

Конспект лекций по дисциплине

Дифференциальные уравнения

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

Преподаватель: Скворцова Мария Александровна

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Вариационное исчисление.</b>	<b>2</b>
1.	Примеры задач вариационного исчисления . . . . .	2
2.	Простейшая задача вариационного исчисления . . . . .	4
3.	Необходимые условия локального экстремума . . . . .	4
4.	Случай понижения порядка в уравнении Эйлера . . . . .	7
5.	Решение задачи о брахистохроне . . . . .	8
6.	Решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади . . . .	11
7.	Вариационная задача с несколькими функциями . . . . .	12

# Глава 1: Вариационное исчисление.

## 1. Примеры задач вариационного исчисления

*Задача математического анализа:*

Есть кривая заданная функцией  $f(x)$  найти точки экстремума:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2 - \text{точки, подозреваемые на экстремум}$$

$$f''(x_1) < 0 \Rightarrow x_1 - \max$$

$$f''(x_2) > 0 \Rightarrow x_2 - \min$$

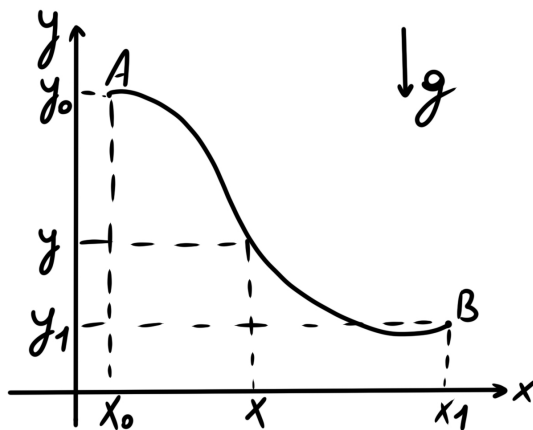
*Задача вариационного исчисления:*

Функционал:  $I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$

Найти функцию  $y(x)$  такую, что  $I[y]$  принимает  $\min$  или  $\max$

Пример 1 : задача наискорейшего спуска (задача Брахистохроны)

Найти кривую  $y(x)$  по которой тело из точки А в точку В попадет за наименьшее время.



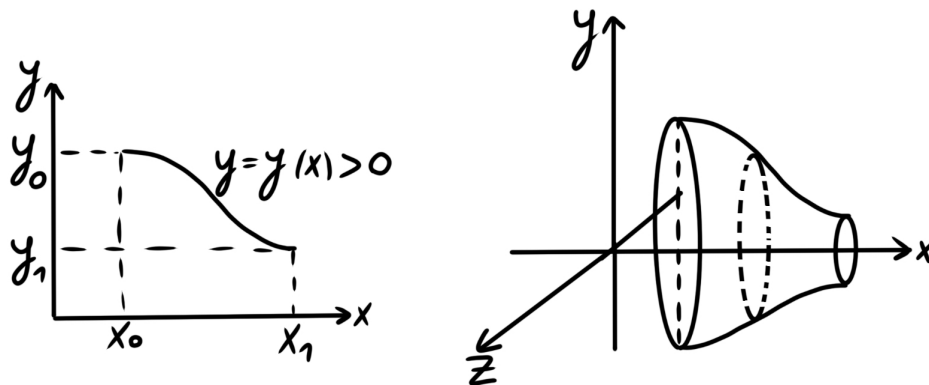
$$\text{З.С.Э: } mgy_0 + 0 = mgy(x) + \frac{m|v|^2}{2}$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \frac{dx}{dt}$$

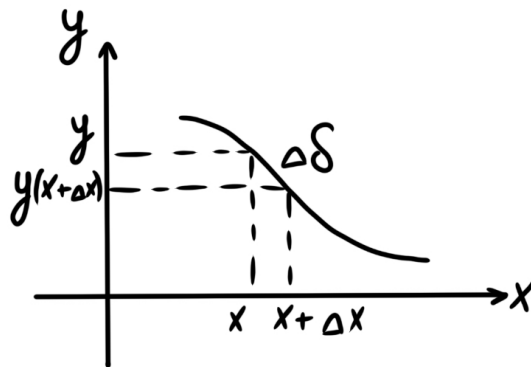
$$\sqrt{2g(y_0 - y(x))} = |v| = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \frac{dx}{dt}$$

$$T = \int_0^T dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}} dx$$

Пример 2 : задача поверхности вращения наименьшей площади.



