Конспект лекций по дисциплине

Дифференциальные уравнения

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

Преподаватель: Скворцова Мария Александровна

Оглавление

Глава 1: Вариационное исчисление.

1. Примеры задач вариационного исчисления

Задача математического анализа:

Есть кривая заданная функцией $f(x)$ найти точки экстремума:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2 - \text{точки, подозреваемые на экстремум}$$

$$f''(x_1) < 0 \Rightarrow x_1 - \max$$
$$f''(x_2) > 0 \Rightarrow x_2 - \min$$

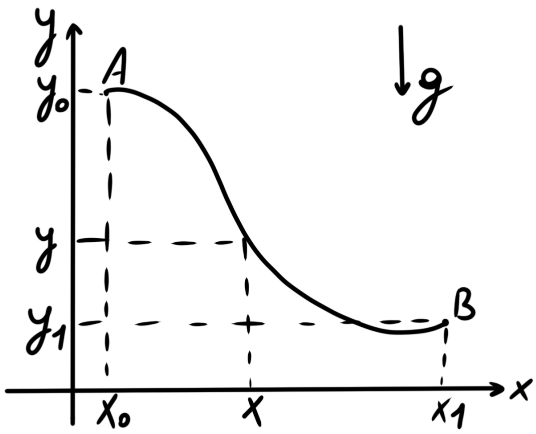
Задача вариационного исчисления:

Функционал: $I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$

Найти функцию $y(x)$ такую, что $I[y]$ принимает min или max

Пример 1 : задача наискорейшего спуска (задача Брахистохроне)

Найти кривую $y(x)$ по которой тело из точки A в точку B попадет за наименьшее время.



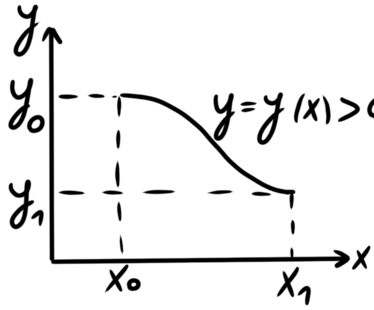
$$\text{З.С.Э: } mgy_0 + 0 = mgy(x) + \frac{m|v|^2}{2}$$

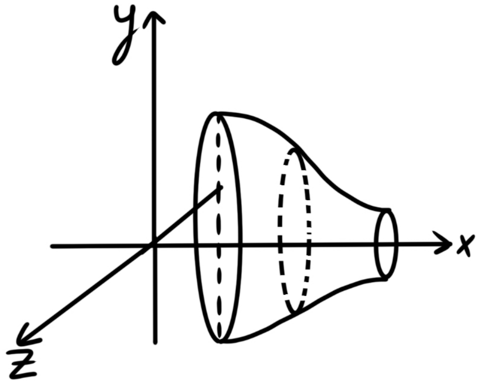
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\sqrt{2g(y_0 - y(x))} = |v| = \sqrt{1 + (y(x)')^2}\frac{dx}{dt}$$

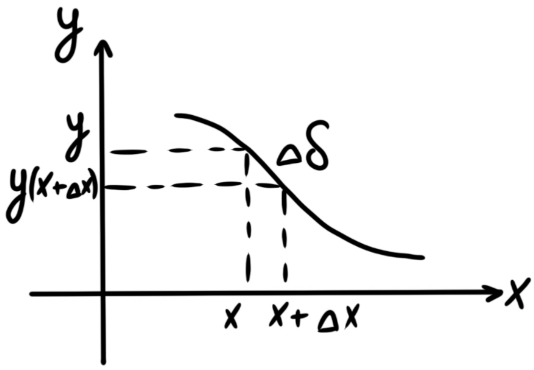
$$T = \int_0^T dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 + y(x))}}dx$$

Пример 2 : задача поверхности вращения наименьшей площади.





Площадь $S \to \min$



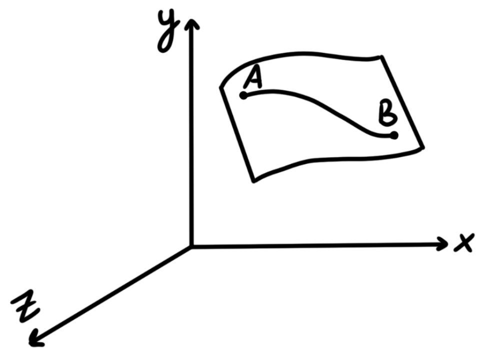
$$\Delta\delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$$

$$\Delta S = 2\pi y(x)\Delta\delta$$

$$\sum \Delta S \xrightarrow{\Delta x \to 0} \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

Пример 3 : задача о геодезических на поверхности.

Найти кривую, проходящую через точки A и B, лежащую на поверхности, которая имеет наименьшую длину.



$$G(x,y,z)=0 - \text{уравнение поверхности}$$

$$\text{Пусть уравнение кривой }: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \qquad t\in[t_0,t_1] - \text{параметр} \\ z=z(t) \end{cases}$$

$$G(x(t),y(t),z(t))=0 \leftarrow \text{кривая лежит на поверхности}$$

$$l=\sum \Delta l=\sum\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}=\sum\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}\Delta t$$

$$l\xrightarrow{\Delta t\to 0}\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

2. Простейшая задача вариационного исчисления

$$I[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))dx \qquad (1)$$

$F:\mathbb{D}\to\mathbb{R},\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^3$ непустое открытое множество, $F\in C^2(\mathbb{D})$

Определение 1 (допустимая функция)**.** *Функция $y:[x_0,x_1]\to\mathbb{R}$ называется допустимой, если:*
1) $y(x)\in C([x_0,x_1])$
2) $y(x)\in C^2((x_0,x_1))$
3) $\forall x\in[x_0,x_1],(x,y(x),y'(x))\in\mathbb{D}$
4) $\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))dx$ сходится

$$\text{Краевые условия: } y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1 \qquad (2)$$

Определение 2. *Допустимая $\tilde{y}:[x_0,x_1]\to\mathbb{R}$ доставляет локальный минимум функционалу (1) при краевых условиях (2),если:*
1) $\tilde{y}(x_0)=y_0,\tilde{y}(x_1)=y_1$
2) $\exists\varepsilon_0>0\ \forall$ допустимой функции $y(x)$, удовлетворяющей (2): $\sup_{x\in[x_0,x_1]}|y(x)-\tilde{y}(x)|<\varepsilon_0$ выполняется: $I[\tilde{y}]\le I[y]$

Определение 3. *Допустимая функция $\tilde{y}:[x_0,x_1]\to\mathbb{R}$ доставляет глобальный минимум функционалу $I[y]$ при краевых условиях (2), если:*
1) $\tilde{y}(x_0)=y_0,\ \tilde{y}(x_1)=y_1$
2) $\forall$ допустимой функции $y(x)$, удовлетворяющей (2), выполняется $I[\tilde{y}]\le I[y]$

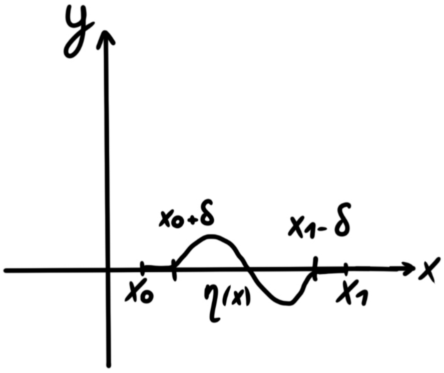
3. Необходимые условия локального экстремума

Аналог $f'(x)=0$

Пусть функция $\tilde{y}$ доставляет функционалу $I[y]$ при краевых условиях (2) локальный минимум $\Rightarrow I[\tilde{y}]\le I[y]$, где $y(x)$ из определенного локального минимума.

