

# Конспект лекций по дисциплине

## Электромагнетизм и оптика

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

Преподаватель: Сеницкий Станислав Леонидович

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Электромагнитные волны.</b>	<b>2</b>
1.	Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение. . . . .	2
2.	Плоские волны. . . . .	3
3.	Плоские монохроматические волны (ПМВ). . . . .	5

# Глава 1: Электромагнитные волны.

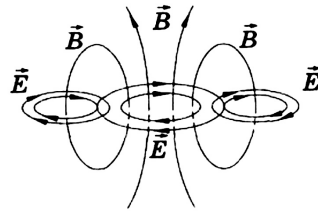
## 1. Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение.

**Определение 1** (Свободное). означает без токов и зарядов  $\Rightarrow \rho = 0, \vec{j} = 0$

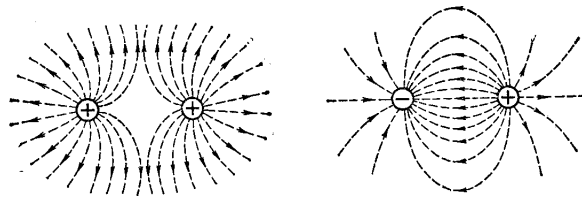
$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \text{div} \vec{D} = 0 \end{cases} + \text{Грани. условия} \begin{cases} (B_n)| = 0 & (E_\tau) = 0 \\ (D_n)| = 0 & (H_\tau) = 0 \end{cases}$$

Два типа векторных полей:

1. Вихревые:  $\text{div} \vec{F} = 0$  (нет источников истоков этого поля  $\Rightarrow$  силовые линии либо замкнуты, либо уходят на бесконечность)



2. Потенциальные:  $\text{rot} \vec{F} = 0$ . Силовые линии выходят или входят в области стоков и истоков (где  $\text{div} \vec{F} \neq 0$ ) или на бесконечности.



Далее мы будем рассматривать только вихревые поля (т.е.  $\text{div} \vec{B} = 0, \text{div} \vec{D} = 0$ )

Неизвестные 3 компоненты каждого поля:  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$  - 12 неизвестные функций. Мы можем решить эту систему при помощи уравнений Максвелла + материальные уравнения:  $\vec{B} = \vec{B}(H), \vec{E} = \vec{E}(D)$ .

Простая модель среды:  $\vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ , где  $\mu = \text{const}, \varepsilon = \text{const}$ , годится для вакуума ( $\mu = 1, \varepsilon = 1$ ) и для многих других сред/материалов при низких значениях полей  $\vec{E}, \vec{B}$  и при невысоких частотах  $f < 10^8$  Гц.

Волновое уравнение:

$$\text{Рассмотрим } \text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{H} = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

Распишем чему равен  $\text{rot}(\text{rot}\vec{E})$  :

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \nabla \underbrace{\text{div}\vec{E}}_{\frac{1}{\varepsilon} \text{div}\vec{D}=0} - \Delta\vec{E}$$

Получаем нашу систему:

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div}\vec{E} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Так же делаем с } \text{rot}(\text{rot}\vec{B}) \text{ и получаем: } \begin{cases} \Delta\vec{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div}\vec{B} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

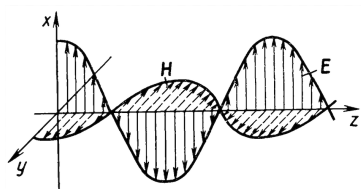
Согласование решений (1) и (2):

1) Решаем (1) и  $\vec{E}$  подставляем в уравнение Максвелла  $\rightarrow \vec{B}$ ;

2) Решаем (2) и  $\vec{B}$  подставляем в уравнение Максвелла  $\rightarrow \vec{E}$ ;

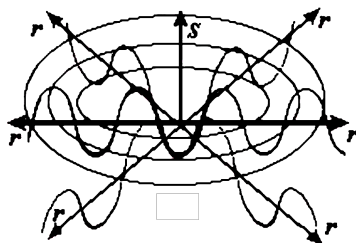
Различные простейшие решения волнового уравнения:

1) Плоские волны: все ненулевые компоненты полей  $\vec{E}, \vec{B}$  зависят от одной координаты (например от  $z$ ) и времени  $t$ ;



2) Цилиндрические волны: все ненулевые компоненты полей  $\vec{E}, \vec{B}$  зависят от  $\vec{r}$  - расстояния от точки наблюдения до некоторой оси (центра волны) и от времени  $t$ ;

3) Сферическая волна: все ненулевые компоненты полей  $\vec{E}, \vec{B}$  зависят от  $\vec{r}$  - расстояния от точки наблюдения до центра волны.



