1. Интегральный оператор Гильберта-Шмидта

Теорема 1 (теорема о компактности оператора Гильберта-Шмидта). *Интегральный оператор Гильберта-Шмидта A с ядром K является линейным, компактным, переводящим $L_2[a,b]$ в себя. При этом* $\|A\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \, dtds\right)^{\frac{1}{2}} = \|K\|_{L_2[a,b]\times L_2[a,b]}$

Теорема 2 (об операоторе, сопряженому оператору Гильберта-Шмидта). *Пусть A - оператор Гильберта-Шмидта с ядром $K(t,c)$. Тогда A^* - оператор Гильберта-Шмидта с ядром $K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}$*

Доказательство.

Пусть $(By)(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)} y(s) ds$

$$\left\|\overline{K(s,t)}\right\|^2 = \int_a^b \int_a^b \left|\overline{K(s,t)}\right| dxdt = \int_a^b \int_a^b |K(s,t)| \, dsdt = \|K\|^2 < \infty$$

$$\Rightarrow B \text{ - оператор Гильберта-Шмидта}$$

Нужно доказать, что: $B = A^*$

$$(Ax, y) = (x, By), \text{ с учетом Леммы } (x,y) = 0, \ \forall y, x = 0$$

$$(Ax,y) = \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right] \overline{y(t)} dt = \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s)\overline{y(t)}dt\right] x(s)ds = \begin{Bmatrix} s = \tau \\ t = \sigma \end{Bmatrix} =$$

$$= \int_a^b \overline{\overline{\left[\int_a^b K(\sigma,\tau)\overline{y(\sigma)}d\sigma\right]}} x(\tau)d\tau = \begin{Bmatrix} \tau = t \\ \sigma = s \end{Bmatrix} = \int_a^b \overline{\left[\int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)ds\right]} x(t)dt = (x, By) \Rightarrow A^* = B$$

#

2. Решение уравнений с вырожденным ядром

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) \text{ - уравнение Фредгольма 2-го порядка}$$

Пусть ядро имеет следующий вид:

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)Q_j(s) (\text{сумма конечна переменные раздельны})$$

$$\begin{matrix} P_j[a,b] \to \mathbb{C} \\ Q_j[a,b] \to \mathbb{C} \end{matrix} j = 1, \ldots, n \quad P_j, Q_j \in L_2[a,b]$$

Такое ядро называется **вырожденным**.
Можем считать, что $P_1(t), ..., P_n(t)$ - линейно независимые функции.

$$\hat{x}(t) = \int_a^b \left[\sum_{j=1}^n P_j(t)Q_j(t)\right] x(s)ds + f(t) = \sum_{j=1}^n P_j(t) \underbrace{\int_a^b Q_j(s)x(s)ds}_{q_j \text{ - число}} + f(t)$$

$$x(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^n P_j(t)q_j}_{\text{представим через неопределенные коэф-ты}} + f(t)$$

$$\sum_{j=1}^n P_j(t)q_j + F(t) = \int_a^b \left[\sum_{j=1}^n P_j(t)Q_j(t)\right] \left(\sum_{k=1}^n P_k(s)q_k + f(s)\right) ds + f(t)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j P_j(t) = \sum_{j=1}^n P_j(t) \left[\sum_{k=1}^n q_k \underbrace{\int_a^b Q_j(s)P_k(s)ds}_{a_{jk}} + \underbrace{\int_a^b Q_j(s)f(s)ds}_{b_j}\right]$$

Введем коэффициенты a_{jk} и b_j, которые вычисляются в задаче по P_j, Q_j и f, так как $P_j(t)$ - линейно независимые функции.

$q_i = \sum_{k=1}^n q_k a_{jk} + b_j, j = 1, ..., n$ - СЛАУ (система линейных алгебраических уравнений)

, для определения q_j через которые определяются решения $x(t)$

Теорема 3 (интегральное уравнение сводящиеся к решению алгебраического уравнения)**.** *Пусть A - оператор Гильберта-Шмидта с ядром $K(t, s)$, которое не является вырожденным*

$$K(t, s) = \sum_{n,m=1}^N a_{nm}x_n(t)\overline{x_m(s)}$$

Рассматривая $K_N(t, s) = \sum_{n,m=1}^N a_{nm}x_n(t)\overline{x_m(s)}$, можно решить уравнение указанным способом (решение уравнения с вырожденным ядром)

$$x_N(t) = \int_a^b K_N(t, s)x(s)ds + f(t)$$

, так как $K_N \xleftarrow{N\to\infty} K$, поэтому $x_N(t) \xrightarrow{N\to\infty} x(t)$

Это приближенный метод решения интегрального уравнения.

3. Альтернатива Фредгольма

Пусть H - гильбертово пространство, $A : H \to H$ - компактный оператор, A^* - сопряженный оператор.

Разрешимость неоднородного уравнения:

$$x - Ax = f \tag{н}$$

устанавливаются с помощью однородных уравнений:

$$x - Ax = 0 \tag{о}$$

и сопряженного однородного уравнения:

$$y - A^*y = 0 \tag{со}$$

следующей теоремой:

Теорема 4 (Альтернатива Фредгольма)**.**

1. Однородное уравнение (о) имеет только нулевое решение. Тогда сопряженное однородное (со) также имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (н) имеет ! решение $\forall f(t)$

2. Однородное уравнение (о) имеет n *линейно независимых решений* $x, \dots, x_n$*. При этом (со) имеет ровно* n *линейно независимых решений* $y_1, ..., y_n$*, а для разрешимости (н) необходимо и достаточно:* $(y_k, f)_н = 0, k = 1, \dots, n$

При выполнении $(y_n, f) = 0$ $\forall k$ *общее решение (н) имеет вид:*

$$x = x_0 + c_1x_1 + ... + c_nx_n$$

, где x_0 *- частное решение (н), а* $c_1, \dots, c_n$ *- произвольные числа.*

Замечание. Альтернатива Фредгольма (0): либо нулевое, либо конечное число решений;

1) Разрешимость пространства решений конечна и совпадает с размерностью пространства (со)

2) Оператор Гильберта-Шмидта компактен, поэтому альтернатива Фредгольма применяется для решения интегрального уравнения.

4. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений

Рассмотрим интегральное уравнений Фредгольма 2-го рода с параметром μ

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) \Leftrightarrow x = \underbrace{\mu A}_{\|\mu A\|<1} x + f$$

A - оператор Гильберта-Шмидта с ядром $K(t,s)$

Если $\mu = 0 : x(t) = f(t)$ решение $\exists!$

Рассмотрим малые μ. По Теореме Неймана сможем найти решения