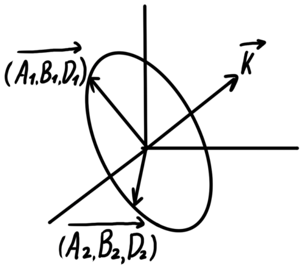
$$E_x(\vec{r},t) = A\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)e^{-i\omega t}$$

$$E_y(\vec{r},t) = B\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)e^{-i\omega t}$$

$$E_z(\vec{r},t) = D\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)e^{-i\omega t}$$

$$Ak_x + Bk_y + Dk_z = 0 \Rightarrow ((\overrightarrow{A,B,D},(k_x,k_y,k_z))) = 0$$



Пример: $A_1 = 1,\ B_1 = 0,\ D_1 = -\dfrac{k_x}{k_z}$

$$(\overrightarrow{A_2,B_2,D_2}) = \left[(\overrightarrow{A_1,B_1,D_1}) \times \frac{\vec{k}}{|k|}\right]$$

$\Rightarrow$ для $\forall$ вектора $\vec{k}(|\vec{k} \neq 0|)\exists$ плоскость $\perp \vec{k}$, в которой можно выбрать два линейно независимых (ортогональных) вектора $\overrightarrow{A_1,B_1,D_1}$ и $\overrightarrow{A_2,B_2,D_2}$, которые являются амплитудами собственных колебаний и имеют одну и ту же частоту:

$$\underbrace{\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}}_{k^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad \text{(т.е. двухкратное вырождение).}$$

Пример: если a= b, тогда решение с n_x, n_y, n_z имеет ту же частоту, что и решение $n_y, n_x, n_z \rightarrow$ четырех кратное вырождение.

Магнитное поле моды n_x, n_y, n_z:

$$\omega_{n_x,n_y,n_z} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_z}{d}\right)^2}, \quad (\varepsilon = \text{cosnt},\ \mu = \text{cosnt})$$

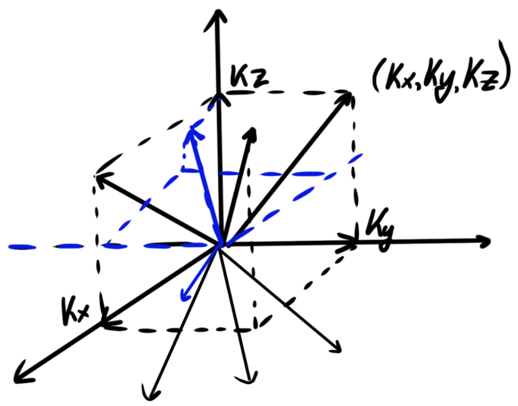
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{c}{i\omega_{n_x,n_y,n_z}}\text{rot}\vec{E}(\vec{r},t)$$

1. Связь мод резонатора с плоскими волнами

$$E_x(\vec{r},t) = -\frac{A}{8}(e^{ik_xx}+e^{-ik_xx})(e^{ik_yy}-e^{-ik_yy})(e^{ik_zz}-e^{-ik_zz})e^{-i\omega t} =$$

$$= c_1e^{ik_xx+ik_yy+ik_zz-i\omega t} + c_2e^{-ik_xx+ik_yy+ik_zz-i\omega t} + ...c_8e^{\cdots}$$

- восемь плоских волн.



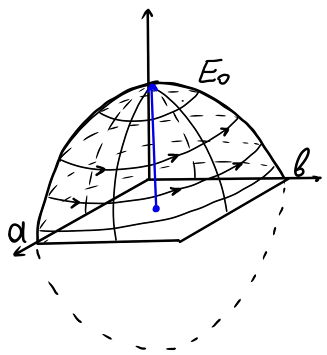
2. Минимальная частота мод

$\omega_{0,0,0} -$ не бывает, $\omega_{0,0,n_z} -$ не бывает (если два индекса равны 0, то решений нет)

$$\omega_{1,1,0} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}, \quad \omega_{1,0,1} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{d}\right)^2}, \quad \omega_{0,1,1} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$

