

# Глава 1: Электромагнитные волны.

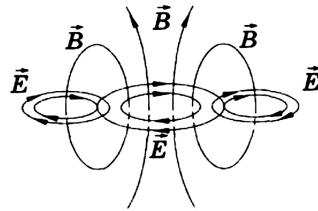
## 1. Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение.

**Определение 1** (Свободное). означает без токов и зарядов  $\Rightarrow \rho = 0, \vec{j} = 0$

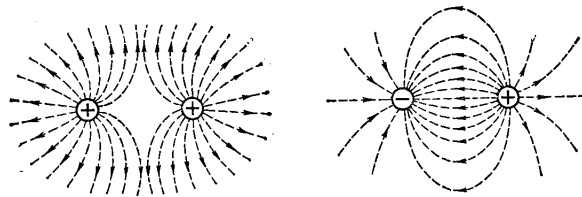
$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} = 0 \end{cases} + \text{Грани. условия} \begin{cases} (B_n)| = 0 & (E_\tau) = 0 \\ (D_n)| = 0 & (H_\tau) = 0 \end{cases}$$

Два типа векторных полей:

1. Вихревые:  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  (нет источников истоков этого поля  $\Rightarrow$  силовые линии либо замкнуты, либо уходят на бесконечность)



2. Потенциальные:  $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ . Силовые линии выходят или входят в области стоков и истоков (где  $\operatorname{div} \vec{F} \neq 0$ ) или на бесконечности.



Далее мы будем рассматривать только вихревые поля (т.е.  $\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = 0$ )

Неизвестные 3 компоненты каждого поля:  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$  - 12 неизвестные функций. Мы можем решить эту систему при помощи уравнений Максвелла + материальные уравнения:  $\vec{B} = \vec{B}(H), \vec{E} = \vec{E}(D)$ .

Простая модель среды:  $\vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ , где  $\mu = \text{const}, \varepsilon = \text{const}$ , годится для вакуума ( $\mu = 1, \varepsilon = 1$ ) и для многих других сред/материалов при низких значениях полей  $\vec{E}, \vec{B}$  и при невысоких частотах  $f < 10^8$  Гц.

Волновое уравнение:

$$\text{Рассмотрим } \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H} = -\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

Распишем чему равен  $\text{rot}(\text{rot} \vec{E})$  :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \nabla \underbrace{\text{div} \vec{E}}_{\frac{1}{\varepsilon} \text{div} \vec{D}=0} - \Delta \vec{E}$$

Получаем нашу систему:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Так же делаем с  $\text{rot}(\text{rot} \vec{B})$  и получаем:

$$\begin{cases} \Delta \vec{B} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

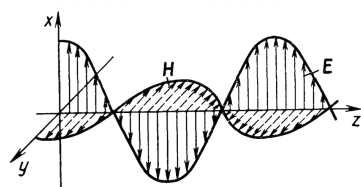
Согласование решений (1) и (2):

1) Решаем (1) и  $\vec{E}$  подставляем в уравнение Максвелла  $\rightarrow \vec{B}$ ;

2) Решаем (2) и  $\vec{B}$  подставляем в уравнение Максвелла  $\rightarrow \vec{E}$ ;

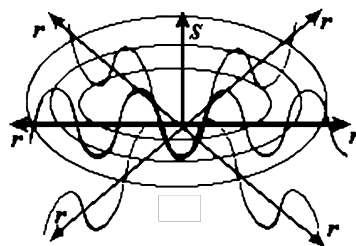
Различные простейшие решения волнового уравнения:

1) Плоские волны: все ненулевые компоненты полей  $\vec{E}, \vec{B}$  зависят от одной координаты (например от  $z$ ) и времени  $t$ ;



2) Цилиндрические волны: все ненулевые компоненты полей  $\vec{E}, \vec{B}$  зависят от  $\vec{r}$  - расстояния от точки наблюдения до некоторой оси (центра волны) и от времени  $t$ ;

3) Сферическая волна: все ненулевые компоненты полей  $\vec{E}, \vec{B}$  зависят от  $\vec{r}$  - расстояния от точки наблюдения до центра волны.



## 2. Плоские волны.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ для примера } E_x : \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_x = 0 \quad (*)$$

Под  $f$  подразумевается  $E_x$  или  $E_y$

$$\begin{aligned} \xi &= z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \eta = z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (\text{замена переменных}) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(\xi(z, t), \eta(z, t)) &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial z}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial z}}_{=1} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \left( -\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left( \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) \right) = -\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Подставляем в (\*):

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) E_x(\varepsilon, \mu) = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{\partial}{\partial \mu \partial \varepsilon} E_x(\varepsilon, \mu) = 0$$

Так как смешанные производные коммутируют ( $\frac{\partial}{\partial \mu \partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon \partial \mu}$ ) и уравнение равно нулю, то  $\vec{E}_x$  можно представить в виде суммы двух функций.

$$E_x(z, t) = f\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + g\left(z + \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)$$

Так же решения являются произвольные функции от своих аргументов:  $f(\xi), f(\eta)$ . В этом убеждают значения соответствующих вторых производных:

$$\frac{\partial^2 f(\xi \setminus \eta)}{\partial z^2} = \frac{d^2 f(\xi \setminus \eta)}{d(\xi \setminus \eta)^2}, \quad \frac{\partial^2 f(\xi \setminus \eta)}{\partial t^2} = \left( \pm \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right)^2 \frac{d^2 f(\xi \setminus \eta)}{d(\xi \setminus \eta)^2}$$

Физически это отражает принцип суперпозиции волн: любое решение может быть представлено в виде комбинации волн, движущихся в противоположных направлениях.

