1. Дифракция плоской монохроматической волны на длинной щели

Интеграл Кирхгофа для разложения по цилиндрическим волнам:

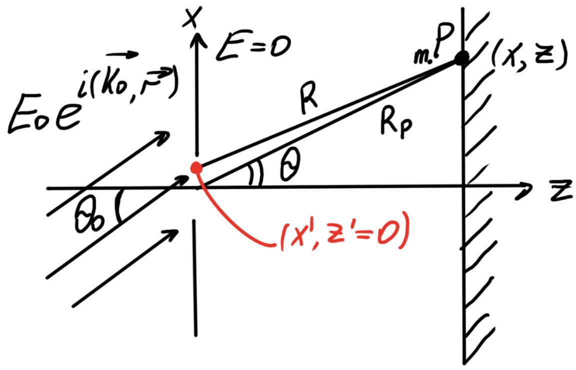
$$E_p = \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} E(x') \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}} dx' \cos\theta$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2+z^2} = \sqrt{x^2+z^2-2xx'+(x')^2} \approx R_p - \frac{x}{R_p}x' + \cancel{o\left(\frac{(x')^2}{R_p}\right)}$$

, где $x^2+z^2 = R_p^2$,а $o\left(\frac{(x')^2}{R_p}\right)$ - в приближении Фраугофера равно нулю $\left(\frac{d^2}{\lambda R_p} \ll 1\right)$.

$$E_p = \sqrt{\frac{k}{iR_p}} e^{ikR_p} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(x') e^{-ik_x x'} dx'\right)}_{=\hat{E}(k_x)} \cos\theta = \sqrt{\frac{k}{iR_p}} \hat{E}(k_x) \cos\theta$$

, где $k_x = k\frac{x}{R_p}$



Падающая волна под углом θ_0 имеет: $\vec{k}_0 = (k_{0x}, 0, k_{0z}),\ |\vec{k}_0| = |\vec{k}|$

$$E_0 e^{ik_{0x}x' + ik_{0z}z'} \Leftarrow E_0 e^{i(\vec{k}_0, \vec{r})}$$

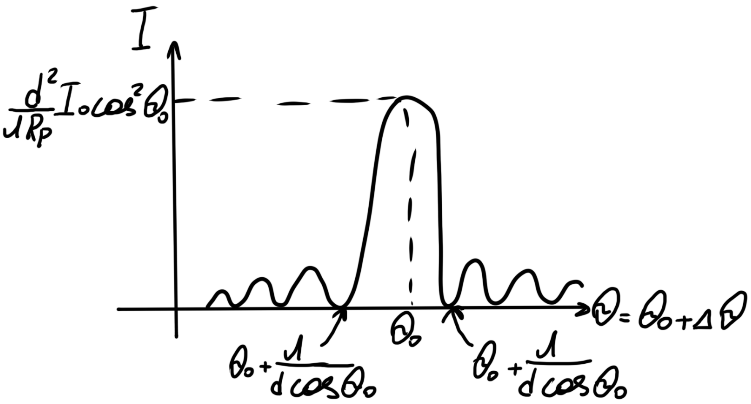
, где $z' = 0$, а $k_{0x} = k\sin\theta_0$

$$\hat{E}(k_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_0 e^{ik\sin\theta_0 x'} e^{-ik\sin\theta x} dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i\Delta k_x x'} dx' = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{d e^{i\Delta k_x \frac{d}{2}} - e^{-i\Delta k_x \frac{d}{2}}}{2i\Delta k_x \frac{d}{2}}$$

$$= \frac{E_0 d}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{sinc}\left(\Delta k_x \frac{d}{2}\right)$$

$$I = \frac{|E_p|^2}{2} = \frac{k}{R_p} \frac{d^2}{2\pi} \frac{|E_0|^2}{2} \mathrm{sinc}^2\left(\Delta k_x \frac{d}{2}\right) \cos^2\theta = \frac{d^2}{\lambda R_p} I_0 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{kd}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta)\right) \cos^2\theta$$

, где $I_0 = \frac{|E_0|^2}{2}$, а $P_\Phi = \frac{d^2}{\lambda R_p}$

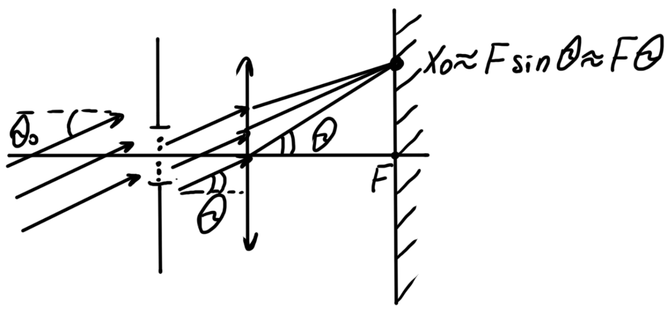


Первое обращение в "0"вблизи максимума $I(\theta)$.

$$\frac{kd}{2}(\sin\theta_0 - \sin(\theta_0 + \Delta\theta)) = \pm\pi$$

$$\sin\theta_0 - \sin\theta_0 \underbrace{\cos\Delta\theta}_{\approx 1} - \cos\theta_0 \underbrace{\sin\Delta\theta}_{\approx\Delta\theta} = \pm\frac{\lambda}{d} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\lambda}{d\cos\theta_0}$$

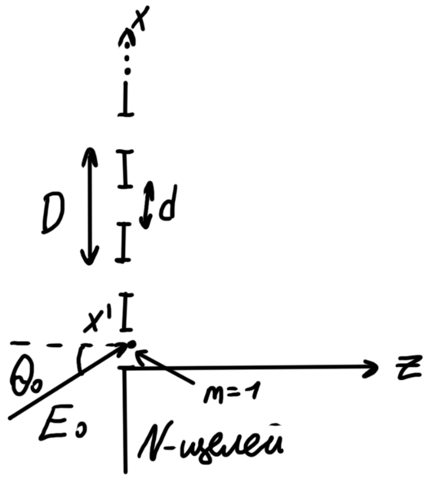
Дифракционная картина в фокальной плоскости линзы:



В случае наблюдения диффракционной картины в фокальной плоскости линзы $\frac{1}{R_p} \to \frac{1}{F}$, а θ остается тот же самый: $I = I_0 \frac{d^2}{\lambda F} \left(\frac{kd}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta) \right) \cos^2\theta$

2. Дифракционные решетки

1. Щелевая решетка:



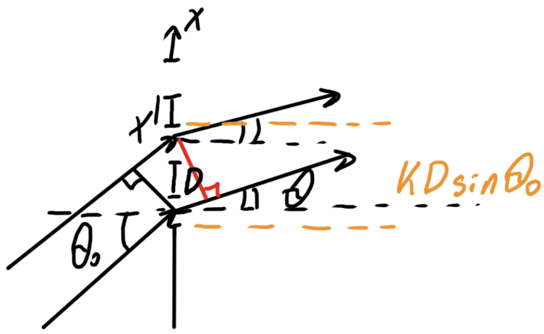
$$\hat{E}(k_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(m-1)D}^{(m-1)D+d} E_0 e^{ik(\sin\theta_0 - \sin\theta)x'} dx' = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{N} \frac{e^{i\Delta k_x((m-1)D+d)} - e^{i\Delta k_x(m-1)D}}{i\Delta k_x} =$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{de^{i\Delta k_x d} - 1}{2i\Delta k_x \frac{d}{2}} \sum_{m=1}^{N} e^{i\Delta k_x (m-1)D} = \frac{dE_0}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Delta k_x \frac{d}{2}} \mathrm{sinc}\left(\Delta k_x \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{e^{i\Delta k_x ND} - 1}{e^{i\Delta k_x ND} - 1}$$

, где $\Delta k_x = k(\sin\theta_0 - \sin\theta)$

$$I_p = \frac{|E_p|^2}{2} = \underbrace{\frac{d^2}{\lambda R_p} I_0 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{kd}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta)\right)\cos^2\theta}_{\text{дифракция на отдельной щели}} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{kD}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta)N\right)}{\sin^2\left(\frac{kD}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta)\right)}}_{\text{интерференция полей от N-щелей}}$$

, где в конце дробь равна $\dfrac{\sin^2 \dfrac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin^2 \dfrac{\Delta\varphi}{2}}$.



$$\Delta\varphi = kD\sin\theta_0 - kD\sin\theta$$

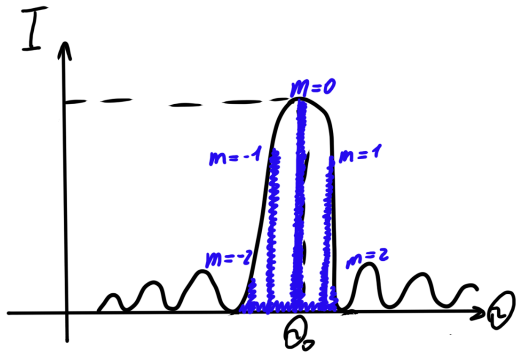
$\dfrac{\sin^2\dfrac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}}$ - имеет главные максимумы в точках, где знаменатель $= 0$, то есть: $\Delta\varphi = 2\pi m,\ m = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$

$$kD(\sin\theta_0 - \sin\theta_m) = 2\pi m$$

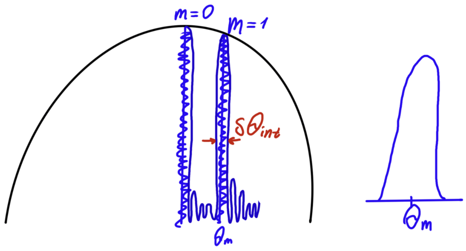
Пусть $\theta_m = \theta_0 + \Delta\theta_m$:

$$\sin\theta_0 - \sin\theta_0\cos\Delta\theta_m - \cos\theta_0\sin\Delta\theta_m = m\frac{\lambda}{D}$$

, где $\Delta\theta_m = m\dfrac{\lambda}{D\cos\theta_0}$.



Ширина максимумов:

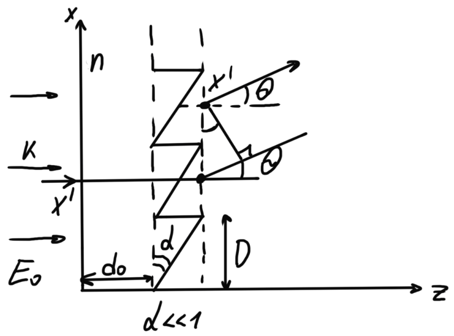


$\delta\theta_{int}$ = угловое расстояние между главным максимум и первым интенсивности в 0.

$$\frac{N\Delta\varphi}{2}\frac{NkD(\sin\theta_0 - \sin(\theta_m + \sigma\theta_{int}))}{2} = \frac{-2\pi mN}{2} \pm \pi$$
$$\frac{NkD}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta_m\cos\delta\theta_{int} - \cos\theta_m\sin\delta\theta_{int}) = -m\pi N \pm \pi$$
$$\frac{kD}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta_m) = -m\pi \Rightarrow \frac{NkD}{2}\cos\theta_m\delta\theta_{int} = \pm\pi$$
$$\delta\theta_{int} = \frac{\lambda}{D\cos\theta_m}\frac{1}{N} \sim \frac{\lambda}{D\cos\theta_0} \pm \pi$$

, где $\dfrac{\lambda}{D\cos\theta_0} = \Delta\theta_{m+1} - \Delta\theta_m$

2. Фазовые решетки:



$$\Delta\varphi = k\int ndS = k[d_0 n + x'\alpha n + (D - x')\alpha] = \varphi_0 + k\alpha(n-1)x'$$

Одной ступеньки: $\hat{E}(k_x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^D E_0 e^{i\varphi_0} e^{ikja(n-1)x'} e^{-ik_x x'}dx' = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 e^{i\varphi_0}\int_0^D e^{ik(\alpha(n-1)-\sin\theta)x'}dx' =$

$$= \frac{E_0 D}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi_0}\frac{e^{i\Delta k_x D} - 1}{2i\Delta k_x \frac{D}{2}} = \frac{D}{\sqrt{2\pi}} E_0 e^{i\varphi_0} e^{i\Delta k_x \frac{D}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{kD}{2}(\alpha(n-1) - \sin\theta)\right)$$

, где $\Delta k_x = k(\alpha(n-1) - \sin\theta)$

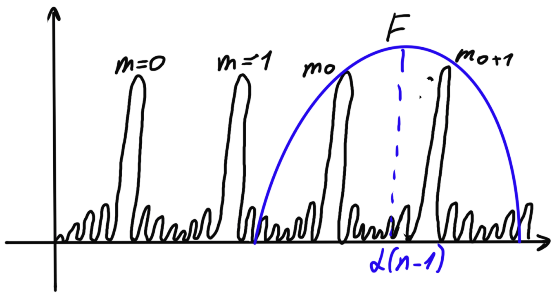
$$I_{\text{одной щели}} = I_0 \frac{D^2}{\lambda R_p}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{kD}{2}(\alpha(n-1)\sin\theta)\right)\cos^2\theta$$

, где $\alpha(n-1) \leq \sin\theta_0$

$$\Delta\varphi_{\text{соседних зубов}} = kD\sin\theta$$

$$I = I_0\frac{D^2}{\lambda R_p}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{kD}{2}(\alpha(n-1) - \sin\theta)\right)\cos^2\theta \cdot \frac{\sin^2\left(\dfrac{NkD\sin\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{kD\sin\theta}{2}\right)}$$

, где $R_p \to F$



$R_\lambda = m_0 N = \dfrac{\lambda}{\delta\lambda}$