Свойство: ПМВ как и любая плоская волна имеет две степени свободы, то е сть обладает поляризацией.

Пример: ПМВ, бегущая по z, $\vec{E}(z,t) = (c_1\vec{e_x} + c_2\vec{e_y})e^{ikz-i\omega t}(*)$, где $c_1, c_2$ - произвольные комплексные числа.

**Определение 1.** *Плоская волна, у которой вектор $\vec{E}$ при $\forall t$ во всем пространстве лежит в одной плоскости - плоскополяризованная (линейно поляризованная) волна.*

Выражение $(*)$ - представляет собой сумму двух плоскополяризованных волн с поляризациями вдоль x и y. $\forall$ плоскую волну можно разложить на две плоскополяризованные.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть $c_1 = |c_1|e^{i\varphi}, c_2 = |c_2|e^{i\psi}$

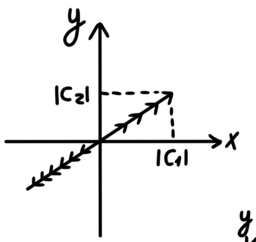
Реальное поле естть вещеестенная часть $(*)$

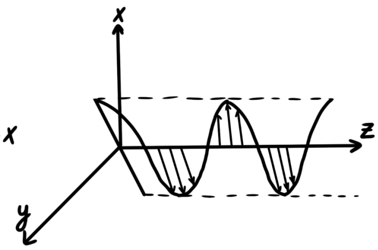
$$\mathrm{Re}(\vec{E}(z,t)) = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e_y}\cos(kz - \omega t + \psi)$$

1) Пусть $\psi = \varphi + 2\pi m, m$ - целое.

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e_y}\cos(kz - \omega t + \varphi + 2\pi m) =$$

$$= (|c_1|\vec{e_x} + |c_2\vec{e_y})\cos(kz - \omega t + \varphi) \quad t = \mathrm{const}$$



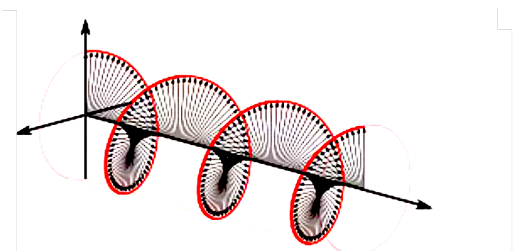

2) $\psi = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$

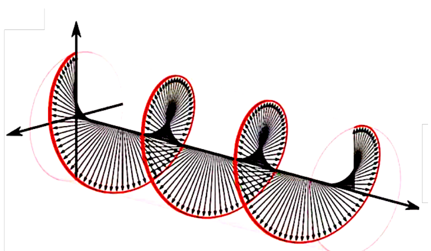
$$\cos\Big(kz - \omega t\varphi + \frac{\pi}{2}\Big) = \cos(kz - \omega t\varphi)\cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}} - \sin(kz - \omega t\varphi)\cancelto{1}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathrm{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz - \omega t + \varphi) - |c_2|\vec{e_y}\sin(kz - \omega t + \varphi)$$

3) $\psi = \varphi - \dfrac{\pi}{2}$

$$\mathrm{Re}\vec{E} = |c_1|\vec{e_x}\cos(kz - \omega t + \varphi) + |c_2|\vec{e_y}\sin(kz - \omega t + \varphi)$$





Слева у нас левополяризованная эллиптическая волна, справа правополяризованная эллиптическая волна.

В случае произвольных $c_1, c_2$ эллипс повернут на некоторый угол относительно оси x (задача на семинаре).

## 1. Средняя по времени плотность потока энергии в ПМВ

$$\vec{E_0} = c_1\vec{e_x} + c_2\vec{e_y}$$

$$< \vec{S} >= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon < \vec{E} >}{4\pi} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon}{4\pi}(< E_x > + < E_y >) - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon}{4\pi}(\frac{|c_1|^2}{2} + \frac{|c_2|^2}{2}) =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{n}\frac{\varepsilon}{8\pi}(\vec{E_0}, \vec{E_0^*})$$

## 2. Фурье-преобразование электромагнитных полей

Для периодической функции ($f(t) = f(t+T), T$ - период, можно использовать следующее представление:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 nt}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, f_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T f(t)e^{+i\omega_0 nt}dt$$

Для непериодических функций Фурье представление в виде интеграла:

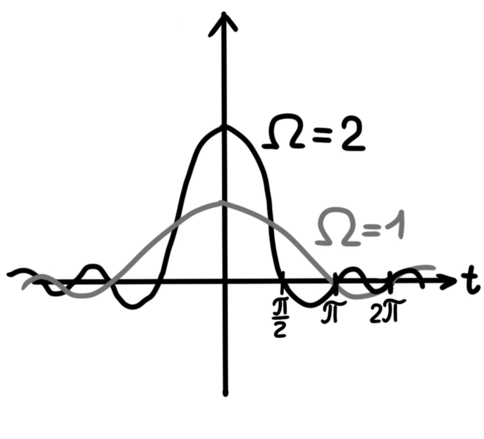
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}e^{-i\omega t}d\omega, \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{+i\omega t}dt$$

Для периодической функции: $\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\delta(\omega - n\omega_0)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}dk, \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

