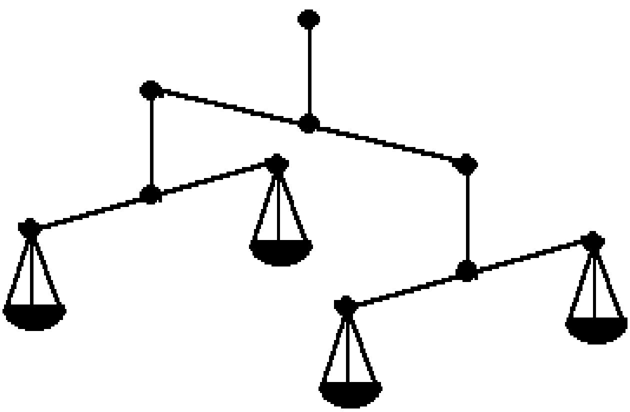
Matematicki fakultet
Univerzitet u Beogradu

Dušan Tošic
Vladimir Filipovic

Seminarski zadaci iz Osnova programiranja



Beograd, 1995. godine

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka namenjena je, pre svega, studentima prve godine racunarskog smera na matematici. Medutim, zbirka ce biti od koristi svim studentima, ucenicima i nastavnicima koji se bave programiranjem. U okviru predmeta Osnovi programiranja na Matematickom fakultetu u Beogradu, studenti su obavezni da na Pascal-u urade jedan seminarski rad. Uradeni zadatak je uslov za izlazak na pismeni deo ispita. Cilj je da studenti, prilikom odbrane seminarskog rada, prikažu odredenu veštinu u rukovanju operativnim sistemom, editorom i nekim prevodiocem (odnosno integrisanom okolinom, ukoliko su se na istoj obucavali) za Pascal.

Dakle, zadaci ne bi trebalo da budu preteški, jer se znanje Pascal-a proverava na pismenom delu ispita. S druge strane, zadaci ne bi trebalo da budu trivijalni. Drugim recima, potrebno je da zadaci budu ujednacene težine. Medutim, formulisati veliki broj zadataka jednake težine - nije moguce. Prema tome, u ovoj zbirci se mogu naci kako laki, tako i teški zadaci. Za neke od zadataka navedena su kratka uputstva, napomene ili primeri. U njima su bliže opisani oni pojmovi sa kojima se studenti možda nisu sreli u dosadašnjem radu. Ipak, u vecini zadataka inicijativa je prepuštena studentima.

U zbirci se nalazi odredeni broj zadataka za cije je rešavanje neophodno, sem konstrukcija standardnog Pascal-a, poznavati i koristiti neki od njegovih dijalekata, koji omogucava rad sa grafikom. Takvi zadaci se, mahom, nalaze u poglavljima koja se odnose na: simulaciju, crtanje i programiranje igara. Izbor takvih zadataka se preporucuje kandidatima koji su se u dosadašnjem školovanju upoznali sa Pascal-om, pa žele da ovladaju finesama pri radu sa konkretnom implementacijom ovog programskog jezika (bilo pod DOS-om ili pod Windows-ima).

Pojedini zadaci u zbirci su, iza rednog broja, oznaceni zvezdicom (*). To su zadaci koji su prethodnih školskih godina bili na spisku seminarskih zadataka, zadržani su samo iz metodoloških razloga, ali se sada ne mogu izbrati kao seminarski zadaci.

U nadi da ce ova "zbircica" biti od koristi citaocima, zahvaljujemo se svima koji su pomogli da se pojavi. Svaka sugestija autorima, u cilju poboljšanja kvaliteta zbirke, je dobrodošla.

Autori

ZADACI

1. Osobine brojeva

1.1. Napisati:

(a) Program za štampanje svih uzastopnih prostih dvojki $\{(5,7),(11,13),(17,19),\ldots\}$ ciji elementi su manji od unapred zadatog prirodnog broja n.

(b) Program koji za svaki paran broj $2k$, koji je manji od datog broja n a veci od 4, nalazi bar jednu reprezentaciju $2k=p+q$, pri cemu su p i q prosti brojevi. (Provera Goldbahove hipoteze!)

NAPOMENA. U ovom zadatku (kao i u nekoliko narednih) srecemo se sa problemom odredivanja prostih brojeva iz nekog intervala. Jedan od najpoznatijih algoritama (što ne znaci da je njegova realizacija najjednostavnija) za odredivanje prostih brojeva poznat je pod nazivom Eratostenovo sito (naziv potice od imena antickog matematicara Eratostena). Objasnimo ovaj postupak na primeru intervala prirodnih brojeva od 2 do n; možemo zamisliti da se, na pocetku, svi ovi brojevi nalaze u Eratostenovom situ. Postupak se odvija ovako:

1^0 - biramo najmanji broj u situ i prikljucujemo ga skupu prostih brojeva,

2^0 - svi umnožci izabranog broja (nakon prosejavanja) ispadaju iz sita,

3^0 - koraci 1^0 i 2^0 se ponavljaju sve dok ima brojeva u situ. (drugacije receno, kada skup brojeva u situ ostane prazan, nadeni su svi prosti brojevi iz datog intervala.)

1.2. U istoriji matematike predlagane su razne formule za generisanje prostih brojeva. Ispostavilo se da su mnoge od njih bile pogrešne, tj. pronadeni su slucajevi u kojima ne generišu proste brojeve.

Napisati program u kojem bi se koristile bar tri takve formule i za svaku od njih pronalazio bar jedan slucaj za koji formula ne daje prost broj.

UPUTSTVO. Jedna od takvih formula (ciji autor nije poznat) bila je

$$x_n = n^2 + n + 41$$

Još jedna formula, slicna prethodnoj, je:

$$x_n = n^2 - 79n + 1601$$

U prvoj polovini 17. veka, Mersen je uveo pretpostavku da su brojevi oblika

$$2^p - 1$$

prosti brojevi kad god je p prost broj. Ovakvi brojevi, u oznaci M_p, poznati su pod nazivom Mersenovi brojevi. Mersenov broj $M_{127}=2^{127}-1$, dugi niz godina držao je rekord kao najveci poznati prost broj. Na žalost, Mersenova pretpostavka nije bila tacna. Postoji veci broj Mersenovih brojeva, koji nisu prosti. Dakle, i Mersenovu formulu možemo svrstati u prethodnu grupu.

