Доказательство.

$$\lambda \neq \mu,\ x \neq 0, y \neq 0$$

$$Ax = \lambda x,\ y \text{ скалярно справа}$$

$$Ay = \mu y,\ x\text{скалярно слева}$$

$$0 = (Ax, y) - (x, Ay) = \lambda(x, y) - (x, \mu y) = \lambda(x, y) - \overline{\mu}(x, y) = \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}(x - y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) = 0 \Rightarrow x \perp y$$

#

1. Инвариантное подпространство

Определение 1. *H - гильбертово подпространство $A : H \to H$ линейный оператор, $S \in H$ подпространство S является инвариантным подпространством A, если $\forall x \in S\ Ax \in S$*

Тривиальные примеры: $\{0\}, H$
Нетривиальные примеры: $A : H \to H,\ \lambda \in \sigma_p(A)$

$$S_\lambda = \{0,\ \text{все собственные векторы отвечающие собственным } \lambda\}$$

$$x \in S_\lambda \overset{?}{\to} Ax \in S_\lambda$$

1) $x = 0 \quad A0 = 0 \in S_\lambda$
2) $Ax = \lambda x$

$$A(\lambda x) = \lambda\lambda x \Rightarrow Ay = \lambda y,\ y \in S_\lambda$$

Теорема 1. *A - линейный ограниченные оператор, S - инвариантное подпространство A. Тогда $S^\perp$ - инвариантное подпространство в $A^\perp$*

Доказательство.
$x \in S,\ A \in S$

$$(x, y) = 0 \quad (Ax, y) = 0 \quad (x, A^*y) = 0,\ x \perp A^*y \Rightarrow A^*y \in S^\perp$$

$$S^\perp \text{ - инвариантное подпространство } A^*$$

$$\text{Если } A = A^*,\ A \text{ действует инвариантно в } S,\ S^\perp : H = S \oplus S^\perp$$

#

2. Компактное множество. Компактные операторы

Определение 2. *Множество $K \subset H$ - гильбертово подпространство называется компактным, если из любой его бесконечной последовательности можно выделить последовательность сходящуюся к некоторому вектору K*

Свойства: 1) В конечном подпространстве ($\dim H = +\infty$) K компактно $\Leftrightarrow$ замкнуто и ограничено (ранее было доказано в Математическом анализе)

2) Общий случай: K - компактно $\Leftrightarrow$ замкнуто и ограничено.

Доказательство.

1) $K \stackrel{?}{=} \overline{K}$ рассмотрим предельную точку $x_0 \Rightarrow x_n \to x_0$

$$x_{n_k} \to x_1 \in K \text{ в силу ! предела } x_0 = x,\ x \in K$$

Тогда K содержит точку $x_0 \Rightarrow$ замкнуто.

2) Докажем ограниченность K от противного. Пусть K не является ограниченным множеством. Тогда $\forall \alpha\ \exists x \in K\ \|x\| > \alpha$

Построим последовательность $x_1, \ldots, x_n$ из K

$$\begin{aligned}\|x_1\| &> 1\\ &\vdots\\ \|x_n\| &> \|x_{n-1}\| + 1\end{aligned}$$

$$\|x_n - x_m\| \geq |\|x_n\| - \|x_m\|| \geq |n - m| > 1$$

$\{x_n\}$ не является фундаментальной последовательностью $\Rightarrow$ не является сходящейся $\Rightarrow K$ - не компактно.

#

3) Контрпример: замкнутое + ограниченное $\neq$ компактное.

Орты в l_2:

$$\begin{aligned}e_1 &= (1, 0, 0, \ldots,)\\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots,)\\ &\vdots\\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, ...,)\end{aligned}$$

1. $\{e_i\} \subset \{\|x\| \leq 1\}$ - множество ограничено.

2. Предельных точек нет

Не компактно $\|e_n - e_m\|^2 = 2 \Rightarrow$ не фунд. $\Rightarrow$ не сход. $\Rightarrow$ не комп.

