

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный университет»

Физический факультет

Дисциплина: Электромагнетизм

Зимняя сессия

Приговор будет исполнен: 11.01.2025

*Я не несу ответственности за возможные ошибки или
некорректность предоставленных ответов на билеты.
Используйте их только как вспомогательный материал и
обязательно сверяйтесь с официальными источниками.*

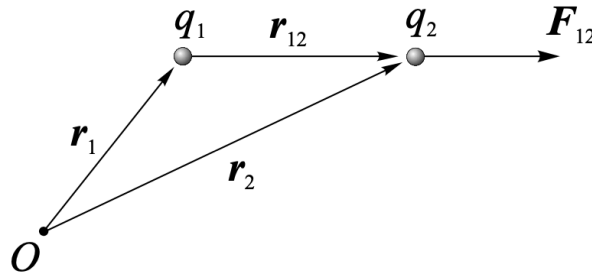
Ответы на вопросы билета

1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции. Поток электрического поля. Теорема Гаусса.

Закон Кулона

Это — экспериментально установленный закон силового взаимодействия двух точечных заряженных тел, неподвижных относительно рассматриваемой системы отсчета, согласно которому:

$$\vec{F}_k = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$



Введем понятие напряженности:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

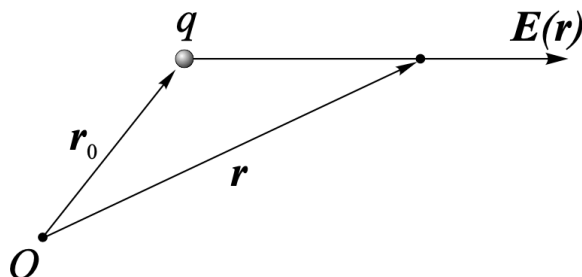
тогда силу Кулона можно переписать в виде:

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2)$$

Напряжённость электрического поля

В общем виде напряжённость имеет вид:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$



Принцип суперпозиции

Электрическое поле от системы зарядов равно сумме электрических полей от её составляющих:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Поток электрического поля

Если у нас имеется некоторая конечная поверхность S , то поток через эту поверхность вычисляется как поверхностный интеграл

$$\Phi = E_n dS$$

Теорема Гаусса

Теорема Гаусса: Поток вектора \vec{E} через любую замкнутую поверхность определяется суммарным зарядом Q , находящимся внутри этой поверхности, и равняется $4\pi Q$:

$$\oint_S E_n ds = 4\pi Q$$

2. Дивергенция электрического поля. Распределённый заряд. Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

Дивергенция электрического поля

Вспомним теорему Гаусса для потока \vec{E} через замкнутую площадь S

$$\oint_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi \rho dV$$

а по теореме Остроградского-Гаусса

$$\oint_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV$$

следует что для $\forall V$:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi \rho dV \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

Распределённый заряд

Объемная плотность заряда:

$$dq \stackrel{df}{=} \rho dV$$

Поверхностная плотность:

$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

Линейная плотность:

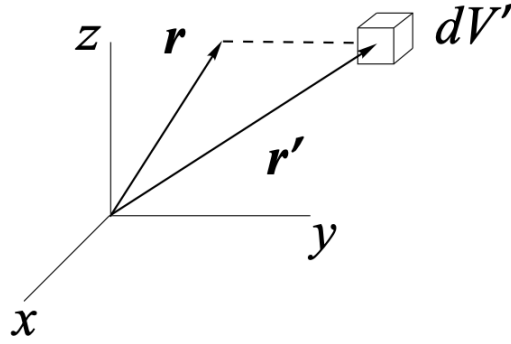
$$dq \stackrel{df}{=} \kappa dl$$

Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

В конечной области пространства с плотностью заряда $\rho(\vec{r})$, по принципу суперпозиции скалярный потенциал этих зарядов равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Представление потенциала в виде интеграла по объему, занятому зарядами, часто называют частным решением уравнения Пуассона.



Для задачи с точечными зарядами интегральная форма не подойдёт, перейдём к сумме. Введём функцию Дирака δ , она задается следующими условиями:

- 1) при всех $\vec{r} \neq 0$ $\delta(\vec{r}) = 0$;
- 2) в точке $\vec{r} = 0$ имеем $\delta(\vec{r}) = \infty$;
- 3) интеграл по всему пространству $\int \delta(\vec{r}) dV = 1$
- 4) $\int f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = f(\vec{r}_0)$

где $f(\vec{r})$ - произвольная непрерывная функция, \vec{r}_0 радиус-вектор некоторой фиксированной точки.

Объёмную плотность заряда расположенного в точке $\vec{r} = \vec{r}_0$ можно переписать:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

подставляем в предыдущую формулу

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

3. Циркуляция и ротор электрического поля. Теорема Стокса. Электрический потенциал. Работа электрического поля. Потенциал точечного заряда.

Циркуляция и ротор электрического поля

Циркуляция векторного поля \vec{E} вдоль контура L

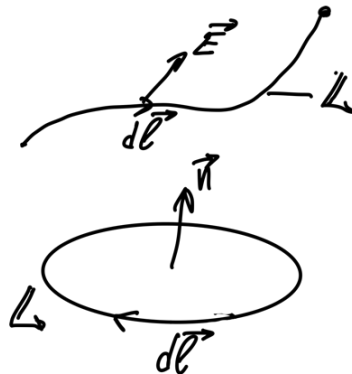
$$\int_L \vec{E} d\vec{l}$$

а по замкнутому контуру

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

или в дифференциальной форме

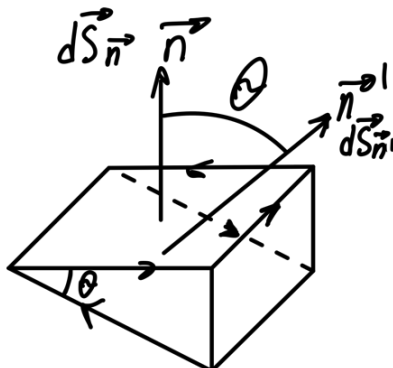
$$\text{rot} \vec{E} = 0$$



Как следствие из теоремы о циркуляции \vec{E} работа при перемещении заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории движения.

