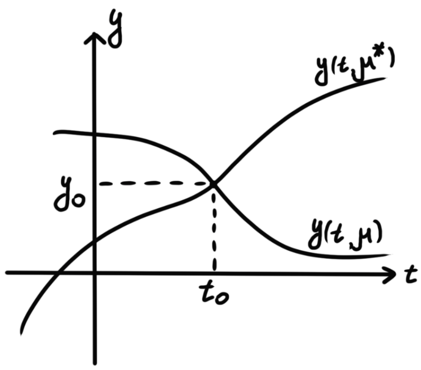
$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2,\ \mathbb{D} \text{ - непустое открытое множество}$$

Зависимость от параметра:

$$\begin{cases} y' = f(t, y, \mu^*) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, \mu^*) \text{ - решение}$$

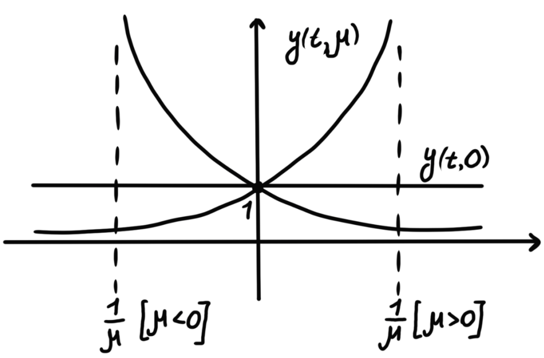
$$\begin{cases} y' = f(t, y, \mu) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, \mu) \text{ - решение}$$



Пример 2:

$$\begin{cases} y = \mu^* y^2 = 0 \cdot y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, 0) = 1$$

$$\begin{cases} y = \mu y^2 = 0 \cdot y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, \mu) = \frac{1}{1 - \mu t}$$



Теорема 2. *$f : B \to \mathbb{R},\ B \subset \mathbb{R}^3,\ B$ - непустое множество. Пусть $f \in C(B)$, $\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(B),\ (t_0, y_0, \mu^*) \in B$. Пусть $y(t, \mu^*)$ определено на интервале (α, ω). Возьмем $[t_1, t_2] \in (\alpha, \omega)$:*

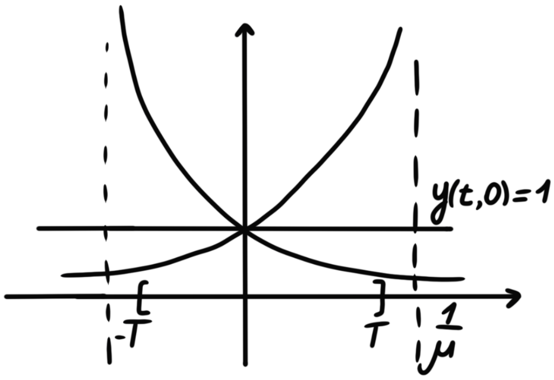
1) $\exists \Delta > 0,\ \forall \mu : |\mu - \mu^*| < \Delta \Rightarrow y(t,\mu)$ *определено на* $[t_1, t_2]$
2) $y(t,\mu) \xrightarrow{\mu \to \mu^*} y(t,\mu^*)\ \forall t \in [t_1, t_2]$

Пример 2:

$$f(t,y,\mu) = \mu y^2,\ B = \mathbb{R}^3,\ f \in C(\mathbb{R}^3),\ \exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^3),\ (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$$

$$y(t,\mu^*) = y(t,0) = 1,\ (\alpha,\omega) = (-\infty,\infty)$$

Возьмем $[-T,T] \subset (-\infty,\infty)$



$$1)\ \mu > 0 : \frac{1}{\mu} > T \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{T} \quad \mu < 0 : \frac{1}{\mu} < -T \Leftrightarrow \mu > -\frac{1}{T}$$

$$-\frac{1}{T} < \mu < \frac{1}{T} \Leftrightarrow |\mu| < \frac{1}{T} = \Delta$$

$$2)\ t \in [-T,T] : \frac{1}{1-\mu T} \xrightarrow{\mu \to 0} 1$$

Доказательство теоремы 1 с использованием теоремы 2.

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0^* \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, y_0^*)$$

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, y_0)$$

Замена переменных $z(t,y_0) = y(t,t_0) - y_0$

$$\begin{cases} y'_t = z'_y + (y'_0)_t = z'_t = f(t,y) = f(t, z + y_0) \\ z(t_0) = y(t_0) - y_0(t_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'_t = f(t, z + y_0) \\ z(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{Замена: } y_0 = \mu \begin{cases} z'_t = f(t, z + \mu) \\ z(t_0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по теоремы 2 выполнено 1) и 2) $\Rightarrow$ выполнено 1) и 2) из теоремы 1

$\#$

1. Дифференцируемость решений по параметрам и начальным данным

$$\begin{cases} y' = f(t, y, \mu) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t,\mu) \text{ Хотим } : \exists \frac{\partial y}{\partial \mu}$$

Пусть $\exists \frac{\partial y}{\partial \mu}$ - непрерывна. Тогда по формуле Тейлора:

$$y(t,\mu) = y(t,\mu^*) + \frac{\partial}{\partial \mu} y(t,\mu^*)(\mu - \mu^*) + \underbrace{g(t,\mu)}_{o(\mu-\mu^*)}, \quad \underbrace{\lim_{\mu \to \mu^*} \frac{g(t,\mu)}{\mu - \mu^*} = 0}_{\text{определено мало}}$$

$$f : B \to \mathbb{R},\ B \subset \mathbb{R}^3,\ B \text{ - непустое открытое множество}$$

