

Конспект лекций по дисциплине

Основы функционального анализа

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

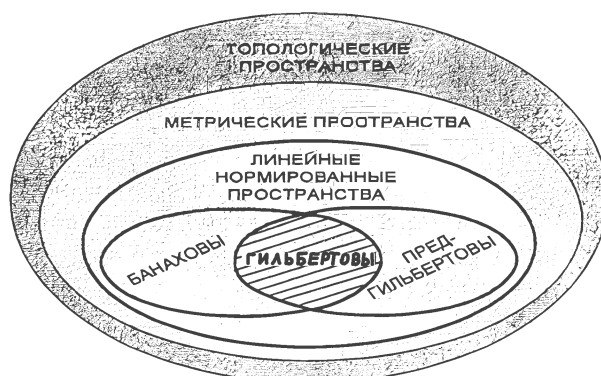
Преподаватель: Ротанова Татьяна Александровна

Оглавление

1	Геометрия пространств со скалярным произведением.	2
1.	Линейные пространства	2
2.	Линейно (векторное) пространство	2
3.	Определение нормы	3
4.	Линейные пространства с скалярным произведением	5
5.	Ортогональность векторов	8
6.	Пополнение ортонормированной системы	13
7.	Изоморфизм	17

Глава 1: Геометрия пространств со скалярным произведением.

1. Линейные пространства



Определение 1 (Метрическое пространство). Метрика $\rho(x, y) : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1) $\forall x, y : \rho(x, y) \geq 0 - (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

2) $\forall x, y \in M : \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3) $\forall x, y, z : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M | \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

Определение 2. Множество открытое, если любая точка в нем содержится в нем вместе некоторой окрестностью.

Пример дискретной метрики:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

2. Линейно (векторное) пространство

Определение 3. Непустое множество элементов L произвольной природы, называется линейным (векторным) над полем чисел $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ если

1) $\forall x, y$ введена операция сложения:

1.1) $x + y = y + x$ (коммутативность)

1.2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность)

1.3) В L существует элемент называемый нулем 0 : $x + 0 = x, \forall x \in L$

1.4) $\forall x \in L$ существует противоположный элемент принадлежащий

L : $x + y = 0$, обозначается как $-x$

2) $\forall x \in L$ и \forall числа $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ определен вектор из L - произведения элементов на число α , $\alpha x \in L$:

- 1.1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta$
- 1.2) $1 \cdot x = x$ (существования единицы)
- 1.3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- 1.4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Примеры:

1)

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^n & \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbb{C}^n & + \beta(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{matrix} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)$$

- 2) $C[a, b] = \{f(a, b) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ непрерывная функции } f - \text{ непрерывна} \}$
- 3) $L_p(x) = \{f - \text{измерима по Лебегу, заданная на } X, f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ таких, что}$

$$\int_X |f(x)| dx < \infty$$

$$4) l_2 : x = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$$

Определение 4. x_1, \dots, x_n называется линейно зависимыми, если $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ не все равные нулю, такие что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

В противном случае: из того, что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ следует, что все $\alpha_i = 0$
 x_1, \dots, x_n называется линейно независимыми наборами векторов.

Определение 5. Бесконечный набор элементов L называется линейно независимым, если любой его конечный поднабор линейно независимым.

Определение 6. Если в L можно найти n линейно независимых векторов, а любой набор из $n + 1$ векторов является линейно зависимыми, то $\dim L = n$. Если в L можно указать набор из произвольного числа линейно независимых элементов, то $\dim L = \infty$.

Определение 7. Непустое подмножество $S \subset L$ называется подпространством, если оно само является пространством введенных в L линейных операций.

Определение 8. Линейной оболочкой $\langle M \rangle$ называется совокупность всех линейных комбинаций $\alpha x + \beta y$ где $x, y \in M \subset L, \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$\langle M \rangle$ - подпространство в L (натянутое или порожденное множеством элементов M)

3. Определение нормы

Определение 9. Норма в линейном пространстве L : $\| \cdot \| : L \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

$\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

- 1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (положительная определенность нормы)
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (положительная однородность нормы)
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

В конечномерных пространствах все нормы эквивалентны $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$.
В конечномерных пространствах это не так!

