

Конспект лекций по дисциплине

Аналитическая механика

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

Преподаватель: Толмачев Сергей Сергеевич

Оглавление

1	Ньютонова механика. Центральное поле. Рассеяние	2
1.	Повторение	2
2.	Одномерное движение в потенциальных полях	2
3.	Движение в центральном поле	4
4.	Секторальная скорость	4

Глава 1: Ньютонова механика.

Центральное поле. Рассеяние

1. Повторение

$$\vec{f} = \vec{f}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dots)$$

Если сила не зависит от скорости то частица движется в поле, которое эту силу создает.

$$\vec{f} = \vec{f}(t, \vec{r}) - \text{стационарные силы.}$$

$$\oint \vec{f} d\vec{l} = 0 - \text{потенциальность}$$

$$U(\vec{r}, t) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{f}(\vec{r}, t) d\vec{l}$$

2. Одномерное движение в потенциальных полях

$$\vec{F} = m\vec{a} : x(t) \Rightarrow \vec{F} = m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}(x, t)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 - \text{стационарный потенциал}$$

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

При стационарном потенциале сохраняется полная энергия.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m\dot{x}\ddot{x}}{2} + \frac{dU}{dt}\dot{x} = \dot{x}(m \underbrace{\ddot{x}}_{(1)} + \frac{\partial U}{\partial x}) = 0$$

(1) - исходя из законов Ньютона это всегда равно нулю.

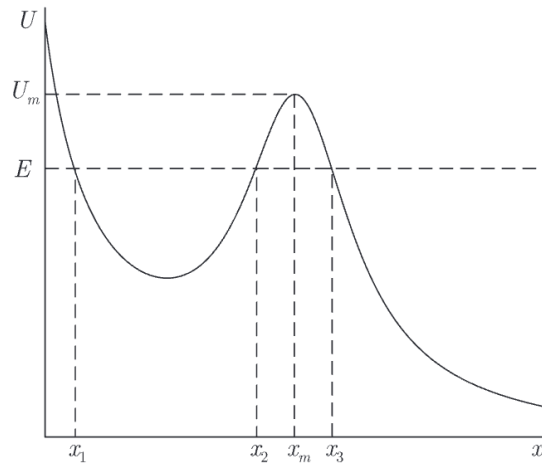
E - интеграл движения.

Понижаем m порядок дифференцируя уравнения.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U(x)) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \Rightarrow \boxed{t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}} - \text{закон движения квадратуре}$$

\pm - знак зависит от направления движения.



Кинетическая энергия: $T = E - U$

$E < U_m : x_1 \leq x \leq x_2$ - финитное

$E > U_m : -$ движение всегда инфинитное

$E < U_m : x \geq x_3$ - инфинитное

$E = U_m :$

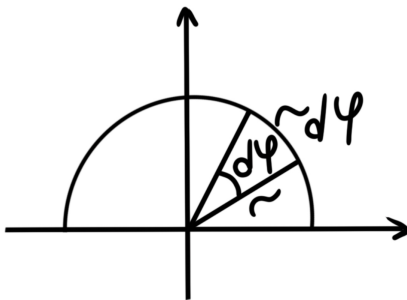
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial x}(x_m) &= 0 \quad U_x = U_m + \frac{\partial U}{\partial x}(x_m)(x - x_m) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x - x_m)^2 + \dots \\
 t - t_0 &= -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U_m - \frac{1}{2} U''(x_m)(x - x_m)^2}} = -\sqrt{\frac{m}{-U''(x_m)}} \int_{x_0}^x \frac{1}{x - x_m} = \\
 &= -\sqrt{\frac{m}{-U''_{xx}(x_m)}} \ln \left| \frac{x - x_m}{x_0 - x_m} \right| \\
 x - x_m &= (x_0 - x_m) e^{-\sqrt{\frac{-U''(x_m)}{m}}(t-t_0)}; \quad x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_m
 \end{aligned}$$

3. Движение в центральном поле

$$\begin{aligned}
 U(\vec{r}) &\equiv U(r) \\
 \vec{F} &= -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \\
 \vec{M} &= [\vec{r} \times \vec{p}] = \text{const} \\
 \frac{d\vec{M}}{dt} &= \underbrace{\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right]}_{\vec{B} \parallel \vec{p}} + \underbrace{\left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right]}_{\vec{F} \parallel \vec{r}} = 0 \\
 \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \\
 \vec{r} &= \vec{e}_x x + \vec{e}_y y = r \cos \varphi \vec{e}_x + r \sin \varphi \vec{e}_y \\
 \dot{\vec{r}} &= \vec{e}_x (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}) + \vec{e}_y (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}) = \\
 &= \dot{r} (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) + r \dot{\varphi} (-\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\
 E &= \frac{1}{2} m v^2 + U(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r \dot{\varphi})^2) + U(r) \\
 \vec{M} &= [r \vec{e}_r \times m \vec{v}] = r m \dot{r} [\vec{e}_r \times \vec{e}_r] + \underbrace{m r^2 \dot{\varphi} [\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi]}_{\vec{e}_z} \\
 \vec{M} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} \Rightarrow M = m r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow d\varphi = \frac{M}{m r^2} dt \quad (1)
 \end{aligned}$$

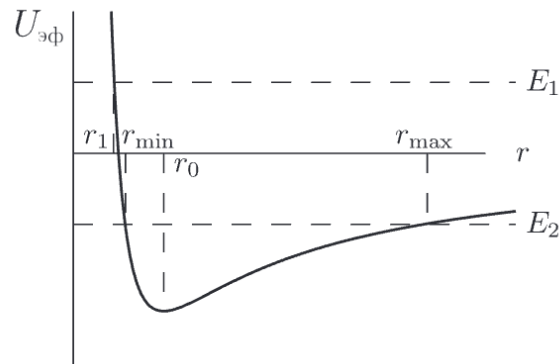
$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{U(r)}_{U_{\text{эФ}}} + \frac{M^2}{2 m r^2} \\
 t - t_0 &= \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эФ}}(r)}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \varphi - \varphi_0 = \pm \frac{M}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эФ}}(r)}}
 \end{aligned}$$

4. Секторальная скорость



$$\frac{ds}{dt} = \frac{\frac{1}{2} r r d\varphi}{dt} = \frac{M}{2m} = \text{const}$$

Задача Кеплера:



$E \geq 0$ – инфинитное $E < 0$ – инфинитное

$$U = -\frac{\alpha}{r} \quad U_{\text{эф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{M}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}}} \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{dU}{\sqrt{e^2 - (u-1)^2}} = \arccos \frac{u-1}{e}$$

$U = \frac{p}{r}$, где p параметр орбиты : $p = \frac{M^2}{m\alpha}$

$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ - эксцентриситет

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$e > 1 (E > 0)$ - гипербола

$e = 1 (E = 0)$ - парабола

$e < 1 (E < 0)$ - эллипс

$e = 0 (E = -\frac{m\alpha^2}{2M^2})$ - окружность