Площадь  $S \rightarrow \min$



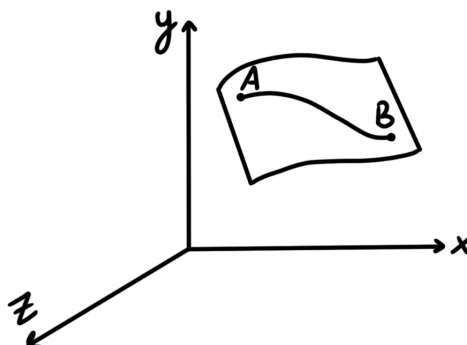
$$\Delta\delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

$$\Delta S = 2\pi y(x) \Delta\delta$$

$$\sum \Delta S \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Пример 3 : задача о геодезических на поверхности.

Найти кривую, проходящую через точки А и В, лежащую на поверхности, которая имеет наименьшую длину.



$G(x, y, z) = 0$  – уравнение поверхности

Пусть уравнение кривой :  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1] - \text{параметр}$

$G(x(t), y(t), z(t)) = 0 \leftarrow$  кривая лежит на поверхности

$$l = \sum \Delta l = \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sum \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

$$l \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

## 2. Простейшая задача вариационного исчисления

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1)$$

$F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$  непустое открытое множество,  $F \in C^2(\mathbb{D})$

**Определение 1** (допустимая функция). Функция  $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  называется допустимой, если:

- 1)  $y(x) \in C([x_0, x_1])$
- 2)  $y(x) \in C^2((x_0, x_1))$
- 3)  $\forall x \in [x_0, x_1], (x, y(x), y'(x)) \in \mathbb{D}$
- 4)  $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$  сходится

$$\text{Краевые условия: } y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \quad (2)$$

**Определение 2.** Допустимая  $\tilde{y} : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  доставляет локальный минимум функционалу (1) при краевых условиях (2), если:

- 1)  $\tilde{y}(x_0) = y_0, \tilde{y}(x_1) = y_1$
- 2)  $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall$  допустимой функции  $y(x)$ , удовлетворяющей (2):  $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon_0$  выполняется:  $I[\tilde{y}] \leq I[y]$

**Определение 3.** Допустимая функция  $\tilde{y} : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  доставляет глобальный минимум функционалу  $I[y]$  при краевых условиях (2), если:

- 1)  $\tilde{y}(x_0) = y_0, \tilde{y}(x_1) = y_1$
- 2)  $\forall$  допустимой функции  $y(x)$ , удовлетворяющей (2), выполняется  $I[\tilde{y}] \leq I[y]$

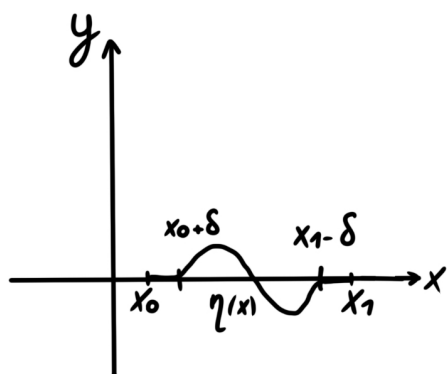
## 3. Необходимые условия локального экстремума

Аналог  $f'(x) = 0$

Пусть функция  $\tilde{y}$  доставляет функционалу  $I[y]$  при краевых условиях (2) локальный минимум  $\Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[y]$ , где  $y(x)$  из определенного локального минимума.

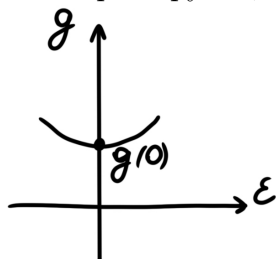
Возьмем  $y(x) = \tilde{y} + \varepsilon \eta(x)$ ,  $\varepsilon \in \left(-\frac{\varepsilon_0}{M}, \frac{\varepsilon_0}{M}\right)$ ,  $M = \max_{x \in [x_0, x_1]} |\eta(x)|$

$\eta(x) \in C^2([x_0, x_1])$  – финитная функция.



$$\Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]$$

Рассмотрим функцию  $g(\varepsilon) = I[\tilde{y} + \varepsilon\eta] \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon)$



