Вспомним **Определение 1.**

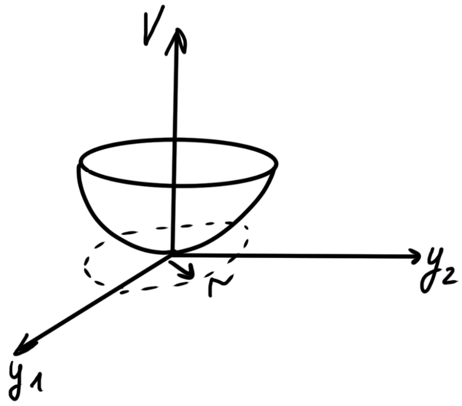
Функция $V(\vec{y})$, определенная в шаре $\underbrace{\{\|\vec{y}\| < r\}}_{\Leftrightarrow y_1^2+\ldots+y_n^2<r^2}$, называется функцией Ляпунова для системы (1) если:

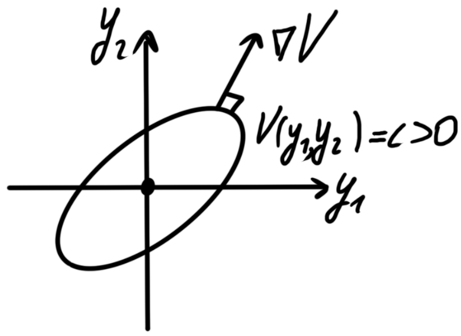
1) $V(\vec{y}) \in C^1(\|\vec{y}\| < r)$

2) $V(\vec{y}) > 0 \ \forall 0 < \|\vec{y}(t)\| < r, \ V(\vec{0}) = 0$

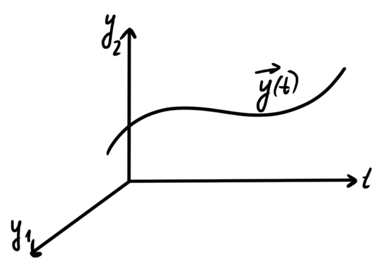
3) $(\nabla V(\vec{y}), \vec{f}(\vec{y})) \leq 0, \ \ \|\vec{y}\| < r$

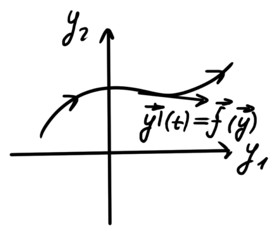
$1), 2) \Rightarrow$





$3) \Rightarrow$





Теорема 1 (Теорема Ляпунова об устойчивости)**.** *Пусть для системы (1) существует функция Ляпунова. Тогда нулевое решение $\vec{y}^*(t) = 0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство.

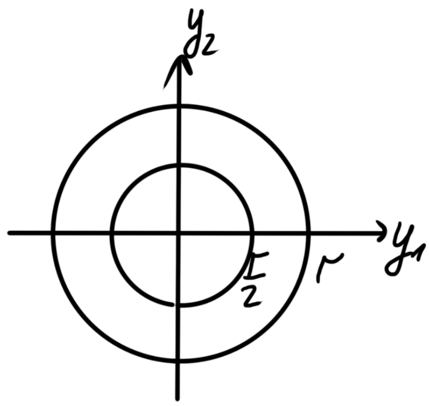
Надо доказать:

1) $\vec{y}^*(t) = 0$ определенно от t_0 до $+\infty$ (это верно)

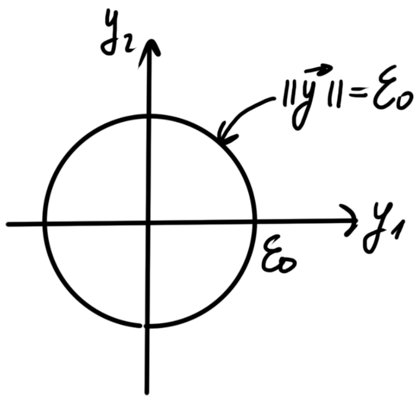
2) $\exists \Delta > 0 \ \forall \vec{y}(t_0) : \|\vec{y}(t_0)\| < \Delta \Rightarrow \vec{y}(t)$ определенно от t_0 до $+\infty$

3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \vec{y}(t_0) : \|\vec{y}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\vec{y}(t)\| < \varepsilon \ \forall t \geq t_0$

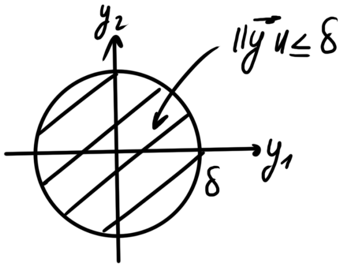
Пусть дано $\varepsilon > 0$:

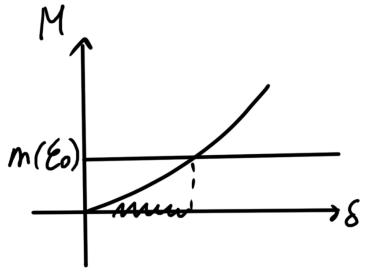


Возьмем $\varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon, \dfrac{r}{2}\right\}$. Обозначим $m(\varepsilon_0) = \min\limits_{\|\vec{y}\|=\varepsilon_0} V(\vec{y}) > 0$



$$M(\delta) = \max_{\|\vec{y}\|\leq\delta} V(\vec{y})$$





Выберем δ так, чтобы $M(\delta) < m(\varepsilon_0)$
Утверждается, что $\delta < \varepsilon_0$.
От противного: пусть $\delta \geq \varepsilon_0$. Тогда:

$$m(\varepsilon_0) = \min_{\|\vec{y}\|=\varepsilon_0} V(\vec{y}) \leq \max_{\|\vec{y}\|=\varepsilon_0} V(\vec{y}) \leq \max_{\|\vec{y}\|\leq\varepsilon_0} V(\vec{y}) \overset{\delta\geq\varepsilon_0}{\leq} \max_{\|\vec{y}\|\leq\delta} V(\vec{y}) = M(\delta)$$

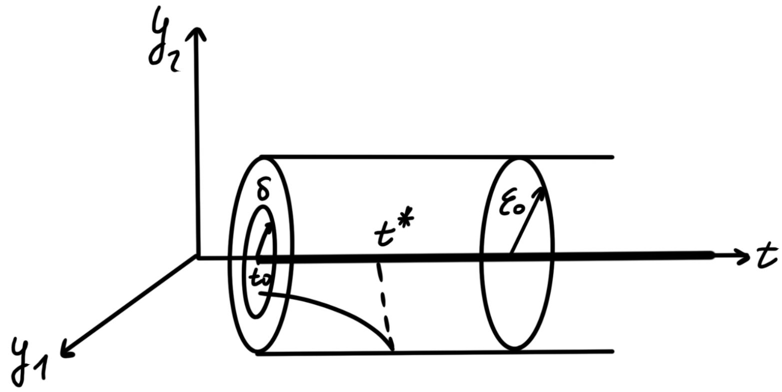
$$\text{Противоречие} \Rightarrow \delta < \varepsilon_0$$

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases} \quad \|\vec{y}_0\| < \delta$$

$\Rightarrow \exists!$ непродолжаемое решение $\vec{y}(t)$, определенное на открытом интервале $\alpha, \omega,\ t_0 \in (\alpha, \omega),\ \omega \leq +\infty$

Докажем, что $\|\vec{y}(t)\| < \varepsilon_0\ \forall t \in [t_0, \omega)$.



Пусть $t^* > t_0$ - первая точка, в которой $\|\vec{y}(t^*)\| = \varepsilon_0$, т.е $\forall t \in [t_0, t^*) : \|\vec{y}(t)\| < \varepsilon_0$
Воспользуемся условием 3) $\nabla V(\vec{y}), \vec{f}(\vec{y}) \leq 0,\ \ \|\vec{y}\| < r$.
Возьмем решение $\vec{y}(t),\ t \in [t_0, t^*] \Rightarrow \|\vec{y}(t)\| \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon, \dfrac{r}{2}\right\} \leq \dfrac{r}{2} < r$
Возьмем $V(\vec{y}(t)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}V(\vec{y}(t)) = \frac{d}{dt}V(y_1(t), ..., y_n(t)) = \frac{\partial V}{\partial y_1}(\vec{y}(t))\underbrace{\frac{dy_1(t)}{dt}}_{f_1(\vec{y})} + ... + \frac{\partial V}{\partial y_n}(\vec{y}(t))\underbrace{\frac{dy_n(t)}{dt}}_{f_n(\vec{y})} =$$

$$= (\nabla V(\vec{y}(t)), \vec{f}(\vec{y}(t))) \leq 0$$

Получили $\dfrac{d}{dt}V(\vec{y}(t)) \leq 0,\ t \in [t_0, t^*]$

$$V(\vec{y}(t^*)) \leq V(\vec{y}(t_0)) \tag{$*$}$$

$$V(\vec{y}(t^*)) \geq \min_{\|\vec{y}\| = \varepsilon_0} V(\vec{y}) = m(\varepsilon_0) \tag{$**$}$$

