Конспект лекций по дисциплине

Основы функционального анализа

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

4-й семестр

2025 год

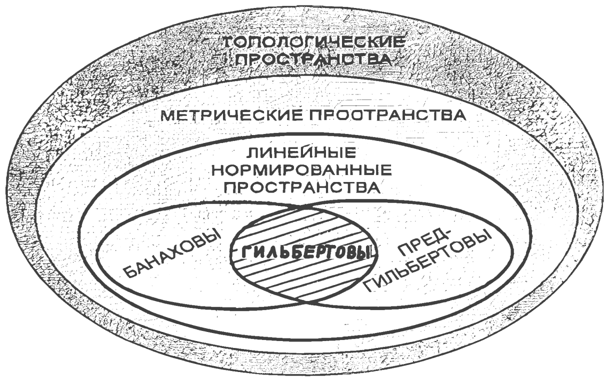
Студент: Б.В.О

Преподаватель: Ротанова Татьяна Александровна

Оглавление

Глава 1: Геометрия пространств со скалярным произведением.

1. Линейные пространства



Определение 1 (Метрическое прострнвство). *Метрика* $\rho(x,y) : M^2 \to \mathbb{R}$

1) $\forall x, y : \rho(x,y) \geq 0 - (\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

2) $\forall x, y \in M : \rho(x,y) = \rho(y,x)$

3) $\forall x, y, z : \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

$B_\varepsilon(x) = \{y \in M | \rho(x,y) < \varepsilon\}$

Определение 2. *Множество открытое, если любая точка в нем содержится в нем вместе некоторой окрестностью.*

Пример дискреткой метрики:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

2. Линейно (векторное) пространство

Определение 3. *Непустое множество элементов* L *произвольной природы, называется линейным (векторным) над полем чисел* $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ *если*

1) $\forall x, y$ *введена операция сложения:*

1.1) $x + y = y + x$ *(коммутативность)*

1.2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность)*

1.3) В L *существует элемент называемым нулем 0:* $x + 0 = x$ *,* $\forall x \in L$

1.4) $\forall x \in L$ *существует противоположный элемент принадлежащий* L*:* $x + y = 0$ *, обозначается как* $-x$

2) $\forall x \in L$ и $\forall$ числа $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ определен вектор из L - произведения элементов на число $\alpha, \alpha x \in L$:

1.1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall\alpha,\beta$

1.2) $1 \cdot x = x$ (существования единицы)

1.3) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

1.4) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

Примеры:

1)

$$\begin{matrix}\mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n\end{matrix} \quad + \quad \begin{matrix}\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \\ \beta(y_1, y_2, \dots, y_n)\end{matrix} \qquad = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots \alpha x_n + \beta y_n)$$

2) $C[a,b] = \{f(a,b) \to \mathbb{C},$ непрерывная функции f - непрерывна $\}$

3) $L_p(x) = \{f$- измерима по Лебегу, заданная на $X, f : X \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\int_X |f(x)|dx < \infty$$

4) $l_2 : x = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \sum\limits_1^\infty |x_n|^2 < \infty$

Определение 4. *$x_1, \dots, x_n$ называется линейно зависимыми, если $\exists\alpha_1, \dots, \alpha_n$ не все равные нулю, такие что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$*

В противном случае: из того, что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ следует, что все $\alpha_i = 0$ $x_1, \dots, x_n$ называется линейно независимыми наборами векторов.

Определение 5. *Бесконечный набор элементов L называется линейно независимым, если любой его конечный поднабор линейно независимым.*

Определение 6. *Если в L можно найти n линейно независимых векторов, а любой набор из $n+1$ векторов является линейно зависимыми, то $\dim L = n$. Если в L можно указать набор из произвольного числа линейно независимых элементов, то $\dim L = \infty$.*

Определение 7. *Непустое подмножество $S \subset L$ называется подпространством, если оно само является пространством введенных в L линейных операций.*

Определение 8. *Линейной оболочкой $<M>$ называется совокупность всех линейных комбинаций $\alpha x + \beta y$ где $x, y \in M \subset \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$*

$<M>$ - подпространство в L (натянутое или порожденное множеством элементов M)

3. Определение нормы

Определение 9. *Норма в линейном пространстве L: $\|\ \| : L \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$*

$\forall x, y \in L, \forall\alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

1) $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (положительная определенность нормы)

2) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ (положительная однородность нормы)

3) $||x+y|| \leq ||x| + ||y||$

В конечномерных пространствах все нормы эквиваленты $c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$. В конечномерных пространствах это не так!

Пример норм:

$$1)\|f\| = \max_{t\in[a,b]}|f(t)| \text{ - норма в } C[a,b] \text{ равномерная норма.}$$

$$2) \quad ||f||_{L_1} = \int_X |f|dx \text{ в } L_1$$

$$3) \quad ||f||_{L_p} = \sqrt[p]{\int_X |f|^p dx} \text{в} L_p$$

$$4) \quad ||x||_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2}$$

Определение 10. *Последовательность $(x_n)_{n\in N}$ точек линейно нормированное пространств L сходятся к x, если $||x_n - x|| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \forall\varepsilon > 0, \exists n_0, n > n_0 : ||x_n - x|| < \varepsilon$*

Определение 11. *Предельной точкой $M \subset L$ называется точка x, если существует сходящаяся к x последовательность элементов из M $\exists x_n \in M : x_n \to x$*

Определение 12. *Замыканием $\overline{M}$ - объединение M и его предельных точек (по конкретной норме).*

Определение 13. *Множество замкнутое, если содержит все предельные точки.*

Определение 14. *Множество M в L - линейно нормированном пространстве называется плотным в L, если $\overline{M} = L$*

Определение 15. *Сепарабельное множество, если в нем $\exists$ счетное плотное подмножество*

Пример: Множество множеств P[0,1] не является замкнутым подпространством в C[0,1]

$$P_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow \|P_n - f\|_C \to 0$$

$$\forall n, p_n \in P[0,1], f(x) \in C[0,1] - \text{не является полиномом}$$

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = e^x, \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)(0)}}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Замыкание $P[0,1]$ это $L_2[0,1]$

$$\|p_n - f\|_{L_2} \leq \max_{x\in[0,1]}\max_{c\in[0,1]}\left|\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \overset{\substack{x=1\\c=1}}{=} \frac{e}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad e^x \notin P[0,1]$$

$$L_2(x) : \{f : X \to Y, \int_x |f|^2 dx < \infty\}$$

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_x |f|^2 dx}$$

Нуль: $f : X \to Y$

$$0(x) : X \to Y$$

$$g = 0(x) = 0 - \text{почти всюду}$$

$$g = \begin{cases} 0, \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ \infty, \mathbb{Q} \end{cases}$$

Элементы (вектора) пространства L_2 - функции класса L_2 .

