

# Конспект лекций по дисциплине

## Основы функционального анализа

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

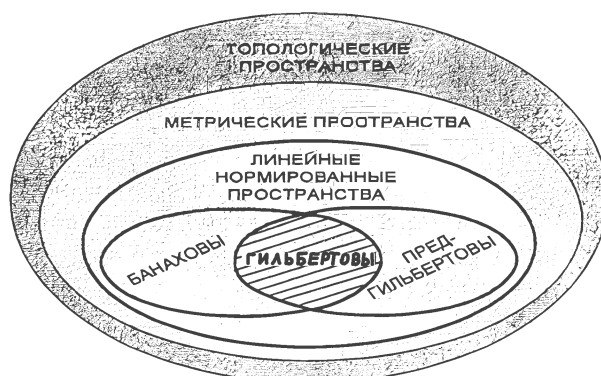
Преподаватель: Ротанова Татьяна Александровна

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Геометрия пространств со скалярным произведением.</b>	<b>2</b>
1.	Линейные пространства . . . . .	2
2.	Линейно (векторное) пространство . . . . .	2
3.	Определение нормы . . . . .	3
4.	Линейные пространства с скалярным произведением . . . . .	5
5.	Ортогональность векторов . . . . .	8
6.	Пополнение ортонормированной системы . . . . .	13
7.	Изоморфизм . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Классические ортогональные системы</b>	<b>20</b>
1.	Весовое пространство Лебега . . . . .	20

# Глава 1: Геометрия пространств со скалярным произведением.

## 1. Линейные пространства



**Определение 1** (Метрическое пространство). Метрика  $\rho(x, y) : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1)  $\forall x, y : \rho(x, y) \geq 0 - (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

2)  $\forall x, y \in M : \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3)  $\forall x, y, z : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M | \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

**Определение 2.** Множество открытое, если любая точка в нем содержится в нем вместе некоторой окрестностью.

Пример дискретной метрики:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

## 2. Линейно (векторное) пространство

**Определение 3.** Непустое множество элементов  $L$  произвольной природы, называется линейным (векторным) над полем чисел  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$  если

1)  $\forall x, y$  введена операция сложения:

1.1)  $x + y = y + x$  (коммутативность)

1.2)  $x + (y + z) = (x + y) + z$  (ассоциативность)

1.3) В  $L$  существует элемент называемый нулем  $0$ :  $x + 0 = x, \forall x \in L$

1.4)  $\forall x \in L$  существует противоположный элемент принадлежащий

$L$ :  $x + y = 0$ , обозначается как  $-x$

2)  $\forall x \in L$  и  $\forall$  числа  $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$  определен вектор из  $L$  - произведения элементов на число  $\alpha$ ,  $\alpha x \in L$ :

- 1.1)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta$
- 1.2)  $1 \cdot x = x$  (существования единицы)
- 1.3)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- 1.4)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Примеры:

1)

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^n & \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbb{C}^n & + \beta(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{matrix} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)$$

- 2)  $C[a, b] = \{f(a, b) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ непрерывная функции } f - \text{непрерывна}\}$
- 3)  $L_p(x) = \{f - \text{измерима по Лебегу, заданная на } X, f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ таких, что}$

$$\int_X |f(x)| dx < \infty$$

- 4)  $l_2 : x = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$

**Определение 4.**  $x_1, \dots, x_n$  называется линейно зависимыми, если  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$  не все равные нулю, такие что  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

В противном случае: из того, что  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$  следует, что все  $\alpha_i = 0$   
 $x_1, \dots, x_n$  называется линейно независимыми наборами векторов.

**Определение 5.** Бесконечный набор элементов  $L$  называется линейно независимым, если любой его конечный поднабор линейно независимым.

**Определение 6.** Если в  $L$  можно найти  $n$  линейно независимых векторов, а любой набор из  $n + 1$  векторов является линейно зависимыми, то  $\dim L = n$ . Если в  $L$  можно указать набор из произвольного числа линейно независимых элементов, то  $\dim L = \infty$ .

**Определение 7.** Непустое подмножество  $S \subset L$  называется подпространством, если оно само является пространством введенных в  $L$  линейных операций.

**Определение 8.** Линейной оболочкой  $\langle M \rangle$  называется совокупность всех линейных комбинаций  $\alpha x + \beta y$  где  $x, y \in M \subset L, \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$\langle M \rangle$  - подпространство в  $L$  (натянутое или порожденное множеством элементов  $M$ )

### 3. Определение нормы

**Определение 9.** Норма в линейном пространстве  $L$ :  $\| \cdot \| : L \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

$\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

- 1)  $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (положительная определенность нормы)
- 2)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (положительная однородность нормы)
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

В конечномерных пространствах все нормы эквивалентны  $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$ .  
В конечномерных пространствах это не так!

