$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собственные числа матрицы A

Теорема 1. *Нулевое решение* $\vec{y}^*(t) = 0$ *системы (2) асимптотически устойчиво* $\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n : \mathrm{Re}\lambda_j < 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

От противного. Пусть $\exists \lambda_k : \mathrm{Re}\lambda_k \geq 0$. Взять решение $\vec{y}(t) = e^{\lambda_k t}\vec{v}_k,\ \vec{v}_k$ - собственный вектор, соответственного λ_k.

$$\|\vec{y}(t)\| = \left\|e^{\lambda_k t}\vec{v}_k\right\| = \left|e^{\lambda_k t}\right| \|\vec{v}_k\| = e^{\mathrm{Re}\lambda_k t} \underbrace{\|\vec{v}_k\|}_{\neq 0} \xrightarrow{\cancel{t \to +\infty}} 0$$

$\Rightarrow$ нулевое решение не асимптотически устойчиво. Противоречие $\Rightarrow \forall \lambda_j\ \mathrm{Re}\lambda_j < 0$

$(\Leftarrow)$:

Пусть $\forall \lambda_j\ \mathrm{Re}\lambda_j < 0$. Все решения системы $\vec{y}(t) = c_1\vec{\varphi}_1(t) + ... + c_n\vec{\varphi}_n(t)$

$$\lambda_1 \to \underbrace{\vec{v}_c, \vec{v}_{\text{пр}_1}, ..., \vec{v}_{\text{пр}_{m-1}}}_{m \text{ - векторов}}$$

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_{\text{с}} \\ \vec{\varphi}_2(t) = e^{\lambda_1 t}(\vec{v}_{\text{с}}t + \vec{v}_{\text{пр}_1}) \\ \vdots \\ \vec{\varphi}_m(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\vec{v}_{\text{с}}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + ... + \vec{v}_{\text{пр}_{m-2}}t + \vec{v}_{\text{пр}_{m-1}}\right) \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\|\vec{\varphi}_1(t)\| = \left|e^{\lambda_1 t}\right| \|\vec{v}_c\| = e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\|\vec{v}_c\| \xrightarrow{t \to +\infty} 0 \\ &\|\vec{\varphi}_2(t)\| = e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\left\|\vec{v}_{\text{с}}t + \vec{v}_{\text{пр}_1}\right\| \xrightarrow{t \to +\infty} 0 \\ &\vdots \\ &\|\vec{\varphi}_m(t)\| \xrightarrow{t \to +\infty} 0 \end{aligned}$$

Дописать

$\Rightarrow \|\vec{y}(t)\| \leq |c_1| \|\vec{\varphi}_1(t)\| + |c_n| \|\vec{\varphi}_n(t)\| \xrightarrow{t \to +\infty} 0$

#

Теорема 2. *Пусть* $\exists \lambda_k : \mathrm{Re}\lambda_k > 0 \Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0$ *неустойчиво.*

Доказательство.

Смотреть доказательство Теоремы 3. $(\Rightarrow)$ (Надо заменить $\mathrm{Re}\lambda_k \geq 0$ на $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$)

#

Теорема 3. *Пусть* $\forall \lambda_j\ \mathrm{Re}\lambda_j \leq 0$ *и* $\exists \lambda_k : \mathrm{Re}\lambda_k = 0$.

1) Если $\forall \lambda_k : \mathrm{Re}\lambda_k = 0$, *у собственного числа* λ_k *нет присоединенных векторов, то* $\vec{y}^*(t)$ *системы (2) устойчиво по Ляпунову;*

2) Если $\exists \lambda_k : \mathrm{Re}\lambda_k = 0$, *у собственного числа* λ_k *есть присоединенные вектора, то* $\vec{y}^*(t)$ *неустойчиво.*

Доказательство.

