

Конспект лекций по дисциплине

Электродинамика и оптика

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

Преподаватель: Сеницкий Станислав Леонидович

Оглавление

1	Электромагнитные волны.	2
1.	Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение.	2
2.	Плоские волны.	4
3.	Плоские монохроматические волны (ПМВ).	6
4.	Средняя по времени плотность потока энергии в ПМВ	8
5.	Фурье-преобразование электромагнитных полей	8
6.	Продолжение. Спектр свертки двух функций	11
7.	Соотношение неопределенностей	11
8.	Преобразование Фурье функции четырех переменных (x,y,z,t). Урав- нения Максвелла в Фурье преобразования	15

Глава 1: Электромагнитные волны.

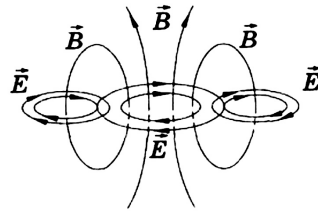
1. Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение.

Определение 1 (Свободное). означает без токов и зарядов $\Rightarrow \rho = 0, \vec{j} = 0$

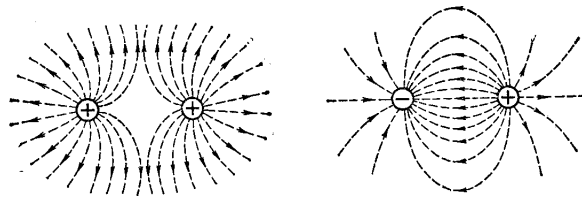
$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} = 0 \end{cases} + \text{Грани. условия} \begin{cases} (B_n)| = 0 & (E_\tau) = 0 \\ (D_n)| = 0 & (H_\tau) = 0 \end{cases}$$

Два типа векторных полей:

1. Вихревые: $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ (нет источников истоков этого поля \Rightarrow силовые линии либо замкнуты, либо уходят на бесконечность)



2. Потенциальные: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Силовые линии выходят или входят в области стоков и истоков (где $\operatorname{div} \vec{F} \neq 0$) или на бесконечности.



Далее мы будем рассматривать только вихревые поля (т.е. $\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = 0$)

Неизвестные 3 компоненты каждого поля: $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ - 12 неизвестные функций. Мы можем решить эту систему при помощи уравнений Максвелла + материальные уравнения: $\vec{B} = \vec{B}(H), \vec{E} = \vec{E}(D)$.

Простая модель среды: $\vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, где $\mu = \text{const}, \varepsilon = \text{const}$, годится для вакуума ($\mu = 1, \varepsilon = 1$) и для многих других сред/материалов при низких значениях полей \vec{E}, \vec{B} и при невысоких частотах $f < 10^8$ Гц.

Волновое уравнение:

$$\text{Рассмотрим } \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H} = -\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

Распишем чему равен $\text{rot}(\text{rot} \vec{E})$:

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \nabla \underbrace{\text{div} \vec{E}}_{\frac{1}{\varepsilon} \text{div} \vec{D}=0} - \Delta \vec{E}$$

Получаем нашу систему:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Так же делаем с $\text{rot}(\text{rot} \vec{B})$ и получаем:

$$\begin{cases} \Delta \vec{B} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

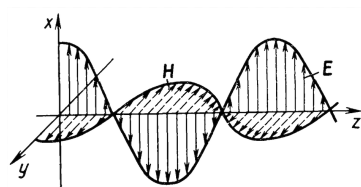
Согласование решений (1) и (2):

1) Решаем (1) и \vec{E} подставляем в уравнение Максвелла $\rightarrow \vec{B}$;

2) Решаем (2) и \vec{B} подставляем в уравнение Максвелла $\rightarrow \vec{E}$;

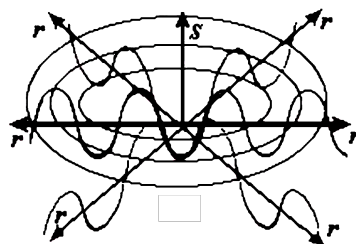
Различные простейшие решения волнового уравнения:

1) Плоские волны: все ненулевые компоненты полей \vec{E}, \vec{B} зависят от одной координаты (например от z) и времени t ;



2) Цилиндрические волны: все ненулевые компоненты полей \vec{E}, \vec{B} зависят от \vec{r} - расстояния от точки наблюдения до некоторой оси (центра волны) и от времени t ;

3) Сферическая волна: все ненулевые компоненты полей \vec{E}, \vec{B} зависят от \vec{r} - расстояния от точки наблюдения до центра волны.



