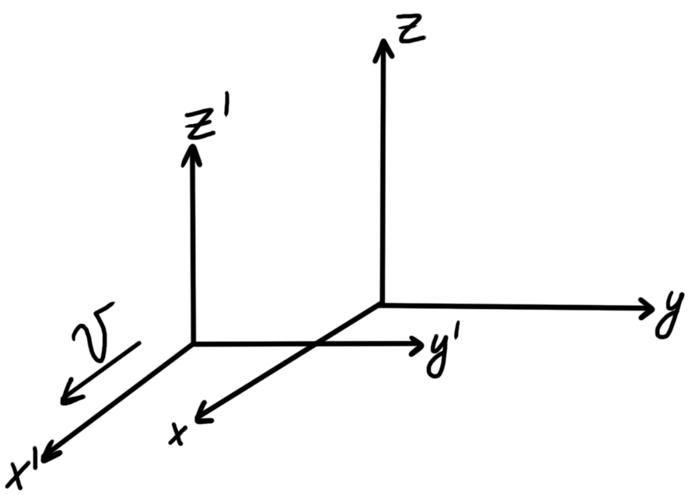
1. Релятивистски инвариантное (ковариантное) описание электромагнитной волны

Лоренц (1903-1904 гг) обнаружил линейное преобразование уравнений Максвелла, в движущиеся ИСО, не изменяющее вид этих уравнений. Это дало толчок в развитии теории относительности.

Преобразование Лоренца:



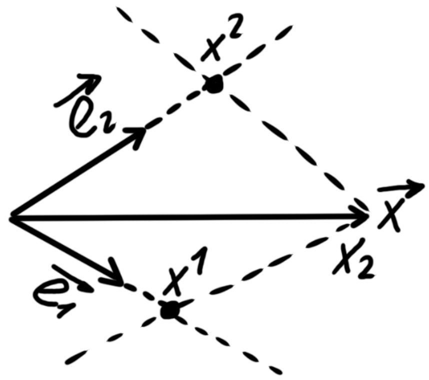
Координаты и время события при переходе из одной инерциальной системы отсчета (ИСО) в другую, движущуюся относительно первой постоянной скоростью v, преобразуются следующим образом:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad \text{, где } \beta = \frac{v}{c},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\vec{x} = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = x^i$$

Правило: латинскими буквами $(i, j, k, l, m...)$ обозначают индексы четырех мерных объектов $= (0, 1, 2, 3)$, а греческими $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, ... = 1, 2, 3)$ индексируют трех мерные объекты.

$\vec{x} = \sum\limits_{j=1}^{3} e_i x^i,\ x^i$ - контравариантные компоненты четырех вектора $\vec{x}$; e_i - базисные вектора - любые четыре линейно независимые векторы.



Правило: если два индекса в верхнем и нижнем этажах совпадают, то они называются немыми, это означает по ним ведется суммирование.

Преобразование Лоренца в тензорном виде:

$$\acute{x}^i = L^i_{\cdot k}x^k : \quad \begin{pmatrix}\acute{x}^0\\ \acute{x}^1\\ \acute{x}^2\\ \acute{x}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}$$

, где $L^i_{\cdot k}$ - матрица Лоренца.

Обратное преобразование:

$$x^i = \overline{L}^i_k : \quad \acute{x}^k \begin{pmatrix}x^0\\ x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma & 0 & 0\\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\acute{x}^0\\ \acute{x}^1\\ \acute{x}^2\\ \acute{x}^3\end{pmatrix}$$

Имеем: $L^i_{\cdot k}(-\beta) = \overline{L}^i_{\cdot k}(\beta)$

Правило: если четыре величины (a^0, a^1, a^2, a^3) при переходе из K в K' преобразуются через преобразование Лоренца $\Rightarrow$ это контравариантные компоненты четырех вектора.

1. Четырех скаляр (тензор "0"ранга) не изменятся при преобразование Лоренца;
2. Четырех вектор (тензор "1"ранга) изменятся $\acute{x}^i = L^i_k x^k$;
3. Четырех тензор второго ранга.

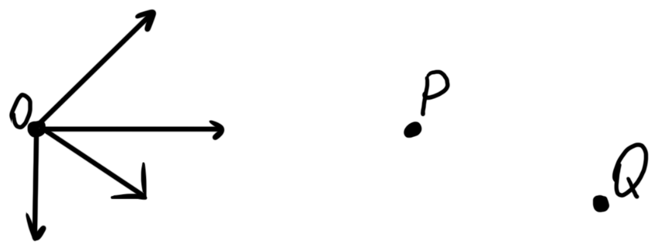
Возьмем два четырех вектора (a^0, a^1, a^2, a^3), (b^0, b^1, b^2, b^3) и образуем из их компонент 16 велин a^ib^k : $F^{ik} = \acute{a}^i\acute{b}^k = L^i_{\cdot n}a^nL^k_{\cdot m}b^m = L^i_{\cdot n}L^k_{\cdot m}a^nb^m = F^{nm}$ $\Rightarrow$ правило преобразования тензоров второго порядка: $\acute{F}^{ik} = L^i_{\cdot n}L^k_{\cdot m}\acute{F}^{nm}$.

В матричном виде: $c_{ij} = A_{im}B_{mj}$ (произведение двух матриц)

$$\acute{F}^{ik} = L^i_{\cdot k}F^{nm}L^{\top m}_{\cdot k}$$

Тензор третьего ранга: $\acute{F}^{ijk} = L^i_{\cdot n}L^j_{\cdot m}L^k_{\cdot e}F^{nme}$

2. Геометрия пространства времени



e_0, e_1, e_2, e_3 - четыре любых линейно независимых вектора - образуют базис.

$$\vec{x}_p = \overrightarrow{OP} = e_i x_p^i, \ \vec{x}_q = \overrightarrow{OQ} = e_i x_q^i$$

$\vec{x}_{pq} = \vec{x}_p - \vec{x}_q$(не зависит от выбора начала отсчета)$= e_i(x_p^i - x_q^i)$. Составим скалярное произведение $(\vec{x}_{pq}, \vec{x}_{pq}) = (e_i(x_p^i - x_q^i), e_k(x_p^k - x_q^k))$; $(e_i, e_k) \equiv q_{ik}$

$$(\vec{x}_{pq}, \vec{x}_{pq}) = g_{ik}(x_p^i - x_q^i)(x_p^k - x_q^k) = S^2 = c^2(t_p - t_q)^2(x_p - x_q)^2 - (y_p - y_q)^2 - (z_p - z_q)^2$$

Перепишем: $S^2 = (x_p^0 - x_q^0)^2 - (x_p^1 - x_q^1)^2 - (x_p^2 - x_q^2)^2 - (x_p^3 - x_q^3)^2$

$\Rightarrow g_{ik}$ - диагональные элементы не равны нулю:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ - метрический тензор. (псевдоэвклидово пространство)

В трех мерном пространстве:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - Эвклидово пространство.

$(e_i, \vec{x}) = (e_i, e_k x^k) = g_{ik} x^k = x_i$ - ковариантная компонента $\vec{x}$

$$(\vec{x}, \vec{x}) = (e_i x^i, e_k x^k) = (e_i e_k) x^i x^k = g_{ik} x^k x^i = x_i x^i$$

Правило: $x_i = g_{ik} x^k$ положено в основу операций с повышением и понижением индекса.

Пример: $F_{ijk} = g_{im} F^m_{.jk}, \ F_{ijk} = g_{im} g_{jn} g_{ke} F^{mnl}$

$a^i = \tilde{g}^{ik} a_k$, где $\tilde{g}^{ik}$ - обратная матрица к g_{ik}

g^{ik} и g_{ik} - это метрический тензор $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Пример: $F^{ijk} = g^{im} g^{jn} g^{kl} F_{mnl}$

$$a^i = g^{ik} a_k,\ F^{ij} = g^{in} g^{jm} F_{nm},\ F^{ij} = g^{in} F^{j}_{n\cdot}$$

Свойство: g_{ik} - является инвариантным при преобразование Лоренца.

$$\acute{g}^{ik} = [\acute{a}^i \acute{b}^k = L^i_{\cdot m} L^k_{\cdot n} a^m b^n] = L^i_{\cdot m} L^k_{\cdot n} g^{mn} = \text{в матричном виде: } L^i_{\cdot m} g^{mn} L^{\top n}_{\cdot k}$$

$$\acute{g}^{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Преобразование Лоренца ковариантных компонент четырех вектора:

1-ый способ: $\acute{x}_i = L^k_{i\cdot} x_k$, где $L^k_{i\cdot}$ - не матрица Лоренца.
Дописать .