Пример норм:

1) $\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$ - норма в $C[a, b]$ равномерная норма.

$$2) \quad \|f\|_{L_1} = \int_X |f| dx \text{ в } L_1$$

$$3) \quad \|f\|_{L_p} = \sqrt[p]{\int_X |f|^p dx} \text{ в } L_p$$

$$4) \quad \|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

Определение 10. Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ точек линейно нормированного пространства L сходится к x , если $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n > n_0 : \|x_n - x\| < \varepsilon$

Определение 11. Предельной точкой $M \subset L$ называется точка x , если существует сходящаяся к x последовательность элементов из $M \exists x_n \in M : x_n \rightarrow x$

Определение 12. Замыканием \overline{M} - объединение M и его предельных точек (по конкретной норме).

Определение 13. Множество замкнутое, если содержит все предельные точки.

Определение 14. Множество M в L - линейно нормированном пространстве называется плотным в L , если $\overline{M} = L$

Определение 15. Сепарабельное множество, если в нем \exists счетное плотное подмножество

Пример: Множество множеств $P[0,1]$ не является замкнутым подпространством в $C[0,1]$

$$P_n(x) \rightarrow f(x) \Leftrightarrow \|P_n - f\|_C \rightarrow 0$$

$\forall n, p_n \in P[0,1], f(x) \in C[0,1]$ - не является полиномом

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = e^x, \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Замыкание $P[0,1]$ это $L_2[0,1]$

$$\|p_n - f\|_{L_2} \leq \max_{x \in [0,1]} \max_{c \in [0,1]} \left| \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \stackrel{x=1}{\stackrel{c=1}{=}} \frac{e}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad e^x \notin P[0,1]$$

$$L_2(x) : \{f : X \rightarrow Y, \int_x |f|^2 dx < \infty\}$$

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_x |f|^2 dx}$$

Нуль: $f : X \rightarrow Y$

$$0(x) : X \rightarrow Y$$

$$g = 0(x) = 0 - \text{почти всюду}$$

$$g = \begin{cases} 0, \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ \infty, \mathbb{Q} \end{cases}$$

Элементы (вектора) пространства L_2 - функции класса L_2 .

Определение 16. Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in L$ (линейно нормированное пространство) называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$

Определение 17. Если любая фундаментальная последовательность является сходящейся в L , то L - полное пространство.

Определение 18. Полное нормированное пространство - банахово пространство

4. Линейные пространства с скалярным произведением

Определение 19. Скалярное произведение в L $(,) : L \times L \rightarrow \mathbb{C}. \forall x_1, x_2, y \in L, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ выполняется:

- 1) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$
- 2) $(x, y) = (\overline{y}, x)$
- 3) $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Линейное пространство со скалярным произведением над \mathbb{R} - евклидовы пространства, над \mathbb{C} - унитарные пространства.

$$1) \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) : (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$$

$$2) l_2 : (x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i$$

$$3) L_2(x) : (f, g) = \int_x f \overline{g} dx$$

4) $C[a, b]$: нет скалярного произведения согласованного с аксиомами нормы

Лемма 1. Величина $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ удовлетворяет свойствам нормы. Согласованная или порожденная скалярным произведением.

Определение 20. Гильбертово пространство - пространство со скалярным произведением, полное относительно нормы, порожденным этим скалярным произведением.

Лемма 2 (Неравенство Коши-Буняковского). $\forall x \in L \quad |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$

Доказательство.

$$\alpha = \frac{(x, y)}{|(x, y)|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq \|\bar{\alpha}x + ty\|^2 = (\bar{\alpha}x + ty, \bar{\alpha}x + ty) = \bar{\alpha}(x, \bar{\alpha}x) + t(y, \bar{\alpha}x + ty) =$$

$$\underbrace{|\alpha|^2}_{=1}(x, x) + \bar{\alpha}t(x, y) + \alpha t(y, x) + t^2(y, y) = \|x\|^2 + \bar{\alpha}t(x, y) + \alpha t(y, x) + t^2 \|y\|^2 \quad \square$$

$$\bar{\alpha}t(x, y) + \alpha t(y, x) = t \left(\frac{(\bar{x}, \bar{y})(x, y)}{|(x, y)|} + \frac{(x, y)(x, y)}{|(x, y)|} \right) = 2t|(x, y)|$$

$$\square \|x\|^2 + 2t|(x, y)| + t^2 \|y\|^2$$

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

#

Доказательство Леммы 1. 1) Из 3 аксиомы скалярного произведения;

$$2) \alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha x\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 = (1)$$

$$(\alpha x, \alpha x) = \alpha(x, \alpha x) = \alpha \bar{\alpha}(x, x) = (1)$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| \|y\|$$