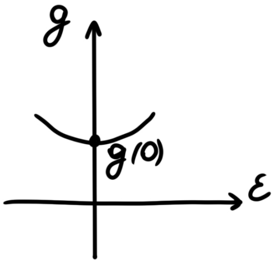
Возьмем $y(x)=\tilde{y}+\varepsilon\eta(x),\quad \varepsilon\in\left(-\frac{\varepsilon_0}{M},\frac{\varepsilon_0}{M}\right),\quad M=\max_{x\in[x_0,x_1]}|\eta(x)|$

$\eta(x)\in C^2([x_0,x_1])$ - финитная функция.



$$\Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]$$

Рассмотрим функцию $g(\varepsilon) = I[\tilde{y} + \varepsilon\eta] \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon)$



$\varepsilon = 0 -$ точка локального минимума для функции $g(\varepsilon) \Rightarrow g'_\varepsilon(0) = 0$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y} + \varepsilon\eta(x), \tilde{y}' + \varepsilon\eta'(x))dx\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} \boxed{=}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+\delta}}_{(1)} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{(2)} + \underbrace{\int_{x_1-\delta}^{x_1}}_{(3)} \quad ; \quad \frac{d}{d\varepsilon} I_1 = \frac{d}{d\varepsilon} I_2 = 0$$

Теорема 1 (из математического анализа). $f(x, \varepsilon) : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ - *непрерывна,* $\exists \dfrac{df}{d\varepsilon}(x, \varepsilon)$ - *непрерывна*

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b f(x, \varepsilon)dx = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} f(x, \varepsilon)dx$$

Вносим производную под знак интеграла:

$$\boxed{=} \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right]dx\Bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x)dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}(x)\eta(x)\Bigg|_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{=0} -$$

$$-\int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\eta(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}(\dots)\right]dx\Bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(\dots) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'}(\dots)\right]\eta(x)dx\Bigg|_{\varepsilon=0} \boxed{=}$$

$$\boxed{=} \int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \dots\right]dx = 0$$

$\forall$ финитной функции $\eta(x)$

Лемма 1 (основаная леммая вариационного исчисления)**.** *$f(x) : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}-$ непрерывна и $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0, \forall$ финитной $\eta(x)$. Тогда $f(x) \equiv 0 \ \forall x \in [x_0, x_1]$*

По лемме: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ - необходимое условие локального экстремума(**уравнение Эйлера**)

Определение 1 (экстремаль)**.** *Допустимая функция $y(x)$ называется экстремалью функционала $I[y]$ при краевых условиях (2), если:*
1) $y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1$
2) $y(x)$ удовлетворяет условию Эйлера

$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \\ y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1 \end{cases} \qquad (1)$$

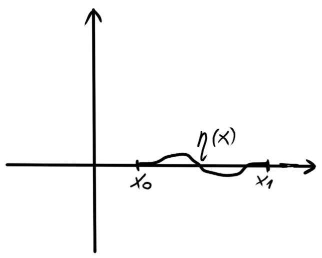
Найти функцию $y(x)$ такую, чтобы функционал $I[y]$ принимал наибольшее или наименьшее значение.

Необходимо найти условие локального экстремума:

Если $\tilde{y}$ экстремаль $\Rightarrow \tilde{y}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2)$

Докозательство формулы (2).

$$I[\tilde{y}] \leq I[y], y = \tilde{y} + \varepsilon\eta, \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1), \eta(x) \in C^2([x_0, x_1]) - \text{финитная}$$

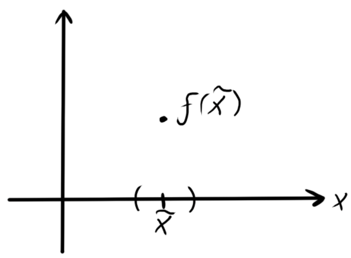


$$\underbrace{I[y]}_{=g(0)} \leq \underbrace{I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]}_{=g(\varepsilon)} \Rightarrow g(0) \leq g(\varepsilon) \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) \right) \eta(x)dx, \forall\eta(x) - \text{финитная}$$

Лемма 2 (Лагранжа)**.** *Пусть $f(x)$ - непрерывна и $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0. \forall\eta(x)$ - финитная на $[x_0, x_1]$. Тогда $f(x) = 0, \forall x \in [x_0, x_1]$*

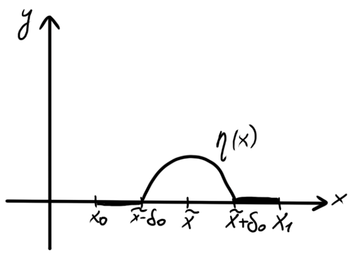
Доказательство. От противного:



Пусть для определенности $f(\tilde{x}) > 0$. Тогда так как $f(\tilde{x})$ - непрерывна, то $f(x) > 0$ при $x \in (\tilde{x} - \delta_0, \tilde{x} + \delta_0)$

Возьмем функцию $\eta(x) = \begin{cases} (\delta_0^2 - (x - \tilde{x})^2)^4, |x - \tilde{x}| < \delta \\ 0, |x - \tilde{x}| > \delta_0 \end{cases}$ – финитная функция

Наша функция $\eta(x)$ плавно переходит к нашим точкам $\tilde{x} - \delta_0, \tilde{x} + \delta_0$



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = \int_{\tilde{x}-\delta_0}^{\tilde{x}-\delta_0} \underbrace{f(x)}_{>0}\underbrace{\eta(x)}_{>0} dx > 0 - \text{противоречие}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [x_0, x_1] : f(x) = 0$$

#

Из доказательства леммы следует, что доказана формула (2) #

4. Случай понижения порядка в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad F = F(x, y(x), y'(x))$$

1) $F = f(x, y) \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = 0 \Rightarrow y = y(x)$

2) $F = F(x, y') \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y') = C$

3) $F = F(y, y')$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0| \cdot y'$$

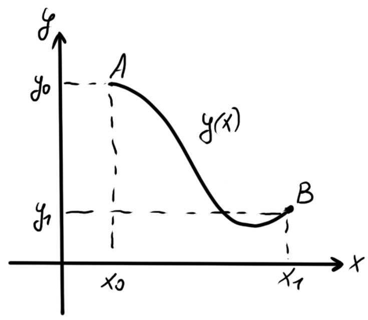
$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - \underbrace{y'\frac{\partial F}{\partial y'}}_{=\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - y''\frac{\partial F}{\partial y'}} = 0$$

$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + y''\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Заметим, что: $\dfrac{d}{dx}F(y,y') = y'\dfrac{\partial F}{\partial y} + y''\dfrac{\partial F}{\partial y'}$

$$\frac{d}{dx}F - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C}$$

5. Решение задачи о брахистохроне



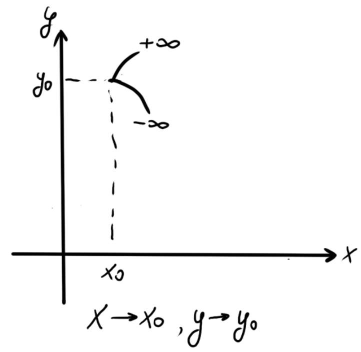
$$\begin{cases} I[y] = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2)}}{\sqrt{2g(y_0-y(x))}}dx \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}} - y'\frac{1}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

$$\underbrace{\sqrt{1+(y')^2} - (y')^2\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}}_{\dfrac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}} = C\sqrt{2g(y_0-y)}$$

$$1 = \underbrace{c^2 2g}_{=\frac{1}{c_1}>0}(y_0-y)(1+(y')^2)$$

$$c_1 = (y_0-y)(1+(y')^2) \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{c_1}{y_0-y} - 1} = y' \quad (3)$$



$$1 + (y'(x))^2 = \frac{c_1}{y_0 - y(x)} \xrightarrow{x \to x_1} +\infty$$

$$y'(x) \xrightarrow{x \to x_0} \underset{\text{выбор:}-}{\pm\infty} \Rightarrow y'(x) \xrightarrow{x \to x_0} -\infty$$

Если выбрать знак "+ то тело не сможет скатится в нужную точку

$$y' = -\sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}}$$

Замена: $\tilde{y} = y_0 - y(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = +\sqrt{\frac{c_1 - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Замена: $\tilde{y} = c_1 z$:

$$c_1 z' = \sqrt{\frac{c_1 - c_1 z}{c_1 z}} = \sqrt{\frac{1 - z}{z}}$$

Замена: $z = \sin^2 s, s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$c_1 2 \sin s \cos s \cdot s' = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 s}{\sin^2 s}} = \frac{\cos s}{\sin s} \text{ (знак определили из интервала s)}$$

$$2c_1 \sin^2 s \frac{ds}{dx} = 1$$

$$\frac{dx}{ds} = c_1(1 - \cos(2s)) \Rightarrow \boxed{x(s) = c_1\left(s - \frac{1}{2}\sin 2s\right) + c_2}$$

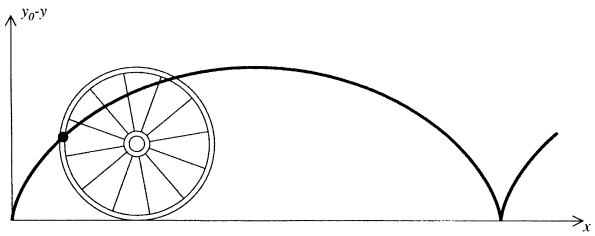
$$y(x) = y_0 - \tilde{y}(x) = y_0 - c_1 z = y_0 - c_1 \sin^2 s = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2s)$$

$$\boxed{y(s) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos(2s))}$$

Замена: $t = 2s, t \in (0, \pi)$

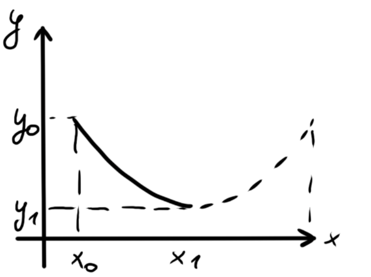
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{c_1}{2}(t - \sin t) + c_2 \\ y(t) = y_0 - \dfrac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2} + c_2 \\ y - \frac{c_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2}\sin t \\ \frac{c_1}{2}\cos t \end{pmatrix} \quad t \in (0, \pi)$$



$$t = 0 : \begin{cases} x(0) = c_2 = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$t = \pi : \begin{cases} x(\pi) = \frac{c_1}{2}\pi + c_2 = \frac{c_1}{2}\pi + x_0 \\ y(\pi) = y_0 - c_1 \end{cases}$$



