

# Конспект лекций по дисциплине

## Электродинамика и оптика

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

Преподаватель: Сеницкий Станислав Леонидович

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Электромагнитные волны.</b>	<b>2</b>
1.	Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение. . . . .	2
2.	Плоские волны. . . . .	4
3.	Плоские монохроматические волны (ПМВ). . . . .	6
4.	Средний по времени плотность потока энергии в ПМВ . . . . .	7
5.	Фурье-преобразование электромагнитных полей . . . . .	7

# Глава 1: Электромагнитные волны.

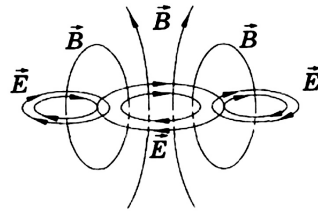
## 1. Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение.

**Определение 1** (Свободное). означает без токов и зарядов  $\Rightarrow \rho = 0, \vec{j} = 0$

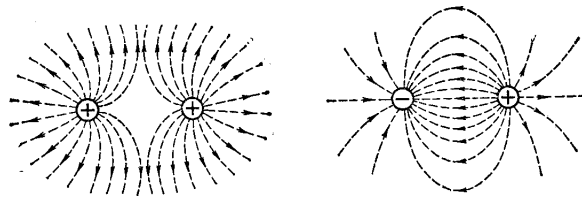
$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} = 0 \end{cases} + \text{Грани. условия} \begin{cases} (B_n)| = 0 & (E_\tau) = 0 \\ (D_n)| = 0 & (H_\tau) = 0 \end{cases}$$

Два типа векторных полей:

1. Вихревые:  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  (нет источников истоков этого поля  $\Rightarrow$  силовые линии либо замкнуты, либо уходят на бесконечность)



2. Потенциальные:  $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ . Силовые линии выходят или входят в области стоков и истоков (где  $\operatorname{div} \vec{F} \neq 0$ ) или на бесконечности.



Далее мы будем рассматривать только вихревые поля (т.е.  $\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = 0$ )

Неизвестные 3 компоненты каждого поля:  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$  - 12 неизвестные функций. Мы можем решить эту систему при помощи уравнений Максвелла + материальные уравнения:  $\vec{B} = \vec{B}(H), \vec{E} = \vec{E}(D)$ .

Простая модель среды:  $\vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ , где  $\mu = \text{const}, \varepsilon = \text{const}$ , годится для вакуума ( $\mu = 1, \varepsilon = 1$ ) и для многих других сред/материалов при низких значениях полей  $\vec{E}, \vec{B}$  и при невысоких частотах  $f < 10^8$  Гц.

*Волновое уравнение:*

$$\text{Рассмотрим } \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H} = -\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

Распишем чему равен  $\text{rot}(\text{rot} \vec{E})$  :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \nabla \underbrace{\text{div} \vec{E}}_{\frac{1}{\varepsilon} \text{div} \vec{D}=0} - \Delta \vec{E}$$

Получаем нашу систему:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Так же делаем с  $\text{rot}(\text{rot} \vec{B})$  и получаем:

$$\begin{cases} \Delta \vec{B} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

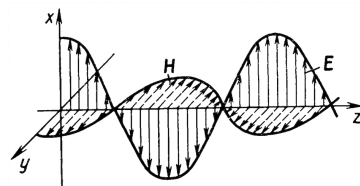
Согласование решений (1) и (2):

1) Решаем (1) и  $\vec{E}$  подставляем в уравнение Максвелла  $\rightarrow \vec{B}$ ;

2) Решаем (2) и  $\vec{B}$  подставляем в уравнение Максвелла  $\rightarrow \vec{E}$ ;

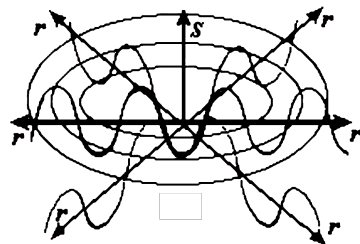
Различные простейшие решения волнового уравнения:

1) Плоские волны: все ненулевые компоненты полей  $\vec{E}, \vec{B}$  зависят от одной координаты (например от  $z$ ) и времени  $t$ ;



2) Цилиндрические волны: все ненулевые компоненты полей  $\vec{E}, \vec{B}$  зависят от  $\vec{r}$  - расстояния от точки наблюдения до некоторой оси (центра волны) и от времени  $t$ ;

3) Сферическая волна: все ненулевые компоненты полей  $\vec{E}, \vec{B}$  зависят от  $\vec{r}$  - расстояния от точки наблюдения до центра волны.



