Конспект лекций по дисциплине

Электродинамика и оптика

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

Преподаватель: Синицкий Станислав Леонидович

Оглавление

Глава 1: Электромагнитные волны.

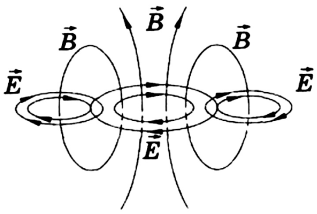
1. Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение.

Определение 1 (Свободное). *означает без токов и зарядов* $\Rightarrow \rho = 0, \vec{j} = 0$

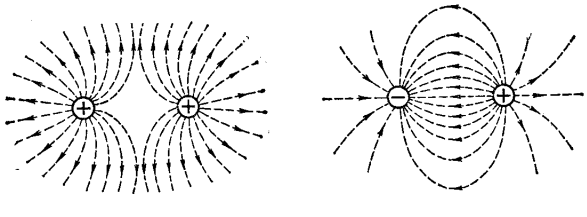
$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{D} = 0 \end{cases} + \text{Грани. условия} \begin{cases} (B_n)| = 0 \quad (E_\tau) = 0 \\ (D_n)| = 0 \quad (H_\tau) = 0 \end{cases}$$

Два типа векторных полей:

1. Вихревые: $\mathrm{div}\vec{F} = 0$ (нет источников истоков этого поля $\Rightarrow$ силовые линии либо замкнуты, либо уходят на бесконечность)



2. Потенциальные: $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$. Силовые линии выходят или входят в области стоков и истоков (где $\mathrm{div}\vec{F} \neq 0$) или на бесконечности.



Далее мы будем рассматривать только вихревые поля (т.е. $\mathrm{div}\vec{B} = 0, \mathrm{div}\vec{D} = 0$)

Неизвестные 3 компоненты каждого поля: $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ - 12 неизвестные функций. Мы можем решить эту систему при помощи уравнений Максвелла + материальные уравнения: $\vec{B} = \vec{B}(H), \vec{E} = \vec{E}(D)$.

Простая модель среды: $\vec{B} = \mu\vec{H}, \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, где $\mu = \mathrm{const}, \varepsilon = \mathrm{const}$, годится для вакуума ($\mu = 1, \varepsilon = 1$) и для многих других сред/материалов при низких значения полей $\vec{E}, \vec{B}$ и при невысоких частотах $f < 10^8$ Гц.

Волновое уравнение:

Рассмотрим $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{E}) = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{H} = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$

Распишем чему равен $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{E})$:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{E}) = \nabla \underbrace{\mathrm{div}\vec{E}}_{\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}\vec{D}=0} - \Delta\vec{E}$$

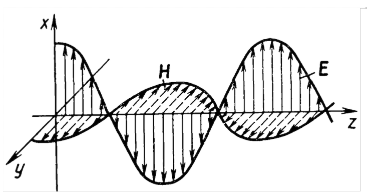
Получаем нашу систему:

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \mathrm{div}\vec{E} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Так же делаем с $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{B})$ и получаем:

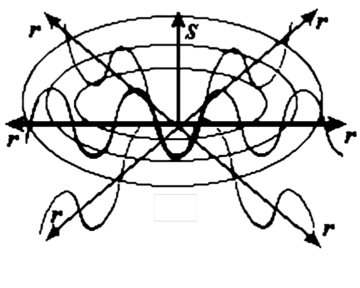
$$\begin{cases} \Delta\vec{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \mathrm{div}\vec{B} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Согласование решений (1) и (2):
1) Решаем (1) и $\vec{E}$ подстваляем в уравнение Максвелла $\rightarrow \vec{B}$;
2) Решаем (2) и $\vec{B}$ подстваляем в уравнение Максвелла $\rightarrow \vec{E}$;
Различные простейшие решения волнового уравнения:
1) Плоские волны: все ненулевые компоненты полей $\vec{E}, \vec{B}$ завися от одной координаты (например от z) и времени t;



2) Цилиндрические волны: все ненулевые компоненты полей $\vec{E}, \vec{B}$ зависят от $\vec{r}$ - расстояния от точки наблюдения до некоторой оси (центра волны) и от времени t;

3) Сферическая волна: все ненулевые компоненты полей $\vec{E}, \vec{B}$ зависят от $\vec{r}$ - расстояния от точки наблюдения до центра волны.



