

Глава 1: Электромагнитные волны.

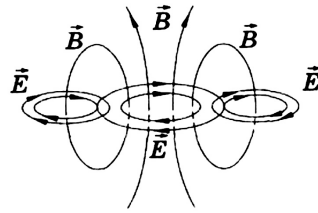
1. Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение.

Определение 1 (Свободное). означает без токов и зарядов $\Rightarrow \rho = 0, \vec{j} = 0$

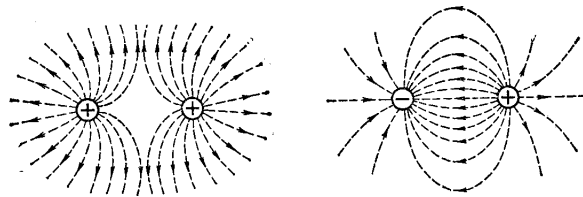
$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} = 0 \end{cases} + \text{Грани. условия} \begin{cases} (B_n)| = 0 & (E_\tau) = 0 \\ (D_n)| = 0 & (H_\tau) = 0 \end{cases}$$

Два типа векторных полей:

1. Вихревые: $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ (нет источников истоков этого поля \Rightarrow силовые линии либо замкнуты, либо уходят на бесконечность)



2. Потенциальные: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Силовые линии выходят или входят в области стоков и истоков (где $\operatorname{div} \vec{F} \neq 0$) или на бесконечности.



Далее мы будем рассматривать только вихревые поля (т.е. $\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = 0$)

Неизвестные 3 компоненты $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ - 12 неизвестные функций. Мы можем решить эту систему при помощи уравнений Максвелла + материальные уравнения: $\vec{B} = \vec{B}(H), \vec{E} = \vec{E}(D)$.

Простая модель среды: $\vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, где $\mu = \text{const}, \varepsilon = \text{const}$, годится для вакуума ($\mu = 1, \varepsilon = 1$) и для многих других сред/материалов при низких значениях полей \vec{E}, \vec{B} и при невысоких частотах $f < 10^8$ Гц.

Волновое уравнение:

$$\begin{cases} \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H} = -\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \\ \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \nabla \underbrace{\text{div} \vec{E}}_{\frac{1}{\varepsilon} \text{div} \vec{D}=0} - \Delta \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Так же делаем с $\text{rot}(\text{rot} \vec{B})$ и получаем:
$$\begin{cases} \Delta \vec{B} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

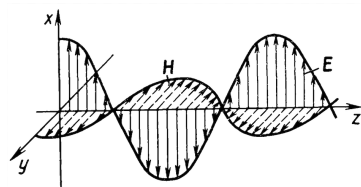
Согласование решений (1) и (2):

1) Решаем (1) и \vec{E} подставляем в уравнение Максвелла $\rightarrow \vec{B}$;

2) Решаем (2) и \vec{B} подставляем в уравнение Максвелла $\rightarrow \vec{E}$;

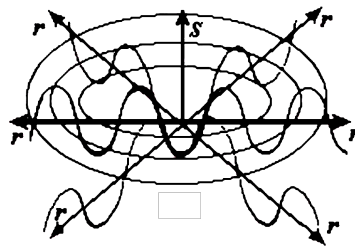
Различные простейшие решения волнового уравнения:

1) Плоские волны: все ненулевые компоненты полей \vec{E}, \vec{B} зависят от одной координаты (например от z) и времени t ;



2) Цилиндрические волны: все ненулевые компоненты полей \vec{E}, \vec{B} зависят от \vec{r} - расстояния от точки наблюдения до некоторой оси (центра волны) и от времени t ;

3) Сферическая волна: все ненулевые компоненты полей \vec{E}, \vec{B} зависят от \vec{r} - расстояния от точки наблюдения до центра волны.



2. Плоские волны.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ для примера } E_x : \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_x = 0$$

$$\varepsilon = z - \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}}, \quad \eta = z + \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad (\text{замена переменных})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(\xi(z, t), \eta) = \frac{\partial f}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial z}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial z}}_{=0} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \left(-\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) \right) = -\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) E_x(\varepsilon, \mu) &= 0 \quad 4 \frac{\partial}{\partial \mu \partial \varepsilon} E_x(\varepsilon, \mu) = 0\end{aligned}$$

Решения являются произвольные функции $f(\xi), f(\eta)$

$$\begin{aligned}E_x(z, t) &= f\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + g\left(z + \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) \\ E_y(z, t) &= p\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + h\left(z + \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) \\ \text{где } \forall f, g, p, h\end{aligned}$$

