Лекция 10. Степенные ряды (продолжение).

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \tag{1}$$

Теорема 3 (Абель). Если степенной ряд (1) сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится равномерно на отрезке $\Delta_{z_0,z_1} = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + t(z_1 - z_0),\ t \in [0,1]\}$.

▲ Последовательность $\{t^n\}$ монотонна $\forall t \in [0,1]$ и равномерно ограничена на $[0,1]$. По условию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-z_0)^n$ сходится. Поэтому по прищнаку Абеля для функциональных рядов ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-z_0)^n t^n$ сходится равномерно на $[0,1]$. Сделав замену $t = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$, получим ряд (1). Следовательно, ряд (1) сходится равномерно на Δ_{z_0,z_1}. ■

Замечание. Если $z \in B_R(z_0)$, то теорема Абеля следует из теоремы 2.

Лемма. Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$$

имеют одинаковый радиус сходимости.

▲ Обозначим радиус сходимости первого ряда через R. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то множества частичных пределов последовательностей $\left\{\sqrt[n]{n|c_n|}\right\}$ и $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ совпадают и, значит,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

По формуле Коши-Адамара радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n (z-z_0)^n$ равен R, следовательно и радиус сходимости второго ряда равен R. Первый ряд получается из третьего почленным дифференцированием $\Rightarrow$ радиусы сходимости этих рядов совпадают. ■

Теорема 4. Если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ - сумма степенного ряда с радиусом сходимости $R > 0$, то f бесконечно дифференцируема в круге сходимости $B_R(z_0)$, причем в $\forall m \in \mathbb{N}$ в этом круге имеет место равенство

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) c_n (z-z_0)^{n-m}$$

▲ По лемме 1 при дифференцировании радиус сходимости степенного ряда не меняется, поэтому достаточно доказать утверждение для $m = 1$ и применить индукцию. Без ограничения общности можно считать $z_0 = 0$.

Возьмем $w \in B_R(0)$ и покажем, что производная функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ в точке w равна числу l, где

$$l = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n w^{n-1}$$

Зафиксируем r так, чтобы $|w| < r < R$. Для $z \neq w$, $|z| < r$ рассмотрим разность

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - l = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{z^n - w^n}{z-w} - n w^{n-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z^{n-1} + z^{n-2}w + \ldots + z w^{n-2} + w^{n-1} - n w^{n-1}\right) \tag{2}$$

Перепишем выражение в скобках в следующем виде:

$$\begin{aligned}&(z^{n-1} - w^{n-1}) + w(z^{n-2} - w^{n-2}) + \ldots + w^{n-2}(z-w) = \\ &\qquad = (z-w)\left[(z^{n-2} + z^{n-3}w + \ldots + w^{n-2}) + w(z^{n-3} + z^{n-4}w + \ldots + w^{n-3}) + \ldots + w^{n-2}\right]\end{aligned}$$

Т.к. $(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}$, то для n-го члена (2) справедливо

$$\left|c_n(z^{n-1}+z^{n-2}w+\ldots+w^{n-1}-nw^{n-1})\right|\leqslant|z-w||c_n|\frac{n(n-1)}{2}r^{n-2}$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|c_n|\frac{n(n-1)}{2}r^{n-2}$ сходится, т.к. $r<R$ и дважды дифференцированный ряд имеет радиус сходимости R. Следовательно

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-l\right|\leqslant|z-w|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}|c_n|r^{n-2}\to 0,\ z\to w$$

и, значит, $\exists\lim\limits_{z\to w}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}=l$. ■

Следствие 1. Степенной ряд (1) с радиусом сходимости $R>0$ имеет в круге сходимости первообразную

$$F(z)=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$$

Следствие 2. Если степенной (1) имеет радиус сходимости $R>0$, то его коэффициенты однозначно определяются по формуле

$$c_m=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!},\ m=0,1,2,\ldots$$

Следствие 3 (теорема единственности). Если степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$ сходятся в некотором круге $B_\delta(z_0)$, и их суммы в $B_\delta(z_0)$ совпадают, то $a_n=b_n$, $n=0,1,2,\ldots$.

Определение. Если функция f в точке z_0 имеет производные всех порядков, то степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции f в точке z_0. Для $z_0=0$ называется рядом Маклорена.

Действительные степенные ряды. Представление функций рядом Тейлора.

Будем говорить, что функция f на промежутке $I\subset\mathbb{R}$ представима в виде ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, если ряд сходится на и f является его суммой на I. Промежуток (x_0-R,x_0+R) назовём интервалом сходимости степенного ряда.