

$$= 2n\alpha y_1^{2n-1}y_2 + \underbrace{\alpha 2n\alpha y_1^{2n+2}}_{(*)} + \underbrace{\alpha 2mb y_2^{2m+2}}_{(*)} - 2mb y_1 y_2^{2m-1}$$

, где  $(*) :$   
 $> 0, \alpha > 0$   
 $< 0, \alpha < 0$

Занулим член с без явного знака:  
 $m = n = 1$   
 $a = b = 1$

$$\Rightarrow V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$$

$$(\nabla V, f) = 2\alpha y_1^4 + 2\alpha y_2^4$$

Рассмотрим случаи:

- $\alpha > 0 \Rightarrow$  по Теореме 3 нулевое решение не устойчиво.
- $\alpha < 0 \Rightarrow$  по Теореме 2 нулевое решение асимптотически устойчиво.
- $\alpha = 0 \Rightarrow$  по Теореме 1 нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

$$\alpha = 0 : \begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = y_2 \end{cases} \quad A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2} = \pm i$$

## 1. Функция Ляпунова для линейных систем. Матричное уравнение Ляпунова

$$\frac{d}{dt} \vec{y} = A \vec{y} \tag{1}$$

, где  $A - (n \times n)$  постоянная.  $\vec{y}^*(t) = 0$  - решение.

**Матричное уравнение Ляпунова:**

$$HA + A^*H = -C \tag{2}$$

, где  $A, H, C$  - матрицы  $(n \times n)$  постоянные.

Дано:  $A, C$

Найти:  $H$  - ?

Пример:  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H - ?$

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -h_{11} & h_{11} - h_{12} \\ -h_{21} & h_{21} - h_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2h_{11} & h_{11} - 2h_{12} \\ h_{11} - 2h_{21} & h_{12} - 2h_{22} + h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$h_{11} = 2h_{12} = 2h_{21}$$

$$h_{11} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_{12} = h_{21} = \frac{1}{4}$$

$$2h_{22} = h_{12} + h_{21} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$h_{22} = \frac{3}{4}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

**Теорема 1.** Пусть дано  $C = C^* > 0$ , то есть  $\forall \vec{v} \neq 0 : (C\vec{v}, \vec{v}) > 0$ . Пусть  $\exists H : H = H^* > 0$  - решение матрицы уравнения Ляпунова (2). Тогда: нулевое решение  $y^*(t) = 0$  системы (1) асимптотически устойчиво.

*Доказательство.*

Рассмотрим функцию  $V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y}) \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^2$

1)  $V(\vec{y}) \in C^*(\mathbb{R}^n)$

$$V(\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} y_i y_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$$

2)  $V(\vec{0}) = (H\vec{0}, \vec{0}) = 0$

$V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y}) > 0$  при  $\vec{y} \neq \vec{0}$  так как  $H = H^* > 0$

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y} \quad A - \text{постоянная} \quad (1)$$

$$HA + A^*H = -C - \text{матричное уравнение Ляпунова} \quad (2)$$

3) Проверим, что  $(\nabla V(\vec{y}), A\vec{y}) < 0$  при  $\vec{y} \neq \vec{0}$

Пусть  $\vec{y}(t)$  - решение задачи Коши: 
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y} \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Возьмем  $V(\vec{y}(t))$ :

$$\frac{d}{dt}V(\vec{y}(t)) = \frac{d}{dt}V(y_1(t), \dots, y_n(t)) = \frac{\partial}{\partial y_1}V(y_1, \dots, y_n)\frac{dy_1}{dt} + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n}V(y_1, \dots, y_n)\frac{dy_n}{dt} = (\nabla V, A\vec{y})$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\vec{y}(t)) &= \frac{d}{dt}(H\vec{y}(t), \vec{y}(t)) = \left(H \frac{d}{dt}\vec{y}(t), \vec{y}(t)\right) + \left(H\vec{y}(t), \frac{d}{dt}\vec{y}(t)\right) = (HA\vec{y}, \vec{y}) + (H\vec{y}, A\vec{y}) = \\ &= (HA\vec{y}, \vec{y}) + (A^*H\vec{y}, \vec{y}) = \underbrace{((HA + A^*H)\vec{y}, \vec{y})}_{=-C} = -(C\vec{y}, \vec{y}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\nabla V, A\vec{y}(t)) = -(C\vec{y}(t), \vec{y}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}^2$$

$$t = 0 : (\nabla V, A\vec{y}_0) = -(C\vec{y}_0, \vec{y}_0), \forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \vec{y}_0 \neq \vec{0}$$

Так как  $C = C^* > 0$ , то  $(\nabla V(\vec{y}_0), \vec{f}(\vec{y}_0)) < 0$  при  $\vec{y}_0 \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0$  - асимптотически устойчиво.

