

Доказательство.

1) Дано: $\forall \lambda_j(A) \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$. Пусть $C = E$, $E = E^* > 0$. Тогда по Теореме 3 $\exists! H = H^* > 0$ - решение матричного уравнения $HA + A^*H = -E$.

Рассмотрим функцию $V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y})$. Покажем, что $V(\vec{y})$ - функция Ляпунова:

1. $V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y}) \in C^1(\|\vec{y}\| < r)$, где r - любое;
2. $V(\vec{0}) = (H\vec{0}, \vec{0}) = 0$, $V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y}) > 0$ при $\vec{y} \neq \vec{0}$, так как $H = H^* > 0$
3. $(\nabla V \vec{y}, \vec{f}(\vec{y})) < 0$ - ?

Пусть $\vec{y}(t)$ - решение $\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) = A\vec{y} + \vec{g}(\vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \neq \vec{0} \end{cases}$

, где $\vec{g}(\vec{y}) = o(\|\vec{y}\|)$

$$\frac{d}{dt} V(\vec{y}(t)) = \frac{d}{dt} V(y_1(t), \dots, y_n(t)) = \frac{\partial V}{\partial y_1}(\vec{y}(t)) \underbrace{\frac{dy_1(t)}{dt}}_{f_1(\vec{y}(t))} + \dots + \frac{\partial V}{\partial y_n}(\vec{y}(t)) \underbrace{\frac{dy_n(t)}{dt}}_{f_n(\vec{y}(t))} = (\nabla V(\vec{y}(t)), \vec{f}(\vec{y}(t)))$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\vec{y}(t)) &= \frac{d}{dt} (H\vec{y}(t), \vec{y}(t)) = \left(H \underbrace{\frac{d}{dt} \vec{y}(t)}_{\vec{f}(\vec{y}(t))}, \vec{y}(t) \right) + \left(H\vec{y}(t), \underbrace{\frac{d}{dt} \vec{y}(t)}_{\vec{f}(\vec{y}(t))} \right) = \\ &= \left(H(A\vec{y}(t) + \vec{g}(\vec{y}(t))), \vec{y}(t) \right) + \left(H\vec{y}(t), A\vec{y}(t) + \vec{g}(\vec{y}(t)) \right) = \\ &= (HA\vec{y}(t), \vec{y}(t)) + (H\vec{g}(\vec{y}(t)), \vec{y}(t)) + (H\vec{y}(t), A\vec{y}(t)) + (H\vec{y}(t), \vec{g}(\vec{y}(t))) = \\ &= \underbrace{((HA + A^*H) \vec{y}(t), \vec{y}(t))}_{= -E} + \underbrace{(H\vec{g}(\vec{y}(t)), \vec{y}(t))}_{\leq \|H\vec{g}(\vec{y}(t))\| \|\vec{y}(t)\|} + \underbrace{(H\vec{y}(t), \vec{g}(\vec{y}(t)))}_{\leq \|H\vec{y}(t)\| \|\vec{g}(\vec{y}(t))\|} \boxed{\leq} \end{aligned}$$

(*)

, где $(*) = -(\vec{y}(t), \vec{y}(t)) = -y_1^2(t) - \dots - y_n^2(t) = -\|\vec{y}(t)\|_2^2$. Тогда по неравенству Коши-Буняковского:

$$\boxed{\leq} - \|\vec{y}\|_2^2 + 2 \|H\|_2 \|\vec{g}(\vec{y}(t))\|_2 \|\vec{y}(t)\|_2 = -\|\vec{y}(t)\|_2^2 \left(1 - 2 \|H\|_2 \frac{\|\vec{g}(\vec{y}(t))\|_2}{\|\vec{y}(t)\|_2} \right)$$

, если $\vec{y}(t) \neq 0$

Если $\vec{y}_0 \neq \vec{0}$, то $\vec{y}(t) \neq 0 \forall t \in (\alpha, \omega)$.

