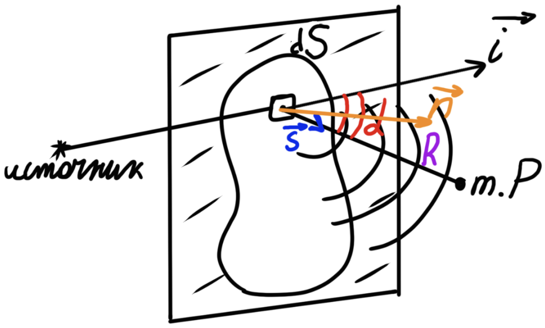
1. Продолжение теории Гюйгаса-Френеля



$\vec{i}, \vec{s}$ - единичные вектора, $\vec{n}$ - нормаль к поверхности, а $\alpha = \widehat{\vec{i}, \vec{s}}$

$$E_p = \int \mathbb{K}(\alpha) E(S) \frac{e^{ikR}}{R} dS_n$$

Основные допущения теоремы Гюйгаса-Френеля:

1) поле в отверстии экрана такое же как и в его отсутствии;

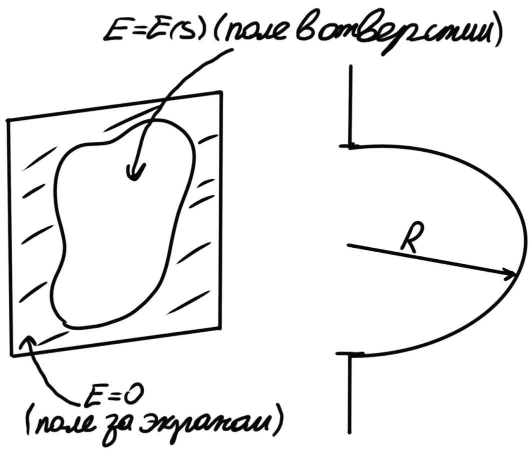
2) экран абсолютно поглощающий, поле непосредственно за экраном поле равно нулю;

3) существенна только форма отверстия, несущественна форма его края и материал.

Математическая постановка задачи и нахождение $\mathbb{K}(\alpha)$ - Кирхгоф.

$$\Delta E(\vec{r}) + k^2 E(\vec{r}) = 0 \text{ - скалярное волновое уравнение}$$

Граничные условия:



условие излучения (все волны покидают этот объем V)

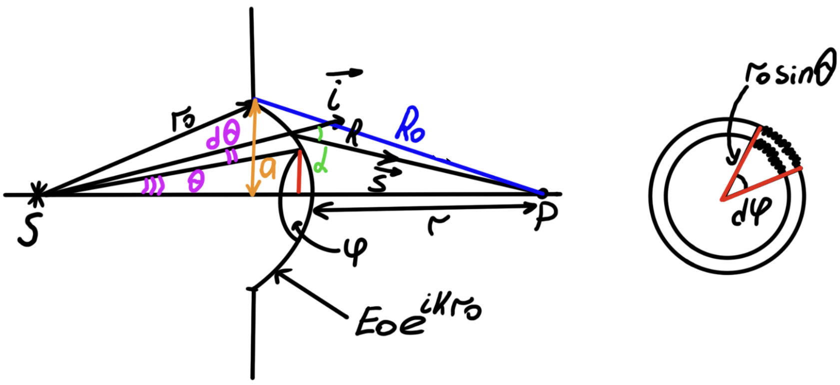
$$E_p = \frac{k}{4\pi i} \int dS_n (1 + \cos\alpha) \frac{e^{ikR}}{R} E(S)$$

$$\mathbb{K}(\alpha) = \frac{k}{4\pi i}(1+\cos\alpha)$$

, при $\alpha \ll 1$ (параксиальное приближение) $\mathbb{K}(\alpha) \approx \dfrac{k}{2\pi i}$

$$\mathbb{K} = \frac{k}{4\pi i}\left(\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{n}}\right) + \cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{s}}\right)\right)$$

Вычислим $\mathbb{K}(\alpha)$ в параксиальном приближении на примере круглого отверстия:



$$dS_n = dS = r_0\sin\theta d\varphi r_0 d\theta$$

$$E_p = \iint \mathbb{K}(0)E_0e^{ikr_0}\frac{e^{ikR}}{R}r_0^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

