

Конспект лекций по дисциплине

Дифференциальные уравнения

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

Преподаватель: Скворцова Мария Александровна

Оглавление

1	Вариационное исчисление.	2
1.	Примеры задач вариационного исчисления	2
2.	Простейшая задача вариационного исчисления	4
3.	Необходимые условия локального экстремума	4
4.	Случай понижения порядка в уравнении Эйлера	7
5.	Решение задачи о брахистохроне	8
6.	Решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади	11
7.	Вариационная задача с несколькими функциями	12
8.	Вариационная задача с высшими производными	12
9.	Вариационная задача с несколькими независимыми переменными	13
10.	Принцип Остроградского-Гамильтона (принцип наименьшего действия, признак стационарного действия, основной вариационный принцип механики)	13
11.	Изопериметрическая задача	14
12.	Решение классической изопериметрической задачи	16
13.	Вариационная задача на условный экстремум	16
14.	Решение задачи о геодезических на сфере	17
2	Система малых колебаний	19
1.	Линейные однородные системы малых колебаний	19

Глава 1: Вариационное исчисление.

1. Примеры задач вариационного исчисления

Задача математического анализа:

Есть кривая заданная функцией $f(x)$ найти точки экстремума:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2 - \text{точки, подозреваемые на экстремум}$$

$$f''(x_1) < 0 \Rightarrow x_1 - \text{max}$$

$$f''(x_2) > 0 \Rightarrow x_2 - \text{min}$$

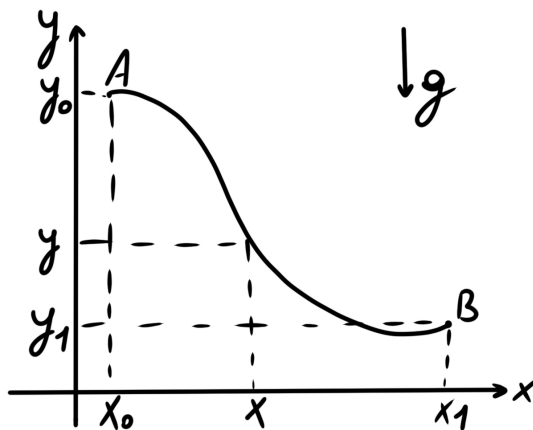
Задача вариационного исчисления:

Функционал: $I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$

Найти функцию $y(x)$ такую, что $I[y]$ принимает min или max

Пример 1 : задача наискорейшего спуска (задача Брахистохроны)

Найти кривую $y(x)$ по которой тело из точки А в точку В попадет за наименьшее время.



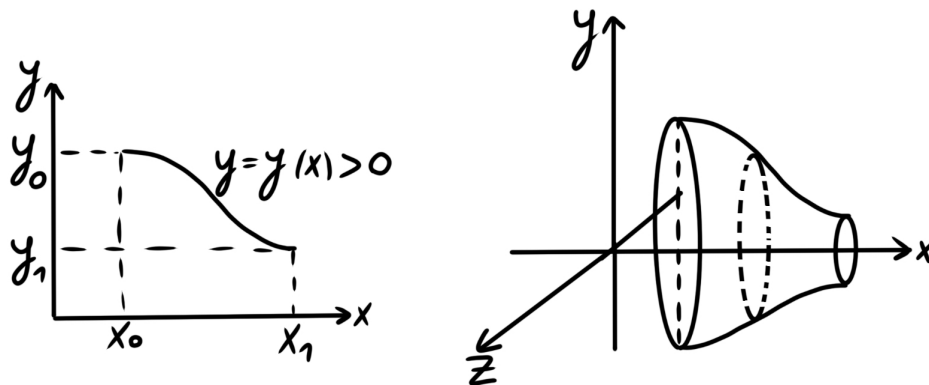
$$\text{З.С.Э: } mgy_0 + 0 = mgy(x) + \frac{m|v|^2}{2}$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \frac{dx}{dt}$$

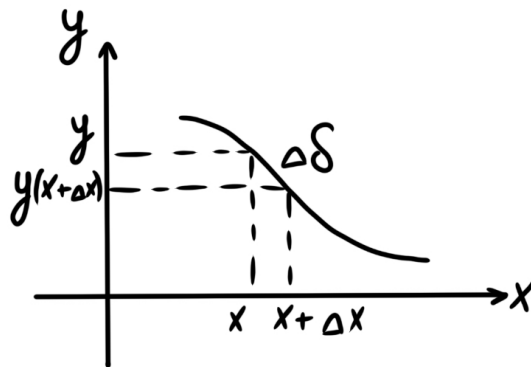
$$\sqrt{2g(y_0 - y(x))} = |v| = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \frac{dx}{dt}$$

$$T = \int_0^T dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}} dx$$

Пример 2 : задача поверхности вращения наименьшей площади.