Теорема Стокса

$$\oint_{\delta S} \vec{E} d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}$$



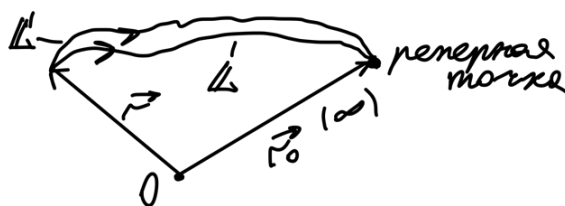
$$(\text{rot} \vec{E})_{\vec{n}'} = \frac{\text{rot} \vec{E}}{\frac{1}{\cos \theta}}$$

где $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{dS_{\vec{n}'}}{dS_{\vec{n}}}$, получим

$$(\text{rot} \vec{E})_{\vec{n}'} = \text{rot} \vec{E} \cdot \cos \theta$$

Электрический потенциал

Рассмотрим скалярное поле



$$\varphi(\vec{r}) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} d\vec{l}$$

Чтобы определение было корректным, нужно чтобы этот интеграл не зависел от формы L .

Доказательство:

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow \forall L \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

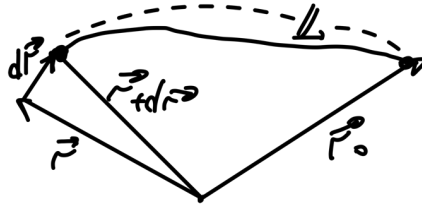
Запишем выражение при обходе $L - L'$ - сначала идем по контуру L , а потом обратно по контуру L' :

$$\oint_{L-L'} \vec{E} d\vec{l} = 0 = \oint_L \vec{E} d\vec{l} - \oint_{L'} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Такие поля называются потенциальными.

Доказано.

Еще свойства потенциала:



$$\varphi(\vec{r}) = \int \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} + \int_L \vec{E} d\vec{l}$$

и

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}_0) = \int_L \vec{E} d\vec{l}$$

отсюда получим

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}_0) - \varphi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

так же используем

$$d\varphi = d\vec{r} \nabla \varphi$$

отсюда получим

$$\forall d\vec{r}, \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = -\nabla \varphi d\vec{r} \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\nabla \varphi$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0 = -[\nabla \times \nabla \varphi]$$

Работа электрического поля

$$A = \int_L \vec{F} d\vec{l} = \int_L q \vec{E} d\vec{l} = q \left[\int_{r_1}^{r_0} \vec{E} d\vec{l} - \int_{r_2}^{r_1} \vec{E} d\vec{l} \right] = q(\varphi_2 - \varphi_1) = qU$$

Потенциал точечного заряда

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}$$

или в общем виде

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

4. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат.

Уравнение Лапласа

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

В сферической системе (r, θ, α) координат

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

В цилиндрической (r, α, z) координат

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат

Предположим, что в декартовых координатах переменные разделяются -это означает, что:

$$\varphi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\Delta \varphi = 0 \Rightarrow X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \Rightarrow Const_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\frac{X''}{X} = C \Rightarrow X'' = CX$$

$$(1) X(x) = \begin{cases} \text{при } C > 0, Ae^{\sqrt{C}x} \\ \text{при } C < 0, Ae^{\pm i\sqrt{C}x} \\ \text{при } C = 0, Ax + B \end{cases}$$

При $\rho \neq 0$. Допустим, что

$$\rho(x, y, z) = \rho \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \text{ где } X, Y, Z \text{ функции вида (1)}$$

Тогда

$$\varphi = A \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$A(X''YZ + XY''Z + XYZ'') = -4\pi\rho_0 XYZ \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

Итого

$$\rho = p_1 + p_2, \Delta\varphi = -4\pi\rho, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2;$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = -4\pi\rho_1 \\ \Delta\varphi_2 = -4\pi\rho_2 \end{cases}$$

5. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат

Пусть $\varphi(r, \theta, \alpha) = R(r) \cdot Y(\theta)$

$$\Delta\varphi(r, \theta, \alpha) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right)}_{=l(l+1)} + \underbrace{\frac{1}{Y \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right)}_{=-l(l+1)} = 0$$

При $R(r) \propto r^{l'}$
или $R(r) \propto \frac{1}{r^{l'+1}}$

$$\frac{1}{R} (r^2 R')' = C$$

ищем решение в виде $R(r) \propto r^l$

$$\frac{1}{R} (r^2 R')' = \underbrace{l}_{=-(l'+1)} \cdot \underbrace{(l+1)}_{=(-l'-1+1)=(l'+1)l'}$$

При этом $R(r) \propto \frac{1}{r^{l'+1}}$ удовлетвор. уравнению с той же C
(замена $l' = -(l+1)$)

6. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат

Пусть $\varphi(r, \alpha) = \varphi(r, \alpha)$. Кроме того $\varphi(r, \alpha) = R(r)Y(\alpha)$ (то есть переменные разделяются)

$$Y(\alpha) = e^{\pm im\alpha}$$

$$\varphi(r, \alpha) = R(r) \left(\sum_i e^{im\alpha} \right), \text{ где } m \in Z$$

