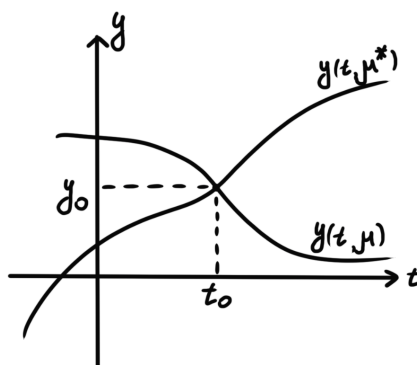


$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, \mathbb{D} - непустое открытое множество

Зависимость от параметра:

$$\begin{cases} y' = f(t, y, \mu^*) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t, \mu^*) - \text{решение}$$

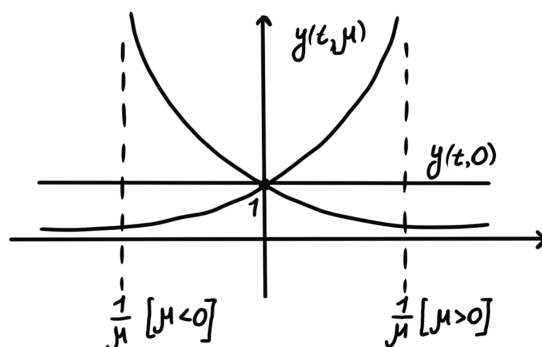
$$\begin{cases} y' = f(t, y, \mu) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t, \mu) - \text{решение}$$



Пример 2:

$$\begin{cases} y' = \mu^* y^2 = 0 \cdot y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(t, 0) = 1$$

$$\begin{cases} y' = \mu y^2 = 0 \cdot y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(t, \mu) = \frac{1}{1 - \mu t}$$



Теорема 2. $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^3$, B - непустое множество. Пусть $f \in C(B)$, $\exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(B)$, $(t_0, y_0, \mu^*) \in B$. Пусть $y(t, \mu^*)$ определено на интервале (α, ω) . Возьмем $[t_1, t_2] \in (\alpha, \omega)$:

1) $\exists \Delta > 0, \forall \mu : |\mu - \mu^*| < \Delta \Rightarrow y(t, \mu)$ определено на $[t_1, t_2]$

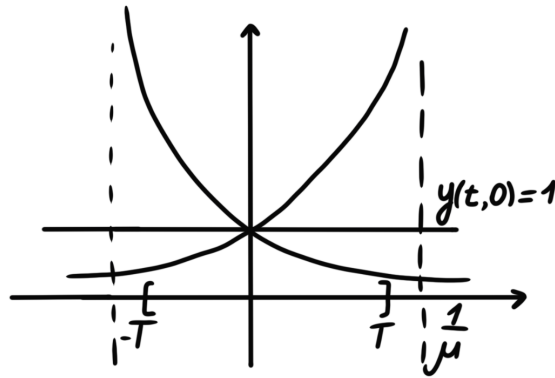
2) $y(t, \mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \mu^*} y(t, \mu^*) \forall t \in [t_1, t_2]$

Пример 2:

$$f(t, y, \mu) = \mu y^2, \quad B = \mathbb{R}^3, \quad f \in C(\mathbb{R}^3), \quad \exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^3), \quad (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$$

$$y(t, \mu^*) = y(t, 0) = 1, \quad (\alpha, \omega) = (-\infty, \infty)$$

Возьмем $[-T, T] \subset (-\infty, \infty)$



$$1) \mu > 0 : \frac{1}{\mu} > T \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{T} \quad \mu < 0 : \frac{1}{\mu} < -T \Leftrightarrow \mu > -\frac{1}{T}$$

$$-\frac{1}{T} < \mu < \frac{1}{T} \Leftrightarrow |\mu| < \frac{1}{T} = \Delta$$

$$2) t \in [-T, T] : \frac{1}{1 - \mu T} \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 1$$

Доказательство теоремы 1 с использованием теоремы 2.

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0^* \end{cases} \Rightarrow y(t, y_0^*)$$

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t, y_0)$$

Замена переменных $z(t, y_0) = y(t, t_0) - y_0$

$$\begin{cases} y'_t = z'_y + (y'_0)_t = z'_t = f(t, y) = f(t, z + y_0) \\ z(t_0) = y(t_0) - y_0(t_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'_t = f(t, z + y_0) \\ z(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{Замена: } y_0 = \mu \begin{cases} z'_t = f(t, z + \mu) \\ z(t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

\Rightarrow по теоремы 2 выполнено 1) и 2) \Rightarrow выполнено 1) и 2) из теоремы 1

#

1. Дифференцируемость решений по параметрам и начальным данным

$$\begin{cases} y' = f(t, y, \mu) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t, \mu) \text{ Хотим : } \exists \frac{\partial f}{\partial y}$$

Пусть $\exists \frac{\partial y}{\partial \mu}$ - непрерывна. Тогда по формуле Тейлора:

$$y(t, \mu) = y(t, \mu^*) + \frac{\partial}{\partial \mu} y(t, \mu^*)(\mu - \mu^*) + \underbrace{g(t, \mu)}_{o(\mu - \mu^*)}, \quad \lim_{\mu \rightarrow \mu^*} \frac{g(t, \mu)}{\mu - \mu^*} = 0$$

$f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^3$, B - непустое открытое множество

Теорема 1 (Теорема 3.). Пусть $f \in C(B)$, $\exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(B)$, $\exists \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(B)$. Пусть $(t_0, y_0, \mu^*) \in B$, $y(t, \mu^*)$ определено на (α, ω) . Возьмем $[t_1, t_2] \in (\alpha, \omega)$. Тогда:

0) $\exists \Delta > 0$, $\forall \mu : |\mu - \mu^*| < \Delta \Rightarrow y(t, \mu)$ определено на $[t_1, t_2]$

1) $\exists \frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu) \in C(P)$, где $P = \{(t, \mu) : t \in [t_1, t_2], |\mu - \mu^*| < \Delta\}$

2) $\exists \frac{\partial^2 y}{\partial \mu \partial t} \in C(P)$

3) $\underbrace{v(t, \mu)}_{\frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu)}$ - решение задачи Коши: $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \leftarrow \text{уравнение в вариациях Пуанкаре} \\ v(t_0) = 0 \end{cases}$

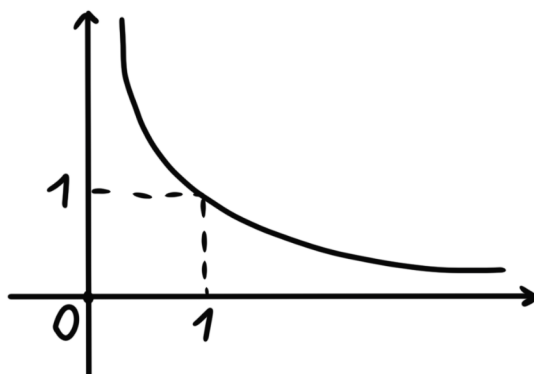
Пример 3:

Найти решение $y(y, \mu)$ при μ , близких к нулю.

$$\begin{cases} y' = 4t\mu - y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(t, \mu)$$

$$\mu = \mu^* = 0, \quad \begin{cases} y' = -y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad y(t, 0) = \frac{1}{t}, \quad t \in \underbrace{(0, +\infty)}_{(\alpha, \omega)}$$

$$f(t, y, \mu) = 4t\mu - y^2, \quad B = \mathbb{R}^3$$



$$f \in C(B), \exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(B), \exists \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(\mathbb{R}), (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$$

Возьмем $[t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$

$$\Rightarrow 0) \exists \Delta > 0 : \forall \mu : |\mu| < \Delta \Rightarrow y(t, \mu) - \text{определено на } [t_1, t_2]$$

$$\Rightarrow 1) \exists \frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu) \in C(P)$$

$$\Rightarrow y(t, \mu) = \underbrace{y(t, 0)}_{\frac{1}{t}} + \frac{\partial y}{\partial \mu}(t, 0)\mu + o(\mu), \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(t, \mu) = 4t\mu - y^2(t, \mu) \\ y(t, \mu)|_{t=1} = 1 \end{cases}$$

Дифференцируем по μ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial t} y(t, \mu) = 4t - 2y(t, \mu) \cdot \frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu) \\ \frac{\partial}{\partial \mu} y(t, \mu)|_{t=1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu)}_{v(t, \mu)} = 4t - 2y(t, \mu) \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu)}_{v(t, \mu)} \\ \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu)}_{v(t, \mu)}|_{t=1} = 0 \end{cases}$$

$$\mu = 0 : \text{Обозначим } w(t) = \frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu)|_{\mu=0}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w(t) = 4t - 2y(t, 0)w(t) \\ w(t)|_{t=1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} w' = 4t - \frac{2}{t}w \\ w(1) = 0 \end{cases}$$

1) Ищем решение однородного уравнения:

$$w' = -\frac{2}{t}w \Rightarrow w = \frac{c}{t^2}$$

2) Ищем частное решение:

$$w(t) = \frac{u(t)}{t^2}$$

$$\frac{u'(t)}{t^2} - \frac{2u(t)}{t^3} = 4t - \frac{2}{t} \frac{u(t)}{t^2} \Rightarrow u'(t) = 4t^3$$

$$u(t) = t^4 + \tilde{c}$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$w(t) = \frac{t^4 + c}{t^2} = \frac{t^4 - 1}{t^2}$$

$$\Rightarrow y(t, \mu) = \frac{1}{t} + \frac{t^4 - 1}{t^2} \mu + o(\mu), \quad t \in [t_1, t_2] \subset (0, +\infty), \quad |\mu| < \Delta$$

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t, y_0)$$

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, \mathbb{D} - непустое открытое множество

Теорема 2. (Теорема 4.) Пусть $f \in C(\mathbb{D})$, $\exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{D})$. Пусть $(t_0, y_0^*) \in \mathbb{D}$, $y(t, y_0^*)$ определено на (α, ω) . Возьмем $[t_1, t_2] \subset (\alpha, \omega)$. Тогда:

0) $\exists \Delta > 0$, $\forall y_0 : |y_0 - y_0^*| < \Delta \Rightarrow y(t, y_0)$ определено на (α, ω)

1) $\exists \frac{\partial y}{\partial y_0} \in C(P)$, где $P = \{(t, y_0) : t \in [t_1, t_2], |y_0 - y_0^*| < \Delta\}$

2) $\exists \frac{\partial^2 y}{\partial \mu \partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial y_0 \partial t_0} \in C(P)$

3) $v(t, y_0) = \frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0)$ - решение задачи Коши $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v = \frac{\partial f}{\partial y} v \\ v(t_0) = 1 \end{cases}$