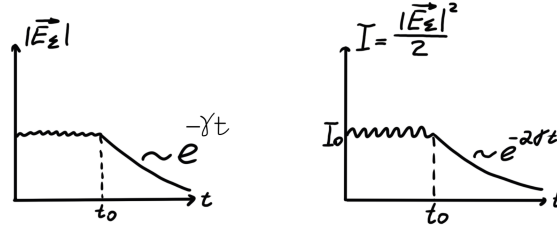


$$\vec{E}_\Sigma = \sum_{m=1}^{M_0} e^{i\omega_0(t-t_m)-\gamma(t-t_m)} \underbrace{\vec{E}\left(\frac{L}{\gamma_m}\right)}_{\approx 1} = e^{i\omega_0 t - \gamma t} \underbrace{\sum \vec{E}_0 e^{i\omega t_m + \gamma t_m}}_{=\vec{E}_{00} \text{ постоянн. вектор}}$$

Рассмотрим эволюцию поля E_Σ после выключения источника появления новых излучающих атомов.



При $t > t_0$ $I(t) = I_0 e^{-2\gamma t} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -2\gamma I(t)$

Так как число членов ряда в сумме $\sum_{m=1}^{M_0}$ с ростом времени растет, а вклад атомов начавших излучать с самых ранних времен, экспоненциально мал, то введем $N_{\text{эф}}$ - число эффективно излучающих атомов:

$$I(t) = N_{\text{эф}} \frac{|\vec{E}_0|^2}{2} \Rightarrow \frac{dN_{\text{эф}}}{dt} \cdot \frac{|\vec{E}_0|^2}{2} = -2\gamma N_{\text{эф}} \frac{|\vec{E}_0|^2}{2}$$

$$\frac{dN_{\text{эф}}}{dt} = -2\gamma N_{\text{эф}} + p$$

, где p - скорость появления новых излучающих атомов \Rightarrow в стационарном процессе
 $\frac{dN_{\text{эф}}}{dt} = 0 \Rightarrow p = 2\gamma \bar{N}_{\text{эф}}$

В точке P: $\vec{E}_0 = E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y$, E_{0x} и $E_{0y} \in \mathbb{C}$

Так как $I_{12} = \text{Re}(\vec{E}_1(\vec{r}), \vec{E}_2^*(\vec{r})) = 0$, при $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$, то I_x и I_y не интерферируют и могут быть вычислены отдельно:

$$I = I_x + I_y = \langle (\text{Re}\vec{E}_{\Sigma x}(t))^2 \rangle + \langle (\text{Re}\vec{E}_{\Sigma y}(t))^2 \rangle =$$

$$= \left\langle \left(\sum_{m=1} |E_{0x}| \cos[\omega_0(t-t_m) - \varphi_x] e^{-\gamma(t-t_m)}, \sum_{n=1} |E_{0x}| \cos[\omega_0(t-t_n) - \varphi_x] e^{-\gamma(t-t_n)} \right)^2 \right\rangle + \langle (\text{Re}\vec{E}_{\Sigma y})^2 \rangle =$$

$$I_x = \sum_{n=m} |E_{0x}|^2 \langle \cos^2(\omega_0(t-t_m) - \varphi_x) \rangle e^{-2\gamma(t-t_m)} +$$

$$+ \left\langle \sum_n \sum_m \frac{|E_{0x}|^2}{2} \{ \cos(\omega_0(2t-t_m-t_n) - 2\varphi_x) + \cos \omega_0(t_m-t_n) \} e^{-\gamma(2t-t_m-t_n)} \right\rangle$$

, где во втором членом $\cos \omega_0(t_m-t_n)$ с ростом числа атомов растет $\sim \sqrt{N_{\text{эф}}}$.