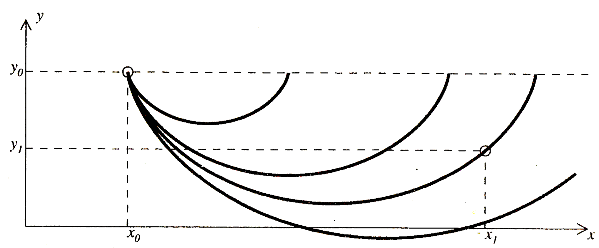
Теперь возьмем "+"(формула (3)):

$$y' = \sqrt{\frac{c_1 - y_0 + y}{y_0 - y}} \quad (5)$$

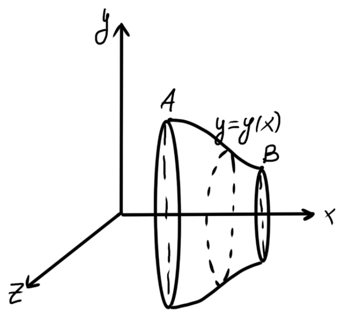
$$\tilde{y}(x) = y_0 - y(x) \Rightarrow \tilde{y}' = -\sqrt{\frac{c - \tilde{y}}{\tilde{y}}}$$

Делаем те же действия (замены) и получаем такие же $x(s), y(s)$ с различием только в интервале для t:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{C_1}{2}(t - \sin t) + x_0 \\ y(t) = y_0 - \frac{c_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases} \quad , \quad t \in (0, 2\pi) \Rightarrow \text{ циклоида полная}$$



6. Решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади



$$\begin{cases} I[y] = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x)^2)} \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$F - y\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

$$2\pi y\sqrt{1+(y')^2} - y' 2\pi y \frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

$$2\pi y \underbrace{\left(\sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}} = C$$

$$(2\pi y)^2 = c^2(1+(y')^2)$$

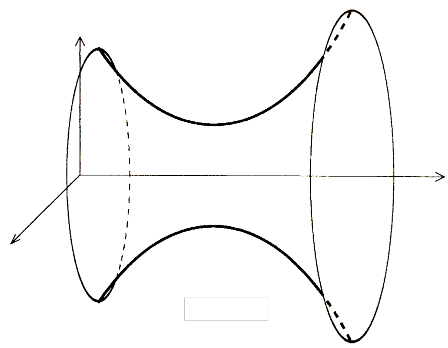
1) $c = 0 \Rightarrow y(x) = 0$ - решение, если $y_0 = y_1 = 0$

2) $c \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{c_1}\right)^2 = 1 + (y')^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1},\ c_1 = \frac{c}{2\pi} > 0$

$$y(x) = \mathrm{ch} z(x) c_1,\ z > 0$$

$$c_1 \mathrm{sh} z \cdot z'(x) = \pm\underbrace{\sqrt{\mathrm{ch}^2 z - 1}}_{=\mathrm{sh} z} \Rightarrow c_1 z' = \pm 1$$

$$z = \pm\frac{x + c_2}{c_1} \Rightarrow y(x) = c_1 \mathrm{ch}\left(\frac{x + c_2}{c_1}\right) - \text{цепная линия}$$



7. Вариационная задача с несколькими функциями

$$I[y_1,\ldots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1(x),y_1'(x),\ldots,y_n(x),y_n'(x))dx$$

$$\begin{cases}y_1(x_0)=y_{01},\ldots,y_n(x_0)=y_{0n}\\ y_1(x_1)=y_{11},\ldots,y_n(x_1)=y_{1n}\end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:
Пусть $\tilde{y}_1(x),\ldots,\tilde{y}_n(x),$:

$$I[\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n]\le I[y_1,\ldots,y_n],\ \forall y_2,\ldots,y_n$$

Можно взять y_1 - любое: $y_2=\tilde{y}_2,\ldots,$

$$\Rightarrow \underbrace{I[\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n]}_{Y[\tilde{y}_1]}\le \underbrace{I[y_1,\ldots,\tilde{y}_n]}_{Y[y_1]}\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y_1}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'}=0$$

Аналогично: $\frac{\partial F}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_j'}=0$

8. Вариационная задача с высшими производными

$$I[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x),...,y^{(n)}(x))dx$$

$$\begin{cases}y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1\\ y'(x_0)=y_0',\quad y'(x_1)=y_1'\\ \ldots y^{(n)}=y_0^{(n)},\quad y^{(n)}(x_1)=y_1^{(n)}\end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:
Если функция $\tilde{y}(x)$ доставляет функционалу локальному экстремум, то $\tilde{y}(x)$ - решение диффернциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}=0$$

Доказательство.

Пусть $\tilde{y}(x)$ доставляет функционалу локальный минимум $\Rightarrow \exists\varepsilon_0>0,\ \forall y(x)$, удовлетворяет краевым условиям, $\sup\limits_{x\in[x_0,x_1]}|y(x)-\tilde{y}(x)|<\varepsilon_0\Rightarrow I[\tilde{y}]\le I[y]$

Возьмем $y(x)=\tilde{y}(x)+\varepsilon\eta(x),\eta(x)$ финитная функция.

$\underbrace{I[\tilde{y}]}_{g(0)}\le\underbrace{I[\tilde{y}+\varepsilon\eta]}_{g(\varepsilon)}\Rightarrow g(0)\le g(\varepsilon)\Rightarrow\varepsilon=0-$ точка локального минимума для функции $g(\varepsilon)$

$$g'(0)=0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y}(x) + \varepsilon\eta(x), \tilde{y}'(x) + \varepsilon\eta'(x), ...)dx\bigg|_{\varepsilon=0}$$

Если $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+2}), y(x) \in C^{\infty}([x_0, x_1])$, то

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(...)\eta'(x) + \frac{\partial F}{\partial y''}(...)\eta''(x) + \dots\right] dx\bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(...)dx + \frac{\partial F}{\partial y'}(...)\eta(x)\bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta'(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}dx... \text{ и тд}$$

Для n =2: $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)dx - \eta(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}dx =$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta(x)dx = 0 \quad \forall \text{ финитной функции } \eta(x)$$

Если n = 2 , то по лемме Лагранжа: $\displaystyle\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$

При n > 2 аналогично.

#

9. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными

$$\begin{cases} I[z] = \displaystyle\iint_D F(x, y, z(x), z'_x(x, y), z'_y(x, y))dxdy \\ z|_{(x,y)\in\partial D} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

Необходимое условие локального экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z'_y} = 0 - \text{ уравнение Эйлера-Остроградского}$$

Без доказательства

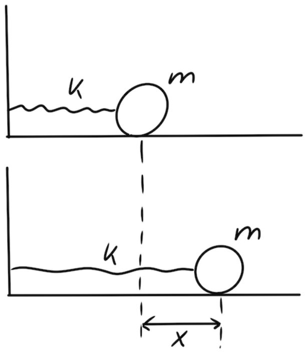
10. Принцип Остроградского-Гамильтона (принцип наименьшего действия, признак стационарного действия, основной вариационный принцип механики)

T - кинетическая энергия, U - потенциальная энергия:

$$L = T - U - \text{ функция Лагранжа (Лагранжиан)}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} Ldt - \text{функционал действия}$$

Движения в системе происходит по экстремалям функционала действия.
Пример:



$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad U = \frac{kx^2}{2}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right) dt$$

Уравнение Эйлера (уравнение Лагранжа): $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

$$-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

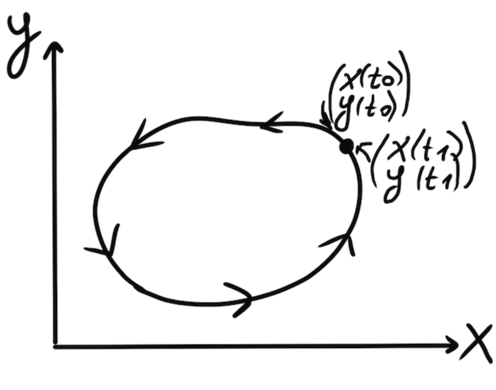
Понижение порядка: $L - \dot{x}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \dot{x}m\dot{x} = c \Rightarrow -\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = c - \text{ З.С.Э.}$$

11. Изопериметрическая задача

Найти кривую заданной длины, ограничивающую наибольшую площадь.