Пример норм:

1)  $\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$  - норма в  $C[a, b]$  равномерная норма.

$$2) \quad \|f\|_{L_1} = \int_X |f| dx \text{ в } L_1$$

$$3) \quad \|f\|_{L_p} = \sqrt[p]{\int_X |f|^p dx} \text{ в } L_p$$

$$4) \quad \|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

**Определение 10.** Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  точек линейно нормированного пространства  $L$  сходится к  $x$ , если  $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n > n_0 : \|x_n - x\| < \varepsilon$

**Определение 11.** Предельной точкой  $M \subset L$  называется точка  $x$ , если существует сходящаяся к  $x$  последовательность элементов из  $M \exists x_n \in M : x_n \rightarrow x$

**Определение 12.** Замыканием  $\overline{M}$  - объединение  $M$  и его предельных точек (по конкретной норме).

**Определение 13.** Множество замкнутое, если содержит все предельные точки.

**Определение 14.** Множество  $M$  в  $L$  - линейно нормированном пространстве называется плотным в  $L$ , если  $\overline{M} = L$

**Определение 15.** Сепарабельное множество, если в нем  $\exists$  счетное плотное подмножество

Пример: Множество множеств  $P[0,1]$  не является замкнутым подпространством в  $C[0,1]$

$$P_n(x) \rightarrow f(x) \Leftrightarrow \|P_n - f\|_C \rightarrow 0$$

$\forall n, p_n \in P[0,1], f(x) \in C[0,1]$  - не является полиномом

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = e^x, \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Замыкание  $P[0,1]$  это  $L_2[0,1]$

$$\|p_n - f\|_{L_2} \leq \max_{x \in [0,1]} \max_{c \in [0,1]} \left| \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \stackrel{x=1}{\stackrel{c=1}{=}} \frac{e}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad e^x \notin P[0,1]$$

$$L_2(x) : \{f : X \rightarrow Y, \int_x |f|^2 dx < \infty\}$$

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_x |f|^2 dx}$$

Нуль:  $f : X \rightarrow Y$

$$0(x) : X \rightarrow Y$$

$$g = 0(x) = 0 - \text{почти всюду}$$

$$g = \begin{cases} 0, \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ \infty, \mathbb{Q} \end{cases}$$

Элементы (вектора) пространства  $L_2$  - функции класса  $L_2$  .

**Определение 16.** Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in L$  (линейно нормированное пространство) называется фундаментальной, если  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$

**Определение 17.** Если любая фундаментальная последовательность является сходящейся в  $L$ , то  $L$  - полное пространство.

**Определение 18.** Полное нормированное пространство - банахово пространство

#### 4. Линейные пространства с скалярным произведением

**Определение 19.** Скалярное произведение в  $L$   $(, ) : L \times L \rightarrow \mathbb{C}. \forall x_1, x_2, y \in L, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$  выполняется:

- 1)  $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$
- 2)  $(x, y) = (\overline{y}, x)$
- 3)  $(x, x) \geq 0$  и  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Линейное пространство со скалярным произведением над  $\mathbb{R}$  - евклидовы пространства, над  $\mathbb{C}$  - унитарные пространства.

$$1) \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) : (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$$

$$2) l_2 : (x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i$$

$$3) L_2(x) : (f, g) = \int_x f \overline{g} dx$$

4)  $C[a, b]$  : нет скалярного произведения согласованного с аксиомами нормы

**Лемма 1.** Величина  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  удовлетворяет свойствам нормы. Согласованная или порожденная скалярным произведением.

**Определение 20.** Гильбертово пространство - пространство со скалярным произведением, полное относительно нормы, порожденным этим скалярным произведением.

**Лемма 2** ( Неравенство Коши-Буняковского).  $\forall x \in L \quad |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$

*Доказательство.*

$$\alpha = \frac{(x, y)}{|(x, y)|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq \|\bar{\alpha}x + ty\|^2 = (\bar{\alpha}x + ty, \bar{\alpha}x + ty) = \bar{\alpha}(x, \bar{\alpha}x) + t(y, \bar{\alpha}x + ty) =$$

$$\underbrace{|\alpha|^2}_{=1}(x, x) + \bar{\alpha}t(x, y) + \alpha t(y, x) + t^2(y, y) = \|x\|^2 + \bar{\alpha}t(x, y) + \alpha t(y, x) + t^2 \|y\|^2 \quad \square$$

$$\bar{\alpha}t(x, y) + \alpha t(y, x) = t \left( \frac{(\bar{x}, \bar{y})(x, y)}{|(x, y)|} + \frac{(x, y)(x, y)}{|(x, y)|} \right) = 2t|(x, y)|$$

$$\square \|x\|^2 + 2t|(x, y)| + t^2 \|y\|^2$$

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

#

*Доказательство Леммы 1.* 1) Из 3 аксиомы скалярного произведения;

$$2) \alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha x\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 = (1)$$

$$(\alpha x, \alpha x) = \alpha(x, \alpha x) = \alpha \bar{\alpha}(x, x) = (1)$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| \|y\|$$