1.3. Neka je A prirodan broj, a A' ma kakav broj sastavljen iz istih cifara kao i broj A. Napisati program za štampanje svih parova (A,A') za $A<n$ (n je dati broj) takvih da je $A+A'$ savršen broj.

NAPOMENA. Pod savršenim brojem podrazumeva se broj koji je jednak zbiru svih svojih faktora (izuzev samoga sebe).

1.4.* Napisati program za ispitivanje da li postoje celi brojevi (manji od unapred zadatog celog broja n) takvi da se umanjuju k puta pri precrtavanju neke njihove cifre i pri tom se dobija broj deljiv sa k. (k je dat prirodan broj.)

1.5.* Brojevi koji nemaju druge proste faktore, osim 2, 3 i 5, nazivaju se Hemingovi brojevi. (To su brojevi: $2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18$,...). Za zadati broj n, odrediti prvih n Hemingovih brojeva.

1.6. Napisati program za nalaženje svih desetocifrenih brojeva n sa osobinom: sve cifre prirodnog broja n su medusobno razlicite, a svaki prirodan broj manji od 19 je njegov delilac.

1.7. Neka je n_1 proizvod cifara broja n, n_2 proizvod cifara broja n_1 itd..., n_k proizvod cifara broja n_{k-1}, pri cemu je k najmanji prirodan broj za koji je n_k jednocifren. Broj k se naziva multiplikativna otpornost broja n. Najmanji broj sa multiplikativnom otpornošcu 1 je broj 10. Najmanji brojevi sa multiplikativnom otpornošcu od 1 do 6 su prikazani u sledecoj tablici:

1	2	3	4	5	6
10	25	39	77	679	6788

Napisati program za odredivanje najmanjih brojeva sa multiplikativnom otpornošcu 7,8 i 9.

1.8. Poljski matematicar Sijerpinski dokazao je da se svaki ceo broj može predstaviti na beskonacno mnogo nacina u obliku algebarskog zbira pet kubova prirodnih brojeva. Za dati prirodan broj n i ceo broj k, sastaviti program za ispitivanje da li se broj k može predstaviti u obliku algebarskog zbira pet kubova brojeva iz intervala $?1, n?$. Ukoliko je odgovor potvrdan, odrediti bar jednu reprezentaciju.

1.9. Formirati sledeci niz brojeva: prvi clan je proizvoljan prirodan broj deljiv sa 3. Svaki sledeci clan predstavlja zbir kubova cifara prethodnog. Ispitati da li posle izvesnog clana svi clanovi niza postaju jednaki. Ako je odgovor potvrdan, odrediti posle koliko koraka se dobijaju isti clanovi. Šta se dobija ako prvi clan nije deljiv sa 3?

1.10. Niz cetvorocifrenih brojeva $\{N_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$ se formira na sledeci nacin. Prvi element N_1 je cetvorocifreni broj cije sve cifre nisu medusobno jednake. Ako se cifre ovog broja poredaju u opadajucem poretku, dobija se cetvorocifreni broj L, a ako se poredaju u rastucem poretku, dobija se cetvorocifreni broj M. Razlika L-M je sledeci clan niza N_2. Svaki novi clan niza formira se na osnovu prethodnog prema opisaanom postupku.
Napisati program za dokaz sledece teoreme: clanovi niza $\{N_i\}$, za svaki pocetni element, pocev od nekog indeksa k postaju konstanta 6174. Za koji pocetni broj se dobija najveca vrednost za k? (Ako ima više takvih brojeva, odštampati sve!)

1.11. Polignac je 1848. godine postavio hipotezu da se svaki neparan prirodan broj može predstaviti u obliku zbira jednog stepena dvojke i jednog prostog broja. Hipoteza je netacna. Napisati program za nalaženje kontraprimera.

1.12. Dat je realan broj a. Odrediti:

(a) prvi medu brojevima $1, 1 ? \frac{1}{2}, 1 ? \frac{1}{2} ? \frac{1}{3}, \ldots$ koji je veci od a.

(b) najmanje n za koje važi: $1 ? \frac{1}{2} ? \ldots ? \frac{1}{n} ? a$.

NAPOMENA. Ovde je rec o Harmonijskom nizu, što znaci da ce opšti clan težiti ? , kad n teži ? . To prakticno znaci da ce se za svako a naci n takvo da opšti clan niza bude veci od a. Ako bi se radilo sa celim brojevima (naravno, uzimajuci da je jedinica u brojiocu realan broj), zbog malog opsega celih brojeva, cak i za male vrednosti parametra a, ne može se naci adekvatno rešenje. Nešto bolje bi se prošlo radeci sa realnim brojevima, ali tu postoji mogucnost da se napravi greška. Jedan od nacina da se pronade prihvatljivo rešenje je da se celi brojevi predstavljaju preko niza cifara i da se organizuje traženje reciprocnih vrednosti tako zadatih celih brojeva, kao i sabiranje dobijenih reciprocnih vrednosti. Proces racunanja i ovde može dugo da traje ako je parametar a jako veliki broj.

1.13. Napisati proceduru za množenje dva cela nenegativna broja, predstavljena u obliku niza cifara. Koristeci napisanu proceduru, izracunati $120!$.

1.14. Kompleksan broj $a+ib$ se naziva "ceo kompleksan broj" ako su a i b celi brojevi. Jasno je da svaki ceo broj a može da se predstavi kao kompleksan ceo broj $a+i0$. Kompleksan ceo broj n je "kompleksan prost broj" ako je za dva kompleksna cela broja c i d $n = cd$ i pri tom važi jedan od uslova: $c=1$, $c=-1$, $c=n$ ili $c=-n$.
Napisati program u kojem ce se za svaki prost broj (manji od zadatog broja k) ispitivati da li je istovremeno i kompleksan prost broj.
NAPOMENA. Neki prosti brojevi su istovremeno i kompleksni prosti brojevi, dok drugi nisu. Na primer, 13 je prost broj, ali nije i kompleksan prost broj jer važi:

$$(3+2i)(3-2i) = 9-4i^2 = 13.$$

1.15. Godine 1791. Gaus je uveo pretpostavku da je n-ti prost broj P_n aproksimativno jednak broju:

$$Q_n \ ? \ n?\frac{1}{1} \ ? \ \frac{1}{2} \ ? \ ???? \ \frac{1}{n}?$$

Napisati program za proveru Gausove pretpostavke za prvih k prostih brojeva (k - dati broj), nadi maksimalno odstupanje aproksimacije od prostog broja i kod kojih prostih brojeva se javlja.

