1. Вариационная задача с высшими производными

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))dx$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \\ y'(x_0) = y_0', \quad y'(x_1) = y_1' \\ \ldots y^{(n)} = y_0^{(n)}, \quad y^{(n)}(x_1) = y_1^{(n)} \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:

Если функция $\tilde{y}(x)$ доставляет функционалу локальному экстремум, то $\tilde{y}(x)$ - решение диффернциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

Доказательство.

Пусть $\tilde{y}(x)$ доставляет функционалу локальный минимум $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall y(x)$, удовлетворяет краевым условиям, $\sup\limits_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon_0 \Rightarrow I[\tilde{y}] \le I[y]$

Возьмем $y(x) = \tilde{y}(x) + \varepsilon\eta(x), \eta(x)$ финитная функция.

$\underbrace{I[\tilde{y}]}_{g(0)} \le \underbrace{I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]}_{g(\varepsilon)} \Rightarrow g(0) \le g(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = 0-$ точка локального минимума для функции $g(\varepsilon)$

$$g'(0) = 0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y}(x) + \varepsilon\eta(x), \tilde{y}'(x) + \varepsilon\eta'(x), ...)dx\bigg|_{\varepsilon=0}$$

Если $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+2}), y(x) \in C^\infty([x_0, x_1])$, то

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(...)\eta'(x) + \frac{\partial F}{\partial y''}(...)\eta''(x) + \ldots\right] dx\bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(...)dx + \frac{\partial F}{\partial y'}(...)\eta(x)\bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta'(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}dx ... \text{ и тд}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)dx - \eta(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}dx + ... \text{ и тд } =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta(x)dx + ... = 0 \quad \forall \text{ финитной функции } \eta(x)$$

Если n = 2 , то по лемме Лагранжа: $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'} + \dfrac{d^2}{dx^2}\dfrac{\partial F}{\partial y''} = 0$

При n > 2 аналогично.

∎

2. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными

$$\begin{cases} I[z] = \iint_D F(x, y, z(x), z'_x(x, y), z'_y(x, y))dxdy \\ z|_{(x,y)\in\partial D} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z'_y} = 0 - \text{ уравнение Эйлера-Остроградского}$$

Без доказательства

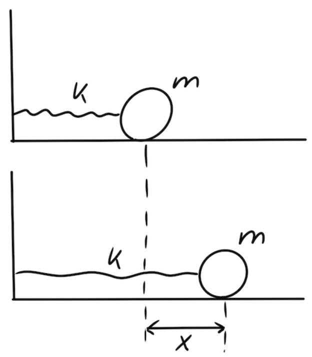
3. Принцип Остроградского-Гамильтона (принцип наименьшего действия, признак стационарного действия, основной вариационный принцип механики)

T - кинетическая энергия, U - потенциальная энергия:

$$L = T - U - \text{ Лагранжиан}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} Ldt - \text{функционал действия}$$

Движения в системе происходит по экстремалям функционала действия.
Пример:



$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad U = \frac{kx^2}{2}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right) dt$$

Уравнение Эйлера (уравнение Лагранжа): $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

$$-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

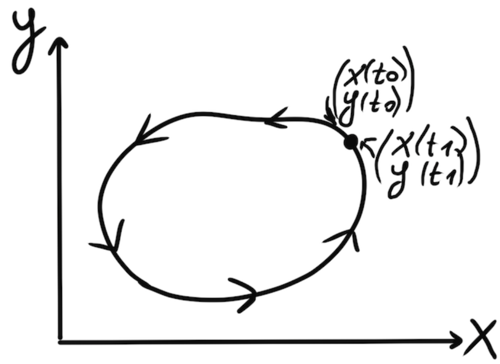
Понижение порядка: $L - \dot{x}\dfrac{\partial K}{\partial \dot{x}} = C$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \dot{x}m\dot{x} = c \Rightarrow -\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = c$$

4. Изопериметрическая задача

Найти кривую заданной длины, ограничивающую наибольшую площадь.

$$S \to \max$$
$$l = \text{const}$$



$$\begin{cases} x = x(t) & & x(t_0) = x(t_1) \\ y = y(t) & t \in [t_0, t_1] & y(t_0) = y(t_1) \end{cases}$$

$$S = \iint_D dxdy$$

$$\int_{\partial D} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) dxdy$$

$$S = \iint_D dxdy = \iint_D \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{-\frac{\partial P}{\partial y}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{\partial Q}{\partial x}}\right) dxdy = \int_{\partial D} \left(-\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy\right) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} \quad Q = \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t)^2 + (y'(t))^2}dt = \text{const}$$

Задача из математического анализа :

$$\begin{cases} f(x_1,\dots,x_n)\to \text{extz} \\ g_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases} \qquad \tilde{f}=f+\lambda_1 g_1+...+\lambda_m g_m \to \text{extz}$$

Задача вариационного исчисления:

$$I[y_1,\dots,yn]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,\dots,y_n,y_1',...,y_n')dx\to \text{extz}$$

$$\begin{cases} y_1(x_0)=y_0^1 & y_n(x_0)=y_0^n \\ y_1(x_1)=y_1^1 & y_n(x_1)=y_1^n \end{cases}$$

$$Y[y_1,\dots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1} G(x,y_1,\dots,y_n,y_1',...,y_n')dx=\text{const}$$

Необходимое условие локального экстремума:

Пусть $\tilde{y_1}(x),...,\tilde{y_n}(x)$ доставляет локальный экстремум функционалу $I[y_1,\dots,y_n]$ и не является экстремалью функционалу $Y[y_1,\dots,y_n]$, тогда $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, такие, что $\tilde{y_1}(x),...,\tilde{y_n}(x)$ доставляют экстремум функционалу $\tilde{I}=I=\lambda Y$

Без доказательства

Замечание. $I+\lambda Y\to \text{extz}\Leftarrow \begin{cases} Y=\text{const} \\ I\to \text{extz}\end{cases}$

$$\lambda\left(\frac{1}{\lambda}I+Y\right)\to \text{extz}\Leftrightarrow Y+\frac{1}{\lambda}\to \text{extz}\Leftarrow\begin{cases} Y\to \text{extz} \\ I=\text{const}\end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} S\to \max \\ l=\text{const}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l\to \min \\ S=\text{const}\end{cases}$$

5. Решение классической изопериметрической задачи

$$\tilde{I}=S+\lambda l=\int_{t_0}^{t_1}\underbrace{\left[\frac{1}{2}(xy'-x'y)+\lambda\sqrt{(x')^2+(y')^2}\right]}_{F}dt\to \text{extz}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial x'}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}y'-\dfrac{d}{dt}\left[-\dfrac{1}{2}y+\lambda\dfrac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right]=0 \\ -\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2}x+\lambda\dfrac{x'}{\sqrt{(y')^2+(y')^2}}\right]=0 \end{cases}$$

№ 39. Понизить порядок не получится так же, как в простейшей задаче.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{y}{2} + \dfrac{y}{2} - \lambda\dfrac{x'}{\sqrt{(y')^2 + (y')^2}}\right] = 0 \\ -\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} + \lambda\dfrac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}\right] = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - c_1 = \dfrac{\lambda x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \\ x - c_2 = \dfrac{-\lambda y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \end{cases}$$

$$(y - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = \lambda^2\left[\frac{(x')^2}{(x')^2 + (y')^2} + \frac{(y')^2}{(x')^2 + (y')^2}\right]$$

$$(y - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = \lambda^2 - \text{окружность}$$