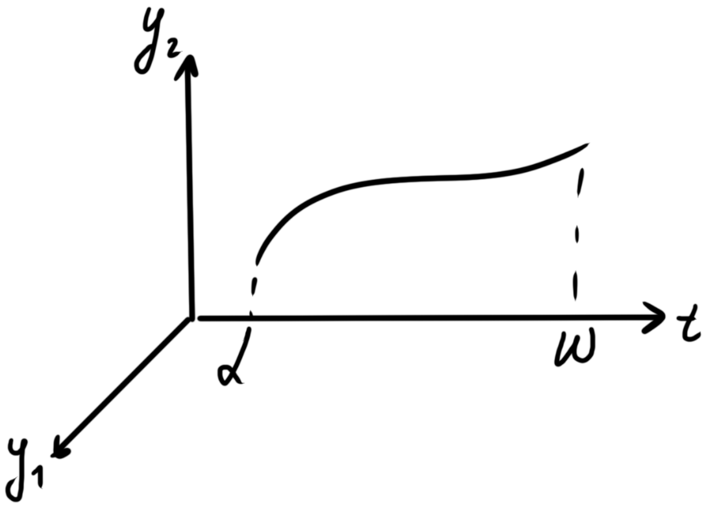
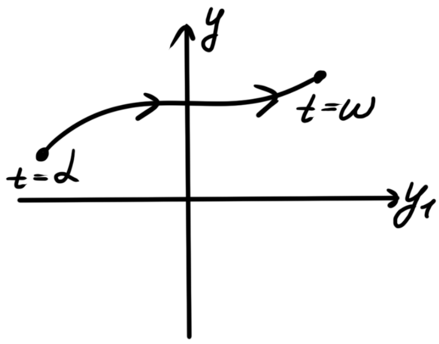
Пусть $\vec{y}(t), t \in (\alpha, \omega)$



Интегральная кривая - график функции $\vec{y}(t)$, то есть множество точек $\{(t, y_1(t), ..., y_n(t)), t \in (\alpha, \omega)\}$

Фазовое пространство - пространство переменных $\{y_1, \ldots, y_n\}$



Фазовая траектория - проекция интегральной кривой на фазовое пространство.

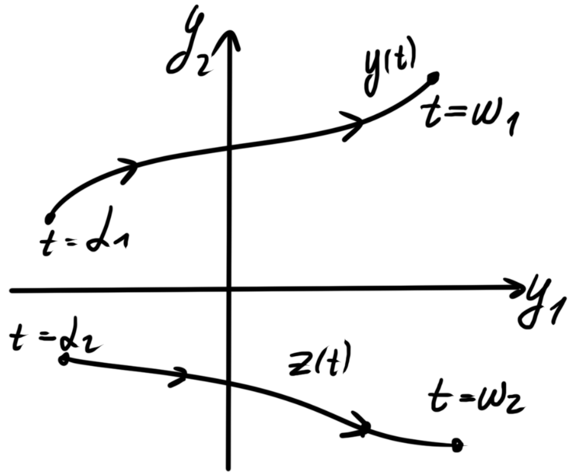
Фазовый портрет - совокупность фазовых траекторий.

Теорема 1. *Для автономных систем фазовые траектории либо не пересекаются, либо совпадают.*

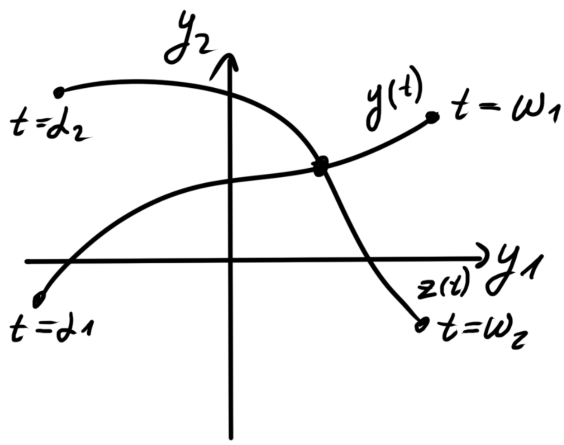
Доказательство.