1.16. Nedodirljivim brojem (prema Erdes-u) naziva se svaki prirodni broj, koji nije jednak zbiru svih pravih delitelja nijednog prirodnog broja. Niz nedodirljivih brojeva pocinje na sledeci nacin: $2,5,52,88,96,120,\ldots$.
Napisati program za nalaženje svih nedodirljivih brojeva manjih od datog broja n.

1.17. Napisati program za odredivanje koliko najviše delitelja može imati prirodan broj n manji od 1000000000.

1.18. Napisati program za odredivanje najmanjeg prostog broja koji se može izraziti u obliku x_2+ny_2 za svaki prirodan broj n $(n<11)$.

1.19. Napisati program za nalaženje svih faktora brojeva oblika $(10^n-1)/9$ kada se n nalazi u intervalu ? $1,20$? .

1.20. Kraljica Riana je, u svojoj autobiografiji, opisala slucaj iz svog detinjstva, kada je bila odlucila da ispiše sve cele brojeve od jedan do milion, sa korakom n ($n<200$). Dakle, ona redom piše brojeve: $1,\ n+1,\ 2n+1,\ 3n+1,$ itd. To je bio hrabar poduhvat, ali kraljica se umorila vec pošto je ispisala 4876 cifara. Napisati program koji (ukoliko je zadato n) odreduje koju je poslednju cifru kraljica napisala.

1.21. Razmotrimo sekvencu parova prirodnih brojeva

$$(78,35),(43,35),(8,35),(8,3),(2,3),(2,1),(0,1).$$

Svaki od parova se dobija iz prethodnog oduzimanjem od jedne koordinate pozitivnog celobrojnog umnožka druge koordinate:.

43=78-1? 35, 8=43-1? 35, *itd*.

Napisati program koji, za dva prirodna broja a i b, štampa najkracu sekvencu koja pocinje parom (a,b), a završava sa $(0,1)$ ili $(1,0)$.

2. Predstavljanje brojeva

2.1. Napisati procedure za:

(a) prevodenje broja iz rimskog zapisa u decimalni
(b) prevodenje broja iz decimalnog zapisa u rimski.

Testirati napisane procedure.
UPUTSTVO. Za predstavljanje brojeva u Rimskom zapisu koristiti velika slova: I,V,XL,C,...

2.2. Neka je A osnova brojnog sistema ($A<30$). Broj se u memoriju racunara unosi po ciframa. Napisati:

(a) program za ispitivanje da li je korektno zapisan u brojnom sistemu sa osnovom A. Ako jeste, prevesti ga u dekadni brojni sistem.
(b) program za sabiranje i oduzimanje brojeva u sistemu sa osnovom A, bez prethodnog prevodenja u dekadni brojni sistem.

NAPOMENA. Ako je osnova $A>10$, cifre se zadaju na uobicajen nacin, pomocu velikih slova A,B,C,...

2.3. Napisati:

(a) program za prevodenje broja m iz dekadnog u brojni sistem sa osnovom A ($A<30$).
(b) program za sabiranje i oduzimanje brojeva u sistemu sa osnovom A, bez prethodnog prevodenja u dekadni brojni sistem.

NAPOMENA. Ako je osnova $A>10$, cifre se zadaju na uobicajen nacin, pomocu velikih slova A,B,C,...

2.4. Dati su prirodni brojevi m i k i niz nenegativnih celih brojeva $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ takvih da $a_m a_{m-1} \ldots a_0$ predstavlja zapis broja k u nekom brojnom sistemu. Dati nenegativni celi brojevi, koji predstavljaju cifre, mogu biti veci od 9. Napisati program za:

(a) odredivanje osnove brojnog sistema u kojem je broj k predstavljen preko datog niza cifara.
(b) predstavljanje broja k u obliku

$$d_s(s+1)! + d_{s-1}s! + \ldots + d_0$$

pri cemu je $0 ? d_i ? i+1,\ (i=0,\ldots,s,\ d_s ? 0)$.

2.5. Hemingovo rastojanje izmedu dva cela broja definiše se kao broj cifara, koje su na istim pozicijama, a razlicite su medusobno u binarnom zapisu tih brojeva. Napisati funkciju za izracunavanje Hemingovog rastojanja izmedu dva data cela broja.

2.6. Fibonacijevi brojevi se definišu na sledeci nacin: $f_0=1, f_1=2, f_k=f_{k-1}+f_{k-2}$ $(k=2,3,\ldots)$. Dokazati da svaki prirodan broj može da se predstavi u obliku:

$$b_n f_n + b_{n-1} f_{n-1} + \ldots + b_0 f_0.$$

(b_i - nenegativni celi brojevi, $0 ? b_i ? 1$, $b_n ? 0$, $i=0,\ldots, n$). Napisati program za nalaženje reprezentacije datog celog broja na prethodni nacin.

2.7. Modifikovani Fibonacijevi brojevi se definišu na sledeci nacin:

$$f_0=a,\ f_1=a+1,\ f_k=f_{k-1}+f_{k-2}\ (k=2,3,\ldots).$$

Napisati program za nalaženje (najmanjeg moguceg) pocetka sekvence Modifikovanih Fibonacijevih brojeva (tj. nalaženje a) tako da ucitani prirodni broj n pripada sekvenci (tj. da $(?k ? N)(n=f_k)$).

NAPOMENA. Jasno je da rešenje uvek postoji, jer i broj n može biti pocetak sekvence Modifikovanih Fibonacijevih brojeva.

2.8. Dat je niz trojki (k,l,m). Za svaku datu trojku ispitati da li jednacina $kx+ly=m$ ima rešenja u skupu celih brojeva, tj. da li se broj m može predstaviti kao cjelobrojna linearna kombinacija brojeva k i l. Ako ima, štampati bar jedno rešenje, u suprotnom, odgovarajucu poruku.

