

## 1. Продолжение: $E$ волна в прямоугольном волноводе

$$E_z \neq 0, \quad B_z = 0$$

$$\Delta_{\perp} E_z(x, y) + \varkappa^2 E_z(x, y) = 0$$

$$\Gamma.Y \quad E_z|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow E_z(x, y) = E_1(x)E_2(y)$$

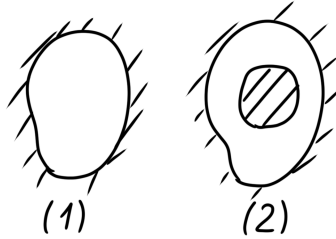
$$\underbrace{\frac{E_1''(x)}{E_1(x)}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{E_2''(y)}{E_2(y)}}_{-k_y^2} + \varkappa^2 = 0 \Rightarrow E_z(x, y) = E_0 \sin(k_x x + \alpha_x) \sin(k_y y + \alpha_y)$$

$$\Gamma.Y \quad E_z|_{y=0, y=b} = 0 \Rightarrow \alpha_y = 0, \quad k_y b = n_y \pi, \quad E_z|_{x=0, x=a} \Rightarrow \alpha_x = 0, \quad k_x a = n_x \pi, \quad n_x, n_y \in \mathbb{Z}$$

$$E_z(\vec{r}, t) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{ik_z z - i\omega_{n_x, n_y} t}, \quad \frac{\omega_{n_x, n_y}^2 \varepsilon \mu}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

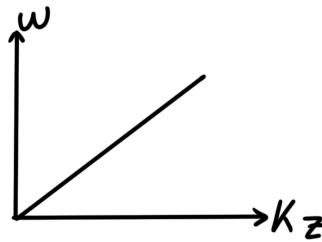
Мода минимальной частоты:  $E_{11}$  ( $n_x = 1, n_y = 1$ )

## 2. ТЕМ-волны в неодносвязных волноводах



(1) - односвязный волновод, (2) - двухсвязный волновод;

В (2) помимо  $E$  и  $H$  - волн существует ТЕМ-волна, с  $E_z = 0, B_z = 0$ . Дисперсионное соотношение так же как для плоских монохроматических волн в свободном растворе:



для случая  $\varepsilon(\omega) = \text{const}, \mu(\omega) = \text{const}$

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu = k_z^2$$

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) e^{ik_z z - i\omega t}$$

$$\vec{B}_\perp(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y) e^{ik_z z - i\omega t}$$

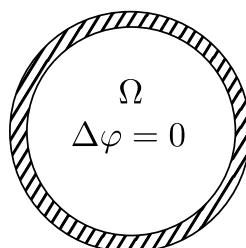
$$\left(\text{rot} \vec{E}\right)_z = \frac{i\omega}{c} (\vec{B})_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \text{ ищем решение в таком виде: } \vec{E} = -\nabla_\perp \varphi$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\text{div} \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = 0 \Rightarrow \Delta_\perp \varphi = 0$$

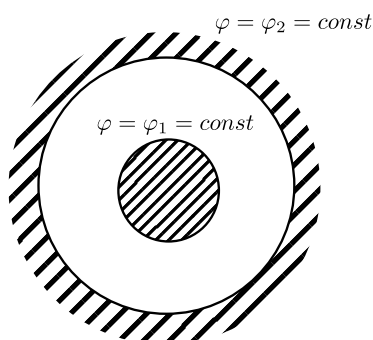
Из  $E_\tau|_\Gamma \Rightarrow \varphi|_\Gamma = \text{const}$

Почему в односвязном волноводе нет таких волн:

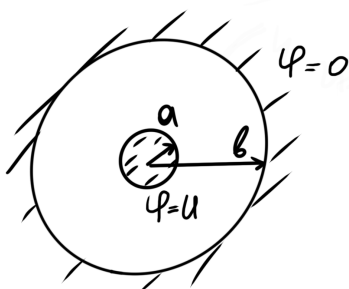


Из теоремы единственности  $\varphi = \text{const}$  в  $\Omega \Rightarrow -\nabla_\perp \varphi = 0$

