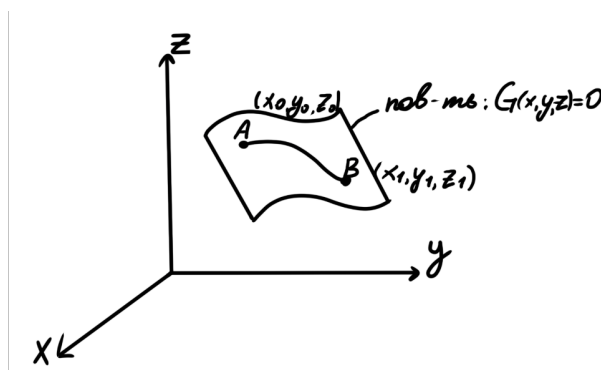


1. Вариационная задача на условный экстремум

$$\begin{cases} I[y_1, \dots, y_n] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dt \rightarrow \text{extz} \\ y_i(t_0) = y_{i_0}, \quad y_i(t_1) = y_{i_1}, \quad i = 1, \dots, n \\ G(t, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Пример: Задача о геодезических на поверхности



Найти кривую, соединяющую точки A и B, лежащие на поверхности, имеющую наименьшую длину.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{уравнение кривой в параметрическом виде, } t \in [t_0, t_1]$$

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, & x(t_1) = x_1 \\ y(t_0) = y_0, & y(t_1) = y_1 \\ z(t_0) = z_0, & z(t_1) = z_1 \end{cases}$$

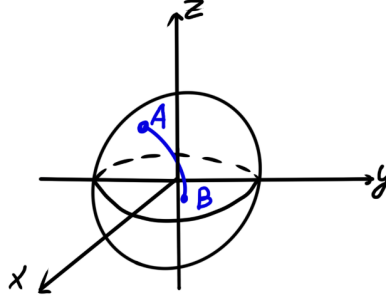
Необходимое условие локального экстремума:

Пусть $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ доставляют локальному экстремум для задачи (1). Тогда $\exists \lambda(t)$ такая, что функции $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ являются экстремальными вспомогательного функционала.

$$\tilde{I}[y_1, \dots, y_n] = \int_{t_0}^{t_1} (F + \lambda G(t)) dt$$

Без доказательства.

2. Решение задачи о геодезических на сфере



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\tilde{I}[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}_F + \lambda(t)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right)}_{\tilde{F}} dt$$

$$\begin{cases} 2x\lambda(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{F} \right) & (1) \\ 2y\lambda(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{F} \right) & (2) \\ 2z\lambda(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{F} \right) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \cdot y + (2) \cdot (-x) : & y \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{F} \right) - x \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{F} \right) = 0 \\ (2) \cdot z + (3) \cdot (-y) : & z \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{F} \right) - y \frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{F} \right) = 0 \\ (3) \cdot (-x) + (1) \cdot z : & z \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{F} \right) - x \frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{F} \right) = 0 \end{cases}$$

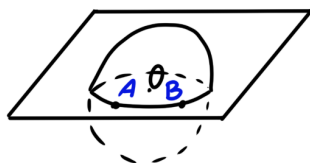
$$\frac{d}{dt} \left(y \frac{x'}{F} - x \frac{y'}{F} \right) = \cancel{y' \frac{x'}{F}} + y \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{F} \right) - \cancel{x' \frac{y'}{F}} - x \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{F} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(y \frac{x'}{F} - x \frac{y'}{F} \right) = 0 & \begin{cases} \frac{yx' - xy'}{F} = c_1 & (1) \\ \frac{zy' - yz'}{F} = c_2 & (2) \\ \frac{zx' - xz'}{F} = c_3 & (3) \end{cases} \\ \frac{d}{dt} \left(z \frac{y'}{F} - y \frac{z'}{F} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(z \frac{x'}{F} - x \frac{z'}{F} \right) = 0 \end{cases}$$

$$(1) \cdot z + (2) \cdot x + (3) \cdot (-y) :$$

$$\frac{1}{F} [z(yx' - xy') + x(zy' - yz') - y(zx' - xz')] = c_1 z + c_2 x - c_3 y$$

$$\begin{cases} c_1 z + c_2 x - c_3 y = 0 - \text{плоскость проходящая через } (0,0,0) \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$



Геодезическая на сфере - дуга на большой окружности.

Глава 1: Система малых колебаний

1. Линейные однородные системы малых колебаний

$$M\vec{x}'' + K\vec{x} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример: $n = 1 \Rightarrow mx'' + kx = 0, m > 0, k > 0$



M — матрица масс, K — матрица жесткостей

1) $M = M^T, K = K^T$ ($m_{ij} = m_{ji}, k_{ij} = k_{ji}$)

2) $M > 0$ (матрица положительно определена), $K \geq 0$

Определение 1. Матрица $M = M^T$ называется положительно определенной, если $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq 0$ выполняется $(M\vec{v}, \vec{v}) > 0$.