UPUTSTVO. Uocava se da y mora biti izmedu 0 i m/l. Tako se problem svodi na nalaženje rešenja jednacine $kx = m-ly$, koja se reši po x-u.

2.9. Napisati program koji u skupu celih pozitivnih brojeva nalazi sva rešenja Diofantske jednacine:

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m=b$$

NAPOMENA. Problem “da li ma koja Diofantska jednacina uvek ima rešenja” je 1900.-te godine postavio Hilbert na Kongresu matematicara. Problem je rešio ruski matematicar Jurij Matijaševic, dokazavši da je algoritamski nerešiv.

UPUTSTVO. Pogledati uputstvo zadatka 2.8.

2.10. Neka je S skup svih racionalnih brojeva oblika $\frac{n}{d}$ (n i d uzajamno prosti brojevi) takvih da je $n+d\ ?\ k$. (k - zadata konstanta.) Izabrati bar dva razlicita nacina

---

uredenja skupa S i napisati program za štampanje svih njegovih clanova u zavisnosti od izabranih uredenja.

NAPOMENA. Prirodno je urediti clanove skupa S po velicini i štampati ih u obliku:

$$\frac{1}{k}, \frac{1}{k ? 1}, \ldots, \frac{k}{1},$$

medutim uredenje se može izabrati i na neki drugi nacin. Na primer, kazacemo da razlomak $\frac{m}{c}$ prethodi razlomku $\frac{n}{d}$ tada i samo tada kada važi:

$$m+c < n+d \ ? \ (m+c = n+d \ i \ m < n).$$

U ovom slucaju clanovi skupa S se zapisuju u sledecem redosledu:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{k}{1}$$

2.11. Napisati proceduru za rad sa razlomcima, predstavljajuci svaki razlomak u obliku uredenog para celih brojeva. Procedura treba da omoguci: sabiranje, oduzimanje, množenje, deljenje i uprošcavanje razlomaka. Testirati napisanu proceduru.

2.12. Napisati program za nalaženje razlomka a/c i b/c za koje važi:

$$(a/c)^3 + (b/c)^3 = n$$

gde je n dati prirodan broj manji od 1000.

2.13. Verižni razlomak je izraz oblika:

$$a_0 ? \cfrac{b_1}{a_1 ? \cfrac{b_2}{a_2 ? \cfrac{b_3}{a_3 ? ???}}}$$

i može se krace zapisati na sledeci nacin $? a_0 ; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3} ;??? ?$.

(a) Napisati funkciju za izracunavanje vrednosti verižnog razlomka

$$? a_0 ; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3} ;???, \frac{b_n}{a_n} ?$$

(b) Znajuci da je

$$e^x \ ? \ ? 0; \frac{1}{1}, \frac{? 2x}{2 ? x}, \frac{x^2}{6}, \frac{x^2}{10}, ???, \frac{x^2}{4n ? 2}, ??? ?$$

$$tgx\ ?\ ?0; \frac{x}{1}, \frac{?\ x^2}{3}, \frac{?\ x^2}{5}, \frac{?\ x^2}{7}, ???, \frac{?\ x^2}{2n\ ?\ 1}, ???$$

koristeci funkciju pod (a), napisati funkcije za približno izracunavanje vrednosti funkcija tgx i e^2.

Napisati program za testiranje napisanih funkcija.

3. Nizovi i matrice

3.1. Dat je niz realnih brojeva $a_1,\dots,a_n$. Formirati niz razlicitih celih brojeva $j_1,\dots,j_n$ takvih da je $1 ? j_k ? n,\ (k=1,\dots,n)$ i $a_{j1} ? a_{j2} ? \dots ? a_{jn}$.

3.2. Dat je celobrojni niz $a_1,\dots,a_n$. Napisati proceduru za ispitivanje periodicnosti datog niza, tj. može li se dati niz dobiti ponavljanjem nekog njegovog pocetnog dela. Od svih perioda (ako je niz periodican), odrediti najmanji. Testirati proceduru.

3.3. Dat je niz prirodnih brojeva tako da su izmedu clanova niza izostavljene zapete. Odrediti n-tu cifru u datom nizu (n - dati broj), kojem clanu niza pripada, kao i koja je po redu u tom clanu. Racunati uvek s leva udesno.

3.4. Dat je niz $?a_i?,\ (i=0,1,\dots,n)$. Napisati proceduru za odredivanje dužine najveceg monotono-rastuceg podniza uzastopnih clanova datog niza. Testirati proceduru.

3.5. Dat je broj k i niz realnih brojeva $?a_i?,\ (i=1,2,\dots,2k)$. Pomocu datog niza odredeno je k intervala na brojnoj osi: $(a_1,a_2),\dots,(a_{2k-1},a_{2k})$. Napisati program za ispitivanje:
(a) da li zadati intervali imaju zajednicku tacku i ako imaju nadi bar jednu od njih,
(b) da li postoji interval (medu zadatim), koji obuhvata sve intervale,
(c) da li postoji skup disjunktnih intervala cija unija daje objedinjujuci interval.

3.6. Napisati program za formiranje niza $a_1,\dots,a_n$ od cifara $0,1$ i 2 tako da u formiranom nizu nema susednih, jednakih delova.

PRIMER.

- Niz $2,\ 0,\ 1,\ 1$ ne ispunjava uslov jer se pojavljuju susedne jedinice.
- Niz $1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2$ ne ispunjava uslove jer se pojavljuju susedni i jednaki delovi $1,\ 2,\ 0,\ 2$.

3.7.* N drugova imaju zajedno izvesnu sumu novca. Ako se ne racuna novac prvog, suma ostalih je a_1, ako se ne racuna novac drugog, suma ostalih je a_2, itd. Ako se ne racuna novac N-tog suma ostalih je a_N. Napisati program za odredivanje koliko ima svaki od njih, odnosno, svi zajedno.

3.8. Dat je niz A prirodnih brojeva i prirodan broj m. Napisati program za odredivanje svih podnizova niza A, ciji je zbir jednak datom broju m.

3.9. U nizu brojeva $a_1,\ldots,a_n$ izabrati podniz $a_p,a_q,a_r,\ldots(p<q<r<\ldots<n)$ za koji funkcija $sin(a_p+a_q+a_r+\ldots)$ ima maksimalnu vrednost.