2. Плоские волны.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \text{ , для примера } E_x:\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x=0 \quad (*)$$

Под f подразумевается E_x или E_y

$$\xi=z-\frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}},\quad \eta=z+\frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad \text{(замена переменных)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}f(\xi(z,t),\eta(z,t))=\frac{\partial f}{\partial \xi}\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial z}}_{=1}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial z}}_{=1}=\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\left(-\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)+\frac{\partial f}{\partial \eta}\left(\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)\right)=-\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\to\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta},\quad \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\partial}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \xi}$$

Подставляем в (*):

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\cancel{\frac{\partial}{\partial \eta}}-\cancel{\frac{\partial}{\partial \eta}}+\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial \xi}}+\frac{\partial}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial \eta}-\cancel{\frac{\partial}{\partial \xi}}\right)E_x(\varepsilon,\mu)=0\Rightarrow 4\cdot\frac{\partial}{\partial\xi\partial\eta}E_x(\varepsilon,\mu)=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ решения являются произвольные функции от своих аргументов: $f(\xi), f(\eta)$. Так как смешанные производные коммутируют ($\frac{\partial}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\eta\partial\xi}$) и уравнение равно нулю, то $\vec{E_x}$ можно представить в виде суммы двух функций.

$$E_x(z,t)=f\left(z-\frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)+g\left(z+\frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)$$

Физически это отражает принцип суперпозиции волн: любое решение может быть представлено в виде комбинации волн, движущихся в противоположных направлениях.

По аналогии можем записать $\vec{E_y}$:

$$E_y(z,t)=p\left(z-\frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)+h\left(z+\frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right),\ \text{где } \forall p,h$$

Свойства плоских волн:

1) Из определения, что плоские волны поперечные, то-есть перпендикулярны к направлению своего движения: $E_z=0, B_z=0$.

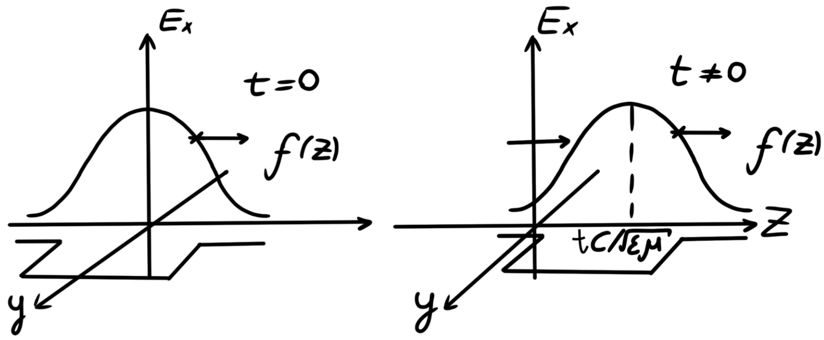
Доказательство.

$$\mathrm{div}\vec{D}=\varepsilon\mathrm{div}\vec{E}=0=\varepsilon\left(\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Rightarrow\frac{\partial\vec{E_z}}{\partial z}=0$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_x}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial y}}_{=0} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = 0$$

То есть все сводится к тому, что наше поле $\vec{E}_z = E_0 = \mathrm{const}$, но такое неизменное во времени однородное поле к волне отношения не имеет. Следовательно можно положить $\vec{E}_z = 0$, аналогично для $\vec{B}_z = 0$. ■

Пример:



В максимуме $z - \dfrac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{аргумент} = \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_\Phi} - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$$

2) Связь поперечных полей в плоской волне:

Рассмотрим бегущую волну в направлении оси z. В такой волне все величины являются функциями только от $\xi = z - \dfrac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t = z - ut$

$$\vec{E} = \vec{E}(\xi), \quad \vec{H} = \vec{H}(\xi)$$

Пусть $\vec{E} = \vec{E}(\xi)$ произвольная функция, тогда $H = H(\xi)$ определяется из уравнения $\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. Распишем левую и правую части уравнения:

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\xi) = \left[\mathrm{grad}\xi \times \frac{d\vec{E}}{d\xi}\right] = [\vec{e_z} \times \frac{d\vec{E}}{d\xi}] = \frac{d}{d\xi}[\vec{e_z} \times \vec{E}(\xi)]$$

$$\frac{\partial \vec{H}(\xi)}{\partial \xi} = \frac{d\vec{H}}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -u\frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Подставляем это в уравнение:

$$\frac{d}{d\xi}[\vec{e_z} \times \vec{E}(\xi)] = \frac{\mu}{c}u\frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Проинтегрировав по ξ получаем и подставив $u = \dfrac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\sqrt{\varepsilon}\vec{E} = \sqrt{\mu}[\vec{H} \times \vec{n}], \quad \sqrt{\mu}\vec{H} = \sqrt{\varepsilon}[\vec{n} \times \vec{E}]$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор направления движения волны ($\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n}$).