Напоминание про свойства $\delta$ - функции

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}d\omega = \lim_{\Omega\to\infty}\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i\omega t}d\omega = \lim \frac{-e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}}{it2\Omega}2\Omega = \lim_{\Omega\to\infty} 2\Omega \cdot \operatorname{sinc}(\Omega t)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} I(t)dt = \lim \int_{-\infty}^{\infty} 2\Omega \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} dt = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2\cdot \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx\right]$$

$$\int_C \frac{e^{ix}}{x} dx = 0 = \underbrace{\int_{|z|=R}}_{=0(\text{по лемме Жордана})} + \int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{|z|=\rho} + \int_{\rho}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = -\int_{|z|=\rho} \frac{\overbrace{e^{i\rho e^{i\varphi}}}^{\to 1} \cdot \rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = -i\int_{\pi}^{0} d\varphi = i\pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} I(t)dt = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = 2\pi\delta(t-\tau) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega = 2\pi\delta(\omega-\omega')$$

1)

$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+i\omega t}}_{\delta(t-\tau)(\text{Фурье образ})} e^{-i\omega t} d\omega$$

2)

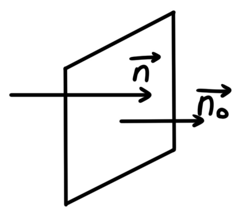
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)d\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) e^{i\omega\tau}$$

3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2^*(\omega') d\omega' \frac{1}{2\pi} 2\pi\delta(\omega-\omega') f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2^*(\omega) d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega - \text{ равенство Парсеваля}$$



Прошедшая энергия за $\infty$ интервал времени через 1 см$^2$

$$= \int (\vec{S}\vec{n})dt = \frac{c(\vec{n},\vec{n_0})}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}^2(t)dt = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}(\vec{n}\vec{n_0})\frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\vec{E}}(\omega)|^2 d\omega$$

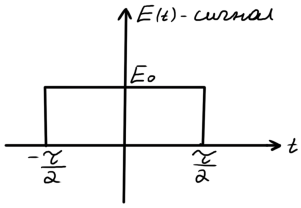
Свойства Фурье-преобразования:

1) Пусть $f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = f^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^* e^{+i\omega t}d\omega = [\omega \to -\omega'] =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^*(-\omega')e^{-i\omega' t}d\omega' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^*(\omega')e^{-i\omega' t}d\omega' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

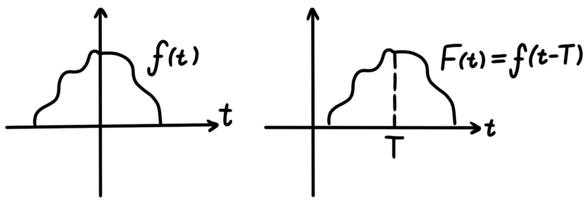
$$\hat{f}^*(-\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\hat{f}^*(\omega) = \hat{f}(-\omega)$$




Граница это - $\hat{f}(\omega)$, а внутри - $\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}$

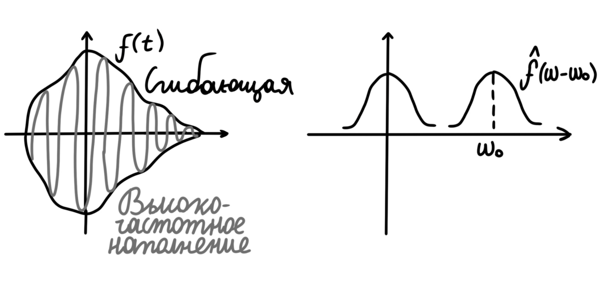
2) Спектр сдвинутого по времени сигнала:




$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-T)e^{+i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t')e^{+i\omega t'}e^{i\omega T}dt' = \hat{f}(\omega)e^{i\omega T}$$

3)

$$F(t) = f(t)e^{-i\omega_0 t} \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega_0 t}e^{i\omega t}dt = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

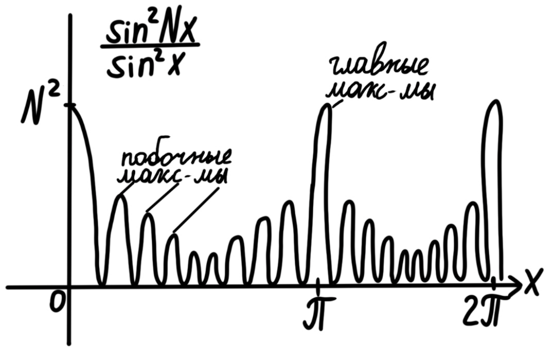


Как мы можем увидеть модулированная функция сдвигает спектр.

4) Спектр N повторенного сигнала:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t-nT); \quad F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(\omega) e^{i\omega nT} = f(\omega)\frac{e^{i\omega NT}-1}{e^{i\omega T}-1} = \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{i\omega T \frac{N-1}{2}} \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}N\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}}$$

Последний выделенный множитель в правой части уравнения - это интерференционный множитель.




$$x = m\pi\varepsilon, \varepsilon > 0, \varepsilon \text{ - малое}$$

$$\frac{\sin^2(N(m\pi+\varepsilon))}{\sin^2(m\pi+\varepsilon)} = \frac{\sin^2(Nm\pi+N\varepsilon)}{(-1)^{2m}\sin^2\varepsilon} = \frac{(-1)^{2Nm}\sin^2(N\varepsilon)}{\sin^2\varepsilon} = \frac{N^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = N^2$$