$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(1-2xt+t^2) = (x-t)w$$

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial t} + (t-x)w = 0$$

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

$$t^n: \ (n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-\cancel{1})P_{n-1}(x) + \cancel{P_{n-1}(x)} - xP_n(x) = 0, \ n \ge 1$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \ n = 1, 2, \dots \qquad (*)$$

, это рекуррентная формула.

Лемма 1. *$\forall n$ функция $P_n(x)$ является многочленом степени n с положительным старшим коэффициентом.*

Доказательство.

По индукции:

База: $n = 0, \quad P_0 = 1$
$n = 1, \quad P_1 = x$

Шаг: для $P_n(x)$ верно, докажем для $P_{n+1}(x)$:

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{n+1}\underbrace{xP_n(x)}_{n+1 \text{ степень}} - \frac{n}{n+1}\underbrace{P_{n-1}(x)}_{n-1 \text{ степень}}$$

$P_{n+1}(x)$ - многочлен степени $n+1$

$\frac{2n-1}{n+1}xP_n$ - имеем положительную старую степень

#

Дифференцируем $w(x,t)$ по x:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{-2t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial x} - tw = 0$$

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

$$(A): \ P_n'(x) - 2xP_{n-1}'(x) + P_{n-2}'(x) - P_{n-1}(x) = 0, \ \forall n \ge 2 \qquad \left(\frac{d}{dx}(*)\right)$$

$$n \to n+1: \ P_{n+1}'(x) - 2xP_{n+2}'(x) + P_{n-1}'(x) - P_n(x) = 0$$

$$(B) : (n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP'_n(x) + nP'_{n-1}(x) = 0$$

$$(B) - (n+1)(A) :\ [-(2n+1)+(n+1)]P_n(x) - x[(2n+1)-2(n+1)]P'_n(x) + [n-(n+1)]P'_{n-1}(x) = 0$$

$$(V) :\ \ -nP_n(x) + xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = 0$$

$$(B) - n(A) :\ P'_{n+1}(x) - [(2n+1)-n]P_n(x) - x[(2n+1)-2n]P'_n(x) = 0$$

$$(G) :\ P'_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x) - xP'_n(x) = 0$$

$$(V) + (G) :\ P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - P'_{n-1}(x) = 0$$

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$$

1. Дифференциальное уравнения. Соотношения ортогональностей

$$-(V) :\ nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0 \mid \cdot x$$

$$(G)\ n+1 \to n :\ P'_n(x) - nP_{n-1}(x) - xP'_{n-1}(x) = 0$$

Суммируем наши фигни:

$$xnP_n(x) - x^2P'_n + \cancel{xP'_{n-1}(x)} + P'_n(x) - nP_{n-1}(x) - \cancel{xP'_{n-1}(x)} = 0$$

$$(1-x^2)P'_n(x) + nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0 \Big| \cdot \frac{d}{dx}$$

$$[(1+x^2)P'_n]' + nP_n + \cancel{nxP'_n} \underbrace{-nP'_{n-1}}_{n^2P'_n - \cancel{nxP'_n}} = 0$$

То есть многочлен Лежандра является частным решением линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0$$

$$L_2^h(-1,1),\ h=1 :\ (f,g) = \int_{-1}^{1} fg dx$$

$$((1-x^2)P'_n)' + n(n+1)P_n = 0 \mid \cdot P_m$$

$$((1-x^2)P'_m)' + m(m+1)P_m = 0 \mid \cdot P_n$$

$$\underbrace{[(1-x^2)(P_mP_n'-P_nP_m')]'}_{(1)}+(n(n+1)-m(m+1))P_mP_n=0$$

$$\int_{-1}^{1}(1)dx \overset{(\$)}{=} 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}P_nP_m=0,\ \text{при } n\neq m$$

($\$$): за счет $(1-x^2)|_{-1}^{1}=0$

, ортогональность доказана.

$$\|P_n\|^2=(P_nP_m)=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx$$

Замена в $(*)$ $n+1\to n$:

$$(\tilde{*}):\ nP_n-(2n-1)xP_{n-1}+(n-1)P_{n-2}=0$$

$(*)(2n-1)P_{n-1}-(\tilde{*})(2n+1)P_n:$

$$(n+1)(2n-1)P_{n+1}P_{n-1}-x(2n-1)(2n+1)P_nP_{n-1}+(2n+1)nP_{n-1}^2-(2n-1)nP_n^2+(2n+1)(2n-1)xP_{n-1}-(2n+1)(n-1)P_nP_{n-2}=0$$

$$(2n-1)(n+1)P_{n+1}P_{n-1}+(2n-1)nP_{n-1}^2-(2n+1)(n-1)P_{n-2}P_n=0$$

$$(2n-1)\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)dx=(2n+1)\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx,\ \forall n\geq 2$$

$$\int_{-1}^{1}P_n^2dx=\frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2dx=\frac{2n-1}{2n+1}\frac{2n-3}{2n-1}\int_{-1}^{1}P_{n-2}^2dx=...$$

$$...=\frac{\cancel{2n-1}}{2n+1}\frac{2n-3}{\cancel{2n-1}}\cdots\frac{3}{5}\underbrace{\int_{-1}^{1}P_1^2(x)dx}_{\frac{2}{3}}=\frac{2}{2n+1}$$

$$\|P_n\|^2=\frac{2}{2n+1},\ n\geq 2$$

$$\int_{-1}^{1}P_nP_mdx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

2. Формула Родрига и теорема о разложении функций в ряд по многочленам Лежандра

Теорема 1 (Формула Родрига)**.** $\forall n\geq 0: P_n(x)=\dfrac{1}{2^nn!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

Доказательство. Руслан не буянь здесь доказательство не нужно, у нас в программе это не требуется. #

Теорема 2 (Теорема о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра)**.** *Пусть* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемая функция. Тогда* $\forall x \in [-1, 1]$ *справедливо равенство:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

, где $P_n(x)$ *- многочлен Лежандра стандартизированный с помощью производящей функции* $w(x, t)$

$$c_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$