

Теорема 1 (Теорема о изоморфизме гильбертовых пространствах). *Всякая сепарабельное бесконечномерное Гильбертово пространство (над \mathbb{R} или \mathbb{C}) изоморфно пространству l_2 (над \mathbb{R} или \mathbb{C}).*

Идея доказательства:

$$A : H \rightarrow l_2$$

$$\begin{array}{l} x \in H \\ \lambda \in l_2 \end{array} \quad ?$$

$$A(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) : \text{ где } \lambda_k = (x, \lambda_k) - \text{коэффициенты Фурье; } A(x) \in l_2 ?$$

$$\sum_1^\infty |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2 - \text{неравенство Бесселя}$$

- 1) A линейно?
- 2) A сохраняет скалярное произведение (это равенство Парсеваля)?

$$B : l_2 \rightarrow H \text{ по теореме Рисса-Фишера}$$

- 3) B линейно?
- 4) B сохраняет скалярное произведение?
- 5) A и B взаимно обратны?

Тригонометрическая система функция как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi, \pi]$

$$L_2[-\pi, \pi] : \left\{ f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

$$(f, g)_{L_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

Над \mathbb{R} :

Ряды Фурье

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \neq 0 \\ 2\pi, & n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0$$

Гильбертово пространство:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$$

Ряд Фурье:

Коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Гильбертово пространство:

Коэффициенты Фурье

$$\alpha_0 = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0$$

$$\alpha_n = (f, \cos(nx)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \sqrt{\pi} a_n$$

$$\beta_n = (f, \sin(nx)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \sqrt{\pi} b_n$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$f(x) = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x + \beta_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x + \dots + \alpha_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \beta_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Равенство Ляпунова:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Равенство Парсеваля:

$$\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Глава 1: Классические ортогональные системы

$\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ - норма в $C[a, b]$ равномерная норма.

$$f_n \xrightarrow{\text{равномерно}} f$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall k > N : \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 < \varepsilon^2$$

$$C^\infty(\subset C) \text{ плотны в } L_2[a, b] \Leftrightarrow L_2 = \overline{C}, \quad M \text{ плотно в } L \Leftrightarrow L = \overline{M}$$

1. Весовое пространство Лебега

Пусть (a, b) - промежуток на \mathbb{R} (необязательно ограниченный)

Определение 1. Функция $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *весовой или весом*, если:

- 1) $\forall x \in (a, b) \ h(x) > 0$
- 2) $h(x) > 0$ п. вс. в (a, b)
- 3) $\int_a^b h(x) dx < \infty$

Определение 2. Пространство функций

$$L_2^h(a, b) = \left\{ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2(x) h(x) dx < \infty \right\}$$

назовем *весовым пространством Лебега*.

Это пространство становится евклидовым, если на нем задано скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) h(x) dx$$

Скалярное произведение определено для любых функций f, g так как

$$|f(x) g(x) h(x)| < \frac{1}{2} [f^2(x) h(x) + g^2(x) h(x)]$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) h(x) dx}$$

Замечания:

- Нулевым элементом пространства $L_h^2(a, b)$ считаем такую функцию f , что выполнено $(f, f) = \int_a^b f^2 h(x) dx = 0$

- Весовое пространство Лебега $L_h^2(a, b)$ является полным относительно нормы, порожденной скалярным произведением, то есть Гильбертовым. Для каждой функции $h(x)$ и промежутка (a, b) определятся специальное гильбертово пространство!

- Если интервал (a, b) конечен, то $\forall n \ x^n \in L_h^2(a, b)$. Если (a, b) - бесконечный промежуток, то полагаем, что весовая функция убывает на бесконечности настолько быстро, что все мономы $x^n \in L_h^2(a, b)$:

$$\int_a^b x^{2n} h(x) dx < \infty$$

Тогда в $L_h^2(a, b)$ всегда есть последовательность мономов $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$

На любом интервале (a, b) последовательность мономов $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$ образуют линейно независимую систему. Применим к ней процесс ортогонализации Грамма-Шмидта относительно скалярного произведения пространства $L_h^2(a, b)$. Получим последовательность мономов:

$$q_0, q_1, \dots, q_n, \dots,$$

со свойствами:

$$- \int_a^b q_m(x) q_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

- $\forall n \ q_n$ - многочлен степени n

Так же для удобства домножим, если это необходимо, многочлен q_n на -1, так чтобы у каждого многочлена старший коэффициент a_n стал положительным.

Определение 3. Последовательность полученных многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$, называется последовательностью ортогональных многочленов на промежутке (a, b) с весом $h(x)$

Ортонормированная система в Гильбертовом пространстве H полная

$$\Rightarrow \underbrace{\langle \{x_k\} \rangle}_{\text{замкнутое подпространство}} = H$$

Предположим противоречие $\exists y \in H, y \notin \overline{\langle \{x_k\} \rangle}$
 \exists ортогональная проекция y на $\overline{\langle \{x_k\} \rangle}$

$$(y - z) \perp \overline{\langle \{x_k\} \rangle}$$

$$y - z \perp x_k \forall k \text{ противоречие}$$

$$y = z \Rightarrow y \in \overline{\langle \{x_k\} \rangle}$$

- Для конечного промежутка: полиномы плотны в $L_2^h(a, b)$, значит, конечными линейными комбинациями мономов можно сколько угодно близко по норме $L_2^h(a, b)$

приблизиться к произвольной функции $f \in L_2^h(a, b)$, поэтому мономы образуют полную систему в $L_2^h(a, b)$.

-Мы будем использовать некоторые бесконечные (a, b) и весовые функции $h(x)$, для этих частных случаев полнота мономов тоже доказана.

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта переводит полную систему в полную, поэтому система многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$, полна в $L_2^h(a, b)$, т.е. является гильбертовым базисом в $L_2^h(a, b)$. Можно ввести коэффициенты Фурье относительно этого базиса и разлагать функции в ряды по ортогональным многочленам.

-Ортогональные многочлены определяются весом $h(x)$ и промежутком (a, b) однозначно (при сделанных предположениях)

- Если $P(x)$ - произвольный многочлен степени n , то его можно представить как

$$P(x) = \sum_{k=0}^m c_k q_k$$

- Если $P_m(x)$ - произвольный многочлен степени m , и $n > m$, то $q_n \perp q_m$

$$\int_a^b P_m(x) q_n(x) h(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^m c_k q_k(x) \right) q_n(x) h(x) dx = 0$$

- Если вес $h : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ - четная функция, то $q_n(x) = (-1)^n q_n(x)$

Сделаем замену: $x \rightarrow -x$ в $\int_{-a}^a q_m(x) q_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$

$$\int_{-a}^a q_m(-x) q_n(-x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

$$\int_{-a}^a \tilde{q}_m(x) \tilde{q}_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

, где $\tilde{q}_n = (-1)^n q_n(x)$, $\tilde{q}_m = (-1)^m q_m(x)$. Тогда по первому свойству $q_n = \tilde{q}_n = (-1)^n q_n(x)$