2. Плоские волны.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ для примера } E_x : \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_x = 0 \quad (*)$$

Под f подразумевается E_x или E_y

$$\begin{aligned} \xi &= z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \eta = z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (\text{замена переменных}) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(\xi(z, t), \eta(z, t)) &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial z}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial z}}_{=1} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \left(-\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) \right) = -\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Подставляем в (*):

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \cancel{\frac{\partial}{\partial \eta}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial \eta}} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\cancel{\frac{\partial}{\partial \xi}} + \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} - \cancel{\frac{\partial}{\partial \xi}} \right) E_x(\varepsilon, \mu) = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta} E_x(\varepsilon, \mu) = 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow решения являются произвольные функции от своих аргументов: $f(\xi), f(\eta)$. Так как смешанные производные коммутируют ($\frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta \partial \xi}$) и уравнение равно нулю, то \vec{E}_x можно представить в виде суммы двух функций.

$$E_x(z, t) = f\left(z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + g\left(z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)$$

Физически это отражает принцип суперпозиции волн: любое решение может быть представлено в виде комбинации волн, движущихся в противоположных направлениях.

По аналогии можем записать \vec{E}_y :

$$E_y(z, t) = p\left(z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + h\left(z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right), \text{ где } \forall p, h$$

Свойства плоских волн:

1) Из определения, что плоские волны поперечные, то-есть перпендикулярны к направлению своего движения: $E_z = 0, B_z = 0$.

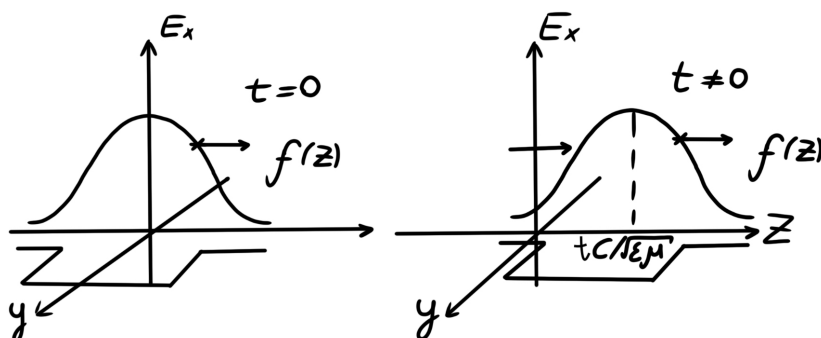
Доказательство.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0 = \varepsilon \left(\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_x}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial y}}_{=0} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = 0$$

То есть все сводится к тому, что наше поле $\vec{E}_z = E_0 = \text{const}$, но такое неизменное во времени однородное поле к волне отношения не имеет. Следовательно можно положить $\vec{E}_z = 0$, аналогично для $\vec{B}_z = 0$. ■

Пример:



В максимуме $z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{аргумент} = \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_\Phi} - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$$

2) Связь поперечных полей в плоской волне:

Рассмотрим бегущую волну в направлении оси z . В такой волне все величины являются функциями только от $\xi = z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t = z - ut$

$$\vec{E} = \vec{E}(\xi), \quad \vec{H} = \vec{H}(\xi)$$

Пусть $\vec{E} = \vec{E}(\xi)$ произвольная функция, тогда $H = H(\xi)$ определяется из уравнения $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. Распишем левую и правую части уравнения:

$$\text{rot} \vec{E}(\xi) = \left[\text{grad} \xi \times \frac{d\vec{E}}{d\xi} \right] = [\vec{e}_z \times \frac{d\vec{E}}{d\xi}] = \frac{d}{d\xi} [\vec{e}_z \times \vec{E}(\xi)]$$

$$\frac{\partial \vec{H}(\xi)}{\partial \xi} = \frac{d\vec{H}}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u \frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Подставляем это в уравнение:

$$\frac{d}{d\xi} [\vec{e}_z \times \vec{E}(\xi)] = \frac{\mu}{c} u \frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Проинтегрировав по ξ получаем и подставив $u = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\sqrt{\varepsilon}\vec{E} = \sqrt{\mu}[\vec{H} \times \vec{n}], \quad \sqrt{\mu}\vec{H} = \sqrt{\varepsilon}[\vec{n} \times \vec{E}]$$

где \vec{n} - единичный вектор направления движения волны ($\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n}$).

