Свойства обратного оператора:

1. $dom(A^{-1}) = imA$
2. A - линейный и обратимый, то A^{-1} линейный
3. $\begin{matrix} A : H \to H_1 \\ B : H_1 \to H_2 \end{matrix} \leftarrow$ линейно обратимые операторы

Тогда $BA : H \to H_2$ обратим и $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

Доказательство.

1) BA - линейный
Проверим $(BA)x = z$ - имеет не более одного решения $x \in H$, $\forall z \int H_2$
$B(Ax) = z$ $\forall z$ имеет не более одного решения $y = B^{-1}z$ (так как B- обратим)

2) $Ax = B^{-1}z$ имеет не более одного решения $x = A^{-1}(B^{-1}z)$ (так как A - обратим)

$$x = (A^{-1}B^{-1})z$$
$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

$\#$

4. Линейные операторы:

$$A : H \to H_1 \quad B : H_1 \to H$$

$$AB = I_{\text{н}} \quad BA = I_{\text{н}}$$

Тогда оператор A обратим и $A^{-1} = B$

Доказательство.

Пусть A не обратим

$$\exists x_1, x_2 \in H (x_1 \neq x_2) : \quad \begin{matrix} Ax_1 = y \\ Ax_2 = y \end{matrix}$$

$$B(Ax_1) = By = B(Ax_2) \text{ , где } BA = I_{\text{н}} \Rightarrow I_{\text{н}}x_1 = x_1 = By = I_{\text{н}}x_2 = x_2$$

Получил, что $x_1 = x_2$ - противоречие $\Rightarrow A$ - обратим

$$AB = I_{\text{н}_1} \Rightarrow A(By) = y$$
$$By = A^{-1}y \Rightarrow B = A^{-1}$$

$\#$

Теорема 1 (Теорема Неймана). *H - гильбертово пространство, $A : H \to H$ - линейно ограниченный оператор, причем $\|A\| < 1$, $dom(A) = H$.*

Тогда:

$$(I - A) \text{ - } \textit{обратим}$$

$$(I-A)^{-1} \text{ - ограничен}$$

$$dom(I-A)^{-1} = H$$

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \text{ , где } A^0 = I,\ A^{n+1} = AA^n\ \forall n \geq 0$$

Доказательство.

$$\|A^n\| = \left\|AA^{n-1}\right\| \leq \|A\| \left\|A^{n-1}\right\| \leq ... \leq \|A\|^n \underbrace{\|I\|}_{=1} = \|A\|^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Тогда:
1) $A^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$
2) $\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < \infty$, где $\|A\| < 1$
По свойству операторных рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n \text{ - сходится}$$

$$(I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = I - A^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} I$$

$$\left.\begin{array}{l} (I-A)\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n = I \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(I-A) = I \end{array}\right. \leftarrow \text{ по свойству обратимости операторов}$$

$$(I-A) \text{ обратим и } (I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Ограниченность $(I-A)^{-1}$

$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ - ограничен по теореме о полноте пространства операторов или можно убедиться следующим образом: $\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}$ - конечные числа.

$$dom(I-A)^{-1} = dom\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right) = H$$

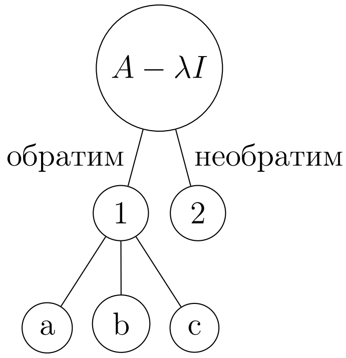
#

Теорема 2 (Теорема Банаха)**.** *Если $B : H \to H_1$ - линейный ограниченный обратимый и $domB^{-1} = H_1$, то B^{-1} - ограничен.*

1. Спектр оператора

$A : H \to H$ - линейный оператор, где H - гильбертово пространство над $\mathbb{C}$

Тут красивейшая схема можно использовать:



1) $dom(A - \lambda I)^{-1} =?$

1a) $dom(A - \lambda I)^{-1}$ плотно в H, $dom(A - \lambda I)^{-1} \neq H$

Замыкание: $\overline{dom(A - \lambda I)^{-1}} = H$

$$\lambda \in \sigma_C(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \overline{dom(A - \lambda I)^{-1}} = H\}$$

2b) $dom(A - \lambda I)^{-1} = H$

$\rho(A)$ - резольвентное множество (совокупность всех регулярных значений)

$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ резольвентный оператор.