$\varepsilon = 0$  — точка локального минимума для функции  $g(\varepsilon) \Rightarrow g'_\varepsilon(0) = 0$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y} + \varepsilon\eta(x), \tilde{y}' + \varepsilon\eta'(x)) dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} \quad \boxed{=}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+\delta}}_{(1)} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{(2)} + \underbrace{\int_{x_1-\delta}^{x_1}}_{(3)} ; \quad \frac{d}{d\varepsilon} I_1 = \frac{d}{d\varepsilon} I_2 = 0$$

**Теорема 1** (из математического анализа).  $f(x, \varepsilon) : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывна,  
 $\exists \frac{df}{d\varepsilon}(x, \varepsilon)$  - непрерывна

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(x, \varepsilon) dx = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} f(x, \varepsilon) dx$$

Вносим производную под знак интеграла:

$$\boxed{=} \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x) \right] dx \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x) dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}(x)\eta(x) \Big|_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{=0} -$$

$$- \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \eta(x) \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'}(\dots) \right] dx \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(\dots) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'}(\dots) \right] \eta(x) dx \Big|_{\varepsilon=0} \quad \boxed{=}$$

$$\boxed{=} \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \dots \right] dx = 0$$

$\forall$  финитной функции  $\eta(x)$

**Лемма 1** (основанная лемма вариационного исчисления).  $f(x) : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывна и  $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0, \forall$  финитной  $\eta(x)$ . Тогда  $f(x) \equiv 0 \forall x \in [x_0, x_1]$

По лемме:  $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$  - необходимое условие локального экстремума (уравнение Эйлера)

**Определение 4** (экстремаль). Допустимая функция  $y(x)$  называется экстремалью функционала  $I[y]$  при краевых условиях (2), если:

- 1)  $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$
- 2)  $y(x)$  удовлетворяет условию Эйлера

$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{cases} \quad (1)$$

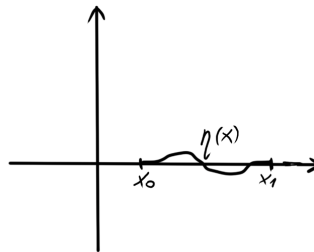
Найти функцию  $y(x)$  такую, чтобы функционал  $I[y]$  принимал наибольшее или наименьшее значение.

Необходимо найти условие локального экстремума:

$$\text{Если } \tilde{y} \text{ экстремум} \Rightarrow \tilde{y} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2)$$

Доказательство формулы (2).

$$I[\tilde{y}] \leq I[y], y = \tilde{y} + \varepsilon \eta, \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1), \eta(x) \in C^2([x_0, x_1]) - \text{финитная}$$

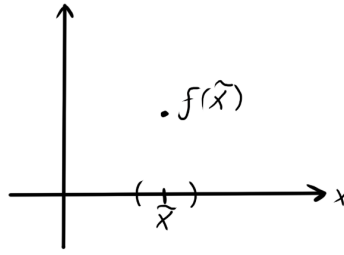


$$\underbrace{I[y]}_{=g(0)} \leq \underbrace{I[\tilde{y} + \varepsilon \eta]}_{=g(\varepsilon)} \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon) \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) \right) \eta(x) dx, \forall \eta(x) - \text{финитная}$$

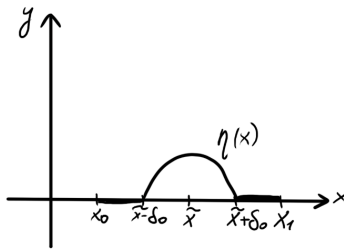
**Лемма 2** (Лагранжа). Пусть  $f(x)$  — непрерывна и  $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0, \forall \eta(x)$  — финитная на  $[x_0, x_1]$ . Тогда  $f(x) = 0, \forall x \in [x_0, x_1]$

Доказательство. От противного:



Пусть для определенности  $f(\tilde{x}) > 0$ . Тогда так как  $f(\tilde{x})$  - непрерывна, то  $f(x) > 0$  при  $x \in (\tilde{x} - \delta_0, \tilde{x} + \delta_0)$

Возьмем функцию  $\eta(x) = \begin{cases} (\delta_0^2 - (x - \tilde{x}))^4, & |x - \tilde{x}| < \delta \\ 0, & |x - \tilde{x}| > \delta_0 \end{cases}$  - финитная функция



