Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный университет»

Физический факультет

Дисциплина: Электромагнетизм

Зимняя сессия

Приговор будет исполнен: 11.01.2025

Я не несу ответственности за возможные ошибки или некорректность предоставленных ответов на билеты. Используйте их только как вспомогательный материал и обязательно сверяйтесь с официальными источниками.

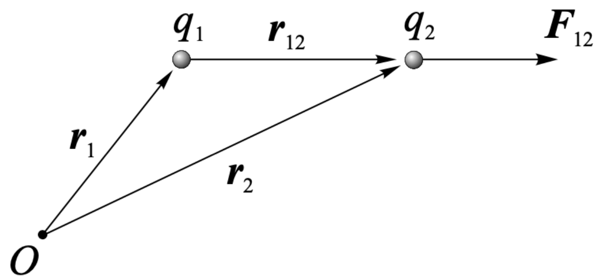
Ответы на вопросы билета

1. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции.Поток электрического поля. Теорема Гаусса.

Закон Кулона

Это — экспериментально установленный закон силового взаимодействия двух точечных заряженных тел, неподвижных относительно рассматриваемой системы отсчета, согласно которому:

$$\vec{F}_k = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r_{12}}}{r_{12}}$$



Введем понятие напряженности:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

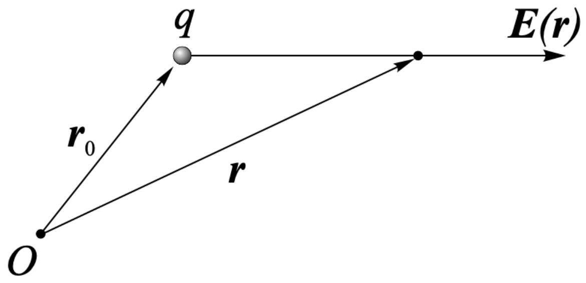
тогда силу Кулона можно перезаписать в виде:

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2)$$

Напряжённость электрического поля

В общем виде напряженность имеет вид:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$



Принцип суперпозиции

Электрическое поле от системы зарядов равно сумме электрических полей от её составляющих:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Поток электрического поля

Если у нас имеется некоторая конечная поверхность S, то поток через эту поверхность вычисляется как поверхностный интеграл

$$\Phi = E_n dS$$

Теорема Гаусса

*Теорема Гаусса:*Поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность определяется суммарным зарядом Q, находящимся внутри этой поверхности, и равняется 4πQ:

$$\oint_S E_n ds = 4\pi Q$$

2. Дивергенция электрического поля. Распределённый заряд. Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

Дивергенция электрического поля

Вспомним теорему Гаусса для потока $\vec{E}$ через замкнутую площадь S

$$\oiint_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi \rho dV$$

а по теореме Остроградского-Гаусса

$$\oiint_{\delta V} \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V div \vec{E} d\vec{V}$$

следует что для $\forall V$:

$$\iiint_V div \vec{E} d\vec{V} = 4\pi Q = \iiint_V 4\pi \rho dV \Rightarrow div \vec{E} = 4\pi \rho$$

Распределённый заряд

Объемная плотность заряда:

$$dq \stackrel{df}{=} \rho dV$$

Поверхностная плотность:

$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

Линейная плотность:

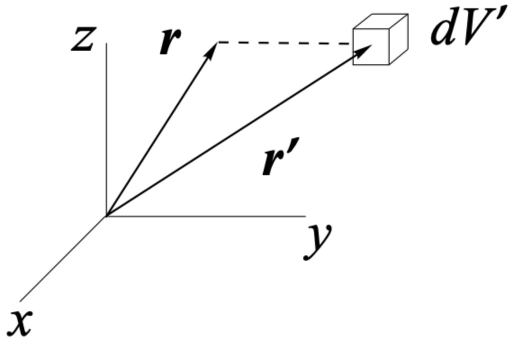
$$dq \stackrel{df}{=} \kappa dl$$

Основное уравнение электростатики, его общее решение в безграничном пространстве

В конечной области пространства с плотностью заряда $\rho(\vec{r})$, по принципу суперпозиции скалярный потенциал этих зарядов равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r'}) dV'}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Представление потенциала в виде интеграла по объему, занятому зарядами, часто называют частным решением уравнения Пуассона.



Для задачи с точечными зарядами интегральная форма не подойдёт, перейдём к сумме. Введём функцию Дирака δ, она задается следующими условиями:

1) при всех $\vec{r} \neq 0$ $\delta(\vec{r}) = 0$;

2) в точке $\vec{r} \neq 0$ имеем $\delta(\vec{r}) = \infty$;

3) интеграл по всему пространству $\int \delta(\vec{r}) dV = 1$

4) $\int f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r_0}) dV = f(\vec{r_0})$

где $f(\vec{r})$ - произвольная непрерывная функция, $\vec{r_0}$ радиус-вектор некоторой фиксированной точки.

Объёмную плотность заряда расположенного в точке $\vec{r} = \vec{r_0}$ можно перезаписать:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r_0})$$

подставляем в предыдущую формулу

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{q\delta(\vec{r} - \vec{r_0}) dV'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

3. Циркуляция и ротор электрического поля. Теорема Стокса. Электрический потенциал. Работа электрического поля. Потенциал точечного заряда.

