# Глава 1: Вариационное исчисление.

## 1. Примеры задач вариационного исчисления

*Задача математического анализа:*

Есть кривая заданная функцией $f(x)$ найти точки экстремума:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2 - \text{точки, подозреваемые на экстремум}$$

$$f''(x_1) < 0 \Rightarrow x_1 - \max$$
$$f''(x_2) > 0 \Rightarrow x_2 - \min$$

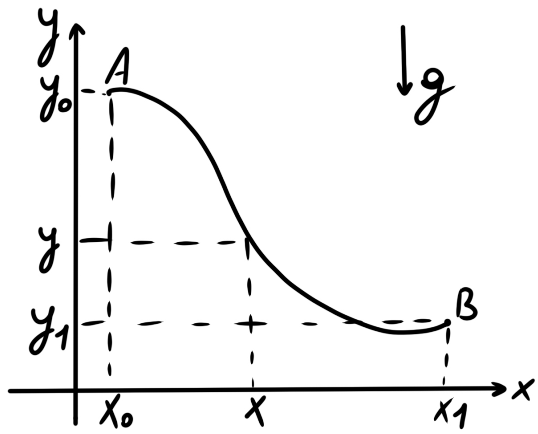
*Задача вариационного исчисления:*

Функционал: $I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$

Найти функцию $y(x)$ такую, что $I[y]$ принимает min или max

Пример 1 : задача наискорейшего спуска (задача Брахистохроне)

Найти кривую $y(x)$ по которой тело из точки A в точку B попадет за наименьшее время.




ЗСЭ : $$mgy_0 + 0 = mgy(x) + \frac{m|v|^2}{2}$$

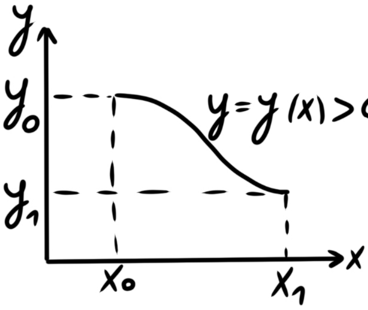
$y'_t = y'_x x'_t$

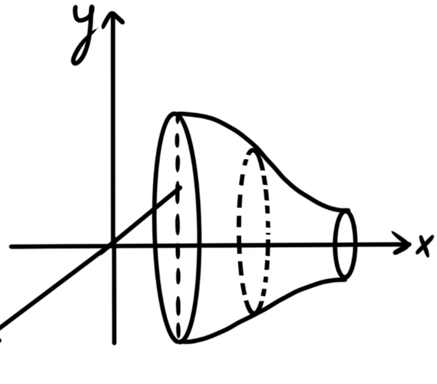
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\sqrt{2g(y_0 \cancel{+} - y(x))} = |v| = \sqrt{1 + (y(x)')^2}\frac{dx}{dt}$$

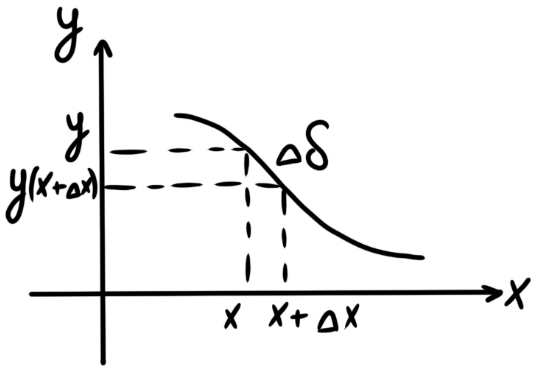
$$T = \int_0^T dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 + y(x))}}dx$$

Пример 2 : задача поверхности вращения наименьшей площади.




Площадь $S \to \min$




$$\Delta\delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$$

S

$$\Delta S = 2\pi y(x)\Delta\delta$$

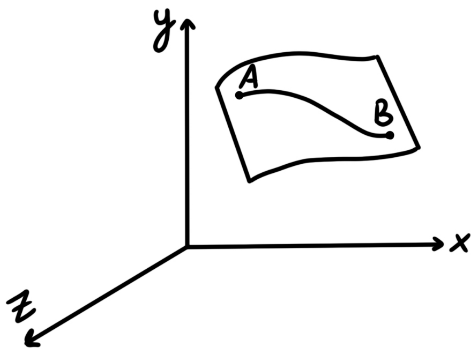
$$\sum \Delta \cancel{\delta} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \int_{x_1}^{x_2} \cancel{=} 2\pi y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

Пример 3 : задача о геодезических на поверхности.

какую!

Найти кривую, проходящую через точки A и B, лежащую на поверхности, кото~~рые~~ име~~ют~~ наименьшую длину.

