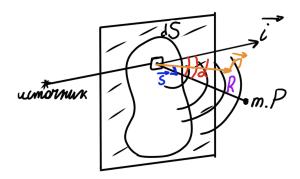
1. Продолжение теории Гюйгаса-Френеля



 \vec{i},\vec{s} - единичные вектора, \vec{n} - нормаль к поверхности, а $\alpha=\widehat{\vec{i},\vec{s}}$

$$E_p = \int \mathbb{K}(\alpha)E(S)\frac{e^{ikR}}{R}dS_n$$

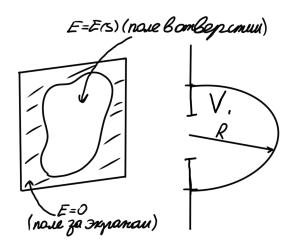
Основные допущения теоремы Гюйгаса-Френеля:

- 1) поле в отверстии экрана такое же как и в его отсутствии;
- 2) экран абсолютно поглощающий, поле непосредственно за экраном поле равно нулю:
- 3) существенна только форма отверстия, несущественна форма его края и материал.

Математическая постановка задачи и нахождение $\mathbb{K}(\alpha)$ - Кирхгоф.

$$\Delta E(\vec{r}) + k^2 E(\vec{r}) = 0$$
 - скалярное волновое уравнение

Граничные условия:



условие излучения (все волны покидают этот объем V)

$$E_p = \frac{k}{4\pi i} \int dS_n (1 + \cos \alpha) \frac{e^{ikR}}{R} E(S)$$

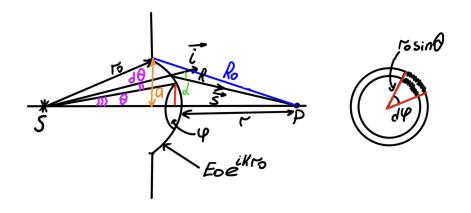
Click me: GitHub Repository

$$\mathbb{K}(\alpha) = \frac{k}{4\pi i} (1 + \cos \alpha)$$

, при $\alpha \ll 1$ (параксиальное приближение) $\mathbb{K}(\alpha) \approx \frac{k}{2\pi i}$

$$\mathbb{K} = \frac{k}{4\pi i} \left(\cos \left(\widehat{\vec{i}, \vec{n}} \right) + \cos \left(\widehat{\vec{n}, \vec{s}} \right) \right)$$

Вычислим $\mathbb{K}(\alpha)$ в параксиальном приближении на примере круглого отверстия:



$$dS_{n} = dS = r_{0} \sin \theta d\varphi r_{0} d\theta$$

$$E_{p} = \iint \mathbb{K}(0) E_{0} e^{ikr_{0}} \frac{e^{ikR}}{R} r_{0}^{2} \sin \theta d\theta d\varphi$$

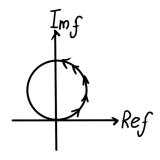
$$R^{2} = (r_{0} + r)^{2} + r_{0}^{2} - 2r_{0}(r_{0} + r) \cos \theta$$

$$2RdR = 2r_{0}(r_{0} + r) \sin \theta d\theta \Rightarrow \sin \theta d\theta = \frac{RdR}{r_{0}(r + r_{0})}$$

$$E_{p} = \mathbb{K}(0) E_{0} e^{ikr_{0}} 2\pi \int \frac{e^{ikR}}{R} r_{0}^{2} \frac{RdR}{r_{0}(r_{0} + r)}$$

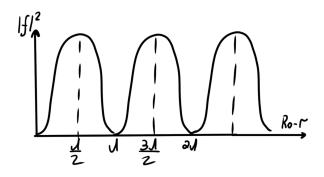
$$E_{p} = \mathbb{K}(0) \frac{E_{0} e^{ikr_{0}}}{\frac{r_{0} + r}{r_{0}}} 2\pi \frac{e^{ikR_{0}} - e^{ikr}}{ik} = \frac{\mathbb{K}(0) 2\pi}{k} \underbrace{\frac{E_{0} e^{ik(r_{0} + r)}}{r_{0}}}_{(*)} \underbrace{\left\{\frac{e^{ik(R_{0} - r)} - 1}{i}\right\}}_{f(R_{0} - r)}$$

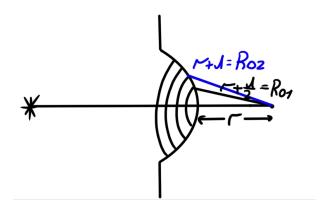
, где (*) поле точечного источника в отсутствии экрана = E_{P_0}



,где
$$I=rac{|E_p|^2}{2}$$

$$|f(R_0 - r)|^2 = (e^{ik(R_0 - r)} - 1)(e^{-ik(R_0 - r)} - 1) = 2 - 2\cos(k(R_0 - r)) = 4\sin^2\left(\frac{k(R_0 - r)}{2}\right)$$





$$\frac{k(R_{01} - r)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$R_{01} - r = \frac{\lambda}{2}$$

$$R_{0m} - r = m\frac{\lambda}{2}$$

Устремим радиус отверстия к ∞ и учтем спад $\mathbb{K}(\alpha)$ с ростом $\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{p_0} = \frac{\mathbb{K}(0)2\pi}{k} E_{p_0} i \Rightarrow \mathbb{K}(0) = \frac{k}{2\pi i} = \frac{1}{i\lambda}$$

$$R_{0m}^2 = \left(r + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 \stackrel{(*)}{=} (r + r_0)^2 + r_0^2 - 2(r_0 + r)r_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

, где (*) - из теоремы косинусов.

С учетом, что $\theta \approx \sin \theta = \frac{a_m}{r_0}$:

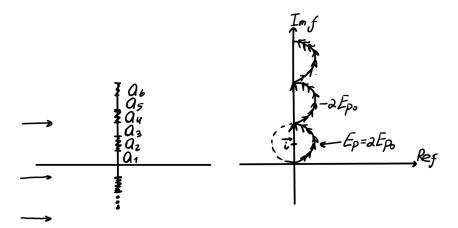
$$r^2 + rm\lambda + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^{2} = 2r_0^2 + 2rr_0 + r^2 - 2r_0^2 - 2rr_0 + (r_0 + r)\frac{a_m^2}{r_0^2}r_0$$

$$a_m^2 = \frac{r_0 r m \lambda}{r_0 + r} = \frac{m \lambda}{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r}}$$
$$\pi a_{m+1}^2 - \pi a_m^2 = \frac{\pi \lambda}{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r}} = \text{const} \Rightarrow$$

 \Rightarrow площадь колец между зонами Френеля - есть постоянная величина. Если $r_0 \to \infty$, то падает плоская волна $\Rightarrow a_m = \sqrt{rm\lambda}$

Зонные пластинки:

1) Нечетные зоны открыты, четные закрыты:



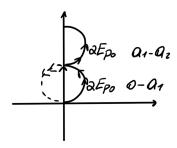
$$E_p = \frac{k}{2\pi i} \frac{2\pi}{k} E_{p_0} \frac{1}{i} (e^{ik(R_0 - r)} - 1) \Rightarrow E_p = E_{p_0} (1 - e^{ik(R_0 - r)})$$

 $E_{p_{\Sigma}}$ = E_p (от всех нечетных зон)= $N \cdot E_{p_0}$ 2 \Rightarrow

$$\Rightarrow I_{p_{\Sigma}} = \frac{|E_{p_{\Sigma}}|^2}{2} = 4N^2 \frac{|E_{p_0}|^2}{2} = 4N^2 I_0$$

, где N - число нечетных зон.

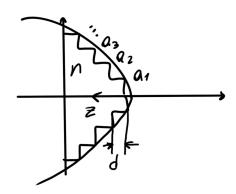
2) Нечетные открыты, в четных стоят пластинки, сдвигающие фазу на π :



$$E_{p_{\Sigma}} = 2NE_p \Rightarrow I_{p_{\Sigma}} = 4N^2I_0$$

, где N - число всех зон.

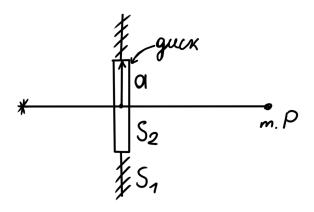
3) какой то прикол:



 $(n-1)d=rac{\lambda}{2}\Rightarrow$ сдвиг волн в соседних четных и нечетных зонах $=\pi$

$$a_m=\sqrt{m\lambda r}$$
 $z_m=(m-1)d=(m-1)rac{\lambda}{2(n-1)}$ $z_m=rac{\lambda}{2(n-1)}\left(rac{a_m^2}{\lambda r}-1
ight)$ - парабола.

2. Пятно Пуассона и принцип Бабине



$$E_p = \frac{k}{2\pi i} \int_{S_1} E(S) \frac{e^{ikR}}{R} dS_n = \int_{(*)} - \int_{S_2}$$
, где (*) в отсутствии отверстия. И $\int_{(*)} = E_{p_0}$, $\int_{S_2} = E_{p_0} (1 - e^{ik(R_0 - r)})$
$$\int_a^\infty = \int_0^\infty - \int_0^a = E_{p_0} e^{ik(R_0 - r)} \Rightarrow I_p = \frac{|E_{p_0}|^2}{2} = I_{p_0}$$