1. Продолжение: E волна в прямоугольном волноводе

$$E_z \neq 0,\ B_z = 0$$

$$\Delta_\perp E_z(x,y) + æ^2 E_z(x,y) = 0$$

$$\text{Г.У } E_z|_\Gamma = 0 \Rightarrow E_z(x,y) = E_1(x)E_2(y)$$

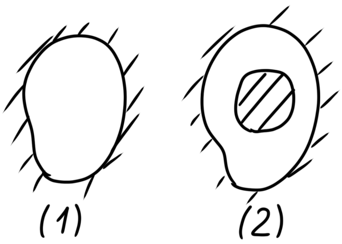
$$\underbrace{\frac{E_1''(x)}{E_1(x)}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{E_2''(y)}{E_2(y)}}_{-k_y^2} + æ^2 = 0 \Rightarrow E_z(x,y) = E_0 \sin(k_x x + \alpha_x)\sin(k_y y + \alpha_y)$$

$$\text{Г.У } E_z|_{y=0,\ y=b} = 0 \Rightarrow \alpha_y = 0,\ k_y b = n_y \pi,\ E_z|_{x=0,\ x=a} \Rightarrow \alpha_x = 0,\ k_x a = n_x \pi,\ n_x, n_y \in \mathbb{Z}$$

$$E_z(\vec{r},t) = E_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y) e^{ik_z z - i\omega_{n_x,n_y} t}, \quad \frac{\omega^2_{n_x,n_y}\varepsilon\mu}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

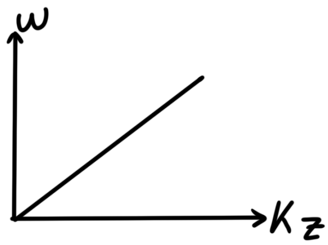
Мода минимальной частоты: E_{11} $(n_x = 1,\ n_y = 1)$

2. TEM-волны в неодносвязных волноводах



(1) - односвязный волновод, (2) - двухсвязный волновод;

В (2) помимо E и H - волн существует TEM-волна, с $E_z = 0,\ B_z = 0$. Дисперсионное соотношение так же как для плоских монохроматических волн в свободном растворе:



для случая $\varepsilon(\omega) = \text{const},\ \mu(\omega) = \text{const}$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu = k_z^2$$

$$\vec{E}_\perp(\vec{r},t) = \vec{E}(x,y)e^{ik_z z - i\omega t}$$

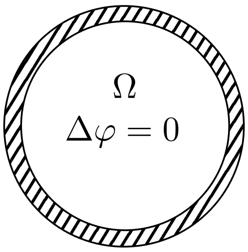
$$\vec{B}_\perp(\vec{r},t) = \vec{B}(x,y)e^{ik_z z - \omega t}$$

$$\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right)_z = \frac{i\omega}{c}(\vec{B})_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \text{ ищем решение в таком виде: } \vec{E} = -\nabla_\perp \varphi$$

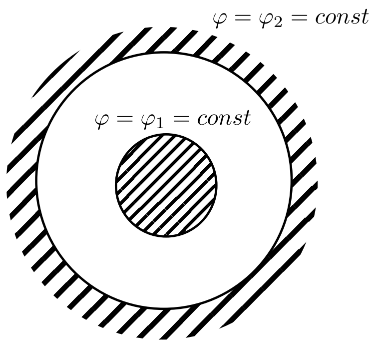
$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right] = 0 \Rightarrow \Delta_\perp \varphi = 0$$

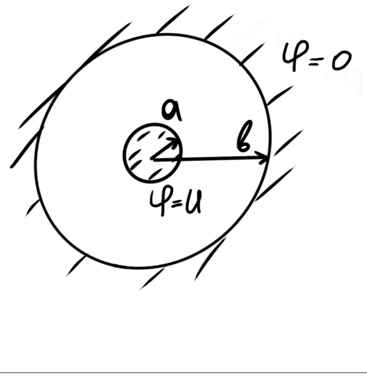
Из $E_\tau|_\Gamma \Rightarrow \varphi|_\Gamma = \mathrm{const}$
Почему в односвязном волноводе нет таких волн:



Из теоремы единственности $\varphi = \mathrm{const}$ в $\Omega \Rightarrow -\nabla_\perp \varphi = 0$
Для многосвязных волноводов