#

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$  - собственные значения матрицы  $A$ . Пусть  $\forall \lambda_j(A) \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$ . Тогда:

- 1)  $\forall$  матрицы  $C \in \mathbb{R}^n$  - решение матр. уравнения (2)
- 2) если  $C = C^*$ , то  $H = H^*$
- 3) если  $C = C^*$ , то  $H = H^* > 0$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e^{tA^*} \cdot | HA + A^*H = -C | \cdot e^{tA} \\ e^{tA^*} H \underbrace{Ae^{tA}}_{\frac{d}{dt}e^{tA}} + e^{tA^*} \underbrace{A^*}_{=\frac{d}{dt}e^{tA^*}} H e^{tA} = -e^{tA^*} C e^{tA} \\ \frac{d}{dt}(e^{tA^*} H e^{tA}) = -e^{tA^*} C e^{tA} \mid \cdot \int_0^s, s > 0 \\ \int_0^s \frac{d}{dt}(e^{tA^*} H e^{tA}) dt = - \int_0^s e^{tA^*} C e^{tA} dt \\ e^{sA^*} H e^{sA} - H = \int_0^s e^{tA^*} C e^{tA} dt \\ A = TIT^{-1} \\ e^{tA} = T e^{tI} T^{-1} \\ e^{tI} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ \vdots & \ddots & \frac{t^k e^{\lambda_i t}}{k!} \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

При  $s \rightarrow +\infty$ :

$$H = \int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA} dt - \text{интеграл Ляпунова} \quad (3)$$

2) Пусть  $C = C^*$ :

$$H^* = \left( \int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA} dt \right)^* = \int_0^\infty \underbrace{(e^{tA})^*}_{e^{tA^*}} \underbrace{C^*}_C \underbrace{(e^{tA^*})^*}_{e^{tA}} dt = H$$

3) Пусть  $C = C^* > 0$ , то есть  $\forall \vec{v} \neq \vec{0} : (C\vec{v}, \vec{v}) > 0$ :

$$\begin{aligned} (H\vec{v}, \vec{v}) &= \left( \int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA} dt \vec{v}, \vec{v} \right) = \left( \int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA} \vec{v} dt, \vec{v} \right) = \int_0^\infty (e^{tA^*} C e^{tA} \vec{v}, \vec{v}) = \\ &= \int_0^\infty (C \underbrace{e^{tA} \vec{v}}_{w(t) \neq 0}, \underbrace{e^{tA} \vec{v}}_{w(t) \neq 0}) dt > 0 \end{aligned}$$

#

**Теорема 3.** Следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\vec{y}^*(t) = 0$  - решение системы (1)  $\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y}$  асимптотически устойчиво;
- 2)  $\forall \lambda_j(A) \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$ ;
- 3)  $\forall$  матрицы  $C = C^* > 0 \exists! H = H^* > 0$  - решение матричного уравнения (2)  $HA + A^*H = -C$

1)  $\Leftrightarrow$  2) - было

2)  $\Rightarrow$  3) - следует из Теоремы 2

3)  $\Rightarrow$  1) - следует из Теоремы 1

## 2. Исследование решений на устойчивость по первому приближению

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y})$$

, где  $\vec{f} \in C^1(\mathbb{D})$ ,  $\vec{y}^*(t) = 0$  - решение  $\Rightarrow \vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{0}) + \underbrace{\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(0)}_{(*)}\vec{y} + o(\|\vec{y}\|)$$

, где  $(*)$  - матрица  $n \times n = A$

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y} + o(\|\vec{y}\|)$$

**Теорема 4** (Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению).

- 1) Если  $\forall \lambda_j(A) : \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0 \Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0$  асимптотически устойчиво.
- 2)  $\exists \lambda_k(A) : \operatorname{Re} \lambda_k > 0 \Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0$  - неустойчиво.