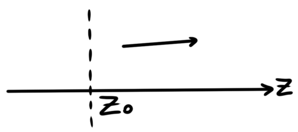
3) $\varepsilon E^2 = \mu[\vec{H} \times \vec{n}]^2 = \mu H^2 n^2 = \mu H^2 | : 8\pi \Rightarrow W_E = \dfrac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \dfrac{\mu B^2}{8\pi} = W_B$

4) $\vec{S} = \dfrac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}]$ - плотность потока энергии (вектор Умова-Пойтинга).

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c\varepsilon}{4\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \left(\vec{n}(\vec{E}\vec{E}) - \underbrace{\vec{E}(\vec{n}\vec{E})}_{=0} \right) = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\vec{n} \left(\underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{W_E} + \underbrace{\frac{\mu B^2}{8\pi}}_{W_B} \right)$$

3. Плоские монохроматические волные (ПМВ).

$E_x, E_y, B_x, B_y \sim e^{-i\omega t}$



В плоскости $z = z_0, \vec{E}(z_0, t) = \vec{E_0} e^{-i\omega t} \Rightarrow$

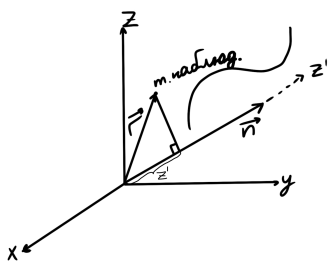
$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = \vec{E_0} e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t - z_0\right)} = \underbrace{\vec{E_0} e^{-\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}z_0}}_{\vec{E_{00}}} \cdot \underbrace{e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t\right)}}_{f(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t)}$$

$\vec{E_0} \perp \vec{n} = \vec{e_z} \Rightarrow \vec{E_0} = c_1\vec{e_x} + c_2\vec{e_y}, c_1$ и c_2 - произвольные комплексные числа.

Определение 2. *Волновое число* $k = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} = \frac{\omega}{V_{волн.}}$

$\vec{E} = \vec{E_{00}} e^{ikz - i\omega t} -$ для волны с $\vec{n} = \vec{e_z}$, $\quad \vec{E} = \vec{E_{000}} e^{-ikz - i\omega t} -$ для волны с $\vec{n} = -\vec{e}_z$

Универсальная запись полей ПМВ:



$$\begin{cases} \vec{E}(z', t) = \vec{E_0} e^{ikz' - i\omega t} \\ z' = (\vec{n}, \vec{r}) \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(z', t) = \vec{E_0} e^{ik(\vec{n},\vec{r}) - i\omega t} = \vec{E_0} e^{i(\vec{k},\vec{r}) - i\omega t}$$

Свойство: ПМВ как и любая плоская волна имеет две степени свободы, то е сть обладает поляризацией.

Пример: ПМВ, бегущая по z, $\vec{E}(z,t) = (c_1\vec{e_x} + c_2\vec{e_y})e^{ikz - i\omega t}(*)$, где c_1, c_2 - произвольные комплексные числа.

Определение 3. *Плоская волна, у которой вектор $\vec{E}$ при $\forall t$ во всем пространстве лежит в одной плоскости - плоскополяризованная (линейно поляризованная) волна.*

Выражение $(*)$ - представляет собой сумму двух плоскополяризованных волн с поляризациями вдоль x и y. $\forall$ плоскую волну можно разложить на две плоскополяризованные.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть $c_1 = |c_1|e^{i\varphi}, c_2 = |c_2|e^{i\psi}$

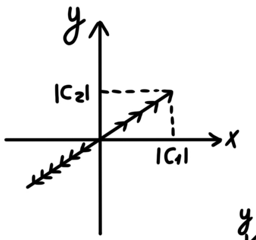
Реальное поле естть вещеестенная часть $(*)$

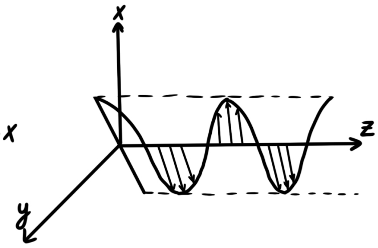
$$\mathrm{Re}(\vec{E}(z,t)) = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e_y}\cos(kz - \omega t + \psi)$$

1) Пусть $\psi = \varphi + 2\pi m, m$ - целое.

