Глава 1: Периодические решения

1. Периодические решения линейных систем

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \quad (1)$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = (a_{ij}(t)) - (n \times n), \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ fs_n(t) \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}(t) \in C(\mathbb{R}),\ f_j(t) \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists! \text{ решение задачи Коши } \begin{cases} \dfrac{d}{dt}y = A(t)y + f(t) \\ y(t_0) = t_0 \end{cases}$$

$$y(t) \text{ - определенно при } t \in \mathbb{R}$$

$$a_{ij}(t+T) = a_{ij}(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ T > 0 \text{ - период}$$

$$f_j(t+T) = f(t)$$

Хотим узнать, существуют ли у системы (1) периодические решения, то есть $\vec{y}(t+T) = \vec{y}(t)$.

Теорема 1. *Вектор функция $\vec{y}(t)$ является T-периодическии решением системы (1) $\Leftrightarrow \vec{y}(0) = \vec{y}(T)$*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$: очевидно

$(\Leftarrow)$:

Обозначим $\vec{y}(0) = \vec{y}(T) = \vec{y}_0$

Рассмотрим задачу Коши $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \exists!$ решение $\vec{y}(t)$

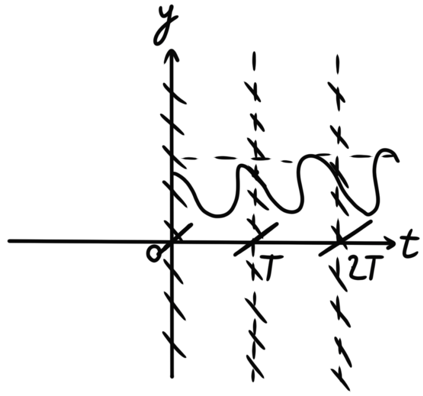
Рассмотрим функцию $\vec{z}(t) = \vec{y}(t+T)$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{z}(t) = \frac{d}{dt}\vec{y}(t+T) = \underbrace{A(t+T)}_{A(t)}\underbrace{\vec{y}(t+T)}_{\vec{z}(t)} + \underbrace{\vec{f}(t+T)}_{\vec{f}(t)} \\ \vec{z}(0) = \vec{y}(T) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{z}(t) = \vec{y}(t) \Rightarrow \vec{y}(t+T) = \vec{y}(t)$$

#

$$y' = a(t)y + f(t)$$
$$a(t+T) = a(t)$$
$$f(t+T) = f(t)$$



Теорема 2. $\exists!$ T-*периодическое решение системы (1)* $\Leftrightarrow \det(\Phi(T) - \Phi(0)) \neq 0$, *где* $\Phi(t)$ - *ФМР системы* $\dfrac{d}{dt}\vec{y}(t) = A(t)\vec{y}(t)$

Доказательство. Все решения системы
$\vec{y}(t) = \vec{y}_{oo}(t) + \vec{y}_{ч}(t) = \Phi(t)\vec{c} + \Phi(t) \cdot \int_0^t \Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$

По теореме 1. : $\vec{y}(0) = \vec{y}(T)$:

$$\Phi(0)\vec{c} = \Phi(T)\vec{c} + \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$$

$$(\Phi(0) - \Phi(T))\vec{c} = \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds \Leftrightarrow B\vec{c} = \vec{\psi}$$

$$\exists!\ T\text{-периодическое решение } \Leftrightarrow \exists!\ \vec{c} \Leftrightarrow \det(\Phi(0) - \Phi(T)) \neq 0$$

#

Замечание. *Если* $\det B = \det(\Phi(0) - \Phi(T)) = 0$, *то*
1) $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank}(B|\vec{\psi})$, *то* $\exists\infty$ *много* T-*периодических решений*
2) $\operatorname{rank} B \neq \operatorname{rank}(B|\vec{\psi})$, *то не существует* T-*периодических решений.*

Теорема 3. *Пусть* $A(t) = A$ - *постоянная матрица* , $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - *собственные числа* A $\exists!T$-*периодическое решение системы (1)* $\Leftrightarrow \forall\lambda_j$ *выполняется* $e^{\lambda_j T} \neq 1$

Замечание. $e^{\lambda_j T} \neq 1 \Leftrightarrow \lambda_j T \neq 2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

Если $A(t) = A$, то $\Phi(t) = e^{tA}$

Из теоремы 2. $\exists!$ T -периодическое решение $\Leftrightarrow \det\big(e^{TA}-E\big)=0$

$$\mu_1,\ldots,\mu_n - \text{ собственные числа матрицы } e^{TA} \Rightarrow \forall\mu_j\ \mu_j\neq 1$$

$$A = SYS^{-1} =,\ e^{TA} = Se^{TY}S^{-1}$$

$$Y=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix},\quad e^{TY}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 T} & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & e^{\lambda_n T}\end{pmatrix}\Rightarrow \mu_j = e^{\lambda_j T}$$

$\#$

2. Периодические решения для линейных уравнений высокого порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0 y = f(t) \quad (2)$$

$$a_j(t),\ f(t)\in C(\mathbb{R}),\quad a_j(t+T)=a_j(t),\quad f(t+T)=f(t),\ t\in\mathbb{R}$$

Цель: найти решение $y(t) : y(t+T) = y(t)$

Теорема 4. *Функция $y(t)$ является T-периодическим решением уравнения (2)* $\Leftrightarrow$ $y(0)=y(T),\ y'(0)=y'(T),\dots,y^{(n-1)}(0)=y^{(n-1)}(T)$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

Дано:

$$y(t+T)=y(t),\ t\in\mathbb{R}$$
$$y'(t+T)=y'(t)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(t+T)=y^{(n-1)}(t)$$
$$\Rightarrow t=0 \Rightarrow \text{ получаем требуемое}$$

$(\Leftarrow)$:

Сведем уравнение к системе:

$$\begin{cases} y_1 = y\\ y_2 = y'\\ \vdots\\ y_n = y^{(n-1)}\end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ 2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & ... & ... & ... & 1 \\ -a_0 & -a_1 & ... & ... & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A_n(t)} \begin{pmatrix} y_1 \\ 2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$y_1(0) = y_1(T), \quad y_2(0) = y_2(T), ..., y_n(0) = y_n(T)$$

$$(3) : \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = A_n(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}(T) \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{ по теореме 1. } \vec{y}(t+T) = \vec{y}(t)$$

В частности, $y_1(t+T) = y_1(t)$

#

Теорема 5. $\exists!$ *T-периодическое решение уравнения (2)* $\Leftrightarrow \det(\Phi(T) - \Phi(0)) \neq 0$*, где* $\Phi(t)$ *- ФМР однородной системы (3), то есть:*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & ... & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & ... & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & ... & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \{\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)\} \text{ - ФСР для однородного уравнения (2)}$$

Доказательство следует из теоремы 2.

Теорема 6. *Пусть* $a_j(t) = a_j$ *- постоянные коэффициенты. Рассмотрим характеристическое уравнение:* $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *- его корни.* $\exists!$ *T-периодическое решение уравнения (2)* $\Leftrightarrow \forall\lambda_j$ *выполняется* $e^{\lambda_j T} \neq 1$

Доказательство.

Сведем уравнение к системе, получим систему (3).
По теореме 3. $\exists!$ T-периодическое решение системы (3) $\Leftrightarrow \forall\lambda_j(A_n)$-собственные числа матрицы A выполняется $e^{\lambda_j T} \neq 1$

В прошлом семестре: $\det(A_n - \lambda E) = (-1)^n[\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0]$

#

3. Нахождение периодических решений с помощью рядов Фурье

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f(t) \quad (4)$$

$$\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ f(t) \in C(\mathbb{R}),\ f(t+T) = f(t),\ t \in \mathbb{R}$$

$f(t)$ - кусочно-гладкая

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt$$

Замена $\dfrac{2\pi}{T}t = s \Leftrightarrow t = \dfrac{T}{2\pi}s :$

$$f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}s\right) = \tilde{f}(s) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\underbrace{f(t+T)}_{f(t)=\tilde{f}(s)} = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{T}(t+T)\right) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi\right) = \tilde{f}(s+2\pi)$$

$$y(t) = y\left(\frac{T}{2\pi}s\right) = \tilde{y}(s) = \tilde{y}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\tilde{y}(s) = \frac{d}{ds}\tilde{y}(s)\frac{ds}{dt} = \tilde{y}'(s)\cdot\frac{2\pi}{T}$$

$$y''(t) = \tilde{y}''(s)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$(4) \Leftrightarrow \tilde{y}''(s)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \alpha\tilde{y}'(s)\cdot\frac{2\pi}{T} + \beta\tilde{y}(s) = \tilde{f}(s) \Leftrightarrow \tilde{y}''(s) + \alpha\tilde{\alpha}\tilde{y}'(s) + \tilde{\beta}\tilde{y}(s) = \tilde{\tilde{f}}$$

$$\tilde{\tilde{f}}(s+2\pi) = \tilde{\tilde{f}}(s)$$