Определение 1. *Углом между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства L называется число $\varphi \in [0, \pi]$:*

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}$$

Определение 2. *Если S - подпространство пространства со скалярным произведением L, то $x \in S$ называется вектором наилучшего приближения (ближайший) для $y \in L$ посредством векторов из S, если:*

$$\forall z \in S, \quad \|y - z\| \geq \|x - y\|$$

$$\|x - y\| = \inf_{z \in S} \|y - z\|$$

Теорема 1. *Пусть H - гильбертово пространство, S - замкнутое подпространство H, $y \in H$, тогда $\exists! x$ ближайший к y.*

Доказательство.

$$\inf \|y - z\| = d$$

$$x_1, \ldots, x_m \in S \quad \|y - x_m\| \xrightarrow{m \to \infty} d$$

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|(x_m - y) - (x_n - y)\|^2 = 2(\|x_m - y\|^2 + \|x_n - y\|^2) - \Bigg\|\underbrace{x_m - y + x_n - y}_{\|x_m + x_n - 2y\|^2 = 4\|q - y\|^2 \geq 4d^2}\Bigg\|^2 \boxed{\leq}$$

$$q = \frac{x_m + x_n}{2} \in S$$

$$\forall \varepsilon, \exists N \ n, m \geq N : \|x_m - y\| < d^2 + \varepsilon \quad \|x_n - y\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$$

$$\boxed{\leq} 4d^2 + 2\varepsilon - 4d^2 = 2\varepsilon$$

$$x_m - \text{ фундаментальная}$$

$$\exists \text{ предельные последовательности } x, x \in S, \text{ т.к } S - \text{ замкнутое}$$

$$\|y - x_n\| = \sqrt{(y - x_n, y - x_n)} \xrightarrow{n \to \infty} \sqrt{(y - x, y - x)} = \|y - x\| \to d \text{ в силу ! предела}$$

Единственность:

$$\text{Пусть } \tilde{x} : \|y - \tilde{x}\| = d, x \neq \tilde{x}$$

$$\|\tilde{x}-x\|^2 = \|(\tilde{x}-y)-(x+y)\|^2 = 2\Bigg\|\underbrace{\tilde{x}-y}_{=d^2}\Bigg\|^2 + 2\Bigg\|\underbrace{x-y}_{=d^2}\Bigg\|^2 - \|2y-x-\tilde{x}\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 \leq 0$$

$$\text{т.е } \tilde{x} = x - \text{ противоречие}$$

■

Определение 3. *S - подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением L, $x \in S$ - ортогональная проекция $y \in L$ на подпространство S, если:*

$$y - x \perp S \quad y - x \perp z \ \forall z \in S \quad (y-x, z) = 0$$

Лемма 1. *S - подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением L, $x \in S$ - ортогональная проекция $y \in L \Leftrightarrow x$ - ближайший к y посредством S.*

Доказательство.

$$\forall x, y, z \in L$$

$$\|y-x\|^2 = ((y-x)+(x-z), (y-x)+(x-z)) =$$

$$\overset{(1)}{=} \|y-x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\cancelto{0}{x-y, x-z}) + \|x-z\|^2 \, (*)$$

$$(1) : (a+b, a+b)^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\mathrm{Re}(a, b)$$

$$x \in S - \text{ ортогональная проекция y на } S \Rightarrow y - x \perp x - z$$

Итого:

$$\|y-z\|^2 = \|y-x\|^2 + \Bigg\|\underbrace{x-z}_{\geq 0}\Bigg\|^2$$

$$\forall z \in S : \|y-z\|^2 \leq \|y-x\|^2, x - \text{ ближе для у}$$

Пусть дано:

$$x - \text{ ближайший вектор для } y \in S$$

$$|y-x| = \inf \|y-z\|$$

$$f(t) = \|y-x+tW\|^2, \quad t \in \mathbb{R}^2, \ W \in S$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|y-x+tW\|^2 - \|y-x\|^2}{t} = 0$$

$$\text{в } (*) : z = x - tW$$

$$\|y - (x - tW)\|^2 - |y - x|^2 = 2\mathrm{Re}(y - x, tW) + \|tW\|^2$$

$$\lim_{t\to\infty} t\frac{2\mathrm{Re}(y - x, W)}{t} + t^2 \cancelto{0}{\frac{\|W\|^2}{t}} = 0$$

$$2\mathrm{Re}(y - x, W) = 0$$

Если $\mathrm{Im}(y - x, W) = 0$, то x - ортогональная проекция y на S.

