1. Сведение задачи об устойчивости произвольного решения к задаче об устойчивости нулевого решения

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(t, \vec{y}) \tag{1}$$

$\vec{y}^*(t)$ - решение, которое мы хотим исследовать на устойчивость.

Предположим, что $\vec{y}^*(t)$ определенно от t_0 до $+\infty$.

Пусть $\vec{y}(t)$ - другое решение системы (1). Замена $\vec{z}(t) = \vec{y}(t) - \vec{y}^*(t)$

$$\frac{d}{dt}\vec{z}(t) = \frac{d}{dt}\vec{y}(t) - \frac{d}{dt}\vec{y}^*(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)) - \vec{f}(t, \vec{y}^*(t)) = \vec{f}(t, \vec{y}^*(t) + \vec{z}(t)) - \vec{f}(t, \vec{y}^*(t))$$

$$\frac{d}{dt}\vec{z}(t) = \vec{f}(t, \vec{y}^*(t) + \vec{z}(t)) - \vec{f}(t, \vec{y}^*(t)) \tag{2}$$

$\vec{z}^*(t) = 0$ - решение системы (2).

Теорема 1. *Решение $\vec{y}^*(t)$ системы (1) устойчиво по Ляпунову/асимптотически устойчиво/неустойчиво $\Leftrightarrow$ нулевое решение $\vec{z}^*(t) = 0$ системы (2) устойчиво по Ляпунову/асимптотически устойчиво/неустойчиво.*

Доказательство.

По определению $\vec{z}^*(t) = 0$ устойчиво по Ляпунову, если:

1) $\vec{z}^*(t) = 0$ определено от t_0 до $+\infty$

2) $\exists \Delta > 0\ \forall \vec{z}(t_0) : \|\vec{z}(t_0) - \vec{z}^*(t_0)\| < \Delta \Rightarrow \vec{z}(t)$ тоже определено от t_0 до ∞, где $\vec{z}^*(t_0) = 0$, а $\vec{z}(t_0) = \vec{y}(t_0) - \vec{y}^*(t_0)$.

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{z}(t_0) : \|\vec{z}(t_0) - \vec{z}^*(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\vec{z}(t) - \vec{z}^*(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$, где $\vec{z}^*(t_0) = 0$, а $\vec{z}(t_0) = \vec{y}(t_0) - \vec{y}^*(t_0)$ и где $\vec{z}^*(t) = 0$, а $\vec{z}(t) = \vec{y}(t) - \vec{y}^*(t)$

$\#$

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = A(t)\vec{y} + \vec{g}(t) = \vec{f}(t, \vec{y}) \tag{3}$$

, где $A(t) = (a_{ij}(t)),\ \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix},\ a_{ij}(t), g_j(t) \in C(\mathbb{R})$

Так как система линейна, то любое решение определенно на $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ пункты 1) и 2) в определении устойчивости выполнены автоматически.

Замена $\vec{z}(t) = \vec{y}(t) - \vec{y}^*(t)$, где $\vec{y}(t)$ - другое решение (3).

$$\frac{d}{dt}\vec{z} = \vec{f}(t, \vec{y}^* + \vec{z}) - \vec{f}(t, \vec{y}^*) = A(t)\vec{z} \tag{4}$$

, где $\vec{z}^*(t) = 0$ - решение (4).

Теорема 2. *Решение $\vec{y}^*(t)$ линейной неоднородной системы (3) устойчиво по Ляпунову/асимптотически устойчиво/неустойчиво $\Leftrightarrow$ нулевое решение $\vec{z}^*(t) = 0$ линейной неоднородной системы (4) устойчиво по Ляпунову/асимптотически устойчиво/неустойчиво.*

Следствие 1. На устойчивость решения линейной неоднородной системы (3) не влияет $\vec{g}(t)$, а влияет только $A(t)$.

Следствие 2. Все решения линейной системы (3) либо одновременно устойчивы, либо одновременно неустойчивы.

