Конспект лекций по дисциплине

Дифференциальные уравнения

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

Преподаватель: Скворцова Мария Александровна

Оглавление

1 Вариационное исчисление. **2**

1. Примеры задач вариационного исчисления . . . 2
2. Простейшая задача вариационного исчисления . . . 4
3. Необходимые условия локального экстремума . . . 4
4. Случай понижения порядка в уравнении Эйлера . . . 7
5. Решение задачи о брахистохроне . . . 8
6. Решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади . . . 11
7. Вариационная задача с несколькими функциями . . . 12
8. Вариационная задача с высшими производными . . . 12
9. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными . . . 13
10. Принцип Остроградского-Гамильтона (принцип наименьшего действия, признак стационарного действия, основной вариационный принцип механики) . . . 13
11. Изопериметрическая задача . . . 14
12. Решение классической изопериметрической задачи . . . 16

Глава 1: Вариационное исчисление.

1. Примеры задач вариационного исчисления

Задача математического анализа:

Есть кривая заданная функцией $f(x)$ найти точки экстремума:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2 - \text{точки, подозреваемые на экстремум}$$

$$f''(x_1) < 0 \Rightarrow x_1 - \max$$
$$f''(x_2) > 0 \Rightarrow x_2 - \min$$

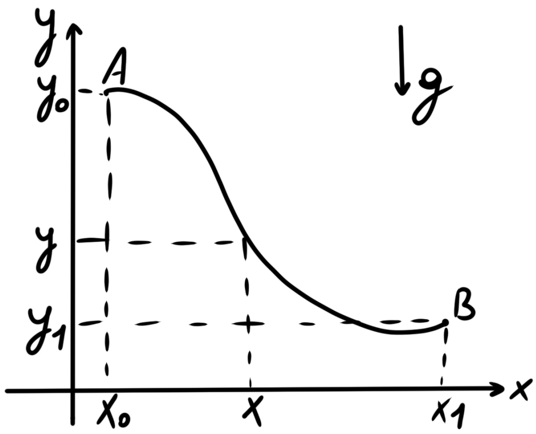
Задача вариационного исчисления:

Функционал: $I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$

Найти функцию $y(x)$ такую, что $I[y]$ принимает min или max

Пример 1 : задача наискорейшего спуска (задача Брахистохроне)

Найти кривую $y(x)$ по которой тело из точки A в точку B попадет за наименьшее время.



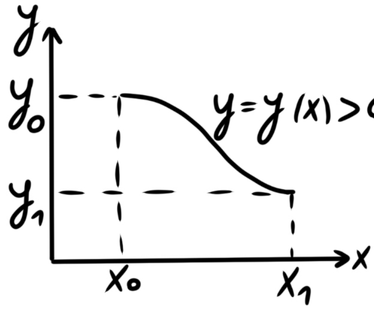
$$\text{З.С.Э: } mgy_0 + 0 = mgy(x) + \frac{m|v|^2}{2}$$

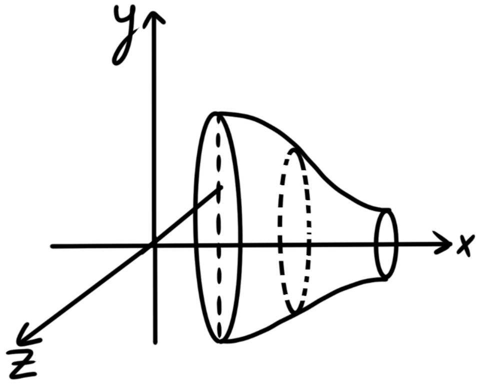
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\sqrt{2g(y_0 - y(x))} = |v| = \sqrt{1 + (y(x)')^2}\frac{dx}{dt}$$

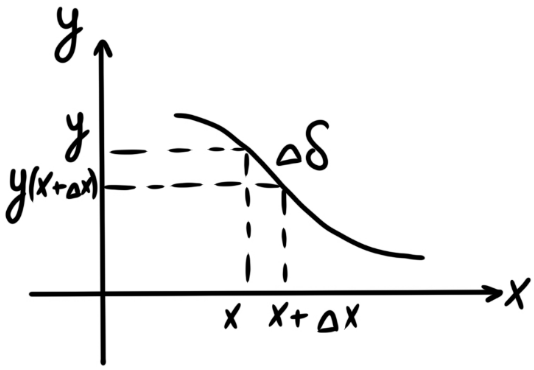
$$T = \int_0^T dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 + y(x))}}dx$$

Пример 2 : задача поверхности вращения наименьшей площади.