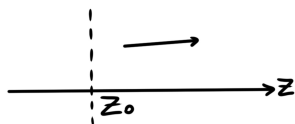
$$3) \varepsilon E^2 = \mu[\vec{H} \times \vec{n}]^2 = \mu H^2 n^2 = \mu H^2 : 8\pi \Rightarrow W_E = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu B^2}{8\pi} = W_B$$

$$4) \vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}] - \text{плотность потока энергии (вектор Умова-Пойтинга)}.$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c\varepsilon}{4\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \left(\vec{n}(\vec{E}\vec{E}) - \underbrace{\vec{E}(\vec{n}\vec{E})}_{=0} \right) = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \vec{n} \left(\underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{W_E} + \underbrace{\frac{\mu B^2}{8\pi}}_{W_B} \right)$$

3. Плоские монохроматические волны (ПМВ).

$$E_x, E_y, B_x, B_y \sim e^{-i\omega t}$$



$$\text{В плоскости } z = z_0, \vec{E}(z_0, t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow$$

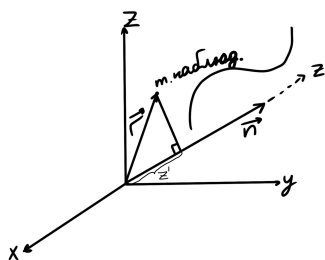
$$\Rightarrow \vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t - z_0)} = \underbrace{\vec{E}_0 e^{-\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}z_0}}_{\vec{E}_{00}} \cdot \underbrace{e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t)}}_{f(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t)}$$

$$\vec{E}_0 \perp \vec{n} = \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}_0 = c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y, c_1 \text{ и } c_2 - \text{произвольные комплексные числа.}$$

Определение 2. Волновое число $k = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} = \frac{\omega}{V_{\text{волн.}}}$

$$\vec{E} = \vec{E}_{00} e^{ikz - i\omega t} - \text{для волны с } \vec{n} = \vec{e}_z, \quad \vec{E} = \vec{E}_{000} e^{-ikz - i\omega t} - \text{для волны с } \vec{n} = -\vec{e}_z$$

Универсальная запись полей ПМВ:



$$\begin{cases} \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ikz' - i\omega t} \\ z' = (\vec{n}, \vec{r}) \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ik(\vec{n}, \vec{r}) - i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r}) - i\omega t}$$

Свойство: ПМВ как и любая плоская волна имеет две степени свободы, то есть обладает поляризацией.

Пример: ПМВ, бегущая по z, $\vec{E}(z, t) = (c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y) e^{ikz - i\omega t} (*)$, где c_1, c_2 - произвольные комплексные числа.

Определение 3. Плоская волна, у которой вектор \vec{E} при $\forall t$ во всем пространстве лежит в одной плоскости - плоскополяризованная (линейно поляризованная) волна.

Выражение (*) - представляет собой сумму двух плоскополяризованных волн с поляризациями вдоль x и y . \forall плоскую волну можно разложить на две плоскополяризованные.

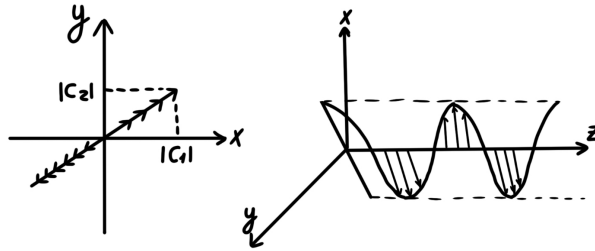
Рассмотрим несколько примеров. Пусть $c_1 = |c_1|e^{i\varphi}$, $c_2 = |c_2|e^{i\psi}$

Реальное поле есть вещественная часть (*)

$$\text{Re}(\vec{E}(z, t)) = |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e}_y \cos(kz - \omega t + \psi)$$

1) Пусть $\psi = \varphi + 2\pi m$, m - целое.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Re}\vec{E} &= |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e}_y \cos(kz - \omega t + \varphi + 2\pi m) = \\ &= (|c_1|\vec{e}_x + |c_2|\vec{e}_y) \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad t = \text{const} \end{aligned}$$



