$$= 2nay_1^{2n-1}y_2 + \underbrace{\alpha 2nay_1^{2n+2}}_{(*)} + \underbrace{\alpha 2mby_2^{2m+2}}_{(*)} - 2mby_1y_2^{2m-1}$$

, где $(*) : \begin{matrix} > 0, \ \alpha > 0 \\ < 0, \ \alpha < 0 \end{matrix}$

Занулим член с без явного знака: $\begin{matrix} m = n = 1 \\ a = b = 1 \end{matrix}$

$$\Rightarrow V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$$

$$(\nabla V, f) = 2\alpha y_1^4 + 2\alpha y_2^4$$

Рассмотрим случаи:
- $\alpha > 0 \Rightarrow$ по Теореме 3 нулевое решение не устойчиво.
- $\alpha < 0 \Rightarrow$ по Теореме 2 нулевое решение асимптотически устойчиво.
- $\alpha = 0 \Rightarrow$ по Теореме 1 нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

$$\alpha = 0 : \begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = y_2 \end{cases} \qquad A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2} = \pm i$$

1. Функция Ляпунова для линейных систем. Матричное уравнение Ляпунова

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y} \tag{1}$$

, где $A - (n \times n)$ постоянная. $\vec{y}^*(t) = 0$ - решение.

Матричное уравнение Ляпунова:

$$HA + A^*H = -C \tag{2}$$

, где A, H, C - матрицы $(n \times n)$ постоянные.

Дано: A, C
Найти: $H-?$

Пример: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ H-?$

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -h_{11} & h_{11} - h_{12} \\ -h_{21} & h_{21} - h_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2h_{11} & h_{11} - 2h_{12} \\ h_{11} - 2h_{21} & h_{12} - 2h_{22} + h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$h_{11} = 2h_{12} = 2h_{21}$$

$$h_{11} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_{12} = h_{21} = \frac{1}{4}$$
$$2h_{22} = h_{12} + h_{21} + 1 = \frac{3}{2}$$
$$h_{22} = \frac{3}{4}$$
$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Теорема 1. *Пусть дано $C = C^* > 0$, то есть $\forall \vec{v} \neq 0 : (C\vec{v}, \vec{v}) > 0$. Пусть $\exists H$: $H = H^* > 0$ - решение матрицы уравнения Ляпунова (2). Тогда: нулевое решение $y^*(t) = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.*

Доказательство.

Рассмотрим функцию $V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y})$ $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$

1) $V(\vec{y}) \in C^*(\mathbb{R}^n)$

$$V(\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} y_i y_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$$

2) $V(\vec{0}) = (H\vec{0}, \vec{0}) = 0$

$$V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y}) > 0 \text{ при } \vec{y} \neq \vec{0} \text{ так как } H = H^* > 0$$

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y} \ A \text{ - постоянная} \tag{1}$$

$$HA + A^*H = -C \text{ - матричное уравнение Ляпунова} \tag{2}$$

3) Проверим, что $(\nabla V(\vec{y}), A\vec{y}) < 0$ при $\vec{y} \neq \vec{0}$

Пусть $\vec{y}(t)$ - решение задачи Коши: $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y} \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}$

Возьмем $V(\vec{y}(t))$:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{y}(t)) = \frac{d}{dt}V(y_1(t), ..., y_n(t)) = \frac{\partial}{\partial y_1}V(y_1, ..., y_n)\frac{dy_1}{dt} + ... + \frac{\partial}{\partial y_n}V(y_2, ..., y_n)\frac{\partial y_n}{\partial t} = (\nabla V, A\vec{y})$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}V(\vec{y}(t)) = \frac{d}{dt}(H\vec{y}(t), \vec{y}(t)) = \left(H\frac{d}{dt}\vec{y}(t), \vec{y}(t)\right) + \left(H\vec{y}(t), \frac{d}{dt}\vec{y}(t)\right) = (HA\vec{y}, \vec{y}) + (H\vec{y}, A\vec{y}) =$$

$$= (HA\vec{y}, \vec{y}) + (A^*H\vec{y}, \vec{y}) = (\underbrace{(HA + A^*H)}_{=-C}\vec{y}, \vec{y}) = -(C\vec{y}, \vec{y})$$

$$\Rightarrow (\nabla V, A\vec{y}(t)) = -(C\vec{y}(t), \vec{y}(t)), \ \forall t \in \mathbb{R}^2$$

$$t=0:(\nabla V, A\vec{y_0}) = -(C\vec{y_0},\vec{y_0}),\ \forall y_0\in\mathbb{R}^n,\ \vec{y_0}\neq\vec{0}$$

Так как $C=C^*>0$, то $(\nabla V(\vec{y_0}),\vec{f}(\vec{y_0}))<0$ при $\vec{y_0}\neq\vec{0}\Rightarrow\vec{y}^*(t)=0$ - асимптотически устойчиво.