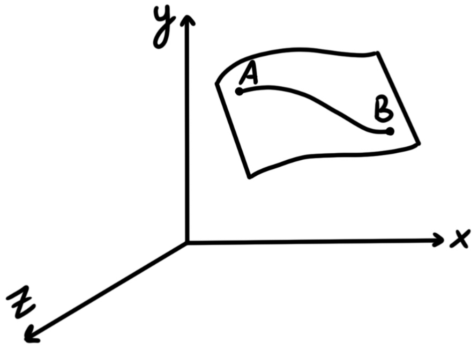
Площадь $S \to \min$



$$\Delta\delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$$
$$\Delta S = 2\pi y(x)\Delta\delta$$
$$\sum \Delta S \xrightarrow{\Delta x \to 0} \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

Пример 3 : задача о геодезических на поверхности.

Найти кривую, проходящую через точки A и B, лежащую на поверхности, которая имеет наименьшую длину.



$$G(x,y,z)=0 - \text{уравнение поверхности}$$

$$\text{Пусть уравнение кривой } : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [t_0, t_1] - \text{параметр} \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$G(x(t), y(t), z(t)) = 0 \leftarrow \text{кривая лежит на поверхности}$$

$$l = \sum \Delta l = \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sum \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

$$l \xrightarrow{\Delta t \to 0} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

2. Простейшая задача вариационного исчисления

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \qquad (1)$$

$F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ непустое открытое множество, $F \in C^2(\mathbb{D})$

Определение 1 (допустимая функция)**.** *Функция $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ называется допустимой, если:*
1) $y(x) \in C([x_0, x_1])$
2) $y(x) \in C^2((x_0, x_1))$
3) $\forall x \in [x_0, x_1], (x, y(x), y'(x)) \in \mathbb{D}$
4) $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$ сходится

$$\text{Краевые условия: } y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \qquad (2)$$

Определение 2. *Допустимая $\tilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ доставляет локальный минимум функционалу (1) при краевых условиях (2),если:*
1) $\tilde{y}(x_0) = y_0, \tilde{y}(x_1) = y_1$
2) $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\forall$ допустимой функции $y(x)$, удовлетворяющей (2): $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon_0$ выполняется: $I[\tilde{y}] \le I[y]$

Определение 3. *Допустимая функция $\tilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ доставляет глобальный минимум функционалу I[y] при краевых условиях (2), если:*
1) $\tilde{y}(x_0) = y_0,\ \tilde{y}(x_1) = y_1$
2) $\forall$ допустимой функции $y(x)$, удовлетворяющей (2), выполняется $I[\tilde{y}] \le I[y]$

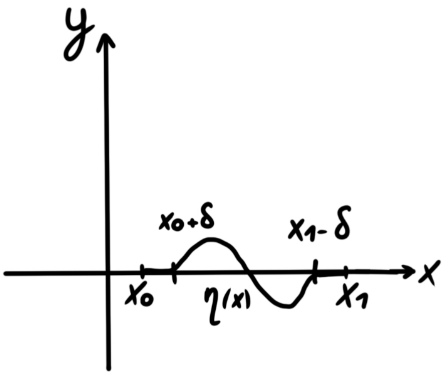
3. Необходимые условия локального экстремума

Аналог $f'(x) = 0$

Пусть функция $\tilde{y}$ доставляет функционалу $I[y]$ при краевых условиях (2) локальный минимум $\Rightarrow I[\tilde{y}] \le I[y]$, где $y(x)$ из определенного локального минимума.