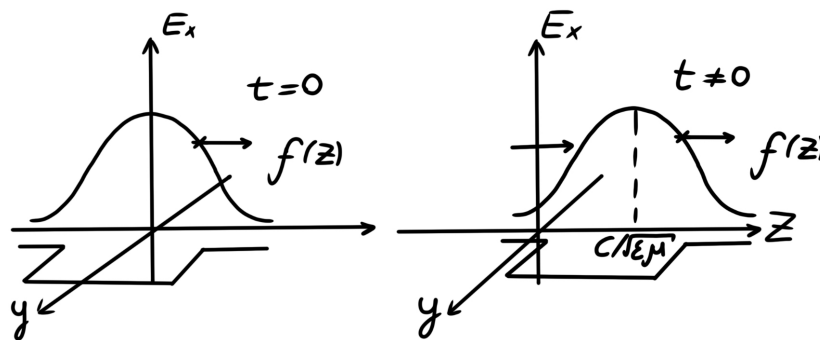
Свойства плоских волн:

1) $E_z = 0, B_z = 0$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = 0 = \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \text{ первые два члена равны нулю.}$$

$\Rightarrow E_z$ - не зависит от $z \Rightarrow$ не зависит от t - этот случай не соответствует волновому полю.

Пример:



В максимуме $z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$

$$\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_\Phi} - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$$

2) Связь поперечных полей в плоской волне:

$$\sqrt{\varepsilon} \vec{E} = \sqrt{\mu} [\vec{H} \times \vec{n}], \quad \sqrt{\mu} \vec{H} = \sqrt{\varepsilon} [\vec{n} \times \vec{E}]$$

где \vec{n} - единичный вектор направления движения волны ($\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n}$).

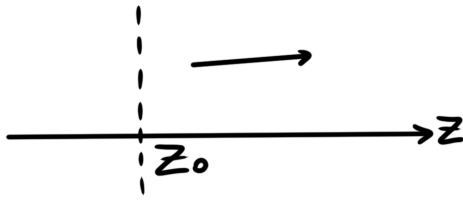
$$3) \varepsilon E^2 = \mu [\vec{H} \times \vec{n}]^2 = \mu H^2 n^2 = \mu H^2 : 8\pi \Rightarrow W_E = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu B^2}{8\pi} = W_B$$

4) $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$ - плотность потока энергии.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c\varepsilon}{4\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \left(\vec{n}(\vec{E}\vec{E}) - \underbrace{\vec{E}(\vec{n}\vec{E})}_{=0} \right) = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \vec{n} \left(\underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{W_E} + \underbrace{\frac{\mu B^2}{8\pi}}_{W_B} \right)$$

3. Плоские монохроматические волны (ПМВ).

$$E_x, E_y, B_x, B_y \sim e^{-i\omega t}$$



В плоскости $z = z_0$, $\vec{E}(z_0, t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$

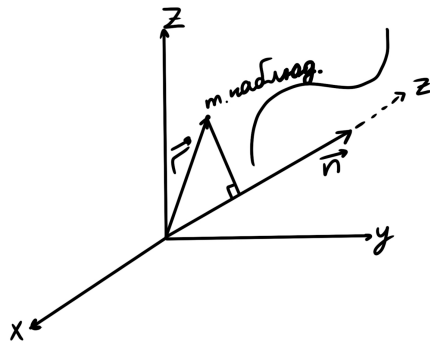
$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} t - z_0 \right)} = \underbrace{\vec{E}_0 e^{-\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} z_0}}_{E_{00}} \cdot \underbrace{e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} t \right)}}_{f\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} t\right)}$$

$$\vec{E}_0 \perp \vec{n} = \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}_0 = c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y, c_1 \text{ и } c_2 - \text{произвольные комплексные числа.}$$

Определение 2. Волновое число $k = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} = \frac{\omega}{V_{\text{волн.}}}$

$$\vec{E} = \vec{E}_{00} e^{ikz - i\omega t} - \text{ для волны с } \vec{n} = \vec{e}_z, \quad \vec{E} = \vec{E}_{000} e^{-ikz - i\omega t} - \text{ для волны с } \vec{n} = -\vec{e}_z$$

Универсальная запись полей ПМВ:



$$\begin{cases} \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ikz' - i\omega t} \\ z' = (\vec{n}, \vec{r}) \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(z', t) = \vec{E}_0 e^{ik(\vec{n}, \vec{r}) - i\omega t} = \vec{E}_0 e^{ik(\vec{k}, \vec{r}) - i\omega t}$$