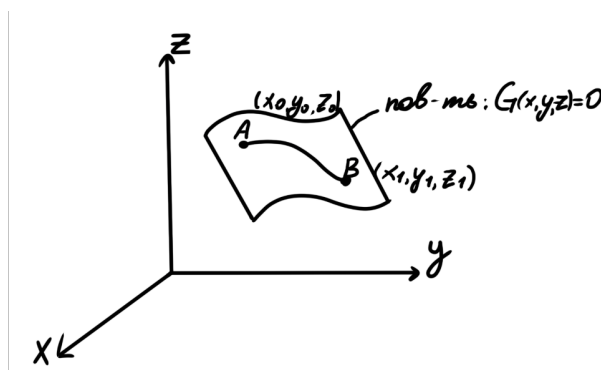


## 1. Вариационная задача на условный экстремум

$$\begin{cases} I[y_1, \dots, y_n] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dt \rightarrow \text{extz} \\ y_i(t_0) = y_{i_0}, \quad y_i(t_1) = y_{i_1}, \quad i = 1, \dots, n \\ G(t, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Пример: Задача о геодезических на поверхности



Найти кривую, соединяющую точки A и B, лежащие на поверхности, имеющую наименьшую длину.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{уравнение кривой в параметрическом виде, } t \in [t_0, t_1]$$

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, & x(t_1) = x_1 \\ y(t_0) = y_0, & y(t_1) = y_1 \\ z(t_0) = z_0, & z(t_1) = z_1 \end{cases}$$

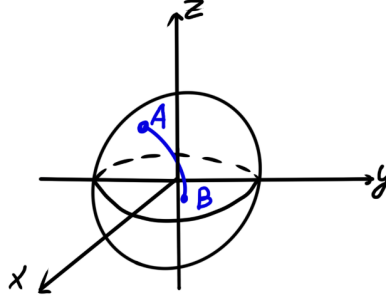
**Необходимое условие локального экстремума:**

Пусть  $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$  доставляют локальному экстремум для задачи (1). Тогда  $\exists \lambda(t)$  такая, что функции  $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$  являются экстремальными вспомогательного функционала.

$$\tilde{I}[y_1, \dots, y_n] = \int_{t_0}^{t_1} (F + \lambda G(t)) dt$$

**Без доказательства.**

## 2. Решение задачи о геодезических на сфере



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\tilde{I}[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left( \underbrace{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}_F + \lambda(t)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right)}_{\tilde{F}} dt$$

$$\begin{cases} 2x\lambda(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{x'}{F} \right) & (1) \\ 2y\lambda(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{y'}{F} \right) & (2) \\ 2z\lambda(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{z'}{F} \right) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \cdot y + (2) \cdot (-x) : & y \frac{d}{dt} \left( \frac{x'}{F} \right) - x \frac{d}{dt} \left( \frac{y'}{F} \right) = 0 \\ (2) \cdot z + (3) \cdot (-y) : & z \frac{d}{dt} \left( \frac{y'}{F} \right) - y \frac{d}{dt} \left( \frac{z'}{F} \right) = 0 \\ (3) \cdot (-x) + (1) \cdot z : & z \frac{d}{dt} \left( \frac{x'}{F} \right) - x \frac{d}{dt} \left( \frac{z'}{F} \right) = 0 \end{cases}$$

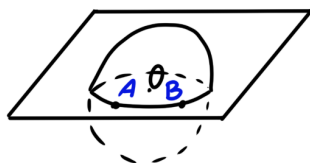
$$\frac{d}{dt} \left( y \frac{x'}{F} - x \frac{y'}{F} \right) = \cancel{y'} \frac{x'}{F} + y \frac{d}{dt} \left( \frac{x'}{F} \right) - \cancel{x'} \frac{y'}{F} - x \frac{d}{dt} \left( \frac{y'}{F} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( y \frac{x'}{F} - x \frac{y'}{F} \right) = 0 & \begin{cases} \frac{yx' - xy'}{F} = c_1 & (1) \\ \frac{zy' - yz'}{F} = c_2 & (2) \\ \frac{zx' - xz'}{F} = c_3 & (3) \end{cases} \\ \frac{d}{dt} \left( z \frac{y'}{F} - y \frac{z'}{F} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( z \frac{x'}{F} - x \frac{z'}{F} \right) = 0 \end{cases}$$

$$(1) \cdot z + (2) \cdot x + (3) \cdot (-y) :$$

$$\frac{1}{F} [z(yx' - xy') + x(zy' - yz') - y(zx' - xz')] = c_1 z + c_2 x - c_3 y$$

$$\begin{cases} c_1 z + c_2 x - c_3 y = 0 - \text{плоскость проходящая через } (0,0,0) \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$



Геодезическая на сфере - дуга на большой окружности.

# Глава 1: Система малых колебаний

## 1. Линейные однородные системы малых колебаний

$$M\vec{x}'' + K\vec{x} = 0$$

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример:  $n = 1 \Rightarrow mx'' + kx = 0, m > 0, k > 0$



$M$  — матрица масс,  $K$  — матрица жесткостей

1)  $M = M^T, K = K^T$  ( $m_{ij} = m_{ji}, k_{ij} = k_{ji}$ )

2)  $M > 0$  (матрица положительно определена),  $K \geq 0$

**Определение 1.** Матрица  $M = M^T$  называется положительно определенной, если  $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq 0$  выполняется  $(M\vec{v}, \vec{v}) > 0$ .