Площадь $S \rightarrow \min$



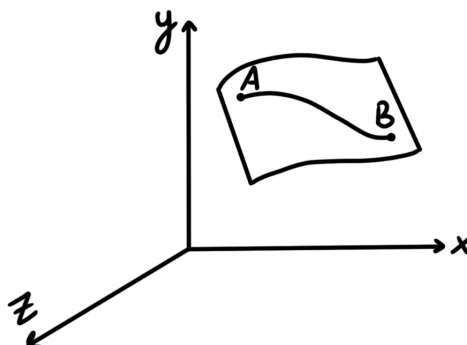
$$\Delta\delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

$$\Delta S = 2\pi y(x) \Delta\delta$$

$$\sum \Delta S \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Пример 3 : задача о геодезических на поверхности.

Найти кривую, проходящую через точки А и В, лежащую на поверхности, которая имеет наименьшую длину.



$G(x, y, z) = 0$ – уравнение поверхности

Пусть уравнение кривой : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1] - \text{параметр}$

$G(x(t), y(t), z(t)) = 0 \leftarrow$ кривая лежит на поверхности

$$l = \sum \Delta l = \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sum \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

$$l \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

2. Простейшая задача вариационного исчисления

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1)$$

$F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ непустое открытое множество, $F \in C^2(\mathbb{D})$

Определение 1 (допустимая функция). Функция $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ называется допустимой, если:

- 1) $y(x) \in C([x_0, x_1])$
- 2) $y(x) \in C^2((x_0, x_1))$
- 3) $\forall x \in [x_0, x_1], (x, y(x), y'(x)) \in \mathbb{D}$
- 4) $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$ сходится

$$\text{Краевые условия: } y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \quad (2)$$

Определение 2. Допустимая $\tilde{y} : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ доставляет локальный минимум функционалу (1) при краевых условиях (2), если:

- 1) $\tilde{y}(x_0) = y_0, \tilde{y}(x_1) = y_1$
- 2) $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall$ допустимой функции $y(x)$, удовлетворяющей (2): $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon_0$ выполняется: $I[\tilde{y}] \leq I[y]$

Определение 3. Допустимая функция $\tilde{y} : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ доставляет глобальный минимум функционалу $I[y]$ при краевых условиях (2), если:

- 1) $\tilde{y}(x_0) = y_0, \tilde{y}(x_1) = y_1$
- 2) \forall допустимой функции $y(x)$, удовлетворяющей (2), выполняется $I[\tilde{y}] \leq I[y]$

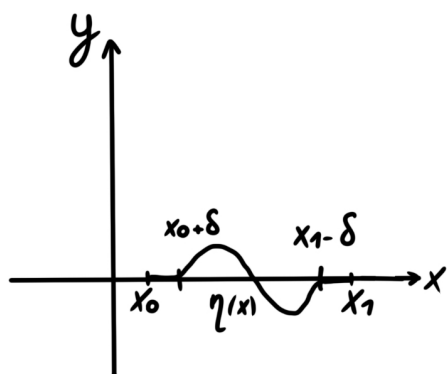
3. Необходимые условия локального экстремума

Аналог $f'(x) = 0$

Пусть функция \tilde{y} доставляет функционалу $I[y]$ при краевых условиях (2) локальный минимум $\Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[y]$, где $y(x)$ из определенного локального минимума.

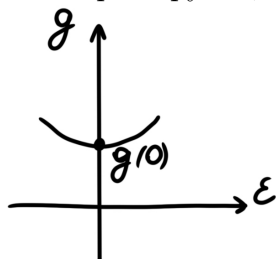
Возьмем $y(x) = \tilde{y} + \varepsilon \eta(x)$, $\varepsilon \in \left(-\frac{\varepsilon_0}{M}, \frac{\varepsilon_0}{M}\right)$, $M = \max_{x \in [x_0, x_1]} |\eta(x)|$

$\eta(x) \in C^2([x_0, x_1])$ – финитная функция.



$$\Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]$$

Рассмотрим функцию $g(\varepsilon) = I[\tilde{y} + \varepsilon\eta] \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon)$



$\varepsilon = 0$ — точка локального минимума для функции $g(\varepsilon) \Rightarrow g'_\varepsilon(0) = 0$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y} + \varepsilon\eta(x), \tilde{y}' + \varepsilon\eta'(x)) dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} \quad \boxed{=}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+\delta}}_{(1)} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{(2)} + \underbrace{\int_{x_1-\delta}^{x_1}}_{(3)} ; \quad \frac{d}{d\varepsilon} I_1 = \frac{d}{d\varepsilon} I_2 = 0$$

Теорема 1 (из математического анализа). $f(x, \varepsilon) : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывна,
 $\exists \frac{df}{d\varepsilon}(x, \varepsilon)$ - непрерывна