Определение 16. *Последовательность* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in L$ *(линейно нормированное пространство) называется фундаментальной, если* $\forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$

Определение 17. *Если любая фундаментальная последовательность является сходящейся в L, то L - полное пространство.*

Определение 18. *Полное нормированное пространство - банахово пространство*

4. Линейные пространства с скалярным произведением

Определение 19. *Скалярное произведение в L (,) :* $L\times L \to \mathbb{C}$. $\forall x_1, x_2, y \in L, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ *выполняется:*
1) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$
2) $(x, y) = (\overline{y, x})$
3) $(x, x) \geq 0$ *и* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Линейное пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$ - евклидовы пространства, над $\mathbb{C}$ - унитарное пространства.

$$1)\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) : (x, y) = \sum^n x_i\overline{y}_i$$

$$2)l_2 : (x, y) = \sum^\infty x_i\overline{y}_i$$

$$3)L_2(x) : (f, g) = \int_x f\overline{g}dx$$

$$4)C[a, b] : \text{ нет скалярного произведения согласованного с аксиомами нормы}$$

Лемма 1. *Величина $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ удовлетворяет свойствам нормы. Согласованная или порожденная скалярным произведением.*

Определение 20. *Гильбертово пространство - пространство со скалярным произведением, полное относительно нормы, порожденным этим скалярным произведением.*

Лемма 2 (Неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x \in L \quad |(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$

Доказательство.

$$\alpha = \frac{(x,y)}{|(x,y)|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq \|\overline{\alpha}x + ty\|^2 = (\overline{\alpha}x + ty, \overline{\alpha}x + ty) = \overline{\alpha}(x, \overline{\alpha}x_t y) + t(y, \overline{\alpha}x + ty) =$$

$$\underbrace{|\alpha|^2}_{=1}(x,x) + \overline{\alpha}t(x,y) + \alpha t(y,x) + t^2(y,y) = \|x\|^2 + \overline{\alpha}t(x,y) + \alpha t(y,x) + t^2 \|y\|^2 \boxed{=}$$

$$\overline{\alpha}t(x,y) + \alpha t(y,x) = t\left(\frac{(\overline{x,y})(x,y)}{|(x,y)|} + \frac{(x,y)(x,y)}{|(x,y)|}\right) = 2t|(x,y)|$$

$$\boxed{=} \|x\|^2 + 2t|(x,y)| + t^2 \|y\|^2$$

$$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

#

Доказательство Леммы 1. 1) Из 3 аксиомы скалярного произведения;

2) $\alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha x\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 = (1)$

$$(\alpha x, \alpha x) = \alpha(x, \alpha x) = \alpha\overline{\alpha}(x,x) = (1)$$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| \, \|y\|$

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x+y) + (y, x+y) = (\overline{x+y, x}) + (\overline{x+y, y}) = (\overline{x,x}) + (\overline{y,x}) + (\overline{x,y}) + (\overline{y,y}) =$$

$$= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \leq$$

$$\overset{\text{нер-во К-Б}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

#

$$L_2 : \sqrt{\int_x |f(x)|^2 dx} = \|f\|_{L_2}$$

$$\left|\int_x f(x)\overline{g}(x)dx\right| \leq \left(\int_x |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} - \text{ неравенство К-Б в } L_2$$

$$\sqrt[p]{\int_x |f(p)|dx} = \|f\|_{L_p}$$

Лемма 3. $\forall p \geq 1$ *линейно нормированное пространство* L_p *является полным.*

Лемма 4. $\forall p \geq 1$ *пространство* C^∞ *плотно в* $L_p(x)$*, то есть* $\overline{C}^{\infty^{L_p}} = L_p(x)$

Лемма 5. $\forall p \geq 1$ *пространство* L_p *сепарабельно.*

Лемма 6. *Пусть* L *- линейно нормированное пространство со скалярным произведением и норма порождена скалярным произведением...*

$$\forall x, y \in L \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \textit{равенство паралеллограма}$$

Наоборот, если в линейно нормированном пространстве L выполняется равенство паралеллограма, то в этом пространстве можно ввести скалярное произведение, согласованной с этой нормой.

$L_1 \subset [a,b] \exists f, g$, для которых не выполняется равенство паралеллограма $\Rightarrow$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

Лемма 7. *В линейном пространстве со скалярным произведением* L *, скалярное произведение непрерывно по первому аргументу относительно сходимости по норме порожденной скалярным произведением*

$$x_n \to t \quad \|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\forall y, (x_n, y) \to (x, y)$$

Доказательство.

$$|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \overset{\text{по К.Б}}{\leq} \|x_n - x\| \underbrace{\|y\|}_{\text{огр.числено}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

#

5. Ортогональность векторов

Определение 21. *L - пространство со скалярным произведением, $x, y \in L$ называется ортогональным, если $(x, y) = 0$*

Определение 22. *Набор векторов $x, \ldots, x_n, \ldots, \in L$ называется ортогональным, если $\forall ij : x_i \perp x_j$*

Определение 23. *Набор ортогональный (x_n) называется ортнармированным, если $\forall i : \|x\| = 1$*