2. Устойчивость линейных системах

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} \tag{1}$$

, где $A(t) = (a_{ij}(t)),\ a_{ij}(t) \in C(\mathbb{R})$

$\vec{y}^*(t) = 0$ - решение, которое мы исследуем на устойчивость.

Теорема 3. *Нулевое решение $\vec{y}^*(t) = 0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову $\Leftrightarrow$ все решения системы (1) ограничены вправо, то есть $\forall$ решения $\vec{y}(t)$ $\exists M > 0$ $\|\vec{y}(t)\| \leq M$ $\forall t \geq t_0$*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

По определению: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{y}_0 < \delta \Rightarrow \|\vec{y}(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$

Пусть $\vec{y}(t) \neq 0$ - решение системы (1). Возьмем $\vec{v}(t) = \underbrace{\frac{\delta}{2\|\vec{y}(t_0)\|}}_{\text{const}}\vec{y}(t)$ - тоже решение.

$$\|\vec{v}(t_0)\| = \left\|\frac{\delta}{2\|\vec{y}(t_0)\|}\vec{y}(t)\right\| = \frac{\delta}{2\|\vec{y}(t_0)\|}\|\vec{y}(t_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Из определения: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{v}(t) : \|\vec{v}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\vec{v}(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$

$$\left\|\frac{\delta}{2\|\vec{y}(t_0)\|}\vec{y}(t)\right\| < \varepsilon \Rightarrow \|\vec{y}(t)\| < \varepsilon\frac{2\|\vec{y}(t_0)\|}{\delta} = M$$

$(\Leftarrow)$:

Пусть $\forall$ решения $\vec{y}(t)$ $\exists M > 0 : \|\vec{y}(t)\| \leq M\ \forall t \geq t_0$

Все решения системы (1): $\vec{y}(t) = F(t)\vec{c} = c_1\vec{\varphi}_1(t) + ... + c_n\vec{\varphi}_n(t)$.

Возьмем $F(t)$ - ФМР (фундаментальная матрица решений) такую, что $F(t_0) = E$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases} \Rightarrow \vec{y}(t) = F(t)\vec{c} = F(t)\vec{y}_0 = y_{01}\vec{\varphi}_1(t) + ... + y_{0n}\vec{\varphi}_n(t)$$

, где $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix}$, $F(t) = (\vec{\varphi}_1(t)|...|\vec{\varphi}_n(t))$

Так как $\vec{\varphi}_1(t), ..., \vec{\varphi}_n(t)$ - решения, то $\exists M_1, \ldots, M_n : \|\vec{\varphi}_1(t)\| \leq M_1, ..., \|\vec{\varphi}_n(t)\| \leq M_n$ $\forall r \geq t_0$

Для решения задачи Коши:

$$\|\vec{y}(t)\| = \|y_{01}\vec{\varphi}_1(t) + ... + y_{0n}\vec{\varphi}_n(t)\| \leq |y_{01}|\,\|\vec{\varphi}_1(t)\| + ... + |y_{0n}|\,\|\vec{\varphi}_n(t)\| \leq |y_{01}|\,M_1 + ... + |y_{0n}|\,M_n \leq$$

$$\leq \underbrace{\max\{M_1, \ldots, M_n\}}_{=\tilde{M}}(|y_{01}| + ... + |y_{0n}|) = \tilde{M}\,\|\vec{y}_0\|_1$$

Возьмем норму $\|\vec{y}_0\|_1 = (|y_{01}| + ... + |y_{0n}|)$

Если $\|\vec{y}_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|\vec{y}(t)\| \leq \tilde{M}\,\|\vec{y}_0\|_1 < \tilde{M}\delta \overset{(*)}{=} \varepsilon$, $(*)$: возьмем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\tilde{M}}$

$\Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0$ устойчиво по Ляпунову.

