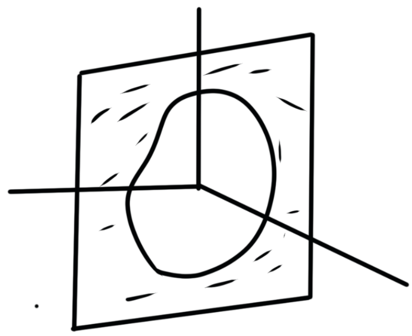
1. Линза как Фурье-анализатор

Интеграл Киргхгофа для плоских экранов $E_p(x_p, y_p, z_p) = \dfrac{k}{2\pi i}\iint dxdyE(x,y,0)\dfrac{e^{ikR}}{R}\cos\theta$, где $\theta = \widehat{\vec{R},\vec{n}}$

Рассмотрим следующий эксперимент:



S - точечный источник монохроматической волны; трафарет с коэффициентом пропускания $\tau(x,y)$.

$$\text{В ОП}_1: E_1(\text{после трафарета}) = E_0 e^{ik\left(|a| - \frac{x_l^2+y_l^2}{2a}\right)}\tau(x_l,y_l)$$

, где $E_0 = \dfrac{\Delta}{R_1},\ R_1 = \sqrt{a^2+x_l^2+y_l^2} = |a| + \dfrac{x_l^2+y_l^2}{2\,|a|}$

$\text{В ОП}_2: E_2 = E_1 e^{i\varphi_0 - ik\frac{x_l^2+y_l^2}{2F_л}};\quad R_2 = \sqrt{b^2+(x_p-x_l)^2+(y_p-y_l)^2} \approx b + \dfrac{(x_p-x_l)^2+(y_p-y_l)^2}{2b}$

$$E_p(x_p,y_p,b) = \frac{k}{2\pi i}\iint dx_l dy_l E_2 \frac{e^{ikR_2}}{R_2}\cos\theta \approx \frac{k}{2\pi ib}\iint dx_l dy_l E_2 e^{ik\left(b + \frac{(x_p-x_l)^2+(y_p-y_l)^2}{2b}\right)} =$$

$$= \frac{E_0 k}{2\pi ib}\int dx_l e^{ik\left[-\frac{x_l^2}{2a} - \frac{x_l^2}{2F_л} + \frac{x_p^2 - 2x_p x_l + x_l^2}{2b}\right]}\int dy_l e^{\cdots}\tau(x_l,y_l)\cdot e^{ik\cdot\text{const}}$$

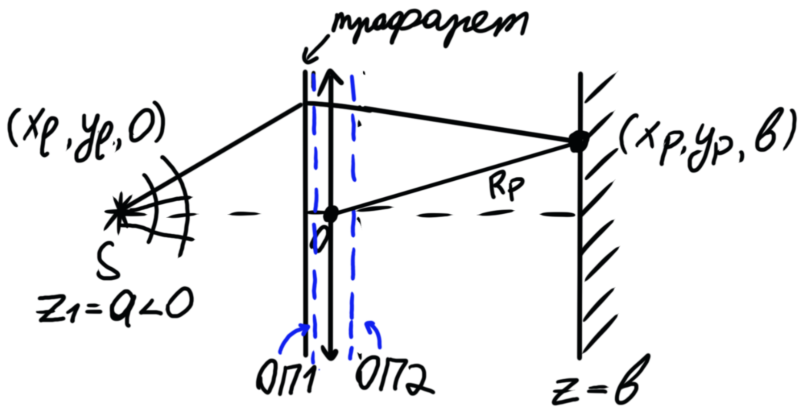
Пусть $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{F_л} = \dfrac{1}{b}$ (сопряженные плоскости)

$$E_p = \frac{kE_0}{2\pi ib}\cdot e^{ik\left[|a| + b\frac{x_p^2+y_p^2}{2b}\right] + i\varphi_0}\iint dx_l dy_l \tau(x_l,y_l) e^{-ik\frac{x_p x_l}{b}} e^{-ik\frac{y_p y_l}{b}} = \frac{kE_0}{ib} e^{ik[|a|+R_p]+i\varphi_0}\hat{\tau}(k_x,k_y)$$