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e_y}\cos(kz - \omega t + \varphi + 2\pi m) =$$

$$= (|c_1|\vec{e_x} + |c_2\vec{e_y})\cos(kz - \omega t + \varphi) \quad t = \mathrm{const}$$





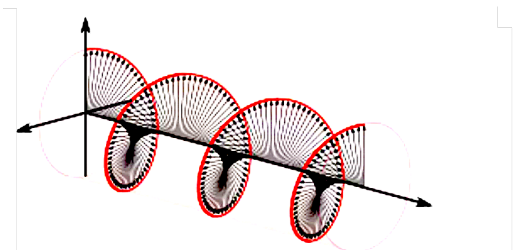
2) $\psi = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$

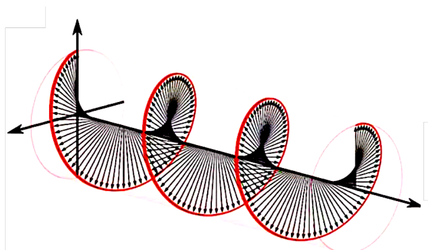
$$\cos\left(kz - \omega t\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(kz - \omega t\varphi)\cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}} - \sin(kz - \omega t\varphi)\cancelto{1}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathrm{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz - \omega t + \varphi) - |c_2|\vec{e_y}\sin(kz - \omega t + \varphi)$$

3) $\psi = \varphi - \dfrac{\pi}{2}$

$$\mathrm{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e_y}\sin(kz - \omega t + \varphi)$$





Слева у нас левополяризованная эллиптическая волна, справа правополяризованная эллиптическая волна.

В случае произвольных c_1, c_2 эллипс повернут на некоторый угол относительно оси x (задача на семинаре).

4. Средняя по времени плотность потока энергии в ПМВ

$$\vec{E_0} = c_1\vec{e_x} + c_2\vec{e_y}$$

$$< \vec{S} >= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon < \vec{E} >}{4\pi} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon}{4\pi}(< E_x > + < E_y >) - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon}{4\pi}(\frac{|c_1|^2}{2} + \frac{|c_2|^2}{2}) =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon}{8\pi}(\vec{E_0}, \vec{E_0^*})$$

5. Фурье-преобразование электромагнитных полей

Для периодической функции ($f(t) = f(t+T), T$ - период, можно использовать следующее представление:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 nt}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, f_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T f(t)e^{+i\omega_0 nt}dt$$

Для непериодических функций Фурье представление в виде интеграла:

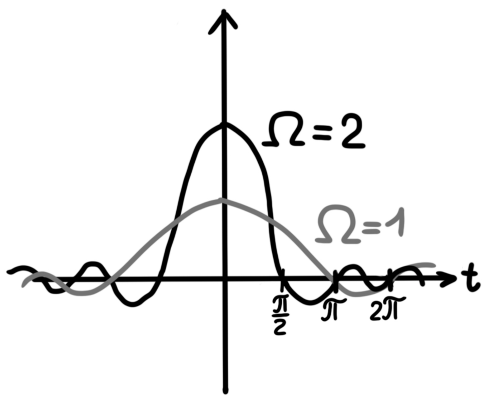
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}e^{-i\omega t}d\omega, \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{+i\omega t}dt$$

Для периодической функции: $\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\delta(\omega - n\omega_0)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}dk, \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

Напоминание про свойства δ - функции

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}d\omega = \lim_{\Omega\to\infty}\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i\omega t}d\omega = \lim \frac{-e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}}{it2\Omega}2\Omega = \lim_{\Omega\to\infty} 2\Omega \cdot \mathrm{sinc}(\Omega t)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} I(t)dt = \lim \int_{-\infty}^{\infty} 2\Omega \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} dt = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \cdot \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx\right]$$

$$\int_C \frac{e^{ix}}{x} dx = 0 = \underbrace{\int_{|z|=R}}_{=0(\text{по лемме Жордана})} + \int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{|z|=\rho} + \int_{\rho}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = -\int_{|z|=\rho} \frac{\overbrace{e^{i\rho e^{i\varphi}}}^{\to 1} \cdot \rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = -i\int_{\pi}^{0} d\varphi = i\pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} I(t)dt = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = 2\pi\delta(t-\tau) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega = 2\pi\delta(\omega-\omega')$$

1)

$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+i\omega t}}_{\delta(t-\tau)(\text{Фурье образ})} e^{-i\omega t} d\omega$$

2)

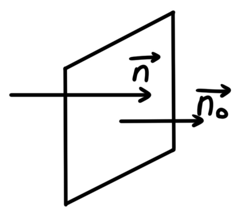
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)d\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) e^{i\omega\tau}$$