Коаксиальный волновод (кабель):



$$\Delta_\perp \varphi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

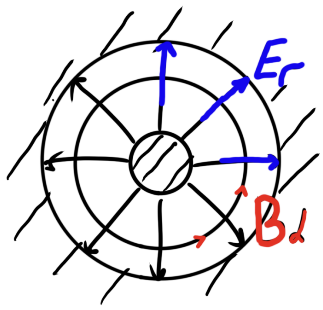
Зависимость от α исключим $\Rightarrow \dfrac{d\varphi}{dr} = \dfrac{A}{r},\ A = \mathrm{const} \Rightarrow \varphi(r) = A\ln r + B$

$$\varphi|_{r=b} = 0,\ \varphi|_{r=b} = U \Rightarrow A\ln b + B = 0,\ A\ln b = U \Rightarrow A = \frac{U}{\ln\frac{a}{b}},\ B = -A\ln b$$

$$\varphi(r) = \frac{U}{\ln\frac{a}{b}}\ln\frac{r}{b} = \frac{U}{\ln\frac{b}{a}}\ln\frac{b}{r},\ E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{U}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e_r}\frac{U}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}e^{ik_z z - i\omega t};\ \vec{B} = \frac{c}{i\omega}\mathrm{rot}\vec{E} = \frac{c}{i\omega}ik_z\frac{U}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}e^{ik_z z - i\omega t}\vec{e}_\alpha,\ \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} = k_z$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}_\alpha\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{U}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}e^{ik_z z - i\omega t}$$



3. Распространение волн в неоднородных средах

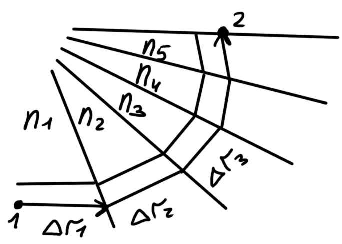
Рассмотрим только монохроматические электромагнитные волны $\varepsilon(\omega,\vec{r}),\ \mu(\omega,\vec{r})$, будем рассматривать частный случай при заданной $\omega \Rightarrow \varepsilon(\vec{r}),\mu(\vec{r})$.

Малый параметр $\varepsilon \sim \dfrac{\lambda \text{ - характерная длина волны}}{L \text{ - масштаб неоднородности среды}} \ll 1$.

Решение уравнений Максвелла для однородной системы: $\begin{array}{l}\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k},\vec{r}) - i\omega t},\ \vec{E}_0 \perp \vec{k}\\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k},\vec{r}) - i\omega t},\ \vec{B}_0 \perp \vec{k}\end{array}$

Искривления изображения в нагретом воздухе $\Rightarrow$ отклонение волн от прямолинейного распространения.

1) Зависимости $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ от $\vec{r}|$ Связь k и ω: $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu \Rightarrow k = \dfrac{\omega}{c}n(\omega)$



$$\Delta\varphi(\text{сдвиг по фазе}) = k_1\Delta r_1 + k_2\Delta r_2 + ... + \sum k_i \Delta r_i = k_0 \sum n_i \Delta r_i = k_0 \underbrace{\int_1^2 n(\vec{r})ds}_{\text{оптический путь}} = \psi(\vec{r}) -$$

- скалярная функция $\vec{r}$ - эйконал.

Пусть $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{ik_0\psi(\vec{r}) - i\omega t} \rightarrow$ в уравнение Максвелла, где $\vec{E}_0$ медленная функция от $\vec{r}$, изменяется на масштабе L.

$$\text{rot}\left[\vec{E}_0(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{B}_0 e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t}\right]$$

$$\left[\nabla \times \vec{E}_0(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})}\right] = \frac{i\omega}{c}\vec{B}_0(\vec{r})$$

$$e^{ik_0\psi(\vec{r})}e^{ik_0\psi(\vec{r})}\left[\nabla \times \vec{E}_0(\vec{r})\right] + \left[\nabla e^{ik_0\psi(\vec{r})} \times \vec{E}_0(\vec{r})\right] = \frac{i\omega}{c}\vec{B}_0(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})}$$

