Пример: Множество множеств P[0,1] не является замкнутым подпространством в C[0,1]

$$P_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow \|P_n - f\|_C \to 0$$

$$\forall n, p_n \in P[0,1], f(x) \in C[0,1] - \text{не является полиномом}$$

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = e^x, \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)(0)}}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Замыкание $P[0,1]$ это $L_2[0,1]$

$$\|p_n - f\|_{L_2} \leq \max_{x\in[0,1]} \max_{c\in[0,1]} \left| \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \overset{\substack{x=1\\c=1}}{=} \frac{e}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad e^x \notin P[0,1]$$

$$L_2(x) : \{f : X \to Y, \int_x |f|^2 dx < \infty\}$$

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_x |f|^2 dx}$$

Нуль: $f : X \to Y$

$$0(x) : X \to Y$$

$$g = 0(x) = 0 - \text{почти всюду}$$

$$g = \begin{cases} 0, \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ \infty, \mathbb{Q} \end{cases}$$

Элементы (вектора) пространства L_2 - функции класса L_2 .

Определение 1. *Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in L$ (линейно нормированное пространство) называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$*

Определение 2. *Если любая фундаментальная последовательность является сходящейся в L, то L - полное пространство.*

Определение 3. *Полное нормированное пространство - банахово пространство*

1. Линейные пространства с скалярным произведением

Определение 4. *Скалярное произведение в* L *(,) :* $L \times L \to \mathbb{C}$. $\forall x_1, x_2, y \in L, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ *выполняется:*
1) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$
2) $(x, y) = (\overline{y, x})$
3) $(x, x) \geq 0$ *и* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Линейное пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$ - евклидовы пространства, над $\mathbb{C}$ - унитарное пространства.

$$1)\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) : (x, y) = \sum^n x_i \overline{y}_i$$

$$2)l_2 : (x, y) = \sum^\infty x_i \overline{y}_i$$

$$3)L_2(x) : (f, g) = \int_x f \overline{g} dx$$

$$4)C[a, b] : \text{ нет скалярного произведения согласованного с аксиомами нормы}$$

Лемма 1. *Величина* $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ *удовлетворяет свойствам нормы. Согласованная или порожденная скалярным произведением.*

Определение 5. *Гильбертово пространство - пространство со скалярным произведением, полное относительно нормы, порожденным этим скалярным произведением.*

Лемма 2 (Неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x \in L \quad |(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$

Доказательство.

$$\alpha = \frac{(x, y)}{|(x, y)|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq \|\overline{\alpha} x + t y\|^2 = (\overline{\alpha} x + t y, \overline{\alpha} x + t y) = \overline{\alpha}(x, \overline{\alpha} x_t y) + t(y, \overline{\alpha} x + t y) =$$

$$\underbrace{|\alpha|^2}_{=1}(x, x) + \overline{\alpha} t(x, y) + \alpha t(y, x) + t^2 (y, y) = \|x\|^2 + \overline{\alpha} t(x, y) + \alpha t(y, x) + t^2 \|y\|^2 \boxed{=}$$

$$\overline{\alpha} t(x, y) + \alpha t(y, x) = t \left(\frac{(\overline{x, y})(x, y)}{|(x, y)|} + \frac{(x, y)(x, y)}{|(x, y)|} \right) = 2t|(x, y)|$$

$$\boxed{=} \|x\|^2 + 2t|(x, y)| + t^2 \|y\|^2$$

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

■

Доказательство Леммы 1. 1) Из 3 аксиомы скалярного произведения;

2) $\alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha x\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 = (1)$

$$(\alpha x, \alpha x) = \alpha(x, \alpha x) = \alpha\overline{\alpha}(x, x) = (1)$$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| \|y\|$

$$\|x + y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x+y)+(y, x+y) = (\overline{x + y, x})+(\overline{x + y, y}) = (\overline{x, x})+(\overline{y, x})+(\overline{x, y})+(\overline{y, y}) =$$

$$= \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq$$

$$\overset{\text{нер-во К-Б}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

■

$$L_2 : \sqrt{\int_x |f(x)|^2 dx} = \|f\|_{L_2}$$

$$\left|\int_x f(x)\overline{g}(x)dx\right| \leq \left(\int_x |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} - \text{ неравенство К-Б в } L_2$$

$$\sqrt[p]{\int_x |f(p)| dx} = \|f\|_{L_p}$$

Лемма 3. $\forall p \geq 1$ *линейно нормированное пространство* L_p *является полным.*

Лемма 4. $\forall p \geq 1$ *пространство* C^∞ *плотно в* $L_p(x)$, *то есть* $\overline{C^\infty}^{L_p} = L_p(x)$

Лемма 5. $\forall p \geq 1$ *пространство* L_p *сепарабельно.*

Лемма 6. *Пусть* L *- линейно нормированное пространство со скалярным произведением и норма порождена скалярным произведением...*

$$\forall x, y \in L \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \textit{равенство паралеллограма}$$

Наоборот, если в линейно нормированном пространстве L выполняется равенство паралеллограма, то в этом пространстве можно ввести скалярное произведение, согласованной с этой нормой.

$L_1 \subset [a, b] \exists f, g$, для которых не выполняется равенство паралеллограма $\Rightarrow$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

Лемма 7. *В линейном пространстве со скалярным произведением* L , *скалярное произведение непрерывно по первому аргументу относительно сходимости по норме порожденной скалярным произведением*

$$x_n \to t \quad \|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\forall y, (x_n, y) \to (x, y)$$

Доказательство.

$$|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \overset{\text{по К.Б}}{\leq} \|x_n - x\| \underbrace{\|y\|}_{\text{огр.числено}} \xrightarrow{x \to \infty} 0$$

■

2. Ортогональность векторов

Определение 6. *L - пространство со скалярным произведением, $x, y \in L$ называется ортогональным, если $(x, y) = 0$*

Определение 7. *Набор векторов $x, \ldots, x_n, \ldots, \in L$ называется ортогональным, если $\forall ij : x_i \perp x_j$*

Определение 8. *Набор ортогональный (x_n) называется ортнармированным, если $\forall i : \|x\| = 1$*

Ортогонализация Грамма-Шмидта

Если $x_1, \ldots, x_n$ - счетная система линейно назависимый в L , тогда новые последовательности:

$$y_1 = x_1 \quad z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, z_1)z_1 \quad z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n, z_k)z_k \quad z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$$

Обладает свойствами:

1) Система $z_1, \ldots, z_n$ - ортонормированна

2) $\forall n \in N \underbrace{< z_1, \ldots, z_n > = < x_1, \ldots, x_n >}_{\text{линейные оболочки}}$