Циркуляция и ротор электрического поля

Циркуляция векторного поля $\vec{E}$ вдоль контура L

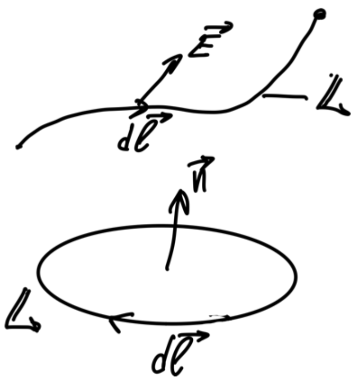
$$\int\limits_L \vec{E} d\vec{l}$$

а по замкнутому контуру

$$\oint\limits_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

или в дифференциальной форме

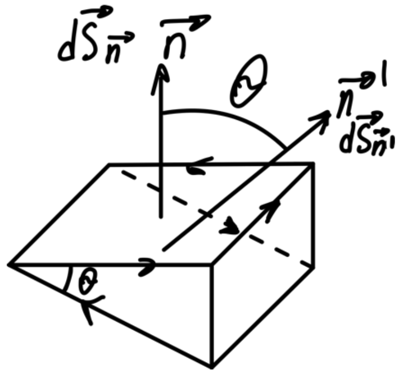
$$\mathrm{rot} \vec{E} = 0$$



Как следствие из теоремы о циркуляции $\vec{E}$ работа при перемещении заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории движения.

Теорема Стокса

$$\oint\limits_{\delta S} \vec{E} d\vec{l} = \iint\limits_{S} \text{rot} \vec{E} d\vec{S}$$



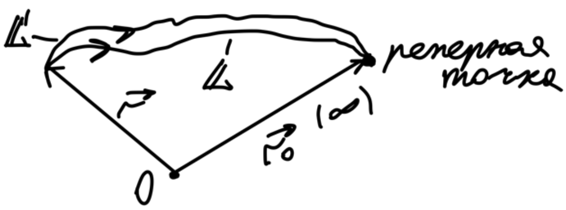
$$(\text{rot}\vec{E})_{\vec{n}'} = \frac{\text{rot}\vec{E}}{\frac{1}{\cos\theta}}$$

где $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{dS_{\vec{n}'}}{dS_{\vec{n}}}$, получим

$$(\text{rot}\vec{E})_{\vec{n}'} = \text{rot}\vec{E} \cdot \cos\theta$$

Электрический потенциал

Рассмотрим скаляроное поле



$$\varphi(\vec{r}) \stackrel{df}{=} \int_{\vec{r}}^{\vec{r_0}} \vec{E} d\vec{l}$$

Чтобы определение было корректным, нужно чтобы этот интеграл не зависел от формы L.

Доказательство:

$$\text{rot}\vec{E} = 0 \Rightarrow \forall L \oint\limits_{L} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

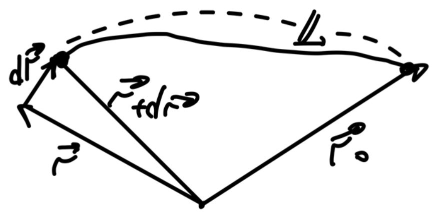
Запишем выражение при обходе $L - L'$ - сначала идем по контуру L, а потом обратно по контуру L' :

$$\oint\limits_{L-L'} \vec{E}d\vec{l} = 0 = \oint\limits_{L} \vec{E}d\vec{l} - \oint\limits_{L'} \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Такие поля называются потенциальными.

Доказано.

Еще свойства потенциала:



$$\varphi(\vec{r}) = \int \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} + \int\limits_{L} \vec{E}d\vec{l}$$

и

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r_0}) = \int\limits_{L} \vec{E}d\vec{l}$$

отсюда получим

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r_0}) - \varphi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}$$

так же используем

$$d\varphi = d\vec{r}\ \nabla\varphi$$

отсюда получим

$$\forall d\vec{r}, \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{r} \Rightarrow \vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0 = -[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\varphi]$$

Работа электрического поля

$$A = \int\limits_L \vec{F} d\vec{l} = \int\limits_L q\vec{E} d\vec{l} = q\left[\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_0}} \vec{E} d\vec{l} - \int_{\vec{r_2}}^{\vec{r_1}} \vec{E} d\vec{l}\right] = q(\varphi_2 - \varphi_2) = qU$$

Потенциал точечного заряда

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}$$

или в общем виде

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

4. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат.

Уравнение Лапласа

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

В сферической системе (r, θ, α) координат

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

В цилиндрической (r, α, z) координат

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат

Предположим, что в декартовых координатах переменные разделяются -это означает, что:

$$\varphi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\Delta\varphi = 0 \Rightarrow X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \Rightarrow Const_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\frac{X''}{X} = C \Rightarrow X'' = CX$$

$$(1) X(x) = \begin{cases} \text{при C} > 0, Ae^{\sqrt{c}x} \\ \text{при C} < 0, Ae^{\pm i\sqrt{c}x} \\ \text{при C} = 0, Ax + B \end{cases}$$

При $\rho \neq 0$. Допустим, что

$$\rho(x, y, z) = \rho \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \text{где X,Y,Z функции вида (1)}$$

Тогда

$$\varphi = A \cdot X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$A(X''YZ + XY''Z + XYZ'') = -4\pi\rho_0 XYZ \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = -\frac{4\pi\rho_0}{A}$$