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x + y) + (y, x + y) = (\overline{x + y}, \bar{x}) + (\overline{x + y}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + (\bar{y}, \bar{x}) + (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) =$$

$$= \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq$$

$$\stackrel{\text{нер-во К-Б}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

#

$$L_2 : \sqrt{\int_x |f(x)|^2 dx} = \|f\|_{L_2}$$

$$\left| \int_x f(x) \bar{g}(x) dx \right| \leq \left( \int_x |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_x |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} - \text{неравенство К-Б в } L_2$$

$$\sqrt[p]{\int_x |f(p)| dx} = \|f\|_{L_p}$$

**Лемма 3.**  $\forall p \geq 1$  линейно нормированное пространство  $L_p$  является полным.

**Лемма 4.**  $\forall p \geq 1$  пространство  $C^\infty$  плотно в  $L_p(x)$ , то есть  $\overline{C^{\infty L_p}} = L_p(x)$

**Лемма 5.**  $\forall p \geq 1$  пространство  $L_p$  сепарабельно.

**Лемма 6.** Пусть  $L$  - линейно нормированное пространство со скалярным произведением и норма порождена скалярным произведением. . .

$$\forall x, y \in L \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \text{равенство параллелограмма}$$

Наоборот, если в линейно нормированном пространстве  $L$  выполняется равенство параллелограмма, то в этом пространстве можно ввести скалярное произведение, согласованной с этой нормой.

$L_1 \subset [a, b] \exists f, g$ , для которых не выполняется равенство параллелограмма  $\Rightarrow$  нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

**Лемма 7.** В линейном пространстве со скалярным произведением  $L$ , скалярное произведение непрерывно по первому аргументу относительно сходимости по норме порожденной скалярным произведением

$$x_n \rightarrow t \quad \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\forall y, (x_n, y) \rightarrow (x, y)$$

*Доказательство.*

$$|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \stackrel{\text{по К.Б}}{\leq} \|x_n - x\| \underbrace{\|y\|}_{\text{огр. численно}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

#



## 5. Ортогональность векторов

**Определение 21.**  $L$  - пространство со скалярным произведением,  $x, y \in L$  называется ортогональным, если  $(x, y) = 0$

**Определение 22.** Набор векторов  $x, \dots, x_n, \dots, \in L$  называется ортогональным, если  $\forall i, j : x_i \perp x_j$

**Определение 23.** Набор ортогональный  $(x_n)$  называется ортонормированным, если  $\forall i : \|x_i\| = 1$

Ортогонализация Грамма-Шмидта

Если  $x_1, \dots, x_n$  - счетная система линейно независимый в  $L$ , тогда новые последовательности:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 & z_1 &= \frac{y_1}{\|y_1\|} \\ y_2 &= x_2 - (x_2, z_1)z_1 & z_2 &= \frac{y_2}{\|y_2\|} \\ y_n &= x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, z_k)z_k & z_n &= \frac{y_n}{\|y_n\|} \end{aligned}$$

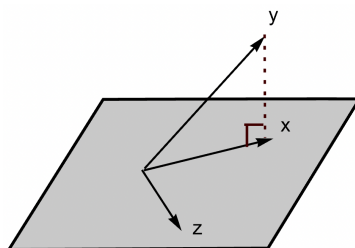
Обладает свойствами:

- 1) Система  $z_1, \dots, z_n$  - ортонормированна
- 2)  $\forall n \in N \underbrace{\langle z_1, \dots, z_n \rangle}_{\text{линейные оболочки}} = \underbrace{\langle x_1, \dots, x_n \rangle}_{\text{линейные оболочки}}$

**Определение 24.** Углом между ненулевыми векторами  $x$  и  $y$  евклидова пространства  $L$  называется число  $\varphi \in [0, \pi]$ :

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

**Определение 25.** Если  $S$  - подпространство пространства со скалярным произведением  $L$ , то  $x \in S$  называется вектором наилучшего приближения (ближайший) для  $y \in L$  посредством векторов из  $S$ , если:



$$\forall z \in S, \quad \|y - z\| \geq \|x - y\|$$

$$\|x - y\| = \inf_{z \in S} \|y - z\|$$

**Теорема 1.** Пусть  $H$  - гильбертово пространство,  $S$  - замкнутое подпространство  $H$ ,  $y \in H$ , тогда  $\exists! x$  ближайший к  $y$ .

