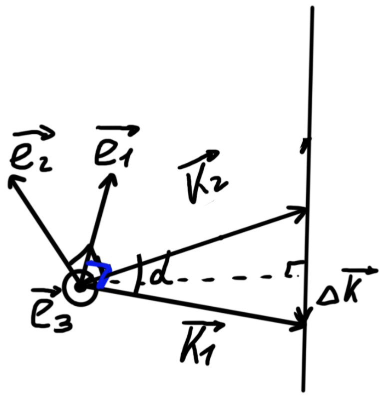
$$I = \frac{|\vec{E}_1(\vec{r})|^2}{2} + \frac{|\vec{E}_2(\vec{r})|^2}{2} + \underbrace{\mathrm{Re}(\vec{E}_1(\vec{r}), \vec{E}_2^*(\vec{r}))}_{\text{интерференционное слагаемое}} = I_1 + I_2 + I_{12}$$

Закон сохранения энергии не нарушается, поскольку интерференция приводит к перераспределения потоков энергии в пространстве.

Если $I_{12} = 0$, то волны не интерферируют, например, в случае $\vec{E}_1(\vec{r}) \perp \vec{E}_2(\vec{r})$ - перпендикулярных поляризаций волн.

Интерференция двух плоских монохроматических волн с эллиптической поляризацией.



$$k_1 = \frac{\omega}{c}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{e}_1 \in \vec{k}_1\vec{k}_2 \text{ - плоскости, } \vec{e}_1 \perp \vec{k}_1$$

$$\vec{e}_2 \in \vec{k}_1\vec{k}_2 \text{ - плоскости, } \vec{e}_2 \perp \vec{k}_2$$

$$\vec{e}_3 \perp \vec{k}_1\vec{k}_2 \text{ - плоскости, } \vec{e}_3 \perp \vec{k}_1, \ \vec{e}_3 \perp \vec{k}_2$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = (\vec{e}_1 E^{||} + \vec{e}_3 E^{\perp}) e^{i(\vec{k}_1, \vec{r})}, \quad E_1^{||}, \ E_1^{\perp} \in \mathbb{C}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = (\vec{e}_2 E_2^{||} + \vec{e}_3 E_2^{\perp}) e^{i(\vec{k}_2, \vec{r})}$$

$$I_1 = \frac{(\vec{E}_1(\vec{r}), \vec{E}_1^*(\vec{r}))}{2} = \frac{1}{2}[|E_1^{||}|^2 + |E_1^{\perp}|^2], \quad I_2 = \frac{1}{2}[|E_2^{||}|^2 + |E_2^{\perp}|^2]$$

$$I_{12} = \mathrm{Re}[((\vec{e}_1, \vec{e}_2) E_1^{||} E_2^{||*} + E_1^{\perp} E_2^{\perp *}) e^{i((\vec{k}_1 - \vec{k}_2), \vec{r})}]$$

$$E_1^{||} E_1^{||*} = |E_1^{||}||E_2^{||}| e^{i\varphi_1} = |E_1^{||}| e^{i \arg E_1^{||}} \cdot |E_2^{||}| e^{-i \arg E_2^{||}} \quad (\varphi_1 = \arg E_1^{||} - \arg E_2^{||})$$

$$E^{\perp} E_2^{\perp *} = |E_1^{\perp}||E_2^{\perp}| e^{i\varphi_2}, \quad I_{12} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)|E_1^{||}||E_2^{||}| \cos\Big((\Delta\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_1\Big) + |E_1^{\perp}||E_2^{\perp}| \cos\Big((\Delta\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_2\Big)$$

$$I = I^{||} + I^{\perp}$$

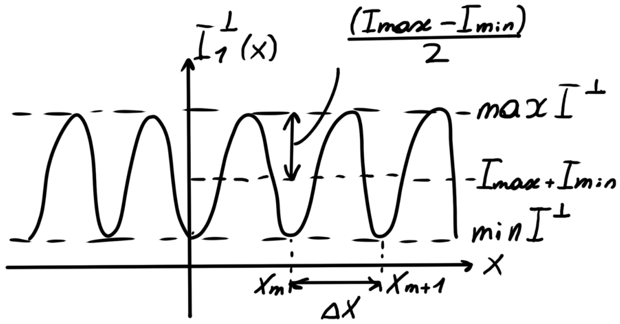
$$I^{||} = \frac{1}{2}|E_1^{||}|^2 + \frac{1}{2}|E_2^{||}|^2 + (\vec{e}_1, \vec{e}_2)|E_1^{||}||E_2^{||}|\cos\Big((\Delta\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_1\Big)$$

$$I^{\perp} = \underbrace{\frac{1}{2}|E_1^{\perp}|^2}_{I_1^{\perp}} + \underbrace{\frac{1}{2}|E_2^{\perp}|^2}_{I_2^{\perp}} + \underbrace{|E_1^{\perp}||E_2^{\perp}|}_{2\sqrt{I_1^{\perp}I_2^{\perp}}}\cos\Big((\Delta\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_2\Big)$$