$$S \to \max$$
$$l = \text{const}$$



$$\begin{cases} x = x(t) & & x(t_0) = x(t_1) \\ y = y(t) & t \in [t_0, t_1] & y(t_0) = y(t_1) \end{cases}$$

$$S = \iint_D dxdy$$

$$\text{Формула Грина: } \int_{\partial D} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \right) dxdy$$

$$S = \iint_D dxdy = \iint_D \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{-\frac{\partial P}{\partial y}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{\partial Q}{\partial x}} \right) dxdy = \int_{\partial D} \left(-\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy \right) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{1}{2} & P = -\dfrac{y}{2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{2} & Q = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t)^2 + (y'(t))^2} dt = \text{const}$$

Задача из математического анализа :

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) \to \text{extz} & \tilde{f} = f + \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_m g_m \to \text{extz} \\ g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Задача вариационного исчисления:

$$I[y_1, \dots, yn] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', ..., y_n')dx \to \text{extz}$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_0^1 & y_n(x_0) = y_0^n \\ y_1(x_1) = y_1^1 & y_n(x_1) = y_1^n \end{cases}$$

$$Y[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y_1, \dots, y_n, y_1', ..., y_n')dx = \text{const}$$

Необходимое условие локального экстремума:

Пусть $\tilde{y_1}(x), ..., \tilde{y_n}(x)$ доставляет локальный экстремум функционалу $I[y_1, \dots, y_n]$ и не является экстремалью функционалу $Y[y_1, \dots, y_n]$, тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, такие, что $\tilde{y_1}(x), ..., \tilde{y_n}(x)$ доставляют экстремум функционалу $\tilde{I} = I = \lambda Y$

Без доказательства

Замечание. $I + \lambda Y \to \text{extz} \Leftarrow \begin{cases} Y = \text{const} \\ I \to \text{extz} \end{cases}$

$$\lambda\left(\frac{1}{\lambda}I+Y\right)\to \text{extz} \Leftrightarrow Y+\frac{1}{\lambda}\to\text{extz} \Leftarrow \begin{cases} Y\to\text{extz}\\ I=\text{const}\end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} S\to\max\\ l=\text{const}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l\to\min\\ S=\text{const}\end{cases}$$

12. Решение классической изопериметрической задачи

$$\tilde{I}=S+\lambda l=\int_{t_0}^{t_1}\underbrace{\left[\frac{1}{2}(xy'-x'y)+\lambda\sqrt{(x')^2+(y')^2}\right]}_{F}dt\to\text{extz}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial x'}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0\end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}y'-\dfrac{d}{dt}\left[-\dfrac{1}{2}y+\lambda\dfrac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right]=0\\ -\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2}x+\lambda\dfrac{x'}{\sqrt{(y')^2+(y')^2}}\right]=0\end{cases}$$

№ 39 (задачник Александрова-Егорова). Понизить порядок не получится так же, как в простейшей задаче.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{2}-\lambda\dfrac{x'}{\sqrt{(y')^2+(y')^2}}\right]=0\\ -\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+\lambda\dfrac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right]=0\end{cases} \quad \begin{cases} y-c_1=\dfrac{\lambda x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\\ x-c_2=\dfrac{-\lambda y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\end{cases}$$

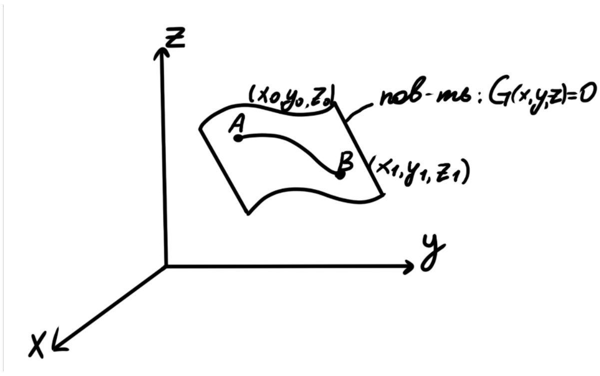
$$(y-c_1)^2+(x-c_2)^2=\lambda^2\left[\frac{(x')^2}{(x')^2+(y')^2}+\frac{(y')^2}{(x')^2+(y')^2}\right]$$

$$(y-c_1)^2+(x-c_2)^2=\lambda^2 - \text{окружность}$$

13. Вариационная задача на условный экстремум

$$\begin{cases} I[y_1,\dots,y_n]=\int_{t_0}^{t_1}F(t,y_1,\dots,y_n,y_n',...,y_n')dt\to\text{extz}\\ y_i(t_0)=y_{i_0},\quad y_i(t_1)=y_{i_1},\ i=1,\dots,n\\ G(t,y1,\dots,y_n)=0\end{cases}$$

Пример: Задача о геодезических на поверхности



Найти кривую, соединяющую точки A и B, лежащие на поверхности, имеющую наименьшую длину.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{уравнение кривой в параметрическом виде }, \ t \in [t_0, t_1]$$

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \\ y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1 \\ z(t_0) = z_0, \quad z(t_1) = z_1 \end{cases}$$

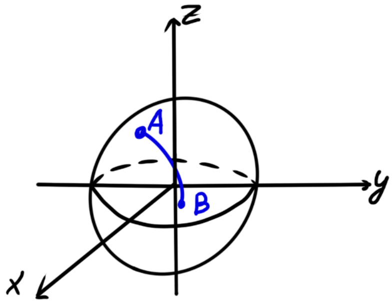
Необходимое условие локального экстремума:

Пусть $\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n$ доставляют локальному экстремум для задачи (1). Тогда $\exists \lambda(t)$ такая, что функции $\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n$ являются экстремалями вспомогательного функционала.

$$\tilde{I}[y_1, \ldots, y_n] = \int_{t_0}^{t_1} (F + \lambda G(t)) dt$$

Без доказательства.

14. Решение задачи о геодезических на сфере



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$I[x,y,z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\tilde{I}[x,y,z] = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}_{F} + \lambda(t)(x^2+y^2+z^2-R^2) \right)}_{\tilde{F}} dt$$

$$\begin{cases} 2x\lambda(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x'}{F}\right) \quad (1) \\ 2y\lambda(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'}{F}\right) \quad (2) \\ 2z\lambda(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{z'}{F}\right) \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)\cdot y + (2)\cdot(-x): \quad y\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x'}{F}\right) - x\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'}{F}\right) = 0 \\ (2)\cdot z + (3)\cdot(-y): \quad z\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'}{F}\right) - y\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{z'}{F}\right) = 0 \\ (3)\cdot(-x) + (1)\cdot z: \quad z\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x'}{F}\right) - x\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{z'}{F}\right) = 0 \end{cases}$$

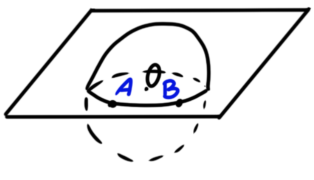
$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{x'}{F} - x\frac{y'}{F}\right) = \cancelto{0}{y'\frac{x'}{F}} + y\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{F}\right) - \cancelto{0}{x'\frac{y'}{F}} - x\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{F}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(y\dfrac{x'}{F} - x\dfrac{y'}{F}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(z\dfrac{y'}{F} - y\dfrac{z'}{F}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(z\dfrac{x'}{F} - x\dfrac{z'}{F}\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{yx' - xy'}{F} = c_1 \quad (1) \\ \dfrac{zy' - yz'}{F} = c_2 \quad (2) \\ \dfrac{zx' - xz'}{F} = c_3 \quad (3) \end{cases}$$

$$(1)\cdot z + (2)\cdot x + (3)\cdot(-y):$$

$$\frac{1}{F}\left[z(yx' - xy') + x(zy' - yz') - y(zx' - xz')\right] = c_1 z + c_2 x - c_3 y$$

$$\begin{cases} c_1 z + c_2 x - c_3 y = 0 - \text{плоскость проходящая через (0,0,0)} \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$



Геодезическая на сфере - дуга на большой окружности.

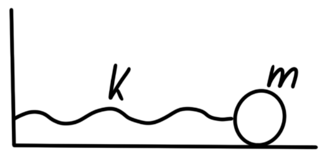
Глава 2: Система малых колебаний

1. Линейные однородные системы малых колебаний

$$M\vec{x''} + K\vec{x} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & ... & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n_1} & ... & m_{nn} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & ... & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n_1} & ... & k_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример: $n = 1 \Rightarrow mx'' + kx = 0,\ m > 0,\ k > 0$



$M -$ матрица масс, $\quad K -$ матрица жесткостей

1) $M = M^\top,\ K = K^\top\ (m_{ij} = m_{ji},\ k_{ij} = k_{ji})$
2) M > 0 (матрица положительна определена), $K \geq 0$

Определение 1. *Матрица $M = M^\top$ называется положительно определенной, если $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq 0$ выполняется $(M\vec{v}, \vec{v}) > 0$.*

Критерий Сильвестра: $M = M^\top > 0 \Leftrightarrow$ все главные миноры > 0.
1-ый способ: Сведение к системе 1-го порядка.