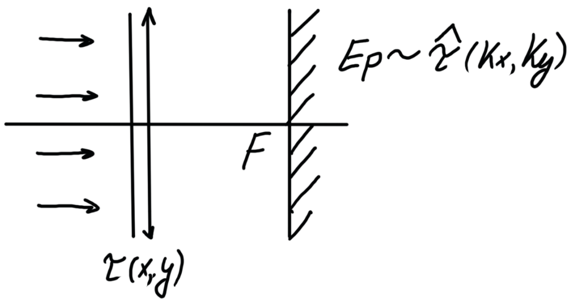
, где $k_x = \dfrac{kx_p}{b},\ k_y = \dfrac{ky_p}{b}$

$$I_p = \frac{|E_p|^2}{2} = \frac{k^2}{b^2} I_0 \left|\hat{\tau}(k_x,k_y)\right|^2$$

Частный случай: $a \to -\infty \Rightarrow b = F_л$



Рассмотрим плоской полны на трафарете, а изображение строим в фокальной плоскости линзы:



$$R_1 = \sqrt{a^2 + (x_s - x_l)^2 + (y_s - y_l)^2} \approx |a| \, \frac{(x_s - x_l)^2 + (y_s - y_l)^2}{2(-a)}$$

$$R_2 = \sqrt{F^2 + (x_l - x_p)^2 + (y_l - x_p)^2} \approx F + \frac{(x_l - x_p)^2 + (y_l - y_p)^2}{2F}$$

$$\text{В ОП}_1 : E_1 = \frac{k}{2\pi i \, |a|} \iint_{-\infty}^{+\infty} dx_s dy_s \underbrace{E_0 e^{ika} \tau(x_s, y_s)}_{\text{поле волны после трафарета}} e^{ik\left(|a| \frac{(x_s - x_l)^2 + (y_s - y_l)^2}{2|a|}\right)} \cos\theta$$

$$E_p(x_p, y_p, F) = \frac{k}{2\pi i F} \iint_{-\infty}^{+\infty} dx_l dy_l E_1(\dots) d e^{i\varphi_0 - ik\frac{x_l^2 + y_l^2}{2F}} e^{ik\left(F + \frac{(x_l - x_p)^2 + (y_l - y_p)^2}{2F}\right)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_l e^{ik\left[\frac{x_s^2 - 2x_s x_l + x_l^2}{2|a|} - \frac{x_l^2}{2F} + \frac{x_l^2 - 2x_p x_l + x_p^2}{2F}\right]}$$

Рассмотрим степень экспоненты:

$$\frac{ik}{2\,|a|}\left(x_l^2 - 2x_s x_l - 2x_l x_p \frac{|a|}{F}\right) + ik\left(\frac{x_s^2}{2\,|a|} + \frac{x_p^2}{2F}\right) = \frac{ik}{2\,|a|}\left[\left(x_l - x_s - x_p\frac{|a|}{F}\right)^2 - \left(x_s + x_p\frac{|a|}{F}\right)^2\right] + ik\left(\frac{x_s^2}{2\,|a|} + \frac{x_p^2}{2F}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2|a|}\left(x_l-\left(x_s+x_p\frac{|a|}{F}\right)\right)^2} dx_l = \sqrt{\frac{\pi 2\,|a|}{-ik}}$$

, где $x = x_l - \left(x_s + x_p\dfrac{|a|}{F}\right)$

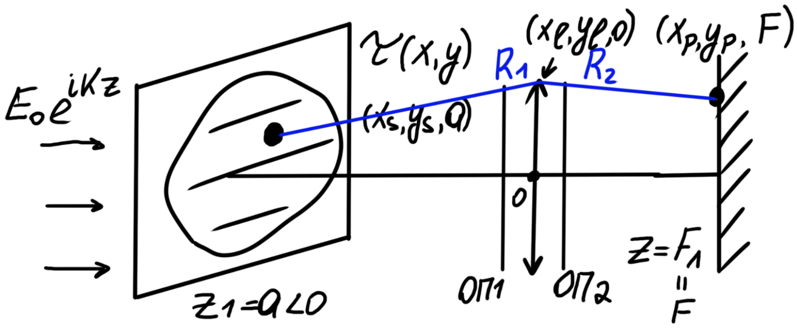
Точно такой же интеграл по $y_l \Rightarrow \sqrt{\dfrac{\pi 2\,|a|}{-ik}}$

$$E_p = \underbrace{\frac{k}{2\pi i\,|a|}\frac{k}{2\pi i F}\frac{E_0}{F}\frac{\pi 2\,|a|}{-ik}}_{\frac{k}{2\pi i F}E_0}\left(\iint dx_s dy_s \tau(x_s,y_s) e^{-ik\frac{x_p x_s}{F}-ik\frac{y_p y_s}{F}}\right) e^{i\varphi_0+ik\left(F-\frac{ikx_p^2|a|}{2F^2}+\frac{ikx_p^2}{2F}-\frac{iky_p^2|a|}{2F^2}+\frac{iky_p^2}{2F}\right)}$$

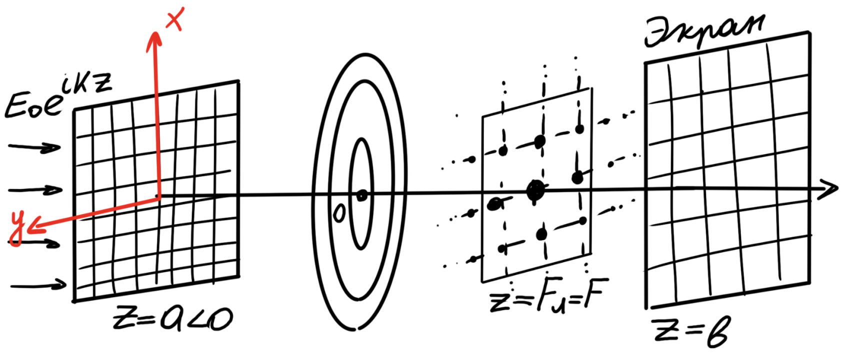
$$E_p = \frac{k}{iF}E_0\hat{\tau}(k_x,k_y)e^{i\varphi_0+ik\left[F+\frac{ik(x_p^2+y_p^2)}{2F}\left(1-\frac{|a|}{F}\right)\right]}$$

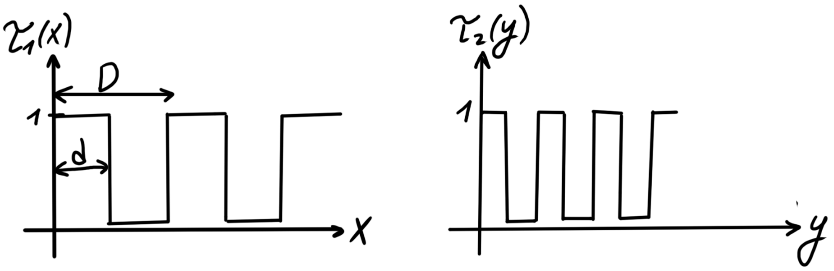
$$I_p = \frac{k^2}{F^2}I_0\left|\hat{\tau}(k_x,k_y)\right|^2$$

2. Опыт Аббе-Портера



Если $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{F}=\dfrac{1}{b}$, то на экране:





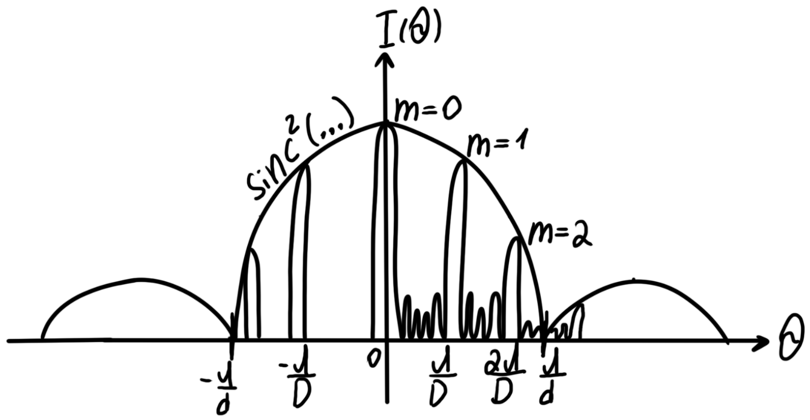
$\tau(x, y) = \tau_1(x) \cdot \tau_2(y)$

$$\hat{\tau}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1(x) e^{-ik_x x} dx \int_{-\infty}^{\infty} \tau_2(y) e^{-ik_y y} dy = \hat{\tau}_1(k_x) \hat{\tau}_2(k_y)$$

В фокальной плоскости линзы выполнено условие для дифракции Фраунгофера.

$$\hat{E}(k_x) = \mathrm{sinc}^2 \left(\frac{kd}{2} (\sin\theta_0 - \sin\theta) \right) \frac{\sin^2 \left(\frac{NkD}{2} (\sin\theta_0 - \sin\theta) \right)}{\sin^2 \left(\frac{kD}{2} (\sin\theta_0 - \sin\theta) \right)}$$

, где $\sin\theta_0 = 0$



Главные максимумы $\frac{kD}{2} \sin\theta_m = \pi m \Rightarrow \sin\theta_m \approx \theta_m = m\frac{\lambda}{D}$