

# Глава 1: Вариационное исчисление.

## 1. Примеры задач вариационного исчисления

*Задача математического анализа:*

Есть кривая заданная функцией  $f(x)$  найти точки экстремума:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2 - \text{точки, подозреваемые на экстремум}$$

$$f''(x_1) < 0 \Rightarrow x_1 - \text{max}$$

$$f''(x_2) > 0 \Rightarrow x_2 - \text{min}$$

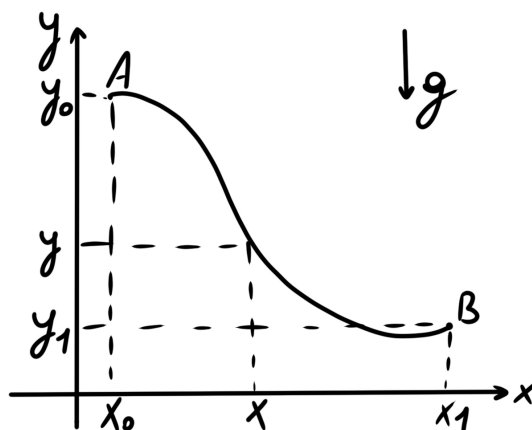
*Задача вариационного исчисления:*

Функционал:  $I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$

Найти функцию  $y(x)$  такую, что  $I[y]$  принимает min или max

Пример 1 : задача наискорейшего спуска (задача Брахистохроны)

Найти кривую  $y(x)$  по которой тело из точки А в точку В попадет за наименьшее время.



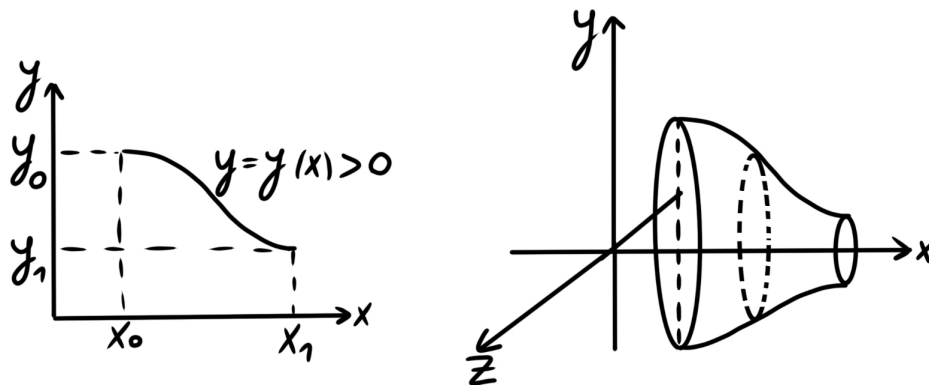
$$mgy_0 + 0 = mgy(x) + \frac{m|v|^2}{2}$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \frac{dx}{dt}$$

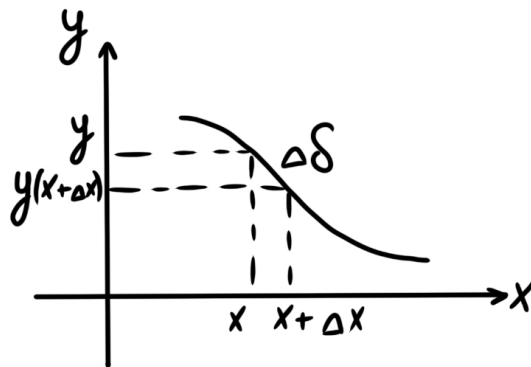
$$\sqrt{2g(y_0 - y(x))} = |v| = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \frac{dx}{dt}$$

$$T = \int_0^T dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}} dx$$

Пример 2 : задача поверхности вращения наименьшей площади.



Площадь  $S \rightarrow \min$



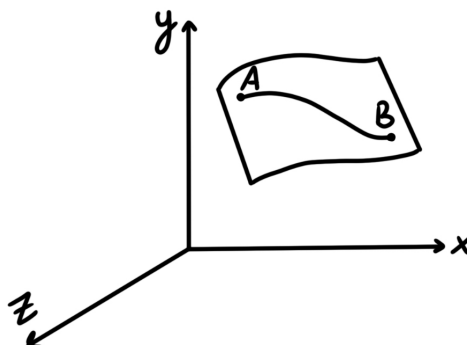
$$\Delta\delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

$$\Delta S = 2\pi y(x) \Delta\delta$$

$$\sum \Delta\delta \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} = 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Пример 3 : задача о геодезических на поверхности.

Найти кривую, проходящую через точки А и В, лежащую на поверхности, которые имеют наименьшую длину.



$G(x, y, z) = 0$  – уравнение поверхности

Пусть уравнение кривой :  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1] - \text{параметр}$

$G(x(t), y(t), z(t)) = 0 \leftarrow$  кривая лежит на поверхности

$$l = \sum \Delta l = \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sum \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

$$l = \sum \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

## 2. Простейшая задача вариационного исчисления

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1)$$

$F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$  непустое открытое множество,  $F \in C^2(\mathbb{D})$

**Определение 1** (допустимая функция). Функция  $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  называется допустимой, если:

- 1)  $y(x) \in C([x_0, x_1])$
- 2)  $y(x) \in C^2((x_0, x_1))$
- 3)  $\forall x \in [x_0, x_1], (x, y(x), y'(x)) \in \mathbb{D}$
- 4)  $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$  сходится

$$\text{Краевые условия: } y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \quad (2)$$

**Определение 2.** Допускаемая  $\tilde{y} : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  доставляет локальный минимум функционалу (1) при краевых условиях (2), если:

- 1)  $\tilde{y}(x_0) = y_0, \tilde{y}(x_1) = y_1$
- 2)  $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall$  допустимой функции  $y(x)$ , удовлетворяет (2):  $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon_0$

**Определение 3.** Допустимая функция  $\tilde{y} : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  доставляет глобальный минимум функционалу  $I[y]$  при краевых условиях (2), если:

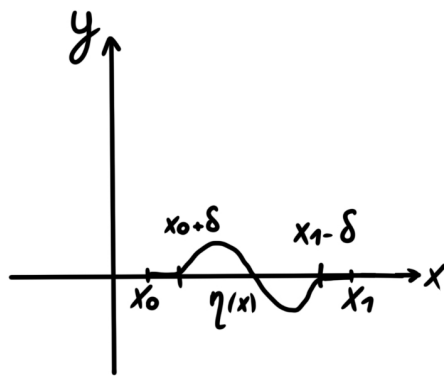
- 1)  $\tilde{y}(x_0) = y_0, \tilde{y}(x_1) = y_1$
- 2)  $\forall$  допустимой функции  $y(x)$ , удовлетворяет (2), выполняется  $I[\tilde{y}] \leq I[y]$

## 3. Необходимые условия локального экстремума

Пусть функция  $\tilde{y}$  доставляет функционалу  $I[y]$  при краевых условиях (2) локальный минимум  $\Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[y]$ , где  $y(x)$  из определенного локального минимума.

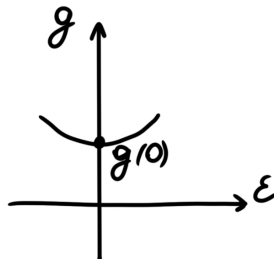
Возьмем  $y(x) = \tilde{y} + \varepsilon \eta(x)$ ,  $\varepsilon \left( \frac{\varepsilon_0}{M}, \frac{\varepsilon_0}{M} \right)$ ,  $M = \max_{x \in [x_0, x_1]} |\eta(x)|$

$\eta(x) \in C^2([x_0, x_1])$  – финитные функции.



$$\Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]$$

Рассмотрим функцию  $g(\varepsilon) = I[\tilde{y} + \varepsilon\eta] \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon)$



$\varepsilon = 0$  — точка локального минимума для функции  $g(\varepsilon) \Rightarrow g'_\varepsilon(0) = 0$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y} + \varepsilon\eta(x), \tilde{y}' + \varepsilon\eta'(x)) dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} \quad \boxed{=}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+\delta}}_{(1)} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{(2)} + \underbrace{\int_{x_1-\delta}^{x_1}}_{(3)} \quad \frac{d}{d\varepsilon} I_1 = \frac{d}{d\varepsilon} I_2 = 0$$

**Теорема 1** (из математического анализа).  $f(x, \varepsilon) : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывна,  $\exists \frac{df}{d\varepsilon}(x, \varepsilon)$  - непрерывна

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(x, \varepsilon) dx = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} f(x, \varepsilon) dx$$

Вносим производную под знак интеграла:

$$\boxed{=} \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x) dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x) dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}(x) \Big|_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{=0} -$$

$$- \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \eta(x) \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'}(\dots) \right] dx \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta} \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(\dots) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'}(\dots) \right] \eta(x) dx = 0$$

$\forall$  финитной функции  $\eta(x)$

**Лемма 1** (основанная лемма вариационного исчисления).  $f(x) : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывна и  $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x) dx = 0, \forall$  финитной  $f(x)$ . Тогда  $f(x) \equiv 0 \forall x \in [x_0, x_1]$

По лемме:  $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$  - необходимое условие локального экстремума( **уравнение Эйлера** )

**Определение 4** (экстремаль). *Допустимая функция  $y(x)$  называется экстремалью функционала  $I[y]$  при краевых условиях (2), если:*

- 1)  $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$
- 2)  $y(x)$  удовлетворяет условию Эйлера