$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(1-2xt+t^2) = (x-t)w$$

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial t} + (t-x)w = 0$$

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

$$t^n:\ (n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-\cancel{1})P_{n-1}(x) + \cancel{P_{n-1}(x)} - xP_n(x) = 0,\ n \geq 1$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,\ n = 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

Лемма 1. *$\forall n$ функция $P_n(x)$ является многочленом степени n с положительным старшим коэффициентом.*

Доказательство.

По индукции:

База: $\begin{matrix} n = 0, & P_0 = 1 \\ n = 1, & P_1 = x \end{matrix}$

Шаг: для $P_n(x)$ верно, докажем для $P_{n+1}(x)$:

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{n+1}\underbrace{xP_n(x)}_{n+1 \text{ степень}} - \frac{n}{n+1}\underbrace{P_{n-1}(x)}_{n-1 \text{ степень}}$$

$$P_{n+1}(x) \text{ - многочлен степени } n+1$$

$$\frac{2n-1}{n+1}xP_n \text{ - имеем положительную старую степень}$$

#

Дифференцируем $w(x,t)$ по x:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{-2t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial x} - tw = 0$$

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

$$(A):\ P_n'(x) - 2xP_{n+1}'(x) + P_{n-2}'(x) - P_{n-1}(x) = 0,\ \forall n \geq 2 \qquad \left(\frac{d}{dx}(*)\right)$$

$$n \to n+1:\ P_{n+1}'(x) - 2xP_{n+2}'(x) + P_{n-1}'(x) - P_n(x) = 0$$

$$(B): (n+1)P_{n+1}'(x) - (2n-1)P_n(x) - (2n+1)xP_n'(x) + nP_{n-1}'(x) = 0$$

$$(B)-(n+1)(A):\ [-(2n+1)+(n+1)]P_n(x)-x[(2n+1)-2(n+1)]P'_n(x)+[n-(n+1)]P'_{n-1}(x)=0$$

$$(V):\ -nP_n(x)+xP'_n(x)-P'_{n-1}(x)=0$$

$$(B)-n(A):\ P'_{n+1}(x)-[(2n+1)-n]P'_n(x)-x[(2n+1)-2n]P'_n(x)=0$$

$$(G):\ P'_{n+1}(x)-(n+1)P_n(x)-xP'_n(x)=0$$

$$(V)+(G):\ P'_{n+1}(x)-(2n+1)P_n(x)-P'_{n-1}(x)=0$$

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)$$

1. Дифференциальное уравнения. Соотношения ортогональностей

$$-(V):\ nP_n(x)-xP'_n(x)+P'_{n-1}(x)$$

$$(G)\ n+1\to n:\ P'_n(x)-nP_{n-1}(x)-xP'_{n-1}(x)=0$$

Суммируем наши фигни:

$$xnP_n(x)-xP'_n+xP'_{n-1}(x)+P'_n(x)-nP_{n-1}(x)-xP'_{n-1}(x)=0$$
$$(1-x^2)P'_n(x)+nxP_n(x)-nP_{n-1}(x)=0\Big|\cdot\frac{d}{dx}$$
$$[(1+x^2)P'_n]'+nP_n(x)+nxP'_n(x)\underbrace{-nP'_{n-1}(x)}_{n^2P_n-nxP_n}=0$$

То есть многочлен Лежандра является частным решением линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$[(1-x^2y')]'+n(n+1)y=0$$

$$L_2^h(-1,1),\ h=1:\ (f,g)=\int_{-1}^{1}fgdx$$

$$((1-x^2)P'_n)'+n(n+1)P_n=0\ |\cdot P_m$$
$$((1-x^2)P'_m)'m(m+1)P_m=0\ |\cdot P_n$$

$$\underbrace{[(1-x^2)(P_mP'_n-P_nP'_m)]'}_{(1)}+(n(n+1)-m(m+1))P_mP_n=0$$

$$\int_{-1}^{1}(1)dx \to 0, \quad \int_{-1}^{1} P_n P_m = 0, \text{ при } n \neq m$$

, ортогональность доказана.

$$\|P_n\|^2 = (P_n P_m) = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$$

Замена в $(*)$ $n+1 \to n$:

$$(\tilde{*}):\ nP_n - (2n-1)xP_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0$$

$(*)(2n-1)P_{n-1} + (\tilde{*})(2n+1)P_n:$

$$(2n-1)(n+1)P_{n+1}P_{n-1} + (2n-1)nP_{n-1}^2 - (2n+1)(n+1)P_{n-2}P_n = 0$$

$$(2n-1)\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = (2n+1)\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx,\ \forall n \geq 2$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1}\frac{2n-3}{2n-1}\int_{-1}^{1} P_{n-2}^2 dx = ...$$

$$... = \frac{\cancel{2n-1}}{2n+1}\frac{2n-3}{\cancel{2n-1}}\cdots\frac{3}{5}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx}_{\frac{2}{3}} = \frac{2}{2n+1}$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1},\ n \geq 2$$

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

2. Формула Родрига и теорема о разложении функций в ряд по многочленам Лежандра

Теорема 1 (Формула Родрига)**.** $\forall n \geq 0 : P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

Доказательство. Руслан не буянь здесь доказательство не нужно, у нас в программе это не требуется. #

Теорема 2 (Теорема о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра)**.** *Пусть $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $\forall x \in [-1, 1]$ справедливо равенство:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

, где $P_n(x)$ - многочлен Лежандра стандартизированный с помощью производящей функции $w(x,t)$

$$c_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$