$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ \theta_2 = \dfrac{n_1\theta_1}{n_2} - \dfrac{x_1}{F_{12}}, \text{ где } \dfrac{1}{F_{12}} = \left(1 - \dfrac{n_1}{n_2}\right)\dfrac{1}{R} \end{cases}$$

Если выразить θ_1 и θ_2 через z_1 и $z_2 \Rightarrow \dfrac{x_1}{\theta_1} = -z_1$, $\dfrac{x_1}{\theta_2} = z_2$, тогда получим из $n_1\left(\theta_1 + \dfrac{x_1}{R}\right) = n_2\left(\theta_2 + \dfrac{x_1}{R}\right) \Rightarrow$

$$n_1\left(-\frac{x_1}{z_1} + \frac{x_1}{R}\right) = n_2\left(-\frac{x_1}{z_2} + \frac{x_1}{R}\right) \Rightarrow n_1\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{R}\right) = n_2\left(\frac{1}{z_2} = \frac{1}{R}\right) = \text{inv}$$

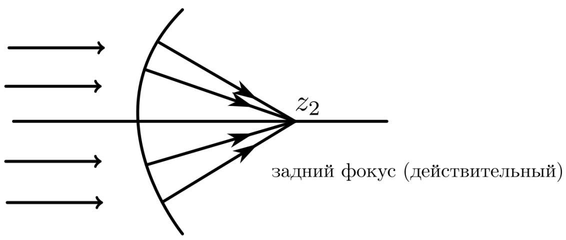
Вывод: все лучи, выходящие из точки z_1, после преломления на сферической границе раздела 2-х сред пересекают ось z (или их продолжение) в точке $z_2 \Rightarrow$ гомоцентрический пучок после преломления остается гомоцентрическим.

Точки с координатами z_1 и z_2 называются сопряженными.

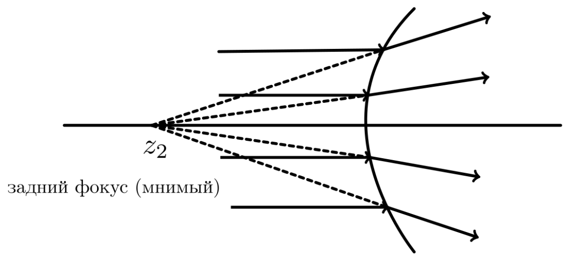
1) Пусть $z_1 \to -\infty \Rightarrow$ на границу падает слева параллельный пучок света:

$$\frac{1}{z_2} = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R} = \frac{1}{F_{12}};$$

$$\text{Если } (n_2 - n_1)R > 0:$$

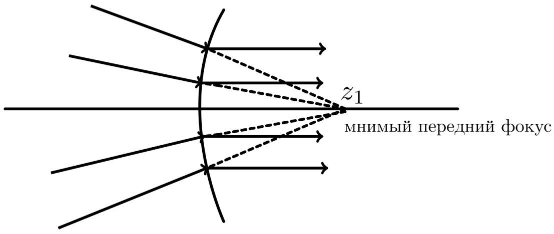


$$\text{Если } (n_2 - n_1)R < 0:$$

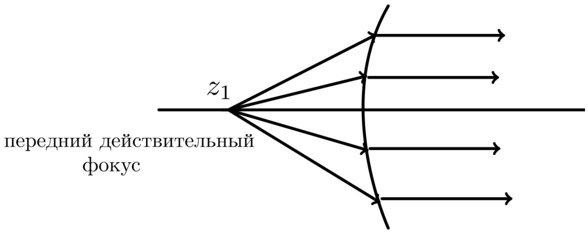


2) Пусть $z \to \infty$, после преломления параллельный пучок лучей $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{F_{12}} = \left(1 - \dfrac{n_2}{n_1}\right)\dfrac{1}{R}$