ая ет



$$G(x,y,z) = 0 - \text{уравнение поверхности}$$

$$\text{Пусть уравнение кривой } : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [t_0, t_1] - \text{параметр} \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$G(x(t), y(t), z(t)) = 0 \leftarrow \text{кривая лежит на поверхности}$$

$$l = \sum \Delta l = \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sum \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}\Delta t$$

$$l \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \cancel{\sum} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

## 2. Простейшая задача вариационного исчисления

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \qquad (1)$$

$F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ непустое открытое множество, $F \in C^2(\mathbb{D})$

**Определение 1** (допустимая функция)**.** *Функция $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ называется допустимой, если:*

*1) $y(x) \in C([x_0, x_1])$*

*2) $y(x) \in C^2((x_0, x_1))$*

*3) $\forall x \in [x_0, x_1], (x, y(x), y'(x)) \in \mathbb{D}$*

*4) $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$ сходится*

$$\text{Краевые условия: } y(x_0) = y_0, \;\; y(x_1) = y_1 \qquad (2)$$

**Определение 2.** *Допус~~ка~~тимая $\tilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ доставляет локальный минимум функционалу (1) при краевых условиях (2),если:*

*1) $\tilde{y}(x_0) = y_0, \tilde{y}(x_1) = y_1$*

*2) $\exists \varepsilon_0 > 0 \, \forall$ допустимой функции $y(x)$, удовлетвор~~яет~~ющей (2): $\sup_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon_0$*
выполняется $I[\tilde{y}] \leq I[y]$

**Определение 3.** *Допустимая функция $\tilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ доставляет глобальный минимум функционалу $I[y]$ при краевых условиях (2), если:*

*1) $\tilde{y}(x_0) = y_0, \;\; \tilde{y}(x_1) = y_1$*

*2) $\forall$ допустимой функции $y(x)$, удовлетвор~~яет~~ющей (2), выполняется $I[\tilde{y}] \leq I[y]$*

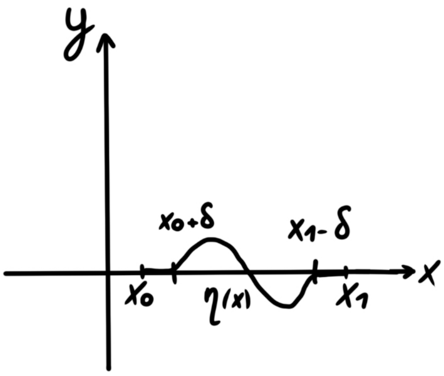
## 3. Необходимые условия локального экстремума

Аналог $f'(x) = 0$

Пусть функция $\tilde{y}$ доставляет функционалу $I[y]$ при краевых условиях (2) локальный минимум $\Rightarrow I[\tilde{y}] \leq I[y]$, где $y(x)$ из определенного локального минимума.

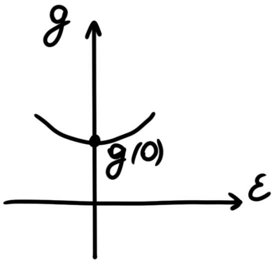
Возьмем $y(x) = \tilde{y} + \varepsilon\eta(x), \quad \varepsilon \in \left(\dfrac{\varepsilon_0}{M}, \dfrac{\varepsilon_0}{M}\right), \quad M = \max\limits_{x \in [x_0, x_1]} |\eta(x)|$

$\eta(x) \in C^2([x_0, x_1])$ - финитн~~ые~~ых функци~~я~~и.




$$\Rightarrow I[\tilde{y}] \le I[\tilde{y} + \varepsilon\eta]$$

Рассмотрим функцию $g(\varepsilon) = I[\tilde{y} + \varepsilon\eta] \Rightarrow g(0) \le g(\varepsilon)$




$\varepsilon = 0 -$ точка локального минимума для функции $g(\varepsilon) \Rightarrow g'_\varepsilon(0) = 0$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} g(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y} + \varepsilon\eta(x), \tilde{y}' + \varepsilon\eta'(x))dx\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} \boxed{=}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+\delta}}_{(1)} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}_{(2)} \cancel{+} \underbrace{\int_{x_1-\delta}^{x_1}}_{(3)}; \quad \frac{d}{d\varepsilon} I_1 = \frac{d}{d\varepsilon} I_2 = 0$$

**Теорема 1** (из математического анализа). $f(x,\varepsilon) : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ - *непрерывна,* $\exists \frac{df}{d\varepsilon}(x,\varepsilon)$ - *непрерывна*

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b f(x,\varepsilon)dx = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} f(x,\varepsilon)dx$$

Вносим производную под знак интеграла:

$$\boxed{=} \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right]dx \cancel{\Big]}\Bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\eta(x)dx + \underbrace{\overbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}(x)\Bigg|_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}}^{\eta(x)}}_{=0} -$$

$$-\int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\eta(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}(\dots)\right]dx\Bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0+\delta}^{x_1-\delta}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(\dots) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'}(\dots)\right]\eta(x)dx \underset{\varepsilon=0}{=} 0$$

$\forall$ финитной функции $\eta(x)$

или Лагранжа

$$\boxed{=} \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) - \dots\right]dx = 0$$

**Лемма 1** (основаная леммая вариационного исчисления). $f(x) : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}-$ *непрерывна и* $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0, \forall$ *финитной* $\cancel{f}\,\eta(x)$. *Тогда* $f(x) \equiv 0 \; \forall x \in [x_0, x_1]$

По лемме: $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$ - необходимое условие локального экстремума( **уравнение Эйлера** )

**Определение 4** (экстремаль). *Допустимая функция $y(x)$ называется экстремалью функционала $I[y]$ при краевых условиях (2), если:*

*1) $y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$*

*2) $y(x)$ удовлетворяет условию Эйлера*

Молодец!

Мушин