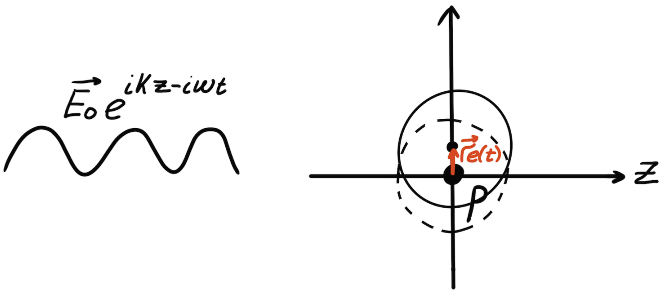
1. Классическая теория дисперсии света в среде

Модель взаимодействия среды с электромагнитной волной: разряженный холодный газ атомов:

1) Частицы газа не взаимодействуют
2) Поле, действующее на атомы, совпадают со средним полем в среде
3) Действием магнитного поля пренебрегаем

Электроны в атоме можно приближенно разделить на: слабосвязанные (оптические), эффективно взаимодействующие с электромагнитными волнами оптического диапазона и сильно связанные, которые слабо взаимодействуют с этими частицами



$$\vec{F}_{e\to p} = \frac{4}{3}\pi \underbrace{\rho_e}_{\rho=\frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3}} (-\vec{r}_e(t))|e|$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e = -\frac{e|e|}{a^3}\vec{r}_e(t) = -\frac{e^2}{a^3}\vec{r}_e(t)$$

$$\vec{F}_{p\to e} = -\vec{F}_{e\to p} = -\frac{e^2}{a^3}\vec{r}_e(t)$$

$$m\ddot{\vec{r}}_e = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} - \frac{e^2}{a^3}\vec{r}_e(t) + \vec{F}_{\text{трен}}$$

$$\ddot{\vec{r}}_e + \underbrace{\frac{e^2}{ma^3}}_{=\omega_0^2}\vec{r}_e + \underbrace{2\gamma\dot{\vec{r}}_e}_{\frac{\text{сила трения}}{m}} = \frac{e\vec{E}_0}{m}e^{-i\omega t} - \text{вынужденные колебания}$$

$$\vec{r}_e = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{r}_0(-\omega^2) + \omega_0^2\vec{r}_0 - 2i\gamma\omega\vec{r}_0 \Rightarrow \vec{r}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}$$

$$\vec{r}_e(t) = \frac{e\vec{E}_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}e^{-i\omega t}$$

Далее: $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad \vec{P} = n_e\vec{d}_e = n_e e\vec{r}_e(t)$

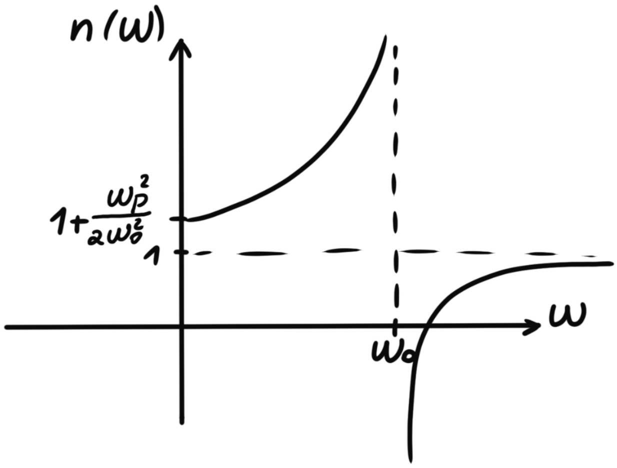
$$\vec{D} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} + 4\pi n_e \frac{e\vec{E}_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}e^{-i\omega t} = \underbrace{\left(1 + \overbrace{\frac{4\pi n_e e^2}{m}}^{\omega_p^2}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}\right)}_{\varepsilon(\omega)}\underbrace{\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}_{\vec{E}(t)}$$

1 случай: Дисперсия вдали от линии поглощения

$$|\omega_0^2 - \omega^2| \gg 2\gamma\omega$$

Уравнение дисперсионное соотношение: $\dfrac{\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}}{c} = k, \mu(\omega) = 1$

$$\varepsilon(\omega) \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow n(\omega) \simeq \sqrt{\varepsilon(\omega)} \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{2(\omega_0^2 - \omega^2)}$$