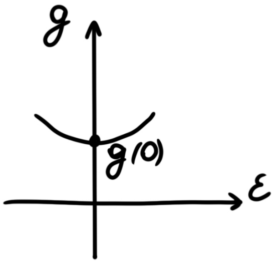
Возьмем $y(x) = \tilde{y} + \varepsilon\eta(x), \quad \varepsilon \in \left(-\dfrac{\varepsilon_0}{M}, \dfrac{\varepsilon_0}{M}\right), \quad M = \max\limits_{x \in [x_0, x_1]} |\eta(x)|$

$\eta(x) \in C^2([x_0, x_1])$ - финитная функция.



$$\Rightarrow I[\tilde{y}] \le I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]$$

Рассмотрим функцию $g(\varepsilon) = I[\tilde{y} + \varepsilon\eta] \Rightarrow g(0) \le g(\varepsilon)$



$\varepsilon = 0 -$ точка локального минимума для функции $g(\varepsilon) \Rightarrow g'_\varepsilon(0) = 0$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y} + \varepsilon\eta(x), \tilde{y}' + \varepsilon\eta'(x))dx\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} \boxed{=}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+\delta}}_{(1)} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{(2)} + \underbrace{\int_{x_1-\delta}^{x_1}}_{(3)} \quad ; \quad \frac{d}{d\varepsilon} I_1 = \frac{d}{d\varepsilon} I_2 = 0$$

Теорема 1 (из математического анализа). $f(x, \varepsilon) : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ - *непрерывна,* $\exists \dfrac{df}{d\varepsilon}(x, \varepsilon)$ - *непрерывна*

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(x, \varepsilon)dx = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} f(x, \varepsilon)dx$$

Вносим производную под знак интеграла:

$$\boxed{=} \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right] dx\Bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x)dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}(x)\eta(x)\Bigg|_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{=0} -$$

$$- \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \eta(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}(\dots)\right] dx\Bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\dots) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'}(\dots)\right] \eta(x)dx\Bigg|_{\varepsilon=0} \boxed{=}$$

$$\boxed{=} \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \dots\right] dx = 0$$

$\forall$ финитной функции $\eta(x)$

Лемма 1 (основаная леммая вариационного исчисления)**.** *$f(x) : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}-$ непрерывна и $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0, \forall$ финитной $\eta(x)$. Тогда $f(x) \equiv 0\ \forall x \in [x_0, x_1]$*

По лемме: $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$ - необходимое условие локального экстремума(**уравнение Эйлера**)

Определение 4 (экстремаль)**.** *Допустимая функция $y(x)$ называется экстремалью функционала $I[y]$ при краевых условиях (2), если:*

1) $y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$

2) $y(x)$ удовлетворяет условию Эйлера

$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \end{cases} \qquad (1)$$

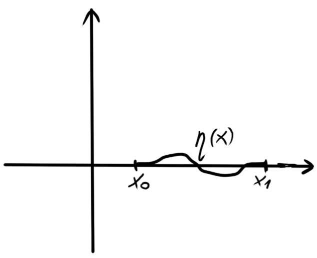
Найти функцию $y(x)$ такую, чтобы функционал $I[y]$ принимал наибольшее или наименьшее значение.

Необходимо найти условие локального экстремума:

Если $\tilde{y}$ экстремаль $\Rightarrow \tilde{y}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2)$

Докозательство формулы (2).

$$I[\tilde{y}] \leq I[y], y = \tilde{y} + \varepsilon\eta, \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1), \eta(x) \in C^2([x_0, x_1]) - \text{финитная}$$

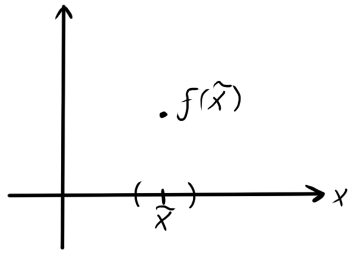


$$\underbrace{I[y]}_{=g(0)} \leq \underbrace{I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]}_{=g(\varepsilon)} \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon) \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))\right)\eta(x)dx, \forall\eta(x) - \text{финитная}$$

Лемма 2 (Лагранжа)**.** *Пусть $f(x)$ - непрерывна и $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0. \forall\eta(x)$ - финитная на $[x_0, x_1]$. Тогда $f(x) = 0, \forall x \in [x_0, x_1]$*

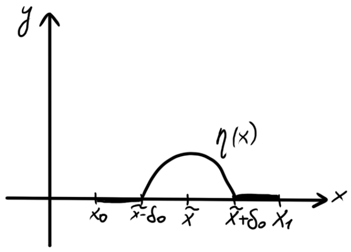
Доказательство. От противного:



Пусть для определенности $f(\tilde{x}) > 0$. Тогда так как $f(\tilde{x})$ - непрерывна, то $f(x) > 0$ при $x \in (\tilde{x} - \delta_0, \tilde{x} + \delta_0)$

Возьмем функцию $\eta(x) = \begin{cases} (\delta_0^2 - (x-\tilde{x})^2)^4, |x - \tilde{x}| < \delta \\ 0, |x - \tilde{x}| > \delta_0 \end{cases}$ – финитная функция

Наша функция $\eta(x)$ плавно переходит к нашим точкам $\tilde{x} - \delta_0, \tilde{x} + \delta_0$



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = \int_{\tilde{x}-\delta_0}^{\tilde{x}-\delta_0} \underbrace{f(x)}_{>0}\underbrace{\eta(x)}_{>0}dx > 0 - \text{противоречие}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [x_0, x_1] : f(x) = 0$$

■

Из доказательства леммы следует, что доказана формула (2) ■

4. Случай понижения порядка в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad F = F(x, y(x), y'(x))$$

1) $F = f(x,y) \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = 0 \Rightarrow y = y(x)$

2) $F = F(x, y') \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = C$

3) $F = F(y, y')$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 | \cdot y'$$

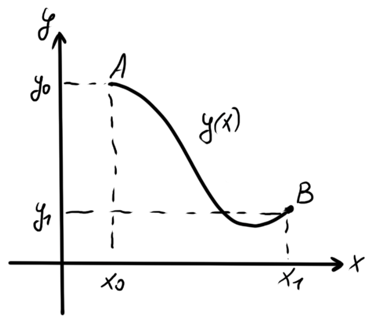
$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - \underbrace{y'\frac{\partial F}{\partial y'}}_{=\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - y''\frac{\partial F}{\partial y'}} = 0$$

$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + y''\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Заметим, что: $\dfrac{d}{dx}F(y,y') = y'\dfrac{\partial F}{\partial y} + y''\dfrac{\partial F}{\partial y'}$

$$\frac{d}{dx}F - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C}$$

5. Решение задачи о брахистохроне



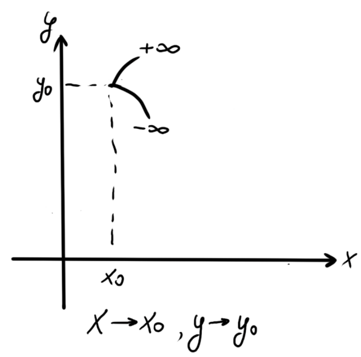
$$\begin{cases} I[y] = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2)}}{\sqrt{2g(y_0-y(x))}}dx \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}} - y'\frac{1}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

$$\underbrace{\sqrt{1+(y')^2} - (y')^2\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}}_{\dfrac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}} = C\sqrt{2g(y_0-y)}$$

$$1 = \underbrace{c^2 2g}_{=\frac{1}{c_1}>0}(y_0-y)(1+(y')^2)$$

$$c_1 = (y_0-y)(1+(y')^2) \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{c_1}{y_0-y} - 1} = y' \quad (3)$$



$$1 + (y'(x))^2 = \frac{c_1}{y_0 - y(x)} \xrightarrow{x \to x_1} +\infty$$

$$y'(x) \xrightarrow{x \to x_0} \underset{\text{выбор:}-}{\pm\infty} \Rightarrow y'(x) \xrightarrow{x \to x_0} -\infty$$

Если выбрать знак "+ то тело не сможет скатится в нужную точку

$$y' = -\sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}}$$

Замена: $\tilde{y} = y_0 - y(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = +\sqrt{\frac{c_1 - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Замена: $\tilde{y} = c_1 z$:

$$c_1 z' = \sqrt{\frac{c_1 - c_1 z}{c_1 z}} = \sqrt{\frac{1 - z}{z}}$$

Замена: $z = \sin^2 s, s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$c_1 2 \sin s \cos s \cdot s' = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 s}{\sin^2 s}} = \frac{\cos s}{\sin s} \text{ (знак определили из интервала s)}$$

$$2c_1 \sin^2 s \frac{ds}{dx} = 1$$

$$\frac{dx}{ds} = c_1(1 - \cos(2s)) \Rightarrow \boxed{x(s) = c_1 \left(s - \frac{1}{2}\sin 2s\right) + c_2}$$

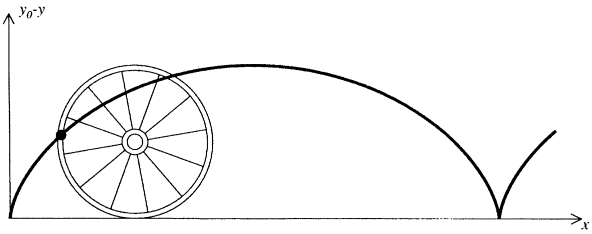
$$y(x) = y_0 - \tilde{y}(x) = y_0 - c_1 z = y_0 - c_1 \sin^2 s = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2s)$$

$$\boxed{y(s) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos(2s))}$$

Замена: $t = 2s, t \in (0, \pi)$

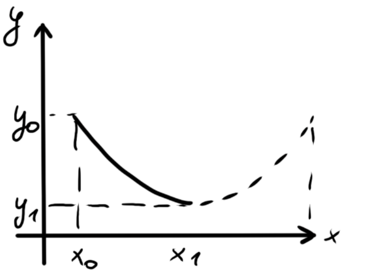
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{c_1}{2}(t - \sin t) + c_2 \\ y(t) = y_0 - \dfrac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2} + c_2 \\ y - \frac{c_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2}\sin t \\ \frac{c_1}{2}\cos t \end{pmatrix} \quad t \in (0, \pi)$$



$$t = 0 : \begin{cases} x(0) = c_2 = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$t = \pi : \begin{cases} x(\pi) = \frac{c_1}{2}\pi + c_2 = \frac{c_1}{2}\pi + x_0 \\ y(\pi) = y_0 - c_1 \end{cases}$$



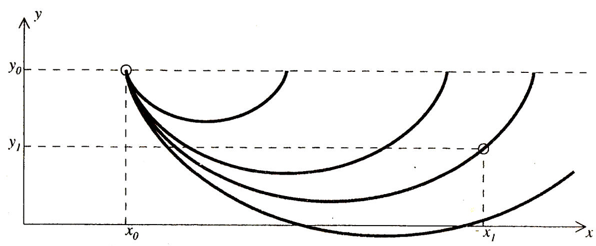
Теперь возьмем "+"(формула (3)):

$$y' = \sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}} \quad (5)$$

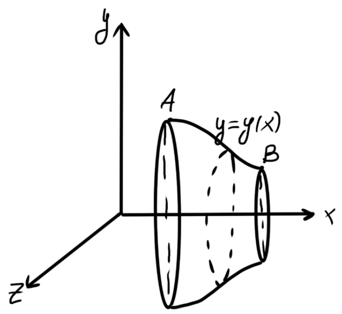
$$\tilde{y}(x) = y_0 - y(x) \Rightarrow \tilde{y}' = -\sqrt{\frac{c - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Делаем те же действия (замены) и получаем такие же $x(s), y(s)$ с различием только в интервале для t:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{C_1}{2}(t - \sin t) + x_0 \\ y(t) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases} \quad , \quad t \in (0, 2\pi) \Rightarrow \text{ циклоида полная}$$



6. Решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади



$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x)^2)} \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$F - y\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

$$2\pi y\sqrt{1+(y')^2} - y' 2\pi y \frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

$$2\pi y \underbrace{\left(\sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}} = C$$

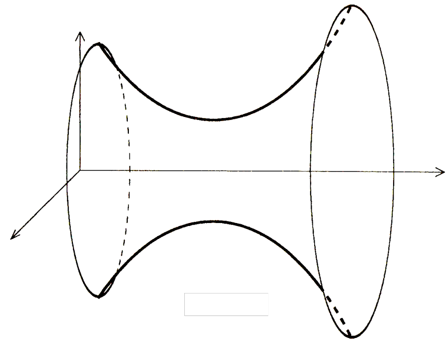
$$(2\pi y)^2 = c^2(1+(y')^2)$$

1) $c = 0 \Rightarrow y(x) = 0$ - решение, если $y_0 = y_1 = 0$
2) $c \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{c_1}\right)^2 = 1 + (y')^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1},\ c_1 = \frac{c}{2\pi} > 0$

$$y(x) = \text{ch} z(x) c_1,\ z > 0$$

$$c_1 \text{sh} z \cdot z'(x) = \pm\underbrace{\sqrt{\text{ch}^2 z - 1}}_{=\text{sh} z} \Rightarrow c_1 z' = \pm 1$$

$$z = \pm\frac{x + c_2}{c_1} \Rightarrow y(x) = c_1 \text{ch}\left(\frac{x+c_2}{c_1}\right) - \text{цепная линия}$$



7. Вариационная задача с несколькими функциями

$$I[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_n(x), y_n'(x))dx$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{01}, \dots, y_n(x_0) = y_{0n} \\ y_1(x_1) = y_{11}, \dots, y_n(x_1) = y_{1n} \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:
Пусть $\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_n(x),$:

$$I[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n] \leq I[y_1, \dots, y_n],\ \forall y_2, \dots, y_n$$

Можно взять y_1 - любое: $y_2 = \tilde{y}_2, \dots,$

$$\Rightarrow \underbrace{I[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n]}_{Y[\tilde{y}_1]} \leq \underbrace{I[y_1, \dots, \tilde{y}_n]}_{Y[y_1]} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0$$

Аналогично: $\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0$

8. Вариационная задача с высшими производными

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))dx$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \\ y'(x_0) = y_0', \quad y'(x_1) = y_1' \\ \dots y^{(n)} = y_0^{(n)}, \quad y^{(n)}(x_1) = y_1^{(n)} \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:
Если функция $\tilde{y}(x)$ доставляет функционалу локальному экстремум, то $\tilde{y}(x)$ - решение диффернциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

Доказательство.

Пусть $\tilde{y}(x)$ доставляет функционалу локальный минимум $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall y(x)$, удовлетворяет краевым условиям, $\sup\limits_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon_0 \Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[y]$

Возьмем $y(x) = \tilde{y}(x) + \varepsilon\eta(x), \eta(x)$ финитная функция.

$$\underbrace{I[\tilde{y}]}_{g(0)} \leq \underbrace{I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]}_{g(\varepsilon)} \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = 0 - \text{ точка локального минимума для функции } g(\varepsilon)$$

$$g'(0) = 0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y}(x)+\varepsilon\eta(x), \tilde{y}'(x)+\varepsilon\eta'(x), ...)dx\bigg|_{\varepsilon=0}$$

Если $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+2}), y(x) \in C^{\infty}([x_0, x_1])$, то

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(...)\eta'(x) + \frac{\partial F}{\partial y''}(...)\eta''(x) + \dots\right] dx\bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(...)dx + \frac{\partial F}{\partial y'}(...)\eta(x)\bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta'(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}dx... \text{ и тд}$$

Для n =2: $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)dx - \eta(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}dx =$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta(x)dx = 0 \quad \forall \text{ финитной функции } \eta(x)$$

Если n = 2 , то по лемме Лагранжа: $\displaystyle\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$

При n > 2 аналогично.

■

9. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными

$$\begin{cases} I[z] = \iint_D F(x, y, z(x), z'_x(x,y), z'_y(x,y))dxdy \\ z|_{(x,y)\in\partial D} = \varphi(x,y) \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z'_y} = 0 - \text{ уравнение Эйлера-Остроградского}$$

Без доказательства

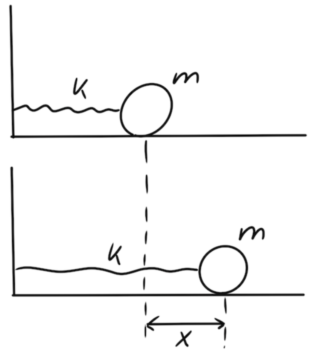
10. Принцип Остроградского-Гамильтона (принцип наименьшего действия, признак стационарного действия, основной вариационный принцип механики)

T - кинетическая энергия, U - потенциальная энергия:

$$L = T - U - \text{ функция Лагранжа (Лагранжиан)}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} Ldt - \text{функционал действия}$$

Движения в системе происходит по экстремалям функционала действия.
Пример:



$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad U = \frac{kx^2}{2}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right) dt$$

Уравнение Эйлера (уравнение Лагранжа): $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

$$-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

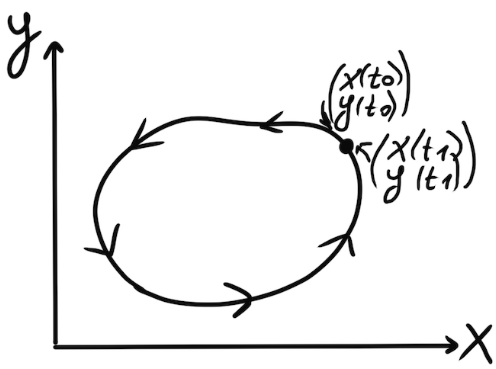
Понижение порядка: $L - \dot{x}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \dot{x}m\dot{x} = c \Rightarrow -\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = c - \text{ З.С.Э.}$$

11. Изопериметрическая задача

Найти кривую заданной длины, ограничивающую наибольшую площадь.

$$S \to \max$$
$$l = \text{const}$$



$$\begin{cases} x = x(t) & & x(t_0) = x(t_1) \\ y = y(t) & t \in [t_0, t_1] & y(t_0) = y(t_1) \end{cases}$$

$$S = \iint_D dxdy$$

Формула Грина: $\displaystyle\int_{\partial D} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \right) dxdy$

$$S = \iint_D dxdy = \iint_D \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{-\frac{\partial P}{\partial y}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{\partial Q}{\partial x}} \right) dxdy = \int_{\partial D} \left(-\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy \right) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{1}{2} & P = -\dfrac{y}{2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{2} & Q = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t)^2 + (y'(t))^2}dt = \text{const}$$

Задача из математического анализа :

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n) \to \text{extz} & \tilde{f} = f + \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_m g_m \to \text{extz} \\ g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Задача вариационного исчисления:

$$I[y_1, \ldots, yn] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', ..., y_n')dx \to \text{extz}$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_0^1 & y_n(x_0) = y_0^n \\ y_1(x_1) = y_1^1 & y_n(x_1) = y_1^n \end{cases}$$

$$Y[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', ..., y_n')dx = \text{const}$$

Необходимое условие локального экстремума:

Пусть $\tilde{y_1}(x), ..., \tilde{y_n}(x)$ доставляет локальный экстремум функционалу $I[y_1, \ldots, y_n]$ и не является экстремалью функционалу $Y[y_1, \ldots, y_n]$, тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, такие, что $\tilde{y_1}(x), ..., \tilde{y_n}(x)$ доставляют экстремум функционалу $\tilde{I} = I = \lambda Y$

Без доказательства

Замечание. $I + \lambda Y \to \text{extz} \Leftarrow \begin{cases} Y = \text{const} \\ I \to \text{extz} \end{cases}$

$$\lambda\left(\frac{1}{\lambda}I+Y\right)\to\text{extz}\Leftrightarrow Y+\frac{1}{\lambda}\to\text{extz}\Leftarrow\begin{cases}Y\to\text{extz}\\ I=\text{const}\end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases}S\to\max\\ l=\text{const}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}l\to\min\\ S=\text{const}\end{cases}$$

12. Решение классической изопериметрической задачи

$$\tilde{I}=S+\lambda l=\int_{t_0}^{t_1}\underbrace{\left[\frac{1}{2}(xy'-x'y)+\lambda\sqrt{(x')^2+(y')^2}\right]}_{F}dt\to\text{extz}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial x'}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{1}{2}y'-\dfrac{d}{dt}\left[-\dfrac{1}{2}y+\lambda\dfrac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right]=0\\ -\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2}x+\lambda\dfrac{x'}{\sqrt{(y')^2+(y')^2}}\right]=0\end{cases}$$

№ 39 (задачник Александрова-Егорова). Понизить порядок не получится так же, как в простейшей задаче.

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{2}-\lambda\dfrac{x'}{\sqrt{(y')^2+(y')^2}}\right]=0\\ -\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+\lambda\dfrac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right]=0\end{cases}\qquad\begin{cases}y-c_1=\dfrac{\lambda x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\\ x-c_2=\dfrac{-\lambda y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\end{cases}$$

$$(y-c_1)^2+(x-c_2)^2=\lambda^2\left[\frac{(x')^2}{(x')^2+(y')^2}+\frac{(y')^2}{(x')^2+(y')^2}\right]$$

$$(y-c_1)^2+(x-c_2)^2=\lambda^2-\text{окружность}$$