Глава 1: Геометрия пространств со скалярным произведением.

Определение 1 (Метрическое простнрнвство)**.** *Метрика* $\rho(x, y) : M^2 \to \mathbb{R}$

1) $\forall x, y \rho(x, y) \geq -(\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

2) $\forall x, y \in M \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3) $\forall x, y, z \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

$B_\varepsilon(x) = \{y \in M | \rho(x, y) < \varepsilon\}$

Определение 2. *Множество открытое, если любая точка в нем содержится в нем вместе некоторой окрестностью.*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Дискретная метрика:

$$X = \{x \in M\}$$
$$B_\varepsilon(x) = \{y | \rho(x, y) < \frac{1}{2}\}$$

1. Линейно (векторное) пространство

Определение 3. *Непустое множество элементов L произвольной природы, называется линейным (векторным) над полем чисел $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ если*

1) $\forall x, y$ *введена операция сложения*

1.1) $x + y = y + x$

1.2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

1.3) В L существует элемент называемым нулем 0: $x + 0 = x \ \forall x \in L$

1.4) $\forall x \in L$ *существует противоположный элемент принадлежащий L:* $x + y = 0$

2) $\forall x \in L$ *и* $\forall$ *числа* $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *определен вектор из L - произведения элементов на число* $\alpha \quad \alpha x \in L$

1.1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \ \forall \alpha\beta$

1.2) $1 \cdot x = x$

1.3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

1.4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

$$f : X \to Y$$
$$g : X \to Y$$
$$\alpha f + g : X \to Y$$
$$(\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) \text{ поточечная сумма}$$

Примеры:
1)

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n \end{matrix} \quad + \quad \begin{matrix} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \\ \beta(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{matrix} \quad = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots \alpha x_n + \beta y_n)$$

2) $C[a, b] = \{f(a, b) \to \mathbb{C},$ непрерывная функции f - непрерывна
3) $L_p(x) = \{f$- измерима по Лебегу,а заданная на $X, f : X \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\int_X |f(x)|dx < \infty$$

4) $l_2 - x = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$

Определение 4. *$x_1, \dots, x_n$ называется линейно зависимыми, если $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ не все равные нулю, такие что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$*

В противном случае: из того, что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ следует, что все $\alpha_i = 0$ $x_1, \dots, x_n$ называется линейно независимыми наборами векторов

Определение 5. *Бесконечный набор элементов L называется линейно независимым, если любой его конечный поднабор линейно независимым*

Определение 6. *Если в L можно найти n линейно независимых векторов, а любой набор из $n + 1$ векторов является линейно зависимыми, то $\dim L = n$. Если в L можно указать n набор из произволльного числа линейно независимых элементов, то $\dim L = \infty$.*

Определение 7. *Непустое подмножество $S \subset L$ называется подпространством, если оно само является пространством введенных в L линейно операций*

Определение 8. *Линейной оболочкой <M> называется совокупность всех линейных комбинаций $\alpha x + \beta y$ где $x, y \in M \subset \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$*

<M> - подпространство в L (натянутое или порожденное множеством элементов M)

Определение 9. *Норма в линейном пространстве L: $|||| : L \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$*

$\forall x, y \in L \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$
1) $||x|| \geq 0||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$
3) $||x + y|| \leq ||x| + ||y||$

В конечномерном пространствах все нормы эквиваленты $c_1||||_1 \le ||x||_2 \le c_2||x||_1$. В конечномерных пространствах это не так!

Пример норм 2 $||f|| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$ - норма в $C[a,b]$ равномерная норма

$$3 \quad ||f||_{L_1} = \int_X |f|dx \text{ в } L_1$$

$$||f||_{L_p} = \sqrt[p]{\int_X |f|^p dx \text{в} L_p}$$

$$4 \quad ||x||_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

Определение 10. *Последовательность $(x_n)_{n\in N}$ точек линейно нормированное пространстов L сходятся к x, если $||x_n - x|| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \forall\varepsilon > 0 \exists n_0 n > n_0 ||x_n - x|| < \varepsilon$*

Определение 11. *Предельной точкой $M \subset L$ называется точка x, если существует сходящиеся к x последовательность элементов из n $\exists x_n \in M x_n \to x$*

Определение 12. *Замыканием $\overline{M}$ - объединение M и его предельных точек.*

Определение 13. *Замкнутое множество, если содержит все предельные точки.*

Определение 14. *Множество M в L - линейно нормированном пространстве называется плотностью в L, если $\overline{M} = L$*

Определение 15. *M_1, M_2 подмножества в L M_1 плотность в M_2, если*

$$\underbrace{M_2}_{(R\backslash Q)} \subset \underbrace{\overline{M_1}}_{R} \quad M_1 = Q$$

Определение 16. *Сепарабельное множество, если в нем $\exists$ счетное плотное подмножество*