Ортогонализация Грамма-Шмидта

Если $x_1, \ldots, x_n$ - счетная система линейно назависимый в L , тогда новые последовательности:

$$y_1 = x_1 \quad z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, z_1)z_1 \quad z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n, z_k)z_k \quad z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$$

Обладает свойствами:

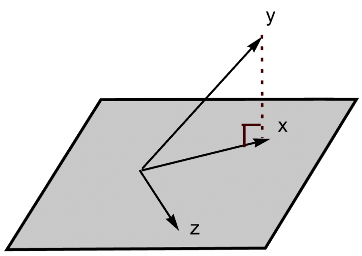
1) Система $z_1, \ldots, z_n$ - ортонормированна

2) $\forall n \in N \underbrace{< z_1, \ldots, z_n > = < x_1, \ldots, x_n >}_{\text{линейные оболочки}}$

Определение 24. *Углом между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства L называется число $\varphi \in [0, \pi]$:*

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}$$

Определение 25. *Если S - подпространство пространства со скалярным произведением L, то $x \in S$ называется вектором наилучшего приближения (ближайший) для $y \in L$ посредством векторов из S, если:*



$$\forall z \in S, \quad \|y - z\| \geq \|x - y\|$$

$$\|x - y\| = \inf_{z \in S} \|y - z\|$$

Теорема 1. *Пусть H - гильбертово пространство, S - замкнутое подпространство H, $y \in H$, тогда $\exists! x$ ближайший к y.*

Доказательство.

$$\inf \|y - z\| = d$$

$$x_1, \ldots, x_m \in S \quad \|y - x_m\| \xrightarrow{m \to \infty} d$$

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|(x_m - y) - (x_n - y)\|^2 = 2(\|x_m - y\|^2 + \|x_n - y\|^2) - \left\| \underbrace{x_m - y + x_n - y}_{\|x_m + x_n - 2y\|^2 = 4\|q - y\|^2 \geq 4d^2} \right\|^2 \boxed{\leq}$$

$$q = \frac{x_m + x_n}{2} \in S$$

$$\forall \varepsilon, \exists N \ n, m \geq N : \|x_m - y\| < d^2 + \varepsilon \quad \|x_n - y\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$$

$$\boxed{\leq} 4d^2 + 2\varepsilon - 4d^2 = 2\varepsilon$$

$$x_m - \text{ фундаментальная}$$

$$\text{существование предела последовательности } x :$$

$$x \in S, \text{ т.к } S - \text{ замкнутое}$$

$$\|y - x_n\| = \sqrt{(y - x_n, y - x_n)} \xrightarrow[(1)]{n \to \infty} \sqrt{(y - x, y - x)} = \|y - x\| \to d \text{ в силу ! предела}$$

$$(1) \text{ - непрерывность по 1-му аргументу}$$

Единственность:

$$\text{Пусть } \tilde{x} : \|y - \tilde{x}\| = d, x \neq \tilde{x}$$

$$\|\tilde{x} - x\|^2 = \|(\tilde{x} - y) - (x - y)\|^2 = 2\left\| \underbrace{\tilde{x} - y}_{=d^2} \right\|^2 + 2\left\| \underbrace{x - y}_{=d^2} \right\|^2 - \|2y - x - \tilde{x}\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 \leq 0$$

$$\text{т.е } \tilde{x} = x - \text{ противоречие}$$

#

Определение 26. *S - подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением L, $x \in S$ - ортогональная проекция $y \in L$ на подпространство S, если:*

$$y - x \perp S \quad y - x \perp z \ \forall z \in S \quad (y - x, z) = 0$$

Лемма 8. *S - подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением L, $x \in S$ - ортогональная проекция $y \in L \Leftrightarrow x$ - ближайший к y посредством S.*

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$:

$$\forall x, y, z \in L$$

$$\|y - z\|^2 = ((y - x) + (x - z), (y - x) + (x - z)) =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \|y - x\|^2 + 2\mathrm{Re}\cancelto{0}{(x - y, x - z)} + \|x - z\|^2 \, (*)$$

$$(1) : (a + b, a + b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\mathrm{Re}(a, b)$$

$$x \in S - \text{ ортогональная проекция у на } S \Rightarrow y - x \perp x - z$$

Итого:

$$\|y - z\|^2 = \|y - x\|^2 + \left\|\underbrace{x - z}_{\geq 0}\right\|^2$$

$$\forall z \in S : \|y - z\|^2 \leq \|y - x\|^2 , x - \text{ ближе для у}$$

Пусть дано:

$\boxed{\Leftarrow}$:

$$x - \text{ ближайший вектор для } y \in S$$

$$\left.\begin{array}{l} |y - x| = \inf \|y - z\| \\ f(t) = \|y - x + tW\|^2 , \quad t \in \mathbb{R}^2, \ W \in S \end{array}\right| \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|y - x + tW\|^2 - \|y - x\|^2}{t} = 0$$

$$\text{в } (*) : z = x - tW$$

$$\|y - (x - tW)\|^2 - |y - x|^2 = 2\mathrm{Re}(y - x, tW) + \|tW\|^2$$

$$\lim_{t\to 0} t\frac{2\mathrm{Re}(y-x,W)}{t} + t^2\cancel{\frac{\|W\|^2}{t}}^{\,0} = 0$$

$$2\mathrm{Re}(y-x,W) = 0$$

Если $\mathrm{Im}(y-x,W) = 0$, то x - ортогональная проекция y на S.
Доказывается аналогично: $f(t) = \|y-x+itW\|^2$

#

Определение 27. *S - подпространство линейного пространства L со скалярным произведением, то совокупность всех $x \in L$, таких, что $x \perp y$ $\forall y \in S$ называется ортогональным дополнением к S ($S^\perp$).*

Определение 28. *Линейное пространство L является прямой суммой S и T если любой вектор $x \in L$ единственным образом представим в виде $x = y+z,\ y \in S,\ z \in T$*

Лемма 9. *H - гильбертово пространство, S - замкнутое подпространство, тогда H прямая сумма S и $S^\perp$, $H = S \oplus S^\perp$*

Доказательство.