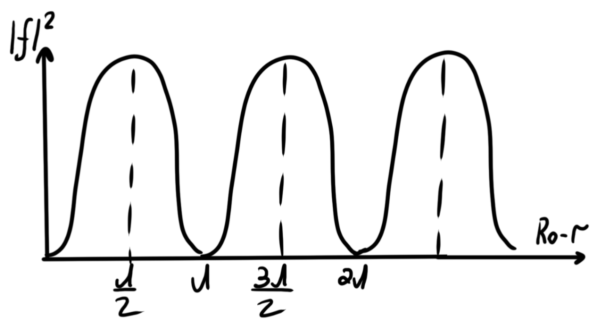
$$R^2 = (r_0+r)^2 + r_0^2 - 2r_0(r_0+r)\cos\theta$$

$$2RdR = 2r_0(r_0+r)\sin\theta d\theta$$

$$E_p = \mathbb{K}(0)E_0e^{ikr_0}2\pi\int\frac{e^{ikR}}{R}r_0^2\frac{RdR}{r_0(r_0+r)}$$

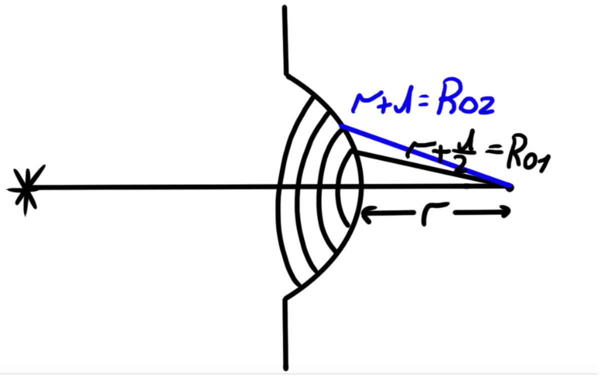
$$E_p = \mathbb{K}(0)\frac{E_0e^{ikr_0}}{\frac{r_0+r}{r_0}}2\pi\frac{e^{ikR_0}-e^{ikr}}{ik} = \frac{\mathbb{K}(0)2\pi}{k}\underbrace{\frac{E_0e^{ik(r_0+r)}}{\frac{r_0+r}{r_0}}}_{(*)}\underbrace{\left\{\frac{e^{ik(R_0-r)}-1}{i}\right\}}_{f(R_0-r)}$$

, где $(*)$ поле точечного источника в отсутствии экрана $= E_{P_0}$



,где $I = \dfrac{|E_p|^2}{2}$

$|f(R_0 - r)|^2 = (e^{ik(R_0-r)} - 1)(e^{-k(R_0-r)} - 1) = 2 - 2\cos(k(R_0 - r)) = 4\sin^2\left(\dfrac{k(R_0 - r)}{2}\right)$



$$\frac{k(R_{01} - r)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$R_{01} - r = \frac{\lambda}{2}$$

$$R_{0m} - r = m\frac{\lambda}{2}$$

Устремим радиус отверстия к ∞ и учтем спад $\mathbb{K}(\alpha)$ с ростом $\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{p_0} = \frac{\mathbb{K}(0)2\pi}{k} E_{p_0} i \Rightarrow \mathbb{K}(0) = \frac{k}{2\pi i} = \frac{1}{i\lambda}$$

$$R_{0m}^2 = \left(r + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 = (r + r_0)^2 + r_0^2 - 2(r_0 + r)r_0\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

С учетом, что $\theta \approx \sin\theta = \dfrac{a_m}{r_0}$:

$$r^2 + rm\lambda + \cancelto{0\text{(мало)}}{\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2} = 2r_0^2 + 2rr_0 + r^2 - 2r_0^2 - 2rr_0 + (r_0 + r)\frac{a_m^2}{r_0^2}$$

$$a_m^2 = \frac{r_0 r m\lambda}{r_0 + r} = \frac{m\lambda}{\dfrac{1}{r_0} + \dfrac{1}{r}}$$