Для многосвязных волноводов



**Коаксиальный волновод (кабель):**



$$\Delta_{\perp} \varphi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

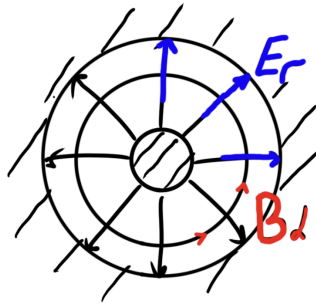
Зависимость от  $\alpha$  исключим  $\Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{A}{r}$ ,  $A = \text{const} \Rightarrow \varphi(r) = A \ln r + B$

$$\varphi|_{r=b} = 0, \varphi|_{r=a} = U \Rightarrow A \ln b + B = 0, A \ln a + B = U \Rightarrow A = \frac{U}{\ln \frac{a}{b}}, B = -A \ln b$$

$$\varphi(r) = \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} = \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{b}{r}, E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_r \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{r} e^{ik_z z - i\omega t}, \vec{B} = \frac{c}{i\omega} \text{rot} \vec{E} = \frac{c}{i\omega} ik_z \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{r} e^{ik_z z - i\omega t} \vec{e}_{\alpha}, \frac{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}}{c} = k_z$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_{\alpha} \sqrt{\varepsilon \mu} \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{r} e^{ik_z z - i\omega t}$$



### 3. Распространение волн в неоднородных средах

Рассмотрим только монохроматические электромагнитные волны  $\varepsilon(\omega, \vec{r})$ ,  $\mu(\omega, \vec{r})$ , будем рассматривать частный случай при заданной  $\omega \Rightarrow \varepsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r})$ .

Малый параметр  $\varepsilon \sim \frac{\lambda - \text{характерная длина волны}}{L - \text{масштаб неоднородности среды}} \ll 1$ .

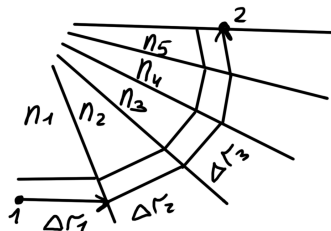
Решение уравнений Максвелла для однородной системы:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r}) - i\omega t}, \vec{E}_0 \perp \vec{k}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r}) - i\omega t}, \vec{B}_0 \perp \vec{k}$$

Искривления изображения в нагретом воздухе  $\Rightarrow$  отклонение волн от прямолинейного распространения.

1) Зависимости  $\vec{E}_0$  и  $\vec{B}_0$  от  $\vec{r}$  | Связь  $k$  и  $\omega$ :  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \Rightarrow k = \frac{\omega}{c} n(\omega)$



$$\Delta\varphi(\text{сдвиг по фазе}) = k_1\Delta r_1 + k_2\Delta r_2 + \dots + \sum k_i\Delta r_i = k_0 \sum n_i\Delta r_i = k_0 \int_1^2 n(\vec{r})ds = \psi(\vec{r}) - \text{оптический путь}$$

- скалярная функция  $\vec{r}$  - эйконал.

Пусть  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{ik_0\psi(\vec{r}) - i\omega t} \rightarrow$  в уравнение Максвелла, где  $\vec{E}_0$  медленная функция от  $\vec{r}$ , изменяется на масштабе  $L$ .

$$\text{rot} \left[ \vec{E}_0(\vec{r}) e^{ik_0\psi(\vec{r}) - i\omega t} \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{B}_0 e^{ik_0\psi(\vec{r}) - i\omega t} \right]$$

$$\left[ \nabla \times \vec{E}_0(\vec{r}) e^{ik_0\psi(\vec{r})} \right] = \frac{i\omega}{c} \vec{B}_0(\vec{r})$$

$$e^{ik_0\psi(\vec{r})} e^{ik_0\psi(\vec{r})} \left[ \nabla \times \vec{E}_0(\vec{r}) \right] + \left[ \nabla e^{ik_0\psi(\vec{r})} \times \vec{E}_0(\vec{r}) \right] = \frac{i\omega}{c} \vec{B}_0(\vec{r}) e^{ik_0\psi(\vec{r})}$$