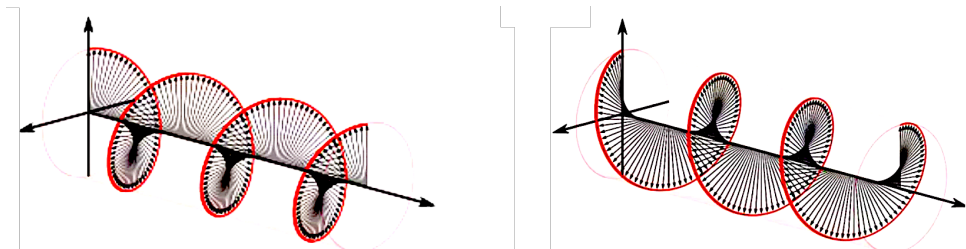
2) $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(kz - \omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(kz - \omega t + \varphi) \cos \frac{\pi}{2} - \sin(kz - \omega t + \varphi) \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) - |c_2|\vec{e}_y \sin(kz - \omega t + \varphi)$$

3) $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$

$$\text{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e}_y \sin(kz - \omega t + \varphi)$$



Слева у нас левополяризованная эллиптическая волна, справа правополяризованная эллиптическая волна.

В случае произвольных c_1, c_2 эллипс повернут на некоторый угол относительно оси x (задача на семинаре).

4. Средняя по времени плотность потока энергии в ПМВ

$$\vec{E}_0 = c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{4\pi} \langle \vec{E} \rangle = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{4\pi} (\langle E_x \rangle + \langle E_y \rangle) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\frac{|c_1|^2}{2} + \frac{|c_2|^2}{2} \right) = \\ &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{8\pi} (\vec{E}_0, \vec{E}_0^*) \end{aligned}$$

5. Фурье-преобразование электромагнитных полей

Для периодической функции ($f(t) = f(t + T)$), T - период, можно использовать следующее представление:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{+i\omega_0 n t} dt$$

Для непериодических функций Фурье представление в виде интеграла:

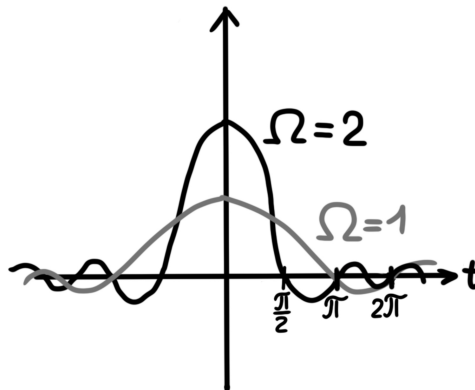
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} e^{-i\omega t} d\omega, \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{+i\omega t} dt$$

Для периодической функции: $\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \delta(\omega - n\omega_0)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Напоминание про свойства δ - функции

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i\omega t} d\omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{-e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}}{it2\Omega} 2\Omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} 2\Omega \cdot \text{sinc}(\Omega t)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \lim \int_{-\infty}^{\infty} 2\Omega \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \cdot \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right]$$

$$\int_C \frac{e^{ix}}{x} dx = 0 = \underbrace{\int_{|z|=R}}_{=0(\text{по лемме Жордана})} + \int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{|z|=\rho} + \int_{\rho}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \int_{|z|=\rho} \overbrace{\frac{e^{i\rho e^{i\varphi}} \cdot \rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}}}^{\rightarrow 1} = -i \int_{\pi}^0 d\varphi = i\pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = 2\pi\delta(t-\tau) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega = 2\pi\delta(\omega-\omega')$$

1)

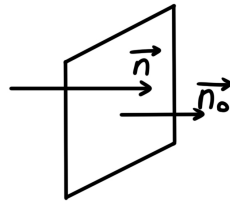
$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t}}_{\delta(t-\tau)(\text{Фурье образ})} e^{-i\omega t} d\omega$$

2)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) e^{i\omega\tau}$$

3)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^* dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2^*(\omega') d\omega' \frac{1}{2\pi} 2\pi \delta(\omega - \omega') f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2^*(\omega) d\omega \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega - \text{равенство Парсеваля} \end{aligned}$$



Прошедшая энергия за ∞ интервал времени через 1 см^2

$$= \int (\vec{S} \vec{n}) dt = \frac{c(\vec{n}, \vec{n}_0)}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^2(t) dt = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} (\vec{n} \vec{n}_0) \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega$$