Если $a > b > d$, то $\omega_{1,1,0}$ - минимальная частота $\Rightarrow$ основная мода резонатора...
Поле основной моды:

$$E_x = E_y = 0, \quad \mathrm{Re}(E_z(\vec{r},t)) = E_0\sin(k_xx)\sin(k_yy)\cos(\omega_{1,1,0}t)$$



$$\vec{B} = -\frac{c}{\omega_{1,1,0}}\left[\vec{e_x}k_y\sin(k_xx)\cos(k_yy) - \vec{e_y}k_x\cos(k_xx)\sin(k_yy)\right]\sin(\omega_{1,1,0}t)$$

3. Влияние конечной проводимости стенок на частоты мода резонатора

Рассматриваем случай, когда электромагнитные поля мод проникают в стенки резонатора на глубину $\delta \sim \dfrac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}} \ll a, b, d$. Найдем время затухания моды в резонаторе.

$$E, B \sim e^{-i\omega t} = e^{-i(\omega' - i\omega'')t}, \text{ где } \omega' = \mathrm{Re}(\omega),\ \omega'' = -\mathrm{Im}(\omega) \quad (\omega = \omega' - i\omega'')$$

Пусть $\varepsilon = \mathrm{cosnt},\ \mu = \mathrm{cosnt}.$

$$\overline{W}_E - (\text{полная энергия поля в резонаторе, усредненная по t}) = \int dV \frac{\varepsilon\overline{(\mathrm{Re}\vec{E}(\vec{r},t))^2}}{8\pi} \boxed{=}$$

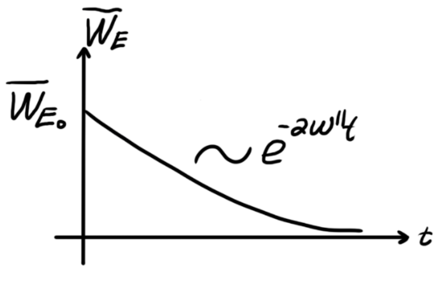
$$\overline{(\mathrm{Re}\vec{E}(\vec{r},t))^2} = \left(\frac{\overline{\vec{E}(\vec{r})e^{-i(\omega'-\omega'')t} + \vec{E}^*(\vec{r})e^{i\omega' t - \omega' t}}}{2}\right)$$

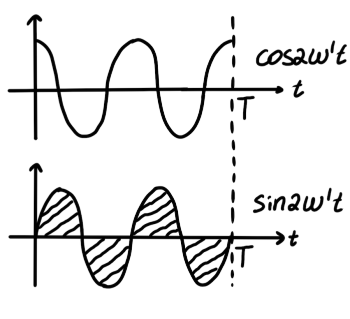
$$\boxed{=} \int \frac{dV\varepsilon}{8\pi} \left\{ \frac{\overline{(\vec{E}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}))e^{-2i\omega' t} + (\vec{E}^*(\vec{r}), \vec{E}^*(\vec{r}))e^{2i\omega' t} + 2(\vec{E}(\vec{r}), \vec{E}^*(\vec{r}))}}{4} \right\} e^{-2\omega'' t}$$

$$\overline{e^{-2i\omega' t}} = \overline{\cos(2\omega' t) - i\sin(2\omega' t)} = 0 \quad (\text{ за период } T = \frac{2\pi}{\omega'})$$

$$\Rightarrow \overline{W_E} = \int dV \frac{\left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2 \varepsilon}{16\pi} e^{-2\omega'' t}$$

$$\overline{W_B} = \int dV \frac{\left|\vec{B}(\vec{r})\right|^2}{16\pi} \frac{1}{\mu} e^{-2\omega'' t}$$





$$\overline{W} = \overline{W_E} + \overline{W_B} = \overline{W_0}e^{-2\omega'' t} \quad \frac{d\overline{W}}{dt} = -2\omega''\overline{W}(t)$$