$$e^{ik_0\psi(\vec{r})} \text{rot} \vec{E}_0(\vec{r}) + e^{ik_0\psi(\vec{r})} ik_0 \left[ \nabla \psi(\vec{r}) \times \vec{E}_0(\vec{r}) \right] = \frac{i\omega}{c} \vec{B}_0(\vec{r}) e^{ik_0\psi(\vec{r})}$$

$$\underbrace{\text{rot} \vec{E}_0(\vec{r})}_{\sim \frac{\vec{E}_0(\vec{r})}{L}} + \underbrace{ik_0 \left[ \nabla \psi(\vec{r}) \times \vec{E}_0(\vec{r}) \right]}_{\substack{= \frac{2\pi}{\lambda_0} \\ \sim 1 \vec{E}_0(\vec{r})}} = \frac{i\omega}{c} \vec{B}_0(\vec{r})$$

$E/1 \text{ см} \qquad E_0/10^{-4} \text{ см}$

$$\Rightarrow \left[ \nabla \psi(\vec{r}) \times \vec{E}_0(\vec{r}) \right] = \vec{B}_0(\vec{r}), \quad \mu(\vec{r}) \text{rot} \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon(\vec{r}) \mu(\vec{r}) \vec{E} \mu(\vec{r})$$

$$\left[ \nabla \psi(\vec{r}) \times \vec{B}_0(\vec{r}) \right] = -\varepsilon(\vec{r}) \mu(\vec{r}) \vec{E}_0(\vec{r}) = -n^2(\vec{r}) \vec{E}_0(\vec{r})$$

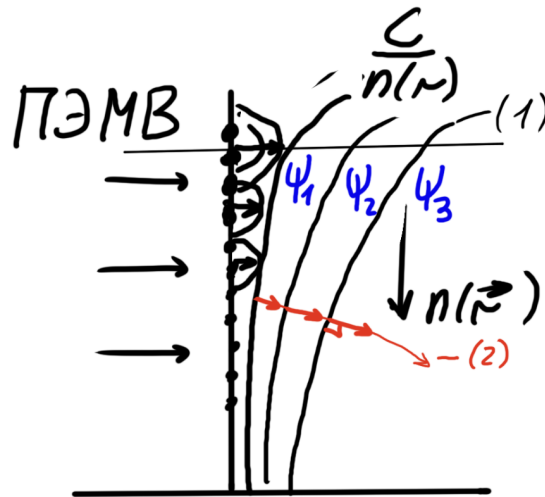
1.  $\vec{E}_0(\vec{r})$ ,  $\vec{B}_0(\vec{r})$ ,  $\nabla \psi(\vec{r})$  - взаимно  $\perp$  вектора

$$\left[ \nabla \psi \times \left[ \nabla \psi \times \vec{E}_0 \right] \right] = -n^2 \vec{E}_0$$

$$\nabla \psi (\nabla \psi, \vec{E}_0) - \vec{E}_0 (\nabla \psi)^2 = -n^2 \vec{E}_0$$

$$\Rightarrow (\nabla \psi(\vec{r}))^2 = n^2(\vec{r}) - \text{уравнений эйконала}$$

Как можно было бы решить это уравнение:



$$\text{за } \Delta t \text{ } r_{\text{волна}} = \frac{c}{n(\vec{r})} \Delta t$$

(1) - волновой фронт = это поверхности  $\psi(\vec{r}) = \text{const}$ , (2) - лучи (вдоль направления  $\nabla\psi(\vec{r})$ )/линии  $\perp$  эквипотенциалам  $\psi(\vec{r})$  (волновым фронтам)

Описания распространения электромагнитной волны в неоднородных средах через волновые фронты и лучи - это два альтернативных описания.

$$\text{Вектор Пойнтинга: } \langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle [\text{Re}\vec{E} \times \text{Re}\vec{H}] \rangle$$

$$\langle [\text{Re}\vec{E} \times \text{Re}\vec{H}] \rangle = \langle [(\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r})e^{i\omega t}) \times (\vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t} + \vec{H}^*(\vec{r})e^{i\omega t})] \rangle =$$

$$\frac{[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] + [\vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})]}{4} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})]$$

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi\mu} \text{Re}[\vec{E}_0(\vec{r})e^{ik_0\psi(\vec{r})} \times \vec{B}_0^*(\vec{r})e^{-ik_0\psi(\vec{r})}]$$