## 2. Плоские волны.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ для примера } E_x : \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_x = 0$$

Под  $f$  подразумевается  $E_x$  или  $E_y$

$$\begin{aligned}\xi &= z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \eta = z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (\text{замена переменных}) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(\xi(z, t), \eta(z, t)) &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial z}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial z}}_{=1} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \left( -\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left( \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) \right) = -\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \\ &\rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) E_x(\varepsilon, \mu) = 0 \quad 4 \frac{\partial}{\partial \mu \partial \varepsilon} E_x(\varepsilon, \mu) = 0\end{aligned}$$

Решения являются произвольные функции  $f(\xi), f(\eta)$

$$\begin{aligned}E_x(z, t) &= f\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + g\left(z + \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) \\ E_y(z, t) &= p\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + h\left(z + \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) \\ &\text{где } \forall f, g, p, h\end{aligned}$$

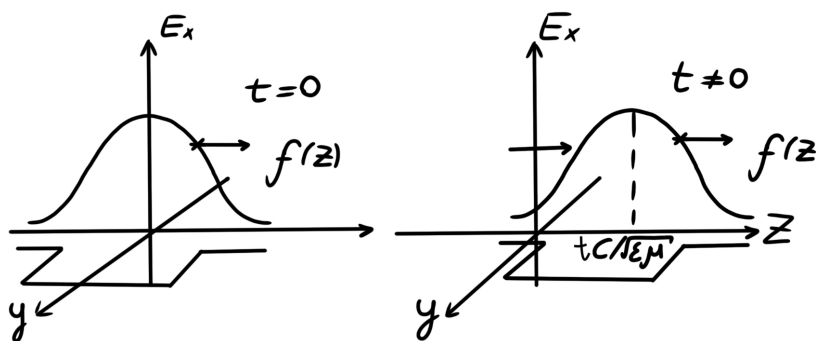
Свойства плоских волн:

1)  $E_z = 0, B_z = 0$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0 = \varepsilon \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \text{ первые два члена равны нулю.}$$

$\Rightarrow E_z$  - не зависит от  $z \Rightarrow$  не зависит от  $t$  - этот случай не соответствует волновому полю.

Пример:



$$\text{В максимуме } z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{аргумент}}_{V_\Phi} = \frac{dz}{dt} - \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = 0$$

2) Связь поперечных полей в плоской волне:

$$\sqrt{\epsilon}\vec{E} = \sqrt{\mu}[\vec{H} \times \vec{n}], \quad \sqrt{\mu}\vec{H} = \sqrt{\epsilon}[\vec{n} \times \vec{E}]$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор направления движения волны ( $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n}$ ).

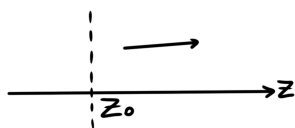
$$3) \epsilon E^2 = \mu[\vec{H} \times \vec{n}]^2 = \mu H^2 n^2 = \mu H^2 : 8\pi \Rightarrow W_E = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu B^2}{8\pi} = W_B$$

$$4) \vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}] - \text{плотность потока энергии (вектор Умова-Пойтинга)}.$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}[\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c\epsilon}{4\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \left( \vec{n}(\vec{E}\vec{E}) - \underbrace{\vec{E}(\vec{n}\vec{E})}_{=0} \right) = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \vec{n} \left( \underbrace{\frac{\epsilon E^2}{8\pi}}_{W_E} + \underbrace{\frac{\mu B^2}{8\pi}}_{W_B} \right)$$

### 3. Плоские монохроматические волны (ПМВ).

$$E_x, E_y, B_x, B_y \sim e^{-i\omega t}$$



$$\text{В плоскости } z = z_0, \vec{E}(z_0, t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow$$

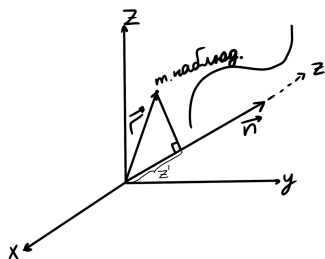
$$\Rightarrow \vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c}(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}t - z_0)} = \underbrace{\vec{E}_0 e^{-\frac{i\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c}z_0}}_{\vec{E}_{00}} \cdot \underbrace{e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c}(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}t)}}_{f(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}t)}$$

$$\vec{E}_0 \perp \vec{n} = \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}_0 = c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y, c_1 \text{ и } c_2 - \text{произвольные комплексные числа.}$$

**Определение 2.** Волновое число  $k = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c} = \frac{\omega}{V_{\text{волн.}}}$

$$\vec{E} = \vec{E}_{00} e^{ikz - i\omega t} - \text{ для волны с } \vec{n} = \vec{e}_z, \quad \vec{E} = \vec{E}_{000} e^{-ikz - i\omega t} - \text{ для волны с } \vec{n} = -\vec{e}_z$$

Универсальная запись полей ПМВ:



$$\begin{cases} \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ikz' - i\omega t} \\ z' = (\vec{n}, \vec{r}) \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ik(\vec{n}, \vec{r}) - i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r}) - i\omega t}$$