1) Все решения системы: $\vec{y}(t) = c_1\vec{\varphi}_1(t) + ... + c_n\vec{\varphi}_n(t)$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n : \mathrm{Re}\lambda_k = 0,\ k = 1, \ldots, m$

$\lambda_{m+1}, ..., \lambda_n : \text{Re}\lambda_j < 0,\ j = m+1, ..., n$

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_{c_1} \\ \vec{\varphi}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\vec{v}_{c_2} \\ \vdots \\ \vec{\varphi}_m(t) = e^{\lambda_m t}\vec{v}_{c_m} \end{cases} \quad \|\vec{\varphi}_k(t)\| = \underbrace{\left|e^{\lambda_k t}\right|}_{=1} \|\vec{v}_{c_k}\| = \|\vec{v}_{c_k}\|$$

$$\vec{\varphi}_{m+1}(t), ..., \vec{\varphi}_n(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{y}(t)\| \le |c_1| \underbrace{\|\vec{\varphi}_1(t)\|}_{\|\vec{v}_{c_1}\|} + ... + |c_m| \underbrace{\|\vec{\varphi}_m(t)\|}_{\|\vec{v}_{c_m}\|} + |c_{m+1}| \underbrace{\|\vec{\varphi}_{m+1}(t)\|}_{\xrightarrow{t\to+\infty} 0} + |c_n| \underbrace{\|\vec{\varphi}_n(t)\|}_{\xrightarrow{t\to+\infty} 0}$$

Все решение ограничено вправо.
$\Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0$ устойчиво по Ляпунову
2) $\lambda_k : \text{Re}\lambda_k = 0 \Rightarrow \vec{v}_k$ -собственное вектор, $\vec{v}_{\text{пр}}$ - присоединенный вектор.

$$\vec{y}(t) = e^{\lambda_k t}(\vec{v}_c(t) + \vec{v}_{\text{пр}}) \text{ - решение}$$

$$\|\vec{y}(t)\| = \left|e^{\lambda_k t}\right| \|\vec{v}_c(t) + \vec{v}_{\text{пр}}\| \ge \|\vec{v}_c\| \, |t| - \|\vec{v}_{\text{пр}}\| \xrightarrow{t\to+\infty} \infty$$
$$\vec{y}^*(t) = 0 \text{ - неустойчиво.}$$

#

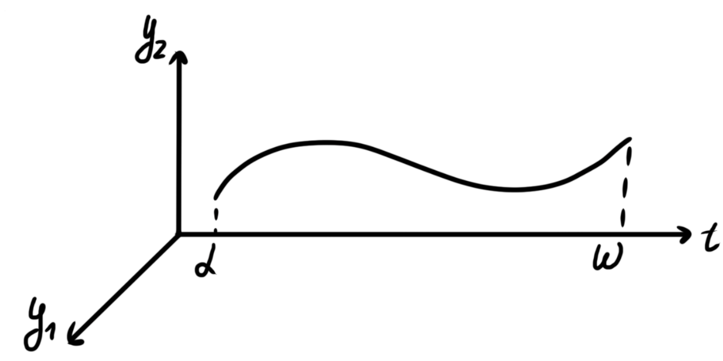
1. Устойчивость решений автономных систем

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{}(\vec{y}) \tag{1}$$

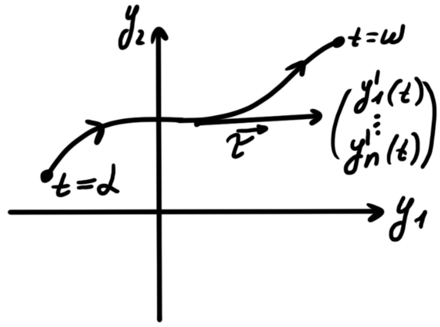
(1) - автономная система, так как $\vec{f}(\vec{y})$ явно не зависит от t.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ \vec{f}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{y}) \end{pmatrix}$$

Выполняются условия теоремы Пикара, то есть $\vec{f}(\vec{y})$ - непрерывен и $\exists \dfrac{\partial f_i}{\partial y_i}$ - непрерывно.
$\vec{y}^*(t) = 0$ - решение $\Rightarrow \vec{0} = \vec{f}(\vec{0})$
Пусть $\vec{y}(t)$ - решение (1), определенно при $t \in (\alpha, \omega)$