Итог

$$\rho = p_1 + p_2, \Delta\varphi = -4\pi\rho, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2;$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = -4\pi\rho_1 \\ \Delta\varphi_2 = -4\pi\rho_2 \end{cases}$$

5. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат

Пусть $\varphi(r, \theta, \alpha) = R(r) \cdot Y(\theta)$

$$\Delta\varphi(r,\theta,\alpha) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}_{=l(l+1)} + \underbrace{\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dY}{d\theta}\right)}_{=-l(l+1)} = 0$$

При $R(r) \propto r'$
или $R(r) \propto \frac{1}{r^{l+1}}$

$$\frac{1}{R}(r^2R')' = C$$

ищем решение в виде $R(r) \propto r^l$

$$\frac{1}{R}(r^2R')' = \underbrace{l}_{=-(l'+1)} \cdot \underbrace{(l+1)}_{=(-l'-1+1)=(l'+1)l'}$$

При этом $R(r) \propto \frac{1}{r^{l+1}}$ удолетвор. уравнению с той же C
(замена $l' = -(l+1)$)

6. Уравнение Лапласа. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат.

Уравнение Лапласа(повтор)

Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат

Пусть $\varphi(r, \alpha) = \varphi(r, \alpha)$. Кроме того $\varphi(r, \alpha) = R(z)Y(\alpha)$ (то есть переменные разделяются)

$$Y(\alpha) = e^{\pm im\alpha}$$

$$\varphi(r,\alpha) = R(r)(\sum_i e^{im\alpha}), \text{где m} \in Z$$

Пусть внутри, рассматриваемой области нет зарядов $\Rightarrow \Delta\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=0\Rightarrow e^{im\alpha}\cdot\frac{1}{r}\left(rR'\right)'+R\cdot\frac{1}{r^2}\left(-m^2e^{im\alpha}\right)=0\Rightarrow\frac{r(rR')'}{R}=m^2$$

Ищем решение в виде $R(r)\propto r^l$:

$$l^2=m^2, \text{т.е } l=\pm m. \text{ Т.е } \varphi(r,\alpha)=\left(\frac{C_1}{r^m}+C_2r^m\right)e^{\pm im\alpha}$$

7. Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля. Поверхностная плотность зарядов. Поле вблизи поверхности металлов. Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал.

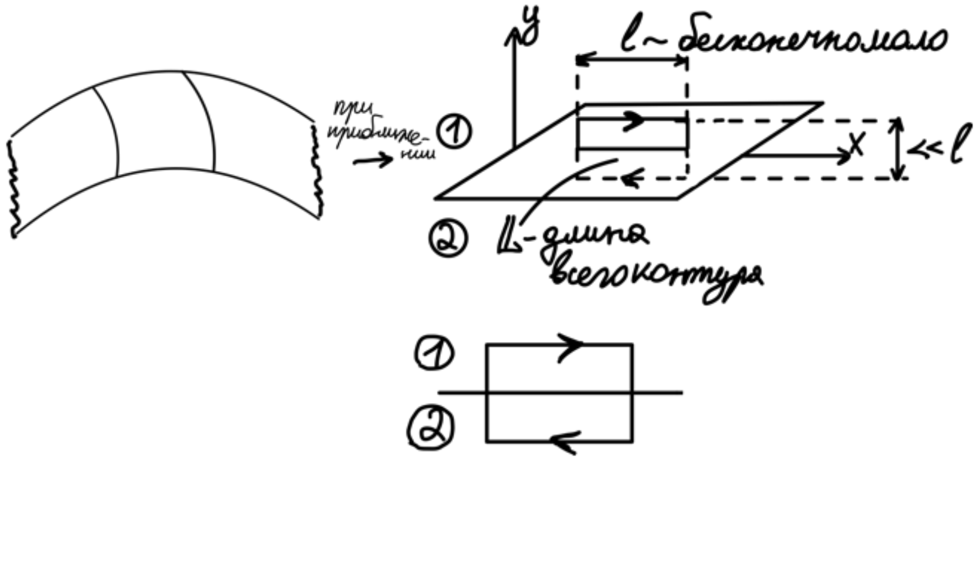
Граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля

Тангенциальная компонента

$$\text{rot}\vec{E}=0\Rightarrow\oint\vec{E}d\vec{l}\leftarrow\text{интегральная форма}$$

По теореме Стокса

$$0=\iint\limits_{(\forall)S}\text{rot}\vec{E}dS=\oint\limits_{(\forall)S}\vec{E}d\vec{l}$$



$$\oint \vec{E}d\vec{l} = E_x|_1 \cdot l - E_x|_2 \cdot l \Rightarrow E_x|_1 = E_x|_2$$