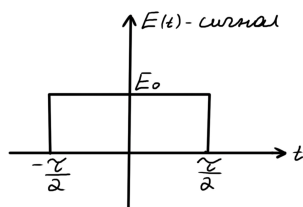
Свойства Фурье-преобразования:

1) Пусть $f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = f^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^* e^{+i\omega t} d\omega = [\omega \rightarrow -\omega'] =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(-\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

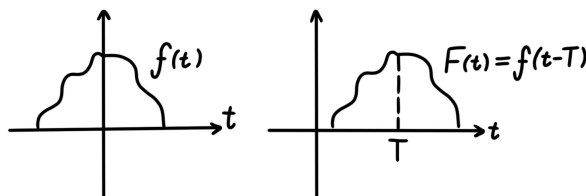
$$\hat{f}^*(-\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\hat{f}^*(\omega) = \hat{f}(-\omega)$$



Граница это - $\hat{f}(\omega)$, а внутри - $\hat{f}(\omega) e^{i\omega t}$

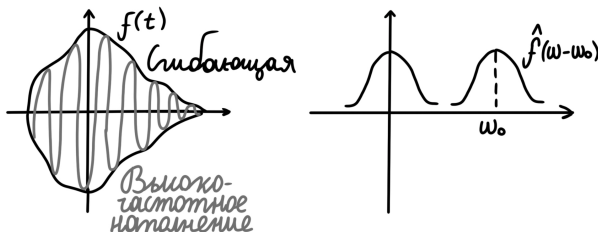
2) Спектр сдвинутого по времени сигнала:



$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{+i\omega t'} e^{i\omega T} dt' = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T}$$

3)

$$F(t) = f(t) e^{-i\omega_0 t} \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

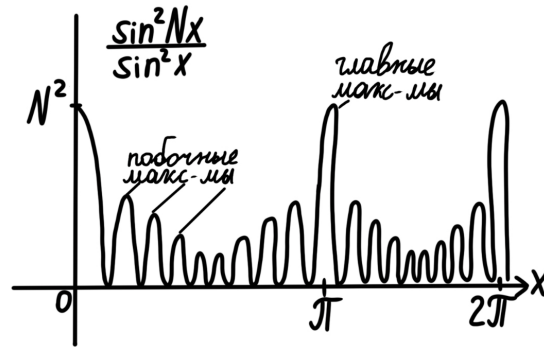


Как мы можем увидеть модулированная функция сдвигает спектр.

4) Спектр N повторенного сигнала:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t-nT); \quad F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(\omega) e^{i\omega nT} = f(\omega) \frac{e^{i\omega NT} - 1}{e^{i\omega T} - 1} = \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T \frac{N-1}{2}} \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}}$$

Последний выделенный множитель в правой части уравнения - это интерференционный множитель.



$$x = m\pi\epsilon, \epsilon > 0, \epsilon - \text{малое}$$

$$\frac{\sin^2(N(m\pi + \epsilon))}{\sin^2(m\pi + \epsilon)} = \frac{\sin^2(Nm\pi + N\epsilon)}{(-1)^{2m} \sin^2 \epsilon} = \frac{(-1)^{2Nm} \sin^2(N\epsilon)}{\sin^2 \epsilon} = \frac{N^2 \epsilon^2}{\epsilon^2} = N^2$$

6. Продолжение. Спектр свертки двух функций

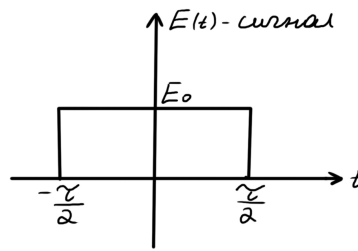
$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega') e^{i\omega'(t-\tau)} d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega') e^{-i\omega't} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{d\tau e^{-i(\omega-\omega')\tau}}_{=2\pi\delta(\omega-\omega')} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{g}(\omega') \delta(\omega-\omega') e^{-i\omega't} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \Rightarrow F(t) \doteq \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) \end{aligned}$$