Пусть внутри, рассматриваемой области нет зарядов $\Rightarrow \Delta\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 \Rightarrow e^{im\alpha} \cdot \frac{1}{r} (rR')' + R \cdot \frac{1}{r^2} (-m^2 e^{im\alpha}) = 0 \Rightarrow \frac{r(rR')'}{R} = m^2$$

Ищем решение в виде $R(r) \propto r^l$:

$$l^2 = m^2, \text{ т.е. } l = \pm m. \text{ Т.е. } \varphi(r, \alpha) = \left(\frac{C_1}{r^m} + C_2 r^m \right) e^{\pm im\alpha}$$

7. Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля. Поверхностная плотность зарядов. Поле вблизи поверхности металлов. Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал.

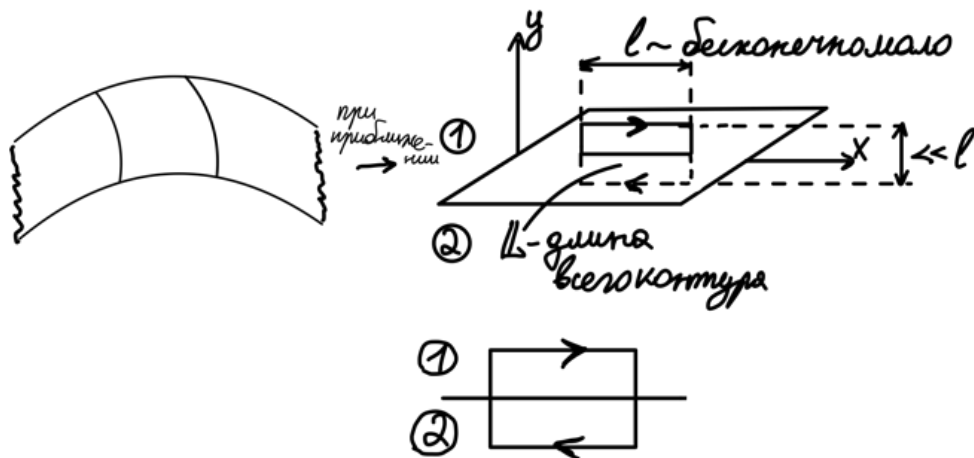
Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля

Тангенциальная компонента

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E} d\vec{l} \leftarrow \text{интегральная форма}$$

По теореме Стокса

$$0 = \iint_{(\forall)S} \text{rot} \vec{E} dS = \oint_{(\forall)S} \vec{E} d\vec{l}$$



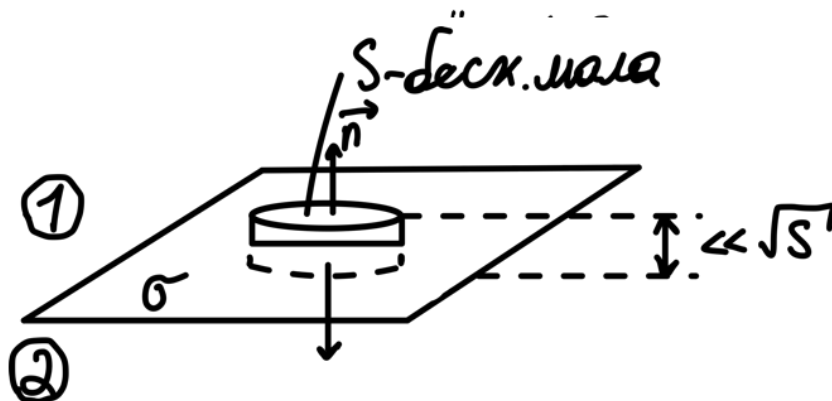
$$\oint \vec{E} d\vec{l} = E_x|_1 \cdot l - E_x|_2 \cdot l \Rightarrow E_x|_1 = E_x|_2$$

или же

$$E_\tau|_1 = E_\tau|_2$$

Нормальная компонента

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho &\Rightarrow \oint\oint_{(\forall)S} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q \Rightarrow \\ &\Rightarrow \iiint_{(\forall)V} \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi \iiint_{(\forall)V} \rho dV \Rightarrow \oint\oint_{(\forall)\delta S} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q \end{aligned}$$



$$E_{1n}| \cdot S - E_{2n}| \cdot S = 4\pi Q = 4\pi\rho S$$

или же

$$E_{1n}| - E_{2n}| = 4\pi\rho$$

Поверхностная плотность зарядов(???)

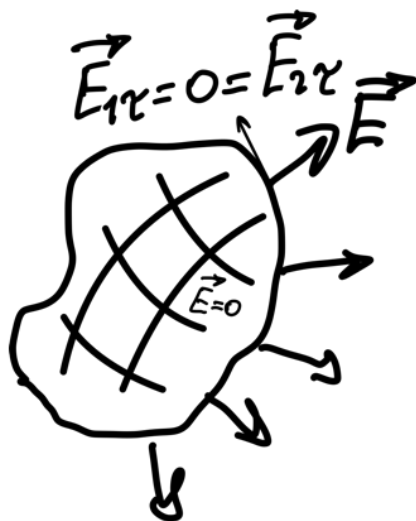
$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

Поле вблизи поверхности металлов

Надо доказать что поле вблизи металлов равно

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Рассмотрим тангенсальную и нормальную компоненту поля \vec{E} на границе металла



Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника $E_{1n} = 0$ отсюда

$$E_{2n} = 4\pi\sigma$$

Снаружи металла поле $E_{2\tau} = 0$ и из граничных условий

$$E_{1\tau} = 0$$

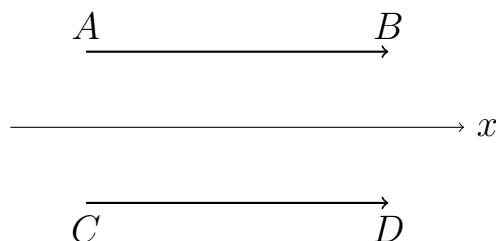
Итоговое поле равно

$$\vec{E}_{2n} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Что и требовалось доказать.

Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал

Можно рассмотреть две точки А и В с одной стороны поверхности и С, D с другой стороны. Найдем напряжение между парами этих точек:



Из граничных условий, что E_τ — непрерывно следует, что:

$$E_{AB}| = E_{CD}|$$

потенциал можно выразить через напряженность так:

$$E = -\text{grad}\varphi$$

отсюда получаем, что $\varphi_{AB}| = \varphi_{CD}| \Rightarrow \varphi|$ — непрерывно

8. Проводники в электрическом поле. Теорема единственности.

Проводники в электрическом поле

Очень похоже (скорее всего есть одно и то же) на вопрос: поле вблизи поверхности металлов, ну рассмотрим повторно?



Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника $E_i \equiv 0$ отсюда плотность заряда:

$$\rho_i = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E}_i \equiv 0$$

В этой связи говорят, что проводник квазинейтрален. Таким образом, заряды на проводнике могут размещаться только на его поверхности, причем поверхностная плотность зарядов связана с полем $\operatorname{vec} E$ вне проводника через граничное условие для E_n .

Если пространство вне проводника свободно от зарядов, то здесь поле $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ и φ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Из граничных условий мы получаем что:

$$\vec{E}_n = 4\pi\sigma, \quad \vec{E}_\tau = 0.$$

Заметим, что поле подходит к поверхности проводника по нормали, т.е. поверхность проводника является эквипотенциалью. Это естественно, так как в проводнике потенциал постоянен из-за $\vec{E}_i = 0$

Теорема единственности

Условия теоремы:

- 1) На каждом проводнике задан либо потенциал, либо заряд,
 - 2) В V нету зарядов;
- $\Rightarrow \exists$ единственное решение уравнения Пуассона вида:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

Доказательство

Пусть $\vec{E}_1 = -\nabla \varphi_1$ и $\vec{E}_2 = -\nabla \varphi_2$. Достаточно доказать, что:

$$\iiint_V |\vec{E}_2(\vec{r}) - \vec{E}_1(\vec{r})|^2 dV = 0$$

$$\vec{E} := \vec{E}_2 - \vec{E}_1; \quad \varphi := \varphi_2 - \varphi_1; \quad \vec{E} = -\nabla \varphi_2 + \nabla \varphi_1 = -\nabla \varphi$$

Всюду в V $\Delta \varphi_1 = 0$ и $\Delta \varphi_2 = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0$

Рассмотрим выражение: $\nabla(\varphi \nabla \varphi) = (\nabla \varphi)^2 + \varphi \nabla \varphi \xrightarrow{\rightarrow 0} (\nabla \varphi)^2$

$$\begin{aligned} \iiint_V |\vec{E}_2(\vec{r}) - \vec{E}_1(\vec{r})|^2 dV &= \iiint_V |\vec{E}|^2 dV = \iiint_V (\nabla \varphi)^2 dV = \iiint_V \nabla(\varphi \nabla \varphi) dV = \\ &= \iiint_V \operatorname{div}(\varphi \nabla \varphi) dV = \oint_{S_\infty} \varphi \nabla \varphi d\vec{S} - \sum_i \oint_{S_i} \varphi \nabla \varphi d\vec{S} = \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} (-\nabla \varphi) d\vec{S} = \\ &\quad \rightarrow 0 (\propto \frac{1}{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) \oint_{S_i} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) d\vec{S} &= \sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) \left[\oint_{S_i} \vec{E}_2 d\vec{S} - \oint_{S_i} \vec{E}_1 d\vec{S} \right] = \\ &= 4\pi \sum_i (\varphi_{2i} - \varphi_{1i}) (q_{2i} - q_{1i}) = 0\end{aligned}$$

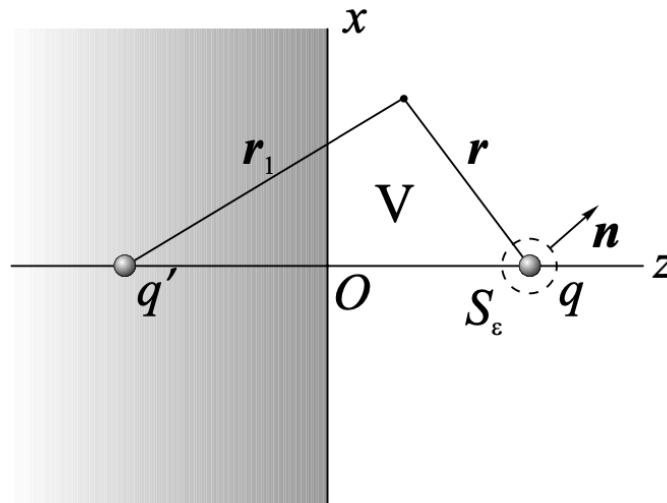
По условию теоремы либо (1) = 0, либо (2)=0

Доказано

9. Метод изображения для решения задач электростатики на примере плоской и сферической границ раздела проводника и непроводящего пространства.