Критерий Сильвестра: $M = M^T > 0 \Leftrightarrow$ все главные миноры > 0 .

1-ый способ: Сведение к системе 1-го порядка.

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = \vec{x} \\ \vec{y}_2 = \vec{x}' \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{y}_1' = \vec{y}_2 \\ \vec{y}_2' = \vec{x}'' = -M^{-1}K\vec{x} = -M^{-1}K\vec{y}_1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & 0 \end{pmatrix}}_{n \times n} \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{e^{tA}}_{(2n \times 2n)} \underbrace{\vec{c}}_{(2n \times 1)} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{12}(t) & \Phi_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \vec{y}_1(t) = F_{11}(t)\vec{c}_1 + F_{12}(t)\vec{c}_2 \quad (2n \text{ констант})$$

Лемма 1. Если $M = M^T > 0$, то $\exists M^{-1}$

Доказательство.

Пусть не существует $M^{-1} \Rightarrow \underbrace{\det M = 0} \Rightarrow \exists \vec{v} \neq 0 : M\vec{v} = 0$
 $\Rightarrow \lambda = 0$ — собств.знач.
 $\det(M - 0E) = 0$
 $(M\vec{v}, \vec{v}) = (0, \vec{v}) = 0$ — противоречие

#

Утверждение 1 (из алгебры). Пусть $A = A^T \Rightarrow$ все собственные числа $\lambda_j \in \mathbb{R}$.
 Пусть $A = A^T > 0 \Rightarrow$ все собственные числа $\lambda_j > 0$.

Утверждение 2 (из алгебры). Пусть $A = A^T \Rightarrow$ в \mathbb{R}^n существует базис из собственных векторов, то есть нет присоединенных

Утверждение 3 (из алгебры). Пусть $A = A^T \Rightarrow A = UDU^{-1}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

U - ортогональная матрица, то есть $U^{-1} = U^T$

2-ой способ:

Определение 2. Число λ называется собственным числом системы (1), если $\det(K - \lambda M) = 0$

Определение 3. Вектор $\vec{v} \neq \vec{0}$ называется собственным вектором системы (1) (вектором нормальных колебаний), если $(K - \lambda M)\vec{v} = 0$

Теорема 1. Существует n собственных чисел системы (1) и $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$

Доказательство.

$$1) \det(K - \lambda M) = 0$$

$$\det(M(M^{-1}K - \lambda E)) = 0$$

$$\underbrace{\det M}_{\neq 0} \det(M^{-1}K - \lambda E) = 0 \Rightarrow \text{существует } n \text{ собственных чисел}$$

$$2) \vec{v}_j - \text{собственные вектора} \Rightarrow K\vec{v}_j = \lambda_j M\vec{v}_j \mid \cdot \vec{v}_j$$

$$\underbrace{(Kv_j, v_j)}_{\geq 0} = \lambda_j \underbrace{(Mv_j, v_j)}_{> 0} \Rightarrow \lambda_j \geq 0$$

#

Теорема 2. В \mathbb{R}^n существует базис из собственных векторов системы (1).

Доказательство будет позже.

Теорема 3. Пусть $M = M^\top > 0, K = K^\top \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ - собственные числа системы (1), $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ - собственные вектора системы (1), соответствующие числам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда все решения системы (1) имеют вид:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \vec{v}_j,$$

, где $q_j(t)$ - решение дифференциального уравнения: $q_j'' + \lambda_j q_j = 0$

Доказательство.

По теореме 2 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ - базис в \mathbb{R}^n . При фиксированном t $x(t) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x}(t)$ раскладывается по базису: $\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \vec{v}_j$

Подставляем $x(t)$ в систему (1):

$$\begin{aligned} M \sum_{j=1}^n q_j''(t) \vec{v}_j + K \sum_{j=1}^n q_j(t) \vec{v}_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^n \left(q_j''(t) M \vec{v}_j + q_j(t) \underbrace{K \vec{v}_j}_{\lambda_j M \vec{v}_j} \right) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n (q_j''(t) M \vec{v}_j + \lambda_j q_j(t) M \vec{v}_j) &= 0 \quad | \cdot M^{-1} \\ \sum_{j=1}^n (q_j''(t) + \lambda_j q_j(t)) \vec{v}_j &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Т.к $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ линейно независимы, то $q_j''(t) + \lambda_j q_j(t) = 0$

#

Замечание. $q_j''(t) + \lambda_j q_j(t) = 0$ 1) $\lambda_j = 0 \Rightarrow q_j(t) = c_1 t + c_2$
2) $\lambda_j > 0 \Rightarrow q_j(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda_j} t)$

Определение 4. $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ называется собственными частотами колебаний системы (1).