Теорема 1 (Теорема о изоморфизме гильбертовых пространствах)**.** *Всякое сепарабельное бесконечномерное Гильбертово пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) изоморфно пространству l_2 (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).*

Идея доказательства:

$$A : H \to l_2$$

$$\begin{matrix} x \in H \\ \lambda \in l_2 \end{matrix} \quad ?$$

$$A(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots) : \text{ где } \lambda_k = (x, x_k) \text{ - коэффициенты Фурье; } A(x) \in l_2 \text{ ?}$$

$$\sum_{1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2 \text{ - неравенство Бесселя}$$

1) A линейно?
2) A сохраняет скалярное произведение (это равенство Парсеваля)?

$$B : l_2 \to H \text{ по теореме Рисса-Фишера}$$

3) B линейно?
4) B сохраняет скалярное произведение?
5) A и B взаимно обратны?

Тригонометрическая система функция как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi, \pi]$

$$L_2[-\pi, \pi] : \left\{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

$$(f, g)_{L_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g}(t)dt$$

Над $\mathbb{R}$:
Ряды Фурье

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0, \ n \neq m \\ \pi, \ n = m \neq 0 \\ 2\pi, \ n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0, \ n \neq m \\ \pi, \ n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = 0$$

Гильбертово пространство:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$$

Ряд Фурье:
Коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Гильбертово пространство:
Коэффициенты Фурье

$$\alpha_0 = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0$$

$$\alpha_n = (f, \cos(nx)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \sqrt{\pi}a_n$$

$$\beta_n = (f, \sin(nx)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \sqrt{\pi}b_n$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

$$f(x) = \alpha_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \alpha_1\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x + \beta_1\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x + ... + \alpha_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) + \beta_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b\sin x + ... + a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

Равенство Ляпунова:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

Равенство Парсеваля:

$$\alpha_0^2 + \sum^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_0^2) = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Глава 1: Классические ортогональные системы

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \text{ - норма в } C[a,b] \text{ равномерная норма.}$$

$$f_n \xrightarrow{\text{равномерно}} f$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall k > N : \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 < \varepsilon^2$$

$$C^\infty(\subset C) \text{ плотны в } L_2[a,b] \Leftrightarrow L_2 = \overline{C}, \quad M \text{ плотно в } L \Leftrightarrow L = \overline{M}$$

1. Весовое пространство Лебега

Пусть (a,b) - промежуток на $\mathbb{R}$ (необязательно ограниченный)

Определение 1. *Функция $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ называется весовой или весом, если:*
1) $\forall x \in (a,b)\ h(x) \geq 0$
2) $h(x) > 0$ почти всюду в (a,b)
3) $\int_a^b h(x)dx < \infty$

Определение 2. *Пространство функций*

$$L_2^h(a,b) = \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} | \int_a^b f^2(x)h(x)dx < \infty \right\}$$

назовем весовым пространством Лебега.

Это пространство становится евклидовым, если на нем задано скалярное произведение

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)h(x)dx$$

Скалярное произведение определено для любых функций f, g так как

$$|f(x)g(x)h(x)| < \frac{1}{2}[f^2(x)h(x) + g^2(x)h(x)]$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)h(x)dx}$$

Замечания:

- Нулевым элементом пространства $L_h^2(a,b)$ считаем такую функцию f, что выполнено $(f,f)=\displaystyle\int_a^b f^2h(x)dx=0$

- Весовое пространство Лебега $L_h^2(a,b)$ является полным относительно нормы, порожденной скалярным произведением, то есть Гильбертовым. Для каждой функции $h(x)$ и промежутка (a,b) определятся специальное гильбертово пространство!

- Если интервал (a,b) конечен, то $\forall n\ x^n\in L_2^h(a,b)$. Если (a,b) - бесконечный промежуток, то полагаем, что весовая функция убывает на бесконечности настолько быстро, что все мономы $x^n\in L_h^2(a,b)$:

$$\int_a^b x^{2n}h(x)dx<\infty$$

Тогда в $L_h^2(a,b)$ всегда есть последовательность мономов $1,x,x^2,x^3,\dots,x^n,\dots$

На любом интервале (a,b) последовательность мономов $1,x,x^2,x^3,\dots,x^n,\dots$ образуют линейно назависимую сисстему. Применим к ней процесс ортогнализации Грамма-Шмидта относительно скалярного произведения пространства $L_h^2(a,b)$. Получим последовательность мономов:

$$q_0,q_1,\dots,q_n,\dots,$$

со свойствами:

- $\displaystyle\int_a^b q_m(x)q_n(x)h(x)dx=\delta_{mn}$
- $\forall n\ q_n$ - многочлен степени n

Так же для удобства домножим, если это необходимо, многочлен q_n на -1, так чтобы у каждого многочлена старший коэффициент a_n стал положительным.

Определение 3. *Последовательность полученных многочленов $q_0,q_1,\dots,q_n,\dots,$ называется последовательностью ортогональных многочленов на промежутке (a,b) с весом $h(x)$*

Ортонормированная система в Гильбертовом пространстве H полная

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{<\overline{\{x_k\}}>}_{\text{замкнутое подпространство}} \qquad =H$$

Предположим противоречие $\exists y\in H,\ y\not\in<\overline{\{x_k\}}>$

$\exists$ ортогональная проекция y на $<\overline{\{x_k\}}>$

$$(y-z)\perp<\overline{\{x_k\}}>$$

$$y-z\perp x_k\forall k \text{ противоречие}$$

$$y=z\Rightarrow y\in<\overline{\{x_k\}}>$$

- Для конечного промежутка: полиномы плотны в $L_2^h(a,b)$, значит, конечными линейными комбинациями мономов можно сколько угодно близко по норме $L_2^h(a,b)$

приблизиться к произвольной функции $f \in L_2^h(a,b)$, поэтому мономы образуют полную систему в $L_2^h(a,b)$.

- Мы будем использовать некоторые бесконечные (a,b) и весовые функции $h(x)$, для этих частных случаев полнота мономов тоже доказана.

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта переводит полную систему в полную, поэтому система многочленов $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$, полна в $L_2^h(a,b)$, т.е. является гильбертовым базисом в $L_2^h(a,b)$. Можно ввести коэффициенты Фурье относительно этого базиса и разлагать функции в ряды по ортогональным многочленам.

- Ортогональные многочлены многочлены определяются весом $h(x)$ и промежутком (a,b) однозначно (при сделанных предположениях)

- Если $P(x)$ - произвольный многочлен степени n, то его можно представить как $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k q_k$

- Если $P_m(x)$ - произвольный многочлен степени m, и $n > m$, то $q_n \perp P_m$

$$\int_a^b P_m(x) q_n(x) h(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{m} c_k q_k(x) \right) q_n(x) h(x) dx = 0$$

- Если вес $h : (-a,a) \to \mathbb{R}$ - четная функция, то $q_n(x) = (-1)^n q_n(x)$

Сделаем замену: $x \to -x$ в $\displaystyle\int_{-a}^{a} q_m(x) q_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$

$$\int_{-a}^{a} q_m(-x) q_n(-x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

$$\int_{-a}^{a} \tilde{q}_m(x) \tilde{q}_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

, где $\tilde{q}_n = (-1)^n q_n(-x), \ \tilde{q}_m = (-1)^m q_m(-x)$. Тогда по первому свойству $q_n = \tilde{q}_n = (-1)^n q_n(-x)$