$$e^{ik_0\psi(\vec{r})}\text{rot}\vec{E}_0(\vec{r}) + e^{ik_0\psi(\vec{r})}ik_0\left[\nabla\psi(\vec{r}) \times \vec{E}_0(\vec{r})\right] = \frac{i\omega}{c}\vec{B}_0(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})}$$

$$\underbrace{\underset{\sim\frac{\vec{E}_0(\vec{r})}{L}}{\cancelto{0}{\text{rot}\vec{E}_0(\vec{r})}}}_{E/1\text{ см}} + \underbrace{\underset{=\frac{2\pi}{\lambda_0}}{ik_0}\underset{\sim 1\vec{E}_0(\vec{r})}{\left[\nabla\psi(\vec{r}) \times \vec{E}_0(\vec{r})\right]}}_{E_0/10^{-4}\text{ см}} = \frac{i\omega}{c}\vec{B}_0(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \left[\nabla\psi(\vec{r}) \times \vec{E}_0(\vec{r})\right] = \vec{B}_0(\vec{r}), \quad \mu(\vec{r})\text{rot}\vec{H} = -\frac{i\omega}{c}\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})\vec{E}\mu(\vec{r})$$

$$\left[\nabla\psi(\vec{r}) \times \vec{B}_0(\vec{r})\right] = -\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})\vec{E}_0(\vec{r}) = -n^2(\vec{r})\vec{E}_0(\vec{r})$$

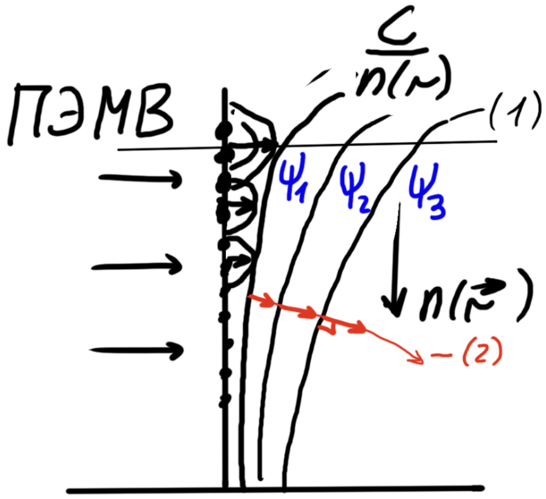
1. $\vec{E}_0(\vec{r}),\ \vec{B}_0(\vec{r}),\ \nabla\psi(\vec{r})$ - взаимно $\perp$ вектора

$$\left[\nabla\psi \times \left[\nabla\psi \times \vec{E}_0\right]\right] = -n^2\vec{E}_0$$

$$\nabla\psi\cancelto{0}{(\nabla\psi, \vec{E}_0)} - \vec{E}_0(\nabla\psi)^2 = -n^2\vec{E}_0$$

$$\Rightarrow (\nabla\psi(\vec{r}))^2 = n^2(\vec{r}) \text{ - уравнений эйконала}$$

Как можно было бы решить это уравнение:



$$\text{за } \Delta t \ r_{\text{волна}} = \frac{c}{n(\vec{r})}\Delta t$$

(1) - волновой фронт = это поверхности $\psi(\vec{r}) = \text{const}$, (2) - лучи (вдоль направления $\nabla\psi(\vec{r}))$/линии $\perp$ эквипотенциалям $\psi(\vec{r})$ (волновым фронтам)

Описания распространения электромагнитной волны в неоднородных средах через волновые фронты и лучи - это два альтернативных описания.

$$\text{Вектор Пойнтинга: } <\vec{\mathbb{S}}> = \frac{c}{4\pi} < [\text{Re}\vec{E} \times \text{Re}\vec{H}] >$$

$$< [\text{Re}\vec{E} \times \text{Re}\vec{H}] > = < [(\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r})e^{i\omega t})] \times [\vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t} + \vec{H}^* e^{i\omega t}] > =$$

$$\frac{[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] + [\vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})]}{4} = \frac{1}{2}\text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})]$$

$$\vec{\mathbb{S}} = \frac{c}{8\pi\mu}\text{Re}[\vec{E}_0(\vec{r})\cancel{e^{ik_0\psi(\vec{r})}} \times \vec{B}_0^*(\vec{r})\cancel{e^{-ik_0\psi(\vec{r})}}]$$