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x + y) + (y, x + y) = (\overline{x + y}, \bar{x}) + (\overline{x + y}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + (\bar{y}, \bar{x}) + (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) =$$

$$= \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq$$

$$\stackrel{\text{нер-во К-Б}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

#

$$L_2 : \sqrt{\int_x |f(x)|^2 dx} = \|f\|_{L_2}$$

$$\left| \int_x f(x) \bar{g}(x) dx \right| \leq \left(\int_x |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} - \text{неравенство К-Б в } L_2$$

$$\sqrt[p]{\int_x |f(p)| dx} = \|f\|_{L_p}$$

Лемма 3. $\forall p \geq 1$ линейно нормированное пространство L_p является полным.

Лемма 4. $\forall p \geq 1$ пространство C^∞ плотно в $L_p(x)$, то есть $\overline{C^{\infty L_p}} = L_p(x)$

Лемма 5. $\forall p \geq 1$ пространство L_p сепарабельно.

Лемма 6. Пусть L - линейно нормированное пространство со скалярным произведением и норма порождена скалярным произведением. . .

$$\forall x, y \in L \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \text{равенство параллелограмма}$$

Наоборот, если в линейно нормированном пространстве L выполняется равенство параллелограмма, то в этом пространстве можно ввести скалярное произведение, согласованной с этой нормой.

$L_1 \subset [a, b] \exists f, g$, для которых не выполняется равенство параллелограмма \Rightarrow нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

Лемма 7. В линейном пространстве со скалярным произведением L , скалярное произведение непрерывно по первому аргументу относительно сходимости по норме порожденной скалярным произведением

$$x_n \rightarrow t \quad \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\forall y, (x_n, y) \rightarrow (x, y)$$

Доказательство.

$$|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \stackrel{\text{по К.Б}}{\leq} \|x_n - x\| \underbrace{\|y\|}_{\text{огр. числено}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

#

5. Ортогональность векторов

Определение 21. L - пространство со скалярным произведением, $x, y \in L$ называется ортогональным, если $(x, y) = 0$

Определение 22. Набор векторов $x, \dots, x_n, \dots, \in L$ называется ортогональным, если $\forall i, j : x_i \perp x_j$

Определение 23. Набор ортогональный (x_n) называется ортонормированным, если $\forall i : \|x_i\| = 1$

Ортогонализация Грамма-Шмидта

Если x_1, \dots, x_n - счетная система линейно независимый в L , тогда новые последовательности:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 & z_1 &= \frac{y_1}{\|y_1\|} \\ y_2 &= x_2 - (x_2, z_1)z_1 & z_2 &= \frac{y_2}{\|y_2\|} \\ y_n &= x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, z_k)z_k & z_n &= \frac{y_n}{\|y_n\|} \end{aligned}$$

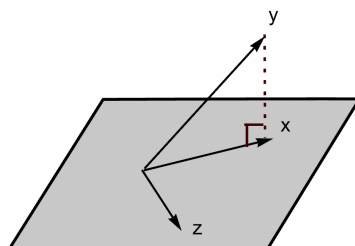
Обладает свойствами:

- 1) Система z_1, \dots, z_n - ортонормированна
- 2) $\forall n \in N \underbrace{\langle z_1, \dots, z_n \rangle}_{\text{линейные оболочки}} = \underbrace{\langle x_1, \dots, x_n \rangle}$

Определение 24. Углом между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства L называется число $\varphi \in [0, \pi]$:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

Определение 25. Если S - подпространство пространства со скалярным произведением L , то $x \in S$ называется вектором наилучшего приближения (ближайший) для $y \in L$ посредством векторов из S , если:



$$\forall z \in S, \quad \|y - z\| \geq \|x - y\|$$

$$\|x - y\| = \inf_{z \in S} \|y - z\|$$

Теорема 1. Пусть H - гильбертово пространство, S - замкнутое подпространство H , $y \in H$, тогда $\exists! x$ ближайший к y .

