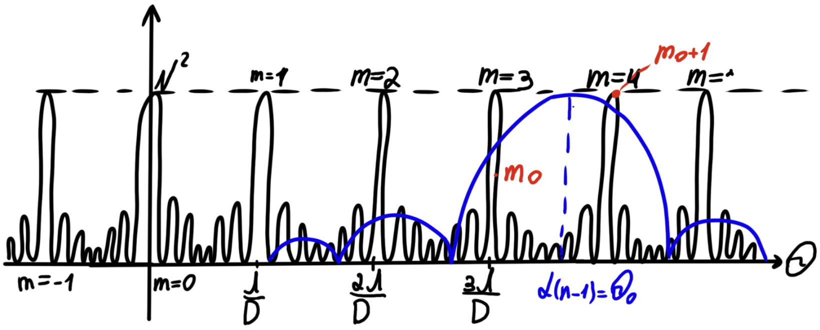
Положение главных максимумов:

$$\sin^2\left(\frac{kD}{2}\sin\theta_m\right) = 0 \Rightarrow \frac{kD}{2}\sin\theta_m = m\pi \Rightarrow \sin\theta_m = \theta_m = m\frac{\lambda}{D}$$



$$\sin\theta_0 = \alpha(n-1) \ll 1 \Rightarrow \theta_0 = \alpha(n-1)$$

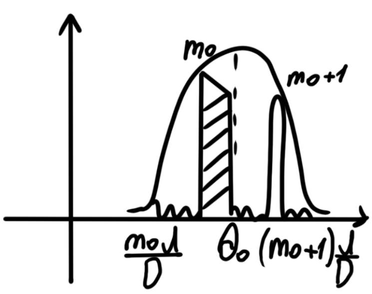
Обращение в ноль: $\dfrac{kD}{2}(\alpha(n-1) - (\theta_0 - \Delta\theta)) = \pm\pi \Rightarrow \Delta\theta = \pm\dfrac{\lambda}{D}$

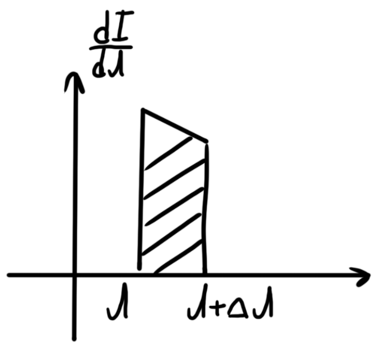
$$m_0 = \left[\frac{\alpha(n-1)}{\frac{\lambda}{D}}\right]$$

$\delta\theta_{int}$ - ширина главного максимума $= \dfrac{\Delta\theta_m}{\frac{\lambda}{D}} = \dfrac{\lambda}{DN}$

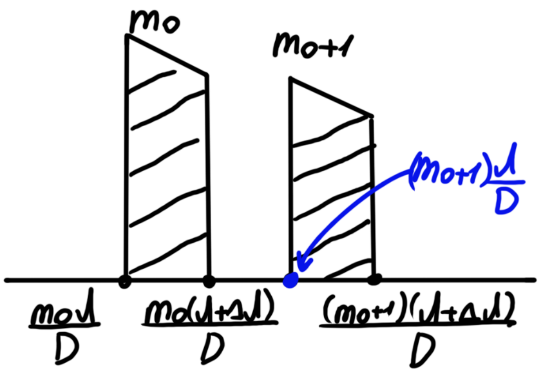
1. Основные параметры диффракционных решеток

1. Угловая дисперсия: $\dfrac{d\theta_m}{d\lambda} = \dfrac{d}{d\lambda}\left(m\dfrac{\lambda}{D}\right) = \dfrac{m}{D} = \dfrac{\theta_m}{\lambda}$ - для фазовой решетки $\frac{d\theta}{d\lambda} \sim \frac{\theta_{m_0}}{\lambda}$
   2. Свободная область дисперсии $\Delta\lambda$
   (для фазовой решетки)





$$\lambda' = \lambda \pm \lambda + \Delta\lambda$$



$$\Delta\lambda_{\max} - ? \quad \frac{m_0(\lambda+\Delta\lambda)}{D} \le (m_0+1)\frac{\lambda}{D} \Rightarrow m_0\Delta\lambda \le \lambda$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda_{\max} = \frac{\lambda}{m_0} \text{ - свободная область дисперсии}$$