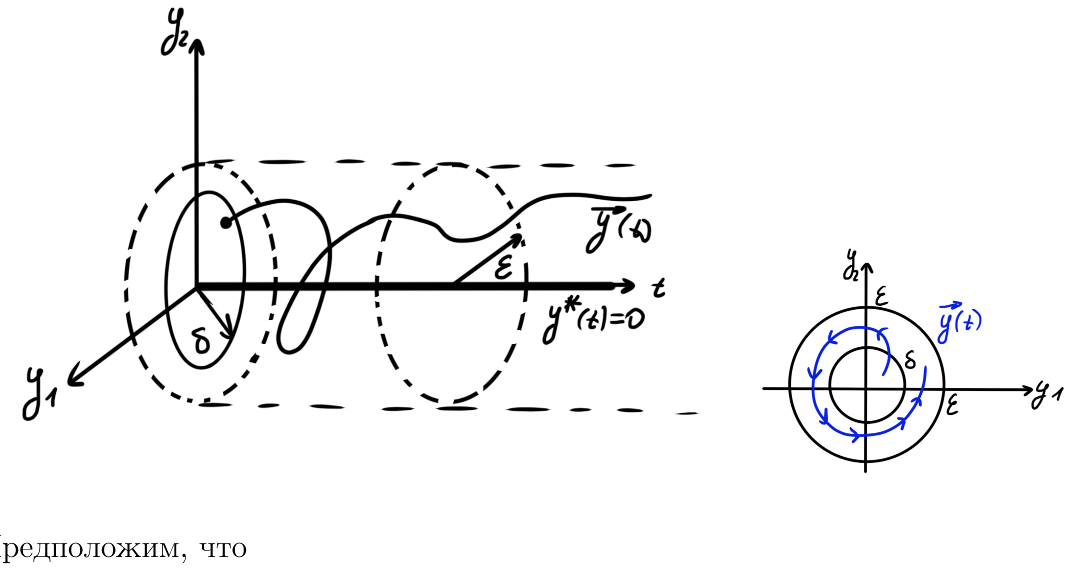
Интегральная кривая - график решения, то есть множество точек $\{(t, y_1(t), ..., y_n(t)), t \in (\alpha, \omega)\}$



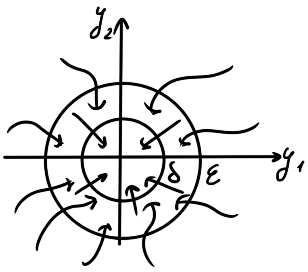
Фазовая траектория - проекция интегральной кривой на пространство $\{y_1, \ldots, y_n\}$, то есть множество точек $\{(y_1, \ldots, y_n), t \in (\alpha, \omega)\}$

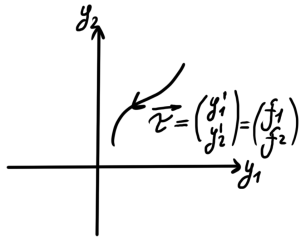
Фазовое пространство - пространство $\{y_1, \ldots, y_n\}$

Устойчивость нулевого решения:

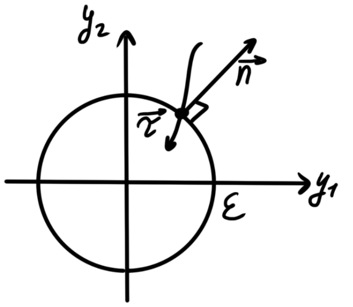


Предположим, что





$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \text{ - решение системы } \begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