3.10. Dat je niz $a_1,\ldots,a_n$. Napisati program za nalaženje svih podnizova (sastavljenih od uzastopnih clanova niza) oblika $a_p,a_{p+1},a_{p+2},\ldots,a_{p+m}$ za koje važi uslov:

$$a_p<a_{p+1}>a_{p+2},<\ldots>a_{p+m}.$$

Štampati sve ove podnizove pocev od onog sa najmanjim brojem elemenata pa do onog sa najvecim.

3.11. Sa standardnog ulaza se ucitava niz dvocifrenih prirodnih brojeva, cija je dužina unapred nepoznata (u nizu, naravno, može biti ponavljanja). Obeležje kraja niza je 0. Napisati program koji ce štampati elemente niza sortirane po velicini u neopadajucem poretku. Program uraditi na dva nacina: preko nizova i preko pokazivaca.

3.12. Data je celobrojna matrica $?a_{ij}?_{mxn}$, ciji je svaki element iz skupa $?0,1,2,3?$. Napisati program za odredivanje svih cetvorki $(a_{ij},a_{i+1,j},a_{i,j+1},a_{i+1,j+1})$ u kojima su svi elementi medusobno razliciti.

3.13. Napisati program za formiranje celobrojne matrice, koja ce sadržati brojeve od 1 do n^2 poredane po spirali kao što je to uradeno sa tablicom $3x3$ na sledecoj slici. Prirodan broj n se ucitava iz ulazne datoteke.

1	2	3
8	9	4
7	6	5

3.14. Ulazni skup sadži prirodne brojeve n, k i niz trojki (i,j,x). Broj trojki (i,j,x) je manji od n^2 i nije unapred zadat. Svaka trojka (i,j,x) odreduje jedan element matrice $x_{ij}<>0$ matrice x_{nxn}. Napisati program za izracunavanje matrice:

$$Y = X^k .$$

NAPOMENA. Ovakav nacin pogodan je za predstavljanje tzv. “retkih matrica”. Retkim matricama nazivaju sematrice kod kojih je vecina elemenata jedna nuli.

3.15. Napisati:

____

(a) Proceduru za množenje trodijagonalnih matrica A i B. Pretpostavlja se da su matrice A i B takvog formata da se mogu pomnožiti. Matrice A i B predstaviti u obliku jednodimenzionalnih nizova.

(b) Program koji, koristeci proceduru pod (a), izracunanava

$$T = X?Y + Z$$

pri cemu su X,Y i Z zadate (ucitavaju se iz datoteke input) trodijagonalne matrice.

NAPOMENA. Trodijagonalnom matricom se naziva matrica A za koju važi:

$$a_{ij} = 0 \text{ ako je } ?i-j? > 1, (i=1,\dots,n, j=1,\dots,n).$$

Kada je n veliko, predstavljanje trodijagonalnih matrica u obliku dvodimenzionalnih nizova nije racionalno, jer se veliki deo memorijskog prostora popunjava nulama. Izbegavajuci zapisivanje nula, trodijagonalne matrice se lako predstavljaju pomocu jednodimenzionalnih nizova tako što se elementi sa “naddijagonale”, glavne dijagonale i “poddijagonale” poredaju u jedan jednodimanzionalni niz. Operisanje sa ovako predstavljenim matricama je komplikovanije, ali je ušteda memorijskog prostora znacajna.

3.16. Simetricne matrice A i B dimenzije nxn zadate su pomocu jednodimenzionalnih nizova od po $n(n-1)/2$ clanova (clanovi matrice su smešteni u niz tako da najpre ide n elemenata prve vrste, zatim $n-1$ elemenata druge vrste, itd.). Napisati program za izracunavanje matrice

$$C=A^2-B^2$$

u istom obliku. Napisati proceduru za štampanje niza C (u obliku matrice), koja bi se primenila na zahtev korisnika.

4. Polinomi

4.1. Dati su polinomi $P_m(x)$ i $Q_n(x)$. Napisati procedure za množenje datih polinoma, tj. za odredivanje koeficijenata polinoma koji predstavlja proizvod datih polinoma. Koristeci ovu proceduru, za zadate konkretne polinome izracunati:

$$S = P_n^3(x)?\ ?Q_n(x)$$

4.2. Napisati proceduru za deljenje polinoma polinomom. Testirati proceduru.

UPUTSTVO. Za zadate polinome $P(x)$ i $Q(x)$, treba odrediti stepene i koeficijente polinoma $K(x)$ i $R(x)$ tako da važi:

$$P(x)/Q(x) = K(x) + R(x)/Q(x)$$

4.3. Zadat je polinom $P_n(x)$ svojim koeficijentima. Napisati proceduru za odredivanje koeficijenata polinoma $Q_n(x) = (x+2)^n - P_n(x)$. Testirati proceduru.

4.4. Data su dva polinoma:

$$P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$$
$$Q_m(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$$

Napisati program za nalaženje NZF (najveci zajednicki faktor) za zadate polinome.

4.5. Za Ležandrove polinome važi rekurentna veza:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

(a) Znajuci da je $P_0(x)=1$ i $P_1(x)=x$, napisati proceduru za odredivanje koeficijenata n-tog Ležandrovog polinoma.

(b) Koristeci prethodnu proceduru napisati progran za štampanje koeficijenata svih Ležandrovih polinoma ciji stepen je manji od zadatog broja k.

4.6. Niz polinoma $H_0(x)$, $H_1(x)$, ... definiše se na sledeci nacin:

$$H_0(x) = 1,$$
$$H_1(x) = x,$$
$$H_k(x) = xH_{k-1}(x) - (k-1)H_{k-2}(x)\ (k = 2,3,\ldots)$$

Napisati program u kojem ce se za dati niz realnih brojeva $a_0,\ldots,a_m$ izracunavati koeficijenti polinoma:

$$a_0H_0(x)+\ldots+a_mH_m(x).$$

4.7. Napisati procedure za sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje kompleksnih brojeva. Na osnovu ovih procedura napisati program za izracunavanje vrednosti kompleksnog polinoma:

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 ,$$

kao i vrednost njegovog izvoda.

