Доказательство.

1) Дано: $\forall \lambda_j(A)\ Re\lambda_j(A) < 0$. Пусть $C = E$, $E = E^* > 0$. Тогда по Теореме 3 $\exists! H = H^* > 0$ - решение матричного уравнения $HA + A^*H = -E$.

Рассмотрим функцию $V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y})$. Покажем, что $V(\vec{y})$ - функция Ляпунова:

1. $V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y}) \in C^1(\|\vec{y}\| < r)$, где r - любое;
2. $V(\vec{0}) = (H\vec{0}, \vec{0}) = 0$, $V(\vec{y}) = (H\vec{y}, \vec{y}) > 0$ при $\vec{y} \neq \vec{0}$, так как $H = H^* > 0$
3. $(\nabla V\vec{y}, \vec{f}(\vec{y})) < 0$ - ?

Пусть $\vec{y}(t)$ - решение $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) = A\vec{y} + \vec{g}(\vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \neq \vec{0} \end{cases}$

, где $\vec{g}(\vec{y}) = o(\|\vec{y}\|)$

$$\frac{d}{dt}V(\vec{y}(t)) = \frac{d}{dt}V(y_1(t), ..., y_n(t)) = \frac{\partial V}{\partial y_1}(\vec{y}(t))\underbrace{\frac{dy_1(t)}{dt}}_{f_1(\vec{y}(t))} + ... + \frac{\partial V}{\partial y_n}(\vec{y}(t))\underbrace{\frac{dy_n(t)}{dt}}_{f_n(\vec{y}(t))} = (\nabla V(\vec{y}(t)), \vec{f}(\vec{y}(t)))$$

С другой стороны:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{y}(t)) = \frac{d}{dt}(H\vec{y}(t), \vec{y}(t)) = \left(H \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{y}}_{\vec{f}(\vec{y}(t))}(t), \vec{y}(t)\right) + \left(H\vec{y}(t), \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{y}(t)}_{\vec{f}(\vec{y}(t))}\right) =$$

$$= \left(H(A\vec{y}(t) + \vec{g}(\vec{y}(t))), \vec{y}(t)\right) + \left(H\vec{y}(t), A\vec{y}(t) + \vec{g}(\vec{y}(t))\right) =$$

$$= (HA\vec{y}(t), \vec{y}(t)) + (H\vec{g}(\vec{y}(t))) + (H\vec{y}(t), A\vec{y}(t)) + (H\vec{y}(t), \vec{g}(\vec{y}(t))) =$$

$$= \underbrace{(\underbrace{(HA + A^*H)}_{=-E}\vec{y}(t), \vec{y}(t))}_{(*)} + \underbrace{(H\vec{g}(\vec{y}(t)), \vec{y}(t))}_{\leq \|H\vec{g}(\vec{y}(t))\| \|\vec{y}(t)\|} + \underbrace{(H\vec{y}(t), \vec{g}(\vec{y}(t)))}_{\leq \|H\vec{y}(t)\| \|\vec{g}(\vec{y}(t))\|} \boxed{\leq}$$

, где $(*) = -(\vec{y}(t), \vec{y}(t)) = -y_1^2(t) - ... - y_n^2(t) = -\|\vec{y}(t)\|_2^2$. Тогда по неравенству Коши-Буняковского:

$$\boxed{\leq} -\|\vec{y}\|_2^2 + 2\|H\|_2 \|\vec{g}(\vec{y}(t))\|_2 \|\vec{y}(t)\|_2 = -\|\vec{y}(t)\|_2^2 \left(1 - 2\|H\|_2 \frac{\|\vec{g}(\vec{y}(t))\|_2}{\|\vec{y}(t)\|_2}\right)$$

, если $\vec{y}(t) \neq 0$

Если $\vec{y}_0 \neq \vec{0}$, то $\vec{y}(t) \neq 0\ \forall t \in (\alpha, \omega)$.

От противного: Если $\exists t_1 : \vec{y}(t_1) = \vec{0}$, то рассмотрим задачу Коши: $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \\ \vec{y}(t_1) = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow$

$\exists!$ решение $\vec{y}(t) = 0$

Противоречие с тем, что $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \neq 0$

Пусть $t = t_0 : \dfrac{d}{dt}V(\vec{y}(t))|_{t=t_0} = \nabla V(\vec{y}_0), \vec{f}(\vec{y}_0) \leq -\|y_0\|_2^2 \left(1 - 2\|H\|_2 \dfrac{\|\vec{g}(\vec{y}_0)\|_2}{\|\vec{y}_0\|_2}\right)$

Из условия (2) $\Rightarrow \lim\limits_{\|\vec{y}_0\|\to 0} \dfrac{\|\vec{g}(\vec{y}_0)\|}{\|\vec{y}_0\|} = 0$, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\,\|\vec{y}_0\| : \|\vec{y}_0\| < \delta \Rightarrow \dfrac{\|\vec{g}(\vec{y}_0)\|}{\|\vec{y}_0\|} < \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{1}{2\,\|H\|_2} \Rightarrow \exists\delta : \|\vec{y}_0\| < \delta \Rightarrow \dfrac{\|\vec{g}(\vec{y}_0)\|}{\|\vec{y}_0\|} < \varepsilon = \dfrac{1}{2\,\|H\|_2} \Rightarrow$

$(\nabla V(\vec{y}_0), \vec{f}(\vec{y}_0)) < 0,\ 0 \le \|\vec{y}_0\| < r = \delta$

По Теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости $\exists V(\vec{y}) \Rightarrow \vec{y}^*(t) = 0$ - асимптотически устойчиво.

