Второе уравнение Максвелла:

$$\mathrm{rot}(\vec{H}_0(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t}) = -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\vec{E}_0 e^{ik_0\psi-i\omega t}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H}_0 e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t} + ik_0[\nabla\psi(\vec{r}\times\vec{H}_0)]e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t} = -\frac{i\omega\varepsilon(\vec{r})}{c}\vec{E}_0(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t}$$

$$\Rightarrow [\nabla\psi(\vec{r})\times\vec{H}_0(\vec{r})] = -\varepsilon(\vec{r})\vec{E}_0(\vec{r}) \Rightarrow [\nabla\psi(\vec{r})\times\vec{B}_0(\vec{r})] = -\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})\vec{E}_0(\vec{r})$$

Продолжение вектора Умова-Пойтинга:

$$<\vec{\mathbb{S}}>= \frac{c}{8\pi}[\vec{E}\times\vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\vec{E}_0(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})-i\omega t}\times\vec{H}_0^* e^{-ik_0\psi(\vec{r})+i\omega t}]$$

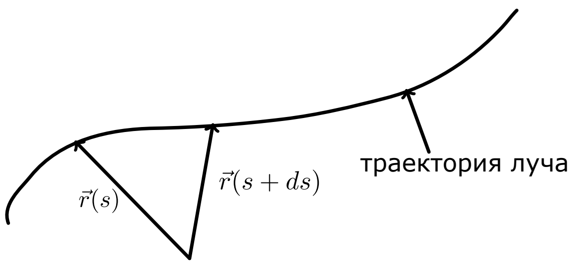
$$\text{Подставим: } \nabla\psi(\vec{r}\times\vec{E}_0(\vec{r})) = \vec{B}_0(\vec{r})$$

$$<\vec{\mathbb{S}}>= \frac{c}{\mu(\vec{r})8\pi}[\vec{E}_0(\vec{r})\times[\nabla\psi(\vec{r})\times\vec{E}_0^*(\vec{r})]] = \frac{c}{\mu(\vec{r})8\pi}\mathrm{Re}\{\nabla\psi(\vec{E}_0(\vec{r}),\vec{E}_0^*) - (\nabla\psi,\vec{E}_0^*(\vec{r}))\vec{E}_0^*(\vec{r})\} =$$

$$= \underbrace{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}}}_{v_\Phi}\underbrace{\frac{\nabla\psi}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}}}_{|\nabla\psi|=\sqrt{\varepsilon\mu}=n\ (1)}\underbrace{\frac{\varepsilon\left|\vec{E}_0\right|^2}{8\pi}}_{2W_E=W_E+W_B} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{u}(W_E+W_B)$$

(1) - единичный вектор вдоль $\nabla\psi$, вдоль луча $\vec{u}$

Уравнение для луча:



$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{r}(s+ds)-\vec{r}(s)}{ds} \text{ - единичный вектор } = \vec{u}$$

$$\nabla\psi(\vec{r}) = n(\vec{r})\vec{u}$$

$$\frac{d}{ds}(\nabla\psi) = (\vec{u},\nabla)\nabla\psi = \frac{1}{n(\vec{r})}(\nabla\psi,\nabla)\nabla\psi$$

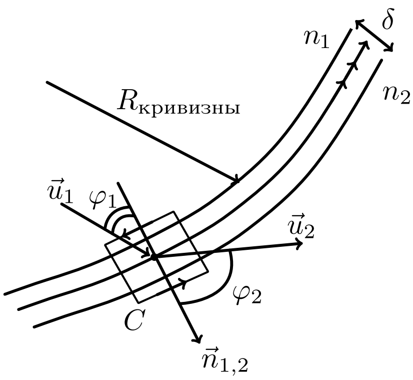
$$[\vec{a}\times\mathrm{rot}\vec{b}] = [\vec{a}\times[\nabla\times\vec{b}]] = \nabla(\vec{a},\overset{\downarrow}{\vec{b}}) - (\vec{a},\nabla)\overset{\downarrow}{\vec{b}} \to [\nabla\psi\times\mathrm{rot}(\nabla\psi)] = \nabla\frac{(\nabla\psi)^2}{2} - (\nabla\psi,\nabla)\nabla\psi$$

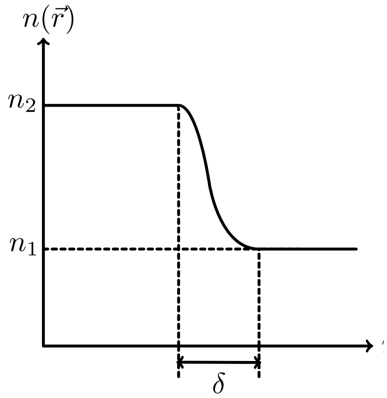
Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\nabla(\vec{a}, \vec{a}) = \nabla\left(\dfrac{a^2}{2}\right)$:

$$\frac{d}{ds}(\nabla\psi) = \frac{1}{n(\vec{r})}\nabla\frac{n^2(\vec{r})}{2} = \nabla(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n(\vec{r}) \text{ - уравнение луча}$$