UPUTSTVO. Prilikom izracunavanja vrednosti polinoma koristiti se Hornerovom šemom (koja predstavlja jedan od najkracih prirodnih nacina za izracunavanje vrednosti polinoma), tj. zapisati polinom u obliku:

$$P(z) = (\ldots(a_n z + a_{n-1})z + \ldots + a_1)z + a_0$$

i zapoceti uzracunavanje sa izrazom u najdubljoj unutrašnjoj zagradi.

4.8. Dato je n nula polinoma $P_n(x)$ (neke mogu biti i kompleksne).

(a) Napisati program za odredivanje koeficijenata polinoma (cije su nule date) u kanonskom obliku.

(b) Za dati realan broj a, odrediti koeficijente polinoma $(x^2+a^2)P_n(x)$.

4.9. Dat je niz realnih brojeva $A=?a_i?, (i=1,\ldots,n)$. Napisati program za formiranje polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ pri cemu koeficijente polinoma $P(x)$ cine samo pozitivni brojevi niza A (onim redosledom kako se pojavljuju u nizu A), a koeficijente polinoma $Q(x)$ cine samo negativni clanovi niza A. Izracunati koeficijente polinoma:

$$S(x) = ??P(x)dx - Q'(x)$$

ako se zna da je $S(0)=1$.

5. Numericka analiza

5.1. Neka je data matrica A_{nxn}. Za odredivanje sopstvenih vrednosti date matrice, koristi se karakteristicni polinom:

$$det(?E-A) = ?^{n} + p_1?^{n-1}+\ldots+ p_n$$

Napisati program za izracunavanje:

$$p_1 = -S_1$$
$$p_2 = (-1/2)?(S_2 + p_1 S_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n = (-1/n)?(S_n + p_1 S_{n-1} + \ldots+ p_{n-1} S_1)$$

pri cemu je: S_k trag matrice A^k.
(Trag matrice predstavlja zbir elemenata sa njene glavne dijagonale.)

5.2.* Napisati funkcije za izracunavanje n-tog stepena i n-tog korena zadatog pozitivnog realnog broja. Za dati broj a izracunati sve stepene, a zatim korene od 2. do 20. Uporediti dobijene rezultate.

5.3. Kompleksan broj z zadat je uredenim parom (x,y) realnih brojeva. Napisati program za izracunavanje svih vrednosti n-tog korena zadatog broja.

5.4. Napisati program za izracunavanje broja e na k decimala. (k je zadat prirodan broj).

5.5. Napisati program za izracunavanje realne nule date funkcije $f(x)$ metodom secice sa zadatom tacnošcu. Dat je interval u kojem treba tražiti nulu funkcije.

5.6. Napisati program za nalaženje nule funkcije $f(x)$ metodom polovljenja intervala. Kao ulazni podaci za program pojavljuju se:

- izraz E, koji cine promenljiva x, brojevi, operatori i zagrade (radi jednostavnosti pretpostaviti da je izraz korektno zadat);
- dva broja a i b za koje ce važiti $f(a)?f(b)<0$;
- broj $eps>0$, koji predstavlja traženu tacnost.

5.7. Napisati:

(a) Funkciju za izracunavanje vrednosti polinoma:

$$P(x) = a_n x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 .$$

(b) Program koji, koristeci funkciju pod (a), nalazi jednu realnu nulu polinoma $P(x)$ Njutnovim metodom. U program se unose vrednosti c, d i eps, pri cemu su c i d krajevi intervala u kom se nula nalazi, a eps zadata tacnost sa kojom treba naci traženu nulu.

UPUTSTVO. Ako je poznata pocetna iteracija x_0, svaka sledeca iteracija Njutnovim metodom odreduje se prema formuli:

$$x_{k?1} \;?\; x_k \;?\; \frac{P(x)}{P'(x)}$$

Pomocu funkcije pod (a) racunati i vrednosti polinoma $P'(x)$. Smatrati da je tražena tacnost dostignuta kada je ispunjen uslov:

$$?x_{k+1}-x_k? < eps$$

5.8. * Dati su nizovi realnih brojeva $X=?x_i?$ i $Y=?y_i?$, $(i=0,\dots,n)$. Tretirajuci X kao niz apscisa, a Y kao niz ordinata, napisati funkciju za numericku interpolaciju i datoj tacki t, pomocu Lagranžovog interpolacionog polinoma.

5.9. Dati su nizovi $?x_i?$ i $?y_i?$ $(i=0,\dots,n)$. Napisati program za odredivanja koeficijenata Lagranžovog polinima u kanonskom obliku. Lagranžov polinom stepena n je potpuno odreden pomocu zadatih nizova.

NAPOMENA. Lagranžov polinom se zadaje na sledeci nacin:

$$P(x) \;?\; \underset{i}{\overset{n}{?}} \; y_i \underset{j,i?j}{\overset{n}{?}} \frac{x ? x_j}{x_i ? x_j}$$

Na osnovu ovog oblika lako se može izracunati vrednost polinoma kada je dato x. Iz ovog zapisa polinom se može prevesti u kanonski oblik (koji je ponekad pogodniji za operisanje):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 .$$

ali pri tom je potrebno sracunati koeficijente: $a_i,(i=0,\dots,n)$, što je glavni cilj u postavljenom zadatku!

5.10. Rešiti zadatak 5.8 vršeci interpolaciju kubnim splajnom.

5.11. Napisati program za interpolaciju funkcije na intervalu $[a,b]$ pomocu Prvog Njutnovog interpolacionog polinoma.

5.12. Napisati program za nalaženje rešenja sistema linearnih jednacina:

$$Ax = b$$

gde je A matrica formata $n x n$, x traženi n-dimenzioni vektor, a b vektor slobodnih clanova. Za nalaženje rešenja primeniti Gausov postupak sa izborom glavnog elementa.

5.13. Napisati program za rešenje prethodnog zadatka koristeci Žordanovu shemu.

5.14. Rešiti prethodni zadatak koristeci neki od iterativnih postupaka. Pretpostaviti da je zadata tacnost sa kojom se traži rešenje.

5.15. Data je kvadratna matrica. A_{nxn}. Napisati funkciju za izracunavanje determinatne date matrice. Testirati napisanu funkciju.

UPUTSTVO. Koristiti neki od metoda za numericko rešavanje sistema linearnih jednacina.

