1. Линейные функционалы. Сопряженное пространство

Определение 1. *Линейный функционал это линейный оператор* $f : H \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Пример:

$$f(x) = (x, x_0), \; x, x_0 \in H$$

$$f : H \to \mathbb{C}$$

Определение 2. *Множество всех линейных непрерывных функционалов заданных на* H *называется пространством, сопряженным к* H *и обозначается* H^*.

$$\|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

Определение 3. *Множество* $\{x \in H | f(x) = 0\}$ *называется ядром* f *и обозначается* $\ker f$.

Свойства ядра линейного функционала:
1) $\forall f : H \to \mathbb{C}$ $\ker f$ является подпространством в H;

Доказательство.
$0 \in \ker f$: предположим, что $f(0) \neq 0$

$$f(x_1) = y$$

$$f(0) = f(x_1 - x_1) = y_1 - y_1 = 0$$

$x, y \in \ker f, \; \alpha, \beta$ - числа :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha 0 + \beta 0 = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ker f$$

$\#$

2) $f : H \to C$ непрерывный линейный функционал, то $\ker f$ замкнутое подпространство в H.

Доказательство.
x_0 - предельная точка $\ker f$. $x2 \to x_0$ $\forall n$ $x_0 \in \ker f$

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \quad x_0 \in \ker f$$

$\#$

3) $f : H \to \mathbb{C}$ ненулевой непрерывный линейный функционал, то $1 = \dim(\ker f)^\perp = \operatorname{codim}(\ker f)$ - размерность ортогонального дополнения к ядру = коразмерность

Доказательство.

f - непрерывный $\overset{1) \text{ и } 2)}{\Rightarrow}$ $\ker f$ - замкнутое подпространство в H (гильбертово пространство) $\Rightarrow H = \ker f \oplus (\ker f)^{\perp}$

f - ненулевой $\ker f \neq H \Rightarrow (\ker f)^{\perp} \neq \{0\} \Rightarrow \exists x_0 \in (\ker f)^{\perp},\ x_0 \neq 0$

Докажем, что x_0 базис в $(\ker f)^{\perp}$, то $\forall x \in (\ker f)^{\perp}$.

$$\exists \alpha : x_1 = \alpha x_0$$

Положим $\alpha = \dfrac{f(x_1)}{f(x_0)}$ и $y = (\alpha x_0 - x_1) \in (\ker f)^{\perp}$

$$f(y) = f(\alpha x_0 - x_1) = \alpha f(x_0) - f(x_1) = \frac{f(x_1)}{f(x_0)} f(x_0) - f(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow y \in \ker f \Rightarrow y = 0$$

Так как $y = 0$, то: $y = (\alpha x_0 - x_1) \Rightarrow \alpha x_0 = x_1$

#

Теорема 1 (Теорема Рисса об общем линейном непрерывном функционале)**.**

H - гильбертово пространство, тогда:

1) $\forall f \in H^* \ \exists! x_0 \in H : f(x) = (x, x_0)\ \forall x \in H$, при этом $\|f\| = \|x_0\|$

2) $\forall x_0 \in H$ формула $f(x) = (x, x_0)$ задает линейный непрерывный функционал на H (то есть $f \in H^*$), при этом $\|f\| = \|x_0\|$

Доказательство.

Для пункта 2):

$f(x) = (x, x_0)$ - линейность по первому аргументу скалярного произведения влечет линейность f.

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |(x, x_0)| \overset{(*)}{\leq} \left[\sup_{\|x\|=1} \|x\|\right] \|x_0\| = \|x_0\| < \infty$$

, где $(*)$ - неравенство Коши-Буняковскго

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |(x, x_0)| \geq \left|\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0\right)\right| = \frac{1}{\|x_0\|}(x_0, x_0) = \frac{1}{\|x_0\|} \underbrace{\|x_0\|^2}_{(**)} \Rightarrow \|f\| = \|x_0\|$$

, где $(**)$: в гильбертовом пространстве $\|x_0\| = \sqrt{x_0, x_0}$ (если $x_0 = 0$, то $\|f\| = 0$)

Для пункта 1):