Граничные условия для уравнений луча и эйконала:





$$\oint_C (\nabla\psi, dl) = 0 \Rightarrow n_2(\vec{u}_2, \Delta\vec{l}) + n_1(\vec{u}_1, -\Delta\vec{l}) = 0$$

$$n_2 \Delta l \sin\varphi_2 = n_1 \Delta l \sin\varphi_1 \Rightarrow \boxed{n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2} \text{ - закон Снеллиуса}$$

Гамильтонова форма уравнения луча:

$$n(\vec{r})\frac{d}{ds}\left(n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n \cdot n(\vec{r})$$

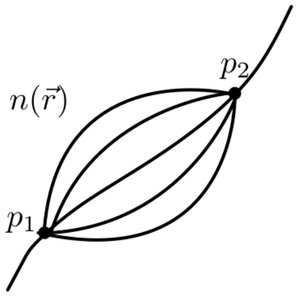
$$d\tau = \frac{ds}{dn(\vec{r})} \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left(m, \underbrace{\frac{d\vec{r}}{d\tau}}_{\text{скорость частице, двигающиеся вдоль луча}}\right) = \nabla\frac{n^2(\vec{r})}{2}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{p}, \quad \dfrac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{F} = -\nabla U = \nabla\dfrac{n^2(\vec{r})}{2} \\ \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{\vec{p}}{m} \text{ ; Сохраняется полная энергия} \end{cases}$$

$$\frac{p^2}{2m} + U = \text{const}$$

$$\frac{(\nabla\psi)^2}{2} - \frac{n^2(\vec{r})}{2} = 0 \text{ - уравнение эйконала}$$

1. Вариационный принцип - принцип Ферма



Оптический путь реального луча между точками p_1 и p_2 меньше или равен оптическому пути по $\forall$ другой траектории.

$$\int_{p_1}^{p_2} n(\vec{r})ds = \int_{p_1}^{p_2} \underbrace{n(\vec{r})\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}_{\mathbb{L}(\vec{r},\dot{\vec{r}})} dt = \min$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{x} \to \frac{d}{dt}\left(\frac{2\dot{x}n(\vec{r})}{2\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\frac{\partial n(\vec{r})}{\partial x}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{y}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\dot{z}}\right) = \frac{\partial L}{z}$$

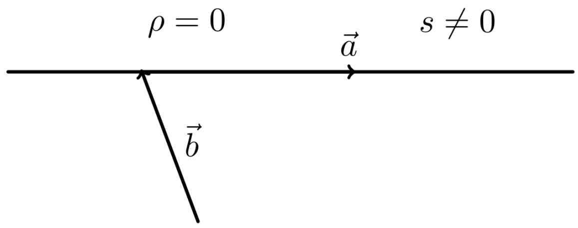
$$\frac{d}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\left(\frac{\vec{e}_x\dot{x}n(\vec{r})}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right) = \vec{e}_x\frac{\partial n(\vec{r})}{\partial x}$$

$$\frac{d}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\left(\frac{\vec{e}_x\dot{x}n(\vec{r})}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right) = \vec{e}_x\frac{\partial n(\vec{r})}{\partial x}\ \Bigg|$$

Примеры решений уравнений луча:
1) Однородное пространство $n(\vec{r}) = \text{const} = n_0$

$$\frac{d}{ds}\left(n_0\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = 0 \Rightarrow n_0\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{a} \text{ - постоянные вектор}$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{a}}{n_0}s + \vec{b}$$