Пусть $\begin{matrix} \vec{y}(t), t \in (\alpha, \omega) \\ \vec{z}(t), t \in (\alpha, \omega) \end{matrix}$ - непродолжаемые решения системы (1)

$$\begin{matrix} \{(y_1(t), ..., y_n(t)), t \in (\alpha_1, \omega_1)\} \\ \{(z_1(t), ..., z_n(t)), t \in (\alpha_2, \omega_2)\} \end{matrix} \text{ - траектории системы (1)}$$



Траектории либо пересекаются, либо нет. Если он не пересекаются, то все доказано. Пусть траектории пересекаются:



$\Rightarrow \exists t_1 \in (\alpha_1, \omega_1)\ \exists t_2 \in (\alpha_2, \omega_2) : \vec{y}(t_1) = \vec{z}(t_2)$

$\Rightarrow$ по Теореме 1 $\exists c : \vec{z}(t) = \vec{y}(t+c),\ (\alpha_2, \omega_2) = (\alpha_1 - c, \omega_1 - c),\ c = t_1 - t_2$

Покажем, что траектории совпадают:

$$\{(z_1(t), ..., z_n(t)), t \in (\alpha_2, \omega_2)\} = \{(y_1(t+c), ..., y_n(t+c)), \underbrace{t \in (\alpha_1 - c, \omega_1 - c)}_{t+c \in (\alpha_1, \omega_1)}\}$$

, сделаем замену $s = t + c$:

$$\{(y_1(t+c), ..., y_n(t+c)), t \in (\alpha_1 - c, \omega_1 - c)\} = \{(y_1(s), ..., y_n(s)) s \in (\alpha_1, \omega_1)\}$$

$\#$

Теорема 2. *Для автономных систем существует 3 типа фазовых траекторий:*

1) точка;

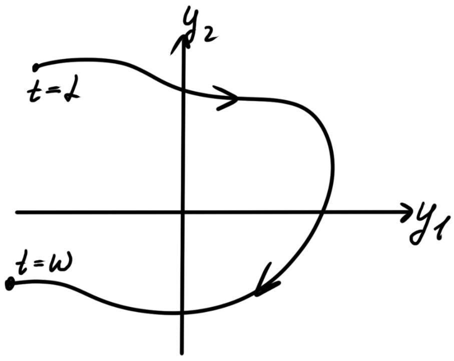
2) замкнутая крива (цикл);

3) кривая без самопересечений.

Доказательство.

Пусть $\vec{y}(t), t \in (\alpha, \omega)$ - непродолжаемое решение системы (1)

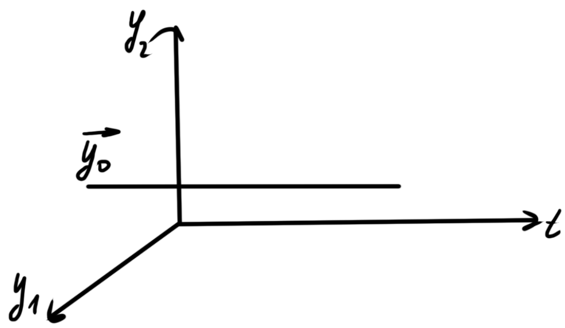
1) $\forall t_1 \neq t_2 : \vec{y}(t_1) \neq \vec{y}(t_2)$

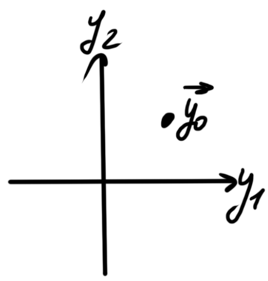


- кривая без самопересечений.