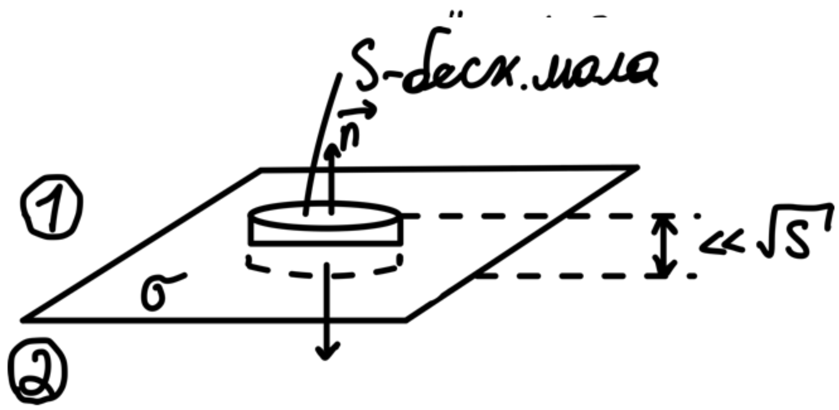
или же

$$E_\tau|_1 = E_\tau|_2$$

Нормальная компонента

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \oiint\limits_{(\forall)S} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint\limits_{(\forall)V} \mathrm{div}\vec{E}dV = 4\pi \iiint\limits_{(\forall)V} \rho dV \Rightarrow \oiint\limits_{(\forall)\delta S} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q$$



$$E_{1n}| \cdot S - E_{2n}| \cdot S = 4\pi Q = 4\pi\rho S$$

или же

$$E_{1n}| - E_{2n}| = 4\pi\rho$$

Поверхностная плотность зарядов(???)

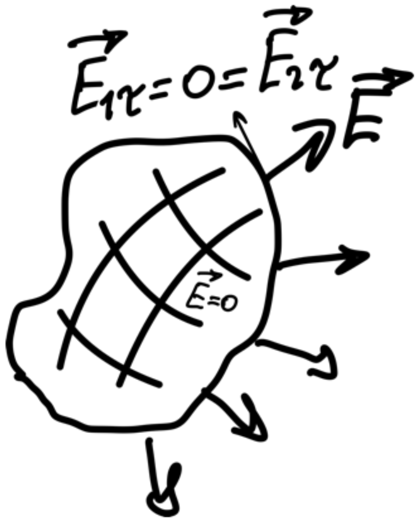
$$dq \stackrel{df}{=} \sigma dS$$

Поле вблизи поверхности металлов

Надо доказать что поле вблизи металлов равно

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Рассмотрим тангенсальную и нормальную компоненту поля $\vec{E}$ на границе металла



Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника $E_{1n} = 0$ отсюда

$$E_{2n} = 4\pi\sigma$$

Снаружи металла поле $E_{2\tau} = 0$ и из граничных условий

$$E_{1\tau} = 0$$

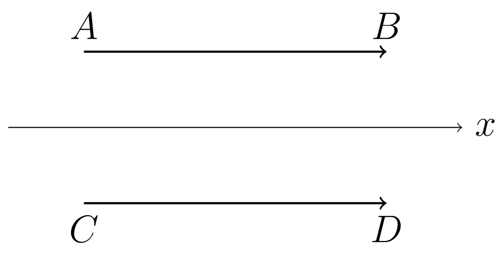
Итоговое поле равно

$$\vec{E}_{2n} = 4\pi\sigma\vec{n}$$

Что и требовалось доказать.

Граничные условия для электрического поля, выраженные через его скалярный потенциал

Можно рассмотреть две точки A и B с одной стороны поверхности и C,D с другой стороны. Найдем напряжение между парами этих точек:



Из граничных условий, что E_τ−непрерывно следует, что:

$$E_{\mathrm{AB}|} = E_{\mathrm{CD}}|$$

потенциал можно выразить через напряженность так:

$$E = -\mathrm{grad}\varphi$$

отсюда получаем, что $\varphi_{\mathrm{AB}}| = \varphi_{\mathrm{CD}}| \Rightarrow \varphi|$ – непрерывно

8. Проводники в электрическом поле. Теорема единственности.

Проводники в электрическом поле

Очень похоже (скорее всего есть одно и тоже) на вопрос: поле вблизи поверхности металлов, ну рассмотрим повторно?

Если в проводнике имеется электрическое поле, то по нему течёт ток. Следовательно, для электростатических явлений электрическое поле внутри проводника $E_i \equiv 0$ отсюда плотность заряда:

$$\rho_i = \frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\vec{E_i} \equiv 0$$

В этой связи говорят, что проводник квазинейтрален. Таким образом, заряды на проводнике могут размещаться только на его поверхности, причем поверхностная плотность зарядов связана с полем $vecE$ вне проводника через граничное условие для E_n.

Если пространство вне проводника свободно от зарядов, то здесь поле $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$ и φ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Из граничных условий мы получаем что:

$$\vec{E_n} = 4\pi\sigma \ , \ \vec{E_\tau} = 0.$$

Заметим, что поле подходит к поверхности проводника по нормали, т.е. поверхность проводника является эквипотенциалью. Это естественно, так как в проводнике потенциал постоянен из-за $\vec{E_i} = 0$

Теорема единственности

Условия теоремы:

1)На каждом проводнике задан либо потенциал, либо заряд,

2)В V нету зарядов;

$\Rightarrow \exists$ единственное решение уравнения Пуассона вида:

$$\vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

Доказательсвто

Пусть $\vec{E_1} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_1$ и $\vec{E_2} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_2$. Достаточно доказать, что:

$$\iiint\limits_V |\vec{E_2}(\vec{r}) - \vec{E_1}(\vec{r})|^2 dV = 0$$

$$\vec{E} := \vec{E_2} - \vec{E_2} \ ; \ \varphi := \varphi_2 - \varphi_1 \ ; \ \vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_2 + \boldsymbol{\nabla}\varphi_1 = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$$