Плоская граница

Точечный заряд q , находящийся на расстоянии h от проводящего полупространства. Определить поле в свободном полупространстве и на этой основе — плотность зарядов, индуцированных зарядом q на поверхности проводника.



В проводящем полупространстве поле равно нулю, постоянный потенциал можно принять за ноль, будем искать поле только в области $z > 0$ с выкинутой точкой. Искомое поле удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0$$

и граничным условиям

$$\varphi|_{z=0} = 0, \quad \oint_{S_\varepsilon} E_n dS = 4\pi Q$$

где S_ε сфера малого радиуса с центром в точке расположения заряда q

В проводящем полупространстве будет наводиться заряд $q' = -q$. Тогда потенциал и электрическое поле, созданные зарядом q фиктивным зарядом q' , в правом полупространстве создают искомое поле:

$$\varphi = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_1}$$

Действительно, эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в области $z > 0$ как потенциал двух точечных зарядов, лежащих вне области. Во-вторых, $\varphi|_{z=0} = 0$, так как для точек плоскости r и r_1 равны. В-третьих, поле, созданное зарядом q' , через поверхность S_ε создает поток, равный нулю (по теореме Гаусса), а поле от точечного заряда q обеспечивает выполнение соответствующего граничного условия.

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{|\vec{r}|} - \frac{q}{|\vec{r}_1|}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

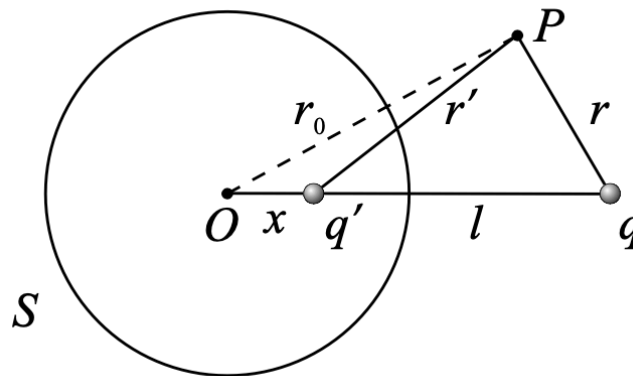
и

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \frac{q}{|\vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

Таким образом, задача решена.

Для сферической границы

Заряд q на расстоянии $l + x$ от центра шара, а потенциал шара принят равным нулю.



Искомый потенциал в произвольной точке P вне шара в этом случае:

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}$$

где $q' = -q \frac{a}{l}$

Решение удовлетворяет уравнению Лапласа в своей области определения, имеет нужную особенность вблизи точечного заряда q и удовлетворяет граничным условиям ($r_0/r'_0 = l/a$), обращаясь в нуль.

Рассмотрим второй вариант — точечный заряд q рядом с шаром, несущим заряд Q (при этом постоянный потенциал шара не определен). В этом случае к существующей системе зарядов q, q' необходимо добавить фиктивный заряд, расположенный в центре шара:

$$q'' = Q - q' = Q - q \frac{a}{l}$$

тогда

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r_*}$$

потенциал шара при этом:

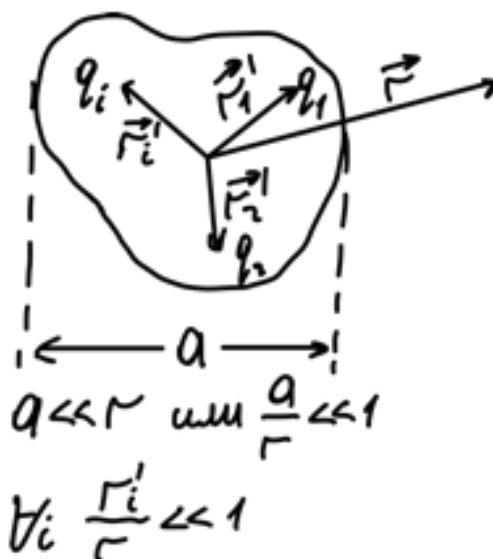
$$\varphi(P) = \varphi|_S = \frac{q}{r_0} + \frac{q'}{r'_0} + \frac{q''}{a} \Rightarrow \varphi|_0 = \frac{q''}{a} = \frac{Q}{a} + \frac{q}{l}$$

Таким образом, задача решена.

10. Электрический диполь. Потенциал и поле диполя.

Электрический диполь

Пусть система зарядов занимает ограниченную область пространства с характерным размером a , причем начало координат находится внутри этой области.



Распишем потенциал точечных зарядов:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} =: \sum \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Используем разложение:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + (-\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{r} + \dots = \frac{1}{r} + (-r') \left(-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \vec{r}'}{r^3}$$

получаем

$$\varphi = \sum q \frac{1}{r} + \sum q \vec{r}' \frac{\vec{r}}{r^3} + \dots = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d} \vec{r}}{r^3} + \dots$$

где

Дипольный момент- $\vec{d} := \sum_i q_i \vec{r}'_i$

Полный заряд системы- $Q = \sum_i q_i$

Дипольный член в сферических координатах($\vec{e}_z \uparrow \vec{d}$):

$$\varphi(r, \theta) = \frac{d}{r^2} \cos \theta$$

Потенциал и поле диполя

Из прошлого пункта:

$$\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d} \vec{r}}{r^3}$$

Найдем поле диполя:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \varphi = -\nabla \left((\vec{d} \vec{r}) \frac{1}{r^3} \right) = -\nabla \left((\vec{d} \vec{r}) \frac{1}{r^3} \right) - \nabla \left((\vec{d} \vec{r}) \frac{1}{r^3} \right) = \\ &= -\frac{1}{r^3} \nabla (\vec{d} \vec{r}) - (\vec{d} \vec{r}) \nabla \frac{1}{r^3} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{d} \vec{r})}{r^4} \nabla r = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{d} \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \end{aligned}$$