$$y \in H \quad x - \text{ ближайший к y посредством S } \Rightarrow$$

$$\overset{\text{Лемма 1}}{\Rightarrow} y - x \perp z,\ z \in S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = y - x \in S^\perp$$

$$y = \overset{\in S^\perp}{W} + \overset{\in S}{x}$$

Докажем единственность представления:
Пусть $y = \overset{\in S^\perp}{\tilde{W}} + \overset{\in S^\perp}{\tilde{x}}$

$$W + x = \tilde{W} + \tilde{x}$$

$$W - \tilde{W} = \tilde{x} - x$$

$$(W \underset{\in S^\perp}{-} \tilde{W}, \tilde{x} \underset{\in S}{-} x) = (\tilde{x}-x, \tilde{x}-x)$$

$$0 = (\tilde{x}-x, \tilde{x}-x)$$

То есть: $\tilde{x} = x$ и $\tilde{W} = W$ #

Теорема 2. *S - конечномерное подпространство линейного пространства L со скалярным произведением $x_1, \dots, x_n$ - ортонормированный базис в S $\forall y \in L$:*

$$x = \sum_1^n \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = (y, x_k)$$

является ортогональной проекцией y на подпространство S. При этом:

$$\|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y - x\|^2$$

Доказательство.

$$\forall z \in S,\ z = \sum_1^n \alpha_k x_k$$

$$(z, x_m) = \sum_1^1 \alpha_k (x_k, x_m) = \alpha_m$$

$$\|z\|^2 = \left(\sum_1^n \alpha_k x_k, \sum_1^n \alpha_p x_p\right) = \sum_1^n \alpha_p \overline{\left(\sum_1^n \alpha_k x_k, x_p\right)} = \sum_1^n \alpha_p \left[\sum_1^n \overline{\alpha_k} (\overline{x_p, x_k})\right] = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$$

$$\|y - z\|^2 = \|y\|^2 - (z, y) - (y, z) + \|z\|^2 = \|y\|^2 - \sum_1^n \alpha_k (x_k, y) - \sum_1^n \overline{\alpha_k} (y, x_k) + \sum_1^n |\alpha_k|^2 =$$

$$= \|y\|^2 - \sum_1^n \alpha_k \lambda_k - \sum_1^n \overline{\alpha_k} \lambda_k + \sum_1^n |\alpha_k|^2 + \sum_1^n |\lambda_k|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2 = \|y\|^2 + \sum_1^n |\alpha_k - \lambda_k|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2$$

$$\|y\|^2 - \sum_1^n |\lambda_k|^2 \geq 0, \text{ при } \alpha_k = \lambda_k \ (z = x)$$

При z = x достигается минимум $\Rightarrow$ ортогональная проекция.

$\#$

Определение 29. *$x_1, \dots, x_n, \dots,$ - ортонормированная система в линейном пространстве со скалярным пространством L:*

$$x \in L \quad \lambda_k = (x, x_k) - \textit{ коэффициент Фурье } x.$$

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_k x_k - \textit{ ряд Фурье расходится}$$

Теорема 3 (неравенстов Бесселя). *$x \in L$ - линейное пространство со скалярным произведением, λ_k - коэффициент Фурье, тогда:*

$$\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

Доказательство.

$$< x_1, \dots, x_n >$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

$$\underbrace{\|x - S_n\|}_{>0}^{2} + \|S_n\|^2 = \|x\|^2$$

$$\|S_n\|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right) \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\downarrow \text{в пределе}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2 - \text{ равенство Парсеваля}$$

#

Коэффициенты Фурье: $x_1, \dots, x_n$, $\lambda_k = (x, x_k)$

Неравенство Бесселя: $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$

6. Пополнение ортонормированной системы

Определение 30. *Ортонормированную систему $x_1, \dots, x_n$ называют замкнутой, если для $\forall x \in H$:*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 , \text{ где } \lambda_k = (x, x_k) - \text{ коэффициенты Фурье}$$

Уравнение замкнутости:

$$y \in H, \mu_k = (y, x_k) - \text{ коэффициенты Фурье } y$$

$$(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k} - \text{ равенство Парсеваля}$$

Определение 31. *Ортонормированная системам $x_1, \dots, x_n$ называется полной, если ее нельзя пополнить, то есть если ее ортогональное дополнение состоит только из $\vec{0}$. Другими словами, если $\exists x \ \forall k : (x, x_k) = 0 \Rightarrow x = 0 \dots$*

Определение 32. *Ортонормированная система $x_1, \dots, x_n$ называется базисом Гильбертова (или Гильбертовым базисом), если $\forall x \in H$:*

$$\underbrace{x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k}_{\text{разложение в векторный ряд Фурье}} \ , \text{ где } \lambda_k - \text{ коэффициенты Фурье}$$

$$\lim_{N \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k \right\| = 0$$

Теорема 4. *Во всяком ненулевом Гильбертовом сепарабельном пространстве $\exists$ Гильбертов базис, состоящий из конечного или счетного числа векторов.*

Доказательство.

$x_1, \dots, x_k$ - счетное плотное подмножество (в силу сепарабельности)

$x_1, \dots, x_k \xrightarrow[\text{комбинации}]{\text{вычеркнули линейные}} y_1, \dots, y_k -$ счетное число линейно независимых векторов

$y_1, \dots, y_k \xrightarrow[\text{Грамму-Шмидта}]{\text{ортогонализируем по}} z_1, \dots, z_k -$ счетное число ортонормированных векторов

$$x \in H, \ \{x_{n_k}\} \to x \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists M \ \exists n_k \geq N : \|x - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

$$x_{n_k} - \text{ выражается через } \{z_k\}, \ x_{n_k} = \sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p$$

Спроектируем на x конечно мерное подпространство $< z_1, \dots, z_{n_k} >$

Проекция: $s = \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j$, где $s -$ проекция на $< z_1, \dots, z_{n_k} >$, $\quad \lambda_j = (x, z_j)$

$$\|x - s\| \leq \|x - y\| \ , \ \forall y \in < z_1, \dots, z_{n_k} >$$

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j \right\| \leq \left\| x - \underbrace{\sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p z_p}_{x_{n_k}} \right\| < \varepsilon$$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j z_j, \ \lambda_j = (x, z_j) - \text{ коэффициенты Фурье}$$

#

Теорема 5. *Если $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ - ортогональная система в сепарабельном Гильбертовом пространстве, тогда следующие условия эквиваленты:*

1) $\{x_k\}$ - Гильбертов базис;
2) $\{x_k\}$ - замкнутая система;
3) $\{x_k\}$ - полная система.