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(x, \varepsilon) dx = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} f(x, \varepsilon) dx$$

Вносим производную под знак интеграла:

$$\boxed{=} \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x) \right] dx \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x) dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}(x)\eta(x) \Big|_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{=0} -$$

$$- \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \eta(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'}(\dots) \right] dx \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\dots) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'}(\dots) \right] \eta(x) dx \Big|_{\varepsilon=0} \quad \boxed{=}$$

$$\boxed{=} \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \dots \right] dx = 0$$

\forall финитной функции $\eta(x)$

Лемма 1 (основанная лемма вариационного исчисления). $f(x) : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна и $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0, \forall$ финитной $\eta(x)$. Тогда $f(x) \equiv 0 \forall x \in [x_0, x_1]$

По лемме: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ - необходимое условие локального экстремума (уравнение Эйлера)

Определение 4 (экстремаль). Допустимая функция $y(x)$ называется экстремалью функционала $I[y]$ при краевых условиях (2), если:

- 1) $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$
- 2) $y(x)$ удовлетворяет условию Эйлера

$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{cases} \quad (1)$$

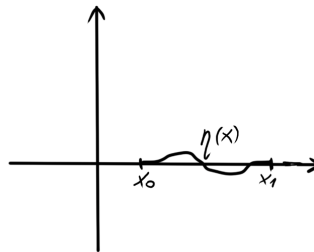
Найти функцию $y(x)$ такую, чтобы функционал $I[y]$ принимал наибольшее или наименьшее значение.

Необходимо найти условие локального экстремума:

$$\text{Если } \tilde{y} \text{ экстремаль} \Rightarrow \tilde{y} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2)$$

Доказательство формулы (2).

$$I[\tilde{y}] \leq I[y], y = \tilde{y} + \varepsilon \eta, \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1), \eta(x) \in C^2([x_0, x_1]) - \text{финитная}$$

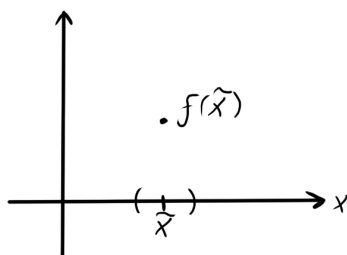


$$\underbrace{I[y]}_{=g(0)} \leq \underbrace{I[\tilde{y} + \varepsilon \eta]}_{=g(\varepsilon)} \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon) \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) \right) \eta(x) dx, \forall \eta(x) - \text{финитная}$$

Лемма 2 (Лагранжа). Пусть $f(x)$ — непрерывна и $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0, \forall \eta(x)$ — финитная на $[x_0, x_1]$. Тогда $f(x) = 0, \forall x \in [x_0, x_1]$

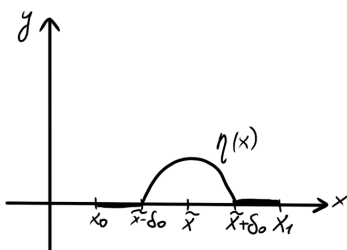
Доказательство. От противного:



Пусть для определенности $f(\tilde{x}) > 0$. Тогда так как $f(\tilde{x})$ - непрерывна, то $f(x) > 0$ при $x \in (\tilde{x} - \delta_0, \tilde{x} + \delta_0)$

Возьмем функцию $\eta(x) = \begin{cases} (\delta_0^2 - (x - \tilde{x})^2)^4, & |x - \tilde{x}| < \delta \\ 0, & |x - \tilde{x}| > \delta_0 \end{cases}$ - финитная функция

Наша функция $\eta(x)$ плавно переходит к нашим точкам $\tilde{x} - \delta_0, \tilde{x} + \delta_0$



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = \int_{\tilde{x}-\delta_0}^{\tilde{x}+\delta_0} \underbrace{f(x)}_{>0} \underbrace{\eta(x)}_{>0} dx > 0 - \text{противоречие}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [x_0, x_1] : f(x) = 0$$

#

Из доказательства леммы следует, что доказана формула (2)

#

4. Случай понижения порядка в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad F = F(x, y(x), y'(x))$$

$$1) F = f(x, y) \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = 0 \Rightarrow y = y(x)$$

$$2) F = F(x, y') \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = C$$

$$3) F = F(y, y') :$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \mid \cdot y'$$

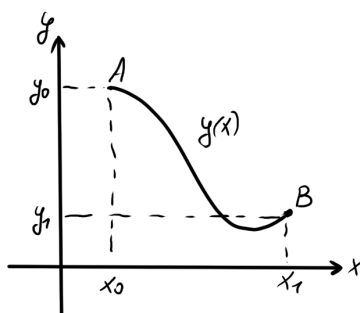
$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - \underbrace{y' \frac{\partial F}{\partial y'}}_{= \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - y'' \frac{\partial F}{\partial y'}} = 0$$

