Толстая линза (продолжение)

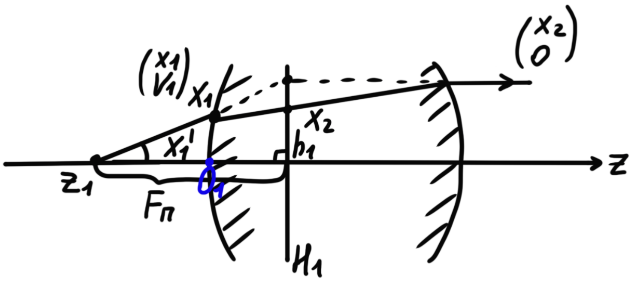
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = m_{22}x_2 \\ V_1 = x_1' = -m_{21}x_2 \end{cases} \Rightarrow z_1 = -\frac{x_1}{x_1'} = \frac{m_{22}}{m_{21}}$$

$$F_{\text{п}} = \frac{x_2}{x_1'} = -\frac{x_2}{m_{21}x_2} = -\frac{1}{m_{21}} = F_{\text{Л}}$$

$$h_1 = z_1 + F_{\text{п}} = \frac{m_{22}}{m_{21}} - \frac{1}{m_{21}} = \frac{m_{22} - 1}{m_{21}}$$

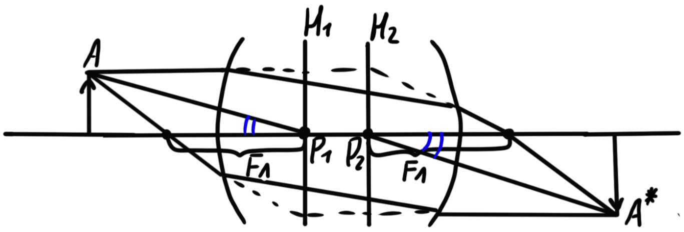
, где h_1 - координата относительно O_1 первой главной плоскости.

Вывод: переднее и заднее фокусное расстояние одинаковы и равны фокусному расстоянию толстой линзы $= -\dfrac{1}{m_{21}}$



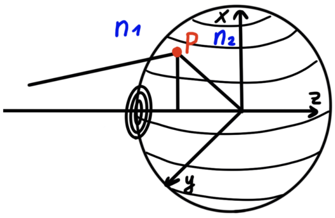
P_1, P_2 - узловые точки

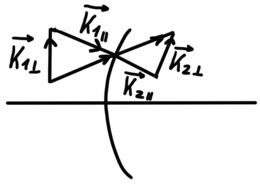
Матричный формализм для немеридиальнных лучей



Точка $P(x, y, z)$, нормаль в точке P $\vec{n} = (x, y, z)\dfrac{1}{|R|}$. В параксиальном приближении $|x||y| \ll |R| \Rightarrow \vec{n} = (\dfrac{x}{R}, \dfrac{y}{R}, -1)$.

Граничное условие на границе раздела $\vec{k}_{1_\perp} = \vec{k}_{1_\perp}$

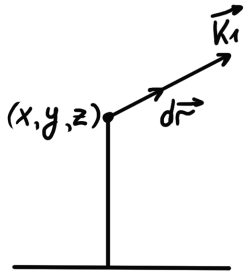




$$\vec{k}_1 = k_0 n_1 \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right), \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz),\ |d\vec{r}| = ds.\ \text{Если луч параксиальный, то } dz = ds$$

$$\Rightarrow \vec{k}_1 \approx k_0 n_1 \left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, 1 \right) = k_0 n_1 (x_1', y_1', 1),\ \vec{k}_2 = k_0 n_2 (x_2', y_2', 1)$$



$$\vec{a}_{||} = (\vec{a}, \vec{n})\vec{n}, \quad \vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{n}(\vec{n}, \vec{a}) = [\vec{n} \times [\vec{a} \times \vec{n}]]$$

$$\vec{k}_{1_\perp} = \vec{k}_{2_\perp} \Rightarrow \vec{k}_{1_\perp} = k_0 n_1 \left[(x_1', y_1', 1) - \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 1 \right) \left(\underbrace{x_1' \frac{x}{R} + y_1' \frac{y}{R}}_{\text{2-го порядка малости}} - 1 \right) \right]$$

В нашем определении $x = x_1 = x_2,\ y = y_1 = y_2$;

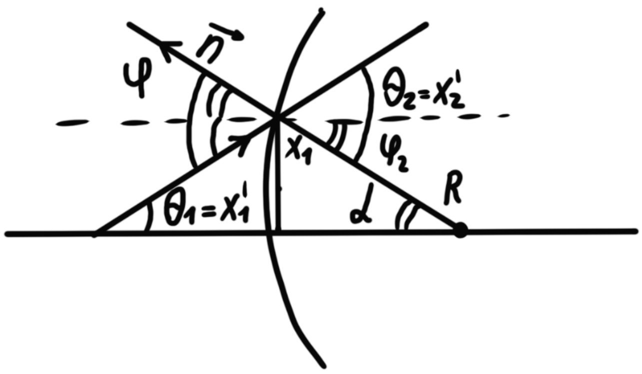
$$\vec{k}_{1_\perp} = k_0 n_1 \left(x_1' + \frac{x_1}{R}, y_1' + \frac{y_1}{R}, 0 \right)$$

$$\vec{k}_{2_\perp} = k_0 n_2 \left[(x_2', y_2', 1) - \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 1 \right) \left(\underbrace{x_2' \frac{x}{R} + y_2' \frac{y}{R}}_{\text{2-го порядка малости}} - 1 \right) \right]$$

$$\vec{k}_{2_\perp} = k_0 n_2 \left(x_2' + \frac{x_1}{R}, y_2' + \frac{y_1}{R}, 0 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} n_1 \left(x_1' + \dfrac{x_1}{R} \right) = n_2 \left(x_2' + \dfrac{x_2}{R} \right) \\ n_1 \left(y_1' + \dfrac{y_1}{R} \right) = n_2 \left(y_2' + \dfrac{y_2}{R} \right) \end{matrix}$$