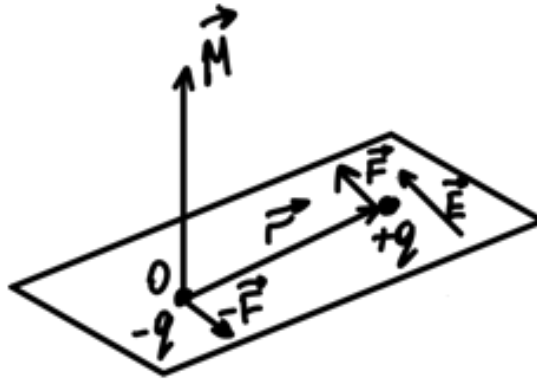
Итог, поле диполя:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{d} \vec{r}) \vec{r}}{r^5}$$

11. Сила и момент сил, действующие на диполь в сла- бонеоднородном электрическом поле.

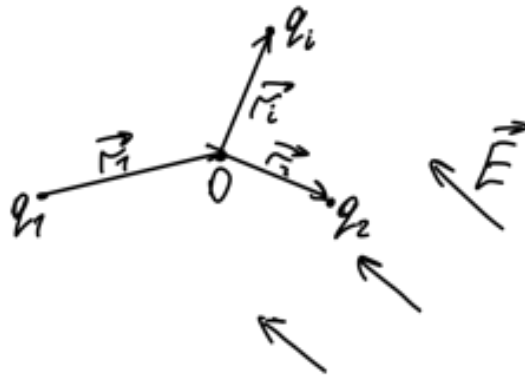
Момент сил:

Рассмотрим случай двух зарядов:



$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = [\vec{r} \times q\vec{E}] = [\vec{d} \times \vec{E}]$$

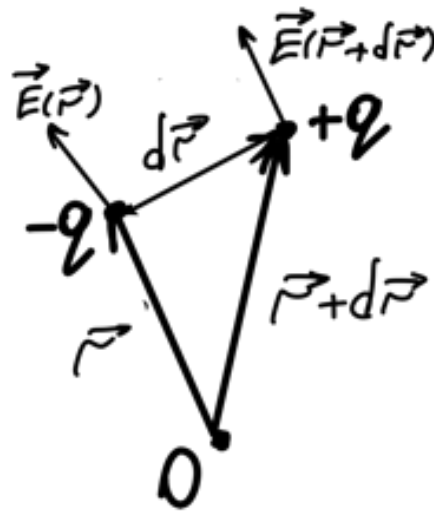
Обобщим на случай нескольких зарядов:



$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum_i [\vec{r}_i \times q_i \vec{E}] = \sum_i [q_i \vec{r}_i \times \vec{E}] = [(\sum_i q_i \vec{r}_i) \times \vec{E}] = [\vec{d} \times \vec{E}]$$

Сила:

Рассмотрим случай двух зарядов:



В однородном поле $F = 0$, если полный заряд равен нулю:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E} = \left(\sum_i q_i \right) \vec{E} = 0$$

$\rightarrow 0$

$$\vec{F} = q\vec{E}(d\vec{r} + d\vec{r}) - q\vec{E}(\vec{r}) = q(\vec{E}(d\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r})) = q(d\vec{r} \nabla) \vec{E} = (\vec{d} \nabla) \vec{E}$$

с учетом , что $\text{rot} \vec{E} = 0$:

$$0 = [\nabla \times \vec{E}] \Rightarrow 0 = [\vec{d} \times [\nabla \times \vec{E}]] \stackrel{\text{bac-cab}}{=} \nabla (\vec{d} \vec{E}) - \overset{\downarrow}{\vec{E}} (\vec{d} \nabla) \Rightarrow \nabla (\vec{d} \vec{E}) = (\vec{d} \nabla) \vec{E}$$

Получаем нашу силу:

$$\vec{F} = \nabla (\vec{d} \vec{E})$$

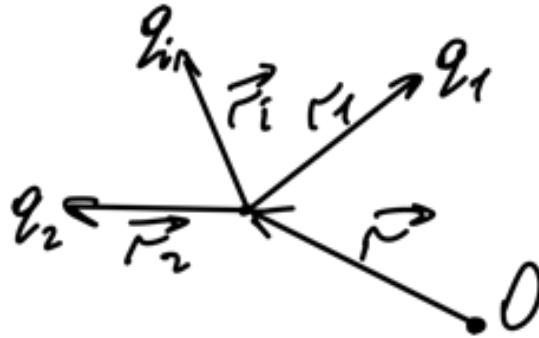
Можно ввести потенциальную функцию по общему правилу:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Тогда

$$U = -\vec{d} \vec{E}$$

Обобщим на случай нескольких зарядов:



Предполагается, что система мала по сравнению с масштабами изменения электрического поля:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_i(\vec{r} + \vec{r}_i)$$

с учетом, что $\sum_i q_i = 0$, получим:

$$\vec{F} = \sum_i q_i (\vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_i) - \vec{E}(\vec{r})) = \sum_i q_i (\vec{r}_i \nabla) \vec{E} = \sum_i (q_i \vec{r}_i \nabla) \vec{E} = ((\sum_i q_i) \vec{r}_i \nabla) \vec{E} = (\vec{d} \nabla) \vec{E}$$