7. Соотношение неопределенностей

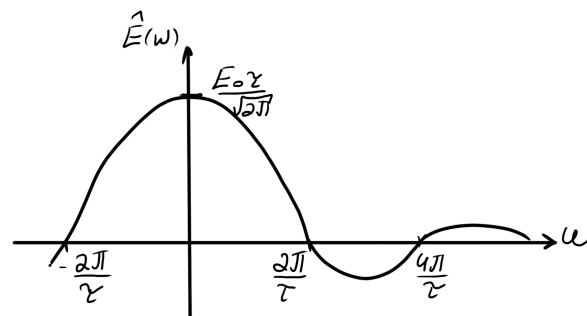
Определение 4. *Определенная связь между длительностью сигнала и шириной его спектра называется соотношением неопределенностей.*

Покажем эту связь на примерах:

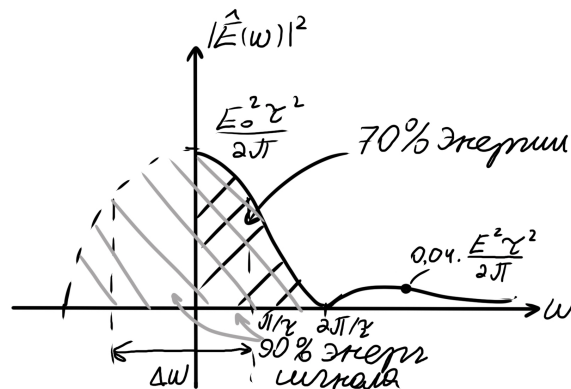
$$1) \text{ Спектр прямоугольного сигнала } E_1(t) = \begin{cases} E_0, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad E(t) - \text{сигнал.}$$



$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E_0 e^{i\omega t} dt = \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega \frac{\tau}{2}}}{2i\omega \frac{\tau}{2}} = \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$



Спектральная плотность энергии = $|\hat{E}(\omega)|^2$

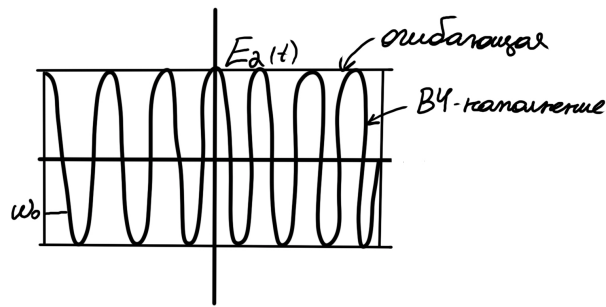


$$\Delta\omega \sim \frac{2\pi}{\tau} \Rightarrow \Delta\omega \tau \sim \pi - \text{соотношение неопределенности}$$

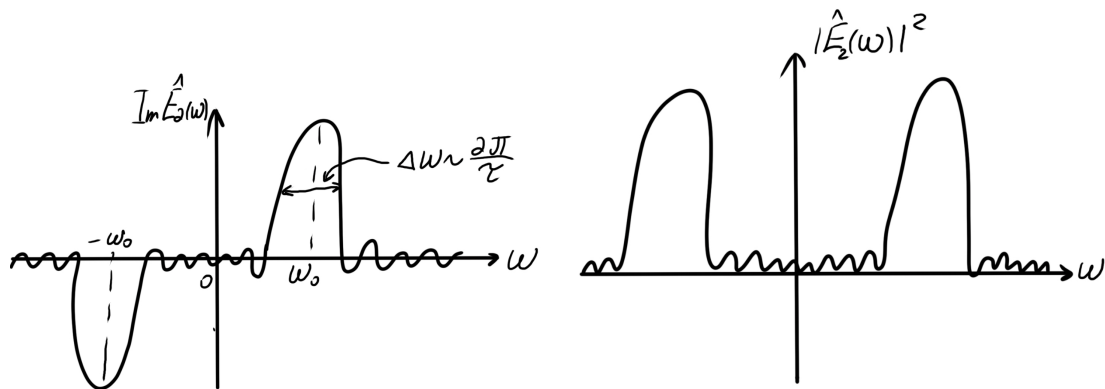
$$\tau \rightarrow \infty \Rightarrow \hat{E} \sim \delta(\omega)$$

2) Спектр синусоидальной волны:

$$E_2(t) = \begin{cases} E_0 \sin \omega_0 t, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \text{пусть } \tau = NT, N(\text{целое}) \gg 1$$



$$\hat{E}_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc} \left[(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2} \right] - \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc} \left[(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2} \right] \right\}$$



Если $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$, то такая волна - квазимонохроматическая.

