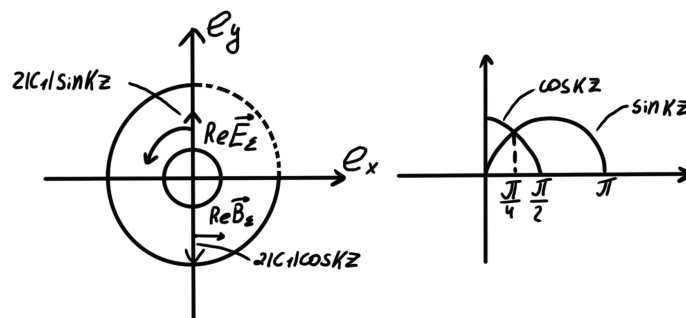


Пусть  $0 < kz < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \sin(kz) < \cos(kz) < 1$



## 1. Резонаторы

- полость, окруженная идеальным проводником.

В нем накапливаются волны собственной волны резонатора. Таким образом резонатор фильтрует сигнал по определенной частоте и усиливает его сигнал. С помощью резонаторов можно ускорять сгустки протонов и электронов.

Способы возбуждения резонаторов:

- 1) Штырь с переменным во времени потенциалом.
- 2) Петля с переменным током.
- 3) Модулированный электронный пучок.
- 4) Волновод с бегущей волной.

Уравнения электромагнитных полей в резонаторе:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\text{rot} \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} = \frac{i\omega}{c} \vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{div} \vec{B}_0 = 0$$

$$\text{rot} \vec{H}_0(\vec{r}) = -\frac{i\omega}{c} \vec{D}_0(\vec{r}) \Rightarrow \text{div} \vec{D}_0 = 0$$

Если внутри резонатора вещество с  $\varepsilon(\omega)$  и  $\mu(\omega) \Rightarrow \vec{B}_0 = \vec{H}_0 \mu(\omega)$ ,  $\vec{D}_0 = \vec{E}_0 \varepsilon(\omega)$

Граничные условия:

$$E_{0\tau}|_{\Gamma} = 0, \quad B_{0\tau}|_{\Gamma} = 0$$



$$(\text{rot} \vec{E}_0)_z = +\frac{i\omega}{c} B_{0z}$$

$$(\text{rot} \vec{E}_0)_z = \underbrace{\frac{\partial E_{0y}}{\partial y}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial E_{0x}}{\partial y}}_{=0} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow B_{0z} = 0 \\ E_{0y}|_{\Gamma} = 0, \quad E_{0x}|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

Исключим  $\vec{B}_0(\vec{r})$  из уравнений:

$$\text{rot} \text{rot} \vec{E}_0(\vec{r}) = \underbrace{\nabla \text{div} \vec{E}_0(\vec{r}) - \Delta \vec{E}_0(\vec{r})}_{\substack{\text{div} \vec{D}_0(\vec{r}) = 0 \\ \varepsilon(\omega)}} = \frac{i\omega}{c} \mu(\omega) \left( -\frac{i\omega}{c} \right) \varepsilon(\omega) \vec{E}_0(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta \vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \vec{E}_0(\vec{r}) = 0 \\ \text{div} \vec{E}_0(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad + \Gamma.Y: E_{0\tau}|_{\Gamma} = 0$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) = k^2$$

- эта система является краевой трех мерной задачей Штурмана-Лиувилля.

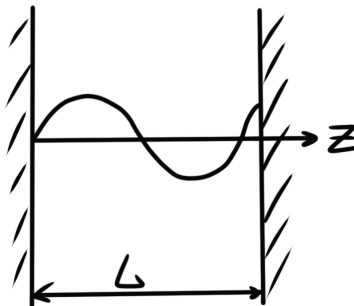
**Задача Штурма Лиувилля:**

- 1) Решение  $\exists$  только для бесконечного ряда чисел  $k_n$  - собственные числа,
- 2) Каждому  $k_n$  соответствует как минимум одна собственная функция - собственное колебания,
- 3) Набор всех собственных функций образует фундаментальную систему ортогональных функций, по которым можно разложить поля внешнего источника возбуждения.

$$4) \min(k_n) \sim \frac{1}{l} \Rightarrow \varepsilon = 1, \quad \mu = 1, \quad \omega_{\min} \sim \frac{c}{l}$$

Примеры резонаторов:

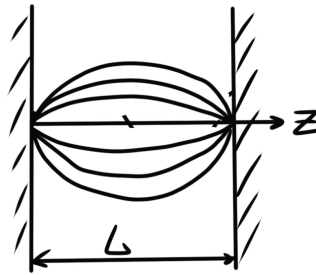
- 1) Плоский резонатора



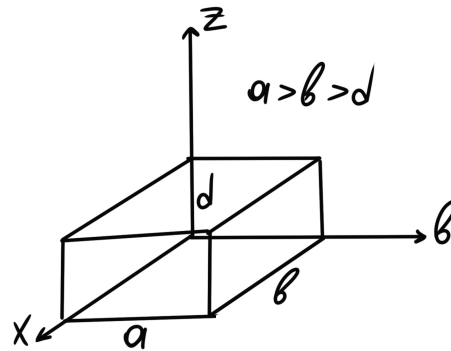
Решение как в задаче про отражение:  $\vec{E}_{\Sigma}(\vec{r}, t) = -2i\vec{E}_0 \sin(kz)e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_m L = m\pi \Rightarrow k_m = \frac{m\pi}{L} - \text{собственные числа}$$

$$k_{\min} = \frac{\pi}{L}, \quad \omega_{\min}(\varepsilon = 1, \mu = 1) = \frac{\pi c}{L}$$