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Заметим, что: $\frac{d}{dx} F(y, y') = y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'}$

$$\frac{d}{dx} F - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C}$$

5. Решение задачи о брахистохроне



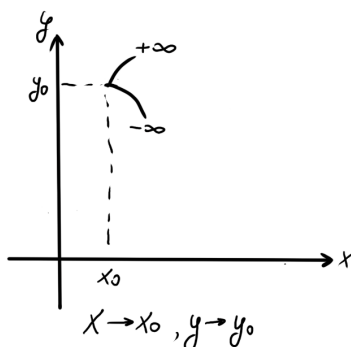
$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}} dx \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} - y' \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \frac{2y'}{2\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{1 + (y')^2} - (y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}}}_{1} = C \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

$$1 = \underbrace{c^2 2g}_{=\frac{1}{c_1^2} > 0} (y_0 - y)(1 + (y')^2)$$

$$c_1 = (y_0 - y)(1 + (y')^2) \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{c_1}{y_0 - y} - 1} = y' \quad (3)$$



$$1 + (y'(x))^2 = \frac{c_1}{y_0 - y(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_1} +\infty$$

$$y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \pm\infty \Rightarrow y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$$

выбор: -

Если выбрать знак "+" то тело не сможет скатиться в нужную точку

$$y' = -\sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}}$$

Замена: $\tilde{y} = y_0 - y(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = +\sqrt{\frac{c_1 - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Замена: $\tilde{y} = c_1 z$:

$$c_1 z' = \sqrt{\frac{c_1 - c_1 z}{c_1 z}} = \sqrt{\frac{1 - z}{z}}$$

Замена: $z = \sin^2 s, s \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$c_1 2 \sin s \cos s \cdot s' = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 s}{\sin^2 s}} = \frac{\cos s}{\sin s} \text{ (знак определили из интервала s)}$$

$$2c_1 \sin^2 s \frac{ds}{dx} = 1$$

$$\frac{dx}{ds} = c_1(1 - \cos(2s)) \Rightarrow x(s) = c_1 \left(s - \frac{1}{2} \sin 2s \right) + c_2$$

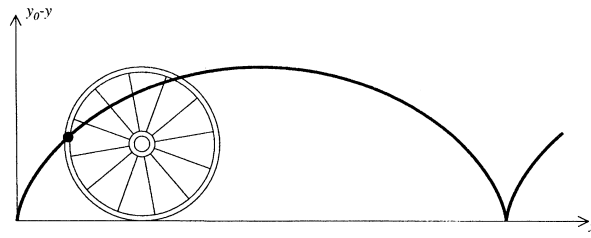
$$y(x) = y_0 - \tilde{y}(x) = y_0 - c_1 z = y_0 - c_1 \sin^2 s = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2s)$$

$$y(s) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos(2s))$$

Замена: $t = 2s, t \in (0, \pi)$

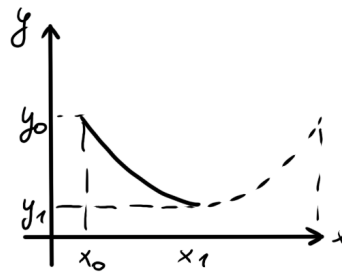
$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1}{2}(t - \sin t) + c_2 \\ y(t) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2} + c_2 \\ y - \frac{c_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2} \sin t \\ \frac{c_1}{2} \cos t \end{pmatrix} \quad t \in (0, \pi)$$



$$t = 0 : \begin{cases} x(0) = c_2 = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$t = \pi : \begin{cases} x(\pi) = \frac{c_1}{2}\pi + c_2 = \frac{c_1}{2}\pi + x_0 \\ y(\pi) = y_0 - c_1 \end{cases}$$



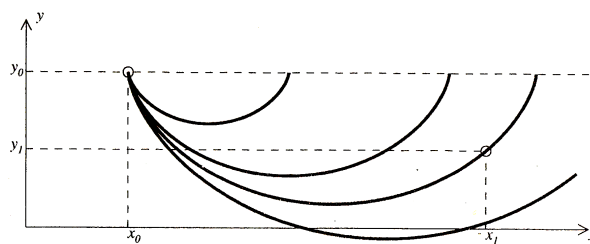
Теперь возьмем "+" (формула (3)):

$$y' = \sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}} \quad (5)$$

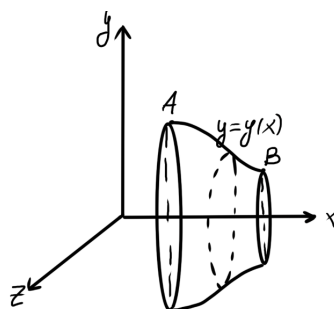
$$\tilde{y}(x) = y_0 - y(x) \Rightarrow \tilde{y}' = -\sqrt{\frac{c - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Делаем те же действия (замены) и получаем такие же $x(s), y(s)$ с различием только в интервале для t :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1}{2}(t - \sin t) + x_0 \\ y(t) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, 2\pi) \Rightarrow \text{циклоида полная}$$



6. Решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади



$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$F - y \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

$$2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} - y' 2\pi y \frac{2y'}{2\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

$$2\pi y \underbrace{\left(\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right)}_{= \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}} = C$$

$$(2\pi y)^2 = c^2(1 + (y')^2)$$

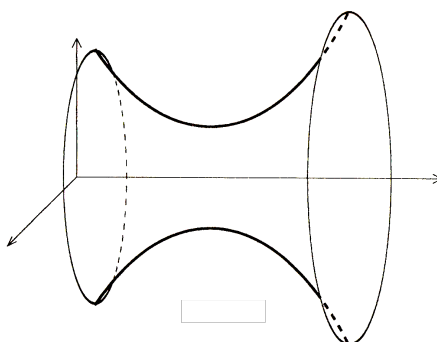
1) $c = 0 \Rightarrow y(x) = 0$ - решение, если $y_0 = y_1 = 0$

2) $c \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{c_1} \right)^2 = 1 + (y')^2 \Rightarrow y' = \pm \sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1}, \quad c_1 = \frac{c}{2\pi} > 0$

$$y(x) = \operatorname{ch} z(x) c_1, \quad z > 0$$

$$c_1 \operatorname{sh} z \cdot z'(x) = \pm \underbrace{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z - 1}}_{= \operatorname{sh} z} \Rightarrow c_1 z' = \pm 1$$

$$z = \pm \frac{x + c_2}{c_1} \Rightarrow y(x) = c_1 \operatorname{ch} \left(\frac{x + c_2}{c_1} \right) - \text{цепная линия}$$



7. Вариационная задача с несколькими функциями

$$I[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_n(x), y_n'(x)) dx$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{01}, \dots, y_n(x_0) = y_{0n} \\ y_1(x_1) = y_{11}, \dots, y_n(x_1) = y_{1n} \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:

Пусть $\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)$, :

$$I[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n] \leq I[y_1, \dots, y_n], \quad \forall y_1, \dots, y_n$$

Можно взять y_1 - любое: $y_2 = \tilde{y}_2, \dots$,

$$\Rightarrow \underbrace{I[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n]}_{Y[\tilde{y}_1]} \leq \underbrace{I[y_1, \dots, \tilde{y}_n]}_{Y[y_1]} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0$$

Аналогично: $\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0$

8. Вариационная задача с высшими производными

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, & y(x_1) = y_1 \\ y'(x_0) = y'_0, & y'(x_1) = y'_1 \\ \dots y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}, & y^{(n)}(x_1) = y_1^{(n)} \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:

Если функция $\tilde{y}(x)$ доставляет функционалу локальному экстремум, то $\tilde{y}(x)$ - решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

Доказательство.

Пусть $\tilde{y}(x)$ доставляет функционалу локальный минимум $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall y(x)$, удовлетворяет краевым условиям, $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon_0 \Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[y]$

Возьмем $y(x) = \tilde{y}(x) + \varepsilon \eta(x)$, $\eta(x)$ финитная функция.

$$\underbrace{I[\tilde{y}]}_{g(0)} \leq \underbrace{I[\tilde{y} + \varepsilon \eta]}_{g(\varepsilon)} \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = 0 - \text{точка локального минимума для функции } g(\varepsilon)$$

$$g'(0) = 0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y}(x) + \varepsilon \eta(x), \tilde{y}'(x) + \varepsilon \eta'(x), \dots) dx \Big|_{\varepsilon=0}$$

Если $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$, $y(x) \in C^\infty([x_0, x_1])$, то

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(\dots) \eta'(x) + \frac{\partial F}{\partial y''}(\dots) \eta''(x) + \dots \right] dx \Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(\dots) dx + \frac{\partial F}{\partial y'}(\dots) \eta(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta'(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} dx \dots \text{ и т.д.}$$

$$\text{Для } n=2: \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) dx - \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \eta(x) dx = 0 \quad \forall \text{ финитной функции } \eta(x)$$

Если $n=2$, то по лемме Лагранжа: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0$

При $n > 2$ аналогично.