Докажем, что $\exists x_0 \in H\ f(x) = (x, x_0)\ \forall x \in H$, если $f = 0$, то $x_0 = 0 \Rightarrow \|f\| = \|x_0\|$

f - ненулевой линейный непрерывный функционал $\overset{1) \text{ и } 2)}{\Rightarrow}$ $\ker f$ - замкнутое подпространство (в гильбертовом пространстве)

$$H = (\ker f) \oplus (\ker f)^{\perp}\ \forall x \in H\ \exists! x = x_1 + x_2$$

, где $x_1 \in \ker f,\ x_2 \in (\ker f)^{\perp}$

По свойству 3) $\exists x3 \in (\ker f)^{\perp}$ $\|x_3\| = 1$ $\forall x_2 \in (\ker f)^{\perp}$ $\exists \alpha \in \mathbb{C} : x_2 = \alpha x_3 \Rightarrow \forall x \in H : x = x_1 + \alpha x_3$

$$f(x) = f(x_1 + \alpha x_3) = \underbrace{f(x_1)}_{=0} + \alpha f(x_3) = \alpha f(x_3) = f(x_3)\underset{x_1 \perp x_3}{(x_1, x_3)} + \alpha f(x_3)(x_3, x_3) =$$

$$= (x_1, \overline{f(x_3)}x_3) + (\alpha x_3, \overline{f(x_3)}x_3) = (x_1 + \alpha x_3, \overline{f(x_3)}x_3) = (x, \underbrace{\overline{f(x_3)}x_3}_{x_0}) = (x, x_0)$$

$\Rightarrow$ существование x_0 доказано.

Проверим единственность: Пусть $\exists \tilde{x}_0 \in H$ $f(x) = (x, \tilde{x}_0)$. Покажем, что $(x, x_0) = f(x) = (x, \tilde{x}_0)$:

$$(x_0 - \tilde{x}_0, x_0) = (x, \tilde{x}_0)$$

$$\|x_0 - \tilde{x}_0\| = 0 \Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0$$

По второму пункту: $\|f\| = \|x_0\|$

$\#$

2. Бра- и кет- векторы

$(x, y) =< y|x >= \{< y|\}\{|x >\}$, где $< y|$ - бра-вектор (отождествляют с вектором из H^*), $|x >$ - кет-вектор (отождествляют с вектором $x \in H$ - исходное пространство)

$$f(x) =< y|x >: \|f\| = \|y\| \text{ (Теорема Рисса.)}$$

1) H - гильбертово пространство, $\dim H = n$, $x_1, \dots, x_n$ - ортонормированный базис в H

$x = \sum_1^n \alpha_k x_k,\ \alpha_k = (x_1, x_k)$	$\lvert x >= \sum_1^n \lvert x_k > \alpha_k,\ \alpha_k =< x_k \lvert x >$
$x = \sum_1^n (x_1, x_k) x_k$	$\lvert x >= \sum_1^n \lvert x_k >< x_k \lvert x >= \left[\sum_1^n \lvert x_k >< x_k \rvert\right] \lvert x >$
	$I\lvert x >= \left[\sum_1^n \lvert x_k >< x_k \rvert\right] \lvert x > \Rightarrow I = \sum_1^n \lvert x_k >< x_k \rvert$
	Удобная запись для I

2) $\dim H = n$, где H - гильбертово пространство. Тогда:

$$A : H \to H \text{ - линейный оператор}$$

векторы $x_1, \dots, x_n$ образуют базис в H

$$Ax_n = \lambda_k x_n, x_n \neq 0$$

$$Ax - \lambda x = y \text{ относительно } x$$

$$(A-\lambda I)^{-1} \text{ резольвента, если } \lambda \in \rho(A)$$

$$x = (A-\lambda I)^{-1}y$$

$$x = ...$$

$$y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j,\ \beta_j = (y, x_j)$$
$$Ax_j = \lambda_j x_j$$
$$Ax - \lambda x = y$$
$$A\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) - \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$$
$$Ax_j = \lambda_j x_j \quad \alpha_j\lambda_j - \lambda_j\alpha_j = \beta_j$$

$$(A-\lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j >< x_j|}{x_j - \lambda}$$

$$|x >= \sum_{j=1}^{n} |x_j > \alpha_j,\ \alpha_j =< x_j|x >$$

$$|y >= \sum_{j=1}^{n} |x_j > \beta_j,\ \beta_j =< x_j|y >$$
$$|x_j > A = |x_j > \lambda_j$$
$$|x > A|x > \lambda = |y >$$