3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2^*(\omega') d\omega' \frac{1}{2\pi} 2\pi\delta(\omega-\omega') f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2^*(\omega) d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega - \text{ равенство Парсеваля}$$



Прошедшая энергия за ∞ интервал времени через 1 см^2

$$= \int (\vec{S}\vec{n})dt = \frac{c(\vec{n}, \vec{n_0})}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^2(t)dt = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}(\vec{n}\vec{n_0}) \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\vec{E}}(\omega)|^2 d\omega$$

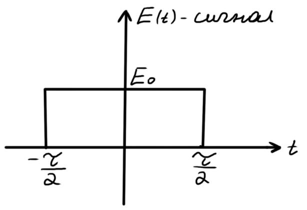
Свойства Фурье-преобразования:

1) Пусть $f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = f^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^* e^{+i\omega t} d\omega = [\omega \to -\omega'] =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(-\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

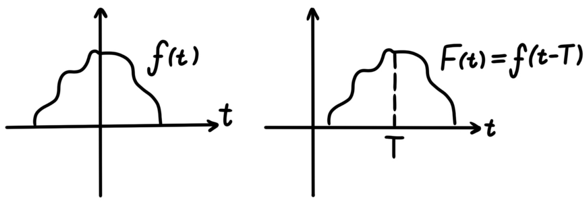
$$\hat{f}^*(-\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\hat{f}^*(\omega) = \hat{f}(-\omega)$$



Граница это - $\hat{f}(\omega)$, а внутри - $\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}$

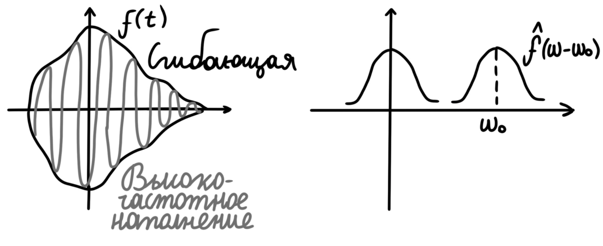
2) Спектр сдвинутого по времени сигнала:



$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{+i\omega t'} e^{i\omega T} dt' = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T}$$

3)

$$F(t) = f(t) e^{-i\omega_0 t} \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

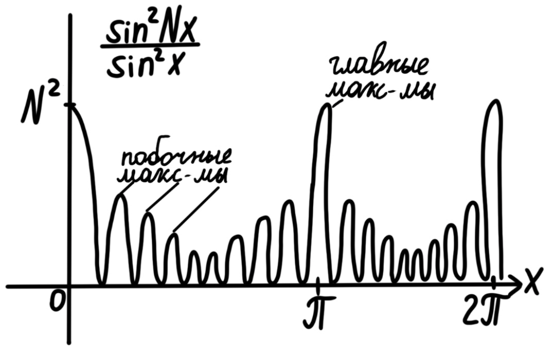


Как мы можем увидеть модулированная функция сдвигает спектр.

4) Спектр N повторенного сигнала:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t-nT); \quad F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(\omega) e^{i\omega nT} = f(\omega)\frac{e^{i\omega NT}-1}{e^{i\omega T}-1} = \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T\frac{N-1}{2}} \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}N\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}}$$

Последний выделенный множитель в правой части уравнения - это интерференционный множитель.



$$x = m\pi\varepsilon, \varepsilon > 0, \varepsilon \text{ - малое}$$

$$\frac{\sin^2(N(m\pi+\varepsilon))}{\sin^2(m\pi+\varepsilon)} = \frac{\sin^2(Nm\pi+N\varepsilon)}{(-1)^{2m}\sin^2\varepsilon} = \frac{(-1)^{2Nm}\sin^2(N\varepsilon)}{\sin^2\varepsilon} = \frac{N^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = N^2$$

6. Продолжение. Спектр свертки двух функций

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega')e^{i\omega'(t-\tau)}d\omega' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega')e^{-\omega' t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{d\tau e^{-i(\omega-\omega')\tau}}_{=2\pi\delta(\omega-\omega')} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{g}(\omega')\delta(\omega-\omega')e^{-i\omega' t} =$$

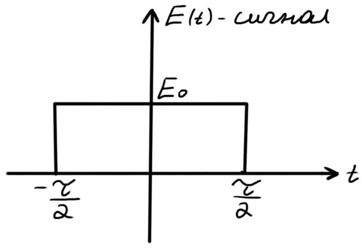
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \Rightarrow F(t) \risingdotseq \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

