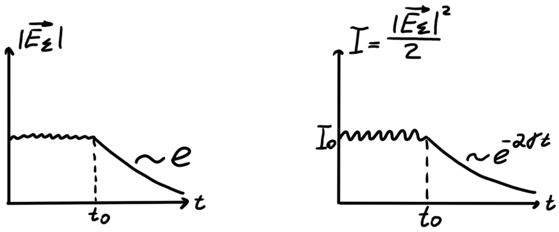
$$\vec{E}_\Sigma = \sum_{m=1}^{M_0} e^{i\omega_0(t-t_m)-\gamma(t-t_m)}\underbrace{\vec{E}\left(\frac{L}{\gamma_m}\right)}_{\approx 1} = e^{i\omega_0 t-\gamma t}\underbrace{\sum \vec{E}_0 e^{i\omega t_m+\gamma t_m}}_{=\vec{E}_{oo}\text{ постоян. вектор}}$$

Рассмотрим эволюцию поля E_Σ после выключения источника появления новы излучающих атомов.



При $t > t_0 \quad I(t) = I_0 e^{-2\gamma t} \Rightarrow \dfrac{dI}{dt} = -2\gamma I(t)$

Так как число членов ряда в сумме $\sum\limits_{m=1}^{M_0}$ с ростом времени растет, а вклад атомов начавших излучать с самых ранних времен, экспоненциально мал, то введем $N_{\text{эф}}$ - число эффективно излучающих атомов:

$$I(t) = N_{\text{эф}}\frac{|\vec{E}_0|^2}{2} \Rightarrow \frac{dN_{\text{эф}}}{dt}\cdot\frac{|\vec{E}_0|^2}{2} = -2\gamma N_{\text{эф}}\frac{|\vec{E}_0|^2}{2}$$

$$\frac{dN_{\text{эф}}}{dt} = -2\gamma N_{\text{эф}} + p$$

, где p - скорость появления новых излучающих атомов $\Rightarrow$ в стационарном процессе : $\dfrac{dN_{\text{эф}}}{dt} = 0 \Rightarrow p = 2\gamma\overline{N}_{\text{эф}}$

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y, \quad E_{0x} \text{ и } E_{0y} \in \mathbb{C}$$

Так как $I_{12} = \mathrm{Re}(\vec{E}_1(\vec{r}), \vec{E}_2^*(\vec{r})) = 0,$ при $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$, то I_x и I_y не интерферируют и могут быть вычислены отдельно:

$$I = I_x + I_y =<(\mathrm{Re}\vec{E}_{\Sigma x}(t))^2> + <(\mathrm{Re}\vec{E}_{\Sigma y}(t))^2>=$$

$$= \left\langle \left(\sum_{m=1} |E_{0x}|\cos[\omega_0(t-t_m)-\varphi_x]e^{-\gamma(t-t_n)}, \sum_{n=1} |E_{0x}|\cos[\omega_0(t-t_n)-\varphi_x]e^{-\gamma(t-t_n)} \right) \right\rangle + <\mathrm{Re}\vec{E}_{\Sigma y}>=$$

$$I_x = \sum_{n=m} |E_{0x}|^2 <\cos^2(\omega_0(t-t_m)-\varphi_x)> e^{-2\gamma(t-t_m)} +$$

$$+\left\langle \sum_n \sum_m \frac{|E_{0x}|^2}{2}\left\{\cos(\omega_0(2t-t_m-t_n)-2\varphi_x) + \cos\omega_0(t_m-t_n)\right\} e^{-\gamma(2t-t_m-t_n)} \right\rangle$$

, где во втором членом $\cos\omega_0(t_m-t_n)$ с ростом числа атомов растет $\sim \sqrt{N_{\text{эф}}}$.

