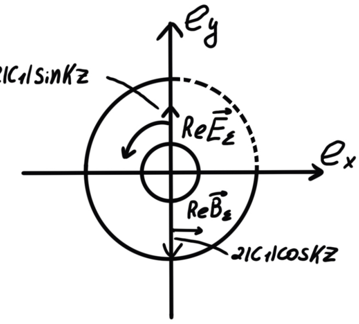
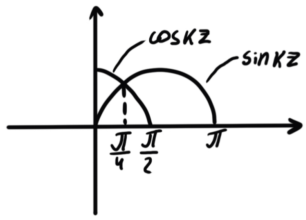
Пусть $0 < kz < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \sin(kz) < \cos(kz) < 1$





1. Резонаторы

- полость, окруженная идеальным проводником.

В нем накапливаются волны собственной волны резонатора. Таким образом резонатор фильтрует сигнал по определенной частоте и усиливает его сингал. С помощью резонаторов можно ускорять сгустки протонов и электронов.

Способы возбуждения резонаторов:

1) Штырь с переменным во времени потенциалом.
2) Петля с переменным током.
3) Модулированный электронный пучок.
4) Волновод с бегущей волной.

Уравнения электромагнитных полей в резонаторе:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

Из уравнений Максвелла следует, что:

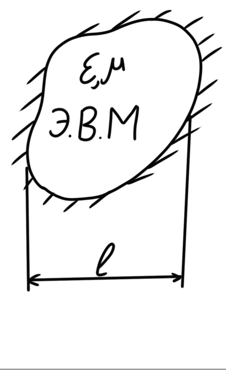
$$\text{rot}\vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} = -\frac{i\omega}{c}\vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{div}\vec{B}_0 = 0$$

$$\text{rot}\vec{H}_0(\vec{r}) = -\frac{i\omega}{c}\vec{D}_0(\vec{r}) \Rightarrow \text{div}\vec{D}_0 = 0$$

Если внутри резонатора вещество с $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega) \Rightarrow \vec{B}_0 = \vec{H}_0\mu(\omega),\ \vec{D}_0 = \vec{E}_0\varepsilon(\omega)$

Граничные условия:

$$E_{0\tau}|_\Gamma = 0, \quad B_{0n}|_\Gamma = 0$$



$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{rot}\vec{E}_0)_z = +\frac{i\omega}{c}B_{0z}\\
&(\mathrm{rot}\vec{E}_0)_z = \underbrace{\frac{\partial E_{0y}}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial E_{0x}}{\partial y}}_{=0}\\
&E_{0y}|_\Gamma = 0,\ E_{0x}|_\Gamma = 0
\end{aligned}\right| \Rightarrow B_{0z} = 0$$

Исключим $\vec{B}_0(\vec{r})$ из уравнений:

$$\mathrm{rotrot}\vec{E}_0(\vec{r}) = \underbrace{\nabla\mathrm{div}\vec{E}_0(\vec{r})}_{\frac{\mathrm{div}\vec{D}_0(\vec{r})}{\varepsilon(\omega)}=0} - \Delta\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{i\omega}{c}\mu(\omega)\left(-\frac{i\omega}{c}\right)\varepsilon(\omega)\vec{E}_0(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\Delta\vec{E}_0(\vec{r}) + \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{E}_0(\vec{r}) = 0\\ \mathrm{div}\vec{E}_0(\vec{r}) = 0\end{cases} \quad + \text{Г.У: } E_{0\tau}|_\Gamma\ = 0$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = k^2$$

- эта система является краевой трех мерной задачей Штурмана-Лиувиля.

