1. Материальные уравнения в Фурье-представлении

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -k\vec{r}_e(t) + e\vec{r}_e(t)$$

$\frac{d\vec{r}_e}{dt} = \frac{\vec{p}}{\gamma m} \Rightarrow$ в $\vec{r}_e(t)$ в следствие инерции электрона аккумулируется история (память) о воздействии.

Электрическим полем в предыдущие моменты времени t' , а $\vec{r}_e$ дает вклад в $\vec{P}(r,t)$. В общем случае линейная связь $\vec{D}$ и $\vec{E}$ полей имеет вид:

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) + 4\pi\vec{P}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiiint \varepsilon(\vec{r},\vec{r'},t,t')\vec{E}(\vec{r'},t')d^3r'dt' \quad (t' < t)$$

Зависимость ε от $\vec{r'}$ возникает в случае переноса в веществе заряженных частиц (или обладающих дипольным моментом) из других точек среды.

Упрощения:

1) Если среда стационарная и ее свойства зависят только от $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и ни от ничего другого, то $\varepsilon(\vec{r},\vec{r'},t,t') = \varepsilon(\vec{r},\vec{r'},t-t')$

2) Если среда однородная $\varepsilon(\vec{r},\vec{r'},t,t') = \varepsilon(\vec{r}-\vec{r'},t,t')$

Если среда однородная и стационарная, то

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiiint \varepsilon(\vec{r}-\vec{r'},t-t')\vec{E}(\vec{r'},t')d^3r'dt' \text{ (свертка)}$$

Используем преобразование Фурье на $\vec{D}$:

$$\hat{\vec{D}}(\vec{k},\omega) = \hat{\varepsilon}(\vec{k},\omega)\hat{\vec{E}}(\vec{k},\omega); \quad \hat{\vec{B}}(\vec{k},\omega) = \hat{\mu}(\vec{k},\omega)\hat{\vec{H}}(\vec{k},\omega)$$

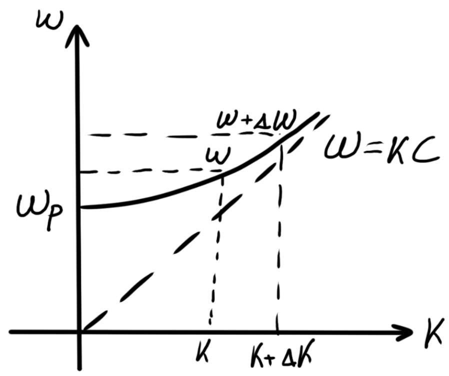
$\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\varepsilon}(\vec{k},\omega)\hat{\mu}(\vec{k},\omega) = k^2$ - дисперсионное уравнение $\to$ связь ω и $\vec{k}$ в среде.

Далее рассматриваем только твердое тело $\Rightarrow$ ε и μ зависят только от ω

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = k^2$$

$\underset{\text{без док-ва}}{\text{Для плазмы}}$ $\varepsilon(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},\ \omega_p^2 = \frac{4\pi n_p e^2}{m},\ \mu(\varepsilon) = 1$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = k^2 \Rightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2$$



2. Частотная дисперсия показателя преломления сред. Фазовая групповая скорость

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{ikz - i\omega t},\ \text{где}\ \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = k^2$$

$e^{ikz-i\omega t} = e^{ik(z-\frac{\omega}{k}t)}$; фаза волны $kz - \omega t = \varphi(z,t)$

$$\varphi(\vec{r},t) = (\vec{k},\vec{r}) - \omega t$$

Если фаза $\varphi(z,t)-$ const, то $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\omega}{k} = v_{\text{волны}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}} = \dfrac{c}{n(\omega)}$

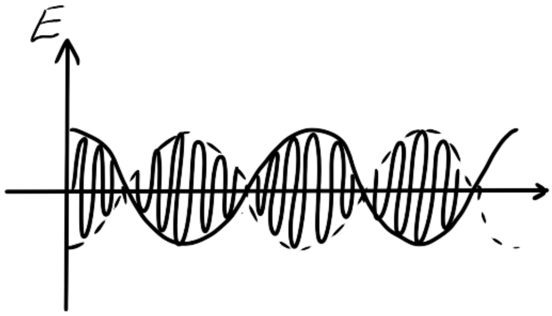
$n(\omega)$ - показатель преломления среды.

