

Конспект лекций по дисциплине

Электродинамика и оптика

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

Преподаватель: Сеницкий Станислав Леонидович

Оглавление

1	Электромагнитные волны.	2
1.	Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение.	2
2.	Плоские волны.	4
3.	Плоские монохроматические волны (ПМВ).	6
4.	Средняя по времени плотность потока энергии в ПМВ	8
5.	Фурье-преобразование электромагнитных полей	8

Глава 1: Электромагнитные волны.

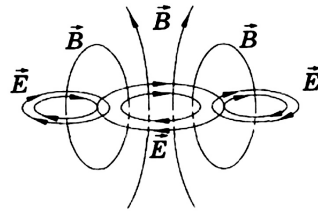
1. Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение.

Определение 1 (Свободное). означает без токов и зарядов $\Rightarrow \rho = 0, \vec{j} = 0$

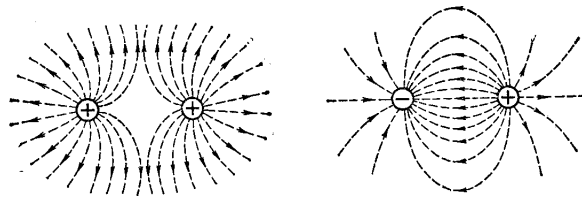
$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} = 0 \end{cases} + \text{Грани. условия} \begin{cases} (B_n)| = 0 & (E_\tau) = 0 \\ (D_n)| = 0 & (H_\tau) = 0 \end{cases}$$

Два типа векторных полей:

1. Вихревые: $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ (нет источников истоков этого поля \Rightarrow силовые линии либо замкнуты, либо уходят на бесконечность)



2. Потенциальные: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Силовые линии выходят или входят в области стоков и истоков (где $\operatorname{div} \vec{F} \neq 0$) или на бесконечности.



Далее мы будем рассматривать только вихревые поля (т.е. $\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = 0$)

Неизвестные 3 компоненты каждого поля: $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ - 12 неизвестные функций. Мы можем решить эту систему при помощи уравнений Максвелла + материальные уравнения: $\vec{B} = \vec{B}(H), \vec{E} = \vec{E}(D)$.

Простая модель среды: $\vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, где $\mu = \text{const}, \varepsilon = \text{const}$, годится для вакуума ($\mu = 1, \varepsilon = 1$) и для многих других сред/материалов при низких значения полях \vec{E}, \vec{B} и при невысоких частотах $f < 10^8$ Гц.

Волновое уравнение:

$$\text{Рассмотрим } \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H} = -\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

Распишем чему равен $\text{rot}(\text{rot} \vec{E})$:

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \nabla \underbrace{\text{div} \vec{E}}_{\frac{1}{\varepsilon} \text{div} \vec{D}=0} - \Delta \vec{E}$$

Получаем нашу систему:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Так же делаем с $\text{rot}(\text{rot} \vec{B})$ и получаем:

$$\begin{cases} \Delta \vec{B} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

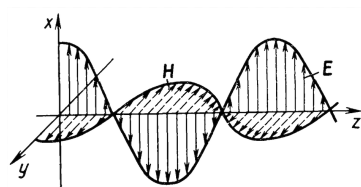
Согласование решений (1) и (2):

1) Решаем (1) и \vec{E} подставляем в уравнение Максвелла $\rightarrow \vec{B}$;

2) Решаем (2) и \vec{B} подставляем в уравнение Максвелла $\rightarrow \vec{E}$;

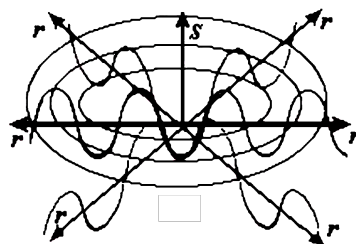
Различные простейшие решения волнового уравнения:

1) Плоские волны: все ненулевые компоненты полей \vec{E}, \vec{B} зависят от одной координаты (например от z) и времени t ;



2) Цилиндрические волны: все ненулевые компоненты полей \vec{E}, \vec{B} зависят от \vec{r} - расстояния от точки наблюдения до некоторой оси (центра волны) и от времени t ;

3) Сферическая волна: все ненулевые компоненты полей \vec{E}, \vec{B} зависят от \vec{r} - расстояния от точки наблюдения до центра волны.