#

9. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными

$$\begin{cases} I[z] = \iint_D F(x, y, z(x), z'_x(x, y), z'_y(x, y)) dx dy \\ z|_{(x,y) \in \partial D} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z'_y} = 0 - \text{уравнение Эйлера-Остроградского}$$

Без доказательства

10. Принцип Остроградского-Гамильтона (принцип наименьшего действия, признак стационарного действия, основной вариационный принцип механики)

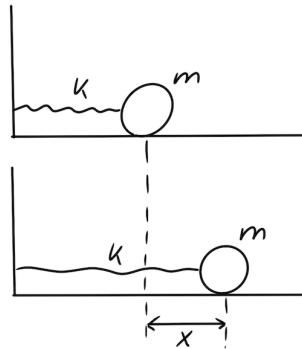
T - кинетическая энергия, U - потенциальная энергия:

$$L = T - U - \text{функция Лагранжа (Лагранжиан)}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt - \text{функционал действия}$$

Движения в системе происходит по экстремалиам функционала действия.

Пример:



$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad U = \frac{kx^2}{2}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right) dt$$

Уравнение Эйлера (уравнение Лагранжа): $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

$$-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

Понижение порядка: $L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C$

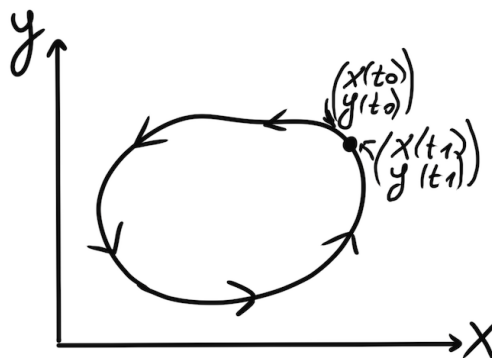
$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \dot{x}m\dot{x} = c \Rightarrow -\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = c - \text{З.С.Э.}$$

11. Изопериметрическая задача

Найти кривую заданной длины, ограничивающую наибольшую площадь.

$$S \rightarrow \max$$

$$l = \text{const}$$



$$\begin{cases} x = x(t) & x(t_0) = x(t_1) \\ y = y(t) & t \in [t_0, t_1] \quad y(t_0) = y(t_1) \end{cases}$$

$$S = \iint_D dx dy$$

Формула Грина: $\int_{\partial D} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \right) dx dy$

$$S = \iint_D dx dy = \iint_D \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{-\frac{\partial P}{\partial y}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{\partial Q}{\partial x}} \right) dx dy = \int_{\partial D} \left(-\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy \right) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2} & P = -\frac{y}{2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} & Q = \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \text{const}$$

Задача из математического анализа :

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \text{extz} & \tilde{f} = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m \rightarrow \text{extz} \\ g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Задача вариационного исчисления:

$$I[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx \rightarrow \text{extz}$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_0^1 & y_n(x_0) = y_0^n \\ y_1(x_1) = y_1^1 & y_n(x_1) = y_1^n \end{cases}$$

$$Y[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = \text{const}$$

Необходимое условие локального экстремума:

Пусть $\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)$ доставляет локальный экстремум функционалу $I[y_1, \dots, y_n]$ и не является экстремалью функционалу $Y[y_1, \dots, y_n]$, тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, такие, что $\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)$ доставляют экстремум функционалу $\tilde{I} = I + \lambda Y$

Без доказательства

Замечание. $I + \lambda Y \rightarrow \text{extz} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \text{const} \\ I \rightarrow \text{extz} \end{cases}$

$$\lambda \left(\frac{1}{\lambda} I + Y \right) \rightarrow \text{extz} \Leftrightarrow Y + \frac{1}{\lambda} \rightarrow \text{extz} \Leftarrow \begin{cases} Y \rightarrow \text{extz} \\ I = \text{const} \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} S \rightarrow \max \\ l = \text{const} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l \rightarrow \min \\ S = \text{const} \end{cases}$$

12. Решение классической изопериметрической задачи

$$\tilde{I} = S + \lambda l = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left[\frac{1}{2}(xy' - x'y) + \lambda \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \right]}_F dt \rightarrow \text{extz}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0 & \begin{cases} \frac{1}{2}y' - \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2}y + \lambda \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right] = 0 \\ -\frac{1}{2}x' - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}x + \lambda \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right] = 0 \end{cases} \\ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

№ 39 (задачник Александрова-Егорова). Понизить порядок не получится так же, как в простейшей задаче.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{y}{2} + \frac{y}{2} - \lambda \frac{x'}{\sqrt{(y')^2 + (y')^2}} \right] = 0 \\ -\frac{d}{dt} \left[\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \lambda \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right] = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - c_1 = \frac{\lambda x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \\ x - c_2 = \frac{-\lambda y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \end{cases}$$