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = \int_{x_0-\delta_0}^{x_1-\delta_0} \underbrace{f(x)}_{>0} \underbrace{\eta(x)}_{>0} dx > 0 - \text{противоречие}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [x_0, x_1] : f(x) = 0$$

■

Из доказательства леммы следует, что доказана формула (2)

■

#### 4. Случай понижения порядка в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad F = F(x, y(x), y'(x))$$

$$1) F = f(x, y) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow y = y(x)$$

$$2) F = F(x, y') \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = C$$

$$3) F = F(y, y') :$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \mid \cdot y'$$

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - \underbrace{y' \frac{\partial F}{\partial y'}}_{= \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - y'' \frac{\partial F}{\partial y'}} = 0$$

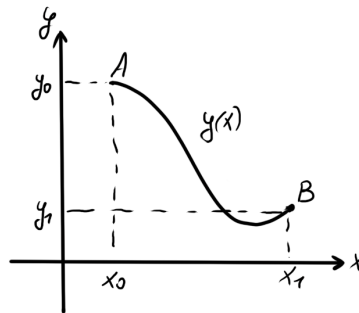


$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Заметим, что:  $\frac{d}{dx} F(y, y') = y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'}$

$$\frac{d}{dx} F - \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C}$$

## 5. Решение задачи о брахистохроне



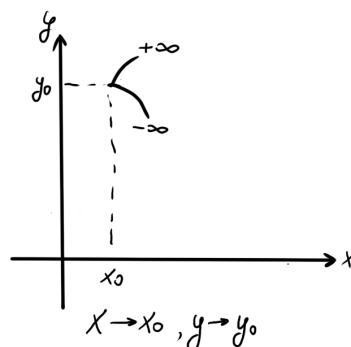
$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}} dx \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} - y' \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \frac{2y'}{2\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{1 + (y')^2} - (y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}}}_{1} = C \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

$$1 = \underbrace{c^2 2g}_{=\frac{1}{c_1^2} > 0} (y_0 - y)(1 + (y')^2)$$

$$c_1 = (y_0 - y)(1 + (y')^2) \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{c_1}{y_0 - y} - 1} = y' \quad (3)$$



$$1 + (y'(x))^2 = \frac{c_1}{y_0 - y(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_1} +\infty$$

$$y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \pm\infty \underset{\text{выбор: } -}{\Rightarrow} y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$$

$$y' = -\sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}}$$

Замена:  $\tilde{y} = y_0 - y(x)$ :

$$\tilde{y}'(x) = +\sqrt{\frac{c_1 - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Замена:  $\tilde{y} = c_1 z$ :

$$c_1 z' = \sqrt{\frac{c_1 - c_1 z}{c_1 z}} = \sqrt{\frac{1 - z}{z}}$$

Замена:  $z = \sin^2 s, s \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$c_1 2 \sin s \cos s \cdot s' = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 s}{\sin^2 s}} = \frac{\cos s}{\sin s} \text{ (знак определили из интервала s)}$$

$$2c_1 \sin^2 s \frac{ds}{dt} = 1$$

$$\frac{dx}{ds} = c_1(1 - \cos(2s)) \Rightarrow \boxed{x(s) = c_1 \left( s - \frac{1}{2} \sin 2s \right) - c_2} -$$

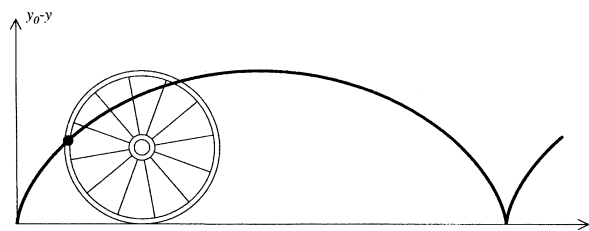
$$y(x) = y_0 - \tilde{y}(x) = y_0 - c_1 z = y_0 - c_1 \sin^2 s = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2s)$$

$$\boxed{y(s) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos(2s))}$$

Замена:  $t = 2s, t \in (0, \pi)$

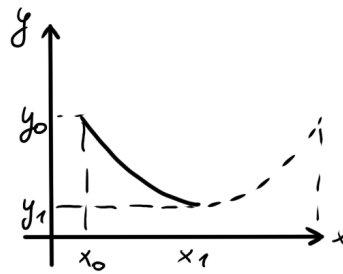
$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1}{2}(t - \sin t) + c_2 \\ y(t) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2} + c_2 \\ y - \frac{c_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2} \sin t \\ \frac{c_1}{2} \cos t \end{pmatrix} \quad t \in (0, \pi)$$



$$t = 0 : \begin{cases} x(0) = c_2 = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$t = \pi : \begin{cases} x(\pi) = \frac{c_1}{2}\pi + c_2 = \frac{c_1}{2}\pi + x_0 \\ y(\pi) = y_0 - c_1 \end{cases}$$