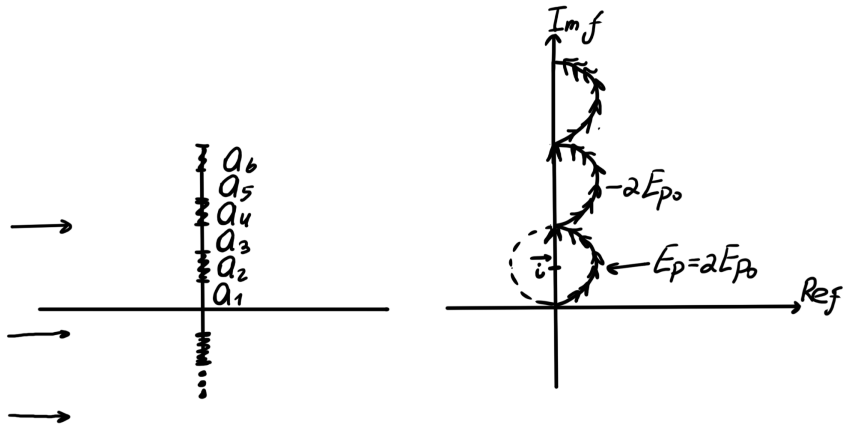
$$\pi a_{m+1}^2 - \pi a_m^2 = \frac{\pi\lambda}{\dfrac{1}{r_0} + \dfrac{1}{r}} = \text{const} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ площадь колец между зонами Френеля - есть постоянная величина.

Если $r_0 \to \infty$, то падает плоская волна $\Rightarrow a_m = \sqrt{rm\lambda}$

Зонные пластинки:

1) Нечетные зоны открыты, четные закрыты:



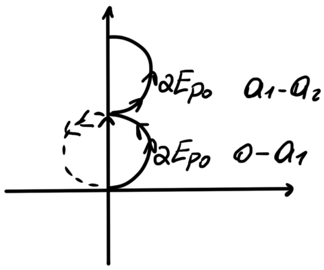
$$E_p = \frac{k}{2\pi i}\frac{2\pi}{k}E_{p_0}\frac{1}{i}(e^{ik(R_0-r)}-1) \Rightarrow E_p = E_{p_0}(1-e^{ik(R_0-r)})$$

E_p от всех нечетных зон $= E_{p_\Sigma} N \cdot E_{p_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_{p_\Sigma} = \frac{|E_{p_\Sigma}|^2}{2} = 4N^2\frac{|E_{p_0}|^2}{2} = 4N^2 I_0$$

, где N - число нечетных зон.

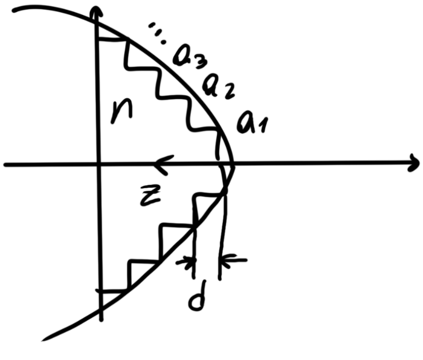
2) Нечетные открыты, в четных стоят пластинки, сдвигающие фазу на π:



$$E_{p_\Sigma} 2NE_p \Rightarrow I_{p_\Sigma} = 4N^2 I_0$$

, где N - число всех зон.

3) какой то прикол:

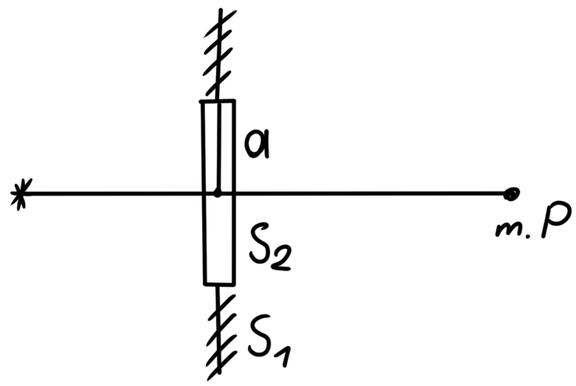


$$(n-1)d = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \text{сдвиг волн в соседних четных и нечетных зонах } = \pi$$

$$a_m = \sqrt{m\lambda r} \quad z_m = (m-1)d = (m-1)\frac{\lambda}{2(n-1)}$$

$$z_m = \frac{\lambda}{2(n-1)}\left(\frac{a_m^2}{\lambda r} - 1\right) \text{ - парабола.}$$

2. Пятно Пуассона и принцип Бабине



$$E_p = \frac{k}{2\pi i}\int_{S_1} E(S)\frac{e^{ikR}}{R}dS_n = \int_{(*)} - \int_{S_2}$$

, где $(*)$ в отсутствии отверстия. И $\displaystyle\int_{(*)} = E_{p_0}, \int_{S_2} = E_{p_0}(1 - e^{ik(R_0 - r)})$

$$\int_a^\infty = \int_0^\infty - \int_0^a = E_{p_0}e^{ik(R_0-r)} \Rightarrow I_p = \frac{|E_{p_0}|^2}{2} = I_{p_0}$$