Глава 1: Электромагнитные волны.

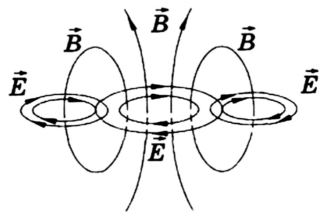
1. Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение.

Определение 1 (Свободное). *означает без токов и зарядов* $\Rightarrow \rho = 0, \vec{j} = 0$

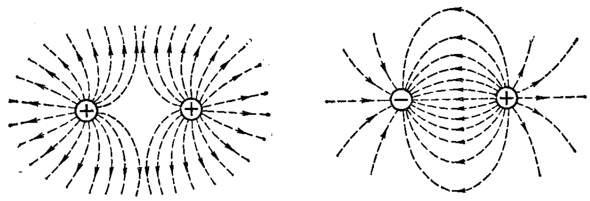
$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{D} = 0 \end{cases} + \text{Грани. условия} \begin{cases} (B_n)| = 0 \quad (E_\tau) = 0 \\ (D_n)| = 0 \quad (H_\tau) = 0 \end{cases}$$

Два типа векторных полей:

1. Вихревые: $\mathrm{div}\vec{F} = 0$ (нет источников истоков этого поля $\Rightarrow$ силовые линии либо замкнуты, либо уходят на бесконечность)



2. Потенциальные: $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$. Силовые линии выходят или входят в области стоков и истоков (где $\mathrm{div}\vec{F} \neq 0$) или на бесконечности.



Далее мы будем рассматривать только вихревые поля (т.е. $\mathrm{div}\vec{B} = 0, \mathrm{div}\vec{D} = 0$)

Неизвестные 3 компоненты каждого поля: $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ - 12 неизвестные функций. Мы можем решить эту систему при помощи уравнений Максвелла + материальные уравнения: $\vec{B} = \vec{B}(H), \vec{E} = \vec{E}(D)$.

Простая модель среды: $\vec{B} = \mu\vec{H}, \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, где $\mu = \mathrm{const}, \varepsilon = \mathrm{const}$, годится для вакуума ($\mu = 1, \varepsilon = 1$) и для многих других сред/материалов при низких значения полей $\vec{E}, \vec{B}$ и при невысоких частотах $f < 10^8$ Гц.

Волновое уравнение:

Рассмотрим $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{E}) = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{H} = -\dfrac{\mu\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$

Распишем чему равен $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{E})$:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{E}) = \nabla \underbrace{\mathrm{div}\vec{E}}_{\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}\vec{D}=0} - \Delta\vec{E}$$

Получаем нашу систему:

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} - \dfrac{\mu\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \mathrm{div}\vec{E} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Так же делаем с $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{B})$ и получаем:

$$\begin{cases} \Delta\vec{B} - \dfrac{\mu\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \mathrm{div}\vec{B} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

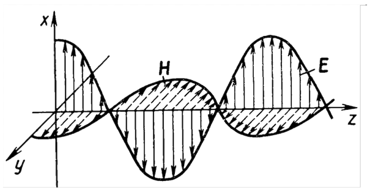
Согласование решений (1) и (2):

1) Решаем (1) и $\vec{E}$ подставляем в уравнение Максвелла $\to \vec{B}$;

2) Решаем (2) и $\vec{B}$ подставляем в уравнение Максвелла $\to \vec{E}$;

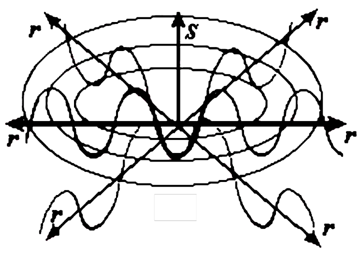
Различные простейшие решения волнового уравнения:

1) Плоские волны: все ненулевые компоненты полей $\vec{E}, \vec{B}$ зависят от одной координаты (например от z) и времени t;



2) Цилиндрические волны: все ненулевые компоненты полей $\vec{E}, \vec{B}$ зависят от $\vec{r}$ - расстояния от точки наблюдения до некоторой оси (центра волны) и от времени t;

3) Сферическая волна: все ненулевые компоненты полей $\vec{E}, \vec{B}$ зависят от $\vec{r}$ - расстояния от точки наблюдения до центра волны.



