1. Виды калибровок потенциалов

1. $\varphi^{\text{н}} = 0 \Rightarrow f(\vec{r}, t) = -c \int_{-\infty}^{t} \varphi(\vec{r}, t')dt'$

$$\vec{A}^{\text{н}} = \vec{A} - \nabla f(\vec{r}, t), \quad \varphi^{\text{н}} = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \text{rot}\vec{A}^{\text{н}}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}^{\text{н}}}{\partial t} - \nabla\varphi^{\text{н}}$$

2. Кулоновская калибровка: $\text{div}\vec{A}^{\text{н}} = 0 \Rightarrow \text{div}\vec{A}^{\text{н}} = \text{div}\vec{A} - \text{div}\nabla f = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta f(\vec{r}, t) = \text{div}\vec{A} \text{ - уравнение Пуассона}$$

, с граничными условиями $f(\vec{r}, t) \xrightarrow{r\to\infty} 0$

3. Калибровка Лоренца: $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \varphi^{\text{н}}}{\partial t} + \text{div}\vec{A}^{\text{н}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \text{div}(\vec{A} - \nabla f) = 0 \Rightarrow \underbrace{\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}_{\text{волновое уравнение}} = \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div}\vec{A}}_{(*)}$$

, где $(*)$: с источником и граничными условиями $f(\vec{r}, t) \xrightarrow{r\to\infty} 0$

Уравнения на потенциалы (произвольные)

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \text{div}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \frac{4\pi}{c}(\rho c)$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}j^0}$$

$$\text{rot}\vec{B} = \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \nabla(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\nabla\varphi\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} + \nabla\left(\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ -\frac{\partial}{\partial x^1} \\ -\frac{\partial}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} = \partial_i\partial^i$$

- четырех скалярный оператор.

$$\partial_i\partial^i \underbrace{\begin{pmatrix}\varphi\\A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}}_{A^k} - \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^0}\\-\frac{\partial}{\partial x^1}\\-\frac{\partial}{\partial x^2}\\-\frac{\partial}{\partial x^3}\end{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\begin{pmatrix}\varphi\\A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\begin{pmatrix}j_0\\j_x\\j_y\\j_z\end{pmatrix}}_{j^k}$$

$$\partial_i\partial^i A^k - \partial^k\partial_i A^i = \frac{4\pi}{c}j^k \Rightarrow \partial_i\underbrace{\left(\partial^i A^k - \partial^k A^i\right)}_{F^{ik}} = \frac{4\pi}{c}j^k \Rightarrow \partial_i F^{ik} = \frac{4\pi}{c}j^k \qquad (*)$$

Четырех вектор потенциала A^i

В Лоренцевской калибровке $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\varphi^{\text{н}}}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A}^{\text{н}} = 0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\begin{pmatrix}\varphi^{\text{н}}\\A_x^{\text{н}}\\A_y^{\text{н}}\\A_z^{\text{н}}\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \partial_i A^{\text{н}\,i} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ четырех вектор потенциала $= (\varphi, \vec{A})$, где φ и $\vec{A}$ удовлетворяют Лоренцевской калибровке. В этом случае уравнение $(*)$ упрощается: $\partial_i\partial^i A^k = \dfrac{4\pi}{c}j^k \oplus \partial_i A^i = 0$

2. Уравнения Максвелла в ковариантном виде

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\rho c = \frac{4\pi}{c}j^0$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\begin{pmatrix}0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & -B_z & B_y\\ E_y & B_z & 0 & -B_x\\ E_z & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix} \leftarrow$$

$$\|$$

$$\frac{4\pi}{c}(j^0, j^1, j^2, j^3)$$

$$\frac{\partial 0}{\partial x^0} + \frac{\partial E_x}{\partial x^1} + \frac{\partial E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial E_z}{\partial x^3} = \frac{4\pi}{c}j^0$$

$$\frac{\partial(-E_x)}{\partial x^0}\frac{\partial 0}{\partial x^2} + \frac{\partial B_z}{\partial x^2} - \frac{\partial B_y}{\partial x^3} = \frac{4\pi}{c}j^1$$

$$\frac{\partial(-E_y)}{\partial x^0} + \frac{\partial(-B_z)}{\partial x^1} + \frac{\partial 0}{\partial x^2} + \frac{\partial B_x}{\partial x^3} = \frac{4\pi}{c}j^2$$

$$\frac{\partial(-E_z)}{\partial x^0} + \frac{\partial B_y}{\partial x^1} + \frac{\partial(-B_x)}{\partial x^2} + \frac{\partial 0}{\partial x^3} = \frac{4\pi}{c}j^3$$

Получаем: $\boxed{\partial_i F^{ik} = \dfrac{4\pi}{c}j^k}$ - два уравнения уравнения Максвелла с источниками.

Почему F^{ik} - тензор второго ранга:
1) Состоит из 16 величин;
2) При свертке с компонентами четырех вектора образуется четырех вектор.

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \quad \mathrm{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad \mathrm{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Замена $\vec{E} \to \vec{B}$, а $\vec{B} \to -\vec{E}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{F}^{ik}} = (0,0,0,0)$$

$$\tilde{F}^{ik} = \frac{e^{iklm}F_{lm}}{2!} \quad \boxed{\partial_i \tilde{F}^{ik} = 0}$$ - вторая пара уравнений Максвелла

$\forall$ антисимметричный тензор второго ранга содержит только 6 независимых величин и хорошо подходит для описания компонент $\vec{E}$ и $\vec{B}$

$$F^{ik} = \partial^i A^k - \partial^k A^i$$

Преобразование $\vec{E}$ и $\vec{B}$ из K в K' (ИСО) $\vec{v} \parallel 0_x$

1 способ: $F^{ik} = L^i_{\cdot m} L^k_{\cdot n}$ в матричной записи:

$$\acute{F}^{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (F^{mn}) \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 способ: $\acute{F}^{k3} = \left[\acute{a}^k \acute{b}^3 = L^k_{\cdot n} a^n b^3\right] = L^k_{\cdot n} F^{n3}$

$$\acute{F}^{k3} = \begin{pmatrix} -E'_z \\ B'_y \\ -B'_x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_z \\ B_y \\ -B_x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) \\ B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \\ B'_x = B_x \end{cases}$$

$$\acute{F}^{k2} = \begin{pmatrix} -E'_y \\ B'_z \\ 0 \\ B'_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_y \\ B_z \\ 0 \\ B_x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \\ B'_x = B_x \end{cases}$$

Вывод: продольные компоненты $E'_\parallel = E_\parallel,\ B'_\parallel = B_\parallel$,

а поперечные компоненты $\vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + [\vec{\beta} \times \vec{B}]),\ \vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - [\vec{\beta} \times \vec{E}])$

Инварианты Пуанкаре:

1. $F_{ik}F^{ik}$ = четырех скаляр $-inv = -2E^2 + 2B^2 = 2(B^2 - E^2) = inv$

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

2. $F_{ik}\tilde{F}^{ik} = -(\vec{E}, \vec{B}) - (\vec{E}, \vec{B}) - 2(\vec{E}, \vec{B}) = -4(\vec{E}, \vec{B}) = inv$