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\gamma(t-t_m)} \to \int_{-\infty}^{t} e^{-2\gamma(t-t')} \underbrace{pdt'}_{dm} = p(-1)\int_{\infty}^{0} e^{-2\gamma t''}dt'' = \frac{p}{2\gamma} = \overline{N}_{\text{эф}}$$

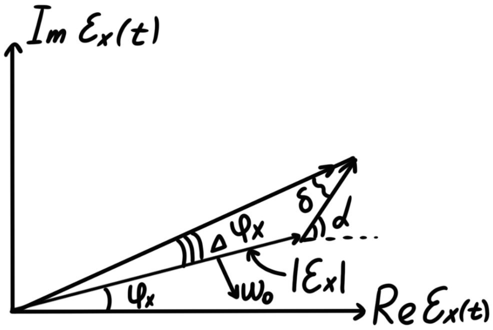
$$I = I_x + I_y = \frac{|E_{ox}|^2}{2}\overline{N}_{\text{эф}} + \frac{|E_{oy}|^2}{2}\overline{N}_{\text{эф}} = \frac{|E_o|^2}{2}\overline{N}_{\text{эф}}$$

$$E_{\Sigma x}(t) = \varepsilon_x(t)e^{-i\omega_0 t}$$

, где $\varepsilon(t)$ - амплитуда $\in \mathbb{C}$.

$$<(\mathrm{Re}E_{\Sigma x})^2>=|\varepsilon_x(t)|<\cos^2(\omega_0 t - \arg\varepsilon_x(t))>=\frac{<|\varepsilon_x(t)|>}{2} = \frac{|E_{0x}|^2}{2}\overline{N}_{\text{эф}}$$

$$<|\varepsilon_x|>=\sqrt{N_{\text{эф}}}|E_{0x}|, \quad \frac{\Delta|\varepsilon_x|}{|\varepsilon_x|} \approx \frac{|E_{0x}|}{\sqrt{N_{\text{эф}}}|E_{0x}|} \sim \frac{1}{\sqrt{N_{\text{эф}}}}$$



$$E_{0x}, \ \varepsilon_x(t) \in \mathbb{C}, \ \alpha = \arg E_{0x}$$

В момент времени $t_m = t_{m_0} + \frac{r_m}{c}$ начал излучать m-ый атом.

$$\frac{\sin(\delta\varphi_x)}{|E_{0x}|} = \frac{\sin\delta}{|\varepsilon_x(t)|}, \text{ т.к } \delta\varphi_x \le 1 \Rightarrow \delta + \pi - (\alpha - \varphi_x) \approx \pi$$

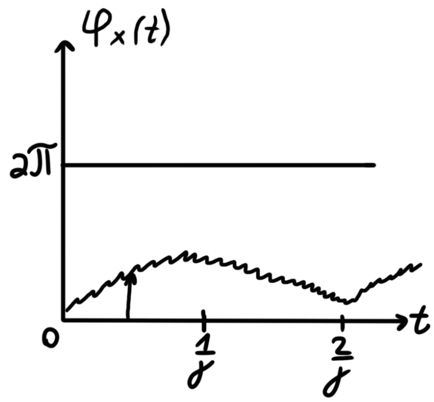
$$\delta\varphi_x = \frac{|E_{0x}|}{|\varepsilon_x(t)|}\sin(\alpha - \varphi_x) = \frac{|E_{ox}|}{|\varepsilon_x(t)|}\sin(\alpha - \omega_0 t_m - \underbrace{\arg\varepsilon_x(t)}_{\approx\text{const}})$$

$$<\delta\varphi_x>=0, \quad <\delta\varphi_x^2>=\frac{|E_{0x}|^2}{|\varepsilon_x(t)|^2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2N_{\text{эф}}}$$

Коэффициент диффузии по φ_x (аналогично броуновскому движению) вычисляется так:

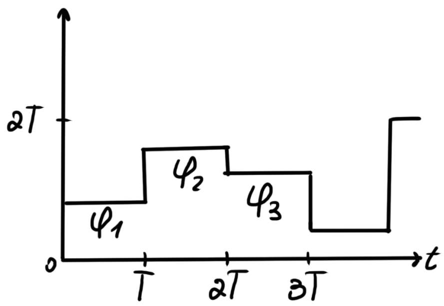
$$\frac{<\delta\varphi_x^2>}{\Delta t} = \frac{<\delta\varphi_x^2>}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{2N_{\text{эф}}} = \gamma$$