Доказательство.

$$\inf \|y - z\| = d$$

$$x_1, \dots, x_m \in S \quad \|y - x_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} d$$

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|(x_m - y) - (x_n - y)\|^2 = 2(\|x_m - y\|^2 + \|x_n - y\|^2) - \underbrace{\left\| x_m - y + x_n - y \right\|^2}_{\|x_m + x_n - 2y\|^2 = 4\|q - y\|^2 \geq 4d^2} \boxed{\leq}$$

$$q = \frac{x_m + x_n}{2} \in S$$

$$\forall \varepsilon, \exists N \quad n, m \geq N : \|x_m - y\| < d^2 + \varepsilon \quad \|x_n - y\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$$

$$\boxed{\leq} 4d^2 + 2\varepsilon - 4d^2 = 2\varepsilon$$

x_m - фундаментальная

существование предела последовательности x :

$x \in S$, т.к S - замкнутое

$$\|y - x_n\| = \sqrt{(y - x_n, y - x_n)} \xrightarrow[(1)]{n \rightarrow \infty} \sqrt{(y - x, y - x)} = \|y - x\| \rightarrow d \text{ в силу ! предела}$$

(1) - непрерывность по 1-му аргументу

Единственность:

Пусть $\tilde{x} : \|y - \tilde{x}\| = d, x \neq \tilde{x}$

$$\|\tilde{x} - x\|^2 = \|(\tilde{x} - y) - (x - y)\|^2 = 2 \underbrace{\left\| \tilde{x} - y \right\|^2}_{=d^2} + 2 \underbrace{\left\| x - y \right\|^2}_{=d^2} - \|2y - x - \tilde{x}\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 \leq 0$$

т.е $\tilde{x} = x$ - противоречие

#

Определение 26. S - подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением L , $x \in S$ - ортогональная проекция $y \in L$ на подпространство S , если:

$$y - x \perp S \quad y - x \perp z \quad \forall z \in S \quad (y - x, z) = 0$$

Лемма 8. S - подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением L , $x \in S$ - ортогональная проекция $y \in L \Leftrightarrow x$ - ближайший к y посредством S .

Доказательство.

\Rightarrow :

$$\forall x, y, z \in L$$

$$\|y - z\|^2 = ((y - x) + (x - z), (y - x) + (x - z)) =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \|y - x\|^2 + 2\text{Re}(x - y, x - z) + \|x - z\|^2 (*)$$

$$(1) : (a + b, a + b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\text{Re}(a, b)$$

$$x \in S - \text{ ортогональная проекция } y \text{ на } S \Rightarrow y - x \perp x - z$$

Итого:

$$\|y - z\|^2 = \|y - x\|^2 + \underbrace{\|x - z\|^2}_{\geq 0}$$

$$\forall z \in S : \|y - z\|^2 \leq \|y - x\|^2, x - \text{ ближе для } y$$

Пусть дано:

\Leftarrow :

$$x - \text{ ближайший вектор для } y \in S$$

$$\left. \begin{aligned} |y - x| &= \inf \|y - z\| \\ f(t) &= \|y - x + tW\|^2, \quad t \in \mathbb{R}^2, \quad W \in S \end{aligned} \right| \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|y - x + tW\|^2 - \|y - x\|^2}{t} = 0$$

$$\text{в } (*) : z = x - tW$$

$$\|y - (x - tW)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2\text{Re}(y - x, tW) + \|tW\|^2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \frac{2\operatorname{Re}(y-x, W)}{t} + t^2 \frac{\|W\|^2}{t} = 0$$

$$2\operatorname{Re}(y-x, W) = 0$$

Если $\operatorname{Im}(y-x, W) = 0$, то x - ортогональная проекция y на S .

Доказывается аналогично: $f(t) = \|y-x+itW\|^2$

#

Определение 27. S - подпространство линейного пространства L со скалярным произведением, то совокупность всех $x \in L$, таких, что $x \perp y \forall y \in S$ называется ортогональным дополнением к S (S^\perp).

Определение 28. Линейное пространство L является прямой суммой S и T если любой вектор $x \in L$ единственным образом представим в виде $x = y+z$, $y \in S$, $z \in T$

Лемма 9. H - гильбертово пространство, S - замкнутое подпространство, тогда H прямая сумма S и S^\perp , $H = S \oplus S^\perp$

Доказательство.