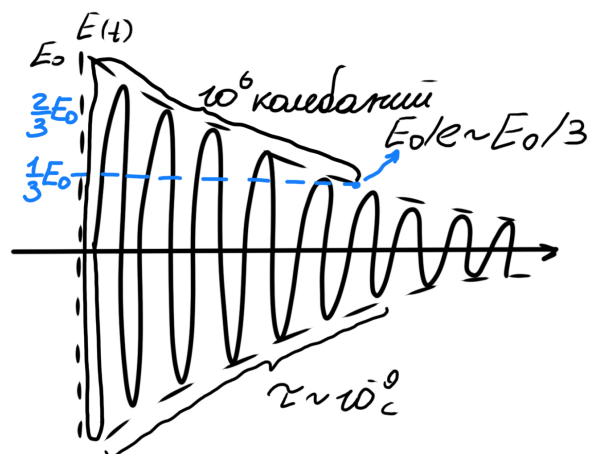
3) Спектр радиационно затухающего осциллятора:

Механистическая модель атома:

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{3mc^2} \sim 10^9 \text{ c}^{-1} \quad \omega_0 \approx 2 \cdot 10^{16} \frac{\text{rad}}{\text{c}} \Rightarrow f \sim 3 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$$

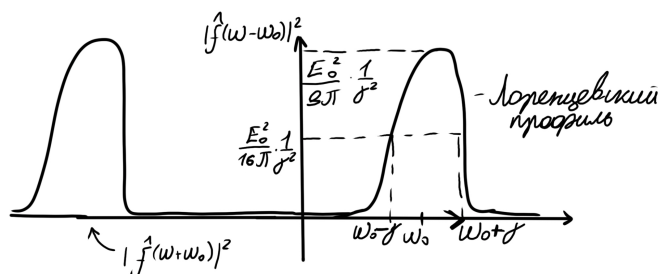
$$e^{-\gamma t} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \tau \sim \frac{1}{\gamma}$$



$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty E_0 e^{-\gamma t} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{+i\omega t} dt$$

$$\hat{E}(\omega) = \frac{E_0}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ -\frac{1}{-\gamma + i(\omega + \omega_0)} - \frac{1}{-\gamma + i(\omega - \omega_0)} \right\} = \hat{f}(\omega + \omega_0) \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

$$|\hat{f}(\omega - \omega_0)|^2 = \frac{E_0^2}{8\pi}$$



$\Delta\omega \sim 2\gamma$ — ширина спектра

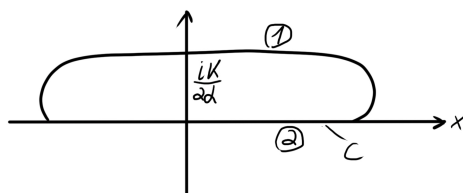
$$\Delta\omega \underbrace{\Delta t}_{\sim \tau} \sim 2\gamma \frac{1}{\gamma} \sim 2$$

$$|\hat{E}(\omega)|^2 = |\hat{f}(\omega + \omega_0)|^2 + |\hat{f}(\omega - \omega_0)|^2 + \text{поправка}$$

Поправка мала, если $10^9 \text{ c}^{-1} \sim \Delta\omega \ll \omega_0 \sim 2 \cdot 10^{16} \frac{\text{rad}}{\text{c}}$

4) Спектр гауссовой функции : $f(x) = E_0 e^{-\alpha x^2}$ $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx =$

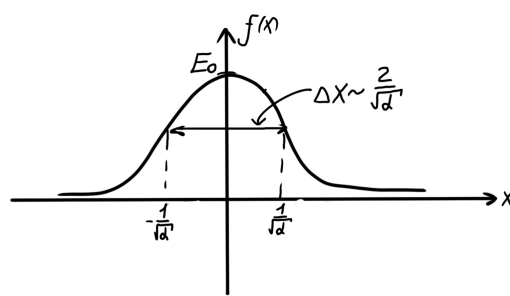
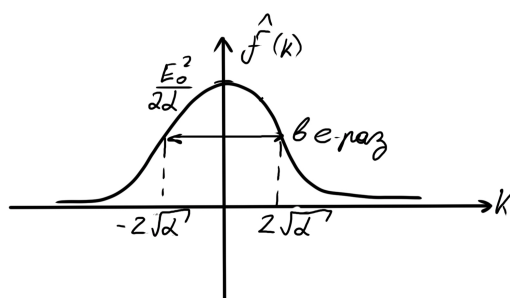
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - ikx} dx; -\alpha x^2 - ikx = -\alpha \left(x^2 + 2x \frac{ik}{2\alpha} - \frac{k^2}{4\alpha^2} \right) - \frac{k^2}{4\alpha} = -\alpha \left(x + \frac{ik}{2\alpha} \right)^2 - \frac{k^2}{4\alpha}$$



