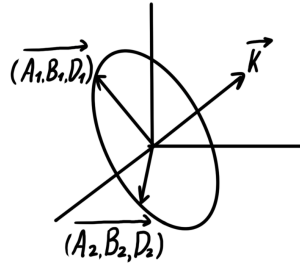


$$E_x(\vec{r}, t) = A \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t}$$

$$E_y(\vec{r}, t) = B \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t}$$

$$E_z(\vec{r}, t) = D \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t}$$

$$Ak_x + Bk_y + Dk_z = 0 \Rightarrow ((\overrightarrow{A, B, D}, (k_x, k_y, k_z))) = 0$$



Пример: $A_1 = 1, B_1 = 0, D_1 = -\frac{k_x}{k_z}$

$$(\overrightarrow{A_2, B_2, D_2}) = \left[(\overrightarrow{A_1, B_1, D_1}) \times \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right]$$

\Rightarrow для \forall вектора $\vec{k} (|\vec{k}| \neq 0) \exists$ плоскость $\perp \vec{k}$, в которой можно выбрать два линейно независимых (ортогональных) вектора $\overrightarrow{A_1, B_1, D_1}$ и $\overrightarrow{A_2, B_2, D_2}$, которые являются амплитудами собственных колебаний и имеют одну и ту же частоту:

$$\underbrace{\frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2}}_{k^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (\text{т.е. двухкратное вырождение}).$$

Пример: если $a=b$, тогда решение с n_x, n_y, n_z имеет ту же частоту, что и решение $n_y, n_x, n_z \rightarrow$ четырех кратное вырождение.

Магнитное поле моды n_x, n_y, n_z :

$$\omega_{n_x, n_y, n_z} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\left(\frac{\pi n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_z}{d}\right)^2}, \quad (\varepsilon = \cos nt, \mu = \cos nt)$$

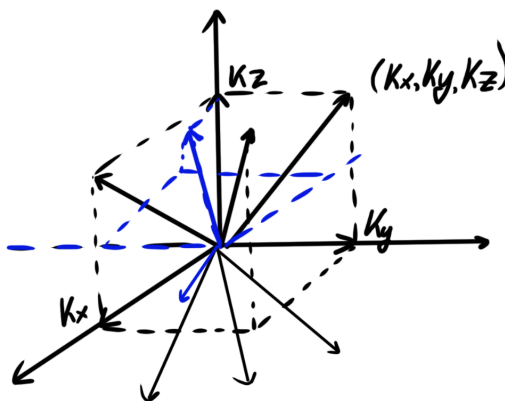
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{c}{i\omega_{n_x, n_y, n_z}} \text{rot} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

1. Связь мод резонатора с плоскими волнами

$$E_x(\vec{r}, t) = -\frac{A}{8}(e^{ik_x x} + e^{-ik_x x})(e^{ik_y y} - e^{-ik_y y})(e^{ik_z z} - e^{-ik_z z})e^{-i\omega t} =$$

$$= c_1 e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t} + c_2 e^{-ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t} + \dots c_8 e^{\dots}$$

- ВОСЕМЬ ПЛОСКИХ ВОЛН.



2. Минимальная частота мод

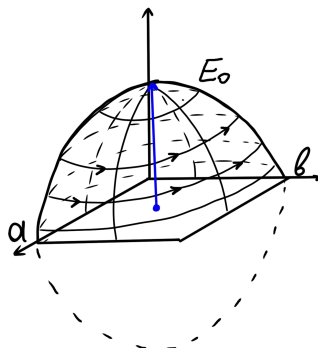
$\omega_{0,0,0}$ — не бывает, $\omega_{0,0,n_z}$ — не бывает (если два индекса равны 0, то решений нет)

$$\omega_{1,1,0} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}, \quad \omega_{1,0,1} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}, \quad \omega_{0,1,1} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$

Если $a > b > d$, то $\omega_{1,1,0}$ - минимальная частота \Rightarrow основная мода резонатора...

Поле основной моды:

$$E_x = E_y = 0, \quad \text{Re}(E_z(\vec{r}, t)) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\omega_{1,1,0} t)$$



$$\vec{B} = -\frac{c}{\omega_{1,1,0}} [\vec{e}_x k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) - \vec{e}_y k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y)] \sin(\omega_{1,1,0} t)$$

3. Влияние конечной проводимости стенок на частоты мода резонатора

Рассматриваем случай, когда электромагнитные поля мод проникают в стенки резонатора на глубину $\delta \sim \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}} \ll a, b, d$. Найдём время затухания моды в резонаторе.

$$E, B \sim e^{-i\omega t} = e^{-i(\omega' - i\omega'')t}, \text{ где } \omega' = \text{Re}(\omega), \omega'' = -\text{Im}(\omega) \quad (\omega = \omega' - i\omega'')$$

Пусть $\varepsilon = \cos nt$, $\mu = \cos nt$.

$$\overline{W}_E - (\text{полная энергия поля в резонаторе, усредненная по } t) = \int dV \frac{\varepsilon (\text{Re} \vec{E}(\vec{r}, t))^2}{8\pi} \equiv$$

