$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \end{cases} \quad (1)$$

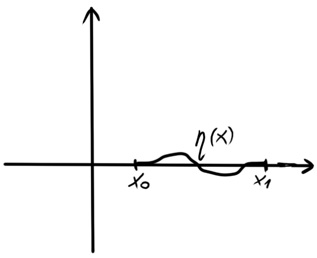
Найти функцию $y(x)$ такую, чтобы функционал $I[y]$ принимал наибольшее или наименьшее значение.

Необходимо найти условие локального экстремума:

Если $\tilde{y}$ экстремум $\Rightarrow \tilde{y}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2)$

Докозательство формулы (2).

$$I[\tilde{y}] \leq I[y], y = \tilde{y} + \varepsilon\eta, \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1), \eta(x) \in C^2([x_0, x_1]) - \text{финитная}$$

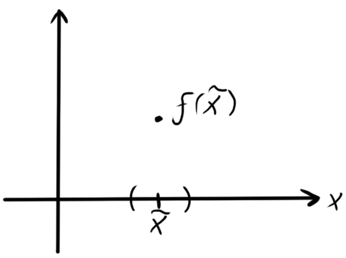


$$\underbrace{I[y]}_{=g(0)} \leq \underbrace{I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]}_{=g(\varepsilon)} \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon) \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))\right)\eta(x)dx, \forall\eta(x) - \text{финитная}$$

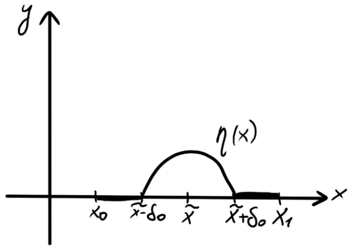
Лемма 1 (Лагранжа)**.** *Пусть $f(x)$ - непрерывна и $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0 . \forall\eta(x)$ - финитная на $[x_0, x_1]$. Тогда $f(x) = 0, \forall x \in [x_0, x_1]$*

Доказательство. От противного:



Пусть для определенности $f(\tilde{x}) > 0$. Тогда так как $f(\tilde{x})$ - непрерывна, то $f(x) > 0$ при $x \in (\tilde{x} - \delta_0, \tilde{x} + \delta_0)$

Возьмем функцию $\eta(x) = \begin{cases} (\delta_0^2 - (x - \tilde{x}))^4, |x - \tilde{x}| < \delta \\ 0, |x - \tilde{x}| > \delta_0 \end{cases}$ – финитная функция



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = \int_{x_0-\delta_0}^{x_1-\delta_0} \underbrace{f(x)}_{>0}\underbrace{\eta(x)}_{>0} dx > 0 - \text{противоречие}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [x_0, x_1] : f(x) = 0$$

■

Из доказательства леммы следует, что доказана формула (2) ■

1. Случай понижения порядка в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad F = F(x, y(x), y'(x))$$

1) $F = f(x,y) \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow y = y(x)$

2) $F = F(x,y') \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,y') = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,y') = C$

3) $F = F(y,y')$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 | \cdot y'$$

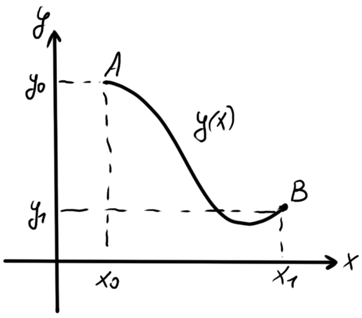
$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - \underbrace{y'\frac{\partial F}{\partial y'}}_{=\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - y''\frac{\partial F}{\partial y'}} = 0$$

$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + y''\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Заметим, что: $\dfrac{d}{dx}F(y,y') = y'\dfrac{\partial F}{\partial y} + y''\dfrac{\partial F}{\partial y'}$

$$\frac{d}{dx}F - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C}$$

2. Решение задачи о брахистохроне



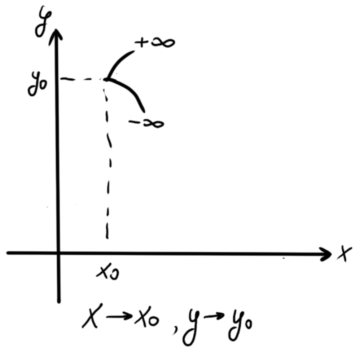
$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2)}}{\sqrt{2g(y_0-y(x))}}dx \\ y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}} - y'\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}\frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

$$\underbrace{\sqrt{1+(y')^2} - (y')^2\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}}_{\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}} = C\sqrt{2g(y_0-y)}$$

$$1 = \underbrace{c^2 2g}_{=\frac{1}{c_1}>0}(y_0-y)(1+(y')^2)$$

$$c_1 = (y_0-y)(1+(y')^2) \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{c_1}{y_0-y}-1} = y' \quad (3)$$



$$1+(y'(x))^2 = \frac{c_1}{y_0-y(x)} \xrightarrow{x\to x_1} +\infty$$

$$y'(x) \xrightarrow{x\to x_0} \underset{\text{выбор:}-}{\pm\infty} \Rightarrow y'(x) \xrightarrow{x\to x_0} -\infty$$

$$y' = -\sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}}$$

Замена: $\tilde{y} = y_0 - y(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = +\sqrt{\frac{c_1 - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Замена: $\tilde{y} = c_1 z$:

$$c_1 z' = \sqrt{\frac{c_1 - c_1 z}{c_1 z}} = \sqrt{\frac{1 - z}{z}}$$

Замена: $z = \sin^2 s, s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$c_1 2 \sin s \cos s \cdot s' = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 s}{\sin^2 s}} = \frac{\cos s}{\sin s} \text{ (знак определили из интервала s)}$$

$$2 c_1 \sin^2 s \frac{ds}{dt} = 1$$

$$\frac{dx}{ds} = c_1(1 - \cos(2s)) \Rightarrow \boxed{x(s) = c_1\left(s - \frac{1}{2}\sin 2s\right) - c_2} -$$