*Доказательство.*

$$\inf \|y - z\| = d$$

$$x_1, \dots, x_m \in S \quad \|y - x_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} d$$

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|(x_m - y) - (x_n - y)\|^2 = 2(\|x_m - y\|^2 + \|x_n - y\|^2) - \underbrace{\left\| x_m - y + x_n - y \right\|^2}_{\|x_m + x_n - 2y\|^2 = 4\|q - y\|^2 \geq 4d^2} \boxed{\leq}$$

$$q = \frac{x_m + x_n}{2} \in S$$

$$\forall \varepsilon, \exists N \quad n, m \geq N : \|x_m - y\| < d^2 + \varepsilon \quad \|x_n - y\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$$

$$\boxed{\leq} 4d^2 + 2\varepsilon - 4d^2 = 2\varepsilon$$

$x_m$  - фундаментальная

существование предела последовательности  $x$  :

$x \in S$ , т.к  $S$  - замкнутое

$$\|y - x_n\| = \sqrt{(y - x_n, y - x_n)} \xrightarrow[(1)]{n \rightarrow \infty} \sqrt{(y - x, y - x)} = \|y - x\| \rightarrow d \text{ в силу ! предела}$$

(1) - непрерывность по 1-му аргументу

Единственность:

Пусть  $\tilde{x} : \|y - \tilde{x}\| = d, x \neq \tilde{x}$

$$\|\tilde{x} - x\|^2 = \|(\tilde{x} - y) - (x - y)\|^2 = 2 \underbrace{\left\| \tilde{x} - y \right\|^2}_{=d^2} + 2 \underbrace{\left\| x - y \right\|^2}_{=d^2} - \|2y - x - \tilde{x}\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 \leq 0$$

т.е  $\tilde{x} = x$  - противоречие

#

**Определение 26.**  $S$  - подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением  $L$ ,  $x \in S$  - ортогональная проекция  $y \in L$  на подпространство  $S$ , если:

$$y - x \perp S \quad y - x \perp z \quad \forall z \in S \quad (y - x, z) = 0$$

**Лемма 8.**  $S$  - подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением  $L$ ,  $x \in S$  - ортогональная проекция  $y \in L \Leftrightarrow x$  - ближайший к  $y$  посредством  $S$ .

Доказательство.

$\Rightarrow$  :

$$\forall x, y, z \in L$$

$$\|y - z\|^2 = ((y - x) + (x - z), (y - x) + (x - z)) =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \|y - x\|^2 + 2\text{Re}(x - y, x - z) + \|x - z\|^2 (*)$$

$$(1) : (a + b, a + b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\text{Re}(a, b)$$

$$x \in S - \text{ ортогональная проекция } y \text{ на } S \Rightarrow y - x \perp x - z$$

Итого:

$$\|y - z\|^2 = \|y - x\|^2 + \underbrace{\|x - z\|^2}_{\geq 0}$$

$$\forall z \in S : \|y - z\|^2 \leq \|y - x\|^2, x - \text{ ближе для } y$$

Пусть дано:

$\Leftarrow$  :

$$x - \text{ ближайший вектор для } y \in S$$

$$\left. \begin{aligned} |y - x| &= \inf \|y - z\| \\ f(t) &= \|y - x + tW\|^2, \quad t \in \mathbb{R}^2, \quad W \in S \end{aligned} \right| \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|y - x + tW\|^2 - \|y - x\|^2}{t} = 0$$

$$\text{в } (*) : z = x - tW$$

$$\|y - (x - tW)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2\text{Re}(y - x, tW) + \|tW\|^2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \frac{2\operatorname{Re}(y-x, W)}{t} + t^2 \frac{\|W\|^2}{t} = 0$$

$$2\operatorname{Re}(y-x, W) = 0$$

Если  $\operatorname{Im}(y-x, W) = 0$ , то  $x$  - ортогональная проекция  $y$  на  $S$ .

Доказывается аналогично:  $f(t) = \|y-x+itW\|^2$

#

**Определение 27.**  $S$  - подпространство линейного пространства  $L$  со скалярным произведением, то совокупность всех  $x \in L$ , таких, что  $x \perp y \forall y \in S$  называется ортогональным дополнением к  $S$  ( $S^\perp$ ).