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\gamma(t-t_m)} \rightarrow \int_{-\infty}^t e^{-2\gamma(t-t')} \underbrace{p dt'}_{dm} = p(-1) \int_{\infty}^0 e^{-2\gamma t''} dt'' = \frac{p}{2\gamma} = \bar{N}_{\text{эф}}$$

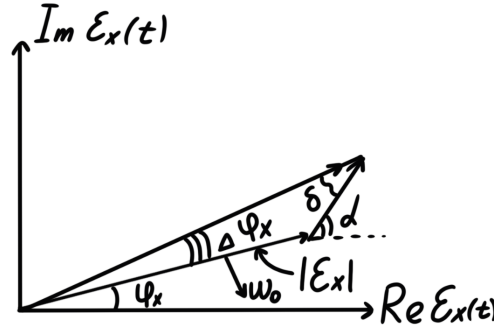
$$I = I_x + I_y = \frac{|E_{ox}|^2}{2} \bar{N}_{\text{эф}} + \frac{|E_{oy}|^2}{2} \bar{N}_{\text{эф}} = \frac{|E_o|^2}{2} \bar{N}_{\text{эф}}$$

$$E_{\Sigma x}(t) = \varepsilon_x(t) e^{-i\omega_0 t}$$

, где $\varepsilon(t)$ - амплитуда $\in \mathbb{C}$.

$$\langle (\text{Re} E_{\Sigma x})^2 \rangle = \langle |\varepsilon_x(t)|^2 \rangle \langle \cos^2(\omega_0 t - \arg \varepsilon_x(t)) \rangle = \frac{\langle |\varepsilon_x(t)|^2 \rangle}{2} = \frac{|E_{0x}|^2}{2} \bar{N}_{\text{эф}}$$

$$\langle |\varepsilon_x| \rangle = \sqrt{N_{\text{эф}}} |E_{0x}|, \quad \frac{\Delta |\varepsilon_x|}{|\varepsilon_x|} \approx \frac{|E_{0x}|}{\sqrt{N_{\text{эф}}} |E_{0x}|} \sim \frac{1}{\sqrt{N_{\text{эф}}}}$$



$$E_{0x}, \varepsilon_x(t) \in \mathbb{C}, \quad \alpha = \arg E_{0x}$$

В момент времени $t_m = t_{m0} + \frac{r_m}{c}$ начал излучать m -ый атом.

$$\frac{\sin(\delta\varphi_x)}{|E_{0x}|} = \frac{\sin \delta}{|\varepsilon_x(t)|}, \quad \text{т.к. } \delta\varphi_x \ll 1 \Rightarrow \delta + \pi - (\alpha - \varphi_x) \approx \pi$$

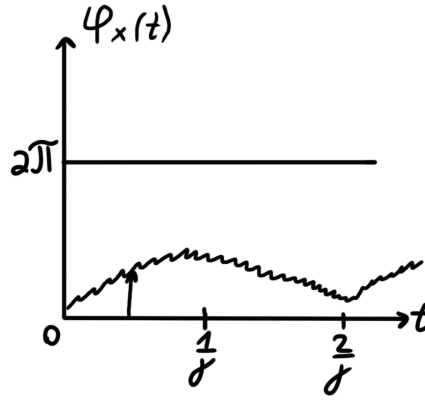
$$\delta\varphi_x = \frac{|E_{0x}|}{|\varepsilon_x(t)|} \sin(\alpha - \varphi_x) = \frac{|E_{0x}|}{|\varepsilon_x(t)|} \sin(\alpha - \omega_0 t_m - \underbrace{\arg \varepsilon_x(t)}_{\approx \text{const}})$$

$$\langle \delta\varphi_x \rangle \stackrel{\text{no } t_m}{=} 0, \quad \langle \delta\varphi_x^2 \rangle = \frac{|E_{0x}|^2}{|\varepsilon_x(t)|^2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2N_{\text{эф}}}$$

Коэффициент диффузии по φ_x (аналогично броуновскому движению) вычисляется так:

$$\frac{\langle \delta\varphi_x^2 \rangle}{\Delta t} = \frac{\langle \delta\varphi_x^2 \rangle}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{2N_{\text{эф}}} = \gamma$$

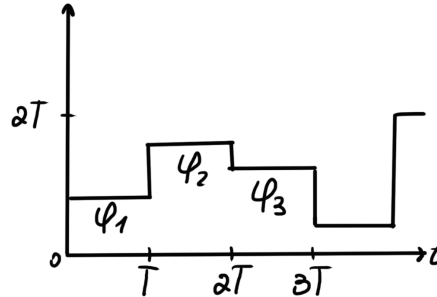
, где Δt - характерный промежуток времени между появлением новых атомов. Пусть $\langle \delta\varphi^2 \rangle = 1 \Rightarrow \Delta t_0 = \frac{1}{\gamma}$



