$$\sum_{j=1}^{n} |x_j > \lambda_j \alpha_j - \sum_{j=1}^{n} |x_j > \alpha_j \lambda = \sum_{j=1}^{n} |x_j > \beta_j$$

$$\alpha_j \lambda_j - \alpha_j \lambda = \beta_j$$

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda}$$

$$\begin{array}{r|l}
x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda} x_j & |x >= \sum_{j=1}^{n} |x_j > \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda} \\
x = \sum_{j=1}^{n} \frac{(y_j, x_j)}{\lambda_j - \lambda} x_j & |x >= \sum_{j=1}^{n} |x_j > \frac{< x_j | y_j >}{\lambda_j - \lambda} \\
 & |x >= \underbrace{\left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j >< x_j|}{\lambda_j - \lambda} \right\}}_{(A-\lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j >< x_j|}{\lambda_j - \lambda}} |y >
\end{array}$$

1. Оператор, сопряженный и ограниченный, и его свойства

Пусть H и H_1 - гильбертовы пространства, $A : H \to H_1$ - линейный ограниченный оператор.

Фиксируем $x_1 \in H_1$ и построим функционал $f : H \to \mathbb{C}$ по правилу:

$$f(x) = (Ax, x_1)_{H_1}, \ x \in H$$

Линейность A + линейность скалярного произведения по , f - линейный функционал.

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x_1)|}{\|x\|} \overset{\text{н. К-Б}}{\leq} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\| \, \|x_1\|}{\|x\|} = \|A\| \, \|x_1\| < \infty$$

$$\|f\| \text{ ограниченна } \Rightarrow f \text{ непрерывный. } \Rightarrow f \in H^*$$

Тогда по Теореме Риса $\exists! x_0 \in H : f(x) = (x, x_0) \ \forall x \in H$

$$f(x) = (Ax, x_1) = (x, x_0) \ \forall x \in H$$

, по x_1 находим x_0, то есть возникло правило $x_1 \in H_1 \to x_0 \in H$. По этому правилу строю A^* - сопряженный оператор.

$$x_0 = A^* x_1$$

A^* задается равенством: $(Ax, x_1) = (x, A^* x_1)$

Свойства сопряженных операторов: H_1, H - гильбертовы пространства, $A, B : H \to H_1$ - линейные ограниченные, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

1) A^* - линейный оператор и $\|A^*\| = \|A\|$

Доказательство.

$$x \in H,\ y_1, y_2 \in H_1$$

$$(x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) = (Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}(Ax, y_1) + \overline{\beta}(Ax, y_2) = \overline{\alpha}(x, A^* y_1) + \overline{\beta}(x, A^* y_2) =$$

$$= (x, \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2) \Rightarrow A^* \text{ - линейный по Лемме 1. так как } x \text{ - любой}$$

Лемма 1. $\forall z \in H\ (x, z) = (y, z) \Rightarrow y = x$

Доказательство.

$$(x - y, z) = 0$$

Подставим $z = x - y$

$$(x - y, x - y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Аналогично для $\forall z \in H : (z, x) = (z, y) \Rightarrow x = y$

#

$$(x, A^* y) = (Ax, y) \overset{\text{н. К-Б}}{\leq} \|Ax\|\,\|y\| \leq \|A\|\,\|x\|\,\|y\|$$

Подставим $x = A^* y$:

$$\|A^* y\| \leq \|A\|\,\|A^* y\|\,\|y\|$$
$$\|A^* y\| \leq \|A\|\,\|y\|$$

$$\frac{\|A^* y\|}{\|y\|} \leq \|A\|\ \ \forall y \in H_1,\ y \neq 0$$

$$\|A^*\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \leq \|A\| \Rightarrow \text{ограниченность } A^* \text{ (норма конечна)}$$

$$\|A^*\| \leq \|A\|$$

#

2) $(A^*)^* = A,\ (A)^* : H \to H_1$

Доказательство.

$$\forall x \in H_1,\ \forall y \in H$$

$$(x, (A^*)^* y) = (A^* x, y) = \overline{(y, A^* x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$$

, тогда по Лемме 1. $\Rightarrow (A^*)^* = A$

#

3) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$

Доказательство.

