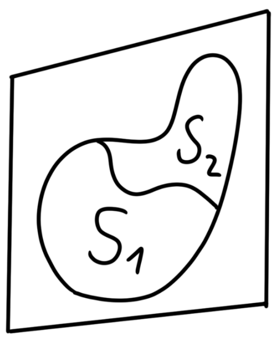
1. Интеграл Кирхгофа (поле дифрагированной волны) легко рассчитать на оси круглого отверстия. Вне оси это можно сделать разложением e^{ikR} по функциям Бесселя, либо разбиением поверхности вторичных источников на зоны Френеля (местами части колец) и интегрированием по азимутальному углу.

В итоге из-за аксиальной симметрии задачи вне оси наблюдается несколько светлых и темных колец (число $\approx$ число зон Френеля в отверстии).

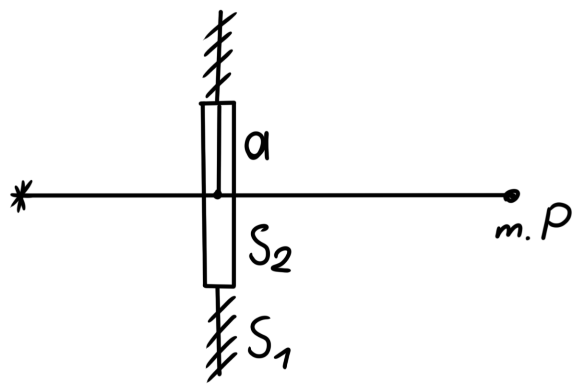
2. Принцип Бабине работает для произвольных отверстий и дополняющих эркранов (так как в основе лежит интеграл, то вклад подобластей аддитивен).

$$S_2 = S_1 \oplus S_2 \Rightarrow E_{p_3} = E_{p_1} + E_{p_2}$$

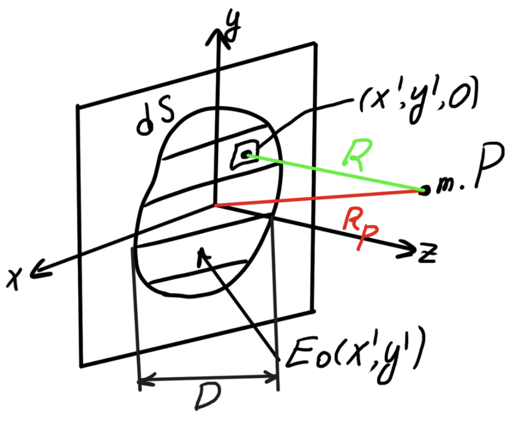
Пример:



$$E_p = E_{p_0} - E_{p_0}(1 - e^{ik(R_0 - r)})$$



Классификация различных видов дифракции:



$dS = dx'dy',\ R_p = x^2 + y^2 + z^2$

$$E_p(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \iint E_0(x', y') \frac{e^{ikR}}{R} dS_n$$

Предположения волны падают на отверстие с небольшими углами и точка P лежит недалеко от оси.

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xx' - 2yy' + (x')^2 + (y')^2} = [R_p \gg x', y'] \approx$$
$$\approx R_p \left(1 - \frac{xx'}{R_p^2} - \frac{yy'}{R_p^2} + \frac{(x')^2}{2R_p^2} + \frac{(y')^2}{R_p^2} + ...\right)$$

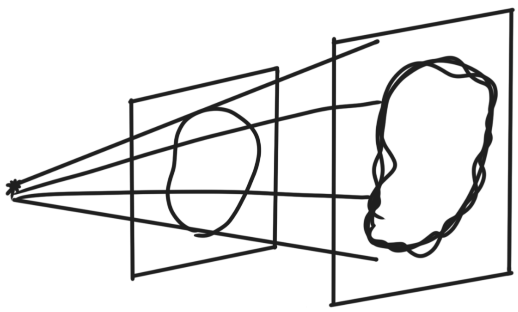
1 случай: $k\dfrac{(x')^2}{R_p^2} \ll \pi \Rightarrow \dfrac{D^2}{\lambda R_p} \ll 1 \quad \dfrac{D^2}{\lambda R_p} = P_\Phi$ - параметр Френеля

$$\Rightarrow P_\Phi \ll 1 \quad (a_m = \sqrt{m\lambda r} \approx \sqrt{m\lambda} R_p)$$

Из $P_\Phi \ll 1 \Rightarrow D \ll a_1 = \sqrt{\lambda} R_p$ - дифракция Фраунгофера (ссамый простой вид дифракции)

2 случай: $P_\Phi \sim 1$ - сложная картина дифракции - дифракция Френеля.