2. Плоские волны.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ , для примера } E_x : \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x = 0 \quad (*)$$

Под f подразумевается E_x или E_y

$$\xi = z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \eta = z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad \text{(замена переменных)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(\xi(z,t), \eta(z,t)) = \frac{\partial f}{\partial \xi}\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial z}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial z}}_{=1} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\left(-\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\left(\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)\right) = -\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \to \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}$$

Подставляем в (*):

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \cancel{\frac{\partial}{\partial \eta}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial \eta}} + \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial \xi}} + \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} - \cancel{\frac{\partial}{\partial \xi}}\right)E_x(\varepsilon, \mu) = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta}E_x(\varepsilon, \mu) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ решения являются произвольные функции от своих аргументов: $f(\xi), f(\eta)$. Так как смешанные производные коммутируют ($\frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta \partial \xi}$) и уравнение равно нулю, то $\vec{E_x}$ можно представить в виде суммы двух функций.

$$E_x(z,t) = f\left(z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + g\left(z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)$$

Физически это отражает принцип суперпозиции волн: любое решение может быть представлено в виде комбинации волн, движущихся в противоположных направлениях.

По аналогии можем записать $\vec{E_y}$:

$$E_y(z,t) = p\left(z - \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) + h\left(z + \frac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right), \text{ где } \forall p, h$$

Свойства плоских волн:

1) Из определения, что плоские волны поперечные, то-есть перпендикулярны к направлению своего движения: $E_z = 0, B_z = 0$.

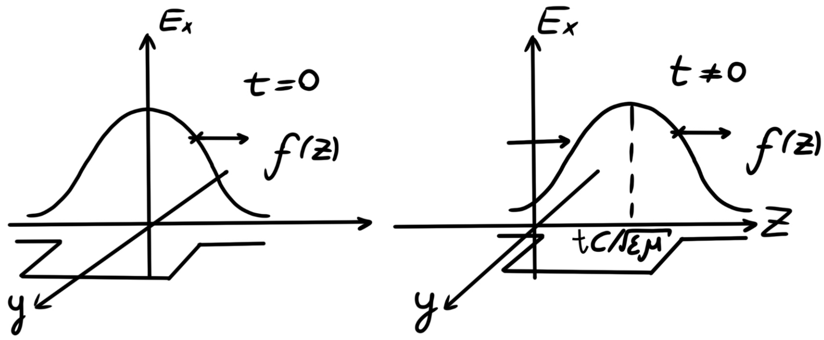
Доказательство.

$$\text{div}\vec{D} = \varepsilon \text{div}\vec{E} = 0 = \varepsilon\left(\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \Rightarrow \frac{\partial \vec{E_z}}{\partial z} = 0$$

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_x}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial y}}_{=0} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = 0$$

То есть все сводится к тому, что наше поле $\vec{E}_z = E_0 = \text{const}$, но такое неизменное во времени однородное поле к волне отношения не имеет. Следовательно можно положить $\vec{E}_z = 0$, аналогично для $\vec{B}_z = 0$. ■

Пример:



В максимуме $z - \dfrac{ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{аргумент} = \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_\Phi} - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 0$$

2) Связь поперечных полей в плоской волне:

Рассмотрим бегущую волну в направлении оси z. В такой волне все величины являются функциями только от $\xi = z - \dfrac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t = z - ut$

$$\vec{E} = \vec{E}(\xi), \quad \vec{H} = \vec{H}(\xi)$$

Пусть $\vec{E} = \vec{E}(\xi)$ произвольная функция, тогда $H = H(\xi)$ определяется из уравнения $\text{rot}\vec{E} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. Распишем левую и правую части уравнения:

$$\text{rot}\vec{E}(\xi) = \left[\text{grad}\xi \times \frac{d\vec{E}}{d\xi}\right] = [\vec{e_z} \times \frac{d\vec{E}}{d\xi}] = \frac{d}{d\xi}[\vec{e_z} \times \vec{E}(\xi)]$$

$$\frac{\partial \vec{H}(\xi)}{\partial \xi} = \frac{d\vec{H}}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -u\frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Подставляем это в уравнение:

$$\frac{d}{d\xi}[\vec{e_z} \times \vec{E}(\xi)] = \frac{\mu}{c}u\frac{d\vec{H}}{d\xi}$$

Проинтегрировав по ξ получаем и подставив $u = \dfrac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\sqrt{\varepsilon}\vec{E} = \sqrt{\mu}[\vec{H}\times\vec{n}], \quad \sqrt{\mu}\vec{H} = \sqrt{\varepsilon}[\vec{n}\times\vec{E}]$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор направления движения волны ($\vec{E}\perp\vec{B}\perp\vec{n}$).

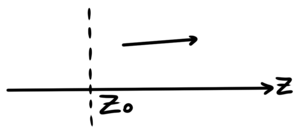
3) $\varepsilon E^2 = \mu[\vec{H}\times\vec{n}]^2 = \mu H^2 n^2 = \mu H^2 | : 8\pi \Rightarrow W_E = \dfrac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \dfrac{\mu B^2}{8\pi} = W_B$

4) $\vec{S} = \dfrac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}]$ - плотность потока энергии (вектор Умова-Пойтинга).

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\vec{n}\times\vec{E}]] = \frac{c\varepsilon}{4\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(\vec{n}(\vec{E}\vec{E}) - \underbrace{\vec{E}(\vec{n}\vec{E})}_{=0}\right) = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\vec{n}\left(\underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{W_E} + \underbrace{\frac{\mu B^2}{8\pi}}_{W_B}\right)$$

3. Плоские монохроматические волные (ПМВ).

$E_x, E_y, B_x, B_y \sim e^{-i\omega t}$



В плоскости $z = z_0, \vec{E}(z_0, t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow$

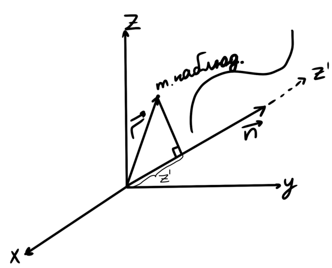
$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t - z_0\right)} = \underbrace{\vec{E}_0 e^{-\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}z_0}}_{\vec{E}_{00}} \cdot \underbrace{e^{\frac{i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\left(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t\right)}}_{f(z - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t)}$$

$\vec{E}_0 \perp \vec{n} = \vec{e_z} \Rightarrow \vec{E}_0 = c_1\vec{e_x} + c_2\vec{e_y}, c_1$ и c_2 - произвольные комплексные числа.

Определение 2. *Волновое число* $k = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} = \frac{\omega}{V_{волн.}}$

$\vec{E} = \vec{E_{00}} e^{ikz - i\omega t} -$ для волны с $\vec{n} = \vec{e_z}$, $\qquad \vec{E} = \vec{E_{000}} e^{-ikz - i\omega t} -$ для волны с $\vec{n} = -\vec{e}_z$

Универсальная запись полей ПМВ:



$$\begin{cases} \vec{E}(z',t) = \vec{E}_0 e^{ikz' - i\omega t} \\ z' = (\vec{n}, \vec{r}) \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(z',t) = \vec{E}_0 e^{ik(\vec{n},\vec{r}) - i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k},\vec{r}) - i\omega t}$$