Глава 1: Вариационное исчисление.

1. Примеры задач вариационного исчисления

Задача математического анализа:

Есть кривая заданная функцией $f(x)$ найти точки экстремума:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2 - \text{точки, подозреваемые на экстремум}$$

$$f''(x_1) < 0 \Rightarrow x_1 - \max$$
$$f''(x_2) > 0 \Rightarrow x_2 - \min$$

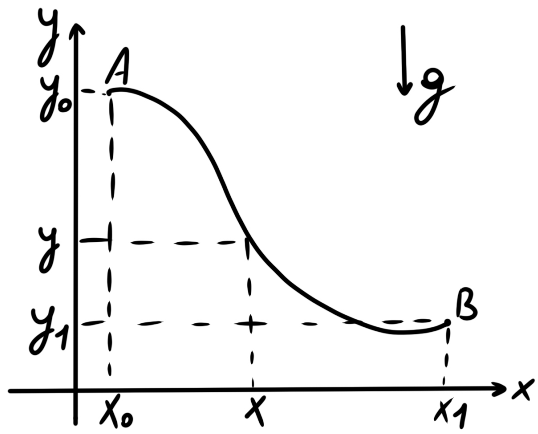
Задача вариационного исчисления:

Функционал: $I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$

Найти функцию $y(x)$ такую, что $I[y]$ принимает min или max

Пример 1 : задача наискорейшего спуска (задача Брахистохроне)

Найти кривую $y(x)$ по которой тело из точки A в точку B попадет за наименьшее время.



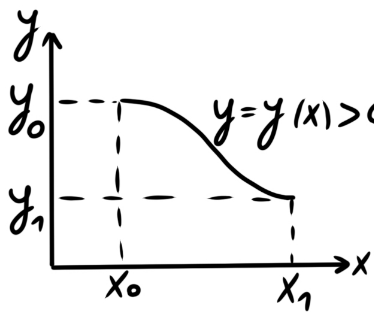
$$\text{З.С.Э: } mgy_0 + 0 = mgy(x) + \frac{m|v|^2}{2}$$

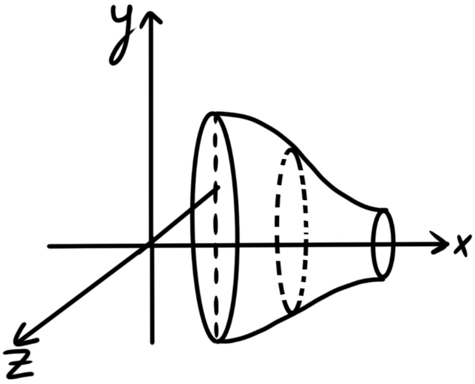
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\sqrt{2g(y_0 - y(x))} = |v| = \sqrt{1 + (y(x)')^2}\frac{dx}{dt}$$

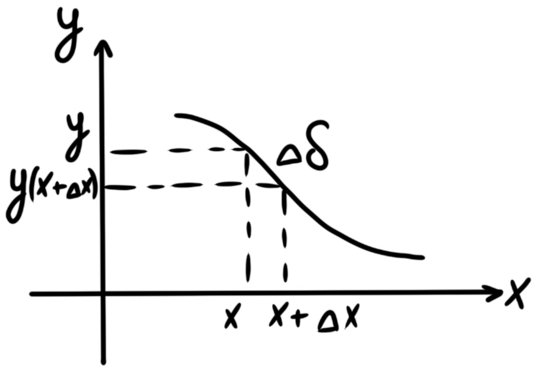
$$T = \int_0^T dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 + y(x))}}dx$$

Пример 2 : задача поверхности вращения наименьшей площади.





Площадь $S \to \min$



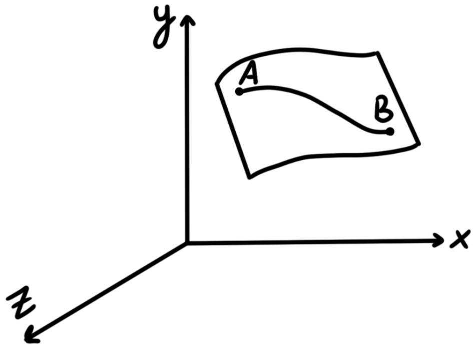
$$\Delta\delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$$

$$\Delta S = 2\pi y(x)\Delta\delta$$

$$\sum \Delta S \xrightarrow{\Delta x \to 0} \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

Пример 3 : задача о геодезических на поверхности.

Найти кривую, проходящую через точки A и B, лежащую на поверхности, которая имеет наименьшую длину.



$$G(x, y, z) = 0 - \text{уравнение поверхности}$$

$$\text{Пусть уравнение кривой }: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [t_0, t_1] - \text{параметр} \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$G(x(t), y(t), z(t)) = 0 \leftarrow \text{кривая лежит на поверхности}$$

$$l = \sum \Delta l = \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sum \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

$$l \xrightarrow{\Delta t \to 0} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

2. Простейшая задача вариационного исчисления

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \qquad (1)$$

$F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ непустое открытое множество, $F \in C^2(\mathbb{D})$

Определение 1 (допустимая функция)**.** *Функция $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ называется допустимой, если:*

1) $y(x) \in C([x_0, x_1])$
2) $y(x) \in C^2((x_0, x_1))$
3) $\forall x \in [x_0, x_1], (x, y(x), y'(x)) \in \mathbb{D}$
4) $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$ сходится

$$\text{Краевые условия: } y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \qquad (2)$$

Определение 2. *Допустимая $\tilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ доставляет локальный минимум функционалу (1) при краевых условиях (2),если:*

1) $\tilde{y}(x_0) = y_0, \tilde{y}(x_1) = y_1$
2) $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall$ допустимой функции $y(x)$, удовлетворяющей (2): $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon_0$ выполняется: $I[\tilde{y}] \le I[y]$

Определение 3. *Допустимая функция $\tilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ доставляет глобальный минимум функционалу I[y] при краевых условиях (2), если:*

1) $\tilde{y}(x_0) = y_0,\ \tilde{y}(x_1) = y_1$
2) $\forall$ допустимой функции $y(x)$, удовлетворяющей (2), выполняется $I[\tilde{y}] \le I[y]$

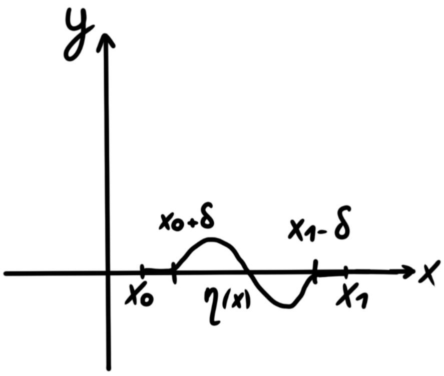
3. Необходимые условия локального экстремума

Аналог $f'(x) = 0$

Пусть функция $\tilde{y}$ доставляет функционалу $I[y]$ при краевых условиях (2) локальный минимум $\Rightarrow I[\tilde{y}] \le I[y]$, где $y(x)$ из определенного локального минимума.

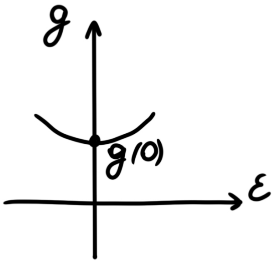
Возьмем $y(x) = \tilde{y} + \varepsilon\eta(x), \quad \varepsilon \in \left(-\frac{\varepsilon_0}{M}, \frac{\varepsilon_0}{M}\right), \quad M = \max_{x \in [x_0, x_1]} |\eta(x)|$

$\eta(x) \in C^2([x_0, x_1])$ - финитная функция.



$$\Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]$$

Рассмотрим функцию $g(\varepsilon) = I[\tilde{y} + \varepsilon\eta] \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon)$



$\varepsilon = 0 -$ точка локального минимума для функции $g(\varepsilon) \Rightarrow g'_\varepsilon(0) = 0$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y} + \varepsilon\eta(x), \tilde{y}' + \varepsilon\eta'(x))dx\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} \boxed{=}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+\delta}}_{(1)} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{(2)} + \underbrace{\int_{x_1-\delta}^{x_1}}_{(3)} \quad ; \quad \frac{d}{d\varepsilon} I_1 = \frac{d}{d\varepsilon} I_2 = 0$$

Теорема 1 (из математического анализа). $f(x, \varepsilon) : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ - *непрерывна,* $\exists \frac{df}{d\varepsilon}(x, \varepsilon)$ - *непрерывна*

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b f(x, \varepsilon)dx = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} f(x, \varepsilon)dx$$

Вносим производную под знак интеграла:

$$\boxed{=} \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right]dx\Bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x)dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}(x)\eta(x)\Bigg|_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{=0} -$$

$$-\int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\eta(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}(\dots)\right]dx\Bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(\dots) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'}(\dots)\right]\eta(x)dx\Bigg|_{\varepsilon=0} \boxed{=}$$

$$\boxed{=} \int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \dots\right]dx = 0$$

$\forall$ финитной функции $\eta(x)$

Лемма 1 (основаная леммая вариационного исчисления). *$f(x) : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}-$ непрерывна и $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0, \forall$ финитной $\eta(x)$. Тогда $f(x) \equiv 0\ \forall x \in [x_0, x_1]$*

По лемме: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ - необходимое условие локального экстремума(**уравнение Эйлера**)

Определение 4 (экстремаль). *Допустимая функция $y(x)$ называется экстремалью функционала $I[y]$ при краевых условиях (2), если:*
1) $y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$
2) $y(x)$ удовлетворяет условию Эйлера