Получим нашу силу:

$$\vec{F} = \nabla (\vec{d} \vec{E})$$

и

$$U = -\vec{d} \vec{E}$$

В случае упругого диполя:

$$\vec{d} \stackrel{df}{=} \alpha \vec{E}$$

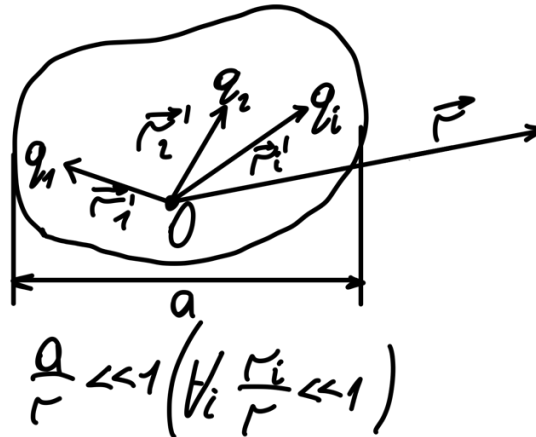
тогда запишем нашу силу:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \nabla (\vec{d} \cdot \vec{E}) = \nabla (\alpha \vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \left[\nabla (\alpha \vec{E} \cdot \vec{E}) + \nabla (\alpha \vec{E} \cdot \vec{E}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \nabla (\alpha \vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \nabla (\vec{d} \cdot \vec{E}) = \vec{F} \end{aligned}$$

с учетом $\vec{F} = -\nabla U$, получаем $U = -\frac{1}{2} \vec{d} \vec{E}$

12. Электрический квадрупольный момент. Тензор квадрупольного момента для аксиально-симметричной системы зарядов.

Электрический квадрупольный момент



Точное решение:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} =: \sum \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Нужно разложить $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$. Перейдем к тензорной записи:

$$\vec{r}(x, y, z) =: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_\alpha, \text{ аналогично } \vec{r}' \rightarrow x'_\alpha$$

Индексы $\alpha, \beta \in [1, 2, 3]$

По сути раскладываем функцию:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \underbrace{\frac{1}{r}}_{l=0 \text{ монополь}} + \underbrace{(-x'_\alpha) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{r}}_{l=1 \text{ диполь}} + \frac{1}{2} \underbrace{(-x'_\alpha)(-x'_\beta) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r}}_{l=2 \text{ квадруполь}} + \dots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} - ?$$

Найдем:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{1}{2r^3} 2x_1 = -\frac{x_1}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{x_1}{r^3} \right) = -x_1 \left(-\frac{1}{r^4} \frac{x_2}{r} \right) = \frac{3x_1 x_2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{x_1}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} \cdot 1 + \frac{3x_1 x_2}{r^5}$$

\Downarrow

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{-\delta_{\alpha\beta} r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}$$

Таким образом квадрупольный член имеет вид:

$$\varphi = \Sigma q \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta \left(\frac{-\delta_{\alpha\beta} r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5} \right)$$

$$Q_{\alpha\beta} := \Sigma \frac{1}{2} q x_\alpha x_\beta$$

тогда

$$\varphi = Q_{\alpha\beta} \frac{-\delta_{\alpha\beta} r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}$$

$$Tr \left(\frac{-\delta_{\alpha\beta} r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5} \right) = \frac{-\delta_{\alpha\beta} r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5} =$$

$$= \frac{-(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33})r^2 + 3(x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3)}{r^5} = \frac{-3r^2 + 3r^2}{r^5} = 0$$

Хотим:

$$\varphi = D_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} \text{ Как найти } D_{\alpha\beta}?$$

$D_{\alpha\beta} : 3Q_{\alpha\beta} - ? \cdot \delta_{\alpha\beta} r'^2$ подберем ? так, чтобы $Tr(D_{\alpha\beta}) = 0$, так как \rightarrow

$$\rightarrow \text{при этом } D_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} r'^2 = 0 (= D_{\alpha\beta} = 0)$$

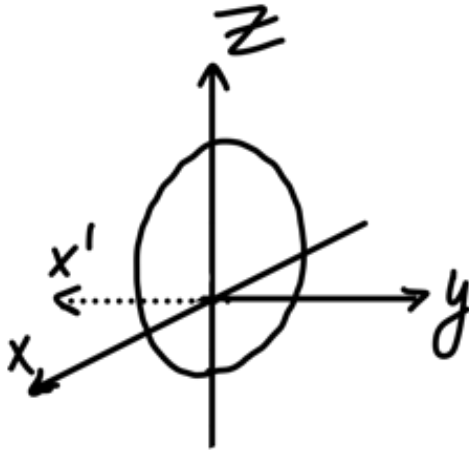
$$D_{\alpha\beta} = 3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2 \text{ Действительно } Tr(D_{\alpha\beta}) = D_{\alpha\alpha} = 3r'^2 - 3r'^2 = 0$$

Тогда

$$\varphi = \Sigma q (3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2) \cdot \frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5}$$

Таким образом $D_{\alpha\beta} = \Sigma q (3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2)$

Тензор квадрупольного момента для аксиально-симметричной системы зарядов



Вопрос:

$$D'_{xy} - ?$$

||

$$D'_{12} - ?$$

$$x'_1 x'_2 = x' y' = (-y)x = -xy \text{ или } x'_1 x'_2 = -x_1 x_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow D'_{12} = -D_{12}$$

Должно быть $D'_{12} = D_{12}$ из-за симметрии, поэтому имеем:

$$D_{12} = 0$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}D \end{pmatrix}$$

Что?