■

Определение 4. *S - подпространство линейного пространства L со скалярным произведением, то совокупность всех $x \in L$, таких, что $x \perp y$ $\forall y \in S$ называется ортогональным дополнением к S ($S^\perp$).*

Определение 5. *Линейное пространство L является прямой суммой S и T если любой вектор $x \in L$ единственным образом представим в виде $x = y + z,\ y \in S,\ z \in T$*

Лемма 2. *H - гильбертово пространство, S - замкнутое подпространство, тогда H прямая сумма S и $S^\perp$, $H = S \oplus S^\perp$*

Доказательство.

$$y \in H \quad x - \text{ ближайший к y посредством S}$$

$$y - x \perp z,\ z \in S$$

$$W = y - x \in S$$

$$y = \overset{\in S^\perp}{W} + \overset{\in S}{x}$$

Докажем единственность представления:
Пусть $y = \overset{\in S^\perp}{\tilde{W}} + \overset{\in S^\perp}{\tilde{x}}$

$$W + x = \tilde{W} + \tilde{x}$$

$$W - \tilde{W} = \tilde{x} - x$$

$$(\underset{\in S^\perp}{W - \tilde{W}}, \underset{\in S}{\tilde{x} - x}) = (\tilde{x} - x, \tilde{x} - x)$$

$$0 = (\tilde{x} - x, \tilde{x} - x)$$

То есть: $\tilde{x} = x$ и $\tilde{W} = W$ ■

S - конечномерное подпространство линейного пространства L со скалярным произведением $x_1, \dots, x_n$ - ортонормированный базис в S.

Теорема 2. $\forall y \in L$

$$x = \sum_1^n \lambda_n x_k, \quad \lambda_n = (y, x_k)$$

является ортогональной проекцией y на подпространство S. При этом:

$$\|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y - x\|^2$$

Доказательство.

$$\forall z \in S,\ z = \sum_1^n \alpha_k x_k$$

$$(z, x_m) = \sum_1^1 \alpha_k (x_k, x_m) = \alpha_m$$

$$\|z\|^2 = \left(\sum_1^n \alpha_k x_k, \sum_1^n \alpha_p x_p\right) = \sum_1^n \alpha_p \left(\sum_1^n \alpha_k x_k, x_p\right) = \sum_1^n \alpha_p \left[\sum_1^n \overline{\alpha_k} (\overline{x_p, x_k})\right] = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$$

$$\|y - z\|^2 = \|y\|^2 - (z, y) - (y, z) + \|z\|^2 = \|y\|^2 - \sum_1^n \alpha_k (x_k, y) - \sum_1^n \overline{\alpha_k} =$$

$$\|y\|^2 - \sum_1^n \alpha_k \overline{x_k} - \sum_1^n \overline{\alpha_k} \lambda_k + \sum_1^n |\alpha_k|^2 + \sum_1^n |\lambda_k|^2 = |y|^2 + \sum_1^n |\alpha_k - \lambda_k|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2$$

$$\|y\|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2 \geq 0, \text{ при } \alpha_k = x_k$$

При z = x достигается минимум $\Rightarrow$ ортогональная проекция.

■

Определение 6. $x_1, \dots, x_n, \dots,$ - *ортонормированная система в линейном пространстве со скалярным пространством L:*

$$x \in L \quad \lambda_k = (x, x_k) - \text{ коэффициент Фурье } x \text{ относительно.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k x_k - \text{ ряд Фурье расходится}$$

Теорема 3 (неравенстов Бесселя). $x \in L$ - *линейное пространство со скалярным произведением,* λ_k - *коэффициент Фурье, тогда:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

Доказательство.

$$< x_1, \dots, x_n >$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

$$\underbrace{\|x - S_n\|}_{>0}^{2} + \|S_n\|^2 = \|x\|^2$$

$$\|S_n\|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_n, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_n \right) \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\underset{\text{в пределе}}{\downarrow}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2 - \text{ равенство Парсеваля}$$

$\blacksquare$