**Определение 28.** Линейное пространство  $L$  является прямой суммой  $S$  и  $T$  если любой вектор  $x \in L$  единственным образом представим в виде  $x = y+z$ ,  $y \in S$ ,  $z \in T$

**Лемма 9.**  $H$  - гильбертово пространство,  $S$  - замкнутое подпространство, тогда  $H$  прямая сумма  $S$  и  $S^\perp$ ,  $H = S \oplus S^\perp$

*Доказательство.*

$$y \in H \quad x - \text{ближайший к } y \text{ посредством } S \Rightarrow$$

$$\stackrel{\text{Лемма 1}}{\Rightarrow} y-x \perp z, \quad z \in S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = y-x \in S^\perp$$

$$y = \overset{\in S^\perp}{W} + \overset{\in S}{\tilde{x}}$$

Докажем единственность представления:

$$\text{Пусть } y = \overset{\in S^\perp}{\tilde{W}} + \overset{\in S^\perp}{\tilde{\tilde{x}}}$$

$$W+x = \tilde{W} + \tilde{x}$$

$$W - \tilde{W} = \tilde{x} - x$$

$$\underset{\in S^\perp}{(W - \tilde{W}, \tilde{x} - x)} = \underset{\in S}{(\tilde{x} - x, \tilde{x} - x)}$$

$$0 = (\tilde{x} - x, \tilde{x} - x)$$

То есть:  $\tilde{x} = x$  и  $\tilde{W} = W$

#

**Теорема 2.**  $S$  - конечномерное подпространство линейного пространства  $L$  со скалярным произведением  $x_1, \dots, x_n$  - ортонормированный базис в  $S$   $\forall y \in L$ :

$$x = \sum_1^n \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = (y, x_k)$$

является ортогональной проекцией  $y$  на подпространство  $S$ . При этом:

$$\|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y - x\|^2$$

*Доказательство.*

$$\forall z \in S, \quad z = \sum_1^n \alpha_k x_k$$

$$(z, x_m) = \sum_1^n \alpha_k (x_k, x_m) = \alpha_m$$

$$\|z\|^2 = \left( \sum_1^n \alpha_k x_k, \sum_1^n \alpha_p x_p \right) = \sum_1^n \alpha_p \left( \sum_1^n \alpha_k x_k, x_p \right) = \sum_1^n \alpha_p \left[ \sum_1^n \overline{\alpha_k} (x_p, x_k) \right] = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$$

$$\|y - z\|^2 = \|y\|^2 - (z, y) - (y, z) + \|z\|^2 = \|y\|^2 - \sum_1^n \alpha_k (x_k, y) - \sum_1^n \overline{\alpha_k} (y, x_k) + \sum_1^n |\alpha_k|^2 =$$

$$= \|y\|^2 - \sum_1^n \alpha_k \lambda_k - \sum_1^n \overline{\alpha_k} \lambda_k + \sum_1^n |\alpha_k|^2 + \sum_1^n |\lambda_k|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2 = \|y\|^2 + \sum_1^n |\alpha_k - \lambda_k|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2$$

$$\|y\|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2 \geq 0, \quad \text{при } \alpha_k = \lambda_k \quad (z = x)$$

При  $z = x$  достигается минимум  $\Rightarrow$  ортогональная проекция.

#

**Определение 29.**  $x_1, \dots, x_n, \dots$  - ортонормированная система в линейном пространстве со скалярным произведением  $L$ :

$x \in L$   $\lambda_k = (x, x_k)$  - коэффициент Фурье  $x$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k x_k - \text{ряд Фурье расходится}$$

**Теорема 3** (неравенств Бесселя).  $x \in L$  - линейное пространство со скалярным произведением,  $\lambda_k$  - коэффициент Фурье, тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

*Доказательство.*

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$$

$$\underbrace{\|x - S_n\|^2}_{>0} + \|S_n\|^2 = \|x\|^2$$

$$\|S_n\|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\left( \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

↓  
в пределе

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2 - \text{ равенство Парсеваля}$$

#

**Коэффициенты Фурье:**  $x_1, \dots, x_n$ ,  $\lambda_k = (x, x_k)$

**Неравенство Бесселя:**  $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$

## 6. Пополнение ортонормированной системы

**Определение 30.** Ортонормированную систему  $x_1, \dots, x_n$  называют замкнутой, если для  $\forall x \in H$ :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2, \text{ где } \lambda_k = (x, x_k) - \text{коэффициенты Фурье}$$

Уравнение замкнутости:

$y \in H, \mu_k = (y, x_k)$  — коэффициенты Фурье  $y$

$$(x, y) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k} - \text{ равенство Парсеваля}$$