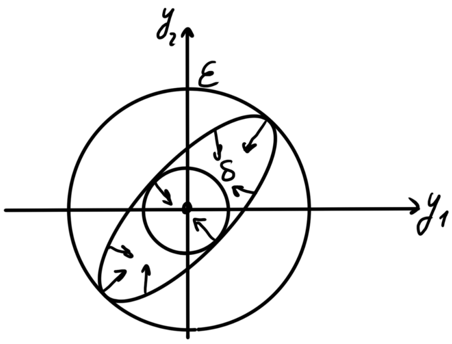


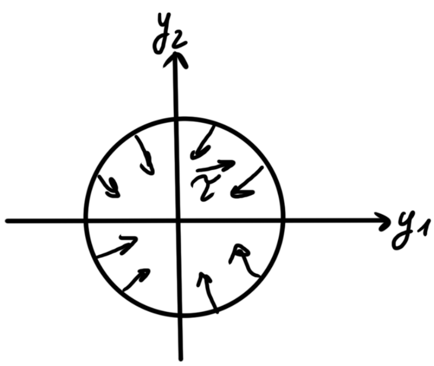
$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 = \varepsilon^2$$

$$\vec{n} = \nabla V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \end{pmatrix}$$

$(\vec{\tau}, \vec{n}) < 0 \Leftrightarrow$ угол между векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ от $\dfrac{\pi}{2}$ до π:

$$(\vec{\tau}, \vec{n}) = \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V'_{y_1} \\ V'_{y_2} \end{pmatrix} \right) = f_1 V'_{y_1} + f_2 V'_{y_2} = f_1 2y_1 + f_2 2y_2 < 0$$





Определение 1. *Функция $V(\vec{y})$, определенная в шаре $\underbrace{\{\|\vec{y}\| < r\}}_{\Leftrightarrow y_1^2+\ldots+y_n^2<r^2}$, называется функцией Ляпунова для системы (1) если:*
1) $V(\vec{y}) \in C^1(\|\vec{y}\| < r)$
2) $V(\vec{y}) > 0 \ \forall 0 < \|\vec{y}(t)\| < r, \ V(\vec{0}) = 0$
3) $(\nabla V(\vec{y}), \vec{f}(\vec{y})) \le 0, \ \ \|\vec{y}\| < r$

Теорема 4 (Теорема Ляпунова об устойчивости по Ляпунову)**.** *Если для системы (1) существует функция Ляпунова, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.*

Пример: Исследовать на устойчивость нулевое решение.

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = -y_2 \end{cases}$$

1 способ:

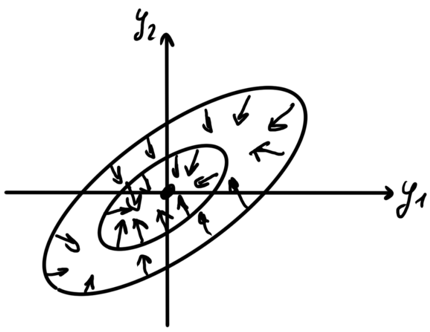
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \lambda_{1,2} = -1 \ \mathrm{Re}\lambda_j < 0 \Rightarrow \text{нулевое решение асимптотически устойчиво}$$

2 способ:

$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$$

$$\begin{aligned} &1) V \in C^1(\mathbb{R}) \\ &2) V > 0, \ (y_1, y_2) \ne (0,0), \ V(0,0) = 0 \\ &3) (\nabla V, f) = \left(\begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} \right) = -2y_1^2 - 2y_2^2 \le 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ по Теореме Ляпунова нулевое решение устойчиво по Ляпунову.



Теорема 5 (Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости)**.** *Пусть существует функция $V(\vec{y})$, удовлетворяет условиям 1), 2), 3^*) $(\nabla V(\vec{y}), \vec{f}(\vec{y})) < 0$ при $0 < \|\vec{y}\| < r$. Тогда нулевое решения $\vec{y}^*(t) = 0$ асимптотически устойчиво.*

Теорема 6 (Теорема Ляпунова об асимптотической неустойчивости)**.** *Пусть существует функция $V(\vec{y})$ удовлетворяющее условиям 1), 2), 3^{**})$(\nabla V(\vec{y}), \vec{f}(\vec{y})) > 0$ при $0 < \|\vec{y}\| < r$. Тогда нулевое решение неустойчиво.*