# Лекция 9. Степенные ряды.

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$. Покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}} \tag{1}$$

сходится неравномерно на $E = (0, 2\pi)$.

▲ Рассмотрим последовательность $\left\{x_n = \frac{1}{2n}\right\}$. Заметим, что $\frac{1}{2} < kx_n \leqslant 1$, тогда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx_n}{k^{\alpha}} \right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx_n}{k^{\alpha}} \geqslant \frac{n \sin \frac{1}{2}}{(2n)^{\alpha}} \geqslant \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} > 0$$

По критерию Коши ряд (1) не сходится равномерно. ■

**Теорема 8 (признак Дини).** Пусть $f_n, f$ непрерывны на $[a,b]$, $f_n \to f$ на $[a,b]$ и $\{|f_n(x) - f(x)|\}$ нестрого убывает $\forall x \in [a,b]$. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$.

▲ Достаточно доказать, что $g_n := |f_n - f| \rightrightarrows 0$ на $[a,b]$. Предположим противное. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \forall x \geqslant N\ \forall x \in [a,b]\ \ (|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon)$$

или же

$$\exists \varepsilon > 0\ \exists \{n_k\},\ n_1 < n_2 < \dots\ \exists \{x_k\} \subseteq [a,b]\ \ (g_{n_k}(x_k) \geqslant \varepsilon)$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists \left\{x_{k_j}\right\}, x_{k_j} \to x \in [a,b]$. В силу монотонности

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists j_0 \in \mathbb{N}\ \forall j \geqslant j_0\ \ \left(g_n(x_{k_j}) \geqslant g_{n_{k_j}}(x_{k_j})\ \Rightarrow\ g_n(x_{k_j}) \geqslant \varepsilon\right)$$

Перейдя к пределу при $j \to \infty$, получим $g_n(x) \geqslant \varepsilon$, что противоречит $g_n(x) \to 0$. ■

**Следствие.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ поточечно сходится к функции $S$ на $[a,b]$, все $f_n, f$ непрерывны на $[a,b]$ и $f_n \geqslant 0$ на $[a,b]$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно на $[a,b]$ (достаточно применить признак Дини для последовательности частичных сумм).

**Пример (Ван-дер-Варден).** Существует непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, не дифференцируемая ни в одной точке.

▲ Рассмотрим $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|$ на $[-1,1]$ и $\varphi(x \pm 2) = \varphi(x)$. Заметим, что если $(x,y) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$, то сужение $\varphi|_{[x,y]}$ - кусочно-линейная функция с угловым коэффициентом $\pm 1$ и, значит,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y| \tag{$*$}$$

Определим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ f_n(x) = 4^{-n} \varphi(4^n x)$$

Заметим, что $\forall x \in \mathbb{R}$ $(|f_n(x)| \leqslant 4^{-n})$, следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ (по признаку Вейерштрасса). Все функции $f_n$ непрерывны и, значит, $f$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Определим ненулевую последовательность $\{h_k\}$, $h_k \to 0$ и $\nexists \lim\limits_{k \to \infty} \frac{f(a+h_k) - f(a)}{h_k}$.

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что

$$\left(4^k a, 4^k a + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing \Rightarrow \left(4^k a - \frac{1}{2}, 4^k a\right) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$$
$$\left(4^k a - \frac{1}{2}, 4^k a\right) \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing \Rightarrow \left(4^k a, 4^k a + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$$

Поэтому существует $h_k = \pm \frac{1}{2} 4^{-k}$, что на интервале с концами $4^k a$ и $4^k (a + h_k)$ нет целых чисел. Более того, на интервале с концами $4^n a$ и $4^n (a + h_k)$ при $n \leqslant k$ также нет целых чисел. Поэтому в силу (*)

$$|\varphi(4^n (a + h_k)) - \varphi(4^n a)| = 4^n |h_k|,\ n \leqslant k$$

И в силу 2-периодичности $\varphi$

$$|\varphi(4^n(a+h_k)) - \varphi(4^n a)| = 0,\ n > k$$

Следовательно,

$$|f_n(a+h_k) - f_n(a)| = \begin{cases} |h_k|, & n \leqslant k \\ 0, & n > k \end{cases}$$

и, значит,

$$\frac{f(a+h_k) - f(a)}{h_k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{f_n(a+h_k) - f_n(a)}{h_k} = \sum_{n=1}^{k} \pm 1. \blacksquare$$

# Степенные ряды.

**Определение.** Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

где $x_n, z_0 \in \mathbb{C}$, $z$ - комплексная переменная.

**Определение.** Неотрицательное число $R$ (или символ $+\infty$) называется радиусом сходимости степенного ряда (1), если

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z - z_0| < R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ сходится}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z - z_0| > R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ расходится}$$

**Теорема 1 (Коши-Адамар).** Всякий степенной ряд имеет радиус сходимости. Радиус сходимости ряда (1) выражается формулой

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} = 0,\ \frac{1}{0} = +\infty\right)$$

▲ Пусть $z \neq z_0$. Тогда

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|z - z_0|}{R} \qquad (0,\ \text{если } R = +\infty;\ +\infty,\ \text{если } R = 0)$$

Поэтому если $|z - z_0| < R$, то $q < 1$ и по признаку Коши для числовых рядов ряд (1) сходится абсолютно. Если $z - z_0 > R$, то $q > 1$ и по признаку Коши $n$-ый член не стремится к нулю. Значит, ряд (1) расходится и абсолютно расходится (т.е. расходится ряд из модулей членов). Следовательно, $R$ - радиус сходимости ряда (1). $\blacksquare$

**Определение.** Пусть $R$ - радиус сходимости степенного ряда (1). Множество $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ называется кругом сходимости ряда (1).

**Следствие.** Если величина $R \in [0, +\infty]$ удовлетворяет условиям

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z - z_0| < R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ абсолютно сходится}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z - z_0| > R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ абсолютно расходится,}$$

то $R$ - радиус сходимости ряда (1).

**Пример.** Найдем радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^{2n}$.

▲ Введем обозначение $u_n(z) = \frac{n!}{n^n} z^{2n}$. Пусть $x \neq 0$:

$$\frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{(n+1)}} |z|^2 = \frac{|z|^2}{(1 + \frac{1}{n})^n} \to \frac{|z|^2}{e}$$

Если $|z| < \sqrt{e}$, то по признаку Даламбера ряд сходится абсолютно. Если $|z| > \sqrt{e}$, то по по признаку Даламбера ряд расходится абсолютно. Применяя следствие, получаем, что $R = \sqrt{e}$. $\blacksquare$

**Теорема 2.** Пусть ряд (1) имеет радиус сходимости $R \in (0;\ +\infty]$. Тогда этот ряд сходится равномерно на любом замкнутом круге вида $\overline{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$, $0 \leqslant r < R$.

▲ По теореме 1 в точке $z_* = z_0 + r$ ряд (1) сходится абсолютно, т.е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$. Если $z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| \leqslant r$, то $|c_n(z - z_0)^n| \leqslant |c_n| r^n$ и, значит, ряд (1) сходится равномерно на замкнутом круге $\overline{B}_r(z_0)$ по признаку Вейерштрасса. $\blacksquare$