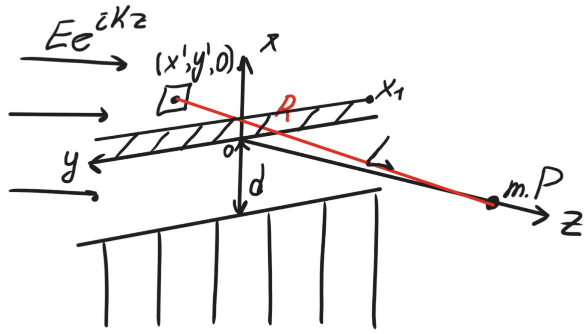
3 случай: $P_\Phi \gg 1 =$ геометрическая оптика



Справа это изображение отверстия

Вблизи изображения отверстия будут видны дифракционные полосы.

Дифракция волны на границе ∞ плоского экрана:



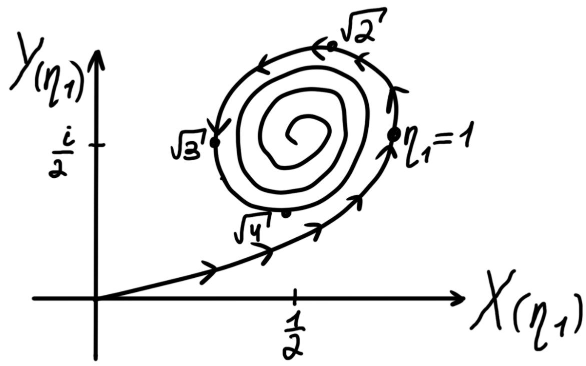
$$E_p = \frac{k}{2\pi i}\iint dx'dy'\frac{e^{ikR}}{R}E_0$$

$$R = \sqrt{(x')^2+(y')^2+L^2} \approx L\left(1+\frac{(x')^2}{2L^2}+\frac{(y')^2}{2L^2}+...\right) \approx L+\frac{(x')^2}{2L}+\frac{(y')^2}{2L}$$

$$E_p = \frac{k}{2\pi i}\frac{E_0}{L}e^{ikL}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{(y')^2}{2L}}dy'\int_{-d}^{\infty} e^{ik\frac{(x')^2}{2L}}dx' = \frac{kE_0e^{ikL}}{2\pi iL}\sqrt{\frac{\pi 2L}{-ik}}\int_{-d}^{\infty} e^{ik\frac{(x')^2}{2L}}dx'$$

$$E_p = E_0e^{ikL}\sqrt{\frac{k}{2\pi iL}}\int_{-d}^{\infty} e^{ik\frac{(x')^2}{2L}}dx'$$

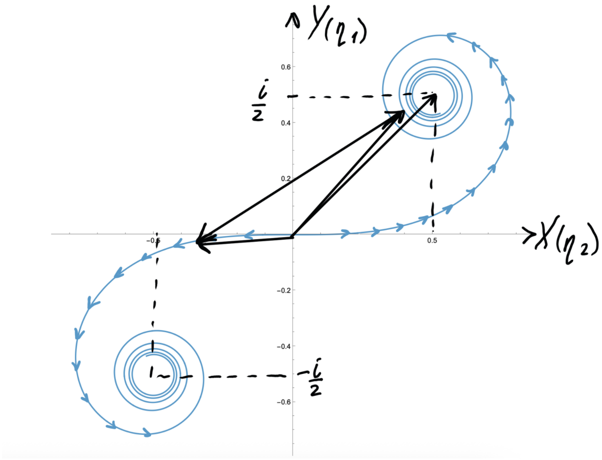
$$\int_0^{x_1} e^{ik\frac{(x')^2}{2L}}dx' = \left[\eta = x'\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}\right] = \sqrt{\frac{\lambda L}{2}}\int_0^{\eta_1} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2}d\eta = \sqrt{\frac{\lambda L}{2}}\left(\underbrace{\int_0^{\eta_1}\cos\left(\frac{\pi\eta^2}{2}\right)d\eta}_{X(\eta_1)} + i\underbrace{\int_0^{\eta_1}\sin\left(\frac{\pi\eta^2}{2}\right)d\eta}_{Y(\eta_1)}\right)$$



$$\int_0^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2}d\eta^2 = \frac{\sqrt[2]{2i}}{2} = \frac{i+1}{2}$$

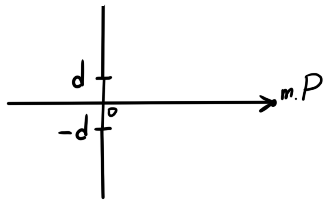
$$\int_{-|x_1|}^{0} e^{ik\frac{(x')^2}{2L}}dx' = \sqrt{\frac{\lambda L}{2}}\int_{\eta_1<0}^{0} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2}d\eta = \sqrt{\frac{\lambda L}{2}}\int_0^{|\eta_1|} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2}d\eta$$

Тогда графически это влечет следующие изменения:



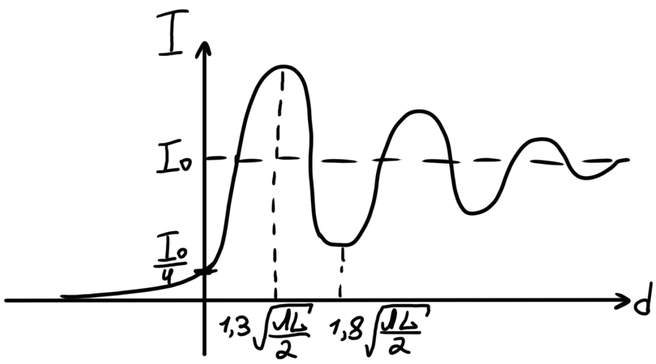
Спираль Корню.

1. $d > 0$, точка P находится над экраном



$$d \gg \frac{\sqrt{\lambda L}}{2}$$

$$E_p = E_0 e^{ikL} \sqrt{\frac{1}{i\lambda L}} \Big(\underbrace{\int_0^\infty}_{\frac{1}{2}(1+i)} + \underbrace{\int_{-\infty}^0}_{\frac{1}{2}(1+i)} \Big) \frac{\sqrt{\lambda L}}{2} = E_0 e^{ikL}$$



$$I_0 = \frac{|E_p|^2}{2} = \frac{\left|E_0 e^{ikL}\right|^2}{2} = \frac{|E_0|^2}{2} = I_0$$

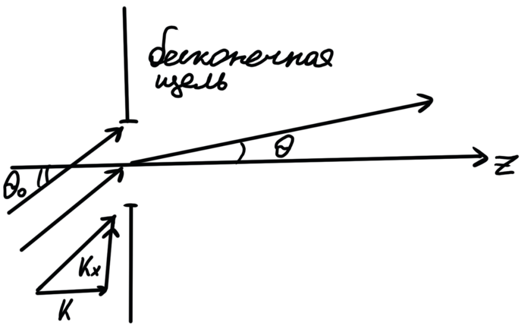
Дифракция Фраунгофера: $P_\Phi = \dfrac{D^2}{\lambda R_p} \ll 1 \Rightarrow \Delta r \ll \lambda$

$$R \approx R_p\left(1 - \frac{xx'}{R_p^2} - \frac{yy'}{R_p^2}\right) = R_p - \frac{\lambda}{R_p}x' - \frac{y}{R_p}y'$$

$$E_p = \frac{k}{2\pi i R_p}\iint dx'dy' E(x',y')\exp\left(ik\left[R_p - \frac{x}{R_p}x' - \frac{y}{R_p}y'\right]\right)\cos\theta_0 = \left[k_x = k\frac{x}{R_p},\ k_y = k\frac{y}{R_p}\right] =$$

$$= \frac{ke^{ikR_p}}{iR_p}\frac{1}{2\pi}\iint dx'dy' E(x',y')e^{-ik_xx'-ik_yy'}\cos\theta_0 = \frac{ke^{ikR_p}}{iR_p}\hat{E}(k_x,k_y)\cos\theta_0$$

Случай длинных по y щелей $\Rightarrow$ удобно использовать интеграл Кирхгофа с цилиндрическими волнами:



$$E_p = \sqrt{\frac{k}{2\pi i}}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E(x')\frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}}dx'\cos\theta_0$$

Распишем компоненты:

$$E(x') = E_0e^{ik_0\sin\theta_0 x'} \quad k_{0x} = k\sin\theta_0 = k\frac{x}{R_p} \quad e^{iRk} = e^{ikR_p - ik_xx}$$

Итог:

$$E_p = \sqrt{\frac{k}{2\pi i R_p}}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_0e^{ik_0\sin\theta_0x' - ik\sin\theta x'}dx'e^{ikR_p}\cos\theta_0$$