Лекция 11. Представление функций степенными рядами.

Рассмотрим достаточное условие представления функции степенным рядом.

Лемма. Пусть функция f в некоторой окрестности $B_\delta(x_0)$ имеет производную любого порядка и $\exists C > 0\, \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in B_\delta(x_0)\ \big(|f^{(n)}(x) \leq C|\big)$. Тогда для всех $x \in B_\delta(x_0)$ выполнено

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

▲ Рассмотрим n-ый остатой в формуле Тейлора:

$$r_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}$$

для некоторого c, лежащей между x и x_0, и, значит,

$$|r_N(x)| \leq \frac{C}{(N+1)!}\delta^{N+1} \to 0$$

Следовательно, f является суммой своего ряда Тейлора в $B_\delta(x_0)$. ■

Следствие. Ряды Маклорена функций $e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ сходятся к этим функциям для $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

▲ Указанные функции бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$:

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \quad (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2}n), \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{pi}{2}n),$$
$$(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \frac{e^x - (-1)^n e^{-x}}{2}, \qquad (\operatorname{ch} x)^{(n)} = \frac{e^x + (-1)^n e^x}{2}$$

Пусть $\delta > 0$, тогда при $|x| < \delta$ имеем

$$|(e^x)^{(n)}| \le e^\delta, \quad (\sin x)^{(n)} \le 1, \qquad (\cos x)^{(n)} \le 1$$
$$(\operatorname{sh} x)^{(n)} \le e^\delta, \qquad (\operatorname{ch} x)^{(n)} \le e^\delta$$

По лемме ряды Маклорена этих функций сходятся к самим функциям на интервале $(-\delta, \delta)$. Т.к. $\delta > 0$ - любое, то эти ряды сходятся на $\mathbb{R}$. ■

Теорема 5. Биномиальный ряд. Пусть $\alpha \notin \mathbb{N}$ и

$$C_\alpha^n = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!},\ C_\alpha^0 = 1.$$

Тогда

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, |x| < 1$$

▲ Положим $f(x) = (1 + x)^\alpha$, тогда

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (a + x)^{\alpha - n}$$

и, значит,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = C_\alpha^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Т.к. при $x \ne 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_\alpha^{n+1} x^{n+1}|}{|C_\alpha^n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - n|}{n + 1} |x| = |x|$$

По признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при $|x| < 1$ и абсолютно расходится при $|x| > 1$. Следовательно, радиус сходимости биномиального ряда равен 1.

Определим функцию

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, |x| < 1$$

Покажем, что $f = g$ на $(-1, 1)$, т.е.

$$\forall x \in (-1, 1) \quad (1 + x)^{-\alpha} g(x) = 1$$

Найдём производную функции, стоящей в левой части последнего равенства:

$$\big((1 + x)^{-\alpha} g(x)\big)' = -\alpha (1 + x)^{-\alpha - 1} \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n + (1 + x)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} n C_\alpha^n x^{n-1} =$$
$$= (1 + x)^{-\alpha - 1} \left[-\alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n C_\alpha^n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n C_\alpha^n x^{n-1} \right]$$

В последнем слагаемом сделаем замену индекса суммирования, тогда после приведения подобных слагаемых имееем:

$$\left((1+x)^{-\alpha-1}g(x)\right)' = (1+x)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)C_{\alpha}^{n+1} - (\alpha-n)C_{\alpha}^{n}\right]x^n = 0$$

Следовательно, функция $(1+x)^{-\alpha}g(x)$ постоянна на $(-1,1)$. Подстановка $x=0$ дает, что $(1+x)^{-\alpha}g(x) = 1$ на $(-1,1)$. ■

Замечание. При $\alpha > 0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha}^{n}x^n$ сходится равномерно на $[-1,1]$.

▲ Положим $a_n = |C_{\alpha}^{n}|$. Покажем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится. Т.к. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-\alpha}{n+1}$ при $n > \alpha$.