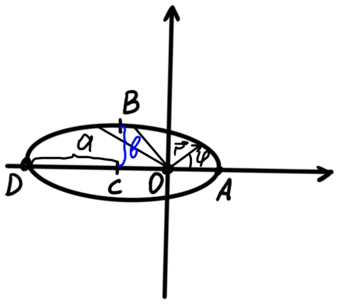
$$U = -\frac{\alpha}{r} \quad \alpha = GMm - \text{задача Кеплера}$$

M - масса Солнца, планеты; m - масса движущегося тела.

$$U_{\text{эф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$



На этом рисунке мы выбрали φ_0 за ноль.

Определение 1 (первый закон Кепелара). *Планеты движутся по эллипсам в фокусе находится Солнце.*

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\frac{1}{2}r(rd\varphi)}{dt} = \frac{M}{2m} - \textit{секторальная скорость сохраняется}$$

Определение 2 (второй закон Кеплера). *За равные промежутки времени радиус-вектор заметает одинаковые площади.*

Найдем связи между параметрами эллипсами и параметрами траектории:

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e};\ r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

$$r_{\min} = DO;\ r_{\max} = OA$$

$$a = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min}) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\frac{M^2}{m\alpha}}{1 - (1 + \frac{2ME}{m\alpha^2})} = \frac{\alpha}{-2E} \Rightarrow a = \frac{\alpha}{2|E|}$$

Расстояние от центра до оси: $CO = \dfrac{1}{2}(r_{\max} - r_{\min}) = ae$

$$b = CB = a\sqrt{1-e^2} \Rightarrow b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$$

$$T = \frac{S_{\text{эл}}}{\dot{S}} = \frac{\pi ab}{\frac{M}{2m}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\left(\frac{\alpha}{2|E|}\right)^3 \Rightarrow T^2 \sim a^3 \Rightarrow$$

Определение 3 (третий закон Кепелара)**.** *Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет.*

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$$

Задача Кеплера:

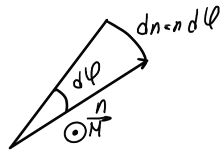
$$E = \text{const} \quad \vec{M} = \overrightarrow{\text{const}} \quad k = 4,\ S = 3$$

S = 3 - степени свободы, это минимальное количество параметров, необходимых для описания системы.

k - число интегралов движения, если S = k - задача называется полностью интегрируема.

S>k - задача супер интегрируема

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \quad dn = nd\varphi \Rightarrow \frac{dn}{dt} = \dot{\varphi}$$



$$d\vec{n} \parallel \vec{M} \times \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{rt} = \frac{\vec{M}}{mr^2} \times \vec{n} \overset{(1)}{=} -\frac{\vec{M}}{\alpha} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\vec{v} \times \vec{M} - \alpha\frac{\vec{r}}{r}\right)}_{\vec{A}} = 0 \quad \Big| \vec{n} = \vec{e_r}$$

$$\vec{F} = \frac{md\vec{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{r^2}m \quad (1)$$

Где $\vec{A}$ - это вектор Лапласа-Рунге-Ленца

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar\cos\xi$$

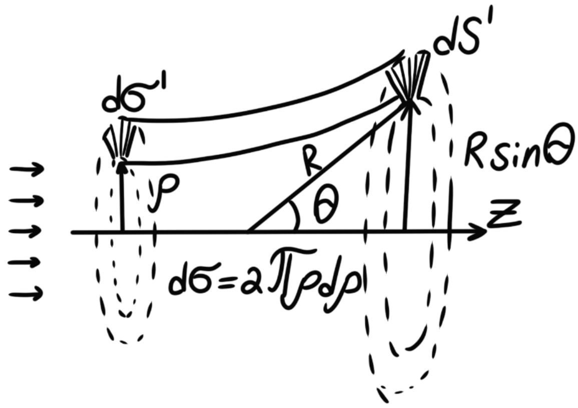
Подставим чему равно $\vec{A}$

$$\vec{r}[\vec{v} \times \vec{M}] - \alpha\frac{\vec{r}\vec{r}}{r} = \vec{M}[\vec{r} \times \vec{v}] - \alpha r = \vec{M}\frac{\vec{M}}{m} - \alpha r = Ar\cos\xi$$

$$r(\alpha + A\cos\xi) = \frac{M^2}{m} \Rightarrow r = \frac{\frac{M^2}{m\alpha}}{1 + \underbrace{\frac{A}{2}}_{=e}\cos\xi}$$

Закон сохранения $\dfrac{d}{dt}\vec{A} = 0$ получается из симметрии 4-ч мерного пространства.

1. Задача рассеяния



$$\rho - \text{ прицельный параметр;} \quad \theta - \text{угол рассеяния}$$

$$dS = 2\pi R \sin\theta R d\theta$$

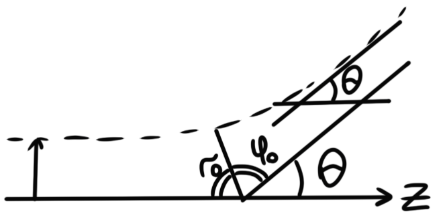
$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{dS'}{dS}$$

$$d\sigma' = d\sigma \frac{dS'}{2\pi R \sin\theta R d\theta} = d\sigma \frac{d\Omega}{2\pi \sin\theta d\theta}$$

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \frac{d\sigma}{2\pi \sin\theta d\theta}$$

$$d\dot{N} = d\sigma' I \underbrace{S_n}_{-\text{поток}} k = d\sigma' \frac{d\Omega'}{d\Omega'} I k S_n \Rightarrow \frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \frac{d\dot{N}}{I k S_n d\Omega'} - \text{экспериментальная формула}$$

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \frac{2\pi\rho d\varphi}{2\pi \sin\theta d\theta} = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|$$

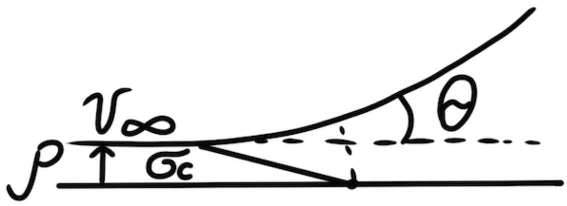


$$\int_0^{\varphi_0} d\varphi = \int_{r=\infty}^{r_0} \frac{\frac{M}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}\right)}}$$

$$\rho(\theta) = \frac{\alpha}{2E} ctg \frac{\theta}{2}$$

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} - \text{формула Резерфорда}$$



a) $E \gg U_{\text{хар}}$
b) $\rho \ll a_{\text{хар}}$

$$\sin\gamma = \frac{\rho}{r}$$

$$P_x = P_x' = mv_\infty$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial r}\sin\gamma = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\rho}{r}$$

$$F_y = \frac{dP_y'}{dt}$$

$$P_y' = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\rho}{r}\frac{dt}{v_\infty}v_\infty \boxed{=}$$

$$x = tv_\infty \quad x = \sqrt{r^2 - \rho^2} \Rightarrow dx = \frac{rdt}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

$$\boxed{=} - \frac{\rho}{v_\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr}\frac{dr}{r} = -2\frac{\rho}{v_\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = P_y'$$

$$tg\theta \approx \theta = \frac{P_y'}{P_x'} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\theta \approx -\frac{2\rho}{mv_\infty^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}}}_{\Rightarrow \rho(\theta)}$$