2) Прямоугольный трех мерный резонатор:



$$\Delta \vec{E}_0(\vec{r}) + k^2 \vec{E}_0(\vec{r}) = 0, \quad \text{div} \vec{E}_0(\vec{r}) = 0, \quad E_{0\tau}|_{\Gamma} = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} + k^2 \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

Пусть  $E_{0x}(\vec{r}) = E_1(x)E_2(y)E_3(z)$

$$E_2(y)E_3(z) \frac{d^2 E_1(x)}{dx^2} + E_1(x)E_3(z) \frac{d^2 E_2(y)}{dy^2} + E_1(x)E_2(y) \frac{d^2 E_3(z)}{dz^2} + k^2 E_1(x)E_2(y)E_3(z) = 0 \quad | : E_1 E_2 E_3$$

$$\frac{E_1''(x)}{E_1(x)} + \frac{E_2''(y)}{E_2(y)} + \frac{E_3''(z)}{E_3(z)} + k^2 = 0 \Rightarrow \frac{E_1''(x)}{E_1(x)} = \text{const}, \quad \frac{E_2''(y)}{E_2(y)} = \text{const}, \quad \frac{E_3''(z)}{E_3(z)} = \text{const}$$

$$E''(x) = \alpha E(x) \quad \text{Решение ищем в виде: } E_1(x) = c_1 e^{\lambda x} \Rightarrow c_1 \lambda^2 e^{\lambda x} = \alpha c_1 e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\alpha}$$

1.  $\alpha > 0 \Rightarrow E(x) = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x}$  занулить решение на двух стенках  $x = 0, x = a$  - невозможно

2.  $\alpha = 0 \Rightarrow E(x) = Ax + B$  - аналогично невозможно

3.  $\alpha < 0 \Rightarrow E(x) = A e^{+\sqrt{|\alpha|} x} + B e^{-\sqrt{|\alpha|} x} = c_1 \sin(\sqrt{|\alpha|} x + \varphi)$  - имеет периодические "с"

Переобозначение:  $E_1(x) = -k_x^2, E_2(y) = -k_y^2, E_3(z) = -k_z^2$

$$E_{0x}(\vec{r}) = A \sin(k_x x + \alpha_x) \sin(k_y y + \alpha_y) \sin(k_z z + \alpha_z), \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z = \text{const}$$

$$E_{0y} = B \sin(k_x x + \beta_x) \sin(k_y y + \beta_y) \sin(k_z z + \beta_z), \beta_x, \beta_y, \beta_z = \text{const}$$

$$E_{0z} = D \sin(k_x x + \gamma_x) \sin(k_y y + \gamma_y) \sin(k_z z + \gamma_z), \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z = \text{const}$$

Граничные условия:  $x = 0 \Rightarrow E_y = 0, E_z = 0$  при  $\forall y, z \Rightarrow \beta_x = 0, \gamma_x = 0$

$$x = a \Rightarrow E_{0y} = 0, E_{0z} = 0 \text{ при } \forall y, z \Rightarrow k_x a = n_x \pi \Rightarrow k_x = \frac{n_x \pi}{a}, n_x \in \mathbb{Z}$$

$$y = 0 \Rightarrow E_{0x} = 0, E_{0z} = 0 \text{ при } \forall x, z \Rightarrow \alpha_y = \gamma_y = 0$$

$$y = b \Rightarrow E_{0x} = 0, E_{0z} = 0 \text{ при } \forall x, z \Rightarrow k_y b = n_y \pi \Rightarrow k_y = \frac{n_y \pi}{b}, n_y \in \mathbb{Z}$$

$$z = 0 \Rightarrow E_{0x} = 0, E_{0y} = 0 \text{ при } \forall x, y \Rightarrow \alpha_z = \beta_z = 0$$

$$z = b \Rightarrow E_{0x} = 0, E_{0y} = 0 \text{ при } \forall x, y \Rightarrow k_z b = n_z \pi \Rightarrow k_z = \frac{n_z \pi}{b}, n_z \in \mathbb{Z}$$

$$\text{div} \vec{E}_0 = \frac{\partial}{\partial x} E_{0x} + \frac{\partial}{\partial y} E_{0y} + \frac{\partial}{\partial z} E_{0z} =$$

$$= \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \left[ \frac{k_x A \cos(k_x x + \alpha_x)}{\sin(k_x x)} + \frac{k_y B \cos(k_y y + \beta_y)}{\sin(k_y y)} + \frac{k_z D \cos(k_z z + \gamma_z)}{\sin(k_z z)} \right] = 0$$

при  $\forall x, y, z$

$$\Rightarrow \alpha_x = \frac{\pi}{2}, \beta_y = \frac{\pi}{2}, \gamma_z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k_x A + k_y B + k_z D = 0 \text{ или } (\vec{k}, (\overrightarrow{A, B, C})) = 0$$

Конечный ответ:

$$E_{0x}(\vec{r}) = A \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

$$E_{0y}(\vec{r}) = B \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad + k_x A + k_y B + k_z D = 0 + \Gamma.Y. \vec{E}_{0\tau}|_{\Gamma} = 0$$

$$E_{0z}(\vec{r}) = D \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z)$$