

Свойство: ПМВ как и любая плоская волна имеет две степени свободы, то есть обладает поляризацией.

Пример: ПМВ, бегущая по z , $\vec{E}(z, t) = (c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y) e^{ikz - i\omega t} (*)$, где c_1, c_2 - произвольные комплексные числа.

Определение 1. Плоская волна, у которой вектор \vec{E} при $\forall t$ во всем пространстве лежит в одной плоскости - плоскополяризованная (линейно поляризованная) волна.

Выражение $(*)$ - представляет собой сумму двух плоскополяризованных волн с поляризациями вдоль x и y . \forall плоскую волну можно разложить на две плоскополяризованные.

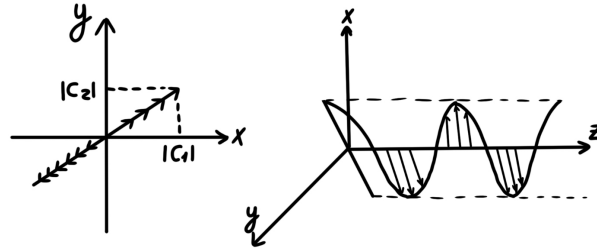
Рассмотрим несколько примеров. Пусть $c_1 = |c_1| e^{i\varphi}$, $c_2 = |c_2| e^{i\psi}$

Реальное поле есть вещественная часть $(*)$

$$\text{Re}(\vec{E}(z, t)) = |c_1| \vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2| \vec{e}_y \cos(kz - \omega t + \psi)$$

1) Пусть $\psi = \varphi + 2\pi m$, m - целое.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Re} \vec{E} &= |c_1| \vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2| \vec{e}_y \cos(kz - \omega t + \varphi + 2\pi m) = \\ &= (|c_1| \vec{e}_x + |c_2| \vec{e}_y) \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad t = \text{const} \end{aligned}$$



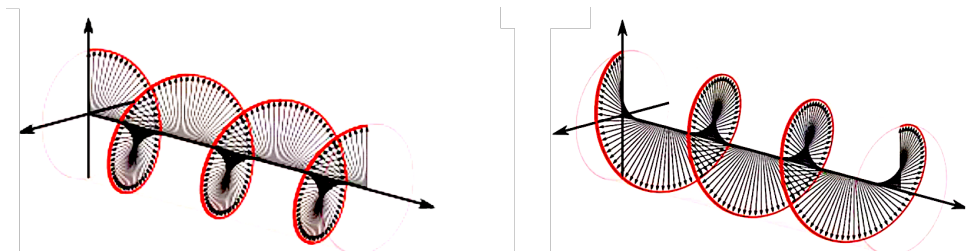
2) $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(kz - \omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(kz - \omega t + \varphi) \cos \frac{\pi}{2} - \sin(kz - \omega t + \varphi) \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Re} \vec{E} = |c_1| \vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) - |c_2| \vec{e}_y \sin(kz - \omega t + \varphi)$$

3) $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$

$$\text{Re} \vec{E} = |c_1| \vec{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2| \vec{e}_y \sin(kz - \omega t + \varphi)$$



Слева у нас левополяризованная эллиптическая волна, справа правополяризованная эллиптическая волна.

В случае произвольных c_1, c_2 эллипс повернут на некоторый угол относительно оси x (задача на семинаре).

1. Средняя по времени плотность потока энергии в ПМВ

$$\vec{E}_0 = c_1 \vec{e}_x + c_2 \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{4\pi} \langle \vec{E} \rangle = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{4\pi} (\langle E_x \rangle + \langle E_y \rangle) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\frac{|c_1|^2}{2} + \frac{|c_2|^2}{2} \right) = \\ &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \vec{n} \frac{\varepsilon}{8\pi} (\vec{E}_0, \vec{E}_0^*) \end{aligned}$$

2. Фурье-преобразование электромагнитных полей

Для периодической функции ($f(t) = f(t + T)$), T - период, можно использовать следующее представление:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{+i\omega_0 n t} dt$$

Для непериодических функций Фурье представление в виде интеграла:

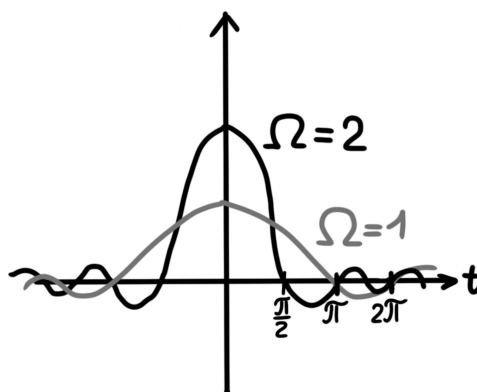
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} e^{-i\omega t} d\omega, \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{+i\omega t} dt$$

Для периодической функции: $\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \delta(\omega - n\omega_0)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Напоминание про свойства δ - функции

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i\omega t} d\omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{-e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}}{it2\Omega} 2\Omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} 2\Omega \cdot \text{sinc}(\Omega t)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \lim \int_{-\infty}^{\infty} 2\Omega \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \cdot \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right]$$

$$\int_C \frac{e^{ix}}{x} dx = 0 = \underbrace{\int_{|z|=R}}_{=0(\text{по лемме Жордана})} + \int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{|z|=\rho} + \int_{\rho}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \int_{|z|=\rho} \overbrace{\frac{e^{i\rho e^{i\varphi}} \cdot \rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}}}^{\rightarrow 1} = -i \int_{\pi}^0 d\varphi = i\pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = 2\pi\delta(t-\tau) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega = 2\pi\delta(\omega-\omega')$$

1)

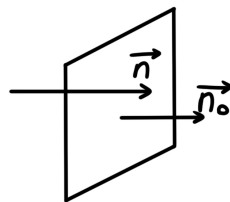
$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+i\omega t}}_{\delta(t-\tau)(\text{Фурье образ})} e^{-i\omega t} d\omega$$

2)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) e^{i\omega\tau}$$

3)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^* dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2^*(\omega') d\omega' \frac{1}{2\pi} 2\pi \delta(\omega - \omega') f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2^*(\omega) d\omega \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega - \text{равенство Парсеваля} \end{aligned}$$



Прошедшая энергия за ∞ интервал времени через 1 см^2

$$= \int (\vec{S} \vec{n}) dt = \frac{c(\vec{n}, \vec{n}_0)}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^2(t) dt = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} (\vec{n} \vec{n}_0) \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega$$

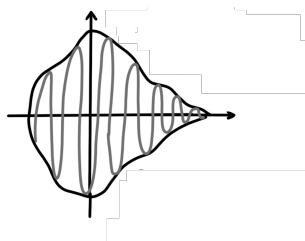
Свойства Фурье-преобразования:

1) Пусть $f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = f^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^* e^{+i\omega t} d\omega = [\omega \rightarrow -\omega'] =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(-\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

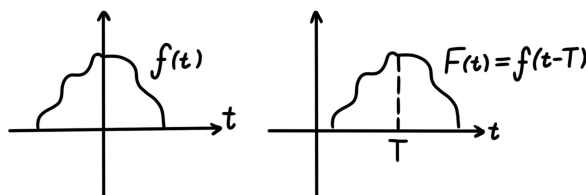
$$\hat{f}^*(-\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\hat{f}^*(\omega) = \hat{f}(-\omega)$$



Граница это - $\hat{f}(\omega)$, а внутри - $\hat{f}(\omega) e^{i\omega t}$

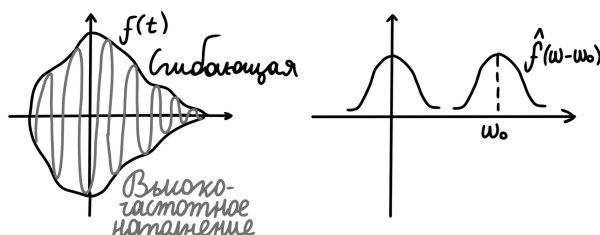
2) Спектр сдвинутого по времени сигнала:



$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{+i\omega t'} e^{i\omega T} dt' = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T}$$

3)

$$F(t) = f(t) e^{-i\omega_0 t} \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

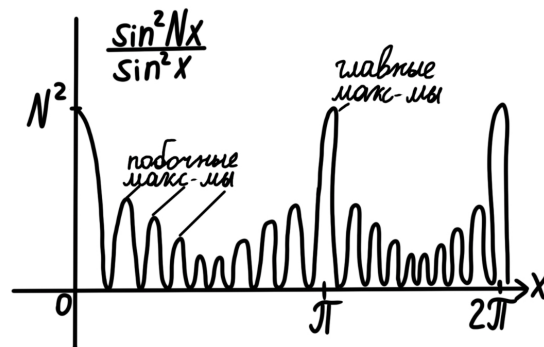


Как мы можем увидеть модулированная функция сдвигает спектр.

4) Спектр N повторенного сигнала:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t-nT); \quad F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(\omega) e^{i\omega nT} = f(\omega) \frac{e^{i\omega NT} - 1}{e^{i\omega T} - 1} = \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T \frac{N-1}{2}} \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}}$$

Последний выделенный множитель в правой части уравнения - это интерференционный множитель.



$$x = m\pi\varepsilon, \varepsilon > 0, \varepsilon - \text{малое}$$

$$\frac{\sin^2(N(m\pi + \varepsilon))}{\sin^2(m\pi + \varepsilon)} = \frac{\sin^2(Nm\pi + N\varepsilon)}{(-1)^{2m} \sin^2 \varepsilon} = \frac{(-1)^{2Nm} \sin^2(N\varepsilon)}{\sin^2 \varepsilon} = \frac{N^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = N^2$$