Всюду в V $\Delta\varphi_1 = 0$ и $\Delta\varphi_2 = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$

Рассмотрим выражение: $\boldsymbol{\nabla}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 + \varphi\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\varphi}_{\to 0} = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2$

$$\iiint |\vec{E_2}(\vec{r}) - \vec{E_1}(\vec{r})|^2 dV = \iiint |\vec{E}|^2 dV = \iiint (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 dV = \iiint \boldsymbol{\nabla}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) dV =$$

$$= \iiint\limits_V \mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) dV = \underbrace{\oiint\limits_{S_\infty} \varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{S}}_{\to 0(\propto\frac{1}{r})} - \sum_i \oiint\limits_{S_i} \varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi d\vec{S} = \sum_i \varphi_i \oiint\limits_{S_i} (-\boldsymbol{\nabla}\varphi) d\vec{S} =$$

$$\sum_i(\varphi_{2i}-\varphi_{1i})\oiint_{S_i}(\vec{E}_2-\vec{E}_1)d\vec{S}=\sum_i(\varphi_{2i}-\varphi_{1i})\left[\oiint_{S_i}\vec{E}_2d\vec{S}-\oiint_{S_i}\vec{E}_1d\vec{S}\right]=$$

$$=4\pi\sum_i(\underset{(1)}{\varphi_{2i}-\varphi_{1i}})(\underset{(2)}{q_{2i}-q_{1i}})=0$$

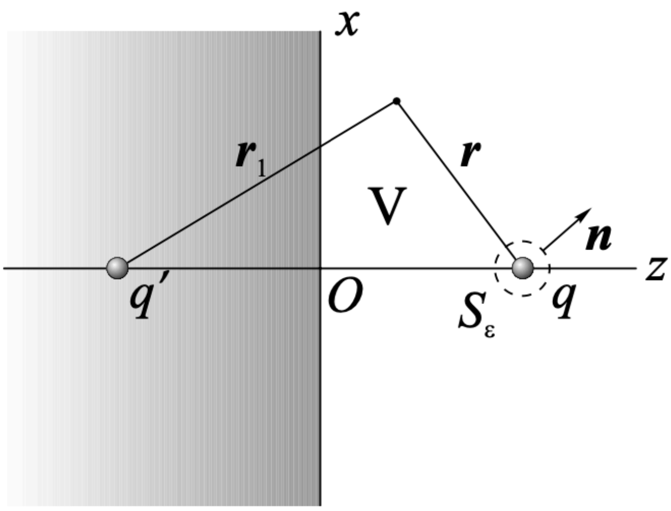
По условию теоремы либо (1) = 0, либо (2)=0

Доказано

9. Метод изображения для решения задач электростатики на примере плоской и сферической границ раздела проводника и непроводящего пространства.

Плоская граница

Точечный заряд q , находящийся на расстоянии h от проводящего полупространства. Определить поле в свободном полупространстве и на этой основе — плотность зарядов, индуцированных зарядом q на поверхности проводника.



В проводящем полупространстве поле равно нулю, постоянный потенциал можно принять за ноль, будем искать поле только в области $z > 0$ с выкинутой точкой. Искомое поле удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0$$

и граничным условиям

$$\varphi|_{z=0} = 0\ ,\ \oint_{S_\varepsilon} E_n dS = 4\pi Q$$

где S_ε сфера малого радиуса с центром в точке расположения заряда q

В проводящем полупространстве будет наводится заряд $q' = -q$. Тогда потенциал и электрическое поле, созданные зарядом q фиктивным зарядом q' ,в правом полупространстве создают искомое поле:

$$\varphi = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_1}$$

Действительно, эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в области $z > 0$ как потенциал двух точечных зарядов, лежащих вне области. Во-вторых, $\varphi|_{z=0} = 0$, так как для точек плоскости r и r_1 равны. В-третьих, поле, созданное зарядом q', через поверхность $S\varepsilon$ создает поток, равный нулю (по теореме Гаусса), а поле от точечного заряда q обеспечивает выполнение соответствующего граничного условия.

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{|\vec{r}|} - \dfrac{q}{|\vec{r_1}|} \text{ , } z \geq 0 \\ \text{0, z<0} \end{cases}$$

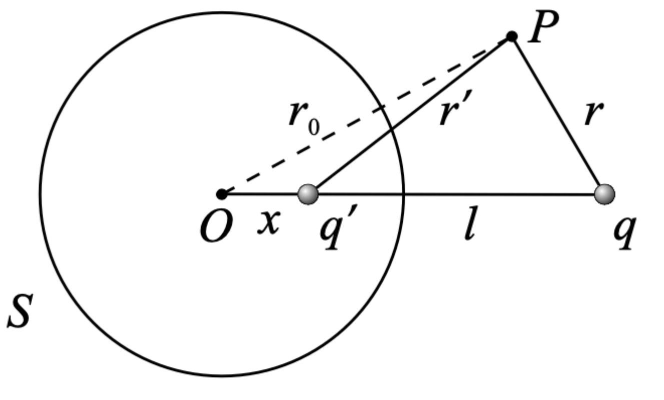
и

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{|\vec{r}|^2}\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \dfrac{q}{|\vec{r_1}|^2}\dfrac{\vec{r_1}}{|\vec{r_1}|} \text{ , } z \geq 0 \\ \text{0, z<0} \end{cases}$$

Таким образом, задача решена.