$$y \in H \quad x - \text{ближайший к } y \text{ посредством } S \Rightarrow$$

$$\stackrel{\text{Лемма 1}}{\Rightarrow} y-x \perp z, \quad z \in S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = y-x \in S^\perp$$

$$y = \overset{\in S^\perp}{W} + \overset{\in S}{\tilde{x}}$$

Докажем единственность представления:

$$\text{Пусть } y = \overset{\in S^\perp}{\tilde{W}} + \overset{\in S^\perp}{\tilde{\tilde{x}}}$$

$$W+x = \tilde{W} + \tilde{x}$$

$$W - \tilde{W} = \tilde{x} - x$$

$$\underset{\in S^\perp}{(W - \tilde{W}, \tilde{x} - x)} = \underset{\in S}{(\tilde{x} - x, \tilde{x} - x)}$$

$$0 = (\tilde{x} - x, \tilde{x} - x)$$

То есть: $\tilde{x} = x$ и $\tilde{W} = W$

#

Теорема 2. S - конечномерное подпространство линейного пространства L со скалярным произведением x_1, \dots, x_n - ортонормированный базис в S $\forall y \in L$:

$$x = \sum_1^n \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = (y, x_k)$$

является ортогональной проекцией y на подпространство S . При этом:

$$\|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y - x\|^2$$

Доказательство.

$$\forall z \in S, \quad z = \sum_1^n \alpha_k x_k$$

$$(z, x_m) = \sum_1^n \alpha_k (x_k, x_m) = \alpha_m$$

$$\|z\|^2 = \left(\sum_1^n \alpha_k x_k, \sum_1^n \alpha_p x_p \right) = \sum_1^n \alpha_p \left(\sum_1^n \alpha_k x_k, x_p \right) = \sum_1^n \alpha_p \left[\sum_1^n \overline{\alpha_k} (x_p, x_k) \right] = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$$

$$\|y - z\|^2 = \|y\|^2 - (z, y) - (y, z) + \|z\|^2 = \|y\|^2 - \sum_1^n \alpha_k (x_k, y) - \sum_1^n \overline{\alpha_k} (y, x_k) + \sum_1^n |\alpha_k|^2 =$$

$$= \|y\|^2 - \sum_1^n \alpha_k \lambda_k - \sum_1^n \overline{\alpha_k} \lambda_k + \sum_1^n |\alpha_k|^2 + \sum_1^n |\lambda_k|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2 = \|y\|^2 + \sum_1^n |\alpha_k - \lambda_k|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2$$

$$\|y\|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2 \geq 0, \quad \text{при } \alpha_k = \lambda_k \quad (z = x)$$

При $z = x$ достигается минимум \Rightarrow ортогональная проекция.

#

Определение 29. x_1, \dots, x_n, \dots - ортонормированная система в линейном пространстве со скалярным произведением L :

$x \in L$ $\lambda_k = (x, x_k)$ - коэффициент Фурье x .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k x_k - \text{ряд Фурье расходится}$$

Теорема 3 (неравенств Бесселя). $x \in L$ - линейное пространство со скалярным произведением, λ_k - коэффициент Фурье, тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

Доказательство.

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$$

$$\underbrace{\|x - S_n\|^2}_{>0} + \|S_n\|^2 = \|x\|^2$$

$$\|S_n\|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

↓
в пределе

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2 - \text{ равенство Парсеваля}$$

#

Коэффициенты Фурье: x_1, \dots, x_n , $\lambda_k = (x, x_k)$

Неравенство Бесселя: $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$

6. Пополнение ортонормированной системы

Определение 30. Ортонормированную систему x_1, \dots, x_n называют замкнутой, если для $\forall x \in H$:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2, \text{ где } \lambda_k = (x, x_k) - \text{коэффициенты Фурье}$$

Уравнение замкнутости:

$y \in H, \mu_k = (y, x_k)$ — коэффициенты Фурье y

$$(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k} - \text{ равенство Парсеваля}$$

Определение 31. *Ортонормированная системам x_1, \dots, x_n называется полной, если ее нельзя пополнить, то есть если ее ортогональное дополнение состоит только из $\vec{0}$. Другими словами, если $\exists x \forall k : (x, x_k) = 0 \Rightarrow x = 0 \dots$*

Определение 32. *Ортонормированная система x_1, \dots, x_n называется базисом Гильбертова (или Гильбертовым базисом), если $\forall x \in H$:*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \text{ где } \lambda_k - \text{коэффициенты Фурье}$$

разложение в векторный ряд Фурье

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^N \lambda_k x_k \right\| = 0$$

Теорема 4. *Во всяком ненулевом Гильбертовом сепарабельном пространстве \exists Гильбертов базис, состоящий из конечного или счетного числа векторов.*

Доказательство.

x_1, \dots, x_k - счетное плотное подмножество (в силу сепарабельности)

$x_1, \dots, x_k \xrightarrow[\text{комбинации}]{\text{вычеркнули линейные}} y_1, \dots, y_k$ - счетное число линейно независимых векторов