5.16. Napisati program za nalaženje inverzne matrice datoj kvadratnoj matrici A_{nxn}.

UPUTSTVO. Važi slicno uputstvo kao i u zadatku 5.15.

5.17. Niz Bernulijevih brojeva: $B^1,\ldots,B^k$ izracunava se iz sistema jednacina:

$$(B+1)^i - B^i = 0, \ (i=2,3,\ldots)$$

pri cemu je u razvoju B^i oznaka za i-ti Bernulijev broj. Napisati program za nalaženje prvih n Bernulijevih brojeva.

5.18. Napisati proceduru za numericku integraciju koristeci se Rombergovim postupkom. Tetsirati napisanu proceduru.

NAPOMENA. Rombergov postupak služi za numericku integraciju (približno izracunavanje vrednosti odredenih integrala) i sastoji se u predstavljanju integrala preko formule:

$$\int_a^b f(x)dx \ ? \ T_0(h) \ ? \ a_1 h^2 \ ? \ a_2 h^4 \ ? \ ???$$

gde je $T_0(h)$ vrednost izracunata pomocu trapezne formule. Nakon toga se izracunava vrednost $T_0(h/2)$ i formira nova vrednost:

$$T_1(h/2) = (4T_0(h/2) - T_0(h))/3$$

za koju važi:

$$\int_a^b f(x)dx \ ? \ T_1(h/2) \ ? \ b_1 h^4 \ ? \ b_2 h^6 \ ? \ ???$$

Racunajuci T_1 za korak $h/4$, dobijamo novu, tacniju vrednost, za naš integral:

$$T_2(h/4) = (16T_1(h/4) - T_1(h/2))/15$$

za koju važi:

$$\int_a^b f(x)dx \; ? \; T_2(h/4) \; ? \; c_1h^6 \; ? \; c_2h^8 \; ? \; ???$$

Jasno je da ovaj postupak možemo nastaviti i da polovljenjem koraka kod numericke integracije, dobijamo sve bolje aproksimacije integrala.

5.19. Napisati program za izracunavanje površine figure ogranicene krivim linijama:

$$y = sin(x^2)+2, \; y = exp(x^2)$$

sa unapred zadatom tacnošcu *eps*. Predstaviti graficki zadate krive, kao i traženu površinu.

UPUTSTVO. Koristiti neki od približnih metoda za odredivanje presecnih tacaka datih krivih linija, a potom neki od metoda numericke integracije za izracunavanje tražene površine.

6. Vreme i datumi

6.1. Zadat je datum po gregorijanskom kalendaru u obliku uredene trojke *(d,m,g)*, cije komponente predstavljaju dan, mesec i godinu. Napisati program za ispitivanje da li je datum korektno zadat. Ako jeste, odrediti koji datum njemu odgovara po julijanskom kalendaru.

6.2. Napisati funkciju za odredivanje broja dana izmedu dva zadata datuma. Pomocu posebne funkcije proveriti da li je dati datum korektno zadat. Koristeci napisane funkcije, za niz zadatih slogova od kojih svaki sadrži ime osobe i datum rodenja, odrediti ime prve najstarije osobe. Takode, za svaku od osoba odrediti i štampati njen horoskopski znak, i to kako uz pretostavku da ima 12 znakova u horoskopu, tako i uz pretpostavku da ih je 13 (tj. da postoji i zmijonosac).

6.3. Prema teoriji bioritmickih ciklusa, covek je od rodenja podvrgnut trima ciklusima:

- fizickom, u trajanju od 23 dana,
- emotivnom, u trajanju od 28 dana i
- intelektualnom, u trajanju od 33 dana.

Prema istoj teoriji, telesno i psihicko stanje coveka zavisi od ova tri ciklusa. U prvoj polovini ciklusa covek je svež, a u drugoj, podložan greškama. Kriticni dani nastaju kada ciklus iz pozitivnog podrucja prelazi u negativno i obrnuto. Najkriticniji dani su kad se dva ili tri ciklusa istovremeno nadu u fazi prelaska.

Napisati program za štampanje kriticnih (i najkriticnijih) dana osobe, u datom vremenskom intervalu, kada je zadat datum rodenja osobe.

6.4. Zadat je datum po gregorijanskom kalendaru u obliku uredene trojke *(d,m,g)*, cije komponente predstavljaju dan, mesec i godinu. Zadat je i broj n (n je izmedu 1 i 7), koji za zadati datum saopštava koji je to dan u nedelji.

Napisati program za ispitivanje da li datum korektno zadat. Ako jeste, odrediti na koji je dan u nedelji “pao” pocetak date godine, odnosno, na koji je dan u nedelji “pao” Đurdevdan.

6.5. Zadat je redni broj godine koja nas intersuje tj. g, i velicina n koja oznacava sa kojim je danom u nedelji pocela zadata godina.

Napisati program za:

(a) prikaz izveštaja (po mesecima) o tome koliko je u svakom od meseci bilo ponedeljaka, utoraka, sredi, cetvrtaka, petaka, subota i nedelja;
(b) prikaz izveštaja (za svaki od dana u nedelji) na koje je sve datume izabrane godine “pao” taj dan u nedelji;

6.6. Napisati program za:
(a) izracunavanje ugla izmedu velike i male kazaljke na satu, kada je zadato vreme u satima i minutima;
(b) proveru da li su korektno zadati uglovi koje zakklapaju velika i mala kazaljka sa pozicijom 00 sati i ako jesu - izracunati vreme u satima i minutima.

NAPOMENA. Ukoliko se radi sa implementacijom Pascal-a koja podržava crtanje, poželjno je nacrtati sliku sata i položaje velike i male kazaljke u svakom od pomenutih slucajeva.

6.7. Napisati funkciju ciji su argumenti dva vremenska trenutka (predstavljeni pomocu datuma i vremena), a koja vrace vreme proteklo izmedu njih.

PRIMER. Vreme proteklo izmedu 12:00:07 na dan 4.05.1980. i 15:35:10 na dan 4.05.1980. iznosi 4 sata, 35 minuta, 3 sekunde.