$$(x, (\alpha A + \beta B)^*) = ((\alpha A, \beta B)x, y) = \alpha(x, A^* y) + \beta(x, B^* y)$$

#

4) $I^* = I$

Доказательство.

$$(x, I^* y) = (Ix, y) = (x, y) = (x, Iy)$$

#

5) $(AB)^* = B^* A^*$

Доказательство.

$$(x, (AB)^* y) = ((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^* y) = (x, A^* B^* y)$$

#

Применение сопряженного оператора при нахождении спектра

Теорема 1. *$A : H \to H$ линейный ограниченный и $\lambda \in \mathbb{C}$ не является собственным значением A $(\lambda \not\in \sigma_p(A))$. Тогда $\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(A)^*$.*

Доказательство.

$(\Rightarrow) : \lambda \in \sigma_r(A)$

$$\underbrace{dom(A - \lambda I)^{-1}}_{im(A - \lambda I) \text{ подпространство } H} \quad \text{не плотна в } H$$

$$S = \overline{dom(A - \lambda I)^{-1}} \text{ замкнутое подпространство в } H$$

Гильбертово пространство и замкнутое $S \Rightarrow H = S \oplus S^{\perp}$.
$S^{\perp} \neq \{0\}$, так как $S \neq H$ $\exists y \in S^{\perp},\ y \neq 0$ $\forall x \in H$

$$(x, (A - \lambda I)^* y) = ((A - \lambda I)x, y) = 0 = (x, 0)$$

$(A - \lambda I)x \in im(A - \lambda I) = dom(A - \lambda I)^{-1} \subset S \Rightarrow (A - \lambda I)x \in S$

$$(A - \lambda I)^* y = 0 \text{ по лемме}$$

$$(A^* - \overline{\lambda} I)y = 0 (\text{по свойствам})$$

$$A^* y = \overline{\lambda} y + y \neq 0,\ \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$$

$(\Leftarrow) : \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, то есть $\overline{\lambda}$ - собственное число.

$$\exists y \in H, y \neq 0 - \text{ собственный вектор} : A^* y = \overline{\lambda} y \Leftrightarrow (A^* \overline{\lambda} I) y = 0$$

$$\underbrace{(A - \lambda I)^*}_{\text{нулевой вектор}} \; y = 0$$

$$\forall x \in H : (x, 0) = (x, (A - \lambda I)^* y) = (\underbrace{(A - \lambda I)x}_{\in Im(A - \lambda I)}, y)$$

$$y \perp im(A - \lambda I) \quad y \perp \overline{im(A - \lambda I)}$$

$$\overline{im(A - \lambda I)} = \overline{dom(A - \lambda I)^{-1}} M = M \cup \{\text{пред-т.}\}$$

$$\text{так как } \lambda \not\in \sigma_p(A) \; \exists x_n \to x_0 \; x_n \in M$$

$$(x_0, y) = (\lim_{n \to \infty} x_n, y) = \lim_{n \to \infty} (x_n, y)$$

$$H = S \oplus S^{\perp}, \; y \in S^{\perp}$$

$y \neq 0$ то есть $S^{\perp} \not\in \{0\}$, а это значит, что $S \neq H$, а это означает, что $dom(A - \lambda I)^{-1}$ не плотна в H.

#

2. Ограниченные самосопряженные операторы

Определение 1. *H - гильбертово пространство $A : H \to H$ линейный ограниченный оператор является самосопряженным, если $A = A^*$, то есть $\forall x, y \in H$ $(Ax, y) = (x, Ay)$*

Теорема 2 (о точечном спектре оператора)**.** *Все собственные числа самосопряженные ограниченный НЕ ПОНЯЛ, а собственные векторы, отвечают различным собственным значениям ортогональны друг другу.*

Доказательство. λ - собственные значения $A \Rightarrow \exists x \in H : Ax = \lambda H$

$$\lambda \left\| x \right\|^2 = \lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = \overline{\lambda}(x, x) = \overline{\lambda} \left\| x \right\|^2 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$$

$$Re\lambda + iIm\lambda = Re - iIm\lambda \Rightarrow Im\lambda = 0$$

$$Im\lambda = -Im\lambda \Rightarrow \lambda \text{ - вещественное}$$

#