2. Плоские волны.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ для примера } E_x : \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_x = 0 \quad (*)$$

Под f подразумевается E_x или E_y

$$\begin{aligned} \xi &= z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \eta = z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (\text{замена переменных}) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(\xi(z, t), \eta(z, t)) &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial z}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial z}}_{=1} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \left(-\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) \right) = -\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Подставляем в (*):

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \cancel{\frac{\partial}{\partial \eta}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial \eta}} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\cancel{\frac{\partial}{\partial \xi}} + \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} - \cancel{\frac{\partial}{\partial \xi}} \right) E_x(\varepsilon, \mu) = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta} E_x(\varepsilon, \mu) = 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow решения являются произвольные функции от своих аргументов: $f(\xi), f(\eta)$. Так как смешанные производные коммутируют ($\frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta \partial \xi}$) и уравнение равно нулю, то \vec{E}_x можно представить в виде суммы двух функций.

$$E_x(z, t) = f\left(z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + g\left(z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)$$

Физически это отражает принцип суперпозиции волн: любое решение может быть представлено в виде комбинации волн, движущихся в противоположных направлениях.

По аналогии можем записать \vec{E}_y :

$$E_y(z, t) = p\left(z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + h\left(z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right), \text{ где } \forall p, h$$

Свойства плоских волн:

1) Из определения, что плоские волны поперечные, то-есть перпендикулярны к направлению своего движения: $E_z = 0, B_z = 0$.

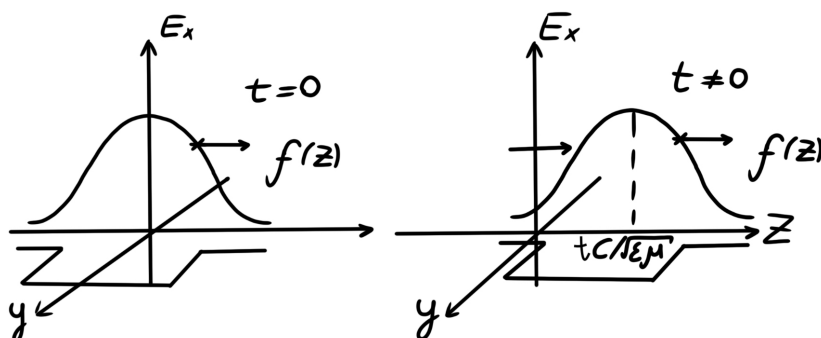
Доказательство.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0 = \varepsilon \left(\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_x}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial y}}_{=0} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = 0$$

То есть все сводится к тому, что наше поле $\vec{E}_z = E_0 = \text{const}$, но такое неизменное во времени однородное поле к волне отношения не имеет. Следовательно можно положить $\vec{E}_z = 0$, аналогично для $\vec{B}_z = 0$. ■

Пример:



В максимуме $z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{аргумент} = \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_\Phi} - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$$

2) Связь поперечных полей в плоской волне:

Рассмотрим бегущую волну в направлении оси z . В такой волне все величины являются функциями только от $\xi = z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t = z - ut$

$$\vec{E} = \vec{E}(\xi), \quad \vec{H} = \vec{H}(\xi)$$

Пусть $\vec{E} = \vec{E}(\xi)$ произвольная функция, тогда $\vec{H} = \vec{H}(\xi)$ определяется из уравнения $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. Распишем левую и правую части уравнения:

$$\text{rot} \vec{E}(\xi) = \left[\text{grad} \xi \times \frac{d\vec{E}}{d\xi} \right] = [\vec{e}_z \times \frac{d\vec{E}}{d\xi}] = \frac{d}{d\xi} [\vec{e}_z \times \vec{E}(\xi)]$$

$$\frac{\partial \vec{H}(\xi)}{\partial \xi} = \frac{d\vec{H}}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u \frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Подставляем это в уравнение:

$$\frac{d}{d\xi} [\vec{e}_z \times \vec{E}(\xi)] = \frac{\mu}{c} u \frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Проинтегрировав по ξ получаем и подставив $u = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\sqrt{\varepsilon}\vec{E} = \sqrt{\mu}[\vec{H} \times \vec{n}], \quad \sqrt{\mu}\vec{H} = \sqrt{\varepsilon}[\vec{n} \times \vec{E}]$$

где \vec{n} - единичный вектор направления движения волны ($\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n}$).