2) Без доказательства.

$\#$

1. Устойчивость положений равновесия

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \tag{1}$$

, где $f_j \in C^1(\mathbb{D})$

Определение 1. *Положение равновесия - это решение $\vec{y}^* = \vec{c}$, $\vec{c}$ - постоянный вектор $\Rightarrow \vec{f}(\vec{c}) = \vec{0}$*

Замена $\vec{z}(t) = \vec{y}(t) - \vec{c}$:

$$(1) \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{z}(t) = \frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \vec{f}(\vec{y}(t)) = \vec{f}(\vec{z}(t) + \vec{c})$$

$$\frac{d}{dt}\vec{z}(t) = \vec{f}(\vec{z} + \vec{c})$$

, где $\vec{z}^*(t) = 0$ - решение.

$$\frac{d}{dt}\vec{z}(t) = \vec{f}(\vec{z} + \vec{c}) = \vec{f}(\vec{c}) + \underbrace{\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{z}}(\vec{c})}_{A}\vec{z} + o(\|\vec{z}\|)$$

$$A = \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{z}}(\vec{c}) = \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}(\vec{c})$$

Теорема 1 (Теорема об устойчивости положений равновесия)**.** *Пусть $A = \dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}(\vec{c})$. Тогда:*

1) $\forall\lambda_j\ Re\lambda_j(A) < 0 \Rightarrow \vec{y}^*(t) = \vec{c}$ - асимптотически устойчиво;

2) $\exists\lambda_k(A)\ Re\lambda_k(A) > 0 \Rightarrow \vec{y}^*(t) = \vec{c}$ - неустойчиво.

Глава 1: Фазовые портреты автономных систем

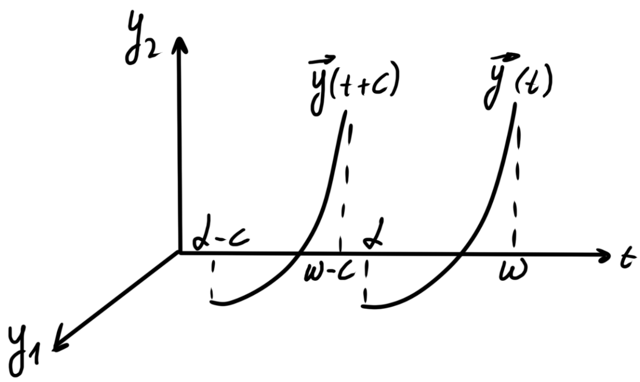
1. Свойства фазовых траекторий

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \tag{1}$$

, где $f_j \in C^1(\mathbb{D})$

Лемма 1. *Пусть $\vec{y}(t),\ t \in (\alpha, \omega)$ - непродолжаемое решение системы (1). Тогда $\forall c \in \mathbb{R}\ \vec{y}(t+c),\ t \in (\alpha - c, \omega - c)$ - тоже непродолжаемое решение системы (1).*

Доказательство. Очевидно, что очевидно. #



Теорема 1. *Пусть $\begin{matrix}\vec{y}_1(t),\ t \in (\alpha_1, \omega_1) \\ \vec{y}_2(t),\ t \in (\alpha_2, \omega_2)\end{matrix}$ - два непродолжаемых решения системы (1). Пусть $\exists t_1 \in (\alpha_1, \omega_1)\ \exists t_2 \in (\alpha_2, \omega_2) : \vec{y}_1(t_1) = \vec{y}_2(t_2)$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : \vec{y}_2 = \vec{y}_1(t+c)$, при этом $(\alpha_2, \omega_2) = (\alpha_1 - c, \omega_1 - c)$*

Доказательство.

Обозначим $\vec{y}_0 = \vec{y}_1(t_1) = \vec{y}_2(t_2)$

Рассмотрим задачу Коши: $\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \\ \vec{y}(t_2) = \vec{y}_0\end{cases} \Rightarrow \vec{y}_2(t)$ - решение, $t \in (\alpha_2, \omega_2)$

Рассмотрим функцию $\vec{y}_1(t + \underbrace{t_1 - t_2}_{c}),\ t \in (\alpha_1 - c, \omega_1 - c)$

$$\vec{y}_1(t + t_1 - t_2)|_{t=t_2} = \vec{y}_1(t_1) = \vec{y}_0$$

По Теореме Пикара: $\vec{y}_2(t) = \vec{y}_1(t + t_1 - t_2)$

#