## 2. Плоские волны.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ для примера } E_x : \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_x = 0 \quad (*)$$

Под  $f$  подразумевается  $E_x$  или  $E_y$

$$\begin{aligned} \xi &= z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \eta = z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (\text{замена переменных}) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(\xi(z, t), \eta(z, t)) &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial z}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial z}}_{=1} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \left( -\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left( \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) \right) = -\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Подставляем в (\*):

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \cancel{\frac{\partial}{\partial \eta}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial \eta}} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \cancel{\frac{\partial}{\partial \xi}} + \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} - \cancel{\frac{\partial}{\partial \xi}} \right) E_x(\varepsilon, \mu) = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta} E_x(\varepsilon, \mu) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  решения являются произвольные функции от своих аргументов:  $f(\xi), f(\eta)$ . Так как смешанные производные коммутируют ( $\frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta \partial \xi}$ ) и уравнение равно нулю, то  $\vec{E}_x$  можно представить в виде суммы двух функций.

$$E_x(z, t) = f\left(z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + g\left(z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)$$

Физически это отражает принцип суперпозиции волн: любое решение может быть представлено в виде комбинации волн, движущихся в противоположных направлениях.

По аналогии можем записать  $\vec{E}_y$ :

$$E_y(z, t) = p\left(z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + h\left(z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right), \text{ где } \forall p, h$$

Свойства плоских волн:

1) Из определения, что плоские волны поперечные, то-есть перпендикулярны к направлению своего движения:  $E_z = 0, B_z = 0$ .

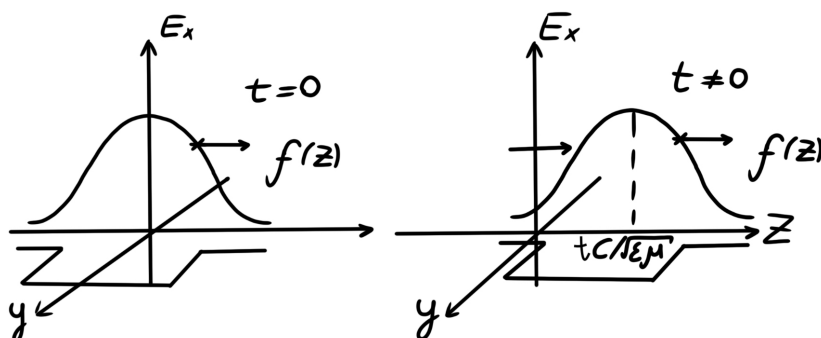
*Доказательство.*

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0 = \varepsilon \left( \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_x}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial y}}_{=0} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = 0$$

То есть все сводится к тому, что наше поле  $\vec{E}_z = E_0 = \text{const}$ , но такое неизменное во времени однородное поле к волне отношения не имеет. Следовательно можно положить  $\vec{E}_z = 0$ , аналогично для  $\vec{B}_z = 0$ . ■

Пример:



В максимуме  $z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{аргумент} = \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_\Phi} - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$$

2) Связь поперечных полей в плоской волне:

Рассмотрим бегущую волну в направлении оси  $z$ . В такой волне все величины являются функциями только от  $\xi = z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t = z - ut$

$$\vec{E} = \vec{E}(\xi), \quad \vec{H} = \vec{H}(\xi)$$

Пусть  $\vec{E} = \vec{E}(\xi)$  произвольная функция, тогда  $\vec{H} = \vec{H}(\xi)$  определяется из уравнения  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ . Распишем левую и правую части уравнения:

$$\text{rot} \vec{E}(\xi) = \left[ \text{grad} \xi \times \frac{d\vec{E}}{d\xi} \right] = [\vec{e}_z \times \frac{d\vec{E}}{d\xi}] = \frac{d}{d\xi} [\vec{e}_z \times \vec{E}(\xi)]$$

$$\frac{\partial \vec{H}(\xi)}{\partial \xi} = \frac{d\vec{H}}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u \frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Подставляем это в уравнение:

$$\frac{d}{d\xi} [\vec{e}_z \times \vec{E}(\xi)] = \frac{\mu}{c} u \frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Проинтегрировав по  $\xi$  получаем и подставив  $u = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\sqrt{\varepsilon}\vec{E} = \sqrt{\mu}[\vec{H} \times \vec{n}], \quad \sqrt{\mu}\vec{H} = \sqrt{\varepsilon}[\vec{n} \times \vec{E}]$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор направления движения волны ( $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n}$ ).

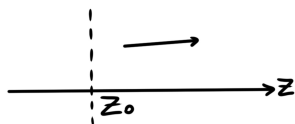
$$3) \varepsilon E^2 = \mu[\vec{H} \times \vec{n}]^2 = \mu H^2 n^2 = \mu H^2 : 8\pi \Rightarrow W_E = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu B^2}{8\pi} = W_B$$

$$4) \vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}] - \text{плотность потока энергии (вектор Умова-Пойтинга)}.$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c\varepsilon}{4\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \left( \vec{n}(\vec{E}\vec{E}) - \underbrace{\vec{E}(\vec{n}\vec{E})}_{=0} \right) = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \vec{n} \left( \underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{W_E} + \underbrace{\frac{\mu B^2}{8\pi}}_{W_B} \right)$$

### 3. Плоские монохроматические волны (ПМВ).

$$E_x, E_y, B_x, B_y \sim e^{-i\omega t}$$



$$\text{В плоскости } z = z_0, \vec{E}(z_0, t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow$$

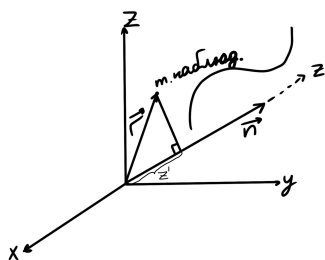
$$\Rightarrow \vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t - z_0)} = \underbrace{\vec{E}_0 e^{-\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}z_0}}_{\vec{E}_{00}} \cdot \underbrace{e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t)}}_{f(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t)}$$

$$\vec{E}_0 \perp \vec{n} = \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}_0 = c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y, c_1 \text{ и } c_2 - \text{произвольные комплексные числа.}$$

**Определение 2.** Волновое число  $k = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} = \frac{\omega}{V_{\text{волн.}}}$

$$\vec{E} = \vec{E}_{00} e^{ikz - i\omega t} - \text{для волны с } \vec{n} = \vec{e}_z, \quad \vec{E} = \vec{E}_{000} e^{-ikz - i\omega t} - \text{для волны с } \vec{n} = -\vec{e}_z$$

Универсальная запись полей ПМВ:



$$\begin{cases} \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ikz' - i\omega t} \\ z' = (\vec{n}, \vec{r}) \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ik(\vec{n}, \vec{r}) - i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r}) - i\omega t}$$

Свойство: ПМВ как и любая плоская волна имеет две степени свободы, то есть обладает поляризацией...

Пример: ПМВ, бегущая по z,  $\vec{E}(z, t) = (c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y) e^{ikz - i\omega t} (*)$ , где  $c_1, c_2$  - произвольные комплексные числа...

**Определение 3.** Плоская волна, у которой вектор  $\vec{E}$  при  $\forall t$  во всем пространстве лежит в одной плоскости - плоскополяризованная (линейнополяризованная) волна...