$$\begin{cases} \vec{y_1} = \vec{x} \\ \vec{y_2} = \vec{x'} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{y_1'} = \vec{y_2} \\ \vec{y_2'} = \vec{x''} = -M^{-1}K\vec{x} = -M^{-1}K\vec{y_1} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{y_1} \\ \vec{y_2} \end{pmatrix} = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & 0 \end{pmatrix}}^{A}}_{n\times n} \begin{pmatrix} \vec{y_1} \\ \vec{y_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{y_1} \\ \vec{y_2} \end{pmatrix} = \underbrace{e^{tA}}_{(2n\times 2n)} \underbrace{\vec{c}}_{(2n\times 1)} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{12}(t) & \Phi_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c_1} \\ \vec{c_2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \vec{y_1}(t) = F_{11}(t)\vec{c_1} + F_{12}(t)\vec{c_2} \quad \text{(2n констант)}$$

Лемма 1. *Если* $M = M^\top > 0$, *то* $\exists M^{-1}$

Доказательство.

$$\text{Пусть не существует } M^{-1} \Rightarrow \underbrace{\det M = 0} \Rightarrow \exists \vec{v} \neq 0 : M\vec{v} = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 0 - \text{собств.знач.}$$
$$\det(M - 0E) = 0$$
$$(M\vec{v}, \vec{v}) = (0, \vec{v}) = 0 - \text{ противоречие}$$

#

Утверждение 1 (из алгебры)**.** *Пусть* $A = A^\top \Rightarrow$ *все собственные числа* $\lambda_j \in \mathbb{R}$.
Пусть $A = A^\top > 0 \Rightarrow$ *все собственные числа* $\lambda_j > 0$.

Утверждение 2 (из алгебры)**.** *Пусть* $A = A^\top \Rightarrow$ *в* $\mathbb{R}^n$ *существует базис из собственных векторов, то есть нет присоединенных*

Утверждение 3 (из алгебры)**.** *Пусть* $A = A^\top \Rightarrow A = UDU^{-1}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

U - ортогональная матрица, то есть $U^{-1} = U^\top$

2-ой способ:

Определение 2. *Число* λ *называется собственным числом системы (1), если* $\det(K - \lambda M) = 0$

Определение 3. *Вектор* $\vec{v} \neq \vec{0}$ *называется собственным вектором системы (1) (вектором нормальных колебаний), если* $(K - \lambda M)\vec{v} = 0$

Теорема 1. *Существует n собственных чисел системы (1) и* $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, 2, ..., n$

Доказательство.

1) $\det(K - \lambda M) = 0$

$$\det\Big(M(M^{-1}K - \lambda E)\Big) = 0$$

$$\underbrace{\det M}_{\neq 0} \det\Big(M^{-1}K - \lambda E\Big) = 0 \Rightarrow \text{ существует n собственных чисел}$$

2) $\vec{v_j}$ - собственные вектора $\Rightarrow K\vec{v_j} = \lambda_j M\vec{v_j} \mid \cdot \vec{v_j}$

$$\underbrace{(Kv_j, v_j)}_{\geq 0} = \lambda_j \underbrace{(Mv_j, v_j)}_{> 0} \Rightarrow \lambda_j \geq 0$$

#

Теорема 2. *В* $\mathbb{R}^n$ *существует базис из собственных векторов системы (1).*

Доказательство будет позже.

Теорема 3. *Пусть $M = M^\top > 0, K = K^\top \geq 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ - собственные числа системы (1), $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ - собственные вектора системы (1), соответвующие числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда все решения системы (1) имеют вид:*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j(t)\vec{v_j},$$

, где $q_j(t)$ - решение дифференциального уравнения: $q_j'' + \lambda_j q_j = 0$

Доказательство.

По теореме 2 $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ - базис в $\mathbb{R}^n$. При фиксированном t $x(t) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x}(t)$ раскладывается по базису: $\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j(t)\vec{v_j}$

Подставляем $x(t)$ в систему (1):

$$M\sum_{j=1}^{n} q_j''(t)\vec{v_j} + K\sum_{j=1}^{n} q_j(t)\vec{v_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(q_j''(t)M\vec{v_j} + q_j(t)\underbrace{K\vec{v_j}}_{\lambda_j M\vec{v_j}}\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(q_j''(t)M\vec{v_j} + \lambda_j q_j(t)M\vec{v_j}\right) = 0 \mid \cdot M^{-1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(q_j''(t) + \lambda_j q_j(t)\right)\vec{v_j} = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Т.к $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ линейно независимы, то $q_j''(t) + \lambda_j q_j(t) = 0$

#

Замечание. $q_j''(t) + \lambda_j q_j(t) = 0$ 1) $\lambda_j = 0 \Rightarrow q_j(t) = c_1 t + c_2$
2) $\lambda_j > 0 \Rightarrow q_j(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\lambda_j}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\lambda_j}t\right)$

Определение 4. $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, ..., \omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ *называется собственными частотами колебаний системы (1).*

Докозательство теоремы 2.

$$M = M^\top > 0 \Rightarrow \underset{>0}{\lambda_1(M)}, ..., \underset{>0}{\lambda_n(M)} - \text{ собственные числа матрицы } M$$

$$M = U\begin{pmatrix}\lambda_1(M) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(M)\end{pmatrix}U^{-1}, \text{ можно взять } U \text{ - ортогональную матрицу, то есть } U^{-1} = U^\top$$

$$\sqrt{M} = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1(M)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n(M)} \end{pmatrix} U^{-1}$$

Видно, что: $\sqrt{M}\sqrt{M} = M$

Пусть $\vec{v_j}$ - собственный вектор: $(K - \lambda_j M)\vec{v_j} = \vec{0}$

$$(K - \lambda_j \sqrt{M} E \sqrt{M})\vec{v_j} = 0$$

$$\sqrt{M}(\underbrace{(\sqrt{M})^{-1} K (\sqrt{M})^{-1}}_{A} - \lambda_j E)\sqrt{M}\vec{v_j} = 0$$

$$\lambda_j - \text{ собственное число } A, \ \sqrt{M}\vec{v_j} - \text{ собственный вектор } A$$

$$A = A^\top, \quad A^\top = \underbrace{[(\sqrt{M})^{-1}]^\top}_{(\sqrt{M})^{-1}} \underbrace{K^\top}_{K} \underbrace{[(\sqrt{M})^{-1}]^\top}_{(\sqrt{M})^{-1}}$$

Из алгебры (утверждение 2.) в $\mathbb{R}^n$ существует базис из собственных векторов матрицы $A : \sqrt{M}\vec{v_1}, ..., \sqrt{M}\vec{v_n}$. Так как $\det \sqrt{M} < 0$, то $v_1, \ldots, v_n$ - базис $\mathbb{R}^n$.

#

2. Линейные неоднородные системы малых колебаний

$$M\vec{x}'' + K\vec{x} = \vec{f}(t) \quad (1)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ M, K - (n \times n), \ M = M^\top > 0, K = K^\top \geq 0, \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

1-способ. Сведение к системы 1-го порядка

2-способ.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *- собственные числа, то есть* $\det(K - \lambda_j M) = 0$, $v_1, \ldots, v_n$ *- собственные вектора, то есть* $(K - \lambda_j M)v_j = 0$

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. *Тогда* $\underbrace{(Mv_1, v_2)}_{v_1, v_2 - M \text{ - ортогональны}} = \underbrace{(Kv_1, v_2)}_{v_1, v_2 - K \text{ - ортогональны}} = 0$

Доказательство.

$$\begin{cases} Kv_1 = \lambda_1 M v_1 | \cdot v_2 \\ Kv_2 = \lambda_2 M v_2 | \cdot v_1 \end{cases} \quad \begin{cases} (Kv_1, v_2) = \lambda_1 (Mv_1, v_2) \\ (Kv_2, v_1) = \lambda_2 (Mv_2, v_1) \end{cases}$$

$$(K\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (v_1, K^\top v_2) = (v_1, K v_2) = (K v_2, v_1)$$

Вычитаем одно из другого:

$$0 = \lambda_1(Mv_1, v_2) - \lambda_2(Mv_2, v_1) = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(Mv_1, v_2) \Rightarrow (Mv1, v_2) = 0 \Rightarrow (Kv_1, v_2) = 0$$

#

Теорема 2. *Пусть $\lambda_1 =, \dots, = \lambda_p$ - собственное число кратности p. Тогда существует собственные вектора $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p$, которые являются M - ортогональными, то есть $(Mw_i, w_j) = 0$ при $i \neq j$*

Доказательство.

Из параграфа 1 (теорема 2) мы знаем, что $\exists \vec{v}_1, ..., \vec{v}_p$ - линейно независимые собственные вектора.

