

## 1. Дифракция плоской монохроматической волны на длинной щели

Интеграл Кирхгофа для разложения по цилиндрическим волнам:

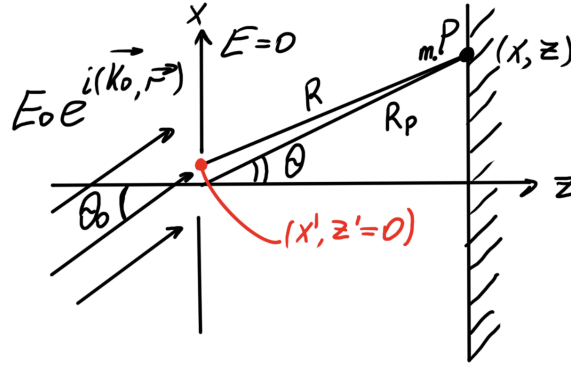
$$E_p = \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} E(x') \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}} dx' \cos \theta$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + z^2 - 2xx' + (x')^2} \approx R_p - \frac{x}{R_p} x' + o\left(\frac{(x')^2}{R_p}\right)$$

, где  $x^2 + z^2 = R_p^2$ , а  $o\left(\frac{(x')^2}{R_p}\right)$  - в приближении Фраунгофера равно нулю  $\left(\frac{d^2}{\lambda R_p} \ll 1\right)$ .

$$E_p = \sqrt{\frac{k}{iR_p}} e^{ikR_p} \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(x') e^{-ik_x x'} dx' \right)}_{=\hat{E}(k_x)} \cos \theta = \sqrt{\frac{k}{iR_p}} \hat{E}(k_x) \cos \theta$$

, где  $k_x = k \frac{x}{R_p}$



Падающая волна под углом  $\theta_0$  имеет:  $\vec{k}_0 = (k_{0x}, 0, k_{0z})$ ,  $|\vec{k}_0| = |\vec{k}|$

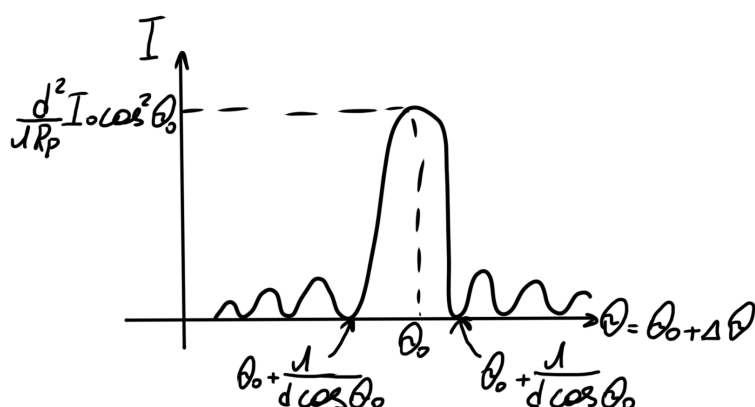
$$E_0 e^{ik_{0x}x' + ik_{0z}z'} \Leftarrow E_0 e^{i(\vec{k}_0, \vec{r})}$$

, где  $z' = 0$ , а  $k_{0x} = k \sin \theta_0$

$$\begin{aligned} \hat{E}(k_x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_0 e^{ik \sin \theta_0 x'} e^{-ik \sin \theta x'} dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i\Delta k_x x'} dx' = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{d(e^{i\Delta k_x \frac{d}{2}} - e^{-i\Delta k_x \frac{d}{2}})}{2i\Delta k_x \frac{d}{2}} \\ &= \frac{E_0 d}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc} \left( \Delta k_x \frac{d}{2} \right) \end{aligned}$$

$$I = \frac{|E_p|^2}{2} = \frac{k}{R_p} \frac{d^2}{2\pi} \frac{|E_0|^2}{2} \text{sinc}^2 \left( \Delta k_x \frac{d}{2} \right) \cos^2 \theta = \frac{d^2}{\lambda R_p} I_0 \text{sinc}^2 \left( \frac{kd}{2} (\sin \theta_0 - \sin \theta) \right) \cos^2 \theta_0$$

, где  $I_0 = \frac{|E_0|^2}{2}$ , а  $P_\Phi = \frac{d^2}{\lambda R_p}$

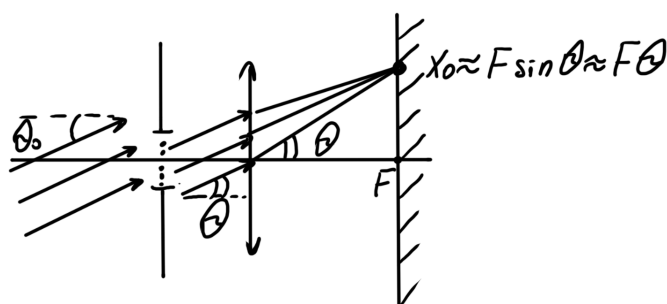


Первое обращение в "0" вблизи максимума  $I(\theta)$ .