От противного: Если $\exists t_1 : \vec{y}(t_1) = \vec{0}$, то рассмотрим задачу Коши: $\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \\ \vec{y}(t_1) = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow$

$\exists!$ решение $\vec{y}(t) = 0$

Противоречие с тем, что $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \neq 0$

Пусть $t = t_0 : \frac{d}{dt} V(\vec{y}(t))|_{t=t_0} = \nabla V(\vec{y}_0), \vec{f}(\vec{y}_0) \leq -\|y_0\|_2^2 \left(1 - 2 \|H\|_2 \frac{\|\vec{g}(\vec{y}_0)\|_2}{\|\vec{y}_0\|_2} \right)$

Из условия (2) $\Rightarrow \lim_{\|\vec{y}_0\| \rightarrow 0} \frac{\|\vec{g}(\vec{y}_0)\|}{\|\vec{y}_0\|} = 0$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \|\vec{y}_0\| : \|\vec{y}_0\| < \delta \Rightarrow \frac{\|\vec{g}(\vec{y}_0)\|}{\|\vec{y}_0\|} < \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2\|H\|_2} \Rightarrow \exists \delta : \|\vec{y}_0\| < \delta \Rightarrow \frac{\|\vec{g}(\vec{y}_0)\|}{\|\vec{y}_0\|} < \varepsilon = \frac{1}{2\|H\|_2} \Rightarrow$

$(\nabla V(\vec{y}_0), \vec{f}(\vec{y}_0)) < 0, 0 \leq \|\vec{y}_0\| < r = \delta$

По Теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости $\exists V(\vec{y}) \Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0$ - асимптотически устойчиво.

2) Без доказательства.

#

1. Устойчивость положений равновесия

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \quad (1)$$

, где $f_j \in C^1(\mathbb{D})$

Определение 1. *Положение равновесия - это решение $\vec{y}^* = \vec{c}$, \vec{c} - постоянный вектор $\Rightarrow \vec{f}(\vec{c}) = \vec{0}$*

Замена $\vec{z}(t) = \vec{y}(t) - \vec{c}$:

$$(1) \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{z}(t) = \frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \vec{f}(\vec{y}(t)) = \vec{f}(\vec{z}(t) + \vec{c})$$

$$\frac{d}{dt}\vec{z}(t) = \vec{f}(\vec{z} + \vec{c})$$

, где $\vec{z}^*(t) = 0$ - решение.

$$\frac{d}{dt}\vec{z}(t) = \vec{f}(\vec{z} + \vec{c}) = \vec{f}(\vec{c}) + \underbrace{\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{z}}(\vec{c})\vec{z}}_A + o(\|\vec{z}\|)$$

$$A = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{z}}(\vec{c}) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(\vec{c})$$

Теорема 1 (Теорема об устойчивости положений равновесия). Пусть $A = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(\vec{c})$.

Тогда:

- 1) $\forall \lambda_j \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0 \Rightarrow \vec{y}^*(t) = \vec{c}$ - асимптотически устойчиво;
- 2) $\exists \lambda_k(A) \operatorname{Re} \lambda_k(A) > 0 \Rightarrow \vec{y}^*(t) = \vec{c}$ - неустойчиво.

Глава 1: Фазовые портреты автономных систем

1. Свойства фазовых траекторий

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \quad (1)$$

, где $f_j \in C^1(\mathbb{D})$

Лемма 1. Пусть $\vec{y}(t)$, $t \in (\alpha, \omega)$ - непродолжаемое решение системы (1). Тогда $\forall c \in \mathbb{R}$ $\vec{y}(t+c)$, $t \in (\alpha-c, \omega-c)$ - тоже непродолжаемое решение системы (1).

Доказательство. Очевидно, что очевидно. #

Теорема 1. Пусть $\vec{y}_1(t)$, $t \in (\alpha_1, \omega_1)$
 $\vec{y}_2(t)$, $t \in (\alpha_2, \omega_2)$ - два непродолжаемых решения системы (1).

Пусть $\exists t_1 \in (\alpha_1, \omega_1)$ $\exists t_2 \in (\alpha_2, \omega_2) : \vec{y}_1(t_1) = \vec{y}_2(t_2)$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : \vec{y}_2 = \vec{y}_1(t+c)$, при этом $(\alpha_2, \omega_2) = (\alpha_1 - c, \omega_1 - c)$

Доказательство.

Обозначим $\vec{y}_0 = \vec{y}_1(t_1) = \vec{y}_2(t_2)$

Рассмотрим задачу Коши: $\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \\ \vec{y}(t_2) = \vec{y}_0 \end{cases} \Rightarrow \vec{y}_2(t) - \text{решение, } t \in (\alpha_2, \omega_2)$

Рассмотрим функцию $\vec{y}_1(t + \underbrace{t_1 - t_2}_c)$, $t \in (\alpha_1 - c, \omega_1 - c)$

$$\vec{y}_1(t + t_1 - t_2)|_{t=t_2} = \vec{y}_1(t_1) = \vec{y}_0$$

По Теореме Пикара: $\vec{y}_2(t) = \vec{y}_1(t + t_1 - t_2)$

#