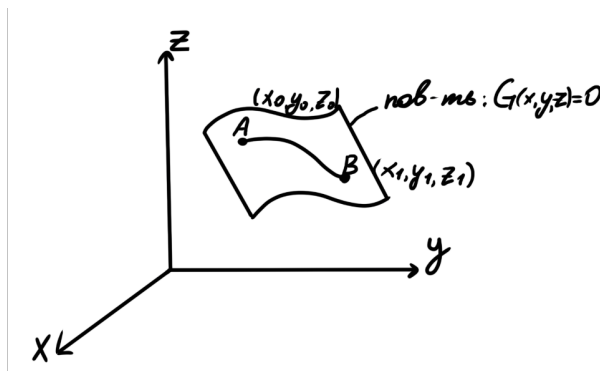
$$(y - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = \lambda^2 \left[\frac{(x')^2}{(x')^2 + (y')^2} + \frac{(y')^2}{(x')^2 + (y')^2} \right]$$

$$(y - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = \lambda^2 - \text{окружность}$$

13. Вариационная задача на условный экстремум

$$\begin{cases} I[y_1, \dots, y_n] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dt \rightarrow \text{extz} \\ y_i(t_0) = y_{i_0}, \quad y_i(t_1) = y_{i_1}, \quad i = 1, \dots, n \\ G(t, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Пример: Задача о геодезических на поверхности



Найти кривую, соединяющую точки A и B, лежащие на поверхности, имеющую наименьшую длину.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{уравнение кривой в параметрическом виде, } t \in [t_0, t_1]$$

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, & x(t_1) = x_1 \\ y(t_0) = y_0, & y(t_1) = y_1 \\ z(t_0) = z_0, & z(t_1) = z_1 \end{cases}$$

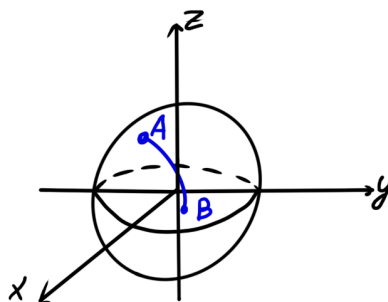
Необходимое условие локального экстремума:

Пусть $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ доставляют локальному экстремум для задачи (1). Тогда $\exists \lambda(t)$ такая, что функции $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ являются экстремальными вспомогательного функционала.

$$\tilde{I}[y_1, \dots, y_n] = \int_{t_0}^{t_1} (F + \lambda G(t)) dt$$

Без доказательства.

14. Решение задачи о геодезических на сфере



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\tilde{I}[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}_F + \lambda(t)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right)}_{\tilde{F}} dt$$

$$\begin{cases} 2x\lambda(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{F} \right) & (1) \\ 2y\lambda(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{F} \right) & (2) \\ 2z\lambda(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{F} \right) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \cdot y + (2) \cdot (-x) : & y \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{F} \right) - x \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{F} \right) = 0 \\ (2) \cdot z + (3) \cdot (-y) : & z \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{F} \right) - y \frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{F} \right) = 0 \\ (3) \cdot (-x) + (1) \cdot z : & z \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{F} \right) - x \frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{F} \right) = 0 \end{cases}$$

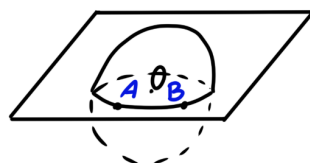
$$\frac{d}{dt} \left(y \frac{x'}{F} - x \frac{y'}{F} \right) = \cancel{y' \frac{x'}{F}} + y \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{F} \right) - \cancel{x \frac{y'}{F}} - x \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{F} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(y \frac{x'}{F} - x \frac{y'}{F} \right) = 0 & \begin{cases} \frac{yx' - xy'}{F} = c_1 & (1) \\ \frac{zy' - yz'}{F} = c_2 & (2) \\ \frac{zx' - xz'}{F} = c_3 & (3) \end{cases} \\ \frac{d}{dt} \left(z \frac{y'}{F} - y \frac{z'}{F} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(z \frac{x'}{F} - x \frac{z'}{F} \right) = 0 \end{cases}$$

$$(1) \cdot z + (2) \cdot x + (3) \cdot (-y) :$$

$$\frac{1}{F} [z(yx' - xy') + x(zy' - yz') - y(zx' - xz')] = c_1 z + c_2 x - c_3 y$$

$$\begin{cases} c_1 z + c_2 x - c_3 y = 0 - \text{плоскость проходящая через } (0,0,0) \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$



Геодезическая на сфере - дуга на большой окружности.

Глава 2: Система малых колебаний

1. Линейные однородные системы малых колебаний

$$M\vec{x}'' + K\vec{x} = 0$$

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример: $n = 1 \Rightarrow mx'' + kx = 0, m > 0, k > 0$



M — матрица масс, K — матрица жесткостей

1) $M = M^T, K = K^T$ ($m_{ij} = m_{ji}, k_{ij} = k_{ji}$)

2) $M > 0$ (матрица положительно определена), $K \geq 0$

Определение 1. Матрица $M = M^T$ называется положительно определенной, если $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq 0$ выполняется $(M\vec{v}, \vec{v}) > 0$.