$y_1, \dots, y_k \xrightarrow[\text{Грамму-Шмидта}]{\text{ортонормализуем по}} z_1, \dots, z_k$ - счетное число ортонормированных векторов

$$x \in H, \{x_{n_k}\} \rightarrow x \forall \varepsilon > 0 \exists M \exists n_k \geq N : \|x - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

$$x_{n_k} - \text{выражается через } \{z_k\}, x_{n_k} = \sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p$$

Спроектируем на x конечно мерное подпространство $\langle z_1, \dots, z_{n_k} \rangle$

Проекция: $s = \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j$, где s - проекция на $\langle z_1, \dots, z_{n_k} \rangle$, $\lambda_j = (x, z_j)$

$$\|x - s\| \leq \|x - y\|, \forall y \in \langle z_1, \dots, z_{n_k} \rangle$$

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j \right\| \leq \left\| x - \underbrace{\sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p}_{x_{n_k}} \right\| < \varepsilon$$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j z_j, \lambda_j = (x, z_j) - \text{коэффициенты Фурье}$$

#

Теорема 5. Если $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ - ортогональная система в сепарабельном Гильбертовом пространстве, тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\{x_k\}$ - Гильбертов базис;
- 2) $\{x_k\}$ - замкнутая система;
- 3) $\{x_k\}$ - полная система.

Доказательство.

1) \Rightarrow 2) :

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = (x, x_k), \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \\
 \|x\|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \lambda_k \left(x_k, \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \right) = \\
 &\lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M \lambda_k \overline{\lambda_m} \underbrace{(x_m, x_k)}_{=(x_k, x_m) = \delta_{km} \begin{cases} 1, k = m \\ 0, k \neq m \end{cases}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2
 \end{aligned}$$

#

2) \Rightarrow 3):

$$\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

От противного: Пусть $y \neq 0$, $y \in H$ - пополнение $\{x_k\}$: $\mu_k = (y, x_k) = 0$

$$|y|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 = 0 \Rightarrow y = 0 - \text{противоречие}$$

#

3) \Rightarrow 1):

Пусть $x \in H$:

$$S_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n, \quad \lambda_n = (x, x_n)$$

Фундаментальность:

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^M \lambda_n x_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^M |\lambda_n|^2$$

Неравенство Бесселя: $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \|x\|^2$

$$\forall \varepsilon \exists N_0 \forall N, M \geq N, \sum_{n=N+1}^M |\lambda_n|^2 < \varepsilon$$

Значит S_N - фундаментальная последовательность в Гильбертовом полном пространстве \Rightarrow сходится.

Обозначим предел S_N через z .

Лектор: "хорошая буква зет, давайте обозначим"

$$(x - z, x_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(x - \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n, x_k \right) = \lambda_k - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \lambda_n (x_n, x_k) = \lambda_k - \lambda_k = 0$$

$$x - z \perp x_k, \forall k$$

\Rightarrow в силу единственности системы $\{x_k\}$:

$$x - z = 0, x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \Rightarrow \{x_k\} - \text{Гильбертов базис}$$

#

Теорема 6 (Рисса-Фишера). H - сепарабельное Гильбертово пространство ортонормированной системы $\{x_k\}$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - числа, такие что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ -

сходится. Тогда $\exists! x \in H$ такое, что $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.

$$S_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n$$

$$\|S_N - S_M\|^2 = \sum_{p=N+1}^M |\lambda_p|^2 < \varepsilon$$

сходится $\Rightarrow S_N$ - фундаментальный

Доказательство.

z - предел S_N :

$$(z, x_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_N, x_k) = \lambda_k - \text{коэффициенты Фурье для } z$$

$$\|z\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, z \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \underbrace{(x_k, z)}_{=\overline{\lambda_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

Единственность: Пусть $\exists x \in H, x \neq z$

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \\
\|x - z\|^2 &= \underbrace{\|x\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2} - \operatorname{Re}(x, z) + \underbrace{\|z\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2} - \text{смотреть ранее} \\
(x, z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k, z \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\overline{z}, x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \\
\|x - z\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 0 \Rightarrow x = z
\end{aligned}$$

#

7. Изоморфизм

Определение 33. Пусть H_1, H_2 - Гильбертовы пространства. H_1 - изоморфно H_2 , если $\exists A : H_1 \rightarrow H_2$ и $\exists B : H_2 \rightarrow H_1$, которые: линейные, сохраняют скалярное произведение и взаимнообратны.

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!