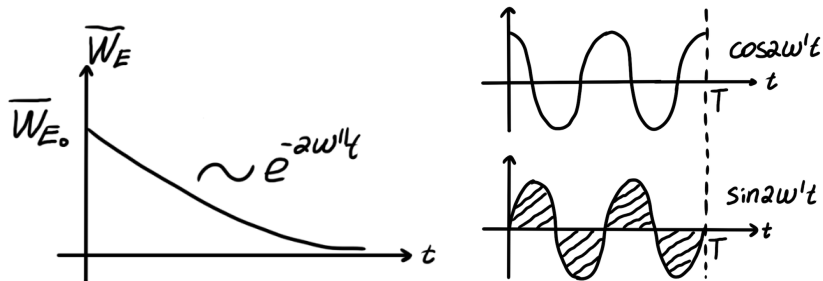
$$(\text{Re} \vec{E}(\vec{r}, t))^2 = \left(\frac{\vec{E}(\vec{r})e^{-i(\omega' - \omega'')t} + \vec{E}^*(\vec{r})e^{i\omega't - \omega''t}}{2} \right)^2$$

$$\equiv \int \frac{dV \varepsilon}{8\pi} \left\{ \frac{(\vec{E}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}))e^{-2i\omega't} + (\vec{E}^*(\vec{r}), \vec{E}^*(\vec{r}))e^{2i\omega't} + 2(\vec{E}(\vec{r}), \vec{E}^*(\vec{r}))}{4} \right\} e^{-2\omega''t}$$

$$e^{-2i\omega't} = \overline{\cos(2\omega't) - i \sin(2\omega't)} = 0 \quad (\text{за период } T = \frac{2\pi}{\omega'})$$

$$\Rightarrow \overline{W}_E = \int dV \frac{|\vec{E}(\vec{r})|^2}{16\pi} \varepsilon e^{-2\omega''t}$$

$$\overline{W}_B = \int dV \frac{|\vec{B}(\vec{r})|^2}{16\pi} \frac{1}{\mu} e^{-2\omega''t}$$



$$\overline{W} = \overline{W}_E + \overline{W}_B = \overline{W}_0 e^{-2\omega''t} \quad \frac{d\overline{W}}{dt} = -2\omega''\overline{W}(t)$$

$$\text{Потери энергии в стенках резонатора: } \oint (\vec{S}, d\vec{s}) = \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\mu\omega'}{2\pi\sigma}} \oint_S |\vec{H}_\tau(\vec{r})|^2 ds e^{-2\omega''t}$$

\vec{S} – вектор Пойнтинга, S – площадь стенок резонатора

$$\omega'' = \frac{\frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\mu\omega'}{2\pi\sigma}} \oint_S |\vec{H}_\tau(\vec{r})|^2 ds e^{-2\omega''t}}{\frac{1}{8\pi} \int dV \left(\varepsilon |\vec{E}(\vec{r})|^2 + \frac{1}{\mu} |\vec{B}(\vec{r})|^2 \right) e^{-2\omega''t}}$$

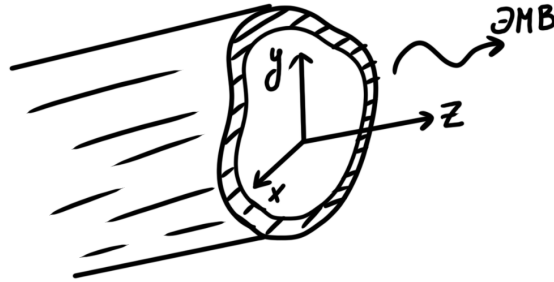
$$Q = \frac{\omega'}{2\omega''} - \text{добротность}$$

Свойства резонатора с $\omega'' = 0 (Q \rightarrow \infty)$ (Ландау, Лифшиц)

$$\int_V \frac{\varepsilon |\vec{E}(\vec{r})|^2 dV}{16\pi} = \int_V \frac{1}{\mu} \frac{|\vec{B}(\vec{r})|^2 dV}{16\pi}, \quad \text{для } \varepsilon = \cos nt(\omega), \mu = \cos nt(\omega)$$

4. Волноводы

- труба с идеально проводящими стенками однородная по сечениям вдоль своей оси. Применение - транспортировка электромагнитных волн (энергии и информации) с малыми потерями на значительные расстояния.



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) e^{ik_z z - i\omega t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y) e^{ik_z z - i\omega t}$$

поле бегущей волны

$$\text{rot}(\vec{E}(x, y) e^{ik_z z}) = \frac{i\omega}{c} (\vec{B}(x, y) e^{ik_z z})$$

$$\text{rot}(\vec{H}(x, y) e^{ik_z z}) = -\frac{i\omega}{c} (\vec{D}(x, y) e^{ik_z z})$$

Выделим поперечные компоненты этих уравнений:

$$[\vec{e}_z \times [\nabla \times \vec{E}(x, y) e^{ik_z z}]] = \frac{i\omega}{c} [\vec{e}_z \times \vec{B}(x, y) e^{ik_z z}], \quad \begin{aligned} \vec{B}(x, y) &= \mu(\omega) \vec{H}(x, y) \\ \vec{D}(x, y) &= \varepsilon(\omega) \vec{E}(x, y) \end{aligned}$$

$$\nabla(E_z(x, y) e^{ik_z z}) - \frac{\partial}{\partial z} (\vec{E}(x, y) e^{ik_z z}) = \frac{i\omega}{c} [\vec{e}_z \times \vec{B}(x, y) e^{ik_z z}] \quad (z\text{-ая компонента уравнения} \equiv 0)$$

$$(\nabla_{\perp} E_z(x, y))e^{ik_z z} - ik_z \vec{E}_{\perp}(x, y)e^{ik_z z} = \frac{i\omega}{c}[\vec{e}_z \times \vec{B}_{\perp}(x, y)]$$

$$\nabla_{\perp} H_z(x, y) - H_{\perp}(x, y)ik_z = -\frac{i\omega}{c}[\vec{e}_z \times \vec{D}_{\perp}(x, y)]$$

∇_{\perp} - двумерный вектор $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, $\vec{E}_{\perp}(x, y)$ - поперечная составляющая волны \vec{E} .