4) Если замкнутый единичный шар в гильбертовом подпространстве H компактен, то $dim H < +\infty$

Пусть $dim H = +\infty \stackrel{\text{Г-Ш}}{\Rightarrow}$ ортонормированная система $x_1, \ldots, x_n$ счетный линейный независимый набор

$$\|x_n - x_m\| = 2 \Rightarrow M \text{ - не комп.}$$

Определение 3. *H, H_1 - гильбертовы подпространства $A : H \to H_1$ линейный оператор A является компактным, если $\exists$ последовательность $A_1, \dots, A_n$ - линейных операторов:*

1) $A_n : H \to H_1$ - ограниченность операторов $\forall n$
2) $\forall n$ $dim(imA_n) < +\infty$ $\{A_n x\}$ - конечномерно.
3) $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A$ ($\|A_n - A\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$)

Определение 4. *$A : H \to H_1$ компактен, если любое ограниченное множество $X \subset H$ переводит $\overline{AX} \subset H_1$ - компактно.*

Свойства компактных операторов:

1. $\begin{matrix} A : H \to H_1 \\ B : H \to H_1 \end{matrix} \Rightarrow$ комп. , α, β числа Тогда $\alpha A + \beta B$ - комп.
2. $A : H \to H_1$ - комп. Тогда A - ограниченный оператор.
3. $A : H \to H_1$ - ограниченный линейный оператор $dimH_1 < +\infty$. Тогда A комп-н
4. $I : H \to H$ - комп $\Leftrightarrow dimH < +\infty$
5. $A : H \to H_1$ - комп

$$\begin{matrix} B : H_1 \to H_2 \\ C : H_3 \to H \end{matrix} \Rightarrow \text{огр.}$$

BA, AC - комп.
6. $dimH_1 = +\infty$, $A : H \to H_1$ - комп. обратим $\Rightarrow A^{-1}$ не огр.

Доказательство.

1) Из комп $A, B \Rightarrow \exists A_n, B_n$ со свойствами из определения компактных операторов 1)-3). Рассмотрим последовательность $\alpha A_1 + \beta B_1, \alpha A_2 + \beta B_2, ..., \alpha A_n + \beta B_n$

Проверим свойства компактных операторов:

$$\forall n \ \alpha A_n + \beta B_n \text{ - лин. последов. операторов}$$

$$\|\alpha A_n - \beta B_n\| \le |\alpha| \, \|A_n\| + |\beta| \, \|B_n\|$$

2) $dim(im(\alpha A_n + \beta B_n)) < +\infty$ в силу:

$$im(\alpha A_n + \beta B_n) = \{\alpha A_n x + \beta B_n x | x \in H\} \subset \{\alpha A_n x | x \in H\} \cup \{\beta B_n y | y \in H\} = im(\alpha ANn) + im(\beta B_n)$$

$$dim(\alpha A_n + \beta B_n) \le dim(im(\alpha A_n)) + dim(im(\beta B_n)) < +\infty \text{ по 2}$$

3) $\alpha A_n + \beta B_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha + \beta B$

$$\lim(\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha \lim A_n + \beta \lim B_n = \alpha A + \beta B$$

#

5. Упр. Взять что то там.
2. A - является $\overset{3)}{\text{пред.}}$ $\overset{1)}{\text{огр.}} \Rightarrow$ огр.
3. $A : H \to H_1$ - огр. $\Rightarrow 1)$
$dimH_1 = +\infty \Rightarrow 2)$

4. $Ix = x$

1) $dim H < \infty$. Докажем компактность I. I огр ($\|I\| = 1$) по свойству 3) компактен.

2) I компактен. Докажем $dim H < \infty$

Пусть это не так $dim H = +\infty$. $\exists$ последовательность $A_1, ..., A_n$ соот $1), 2)$ $A_n \xrightarrow{n\to\infty} I$

$$\begin{matrix} dim H = \infty \\ dim(im A_n) < \infty \end{matrix} \Rightarrow$$

$\exists x \in H : \|x\| = 1 \ x \perp im A_n$

$\|x - A_n x\| > \|x\| = 1$

$$\forall n \ \ \|I - A_n\| = \sup_{\|y\|<1} \|Iy - A_n y\| \geq \|Ix - A_n x\| \geq 1$$

$\forall n$ поэтому 3) не выполн $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow dim H < +\infty$

6) Докажем что $A^{\perp}$ не огр. Пусть это не так A^{-1} огр оператор A - комп, тогда по свойству 5 $AA^{-1} = I$, где A - комп, A^{-1} - огр

по 4 $I : H_1 \to H$ не комп $\Rightarrow A^{-1}$ - не огр