Для меридианного луча:

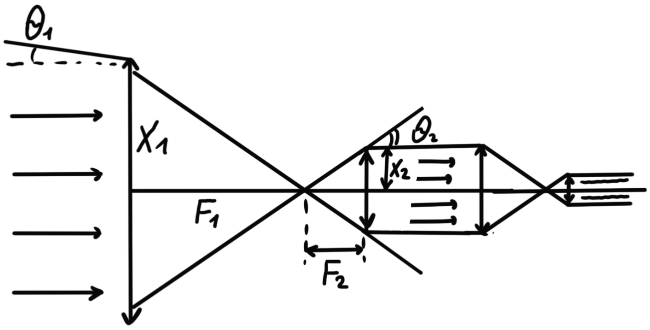


Закон Снеллиуса:

$$n_1 \sin\left(x_1' + \frac{x_1}{R}\right) = n_2 \sin\left(x_2' + \frac{x_2}{R}\right)$$
$$\Downarrow \left(\alpha = \arcsin\frac{x_1}{R} \approx \frac{x_1}{R}\right)$$
$$n_1 \left(x_1' + \frac{x_1}{R}\right) = n_2 \left(x_2' + \frac{x_2}{R}\right)$$

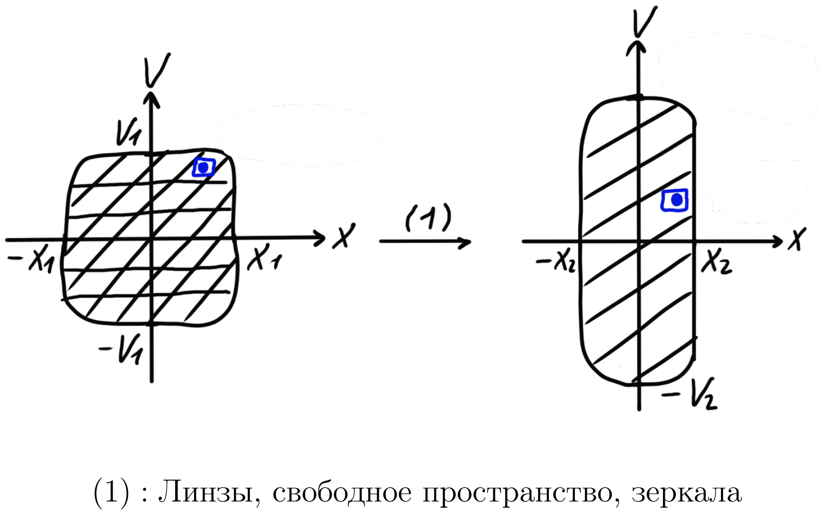
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \\ y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$$

1. Теорема Лагранжа-Гельмгольца



Самим доказать из матричного формализма: $n_1 x_1 \theta_1 = n_2 x_2 \theta_2$

Понятие фазового портрета:



(1) : Линзы, свободное пространство, зеркала

Теорема 1.

$$\iint dx_1 dV_1 = \iint dx_2 dV_2$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$$dx_2 dV_2 = \frac{\partial(x_2 V_2)}{\partial(x_1 V_1)} dx_1 dV_1 = \det \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}}_{=1} dx_1 dV_1$$

Минимальная угловая расходимость (у современных "хороших") лазеров:

$$\Delta\theta \sim \frac{\Delta k_x}{k} \sim \frac{\pi}{k\Delta x} \sim \frac{\lambda}{2\Delta x} \sim \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{\lambda}{2x_1}$$

, где Δk_x разброс поля.

2. Интерференция волн

В оптическом диапазоне ($f \sim 10^{15} - 10^{16}$ Гц) большинство приборов, с которыми регистрируют электромагнитное излучение, измеряют $< \vec{E}^2(t) >= I$ - интенсивность света...

$$I(t) = \frac{1}{\tau_0} \int_{t-\frac{\tau_0}{2}}^{t+\frac{\tau_0}{2}} E^2(t) dt'$$

Если I не зависит от t, то $I = \dfrac{1}{\tau_0} \displaystyle\int_0^{\tau_0} E^2(t) dt'$, где τ_0 - временное разрешение прибора (у глаза $\tau_0 \sim 0,01$ сек)

Интерференция двух монохроматических волн:

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}) e^{-i\omega t},\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_2(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}_\Sigma(\vec{r}, t) = (\vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})) e^{-i\omega t},$$

$$I =< (\mathrm{Re}\vec{E}_\Sigma, \mathrm{Re}\vec{E}_\Sigma) >= \left\langle \left(\frac{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)e^{-i\omega t} + (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*)e^{+i\omega t}}{2}, \frac{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)e^{-i\omega t} + (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*)e^{+i\omega t}}{2} \right) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{4} \left\langle \left([(\vec{E}_1 + \vec{E}_2), (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*)] + [(\vec{E}_1 + \vec{E}_2), (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*)] \right) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \left[|\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2) + 2\mathrm{Re}(\vec{E}_1, \vec{E}_2) \right] = I_1 + I_2 + I_{12}$$