Изменение $\delta\varphi_x$ на $\Delta t < \Delta t_0 = \frac{1}{\gamma}$ мало (фаза почти постоянная), а на $\Delta t > \Delta t_0$ фаза $\varphi_x(t)$ - случайная величина $[0, 2\pi]$

Вывод: в стационарном случайном процессе излучения скопления атомов амплитуда суммарной волны почти постоянная (флуктуации $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \sim \frac{1}{\sqrt{N_{\text{эф}}}}$), а фаза этой волн почти постоянна на промежутках $\Delta t < \frac{1}{\gamma}$ и случайно меняющаяся величина на $\Delta t > \frac{1}{\gamma}$.

γ - дескремент затухания от одного атома



Приближенная модель такого поля $\varepsilon_x = \text{const}$, а $\varphi_x(t)$ случайная величина в $[0, 2\pi]$.

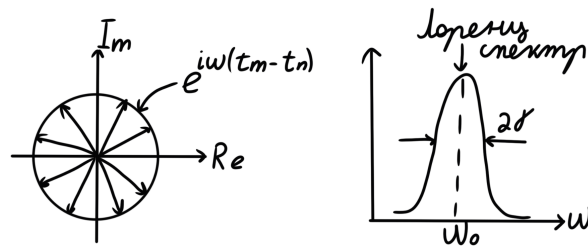
Вычислим спектр суммарного поля:

$$\vec{E}_{\Sigma}(\omega) = \sum \vec{E}_0 e^{-i\omega_0(t-t_m) - \gamma(t-t_m)}$$

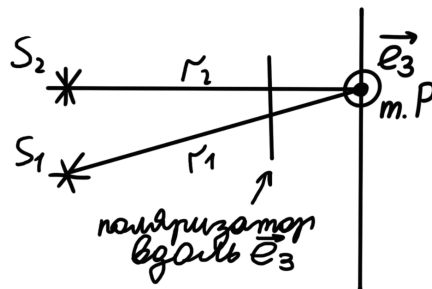
$$\hat{\vec{E}}_{\Sigma}(t) = \sum_m \hat{\vec{E}}_a(\omega) e^{i\omega t_m}$$

Спектральная плотность энергии: $|\vec{E}_{\Sigma}(\omega)|^2 = \left(\sum_m \hat{\vec{E}}_a(\omega) e^{i\omega t_m}, \sum_n \hat{\vec{E}}_a^*(\omega) e^{-i\omega t_n} \right) =$

$$|\vec{E}_a(\omega)|^2 \left\{ \sum_{n=m=1}^{N_{\text{эф}}} + \sum_{n \neq m}^{N_{\text{эф}} N_{\text{эф}}} e^{i\omega(t_m - t_n)} \right\} \Rightarrow |\vec{E}_{\Sigma}(\omega)|^2 = |\vec{E}_a(\omega)|^2 N_{\text{эф}}$$



Опыт Юнга:



$$\vec{E}_{\Sigma 1} = \vec{E}_{01} \frac{L}{r_1} e^{ikr_1 - i\omega_0 t + i\varphi_1(t)}$$

$$\vec{E}_{\Sigma 2} = \vec{E}_{02} \frac{L}{r_2} e^{ikr_2 - i\omega_0 t + i\varphi_2(t)}$$

$$I_{12} = \langle \text{Re}(E_{\Sigma 1}, E_{\Sigma 2}^*) \rangle = |\vec{E}_{01}| |\vec{E}_{02}| \frac{L^2}{r_1 r_2} \langle \cos(k(r_1 - r_2) + \varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \rangle$$

Если временное разрешение прибора $\tau_0 < \text{время изменения фаз } \varphi_1 \text{ и } \varphi_2 \left(\sim \frac{1}{\gamma} \right)$, то интерференционная картина видна и поля когерентные.

Если $\tau_0 > \frac{1}{\gamma}$, то $\langle \cos() \rangle = 0 \Rightarrow$ поля некогерентные.