Для сферической границы

Заряд q на расстоянии $l+x$ от центра шара, а потенциал шара принят равным нулю.



Искомый потенциал в произвольной точке P вне шара в этом случае:

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}$$

где $q' = -q\frac{a}{l}$

Решение удовлетворяет уравнению Лапласа в своей области определения, имеет нужную особенность вблизи точечного заряда q и удовлетворяет граничным условиям ($r_0/r_0' = l/a$), обращаясь в нуль.

Рассмотрим второй вариант — точечный заряд q рядом с шаром, несущим заряд Q (при этом постоянный потенциал шара не определен). В этом случае к существующей системе зарядов q, q' необходимо добавить фиктивный заряд, расположенный в центре шара:

$$q'' = Q - q' = Q - q\frac{a}{l}$$

тогда

$$\varphi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r_*}$$

потенциал шара при этом:

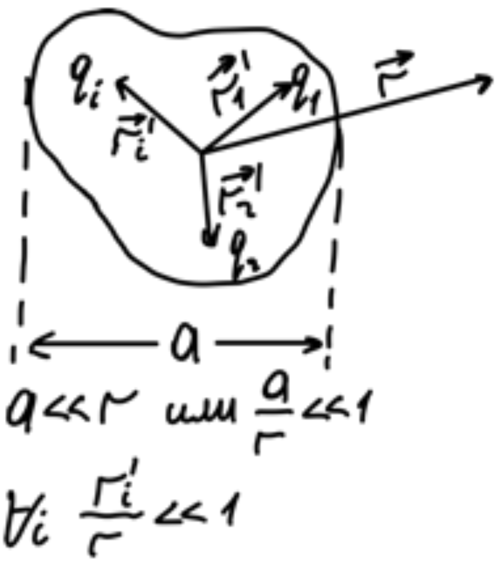
$$\varphi(P) = \varphi|_S = \frac{q}{r_0} + \frac{q'}{r_0'} + \frac{q''}{a} \Rightarrow \varphi|_0 = \frac{q''}{a} = \frac{Q}{a} + \frac{q}{l}$$

Таким образом, задача решена.

10. Электрический диполь. Потенциал и поле диполя.

Электрический диполь

Пусть система зарядов занимает ограниченную область пространства с характерным размером a, причем начало координат находится внутри этой области.



Распишем потенциал точечных зарядов:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|} =: \Sigma \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Используем разложение:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \frac{1}{r} + (-\vec{r'})\ \nabla\frac{1}{r} + ... = \frac{1}{r} + (-r')(-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}) + ... = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r'}}{r^3}$$

получаем

$$\varphi = \Sigma q\frac{1}{r} + \Sigma q\vec{r'}\frac{\vec{r}}{r^3} + ... = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3} + ...$$

где

Дипольный момент- $\vec{d} := \sum\limits_i q_i\vec{r'_i}$

Полный заряд системы-$Q = \sum\limits_i q_i$

Дипольный член в сферических координатах($\vec{e_z} \uparrow\uparrow \vec{d}$):

$$\varphi(r,\theta) = \frac{d}{r^2}\cos\theta$$

Потенциал и поле диполя

Из прошлого пункта:

$$\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3}$$

Найдем поле диполя:

$$\vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi = -\boldsymbol{\nabla}\left((\vec{d}\vec{r})\frac{1}{r^3})\right) = -\boldsymbol{\nabla}\left((\overset{\downarrow}{\vec{d}}\vec{r})\frac{1}{r^3}\right) - \boldsymbol{\nabla}\left((\vec{d}\vec{r})\frac{\overset{\downarrow}{1}}{r^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d}\vec{r}\right) - (\vec{d}\vec{r})\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r^3} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3\frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^4}\boldsymbol{\nabla}\vec{r} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3\frac{(\vec{d}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

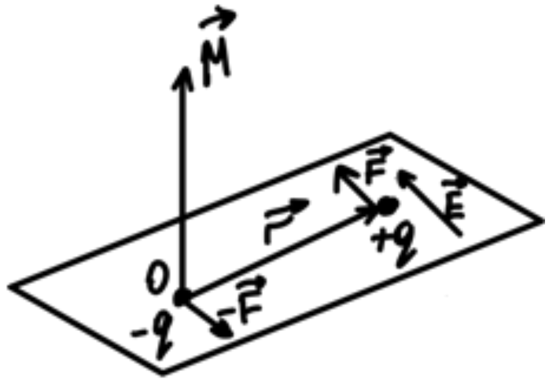
Итог, *поле диполя:*

$$\vec{E} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + 3\frac{(\vec{d}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

11. Сила и момент сил, действующие на диполь в слабонеоднородном электрическом поле.