**Критерий Сильвестра:**  $M = M^T > 0 \Leftrightarrow$  все главные миноры  $> 0$ .

**1-ый способ:** Сведение к системе 1-го порядка.

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = \vec{x} \\ \vec{y}_2 = \vec{x}' \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{y}_1' = \vec{y}_2 \\ \vec{y}_2' = \vec{x}'' = -M^{-1}K\vec{x} = -M^{-1}K\vec{y}_1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & 0 \end{pmatrix}}_{n \times n} \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{e^{tA}}_{(2n \times 2n)} \underbrace{\vec{c}}_{(2n \times 1)} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{12}(t) & \Phi_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \vec{y}_1(t) = F_{11}(t)\vec{c}_1 + F_{12}(t)\vec{c}_2 \quad (2n \text{ констант})$$

**Лемма 1.** Если  $M = M^T > 0$ , то  $\exists M^{-1}$

*Доказательство.*

Пусть не существует  $M^{-1} \Rightarrow \underbrace{\det M = 0} \Rightarrow \exists \vec{v} \neq 0 : M\vec{v} = 0$   
 $\Rightarrow \lambda = 0$  – собств.знач.  
 $\det(M - 0E) = 0$   
 $(M\vec{v}, \vec{v}) = (0, \vec{v}) = 0$  – противоречие

#

**Утверждение 1** (из алгебры). Пусть  $A = A^T \Rightarrow$  все собственные числа  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ .  
 Пусть  $A = A^T > 0 \Rightarrow$  все собственные числа  $\lambda_j > 0$ .

**Утверждение 2** (из алгебры). Пусть  $A = A^T \Rightarrow$  в  $\mathbb{R}^n$  существует базис из собственных векторов, то есть нет присоединенных

**Утверждение 3** (из алгебры). Пусть  $A = A^T \Rightarrow A = UDU^{-1}$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$U$  - ортогональная матрица, то есть  $U^{-1} = U^T$

**2-ой способ:**

**Определение 2.** Число  $\lambda$  называется собственным числом системы (1), если  $\det(K - \lambda M) = 0$

**Определение 3.** Вектор  $\vec{v} \neq \vec{0}$  называется собственным вектором системы (1) (вектором нормальных колебаний), если  $(K - \lambda M)\vec{v} = 0$

**Теорема 1.** Существует  $n$  собственных чисел системы (1) и  $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$

*Доказательство.*

$$1) \det(K - \lambda M) = 0$$

$$\det(M(M^{-1}K - \lambda E)) = 0$$

$$\underbrace{\det M}_{\neq 0} \det(M^{-1}K - \lambda E) = 0 \Rightarrow \text{существует } n \text{ собственных чисел}$$

$$2) \vec{v}_j - \text{собственные вектора} \Rightarrow K\vec{v}_j = \lambda_j M\vec{v}_j \mid \cdot \vec{v}_j$$

$$\underbrace{(Kv_j, v_j)}_{\geq 0} = \lambda_j \underbrace{(Mv_j, v_j)}_{> 0} \Rightarrow \lambda_j \geq 0$$

#

**Теорема 2.** В  $\mathbb{R}$  существует базис из собственных векторов системы (1).

**Доказательство будет позже.**

**Теорема 3.** Пусть  $M = M^\top > 0, K = K^\top \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$  - собственные числа системы (1),  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  - собственные вектора системы (1), соответствующие числам  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Тогда все решения системы (1) имеют вид:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \vec{v}_j,$$

где  $q_j(t)$  - решение дифференциального уравнения:  $q_j'' + \lambda_j q_j = 0$

*Доказательство.*

По теореме 2  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  - базис в  $\mathbb{R}^n$ . При фиксированном  $t$   $x(t) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x}(t)$  раскладывается по базису:  $\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \vec{v}_j$

Подставляем  $x(t)$  в систему (1):

$$\begin{aligned} M \sum_{j=1}^n q_j''(t) \vec{v}_j + K \sum_{j=1}^n q_j(t) \vec{v}_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^n \left( q_j''(t) M \vec{v}_j + q_j(t) \underbrace{K \vec{v}_j}_{\lambda_j M \vec{v}_j} \right) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n (q_j''(t) M \vec{v}_j + \lambda_j q_j(t) M \vec{v}_j) &= 0 \quad | \cdot M^{-1} \\ \sum_{j=1}^n (q_j''(t) + \lambda_j q_j(t)) \vec{v}_j &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Т.к  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  линейно независимы, то  $q_j''(t) + \lambda_j q_j(t) = 0$

#

**Замечание.**  $q_j''(t) + \lambda_j q_j(t) = 0$  1)  $\lambda_j = 0 \Rightarrow q_j(t) = c_1 t + c_2$   
2)  $\lambda_j > 0 \Rightarrow q_j(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda_j} t)$

**Определение 4.**  $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \omega_n = \sqrt{\lambda_n}$  называется собственными частотами колебаний системы (1).