Теорема 3. Пусть $f \in C(B),\ \exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(B),\ \exists \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(B)$. Пусть
$(t_0, y_0, \mu^*) \in B, y(t,\mu^*)$ определено на (α, ω). Возьмем $[t_1, t_2] \in (\alpha, \omega)$. Тогда:
0) $\exists \Delta > 0,\ \forall \mu : |\mu - \mu^*| < \Delta \Rightarrow y(t,\mu)$ определено на $[t_1, t_2]$
1) $\exists \dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu) \in C(P)$, где $P = \{(t,\mu) : t \in [t_1, t_2],\ |\mu - \mu^*| < \Delta\}$
2) $\exists \dfrac{\partial^2 y}{\partial \mu \partial t} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t \partial \mu} \in C(P)$
3) $\underbrace{v(t,\mu)}_{\frac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)}$ - решение задачи Коши:

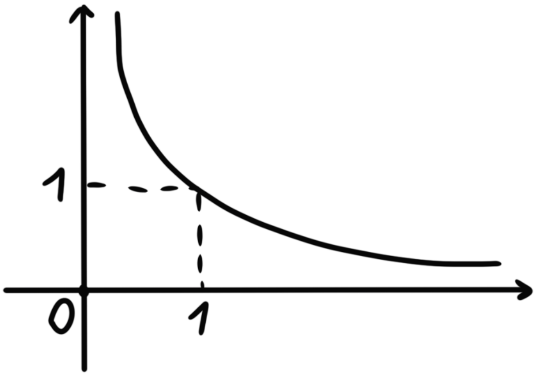
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v = \dfrac{\partial f}{\partial y} v + \dfrac{\partial f}{\partial \mu} \leftarrow \text{ уравнение в вариациях Пуанкаре} \\ v(t_0) = 0 \end{cases}$$

Пример 3:
Найти решение $y(y,\mu)$ при μ, близких к нулю.

$$\begin{cases} y' = 4t\mu - y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t,\mu)$$

$$\mu = \mu^* = 0, \quad \begin{cases} y' = -y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad y(t,0) = \frac{1}{t},\ t \in \underbrace{(0, +\infty)}_{(\alpha,\omega)}$$

$$f(t,y,\mu) = 4t\mu - y^2,\ B = \mathbb{R}^3$$



$$f \in C(B),\ \exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(B),\ \exists \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(\mathbb{R}),\ (1,1,0) \in \mathbb{R}^3$$

Возьмем $[t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$

$$\Rightarrow 0) \exists \Delta > 0 : \forall \mu : |\mu| < \Delta \Rightarrow y(t,\mu) \text{ - определено на } [t_1, t_2]$$

$$\Rightarrow 1) \exists \frac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu) \in C(P)$$

$$\Rightarrow y(t,\mu) = \underbrace{y(t,0)}_{\frac{1}{t}} + \frac{\partial y}{\partial \mu}(t,0)\mu + o(\mu),\ t \in [t_1, t_2]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(t,\mu) = 4t\mu - y^2(t,\mu) \\ y(t,\mu)|_{t=1} = 1 \end{cases}$$

Дифференцируем по μ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \mu}\dfrac{\partial}{\partial t} y(t,\mu) = 4t - 2y(t,\mu) \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu) \\ \dfrac{\partial}{\partial \mu} y(t,\mu)|_{t=1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)}_{v(t,\mu)} = 4t - 2y(t,\mu) \cdot \underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)}_{v(t,\mu)} \\ \underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)}_{v(t,\mu)} |_{t=1} = 0 \end{cases}$$

$$\mu = 0 :\ \text{Обозначим } w(t) = \frac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)|_{\mu=0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} w(t) = 4t - \underbrace{2y(t,0)}_{\frac{1}{t}} w(t) \\ w(t)|_{t=1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w' = 4t - \dfrac{2}{t} w \\ w(1) = 0 \end{cases}$$

1) Ищем решение однородного уравнения:

$$w' = -\frac{2}{t}w \Rightarrow w = \frac{c}{t^2}$$

2) Ищем частное решение:

$$w(t) = \frac{u(t)}{t^2}$$

$$\frac{u'(t)}{t^2} - \frac{2u(t)}{t^3} = 4t - \frac{2}{t}\frac{u(t)}{t^2} \Rightarrow u'(t) = 4t^3$$

$$u(t) = t^4 + \tilde{c}$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$w(t) = \frac{t^4 + c}{t^2} = \frac{t^4 - 1}{t^2}$$

$$\Rightarrow y(t, \mu) = \frac{1}{t} + \frac{t^4 - 1}{t^2}\mu + o(\mu),\ t \in [t_1, t_2] \subset (0, +\infty),\ |\mu| < \Delta$$

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, y_0)$$

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2,\ \mathbb{D} \text{ - непустое открытое множество}$$

Теорема 4. Пусть $f \in C(\mathbb{D}),\ \exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{D})$. Пусть $(t_0, y_0^*) \in \mathbb{D},\ y(t, y_0^*)$ определено на (α, ω). Возьмем $[t_1, t_2] \subset (\alpha\omega)$. Тогда:
0) $\exists \Delta > 0,\ \forall y_0 : |y_0 - y_0^*| < \Delta \Rightarrow y(t, y_0)$ определено на (α, ω)
1) $\exists \frac{\partial y}{\partial y_0} \in C(P)$, где $P = \{(t, y_0) : t \in [t_1, t_2],\ |y_0 - y_0^* < \Delta|\}$
2) $\exists \frac{\partial^2 y}{\partial \mu \partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial y_0 \partial t_0} \in C(P)$
3) $v(t, y_0) = \frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0)$ -решение задачи Коши: $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}v = \dfrac{\partial f}{\partial y}v \\ v(t_0) = 1 \end{cases}$