$$\frac{kd}{2}(\sin \theta_0 - \sin(\theta_0 + \Delta\theta)) = \pm\pi$$

$$\sin \theta_0 - \sin \theta_0 \underbrace{\cos \Delta\theta}_{\approx 1} - \cos \theta_0 \underbrace{\sin \Delta\theta}_{\approx \Delta\theta} = \pm \frac{\lambda}{d} \Rightarrow \Delta\theta = \pm \frac{\lambda}{d \cos \theta_0}$$

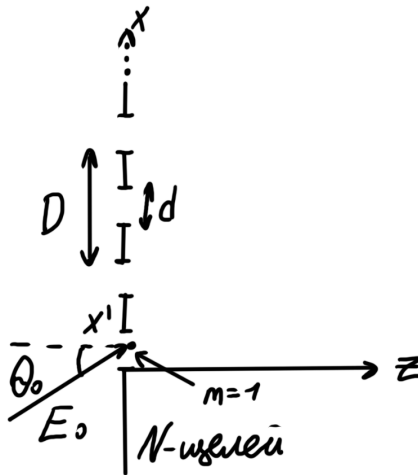
Дифракционная картина в фокальной плоскости линзы:



В случае наблюдения дифракционной картины в фокальной плоскости линзы  $\frac{1}{R_p} \rightarrow \frac{1}{F}$ , а  $\theta$  остается тот же самый:  $I = I_0 \frac{d^2}{\lambda F} \text{sinc} \left( \frac{kd}{2}(\sin \theta_0 - \sin \theta) \right) \cos^2 \theta$

## 2. Дифракционные решетки

### 1. Щелевая решетка:

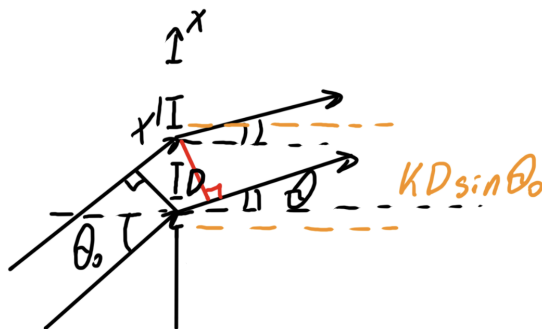


$$\begin{aligned}\hat{E}(k_x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^N \int_{(m-1)D}^{(m-1)D+d} E_0 e^{ik(\sin\theta_0 - \sin\theta)x'} dx' = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^N \frac{e^{i\Delta k_x((m-1)D+d)} - e^{i\Delta k_x(m-1)D}}{i\Delta k_x} = \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{d(e^{i\Delta k_x d} - 1)}{2i\Delta k_x \frac{d}{2}} \sum_{m=1}^N e^{i\Delta k_x(m-1)D} = \frac{dE_0}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Delta k_x \frac{d}{2}} \text{sinc}\left(\Delta k_x \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{e^{i\Delta k_x ND} - 1}{e^{i\Delta k_x D} - 1}\end{aligned}$$

, где  $\Delta k_x = k(\sin\theta_0 - \sin\theta)$

$$I_p = \frac{|E_p|^2}{2} = \underbrace{\frac{d^2}{\lambda R_p} I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{kd}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta)\right) \cos^2\theta}_{\text{дифракция на отдельной щели}} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{kD}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta)N\right)}{\sin^2\left(\frac{kD}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta)\right)}}_{\text{интерференция полей от N-щелей}}$$

, где в конце дробь равна  $\frac{\sin^2 \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}$ .



$$\Delta\varphi = kD \sin \theta_0 - kD \sin \theta$$

$$\frac{\sin^2 \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}} - \text{имеет главные максимумы в точках, где знаменатель} = 0, \text{ то есть:}$$

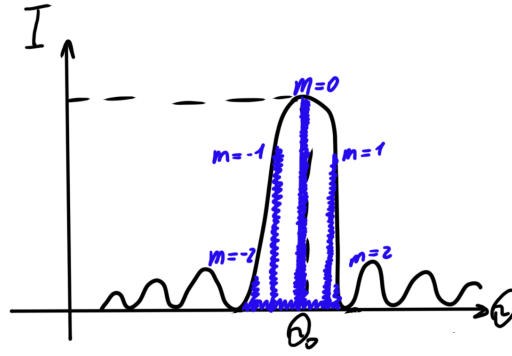
$$\Delta\varphi = 2\pi m, \quad m = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$$

$$kD(\sin \theta_0 - \sin \theta_m) = 2\pi m$$

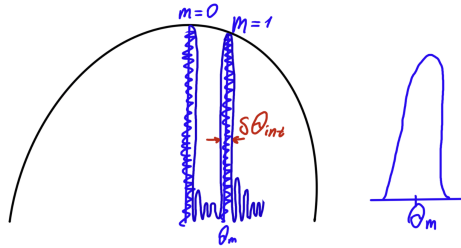
Пусть  $\theta_m = \theta_0 + \Delta\theta_m$  :

$$\sin \theta_0 - \sin \theta_m \cos \Delta\theta_m - \cos \theta_0 \sin \Delta\theta_m = m \frac{\lambda}{D} \Rightarrow \Delta\theta_m = m \frac{\lambda}{D \cos \theta_0}$$

, где  $\cos \Delta\theta_m \approx 1$ ,  $\sin \Delta\theta_m \approx \Delta\theta_m$ .



Ширина максимумов:



$\delta\theta_{int}$  = угловое расстояние между главным максимум и первым интенсивности в 0.

$$\frac{N\Delta\varphi}{2} = \frac{NkD(\sin \theta_0 - \sin(\theta_m + \sigma\theta_{int}))}{2} = \frac{-2\pi mN}{2} \pm \pi$$

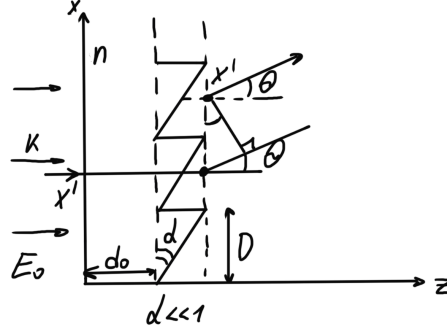
$$\frac{NkD}{2}(\sin \theta_0 - \sin \theta_m \cos \delta\theta_{int} - \cos \theta_m \sin \delta\theta_{int}) = -m\pi N \pm \pi$$

$$\frac{kD}{2}(\sin \theta_0 - \sin \theta_m) = -m\pi \Rightarrow \frac{NkD}{2} \cos \theta_m \delta\theta_{int} = \pm \pi$$

$$\delta\theta_{int} = \pm \frac{\lambda}{D \cos \theta_m} \frac{1}{N} \sim \frac{\lambda}{D \cos \theta_0} \pm \pi$$

, где  $\frac{\lambda}{D \cos \theta_0} = \Delta \theta_{m+1} - \Delta \theta_m$

2. Фазовые решетки:



$$\Delta \varphi = k \int n dS = k[d_0 n + x' \alpha n + (D - x') \alpha] = \varphi_0 + k \alpha (n - 1) x'$$

$$\begin{aligned} \text{Одной ступеньки: } \hat{E}(k_x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^D E_0 e^{i\varphi_0} e^{ik\alpha(n-1)x'} e^{-ik_x x'} dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 e^{i\varphi_0} \int_0^D e^{ik(\alpha(n-1) - \sin \theta)x'} dx' = \\ &= \frac{E_0 D}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi_0} \frac{e^{i\Delta k_x D} - 1}{2i\Delta k_x \frac{D}{2}} = \frac{D}{\sqrt{2\pi}} E_0 e^{i\varphi_0} e^{i\Delta k_x \frac{D}{2}} \text{sinc} \left( \frac{kD}{2} (\alpha(n-1) - \sin \theta) \right) \end{aligned}$$

, где  $\Delta k_x = k(\alpha(n-1) - \sin \theta)$

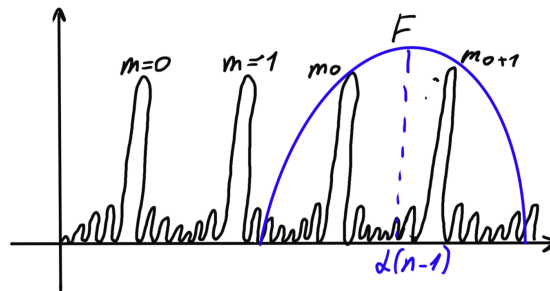
$$I_{\text{одной щели}} = I_0 \frac{D^2}{\lambda R_p} \text{sinc}^2 \left( \frac{kD}{2} (\alpha(n-1) - \sin \theta) \right) \cos^2 \theta$$

, где  $\alpha(n-1) \leq \sin \theta_0$

$$\Delta \varphi_{\text{соседних зубов}} = kD \sin \theta$$

$$I = I_0 \frac{D^2}{\lambda R_p} \text{sinc}^2 \left( \frac{kD}{2} (\alpha(n-1) - \sin \theta) \right) \cos^2 \theta \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{NkD \sin \theta}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{kD \sin \theta}{2} \right)}$$

, где  $R_p \rightarrow F$



$$R_\lambda = m_0 N = \frac{\lambda}{\delta \lambda}$$