

$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{cases} \quad (1)$$

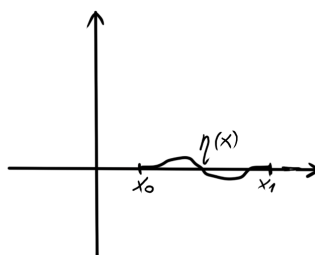
Найти функцию  $y(x)$  такую, чтобы функционал  $I[y]$  принимал наибольшее или наименьшее значение.

Необходимо найти условие локального экстремума:

$$\text{Если } \tilde{y} \text{ экстремаль} \Rightarrow \tilde{y} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2)$$

*Доказательство формулы (2).*

$$I[\tilde{y}] \leq I[y], y = \tilde{y} + \varepsilon \eta, \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1), \eta(x) \in C^2([x_0, x_1]) - \text{финитная}$$

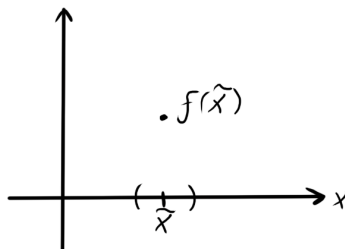


$$\underbrace{I[y]}_{=g(0)} \leq \underbrace{I[\tilde{y} + \varepsilon \eta]}_{=g(\varepsilon)} \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon) \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) \right) \eta(x) dx, \forall \eta(x) - \text{финитная}$$

**Лемма 1** (Лагранжа). Пусть  $f(x)$  - непрерывна и  $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0, \forall \eta(x)$  - финитная на  $[x_0, x_1]$ . Тогда  $f(x) = 0, \forall x \in [x_0, x_1]$

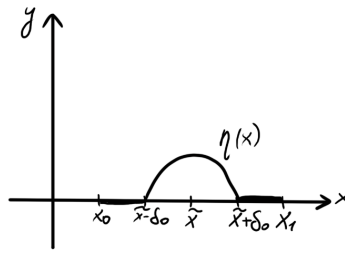
*Доказательство.* От противного:



Пусть для определенности  $f(\tilde{x}) > 0$ . Тогда так как  $f(\tilde{x})$  - непрерывна, то  $f(x) > 0$  при  $x \in (\tilde{x} - \delta_0, \tilde{x} + \delta_0)$

$$\text{Возьмем функцию } \eta(x) = \begin{cases} (\delta_0^2 - (x - \tilde{x})^2)^4, & |x - \tilde{x}| < \delta \\ 0, & |x - \tilde{x}| > \delta_0 \end{cases} - \text{финитная функция}$$

Наша функция  $\eta(x)$  плавно переходит к нашим точкам  $\tilde{x} - \delta_0, \tilde{x} + \delta_0$



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = \int_{\tilde{x}-\delta_0}^{\tilde{x}+\delta_0} \underbrace{f(x)}_{>0} \underbrace{\eta(x)}_{>0} dx > 0 - \text{противоречие}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [x_0, x_1] : f(x) = 0$$

■  
■

Из доказательства леммы следует, что доказана формула (2)

## 1. Случай понижения порядка в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad F = F(x, y(x), y'(x))$$

- 1)  $F = f(x, y) \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = 0 \Rightarrow y = y(x)$
- 2)  $F = F(x, y') \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = C$
- 3)  $F = F(y, y') :$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \mid \cdot y'$$

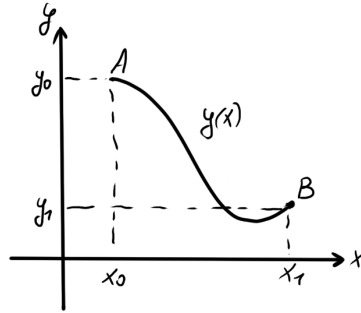
$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - \underbrace{y' \frac{\partial F}{\partial y'}}_{= \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - y'' \frac{\partial F}{\partial y'}} = 0$$

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Заметим, что:  $\frac{d}{dx} F(y, y') = y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'}$

$$\frac{d}{dx} F - \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C}$$

## 2. Решение задачи о брахистохроне



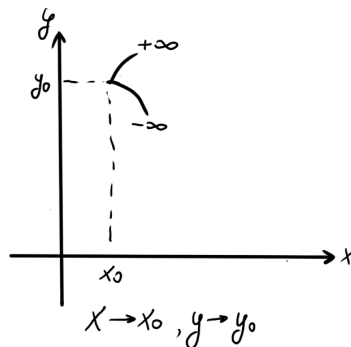
$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}} dx \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} - y' \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \frac{2y'}{2\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{1 + (y')^2} - (y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}}}_{1} = C \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

$$1 = \underbrace{c^2 2g}_{=\frac{1}{c_1} > 0} (y_0 - y)(1 + (y')^2)$$

$$c_1 = (y_0 - y)(1 + (y')^2) \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{c_1}{y_0 - y} - 1} = y' \quad (3)$$



$$1 + (y'(x))^2 = \frac{c_1}{y_0 - y(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_1} +\infty$$

$$y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \pm \infty \Rightarrow y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$$

выбор: -

Если выбрать знак "+" то тело не сможет скатиться в нужную точку

$$y' = -\sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}}$$

Замена:  $\tilde{y} = y_0 - y(x)$ :

$$\tilde{y}'(x) = +\sqrt{\frac{c_1 - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Замена:  $\tilde{y} = c_1 z$ :

$$c_1 z' = \sqrt{\frac{c_1 - c_1 z}{c_1 z}} = \sqrt{\frac{1 - z}{z}}$$

Замена:  $z = \sin^2 s, s \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$c_1 2 \sin s \cos s \cdot s' = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 s}{\sin^2 s}} = \frac{\cos s}{\sin s} \text{ (знак определили из интервала s)}$$

$$2c_1 \sin^2 s \frac{ds}{dx} = 1$$

$$\frac{dx}{ds} = c_1(1 - \cos(2s)) \Rightarrow x(s) = c_1 \left( s - \frac{1}{2} \sin 2s \right) + c_2$$

