

1. Вариационная задача с высшими производными

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, & y(x_1) = y_1 \\ y'(x_0) = y'_0, & y'(x_1) = y'_1 \\ \dots y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}, & y^{(n)}(x_1) = y_1^{(n)} \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:

Если функция $\tilde{y}(x)$ доставляет функционалу локальному экстремум, то $\tilde{y}(x)$ - решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

Доказательство.

Пусть $\tilde{y}(x)$ доставляет функционалу локальный минимум $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall y(x)$, удовлетворяет краевым условиям, $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon_0 \Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[y]$

Возьмем $y(x) = \tilde{y}(x) + \varepsilon \eta(x)$, $\eta(x)$ финитная функция.

$$\underbrace{I[\tilde{y}]}_{g(0)} \leq \underbrace{I[\tilde{y} + \varepsilon \eta]}_{g(\varepsilon)} \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = 0 - \text{точка локального минимума для функции } g(\varepsilon)$$

$$g'(0) = 0$$

$$0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y}(x) + \varepsilon \eta(x), \tilde{y}'(x) + \varepsilon \eta'(x), \dots) dx \right|_{\varepsilon=0}$$

Если $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$, $y(x) \in C^\infty([x_0, x_1])$, то

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} (\dots) \eta'(x) + \frac{\partial F}{\partial y''} (\dots) \eta''(x) + \dots \right] dx \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} (\dots) dx + \frac{\partial F}{\partial y'} (\dots) \eta(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta'(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} dx \dots \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

$$\text{Для } n=2: \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) dx - \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \eta(x) dx = 0 \quad \forall \text{ финитной функции } \eta(x)$$

Если $n = 2$, то по лемме Лагранжа: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0$

При $n > 2$ аналогично. ■

2. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными

$$\begin{cases} I[z] = \iint_D F(x, y, z(x), z'_x(x, y), z'_y(x, y)) dx dy \\ z|_{(x, y) \in \partial D} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z'_y} = 0 - \text{уравнение Эйлера-Остроградского}$$

Без доказательства

3. Принцип Остроградского-Гамильтона (принцип наименьшего действия, признак стационарного действия, основной вариационный принцип механики)

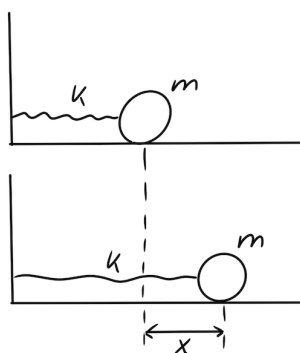
T - кинетическая энергия, U - потенциальная энергия:

$$L = T - U - \text{функция Лагранжа (Лагранжиан)}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt - \text{функционал действия}$$

Движения в системе происходит по экстремальям функционала действия.

Пример:



$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad U = \frac{kx^2}{2}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right) dt$$

Уравнение Эйлера (уравнение Лагранжа): $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

$$-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

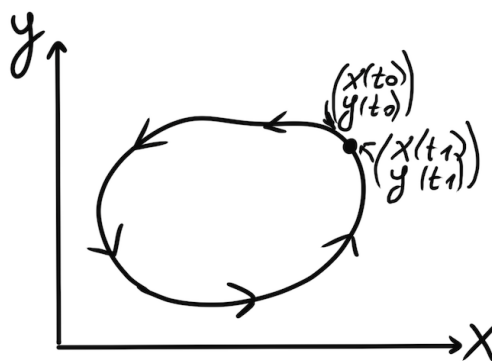
Понижение порядка: $L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \dot{x}m\dot{x} = c \Rightarrow -\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = c - \text{З.С.Э.}$$

4. Изопериметрическая задача

Найти кривую заданной длины, ограничивающую наибольшую площадь.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \max \\ l &= \text{const} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x = x(t) & x(t_0) = x(t_1) \\ y = y(t) & y(t_0) = y(t_1) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

$$S = \iint_D dx dy$$

Формула Грина: $\int_{\partial D} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \right) dx dy$

$$S = \iint_D dx dy = \iint_D \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{-\frac{\partial P}{\partial y}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{\partial Q}{\partial x}} \right) dx dy = \int_{\partial D} \left(-\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy \right) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2} & P = -\frac{y}{2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} & Q = \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \text{const}$$

Задача из математического анализа :

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \text{extz} & \tilde{f} = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m \rightarrow \text{extz} \\ g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Задача вариационного исчисления:

$$\begin{aligned} I[y_1, \dots, y_n] &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx \rightarrow \text{extz} \\ &\begin{cases} y_1(x_0) = y_0^1 & y_n(x_0) = y_0^n \\ y_1(x_1) = y_1^1 & y_n(x_1) = y_1^n \end{cases} \\ Y[y_1, \dots, y_n] &= \int_{x_0}^{x_1} G(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = \text{const} \end{aligned}$$

Необходимое условие локального экстремума:

Пусть $\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)$ доставляет локальный экстремум функционалу $I[y_1, \dots, y_n]$ и не является экстремалью функционалу $Y[y_1, \dots, y_n]$, тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, такие, что $\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)$ доставляют экстремум функционалу $\tilde{I} = I + \lambda Y$

Без доказательства

$$\text{Замечание. } I + \lambda Y \rightarrow \text{extz} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \text{const} \\ I \rightarrow \text{extz} \end{cases}$$

$$\lambda \left(\frac{1}{\lambda} I + Y \right) \rightarrow \text{extz} \Leftrightarrow Y + \frac{1}{\lambda} I \rightarrow \text{extz} \Leftrightarrow \begin{cases} Y \rightarrow \text{extz} \\ I = \text{const} \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} S \rightarrow \max \\ l = \text{const} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l \rightarrow \min \\ S = \text{const} \end{cases}$$

5. Решение классической изопериметрической задачи

$$\tilde{I} = S + \lambda l = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left[\frac{1}{2}(xy' - x'y) + \lambda \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \right]}_F dt \rightarrow \text{extz}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0 & \begin{cases} \frac{1}{2}y' - \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2}y + \lambda \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right] = 0 \\ -\frac{1}{2}x' - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}x + \lambda \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right] = 0 \end{cases} \\ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

№ 39 (задачник Александрова-Егорова). Понизить порядок не получится так же, как в простейшей задаче.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{y}{2} + \frac{y}{2} - \lambda \frac{x'}{\sqrt{(y')^2 + (y')^2}} \right] = 0 \\ -\frac{d}{dt} \left[\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \lambda \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right] = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - c_1 = \frac{\lambda x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \\ x - c_2 = \frac{-\lambda y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \end{cases}$$

$$(y - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = \lambda^2 \left[\frac{(x')^2}{(x')^2 + (y')^2} + \frac{(y')^2}{(x')^2 + (y')^2} \right]$$

$$(y - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = \lambda^2 - \text{окружность}$$