#

Теорема 2. *Пусть $\lambda_1(A),...,\lambda_n(A)$ - собственные значения матрицы A. Пусть $\forall\lambda_j(A)$ $Re\lambda_j(A)<0$. Тогда:*

1) $\forall$ матрицы C $\exists!H$ - решение матр. уравнения (2)

2) если $C=C^*$, то $H=H^*$

3) если $C=C^*$, то $H=H^*>0$

Доказательство.

$$e^{tA^*}\cdot\mid HA+A^*H=-C\mid\cdot e^{tA}$$
$$e^{tA^*}H\underbrace{Ae^{tA}}_{\frac{d}{dt}e^{tA}=}+\underbrace{e^{tA^*}A^*}_{=\frac{d}{dt}e^{rA^*}}He^{tA}=-e^{rA^*}Ce^{tA}$$
$$\frac{d}{dt}(e^{tA^*}He^{tA})=-e^{tA^*}Ce^{tA}\mid\cdot\int_0^s, s>0$$
$$\int_0^s\frac{d}{dt}(e^{tA^*}He^{tA})dt=-\int e^{tA^*}Ce^{tA}dt$$
$$e^{sA^*}He^{sA}-H=\int_-^s e^{tA^*}Ce^{tA}dt$$
$$A=TIT^{-1}$$
$$e^{tA}=Te^{tI}T^{-1}$$
$$e^{tI}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & \\ \vdots & \ddots & \frac{t^k e^{\lambda_i t}}{k!} \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\xrightarrow{t\to+\infty}0$$

При $s\to+\infty$:

$$H=\int_0^\infty e^{tA^*}Ce^{tA}dt \text{ - интеграл Ляпунова} \tag{3}$$

2) Пусть $C=C^*$:

$$H^*=\left(\int_0^\infty e^{tA^*}Ce^{tA}dt\right)^*=\int_0^\infty\underbrace{(e^{tA})^*}_{e^{tA^*}}\underbrace{C^*}_{C}\underbrace{(e^{tA^*})^*}_{e^{tA}}dt=H$$

3) Пусть $C=C^*>0$, то есть $\forall\vec{v}\neq\vec{0}:(C\vec{v},\vec{v})>0$:

$$(H\vec{v},\vec{v})=\left(\int_0^\infty e^{tA^*}Ce^{tA}dt\vec{v},\vec{v}\right)=\left(\int_0^\infty e^{tA^*}Ce^{tA}\vec{v}dt,\vec{v}\right)=\int_0^\infty(e^{tA^*}Ce^{tA}\vec{v},\vec{v})=$$
$$=\int_0^\infty(C\underbrace{e^{tA}\vec{v}}_{w(t)\neq0},\underbrace{e^{tA}\vec{v}}_{w(t)\neq0})dt>0$$

#

Теорема 3. *Следующие условия эквиваленты:*

1) $\vec{y}^*(t) = 0$ *- решение системы (1)* $\dfrac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y}$ *асимптотически устойчиво;*

2) $\forall \lambda_j(A)\ Re\lambda_j(A) < 0$*;*

3) $\forall$ *матрицы* $C = C^* > 0\ \exists!\ H = H^* > 0$ *- решение матричного уравнения (2)* $HA + A^*H = -C$

$$1) \Leftrightarrow 2) \text{ - было}$$
$$2) \Rightarrow 3) \text{ - следует из Теоремы 2}$$
$$3) \Rightarrow 1) \text{ - следует из Теоремы 1}$$

2. Исследование решений на устойчивость по первому приближению

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \tag{1}$$

, где $\vec{f} \in C^1(\mathbb{D})$, $\vec{y}^*(t) = 0$ - решение $\Rightarrow \vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$

Разложим правую часть уравнения (1) в ряд Тейлора:

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{0}) + \underbrace{\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}}_{(*)}(0)\vec{y} + o(\|\vec{y}\|)$$

, где $(*)$ - матрица $n \times n = A$. $o(\|\vec{y}\|)$, то есть $\lim\limits_{\|\vec{y}\| \to 0} \dfrac{o\,\|\vec{y}\|}{\|\vec{y}\|} = 0 \quad (2)$

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y} + o(\|\vec{y}\|)$$

Теорема 4 (Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению)**.**

1) Если $\forall \lambda_j(A) : Re\lambda_j(A) < 0 \Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0$ *асимптотически устойчиво.*

2) $\exists \lambda_k(A) : Re\lambda_k > 0 \Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0$ *- неустойчиво.*