1. Операторы в Гильбертовых пространствах

Определение 1. *$E,\ F$ - линейные пространства. $A: E \to F$ - линейный оператор, если $\mathbb{D}(A) \subset E$ и $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$, где $\alpha,\ \beta$ - числа, $x, y \in \mathbb{D}(A)$*

$$A(x) = Ax \quad (\textit{оператор = линейный оператор})$$

Пусть $E,\ F$ - нормированные пространства.

Определение 2. *$A: E \to F$ непрерывно в точке $x_0 \in E$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x: \|x - x_0\|_E < \delta$*

$$\|Ax - Ax_0\|_F < \varepsilon$$

Непрерывность в $0: \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \|x\| < \delta$

$$\|Ax\| < \varepsilon$$

Непрерывность в $x_0 \Leftrightarrow$ непрерывность в $0 \Leftrightarrow$ непрерывность в $x_1 \in \mathbb{D}(A)$

$$\forall x: \|x - y\| < \delta$$
$$\|Ax - Ay\| < \varepsilon$$

$$\|x - x_0 \pm y\| = \|x + y - x_0 - y\| = \|x_1 - y\| < \delta$$

, где $x_1 = x + y - x_0$.

$$\underbrace{\|A(x + y - x_0) - Ay\|}_{=\|A(x_1 - y)\| < \varepsilon} = \|A(x - x_0)\| < \varepsilon$$

Примеры линейных операторов:

1. $I: E \to E$ по формуле: $Ix = x$, называется тождественным (единичным).

$$x, y \in E,\ I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha Ix + \beta Iy$$

2. $0: E \to F$ по формуле: $0x = 0 \in F$, называется нулевым.

$$x, y \in E,\ 0(\alpha x + \beta y) = 0 = \alpha 0 + \beta 0 = \alpha 0x + \beta 0y$$

3. $P: H \to S$ - оператор проектирования на замкнутое подпространство, где H - гильбертово пространство, $H = S \oplus S^{\perp}$. $\forall x \in H\ \exists!\ y \in S,\ \exists!\ z \in S^{\perp}: x = y + z$.
P действует по формуле $Px = y$

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)$$
$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2$$

4. $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$. $A(f(t)) = tf(t)$

$$\|tf(t)\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 t^2 f^2(t)dt \le \int_0^1 f^2(t)dt < \infty$$

$$f(t), g(t) \in L_2(0,1),\ A(\alpha f + \beta g) = t(\alpha f + \beta g) = \alpha t f(t) + \beta t g(t) = \alpha A f + \beta A g$$

5. $d : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ - оператор дифференцирования. По формуле: $df = f'(t)$, $\mathbb{D}(d) \subset L_2(0,1)$

Линейность основана на линейности L_2 и на линейности дифференцирования.

Определение 3. *Множество $M \subset E$ ограничено, если $\exists$ шар с центром в точке 0 в котором содержится M: $B(0,R) = \{x \in E \,|\, \|x\| < R\}$*

Определение 4. *$A : E \to F$ называется ограниченным, если $\|x\| < R$, $\exists R_1 : \|Ax\| < R_1$ (переводит ограниченное множество в ограниченное)*

Теорема 1. *Линейный оператор ограничен $\Leftrightarrow$ непрерывен.*

Доказательство.

$(\Leftarrow)$:

A - ограниченное, то есть переводит ограниченное множество в ограниченное.

$$\|x\| \le 1 \Rightarrow \|Ax\| \le R \tag{$*$}$$

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{R},\ \text{тогда}\ \|x\| \le \frac{\varepsilon}{R}$$

$$\left\| x\frac{R}{\varepsilon} \right\| \le 1,\ \text{тогда по}\ (*) :$$

$$\left\| Ax\frac{R}{\varepsilon} \right\| \le R \Rightarrow \|Ax\| \le \varepsilon -\ \text{непрерывность в}\ 0 \Rightarrow\ \text{непрерывен}$$

$(\Rightarrow)$:

A - непрерывен в частности, A непрерывен в 0.

$$\varepsilon = 1\ \exists \delta > 0 : \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < 1 \tag{$**$}$$

Фиксируем $X = \{x \in E \,|\, \|x\| \le R\}$.

$$\|Ax\| = \left\| \frac{R}{\delta} A\left(\frac{\delta}{R}x\right) \right\| = \frac{R}{\delta}\left\| A\frac{\delta}{R}x \right\|$$

$$\text{Воспользуемся:}\ \left\| x\frac{\delta}{R} \right\| \le \delta \xrightarrow{(**)} \left\| Ax\frac{\delta}{R} \right\| \le 1\ \text{тогда:}$$

$$\frac{R}{\delta}\left\| A\frac{\delta}{R}x \right\| \le \frac{R}{\delta} = R_1$$

$$\|AX\| \le R_1 \Rightarrow A\ \text{- ограничено}$$

#

$A,\ B$ - линейные операторы, $\alpha,\ \beta$ - числа:
1) $(\alpha A + \alpha B)x = \alpha Ax - \beta Bx$ - линейное отображение
2) $A : E \to E_1,\ B : E_1 \to F \Rightarrow BA : E \to F$. $(BA)x = B(Ax)$
Пространство линейных операторов - нормированные.

2. Норма линейного оператора

Определение 5. *Нормой линейного оператора называется выражение:*

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_E}{\|x\|_E}$$

Теорема 2. *Линейный оператор A ограничен $\Leftrightarrow$ его норма конечна.*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

A - ограничено.

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \left\| A\frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| < \infty$$

$(\Leftarrow)$:

Дано $\|A\| < \infty$

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \leq \sup_{0<\|y\|\leq 1} \|Ay\| \leq \sup_{0\leq\|y\|\leq 1} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \leq \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}$$

#

1) $\|Ay\| \leq \|A\| \|y\|$ из определения нормы $(\|A\|)$.
Пусть $\|y\| \leq R : \|Ay\| \leq R_1\ (\|A\|, R)$
2) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$ - эквивалентное определение нормы.

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \overset{1)}{\leq} \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$$

4. $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, по формуле $Af = rf(t)$

$$\|A\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \sup_{f\neq 0} \frac{\|tf(t)\|}{\|f\|} = \sup_{f\neq 0} \frac{\sqrt{\int_0^1 |tf(t)|^2\, dt}}{\sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\, dt}} \leq 1$$

$\Rightarrow A$ - ограничен.
Норма может достигаться на последовательности функций.
5. $d : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ $\mathbb{D}(d) = C^1(0,1)$. Неограниченный оператор!

Рассмотрим $\sin(nt)$:

$$\|\sin(nt)\|^2_{L_2(0,1)} \leq 1$$

Я устал босс. Вот вам страница чтобы меня осудить