Пример: $E_1^{||} = E_2^{||} = 0$

$$I^{\perp} = I_1^{\perp} + I_2^{\perp} + 2\sqrt{I_1^{\perp}I_2^{\perp}}\cos(\underbrace{(\Delta\vec{k}, \vec{r})}_{\Delta k\cdot x} + \varphi_2)$$

$$\max I^{\perp} = I_1^{\perp} + I_2^{\perp} + 2\sqrt{I_1^{\perp}I_2^{\perp}} = (\sqrt{I_1^{\perp}} + \sqrt{I_2^{\perp}})^2, \quad \min I^{\perp} = I_1^{\perp} + I_2^{\perp} - 2\sqrt{I_1^{\perp}I_2^{\perp}} = (\sqrt{I_1^{\perp}} - \sqrt{I_2^{\perp}})^2$$



Δx - период интерференционной картины

$$\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi$$

$$\begin{cases} x_m\Delta k = 2m\pi + \pi \\ x_{m+1}\Delta k = 2(m+1)\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta k = x_{m+1} - x_m = 2\pi$$

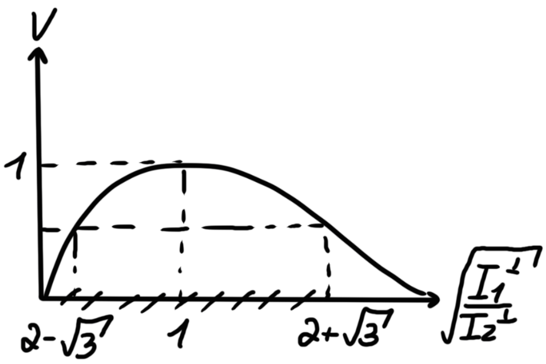
$$\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi}{2|\vec{k}_1|\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\lambda}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Если } \alpha \ll 1,\ \Delta x \approx \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{0,5\text{ мкм}}{\alpha} \sim 1\text{ мм} \Rightarrow \alpha \sim 10^{-3}\text{ рад}$$

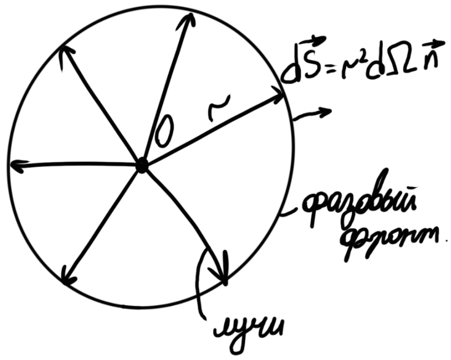
Видность: $V = \dfrac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

Для человеческого глаза $\min V$, при которой видна интерференционная картина, $= 0,5$

$$V = \frac{4(I_1^{\perp}I_2^{\perp})}{2(I_1^{\perp} + I_2^{\perp})} = \frac{2(I_1^{\perp}I_2^{\perp})}{I_1^{\perp} + I_2^{\perp}} = \frac{2\sqrt{\frac{I_1^{\perp}}{I_2^{\perp}}}}{\frac{I_1^{\perp}}{I_2^{\perp}} + 1}$$



1. Интерференция волн двух точечных источников (сферических волн)

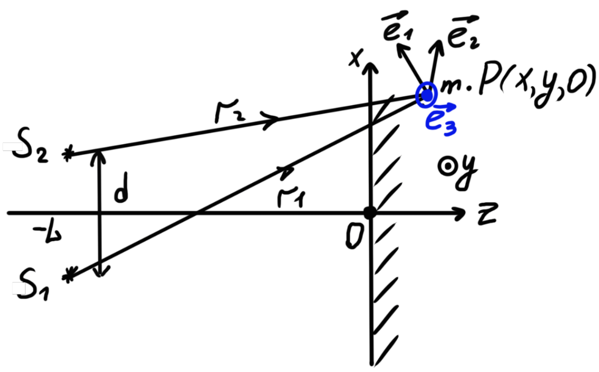


$$\psi(\vec{r}) = \int_0^r n ds = nr$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \frac{L}{r} e^{ik_0\psi(\vec{r}) - i\omega t} = \vec{E}_0 \frac{L}{r} e^{ikr - i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \frac{L}{r} e^{ikr - i\omega t}$$

$$<\vec{\mathbb{S}}> = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})]_\Gamma \sim \frac{A}{r^2}\vec{e}_r \Rightarrow \int_{\text{сфера } r} (<\vec{\mathbb{S}}> d\vec{s}) = \int \frac{A}{r^2} r^2 d\Omega = \text{const}$$



$$S_1 \text{ и } S_2 \text{ в плоскости } (x, z)$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}_1) \perp \vec{r}_1,\ \vec{E}_2(\vec{r}_2) \perp \vec{r}_2$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}_1) = \frac{L}{r_1}(E_1^{||}\vec{e}_1 + E_1^{\perp}\vec{e}_3)e^{ikr_1}, \quad E_1^{||},\ E_1^{\perp} \in \mathbb{C}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}_2) = \frac{L}{r_2}(E_2^{||}\vec{e}_2 + E_2^{\perp}\vec{e}_3)e^{ikr_2}, \quad E_2^{||},\ E_2^{\perp} \in \mathbb{C}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{r_1^2}(|E_1^{||}|^2 + |E_1^{\perp}|^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{r_2^2}(|E_2^{||}|^2 + |E_2^{\perp}|^2)$$