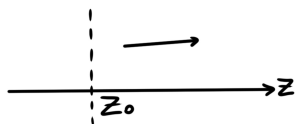
$$3) \varepsilon E^2 = \mu [\vec{H} \times \vec{n}]^2 = \mu H^2 n^2 = \mu H^2 : 8\pi \Rightarrow W_E = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu B^2}{8\pi} = W_B$$

4) $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$ - плотность потока энергии (вектор Умова-Пойтинга).

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c\varepsilon}{4\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \left(\vec{n}(\vec{E}\vec{E}) - \underbrace{\vec{E}(\vec{n}\vec{E})}_{=0} \right) = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \vec{n} \left(\underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{W_F} + \underbrace{\frac{\mu B^2}{8\pi}}_{W_B} \right)$$

3. Плоские монохроматические волновые (ПМВ).

$$E_x, E_y, B_x, B_y \sim e^{-i\omega t}$$



В плоскости $z = z_0, \vec{E}(z_0, t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow$

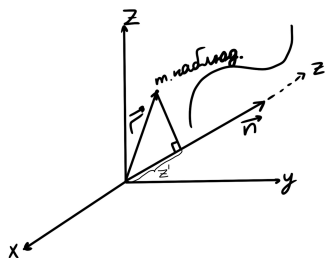
$$\Rightarrow \vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c}\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}t - z_0\right)} = \underbrace{\vec{E}_0 e^{-\frac{i\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c}z_0}}_{\vec{E}_{00}} \cdot \underbrace{e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c}\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}t\right)}}_{f\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}t\right)}$$

$$\vec{E}_0 \perp \vec{n} = \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}_0 = c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y, c_1 \text{ и } c_2 - \text{произвольные комплексные числа.}$$

Определение 2. Волновое число $k = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} = \frac{\omega}{V_{волн}}$

$$\vec{E} = E_{00} \vec{e}^{ikz-i\omega t} - \text{ для волны с } \vec{n} = \vec{e}_z, \quad \vec{E} = E_{000} \vec{e}^{-ikz-i\omega t} - \text{ для волны с } \vec{n} = -\vec{e}_z$$

Универсальная запись полей ПМВ:



$$\begin{cases} \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ikz' - i\omega t} \\ z' = (\vec{n}, \vec{r}) \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ik(\vec{n}, \vec{r}) - i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r}) - i\omega t}$$

Свойство: ПМВ как и любая плоская волна имеет две степени свободы, то есть обладает поляризацией.

Пример: ПМВ, бегущая по z , $\vec{E}(z, t) = (c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y) e^{ikz - i\omega t} (*)$, где c_1, c_2 - произвольные комплексные числа.

Определение 3. Плоская волна, у которой вектор \vec{E} при $\forall t$ во всем пространстве лежит в одной плоскости - плоскополяризованная (линейно поляризованная) волна.

Выражение (*) - представляет собой сумму двух плоскополяризованных волн с поляризациями вдоль x и y . \forall плоскую волну можно разложить на две плоскополяризованные.

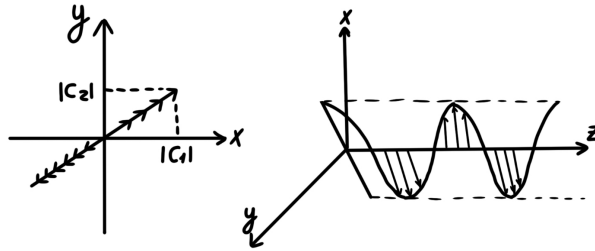
Рассмотрим несколько примеров. Пусть $c_1 = |c_1|e^{i\varphi}$, $c_2 = |c_2|e^{i\psi}$