**Определение 31.** *Ортонормированная системам  $x_1, \dots, x_n$  называется полной, если ее нельзя пополнить, то есть если ее ортогональное дополнение состоит только из  $\vec{0}$ . Другими словами, если  $\exists x \forall k : (x, x_k) = 0 \Rightarrow x = 0 \dots$*

**Определение 32.** *Ортонормированная система  $x_1, \dots, x_n$  называется базисом Гильбертова (или Гильбертовым базисом), если  $\forall x \in H$ :*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \text{ где } \lambda_k - \text{коэффициенты Фурье}$$

разложение в векторный ряд Фурье

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^N \lambda_k x_k \right\| = 0$$

**Теорема 4.** *Во всяком ненулевом Гильбертовом сепарабельном пространстве  $\exists$  Гильбертов базис, состоящий из конечного или счетного числа векторов.*

*Доказательство.*

$x_1, \dots, x_k$  - счетное плотное подмножество (в силу сепарабельности)

$x_1, \dots, x_k \xrightarrow[\text{комбинации}]{\text{вычеркнули линейные}} y_1, \dots, y_k$  - счетное число линейно независимых векторов

$y_1, \dots, y_k \xrightarrow[\text{Грамму-Шмидта}]{\text{ортонормализуем по}} z_1, \dots, z_k$  - счетное число ортонормированных векторов

$$x \in H, \{x_{n_k}\} \rightarrow x \forall \varepsilon > 0 \exists M \exists n_k \geq N : \|x - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

$$x_{n_k} - \text{выражается через } \{z_k\}, x_{n_k} = \sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p$$

Спроектируем на  $x$  конечно мерное подпространство  $\langle z_1, \dots, z_{n_k} \rangle$

Проекция:  $s = \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j$ , где  $s$  - проекция на  $\langle z_1, \dots, z_{n_k} \rangle$ ,  $\lambda_j = (x, z_j)$

$$\|x - s\| \leq \|x - y\|, \forall y \in \langle z_1, \dots, z_{n_k} \rangle$$

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j \right\| \leq \left\| x - \underbrace{\sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p}_{x_{n_k}} \right\| < \varepsilon$$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j z_j, \lambda_j = (x, z_j) - \text{коэффициенты Фурье}$$

#

**Теорема 5.** Если  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  - ортогональная система в сепарабельном Гильбертовом пространстве, тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\{x_k\}$  - Гильбертов базис;
- 2)  $\{x_k\}$  - замкнутая система;
- 3)  $\{x_k\}$  - полная система.

*Доказательство.*

1)  $\Rightarrow$  2) :

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = (x, x_k), \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \\
 \|x\|^2 &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \lambda_k \left( x_k, \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \right) = \\
 &\lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M \lambda_k \overline{\lambda_m} \underbrace{(x_m, x_k)}_{=(x_k, x_m) = \delta_{km} \begin{cases} 1, k = m \\ 0, k \neq m \end{cases}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2
 \end{aligned}$$

#

2)  $\Rightarrow$  3):

$$\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

От противного: Пусть  $y \neq 0$ ,  $y \in H$  - пополнение  $\{x_k\}$ :  $\mu_k = (y, x_k) = 0$

$$|y|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 = 0 \Rightarrow y = 0 - \text{противоречие}$$

#

3)  $\Rightarrow$  1):

Пусть  $x \in H$ :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n, \quad \lambda_n = (x, x_n)$$

Фундаментальность:

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^M \lambda_n x_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^M |\lambda_n|^2$$

Неравенство Бесселя:  $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \|x\|^2$



$$\forall \varepsilon \exists N_0 \forall N, M \geq N, \sum_{n=N+1}^M |\lambda_n|^2 < \varepsilon$$

Значит  $S_N$  - фундаментальная последовательность в Гильбертовом полном пространстве  $\Rightarrow$  сходится.

Обозначим предел  $S_N$  через  $z$ .

Лектор: "хорошая буква зет, давайте обозначим"

$$(x - z, x_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( x - \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n, x_k \right) = \lambda_k - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \lambda_n (x_n, x_k) = \lambda_k - \lambda_k = 0$$

$$x - z \perp x_k, \forall k$$

$\Rightarrow$  в силу единственности системы  $\{x_k\}$ :

$$x - z = 0, x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \Rightarrow \{x_k\} - \text{Гильбертов базис}$$

#

**Теорема 6** (Рисса-Фишера).  $H$  - сепарабельное Гильбертово пространство ортонормированной системы  $\{x_k\}$ . Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  - числа, такие что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$  -

сходится. Тогда  $\exists! x \in H$  такое, что  $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ .

$$S_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n$$

$$\|S_N - S_M\|^2 = \underbrace{\sum_{p=N+1}^M |\lambda_p|^2}_{\text{сходится} \Rightarrow S_N - \text{фундаментальный}} < \varepsilon$$

*Доказательство.*

$z$  - предел  $S_N$ :

$$(z, x_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_N, x_k) = \lambda_k - \text{коэффициенты Фурье для } z$$

$$\|z\|^2 = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, z \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \underbrace{(x_k, z)}_{=\overline{\lambda_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

Единственность: Пусть  $\exists x \in H, x \neq z$

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \\
\|x - z\|^2 &= \underbrace{\|x\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2} - \operatorname{Re}(x, z) + \underbrace{\|z\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2} - \text{смотреть ранее} \\
(x, z) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k, z \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\overline{z}, x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \\
\|x - z\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 0 \Rightarrow x = z
\end{aligned}$$

#

## 7. Изоморфизм

**Определение 33.** Пусть  $H_1, H_2$  - Гильбертовы пространства.  $H_1$  - изоморфно  $H_2$ , если  $\exists A : H_1 \rightarrow H_2$  и  $\exists B : H_2 \rightarrow H_1$ , которые: линейные, сохраняют скалярное произведение и взаимнообратны.

$$\begin{aligned}
&\forall x, y \in H_1 \quad \forall \alpha, \beta - \text{числа} \\
&\forall u, v \in H_2
\end{aligned}$$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad (A(x), A(y))_{H_2} = (x, y)_{H_1}$$

$$B(\alpha u + \beta v) = \alpha B(u) + \beta B(v) \quad (A(u), A(v))_{H_1} = (u, v)_{H_2}$$

$$K.O \begin{cases} B(A(x)) = x \\ A(B(u)) = u \end{cases}$$

**Теорема 7** (Теорема о изоморфизме гильбертовых пространствах). Всякое сепарабельное бесконечномерное Гильбертово пространство (над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ) изоморфно пространству  $l_2$  (над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ).

Идея доказательства:

$$A : H \rightarrow l_2$$

$$\begin{aligned}
&x \in H \\
&\lambda \in l_2 \quad ?
\end{aligned}$$

$$A(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) : \text{где } \lambda_k = (x, x_k) - \text{коэффициенты Фурье; } A(x) \in l_2 ?$$

$$\sum_1^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2 \text{ - неравенство Бесселя}$$

- 1)  $A$  линейно?
- 2)  $A$  сохраняет скалярное произведение (это равенство Парсеваля)?

$B : l_2 \rightarrow H$  по теореме Рисса-Фишера

- 3)  $B$  линейно?
- 4)  $B$  сохраняет скалярное произведение?
- 5)  $A$  и  $B$  взаимно обратны?

Тригонометрическая система функция как пример полной ортонормированной системы в  $L_2[-\pi, \pi]$

$$L_2[-\pi, \pi] : \left\{ f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

$$(f, g)_{L_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \bar{g}(t) dt$$

Над  $\mathbb{R}$ :

Ряды Фурье

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \neq 0 \\ 2\pi, & n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0$$

Гильбертово пространство:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$$

Ряд Фурье:

Коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Гильбертово пространство:

Коэффициенты Фурье

$$\alpha_0 = \left( f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0$$

$$\alpha_n = (f, \cos(nx)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \sqrt{\pi} a_n$$

$$\beta_n = (f, \sin(nx)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \sqrt{\pi} b_n$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x + \beta_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x + \dots + \alpha_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \beta_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) = \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \end{aligned}$$

Равенство Ляпунова:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Равенство Парсеваля:

$$\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

# Глава 2: Классические ортогональные системы

$\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$  - норма в  $C[a, b]$  равномерная норма.

$$f_n \xrightarrow{\text{равномерно}} f$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall k > N : \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 < \varepsilon^2$$

$$C^\infty(\subset C) \text{ плотны в } L_2[a, b] \Leftrightarrow L_2 = \overline{C}, \quad M \text{ плотно в } L \Leftrightarrow L = \overline{M}$$

## 1. Весовое пространство Лебега

Пусть  $(a, b)$  - промежуток на  $\mathbb{R}$  (необязательно ограниченный)

**Определение 1.** Функция  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  называется *весовой или весом*, если:

- 1)  $\forall x \in (a, b) \ h(x) \geq 0$
- 2)  $h(x) > 0$  почти всюду в  $(a, b)$
- 3)  $\int_a^b h(x) dx < \infty$

**Определение 2.** Пространство функций

$$L_2^h(a, b) = \left\{ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2(x) h(x) dx < \infty \right\}$$

назовем *весовым пространством Лебега*.