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= D_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5} = \frac{1}{2r^5} (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{D}{2r^5} (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -x_1/2 \\ -x_2/2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{D}{2r^5} \left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_3^2 \right) = \frac{D}{2r^5} \left(-\frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 \right) = \\ &= \frac{D}{2r^5} \left(-r^2 \frac{\sin^2 \theta}{2} + r^2 \cos^2 \theta \right) = \frac{D}{2r^3} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \end{aligned}$$

где последний член это полином Лежандра $P(\cos \theta)$

Вкратце о аксиально-симметричном тензоре:

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}D_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}D_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}$$

$$1) D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$$

$$2) D'_{xy} = -D_{yx} = -D_{xy} \text{ (свойство тензора при повороте на } 90^\circ \text{)}$$

$$D'_{xy} = D_{xy} \text{ (из симметрии)}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{xy} = 0$$

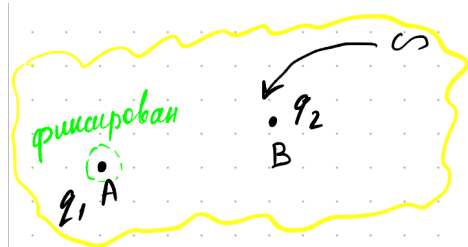
$$3) D'_{xz} = -D_{xz} \text{ (свойство тензора при повороте на } 180^\circ \text{)}$$

$$D'_{xz} = D_{xz}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{xz} = 0$$

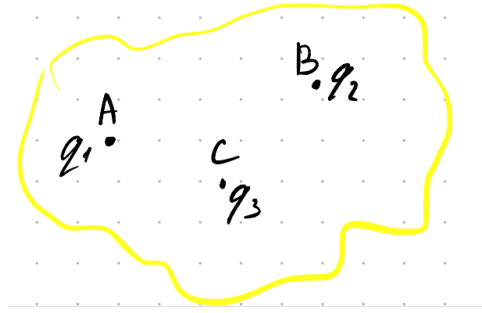
13. Энергия электрического поля. Плотность энергии электрического поля.



$$A_{12} = W_{12} = q_2\varphi_{1B} = q_1\varphi_{2A}$$

$$W_{12} = \frac{1}{2}(q\varphi_A + q_2\varphi_B)$$

$$W = W_1 + W_2 + W_{12}$$

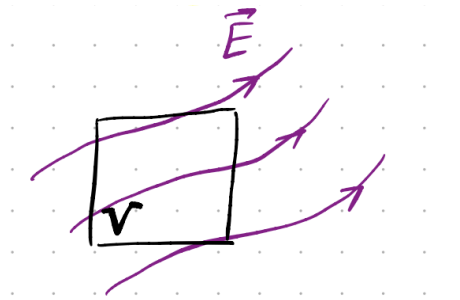


$$W_{12} = q_1(\varphi_{2A} + \varphi_{3A}) + q_2(\varphi_{1B} + \varphi_{2B}) + q_3(\varphi_{1C} + \varphi_{2C})$$

$$W_{12} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3)$$

Итог:

$$W_{\text{вз}} = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \int \varphi dq$$



$$W_{\text{эл}} = \int_V W_{\text{эл}} dV = \int \frac{E^2}{4\pi} dV$$

Если $q = \rho dV$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV = [\Delta \varphi = -4\pi \rho] = -\frac{1}{8\pi} \int (\Delta \varphi \cdot \varphi) dV = \\ &= [\text{div}(\varphi \nabla \varphi) = \varphi \Delta \varphi + (\nabla \varphi)^2] = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int \text{div}(\varphi \nabla \varphi) dV + \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \varphi)^2 dV = \int \frac{E^2}{8\pi} dV = \int w dV \end{aligned}$$

где $w = \frac{E^2}{8\pi}$ — плотность энергии

14. Электрическая ёмкость. Матрица емкостных коэффициентов, её симметричность.

Электрическая ёмкость

Конденсатор из двух проводников:



$$C = \frac{|q|}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Уединенный конденсатор:

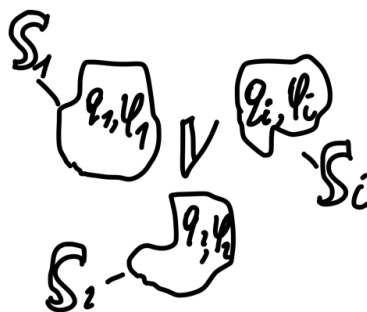


$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Энергия конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$$

Матрица емкостных коэффициентов, её симметричность



$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \hat{S} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

или в другом виде:

$$\varphi_i = S_{ij}q_j$$

где S_{ij} -матрица потенциальных коэффициентов,

$$q_i = C_{ij}\varphi_j$$

где C_{ij} -матрица емкостных коэффициентов, $S_{ij}^{-1} = C_{ij}$ -симметричны. Свойства матриц:

$$dW = \sum_i \varphi_i dq_i = \varphi_i dq_i$$

и

$$W = \frac{1}{2}\varphi_i q_i = dW = \frac{1}{2}\varphi_i dq_i + \frac{1}{2}q_i d\varphi_i$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_i dq_i = q_i d\varphi_i$$

где $\varphi_i = S_{ij}q_j$

$$0 = S_{ij}q_j dq_i - q_i S_{ij} dq_i = S_{ij}q_j dq_i - q_j S_{ji} dq_i = (S_{ij} - S_{ji})q_i dq_j$$

получаем:

$$S_{ij} = S_{ji}$$

$$\Downarrow$$

$$C_{ij} = C_{ji}$$

это справедливо $\forall q_i$ и $\forall dq_i$.

15. Диэлектрики. Связанный заряд. Вектор поляризации. Электрическое поле в диэлектрике. Вектор индукции. Диэлектрическая проницаемость.