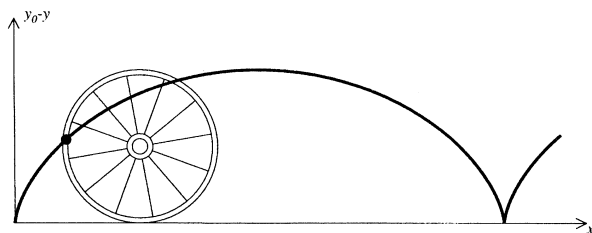
$$y(x) = y_0 - \tilde{y}(x) = y_0 - c_1 z = y_0 - c_1 \sin^2 s = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2s)$$

$$y(s) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos(2s))$$

Замена:  $t = 2s, t \in (0, \pi)$

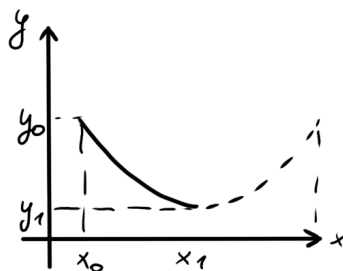
$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1}{2}(t - \sin t) + c_2 \\ y(t) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2} + c_2 \\ y - \frac{c_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2} \sin t \\ \frac{c_1}{2} \cos t \end{pmatrix} \quad t \in (0, \pi)$$



$$t = 0 : \begin{cases} x(0) = c_2 = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$t = \pi : \begin{cases} x(\pi) = \frac{c_1}{2}\pi + c_2 = \frac{c_1}{2}\pi + x_0 \\ y(\pi) = y_0 - c_1 \end{cases}$$



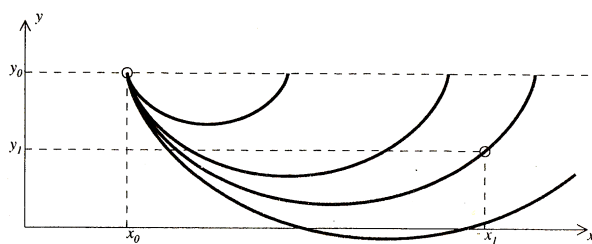
Теперь возьмем "+" (формула (3)):

$$y' = \sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}} \quad (5)$$

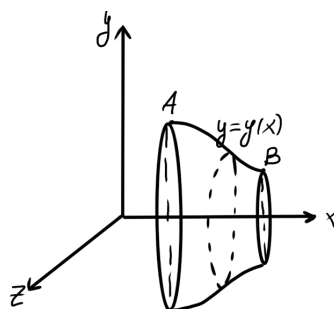
$$\tilde{y}(x) = y_0 - y(x) \Rightarrow \tilde{y}' = -\sqrt{\frac{c - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Делаем те же действия (замены) и получаем такие же  $x(s), y(s)$  с различием только в интервале для  $t$ :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1}{2}(t - \sin t) + x_0 \\ y(t) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, 2\pi) \Rightarrow \text{циклоида полная}$$



### 3. Решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади



$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$F - y \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

$$2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} - y' 2\pi y \frac{2y'}{2\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

$$2\pi y \underbrace{\left( \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right)}_{= \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}} = C$$

$$(2\pi y)^2 = c^2(1 + (y')^2)$$

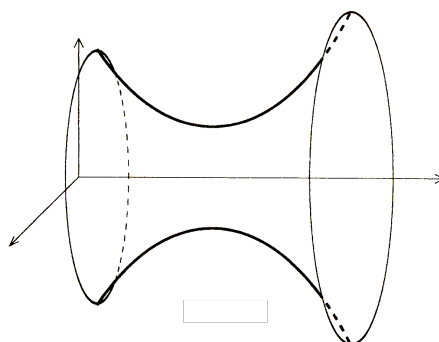
1)  $c = 0 \Rightarrow y(x) = 0$  - решение, если  $y_0 = y_1 = 0$

2)  $c \neq 0 \Rightarrow \left( \frac{y}{c_1} \right)^2 = 1 + (y')^2 \Rightarrow y' = \pm \sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1}, \quad c_1 = \frac{c}{2\pi} > 0$

$$y(x) = \text{ch} z(x) c_1, \quad z > 0$$

$$c_1 \text{sh} z \cdot z'(x) = \pm \underbrace{\sqrt{\text{ch}^2 z - 1}}_{= \text{sh} z} \Rightarrow c_1 z' = \pm 1$$

$$z = \pm \frac{x + c_2}{c_1} \Rightarrow y(x) = c_1 \text{ch} \left( \frac{x + c_2}{c_1} \right) - \text{цепная линия}$$



#### 4. Вариационная задача с несколькими функциями

$$I[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_n(x), y_n'(x)) dx$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{01}, \dots, y_n(x_0) = y_{0n} \\ y_1(x_1) = y_{11}, \dots, y_n(x_1) = y_{1n} \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:

Пусть  $\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x)$ , :

$$I[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n] \leq I[y_1, \dots, y_n], \quad \forall y_2, \dots, y_n$$

Можно взять  $y_1$  - любое:  $y_2 = \tilde{y}_2, \dots$ ,

$$\Rightarrow \underbrace{I[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n]}_{Y[\tilde{y}_1]} \leq \underbrace{I[y_1, \dots, \tilde{y}_n]}_{Y[y_1]} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0$$

Аналогично:  $\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0$