\vec{A} = 0$$

Эта калибровка применяется для рассмотрения нерелятивистских магнитостатических задач.

29. Скалярный потенциал магнитного поля.



$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$
$$\psi : \vec{H} = -\boldsymbol{\nabla}\psi$$
$$\psi = \frac{I}{\Omega}$$
$$\Omega = \iint\limits_S \frac{d\vec{S}}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



$$\Delta\Omega = (\boldsymbol{\nabla}\Omega)\Delta\vec{r}$$
$$\Omega = \iint\limits_S \frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{S}; \quad \Omega + \Delta\Omega = \iint\limits_{S+\Delta S} \frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{S};$$
$$\Delta\Omega = \iint\limits_{\Delta S} \frac{\vec{r}}{r^3} = \oint \left(\frac{\vec{r}}{r^3}[d\vec{l} \times \Delta\vec{r}]\right) =$$
$$= \Delta\vec{r} \oint \left[\frac{\vec{r}}{r^3} \times d\vec{l}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\Omega = \oint \left[\frac{\vec{r}}{r^3} \times d\vec{l}\right]$$

$$\vec{H} = \frac{I}{c}\oint \left[\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}\right] = -\frac{I}{c}\boldsymbol{\nabla}\psi$$

30. Поток и циркуляция магнитного поля. Дифференциальная и интегральная форма уравнений магнитостатики. Граничные условия.

Поток и циркуляция магнитного поля