7. Соотношение неопределенностей

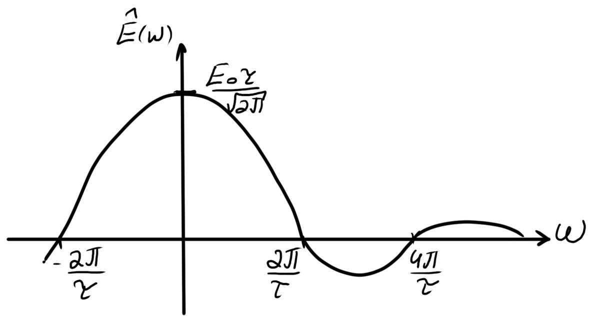
Определение 4. *Определенная связь между длительностью сигнала и шириной его спектра называется соотношение неопределенностей.*

Покажем эту связь на примерах:

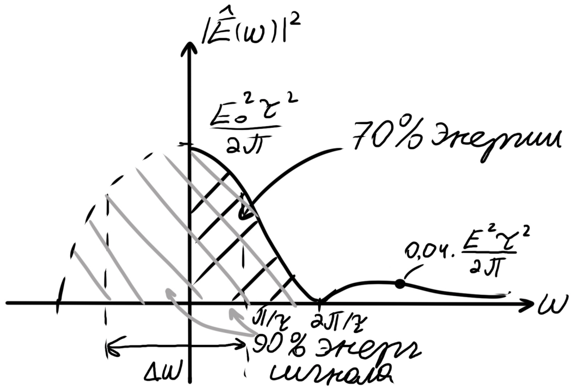
1) Спектр прямоугольного сигнала $E_1(t) = \begin{cases} E_0, |t| \le \frac{\tau}{2} \\ 0, |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ E(t) - сигнал.



$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\tau}{2}}^{-\frac{\tau}{2}} E_0 E^{+i\omega t} dt = \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}}{2i\omega\frac{\tau}{2}} = \frac{E_0\tau}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$$



Спектральная плотность энергии $= |\hat{E}(\omega)|^2$

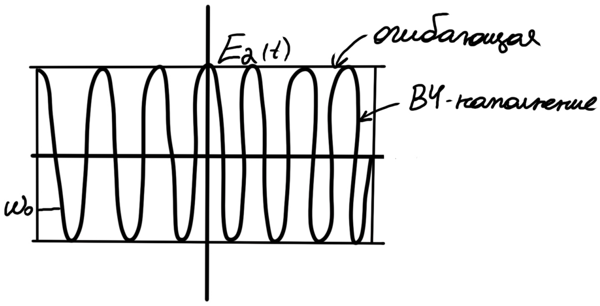


$$\Delta\omega \sim \frac{2\pi}{\tau} \Rightarrow \Delta\omega\tau \sim \pi - \text{ соотношение неопределенности}$$

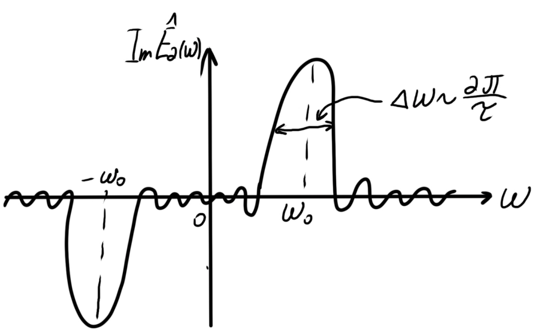
$$\tau \to \infty \Rightarrow \hat{E} \sim \delta(\omega)$$

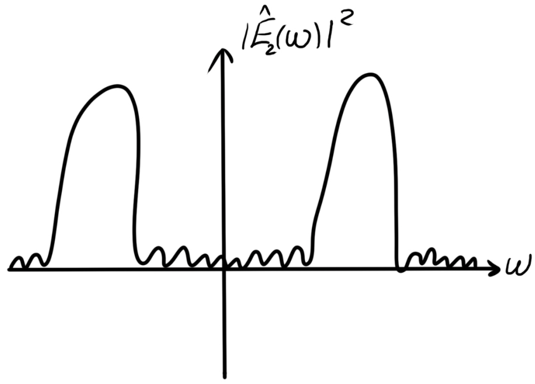
2)Спектр синусоидальной волны:

$$E_2(t) = \begin{cases} E_0 \sin\omega_0 t, |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}, \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{, пусть } \tau = NT, N(\text{целое}) \gg 1$$



$$\hat{E}_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc} \left[(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2} \right] - \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc} \left[(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2} \right] \right\}$$