Потери энергии в стенках резонатора: $\oint \left(\vec{\mathbb{S}}, ds\right) = \dfrac{c}{16\pi}\sqrt{\dfrac{\mu\omega'}{2\pi\sigma}} \oint_S \left|\vec{H}_\tau(\vec{r})\right|^2 ds\, e^{-2\omega'' t}$

$\bar{\bar{\mathbb{S}}}$ – вектор Пойнтинга, $\quad S$ – площадь стенок резонатора

$$\omega'' = \frac{\frac{c}{16\pi}\sqrt{\frac{\mu\omega'}{2\pi\sigma}}\oint_S \left|\vec{H}_\tau(\vec{r})\right|^2 ds\, e^{-2\omega'' t}}{\frac{1}{8\pi}\int dV \left(\varepsilon\left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2 + \frac{1}{\mu}\left|\vec{B}(\vec{r})\right|^2\right) e^{-2\omega'' t}}$$

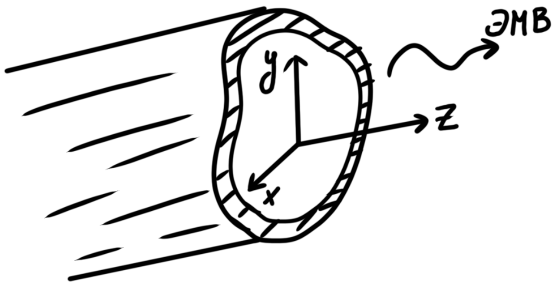
$$Q = \frac{\omega'}{2\omega''} - \text{добротность}$$

Свойства резонатора с $\omega'' = 0 (Q \to \infty)$ (Ландау, Лифшиц)

$$\int_V \frac{\varepsilon\left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2 dV}{16\pi} = \int_V \frac{1}{\mu}\frac{\left|\vec{B}(\vec{r})\right|^2 dV}{16\pi}, \quad \text{для } \varepsilon = \text{cosnt}(\omega),\ \mu = \text{cosnt}(\omega)$$

4. Волноводы

- труба с идеально проводящими стенками однородная по сечениям вдоль своей оси. Применение - транспортировка электромагнитных волн (энергии и информации) с малыми потерями на значительные расстоянияы.



$$\underset{\text{поле бегущей волны}}{\vec{E}(\vec{r},t)} = \vec{E}(x,y)e^{ik_z z - i\omega t}, \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(x,y)e^{ik_z z - i\omega t}$$

$$\text{rot}(\vec{E}(x,y)e^{ik_z z}) = \frac{i\omega}{c}(\vec{B}(x,y)e^{ik_z z})$$

$$\text{rot}(\vec{H}(x,y)e^{ik_z z}) = -\frac{i\omega}{c}(\vec{D}(x,y)e^{ik_z z})$$

Выделим поперечные компоненты этих уравнений:

$$[\vec{e_z} \times [\nabla \times \vec{E}(x,y)e^{ik_z z}]] = \frac{i\omega}{c}[\vec{e_z} \times \vec{B}(x,y)e^{ik_z z}], \quad \begin{array}{c}\vec{B}(x,y) = \mu(\omega)\vec{H}(x,y)\\ \vec{D}(x,y) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(x,y)\end{array}$$

$$\nabla(E_z(x,y)e^{ik_z z}) - \frac{\partial}{\partial z}(\vec{E}(x,y)e^{ik_z z}) = \frac{i\omega}{c}[\vec{e_z} \times \vec{B}(x,y)e^{ik_z z}] \ (z\text{−ая компонента уравнения } \equiv 0)$$

$$(\nabla_\perp E_z(x,y))e^{ik_z z} - \vec{E}_\perp(x,y)e^{ik_z z} = \frac{i\omega}{c}\vec{B}_\perp(x,y)e^{ik_z z}$$

$$\nabla_\perp H_z(x,y) - H_\perp(x,y)ik_z = -\frac{i\omega}{c}\vec{D}_\perp(x,y)$$