#

Теорема 4. *Нулевое решение $\vec{y}^*(t) = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво $\Leftrightarrow$ $\forall$ решения $\vec{y}(t)$ выполняется $\|\vec{y}(t)\| \xrightarrow{t\to+\infty} 0$.*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

Из определения асимптотической устойчивости: $\exists\rho > 0\ \forall\vec{y}_0 : \|\vec{y}_0\| < \rho \Leftrightarrow \|\vec{y}(t)\| \xrightarrow{t\to+\infty}$ 0

Пусть $\vec{y}(t) \neq 0$ - решение системы (1). Возьмем $\vec{v}(t) = \dfrac{\rho}{2\,\|\vec{y}(t_0)\|}\vec{y}(t)$ - тоже решение.

$$\|\vec{v}(t)\| = \left\|\frac{\rho}{2\,\|\vec{y}(t_0)\|}\vec{y}(t)\right\| = \frac{\rho}{2\,\|\vec{y}(t_0)\|}\,\|\vec{y}(t_0)\| = \frac{\rho}{2} < \rho$$

$\Rightarrow$ по определению асимптотической устойчивости: $\lim\limits_{t\to\infty}\|\vec{v}(t)\|\,0$

$$\lim_{t\to+\infty}\left\|\frac{\rho}{2\,\|\vec{y}(t_0)\|}\vec{y}(t)\right\| = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\|\vec{y}(t)\| = 0$$

$(\Leftarrow)$:

Пусть $\forall$ решения $\vec{y}(t)$ выполняется $\|\vec{y}(t)\| \xrightarrow{t\to+\infty} 0$

Хотим доказать:

1) $\vec{y}^*(t)$ устойчиво по Ляпунову. По Теореме 1. достаточно доказать, что все решения ограничены вправо.

По определению предела: $\|\vec{y}(t)\| \xrightarrow{t\to+\infty} 0$

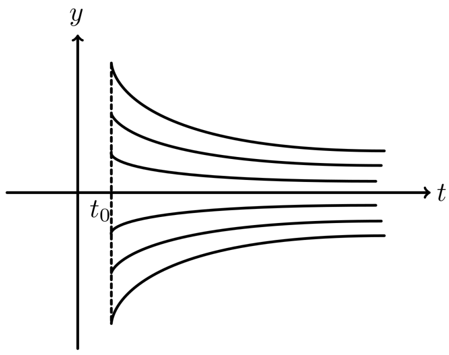
$$\forall\sigma > 0\ \exists T\ \forall t \geq T : \|\vec{y}(t)\| < \sigma$$

$\vec{y}(t)$ - непрерывна, $[t_0, T]$ - компакт $\Rightarrow \|\vec{y}(t)\| \leq c\ \forall t \in [t_0, T]$

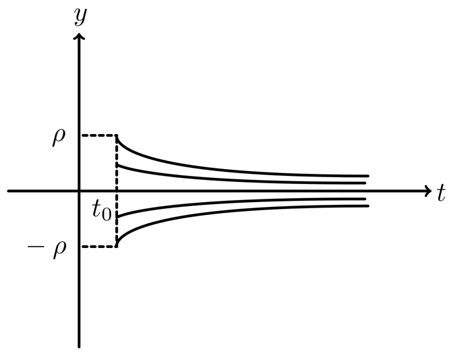
$\Rightarrow \|\vec{y}(t)\| \leq \max\{\sigma, c\}, t \geq t_0 \Rightarrow$ по Теореме 1. $\vec{y}^*(t) = 0$ устойчиво по Ляпунову.

2) Надо проверить: $\exists\rho > 0\ \forall\vec{y}_0 : \|\vec{y}_0\| < \rho \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\|\vec{y}(t)\| = 0$

Дано:



Надо доказать:



Возьмем $\rho = 1$, тогда 2) пункт выполняется.

$$\vec{y}^*(t) = 0 \text{ асимптотически устойчиво.}$$

$\#$

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = Ay \tag{2}$$

, где $A(t) = (a_{ij}),\ a_{ij} \in C(\mathbb{R})$

Все решения $\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{c} = Te^{tY}\vec{b}$.