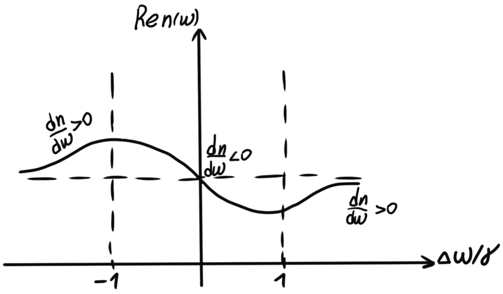
$$\frac{dn(\omega)}{d\omega} > 0 - \text{ нормальная дисперсия } : v_g < v_\Phi$$

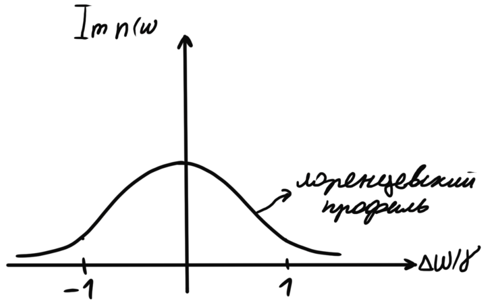
2 случай: Дисперсия вблизи линии поглощения $\omega \simeq \omega_0$

$$\omega = \omega_0\Delta\omega, \quad \Delta\omega \ll \Rightarrow \omega_0^2 - (\omega + \Delta\omega)^2 - 2i\gamma(\omega_0 + \Delta\omega) = -2\omega_0\Delta\omega - \Delta\omega^2 - 2i\gamma\omega_0 - 2i\gamma\Delta\omega$$

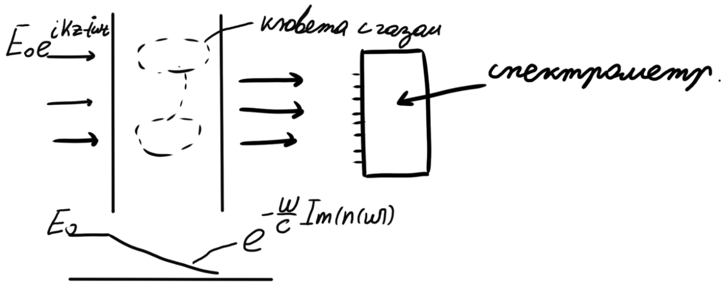
$$\varepsilon(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega_0(\Delta\omega + i\gamma)}; \quad n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \simeq 1\frac{\omega_p^2}{4\omega_0(\Delta\omega + i\gamma)}\frac{\Delta\omega - i\gamma}{\Delta\omega - i\gamma} =$$

$$= 1 - \frac{\omega_p^2\Delta\omega}{4\omega_0(\Delta\omega^2 + \gamma^2)} + i\frac{\omega_p^2\gamma}{4\omega_0(\Delta\omega^2 + \gamma^2)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{4\omega_0\gamma}\frac{\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)^2} + i\frac{\omega_p^2}{4\omega_0\gamma}\frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)^2}$$



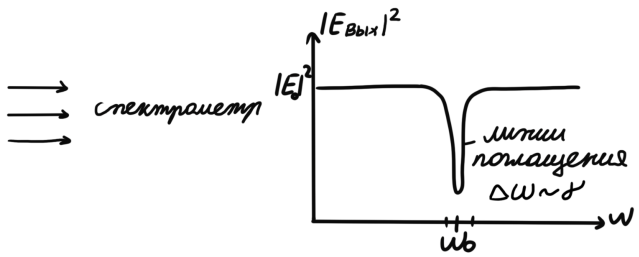


$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)} = \frac{\omega n(\omega)}{c} = \frac{\omega}{c}\mathrm{Re}(n(\omega)) + \frac{i\omega}{c}\mathrm{Im}(n(\omega))$$



$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c}\mathrm{Re}(n(\omega)) - i\omega t} e^{-\frac{\omega}{c}\mathrm{Im}(n(\omega))z}$$

Показания спектрометра:

