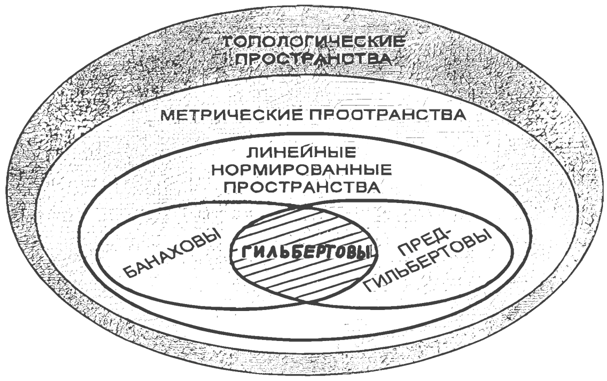
Глава 1: Геометрия пространств со скалярным произведением.



Определение 1 (Метрическое пространство). *Метрика* $\rho(x,y) : M^2 \to \mathbb{R}$

1) $\forall x, y : \rho(x,y) \geq 0 - (\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

2) $\forall x, y \in M : \rho(x,y) = \rho(y,x)$

3) $\forall x, y, z : \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

$B_\varepsilon(x) = \{y \in M | \rho(x,y) < \varepsilon\}$

Определение 2. *Множество открытое, если любая точка в нем содержится в нем вместе некоторой окрестностью.*

Пример дискреткой метрики:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

1. Линейно (векторное) пространство

Определение 3. *Непустое множество элементов L произвольной природы, называется линейным (векторным) над полем чисел* $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ *если*

1) $\forall x, y$ *введена операция сложения:*

1.1) $x + y = y + x$ *(коммутативность)*

1.2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность)*

1.3) В L существует элемент называемым нулем 0: $x + 0 = x$ *,* $\forall x \in L$

1.4) $\forall x \in L$ *существует противоположный элемент принадлежащий L:* $x + y = 0$ *, обозначается как* $-x$

2) $\forall x \in L$ *и* $\forall$ *числа* $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *определен вектор из L - произведения элементов на число* $\alpha, \alpha x \in L$*:*

1.1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta$

1.2) $1 \cdot x = x$ *(существования единицы)*
1.3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
1.4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Примеры:
1)

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n \end{matrix} \quad + \quad \begin{matrix} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \\ \beta(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{matrix} \qquad = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots \alpha x_n + \beta y_n)$$

2) $C[a, b] = \{f(a, b) \to \mathbb{C},$ непрерывная функции f - непрерывна $\}$
3) $L_p(x) = \{f$- измерима по Лебегу, заданная на $X, f : X \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\int_X |f(x)|dx < \infty$$

4) $l_2 : x = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$

Определение 4. *$x_1, \dots, x_n$ называется линейно зависимыми, если $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ не все равные нулю, такие что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$*

В противном случае: из того, что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ следует, что все $\alpha_i = 0$ $x_1, \dots, x_n$ называется линейно независимыми наборами векторов.

Определение 5. *Бесконечный набор элементов L называется линейно независимым, если любой его конечный поднабор линейно независимым.*

Определение 6. *Если в L можно найти n линейно независимых векторов, а любой набор из $n + 1$ векторов является линейно зависимыми, то $\dim L = n$. Если в L можно указать набор из произвольного числа линейно независимых элементов, то $\dim L = \infty$.*

Определение 7. *Непустое подмножество $S \subset L$ называется подпространством, если оно само является пространством введенных в L линейных операций.*

Определение 8. *Линейной оболочкой $<M>$ называется совокупность всех линейных комбинаций $\alpha x + \beta y$ где $x, y \in M \subset \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$*

$<M>$ - подпространство в L (натянутое или порожденное множеством элементов M)

Определение 9. *Норма в линейном пространстве L: $\| \; \| : L \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$*
$\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$
1) $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(положительная определенность нормы)*
2) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ *(положительная однородность нормы)*
3) $||x + y|| \leq ||x| + ||y||$

В конечномерных пространствах все нормы эквиваленты $c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$. В конечномерных пространствах это не так!

Пример норм:

$$1)\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)| \text{ - норма в } C[a, b] \text{ равномерная норма.}$$

$$2) \quad ||f||_{L_1} = \int_X |f| dx \text{ в } L_1$$

$$3) \quad ||f||_{L_p} = \sqrt[p]{\int_X |f|^p dx \text{в} L_p}$$

$$4) \quad ||x||_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

Определение 10. *Последовательность* $(x_n)_{n \in N}$ *точек линейно нормированное пространств* L *сходятся к* x*, если* $||x_n - x|| \xrightarrow{n \to \infty} 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n > n_0 : ||x_n - x|| < \varepsilon$

Определение 11. *Предельной точкой* $M \subset L$ *называется точка* x*, если существует сходящаяся к* x *последовательность элементов из* M $\exists x_n \in M : x_n \to x$

Определение 12. *Замыканием* $\overline{M}$ *- объединение* M *и его предельных точек (по конкретной норме).*

Определение 13. *Множество замкнутое, если содержит все предельные точки.*

Определение 14. *Множество* M *в* L *- линейно нормированном пространстве называется плотным в* L*, если* $\overline{M} = L$

Определение 15. *Сепарабельное множество, если в нем* $\exists$ *счетное плотное подмножество*