Выражение (\*) - представляет собой сумму двух плоскополяризованных волн с поляризациями вдоль x и y.  $\forall$  плоскую волну можно разложить на две плоскополяризованные.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть  $c_1 = |c_1|e^{i\varphi}$ ,  $c_2 = |c_2|e^{i\psi}$

Реальное поле есть вещественная часть (\*)

$$\text{Re}(\vec{E}(z, t)) = |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e}_y \cos(kz - \omega t + \psi)$$

1) Пусть  $\psi = \varphi + 2\pi m$ ,  $m$  - целое.

$$\Rightarrow \text{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e}_y \cos(kz - \omega t + \varphi + 2\pi m) =$$

$$= (|c_1|\vec{e}_x + |c_2|\vec{e}_y) \cos(kz - \omega t + \varphi)$$

2)  $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(kz - \omega t)\cos\frac{\pi}{2} - \sin(kz - \omega t)\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) - |c_2|\vec{e}_y \sin(kz - \omega t + \varphi)$$

3)  $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$\text{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e}_y \sin(kz - \omega t + \varphi)$$

В случае произвольных  $c_1, c_2$  эллипс повернут на некоторый угол относительно оси x (задача на семинаре).

#### 4. Средний по времени плотность потока энергии в ПМВ

$$\vec{E}_0 = c_1\vec{e}_x + c_2\vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon \vec{E}}{4\pi} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{4\pi} (\vec{E}_x + \vec{E}_y) - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{4\pi} \left( \frac{|c_1|^2}{2} + \frac{|c_2|^2}{2} \right) = \\ &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{8\pi} (\vec{E}_0, \vec{E}_0^*) \end{aligned}$$

#### 5. Фурье-преобразование электромагнитных полей

Для периодической функции ( $f(t) = f(t + T)$ ,  $T$  - период, можно использовать следующее представление:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega n t}, \omega = \frac{2\pi}{T}, f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{+i\omega_0 n t} dt$$



Для непериодических функций Фурье представление в виде интеграла:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} e^{-i\omega t} d\omega, \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{+i\omega t} dt$$

Для периодической функции:  $\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \delta(\omega - n\omega_0)$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Напоминание про свойства  $\delta$  - функции

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i\omega t} d\omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{-e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}}{it2\Omega} 2\Omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} 2\Omega \cdot \text{sinc}(\Omega t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2\Omega \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \cdot \text{Im} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right]$$

$$\int_C \frac{e^{ix}}{x} dx = 0 = \underbrace{\int_{|z|=R}}_{=0} + \int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{|z|=\rho} + \int_{\rho}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \int_{|z|=\rho} \frac{e^{i\rho e^{i\varphi}} \cdot \rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = -i \int_{\pi}^0 d\varphi = i\pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi \delta(t) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = 2\pi \delta(t-\tau) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega = 2\pi \delta(\omega-\omega')$$

1)

$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+i\omega t} e^{-i\omega \tau} d\omega$$

Фурье образ  $\delta(t-\tau)$

2)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) e^{i\omega \tau}$$

3)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^* dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) d\omega \hat{f}_2^*(\omega') d\omega' \frac{1}{2\pi} 2\pi \delta(\omega - \omega') f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2^*(\omega) d\omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega - \text{ равенство Парсеваля}$$

Прошедшая энергия за  $\infty$  интервал времени через см<sup>2</sup>

$$= \int (\vec{S} \vec{n}) dt = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^2(t) dt = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} (\vec{n} \vec{n}_0) \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega$$

Свойства Фурье-преобразования:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Пусть } f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) &= f^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^* e^{+i\omega t} d\omega = [\omega \rightarrow -\omega'] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{f}^*(-\omega') e^{-i\omega' t} \end{aligned}$$

$$\hat{f}^*(-\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\hat{f}^*(\omega) = \hat{f}(-\omega)$$

2) Спектр сдвинутого по времени сигнала:

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{+i\omega t} e^{i\omega T} dt = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T}$$

3)

$$F(t) = f(t) e^{-i\omega_0 t} \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

4) Спектр N повторенного сигнала:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t-nT); \quad F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(\omega) e^{i\omega nT} = f(\omega) \frac{e^{i\omega NT} - 1}{e^{i\omega T} - 1} = \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T \frac{N-1}{2}} \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}}$$

Последний выделенный множитель в правой части уравнения - это интерференционный множитель.