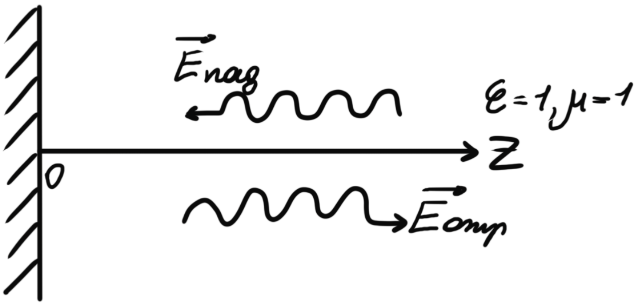


В квантовой теории $\varepsilon(\omega) = 1 + \dfrac{3\pi N a e^2}{m}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\omega_{on}^2 - \omega^2 - 2i\gamma_n\omega}$

$h\omega_{on} = \varepsilon_n - \varepsilon_0 -$энергия перехода с n-го уровня на основной, $\quad h = 1,054 \cdot 10^{-27}$эрг с

f_n-сила осциллятора - вероятность перехода с n-го уровня на основной $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = 1$

2. Стоячие волны



$$\vec{E}_{\text{пад}} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k},\vec{r})-i\omega t} = \vec{E}_0 e^{-ikz-i\omega t} \quad (\vec{E}_0 \perp \vec{n} = -\vec{e}_z), \quad \vec{k} = \vec{n}k = -\vec{e}_z k$$

$$\vec{E}_{\text{отр}} = \vec{E}_1 e^{ikz-i\omega t}, \quad \vec{E}_1 \perp \vec{e}_z$$

Граничные условия на поверхности проводника

$$\vec{E}, \vec{\tau}_\Gamma = 0, \quad E_\tau = (\vec{E}_0, \vec{\tau}) + (\vec{E}_1, \vec{\tau}) = 0 = ((\vec{E}_0 + \vec{E}_1), \vec{\tau}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = 0 \Rightarrow \vec{E}_0 = -\vec{E}_1$$

$$\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_0 e^{-ikz-i\omega t} - \vec{E}_0 e^{ikz-i\omega t} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \frac{e^{-ikz} - e^{ikz}}{2i} 2i = -2i\vec{E}_0 \sin(kz) e^{-i\omega t}$$

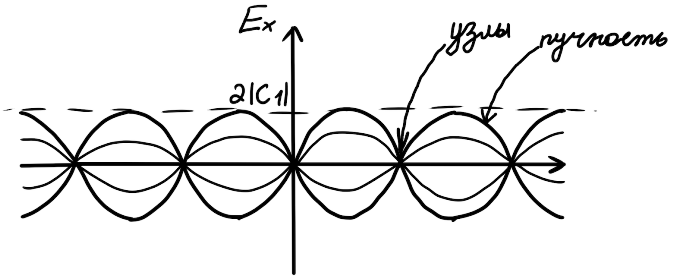
$$\vec{B} = \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\vec{n} \times \vec{E}]$$

$$\vec{B}_{\text{пад}} = [-\vec{e}_z \times \vec{E}_0] e^{-ikz-i\omega t}, \quad \vec{B}_{\text{отр}} = [\vec{e}_z \times \underbrace{\vec{E}_1}_{=-\vec{E}_0}] e^{ikz-i\omega t}$$

1 пример: падающая волна линейно поляризована

$$\vec{E}_0 = \vec{e_x} |c_1| e^{i\varphi}, \ c_1 \in \mathbb{C}; \ \mathrm{Re}(\vec{E}_\Sigma(z,t)) = -2|c_1| \vec{e}_x \sin(kz) \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\mathrm{Re}(\vec{B}_\Sigma(z,t)) = -2\vec{e}_y \cos(kz) \cos(\omega t - \varphi) |c_1|$$



Узлы: $kz_m = m\pi, z_m = \frac{m\lambda}{2}$

Пучность: $kz'_m = m\pi + \frac{\pi}{2}, \quad z'_m = \frac{m\pi + \frac{\pi}{2}}{k} = \frac{m\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$

2 пример: круговая поляризация $\vec{E}_0 = (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)|c_1|e^{i\varphi}$ – левая круговая

$$\mathrm{Re}(\vec{E}_\Sigma(z,t)) = \mathrm{Re}\left[-2i(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)|c_1|e^{-i(\omega t - \varphi)}\sin(kz)\right] = -2|c_1|\sin(kz)[\vec{e}_x\sin(\omega t - \varphi) - \vec{e}_y\cos(\omega t - \varphi)]$$

$$\mathrm{Re}(\vec{B}_\Sigma(z,t)) = 2|c_1|\cos(kz)[\vec{e}_x\sin(\omega t - \varphi) - \vec{e}_y\cos(\omega t - \varphi)]$$