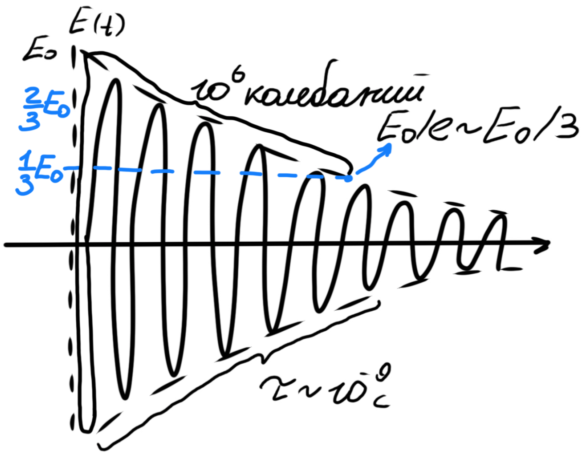


Если $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$, то такая волна - квазимонохроматическая.
3) Спектр радиационно затухающего осциллятора:
Механистическая модель атома:

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{\gamma t} \cos \omega_0 t, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{3mc^2} \sim 10^9 c^{-1} \quad \omega_0 \approx 2 \cdot 10^{16} \frac{rad}{c} \Rightarrow f \sim 3 \cdot 10^8 c^{-1}$$

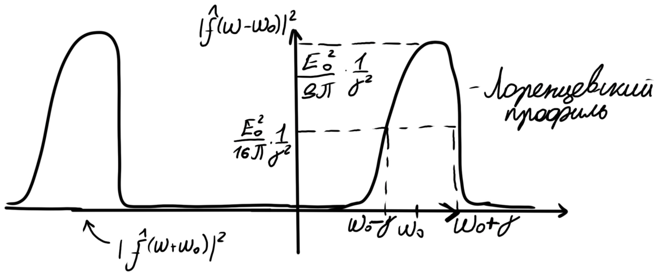
$$e^{-\gamma t} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \tau \sim \frac{1}{\gamma}$$



$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty E_0 e^{-\gamma t} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{+i\omega t} dt$$

$$\hat{E}(\omega) = \frac{E_0}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ -\frac{1}{-\gamma + i(\omega + \omega_0)} - \frac{1}{-\gamma + i(\omega - \omega_0)} \right\} = \hat{f}(\omega + \omega_0)\hat{f}(\omega - \omega_0)$$

$$|\hat{f}(\omega - \omega_0)|^2 = \frac{E_0^2}{8\pi}$$



$$\Delta\omega \sim 2\gamma - \text{ширина спектра}$$

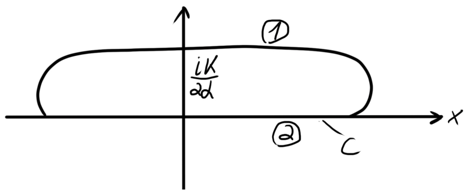
$$\Delta\omega \underbrace{\Delta t}_{\sim\tau} \sim 2\gamma \frac{1}{\gamma} \sim 2$$

$$|\hat{E}(\omega)|^2 = |\hat{f}(\omega + \omega_0)|^2 + |\hat{f}(\omega - \omega_0)|^2 + \cancel{\text{поправка}}$$

Поправка мала, если $10^9 c^{-1} \sim \Delta\omega \ll \omega_0 \sim 2 \cdot 10^{16} \frac{rad}{c}$

4) Спектр гауссовой функции : $f(x) = E_0 e^{-\alpha x^2}$ $\quad \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx =$

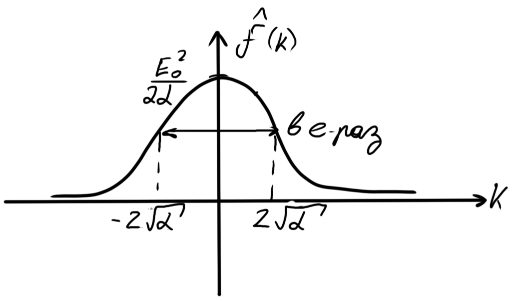
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - ikx} dx; -\alpha x^2 - ikx = -\alpha \left(x^2 + 2x\frac{ik}{2\alpha} - \frac{k^2}{4\alpha^2} \right) - \frac{k^2}{4\alpha} = -\alpha \left(x + \frac{ik}{2\alpha} \right)^2 - \frac{k^2}{4\alpha}$$