Ни энергия, ни информация не передается с v_Φ ($v_\Phi = v_{\text{волны}}$), которая может быть больше c

Рассмотрим монохроматическую волну, состоящую из двух монохроматических плоских волн, с близкой частотой:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0(\cos(kz - \omega t) + \cos((k+\Delta k)z - (\omega + \Delta\omega)t)) =$$

$$= \vec{E}_0 2\cos\left(\left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)z - \left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t\right), \quad t = \text{const}$$



Скорость движения огибающей:

$$\frac{\Delta kz}{2} - \frac{\Delta\omega t}{2} = \text{const} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \boxed{\frac{d\omega}{dk} = v_g} -\ \text{групповая скорость}$$

Соотношения Рэлея $\dfrac{\omega n(\omega)}{c} = k$ (дисперсионное уравнение) $\Rightarrow$

$$\frac{d}{d\omega}(\omega n(\omega)) = \frac{dkc}{d\omega}$$

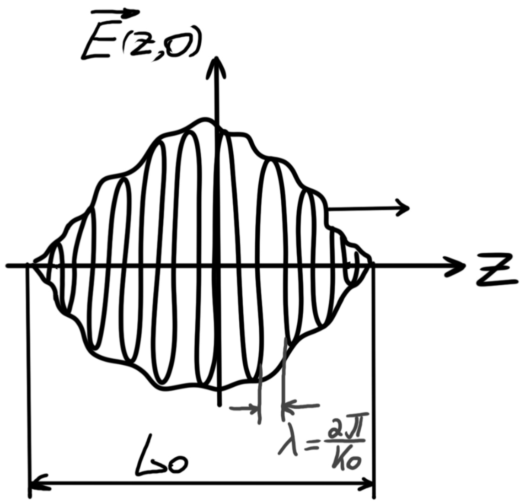
$$n(\omega) + \omega\frac{dn(\omega)}{d\omega} = \frac{dk}{d\omega}c \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n(\omega) + \omega\frac{dn(\omega)}{d\omega}} =$$

$$= \underbrace{\frac{c}{n(\omega)}}_{v_\Phi}\frac{1}{1 + \frac{\omega}{n(\omega)}\frac{dn}{d\omega}} \Rightarrow v_g = \frac{v_\Phi}{1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}}$$

Если $\dfrac{dn}{d\omega} > 0$, то $v_g < v_\Phi$ - нормальная дисперсия
Если $\dfrac{dn}{d\omega} < 0$, то $v_g > v_\Phi$ - аномальная дисперсия

3. Движение одномерного волнового пакета в среде с дисперсией $\omega = \omega(k)$

Известно, что он движется по z



$$\vec{E}(z,0) = \vec{E}_0(z)e^{ik_0 z}$$

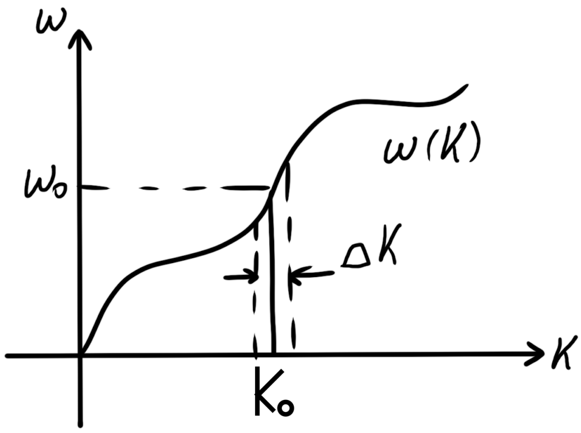
Используем преобразование Фурье на $\vec{E}$:

$$\hat{\vec{E}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\vec{E}_0(z)e^{ik_0 z}}_{=\vec{E}(z,0)} e^{-ikz} dz = \hat{\vec{E}}_0(k - k_0)$$

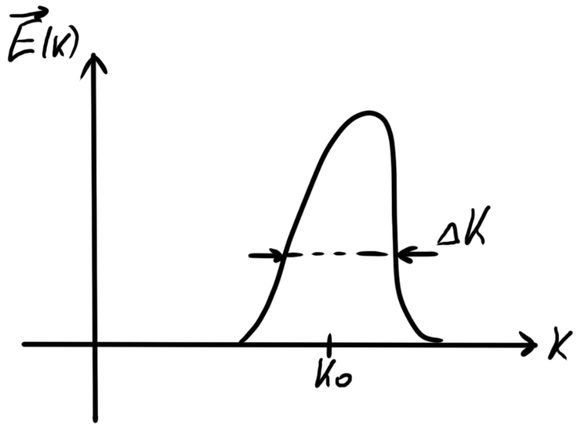
Для электрического поля волны с k эволюция во времени описывается:

$$\vec{E}(k)e^{ikz - i\omega(k)t}$$

$$\vec{E}(z,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(k)e^{ikz - i\omega(k)t} dk$$



