

Глава 1: Теория устойчивости

1. Основные определения

Маятник длиной l в поле тяжести g , отклоненный от положения устойчивости на угол φ :

$$\begin{cases} l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0 \\ \varphi(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi^*(t) = 0$$
$$\begin{cases} l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \end{cases} \Rightarrow \varphi(t, \varphi_0, \omega_0) - \text{решение}$$

Частный случай:

$$\begin{cases} l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0 \\ \varphi(0) = \pi \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi^{**}(t) = \pi$$
$$\begin{cases} l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0 \\ \varphi(0) = \pi + \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \end{cases} \Rightarrow \varphi(t, \pi + \varphi_0, \omega_0) - \text{решение}$$

Непрерывная зависимость от начальных данных - есть на конечном отрезке времени.

Устойчивость - непрерывная зависимость от начальных данных при t до 0 до $+\infty$

$$\frac{d}{dt} \vec{y} = \vec{f}(t, \vec{y})$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, f_j : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n+1} - \text{непустое открытое}$$

$$\forall j = 1, \dots, n, f_j \in C(\mathbb{D}), \forall i, j = 1, \dots, n \exists \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(\mathbb{D})$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{y} = \vec{f}(t, \vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0^* \end{cases} \Rightarrow \text{решение } \vec{y}^*(t)$$

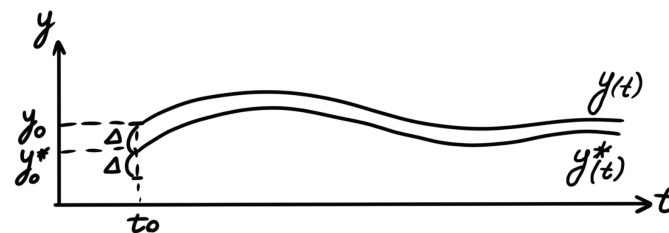
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{y} = \vec{f}(t, \vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases} \Rightarrow \text{решение } \vec{y}(t)$$

Определение 1. Решение $\vec{y}^*(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если:

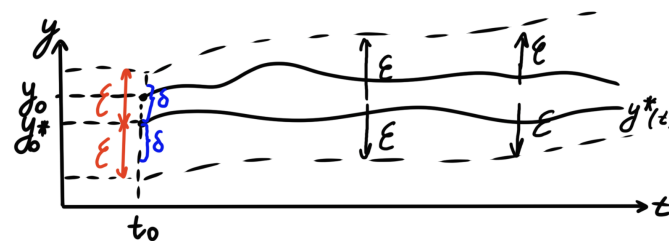
1) $\vec{y}^*(t)$ определена от t_0 до $+\infty$!



2) $\exists \Delta > 0 \forall \vec{y}_0 : \|\vec{y}_0 - \vec{y}_0^*\| < \Delta \Rightarrow \vec{y}(t)$ тоже определено от t_0 до $+\infty$!



3) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \vec{y}_0 : \|\vec{y}_0 - \vec{y}_0^*\| < \delta \Rightarrow \|\vec{y}(t) - \vec{y}^*(t)\| < \varepsilon \forall t \geq t_0$

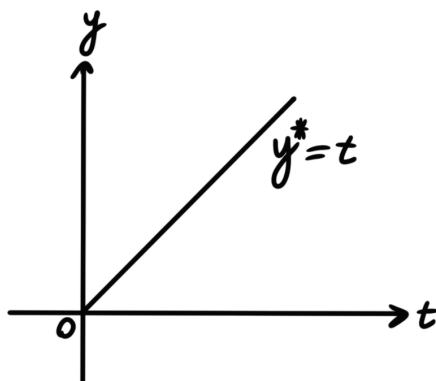


№1: Является ли устойчивое по Ляпунову решение задачи Коши:

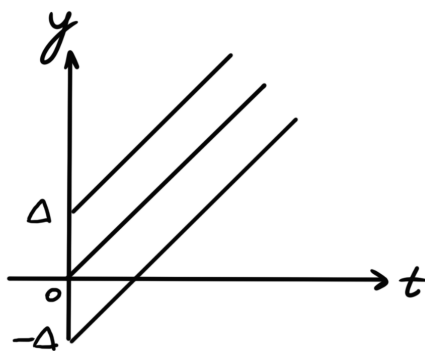
$$\begin{cases} y' = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$t_0 = 0, y_0^* = 0, y^*(t) = t$$

1) $y^*(t) = t$ определено от 0 до $+\infty$ (+)

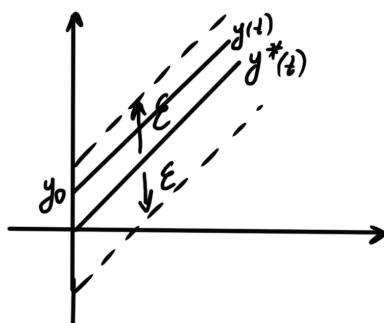


$$2) \begin{cases} y' = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = t + y_0 \quad (+)$$



3) Надо доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y_0 : |y_0| < \delta \Rightarrow \underbrace{|y(t) - y^*(t)|}_{|y_0|} < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

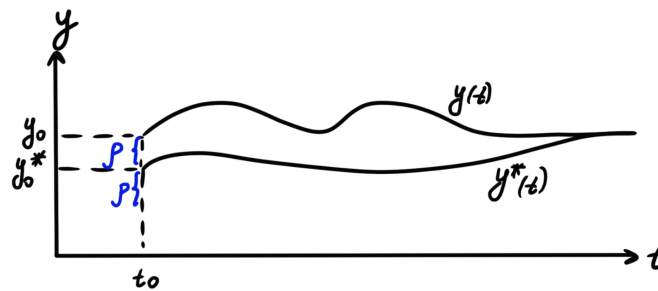


Ответ: $y^*(t) = t$ устойчиво по Ляпунову

Определение 2. Решение $\vec{y}^*(t)$ называется асимптотически устойчивым, если:

1) $\vec{y}^*(t)$ устойчиво по Ляпунову

2) $\exists \rho > 0 \forall \vec{y}_0 : \|\vec{y}_0 - \vec{y}_0^*\| < \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{y}(t) - \vec{y}^*(t)\| = 0$



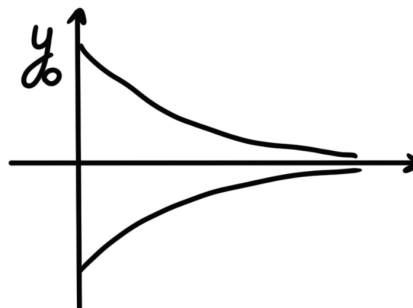
№2: Является ли устойчивое по Ляпунову асимптотическим устойчивым решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$t_0 = 0, y_0^* = 0, y^*(t) = 0$$



- 1) $y^*(t) = 0$ определено на от 0 до $+\infty$ (+)
- 2) $\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = e^{-t}y_0$ - определено на от 0 до $+\infty$



$$3) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y_0 : |y_0| < \delta \Rightarrow \underbrace{|y(t)|}_{|y_0 e^{-t}|} < \varepsilon \forall t \geq t_0$$

Возьмем $\delta = \varepsilon$

Если $|y_0| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |y(t)| = |y_0 e^{-t}| = |y_0| e^{-t} < \varepsilon \Rightarrow$ нулевое решение $y^*(t) = 0$ устойчиво по Ляпунову

$$4) \lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |y_0 e^{-t}| = 0$$

ρ - любое $\Rightarrow y^*(t) = 0$ асимптотическим устойчиво.

Определение 3. Решение $\bar{y}^*(t)$ называется неустойчивым, если оно не является устойчивым по Ляпунову, то есть если не выполняется хотя бы один пункт в определении устойчивости по Ляпунову.

Не выполняется пункт 1: $y^*(t)$ не определено от 0 до $+\infty$

Не выполняется пункт 2:

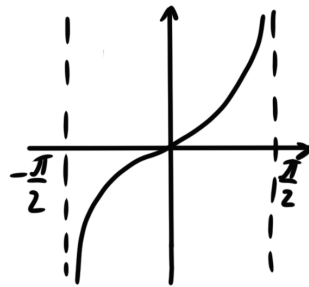
$\forall \Delta > 0 \exists \vec{y}_0 : \|\vec{y}_0 - \vec{y}_0^*\| < \Delta, \vec{y}(t)$ не определено от t_0 до $+\infty$

Не выполняется пункт 3:

$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \vec{y}_0 : \|\vec{y}_0 - \vec{y}_0^*\| < \delta, \exists \hat{t} \geq t_0 : \|\vec{y}(\hat{t}) - \vec{y}^*(\hat{t})\| \geq \varepsilon$

№3:

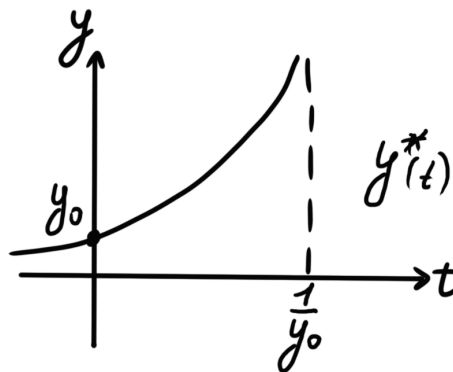
$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y^*(t) = \operatorname{tg}(t)$$



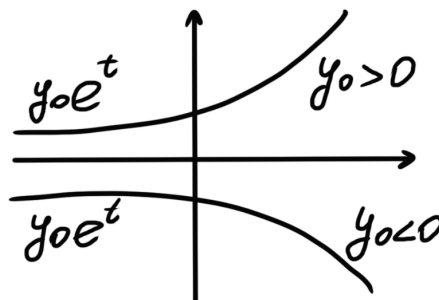
Не выполняется первый пункт $\Rightarrow y^*(t) = \operatorname{tg}(t)$ - неустойчиво.

№4:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y^*(t) = 0$$



1) (+)



$$2) \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$$

$y(t)$ при $y_0 > 0$ не определено от 0 до $+\infty \Rightarrow 2)$ не выполняется $\Rightarrow y^*(t) = 0$ - неустойчиво

№5:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y^*(t) = 0$$

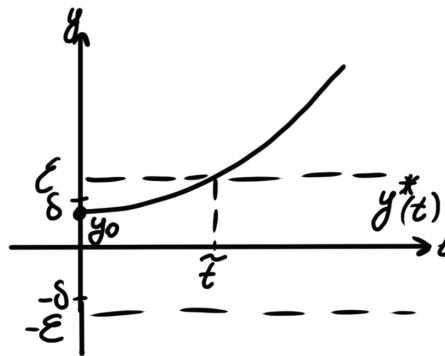
1) $y^*(t) = 0$ определено от 0 до $+\infty$ (+)

2)

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = y_0 e^t$$

$y(t)$ определено от 0 до $+\infty$ (+)

3)



$$\exists \varepsilon = 10 \forall \delta > 0 : \exists y_0 = \frac{\delta}{2} : |y_0| < \delta$$

$$\exists \hat{t} : |y(\hat{t})| \geq \varepsilon = 10$$

$$|y_0 e^{\hat{t}}| = \frac{\delta}{2} e^{\hat{t}}$$

$$\frac{\delta}{2} e^{\hat{t}} \geq 10 \Rightarrow \hat{t} = \ln \left(\frac{20}{\delta} \right)$$

Нулевое решение $y^*(t) = 0$ неустойчиво.