Реальное поле есть вещественная часть (*)

$$\text{Re}(\vec{E}(z, t)) = |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e}_y \cos(kz - \omega t + \psi)$$

1) Пусть $\psi = \varphi + 2\pi m$, m - целое.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Re}\vec{E} &= |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e}_y \cos(kz - \omega t + \varphi + 2\pi m) = \\ &= (|c_1|\vec{e}_x + |c_2|\vec{e}_y) \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad t = \text{const} \end{aligned}$$



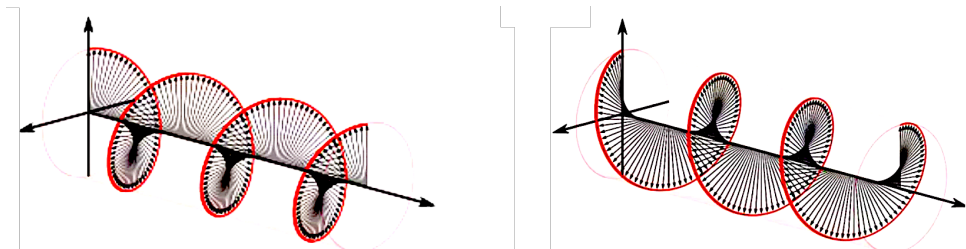
2) $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(kz - \omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(kz - \omega t + \varphi) \cos \frac{\pi}{2} - \sin(kz - \omega t + \varphi) \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) - |c_2|\vec{e}_y \sin(kz - \omega t + \varphi)$$

3) $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$

$$\text{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e}_y \sin(kz - \omega t + \varphi)$$



Слева у нас левополяризованная эллиптическая волна, справа правополяризованная эллиптическая волна.

В случае произвольных c_1, c_2 эллипс повернут на некоторый угол относительно оси x (задача на семинаре).

4. Средняя по времени плотность потока энергии в ПМВ

$$\vec{E}_0 = c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{4\pi} \langle \vec{E} \rangle = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{4\pi} (\langle E_x \rangle + \langle E_y \rangle) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\frac{|c_1|^2}{2} + \frac{|c_2|^2}{2} \right) = \\ &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{8\pi} (\vec{E}_0, \vec{E}_0^*) \end{aligned}$$

5. Фурье-преобразование электромагнитных полей

Для периодической функции ($f(t) = f(t + T)$), T - период, можно использовать следующее представление:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{+i\omega_0 n t} dt$$

Для непериодических функций Фурье представление в виде интеграла:

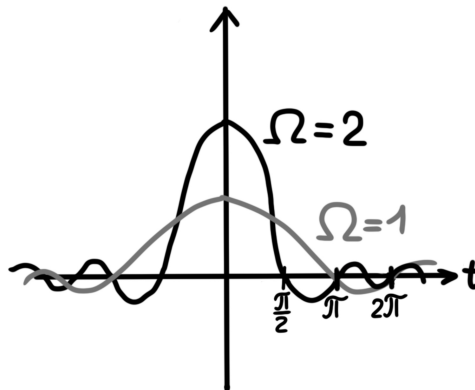
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} e^{-i\omega t} d\omega, \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{+i\omega t} dt$$

Для периодической функции: $\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \delta(\omega - n\omega_0)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Напоминание про свойства δ - функции

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i\omega t} d\omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{-e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}}{it2\Omega} 2\Omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} 2\Omega \cdot \text{sinc}(\Omega t)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \lim \int_{-\infty}^{\infty} 2\Omega \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \cdot \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right]$$

$$\int_C \frac{e^{ix}}{x} dx = 0 = \underbrace{\int_{|z|=R}}_{=0 \text{ (по лемме Жордана)}} + \int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{|z|=\rho} + \int_{\rho}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \int_{|z|=\rho} \overbrace{\frac{e^{i\rho e^{i\varphi}} \cdot \rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}}}^{\rightarrow 1} = -i \int_{\pi}^0 d\varphi = i\pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi \delta(t) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = 2\pi \delta(t-\tau) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega = 2\pi \delta(\omega-\omega')$$

1)