Это пространство становится евклидовым, если на нем задано скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) h(x) dx$$

Скалярное произведение определено для любых функций  $f, g$  так как

$$|f(x) g(x) h(x)| < \frac{1}{2} [f^2(x) h(x) + g^2(x) h(x)]$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) h(x) dx}$$

**Замечания:**

- Нулевым элементом пространства  $L_h^2(a, b)$  считаем такую функцию  $f$ , что выполнено  $(f, f) = \int_a^b f^2 h(x) dx = 0$

- Весовое пространство Лебега  $L_h^2(a, b)$  является полным относительно нормы, порожденной скалярным произведением, то есть Гильбертовым. Для каждой функции  $h(x)$  и промежутка  $(a, b)$  определятся специальное гильбертово пространство!

- Если интервал  $(a, b)$  конечен, то  $\forall n \ x^n \in L_h^2(a, b)$ . Если  $(a, b)$  - бесконечный промежуток, то полагаем, что весовая функция убывает на бесконечности настолько быстро, что все мономы  $x^n \in L_h^2(a, b)$ :

$$\int_a^b x^{2n} h(x) dx < \infty$$

Тогда в  $L_h^2(a, b)$  всегда есть последовательность мономов  $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$

На любом интервале  $(a, b)$  последовательность мономов  $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$  образуют линейно независимую систему. Применим к ней процесс ортогонализации Грамма-Шмидта относительно скалярного произведения пространства  $L_h^2(a, b)$ . Получим последовательность мономов:

$$q_0, q_1, \dots, q_n, \dots,$$

со свойствами:

$$- \int_a^b q_m(x) q_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

-  $\forall n \ q_n$  - многочлен степени  $n$

Так же для удобства домножим, если это необходимо, многочлен  $q_n$  на -1, так чтобы у каждого многочлена старший коэффициент  $a_n$  стал положительным.

**Определение 3.** Последовательность полученных многочленов  $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ , называется последовательностью ортогональных многочленов на промежутке  $(a, b)$  с весом  $h(x)$

Ортонормированная система в Гильбертовом пространстве  $H$  полная

$$\Rightarrow \underbrace{\langle \{x_k\} \rangle}_{\text{замкнутое подпространство}} = H$$

Предположим противоречие  $\exists y \in H, y \notin \langle \{x_k\} \rangle$   
 $\exists$  ортогональная проекция  $y$  на  $\langle \{x_k\} \rangle$

$$(y - z) \perp \langle \{x_k\} \rangle$$

$$y - z \perp x_k \forall k \text{ противоречие}$$

$$y = z \Rightarrow y \in \langle \{x_k\} \rangle$$

- Для конечного промежутка: полиномы плотны в  $L_2^h(a, b)$ , значит, конечными линейными комбинациями мономов можно сколько угодно близко по норме  $L_2^h(a, b)$

приблизиться к произвольной функции  $f \in L_2^h(a, b)$ , поэтому мономы образуют полную систему в  $L_2^h(a, b)$ .

-Мы будем использовать некоторые бесконечные  $(a, b)$  и весовые функции  $h(x)$ , для этих частных случаев полнота мономов тоже доказана.

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта переводит полную систему в полную, поэтому система многочленов  $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ , полна в  $L_2^h(a, b)$ , т.е. является гильбертовым базисом в  $L_2^h(a, b)$ . Можно ввести коэффициенты Фурье относительно этого базиса и разлагать функции в ряды по ортогональным многочленам.

-Ортогональные многочлены определяются весом  $h(x)$  и промежутком  $(a, b)$  однозначно (при сделанных предположениях)

- Если  $P(x)$  - произвольный многочлен степени  $n$ , то его можно представить как

$$P(x) = \sum_{k=0}^m c_k q_k$$

- Если  $P_m(x)$  - произвольный многочлен степени  $m$ , и  $n > m$ , то  $q_n \perp q_m$

$$\int_a^b P_m(x) q_n(x) h(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{k=0}^m c_k q_k(x) \right) q_n(x) h(x) dx = 0$$

- Если вес  $h : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$  - четная функция, то  $q_n(x) = (-1)^n q_n(x)$

Сделаем замену:  $x \rightarrow -x$  в  $\int_{-a}^a q_m(x) q_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$

$$\int_{-a}^a q_m(-x) q_n(-x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

$$\int_{-a}^a \tilde{q}_m(x) \tilde{q}_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

, где  $\tilde{q}_n = (-1)^n q_n(x)$ ,  $\tilde{q}_m = (-1)^m q_m(x)$ . Тогда по первому свойству  $q_n = \tilde{q}_n = (-1)^n q_n(x)$

**Пролетарии всех стран, соединяйтесь!**