Вспомним:

$$1)\ \|Ay\| = \|A\|\,|y|$$
$$2)\ |\|AB\|| \le \|AB\|$$
$$3)\ \|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$$

$$d : L_2(0,1) \to L_2(0,1) \text{ - неограниченный оператор}$$
$$d : C^1[0,1] \to \underbrace{C[0,1]}_{(*)} \text{ - ограниченный оператор}$$

, где $(*) = \|f\|_C = \max_{t\in[0,1]}|f(t)|$

$$\|d\| = \sup_{g\neq 0}\frac{\|dg\|_C}{\|g\|_{C'}} = \sup_{g\neq 0}\frac{\|g'\|_C}{\|g\|_{C'}} = \sup_{g\neq 0}\frac{\max\limits_{t\in[0,1]}|g'(t)|}{\max\limits_{[0,1]}|g'(t)| + \max\limits_{[0,1]}|g(t)|} \overset{(**)}{=} 1$$

$$\|g\|_C = \max_{t\in[0,1]}|g'(t)| + \max_{t\in[0,1]}|g(t)|$$

$$g_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n+1}$$

$$\|d\|\,|_{\frac{\sin(nt)}{n+1}} = \frac{\max\limits_{[0,1]}\left|\frac{n\cos(nt)}{n+1}\right|}{\max\limits_{[0,1]}\left|\frac{n\cos(nt)}{n+1}\right| + \max\limits_{[0,1]}\left|\frac{\sin(nt)}{n+1}\right|} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n+1}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

, так как тут достигается единица $\Rightarrow$ $(**)$ - является равенством, так достигается на последовательности.

$$\|g_n\|_{C^\perp} < \infty$$

1. Сходимость операторов и операторные ряды

Определение 1. *Последовательность операторов (линейные) $A_n : E \to F$ сходятся к оператору $A : E \to F$, если $\|A_n - A\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (обозначаем $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A$ или $A \lim\limits_{n\to\infty} A_n$)*

$$\|A_n x - Ax\| \le \underbrace{\|A_n - A\|}_{\to 0(\text{слабее поточечной})}\|x\| \to 0$$

$$A_n x \xrightarrow{n\to\infty} Ax$$

Из поточечной не следует сходимость по норме. Пример: P_n в l_2

$$P_n x \xrightarrow{n\to\infty} Ix \quad P_n \to I \text{ (поточечная)}$$

$$\|P_n - P_{n+m}\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(P_n - P_{n+m})\|_{l_2}}{\|x\|_{l_2}} \le 1$$

Свойства $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A,\ B_n \xrightarrow{n\to\infty} B$

1) Линейность операций $\forall \alpha, \beta$ - числа:

$$\alpha A_n + \beta B_n \to \alpha A + \beta B$$

$$\|(\alpha A_n + \beta B_n) - (\alpha A + \beta B_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

2) Линейность A:

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha + \beta y) = \lim_{n\to\infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim_{n\to\infty} A_n y = \alpha A x + \beta A y$$

3) Если $\|A_n\| < \infty\ \forall n$, то $\|A\| < +\infty$ и $\|A_n\| \to \|A\|$

$$\exists n_0\ \ \|A_{n_0} - A\| \le 1$$

$$\|A\| = \|A - A_m + A_{n_0}\| \le \underbrace{\|A - A_{n_0}\|}_{\le 1} + \underbrace{\|A_{n_0}\|}_{<\infty} < +\infty$$

$$|\|A_n\| - \|A\|| \le \|A_n - A\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \|A\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n\|$$

Теорема 1. *Если H и H_1 - гильбертовы пространства, то пространство ограниченных линейных операторов $A : H \to H_1$ с операторной нормой:*

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$ *является полным.*

Доказательство.

A_n - фундаментальна $\|A_m - A_n\| \le \varepsilon$

$$\|A_m x - A_m x\| \le \|A_m - A_n\| \|x\| \le \varepsilon \|x\| \to \tag{$*$}$$

$$\to A_n x - \text{ фундаментальная последовательность в } H_1$$

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \text{ для каждого } x \in H$$

$$\exists!\ A : H \to H_1$$

1) Линейность $A:\ A(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta B y\ ,\forall \alpha, \beta,\ \forall x, y \in H$

2) Ограниченность $A:\ \ |\|A_m\| - \|A_n\|| \le \|A_m - A_n\| < \varepsilon$

Численная последовательность $\|A_n\|$ - последовательность Коши $\exists C\ \ \|A_n\| \le C\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\|A_n x\| \le \|A_n\| \|x\| \le C \|x\|$$

$$|\|A_n x\| - \|Ax\|| \le \|A_n x - Ax\| \le \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \|Ax\|$$

$$\lim \Rightarrow \|Ax\| \le C \|x\|$$

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le C \text{ } A \text{ - ограничен}$$

3) $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A$, то есть $\|A_n - A\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\lim(x) \text{ по } m \Rightarrow \|Ax - A_n x\| \le \varepsilon \|x\|$$

$$\|A_n - A\| = \sup \frac{\|A_n x - Ax\|}{\|x\|} \le \varepsilon$$

$\#$

Замечание: H_1 - не полное, могут ситуации: фундаментальная последовательность 1) не имеет предел; 2) предел ограниченного оператора неограничен

Определение 2. *A_n - линейная ограниченная $\forall n \in \mathbb{N}$ $A_n : H \to H_1$, где H_1, H - гильбертовы пространства $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ - называется операторным рядом:*

$S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} A_n$ *- частичная сумма ряда сходится, если сходится ряд:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

Свойства сходящихся рядов операторов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n = B$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) \text{ - сходится и сумма оператор } \alpha A \beta B$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ сходится и $\left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right\| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$

Доказательство.

1) Линейность оператора $\forall \alpha, \beta$ - числа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (\alpha A + \beta B_n) = \alpha \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} A_n + \beta \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} B_n = \alpha A + \beta B$$

2) $\|S_m - S_{m+p}\| = \left\|\sum\limits_{n=1}^{m} A_n + \sum\limits_{n=1}^{m+p} A_n\right\| = \left\|-\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} A_n\right\| \le \sum\limits_{n=m+p}^{m+p} \|A_n\| < \varepsilon$, где S_1, S_2 - фундаментальны, а A_n : г.п $\to$ г.п $\Rightarrow S_n$ сходятся по Теореме 1. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ - сходится.

При этом $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right\| = \left\|\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} A_n\right\| \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{N} A_n\right\| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\|A_n\| = \sum_{n=1}^{\infty}\|A_n\|$

#

2. Обратимость операторов

Определение 3. *Оператор $A : H \to H_1$ называется обратимым, если уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения $x \in H$*

Определение 4. *Если A - обратим, тогда каждому $y \in imA$ поставим в соответствии $x \in H$, при котором $Ax = y$. Этот оператор называется обратным к A и обозначается A^{-1}*

Свойства обратного оператора:
1) $dom_{(home)}A^{-1} = imA$
2) Если $A : H \to H_1$ линеен и обратим, то A^{-1} линеен (ограниченность A не влечет ограниченность A^{-1})
α, β - числа, $y_1, y_2 \in imA$
Нужно доказать: $A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2$

Доказательство.
Имеем: $\exists!\ x_j \in H\ Ax_j = y_j,$ где $j = 1, 2, \ldots$

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$$
$$\alpha x_1 \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

, где $x_1 = A^{-1}y_1,\ x_2 = A^{-1}y_2$

#