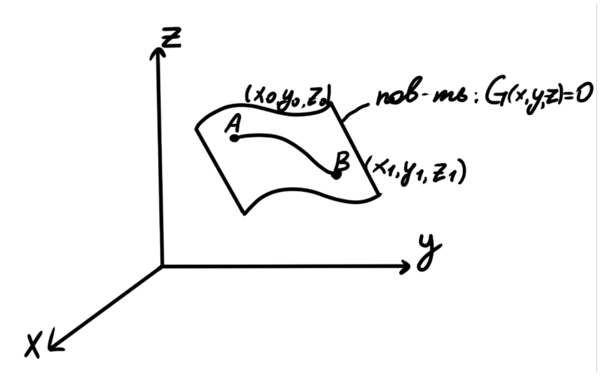
1. Вариационная задача на условный экстремум

$$\begin{cases} I[y_1,\dots,y_n] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, y_1, \dots, y_n, y_n', ..., y_n')dt \to \text{extz} \\ y_i(t_0) = y_{i_0}, \quad y_i(t_1) = y_{i_1},\ i = 1,\dots,n \\ G(t, y1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Пример: Задача о геодезических на поверхности



Найти кривую, соединяющую точки A и B, лежащие на поверхности, имеющую наименьшую длину.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{уравнение кривой в параметрическом виде}\ ,\ t \in [t_0, t_1]$$

$$I[x,y,z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \\ y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1 \\ z(t_0) = z_0, \quad z(t_1) = z_1 \end{cases}$$

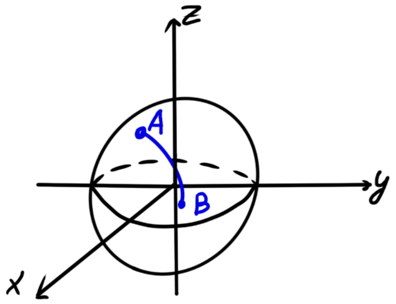
Необходимое условие локального экстремума:

Пусть $\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n$ доставляют локальному экстремум для задачи (1). Тогда $\exists \lambda(t)$ такая, что функции $\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n$ являются экстремалями вспомогательного функционала.

$$\tilde{I}[y_1,\dots,y_n] = \int_{t_0}^{t_1} (F + \lambda G(t))dt$$

Без доказательства.

2. Решение задачи о геодезических на сфере



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\tilde{I}[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}_{F} + \lambda(t)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right)}_{\tilde{F}} dt$$

$$\begin{cases} 2x\lambda(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x'}{F}\right) & (1) \\ 2y\lambda(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'}{F}\right) & (2) \\ 2z\lambda(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{z'}{F}\right) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)\cdot y + (2)\cdot(-x): & y\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x'}{F}\right) - x\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'}{F}\right) = 0 \\ (2)\cdot z + (3)\cdot(-y): & z\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'}{F}\right) - y\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{z'}{F}\right) = 0 \\ (3)\cdot(-x) + (1)\cdot z: & z\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x'}{F}\right) - x\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{z'}{F}\right) = 0 \end{cases}$$

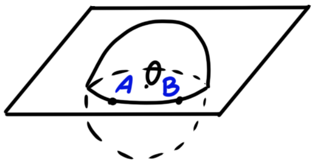
$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{x'}{F} - x\frac{y'}{F}\right) = \cancelto{0}{y'\frac{x'}{F}} + y\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{F}\right) \cancelto{0}{-x'\frac{y'}{F}} - x\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{F}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(y\dfrac{x'}{F} - x\dfrac{y'}{F}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(z\dfrac{y'}{F} - y\dfrac{z'}{F}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(z\dfrac{x'}{F} - x\dfrac{z'}{F}\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{yx' - xy'}{F} = c_1 & (1) \\ \dfrac{zy' - yz'}{F} = c_2 & (2) \\ \dfrac{zx' - xz'}{F} = c_3 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \cdot z + (2) \cdot x + (3) \cdot (-y) :$$

$$\frac{1}{F}\left[z(yx' - xy') + x(zy' - yz') - y(zx' - xz')\right] = c_1 z + c_2 x - c_3 y$$

$$\begin{cases} c_1 z + c_2 x - c_3 y = 0 - \text{плоскость проходящая через } (0{,}0{,}0) \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$



Геодезическая на сфере - дуга на большой окружности.

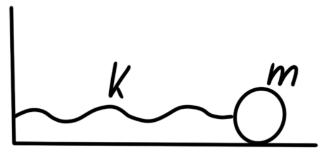
Глава 1: Система малых колебаний

1. Линейные однородные системы малых колебаний

$$M\vec{x''} + K\vec{x} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n_1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n_1} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример: $n = 1 \Rightarrow mx'' + kx = 0,\ m > 0,\ k > 0$



$$M - \text{ матрица масс}, \quad K - \text{ матрица жесткостей}$$

1) $M = M^\top,\ K = K^\top\ (m_{ij} = m_{ji},\ k_{ij} = k_{ji})$
2) M > 0 (матрица положительна определена), $K \geq 0$

Определение 1. *Матрица $M = M^\top$ называется положительно определенной, если $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq 0$ выполняется $(M\vec{v}, \vec{v}) > 0$.*

Критерий Сильвестра: $M = M^\top > 0 \Leftrightarrow$ все главные миноры > 0.
1-ый способ: Сведение к системе 1-го порядка.

$$\begin{cases} \vec{y_1} = \vec{x} \\ \vec{y_2} = \vec{x'} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{y_1'} = \vec{y_2} \\ \vec{y_2'} = \vec{x''} = -M^{-1}K\vec{x} = -M^{-1}K\vec{y_1} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{y_1} \\ \vec{y_2} \end{pmatrix} = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & E \\ & \\ -M^{-1}K & 0 \end{pmatrix}}^{A}}_{n\times n} \begin{pmatrix} \vec{y_1} \\ \vec{y_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{y_1} \\ \vec{y_2} \end{pmatrix} = \underbrace{e^{tA}}_{(2n\times 2n)} \underbrace{\vec{c}}_{(2n\times 1)} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{12}(t) & \Phi_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c_1} \\ \vec{c_2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \vec{y_1}(t) = F_{11}(t)\vec{c_1} + F_{12}(t)\vec{c_2} \quad \text{(2n констант)}$$

Лемма 1. *Если* $M = M^\top > 0$, *то* $\exists M^{-1}$

Доказательство.

Пусть не существует $M^{-1} \Rightarrow \underbrace{\det M = 0} \Rightarrow \exists \vec{v} \neq 0 : M\vec{v} = 0$

$$\Rightarrow \lambda = 0 - \text{собств.знач.}$$
$$\det(M - 0E) = 0$$
$$(M\vec{v}, \vec{v}) = (0, \vec{v}) = 0 - \text{ противоречие}$$

#

Утверждение 1 (из алгебры)**.** *Пусть* $A = A^\top \Rightarrow$ *все собственные числа* $\lambda_j \in \mathbb{R}$.
Пусть $A = A^\top > 0 \Rightarrow$ *все собственные числа* $\lambda_j > 0$.

Утверждение 2 (из алгебры)**.** *Пусть* $A = A^\top \Rightarrow$ *в* $\mathbb{R}^n$ *существует базис из собственных векторов, то есть нет присоединенных*

Утверждение 3 (из алгебры)**.** *Пусть* $A = A^\top \Rightarrow A = UDU^{-1}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

U - ортогональная матрица, то есть $U^{-1} = U^\top$

2-ой способ:

Определение 2. *Число* λ *называется собственным числом системы (1), если* $\det(K - \lambda M) = 0$

Определение 3. *Вектор* $\vec{v} \neq \vec{0}$ *называется собственным вектором системы (1) (вектором нормальных колебаний), если* $(K - \lambda M)\vec{v} = 0$

Теорема 1. *Существует n собственных чисел системы (1) и* $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, 2, ..., n$

Доказательство.

1) $\det(K - \lambda M) = 0$

$$\det\big(M(M^{-1}K - \lambda E)\big) = 0$$

$$\underbrace{\det M}_{\neq 0} \det\big(M^{-1}K - \lambda E\big) = 0 \Rightarrow \text{ существует n собственных чисел}$$

2) $\vec{v_j}$ - собственные вектора $\Rightarrow K\vec{v_j} = \lambda_j M\vec{v_j} \mid \cdot \vec{v_j}$

$$\underbrace{(Kv_j, v_j)}_{\geq 0} = \lambda_j \underbrace{(Mv_j, v_j)}_{> 0} \Rightarrow \lambda_j \geq 0$$

#

Теорема 2. *В* $\mathbb{R}^n$ *существует базис из собственных векторов системы (1).*

Доказательство будет позже.

Теорема 3. *Пусть* $M = M^\top > 0, K = K^\top \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ *- собственные числа системы (1),* $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ *- собственные вектора системы (1), соответвующие числам* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$*. Тогда все решения системы (1) имеют вид:*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j(t)\vec{v_j},$$

, где $q_j(t)$ *- решение дифференциального уравнения:* $q_j'' + \lambda_j q_j = 0$

Доказательство.

По теореме 2 $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ - базис в $\mathbb{R}^n$. При фиксированном t $x(t) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x}(t)$ раскладывается по базису: $\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j(t)\vec{v_j}$

Подставляем $x(t)$ в систему (1):

$$M\sum_{j=1}^{n} q_j''(t)\vec{v_j} + K\sum_{j=1}^{n} q_j(t)\vec{v_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(q_j''(t)M\vec{v_j} + q_j(t)\underbrace{K\vec{v_j}}_{\lambda_j M\vec{v_j}}\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(q_j''(t)M\vec{v_j} + \lambda_j q_j(t)M\vec{v_j}\right) = 0 \mid \cdot M^{-1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(q_j''(t) + \lambda_j q_j(t)\right)\vec{v_j} = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Т.к $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ линейно независимы, то $q_j''(t) + \lambda_j q_j(t) = 0$

#

Замечание. $q_j''(t) + \lambda_j q_j(t) = 0$ 1) $\lambda_j = 0 \Rightarrow q_j(t) = c_1 t + c_2$
2) $\lambda_j > 0 \Rightarrow q_j(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\lambda_j}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\lambda_j}t\right)$

Определение 4. $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, ..., \omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ *называется собственными частотами колебаний системы (1).*