

Второе уравнение Максвелла:

$$\text{rot}(\vec{H}_0(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t}) = -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\vec{E}_0e^{ik_0\psi-i\omega t}$$

$$\text{rot}\vec{H}_0e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t} + ik_0[\nabla\psi(\vec{r} \times \vec{H}_0)]e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t} = -\frac{i\omega\varepsilon(\vec{r})}{c}\vec{E}_0(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t}$$

$$\Rightarrow [\nabla\psi(\vec{r}) \times \vec{H}_0(\vec{r})] = -\varepsilon(\vec{r})\vec{E}_0(\vec{r}) \Rightarrow [\nabla\psi(\vec{r}) \times \vec{B}_0(\vec{r})] = -\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})\vec{E}_0(\vec{r})$$

Продолжение вектора Умова-Пойтинга:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\text{Re}[\vec{E}_0(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t} \times \vec{H}_0^*e^{-ik_0\psi(\vec{r})+i\omega t}]$$

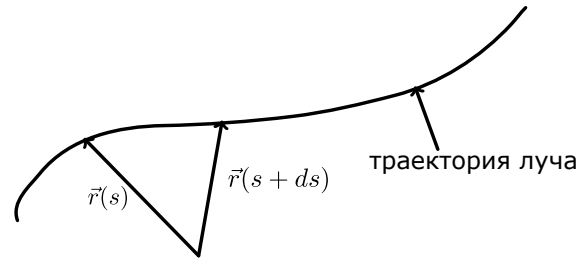
$$\text{Подставим: } \nabla\psi(\vec{r} \times \vec{E}_0(\vec{r})) = \vec{B}_0(\vec{r})$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{\mu(\vec{r})8\pi}[\vec{E}_0(\vec{r}) \times [\nabla\psi(\vec{r}) \times \vec{E}_0^*(\vec{r})]] = \frac{c}{\mu(\vec{r})8\pi}\text{Re}\{\nabla\psi(\vec{E}_0(\vec{r}), \vec{E}_0^*) - (\nabla\psi, \vec{E}_0^*(\vec{r}))\vec{E}_0^*(\vec{r})\} =$$

$$= \underbrace{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}}}_{v_\Phi} \underbrace{\frac{\nabla\psi}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}}}_{|\nabla\psi|=\sqrt{\varepsilon\mu}=n(1)} \underbrace{\frac{\varepsilon|\vec{E}_0|^2}{8\pi}}_{2W_E=W_E+W_B} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{u}(W_E + W_B)$$

(1) - единичный вектор вдоль $\nabla\psi$, вдоль луча \vec{u}

Уравнение для луча:



$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{r}(s + ds) - \vec{r}(s)}{ds} - \text{единичный вектор} = \vec{u}$$

$$\nabla\psi(\vec{r}) = n(\vec{r})\vec{u}$$

$$\frac{d}{ds}(\nabla\psi) = (\vec{u}, \nabla)\nabla\psi = \frac{1}{n(\vec{r})}(\nabla\psi, \nabla)\nabla\psi$$

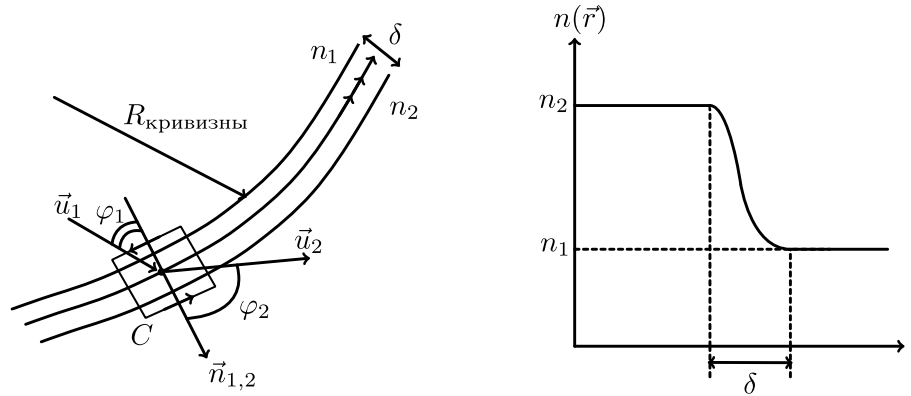
$$[\vec{a} \times \text{rot}\vec{b}] = [\vec{a} \times [\nabla \times \vec{b}]] = \nabla(\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{a}, \nabla)\vec{b} \rightarrow [\nabla\psi \times \text{rot}(\nabla\psi)] = \nabla \frac{(\nabla\psi)^2}{2} - (\nabla\psi, \nabla)\nabla\psi$$

Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\nabla(\vec{a}, \vec{a}) = \nabla\left(\frac{a^2}{2}\right)$:

$$\frac{d}{ds}(\nabla\psi) = \frac{1}{n(\vec{r})} \nabla \frac{n^2(\vec{r})}{2} = \nabla(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \left(n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n(\vec{r}) - \text{уравнение луча}$$

Граничные условия для уравнений луча и эйконала:



$$\oint_C (\nabla\psi, dl) = 0 \Rightarrow n_2(\vec{u}_2, \Delta\vec{l}) + n_1(\vec{u}_1, -\Delta\vec{l}) = 0$$

$$n_2 \Delta l \sin \varphi_2 = n_1 \Delta l \sin \varphi_1 \Rightarrow \boxed{n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2} - \text{закон Снеллиуса}$$

Гамильтонова форма уравнения луча:

$$n(\vec{r}) \frac{d}{ds} \left(n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n \cdot n(\vec{r})$$

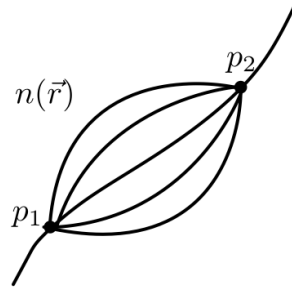
$$d\tau = \frac{ds}{dn(\vec{r})} \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \left(m, \underbrace{\frac{d\vec{r}}{d\tau}}_{\text{скорость частицы, двигающейся вдоль луча}} \right) = \nabla \frac{n^2(\vec{r})}{2}$$

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{p}, & \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{F} = -\nabla U = \nabla \frac{n^2(\vec{r})}{2} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m} \end{cases}; \text{Сохраняется полная энергия}$$

$$\frac{p^2}{2m} + U = \text{const}$$

$$\frac{(\nabla\psi)^2}{2} - \frac{n^2(\vec{r})}{2} = 0 - \text{уравнение эйконала}$$

1. Вариационный принцип - принцип Ферма



Оптический путь реального луча между точками p_1 и p_2 меньше или равен оптическому пути по \forall другой траектории.

$$\int_{p_1}^{p_2} n(\vec{r}) ds = \int_{p_1}^{p_2} \underbrace{n(\vec{r}) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}_{\mathbb{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})} dt = \min$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{2\dot{x}n(\vec{r})}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \frac{\partial n(\vec{r})}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{\partial L}{\partial z}$$

$$\frac{d}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \left(\frac{\vec{e}_x \dot{x} n(\vec{r})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = \vec{e}_x \frac{\partial n(\vec{r})}{\partial x}$$

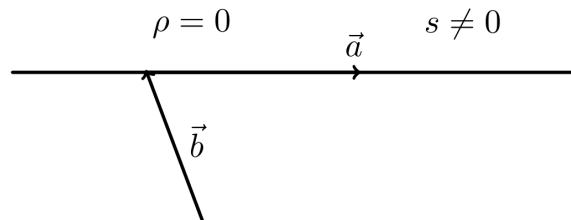
$$\frac{d}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \left(\frac{\vec{e}_x \dot{x} n(\vec{r})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = \vec{e}_x \frac{\partial n(\vec{r})}{\partial x} \quad \Bigg|$$

Примеры решений уравнений луча:

1) Однородное пространство $n(\vec{r}) = \text{const} = n_0$

$$\frac{d}{ds} \left(n_0 \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = 0 \Rightarrow n_0 \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{a} - \text{постоянные вектор}$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{a}}{n_0} s + \vec{b}$$