Критерий Сильвестра: $M = M^T > 0 \Leftrightarrow$ все главные миноры > 0 .

1-ый способ: Сведение к системе 1-го порядка.

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = \vec{x} \\ \vec{y}_2 = \vec{x}' \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{y}_1' = \vec{y}_2 \\ \vec{y}_2' = \vec{x}'' = -M^{-1}K\vec{x} = -M^{-1}K\vec{y}_1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & 0 \end{pmatrix}}_{n \times n} \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{e^{tA}}_{(2n \times 2n)} \underbrace{\vec{c}}_{(2n \times 1)} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{12}(t) & \Phi_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \vec{y}_1(t) = F_{11}(t)\vec{c}_1 + F_{12}(t)\vec{c}_2 \quad (2n \text{ констант})$$

Лемма 1. Если $M = M^T > 0$, то $\exists M^{-1}$

Доказательство.

Пусть не существует $M^{-1} \Rightarrow \underbrace{\det M = 0} \Rightarrow \exists \vec{v} \neq 0 : M\vec{v} = 0$
 $\Rightarrow \lambda = 0$ — собств.знач.
 $\det(M - 0E) = 0$
 $(M\vec{v}, \vec{v}) = (0, \vec{v}) = 0$ — противоречие

#

Утверждение 1 (из алгебры). Пусть $A = A^T \Rightarrow$ все собственные числа $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

Пусть $A = A^T > 0 \Rightarrow$ все собственные числа $\lambda_j > 0$.

Утверждение 2 (из алгебры). Пусть $A = A^T \Rightarrow$ в \mathbb{R}^n существует базис из собственных векторов, то есть нет присоединенных

Утверждение 3 (из алгебры). Пусть $A = A^T \Rightarrow A = UDU^{-1}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

U - ортогональная матрица, то есть $U^{-1} = U^T$

2-ой способ:

Определение 2. Число λ называется собственным числом системы (1), если $\det(K - \lambda M) = 0$

Определение 3. Вектор $\vec{v} \neq \vec{0}$ называется собственным вектором системы (1) (вектором нормальных колебаний), если $(K - \lambda M)\vec{v} = 0$

Теорема 1. Существует n собственных чисел системы (1) и $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$

Доказательство.

$$1) \det(K - \lambda M) = 0$$

$$\det(M(M^{-1}K - \lambda E)) = 0$$

$$\underbrace{\det M}_{\neq 0} \det(M^{-1}K - \lambda E) = 0 \Rightarrow \text{существует } n \text{ собственных чисел}$$

$$2) \vec{v}_j - \text{собственные вектора} \Rightarrow K\vec{v}_j = \lambda_j M\vec{v}_j \mid \cdot \vec{v}_j$$

$$\underbrace{(K\vec{v}_j, \vec{v}_j)}_{\geq 0} = \lambda_j \underbrace{(M\vec{v}_j, \vec{v}_j)}_{> 0} \Rightarrow \lambda_j \geq 0$$

#

Теорема 2. В \mathbb{R} существует базис из собственных векторов системы (1).

Доказательство будет позже.

Теорема 3. Пусть $M = M^\top > 0, K = K^\top \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ - собственные числа системы (1), $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ - собственные вектора системы (1), соответствующие числам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда все решения системы (1) имеют вид:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \vec{v}_j,$$

где $q_j(t)$ - решение дифференциального уравнения: $q_j'' + \lambda_j q_j = 0$

Доказательство.

По теореме 2 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ - базис в \mathbb{R}^n . При фиксированном t $x(t) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x}(t)$ раскладывается по базису: $\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \vec{v}_j$

Подставляем $x(t)$ в систему (1):

$$\begin{aligned} M \sum_{j=1}^n q_j''(t) \vec{v}_j + K \sum_{j=1}^n q_j(t) \vec{v}_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^n \left(q_j''(t) M \vec{v}_j + q_j(t) \underbrace{K \vec{v}_j}_{\lambda_j M \vec{v}_j} \right) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n (q_j''(t) M \vec{v}_j + \lambda_j q_j(t) M \vec{v}_j) &= 0 \quad | \cdot M^{-1} \\ \sum_{j=1}^n (q_j''(t) + \lambda_j q_j(t)) \vec{v}_j &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Т.к $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ линейно независимы, то $q_j''(t) + \lambda_j q_j(t) = 0$

#

Замечание. $q_j''(t) + \lambda_j q_j(t) = 0$ 1) $\lambda_j = 0 \Rightarrow q_j(t) = c_1 t + c_2$
2) $\lambda_j > 0 \Rightarrow q_j(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda_j} t)$

Определение 4. $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ называется собственными частотами колебаний системы (1).