Конспект лекций по дисциплине

Основы функционального анализа

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

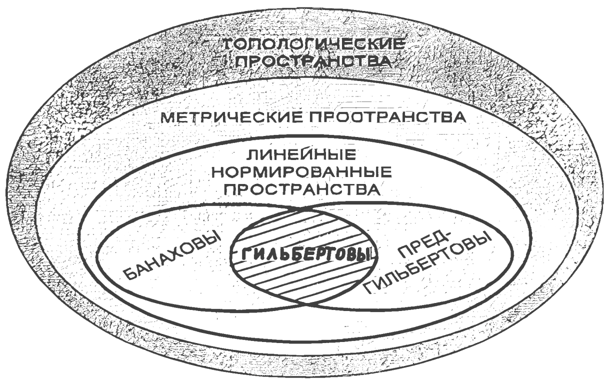
Студент: Б.В.О

Преподаватель: Ротанова Татьяна Александровна

Оглавление

Глава 1: Геометрия пространств со скалярным произведением.

1. Линейные пространства



Определение 1 (Метрическое простртнвство). *Метрика* $\rho(x,y) : M^2 \to \mathbb{R}$

1) $\forall x, y : \rho(x,y) \geq 0 - (\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

2) $\forall x, y \in M : \rho(x,y) = \rho(y,x)$

3) $\forall x, y, z : \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

$B_\varepsilon(x) = \{y \in M | \rho(x,y) < \varepsilon\}$

Определение 2. *Множество открытое, если любая точка в нем содержится в нем вместе некоторой окрестностью.*

Пример дискреткой метрики:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

2. Линейно (векторное) пространство

Определение 3. *Непустое множество элементов L произвольной природы, называется линейным (векторным) над полем чисел* $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ *если*

1) $\forall x, y$ *введена операция сложения:*

1.1) $x + y = y + x$ *(коммутативность)*

1.2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность)*

1.3) В L существует элемент называемым нулем 0: $x + 0 = x$ *,* $\forall x \in L$

1.4) $\forall x \in L$ *существует противоположный элемент принадлежащий L:* $x + y = 0$ *, обозначается как* $-x$

2) $\forall x \in L$ и $\forall$ числа $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ определен вектор из L - произведения элементов на число $\alpha, \alpha x \in L$:

1.1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta$

1.2) $1 \cdot x = x$ (существования единицы)

1.3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

1.4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Примеры:

1)

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n \end{matrix} \quad + \quad \begin{matrix} \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \\ \beta(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{matrix} \quad = (\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots \alpha x_n + \beta y_n)$$

2) $C[a, b] = \{f(a, b) \to \mathbb{C},$ непрерывная функции f - непрерывна $\}$

3) $L_p(x) = \{f$- измерима по Лебегу, заданная на $X, f : X \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\int_X |f(x)|dx < \infty$$

4) $l_2 : x = \{x_1, \ldots, x_n\} \quad \sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$

Определение 4. *$x_1, \ldots, x_n$ называется линейно зависимыми, если $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не все равные нулю, такие что $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$*

В противном случае: из того, что $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ следует, что все $\alpha_i = 0$ $x_1, \ldots, x_n$ называется линейно независимыми наборами векторов.

Определение 5. *Бесконечный набор элементов L называется линейно независимым, если любой его конечный поднабор линейно независимым.*

Определение 6. *Если в L можно найти n линейно независимых векторов, а любой набор из $n + 1$ векторов является линейно зависимыми, то $\dim L = n$. Если в L можно указать набор из произвольного числа линейно независимых элементов, то $\dim L = \infty$.*

Определение 7. *Непустое подмножество $S \subset L$ называется подпространством, если оно само является пространством введенных в L линейных операций.*

Определение 8. *Линейной оболочкой $<M>$ называется совокупность всех линейных комбинаций $\alpha x + \beta y$ где $x, y \in M \subset \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$*

$<M>$ - подпространство в L (натянутое или порожденное множеством элементов M)

3. Определение нормы

Определение 9. *Норма в линейном пространстве L: $\| \; \| : L \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$*

$\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

1) $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (положительная определенность нормы)

2) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ (положительная однородность нормы)

3) $||x + y|| \leq ||x| + ||y||$

В конечномерных пространствах все нормы эквиваленты $c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$. В конечномерных пространствах это не так!

