

### Толстая линза (продолжение)

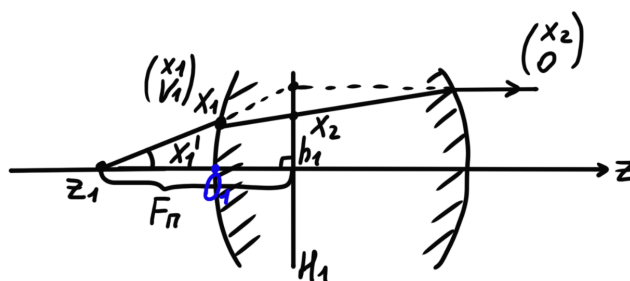
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = m_{22}x_2 \\ V_1 = x'_1 = -m_{21}x_2 \end{cases} \Rightarrow z_1 = -\frac{x_1}{x'_1} = \frac{m_{22}}{m_{21}}$$

$$F_{\Pi} = \frac{x_2}{x'_1} = -\frac{x_2}{m_{21}x_2} = -\frac{1}{m_{21}} = F_{\text{Л}}$$

$$h_1 = z_1 + F_{\Pi} = \frac{m_{22}}{m_{21}} - \frac{1}{m_{21}} = \frac{m_{21} - 1}{m_{21}}$$

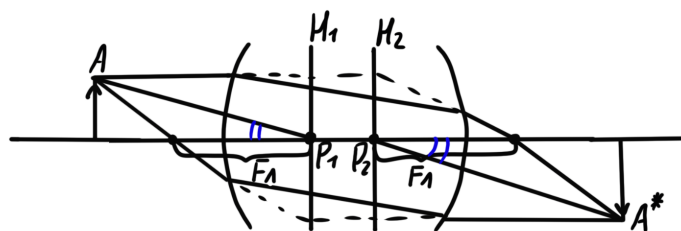
, где  $h_1$  - координата относительно  $O_1$  первой главной плоскости.

Вывод: переднее и заднее фокусное расстояние одинаковы и равны фокусному расстоянию толстой линзы  $= -\frac{1}{m_{21}}$



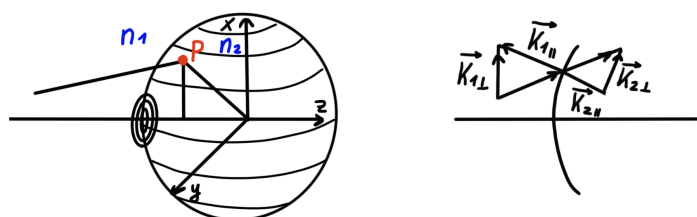
$P_1, P_2$  - узловые точки

### Матричный формализм



Точка  $P(x, y, z)$ , нормаль в точке  $P$   $\vec{n} = (x, y, z)\frac{1}{R}$ . В параксиальном приближении  $|x||y| \ll |R| \Rightarrow \vec{n} = (\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, -1)$ .

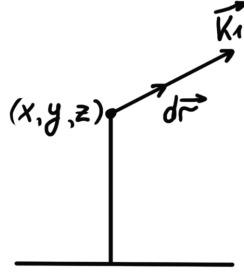
Граничное условие на границе раздела  $\vec{k}_{1\perp} = \vec{k}_{1\perp}$



$$\vec{k}_1 = k_0 n_1 \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right), \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ ,  $|d\vec{r}| = ds$ . Если луч параксиальный, то  $dz = ds$

$$\Rightarrow \vec{k}_1 \approx k_0 n_1 \left( \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, 1 \right) = k_0 n_1(x'_1, y'_1, 1), \quad \vec{k}_2 = k_0 n_2(x'_2, y'_2, 1)$$



$$\vec{k}_{1\perp} = \vec{k}_{2\perp} \Rightarrow \vec{k}_{1\perp} = k_0 n_1 \left[ (x'_1, y'_1, 1) - \left( \frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 1 \right) \left( \underbrace{x'_1 \frac{x}{R} + y'_1 \frac{y}{R}}_{\text{2-го порядка малости}} - 1 \right) \right]$$

В нашем определении  $x = x_1 = x_2$ ,  $y = y_1 = y_2$ ;

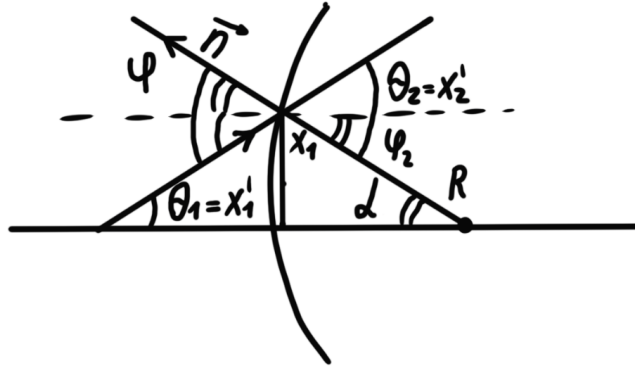
$$\vec{k}_{1\perp} = k_0 n_1 \left( x'_1 + \frac{x_1}{R}, y'_1 + \frac{y_1}{R}, 0 \right)$$

$$\vec{k}_{2\perp} = k_0 n_2 \left[ (x'_2, y'_2, 1) - \left( \frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 1 \right) \left( \underbrace{x'_2 \frac{x}{R} + y'_2 \frac{y}{R}}_{\text{2-го порядка малости}} - 1 \right) \right]$$

$$\vec{k}_{1\perp} = k_0 n_2 \left( x'_2 + \frac{x_1}{R}, y'_2 + \frac{y_1}{R}, 0 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} n_1 \left( x'_1 + \frac{x_1}{R} \right) &= n_2 \left( x'_2 + \frac{x_2}{R} \right) \\ n_1 \left( y'_1 + \frac{y_1}{R} \right) &= n_2 \left( y'_2 + \frac{y_2}{R} \right) \end{aligned}$$

