

Глава 1: Геометрия пространств со скалярным произведением.

Определение 1 (Метрическое пространство). Метрика $\rho(x, y) : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1) $\forall x, y \rho(x, y) \geq 0$ ($\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$)

2) $\forall x, y \in M \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3) $\forall x, y, z \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M | \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

Определение 2. Множество открытое, если любая точка в нем содержится в нем вместе некоторой окрестностью.

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Дискретная метрика:

$$X = \{x \in M\}$$

$$B_\varepsilon(x) = \{y | \rho(x, y) < \frac{1}{2}\}$$

1. Линейно (векторное) пространство

Определение 3. Непустое множество элементов L произвольной природы, называется линейным (векторным) над полем чисел $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ если

1) $\forall x, y$ введена операция сложения

1.1) $x + y = y + x$

1.2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

1.3) В L существует элемент называемый нулем 0 : $x + 0 = x \quad \forall x \in L$

1.4) $\forall x \in L$ существует противоположный элемент принадлежащий L : $x + y = 0$

2) $\forall x \in L$ и \forall числа $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ определен вектор из L - произведения элементов на число $\alpha \quad \alpha x \in L$

1.1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall \alpha\beta$

1.2) $1 \cdot x = x$

1.3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

1.4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

$$\begin{aligned}
f &: X \rightarrow Y \\
g &: X \rightarrow Y \\
\alpha f + g &: X \rightarrow Y \\
(\alpha f + g)(x) &= \alpha f(x) + g(x) \text{ поточечная сумма}
\end{aligned}$$

Примеры:

1)

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n \end{array} + \begin{array}{c} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \beta(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)$$

2) $C[a, b] = \{f(a, b) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ непрерывная функции } f - \text{ непрерывна}\}$

3) $L_p(x) = \{f - \text{измерима по Лебегу, а заданная на } X, f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ таких, что}\}$

$$\int_X |f(x)| dx < \infty$$

$$4) l_2 - x = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$$

Определение 4. x_1, \dots, x_n называется линейно зависимыми, если $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ не все равные нулю, такие что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

В противном случае: из того, что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ следует, что все $\alpha_i = 0$
 x_1, \dots, x_n называется линейно независимыми наборами векторов

Определение 5. Бесконечный набор элементов L называется линейно независимым, если любой его конечный поднабор линейно независимым

Определение 6. Если в L можно найти n линейно независимых векторов, а любой набор из $n + 1$ векторов является линейно зависимыми, то $\dim L = n$. Если в L можно указать n набор из произвольного числа линейно независимых элементов, то $\dim L = \infty$.

Определение 7. Непустое подмножество $S \subset L$ называется подпространством, если оно само является пространством введенных в L линейно операций

Определение 8. Линейной оболочкой $\langle M \rangle$ называется совокупность всех линейных комбинаций $\alpha x + \beta y$ где $x, y \in M \subset L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$\langle M \rangle$ - подпространство в L (натянутое или порожденное множеством элементов M)

Определение 9. Норма в линейном пространстве L : $\| \cdot \| : L \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

$$\forall x, y \in L \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

$$1) \|x\| \geq 0 \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

В конечномерном пространствах все нормы эквивалентны $c_1|||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$. В конечномерных пространствах это не так!

Пример норм 2 $||f|| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$ - норма в $C[a, b]$ равномерная норма

$$3 \quad ||f||_{L_1} = \int_X |f| dx \text{ в } L_1$$

$$||f||_{L_p} = \sqrt[p]{\int_X |f|^p dx} \text{ в } L_p$$

$$4 \quad ||x||_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

Определение 10. Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ точек линейно нормированного пространства L сходятся к x , если $||x_n - x|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 ||x_n - x|| < \varepsilon$

Определение 11. Предельной точкой $M \subset L$ называется точка x , если существует сходящаяся к x последовательность элементов из M $\exists x_n \in M, x_n \rightarrow x$

Определение 12. Замыканием \overline{M} - объединение M и его предельных точек.

Определение 13. Замкнутое множество, если содержит все предельные точки.

Определение 14. Множество M в L - линейно нормированном пространстве называется плотностью в L , если $\overline{M} = L$

Определение 15. M_1, M_2 подмножества в L M_1 плотность в M_2 , если

$$\underbrace{M_2}_{(R \setminus Q)} \subset \underbrace{\overline{M_1}}_R \quad M_1 = Q$$

Определение 16. Сепарабельное множество, если в нем \exists счетное плотное подмножество