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2) :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k,\ \ \lambda_k = (x, x_k),\ \ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \lambda_k \left(x_k, \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m\right) =$$

$$\lim_{N,M\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \lambda_k \overline{\lambda_m} (\underbrace{\overline{x_m, x_k}}_{=(x_k,x_m)=\delta_{km}\begin{cases}1,\, k=m\\ 0,\, k\neq m\end{cases}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

#

2) $\Rightarrow$ 3):

$$\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

От противного: Пусть $y \neq 0,\ y \in H$ - пополнение $\{x_k\}$: $\mu_k = (y, x_k) = 0$

$$|y|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 = 0 \Rightarrow y = 0 - \text{ противоречие}$$

#

3) $\Rightarrow$ 1):
Пусть $x \in H$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_k x_k,\ \ \lambda_k = (x, x_k)$$

Фундаментальность:

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} \lambda_n x_n\right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2$$

Неравенство Бесселя: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \|x\|^2$

$$\forall \varepsilon \ \exists N_0 \ \forall N, M \geq N, \quad \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2 < \varepsilon$$

Значит S_N - фундаментальная последовательность в Гильбертовом полном пространстве $\Rightarrow$ сходится.

Обозначим предел S_N через z.

Лектор: "хорошая буква зет, давайте обозначим"

$$(x - z, x_k) = \lim_{N\to\infty} \left(x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n, x_k \right) = \lambda_k - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (x_n, x_k) = \lambda_k - \lambda_k = 0$$

$$x - z \perp x_k, \ \forall k$$

$\Rightarrow$ в силу единственности системы $\{x_k\}$:

$$x - z = 0, \ x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \Rightarrow \{x_k\} - \text{Гильбертов базис}$$

#

Теорема 6 (Рисса-Фишера). *H - сепарабельное Гильбертово пространство ортонормированной системы $\{x_k\}$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - числа, такие что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ - сходится. Тогда $\exists!$ $x \in H$ такое, что $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n$$

$$\|S_N - S_M\|^2 = \underbrace{\sum_{p=N+1}^{M} |\lambda_p|^2}_{\text{сходится} \Rightarrow S_N - \text{ фундаментальный}} < \varepsilon$$

Доказательство.

z - предел S_N:

$$(z, x_k) = \lim_{N\to\infty} (S_N, x_k) = \lambda_k - \text{коэффициенты Фурье дял } z$$

$$\|z\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, z \right) = \sum_{k=1}^{\lambda} \lambda_k (\underbrace{x_k}_{=\overline{\lambda_k}}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

Единственность: Пусть $\exists x \in H, \ x \neq z$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|x-z\|^2 = \underbrace{\|x\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2} - \mathrm{Re}(x,z) + \underbrace{\|z\|^2}_{=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2} - \text{смотреть ранее}$$

$$(x,z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k, z\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\overline{z, x_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|x-z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 0 \Rightarrow x = z$$

#

7. Изоморфизм

Определение 33. *Пусть H_1, H_2 - Гильбертовы пространства. H_1 - изоморфно H_2, если $\exists A : H_1 \to H_2$ и $\exists B : H_2 \to H_1$, которые: линейные, сохраняют скалярное произведение и взаимообратны.*

$$\begin{matrix} \forall x, y \in H_1 \\ \forall u, v \in H_2 \end{matrix} \forall \alpha, \beta - \textit{ числа}$$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad (A(x), A(y))_{H_2} = (x,y)_{H_2}$$

$$B(\alpha u + \beta v) = \alpha B(u) + \beta B(v) \quad (A(u), A(v))_{H_2} = (x,y)_{H_2}$$

$$K.O \begin{cases} B(A(x)) = x \\ A(B(u)) = u \end{cases}$$

Теорема 7 (Теорема о изоморфизме гильбертовых пространствах)**.** *Всякое сепарабельное бесконечномерное Гильбертово пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) изоморфно пространству l_2 (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).*

Идея доказательства:

$$A : H \to l_2$$

$$\begin{matrix} x \in H \\ \lambda \in l_2 \end{matrix} \quad ?$$

$$A(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots) : \text{ где } \lambda_k = (x, x_k) \text{ - коэффициенты Фурье; } A(x) \in l_2 \ ?$$

$$\sum_{1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2 \text{ - неравенство Бесселя}$$

1) A линейно?
2) A сохраняет скалярное произведение (это равенство Парсеваля)?

$$B : l_2 \to H \text{ по теореме Рисса-Фишера}$$

3) B линейно?
4) B сохраняет скалярное произведение?
5) A и B взаимно обратны?