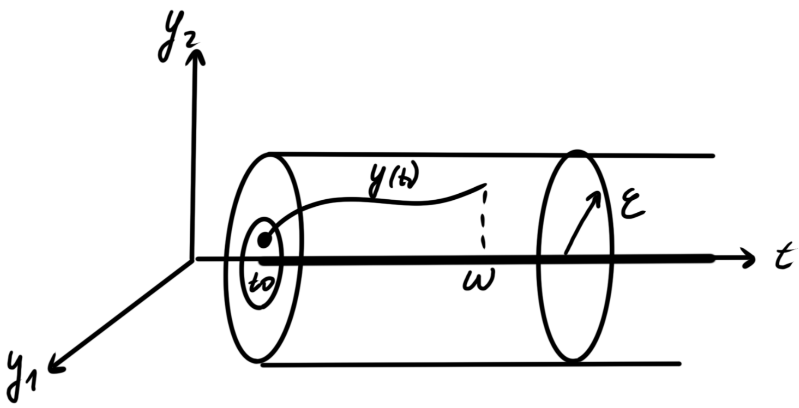
$$V(\vec{y}(t_0)) = V(\vec{y}_0) \leq \max_{\|\vec{y}\| \leq \delta} V(\vec{y}) = M(\delta) \tag{$***$}$$

$$m(\varepsilon_0) \overset{(**)}{\leq} V(\vec{y}(t^*)) \overset{(*)}{\leq} V(\vec{y}(t_0)) \overset{(***)}{\leq} M(\delta) \text{ - противоречие.}$$

$$\Rightarrow \|\vec{y}(t)\| < \varepsilon_0\ \forall r \in [t_0, \omega)$$

Мы доказали:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|\vec{y}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\vec{y}(t)\| < \varepsilon\ \forall r \in [t_0, \omega)$$



Пусть $\omega < +\infty, \lim\limits_{t \to \omega - 0} \vec{y}(t) = \vec{y}_\omega \in \mathbb{R}^n$

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \\ \vec{y}(\omega) = \vec{y}_\omega \end{cases}$$

$\Rightarrow$ по теореме Пикара $\exists!$ непродолжаемое решение $\tilde{t}(t),\ t \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}),\ \omega \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\omega})$

Рассмотрим функцию:

$z(t) = \begin{cases} y(t),\ t \in [t_0, \omega) \\ \tilde{y}(t),\ t \in [\omega, \tilde{\omega}) \end{cases}$ - продолжаемое решения $y(t)$, т.е решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Почему $\exists \dfrac{d}{dt} z(t) \Big|_{t=\omega}$?

$$\frac{d}{dt} z(t) \Big|_{t=\omega-0} = \vec{f}(\vec{y})|_{t=\omega-0} = \vec{f}(\vec{y}_\omega)$$

$$\frac{d}{dt} z(t) \Big|_{t=\omega+0} = \vec{f}(\vec{y})|_{t=\omega+0} = \vec{f}(\vec{y}_\omega)$$

Противоречие с тем, что $\vec{y}(t)$ - непродолжаемое решение $\Rightarrow \omega = +\infty \Rightarrow$ доказан пункт 3).

2) Возьмем $\varepsilon = \dfrac{r'}{2} \Rightarrow \exists \delta \left(\dfrac{r}{2}\right) \Rightarrow \Delta = \delta \left(\dfrac{r}{2}\right) \Rightarrow$ доказан пункт 2).

$$\Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0 \text{ устойчиво по Ляпунову}$$

$\#$

Теорема 2 (Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Пусть функция $V(\vec{y})$ такая, что выполнено условие 1), 2),* $3^*)(\nabla V(\vec{y}, \vec{f}(\vec{y}))) < 0,\ 0 < \|\vec{y}\| < r$. *Тогда $\vec{y}^*(t) = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.*

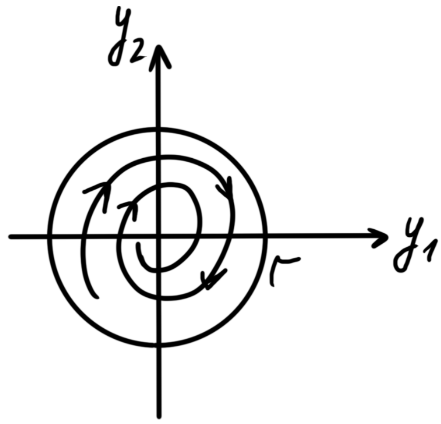
Без доказательства.

Теорема 3 (Теорема Ляпунова о неустойчивости). *Пусть существует функция $V(\vec{y})$, удовлетворяющее условиям 1), 2),* $3^{**})(\nabla V(\vec{y})\vec{f}(\vec{y})) > 0,\ 0 < \|\vec{y}\| < r$. *Тогда $\vec{y}^*(t) = 0$ неустойчиво.*

Доказательство.

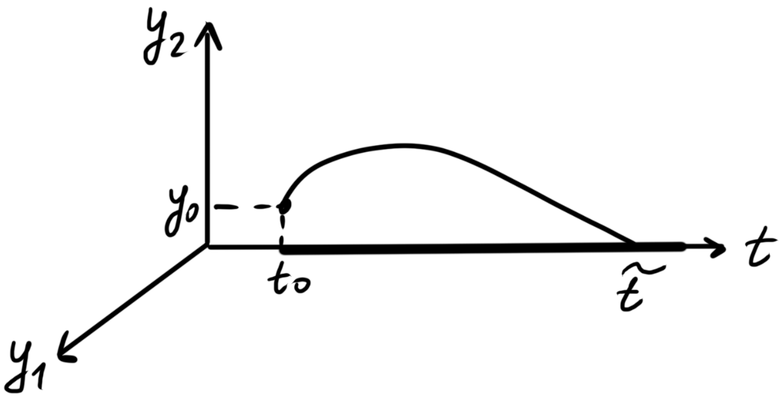
От противного: пусть $\vec{y}^*(t) = 0$ устойчиво по Ляпунову, в частности, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{y}(t_0) : \|\vec{y}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\vec{y}(t)\| < \varepsilon\ \forall t > t_0$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{r}{2} \Rightarrow \exists \delta\left(\dfrac{r}{2}\right) : \|\vec{y}(t_0)\| < \delta\left(\dfrac{r}{2}\right) \Rightarrow \|\vec{y}(t)\| < \dfrac{r}{2} < r\ \forall t \geq t_0$



Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}, \|\vec{y}_0\| < \delta\left(\frac{r}{2}\right), \underbrace{\vec{y}_0 \neq \vec{0}}_{\vec{y}(t)\neq 0,\ \forall t \geq t_0} \Rightarrow \|\vec{y}(t)\| < \frac{r}{2}\ \forall t \in [t_0, +\infty)$$



$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \\ \vec{y}(\tilde{t}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0 \text{ - решение.}$$

$$3) \Rightarrow \frac{d}{dt}V(\vec{y}(t)) = (\nabla V(\vec{y}(t)), \vec{f}(\vec{y}(t))) > 0,\ t \geq t_0$$

$$V(\vec{y}(t)) > \underbrace{V(\vec{y}(t_0))}_{=\alpha>0},\ t > t_0$$

$$V(\vec{y}(t)) > \alpha,\ t \geq t_0$$

Рассмотрим множество $\underbrace{\left\{\vec{y} : \mathbb{R}^2 : \|\vec{y}\| \leq \frac{r}{2},\ V(\vec{y}) \geq \alpha\right\}}_{P}$- компакт, $\forall t \geq t_0,\ \ \|\vec{y}(t)\| \in P,\ \vec{0} \not\in P$

Рассмотрим:

$$\min_{\vec{y}\in P}(\nabla V(\vec{y}), \vec{f}(\vec{y})) = \gamma > 0$$

$$\frac{d}{dt}V(\vec{y}(t)) = (\nabla V(\vec{y}(t)), \vec{f}(\vec{y}(t))) \overset{\vec{y}(t)\in P}{\geq} \gamma > 0 \ \Big| \int_{t_0}^{t}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}V(\vec{y}(s))ds \geq \int_{t_0}^{t} \gamma ds$$

$$V(\vec{y}(t)) \geq V(\vec{y}(t_0)) + \underbrace{\gamma(t - t_0)}_{\to\infty},\ \forall t \geq t_0 \text{ при } t \to +\infty$$

$$\Rightarrow V(\vec{y}(t)) \to \infty$$

$$\|\vec{y}(t)\| \leq \frac{r}{2}$$

$$V(\vec{y}(t)) \leq \max_{\|\vec{y}\|\leq\frac{r}{2}} V(\vec{y}) < +\infty$$

Противоречие.

$$\Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0 \text{ неустойчиво}$$

#

Пример: Исследовать на устойчивость нулевое решение:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + \alpha y_1^3 \\ y_2' = -y_1 \alpha y_2^3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1^*(t) = 0 \\ y_2^*(t) = 0 \end{cases} \quad \text{- решение.}$$

$$V(y_1, y_2) = a y_1^{2n} + b y_2^{2m}\ (a, b > 0\ m, n \in \mathbb{N}) - \text{ выполнены } 1), 2)$$

, где $a, b > 0,\ n, m \in \mathbb{N}$

$$(\nabla V, f) = \left(\begin{pmatrix} 2any_1^{2n-1} \\ 2bmy_2^{2m-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 + \alpha y_1^3 \\ -y_1 + \alpha y_2^3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2nay_1^{2n-1}y_2 + 2nay_1^{2n-1}\alpha y_1^3 + 2bmy_2^{2m-1} + 2mby^{2m-1}y_2^3$$