2) $\exists t_1 \neq t_2 : \vec{y}(t_1) = \vec{y}(t_2) - \vec{y}_0$

2а) $\forall t \in (\alpha, \omega) : \vec{y}(t) = \vec{y}_0$

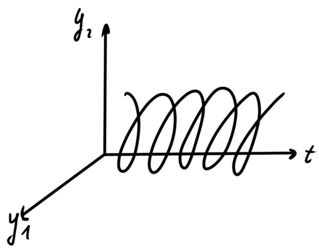


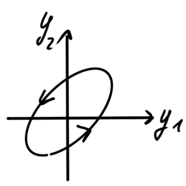


2б) $\exists t_3 \neq t_1,\ t_3 \neq t_2 : \vec{y}(t_3) \neq \vec{y}_0$

По Теореме 1: $\begin{cases} \vec{y}(t), t \in (\alpha_1, \omega_1) = (\alpha, \omega) \\ \vec{y}(t), t \in (\alpha_2, \omega_2) = (\alpha, \omega) \end{cases}$ $, \exists t1 \in (\alpha, \omega),\ \exists t_2 \in (\alpha, \omega) : \vec{y}(t_1) = \vec{y}(t_2)$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \vec{y}(t) = \vec{y}(t + c),\ (\alpha, \omega) = (\alpha - c, \omega - c),\ c = t_1 - t_2 \neq 0$





#

Глава 1: Уравнения с частными производными

1. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(t, \vec{y}) \tag{1}$$

, где $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(t, \vec{y}) \end{pmatrix}$, $f_j : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Выполняется условие Теоремы Пикара: $f_j \in C(\mathbb{D}), \exists \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(\mathbb{D}),\ i, j = 1, \dots, n$

Определение 1. *функция* $\Phi(t, \vec{y}) = \Phi(t, y_1, ..., y_n)$ *называется первым интегралом системы (1), если* $\forall \vec{y}(t)$ *системы (1) выполняется* $\Phi(t, \vec{y}(t)) = \mathrm{const}$

Пример:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \qquad \Phi(t, x, y) = xy \neq \mathrm{const}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^t c_1 \\ y(t) = e^{-t} c_2 \end{cases} \qquad \Phi(t, x(t), y(t)) = x(t)y(t) = c_1 c_2 = \mathrm{const} \Rightarrow xy \text{ - первый интеграл.}$$

Замечание 1.
Если $\Phi \in C^1,\ \Phi(t, \vec{y})$ - первый интеграл, то $\dfrac{d}{dt}\Phi(t, \vec{y}(t)) = 0$

Проверим, что $\Phi = xy$ - первый интеграл, не зная решения.

$$\Phi(t, x(t), y(t)) = x(t)y(t)$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x(t), y(t)) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t) = 0$$

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(t, \vec{y}) \in C^1(\mathbb{D})$. *Функция* $\Phi(t, \vec{y})$ *- первый интеграл системы (1)* $\Leftrightarrow \Phi(t, \vec{y})$ *- решение уравнения с частными производными.*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi + f_1(t, \vec{y})\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + ... + f_n(t, \vec{y})\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = 0 \tag{2}$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

Пусть $\Phi(t, \vec{y})$ - первый интеграл. Пусть $(t_0, \vec{y}_0)$ - произвольная точка из $\mathbb{D}$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(t, \vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases} \Rightarrow \vec{y}(t) \text{ - решение } t \in (\alpha, \omega) \Rightarrow \Phi(t, \vec{y}(t)) = \text{const} \Rightarrow \frac{d}{dt}\Phi(t, \vec{y}(t)) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \vec{y}(t)) + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(t, \vec{y}(t)) \underbrace{\frac{dy_1(t)}{dt}}_{f_1(t, \vec{y}(t))} + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(t, \vec{y}(t)) \underbrace{\frac{dy_n(t)}{dt}}_{f_n(t, \vec{y}(t))} = 0, \ \forall t \in (\alpha, \omega)$$

$$t = t_0 : \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0, \vec{y}_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(t_0, \vec{y}_0) f_1(t_0, \vec{y}_0) + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(t_0, \vec{y}_0) f_n(t_0, \vec{y}_0) = 0, \ \forall (t_0, \vec{y}_0) \in \mathbb{D}$$