Для меридианного луча:



Закон Снеллиуса:

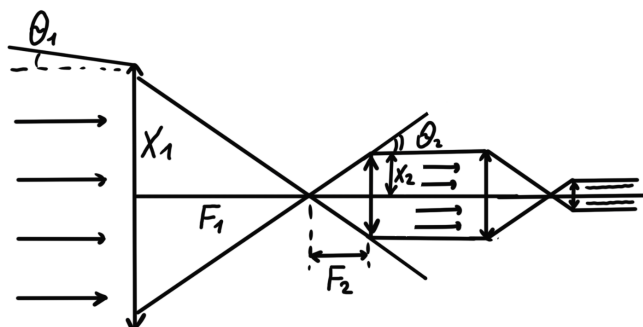
$$n_1 \sin \left( x'_1 + \frac{x_1}{R} \right) = n_2 \sin \left( x'_2 + \frac{x_2}{R} \right)$$

$$\Downarrow \left( \alpha = \arcsin \frac{x_1}{R} \approx \frac{x_1}{R} \right)$$

$$n_1 \left( x'_1 + \frac{x_1}{R} \right) = n_2 \left( x'_2 + \frac{x_2}{R} \right)$$

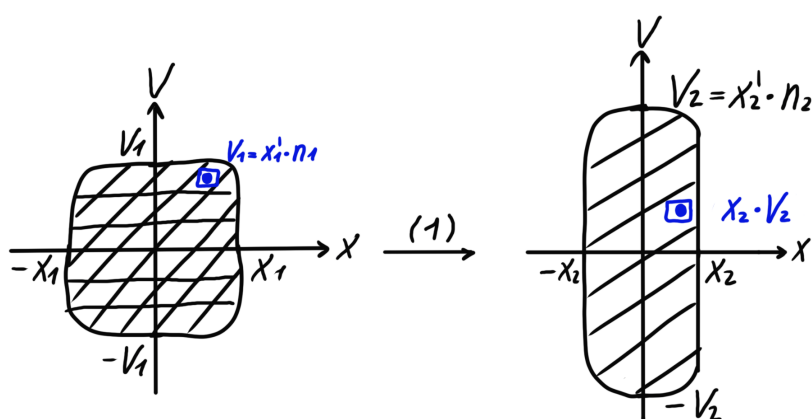
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \\ y_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$$

## 1. Теорема Лагранжа-Гельмгольца



Самим доказать из матричного формализма:  $n_1 x_1 \theta_1 = n_2 x_2 \theta_2$

Понятие фазового портрета:



(1) : Линзы, свободное пространство, зеркала

Теорема 1.

$$\iint dx_1 dV_1 = \iint dx_2 dV_2$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$$dx_2 dV_2 = \frac{\partial(x_2 V_2)}{\partial(x_1 V_1)} dx_1 dV_1 = \det \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}}_{=1} dx_1 dV_1$$

Минимальная угловая расходимость (у современных "хороших") лазеров:

$$\Delta\theta \sim \frac{\Delta k_x}{k} \sim \frac{\pi}{2\Delta x} \sim \frac{\lambda}{2\Delta x} \sim \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{\lambda}{2x_1}$$

, где  $\Delta k_x$  разброс поля.

## 2. Интерференция волн

В оптическом диапазоне ( $f \sim 10^{15} - 10^{16}$  Гц) большинство приборов, с которыми регистрируют электромагнитное излучение, измеряют  $\langle \vec{E}^2(t) \rangle = I$  - интенсивность света...

$$I(t) = \frac{1}{\theta_0} \int_{t-\frac{\tau_0}{2}}^{t+\frac{\tau_0}{2}} E^2(t) dt'$$

Если  $I$  не зависит от  $t$ , то  $I = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} E^2(t) dt'$ , где  $\tau_0$  - временное разрешение прибора (у глаза  $\tau_0 \sim 0,01$ )

**Интерференция двух монохроматических волн:**

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_2(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}_\Sigma(\vec{r}, t) = (\vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})) e^{-i\omega t},$$

$$\begin{aligned} I = \langle (\text{Re} \vec{E}_\Sigma, \text{Re} \vec{E}_\Sigma) \rangle &= \left\langle \left( \frac{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)e^{-i\omega t} + (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*)e^{+i\omega t}}{2}, \frac{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)e^{-i\omega t} + (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*)e^{+i\omega t}}{2} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{4} \left\langle \left( [(\vec{E}_1 + \vec{E}_2), (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*)] + [(\vec{E}_1 + \vec{E}_2), (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*)] \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left[ |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2\text{Re}(\vec{E}_1, \vec{E}_2) \right] = I_1 + I_2 + I_{12} \end{aligned}$$