Свойство: ПМВ как и любая плоская волна имеет две степени свободы, то е сть обладает поляризацией.

Пример: ПМВ, бегущая по z, $\vec{E}(z,t) = (c_1\vec{e_x} + c_2\vec{e_y})e^{ikz-i\omega t}(*)$, где c_1, c_2 - произвольные комплексные числа.

Определение 1. *Плоская волна, у которой вектор $\vec{E}$ при $\forall t$ во всем пространстве лежит в одной плоскости - плоскополяризованная (линейно поляризованная) волна.*

Выражение $(*)$ - представляет собой сумму двух плоскополяризованных волн с поляризациями вдоль x и y. $\forall$ плоскую волну можно разложить на две плоскополяризованные.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть $c_1 = |c_1|e^{i\varphi}, c_2 = |c_2|e^{i\psi}$

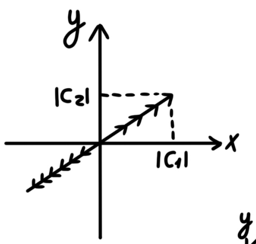
Реальное поле естть вещеестенная часть $(*)$

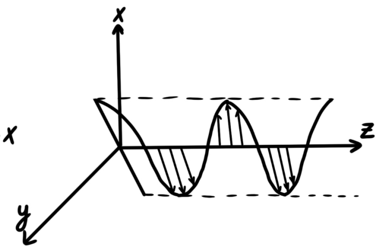
$$\mathrm{Re}(\vec{E}(z,t)) = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz-\omega t+\varphi) + |c_2|\vec{e_y}\cos(kz-\omega t+\psi)$$

1) Пусть $\psi = \varphi + 2\pi m, m$ - целое.

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz-\omega t+\varphi) + |c_2|\vec{e_y}\cos(kz-\omega t+\varphi+2\pi m) =$$

$$= (|c_1|\vec{e_x} + |c_2\vec{e_y})\cos(kz-\omega t+\varphi) \quad t = \mathrm{const}$$





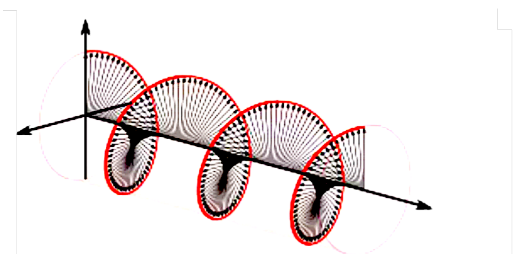
2) $\psi = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$

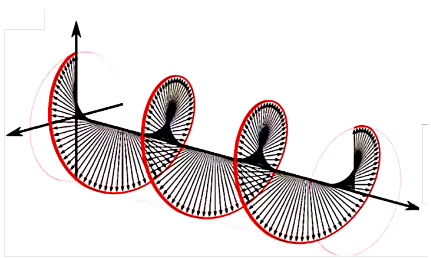
$$\cos\Big(kz-\omega t\varphi+\frac{\pi}{2}\Big) = \cos(kz-\omega t\varphi)\cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}} - \sin(kz-\omega t\varphi)\cancelto{1}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathrm{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz-\omega t+\varphi) - |c_2|\vec{e_y}\sin(kz-\omega t+\varphi)$$

3) $\psi = \varphi - \dfrac{\pi}{2}$

$$\mathrm{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz-\omega t+\varphi) + |c_2|\vec{e_y}\sin(kz-\omega t+\varphi)$$





Слева у нас левополяризованная эллиптическая волна, справа правополяризованная эллиптическая волна.

В случае произвольных c_1, c_2 эллипс повернут на некоторый угол относительно оси x (задача на семинаре).

1. Средняя по времени плотность потока энергии в ПМВ

$$\vec{E_0} = c_1\vec{e_x} + c_2\vec{e_y}$$

$$< \vec{S} >= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon < \vec{E} >}{4\pi} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon}{4\pi}(< E_x > + < E_y >) - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon}{4\pi}(\frac{|c_1|^2}{2} + \frac{|c_2|^2}{2}) =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon}{8\pi}(\vec{E_0}, \vec{E_0^*})$$

Глава 1: Фурье-преобразование электромагнитных полей

Для периодической функции ($f(t) = f(t+T), T$ - период, можно использовать следующее представление:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 nt}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{+i\omega_0 nt} dt$$

Для непериодических функций Фурье представление в виде интеграла:

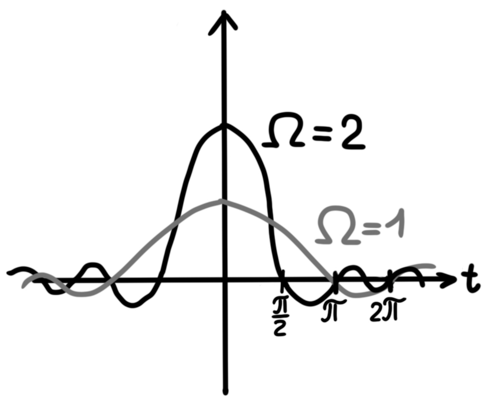
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} e^{-i\omega t} d\omega, \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{+i\omega t} dt$$

Для периодической функции: $\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \delta(\omega - n\omega_0)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Напоминание про свойства δ - функции

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \lim_{\Omega\to\infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i\omega t} d\omega = \lim \frac{-e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}}{it2\Omega} 2\Omega = \lim_{\Omega\to\infty} 2\Omega \cdot \mathrm{sinc}(\Omega t)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \lim \int_{-\infty}^{\infty} 2\Omega \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \cdot \mathrm{Im} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right]$$

$$\int_C \frac{e^{ix}}{x} dx = 0 = \underbrace{\int_{|z|=R}}_{=0(\text{по лемме Жордана})} + \int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{|z|=\rho} + \int_{\rho}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=-\int_{|z|=\rho}\frac{\overbrace{e^{i\rho e^{i\varphi}}}^{\to 1}\cdot\rho ie^{i\varphi}d\varphi}{\rho e^{i\varphi}}=-i\int_{\pi}^{0}d\varphi=i\pi\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}I(t)dt=2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}d\omega=2\pi\delta(t)\qquad\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega(t-\tau)}d\omega=2\pi\delta(t-\tau)\qquad\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega-\omega')t}d\omega=2\pi\delta(\omega-\omega')$$

1)

$$\delta(t-\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{+i\omega t}}_{\delta(t-\tau)(\text{Фурье образ})}e^{-i\omega t}d\omega$$

2)

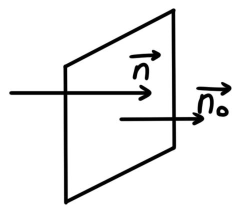
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)d\tau}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega(t-\tau)}d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{-i\omega t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau f(\tau)e^{i\omega\tau}$$

3)

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2^*dt=\int_{-\infty}^{\infty}dt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_2(\omega')e^{i\omega' t}d\omega'=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1(\omega)d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_2^*(\omega')d\omega'\frac{1}{2\pi}2\pi\delta(\omega-\omega')f_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1(\omega)\hat{f}_2^*(\omega)d\omega$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2d\omega-\text{ равенство Парсеваля}$$



Прошедшая энергия за ∞ интервал времени через 1 см^2

$$=\int(\vec{S}\vec{n})dt=\frac{c(\vec{n},\vec{n_0})}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}^2(t)dt=\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}(\vec{n}\vec{n_0})\frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\vec{E}}(\omega)|^2d\omega$$

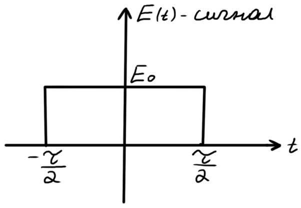
Свойства Фурье-преобразования:

1) Пусть $f(t)\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)=f^*(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^*e^{+i\omega t}d\omega=[\omega\to-\omega']=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^*(-\omega')e^{-i\omega' t}d\omega'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^*(\omega')e^{-i\omega' t}d\omega'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

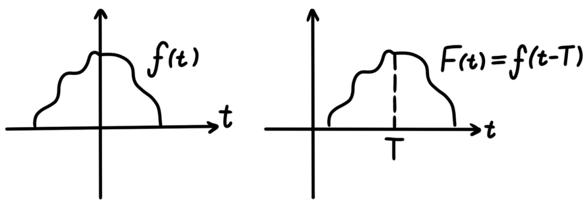
$$\hat{f}^*(-\omega)=\hat{f}(\omega)$$

$$\hat{f}^*(\omega)=\hat{f}(-\omega)$$



Граница это - $\hat{f}(\omega)$, а внутри - $\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}$

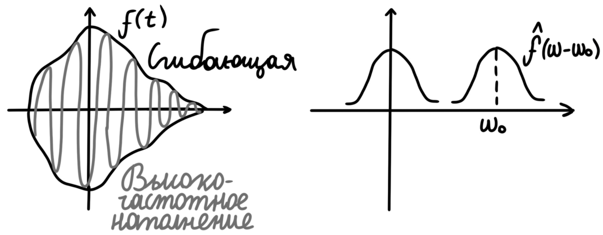
2) Спектр сдвинутого по времени сигнала:



$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{+i\omega t'} e^{i\omega T} dt' = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T}$$

3)

$$F(t) = f(t) e^{-i\omega_0 t} \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

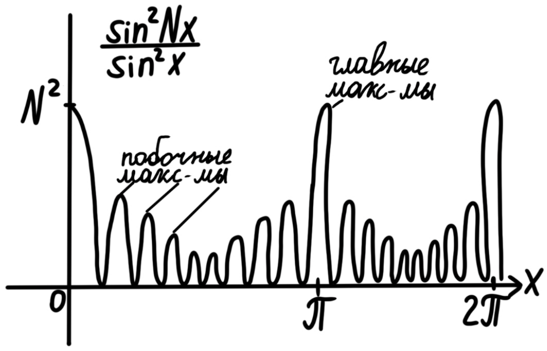


Как мы можем увидеть модулированная функция сдвигает спектр.

4) Спектр N повторенного сигнала:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t-nT); \quad F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(\omega) e^{i\omega n T} = f(\omega) \frac{e^{i\omega NT} - 1}{e^{i\omega T} - 1} = \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T \frac{N-1}{2}} \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}}$$

Последний выделенный множитель в правой части уравнения - это интерференционный множитель.



$$x = m\pi\varepsilon, \varepsilon > 0, \varepsilon \text{ - малое}$$

$$\frac{\sin^2(N(m\pi + \varepsilon))}{\sin^2(m\pi + \varepsilon)} = \frac{\sin^2(Nm\pi + N\varepsilon)}{(-1)^{2m}\sin^2\varepsilon} = \frac{(-1)^{2Nm}\sin^2(N\varepsilon)}{\sin^2\varepsilon} = \frac{N^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = N^2$$