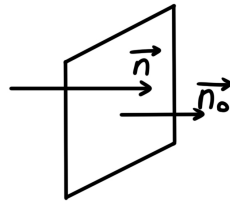
$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t}}_{\delta(t-\tau) \text{ (Фурье образ)}} e^{-i\omega t} d\omega$$

2)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) e^{i\omega \tau}$$

3)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^* dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2^*(\omega') d\omega' \frac{1}{2\pi} 2\pi \delta(\omega - \omega') f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2^*(\omega) d\omega \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega - \text{ равенство Парсеваля} \end{aligned}$$



Прошедшая энергия за ∞ интервал времени через 1 см^2

$$= \int (\vec{S} \vec{n}) dt = \frac{c(\vec{n}, \vec{n}_0)}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^2(t) dt = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} (\vec{n} \vec{n}_0) \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega$$

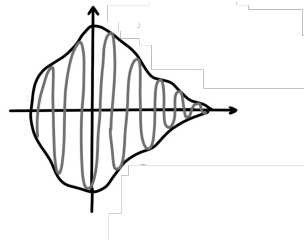
Свойства Фурье-преобразования:

1) Пусть $f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = f^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^* e^{+i\omega t} d\omega = [\omega \rightarrow -\omega'] =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(-\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

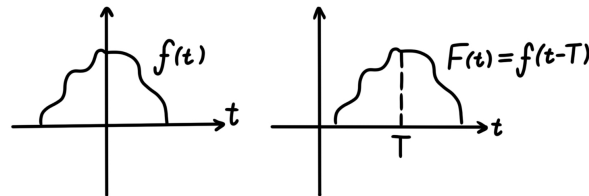
$$\hat{f}^*(-\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\hat{f}^*(\omega) = \hat{f}(-\omega)$$



Граница это - $\hat{f}(\omega)$, а внутри - $\hat{f}(\omega) e^{i\omega t}$

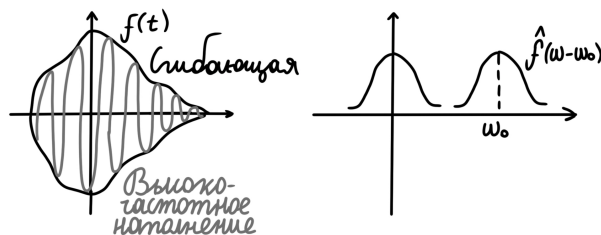
2) Спектр сдвинутого по времени сигнала:



$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{+i\omega t'} e^{i\omega T} dt' = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T}$$

3)

$$F(t) = f(t) e^{-i\omega_0 t} \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

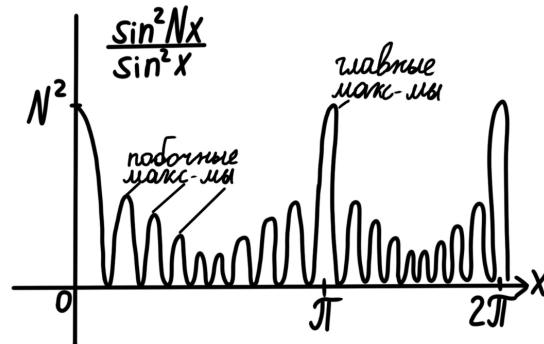


Как мы можем увидеть модулированная функция сдвигает спектр.

4) Спектр N повторенного сигнала:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t-nT); \quad F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(\omega) e^{i\omega nT} = f(\omega) \frac{e^{i\omega NT} - 1}{e^{i\omega T} - 1} = \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T \frac{N-1}{2}} \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}}$$

Последний выделенный множитель в правой части уравнения - это интерференционный множитель.



$$x = m\pi\varepsilon, \varepsilon > 0, \varepsilon - \text{малое}$$

$$\frac{\sin^2(N(m\pi + \varepsilon))}{\sin^2(m\pi + \varepsilon)} = \frac{\sin^2(Nm\pi + N\varepsilon)}{(-1)^{2m} \sin^2 \varepsilon} = \frac{(-1)^{2Nm} \sin^2(N\varepsilon)}{\sin^2 \varepsilon} = \frac{N^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = N^2$$