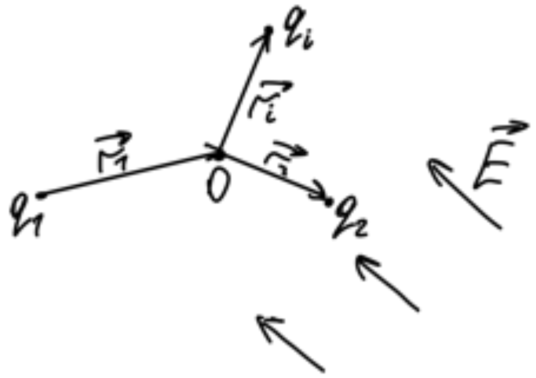
Момент сил:

Рассмотрим случай двух зарядов:



$$\vec{F} = q\vec{E}\ ,\ \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = [\vec{r} \times q\vec{E}] = [\vec{d} \times \vec{E}]$$

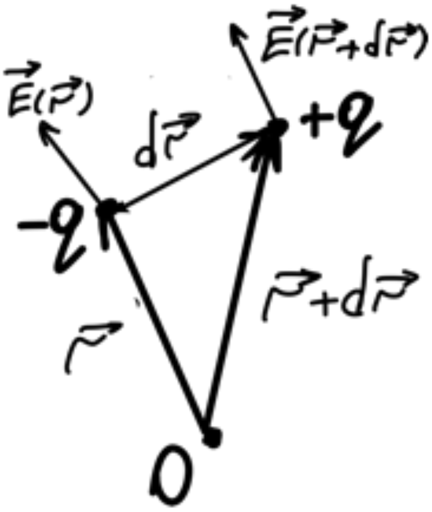
Обобщим на случай нескольких зарядов:



$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r_i} \times \vec{F_i}] = \sum_i [\vec{r_i} \times q_i\vec{E}] = \sum_i [q_i\vec{r_i} \times \vec{E}] = [(\sum_i q_i\vec{r_i}) \times \vec{E}] = [\vec{d} \times \vec{E}]$$

Сила:

Рассмотрим случай двух зарядов:



В однородном поле $F = 0$, если полный заряд равен нулю:

$$\vec F = \sum_i q_i \vec E = (\underbrace{\sum_i q_i}_{\to 0})\vec E = 0$$

$$\vec F = q\vec E(d\vec r + d\vec r) - q\vec E(\vec r) = q(\vec E(d\vec r + d\vec r) - \vec E(\vec r)) = q(d\vec r\ \nabla)\vec E = (\vec d\ \nabla)\vec E$$

с учетом , что $\mathrm{rot}\vec E = 0$:

$$0 = [\boldsymbol{\nabla}\times\vec E] \Rightarrow 0 = [\vec d\times[\boldsymbol{\nabla}\times\vec E]] \underset{bac-cab}{=} \boldsymbol{\nabla}\Big(\vec d\vec E\Big) - \overset{\downarrow}{\vec E}(\vec d\boldsymbol{\nabla}) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\Big(\vec d\vec E\Big) = (\vec d\boldsymbol{\nabla})\vec E$$

Получаем нашу силу:

$$\vec F = \ \nabla(\vec d\vec E)$$

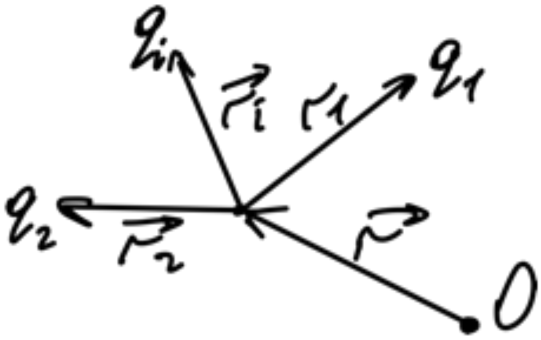
Можно ввести потенциальную функцию по общему правилу:

$$\vec F = -\boldsymbol{\nabla} U$$

Тогда

$$U = -\vec d\vec E$$

Обобщим на случай нескольких зарядов:



Предполагается, что система мала по сравнению с масштабами изменения электрического поля:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_i(\vec{r} + \vec{r}_i)$$

с учетом, что $\sum\limits_i q_i = 0$, получим:

$$\vec{F} = \sum_i q_i(\vec{E}(\vec{r}+\vec{r}_i) - \vec{E}(\vec{r})) = \sum_i q_i(\vec{r}_i \boldsymbol{\nabla})\vec{E} = \sum_i (q_i \vec{r}_i \boldsymbol{\nabla})\vec{E} = ((\sum_i q_i)\vec{r}_i \boldsymbol{\nabla})\vec{E} = (\vec{d}\boldsymbol{\nabla})\vec{E}$$

Получим нашу силу:

$$\vec{F} = \boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d}\vec{E}\right)$$

и

$$U = -\vec{d}\vec{E}$$

В случае упругого диполя:

$$\vec{d} \overset{df}{=} \alpha\vec{E}$$

тогда запишем нашу силу:

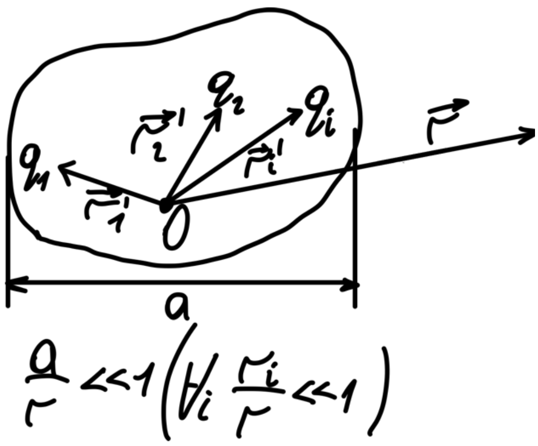
$$\vec{F} = \boldsymbol{\nabla}\left(\vec{d} \cdot \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\alpha\vec{E} \cdot \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\alpha\overset{\downarrow}{\vec{E}} \cdot \vec{E}\right) + \boldsymbol{\nabla}\left(\alpha\vec{E} \cdot \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(\alpha\overset{\downarrow}{\vec{E}} \cdot \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(\overset{\downarrow}{\vec{d}} \cdot \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) = \vec{F}$$