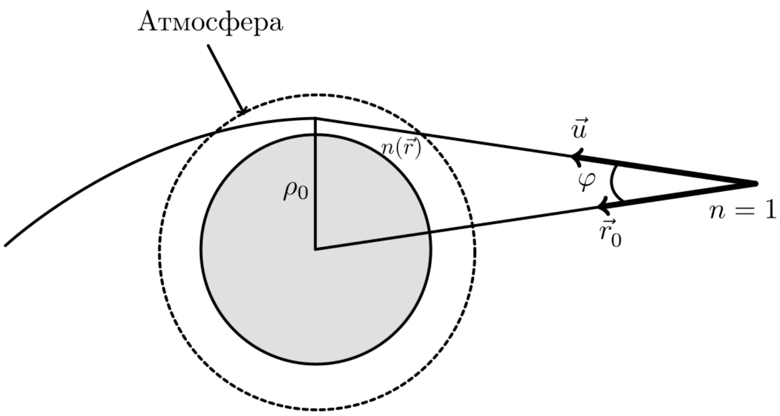


2) Движение луча в сферически симметричном распределении $n(\vec{r}) = n(r)$

$$\vec{p} = n(r)\frac{d\vec{r}}{ds}$$

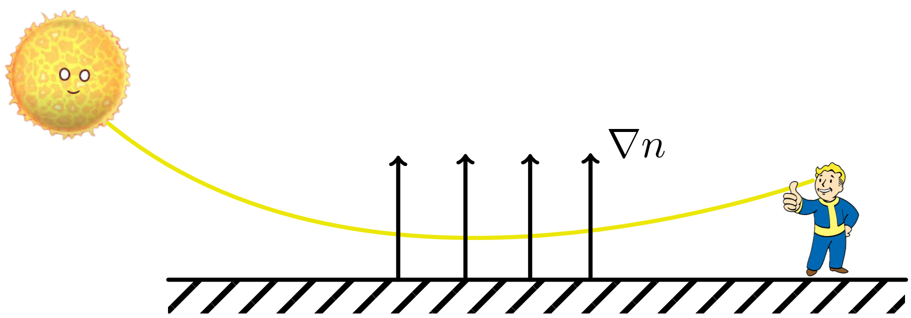
Должен сохранятся момент импульса, проверим это:

$$\frac{d}{ds}[\vec{r}\times\vec{p}] = \frac{d}{ds}\left[\vec{r}\times n(r)\frac{d\vec{r}}{ds}\right] = \underbrace{\left[\frac{d\vec{r}}{ds}\times n(r)\frac{d\vec{r}}{ds}\right]}_{=0} + \underbrace{\left[\vec{r}\times \underbrace{\frac{d}{ds}\left(n(r)\frac{d\vec{r}}{ds}\right)}_{=-\nabla n(r)\sim\vec{e}_r}\right]}_{=0}$$



$$\left|[\vec{r}\times n\frac{d\vec{r}}{ds}]\right| = \text{const} = |[\vec{r}_0\times\vec{u}]| = r_0\sin\varphi_0 = \rho_0$$

Мираж



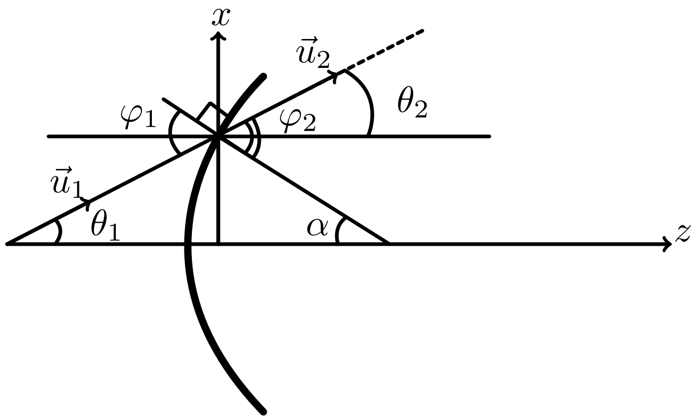
$$T_{\text{в}} \sim 30^\circ C \quad T_{\text{п}} \sim 100^\circ C$$

$$T_{\text{песка}} \gg T_{\text{воздуха}}$$

2. Оптические системы

- состоят из тел с $n = \text{const}$, в них лучи являются прямыми

Преломление лучей на сферической поверхности



Используем приближение малых углов (параксиальное приближение)

$$\theta_1 = \widehat{\vec{u}_1\vec{e}_z} \quad \theta_2 = \widehat{\vec{u}_2\vec{e}_z}$$

Правила:

1) Если луч удаляется от оси при движении слева направо, то $\theta > 0$, если приближается, то $\theta < 0$

2) Если выпуклость сферической границы обращена навстречу лучу (слева направо), то $R > 0$, если наоборот, то $R < 0$

Из закона Снеллиуса:

$$n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2 \quad (R \gg \lambda)$$

$$n_1 \sin(\theta_1 + \alpha) = n_2 \sin(\theta_2 + \alpha) \xrightarrow[\text{луча с линзой}]{x_1 \text{ - точка пересечения}} n_1\left(\theta_1 + \frac{x_1}{R}\right) = n_2\left(\theta_2 + \frac{x_1}{R}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\alpha = \arcsin\frac{x_1}{R} \approx \frac{x_1}{R}} \theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\theta_1 - \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{x_1}{R} = \frac{n_1}{n_2}\theta_1 - \frac{x_1}{F_{12}}$$