3. Спектральное разрешение $R_\lambda = \dfrac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}}$
(для фазовой решетки)

$$\frac{m_0\lambda_1}{D} + \underbrace{\delta\theta_{int}}_{\frac{\lambda_1}{DN}} = \frac{m_0\lambda_2}{D} = \frac{m_0(\lambda_1+\delta\lambda_{\min})}{D}$$

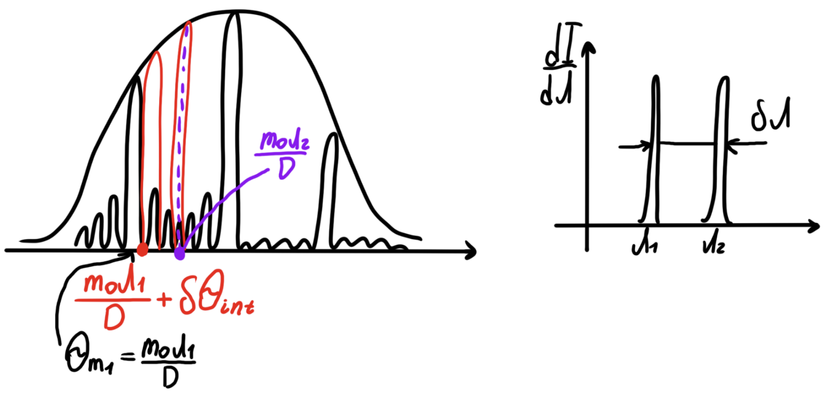
$$\frac{\lambda_1}{DN} = \frac{m_0\delta\lambda_{\min}}{D}$$

$$R_\lambda = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} = m_0 N$$

, где N - типичное 10^5, $m_0 = 1 \pm 100$

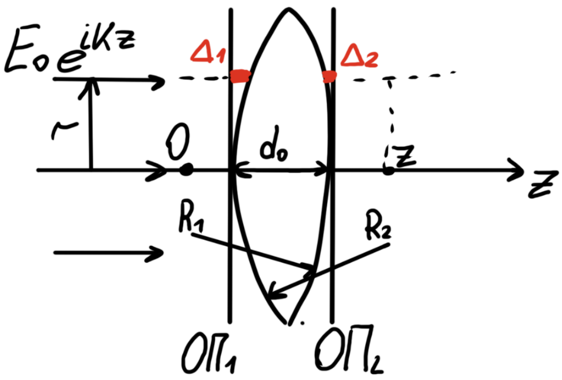
2. Принцип Гюйгенса-Френеля и геометрическая оптика

На линзу падает плоская монохроматическая волна под малым углом к Oz



$R_1 > 0,\ R_2 < 0$

$\varphi(r)_{\text{на оп}_2} = kS_{\text{оптический путь}} = k(\Delta_1 + \Delta_2 + (d_0 - \Delta_1 - \Delta_2)n) = \underbrace{kd_0n}_{\varphi_0} - k(n-1)(\Delta_1 + \Delta_2)$



$$\Delta z = \sqrt{R_1^2 - r^2} \Rightarrow \Delta_1 = R_1 - \Delta z = R_1 - \sqrt{R_1^2 - r^2}$$

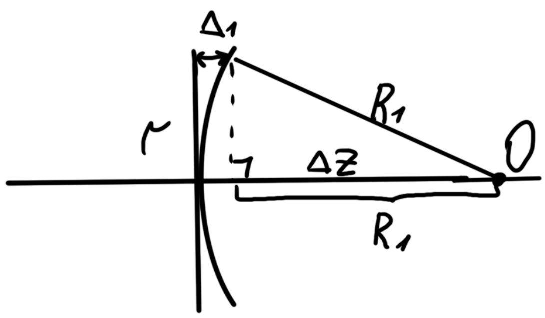
Если углы малы $\Rightarrow r \ll R_1, R_2$

$$\Rightarrow \Delta_1 = R_1 - R_1\left(1 - \frac{r^2}{2R_1^2}\right) = \frac{r^2}{2R_1}$$

$$\Delta_2 = \frac{r^2}{2(-R_2)} \Rightarrow \varphi(r) = \varphi_0 - k\frac{r^2}{2}(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \varphi_0 - \frac{kr^2}{2F_\text{л}}$$

, где $F_\text{л}$ - фокусное расстояние линзы.

