

Коэффициенты Фурье: x_1, \dots, x_n , $\lambda_k = (x, x_k)$

Неравенство Бесселя: $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$

1. Пополнение ортонормированной системы

Определение 1. Ортонормированную систему x_1, \dots, x_n называют замкнутой, если для $\forall x \in H$:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2, \text{ где } \lambda_k = (x, x_k) - \text{коэффициенты Фурье}$$

Уравнение замкнутости:

$$y \in H, \mu_k = (y, x_k) - \text{коэффициенты Фурье } y$$

$$(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k} - \text{равенство Парсеваля}$$

Определение 2. Ортонормированная система x_1, \dots, x_n называется полной, если ее нельзя пополнить, то есть если ее ортогональное дополнение состоит только из $\vec{0}$. Другими словами, если $\exists x \forall k : (x, x_k) = 0 \Rightarrow x = 0 \dots$

Определение 3. Ортонормированная система x_1, \dots, x_n называется базисом Гильбертова (или Гильбертовым базисом), если $\forall x \in H$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \text{ где } \lambda_k - \text{коэффициенты Фурье}$$

разложение в векторный ряд Фурье

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^N \lambda_k x_k \right\| = 0$$

Теорема 1. Во всяком ненулевом Гильбертовом сепарабельном пространстве \exists Гильбертов базис, состоящий из конечного или счетного числа векторов.

Доказательство.

x_1, \dots, x_k - счетное плотное подмножество (в силу сепарабельности)

$x_1, \dots, x_k \xrightarrow[\text{комбинации}]{\text{вычеркнули линейные}} y_1, \dots, y_k$ - счетное число линейно независимых векторов

$y_1, \dots, y_k \xrightarrow[\text{Грамму-Шмидта}]{\text{ортонормализуем по}} z_1, \dots, z_k$ - счетное число ортонормированных векторов

$$x \in H, \{x_{n_k}\} \rightarrow x \quad \forall \varepsilon > 0 \exists M \exists n_k \geq N : \|x - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

$$x_{n_k} - \text{выражается через } \{z_k\}, \quad x_{n_k} = \sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p$$

Спроектируем на x конечно мерное подпространство $\langle z_1, \dots, z_{n_k} \rangle$

Проекция: $s = \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j$, где s — проекция на $\langle z_1, \dots, z_{n_k} \rangle$, $\lambda_j = (x, z_j)$

$$\|x - s\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in \langle z_1, \dots, z_{n_k} \rangle$$

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j \right\| \leq \left\| x - \underbrace{\sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p}_{x_{n_k}} \right\| < \varepsilon$$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j z_j, \quad \lambda_j = (x, z_j) - \text{коэффициенты Фурье}$$

#

Теорема 2. Если $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — ортогональная система в сепарабельном Гильбертовом пространстве, тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\{x_k\}$ — Гильбертов базис;
- 2) $\{x_k\}$ — замкнутая система;
- 3) $\{x_k\}$ — полная система.

Доказательство.

1) \Rightarrow 2) :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = (x, x_k), \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \\ \|x\|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \lambda_k \left(x_k, \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \right) = \\ &= \lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M \lambda_k \overline{\lambda_m} \underbrace{(x_m, x_k)}_{=(x_k, x_m) = \delta_{km}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \end{aligned}$$

#

2) \Rightarrow 3):

$$\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

От противного: Пусть $y \neq 0$, $y \in H$ - пополнение $\{x_k\}$: $\mu_k = (y, x_k) = 0$

$$|y|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 = 0 \Rightarrow y = 0 - \text{противоречие}$$

#

3) \Rightarrow 1):

Пусть $x \in H$:

$$S_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n, \quad \lambda_n = (x, x_n)$$

Фундаментальность:

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^M \lambda_n x_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^M |\lambda_n|^2$$

Неравенство Бесселя: $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \|x\|^2$

$$\forall \varepsilon \exists N_0 \forall N, M \geq N, \quad \sum_{n=N+1}^M |\lambda_n|^2 < \varepsilon$$

Значит S_N - фундаментальная последовательность в Гильбертовом полном пространстве \Rightarrow сходится.

Обозначим предел S_N через z .

Лектор: "хорошая буква зет, давайте обозначим"

$$(x - z, x_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(x - \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n, x_k \right) = \lambda_k - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \lambda_n (x_n, x_k) = \lambda_k - \lambda_k = 0$$

$$x - z \perp x_k, \quad \forall k$$

\Rightarrow в силу единственности системы $\{x_k\}$:

$$x - z = 0, \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \Rightarrow \{x_k\} - \text{Гильбертов базис}$$

#

Теорема 3 (Рисса-Фишера). H - сепарабельное Гильбертово пространство ортонормированной системы $\{x_k\}$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - числа, такие что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ - сходится. Тогда $\exists! x \in H$ такое, что $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.

$$S_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n$$

$$\|S_N - S_M\|^2 = \underbrace{\sum_{p=N+1}^M |\lambda_p|^2}_{\text{сходится} \Rightarrow S_N - \text{фундаментальный}} < \varepsilon$$

Доказательство.

z - предел S_N :

$$(z, x_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_N, x_k) = \lambda_k - \text{коэффициенты Фурье для } z$$

$$\|z\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, z \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \underbrace{(x_k, z)}_{=\overline{\lambda_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

Единственность: Пусть $\exists x \in H, x \neq z$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|x - z\|^2 = \underbrace{\|x\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2} - \text{Re}(x, z) + \underbrace{\|z\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2} - \text{смотреть ранее}$$

$$(x, z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k, z \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\overline{z, x_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|x - z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 0 \Rightarrow x = z$$

#

2. Изоморфизм

Определение 4. Пусть H_1, H_2 - Гильбертовы пространства. H_1 - изоморфно H_2 , если $\exists A : H_1 \rightarrow H_2$ и $\exists B : H_2 \rightarrow H_1$, которые: линейные, сохраняют скалярное произведение и взаимнообратны.

$$\forall x, y \in H_1 \quad \forall \alpha, \beta - \text{числа}$$

$$\forall u, v \in H_2$$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad (A(x), A(y))_{H_2} = (x, y)_{H_2}$$

$$B(\alpha u + \beta v) = \alpha B(u) + \beta B(v) \quad (A(u), A(v))_{H_2} = (x, y)_{H_2}$$

$$K.O \begin{cases} B(A(x)) = x \\ A(B(u)) = u \end{cases}$$