Пример норм:

$$1)\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \text{ - норма в } C[a,b] \text{ равномерная норма.}$$

$$2) \quad ||f||_{L_1} = \int_X |f|dx \text{ в } L_1$$

$$3) \quad ||f||_{L_p} = \sqrt[p]{\int_X |f|^p dx \text{в} L_p}$$

$$4) \quad ||x||_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

Определение 10. *Последовательность $(x_n)_{n\in N}$ точек линейно нормированное пространств L сходятся к x, если $||x_n - x|| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \forall\varepsilon > 0, \exists n_0, n > n_0 : ||x_n - x|| < \varepsilon$*

Определение 11. *Предельной точкой $M \subset L$ называется точка x, если существует сходящаяся к x последовательность элементов из M $\exists x_n \in M : x_n \to x$*

Определение 12. *Замыканием $\overline{M}$ - объединение M и его предельных точек (по конкретной норме).*

Определение 13. *Множество замкнутое, если содержит все предельные точки.*

Определение 14. *Множество M в L - линейно нормированном пространстве называется плотным в L, если $\overline{M} = L$*

Определение 15. *Сепарабельное множество, если в нем $\exists$ счетное плотное подмножество*

Пример: Множество множеств P[0,1] не является замкнутым подпространством в C[0,1]

$$P_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow \|P_n - f\|_C \to 0$$

$$\forall n, p_n \in P[0,1], f(x) \in C[0,1] - \text{не является полиномом}$$

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = e^x, \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)(0)}}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Замыкание $P[0,1]$ это $L_2[0,1]$

$$\|p_n - f\|_{L_2} \leq \max_{x\in[0,1]} \max_{c\in[0,1]} \left|\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \overset{\substack{x=1\\c=1}}{=} \frac{e}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad e^x \notin P[0,1]$$

$$L_2(x) : \{f : X \to Y, \int_x |f|^2 dx < \infty\}$$

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_x |f|^2 dx}$$

Нуль: $f : X \to Y$

$$0(x) : X \to Y$$

$$g = 0(x) = 0 - \text{почти всюду}$$

$$g = \begin{cases} 0, \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ \infty, \mathbb{Q} \end{cases}$$

Элементы (вектора) пространства L_2 - функции класса L_2 .

Определение 16. *Последовательность* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in L$ *(линейно нормированное пространство) называется фундаментальной, если* $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$

Определение 17. *Если любая фундаментальная последовательность является сходящейся в L, то L - полное пространство.*

Определение 18. *Полное нормированное пространство - банахово пространство*

4. Линейные пространства с скалярным произведением

Определение 19. *Скалярное произведение в L (,) :* $L \times L \to \mathbb{C}$. $\forall x_1, x_2, y \in L, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ *выполняется:*
1) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$
2) $(x, y) = (\overline{y, x})$
3) $(x, x) \geq 0 \quad и \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Линейное пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$ - евклидовы пространства, над $\mathbb{C}$ - унитарное пространства.

$$1)\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) : (x, y) = \sum^n x_i \overline{y}_i$$

$$2)l_2 : (x, y) = \sum^\infty x_i \overline{y}_i$$

$$3)L_2(x) : (f, g) = \int_x f \overline{g} dx$$

$$4)C[a, b] : \text{ нет скалярного произведения согласованного с аксиомами нормы}$$

Лемма 1. *Величина $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ удовлетворяет свойствам нормы. Согласованная или порожденная скалярным произведением.*

Определение 20. *Гильбертово пространство - пространство со скалярным произведением, полное относительно нормы, порожденным этим скалярным произведением.*

Лемма 2 (Неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x \in L \quad |(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$

Доказательство.