Уравнение $(A - \lambda I)x = y \Leftrightarrow x = (A - \lambda I)^{-1} y = R_\lambda y$ по теореме Банаха R_λ - ограниченный оператор.

3c) $dom(A - \lambda I)^{-1}$ не плотно в H , $\lambda \in \sigma_r(A)$ - остаточный спектр (r - residual)

2) $(A - \lambda I)x = y$

$$\exists y \in H,\ x_1, x_2 \in H,\ x_1 \neq x_2$$

$$Ax_1 - \lambda x_1 = y = Ax_2 - \lambda x_2 \Leftrightarrow \exists x \in H\ x \neq 0 Ax = \lambda x$$

, где λ - собственное число, x - вектор

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | (A - \lambda I) \text{ необратим } \}$$

Дискретный точечный спектр.

$$(A - \lambda I)x = y,\ \exists y \in H,\ x_1, x_2 \in H\ (x_1 \neq x_2)$$

$$Ax_1 - \lambda x_1 = y = Ax_2 = \lambda x_2$$

Возьмем $x = x_1 = x_2$:

$$(A - \lambda I)(x_1 - x_2) = 0$$

$$Ax = \lambda x \text{ , то } : \exists x \in H\ x \neq\ \ Ax = \lambda x, \text{ верно}$$

Обратно:

$$Ax - \lambda x = 0 \quad y = 0$$

$$A0 - \lambda 0 = 0$$

$\exists$ 2 решения $x \neq 0, \ x = 0$

Определение 1. *Спектр* $A : \sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$
1) $\sigma(A) = \sigma_c(A) \cup \sigma_\rho(A) \cup \sigma_r(A)$
2) $\sigma_\rho \cap \sigma_c = \sigma_c \cap \sigma_r = \sigma_r \cap \sigma_\rho = \phi$
3) конечномерный случай $\Rightarrow \sigma_r = \sigma_c = \phi$

Свойства спектра:
1) $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} | \, |\lambda| \leq |A|\}$

Доказательство.

Докажем, что если $|\lambda| > \|A\|$, то λ - регулярное значение, то есть $\lambda \in \theta(A)$

$$(A - \lambda I)^{-1} = \left(-\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)\right)^{-1} = \Bigg[\underbrace{(-\lambda I)}_{\text{обратим и } dom(...)^{-1} = H} \underbrace{\left(I - \overbrace{\frac{1}{\lambda}A}^{\|...\| < 1}\right)}_{\text{обратим и } dom(...)^{-1} = H} \Bigg]^{-1} =$$

$$= \underbrace{\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}\left(-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}}_{dom(...) = H} \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$$

#

2) $\sigma(A)$ - замкнутое множество ($\rho(A)$ - открытое множество)

Доказательство.
Докажем, что $\rho(A)$ - открытое. Фиксируем $\lambda_0 \in \rho(A)$, открытое: $\exists \varepsilon \ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$

$$(A - \lambda I)^{-1} \overset{\pm \lambda_0 I}{=} (((A - \lambda_0 I))ubr - (\lambda - \lambda_0)I)^{-1} = [\underbrace{(A - \lambda_0 I)}_{(1)} \underbrace{(I - (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1})}_{(2)}]^{-1}$$

(1): обратим $dom(...) = H$, так как $\lambda_0 \in \rho(A)$
(2): обратим и $dom(...)^{-1} = H$ по теореме Неймана

$$\left\|(\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}\right\| < 1 \text{ если } |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

, где $\varepsilon = \dfrac{1}{\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|}$

#