, где Δt - характерный промежуток времени между появлением новых атомов. Пусть $<\delta\varphi^2>=1 \Rightarrow \Delta t_0 = \dfrac{1}{\gamma}$



Изменение $\delta\varphi_x$ на $\Delta t < \Delta t_0 = \frac{1}{\gamma}$ мало (фаза почти постоянная), а на $\Delta t > \Delta t_0$ фаза $\varphi_x(t)$ - случайная величина $[0, 2\pi]$

Вывод: в стационарном случайном процессе излучения скопления атомов амплитуда суммарной волны почти постоянная $\left(\text{флуктуации } \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \sim \frac{1}{\sqrt{N_{\text{эф}}}}\right)$, а фаза этой волн почти постоянна на промежутках $\Delta t < \dfrac{1}{\gamma}$ и случайно меняющаяся величина на $\Delta t > \dfrac{1}{\gamma}$.



Приближенная модель такого поля $\varepsilon_x = \text{const}$, а $\varphi_x(t)$ случайная величина в $[0, 2\pi]$.

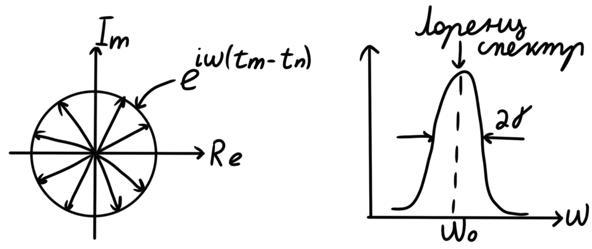
Вычислим спектр суммарного поля:

$$\vec{E}_\Sigma(t) = \sum \vec{E}_0 e^{-i\omega_0(t-t_m)-\gamma(t-t_m)}$$

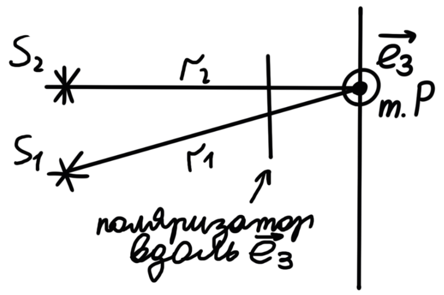
$$\hat{\vec{E}}_\Sigma(t) = \sum_m \hat{\vec{E}}_a(\omega) e^{i\omega t_m}$$

Спектральная плотность энергии: $|\vec{E}_\Sigma(\omega)|^2 = \left(\sum_m \hat{\vec{E}}_a(\omega) e^{i\omega t_m}, \sum_n \hat{\vec{E}}^*_a(\omega) e^{-i\omega t_n}\right) =$

$$|\vec{E}_a(\omega)|^2 \left\{ \sum_{n=m=1}^{N_{\text{эф}}} 1 \sum_n^{N_{\text{эф}}} \sum_m^{N_{\text{эф}}} e^{i\omega(t_m - t_n)} \right\} \Rightarrow |\vec{E}_\Sigma(\omega)|^2 = |\hat{\vec{E}}_a(\omega)|^2 N_{\text{эф}}$$



Опыт Юнга:



$$\vec{E}_{\Sigma 1} = \vec{E}_{01}\frac{L}{r_1}e^{ikr_1 - i\omega_0 t + i\varphi_1(t)}$$

$$\vec{E}_{\Sigma_2} = \vec{E}_{02}\frac{L}{r_2}e^{ikr_2 - i\omega_0 t + i\varphi_2(t)}$$

$$I_{12} =< \mathrm{Re}(E_{\Sigma_1}, E^*_{\Sigma_2}) >= |\vec{E}_{01}||\vec{E}_{02}|\frac{L^2}{r_1 r_2} < \cos(k(r_1 - r_2) + \varphi_1(t) - \varphi_2(t)) >$$

Если временное разрешение прибора τ_0 <время изменения фаз φ_1 и φ_2 $\left(\sim \frac{1}{\gamma}\right)$, то интерференционная картина видна и поля когерентные.

Если $\tau_0 > \frac{1}{\gamma}$, то $< \cos() >= 0 \Rightarrow$ поля некогерентные.