$$\text{Если } z_1 > 0 \Rightarrow (n_1 - n_2)R > 0$$

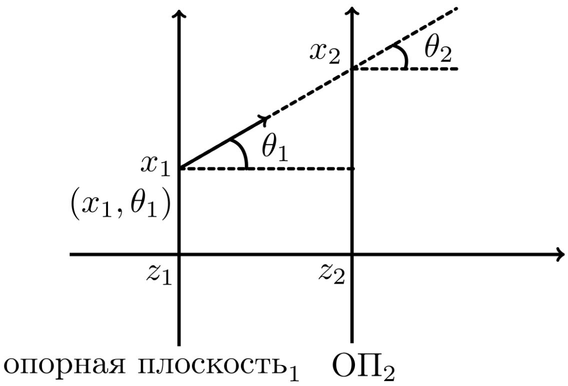


$$\text{Если } z_1 < 0 \Rightarrow (n_1 - n_2)R < 0$$



1. Матричный метод расчета центрированных оптических систем

Матрица свободного пространства



$$(x_1, \theta_1) \text{ и } (x_2, \theta_2)$$

$$x_2 = x_1 + \theta_1(z_2 - z_1) \Rightarrow x_2 = x_1 + x_1'(z_2 - z_1)(x_2' = x_1')$$

$$\theta \approx th\theta = \frac{dx}{dz} = x'$$

$$\frac{1}{F_{12}} = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R}$$

Матрица перехода через границу раздела:

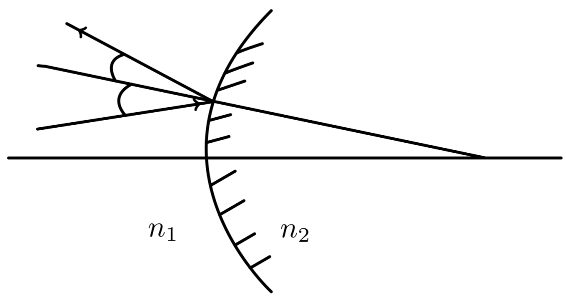
$$x_2 = x_1,\ \theta_2 = \frac{n_1\theta_1}{n_2} - \frac{x_1}{F_{12}},\ x_2' = \frac{n_1}{n_2}x_1' -$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_{12}} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

Для удобства (чтобы матрица перехода имела $\det = 1$) вводят новые переменные: $V_1 = n_1 x_1',\ V_2 = n_2 x_2' \Rightarrow V_2 = V_1 - \dfrac{n_2}{F_{12}} x_1$:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2}{F_{12}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

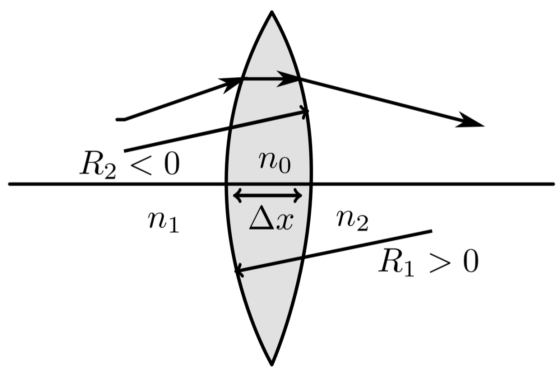
При отражении луча от сферической границы



Формулы предыдущие будут верны, если: $n_2 = -n_1$
Формула для матрицы свободного пространства отраженного луча:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{z_2 - z_1}{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

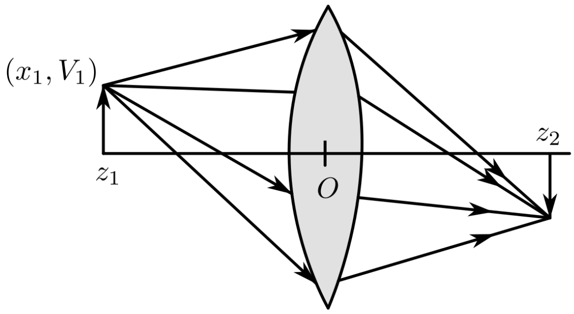
Матрица тонкой линзы (Δx внутри линзы $\ll x$)



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2}{F_{02}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_0}{F_{10}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p & 1 \end{pmatrix};\ p_1 = -\frac{n_2}{F_{02}} - \frac{n_2}{F_{10}}$$