Метод M - ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\vec{w_1} = \vec{v_1}$$

$$\vec{w_2} = \vec{v_2} + \alpha \vec{v_1},\ \alpha - ?,\ (M\vec{w_2}, \vec{w_1}) = 0$$

$$\underbrace{(M\vec{w_2}, \vec{w_1})}_{0} = (M\vec{v_2}, \vec{w_1}) + \alpha(M \underbrace{\vec{v_1}}_{=\vec{w_1}}, \vec{w_1}) \Rightarrow \alpha = -\frac{(M\vec{v_2}, \vec{w_1})}{(M\vec{w_1}, \vec{w_1})}$$

Пусть $\vec{w_1}, ..., \vec{w_{m-1}}$ построены, причем $(M\vec{w_i}, \vec{w_j}) = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, \dots, m-1$

$$\vec{w_m} = \vec{v_m} + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \vec{w_j},\ \beta_j - ?,\ (M\vec{w_m}, \vec{w_i}) = 0,\ i = 1, \dots, m-1$$

$$\underbrace{(M\vec{w_m}, \vec{w_i})}_{0} = (M\vec{v_m}, \vec{w_i}) + \underbrace{\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j (M\vec{w_j}, \vec{w_i})}_{\beta_i \underbrace{(M\vec{w_i}, \vec{w_i})}_{>0}}$$

$$\Rightarrow \beta_i = \frac{-(M\vec{v_m}, \vec{w_i})}{(M\vec{w_i}, \vec{w_i})},\ j = 1, \dots, m-1 \Rightarrow \vec{w_1}, .., \vec{w_p} \text{ - M-ортогональны}$$

#

Теорема 3. *Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собственные числа системы (1), $\vec{w_1}, , ..., \vec{w_n}$ - собственные вектора, которые M-ортогональны. Тогда решение (1) имеет вид:*

$$\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j \vec{w_j}$$

, где $q_j(t)$ *- решение дифференциального уравнения:* $q_j'' + \lambda_j q_j = \tilde{f}_j(t)$

$$\tilde{f}_j = \frac{(\vec{f}(t), \vec{w_j})}{(M\vec{w_j}, \vec{w_j})}$$

Доказательство.

Так как $\vec{w_1}, ..., \vec{w_n}$ - базис в $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x}(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j(t)\vec{w_j} -$ решение (1).

$$M\sum_{j=1}^{n} q_j''(t)\vec{w_j} + \underbrace{K\sum_{j=1}^{n} q_j(t)\vec{w_j}}_{K\vec{w_j} = \lambda_j M\vec{w_j}} = \vec{f}(t)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(q_j''(t) + \lambda_j q_j(t))M\vec{w_j} = \vec{f}(t) | \cdot \vec{w_i}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(q_j''(t) + \lambda_j q_j(t))\underbrace{(M\vec{w_j}, \vec{w_i})}_{\substack{=0, \text{ если } j \neq i \\ \neq 0, \text{ если } j = i}} = (\vec{f}(t), \vec{w_i})$$

$$(q_i''(t) + \lambda_i q_i(t))(M\vec{w_i}, \vec{w_i}) = (\vec{f}(t), \vec{w_i})$$

#

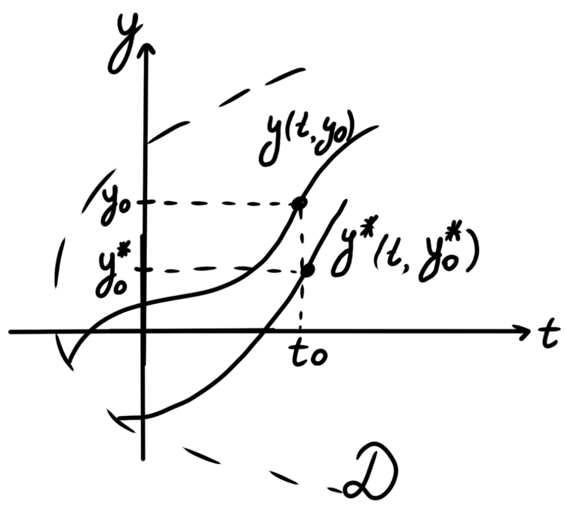
Глава 3: Зависимость решения от параметров

1. Непрерывная зависимость решений от параметров и начальных данных

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \quad f : \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2,\ \mathbb{D} \text{ - решение открытое} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Теорема 1 (Теорама Пикара)**.** *Если* $f \in C(\mathbb{D}),\ \exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{D}) \Rightarrow \forall (t_0, y_0) \in D\ \exists!$ *непродолжаемое решение задачи Коши, определенной на открытом интервале* (α, ω)

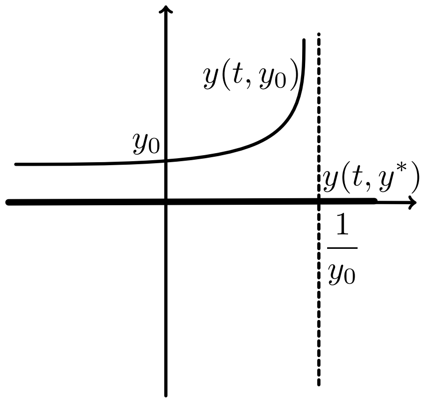
Будем менять y_0
Решение задачи Коши: $y(t; y_0)$



Вопрос: если $y_0 \approx y_0^*$, можно ли утверждать, что $y(t, y_0^*) \approx y(t, y_0)$
Пример:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y^* = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

$$y(t, 0) = 0,\ t \in (-\infty, +\infty) \qquad y(t, y_0) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t},\ t \in \left(-\infty, \frac{1}{y_0}\right)$$



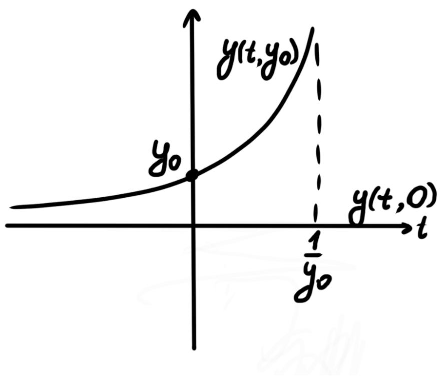
Теорема 2. *Пусть* $f \in C(\mathbb{D})$, $\exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{D})$. *Пусть* $(t_0, y_0^*) \in \mathbb{D}$. *Пусть* $y(t, y_0^*)$ *- решение задачи Коши, определенное на интервале* (α, ω). *Возьмем* $[t_1, t_2] \subset (\alpha, \omega)$. *Тогда:*

1) $\exists \Delta > 0,\ \forall y_0 : |y_0 - y_0^*| < \Delta \Rightarrow y(t, y_0)$ *определенно при* $t \in [t_1, t_2]$*;*

2) $y(t, y_0) \xrightarrow{y_0 \to y_0^*} y(t, y_0^*),\ t \in [t_1, t_2]$

Пример:

$$(t_0, y_0^*) = (0, 0) \Rightarrow y(t, y_0^*) \equiv 0,\ (\alpha, \omega) = (-\infty, +\infty). \text{ Возьмем: } [-T, T]$$



$$1)\ y_0 > 0;\ T < \frac{1}{y_0} \Leftrightarrow y_0 < \frac{1}{T} = \Delta$$

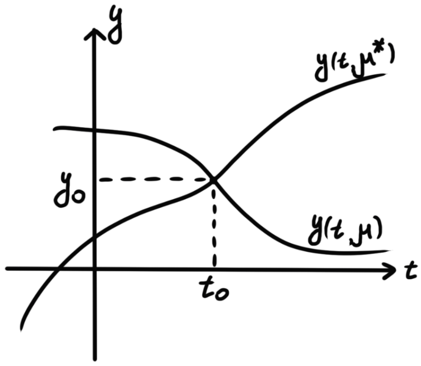
$$2)\ y(t, y_0) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t} \xrightarrow{y_0 \to 0} 0,\ t \in [-T, T]$$

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2,\ \mathbb{D} \text{ - непустое открытое множество}$$

Зависимость от параметра:

$$\begin{cases} y' = f(t, y, \mu^*) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, \mu^*) \text{ - решение}$$

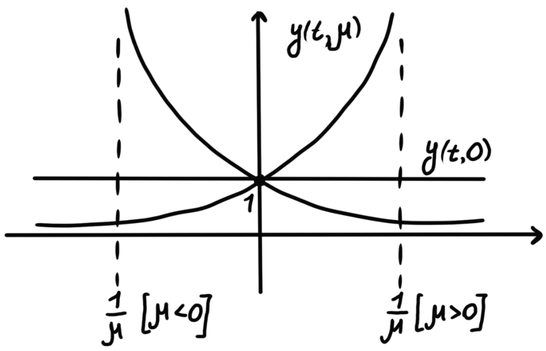
$$\begin{cases} y' = f(t, y, \mu) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, \mu) \text{ - решение}$$



Пример 2:

$$\begin{cases} y = \mu^* y^2 = 0 \cdot y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t,0) = 1$$

$$\begin{cases} y = \mu y^2 = 0 \cdot y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t,\mu) = \frac{1}{1-\mu t}$$