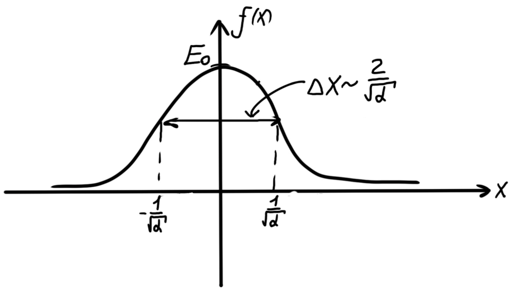


$$\int_C e^{-\alpha z^2} dz = 0 = \int_1 + \int_2 \Rightarrow \int_1 = \int_{-2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\hat{f}(k) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$$





$$\begin{array}{l} \Delta k \sim 4\sqrt{\alpha} \\ \Delta x \sim \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \end{array} \Rightarrow \Delta k \Delta x \sim 8 \sim \pi$$

5) Модулированный гауссиан: $E(x) = E_0 e^{-\alpha x^2} \cos k_0 x$

8. Преобразование Фурье функции четырех переменных (x,y,z,t). Уравнения Максвелла в Фурье преобразованиия

$$f(x,y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^4} \iiiint \hat{f}(k_x, k_y, k_z, k_t) e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} dk_x dk_y dk_z dk_t$$

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiiint \hat{f}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}, \vec{r}) - i\omega t} d^3k d\omega$$

$$\frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiiint \hat{f}(\vec{k}, \omega)(-i\omega) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d^3k d\omega \quad \frac{\partial f}{\partial t} \risingdotseq -i\omega \hat{f}(\vec{k}, \omega)$$

$$\frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial x} \risingdotseq ik_x \hat{f}(\vec{k}, \omega)$$

$$\mathrm{div} \hat{\vec{D}}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \hat{\vec{D}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\vec{D}}_y}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\vec{D}}_z}{\partial z} \risingdotseq ik_x \hat{D}_x(\vec{k}, \omega) + ik_y \hat{D}_y(\vec{k}, \omega) + ik_z \hat{D}_z(\vec{k}, \omega) = i(\vec{k}, \hat{\vec{D}}(\vec{r}, \omega))$$

$$\text{rot}\hat{\vec{E}} = [\nabla \times \hat{\vec{E}}] = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiiint \underbrace{\left[(\nabla \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r})})\right]}_{\nabla e^{i(\vec{k},\vec{r})} \times \vec{E}(\vec{k},\omega)} e^{-i\omega t} d^3 d\omega =$$

$$\text{Где } \nabla e^{i(\vec{k},\vec{r})} = \vec{e_x} i k_x e^{(i(\vec{k},\vec{r}))} + \vec{e_y} i k_y e^{(i(\vec{k},\vec{r}))} + \vec{e_z} i k_z e^{(i(\vec{k},\vec{r}))} = i\vec{k} e^{i(\vec{k},\vec{r})}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iiiint \left[i\vec{k} \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega)\right] e^{i(\vec{k},\vec{r}) - i\omega t} d^3 k d\omega$$

$$\text{rot}\vec{E} \risingdotseq i \left[\vec{k} \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega)\right]$$

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \risingdotseq i\left[\vec{k} \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega)\right] = \dfrac{i\omega}{c}\hat{\vec{B}}(\vec{k}, \omega) \\ \text{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \risingdotseq i\left[\vec{k} \times \hat{\vec{H}}(\vec{k}, \omega)\right] = \dfrac{4\pi}{c}\hat{\vec{j}}(\vec{k}, \omega) - \dfrac{i\omega}{c}\hat{\vec{D}}(\vec{k}, \omega) \\ \text{div}\vec{D} = 4\pi\rho \risingdotseq i(\vec{k}, \hat{\vec{D}}(\vec{k}, \omega)) = 4\pi\hat{\rho}(\vec{k}, \omega) \\ \text{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow (\vec{k}, \hat{\vec{B}}(\vec{k}, \omega)) = 0 \end{cases}$$

В системе слева это уравнения Максвелла, а справа преобразование Фурье уравнений Максвелла.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \risingdotseq -i\omega\hat{\rho}(\vec{k}, \omega) + i(\vec{k}, \hat{\vec{j}}(\vec{k}, \omega)) = 0$$

Если $\vec{B} = \mu\vec{H}, \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \varepsilon, \mu - \text{const}$

$$\underset{a}{\vec{k}} \times \left[\underset{b}{\vec{k}} \times \underset{c}{\vec{E}}\right] = \frac{\omega\mu}{c}\left(-\frac{\omega}{c}\varepsilon\hat{\vec{E}}\right)$$

$$||$$

$$\vec{k}\underbrace{(\vec{k}, \hat{\vec{E}})}_{=0} - \hat{\vec{E}}k^2 = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2\hat{\vec{E}} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)^2} = \frac{\omega^2}{v_{\text{в}}^2}$$