Реальный случай $n_1 = n_2,\ n_0 = n$

$$p = (1-n)\frac{1}{R_2} + n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{R_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{F_{\text{линзы}}}$$



x_2 и z_2 не зависят от $V_1 \Rightarrow$ точки (x_2, z_2) и (x_1, z_1) - сопряжение

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & 1 + \frac{z_1}{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z_2}{F} & -z_1 + z_2 \left(1 + \frac{z_1}{F}\right) \\ -\frac{1}{F} & 1 + \frac{z_2}{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \left(1 - \frac{z_2}{F}\right) x_1 + \left(-z_1 + z_2 \left(1 + \frac{z_1}{F}\right)\right) V_1, \ x_2 \text{ в сопряжение не должен зависеть от } V_1$$

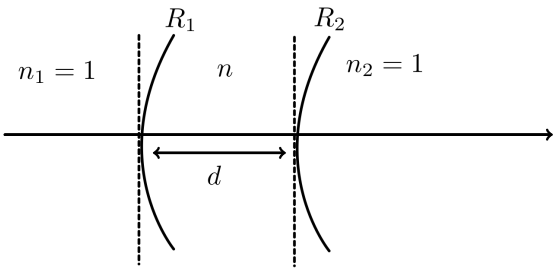
$$\Rightarrow -z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{F} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{F} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{F} = \frac{1}{z_2} \text{ (формула тонкой линзы)}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = 1 - \frac{z_2}{F} = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow -1\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2}{F} \Rightarrow \frac{z_2}{z_1} = 1 - \frac{z_2}{F}$$

Если лучи идет параллельно оси z, то $V_1 = 0$: $\begin{pmatrix} x_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{z_2}{F} & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 + \frac{z_2}{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$

$$x_2' = V_2 = -\frac{x_1}{F}$$

Матрица толстой линзы

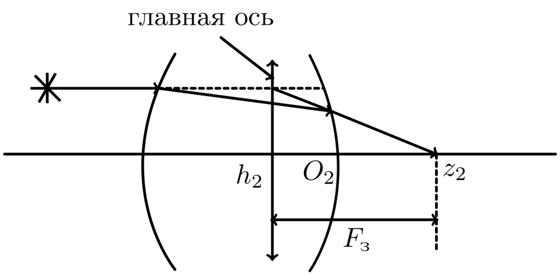


$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_{02}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n}{F_{10}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_{02}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{F_{10}} & \frac{d}{n} \\ -\frac{n}{F_{02}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{F_{10}} & \frac{d}{n} \\ -\frac{1}{F_0} & 1 - \frac{d}{nF_{02}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{F_0} = -\frac{1}{F_{02}} + \frac{d}{F_{02} F_{10}} - \frac{n}{F_{10}}$$

$$\frac{1}{F_0} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - d\frac{1-n}{R_2}\frac{1-\frac{1}{n}}{R_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{d(n-1)^2}{bR_1R_2}$$

Пусть $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, как найти геометрически изображение источника

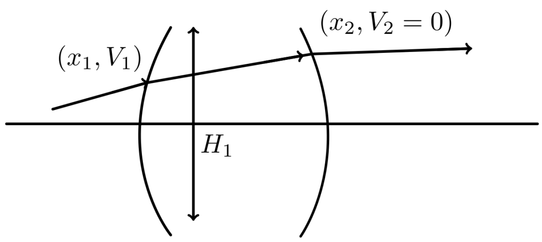


$$\begin{pmatrix} x_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\frac{z_2}{F} & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1+\frac{z_2}{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = m_{11}x_1 \\ V_2 = x_2' = m_{21}x_1 \end{matrix}$$

$$z_2 = \frac{x_2}{-x_2'} = \frac{m_{11}x_1}{-m_{21}x_1} = -\frac{m_{11}}{m_{21}}$$

$$F_3 = \frac{x_1}{-x_2'} = \frac{x_1}{-m_{21}x_1} = -\frac{1}{m_{21}} = F_0,\ h_2 = z_2 - F_3 = -\frac{m_{11}}{m_{21}} + \frac{1}{m_{21}} = \frac{1-m_{11}}{m_{21}}$$

где h_2 - координата второй главной плоскости относительно точки O_2



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Способ построения: