Докозательство теоремы 2.

$$M = M^\top > 0 \Rightarrow \underset{>0}{\lambda_1(M)}, ..., \underset{>0}{\lambda_n(M)} - \text{ собственные числа матрицы } M$$

$$M = U \begin{pmatrix} \lambda_1(M) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(M) \end{pmatrix} U^{-1}, \text{ можно взять } U \text{ - ортогональную матрицу, то есть } U^{-1} = U^\top$$

$$\sqrt{M} = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1(M)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n(M)} \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$\text{Видно, что: } \sqrt{M}\sqrt{M} = M$$

Пусть $\vec{v_j}$ - собственный вектор: $(K - \lambda_j M)\vec{v_j} = \vec{0}$

$$(K - \lambda_j \sqrt{M} E \sqrt{M})\vec{v_j} = 0$$

$$\sqrt{M}(\underbrace{(\sqrt{M})^{-1} K (\sqrt{M})^{-1}}_{A} - \lambda_j E)\sqrt{M}\vec{v_j} = 0$$

$$\lambda_j - \text{ собственное число } A, \ \sqrt{M}\vec{v_j} - \text{ собственный вектор } A$$

$$A = A^\top, \quad A^\top = \underbrace{[(\sqrt{M})^{-1}]^\top}_{(\sqrt{M})^{-1}} \underbrace{K^\top}_{K} \underbrace{[(\sqrt{M})^{-1}]^\top}_{(\sqrt{M})^{-1}}$$

Из алгебры (утверждение 2.) в $\mathbb{R}^n$ существует базис из собственных векторов матрицы $A : \sqrt{M}\vec{v_1}, ..., \sqrt{M}\vec{v_n}$. Так как $\det \sqrt{M} < 0$, то $v_1, \ldots, v_n$ - базис $\mathbb{R}^n$.

$\#$

1. Линейные неоднородные системы малых колебаний

$$M\vec{x}'' + K\vec{x} = \vec{f}(t) \quad (1)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ M, K - (n \times n), \ M = M^\top > 0, K = K^\top \geq 0, \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

1-способ. Сведение к системы 1-го порядка

2-способ.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *- собственные числа, то есть* $\det(K - \lambda_j M) = 0$, $v_1, \ldots, v_n$ *- собственные вектора, то есть* $(K - \lambda_j M)v_j = 0$

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. *Тогда* $\underbrace{(Mv_1, v_2)}_{v_1, v_2 - M \text{ - ортогональны}} = \underbrace{(Kv_1, v_2)}_{v_1, v_2 - K \text{ - ортогональны}} = 0$

Доказательство.

$$\begin{cases} Kv_1 = \lambda_1 M v_1 | \cdot v_2 \\ Kv_2 = \lambda_2 M v_2 | \cdot v_1 \end{cases} \begin{cases} (Kv_1, v_2) = \lambda_1 (Mv_1, v_2) \\ (Kv_2, v_1) = \lambda_2 (Mv_2, v_1) \end{cases}$$

$$(K\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (v_1, K^\top v_2) = (v_1, Kv_2) = (Kv_2, v_1)$$

Вычитаем одно из другого:

$$0 = \lambda_1 (Mv_1, v_2) - \lambda_2 (Mv_2, v_1) = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(Mv_1, v_2) \Rightarrow (Mv1, v_2) = 0 \Rightarrow (Kv_1, v_2) = 0$$

#

Теорема 2. *Пусть* $\lambda_1 =, \ldots, = \lambda_p$ *- собственное число кратности p. Тогда существует собственные вектора* $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p$*, которые являются* M *- ортогональными, то есть* $(Mw_i, w_j) = 0$ *при* $i \neq j$

Доказательство.

Из параграфа 1 (теорема 2) мы знаем, что $\exists \vec{v}_1, ..., \vec{v}_p$ - линейно независимые собственные вектора.

Метод M - ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\vec{w_1} = \vec{v_1}$$

$$\vec{w_2} = \vec{v_2} + \alpha \vec{v_1}, \ \alpha - ?, \ (M\vec{w_2}, \vec{w_1}) = 0$$

$$\underbrace{(M\vec{w_2}, \vec{w_1})}_{0} = (M\vec{v_2}, \vec{w_1}) + \alpha (M \underbrace{\vec{v_1}}_{=\vec{w_1}}, \vec{w_1}) \Rightarrow \alpha = -\frac{(M\vec{v_2}, \vec{w_1})}{(M\vec{w_1}, \vec{w_1})}$$

Пусть $\vec{w_1}, ..., \vec{w_{m-1}}$ построены, причем $(M\vec{w_i}, \vec{w_j}) = 0, \ i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, m-1$

$$\vec{w_m} = \vec{v_m} + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \vec{w_j}, \ \beta_j - ?, \ (M\vec{w_m}, \vec{w_i}) = 0, \ i = 1, \ldots, m-1$$

$$\underbrace{(M\vec{w_m}, \vec{w_i})}_{0} = (M\vec{v_m}, \vec{w_i}) + \underbrace{\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j (M\vec{w_j}, \vec{w_i})}_{\beta_i \underbrace{(M\vec{w_i}, \vec{w_i})}_{>0}}$$

$$\Rightarrow \beta_i = \frac{-(M\vec{v_m}, \vec{w_i})}{(M\vec{w_i}, \vec{w_i})},\ j = 1, \ldots, m-1 \Rightarrow \vec{w_1}, .., \vec{w_p} \text{ - M-ортогональны}$$

$\#$

Теорема 3. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собственные числа системы (1), $\vec{w_1}, , ..., \vec{w_n}$ - собственные вектора, которые M-ортогональны. Тогда решение (1) имеет вид:*

$$\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j \vec{w_j}$$

, где $q_j(t)$ - решение дифференциального уравнения: $q_j'' + \lambda_j q_j = \tilde{f}_j(t)$

$$\tilde{f}_j = \frac{(\vec{f}(t), \vec{w_j})}{(M\vec{w_j}, \vec{w_j})}$$

Доказательство.

$$\text{Так как } \vec{w_1}, ..., \vec{w_n} \text{ - базис в } \mathbb{R}^n,\ \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j(t)\vec{w_j} - \text{ решение (1).}$$

$$M\sum_{j=1}^{n} q_j''(t)\vec{w_j} + \underbrace{K\sum_{j=1}^{n} q_j(t)\vec{w_j}}_{K\vec{w_j}=\lambda_j M\vec{w_j}} = \vec{f}(t)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(q_j''(t) + \lambda_j q_j(t))M\vec{w_j} = \vec{f}(t)| \cdot \vec{w_i}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(q_j''(t) + \lambda_j q_j(t))\underbrace{(M\vec{w_j}, \vec{w_i})}_{\substack{=0,\ \text{если } j \neq i \\ \neq 0,\ \text{если } j = i}} = (\vec{f}(t), \vec{w_i})$$

$$(q_i''(t) + \lambda_i q_i(t))(M\vec{w_i}, \vec{w_i}) = (\vec{f}(t), \vec{w_i})$$

$\#$

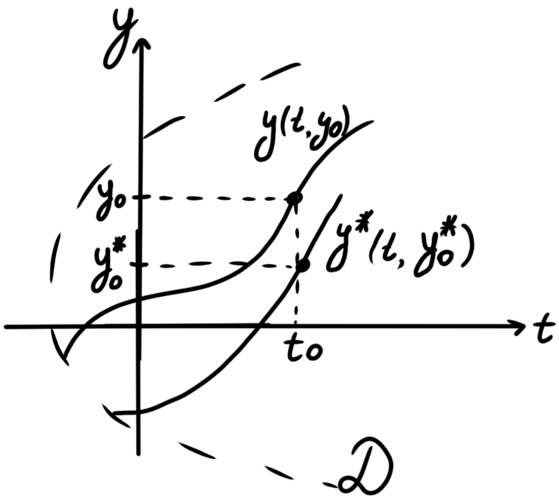
Глава 1: Зависимость решения от параметров

1. Непрерывная зависимость решений от параметров и начальных данных

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad f : \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2,\ \mathbb{D} \text{ - решение открытое} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Теорема 1 (Теорама Пикара). *Если* $f \in C(\mathbb{D}),\ \exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{D}) \Rightarrow \forall (t_0, y_0) \in D\ \exists!$ *непродолжаемое решение задачи Коши, определенной на открытом интервале* (α, ω)

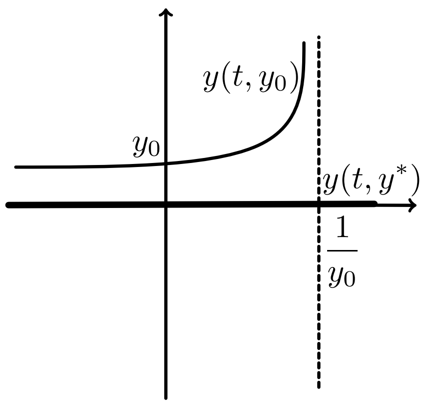
Будем менять y_0
Решение задачи Коши: $y(t; y_0)$



Вопрос: если $y_0 \approx y_0^*$, можно ли утверждать, что $y(t, y_0^*) \approx y(t, y_0)$
Пример:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y^* = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

$$y(t,0) = 0,\ t \in (-\infty, +\infty) \qquad y(t, y_0) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t},\ t \in \left(-\infty, \frac{1}{y_0}\right)$$



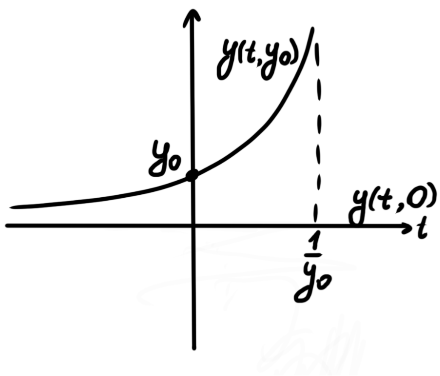
Теорема 2. *Пусть* $f \in C(\mathbb{D})$, $\exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{D})$. *Пусть* $(t_0, y_0^*) \in \mathbb{D}$. *Пусть* $y(t, y_0^*)$ *- решение задачи Коши, определенное на интервале* (α, ω). *Возьмем* $[t_1, t_2] \subset (\alpha, \omega)$. *Тогда:*

1) $\exists \Delta > 0,\ \forall y_0 : |y_0 - y_0^*| < \Delta \Rightarrow y(t, y_0)$ *определенно при* $t \in [t_1, t_2]$*;*

2) $y(t, y_0) \xrightarrow{y_0 \to y_0^*} y(t, y_0^*),\ t \in [t_1, t_2]$

Пример:

$$(t_0, y_0^*) = (0, 0) \Rightarrow y(t, y_0^*) \equiv 0,\ (\alpha, \omega) = (-\infty, +\infty). \text{ Возьмем: } [-T, T]$$



$$1)\ y_0 > 0;\ T < \frac{1}{y_0} \Leftrightarrow y_0 < \frac{1}{T} = \Delta$$

$$2)\ y(t, y_0) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t} \xrightarrow{y_0 \to 0} 0,\ t \in [-T, T]$$