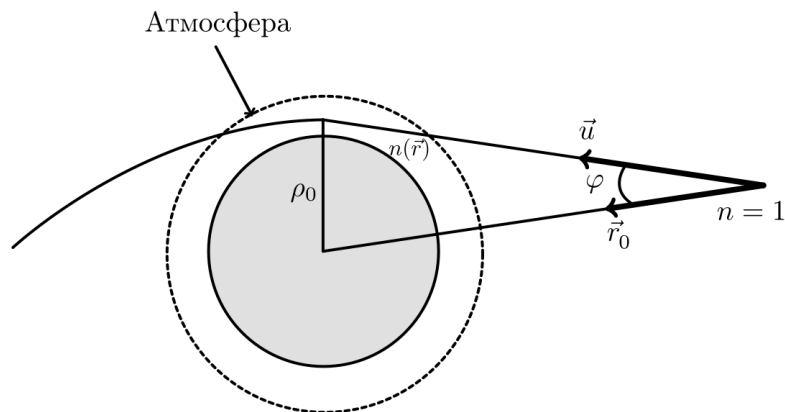


2) Движение луча в сферически симметричном распределении $n(\vec{r}) = n(r)$

$$\vec{p} = n(r) \frac{d\vec{r}}{ds}$$

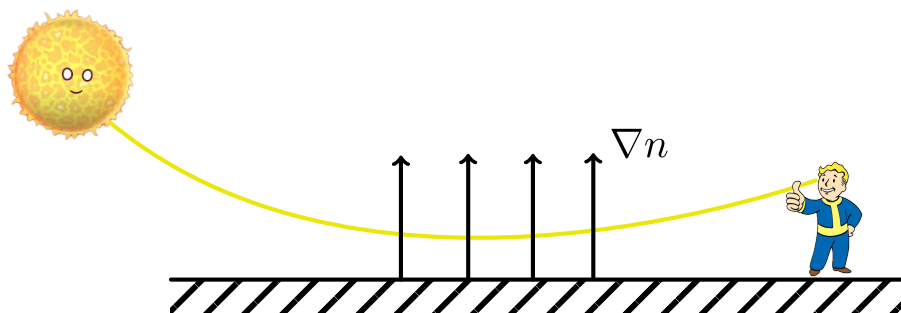
Должен сохраняться момент импульса, проверим это:

$$\frac{d}{ds} [\vec{r} \times \vec{p}] = \frac{d}{ds} \left[\vec{r} \times n(r) \frac{d\vec{r}}{ds} \right] = \underbrace{\left[\frac{d\vec{r}}{ds} \times n(r) \frac{d\vec{r}}{ds} \right]}_{=0} + \underbrace{\left[\vec{r} \times \frac{d}{ds} \left(n(r) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \right]}_{=-\nabla n(r) \sim \vec{e}_r = 0}$$



$$\left| \left[\vec{r} \times n \frac{d\vec{r}}{ds} \right] \right| = \text{const} = \left| [\vec{r}_0 \times \vec{u}] \right| = r_0 \sin \varphi_0 = \rho_0$$

Мираж



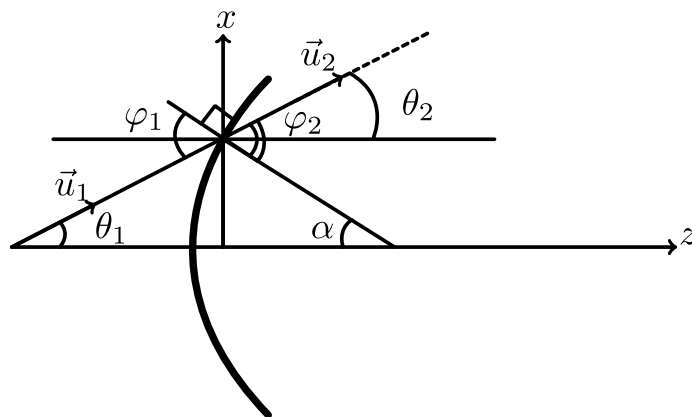
$$T_{\text{в}} \sim 30^\circ \text{C} \quad T_{\text{п}} \sim 100^\circ \text{C}$$

$$T_{\text{песка}} \gg T_{\text{воздуха}}$$

2. Оптические системы

- состоят из тел с $n = \text{const}$, в них лучи являются прямыми

Преломление лучей на сферической поверхности



Используем приближение малых углов (параксиальное приближение)

$$\theta_1 = \widehat{\vec{u}_1 \vec{e}_z} \quad \theta_2 = \widehat{\vec{u}_2 \vec{e}_z}$$

Правила:

1) Если луч удаляется от оси при движении слева направо, то $\theta > 0$, если приближается, то $\theta < 0$

2) Если выпуклость сферической границы обращена навстречу лучу (слева направо), то $R > 0$, если наоборот, то $R < 0$

Из закона Снеллиуса:

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 \quad (R \gg \lambda)$$

$$n_1 \sin(\theta_1 + \alpha) = n_2 \sin(\theta_2 + \alpha) \xrightarrow[\text{луча с линзой}]{x_1 - \text{точка пересечения}} n_1 \left(\theta_1 + \frac{x_1}{R} \right) = n_2 \left(\theta_2 + \frac{x_1}{R} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha = \arcsin \frac{x_1}{R} \approx \frac{x_1}{R}} \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 - \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) \frac{x_1}{R} = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 - \frac{x_1}{F_{12}}$$