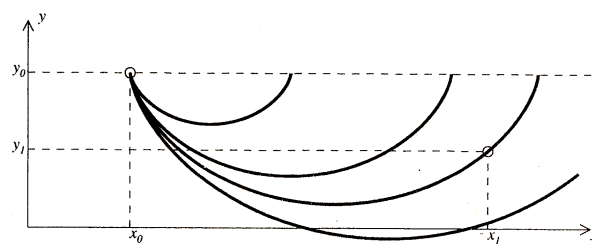
Теперь возьмем "+" (формула (3)):

$$y' = \sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}} \quad (5)$$

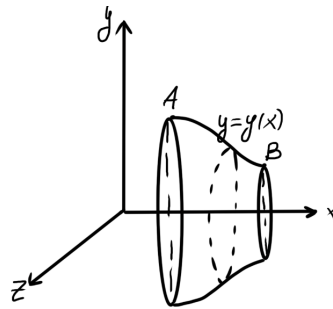
$$\tilde{y}(x) = y_0 - y(x) \Rightarrow \tilde{y}' = -\sqrt{\frac{c_1 - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Делаем те же действия (замены) и получаем такие же  $x(s), y(s)$  с различием только в интервале для  $t$ :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1}{2}(t - \sin t) + x_0 \\ y(t) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, 2\pi) \Rightarrow \text{циклоида полная}$$



## 6. Решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади



$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$F - y; \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

$$2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} - y' 2\pi y \frac{2y'}{2\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

$$2\pi y \left( \underbrace{\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}}}_{= \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}} \right) = C$$

$$(2\pi y)^2 = c^2(1 + (y')^2)$$

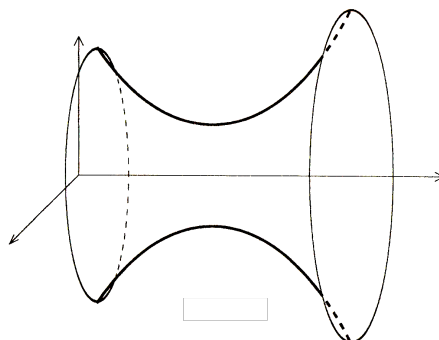
1)  $c = 0 \Rightarrow y(x) = 0$  - решение, если  $y_0 = y_1 = 0$

2)  $c \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{c_1}\right)^2 = 1 + (y')^2 \Rightarrow y' = \pm \sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1}, \quad c_1 = \frac{c}{2\pi} > 0$

$$y(x) = \operatorname{ch} z(x) c_1, \quad z > 0$$

$$c_1 \operatorname{sh} z \cdot z'(x) = \pm \underbrace{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1}}_{= \operatorname{sh} z} \Rightarrow c_1 z = \pm 1$$

$$z = \pm \frac{x - c_2}{c_1} \Rightarrow y(x) = c_1 \operatorname{ch} \left( \frac{x + c_2}{c_1} \right) - \text{цепная линия}$$



## 7. Вариационная задача с несколькими функциями

$$I[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_n(x), y_n'(x)) dx$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{01}, \dots, y_n(x_0) = y_{0n} \\ y_1(x_1) = y_{11}, \dots, y_n(x_1) = y_{1n} \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:

Пусть  $\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)$ , :

$$I[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n] \leq I[y_1, \dots, y_n], \quad \forall y_1, \dots, y_n$$

Можно взять  $y_1$  - любое:  $y_2 = \tilde{y}_2, \dots$ ,

$$\Rightarrow \underbrace{I[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n]}_{Y[\tilde{y}_1]} \leq \underbrace{I[y_1, \dots, \tilde{y}_n]}_{Y[y_1]} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0$$

Аналогично:  $\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0$