Тригонометрическая система функция как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi, \pi]$

$$L_2[-\pi, \pi] : \left\{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

$$(f, g)_{L_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g}(t)dt$$

Над $\mathbb{R}$:
Ряды Фурье

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0, \ n \neq m \\ \pi, \ n = m \neq 0 \\ 2\pi, \ n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0, \ n \neq m \\ \pi, \ n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = 0$$

Гильбертово пространство:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$$

Ряд Фурье:
Коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Гильбертово пространство:
Коэффициенты Фурье

$$\alpha_0 = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0$$

$$\alpha_n = (f, \cos(nx)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \sqrt{\pi}a_n$$

$$\beta_n = (f, \sin(nx)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \sqrt{\pi}b_n$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

$$f(x) = \alpha_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \alpha_1\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x + \beta_1\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x + ... + \alpha_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) + \beta_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b\sin x + ... + a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

Равенство Ляпунова:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

Равенство Парсеваля:

$$\alpha_0^2 + \sum^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_0^2) = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Глава 2: Классические ортогональные системы

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \text{ - норма в } C[a,b] \text{ равномерная норма.}$$

$$f_n \xrightarrow{\text{равномерно}} f$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall k > N : \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 < \varepsilon^2$$

$$C^\infty (\subset C) \text{ плотны в } L_2[a,b] \Leftrightarrow L_2 = \overline{C}, \quad M \text{ плотно в } L \Leftrightarrow L = \overline{M}$$

1. Весовое пространство Лебега

Пусть (a,b) - промежуток на $\mathbb{R}$ (необязательно ограниченный)

Определение 1. *Функция $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ называется весовой или весом, если:*
1) $\forall x \in (a,b)\ h(x) \geq 0$
2) $h(x) > 0$ *почти всюду в* (a,b)
3) $\displaystyle\int_a^b h(x)dx < \infty$

Определение 2. *Пространство функций*

$$L_2^h(a,b) = \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} | \int_a^b f^2(x)h(x)dx < \infty \right\}$$

назовем весовым пространством Лебега.

Это пространство становится евклидовым, если на нем задано скалярное произведение

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)h(x)dx$$

Скалярное произведение определено для любых функций f, g так как

$$|f(x)g(x)h(x)| < \frac{1}{2}[f^2(x)h(x) + g^2(x)h(x)]$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)h(x)dx}$$

Замечания:

- Нулевым элементом пространства $L_h^2(a,b)$ считаем такую функцию f, что выполнено $(f,f) = \displaystyle\int_a^b f^2 h(x)dx = 0$

- Весовое пространство Лебега $L_h^2(a,b)$ является полным относительно нормы, порожденной скалярным произведением, то есть Гильбертовым. Для каждой функции $h(x)$ и промежутка (a,b) определятся специальное гильбертово пространство!

- Если интервал (a,b) конечен, то $\forall n\ x^n \in L_2^h(a,b)$. Если (a,b) - бесконечный промежуток, то полагаем, что весовая функция убывает на бесконечности настолько быстро, что все мономы $x^n \in L_h^2(a,b)$:

$$\int_a^b x^{2n} h(x)dx < \infty$$

Тогда в $L_h^2(a,b)$ всегда есть последовательность мономов $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$

На любом интервале (a,b) последовательность мономов $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$ образуют линейно назависимую сисстему. Применим к ней процесс ортогнализации Грамма-Шмидта относительно скалярного произведения пространства $L_h^2(a,b)$. Получим последовательность мономов:

$$q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots,$$

со свойствами:

- $\displaystyle\int_a^b q_m(x)q_n(x)h(x)dx = \delta_{mn}$
- $\forall n\ q_n$ - многочлен степени n

Так же для удобства домножим, если это необходимо, многочлен q_n на -1, так чтобы у каждого многочлена старший коэффициент a_n стал положительным.

Определение 3. *Последовательность полученных многочленов $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots,$ называется последовательностью ортогональных многочленов на промежутке (a,b) с весом $h(x)$*

Ортонормированная система в Гильбертовом пространстве H полная

$$\Rightarrow \quad \underbrace{< \overline{\{x_k\}} >}_{\text{замкнутое подпространство}} \quad = H$$

Предположим противоречие $\exists y \in H,\ y \notin < \overline{\{x_k\}} >$

$\exists$ ортогональная проекция y на $< \overline{\{x_k\}} >$

$$(y - z) \perp < \overline{\{x_k\}} >$$

$$y - z \perp x_k \forall k \text{ противоречие}$$

$$y = z \Rightarrow y \in < \overline{\{x_k\}} >$$

- Для конечного промежутка: полиномы плотны в $L_2^h(a,b)$, значит, конечными линейными комбинациями мономов можно сколько угодно близко по норме $L_2^h(a,b)$

приблизиться к произвольной функции $f \in L_2^h(a,b)$, поэтому мономы образуют полную систему в $L_2^h(a,b)$.

- Мы будем использовать некоторые бесконечные (a,b) и весовые функции $h(x)$, для этих частных случаев полнота мономов тоже доказана.

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта переводит полную систему в полную, поэтому система многочленов $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$, полна в $L_2^h(a,b)$, т.е. является гильбертовым базисом в $L_2^h(a,b)$. Можно ввести коэффициенты Фурье относительно этого базиса и разлагать функции в ряды по ортогональным многочленам.

- Ортогональные многочлены многочлены определяются весом $h(x)$ и промежутком (a,b) однозначно (при сделанных предположениях)

- Если $P(x)$ - произвольный многочлен степени n, то его можно представить как $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k q_k$

- Если $P_m(x)$ - произвольный многочлен степени m, и $n > m$, то $q_n \perp P_m$

$$\int_a^b P_m(x) q_n(x) h(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{m} c_k q_k(x) \right) q_n(x) h(x) dx = 0$$

- Если вес $h : (-a,a) \to \mathbb{R}$ - четная функция, то $q_n(x) = (-1)^n q_n(x)$

Сделаем замену: $x \to -x$ в $\displaystyle\int_{-a}^{a} q_m(x) q_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$

$$\int_{-a}^{a} q_m(-x) q_n(-x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

$$\int_{-a}^{a} \tilde{q}_m(x) \tilde{q}_n(x) h(x) dx = \delta_{mn}$$

, где $\tilde{q}_n = (-1)^n q_n(-x)$, $\tilde{q}_m = (-1)^m q_m(-x)$. Тогда по первому свойству $q_n = \tilde{q}_n = (-1)^n q_n(-x)$

- Трехчленная рекуррентная формула

Пусть $q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$ Тогда справедливо представление:

$$x q_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \right) q_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_n(x)$$

Доказательство.

