$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Найти функцию $y(x)$ такую, чтобы функционал $I[y]$ принимал наибольшее или наименьшее значение.

Необходимо найти условие локального экстремума:

Если $\tilde{y}$ экстремум $\Rightarrow \tilde{y}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2)$

Докозательство формулы (2).

$$I[\tilde{y}] \leq I[y], y = \tilde{y} + \varepsilon\eta, \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1), \eta(x) \in C^2([x_0, x_1]) - \text{финитная}$$

$$\underbrace{I[y]}_{=g(0)} \leq \underbrace{I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]}_{=g(\varepsilon)} \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon) \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))\right)\eta(x)dx, \forall\eta(x) - \text{финитная}$$

Лемма 1 (Лагранжа)**.** *Пусть* $f(x)$ *- непрерывна и* $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0. \forall\eta(x)$ *- финитная на* $[x_0, x_1]$. *Тогда* $f(x) = 0, \forall x \in [x_0, x_1]$

Доказательство. От противного: Пусть для определенности $f(\tilde{x}) > 0$. Тогда так как $f(\tilde{x})$ - непрерывна, то $f(x) > 0$ при $x \in (\tilde{x} - \delta_0, \tilde{x} + \delta_0)$

Возьмем функцию $\eta(x) = \begin{cases} (\delta_0^2 - (x - \tilde{x}))^4, |x - \tilde{x}| < \delta \\ 0, |x - \tilde{x}| > \delta_0 \end{cases} \quad -$ финитная функция

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = \int_{x_0-\delta_0}^{x_1-\delta_0} \underbrace{f(x)}_{>0}\underbrace{\eta(x)}_{>0}dx > 0 - \text{противоречие}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [x_0, x_1] : f(x) = 0$$

■

Из доказательства леммы следует, что доказана формула (2) ■

1. Случай понижения порядка в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad F = F(x, y(x), y'(x))$$

1) $F = f(x, y) \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow y = y(x)$

2) $F = F(x, y') \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = C$

3) $F = F(y, y')$: