# Конспект лекций по дисциплине

# Основы функционального анализа

**Новосибирский государственный университет**

**Физический факультет**

**4-й семестр**

**2025 год**

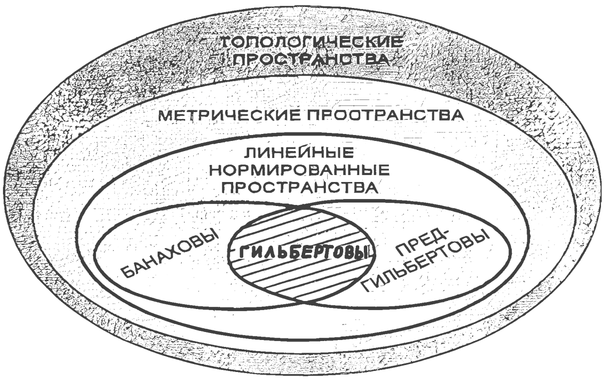
Студент: Б.В.О

Преподаватель: Ротанова Татьяна Александровна

# Оглавление

# Глава 1: Геометрия пространств со скалярным произведением.

## 1. Линейные пространства




**Определение 1** (Метрическое прострнвство). *Метрика* $\rho(x,y) : M^2 \to \mathbb{R}$

*1)* $\forall x, y : \rho(x,y) \geq 0 - (\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

*2)* $\forall x, y \in M : \rho(x,y) = \rho(y,x)$

*3)* $\forall x, y, z : \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

$B_\varepsilon(x) = \{y \in M | \rho(x,y) < \varepsilon\}$

**Определение 2.** *Множество открытое, если любая точка в нем содержится в нем вместе некоторой окрестностью.*

Пример дискреткой метрики:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

## 2. Линейно (векторное) пространство

**Определение 3.** *Непустое множество элементов L произвольной природы, называется линейным (векторным) над полем чисел* $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ *если*

*1)* $\forall x, y$ *введена операция сложения:*

*1.1)* $x + y = y + x$ *(коммутативность)*

*1.2)* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность)*

*1.3) В L существует элемент называемым нулем 0:* $x + 0 = x$ *,* $\forall x \in L$

*1.4)* $\forall x \in L$ *существует противоположный элемент принадлежащий L:* $x + y = 0$ *, обозначается как* $-x$

*2) $\forall x \in L$ и $\forall$ числа $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ определен вектор из $L$ - произведения элементов на число $\alpha, \alpha x \in L$:*

*1.1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta$*
*1.2) $1 \cdot x = x$ (существования единицы)*
*1.3) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$*
*1.4) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$*

Примеры:
1)

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n \end{matrix} \quad + \quad \begin{matrix} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \\ \beta(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{matrix} \qquad = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots \alpha x_n + \beta y_n)$$

2) $C[a,b] = \{f(a,b) \to \mathbb{C},$ непрерывная функции $f$ - непрерывна $\}$
3) $L_p(x) = \{f$- измерима по Лебегу, заданная на $X, f : X \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\int_X |f(x)|dx < \infty$$

4) $l_2 : x = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$

**Определение 4.** *$x_1, \dots, x_n$ называется линейно зависимыми, если $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ не все равные нулю, такие что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$*

*В противном случае: из того, что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ следует, что все $\alpha_i = 0$ $x_1, \dots, x_n$ называется линейно независимыми наборами векторов.*

**Определение 5.** *Бесконечный набор элементов $L$ называется линейно независимым, если любой его конечный поднабор линейно независимым.*

**Определение 6.** *Если в $L$ можно найти $n$ линейно независимых векторов, а любой набор из $n+1$ векторов является линейно зависимыми, то $\dim L = n$. Если в $L$ можно указать набор из произвольного числа линейно независимых элементов, то $\dim L = \infty$.*

**Определение 7.** *Непустое подмножество $S \subset L$ называется подпространством, если оно само является пространством введенных в $L$ линейных операций.*

**Определение 8.** *Линейной оболочкой $<M>$ называется совокупность всех линейных комбинаций $\alpha x + \beta y$ где $x, y \in M \subset \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$*

*$<M>$ - подпространство в $L$ (натянутое или порожденное множеством элементов $M$)*

## 3. Определение нормы

**Определение 9.** *Норма в линейном пространстве $L$: $\| \ \| : L \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$*

*$\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$*
*1) $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (положительная определенность нормы)*
*2) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$ (положительная однородность нормы)*
*3) $||x+y|| \leq ||x| + ||y||$*

В конечномерных пространствах все нормы эквиваленты $c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$. В конечномерных пространствах это не так!

Пример норм:

$$1)\|f\| = \max_{t\in[a,b]}|f(t)| \text{ - норма в } C[a,b] \text{ равномерная норма.}$$

$$2) \quad ||f||_{L_1} = \int_X |f|dx \text{ в } L_1$$

$$3) \quad ||f||_{L_p} = \sqrt[p]{\int_X |f|^p dx} \text{в} L_p$$

$$4) \quad ||x||_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2}$$

**Определение 10.** *Последовательность* $(x_n)_{n\in N}$ *точек линейно нормированное пространств* $L$ *сходятся к* $x$, *если* $||x_n - x|| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \forall\varepsilon > 0, \exists n_0, n > n_0 : ||x_n - x|| < \varepsilon$

**Определение 11.** *Предельной точкой* $M \subset L$ *называется точка* $x$, *если существует сходящаяся к* $x$ *последовательность элементов из* $M$ $\exists x_n \in M : x_n \to x$

**Определение 12.** *Замыканием* $\overline{M}$ *- объединение* $M$ *и его предельных точек (по конкретной норме).*

**Определение 13.** *Множество замкнутое, если содержит все предельные точки.*

**Определение 14.** *Множество* $M$ *в* $L$ *- линейно нормированном пространстве называется плотным в* $L$, *если* $\overline{M} = L$

**Определение 15.** *Сепарабельное множество, если в нем* $\exists$ *счетное плотное подмножество*

Пример: Множество множеств P[0,1] не является замкнутым подпространством в C[0,1]

$$P_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow \|P_n - f\|_C \to 0$$

$$\forall n, p_n \in P[0,1], f(x) \in C[0,1] - \text{не является полиномом}$$

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = e^x, \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)(0)}}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Замыкание $P[0,1]$ это $L_2[0,1]$

$$\|p_n - f\|_{L_2} \leq \max_{x\in[0,1]}\max_{c\in[0,1]}\left|\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \overset{\substack{x=1\\c=1}}{=} \frac{e}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad e^x \notin P[0,1]$$

$$L_2(x) : \{f : X \to Y, \int_x |f|^2 dx < \infty\}$$

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_x |f|^2 dx}$$

Нуль: $f : X \to Y$

$$0(x) : X \to Y$$

$$g = 0(x) = 0 - \text{почти всюду}$$

$$g = \begin{cases} 0, \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ \infty, \mathbb{Q} \end{cases}$$

Элементы (вектора) пространства $L_2$ - функции класса $L_2$ .

**Определение 16.** *Последовательность* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in L$ *(линейно нормированное пространство) называется фундаментальной, если* $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$

**Определение 17.** *Если любая фундаментальная последовательность является сходящейся в* $L$*, то* $L$ *- полное пространство.*

**Определение 18.** *Полное нормированное пространство - банахово пространство*

## 4. Линейные пространства с скалярным произведением

**Определение 19.** *Скалярное произведение в* $L$ *( , ) :* $L \times L \to \mathbb{C}$. $\forall x_1, x_2, y \in L, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ *выполняется:*

*1)* $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$

*2)* $(x, y) = (\overline{y, x})$

*3)* $(x, x) \geq 0$ *и* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Линейное пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$ - евклидовы пространства, над $\mathbb{C}$ - унитарное пространства.

$$1)\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) : (x, y) = \sum^n x_i \overline{y}_i$$

$$2)l_2 : (x, y) = \sum^\infty x_i \overline{y}_i$$

$$3)L_2(x) : (f, g) = \int_x f \overline{g} dx$$

$$4)C[a, b] : \text{ нет скалярного произведения согласованного с аксиомами нормы}$$

**Лемма 1.** *Величина* $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ *удовлетворяет свойствам нормы. Согласованная или порожденная скалярным произведением.*

**Определение 20.** *Гильбертово пространство - пространство со скалярным произведением, полное относительно нормы, порожденным этим скалярным произведением.*

**Лемма 2** ( Неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x \in L \quad |(x,y)| \le \|x\|\,\|y\|$

*Доказательство.*

$$\alpha = \frac{(x,y)}{|(x,y)|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$0 \le \|\overline{\alpha}x + ty\|^2 = (\overline{\alpha}x + ty, \overline{\alpha}x + ty) = \overline{\alpha}(x, \overline{\alpha}x_t y) + t(y, \overline{\alpha}x + ty) =$$

$$\underbrace{|\alpha|^2}_{=1}(x,x) + \overline{\alpha}t(x,y) + \alpha t(y,x) + t^2(y,y) = \|x\|^2 + \overline{\alpha}t(x,y) + \alpha t(y,x) + t^2\|y\|^2 \boxed{=}$$

$$\overline{\alpha}t(x,y) + \alpha t(y,x) = t\left(\frac{(\overline{x,y})(x,y)}{|(x,y)|} + \frac{(x,y)(x,y)}{|(x,y)|}\right) = 2t|(x,y)|$$

$$\boxed{=}\, \|x\|^2 + 2t|(x,y)| + t^2\|y\|^2$$

$$|(x,y)| \le \|x\|\,\|y\|$$

#

*Доказательство Леммы 1.* 1) Из 3 аксиомы скалярного произведения;

2) $\alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha x\|^2 = |\alpha|^2\|x\|^2 = (1)$

$$(\alpha x, \alpha x) = \alpha(x, \alpha x) = \alpha\overline{\alpha}(x,x) = (1)$$

3) $\|x+y\| \le \|x\|\,\|y\|$

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x+y) + (y, x+y) = (\overline{x+y, x}) + (\overline{x+y, y}) = (\overline{x,x}) + (\overline{y,x}) + (\overline{x,y}) + (\overline{y,y}) =$$

$$= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \le$$

$$\overset{\text{нер-во К-Б}}{\le} \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

#

$$L_2 : \sqrt{\int_x |f(x)|^2 dx} = \|f\|_{L_2}$$

$$\left| \int_x f(x)\overline{g}(x)dx \right| \leq \left( \int_x |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_x |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} - \text{ неравенство К-Б в } L_2$$

$$\sqrt[p]{\int_x |f(p)| dx} = \|f\|_{L_p}$$

**Лемма 3.** $\forall p \geq 1$ *линейно нормированное пространство* $L_p$ *является полным.*

**Лемма 4.** $\forall p \geq 1$ *пространство* $C^\infty$ *плотно в* $L_p(x)$*, то есть* $\overline{C}^{\infty^{L_p}} = L_p(x)$

**Лемма 5.** $\forall p \geq 1$ *пространство* $L_p$ *сепарабельно.*

**Лемма 6.** *Пусть* $L$ *- линейно нормированное пространство со скалярным произведением и норма порождена скалярным произведением...*

$$\forall x, y \in L \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \textit{равенство паралеллограма}$$

Наоборот, если в линейно нормированном пространстве L выполняется равенство паралеллограма, то в этом пространстве можно ввести скалярное произведение, согласованной с этой нормой.

$L_1 \subset [a,b] \exists f, g$, для которых не выполняется равенство паралеллограма $\Rightarrow$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

**Лемма 7.** *В линейном пространстве со скалярным произведением* $L$ *, скалярное произведение непрерывно по первому аргументу относительно сходимости по норме порожденной скалярным произведением*

$$x_n \to t \quad \|x_n - x\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\forall y, (x_n, y) \to (x, y)$$

*Доказательство.*

$$|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \overset{\text{по К.Б}}{\leq} \|x_n - x\| \underbrace{\|y\|}_{\text{огр.числено}} \xrightarrow{x \to \infty} 0$$

#

## 5. Ортогональность векторов

**Определение 21.** *$L$ - пространство со скалярным произведением, $x, y \in L$ называется ортогональным, если $(x, y) = 0$*

**Определение 22.** *Набор векторов $x, \dots, x_n, \dots, \in L$ называется ортогональным, если $\forall ij : x_i \perp x_j$*

**Определение 23.** *Набор ортогональный ( $x_n$ ) называется ортнармированным, если $\forall i : \|x\| = 1$*

Ортогонализация Грамма-Шмидта

Если $x_1, \dots, x_n$ - счетная система линейно назависимый в L , тогда новые последовательности:

$$y_1 = x_1 \quad z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, z_1)z_1 \quad z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n, z_k)z_k \quad z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$$

Обладает свойствами:

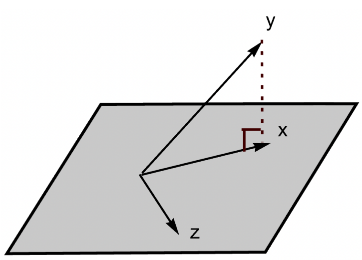
1) Система $z_1, \dots, z_n$ - ортонормированна

2) $\forall n \in N \underbrace{< z_1, \dots, z_n > = < x_1, \dots, x_n >}_{\text{линейные оболочки}}$

**Определение 24.** *Углом между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства $L$ называется число $\varphi \in [0, \pi]$:*

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \, \|y\|}$$

**Определение 25.** *Если $S$ - подпространство пространства со скалярным произведением $L$, то $x \in S$ называется вектором наилучшего приближения (ближайший) для $y \in L$ посредством векторов из $S$, если:*




$$\forall z \in S, \quad \|y - z\| \geq \|x - y\|$$

$$\|x - y\| = \inf_{z \in S} \|y - z\|$$

**Теорема 1.** *Пусть $H$ - гильбертово пространство, $S$ - замкнутое подпространство $H$, $y \in H$, тогда $\exists! x$ ближайший к $y$.*

*Доказательство.*

$$\inf \|y - z\| = d$$

$$x_1, \ldots, x_m \in S \quad \|y - x_m\| \xrightarrow{m\to\infty} d$$

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|(x_m - y) - (x_n - y)\|^2 = 2(\|x_m - y\|^2 + \|x_n - y\|^2) - \left\| \underbrace{x_m - y + x_n - y}_{\|x_m + x_n - 2y\|^2 = 4\|q - y\|^2 \geq 4d^2} \right\|^2 \boxed{\leq}$$

$$q = \frac{x_m + x_n}{2} \in S$$

$$\forall \varepsilon, \exists N \ n, m \geq N : \|x_m - y\| < d^2 + \varepsilon \quad \|x_n - y\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$$

$$\boxed{\leq} 4d^2 + 2\varepsilon - 4d^2 = 2\varepsilon$$

$$x_m - \text{ фундаментальная}$$

$$\text{существование предела последовательности } x :$$

$$x \in S, \text{ т.к } S - \text{ замкнутое}$$

$$\|y - x_n\| = \sqrt{(y - x_n, y - x_n)} \xrightarrow[(1)]{n\to\infty} \sqrt{(y - x, y - x)} = \|y - x\| \to d \text{ в силу ! предела}$$

$$(1) \text{ - непрерывность по 1-му аргументу}$$

Единственность:

$$\text{Пусть } \tilde{x} : \|y - \tilde{x}\| = d, x \neq \tilde{x}$$

$$\|\tilde{x} - x\|^2 = \|(\tilde{x} - y) - (x - y)\|^2 = 2\left\|\underbrace{\tilde{x} - y}_{=d^2}\right\|^2 + 2\left\|\underbrace{x - y}_{=d^2}\right\|^2 - \|2y - x - \tilde{x}\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 \leq 0$$

$$\text{т.е } \tilde{x} = x - \text{ противоречие}$$

#

**Определение 26.** *$S$ - подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением $L$, $x \in S$ - ортогональная проекция $y \in L$ на подпространство $S$, если:*

$$y - x \perp S \quad y - x \perp z \ \forall z \in S \quad (y - x, z) = 0$$

**Лемма 8.** *$S$ - подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением $L$, $x \in S$ - ортогональная проекция $y \in L \Leftrightarrow x$ - ближайший к $y$ посредством $S$.*

*Доказательство.*

$\boxed{\Rightarrow}$ :

$$\forall x, y, z \in L$$

$$\|y - z\|^2 = ((y - x) + (x - z), (y - x) + (x - z)) =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \|y - x\|^2 + 2\mathrm{Re}\cancelto{0}{(x - y, x - z)} + \|x - z\|^2 \, (*)$$

$$(1) : (a + b, a + b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\mathrm{Re}(a, b)$$

$$x \in S - \text{ ортогональная проекция у на } S \Rightarrow y - x \perp x - z$$

Итого:

$$\|y - z\|^2 = \|y - x\|^2 + \left\|\underbrace{x - z}_{\geq 0}\right\|^2$$

$$\forall z \in S : \|y - z\|^2 \leq \|y - x\|^2, x - \text{ ближе для у}$$

Пусть дано:
$\boxed{\Leftarrow}$ :

$$x - \text{ ближайший вектор для } y \in S$$

$$\left. \begin{array}{l} |y - x| = \inf \|y - z\| \\ f(t) = \|y - x + tW\|^2, \quad t \in \mathbb{R}^2, \ W \in S \end{array} \right| \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|y - x + tW\|^2 - \|y - x\|^2}{t} = 0$$

$$\text{в } (*) : z = x - tW$$

$$\|y - (x - tW)\|^2 - |y - x|^2 = 2\mathrm{Re}(y - x, tW) + \|tW\|^2$$

$$\lim_{t\to 0} t\frac{2\mathrm{Re}(y-x,W)}{t} + t^2\frac{\overset{0}{\cancel{\|W\|^2}}}{\cancel{t}} = 0$$

$$2\mathrm{Re}(y-x,W) = 0$$

Если $\mathrm{Im}(y-x,W)=0$, то x - ортогональная проекция y на S.
Доказывается аналогично: $f(t) = \|y-x+itW\|^2$

#

**Определение 27.** *S - подпространство линейного пространства L со скалярным произведением, то совокупность всех $x \in L$, таких, что $x \perp y$ $\forall y \in S$ называется ортогональным дополнением к S ($S^\perp$).*

**Определение 28.** *Линейное пространство L является прямой суммой S и T если любой вектор $x \in L$ единственным образом представим в виде $x = y+z,\ y \in S,\ z \in T$*

**Лемма 9.** *H - гильбертово пространство, S - замкнутое подпространство, тогда H прямая сумма S и $S^\perp$ , $H = S \oplus S^\perp$*

*Доказательство.*

$$y \in H \quad x - \text{ ближайший к y посредством S } \Rightarrow$$

$$\overset{\text{Лемма 1}}{\Rightarrow} y - x \perp z,\ z \in S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = y - x \in S^\perp$$

$$y = \overset{\in S^\perp}{W} + \overset{\in S}{x}$$

Докажем единственность представления:
Пусть $y = \overset{\in S^\perp}{\tilde{W}} + \overset{\in S^\perp}{\tilde{x}}$

$$W + x = \tilde{W} + \tilde{x}$$

$$W - \tilde{W} = \tilde{x} - x$$

$$(\underset{\in S^\perp}{W-\tilde{W}}, \underset{\in S}{\tilde{x}-x}) = (\tilde{x}-x, \tilde{x}-x)$$

$$0 = (\tilde{x}-x, \tilde{x}-x)$$

То есть: $\tilde{x} = x$ и $\tilde{W} = W$ #

**Теорема 2.** *$S$ - конечномерное подпространство линейного пространства $L$ со скалярным произведением $x_1, \ldots, x_n$ - ортонормированный базис в $S$ $\forall y \in L$:*

$$x = \sum_1^n \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = (y, x_k)$$

*является ортогональной проекцией $y$ на подпространство $S$. При этом:*

$$\|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y - x\|^2$$

*Доказательство.*

$$\forall z \in S,\ z = \sum_1^n \alpha_k x_k$$

$$(z, x_m) = \sum_1^1 \alpha_k (x_k, x_m) = \alpha_m$$

$$\|z\|^2 = \left(\sum_1^n \alpha_k x_k, \sum_1^n \alpha_p x_p\right) = \sum_1^n \alpha_p \overline{\left(\sum_1^n \alpha_k x_k, x_p\right)} = \sum_1^n \alpha_p \left[\sum_1^n \overline{\alpha_k} (\overline{x_p, x_k})\right] = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$$

$$\|y - z\|^2 = \|y\|^2 - (z, y) - (y, z) + \|z\|^2 = \|y\|^2 - \sum_1^n \alpha_k (x_k, y) - \sum_1^n \overline{\alpha_k} (y, x_k) + \sum_1^n |\alpha_k|^2 =$$

$$= \|y\|^2 - \sum_1^n \alpha_k \lambda_k - \sum_1^n \overline{\alpha_k} \lambda_k + \sum_1^n |\alpha_k|^2 + \sum_1^n |\lambda_k|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2 = \|y\|^2 + \sum_1^n |\alpha_k - \lambda_k|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2$$

$$\|y\|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2 \geq 0, \text{ при } \alpha_k = \lambda_k \ (z = x)$$

При z = x достигается минимум $\Rightarrow$ ортогональная проекция.

#

**Определение 29.** *$x_1, \ldots, x_n, \ldots,$ - ортонормированная система в линейном пространстве со скалярным пространством $L$:*

$$x \in L \quad \lambda_k = (x, x_k) - \textit{ коэффициент Фурье } x.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k x_k - \textit{ ряд Фурье расходится}$$

**Теорема 3** (неравенстов Бесселя)**.** *$x \in L$ - линейное пространство со скалярным произведением, $\lambda_k$ - коэффициент Фурье, тогда:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

*Доказательство.*

$$< x_1, \ldots, x_n >$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

$$\underbrace{\|x - S_n\|^2}_{>0} + \|S_n\|^2 = \|x\|^2$$

$$\|S_n\|^2 \le \|x\|^2$$

$$\left( \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right) \le \|x\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2$$

$$\downarrow$$

в пределе

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2 - \text{ равенство Парсеваля}$$

#

**Коэффициенты Фурье:** $x_1, \ldots, x_n$ , $\lambda_k = (x, x_k)$

**Неравенство Бесселя:** $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2$

## 6. Пополнение ортонормированной системы

**Определение 30.** *Ортонормированную систему $x_1, \ldots, x_n$ называют замкнутой, если для $\forall x \in H$:*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 , \text{ где } \lambda_k = (x, x_k) - \text{ коэффициенты Фурье}$$

Уравнение замкнутости:

$$y \in H, \mu_k = (y, x_k) - \text{ коэффициенты Фурье } y$$

$$(x, y) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k} - \text{ равенство Парсеваля}$$

**Определение 31.** *Ортонормированная системам $x_1, \ldots, x_n$ называется полной, если ее нельзя пополнить, то есть если ее ортогональное дополнение состоит только из $\vec{0}$. Другими словами, если $\exists x \ \forall k : (x, x_k) = 0 \Rightarrow x = 0\ldots$*

**Определение 32.** *Ортонормированная система $x_1, \ldots, x_n$ называется базисом Гильбертова (или Гильбертовым базисом), если $\forall x \in H$:*

$$\underbrace{x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k}_{\text{разложение в векторный ряд Фурье}} \ , \ \text{где } \lambda_k - \ \text{коэффициенты Фурье}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k \right\| = 0$$

**Теорема 4.** *Во всяком ненулевом Гильбертовом сепарабельном пространстве $\exists$ Гильбертов базис, состоящий из конечного или счетного числа векторов.*

*Доказательство.*

$x_1, \ldots, x_k$ - счетное плотное подмножество (в силу сепарабельности)

$x_1, \ldots, x_k \xrightarrow[\text{комбинации}]{\text{вычеркнули линейные}} y_1, \ldots, y_k -$ счетное число линейно независимых векторов

$y_1, \ldots, y_k \xrightarrow[\text{Грамму-Шмидта}]{\text{ортогонализируем по}} z_1, \ldots, z_k -$ счетное число ортонормированных векторов

$$x \in H, \ \{x_{n_k}\} \to x \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists M \ \exists n_k \geq N : \|x - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

$$x_{n_k} - \ \text{выражается через } \{z_k\}, \ x_{n_k} = \sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p$$

Спроектируем на $x$ конечно мерное подпространство $< z_1, \ldots, z_{n_k} >$

Проекция: $s = \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j$, где $s -$ проекция на $< z_1, \ldots, z_{n_k} >$, $\quad \lambda_j = (x, z_j)$

$$\|x - s\| \leq \|x - y\| \ , \ \forall y \in < z_1, \ldots, z_{n_k} >$$

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j \right\| \leq \left\| x - \underbrace{\sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p}_{x_{n_k}} \right\| < \varepsilon$$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j z_j, \ \lambda_j = (x, z_j) - \ \text{коэффициенты Фурье}$$

#

**Теорема 5.** *Если* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *- ортогональная система в сепарабельном Гильбертовом пространстве, тогда следующие условия эквиваленты:*
*1)* $\{x_k\}$ *- Гильбертов базис;*
*2)* $\{x_k\}$ *- замкнутая система;*
*3)* $\{x_k\}$ *- полная система.*

*Доказательство.*

$1) \Rightarrow 2):$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k,\ \ \lambda_k = (x, x_k),\ \ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \lambda_k \left(x_k, \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m\right) =$$

$$\lim_{N,M\to\infty} \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \lambda_k \overline{\lambda_m} (\underbrace{\overline{x_m, x_k}}_{=(x_k,x_m)=\delta_{km}\begin{cases}1,\, k=m\\ 0,\, k\neq m\end{cases}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

#

$2) \Rightarrow 3)$:

$$\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

От противного: Пусть $y \neq 0,\ y \in H$ - пополнение $\{x_k\}$: $\mu_k = (y, x_k) = 0$

$$|y|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 = 0 \Rightarrow y = 0 - \text{ противоречие}$$

#

$3) \Rightarrow 1)$:
Пусть $x \in H$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_k x_k,\ \ \lambda_k = (x, x_k)$$

Фундаментальность:

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} \lambda_n x_n\right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2$$

Неравенство Бесселя: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \|x\|^2$

$$\forall \varepsilon \ \exists N_0 \ \forall N, M \geq N, \quad \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2 < \varepsilon$$

Значит $S_N$ - фундаментальная последовательность в Гильбертовом полном пространстве $\Rightarrow$ сходится.

Обозначим предел $S_N$ через $z$.

Лектор: "хорошая буква зет, давайте обозначим"

$$(x - z, x_k) = \lim_{N \to \infty} \left( x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n, x_k \right) = \lambda_k - \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (x_n, x_k) = \lambda_k - \lambda_k = 0$$

$$x - z \perp x_k, \ \forall k$$

$\Rightarrow$ в силу единственности системы $\{x_k\}$:

$$x - z = 0, \ x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \Rightarrow \{x_k\} - \text{Гильбертов базис}$$

#

**Теорема 6** (Рисса-Фишера). *$H$ - сепарабельное Гильбертово пространство ортонормированной системы $\{x_k\}$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - числа, такие что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ - сходится. Тогда $\exists!$ $x \in H$ такое, что $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n$$

$$\|S_N - S_M\|^2 = \underbrace{\sum_{p=N+1}^{M} |\lambda_p|^2}_{\text{сходится } \Rightarrow S_N - \text{ фундаментальный}} < \varepsilon$$

*Доказательство.*

$z$ - предел $S_N$:

$$(z, x_k) = \lim_{N \to \infty} (S_N, x_k) = \lambda_k - \text{коэффициенты Фурье дял } z$$

$$\|z\|^2 = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, z \right) = \sum_{k=1}^{\lambda} \lambda_k (\underbrace{x_k}_{=\overline{\lambda_k}}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

Единственность: Пусть $\exists x \in H, \ x \neq z$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|x-z\|^2 = \underbrace{\|x\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2} - \mathrm{Re}(x,z) + \underbrace{\|z\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2} - \text{смотреть ранее}$$

$$(x,z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k, z\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\overline{z, x_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|x-z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 0 \Rightarrow x = z$$

#

## 7. Изоморфизм

**Определение 33.** *Пусть $H_1, H_2$ - Гильбертовы пространства. $H_1$ - изоморфно $H_2$, если $\exists A : H_1 \to H_2$ и $\exists B : H_2 \to H_1$, которые: линейные, сохраняют скалярное произведение и взаимообратны.*

$$\begin{matrix} \forall x, y \in H_1 \\ \forall u, v \in H_2 \end{matrix} \forall \alpha, \beta - \text{ числа}$$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad (A(x), A(y))_{H_2} = (x,y)_{H_2}$$

$$B(\alpha u + \beta v) = \alpha B(u) + \beta B(v) \quad (A(u), A(v))_{H_2} = (x,y)_{H_2}$$

$$K.O \begin{cases} B(A(x)) = x \\ A(B(u)) = u \end{cases}$$

**Теорема 7** (Теорема о изоморфизме гильбертовых пространствах)**.** *Всякое сепарабельное бесконечномерное Гильбертово пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) изоморфно пространству $l_2$ (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).*

*Идея доказательства:*

$$A : H \to l_2$$

$$\begin{matrix} x \in H \\ \lambda \in l_2 \end{matrix} \quad ?$$

$$A(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots) : \text{ где } \lambda_k = (x, x_k) \text{ - коэффициенты Фурье; } A(x) \in l_2 \text{ ?}$$

$$\sum_{1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2 \text{ - неравенство Бесселя}$$

1) $A$ линейно?
2) $A$ сохраняет скалярное произведение (это равенство Парсеваля)?

$$B : l_2 \to H \text{ по теореме Рисса-Фишера}$$

3) $B$ линейно?
4) $B$ сохраняет скалярное произведение?
5) $A$ и $B$ взаимно обратны?

Тригонометрическая система функция как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi, \pi]$

$$L_2[-\pi, \pi] : \left\{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

$$(f, g)_{L_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g}(t) dt$$

Над $\mathbb{R}$:
Ряды Фурье

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0, \ n \neq m \\ \pi, \ n = m \neq 0 \\ 2\pi, \ n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0, \ n \neq m \\ \pi, \ n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = 0$$

Гильбертово пространство:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$$

Ряд Фурье:
Коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Гильбертово пространство:
Коэффициенты Фурье

$$\alpha_0 = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0$$

$$\alpha_n = (f, \cos(nx)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \sqrt{\pi} a_n$$

$$\beta_n = (f, \sin(nx)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \sqrt{\pi} b_n$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$f(x) = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x + \beta_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x + ... + \alpha_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \beta_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b \sin x + ... + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Равенство Ляпунова:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Равенство Парсеваля:

$$\alpha_0^2 + \sum^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_0^2) = \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

# Глава 2: Классические ортогональные системы

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \text{ - норма в } C[a,b] \text{ равномерная норма.}$$

$$f_n \xrightarrow{\text{равномерно}} f$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall k > N : \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 < \varepsilon^2$$

$$C^\infty(\subset C) \text{ плотны в } L_2[a,b] \Leftrightarrow L_2 = \overline{C}, \quad M \text{ плотно в } L \Leftrightarrow L = \overline{M}$$

## 1. Весовое пространство Лебега

Пусть $(a,b)$ - промежуток на $\mathbb{R}$ (необязательно ограниченный)

**Определение 1.** *Функция $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ называется весовой или весом, если:*
*1) $\forall x \in (a,b)\ h(x) \geq 0$*
*2) $h(x) > 0$ почти всюду в $(a,b)$*
*3) $\displaystyle\int_a^b h(x)dx < \infty$*

**Определение 2.** *Пространство функций*

$$L_2^h(a,b) = \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} | \int_a^b f^2(x)h(x)dx < \infty \right\}$$

*назовем весовым пространством Лебега.*

Это пространство становится евклидовым, если на нем задано скалярное произведение

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)h(x)dx$$

Скалярное произведение определено для любых функций $f, g$ так как

$$|f(x)g(x)h(x)| < \frac{1}{2}[f^2(x)h(x) + g^2(x)h(x)]$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)h(x)dx}$$

**Замечания:**

- Нулевым элементом пространства $L_h^2(a,b)$ считаем такую функцию $f$, что выполнено $(f,f) = \displaystyle\int_a^b f^2 h(x)dx = 0$

- Весовое пространство Лебега $L_h^2(a,b)$ является полным относительно нормы, порожденной скалярным произведением, то есть Гильбертовым. Для каждой функции $h(x)$ и промежутка $(a,b)$ определятся специальное гильбертово пространство!

- Если интервал $(a,b)$ конечен, то $\forall n\ x^n \in L_2^h(a,b)$. Если $(a,b)$ - бесконечный промежуток, то полагаем, что весовая функция убывает на бесконечности настолько быстро, что все мономы $x^n \in L_h^2(a,b)$:

$$\int_a^b x^{2n}h(x)dx < \infty$$

Тогда в $L_h^2(a,b)$ всегда есть последовательность мономов $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$

На любом интервале $(a,b)$ последовательность мономов $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$ образуют линейно назависимую сисстему. Применим к ней процесс ортогнализации Грамма-Шмидта относительно скалярного произведения пространства $L_h^2(a,b)$. Получим последовательность мономов:

$$q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots,$$

со свойствами:

- $\displaystyle\int_a^b q_m(x)q_n(x)h(x)dx = \delta_{mn}$
- $\forall n\ q_n$ - многочлен степени $n$

Так же для удобства домножим, если это необходимо, многочлен $q_n$ на -1, так чтобы у каждого многочлена старший коэффициент $a_n$ стал положительным.

**Определение 3.** *Последовательность полученных многочленов $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots,$ называется последовательностью ортогональных многочленов на промежутке $(a,b)$ с весом $h(x)$*

Ортонормированная система в Гильбертовом пространстве $H$ полная

$$\Rightarrow \underbrace{<\overline{\{x_k\}}>}_{\text{замкнутое подпространство}} = H$$

Предположим противоречие $\exists y \in H,\ y \not\in <\overline{\{x_k\}}>$

$\exists$ ортогональная проекция $y$ на $<\overline{\{x_k\}}>$

$$(y-z) \perp <\overline{\{x_k\}}>$$

$$y - z \perp x_k \forall k \text{ противоречие}$$

$$y = z \Rightarrow y \in <\overline{\{x_k\}}>$$

- Для конечного промежутка: полиномы плотны в $L_2^h(a,b)$ , значит, конечными линейными комбинациями мономов можно сколько угодно близко по норме $L_2^h(a,b)$

приблизиться к произвольной функции $f \in L_2^h(a,b)$ , поэтому мономы образуют полную систему в $L_2^h(a,b)$ .

- Мы будем использовать некоторые бесконечные $(a,b)$ и весовые функции $h(x)$ , для этих частных случаев полнота мономов тоже доказана.

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта переводит полную систему в полную, поэтому система многочленов $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ , полна в $L_2^h(a,b)$ , т.е. является гильбертовым базисом в $L_2^h(a,b)$ . Можно ввести коэффициенты Фурье относительно этого базиса и разлагать функции в ряды по ортогональным многочленам.

- Ортогональные многочлены многочлены определяются весом $h(x)$ и промежутком $(a,b)$ однозначно (при сделанных предположениях)

- Если $P(x)$ - произвольный многочлен степени $n$, то его можно представить как $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k q_k$

- Если $P_m(x)$ - произвольный многочлен степени $m$, и $n > m$, то $q_n \perp P_m$

$$\int_a^b P_m(x) q_n(x) h(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{k=0}^{m} c_k q_k(x) \right) q_n(x) h(x) dx = 0$$

- Если вес $h : (-a,a) \to \mathbb{R}$ - четная функция, то $q_n(x) = (-1)^n q_n(x)$

Сделаем замену: $x \to -x$ в $\displaystyle\int_{-a}^{a} q_m(x) q_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$

$$\int_{-a}^{a} q_m(-x) q_n(-x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

$$\int_{-a}^{a} \tilde{q}_m(x) \tilde{q}_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

, где $\tilde{q}_n = (-1)^n q_n(-x)$, $\tilde{q}_m = (-1)^m q_m(-x)$. Тогда по первому свойству $q_n = \tilde{q}_n = (-1)^n q_n(-x)$

- Трехчленная рекуррентная формула

Пусть $q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$ Тогда справедливо представление:

$$x q_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x) + \left( \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \right) q_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_n(x)$$

*Доказательство.*

Разложим многочлен степени $n+1$ по ортогональным многочленам:

$$x q_n(x) = \sum_{m=0}^{n+1} c_{nm} q_m(x)$$

откуда $c_{nm} = 0$ при $m > n+1$ при этом

$$c_{nm} = (x q_n, q_m) = \int_a^b x q_n(x) q_m(x) h(x) dx = (x q_m, q_n) = c_{mn}$$

откуда $c_{nm} = 0$ при $m < n-1$. Получаем

$$xq_n(x) = c_{c(n+1)}q_{n+1}(x) + c_{nn}q_n(x) + c_{n(n-1)}q_{n-1}(x)$$

остается вычислить коэффициенты. Подставим в предыдущую формулу:

$$q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + ...$$

Получим:

$$x(a_n x^n + b_n x^n + ...) = c_{n(n+1)}(a_{n+1}x^{n+1} + b_{n+1}x^{n+1} + ...) + c_{nn}(a_n x^n + b_n x^{n-1} + ...) +$$

$$+ c_{n(n-1)}(a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + ...)$$

Собираем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$a_n = c_{n(n+1)}a_{n+1}(\text{при } x^{n+1}) \Rightarrow c_{n(n+1)} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$b_n = c_{n(n+1)}b_{n+1}c_{nn}a_n(\text{при } x^n) \Rightarrow c_{nn} = \frac{b_n - \frac{a_n}{a_{n+1}}b_{n+1}}{a_n}$$

$$...$$

По симметрии находим $c_{n(n+1)} = c_{(n-1)n} = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

#

Огрубляя ситуацию, можно сказать, что для любой последовательности ортогональных многочленов $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$, существует постоянные $A_n, B_n, C_n$ такие, что:

$$q_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)q_n(x) + C_n q_{n-1}(x)$$

## 2. Свойства нулей ортогональных мономов

**Утверждение 1.** *Все ортогональные многочлены степени $n$ имеют ровно $n$ корней, причем эти корни (нули многочлена $q_n$) действительны, просты и расположены внутри интервала $(a, b)$.*

*Доказательство.*

Предположим противное: существует только $k < n$ точек, в которых $q_n$ меняет знак. При этом как минимум одна смена знака есть в силу:

$$\int_a^b q_0(x)q_n(x)h(x)dx = 0, \quad \forall n \geq 1 \quad (1)$$

$$(1) \to \sum S = 0 \quad (2)$$

при этом $q_0$ - это константа, а $h(x) \geq 0$, (2) $\Rightarrow$ значит, многочлен $q_n$ принимает на $(a, b)$ значения разных знаков. Обозначим нули $q_n$ как $x_1, x_2, \dots, x_k$

Введем многочлен $P_k(x) = (x - x_1)...(x - x_k)$, тогда многочлен $q_n P_k(x)$ сохраняет знак и значит:

$$\int_a^b q_n(x) P_k(x) h(x) dx \neq 0$$

что противоречит свойству ортогональности многочлена $q_n$ любому многочлену степени, меньшей $n$ (Если $P_m(x)$ - произвольный многочлен степени $m$, и $n > m$, то $q_n \perp P_m$) #

**Следствие 1.** из утверждения и рекуррентной формулы:
- Два соседних многочлена не имеют общих корней.
Предположим противное: $q_n(x_0) = q_{n+1}(x_0) = 0$. Воспользуемся рекуррентной формулой:

$$x_0 q_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x_0) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n(x_0) + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0)$$

то есть

$$0 = \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0)$$

Значит, $x_0$ - корень $q_{n-1}$. Рассуждая аналогично, $x_0$ - корень $q_{n-2}, ..., q_0 \Rightarrow q_0 = 0$, что противоречит свойству многочлена $q_0$, равного константе $\int_a^b q_0^2(x) h(x) dx = 1$

**Следствие 2.**
- Если $x_0$ - корень многочлена $q_n$, то соседние многочлены $q_{n-1}$ и $q_{n+1}$ принимают в точке $x_0$ значения разных знаков.

*Доказательство.*
Пусть $q_n(x_0) = 0$. Воспользуемся рекуррентной формулой

$$x_0 \cdot 0 = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x_0) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) 0 + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0)$$

то есть

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x_0) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n+1}(x_0) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0)$$

причем $a_n,\ a_{n+1}$ - старший коэффициент полинома $q_m$, положительный по построению.

#

**Следствие 3.**
-Корни многочлена $q_n$ лежат между корнями многочлена $q_{n+1}$

## 3. Классические ортогональные многочлены

Наши основные многочлены, все рассматриваемые полиномы ортогональны, но не ортонормированные:

| Название | Обозначение | Интервал ортогональности | Весовая функция |
|---|---|---|---|
| Эрмитовы | $H_n(x)$ | $\mathbb{R}$ | $e^{-x^2}$ |
| Лагерра | $L_n^\alpha(x)$ | $(0, +\infty)$ | $x^\alpha e^{-x}$ |
| Лежандра | $P_n(x)$ | $(-1, 1)$ | 1 |

**Определение 4.** *Функцию $w(x,t)$ двух переменных называют производящей функцией для последовательности многочленов $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots,$ если ее разложение в ряд по степеням $t$ при достаточно малых $t$ имеет вид:*

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(x)}{\alpha_n} t^n$$

*где $\alpha_n$ - некоторые постоянные.*

Под "классическим"ортогональными многочленами мы понимаем только то многочлены, весовая функция которых удовлетворяет уравнению Пирсона:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2}$$

и предельным условиям

$$\lim_{x \to a+0} h(x)B(x) = \lim_{x \to b-0} h(x)A(x) = 0$$

где $B(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2,\ A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$

Если весовая функция h которых удовлетворяют уравнению Пирсона и граничныи условиям, то

- ортогональный многочлен $q_n$ является решением дифференциального уравнения

$$B(x)y''(x) + [A(x) + B'(x)]y'(x) - \gamma_n y(x) = 0$$

где $\gamma_n = n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]$

- имеет место формула Родрига:

$$q_n(x) = c_n \frac{1}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n}[h(x)B^n(x)], \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $c_n$ - некоторые постоянные.

- производные $\dfrac{d^m}{dx^m}[q_n(x)]$ являются классическими ортогональными многочленами с тем же промежутком ортогональности

- у многочленов $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots,$ существует производящая функция, выражающаяся через элементарные функции.

Способы задания ортогональных многочленов:

- ортогонализация мономов в $L_2^h(a,b)$
- решение дифференциального уравнения для соответствующего $n$
- формула Родрига

- рекуррентное соотношение (нужно знать $q_0, q_1$)
- разложение производящей функции.

Рассмотрим производящую функцию:

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n} w(x,t)\bigg|_{t=0}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{2x+2t}{2(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(1-2xt+t^2) = w(x,t)$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(1-2xt+t^2) = (x-t)w$$

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial t} + (t-x)w = 0$$

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

$$t^n: \ (n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-\cancel{1})P_{n-1}(x) + \cancel{P_{n-1}(x)} - xP_n(x) = 0, \ n \geq 1$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \ n = 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

, это рекуррентная формула.

**Лемма 1.** *$\forall n$ функция $P_n(x)$ является многочленом степени $n$ с положительным старшим коэффициентом.*

*Доказательство.*

По индукции:

База: $\begin{matrix} n=0, & P_0 = 1 \\ n=1, & P_1 = x \end{matrix}$

Шаг: для $P_n(x)$ верно, докажем для $P_{n+1}(x)$:

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{n+1}\underbrace{xP_n(x)}_{n+1 \text{ степень}} - \frac{n}{n+1}\underbrace{P_{n-1}(x)}_{n-1 \text{ степень}}$$

$$P_{n+1}(x) \text{ - многочлен степени } n+1$$

$$\frac{2n-1}{n+1}xP_n \text{ - имеем положительную старую степень}$$

#

Дифференцируем $w(x,t)$ по $x$:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{-2t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial x} - tw = 0$$

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

$$(A):\ \ P_n'(x) - 2xP_{n-1}'(x) + P_{n-2}'(x) - P_{n-1}(x) = 0,\ \forall n \geq 2 \qquad \left(\frac{d}{dx}(*)\right)$$

$$n \to n+1:\ \ P_{n+1}'(x) - 2xP_{n+2}'(x) + P_{n-1}'(x) - P_n(x) = 0$$

$$(B) : (n+1)P_{n+1}'(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP_n'(x) + nP_{n-1}'(x) = 0$$

$$(B){-}(n{+}1)(A):\ \ [-(2n{+}1){+}(n{+}1)]P_n(x){-}x[(2n{+}1){-}2(n{+}1)]P_n'(x){+}[n{-}(n{+}1)]P_{n-1}'(x) = 0$$

$$(V):\ \ -nP_n(x) + xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = 0$$

$$(B) - n(A):\ \ P_{n+1}'(x) - [(2n+1)-n]P_n(x) - x[(2n+1)-2n]P_n'(x) = 0$$

$$(G):\ \ P_{n+1}'(x) - (n+1)P_n(x) - xP_n'(x) = 0$$

$$(V) + (G):\ \ P_{n+1}'(x) - (2n+1)P_n(x) - P_{n-1}'(x) = 0$$

$$(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$$

## 4. Дифференциальное уравнения. Соотношения ортогональностей

$$-(V):\ \ nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0 \mid \cdot x$$

$$(G)\ n+1 \to n:\ \ P_n'(x) - nP_{n-1}(x) - xP_{n-1}'(x) = 0$$

Суммируем наши фигни:

$$xnP_n(x) - x^2P_n' + \cancel{xP_{n-1}'(x)} + P_n'(x) - nP_{n-1}(x) - \cancel{xP_{n-1}'(x)} = 0$$

$$(1-x^2)P_n'(x) + nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0\left|\ \cdot \frac{d}{dx}\right.$$

$$[(1+x^2)P_n']' + nP_n + \cancel{nxP_n'} \underbrace{-nP_{n-1}'}_{n^2P_n' - \cancel{nxP_n'}} = 0$$

То есть многочлен Лежандра является частным решением линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0$$

$$L_2^h(-1,1),\ h=1:\ (f,g) = \int_{-1}^{1} fg dx$$

$$((1-x^2)P_n')' + n(n+1)P_n = 0 \mid \cdot P_m$$
$$((1-x^2)P_m')' + m(m+1)P_m = 0 \mid \cdot P_n$$

$$\underbrace{[(1-x^2)(P_mP_n' - P_nP_m')]'}_{(1)} + (n(n+1) - m(m+1))P_mP_n = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(1)dx \overset{(\$)}{=} 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} P_nP_m = 0,\ \text{при } n \neq m$$

($): за счет $(1-x^2)|_{-1}^{1} = 0$

, ортогональность доказана.

$$\|P_n\|^2 = (P_nP_m) = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$$

Замена в $(*)$ $n+1 \to n$:

$$(\tilde{*}):\ nP_n - (2n-1)xP_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0$$

$(*)(2n-1)P_{n-1} - (\tilde{*})(2n+1)P_n:$

$$(n+1)(2n-1)P_{n+1}P_{n-1} - x(2n-1)(2n+1)P_nP_{n-1} + (2n+1)nP_{n-1}^2 - (2n-1)nP_n^2 + (2n+1)(2n-1)xP_{n-1} - (2n+1)(n-1)P_nP_{n-2} = 0$$

$$(2n-1)(n+1)P_{n+1}P_{n-1} + (2n-1)nP_{n-1}^2 - (2n+1)(n-1)P_{n-2}P_n = 0$$

$$(2n-1)\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = (2n+1)\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx,\ \forall n \geq 2$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1}\frac{2n-3}{2n-1}\int_{-1}^{1} P_{n-2}^2 dx = ...$$

$$... = \frac{\cancel{2n-1}}{2n+1}\frac{2n-3}{\cancel{2n-1}}\cdots\frac{3}{5}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx}_{\frac{2}{3}} = \frac{2}{2n+1}$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1},\ n \geq 2$$

$$\int_{-1}^{1} P_nP_m dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

## 5. Формула Родрига и теорема о разложении функций в ряд по многочленам Лежандра

**Теорема 1** (Формула Родрига). $\forall n \geq 0 : P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

*Доказательство.* Руслан не буянь здесь доказательство не нужно, у нас в программе это не требуется. #

**Теорема 2** (Теорема о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра). *Пусть $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $\forall x \in [-1,1]$ справедливо равенство:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

*, где $P_n(x)$ - многочлен Лежандра стандартизированный с помощью производящей функции $w(x,t)$*

$$c_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

## 6. Операторы в Гильбертовых пространствах

**Определение 5.** *$E,\ F$ - линейные пространства. $A : E \to F$ - линейный оператор, если $\mathbb{D}(A) \subset E$ и $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$, где $\alpha,\ \beta$ - числа, $x, y \in \mathbb{D}(A)$*

$$A(x) = Ax \quad (\textit{оператор = линейный оператор})$$

Пусть $E,\ F$ - нормированные пространства.

**Определение 6.** *$A : E \to F$ непрерывно в точке $x_0 \in E$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : \|x - x_0\|_E < \delta$*

$$\|Ax - Ax_0\|_F < \varepsilon$$

Непрерывность в $0 : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|x\| < \delta$

$$\|Ax\| < \varepsilon$$

Непрерывность в $x_0 \Leftrightarrow$ непрерывность в $0 \Leftrightarrow$ непрерывность в $x_1 \in \mathbb{D}(A)$

$$\forall x : \|x - y\| < \delta$$
$$\|Ax - Ay\| < \varepsilon$$

$$\|x - x_0 \pm y\| = \|x + y - x_0 - y\| = \|x_1 - y\| < \delta$$

, где $x_1 = x + y - x_0$.

$$\|\underbrace{A(x + y - x_0) - Ay}_{=\|A(x_1 - y)\| < \varepsilon}\| = \|A(x - x_0)\| < \varepsilon$$

**Примеры линейных операторов:**

1. $I : E \to E$ по формуле: $Ix = x$, называется тождественным (единичным).

$$x, y \in E,\ I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha Ix + \beta Iy$$

2. $0 : E \to F$ по формуле: $0x = 0 \in F$, называется нулевым.

$$x, y \in E,\ 0(\alpha x + \beta y) = 0 = \alpha 0 + \beta 0 = \alpha 0x + \beta 0y$$

3. $P : H \to S$ - оператор проектирования на замкнутое подпространство, где $H$ - гильбертово пространство, $H = S \oplus S^{\perp}$. $\forall x \in H\ \exists!\ y \in S,\ \exists!\ z \in S^{\perp} : x = y + z$.

$P$ действует по формуле $Px = y$

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)$$
$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2$$

4. $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$. $A(f(t)) = tf(t)$

$$\|tf(t)\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 t^2 f^2(t)dt \le \int_0^1 f^2(t)dt < \infty$$

$$f(t), g(t) \in L_2(0,1),\ A(\alpha f + \beta g) = t(\alpha f + \beta g) = \alpha t f(t) + \beta t g(t) = \alpha A f + \beta A g$$

5. $d : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ - оператор дифференцирования. По формуле: $df = f'(t)$, $\mathbb{D}(d) \subset L_2(0,1)$

Линейность основана на линейности $L_2$ и на линейности дифференцирования.

**Определение 7.** *Множество $M \subset E$ ограничено, если $\exists$ шар с центром в точке 0 в котором содержится $M$: $B(0,R) = \{x \in E \mid \|x\| < R\}$*

**Определение 8.** *$A : E \to F$ называется ограниченным, если $\|x\| < R$, $\exists R_1 : \|Ax\| < R_1$ (переводит ограниченное множество в ограниченное)*

**Теорема 3.** *Линейный оператор ограничен $\Leftrightarrow$ непрерывен.*

*Доказательство.*

$(\Leftarrow)$ :

$A$ - ограниченное, то есть переводит ограниченное множество в ограниченное.

$$\|x\| \le 1 \Rightarrow \|Ax\| \le R \tag{$*$}$$

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{R},\ \text{тогда}\ \|x\| \le \frac{\varepsilon}{R}$$
$$\left\| x \frac{R}{\varepsilon} \right\| \le 1,\ \text{тогда по}\ (*) :$$
$$\left\| Ax \frac{R}{\varepsilon} \right\| \le R \Rightarrow \|Ax\| \le \varepsilon -\ \text{непрерывность в}\ 0 \Rightarrow\ \text{непрерывен}$$

$(\Rightarrow):$

$A$ - непрерывен в частности, $A$ непрерывен в 0.

$$\varepsilon = 1\ \exists\delta > 0 : \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < 1 \tag{$**$}$$

Фиксируем $X = \{x \in E \mid \|x\| \leq R\}$.

$$\|Ax\| = \left\|\frac{R}{\delta}A\left(\frac{\delta}{R}x\right)\right\| = \frac{R}{\delta}\left\|A\frac{\delta}{R}x\right\|$$

$$\text{Воспользуемся: } \left\|x\frac{\delta}{R}\right\| \leq \delta \xrightarrow{(**)} \left\|Ax\frac{\delta}{R}\right\| \leq 1 \text{ тогда:}$$

$$\frac{R}{\delta}\left\|A\frac{\delta}{R}x\right\| \leq \frac{R}{\delta} = R_1$$

$$\|AX\| \leq R_1 \Rightarrow A \text{ - ограничено}$$

#

$A,\ B$ - линейные операторы, $\alpha,\ \beta$ - числа:
1) $(\alpha A + \alpha B)x = \alpha Ax - \beta Bx$ - линейное отображение
2) $A : E \to E_1,\ B : E_1 \to F \Rightarrow BA : E \to F$. $(BA)x = B(Ax)$
Пространство линейных операторов - нормированные.

## 7. Норма линейного оператора

**Определение 9.** *Нормой линейного оператора называется выражение:*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_E}{\|x\|_E}$$

**Теорема 4.** *Линейный оператор $A$ ограничен $\Leftrightarrow$ его норма конечна.*

*Доказательство.*

$(\Rightarrow):$

$A$ - ограничено.

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0}\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| = \sup_{\|y\|=1}\|Ay\| < \infty$$

$(\Leftarrow):$

Дано $\|A\| < \infty$

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1}\|Ay\| \leq \sup_{0<\|y\|\leq 1}\|Ay\| \leq \sup_{0\leq\|y\|\leq 1}\frac{\|Ay\|}{\|y\|} \leq \sup_{y\neq 0}\frac{\|Ay\|}{\|y\|}$$

#

1) $\|Ay\| \leq \|A\| \, \|y\|$ из определения нормы $(\|A\|)$ .
Пусть $\|y\| \leq R : \|Ay\| \leq R_1 \ (\|A\|, R)$
2) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$ - эквивалентное определение нормы.

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \overset{1)}{\leq} \|A\| \, \|Bx\| \leq \|A\| \, \|B\| \, \|x\|$$

4. $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, по формуле $Af = rf(t)$

$$\|A\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \sup_{f\neq 0} \frac{\|tf(t)\|}{\|f\|} = \sup_{f\neq 0} \frac{\sqrt{\displaystyle\int_0^1 |tf(t)|^2 \, dt}}{\sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt}} \leq 1$$

$\Rightarrow A$ - ограничен.
Норма может достигаться на последовательности функций.
5. $d : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ $\mathbb{D}(d) = C^1(0,1)$. Неограниченный оператор!

Рассмотрим $\sin(nt)$:

$$\|\sin(nt)\|^2_{L_2(0,1)} \leq 1$$

Я устал босс. Вот вам страница чтобы меня осудить

Вспомним:

$$1)\ \|Ay\| = \|A\|\,|y|$$
$$2)\ |\|AB\|| \leq \|AB\|$$
$$3)\ \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$$

$$d : L_2(0,1) \to L_2(0,1) \text{ - неограниченный оператор}$$
$$d : C^1[0,1] \to \underbrace{C[0,1]}_{(*)} \text{ - ограниченный оператор}$$

, где $(*) = \|f\|_C = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$

$$\|d\| = \sup_{g\neq 0} \frac{\|dg\|_C}{\|g\|_{C'}} = \sup_{g\neq 0} \frac{\|g'\|_C}{\|g\|_{C'}} = \sup_{g\neq 0} \frac{\max\limits_{t\in[0,1]} |g'(t)|}{\max\limits_{[0,1]} |g'(t)| + \max\limits_{[0,1]} |g(t)|} \overset{(**)}{=} 1$$

$$\|g\|_C = \max_{t\in[0,1]} |g'(t)| + \max_{t\in[0,1]} |g(t)|$$

$$g_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n+1}$$

$$\|d\|\,|_{\frac{\sin(nt)}{n+1}} = \frac{\max\limits_{[0,1]} \left|\frac{n\cos(nt)}{n+1}\right|}{\max\limits_{[0,1]} \left|\frac{n\cos(nt)}{n+1}\right| + \max\limits_{[0,1]} \left|\frac{\sin(nt)}{n+1}\right|} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

, так как тут достигается единица $\Rightarrow$ $(**)$ - является равенством, так достигается на последовательности.

$$\|g_n\|_{C^\perp} < \infty$$

## 8. Сходимость операторов и операторные ряды

**Определение 10.** *Последовательность операторов (линейные) $A_n : E \to F$ сходятся к оператору $A : E \to F$, если $\|A_n - A\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (обозначаем $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A$ или $A \lim\limits_{n\to\infty} A_n$)*

$$\|A_n x - Ax\| \leq \underbrace{\|A_n - A\|}_{\to 0(\text{слабее поточечной})} \|x\| \to 0$$

$$A_n x \xrightarrow{n\to\infty} Ax$$

Из поточечной не следует сходимость по норме. Пример: $P_n$ в $l_2$

$$P_n x \xrightarrow{n\to\infty} Ix \quad P_n \to I \text{ (поточечная)}$$

$$\|P_n - P_{n+m}\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(P_n - P_{n+m})\|_{l_2}}{\|x\|_{l_2}} \leq 1$$

Свойства $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A,\ B_n \xrightarrow{n\to\infty} B$

1) Линейность операций $\forall \alpha, \beta$ - числа:

$$\alpha A_n + \beta B_n \to \alpha A + \beta B$$
$$\|(\alpha A_n + \beta B_n) - (\alpha A + \beta B_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

2) Линейность $A$:

$$A(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha+\beta y) = \lim_{n\to\infty}(\alpha A_n x+\beta A_n y) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x+\beta \lim_{n\to\infty} A_n y = \alpha Ax+\beta Ay$$

3) Если $\|A_n\| < \infty\ \forall n$, то $\|A\| < +\infty$ и $\|A_n\| \to \|A\|$

$$\exists n_0\ \ \|A_{n_0} - A\| \leq 1$$
$$\|A\| = \|A - A_m + A_{n_0}\| \leq \underbrace{\|A - A_{n_0}\|}_{\leq 1} + \underbrace{\|A_{n_0}\|}_{<\infty} < +\infty$$

$$|\|A_n\| - \|A\|| \leq \|A_n - A\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \|A\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n\|$$

**Теорема 5.** *Если $H$ и $H_1$ - гильбертовы пространства, то пространство ограниченных линейных операторов $A : H \to H_1$ с операторной нормой:*
$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$ *является полным.*

*Доказательство.*
$A_n$ - фундаментальна $\|A_m - A_n\| \leq \varepsilon$

$$\|A_m x - A_m x\| \leq \|A_m - A_n\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\| \to \qquad (*)$$
$$\to A_n x - \text{ фундаментальная последовательность в } H_1$$

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \text{ для каждого } x \in H$$

$$\exists!\ A : H \to H_1$$

1) Линейность $A:\ A(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta By\ , \forall \alpha, \beta,\ \forall x, y \in H$

2) Ограниченность $A:\ \ |\|A_m\| - \|A_n\|| \leq \|A_m - A_n\| < \varepsilon$

Численная последовательность $\|A_n\|$ - последовательность Коши $\exists C\ \ \|A_n\| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \|x\| \leq C \|x\|$$

$$|\|A_n x\| - \|Ax\|| \leq \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \|Ax\|$$

$$\lim \Rightarrow \|Ax\| \le C \|x\|$$

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le C \ A \text{ - ограничен}$$

3) $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A$, то есть $\|A_n - A\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\lim(x) \text{ по } m \Rightarrow \|Ax - A_n x\| \le \varepsilon \|x\|$$

$$\|A_n - A\| = \sup \frac{\|A_n x - Ax\|}{\|x\|} \le \varepsilon$$

#

**Замечание:** $H_1$ - не полное, могут ситуации: фундаментальная последовательность 1) не имеет предел; 2) предел ограниченного оператора неограничен

**Определение 11.** *$A_n$ - линейная ограниченная $\forall n \in \mathbb{N}$ $A_n : H \to H_1$, где $H_1, H$ - гильбертовы пространства $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ - называется операторным рядом:*

$S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} A_n$ *- частичная сумма ряда сходится, если сходится ряд:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

Свойства сходящихся рядов операторов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n = B$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) \text{ - сходится и сумма оператор } \alpha A \beta B$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ сходится и $\left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right\| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$

*Доказательство.*

1) Линейность оператора $\forall \alpha, \beta$ - числа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (\alpha A + \beta B_n) = \alpha \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} A_n + \beta \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} B_n = \alpha A + \beta B$$

2) $\|S_m - S_{m+p}\| = \left\|\sum\limits_{n=1}^{m} A_n + \sum\limits_{n=1}^{m+p} A_n\right\| = \left\|-\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} A_n\right\| \le \sum\limits_{n=m+p}^{m+p} \|A_n\| < \varepsilon$ , где $S_1, S_2$ - фундаментальны, а $A_n$ : г.п $\to$ г.п $\Rightarrow S_n$ сходятся по Теореме 1. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ - сходится.

При этом $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right\| = \left\|\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} A_n\right\| \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{N} A_n\right\| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\|A_n\| = \sum_{n=1}^{\infty}\|A_n\|$

#

## 9. Обратимость операторов

**Определение 12.** *Оператор $A : H \to H_1$ называется обратимым, если уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения $x \in H$*

**Определение 13.** *Если $A$ - обратим, тогда каждому $y \in imA$ поставим в соответствии $x \in H$, при котором $Ax = y$. Этот оператор называется обратным к $A$ и обозначается $A^{-1}$*

Свойства обратного оператора:
1) $dom_{(home)}A^{-1} = imA$
2) Если $A : H \to H_1$ линеен и обратим, то $A^{-1}$ линеен (ограниченность $A$ не влечет ограниченность $A^{-1}$)
$\alpha, \beta$ - числа, $y_1, y_2 \in imA$
Нужно доказать: $A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2$

*Доказательство.*
Имеем: $\exists!\ x_j \in H\ Ax_j = y_j,$ где $j = 1, 2, \dots$

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$$
$$\alpha x_1 \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

, где $x_1 = A^{-1}y_1,\ x_2 = A^{-1}y_2$

#

Свойства обратного оператора:
1. $dom(A^{-1}) = imA$
2. $A$ - линейный и обратимый, то $A^{-1}$ линейный
3. $\begin{matrix} A : H \to H_1 \\ B : H_1 \to H_2 \end{matrix} \leftarrow$ линейно обратимые операторы
Тогда $BA : H \to H_2$ обратим и $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

*Доказательство.*

1) $BA$ - линейный
Проверим $(BA)x = z$ - имеет не более одного решения $x \in H$, $\forall z \int H_2$
$B(Ax) = z\ \forall z$ имеет не более одного решения $y = B^{-1}z$ (так как $B$- обратим)

2) $Ax = B^{-1}z$ имеет не более одного решения $x = A^{-1}(B^{-1}z)$ (так как $A$ - обратим)

$$x = (A^{-1}B^{-1})z$$
$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

#

4. Линейные операторы:

$$A : H \to H_1 \quad B : H_1 \to H$$

$$AB = I_{\text{н}} \quad BA = I_{\text{н}}$$

Тогда оператор $A$ обратим и $A^{-1} = B$

*Доказательство.*

Пусть $A$ не обратим

$$\exists x_1, x_2 \in H (x_1 \neq x_2) : \quad \begin{matrix} Ax_1 = y \\ Ax_2 = y \end{matrix}$$

$$B(Ax_1) = By = B(Ax_2) \text{ , где } BA = I_{\text{н}} \Rightarrow I_{\text{н}} x_1 = x_1 = By = I_{\text{н}} x_2 = x_2$$

Получил, что $x_1 = x_2$ - противоречие $\Rightarrow A$ - обратим

$$AB = I_{\text{н}_1} \Rightarrow A(By) = y$$
$$By = A^{-1}y \Rightarrow B = A^{-1}$$

#

**Теорема 6** (Теорема Неймана)**.** *$H$ - гильбертово пространство, $A : H \to H$ - линейно ограниченный оператор, причем $\|A\| < 1,\ dom(A) = H$.*

*Тогда:*

$$(I - A) \text{ - обратим}$$

$$(I - A)^{-1} \text{ - ограничен}$$

$$dom(I - A)^{-1} = H$$

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \text{ , где } A^0 = I,\ A^{n+1} = AA^n\ \forall n \geq 0$$

*Доказательство.*

$$\|A^n\| = \left\|AA^{n-1}\right\| \leq \|A\| \left\|A^{n-1}\right\| \leq ... \leq \|A\|^n \underbrace{\|I\|}_{=1} = \|A\|^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Тогда:
1) $A^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$
2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|} < \infty$ , где $\|A\| < 1$
По свойству операторных рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n \text{ - сходится}$$

$$(I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = I - A^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} I$$

$$\left.\begin{aligned} (I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n &= I \\ \sum_{n=0}^{\infty}(I-A) &= I \end{aligned}\right. \leftarrow \text{ по свойству обратимости операторов}$$

$$(I-A) \text{ обратим и } (I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Ограниченность $(I-A)^{-1}$

$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ - ограничен по теореме о полноте пространства операторов или можно убедиться следующим образом: $\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \dfrac{1}{1-\|A\|}$ - конечные числа.

$$dom(I-A)^{-1} = dom\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right) = H$$

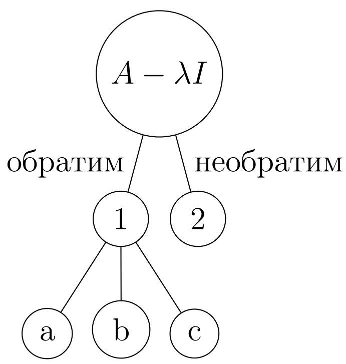
$\#$

**Теорема 7** (Теорема Банаха)**.** *Если $B : H \to H_1$ - линейный ограниченный обратимый и $domB^{-1} = H_1$, то $B^{-1}$ - ограничен.*

## 10. Спектр оператора

$A : H \to H$ - линейный оператор, где $H$ - гильбертово пространство над $\mathbb{C}$

Тут красивейшая схема можно использовать:



**1)** $dom(A-\lambda I)^{-1}=?$

*1a)* $dom(A-\lambda I)^{-1}$ плотно в $H$, $dom(A-\lambda I)^{-1}\neq H$
Замыкание: $\overline{dom(A-\lambda I)^{-1}}=H$

$$\lambda\in\sigma_C(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\overline{dom(A-\lambda I)^{-1}}=H\}$$

*2b)* $dom(A-\lambda I)^{-1}=H$
$\rho(A)$ - резольвентное множество (совокупность всех регулярных значений)
$R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$ резольвентный оператор.
Уравнение $(A-\lambda I)x=y\Leftrightarrow x=(A-\lambda I)^{-1}y=R_\lambda y$ по теореме Банаха $R_\lambda$ - ограниченный оператор.
*3c)* $dom(A-\lambda I)^{-1}$ не плотно в $H$ , $\lambda\in\sigma_r(A)$ - остаточный спектр (r - residual)
**2)** $(A-\lambda I)x=y$

$$\exists y\in H,\ x_1,x_2\in H,\ x_1\neq x_2$$

$$Ax_1-\lambda x_1=y=Ax_2-\lambda x_2\Leftrightarrow\exists x\in H\ x\neq 0Ax=\lambda x$$

, где $\lambda$ - собственное число, $x$ - вектор

$$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}|(A-\lambda I)\text{ необратим }\}$$

Дискретный точечный спектр.

$$(A-\lambda I)x=y,\ \exists y\in H,\ x_1,x_2\in H\ (x_1\neq x_2)$$

$$Ax_1-\lambda x_1=y=Ax_2=\lambda x_2$$

Возьмем $x=x_1=x_2$:

$$(A-\lambda I)(x_1-x_2)=0$$

$$Ax=\lambda x\text{ , то }:\exists x\in H\ x\neq\ \ Ax=\lambda x,\text{ верно}$$

Обратно:

$$Ax-\lambda x=0\quad y=0$$

$$A0-\lambda 0=0$$

$\exists$ 2 решения $x\neq 0,\ x=0$

**Определение 14.** *Спектр* $A:\sigma(A)=\mathbb{C}\backslash\rho(A)$
*1)* $\sigma(A)=\sigma_c(A)\cup\sigma_\rho(A)\cup\sigma_r(A)$
*2)* $\sigma_\rho\cap\sigma_c=\sigma_c\cap\sigma_r=\sigma_r\cap\sigma_\rho=\phi$
*3) конечномерный случай* $\Rightarrow\sigma_r=\sigma_c=\phi$

Свойства спектра:
1) $\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|\leq|A|\}$

*Доказательство.*

Докажем, что если $|\lambda| > \|A\|$, то $\lambda$ - регулярное значение, то есть $\lambda \in \theta(A)$

$$(A-\lambda I)^{-1} = \left(-\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)\right)^{-1} = \Bigg[\underbrace{(-\lambda I)}_{\text{обратим и } dom(...)^{-1}=H} \underbrace{\left(I - \overbrace{\frac{1}{\lambda}A}^{\|...\|<1}\right)}_{\text{обратим и } dom(...)^{-1}=H}\Bigg]^{-1} =$$

$$= \underbrace{\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}\left(-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}}_{dom(...)=H} \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$$

#

2) $\sigma(A)$ - замкнутое множество ($\rho(A)$ - открытое множество)

*Доказательство.*

Докажем, что $\rho(A)$ - открытое. Фиксируем $\lambda_0 \in \rho(A)$, открытое: $\exists \varepsilon\ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$

$$(A-\lambda I)^{-1} \overset{\pm\lambda_0 I}{=} (((A-\lambda_0 I))ubr - (\lambda-\lambda_0)I)^{-1} = [\underbrace{(A-\lambda_0 I)}_{(1)}\underbrace{(I-(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1})}_{(2)}]^{-1}$$

(1): обратим $dom(...) = H$, так как $\lambda_0 \in \rho(A)$
(2): обратим и $dom(...)^{-1} = H$ по теореме Неймана

$$\left\|(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}\right\| < 1 \text{ если } |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

, где $\varepsilon = \dfrac{1}{\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\|}$

#

## 11. Линейные функционалы. Сопряженное пространство

**Определение 15.** *Линейный функционал это линейный оператор $f : H \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$*

Пример:

$$f(x) = (x, x_0),\ x, x_0 \in H$$
$$f : H \to \mathbb{C}$$

**Определение 16.** *Множество всех линейных непрерывных функционалов заданных на $H$ называется пространством, сопряженным к $H$ и обозначается $H^*$.*

$$\|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

**Определение 17.** *Множество* $\{x \in H | f(x) = 0\}$ *называется ядром* $f$ *и обозначается* $\ker f$.

*Свойства ядра линейного функционала:*

1) $\forall f : H \to \mathbb{C}$ $\ker f$ является подпространством в $H$;

*Доказательство.*

$0 \in \ker f$: предположим, что $f(0) \neq 0$

$$f(x_1) = y$$

$$f(0) = f(x_1 - x_1) = y_1 - y_1 = 0$$

$x, y \in \ker f,\ \alpha, \beta$ - числа :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha 0 + \beta 0 = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ker f$$

$\#$

2) $f : H \to C$ непрерывный линейный функционал, то $\ker f$ замкнутое подпространство в $H$.

*Доказательство.*

$x_0$ - предельная точка $\ker f$. $x2 \to x_0$ $\forall n$ $x_0 \in \ker f$

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \quad x_0 \in \ker f$$

$\#$

3) $f : H \to \mathbb{C}$ ненулевой непрерывный линейный функционал, то $1 = \dim(\ker f)^{\perp} = \operatorname{codim}(\ker f)$ - размерность ортогонального дополнения к ядру = коразмерность

*Доказательство.*

$f$ - непрерывный $\overset{1) \text{ и } 2)}{\Rightarrow}$ $\ker f$ - замкнутое подпространство в $H$ (гильбертово пространство) $\Rightarrow H = \ker f \oplus (\ker f)^{\perp}$

$f$ - ненулевой $\ker f \neq H \Rightarrow (\ker f)^{\perp} \neq \{0\} \Rightarrow \exists x_0 \in (\ker f)^{\perp},\ x_0 \neq 0$

Докажем, что $x_0$ базис в $(\ker f)^{\perp}$, то $\forall x \in (\ker f)^{\perp}$.

$$\exists \alpha : x_1 = \alpha x_0$$

Положим $\alpha = \dfrac{f(x_1)}{f(x_0)}$ и $y = (\alpha x_0 - x_1) \in (\ker f)^{\perp}$

$$f(y) = f(\alpha x_0 - x_1) = \alpha f(x_0) - f(x_1) = \frac{f(x_1)}{f(x_0)} f(x_0) - f(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow y \in \ker f \Rightarrow y = 0$$

Так как $y = 0$, то: $y = (\alpha x_0 - x_1) \Rightarrow \alpha x_0 = x_1$

$\#$

**Теорема 8** (Теорема Рисса об общем линейном непрерывном функционале).

*$H$ - гильбертово пространство, тогда:*

*1) $\forall f \in H^* \ \exists! x_0 \in H : f(x) = (x, x_0) \ \forall x \in H$, при этом $\|f\| = \|x_0\|$*

*2) $\forall x_0 \in H$ формула $f(x) = (x, x_0)$ задает линейный непрерывный функционал на $H$ (то есть $f \in H^*$), при этом $\|f\| = \|x_0\|$*

*Доказательство.*

Для пункта 2):

$f(x) = (x, x_0)$ - линейность по первому аргументу скалярного произведения влечет линейность $f$.

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |(x, x_0)| \overset{(*)}{\leq} \left[\sup_{\|x\|=1} \|x\|\right] \|x_0\| = \|x_0\| < \infty$$

, где $(*)$ - неравенство Коши-Буняковскго

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |(x, x_0)| \geq \left| \left( \frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0 \right) \right| = \frac{1}{\|x_0\|}(x_0, x_0) = \frac{1}{\|x_0\|} \underbrace{\|x_0\|^2}_{(**)} \Rightarrow \|f\| = \|x_0\|$$

, где $(**)$: в гильбертовом пространстве $\|x_0\| = \sqrt{x_0, x_0}$ (если $x_0 = 0$, то $\|f\| = 0$)

Для пункта 1):

Докажем, что $\exists x_0 \in H \ f(x) = (x, x_0) \ \forall x \in H$, если $f = 0$, то $x_0 = 0 \Rightarrow \|f\| = \|x_0\|$

$f$ - ненулевой линейный непрерывный функционал $\overset{1) \text{ и } 2)}{\Rightarrow}$ $\ker f$ - замкнутое подпространство (в гильбертовом пространстве)

$$H = (\ker f) \oplus (\ker f)^\perp \ \forall x \in H \ \exists! x = x_1 + x_2$$

, где $x_1 \in \ker f, \ x_2 \in (\ker f)^\perp$

По свойству 3) $\exists x3 \in (\ker f)^\perp \ \|x_3\| = 1 \ \forall x_2 \in (\ker f)^\perp \ \exists \alpha \in \mathbb{C} : x_2 = \alpha x_3 \Rightarrow \forall x \in H : x = x_1 + \alpha x_3$

$$f(x) = f(x_1 + \alpha x_3) = \underbrace{f(x_1)}_{=0} + \alpha f(x_3) = \alpha f(x_3) = f(x_3) \underset{x_1 \perp x_3}{(x_1, x_3)} + \alpha f(x_3)(x_3, x_3) =$$

$$= (x_1, \overline{f(x_3)} x_3) + (\alpha x_3, \overline{f(x_3)} x_3) = (x_1 + \alpha x_3, \overline{f(x_3)} x_3) = (x, \underbrace{\overline{f(x_3)} x_3}_{x_0}) = (x, x_0)$$

$\Rightarrow$ существование $x_0$ доказано.

Проверим единственность: Пусть $\exists \tilde{x}_0 \in H \ f(x) = (x, \tilde{x}_0)$. Покажем, что $(x, x_0) = f(x) = (x, \tilde{x}_0)$:

$$(x_0 - \tilde{x}_0, x_0) = (x, \tilde{x}_0)$$
$$\|x_0 - \tilde{x}_0\| = 0 \Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0$$

По второму пункту: $\|f\| = \|x_0\|$

#

## 12. Бра- и кет- векторы

$(x, y) = < y|x >= \{< y|\}\{|x >\}$, где $< y|$ - бра-вектор (отождествляют с вектором из $H^*$), $|x >$ - кет-вектор (отождествляют с вектором $x \in H$ - исходное пространство)

$$f(x) = < y|x >: \|f\| = \|y\| \text{ ( Теорема Рисса.)}$$

1) $H$ - гильбертово пространство, $\dim H = n$, $x_1, \ldots, x_n$ - ортонормированный базис в $H$

$$x = \sum_1^n \alpha_k x_k,\ \alpha_k = (x_1, x_k)$$

$$x = \sum_1^n (x_1, x_k) x_k$$

$$|x >= \sum_1^n |x_k > \alpha_k,\ \alpha_k = < x_k|x >$$

$$|x >= \sum_1^n |x_k >< x_k|x >= \left[\sum_1^n |x_k >< x_k|\right] |x >$$

$$I|x >= \left[\sum_1^n |x_k >< x_k|\right] |x > \Rightarrow I = \sum_1^n |x_k >< x_k|$$

Удобная запись для $I$

2) $\dim H = n$, где $H$ - гильбертово пространство. Тогда:

$$A : H \to H \text{ - линейный оператор}$$

векторы $x_1, \ldots, x_n$ образуют базис в $H$

$$Ax_n = \lambda_k x_n, x_n \neq 0$$

$$Ax - \lambda x = y \text{ относительно } x$$

$$(A - \lambda I)^{-1} \text{ резольвента, если } \lambda \in \rho(A)$$

$$x = (A - \lambda I)^{-1} y$$

$$x = \sum_{=1}^n \alpha_j x_j,\ \alpha_j = (y_j, x_j)$$

$$y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j,\ \beta_j = (y, x_j)$$

$$Ax_j = \lambda_j x_j$$

$$Ax - \lambda x = y$$

$$A\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) - \lambda\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$$

$$Ax_j = \lambda_j x_j \quad \alpha_j \lambda_j - \lambda_j \alpha_j = \beta_j$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$$

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{|x_j >< x_j|}{x_j - \lambda}$$

$$|x >= \sum_{j=1}^n |x_j > \alpha_j,\ \alpha_j = < x_j|x >$$

$$|y >= \sum_{j=1}^n |x_j > \beta_j,\ \beta_j = < x_j|y >$$

$$|x_j > A = |x_j > \lambda_j$$

$$|x > A|x > \lambda = |y >$$

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j > \lambda_j \alpha_j - \sum_{j=1}^{n} |x_j > \alpha_j \lambda = \sum_{j=1}^{n} |x_j > \beta_j$$

$$\alpha_j \lambda_j - \alpha_j \lambda = \beta_j$$

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda}$$

$$\begin{array}{r|l}
x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda} x_j & |x >= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |x_j > \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda} \\
x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(y_j, x_j)}{\lambda_j - \lambda} x_j & |x >= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |x_j > \frac{< x_j | y_j >}{\lambda_j - \lambda} \\
 & |x >= \underbrace{\left\{ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j >< x_j|}{\lambda_j - \lambda} \right\}}_{(A-\lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j >< x_j|}{\lambda_j - \lambda}} |y >
\end{array}$$

## 13. Оператор, сопряженный и ограниченный, и его свойства

Пусть $H$ и $H_1$ - гильбертовы пространства, $A : H \to H_1$ - линейный ограниченный оператор.

Фиксируем $x_1 \in H_1$ и построим функционал $f : H \to \mathbb{C}$ по правилу:

$$f(x) = (Ax, x_1)_{H_1}, \ x \in H$$

Линейность $A$ + линейность скалярного произведения по , $f$ - линейный функционал.

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x_1)|}{\|x\|} \overset{\text{н. К-Б}}{\leq} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\| \, \|x_1\|}{\|x\|} = \|A\| \, \|x_1\| < \infty$$

$$\|f\| \text{ ограниченна } \Rightarrow f \text{ непрерывный. } \Rightarrow f \in H^*$$

Тогда по Теореме Риса $\exists! x_0 \in H : f(x) = (x, x_0) \ \forall x \in H$

$$f(x) = (Ax, x_1) = (x, x_0) \ \forall x \in H$$

, по $x_1$ находим $x_0$, то есть возникло правило $x_1 \in H_1 \to x_0 \in H$. По этому правилу строю $A^*$ - сопряженный оператор.

$$x_0 = A^* x_1$$

$A^*$ задается равенством: $(Ax, x_1) = (x, A^* x_1)$

*Свойства сопряженных операторов:* $H_1, H$ - гильбертовы пространства, $A, B : H \to H_1$ - линейные ограниченные, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

1) $A^*$ - линейный оператор и $\|A^*\| = \|A\|$

*Доказательство.*

$$x \in H,\ y_1, y_2 \in H_1$$

$$(x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) = (Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}(Ax, y_1) + \overline{\beta}(Ax, y_2) = \overline{\alpha}(x, A^* y_1) + \overline{\beta}(x, A^* y_2) =$$

$$= (x, \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2) \Rightarrow A^* \text{ - линейный по Лемме 1. так как } x \text{ - любой}$$

**Лемма 2.** $\forall z \in H\ (x, z) = (y, z) \Rightarrow y = x$

*Доказательство.*

$$(x - y, z) = 0$$

Подставим $z = x - y$

$$(x - y, x - y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Аналогично для $\forall z \in H : (z, x) = (z, y) \Rightarrow x = y$

#

$$(x, A^* y) = (Ax, y) \overset{\text{н. К-Б}}{\leq} \|Ax\|\,\|y\| \leq \|A\|\,\|x\|\,\|y\|$$

Подставим $x = A^* y$:

$$\|A^* y\| \leq \|A\|\,\|A^* y\|\,\|y\|$$
$$\|A^* y\| \leq \|A\|\,\|y\|$$

$$\frac{\|A^* y\|}{\|y\|} \leq \|A\|\ \ \forall y \in H_1,\ y \neq 0$$

$$\|A^*\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \leq \|A\| \Rightarrow \text{ограниченность } A^* \text{ (норма конечна)}$$

$$\|A^*\| \leq \|A\|$$

#

2) $(A^*)^* = A,\ (A)^* : H \to H_1$

*Доказательство.*

$$\forall x \in H_1,\ \forall y \in H$$

$$(x, (A^*)^* y) = (A^* x, y) = \overline{(y, A^* x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$$

, тогда по Лемме 1. $\Rightarrow (A^*)^* = A$

#

3) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$

*Доказательство.*

$$(x, (\alpha A + \beta B)^*) = ((\alpha A, \beta B)x, y) = \alpha(x, A^* y) + \beta(x, B^* y)$$

#

4) $I^* = I$

*Доказательство.*

$$(x, I^* y) = (Ix, y) = (x, y) = (x, Iy)$$

#

5) $(AB)^* = B^* A^*$

*Доказательство.*

$$(x, (AB)^* y) = ((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^* y) = (x, A^* B^* y)$$

#

**Применение сопряженного оператора при нахождении спектра**

**Теорема 9.** *$A : H \to H$ линейный ограниченный и $\lambda \in \mathbb{C}$ не является собственным значением $A$ ($\lambda \not\in \sigma_p(A)$). Тогда $\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(A)^*$.*

*Доказательство.*
$(\Rightarrow) : \lambda \in \sigma_r(A)$

$$\underbrace{dom(A - \lambda I)^{-1}}_{im(A-\lambda I)\text{ подпространство } H} \quad \text{не плотна в } H$$

$$S = \overline{dom(A - \lambda I)^{-1}} \text{ замкнутое подпространство в } H$$

Гильбертово пространство и замкнутое $S \Rightarrow H = S \oplus S^\perp$.
$S^\perp \neq \{0\}$, так как $S \neq H$ $\exists y \in S^\perp,\ y \neq 0$ $\forall x \in H$

$$(x, (A - \lambda I)^* y) = ((A - \lambda I)x, y) = 0 = (x, 0)$$

$(A - \lambda I)x \in im(A - \lambda I) = dom(A - \lambda I)^{-1} \subset S \Rightarrow (A - \lambda I)x \in S$

$$(A - \lambda I)^* y = 0 \text{ по лемме}$$

$$(A^* - \overline{\lambda} I)y = 0 (\text{по свойствам})$$

$$A^* y = \overline{\lambda} y + y \neq 0,\ \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$$

$(\Leftarrow) : \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, то есть $\overline{\lambda}$ - собственное число.

$$\exists y \in H, y \neq 0 - \text{ собственный вектор} : A^*y = \overline{\lambda}y \Leftrightarrow (A^*\overline{\lambda}I)y = 0$$

$$\underbrace{(A-\lambda I)^*}_{\text{нулевой вектор}} \; y = 0$$

$$\forall x \in H : (x, 0) = (x, (A-\lambda I)^*y) = (\underbrace{(A-\lambda I)x}_{\in Im(A-\lambda I)}, y)$$

$$y \perp im(A-\lambda I) \quad y \perp \overline{im(A-\lambda I)}$$

$$\overline{im(A-\lambda I)} = \overline{dom(A-\lambda I)^{-1}} M = M \cup \{\text{пред-т.}\}$$

$$\text{так как } \lambda \not\in \sigma_p(A) \; \exists x_n \to x_0 \; x_n \in M$$

$$(x_0, y) = (\lim_{n\to\infty} x_n, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y)$$

$$H = S \oplus S^{\perp}, \; y \in S^{\perp}$$

$y \neq 0$ то есть $S^{\perp} \not\in \{0\}$, а это значит, что $S \neq H$, а это означает, что $dom(A-\lambda I)^{-1}$ не плотна в $H$.

#

## 14. Ограниченные самосопряженные операторы

**Определение 18.** *$H$ - гильбертово пространство $A : H \to H$ линейный ограниченный оператор является самосопряженным, если $A = A^*$, то есть $\forall x, y \in H$ $(Ax, y) = (x, Ay)$*

**Теорема 10** (о точечном спектре оператора)**.** *Все собственные числа самосопряженные ограниченный НЕ ПОНЯЛ, а собственные векторы, отвечают различным собственным значениям ортогональны друг другу.*

*Доказательство.* $\lambda$ - собственные значения $A \Rightarrow \exists x \in H : Ax = \lambda H$

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = \overline{\lambda}(x,x) = \overline{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$$

$$Re\lambda + iIm\lambda = Re - iIm\lambda \Rightarrow Im\lambda = 0$$

$$Im\lambda = -Im\lambda \Rightarrow \lambda \text{ - вещественное}$$

#

*Доказательство.*

$$\lambda \neq \mu, \; x \neq 0, y \neq 0$$

$$Ax = \lambda x, \; y \text{ скалярно справа}$$

$$Ay = \mu y, \; x\text{скалярно слева}$$

$$0 = (Ax, y) - (x, Ay) = \lambda(x, y) - (x, \mu y) = \lambda(x, y) - \overline{\mu}(x, y) = \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}(x - y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) = 0 \Rightarrow x \perp y$$

#

## 15. Инвариантное подпространство

**Определение 19.** *$H$ - гильбертово подпространство $A : H \to H$ линейный оператор, $S \in H$ подпространство $S$ является инвариантным подпространством $A$, если $\forall x \in S$ $Ax \in S$*

Тривиальные примеры: $\{0\}, H$
Нетривиальные примеры: $A : H \to H,\ \lambda \in \sigma_p(A)$

$$S_\lambda = \{0,\ \text{все собственные векторы отвечающие собственным } \lambda\}$$

$$x \in S_\lambda \xrightarrow{?} Ax \in S_\lambda$$

1) $x = 0 \quad A0 = 0 \in S_\lambda$
2) $Ax = \lambda x$

$$A(\lambda x) = \lambda\lambda x \Rightarrow Ay = \lambda y,\ y \in S_\lambda$$

**Теорема 11.** *$A$ - линейный ограниченные оператор, $S$ - инвариантное подпространство $A$. Тогда $S^\perp$ - инвариантное подпространство в $A^\perp$*

*Доказательство.*
$x \in S,\ A \in S$

$$(x, y) = 0 \quad (Ax, y) = 0 \quad (x, A^* y) = 0,\ x \perp A^* y \Rightarrow A^* y \in S^\perp$$

$$S^\perp \text{ - инвариантное подпространство } A^*$$

$$\text{Если } A = A^*,\ A \text{ действует инвариантно в } S,\ S^\perp : H = S \oplus S^\perp$$

#

## 16. Компактное множество. Компактные операторы

**Определение 20.** *Множество $K \subset H$ - гильбертово подпространство называется компактным, если из любой его бесконечной последовательности можно выделить последовательность сходящуюся к некоторому вектору $K$*

**Свойства:** 1) В конечном подпространстве ($\dim H = +\infty$) $K$ компактно $\Leftrightarrow$ замкнуто и ограничено (ранее было доказано в Математическом анализе)

2) Общий случай: $K$ - компактно $\Leftrightarrow$ замкнуто и ограничено.

*Доказательство.*

1) $K \stackrel{?}{=} \overline{K}$ рассмотрим предельную точку $x_0 \Rightarrow x_n \to x_0$

$$x_{n_k} \to x_1 \in K \text{ в силу ! предела } x_0 = x,\ x \in K$$

Тогда $K$ содержит точку $x_0 \Rightarrow$ замкнуто.

2) Докажем ограниченность $K$ от противного. Пусть $K$ не является ограниченным множеством. Тогда $\forall \alpha\ \exists x \in K\ \|x\| > \alpha$

Построим последовательность $x_1, \ldots, x_n$ из $K$

$$\|x_1\| > 1$$
$$\vdots$$
$$\|x_n\| > \|x_{n-1}\| + 1$$

$$\|x_n - x_m\| \geq |\|x_n\| - \|x_m\|| \geq |n - m| > 1$$

$\{x_n\}$ не является фундаментальной последовательностью $\Rightarrow$ не является сходящейся $\Rightarrow K$ - не компактно.

#

3) Контрпример: замкнутое + ограниченное $\neq$ компактное.

Орты в $l_2$:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, )$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, )$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, ..., )$$

1. $\{e_i\} \subset \{\|x\| \leq 1\}$ - множество ограничено.
2. Предельных точек нет

Не компактно $\|e_n - e_m\|^2 = 2 \Rightarrow$ не фунд. $\Rightarrow$ не сход. $\Rightarrow$ не комп.

4) Если замкнутый единичный шар в гильбертовом подпространстве $H$ компактен, то $dimH < +\infty$

Пусть $dimH = +\infty \stackrel{\text{Г-Ш}}{\Rightarrow}$ ортонормированная система $x_1, \ldots, x_n$ счетный линейный независимый набор

$$\|x_n - x_m\| = 2 \Rightarrow M \text{ - не комп.}$$

**Определение 21.** *$H, H_1$ - гильбертовы подпространства $A : H \to H_1$ линейный оператор $A$ является компактным, если $\exists$ последовательность $A_1, \ldots, A_n$ - линейных операторов:*

*1) $A_n : H \to H_1$ - ограниченность операторов $\forall n$*

*2) $\forall n\ dim(imA_n) < +\infty$ $\{A_n x\}$ - конечномерно.*

*3) $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A$ $(\|A_n - A\| \xrightarrow{n\to\infty} 0)$*

**Определение 22.** *$A : H \to H_1$ компактен, если любое ограниченное множество $X \subset H$ переводит $\overline{AX} \subset H_1$ - компактно.*

**Свойства компактных операторов:**

1. $\begin{matrix} A : H \to H_1 \\ B : H \to H_1 \end{matrix} \Rightarrow$ комп. , $\alpha, \beta$ числа Тогда $\alpha A + \beta B$ - комп.
2. $A : H \to H_1$ - комп. Тогда $A$ - ограниченный оператор.
3. $A : H \to H_1$ - ограниченный линейный оператор $dim H_1 < +\infty$. Тогда $A$ комп-н
4. $I : H \to H$ - комп $\Leftrightarrow dim H < +\infty$
5. $A : H \to H_1$ - комп

$$\begin{matrix} B : H_1 \to H_2 \\ C : H_3 \to H \end{matrix} \Rightarrow \text{огр.}$$

$BA, AC$ - комп.

6. $dim H_1 = +\infty$ , $A : H \to H_1$ - комп. обратим $\Rightarrow A^{-1}$ не огр.

*Доказательство.*

1) Из комп $A, B \Rightarrow \exists A_n, B_n$ со свойствами из определения компактных операторов 1)-3). Рассмотрим последовательность $\alpha A_1 + \beta B_1, \alpha A_2 + \beta B_2, ..., \alpha A_n + \beta B_n$

Проверим свойства компактных операторов:

$$\forall n \ \alpha A_n + \beta B_n \text{ - лин. последов. операторов}$$

$$\|\alpha A_n - \beta B_n\| \le |\alpha| \, \|A_n\| + |\beta| \, \|B_n\|$$

2) $dim(im(\alpha A_n + \beta B_n)) < +\infty$ в силу:

$$im(\alpha A_n + \beta B_n) = \{\alpha A_n x + \beta B_n x | x \in H\} \subset \{\alpha A_n x | x \in H\} \cup \{\beta B_n y | y \in H\} = im(\alpha A N n) + im(\beta B_n)$$

$$dim(\alpha A_n + \beta B_n) \le dim(im(\alpha A_n)) + dim(im(\beta B_n)) < +\infty \text{ по 2}$$

3) $\alpha A_n + \beta B_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha + \beta B$

$$\lim(\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha \lim A_n + \beta \lim B_n = \alpha A + \beta B$$

#

5. Упр. Взять что то там.

2. $A$ - является $\overset{3)}{\text{пред.}}$ $\overset{1)}{\text{огр.}} \Rightarrow$ огр.

3. $A : H \to H_1$ - огр. $\Rightarrow 1)$

$dim H_1 = +\infty \Rightarrow 2)$

4. $Ix = x$

1) $dim H < \infty$. Докажем компактность $I$. I огр ($\|I\| = 1$) по свойству 3) компактен.

2) $I$ компактен. Докажем $dim H < \infty$

Пусть это не так $dim H = +\infty$ . $\exists$ последовательность $A_1, ..., A_n$ соот $1), 2)$ $A_n \xrightarrow{n\to\infty}$ $I$

$$\begin{matrix} dimH = \infty \\ dim(imA_n) < \infty \end{matrix} \Rightarrow$$

$\exists x \in H : \|x\| = 1 \; x \perp imA_n$

$\|x - A_n x\| > \|x\| = 1$

$$\forall n \;\; \|I - A_n\| = \sup_{\|y\|<1} \|Iy - A_n y\| \geq \|Ix - A_n x\| \geq 1$$

$\forall n$ поэтому 3) не выполн $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow dimH < +\infty$

6) Докажем что $A^{\perp}$ не огр. Пусть это не так $A^{-1}$ огр оператор $A$ - комп, тогда по свойству 5 $AA^{-1} = I$, где $A$ - комп, $A^{-1}$ - огр

по 4 $I : H_1 \to H$ не комп $\Rightarrow A^{-1}$ - не огр

**Пролетарии всех стран, соединяйтесь!**