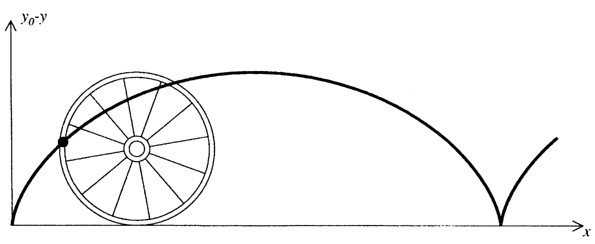
$$y(x) = y_0 - \tilde{y}(x) = y_0 - c_1 z = y_0 - c_1 \sin^2 s = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2s)$$

$$\boxed{y(s) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos(2s))}$$

Замена: $t = 2s, t \in (0, \pi)$

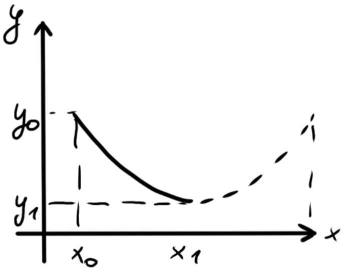
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{c_1}{2}(t - \sin t) + c_2 \\ y(t) = y_0 - \dfrac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2} + c_2 \\ y - \frac{c_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2}\sin t \\ \frac{c_1}{2}\cos t \end{pmatrix} \quad t \in (0, \pi)$$



$$t = 0 : \begin{cases} x(0) = c_2 = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$t = \pi : \begin{cases} x(\pi) = \frac{c_1}{2}\pi + c_2 = \frac{c_1}{2}\pi + x_0 \\ y(\pi) = y_0 - c_1 \end{cases}$$



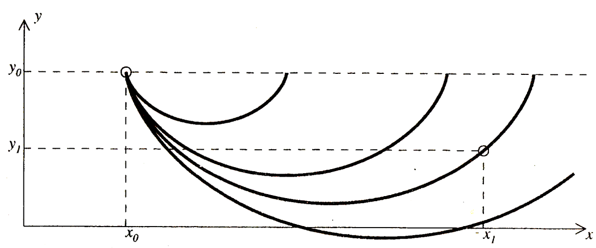
Теперь возьмем "+"(формула (3)):

$$y' = \sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}} \quad (5)$$

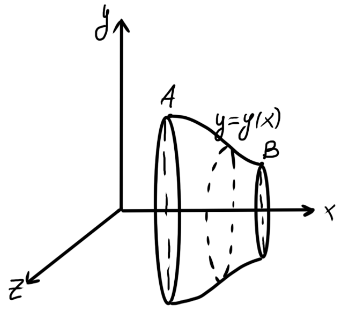
$$\tilde{y}(x) = y_0 - y(x) \Rightarrow \tilde{y}' = -\sqrt{\frac{c - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Делаем те же действия (замены) и получаем такие же $x(s), y(s)$ с различием только в интервале для t:

$$\begin{cases} x(T) = \frac{C_1}{2}(t - \sin t) + x_0 \\ y(t) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases} \quad , \quad t \in (0, 2\pi) \Rightarrow \text{ циклоида полная}$$



3. Решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади



$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x)^2)} \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$F - y; \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

$$2\pi y\sqrt{1+(y')^2} - y' 2\pi y \frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

$$2\pi y \underbrace{\left(\sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}} = C$$

$$(2\pi y)^2 = c^2(1+(y')^2)$$

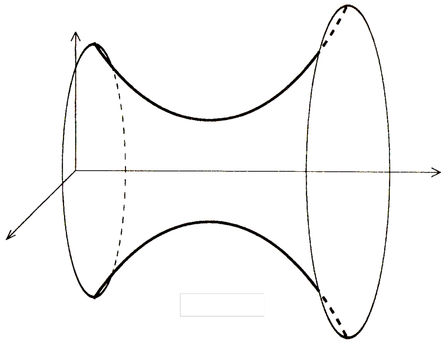
1) $c = 0 \Rightarrow y(x) = 0$ - решение, если $y_0 = y_1 = 0$

2) $c \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{c_1}\right)^2 = 1 + (y')^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1},\ c_1 = \frac{c}{2\pi} > 0$

$$y(x) = \mathrm{ch} z(x) c_1,\ z > 0$$

$$c_1 \mathrm{sh} z \cdot z'(x) = \pm \underbrace{\sqrt{\mathrm{ch}^2 z - 1}}_{=\mathrm{sh} z} \Rightarrow c_1 z = \pm 1$$

$$z = \pm\frac{x - c_2}{c_1} \Rightarrow y(x) = c_1 \mathrm{ch}\left(\frac{x + c_2}{c_1}\right) - \text{цепная линия}$$



4. Вариационная задача с несколькими функциями

$$I[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_n(x), y_n'(x))dx$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{01}, \dots, y_n(x_0) = y_{0n} \\ y_1(x_1) = y_{11}, \dots, y_n(x_1) = y_{1n} \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:
Пусть $\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x),$:

$$I[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n] \le I[y_1, \dots, y_n],\ \forall y_2, \dots, y_n$$

Можно взять y_1 - любое: $y_2 = \tilde{y}_2, \dots,$

$$\Rightarrow \underbrace{I[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n]}_{Y[\tilde{y}_1]} \le \underbrace{I[y_1, \dots, \tilde{y}_n]}_{Y[y_1]} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0$$

Аналогично: $\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0$