Разложим многочлен степени $n+1$ по ортогональным многочленам:

$$x q_n(x) = \sum_{m=0}^{n+1} c_{nm} q_m(x)$$

откуда $c_{nm} = 0$ при $m > n+1$ при этом

$$c_{nm} = (x q_n, q_m) = \int_a^b x q_n(x) q_m(x) h(x) dx = (x q_m, q_n) = c_{mn}$$

откуда $c_{nm} = 0$ при $m < n-1$. Получаем

$$xq_n(x) = c_{c(n+1)}q_{n+1}(x) + c_{nn}q_n(x) + c_{n(n-1)}q_{n-1}(x)$$

остается вычислить коэффициенты. Подставим в предыдущую формулу:

$$q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + ...$$

Получим:

$$x(a_n x^n + b_n x^n + ...) = c_{n(n+1)}(a_{n+1}x^{n+1} + b_{n+1}x^{n+1} + ...) + c_{nn}(a_n x^n + b_n x^{n-1} + ...) +$$

$$+ c_{n(n-1)}(a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + ...)$$

Собираем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$a_n = c_{n(n+1)}a_{n+1}(\text{при } x^{n+1}) \Rightarrow c_{n(n+1)} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$b_n = c_{n(n+1)}b_{n+1}c_{nn}a_n(\text{при } x^n) \Rightarrow c_{nn} = \frac{b_n - \frac{a_n}{a_{n+1}}b_{n+1}}{a_n}$$

$$...$$

По симметрии находим $c_{n(n+1)} = c_{(n-1)n} = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

#

Огрубляя ситуацию, можно сказать, что для любой последовательности ортогональных многочленов $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, существует постоянные A_n, B_n, C_n такие, что:

$$q_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)q_n(x) + C_n q_{n-1}(x)$$

2. Свойства нулей ортогональных мономов

Утверждение 1. *Все ортогональные многочлены степени n имеют ровно n корней, причем эти корни (нули многочлена q_n) действительны, просты и расположены внутри интервала (a, b).*

Доказательство.

Предположим противное: существует только $k < n$ точек, в которых q_n меняет знак. При этом как минимум одна смена знака есть в силу:

$$\int_a^b q_0(x)q_n(x)h(x)dx = 0, \quad \forall n \geq 1 \quad (1)$$

$$(1) \to \sum S = 0 \quad (2)$$

при этом q_0 - это константа, а $h(x) \geq 0$, (2) $\Rightarrow$ значит, многочлен q_n принимает на (a, b) значения разных знаков. Обозначим нули q_n как $x_1, x_2, \ldots, x_k$

Введем многочлен $P_k(x) = (x - x_1)...(x - x_k)$, тогда многочлен $q_n P_k(x)$ сохраняет знак и значит:

$$\int_a^b q_n(x) P_k(x) h(x) dx \neq 0$$

что противоречит свойству ортогональности многочлена q_n любому многочлену степени, меньшей n (Если $P_m(x)$ - произвольный многочлен степени m, и $n > m$, то $q_n \perp P_m$) $\#$

Следствие 1. из утверждения и рекуррентной формулы:
- Два соседних многочлена не имеют общих корней.
Предположим противное: $q_n(x_0) = q_{n+1}(x_0) = 0$. Воспользуемся рекуррентной формулой:

$$x_0 q_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x_0) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n(x_0) + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0)$$

то есть

$$0 = \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0)$$

Значит, x_0 - корень q_{n-1}. Рассуждая аналогично, x_0 - корень $q_{n-2}, ..., q_0 \Rightarrow q_0 = 0$, что противоречит свойству многочлена q_0, равного константе $\int_a^b q_0^2(x) h(x) dx = 1$

Следствие 2.
- Если x_0 - корень многочлена q_n, то соседние многочлены q_{n-1} и q_{n+1} принимают в точке x_0 значения разных знаков.

Доказательство.
Пусть $q_n(x_0) = 0$. Воспользуемся рекуррентной формулой

$$x_0 \cdot 0 = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x_0) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) 0 + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0)$$

то есть

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x_0) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n+1}(x_0) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0)$$

причем $a_n,\ a_{n+1}$ - старший коэффициент полинома q_m, положительный по построению.

$\#$

Следствие 3.
-Корни многочлена q_n лежат между корнями многочлена q_{n+1}

3. Классические ортогональные многочлены

Наши основные многочлены, все рассматриваемые полиномы ортогональны, но не ортонормированные:

Название	Обозначение	Интервал ортогональности	Весовая функция
Эрмитовы	$H_n(x)$	$\mathbb{R}$	e^{-x^2}
Лагерра	$L_n^\alpha(x)$	$(0, +\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$
Лежандра	$P_n(x)$	$(-1, 1)$	1

Определение 4. *Функцию $w(x,t)$ двух переменных называют производящей функцией для последовательности многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots,$ если ее разложение в ряд по степеням t при достаточно малых t имеет вид:*

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(x)}{\alpha_n} t^n$$

где α_n - некоторые постоянные.

Под "классическим"ортогональными многочленами мы понимаем только то многочлены, весовая функция которых удовлетворяет уравнению Пирсона:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2}$$

и предельным условиям

$$\lim_{x \to a+0} h(x)B(x) = \lim_{x \to b-0} h(x)A(x) = 0$$

где $B(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \; A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$

Если весовая функция h которых удовлетворяют уравнению Пирсона и граничныи условиям, то

- ортогональный многочлен q_n является решением дифференциального уравнения

$$B(x)y''(x) + [A(x) + B'(x)]y'(x) - \gamma_n y(x) = 0$$

где $\gamma_n = n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]$

- имеет место формула Родрига:

$$q_n(x) = c_n \frac{1}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n}[h(x)B^n(x)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где c_n - некоторые постоянные.

- производные $\dfrac{d^m}{dx^m}[q_n(x)]$ являются классическими ортогональными многочленами с тем же промежутком ортогональности

- у многочленов $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots,$ существует производящая функция, выражающаяся через элементарные функции.

Способы задания ортогональных многочленов:

- ортогонализация мономов в $L_2^h(a,b)$
- решение дифференциального уравнения для соответствующего n
- формула Родрига

- рекуррентное соотношение (нужно знать q_0, q_1)
- разложение производящей функции.