$$\alpha = \frac{(x,y)}{|(x,y)|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq \|\overline{\alpha}x + ty\|^2 = (\overline{\alpha}x + ty, \overline{\alpha}x + ty) = \overline{\alpha}(x, \overline{\alpha}x_t y) + t(y, \overline{\alpha}x + ty) =$$

$$\underbrace{|\alpha|^2}_{=1}(x,x) + \overline{\alpha}t(x,y) + \alpha t(y,x) + t^2(y,y) = \|x\|^2 + \overline{\alpha}t(x,y) + \alpha t(y,x) + t^2\|y\|^2 \boxed{=}$$

$$\overline{\alpha}t(x,y) + \alpha t(y,x) = t\left(\frac{(\overline{x,y})(x,y)}{|(x,y)|} + \frac{(x,y)(x,y)}{|(x,y)|}\right) = 2t|(x,y)|$$

$$\boxed{=} \|x\|^2 + 2t|(x,y)| + t^2\|y\|^2$$

$$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

■

Доказательство Леммы 1. 1) Из 3 аксиомы скалярного произведения;
2) $\alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha x\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 = (1)$

$$(\alpha x, \alpha x) = \alpha(x, \alpha x) = \alpha\overline{\alpha}(x,x) = (1)$$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| \, \|y\|$

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x+y) + (y, x+y) = (\overline{x+y, x}) + (\overline{x+y, y}) = (\overline{x,x}) + (\overline{y,x}) + (\overline{x,y}) + (\overline{y,y}) =$$

$$= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \leq$$

$$\overset{\text{нер-во К-Б}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

■

$$L_2 : \sqrt{\int_x |f(x)|^2 dx} = \|f\|_{L_2}$$

$$\left|\int_x f(x)\overline{g}(x)dx\right| \leq \left(\int_x |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} - \text{ неравенство К-Б в } L_2$$

$$\sqrt[p]{\int_x |f(p)|dx} = \|f\|_{L_p}$$

Лемма 3. $\forall p \geq 1$ *линейно нормированное пространство* L_p *является полным.*

Лемма 4. $\forall p \geq 1$ *пространство* C^∞ *плотно в* $L_p(x)$*, то есть* $\overline{C}^{\infty^{L_p}} = L_p(x)$

Лемма 5. $\forall p \geq 1$ *пространство* L_p *сепарабельно.*

Лемма 6. *Пусть* L *- линейно нормированное пространство со скалярным произведением и норма порождена скалярным произведением...*

$$\forall x, y \in L \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \textit{равенство паралеллограма}$$

Наоборот, если в линейно нормированном пространстве L выполняется равенство паралеллограма, то в этом пространстве можно ввести скалярное произведение, согласованной с этой нормой.

$L_1 \subset [a, b] \exists f, g$, для которых не выполняется равенство паралеллограма $\Rightarrow$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

Лемма 7. *В линейном пространстве со скалярным произведением* L *, скалярное произведение непрерывно по первому аргументу относительно сходимости по норме порожденной скалярным произведением*

$$x_n \to t \quad \|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\forall y, (x_n, y) \to (x, y)$$

Доказательство.

$$|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \overset{\text{по К.Б}}{\leq} \|x_n - x\| \underbrace{\|y\|}_{\text{огр.числено}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

∎

5. Ортогональность векторов

Определение 21. *L - пространство со скалярным произведением, $x, y \in L$ называется ортогональным, если $(x, y) = 0$*

Определение 22. *Набор векторов $x, \dots, x_n, \dots, \in L$ называется ортогональным, если $\forall ij : x_i \perp x_j$*

Определение 23. *Набор ортогональный (x_n) называется ортнармированным, если $\forall i : \|x\| = 1$*

Ортогонализация Грамма-Шмидта

Если $x_1, \dots, x_n$ - счетная система линейно назависимый в L , тогда новые последовательности:

$$y_1 = x_1 \quad z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, z_1)z_1 \quad z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n, z_k)z_k \quad z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$$

Обладает свойствами:

1) Система $z_1, \dots, z_n$ - ортонормированна

2) $\forall n \in N \underbrace{< z_1, \dots, z_n > = < x_1, \dots, x_n >}_{\text{линейные оболочки}}$