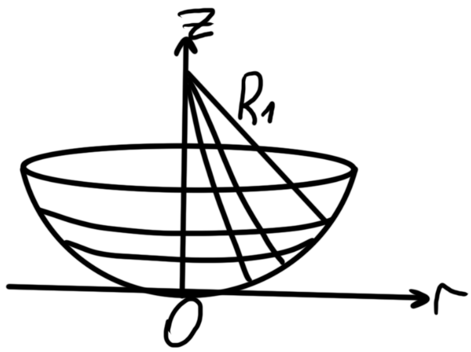
$$\varphi(r,z) = \varphi_0 - \frac{kr^2}{2F_\text{л}} + (z - d_0)k \text{ на поверхности фазового фронта } \varphi(r,z) = \text{const}$$



Параболоид вращения $z = \text{const} + \dfrac{r^2}{2F_\text{л}}$

Параболоид и сфера близки в параксиальном приближении.

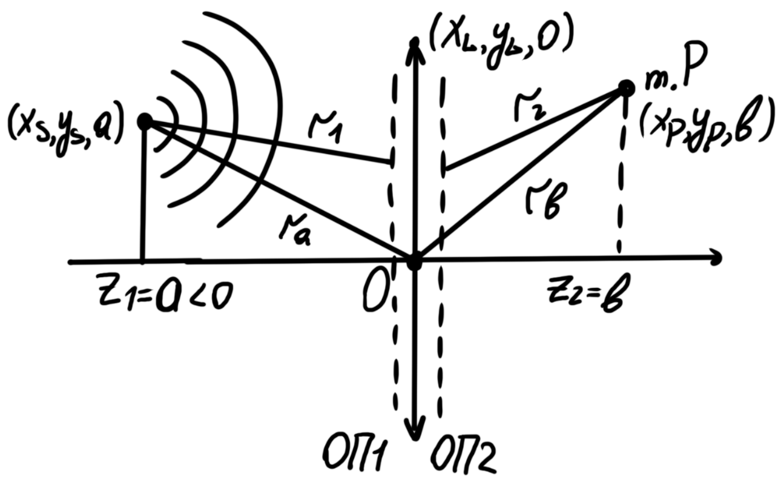
$$\text{В точке: } \frac{dz}{dr} = 0 \quad \frac{1}{R_\text{кр}} = \frac{d^2z}{dr^2} = \frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{r^2}{2F_\text{л}}\right) = \frac{1}{F_\text{л}} \Rightarrow R_\text{кр} = F_\text{л}$$



Изображение точечного источника линзой с учетом дифракции на линзе.

$$r_1 = \sqrt{(x_l - x_s)^2 + (y_l - y_s)^2 + a^2},$$
$$r_2 = \sqrt{x_p - x_l^2 + (y_p - y_l)^2 + b^2}$$

$$|a|\,|b| \gg |x_l|\,, |x_s|\,, |y_l|\,, |y_s|\,, |y_p|\,, |x_p| \text{ - параксиальное приближение}$$



$$\text{На ОП}_1 : E_1(x_2, y_2, 0) = \frac{A}{r_1} e^{ikr_1}$$
$$r_1 \approx |a| \left(1 + \frac{(x_l - x_s)^2}{2a^2} + \frac{(y_l - y_s)^2}{2a^2} + ...\right) = |a| - \frac{(x_l - x_s)^2 + (y_l + y_s)^2}{2a}$$
$$E_1(x_l, y_l, 0) = E_0 e^{ik|a|} e^{-ik\frac{(x_l - x_s)^2 + (y_l - y_s)^2}{2a}}$$

$$\text{На ОП}_2 : E_2(x_l, y_l, 0) = E_1(x_l, y_l, 0) e^{i\varphi_0 - ik\frac{x_l^2 + y_l^2}{2F_л}}$$

В плоскости $z = b$:

$$E_p(x_p, y_p, 0) = \frac{k}{2\pi i} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} dx_l dy_l E_2(x_l, y_l, 0) \frac{e^{ikr_1}}{r_2} \cos\theta$$

$$r_2 = b + \frac{(x_p - x_l)^2 + (y_p - y_l)^2}{2b}$$

$$E_p = \frac{kE_0}{2\pi i b} e^{ik\left[-a - \frac{x_s^2+y_s^2}{2a} + b + \frac{x_p^2+y_p^2}{2b}\right] + i\varphi_0} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} dx_l e^{ik\left[-\frac{x_l^2}{2a} - \frac{x_l^2}{2F_л} + \frac{x_l^2}{2b} + \frac{x_s \cdot x_l}{a} - \frac{x_p \cdot x_l}{b}\right]} \cdot \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} dy_l (\dots)$$

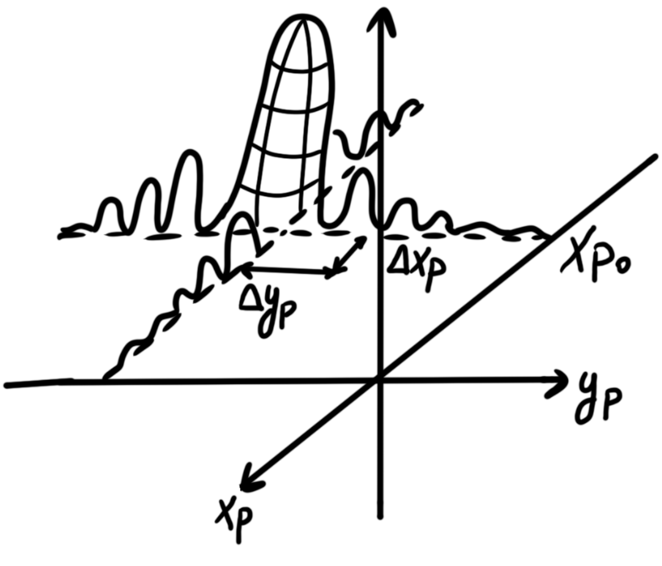
, где $r_a = -a\dfrac{x_s^2 + y_s^2}{2a},\ r_b = b + \dfrac{x_p^2 + y_p^2}{2b}$

Если b-координата плоскости изображения, то $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{F_л} = \dfrac{1}{b}$

$$E_p = \frac{E_0}{i\lambda b} e^{ik(r_a + r_b) + i\varphi_0} D \cdot \frac{e^{ik\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x_p}{b}\right)\frac{D}{2}} - e^{-ik\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x_p}{b}\right)\frac{D}{2}}}{2ik\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x_p}{b}\right)\frac{D}{2}} \cdot (\text{по } y)$$

$$I_p = \frac{|E_p|^2}{2} = I_0 \underbrace{\frac{D^4}{\lambda^2 b^2}}_{P_\Phi^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kD}{2}\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x_p}{b}\right)\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kD}{2}\left(\frac{y_s}{a} - \frac{y_p}{b}\right)\right)$$

$$\frac{x_s}{a} - \frac{x_{p_0}}{b} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_{p_0} = x_s \dfrac{b}{a} < 0 \\ y_{p_0} = y_s \dfrac{b}{a} < 0 \end{array}$$



Размер пятна по x: $\dfrac{kD}{2}\left(\dfrac{x_s}{a} - \dfrac{x_{p_0} + \Delta x_p}{b}\right) = \pm\pi$

$$\Delta x_p = \frac{\lambda}{D} b$$

$$\Delta y_p = \frac{\lambda}{D} b$$

$$I_{\max} = I_0 P_\Phi^2;\ \text{для фотоаппарата } D \sim 1,\ \lambda \sim 0,5 \cdot 10^{-4},\ b \sim 5 \text{ см}$$

$$P_\Phi = \frac{1^2}{0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 5} = 4 \cdot 10^3 \Rightarrow P_\Phi^2 = 1,6 \cdot 10^7$$

$$a_m \sqrt{m\lambda b} = 0,5 \text{ см} = \sqrt{m \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 5} \Rightarrow m = 1000$$