Рассмотрим производящую функцию:

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} w(x,t) \bigg|_{t=0}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{2x+2t}{2(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(1-2xt+t^2) = w(x,t)$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(1-2xt+t^2) = (x-t)w$$

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial t} + (t-x)w = 0$$

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

$$t^n: \ (n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-\cancel{1})P_{n-1}(x) + \cancel{P_{n-1}(x)} - xP_n(x) = 0, \ n \geq 1$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \ n = 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

, это рекуррентная формула.

Лемма 1. *$\forall n$ функция $P_n(x)$ является многочленом степени n с положительным старшим коэффициентом.*

Доказательство.

По индукции:

База: $\begin{matrix} n=0, & P_0 = 1 \\ n=1, & P_1 = x \end{matrix}$

Шаг: для $P_n(x)$ верно, докажем для $P_{n+1}(x)$:

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{n+1} \underbrace{xP_n(x)}_{n+1 \text{ степень}} - \frac{n}{n+1} \underbrace{P_{n-1}(x)}_{n-1 \text{ степень}}$$

$P_{n+1}(x)$ - многочлен степени $n+1$

$\dfrac{2n-1}{n+1}xP_n$ - имеем положительную старую степень

#

Дифференцируем $w(x,t)$ по x:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{-2t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial x} - tw = 0$$

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

$$(A):\ P_n'(x) - 2xP_{n-1}'(x) + P_{n-2}'(x) - P_{n-1}(x) = 0,\ \forall n \geq 2 \qquad \left(\frac{d}{dx}(*)\right)$$

$$n \to n+1:\ P_{n+1}'(x) - 2xP_{n+2}'(x) + P_{n-1}'(x) - P_n(x) = 0$$

$$(B): (n+1)P_{n+1}'(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP_n'(x) + nP_{n-1}'(x) = 0$$

$$(B)-(n+1)(A):\ [-(2n+1)+(n+1)]P_n(x) - x[(2n+1)-2(n+1)]P_n'(x) + [n-(n+1)]P_{n-1}'(x) = 0$$

$$(V):\ -nP_n(x) + xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = 0$$

$$(B) - n(A):\ P_{n+1}'(x) - [(2n+1)-n]P_n(x) - x[(2n+1)-2n]P_n'(x) = 0$$

$$(G):\ P_{n+1}'(x) - (n+1)P_n(x) - xP_n'(x) = 0$$

$$(V)+(G):\ P_{n+1}'(x) - (2n+1)P_n(x) - P_{n-1}'(x) = 0$$

$$(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$$

4. Дифференциальное уравнения. Соотношения ортогональностей

$$-(V):\ nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0 \mid \cdot x$$

$$(G)\ n+1 \to n:\ P_n'(x) - nP_{n-1}(x) - xP_{n-1}'(x) = 0$$

Суммируем наши фигни:

$$xnP_n(x) - x^2P_n' + \cancel{xP_{n-1}'(x)} + P_n'(x) - nP_{n-1}(x) - \cancel{xP_{n-1}'(x)} = 0$$

$$(1-x^2)P_n'(x) + nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0\Big| \cdot \frac{d}{dx}$$

$$[(1+x^2)P_n']' + nP_n + \cancel{nxP_n'} \underbrace{-nP_{n-1}'}_{n^2P_n' - \cancel{nxP_n'}} = 0$$

То есть многочлен Лежандра является частным решением линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0$$

$$L_2^h(-1,1),\ h=1:\ (f,g) = \int_{-1}^{1} fg dx$$

$$((1-x^2)P_n')' + n(n+1)P_n = 0 \mid \cdot P_m$$
$$((1-x^2)P_m')' + m(m+1)P_m = 0 \mid \cdot P_n$$

$$\underbrace{[(1-x^2)(P_mP_n' - P_nP_m')]'}_{(1)} + (n(n+1) - m(m+1))P_mP_n = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(1)dx \overset{(\$)}{=} 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} P_nP_m = 0,\ \text{при } n \neq m$$

($): за счет $(1-x^2)|_{-1}^{1} = 0$

, ортогональность доказана.

$$\|P_n\|^2 = (P_nP_m) = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$$

Замена в $(*)$ $n+1 \to n$:

$$(\tilde{*}):\ nP_n - (2n-1)xP_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0$$

$(*)(2n-1)P_{n-1} - (\tilde{*})(2n+1)P_n:$

$$(n+1)(2n-1)P_{n+1}P_{n-1} - x(2n-1)(2n+1)P_nP_{n-1} + (2n+1)nP_{n-1}^2 - (2n-1)nP_n^2 + (2n+1)(2n-1)xP_{n-1} - (2n+1)(n-1)P_nP_{n-2} = 0$$

$$(2n-1)(n+1)P_{n+1}P_{n-1} + (2n-1)nP_{n-1}^2 - (2n+1)(n-1)P_{n-2}P_n = 0$$

$$(2n-1)\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = (2n+1)\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx,\ \forall n \geq 2$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1}\frac{2n-3}{2n-1}\int_{-1}^{1} P_{n-2}^2 dx = ...$$
$$... = \frac{\cancel{2n-1}}{2n+1}\frac{2n-3}{\cancel{2n-1}}\cdots\frac{3}{5}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx}_{\frac{2}{3}} = \frac{2}{2n+1}$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1},\ n \geq 2$$

$$\int_{-1}^{1} P_nP_m dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

5. Формула Родрига и теорема о разложении функций в ряд по многочленам Лежандра

Теорема 1 (Формула Родрига)**.** $\forall n \geq 0 : P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

Доказательство. Руслан не буянь здесь доказательство не нужно, у нас в программе это не требуется. $\#$

Теорема 2 (Теорема о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра)**.** *Пусть* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемая функция. Тогда* $\forall x \in [-1,1]$ *справедливо равенство:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

, где $P_n(x)$ *- многочлен Лежандра стандартизированный с помощью производящей функции* $w(x,t)$

$$c_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!