$$\int_C e^{-\alpha z^2} dz = 0 = \int_1 + \int_2 \Rightarrow \int_1 = \int_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\hat{f}(k) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$$



$$\Delta k \sim 4\sqrt{\alpha} \Rightarrow \Delta k \Delta x \sim 8 \sim \pi$$

$$\Delta x \sim \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

5) Модулированный гауссиан: $E(x) = E_0 e^{-\alpha x^2} \cos k_0 x$

8. Преобразование Фурье функции четырех переменных (x,y,z,t). Уравнения Максвелла в Фурье преобразования

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^4} \iiint \hat{f}(k_x, k_y, k_z, k_t) e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} dk_x dk_y dk_z dk_t$$

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \hat{f}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}, \vec{r}) - i\omega t} d^3 k d\omega$$

$$\frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \hat{f}(\vec{k}, \omega) (-i\omega) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d^3 k d\omega \quad \frac{\partial f}{\partial t} \doteq -i\omega \hat{f}(\vec{k}, \omega)$$

$$\frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial x} \doteq ik_x \hat{f}(\vec{k}, \omega)$$

$$\text{div} \hat{\vec{D}}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \hat{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \hat{D}_z}{\partial z} \doteq ik_x \hat{D}_x(\vec{k}, \omega) + ik_y \hat{D}_y(\vec{k}, \omega) + ik_z \hat{D}_z(\vec{k}, \omega) = i(\vec{k}, \hat{\vec{D}}(\vec{r}, \omega))$$

$$\text{rot} \hat{\vec{E}} = [\nabla \times \hat{\vec{E}}] = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \underbrace{\left[(\nabla \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r})}) \right]}_{\nabla e^{i(\vec{k}, \vec{r})} \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega)} e^{-i\omega t} d^3 d\omega =$$

$$\text{Где } \nabla e^{i(\vec{k}, \vec{r})} = \vec{e}_x i k_x e^{i(\vec{k}, \vec{r})} + \vec{e}_y i k_y e^{i(\vec{k}, \vec{r})} + \vec{e}_z i k_z e^{i(\vec{k}, \vec{r})} = i \vec{k} e^{i(\vec{k}, \vec{r})}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \left[i \vec{k} \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \right] e^{i(\vec{k}, \vec{r}) - i\omega t} d^3 k d\omega$$

$$\text{rot} \vec{E} = i \left[\vec{k} \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \right]$$

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i \left[\vec{k} \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \right] = \frac{i\omega}{c} \hat{\vec{B}}(\vec{k}, \omega) \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i \left[\vec{k} \times \hat{\vec{H}}(\vec{k}, \omega) \right] = \frac{4\pi}{c} \hat{\vec{j}}(\vec{k}, \omega) - \frac{i\omega}{c} \hat{\vec{D}}(\vec{k}, \omega) \\ \text{div} \vec{D} = 4\pi \rho = i(\vec{k}, \hat{\vec{D}}(\vec{k}, \omega)) = 4\pi \hat{\rho}(\vec{k}, \omega) \\ \text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow (\vec{k}, \hat{\vec{B}}(\vec{k}, \omega)) = 0 \end{cases}$$

В системе слева это уравнения Максвелла, а справа преобразование Фурье уравнений Максвелла.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 = -i\omega \hat{\rho}(\vec{k}, \omega) + i(\vec{k}, \hat{\vec{j}}(\vec{k}, \omega)) = 0$$

Если $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\varepsilon, \mu - \text{const}$

$$\vec{k}_a \times \left[\vec{k}_b \times \vec{E}_c \right] = \frac{\omega \mu}{c} \left(-\frac{\omega}{c} \varepsilon \hat{\vec{E}} \right)$$

||

$$\underbrace{\vec{k}(\vec{k}, \hat{\vec{E}})}_{=0} - \hat{\vec{E}} k^2 = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \omega^2 \hat{\vec{E}} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \right)^2} = \frac{\omega^2}{v_B^2}$$