Коэффициенты Фурье: $x_1, \dots, x_n$, $\lambda_k = (x, x_k)$

Неравенство Бесселя: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2$

1. Пополнение ортонормированной системы

Определение 1. *Ортонормированную систему $x_1, \dots, x_n$ называют замкнутой, если для $\forall x \in H$:*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 , \text{ где } \lambda_k = (x, x_k) - \text{ коэффициенты Фурье}$$

Уравнение замкнутости:

$$y \in H, \mu_k = (y, x_k) - \text{ коэффициенты Фурье } y$$

$$(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k} - \text{ равенство Парсеваля}$$

Определение 2. *Ортонормированная системам $x_1, \dots, x_n$ называется полной, если ее нельзя пополнить, то есть если ее ортогональное дополнение состоит только из $\vec{0}$. Другими словами, если $\exists x$ $\forall k : (x, x_k) = 0 \Rightarrow x = 0 \dots$*

Определение 3. *Ортонормированная система $x_1, \dots, x_n$ называется базисом Гильбертова (или Гильбертовым базисом), если $\forall x \in H$:*

$$\underbrace{x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k}_{\text{разложение в векторный ряд Фурье}} , \text{ где } \lambda_k - \text{ коэффициенты Фурье}$$

$$\lim_{N \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k \right\| = 0$$

Теорема 1. *Во всяком ненулевом Гильбертовом сепарабельном пространстве $\exists$ Гильбертов базис, состоящий из конечного или счетного числа векторов.*

Доказательство.

$x_1, \dots, x_k$ - счетное плотное подмножество (в силу сепарабельности)

$x_1, \dots, x_k \xrightarrow[\text{комбинации}]{\text{вычеркнули линейные}} y_1, \dots, y_k -$ счетное число линейно независимых векторов

$y_1, \dots, y_k \xrightarrow[\text{Грамму-Шмидта}]{\text{ортогонализируем по}} z_1, \dots, z_k -$ счетное число ортонормированных векторов

$$x \in H,\ \{x_{n_k}\} \to x\ \forall \varepsilon > 0\ \exists M\ \exists n_k \geq N : \|x - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

$$x_{n_k} - \text{ выражается через } \{z_k\},\ x_{n_k} = \sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p$$

Спроектируем на x конечно мерное подпространство $< z_1, \ldots, z_{n_k} >$

Проекция: $s = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j$, где $s -$ проекция на $< z_1, \ldots, z_{n_k} >, \quad \lambda_j = (x, z_j)$

$$\|x - s\| \leq \|x - y\|,\ \forall y \in < z_1, \ldots, z_{n_k} >$$

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j \right\| \leq \left\| x - \underbrace{\sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p}_{x_{n_k}} \right\| < \varepsilon$$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j z_j,\ \lambda_j = (x, z_j) - \text{ коэффициенты Фурье}$$

#

Теорема 2. *Если $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ - ортогональная система в сепарабельном Гильбертовом пространстве, тогда следующие условия эквиваленты:*
1) $\{x_k\}$ - Гильбертов базис;
2) $\{x_k\}$ - замкнутая система;
3) $\{x_k\}$ - полная система.

Доказательство.

$1) \Rightarrow 2)$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k,\ \lambda_k = (x, x_k),\ \ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \lambda_k \left(x_k, \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \right) =$$

$$\lim_{N,M\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \lambda_k \overline{\lambda_m} (\underbrace{\overline{x_m, x_k}}_{=(x_k,x_m)=\delta_{km}\begin{cases}1,\,k=m\\0,\,k\neq m\end{cases}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

#

2) $\Rightarrow$ 3):

$$\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

От противного: Пусть $y \neq 0,\ y \in H$ - пополнение $\{x_k\}$: $\mu_k = (y, x_k) = 0$

$$|y|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 = 0 \Rightarrow y = 0 - \text{ противоречие}$$

#

3) $\Rightarrow$ 1):
Пусть $x \in H$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_k x_k,\ \ \lambda_k = (x, x_k)$$

Фундаментальность:

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} \lambda_n x_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2$$

Неравенство Бесселя: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \|x\|^2$

$$\forall \varepsilon\ \exists N_0\ \forall N, M \geq N, \quad \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2 < \varepsilon$$

Значит S_N - фундаментальная последовательность в Гильбертовом полном пространстве $\Rightarrow$ сходится.

Обозначим предел S_N через z.

Лектор: "хорошая буква зет, давайте обозначим"

$$(x - z, x_k) = \lim_{N\to\infty} \left(x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n, x_k \right) = \lambda_k - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (x_n, x_k) = \lambda_k - \lambda_k = 0$$

$$x - z \perp x_k,\ \forall k$$

$\Rightarrow$ в силу единственности системы $\{x_k\}$:

$$x - z = 0,\ x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \Rightarrow \{x_k\} - \text{Гильбертов базис}$$

#

Теорема 3 (Рисса-Фишера)**.** *H - сепарабельное Гильбертово пространство ортонормированной системы $\{x_k\}$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - числа, такие что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ - сходится. Тогда $\exists!\ x \in H$ такое, что $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n$$

$$\|S_N - S_M\|^2 = \underbrace{\sum_{p=N+1}^{M} |\lambda_p|^2}_{\text{сходится}\Rightarrow S_N - \text{ фундаментальный}} < \varepsilon$$

Доказательство.

z - предел S_N:

$$(z, x_k) = \lim_{N\to\infty} (S_N, x_k) = \lambda_k - \text{коэффициенты Фурье дял } z$$

$$\|z\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, z\right) = \sum_{k=1}^{\lambda} \lambda_k (\underbrace{x_k}_{=\overline{\lambda_k}}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

Единственность: Пусть $\exists x \in H,\ x \neq z$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|x - z\|^2 = \underbrace{\|x\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2} - \mathrm{Re}(x, z) + \underbrace{\|z\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2} - \text{смотреть ранее}$$

$$(x, z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k, z\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\overline{z, x_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|x - z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 0 \Rightarrow x = z$$

#

2. Изоморфизм

Определение 4. *Пусть H_1, H_2 - Гильбертовы пространства. H_1 - изоморфно H_2, если $\exists A : H_1 \to H_2$ и $\exists B : H_2 \to H_1$, которые: линейные, сохраняют скалярное произведение и взаимообратны.*