с учетом $\vec{F} = -\boldsymbol{\nabla}U$, получаем $U = -\frac{1}{2}\vec{d}\vec{E}$

12. Электрический квадрупольный момент. Тензор квадрупольного момента для аксиально-симметричной системы зарядов.

Электрический квадрупольный момент



Точное решение:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|} =: \Sigma \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Нужно разложить $\frac{1}{\vec{r} - \vec{r'}}$. Перейдем к тензорной записи:

$$\vec{r}(x, y, z) =: (x_1, x_2, x_3) \to x_\alpha, \text{ анолгично } \vec{r'} - x_\alpha'$$

Индексы $\alpha, \beta \in [1, 2, 3]$

По сути раскладываю функцию:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \underbrace{\frac{1}{r}}_{\substack{l=0 \\ \text{монополь}}} + \underbrace{(-x_\alpha')\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{r}}_{\substack{l=1 \\ \text{диполь}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(-x_\alpha')(-x_\beta')\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{1}{r}}_{\substack{l=2 \\ \text{квадруполь}}} + \ldots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{1}{r} - ?$$

Найдем:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{1}{2r^3}2x_1 = -\frac{x_1}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{x_1}{r^3}\right) = -x_1\left(-\frac{1}{r^4}\frac{x_2}{r}\right) = \frac{3x_1x_2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{x_1}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3}\cdot 1 + \frac{3x_1x_2}{r^5}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}$$

Таким образом квадрупольный член имеет вид:

$$\varphi = \Sigma q \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta \left(\frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}\right)$$

$$Q_{\alpha\beta} := \Sigma \frac{1}{2} q x_\alpha x_\beta$$

тогда

$$\varphi = Q_{\alpha\beta}\frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}$$

$$Tr\left(\frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5}\right) = \frac{-\delta_{\alpha\beta}r^2 + x_\alpha x_\beta}{r^5} =$$

$$= \frac{-(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})r^2 + 3(x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3)}{r^5} = \frac{-3r^2 + 3r^2}{r^5} = 0$$

Хотим:

$$\varphi = D_{\alpha\beta}\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} \text{ Как найти } D_{\alpha\beta}?$$

$$D_{\alpha\beta} : 3Q_{\alpha\beta} - ? \cdot \delta_{\alpha\beta} r'^2 \text{ подберем ? так, чтобы } Tr(D_{\alpha\beta}) = 0, \text{так как } \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{при этом } D_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}r^2 = 0 (= D_{\alpha\beta} = 0)$$

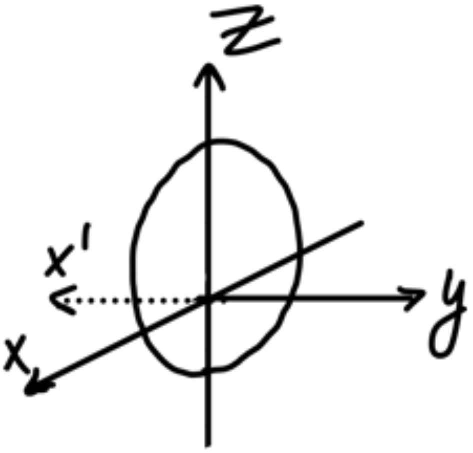
$$D_{\alpha\beta} = 3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2 \text{ Действительно } Tr(D_{\alpha\beta}) = D_{\alpha\alpha} = 3r'^2 - 3r'^2 = 0$$

Тогда

$$\varphi = \Sigma q(3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2)\cdot\frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5}$$

Таким образом $D_{\alpha\beta} = \Sigma q(3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2)$

Тензор квадрупольного момента для аксиально-симметричной системы зарядов



Вопрос:

$$D'_{xy} - ?$$
$$\|$$
$$D'_{12} - ?$$

$$- -$$

$$x'_1 x'_2 = x'y' = (-y)x = -xy| \text{ или } x'_1 x'_2 = -x_1 x_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D'_{12} = -D_{12}$$

Должно быть $D'_{12} = D_{12}$ из-за симметрии, поэтому имеем:

$$D_{12} = 0$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}D \end{pmatrix}$$

Что?

$$\varphi_2 = D_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5} = \frac{1}{2r^5}(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}D & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{D}{2r^5}(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -x_1/2 \\ -x_2/2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{D}{2r^5}\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_3^2\right) = \frac{D}{2r^5}\left(-\frac{x^2 + y^2}{2} + z^2\right) =$$

$$= \frac{D}{2r^5}\left(-r^2 \frac{\sin^2\theta}{2} + r^2\cos^2\theta\right) = \frac{D}{2r^3} \cdot \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

где последний член это полином Лежанра $P(\cos\theta)$