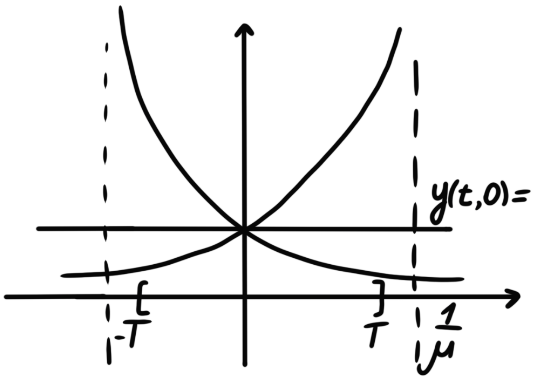
Теорема 2. *$f : B \to \mathbb{R},\ B \subset \mathbb{R}^3,\ B$ - непустое множество. Пусть $f \in C(B)$, $\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(B),\ (t_0, y_0, \mu^*) \in B$. Пусть $y(t,\mu^*)$ определено на интервале (α, ω).*
Возьмем $[t_1, t_2] \in (\alpha, \omega)$:
1) $\exists \Delta > 0,\ \forall \mu : |\mu - \mu^*| < \Delta \Rightarrow y(t,\mu)$ определено на $[t_1, t_2]$
2) $y(t,\mu) \xrightarrow{\mu \to \mu^*} y(t,\mu^*)\ \forall t \in [t_1, t_2]$

Пример 2:

$$f(t,y,\mu) = \mu y^2,\ B = \mathbb{R}^3,\ f \in C(\mathbb{R}^3),\ \exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^3),\ (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$$

$$y(t,\mu^*) = y(t,0) = 1,\ (\alpha,\omega) = (-\infty, \infty)$$

Возьмем $[-T, T] \subset (-\infty, \infty)$



$$1)\ \mu > 0 : \frac{1}{\mu} > T \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{T} \quad \mu < 0 : \frac{1}{\mu} < -T \Leftrightarrow \mu > -\frac{1}{T}$$

$$-\frac{1}{T} < \mu < \frac{1}{T} \Leftrightarrow |\mu| < \frac{1}{T} = \Delta$$

$$2)\ t \in [-T, T] : \frac{1}{1 - \mu T} \xrightarrow{\mu \to 0} 1$$

Доказательство теоремы 1 с использованием теоремы 2.

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0^* \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, y_0^*)$$

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, y_0)$$

Замена переменных $z(t, y_0) = y(t, t_0) - y_0$

$$\begin{cases} y'_t = z'_y + (y'_0)_t = z'_t = f(t, y) = f(t, z + y_0) \\ z(t_0) = y(t_0) - y_0(t_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'_t = f(t, z + y_0) \\ z(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{Замена: } y_0 = \mu \begin{cases} z'_t = f(t, z + \mu) \\ z(t_0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по теоремы 2 выполнено 1) и 2) $\Rightarrow$ выполнено 1) и 2) из теоремы 1

#

2. Дифференцируемость решений по параметрам и начальным данным

$$\begin{cases} y' = f(t, y, \mu) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, \mu) \text{ Хотим } : \exists \frac{\partial y}{\partial \mu}$$

Пусть $\exists \frac{\partial y}{\partial \mu}$ - непрерывна. Тогда по формуле Тейлора:

$$y(t, \mu) = y(t, \mu^*) + \frac{\partial}{\partial \mu} y(t, \mu^*)(\mu - \mu^*) + \underbrace{g(t, \mu)}_{o(\mu - \mu^*)}, \quad \underbrace{\lim_{\mu \to \mu^*} \frac{g(t, \mu)}{\mu - \mu^*} = 0}_{\text{определено мало}}$$

$$f : B \to \mathbb{R},\ B \subset \mathbb{R}^3,\ B \text{ - непустое открытое множество}$$

Теорема 3. Пусть $f \in C(B),\ \exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(B),\ \exists \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(B)$. Пусть $(t_0, y_0, \mu^*) \in B, y(t, \mu^*)$ определено на (α, ω). Возьмем $[t_1, t_2] \in (\alpha, \omega)$. Тогда:

0) $\exists \Delta > 0,\ \forall \mu : |\mu - \mu^*| < \Delta \Rightarrow y(t, \mu)$ определено на $[t_1, t_2]$

1) $\exists \dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu) \in C(P)$, где $P = \{(t, \mu) : t \in [t_1, t_2],\ |\mu - \mu^*| < \Delta\}$

2) $\exists \dfrac{\partial^2 y}{\partial \mu \partial t} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t \partial \mu} \in C(P)$

3) $\underbrace{v(t, \mu)}_{\frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu)}$ - решение задачи Коши:

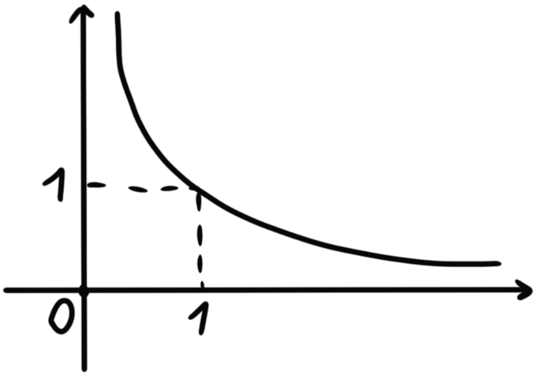
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v = \dfrac{\partial f}{\partial y} v + \dfrac{\partial f}{\partial \mu} \leftarrow \text{ уравнение в вариациях Пуанкаре} \\ v(t_0) = 0 \end{cases}$$

Пример 3:
Найти решение $y(y, \mu)$ при μ, близких к нулю.

$$\begin{cases} y' = 4t\mu - y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, \mu)$$

$$\mu = \mu^* = 0, \quad \begin{cases} y' = -y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad y(t, 0) = \frac{1}{t},\ t \in \underbrace{(0, +\infty)}_{(\alpha, \omega)}$$

$$f(t, y, \mu) = 4t\mu - y^2,\ B = \mathbb{R}^3$$



$$f \in C(B),\ \exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(B),\ \exists \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(\mathbb{R}),\ (1,1,0) \in \mathbb{R}^3$$

Возьмем $[t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$

$$\Rightarrow 0) \exists \Delta > 0 : \forall \mu : |\mu| < \Delta \Rightarrow y(t,\mu) \text{ - определено на } [t_1, t_2]$$

$$\Rightarrow 1) \exists \frac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu) \in C(P)$$

$$\Rightarrow y(t,\mu) = \underbrace{y(t,0)}_{\frac{1}{t}} + \frac{\partial y}{\partial \mu}(t,0)\mu + o(\mu),\ t \in [t_1, t_2]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(t,\mu) = 4t\mu - y^2(t,\mu) \\ y(t,\mu)|_{t=1} = 1 \end{cases}$$

Дифференцируем по μ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \mu}\dfrac{\partial}{\partial t} y(t,\mu) = 4t - 2y(t,\mu) \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu) \\ \dfrac{\partial}{\partial \mu} y(t,\mu)|_{t=1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)}_{v(t,\mu)} = 4t - 2y(t,\mu) \cdot \underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)}_{v(t,\mu)} \\ \underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)}_{v(t,\mu)} |_{t=1} = 0 \end{cases}$$

$$\mu = 0:\ \text{Обозначим } w(t) = \frac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)|_{\mu=0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} w(t) = 4t - \underbrace{2y(t,0)}_{\frac{1}{t}} w(t) \\ w(t)|_{t=1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w' = 4t - \dfrac{2}{t} w \\ w(1) = 0 \end{cases}$$

1) Ищем решение однородного уравнения:

$$w' = -\frac{2}{t}w \Rightarrow w = \frac{c}{t^2}$$

2) Ищем частное решение:

$$w(t) = \frac{u(t)}{t^2}$$

$$\frac{u'(t)}{t^2} - \frac{2u(t)}{t^3} = 4t - \frac{2}{t}\frac{u(t)}{t^2} \Rightarrow u'(t) = 4t^3$$

$$u(t) = t^4 + \tilde{c}$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$w(t) = \frac{t^4 + c}{t^2} = \frac{t^4 - 1}{t^2}$$

$$\Rightarrow y(t,\mu) = \frac{1}{t} + \frac{t^4 - 1}{t^2}\mu + o(\mu),\ t \in [t_1, t_2] \subset (0, +\infty),\ |\mu| < \Delta$$

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t, y_0)$$

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2,\ \mathbb{D} \text{ - непустое открытое множество}$$

Теорема 4. Пусть $f \in C(\mathbb{D})$, $\exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{D})$. Пусть $(t_0, y_0^*) \in \mathbb{D}$, $y(t, y_0^*)$ определено на (α, ω). Возьмем $[t_1, t_2] \subset (\alpha\omega)$. Тогда:
0) $\exists \Delta > 0,\ \forall y_0 : |y_0 - y_0^*| < \Delta \Rightarrow y(t, y_0)$ определено на (α, ω)
1) $\exists \frac{\partial y}{\partial y_0} \in C(P)$, где $P = \{(t, y_0) : t \in [t_1, t_2],\ |y_0 - y_0^* < \Delta|\}$
2) $\exists \frac{\partial^2 y}{\partial \mu \partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial y_0 \partial t_0} \in C(P)$
3) $v(t, y_0) = \frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0)$ -решение задачи Коши: $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v = \dfrac{\partial f}{\partial y} v \\ v(t_0) = 1 \end{cases}$

Глава 4: Периодические решения

1. Периодические решения линейных систем

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \quad (1)$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = (a_{ij}(t)) - (n \times n), \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}(t) \in C(\mathbb{R}),\ f_j(t) \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists! \text{ решение задачи Коши } \begin{cases} \frac{d}{dt}y = A(t)y + f(t) \\ y(t_0) = t_0 \end{cases}$$

$$y(t) \text{ - определенно при } t \in \mathbb{R}$$

$$a_{ij}(t+T) = a_{ij}(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ T > 0 \text{ - период}$$
$$f_j(t+T) = f_j(t)$$

Хотим узнать, существуют ли у системы (1) периодические решения, то есть $\vec{y}(t+T) = \vec{y}(t)$.