Если $\lambda = \dfrac{2\pi}{k_0} \ll$ масштаб изменения $E_0(z)$ или длины пакета L_0



$$\Delta k L_0 \sim \pi \Rightarrow \Delta k \sim \frac{\pi}{L_0}$$

$$k \sim k_0 \sim \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{\Delta k}{k_0} \ll 1$$

$$\omega(k) \simeq \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} + \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0}(k-k_0) + \cancelto{0_{\text{т.к мал}}}{\frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}\Big|_{k_0}(k-k_0)^2}$$

1) Пусть $\omega(k) = \omega_0 + v_g(k-k_0); \vec{E}(z,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(k)e^{ikz-\omega_0 t - iv_g t(k-k_0)}dk =$

$$\frac{e^{ik_0 v_g t - i\omega t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}E(k)e^{ik(z-v_g t)}dk = e^{ik_0 v_g t - i\omega_0 t}\vec{E}_0(z-v_g t)e^{ik_0(z-v_g t)} = \vec{E}_0(z-v_g t)e^{ik_0 z - i\omega_0 t}$$

- пакет без изменения формы движется по z

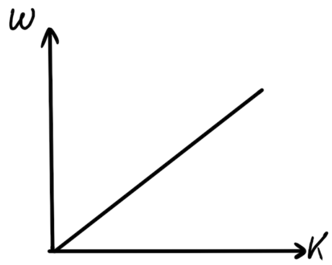
2) Учтем $i\dfrac{d^2\omega}{dk^2}\Big|_{k=k_0}\dfrac{(k-k_0)^2}{2}\Delta t \ll i\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\pi}{\Delta k^2\omega''} \sim \dfrac{L_0^2}{\pi\omega''}$

Если $t \gg \Delta t \quad \dfrac{\Delta v_g}{\Delta k} \sim \dfrac{dv_g}{dk} = \dfrac{d\left(\frac{d\omega}{dk}\right)}{dk} = \omega''(k_0) \Rightarrow \Delta v_g \simeq \omega''(k_0)\Delta k$

Расплывания пакета: $\Delta L = \Delta v_g t \simeq \omega''(k_0)\Delta k t$

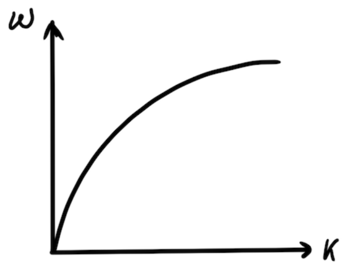
$$L(t) \simeq \sqrt{L_0^2 + \Delta L^2} = \sqrt{L_0^2 + (\omega''(k_0)\Delta k t)^2}$$

Примеры дисперсионных соотношений:
1) Электромагнитна волна, в вакууме, звук в среде $\omega = ka,\ a = \text{const}$



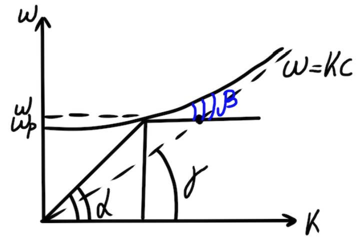
$$v_\Phi = \frac{\omega}{k} = a,\ v_g = \frac{d\omega}{dk} = a$$

2) $\omega = \sqrt{gk}$ - волны на поверхности жидкости:



$$v_\Phi = \sqrt{\frac{g}{k}},\ v_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} \Rightarrow v_g < v_\Phi$$

3) Электромагнитная волна в плазме: $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2$



$$v_\Phi = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + k^2c^2}}{k},\ v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\frac{2kc^2}{\sqrt{\omega_p + k^2c^2}} = \frac{c^2}{v_\Phi}, v_g v_\Phi = c^2$$

$$v_\Phi = tg\alpha,\ v_g = \frac{d\omega}{dk} = tg\beta,\ tg\gamma = \frac{\omega}{k} = c$$

$$\alpha > \gamma,\ \beta < \gamma \Rightarrow \alpha > \beta - \text{ нормальная дисперсия :}$$

$$tg\alpha > tg\beta, \quad v_\Phi > v_g$$