1. Повторение

$$\vec{f} = \vec{f}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dots)$$

Если сила не зависит от скорости то частица движется в поле, которое эту силу создает.

$$\vec{f} = \vec{f}(\cancel{t}, \vec{r}) - \text{стационарные силы.}$$

$$\oint \vec{f} d\vec{l} = 0 \text{ - потенциальность}$$

$$U(\vec{r}, t) = -\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{f}(\vec{r}, t) d\vec{l}$$

2. Одномерное движение в потенциальных полях

$$\vec{F} = m\vec{a} : x(t) \Rightarrow \vec{F} = m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}(x, t)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \text{ - стационарный потенциал}$$

$$E = \frac{m\dot{x}}{2} + U(x)$$

При стационарном потенциале сохраняется полная энергия.

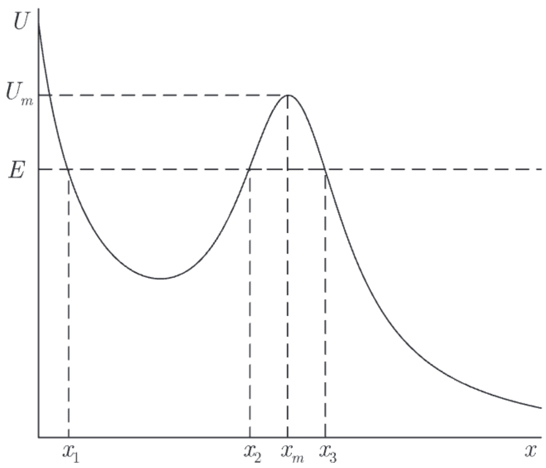
$$\frac{dE}{dt} = \frac{m\dot{x}\ddot{x}}{2}2 + \frac{dU}{dt}\dot{x} = \dot{x}(m\underbrace{\ddot{x}}_{(1)} + \frac{\partial U}{\partial x}) = 0$$

(1) - исходя из законов Ньютона это всегда равно нулю.
E - интеграл движения.
Понижаем m порядок дифференцируя уравнения.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U(x)) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \Rightarrow \boxed{t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}} \text{ - закон движения квадратуре}$$

$\pm$ - знак зависит от направления движения.



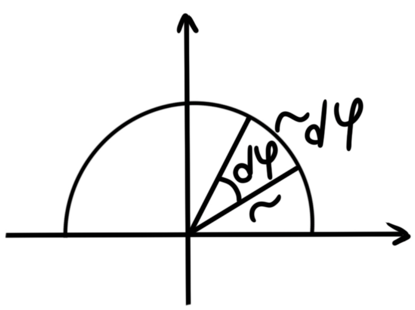
Кинетическая энергия: $T = E - U$

$$E < U_m : x_1 \leq x \leq x_2 - \text{финитное}$$
$$E > Um : - \text{ движение всегда инфинитное}$$
$$E < U_m : x \geq x_3 \text{ - инфинитное}$$
$$E = U_m :$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_m) = 0 \quad U_x = U_m + \cancelto{0}{\frac{\partial U}{\partial x}(x_m)}(x - x_m) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x - x_m)^2 + \dots$$
$$t - t_0 = -\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E - U_m - \frac{1}{2}U''(x_m)(x - x_m)^2}} = -\sqrt{\frac{m}{-U''(x_m)}}\int_{x_0}^{x}\frac{1}{x - x_m} =$$
$$= -\sqrt{\frac{m}{-U''_{xx}(x_m)}}\ln\left|\frac{x - x_m}{x_0 - x_m}\right|$$
$$x - x_m = (x_0 - x_m)e^{-\sqrt{\frac{-U''(x_m)}{m}}(t - t_0)}; \quad x \xrightarrow{t \to \infty} x_m$$

3. Движение в центральном поле

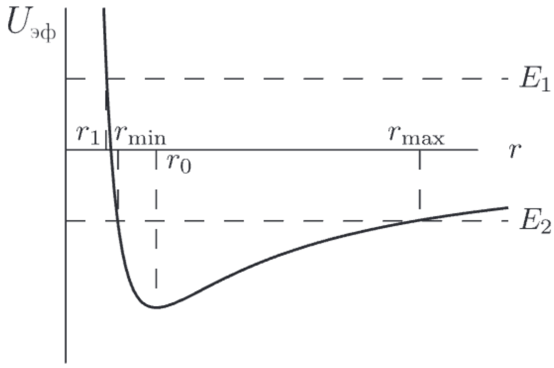
$$U(\vec{r}) \equiv U(r)$$
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\vec{r}}{r}$$
$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}] = \text{const}$$
$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right]}_{\vec{B}\|\vec{p}} + \underbrace{\left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right]}_{\vec{F}\|\vec{r}} = 0$$
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$
$$\vec{r} = \vec{e_x}x + \vec{e_y}y = r\cos\varphi\vec{e_x} + r\sin\varphi\vec{e_y}$$
$$\dot{\vec{r}} = \vec{e_x}(\dot{r}\cos\varphi - \dot{r}\cos\varphi\dot{\varphi}) + \vec{e_y}(\dot{r}\sin\varphi - \dot{r}\sin\varphi\dot{\varphi}) =$$
$$= \dot{r}(\cos\varphi\vec{e_x} + \sin\varphi\vec{e_y}) + r\dot{\varphi}(-\vec{e_x}\sin\varphi + \vec{e_y}\cos\varphi = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$$
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) + U(r)$$
$$\vec{M} = [r\vec{e_r} \times m\vec{v}] = rm\dot{r}\cancelto{0}{[\vec{e_r} \times \vec{e_r}]} + mr^2\dot{\varphi}\underbrace{[\vec{e_r} \times \vec{e_\varphi}]}_{\vec{e_z}}$$
$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} \Rightarrow M = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt \quad (1)$$
$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}}_{U_{\text{эф}}}$$
$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \varphi - \varphi_0 - \pm\frac{M}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}}$$

4. Секторальная скорость



$$\frac{ds}{dt} = \frac{\frac{1}{2}rrd\varphi}{dt} = \frac{M}{2m} = \text{const}$$

Задача Кеплера:



$$E \geq 0 - \text{инфинитное} \quad E < 0 - \text{инфинитное}$$

$$U = -\frac{\alpha}{r} \quad U_{эф} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{M}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{E + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}}}$
$U = \frac{p}{r}$, где p параметр орбиты : $p = \frac{M^2}{m\alpha}$
$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ - эксцентриситет

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{dU}{\sqrt{e^2 - (u-1)^2}} = \arccos \frac{u-1}{e}$$

$$r = \frac{p}{1 + r\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$e > 1(E > 0)$ - гипербола
$e = 1(E = 0)$ - парабола
$e < 1(E < 0)$ - эллипс
$e = 0(E = -\frac{m\alpha}{2M^2})$ - окружность