$$I_{12} = \mathrm{Re}(\vec{E}_1(\vec{r}_1)), \vec{E}_2^*(\vec{r}_2) = \frac{L^2}{r_1 r_2}\mathrm{Re}[((\vec{e}_1, \vec{e}_2)E_1^{||}E_2^{\perp *} + E_1^{\perp}E_2^{||*})e^{ikr_1 - ikr_2}] =$$

$$= \frac{L^2}{r_1 r_2}[\cos\alpha |E_1^{||}||E_2^{||}|\cos(\Delta kr + \varphi_1) + |E_1^{\perp}||E_2^{\perp}|\cos(\Delta kr + \varphi_2)] \Rightarrow I = I^{||} + I^{\perp}$$

$$I^{\perp} = \underbrace{\frac{L^2}{2r_1^2}|E_1^{\perp}|^2}_{I_1^{\perp}} + \frac{L^2}{2r_2^2}|E_2^{\perp}|^2 + \frac{L^2}{r_1 r_2}|E_1^{\perp}||E_2^{\perp}|\cos(k\Delta r + \varphi_2)$$

I_1 - интенсивность излучения от s_1 в точке P

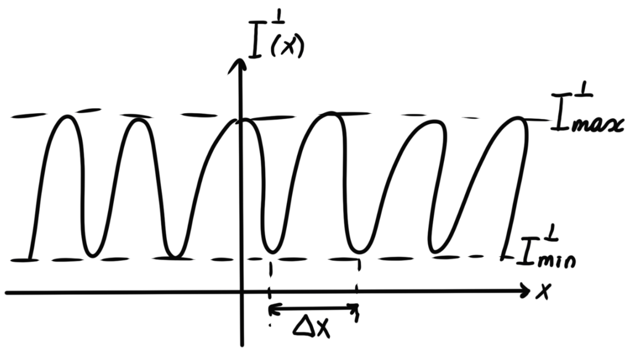
$$I^{\perp} = I_1^{\perp} + I_2^{\perp} + 2\sqrt{I_1^{\perp}I_2^{\perp}}\cos(k\Delta r + \varphi_2)$$

Обычно в интерференционных схемах используют параксиальное приближение $\Rightarrow x, y, d \ll L$

$$\Delta r = r_1 - r_2 = \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1 + r_2} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1 + r_2}, \quad r_1^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + L^2, \quad r_2^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + L^2$$

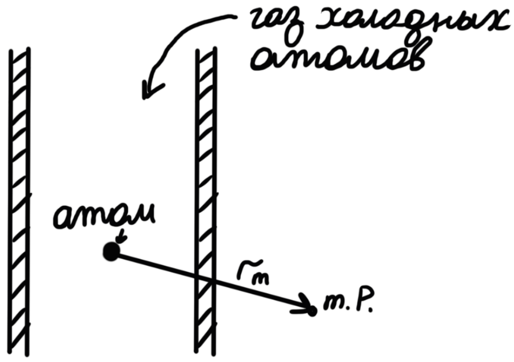
$$\Delta r = \frac{xd}{\frac{r_1 + r_2}{2}} = \frac{xd}{r} \approx \frac{xd}{L}$$

$$I^{\perp} = I_1^{\perp} + I_2^{\perp} + 2\sqrt{I_1^{\perp}I_2^{\perp}}\cos\left(\frac{kxd}{L} + \varphi_2\right)$$



$$\frac{k\Delta x d}{K} = 2\pi \Rightarrow \Delta x = \lambda \frac{L}{d}$$

2. Излучение скопления спонтанно излучающихся атомов



$$\vec{E}_a(\vec{r}, t) = \begin{cases} \vec{E}_0 \dfrac{L}{r} e^{ikr - i\omega_0 t} e^{-\gamma t}, \ t > \dfrac{r_m}{c} \\ 0, \ t < \frac{r_m}{c} \end{cases}$$

Если атом начинает излучать в момент t_{m_0}:

$$\vec{E}_m(\vec{r}_m, t) = \begin{cases} \vec{E}_0 \frac{L}{r_m} e^{-i\omega_0 (t - t_m)} e^{-\gamma(t - t_m)}, \ t > t_m \\ 0, \ t < t_m \end{cases}$$

$$t_m = t_{m_0} + \frac{r_m}{c}$$

Пусть $L \gg$ размер кюветы $\Rightarrow \dfrac{L}{r_m} \approx 1$

$$\text{В точке Р: } \vec{E}_\Sigma(t) = \sum_{m=1}^{M_0} \vec{E}_m = \sum_{m=1}^{M_0} \vec{E}_0 e^{-i\omega_0 (t - t_m) - \gamma(t - t_m)}$$