Теорема 1. *Вектор функция $\vec{y}(t)$ является T-периодическии решением системы (1) $\Leftrightarrow \vec{y}(0) = \vec{y}(T)$*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$: очевидно

$(\Leftarrow)$:

Обозначим $\vec{y}(0) = \vec{y}(T) = \vec{y}_0$

Рассмотрим задачу Коши $\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \exists!$ решение $\vec{y}(t)$

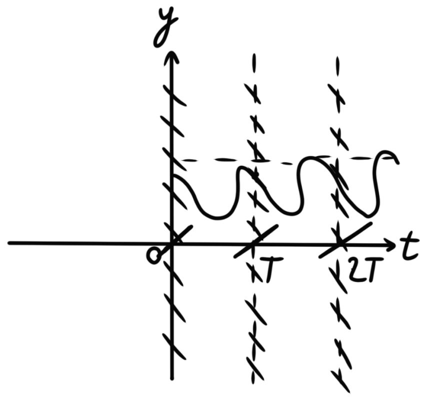
Рассмотрим функцию $\vec{z}(t) = \vec{y}(t+T)$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{z}(t) = \frac{d}{dt}\vec{y}(t+T) = \underbrace{A(t+T)}_{A(t)}\underbrace{\vec{y}(t+T)}_{\vec{z}(t)} + \underbrace{\vec{f}(t+T)}_{\vec{f}(t)} \\ \vec{z}(0) = \vec{y}(T) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

, получим такую же задачу Коши $\Rightarrow \vec{z}(t) = \vec{y}(t) \Rightarrow \vec{y}(t+T) = \vec{y}(t)$

#

$$y' = a(t)y + f(t)$$
$$a(t+T) = a(t)$$
$$f(t+T) = f(t)$$



Теорема 2. *∃! T-периодическое решение системы (1)* $\Leftrightarrow \det(\Phi(T) - \Phi(0)) \neq 0$, *где* $\Phi(t)$ *- ФМР системы* $\dfrac{d}{dt}\vec{y}(t) = A(t)\vec{y}(t)$

Доказательство. Все решения системы
$\vec{y}(t) = \vec{y}_{oo}(t) + \vec{y}_{ч}(t) = \Phi(t)\vec{c} + \Phi(t) \cdot \int_0^t \Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$

По теореме 1. : $\vec{y}(0) = \vec{y}(T)$:

$$\Phi(0)\vec{c} + \Phi(0)\int_0^0 \Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds = \Phi(T)\vec{c} + \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$$

$$\Phi(0)\vec{c} = \Phi(T)\vec{c} + \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$$

$$(\Phi(0) - \Phi(T))\vec{c} = \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds \Leftrightarrow B\vec{c} = \vec{\psi}$$

$$\exists!\ T\text{-периодическое решение } \Leftrightarrow \exists!\ \vec{c} \Leftrightarrow \det(\Phi(0) - \Phi(T)) \neq 0$$

#

Замечание. *Если* $\det B = \det(\Phi(0) - \Phi(T)) = 0$, *то*
1) $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank}(B|\vec{\psi})$, *то* $\exists\infty$ *много T-периодических решений*
2) $\operatorname{rank} B \neq \operatorname{rank}(B|\vec{\psi})$, *то не существует T-периодических решений.*

Теорема 3. *Пусть* $A(t) = A$ *- постоянная матрица ,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *- собственные числа* A $\exists! T$*-периодическое решение системы (1)* $\Leftrightarrow \forall \lambda_j$ *выполняется* $e^{\lambda_j T} \neq 1$

Замечание. $e^{\lambda_j T} \neq 1 \Leftrightarrow \lambda_j T \neq 2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

Если $A(t) = A$, то $\Phi(t) = e^{tA}$

Из теоремы 2. $\exists!$ T -периодическое решение $\Leftrightarrow \det\left(e^{TA} - E\right) = 0$

$$\mu_1, \ldots, \mu_n - \text{ собственные числа матрицы } e^{TA} \Rightarrow \forall \mu_j \ \mu_j \neq 1$$

$$A = SYS^{-1} =, \ e^{TA} = Se^{TY}S^{-1}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad e^{TY} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{\lambda_n T} \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_j = e^{\lambda_j T}$$

$\#$

2. Периодические решения для линейных уравнений высокого порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0 y = f(t) \quad (2)$$

$$a_j(t), \ f(t) \in C(\mathbb{R}), \quad a_j(t+T) = a_j(t), \quad f(t+T) = f(t), \ t \in \mathbb{R}$$

Цель: найти решение $y(t) : y(t+T) = y(t)$

Теорема 1. *Функция $y(t)$ является T-периодическим решением уравнения (2)* $\Leftrightarrow$ $y(0) = y(T), \ y'(0) = y'(T), \ldots, y^{(n-1)}(0) = y^{(n-1)}(T)$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

Дано:

$$y(t+T) = y(t), \ t \in \mathbb{R}$$
$$y'(t+T) = y'(t)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(t+T) = y^{(n-1)}(t)$$
$$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow \text{ получаем требуемое}$$

$(\Leftarrow)$:

Сведем уравнение к системе:

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & ... & ... & ... & 1 \\ -a_0 & -a_1 & ... & ... & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A_n(t)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$y_1(0) = y_1(T), \quad y_2(0) = y_2(T), ..., y_n(0) = y_n(T)$$

$$(3) : \begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y} = A_n(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}(T) \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ по теореме 1. } \vec{y}(t+T) = \vec{y}(t)$$

В частности, $y_1(t+T) = y_1(t)$

#

Теорема 2. $\exists!$ *T-периодическое решение уравнения (2)* $\Leftrightarrow \det(\Phi(T) - \Phi(0)) \neq 0$, *где* $\Phi(t)$ *- ФМР однородной системы (3), то есть:*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & ... & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & ... & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & ... & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \{\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)\} \text{ - ФСР для однородного уравнения (2)}$$

Доказательство следует из теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $a_j(t) = a_j$ *- постоянные коэффициенты. Рассмотрим характеристическое уравнение:* $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *- его корни.* $\exists!$ *T-периодическое решение уравнения (2)* $\Leftrightarrow \forall\lambda_j$ *выполняется* $e^{\lambda_j T} \neq 1$

Доказательство.

Сведем уравнение к системе, получим систему (3).
По теореме 3. $\exists!$ T-периодическое решение системы (3) $\Leftrightarrow \forall\lambda_j(A_n)$-собственные числа матрицы A выполняется $e^{\lambda_j T} \neq 1$

В прошлом семестре: $\det(A_n - \lambda E) = (-1)^n[\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0]$

#

3. Нахождение периодических решений с помощью рядов Фурье

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f(t) \quad (4)$$

$$\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ f(t) \in C(\mathbb{R}),\ f(t+T) = f(t),\ t \in \mathbb{R}$$

$f(t)$ - кусочно-гладкая

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt$$

Замена $\frac{2\pi}{T}t = s \Leftrightarrow t = \frac{T}{2\pi}s$:

$$f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}s\right) = \tilde{f}(s) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\underbrace{f(t+T)}_{f(t)=\tilde{f}(s)} = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{T}(t+T)\right) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi\right) = \tilde{f}(s+2\pi)$$

$$y(t) = y\left(\frac{T}{2\pi}s\right) = \tilde{y}(s) = \tilde{y}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\tilde{y}(s) = \frac{d}{ds}\tilde{y}(s)\frac{ds}{dt} = \tilde{y}'(s)\cdot\frac{2\pi}{T}$$

$$y''(t) = \tilde{y}''(s)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$(4) \Leftrightarrow \tilde{y}''(s)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \alpha\tilde{y}'(s)\cdot\frac{2\pi}{T} + \beta\tilde{y}(s) = \tilde{f}(s) \Leftrightarrow \tilde{y}''(s) + \alpha\tilde{\alpha}\tilde{y}'(s) + \tilde{\beta}\tilde{y}(s) = \tilde{\tilde{f}}$$

$$\tilde{\tilde{f}}(s+2\pi) = \tilde{\tilde{f}}(s)$$

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!