Задача Штурма-Лиувиля:

1) Решение $\exists$ только для бесконечного ряда чисел k_n - собственные числа;

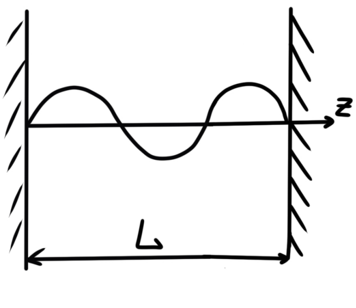
2) Каждому k_n соответствует как минимум одна собственная функция - собственное колебание;

3) Набор всех собственных функций образует фундаментальную систему ортогональных функций, по которым можно разложить поля внешнего источника возбуждения.

4) $\min(k_n) \sim \dfrac{1}{l} \Rightarrow \varepsilon = 1,\ \mu = 1,\ \omega_{\min} \sim \dfrac{c}{l}$

Примеры резонаторов:

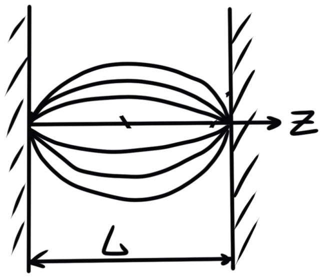
1) Плоский резонатора



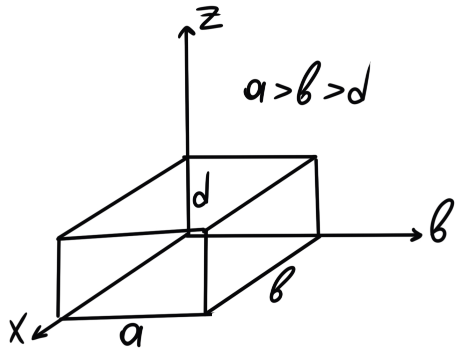
Решение как в задаче про отражение: $\vec{E}_\Sigma(\vec{r}, t) = -2i\vec{E}_0\sin(kz)e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_mL = m\pi \Rightarrow k_m = \frac{m\pi}{L} - \text{собственные числа}$$

$$k_{\min} = \frac{\pi}{L},\ \omega_{\min}(\varepsilon = 1,\ \mu = 1) = \frac{\pi c}{L}$$



2) Прямоугольный трех мерный резонатор:



$$\Delta\vec{E}_0(\vec{r}) + k^2\vec{E}_0(\vec{r}) = 0,\ \mathrm{div}\vec{E}_0(\vec{r}) = 0,\ E_{0\tau}|_\Gamma\ = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\begin{pmatrix}E_{0x}\\E_{0y}\\E_{0z}\end{pmatrix} + k^2\begin{pmatrix}E_{0x}\\E_{0y}\\E_{0z}\end{pmatrix} = 0$$

Пусть $E_{0x}(\vec{r}) = E_1(x)E_2(y)E_3(z)$

$$E_2(y)E_3(z)\frac{d^2E_1(x)}{dx^2} + E_1(x)E_3(z)\frac{d^2E_2(y)}{dy^2} + E_1(x)E_2(y)\frac{d^2E_3(z)}{dz^2} + k^2E_1(x)E_2(y)E_3(z) = 0| : E_1E_2E_3$$

Двигаясь вдоль x все члены кроме $\dfrac{E_1''(x)}{E_1(x)}$, точно константы значит используя следующее выражение:

$$\frac{E_1''(x)}{E_1(x)} + \frac{E_2''(y)}{E_2(y)} + \frac{E_3''(z)}{E_3(z)} + k^2 = 0\ \text{, получаем: } \frac{E_1''(x)}{E_1(x)} = \mathrm{const};\ \underbrace{\frac{E_2''(y)}{E_2(y)} = \mathrm{const},\ \frac{E_3''(z)}{E_3(z)} = \mathrm{const}}_{\text{Аналогично}}.$$

$E''(x) = \alpha E(x)$ Решение ищем в виде: $E_1(x) = c_1e^{\lambda x} \Rightarrow c_1\lambda^2e^{\lambda x} = \alpha c_1e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$