По аналогии можем записать  $\vec{E}_y$ :

$$E_y(z, t) = p\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + h\left(z + \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right), \text{ где } \forall p, h$$

Свойства плоских волн:

1) Из определения, что плоские волны поперечные, то-есть перпендикулярны к направлению своего движения:  $E_z = 0, B_z = 0$ .

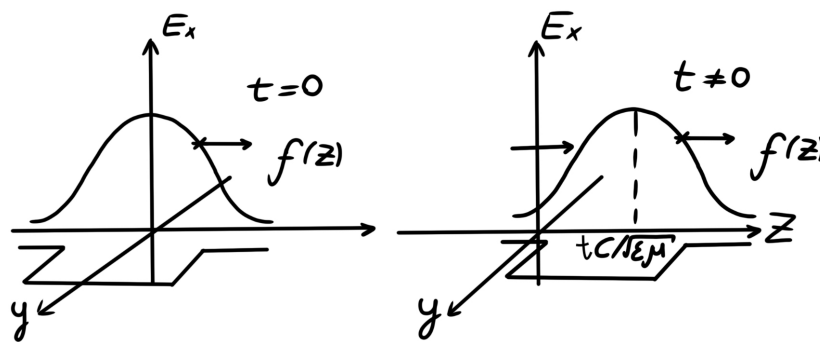
Доказательство.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0 = \varepsilon \left( \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_x}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial y}}_{=0} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = 0$$

То есть все сводится к тому, что наше поле  $\vec{E}_z = E_0 = \text{const}$ , но такое неизменное во времени однородное поле к волне отношения не имеет. Следовательно можно положить  $\vec{E}_z = 0$ , аналогично для  $\vec{B}_z = 0$ . ■

Пример:



В максимуме  $z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{аргумент} = \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_\Phi} - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$$

2) Связь поперечных полей в плоской волне:

Рассмотрим бегущую волну в направлении оси  $z$ . В такой волне все величины являются функциями только от  $\xi = z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t = z - ut$

$$\vec{E} = \vec{E}(\xi), \quad \vec{H} = \vec{H}(\xi)$$

Пусть  $\vec{E} = \vec{E}(\xi)$  произвольная функция, тогда  $\vec{H} = \vec{H}(\xi)$  определяется из уравнения  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ . Распишем левую и правую части уравнения:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\xi) = \left[ \operatorname{grad} \xi \times \frac{d\vec{E}}{d\xi} \right] = [\vec{e}_z \times \frac{d\vec{E}}{d\xi}] = \frac{d}{d\xi} [\vec{e}_z \times \vec{E}(\xi)]$$

$$\frac{\partial \vec{H}(\xi)}{\partial \xi} = \frac{d\vec{H}}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u \frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Подставляем это в уравнение:

$$\frac{d}{d\xi}[\vec{e}_z \times \vec{E}(\xi)] = \frac{\mu}{c} u \frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Проинтегрировав по  $\xi$  получаем и подставив  $u = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

$$\sqrt{\epsilon}\vec{E} = \sqrt{\mu}[\vec{H} \times \vec{n}], \quad \sqrt{\mu}\vec{H} = \sqrt{\epsilon}[\vec{n} \times \vec{E}]$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор направления движения волны ( $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n}$ ).

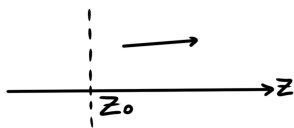
$$3) \epsilon E^2 = \mu[\vec{H} \times \vec{n}]^2 = \mu H^2 n^2 = \mu H^2 : 8\pi \Rightarrow W_E = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu B^2}{8\pi} = W_B$$

$$4) \vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}] - \text{плотность потока энергии (вектор Умова-Пойтинга)}.$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}[\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c\epsilon}{4\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \left( \vec{n}(\vec{E}\vec{E}) - \underbrace{\vec{E}(\vec{n}\vec{E})}_{=0} \right) = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \vec{n} \left( \underbrace{\frac{\epsilon E^2}{8\pi}}_{W_E} + \underbrace{\frac{\mu B^2}{8\pi}}_{W_B} \right)$$

### 3. Плоские монохроматические волны (ПМВ).

$$E_x, E_y, B_x, B_y \sim e^{-i\omega t}$$



В плоскости  $z = z_0, \vec{E}(z_0, t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow$

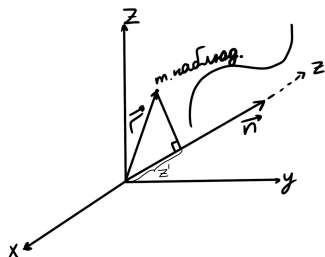
$$\Rightarrow \vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c}(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}t - z_0)} = \underbrace{\vec{E}_0 e^{-\frac{i\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c}z_0}}_{\vec{E}_{00}} \cdot \underbrace{e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c}(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}t)}}_{f(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}t)}$$

$$\vec{E}_0 \perp \vec{n} = \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}_0 = c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y, c_1 \text{ и } c_2 - \text{произвольные комплексные числа.}$$

**Определение 2.** Волновое число  $k = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c} = \frac{\omega}{V_{\text{волн.}}}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ikz - i\omega t} - \text{ для волны с } \vec{n} = \vec{e}_z, \quad \vec{E} = \vec{E}_{00} e^{-ikz - i\omega t} - \text{ для волны с } \vec{n} = -\vec{e}_z$$

Универсальная запись полей ПМВ:



$$\begin{cases} \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ikz' - i\omega t} \\ z' = (\vec{n}, \vec{r}) \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ik(\vec{n}, \vec{r}) - i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r}) - i\omega t}$$