$(\Leftarrow)$:

Пусть $\Phi(t, \vec{y})$ - решение уравнения (2):

$$\frac{\partial}{\partial}\Phi(t, \vec{y}) + f_1(t, \vec{y})\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(t, \vec{y}) + ... + f_n(t, \vec{y})\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(t, \vec{y}) = 0, \ \forall (t, \vec{y}) \in \mathbb{D}$$

Возьмем $\vec{y} = \vec{y}(t)$ - решение системы (2)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \vec{y}(t)) + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f_j(t, \vec{y}(t))}_{\frac{d}{dt} y_j(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(t, \vec{y}(t)) = \frac{d}{dt}\Phi(t, \vec{y}(t)) \Rightarrow \Phi(t, \vec{y}(t)) = \text{const}$$

#

Пример:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \quad \Phi_1(t, x, y) = xy \quad \Phi_3 = 3xy + 4 \quad \Phi_5 = \frac{1}{xy}$$
$$\Phi_2 = 2xy \quad \Phi_4 = (xy)^2 \quad \Phi_6 = F(xy)$$

Теорема 2. *Пусть $\Phi_1(t, \vec{y}), ..., \Phi_k(t, \vec{y})$ - первые интегралы системы (1), $F(z_1, \ldots, z_k)$ - произвольная функция. Тогда $F(\Phi_1(t, \vec{y}), ..., \Phi_k(t, \vec{y}))$ - тоже первый интеграл системы (1).*

Доказательство.

По Определению $\Phi_j(t, \vec{y}(t)) = c_j = \text{const}, \ j = 1, \ldots, k, \ \vec{y}(t)$ - решение (1)

$$F(\underbrace{\Phi_1(t, \vec{y}(t))}_{c_1}, ..., \underbrace{\Phi_k(t, \vec{y}(t))}_{c_k}) = F(c_1, \ldots, c_k) = \text{const} \Rightarrow F(\Phi_1, ..., \Phi_k) \text{ - первый интеграл}$$

#

Определение 2. *Пусть* $\Phi_1(t,\vec{y}),...,\Phi_k(t,\vec{y}) \in C^1(\mathbb{D})$. *Функции* $\Phi_1,...,\Phi_k$ *называются функционально независимыми в области* $\mathbb{D}$ *если:*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{k\times(n+1)} = k,\ \forall (t,\vec{y}) \in \mathbb{D}$$

Замечание 1.

Если $\Phi_1,...,\Phi_k$ функционально независимы, то они друг через друга не выражаются.

От противного: пусть $\Phi_1 = F(\Phi_2,...,\Phi_k) \quad \Phi_1(t,\vec{y}) = F(\Phi_2(t,\vec{y}),...,\Phi_k(t,\vec{y}))$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + ... + \frac{\partial F}{\partial \Phi_k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial \Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} + ... + \frac{\partial F}{\partial \Phi_k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} = \frac{\partial F}{\partial \Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} + ... + \frac{\partial F}{\partial \Phi_k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial y_n} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \end{pmatrix}}_{\text{1-ая строка}} = \frac{\partial F}{\partial \Phi_2} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \end{pmatrix}}_{\text{2-ая строка}} +... + \frac{\partial F}{\partial \Phi_k} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}}_{\text{k-ая строка}} \Rightarrow \operatorname{rank}(...) < k$$

Замечание 2.

Пусть в Определении 2 $\Phi_1,...,\Phi_k$ - первые интегралы. Тогда в матрице из Определения 2 можно не учитывать первый столбец (следует из Теоремы 1)