1. $\alpha > 0 \Rightarrow E(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ занулить решение на двух стенках $x = 0,\ x = a$ - невозможно
2. $\alpha = 0 \Rightarrow E(x) = Ax + B$ - аналогично невозможно

3. $\alpha < 0 \Rightarrow E(x) = Ae^{+i\sqrt{|\alpha|}x} + Be^{-i\sqrt{|\alpha|}x} = c_1 \sin\Big(\sqrt{|\alpha|}x + \varphi\Big)$ - имеет периодически нули, что может удовлетворять границам

Переобозначение: $\alpha_x = -k_x^2, \alpha_y = -k_y^2, \alpha_z = -k_z^2$

$$E_{0x}(\vec{r}) = A\sin(k_x x + \alpha_x)\sin(k_y y + \alpha_y)\sin(k_z z + \alpha_z), \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z = \text{const}$$

$$E_{0y} = B\sin(k_x x + \beta_x)\sin(k_y y + \beta_y)\sin(k_z z + \beta_z), \beta_x, \beta_y, \beta_z = \text{const}$$

$$E_{0z} = D\sin(k_x x + \gamma_x)\sin(k_y y + \gamma_y)\sin(k_z z + \gamma_z), \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z = \text{const}$$

Граничные условия: $x = 0 \Rightarrow E_y = 0,\ E_z = 0$ при $\forall y, z \Rightarrow \beta_x = 0, \gamma_x = 0$

$$x = a \Rightarrow E_{0y} = 0,\ E_{0z} = 0 \text{ при } \forall y, z \Rightarrow k_x a = n_x \pi \Rightarrow k_x = \frac{n_x \pi}{a},\ n_x \in \mathbb{Z}$$

$$y = 0 \Rightarrow E_{0x} = 0,\ E_{0z} = 0 \text{ при } \forall x, z \Rightarrow \alpha_y = \gamma_y = 0$$

$$y = b \Rightarrow E_{0x} = 0,\ E_{0z} = 0 \text{ при } \forall x, z \Rightarrow k_y b = n_y \pi \Rightarrow k_y = \frac{n_y \pi}{b},\ n_y \in \mathbb{Z}$$

$$z = 0 \Rightarrow E_{0x} = 0,\ E_{0y} = 0 \text{ при } \forall x, y \Rightarrow \alpha_z = \beta_z = 0$$

$$z = d \Rightarrow E_{0x} = 0,\ E_{0y} = 0 \text{ при } \forall x, y \Rightarrow k_z d = n_z \pi \Rightarrow k_z = \frac{n_z \pi}{d},\ n_z \in \mathbb{Z}$$

$$\text{div}\vec{E}_0 = \frac{\partial}{\partial x}E_{0x} + \frac{\partial}{\partial y}E_{0y} + \frac{\partial}{\partial z}E_{0z} =$$

$$= \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\left[\underbrace{\frac{k_x A\cos(k_x x + \alpha_x)}{\sin(k_x x)}}_{\text{const}} + \underbrace{\frac{k_y B\cos(k_y y + \beta_y)}{\sin(k_y y)}}_{\text{const}} + \underbrace{\frac{k_z D\cos(k_z z + \gamma_z)}{\sin(k_z z)}}_{\text{const}}\right] = 0$$

при $\forall x, y, z$

$$\Rightarrow \alpha_x = \frac{\pi}{2}, \beta_y = \frac{\pi}{2}, \gamma_z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k_x A + k_y B + k_z D = 0 \text{ или } (\vec{k}, (\overrightarrow{A, B, C})) = 0$$

Конечный ответ:

$$\begin{aligned} E_{0x}(\vec{r}) &= A\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z) \\ E_{0y}(\vec{r}) &= B\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z) \quad \oplus \quad k_x A + k_y B + k_z D = 0 + \text{ Г.У. } \vec{E}_{0\tau}|_\Gamma = 0 \\ E_{0z}(\vec{r}) &= D\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z) \end{aligned}$$