

# Конспект лекций по дисциплине

## Основы функционального анализа

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

Студент: Б.В.О

Преподаватель: Ротанова Татьяна Александровна

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Геометрия пространств со скалярным произведением.</b>	<b>2</b>
1.	Линейно (векторное) пространство . . . . .	2

# Глава 1: Геометрия пространств со скалярным произведением.

**Определение 1** (Метрическое пространство). Метрика  $\rho(x, y) : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1)  $\forall x, y \rho(x, y) \geq 0$  ( $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ )

2)  $\forall x, y \in M \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3)  $\forall x, y, z \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M | \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

**Определение 2.** Множество открытое, если любая точка в нем содержится в нем вместе некоторой окрестностью.

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Дискретная метрика:

$$X = \{x \in M\}$$

$$B_\varepsilon(x) = \{y | \rho(x, y) < \frac{1}{2}\}$$

## 1. Линейно (векторное) пространство

**Определение 3.** Непустое множество элементов  $L$  произвольной природы, называется линейным (векторным) над полем чисел  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$  если

1)  $\forall x, y$  введена операция сложения

1.1)  $x + y = y + x$

1.2)  $x + (y + z) = (x + y) + z$

1.3) В  $L$  существует элемент называемый нулем  $0$ :  $x + 0 = x \quad \forall x \in L$

1.4)  $\forall x \in L$  существует противоположный элемент принадлежащий  $L$ :  $x + y = 0$

2)  $\forall x \in L$  и  $\forall$  числа  $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$  определен вектор из  $L$  - произведения элементов на число  $\alpha \quad \alpha x \in L$

1.1)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall \alpha\beta$

1.2)  $1 \cdot x = x$

1.3)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

1.4)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

$$\begin{aligned}
 f &: X \rightarrow Y \\
 g &: X \rightarrow Y \\
 \alpha f + g &: X \rightarrow Y \\
 (\alpha f + g)(x) &= \alpha f(x) + g(x) \text{ поточечная сумма}
 \end{aligned}$$

Примеры:

1)

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n \end{array} + \begin{array}{c} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \beta(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)$$

2)  $C[a, b] = \{f(a, b) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ непрерывная функции } f - \text{ непрерывна}\}$

3)  $L_p(x) = \{f - \text{измерима по Лебегу, а заданная на } X, f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ таких, что}\}$

$$\int_X |f(x)| dx < \infty$$

$$4) l_2 - x = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$$

**Определение 4.**  $x_1, \dots, x_n$  называется линейно зависимыми, если  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$  не все равные нулю, такие что  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

В противном случае: из того, что  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$  следует, что все  $\alpha_i = 0$   
 $x_1, \dots, x_n$  называется линейно независимыми наборами векторов

**Определение 5.** Бесконечный набор элементов  $L$  называется линейно независимым, если любой его конечный поднабор линейно независимым

**Определение 6.** Если в  $L$  можно найти  $n$  линейно независимых векторов, а любой набор из  $n + 1$  векторов является линейно зависимыми, то  $\dim L = n$ . Если в  $L$  можно указать  $n$  набор из произвольного числа линейно независимых элементов, то  $\dim L = \infty$ .

**Определение 7.** Непустое подмножество  $S \subset L$  называется подпространством, если оно само является пространством введенных в  $L$  линейно операций

**Определение 8.** Линейной оболочкой  $\langle M \rangle$  называется совокупность всех линейных комбинаций  $\alpha x + \beta y$  где  $x, y \in M \subset L$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$\langle M \rangle$  - подпространство в  $L$  (натянутое или порожденное множеством элементов  $M$ )

**Определение 9.** Норма в линейном пространстве  $L$ :  $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

$$\forall x, y \in L \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

$$1) \|x\| \geq 0 \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

В конечномерном пространствах все нормы эквивалентны  $c_1|||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$ .  
В конечномерных пространствах это не так!

Пример норм 2  $||f|| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$  - норма в  $C[a, b]$  равномерная норма

$$3 \quad ||f||_{L_1} = \int_X |f| dx \text{ в } L_1$$

$$||f||_{L_p} = \sqrt[p]{\int_X |f|^p dx} \text{ в } L_p$$

$$4 \quad ||x||_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

**Определение 10.** Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  точек линейно нормированного пространства  $L$  сходятся к  $x$ , если  $||x_n - x|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 ||x_n - x|| < \varepsilon$

**Определение 11.** Предельной точкой  $M \subset L$  называется точка  $x$ , если существует сходящаяся к  $x$  последовательность элементов из  $M$   $\exists x_n \in M, x_n \rightarrow x$

**Определение 12.** Замыканием  $\overline{M}$  - объединение  $M$  и его предельных точек.

**Определение 13.** Замкнутое множество, если содержит все предельные точки.

**Определение 14.** Множество  $M$  в  $L$  - линейно нормированном пространстве называется плотностью в  $L$ , если  $\overline{M} = L$

**Определение 15.**  $M_1, M_2$  подмножества в  $L$   $M_1$  плотность в  $M_2$ , если

$$\underbrace{M_2}_{(R \setminus Q)} \subset \underbrace{\overline{M_1}}_R \quad M_1 = Q$$

**Определение 16.** Сепарабельное множество, если в нем  $\exists$  счетное плотное подмножество