6.8. Peri je bilo dosadno na radnom mestu. Nasumice je okrenuo rokovnik, koji je pokazao datum (d,m,g). Ne znajuci šta da radi, Pera uze da redom zapisuje datume (pocev od pokazanog datuma, bez vodecih nula, sa tackom iza dana, meseca i godine). Posle ispisanih 3678 znakova, olovka je prestala da piše. Napisati program koji, za ucitani datum (d,m,g), odreduje kod kog je datuma Peri zakazala olovka.

7. Obrada reci i teksta

7.1. Date su fraza (recenica) i jedna rec. Napisati program za ispitivanje da li se data rec “skriva” u datoj frazi (recenici), tj. da li se slova date reci javljaju u datoj frazi u istom poretku kao i u datoj reci.

PRIMER. Ako je data recenica:

'Programiranje je težak posao'

i ako je dat rec '*misao*', onda se data rec “skriva” u datoj recenici.

7.2. Napisati:

(a) Proceduru koja iz dve zadate reci izdvaja njihovu maksimalnu podrec;
(b) Funkciju koja proverava da li je zadata rec identifikator;
(c) Proceduru koja, koristeci proceduru pod (a), od zadate tekstualne datoteke ULAZ formira datoteku IZLAZ tako što u nju prepisuje maksimalne podreci svake dve uzastopne reci datoteke ULAZ.
(d) Proceduru koja proverava da li je n-ta rec datoteke ULAZ identifikator. Ukoliko ULAZ ima manje od n reci, rezultat je *false*.

NAPOMENA. Identifikator je niz slova engleske azbuke i cifara, ciji prvi znak mora biti slovo. Smatramo da je rec niz ma kakvih znakova sa leve i desne strane ogranicen belinama.

7.3. Dat je prirodan broj n. Tretirajuci dati broj kao redni broj, štampati recima kako se on korektno izgovara u svakom padežu.

7.4. Napisati program koji ce u sledecoj recenici zvezdicu zamenti nekim brojem tako da se dobija tacan iskaz:

"U ovoj recenici se u ?narednih redova pojavljuje
cifra 0 - ?puta,
cifra 1 - ?puta,
.
.
.
cifra n - ?puta."

Da li postoji jedinstveno rešenje? Ako ima više rešenja, pronadi sva rešenja.

7.5. Dat je tekst koji treba da predstavlja aritmeticki izraz. Napisati funkciju za ispitivanje da li je zadati tekst korektan aritmeticki izraz, s obzirom na broj i redosled otvorenih i zatvorenih malih zagrada.

7.6. Napisati program za ispitivanje da li zadata rec predstavlja korektno zapisan izraz u poljskoj sufuksnoj notaciji.

NAPOMENA. Izraz *<P>* je zapisan u poljskoj sufiksnoj notaciji ako je:

<simbol> ::= <slovo> ??<cifra> ?? <operator> ?
<decimalna_tacka> ?<razdvajac>
<slovo> ::= A ?B ?C ?... ?Z
<cifra> ::= 0 ?1 ?... ?9
<operator> ::= + ?- ?? ??/
<decimalna tacka>::= .
<razdvajac> ::= _
<konstanta> ::= <cifra>??cifra>???
?<cifra>?.<cifra>?<cifra>?
<promenljiva> ::= <slovo>?<slovo>?
<P> ::= <konstanta> ?<promenljiva> ?
<P>_<P>_<operator>

Kao razdvajac može se upotrebiti i neki drugi simbol umesto simbola '_'.

PRIMER.

Uobicajen nacina zapisa izraza	*Poljska sufiksna notacija*
A + B	*A_B_+*
((A)+(B))	*A_B_+*
A?B+C	*A_B_?C_+*
A?(B+C)	*A_B_C_+_?*

7.7. Napisati program za prevodenje Pascal-izraza u poljsku sufiksnu notaciju.

NAPOMENA. Sintaksa Pascal-izraza je komplikovanija od sintakse izraza u primeru iz zadatka 7.6. Da bi se rešio postavljeni zadatak, potrebno je opisati Pascal-izraz u poljskoj sufiksnoj notaciji koristeci se Bekusovom notacijom.

7.8. Pretpostavljajuci da je polinom korektno zapisan ako ima oblik:

a_nx^n + $a_{n-1}x$^ (n-1) + … + a_1x + a_0

opisati sintaksu polinoma pomocu Bekusove notacije. Koristeci ovaj zapis napisati program za ispitivanje da li data rec predstavlja korektan zapis polinoma.

7.9. Napisati procedure za šifriranje i dešifriranje zadatog teksta. Pocedure realizuju sledece nacine šifriranja i dešifriranja teksta:

(a) svako slovo kružno pomera (šiftuje) za k mesta udesno;

(b) svako slovo kružno pomera (šiftuje) za k mesta udesno, a zatim se podrec od k-te do poslednje pozicije rec prepiše u obrutom redosledu;

(c) po izboru programera.

PRIMER. Kružno pomeranje za $k=1$ oznacava da se svako slovo zamenjuje se prvim koje sledi iza njega, a slovo 'z' zamenjuje se (šifrira) slovom 'a'.

7.10. Neka je svakom engleskom slovu pridružen redni broj od 1 do 26 prema abecedi $(p(‘A’)=1,p(‘B’)=2,\dots,p(‘Z’)=26)$. Datu tekstovnu datoteki cini niz slova: $x_1,x_2,x_3,\dots$

(a) Napisati proceduru za kodiranje sadržaja date tekstovne datoteke na sledeci nacin: $a_1=p(x_1)$, $a_i=(p(x_i)+a_{i-1})MOD40$. Mala slova zameniti odgovarajucim velikim, a ostale znake zadržati u originalnom obliku.

(b) Napisati proceduru za dekodiranje sadržaja tekstovne datoteke kodirane prema pravilima pod (a). Prethodno proveriti da li je datoteka koja je ponudena za dekodiranje korektno zadata.

7.11. Napisati program koji iz datoteke ULAZ prihvata recenicu po recenicu i iste potom štampa na ekranu, onoliko puta koliko ima znakova u recenici. Izmedu svaka dva štampanja napraviti pauzu koja ce trajati sve dok korisnik ne pritisne odgovarajuci taster.

PRIMER. Neka datoteka ULAZ ima sledeci sadržaj:

Ja znam PASCAL. Ti ne.

Na ekranu se treba pojaviti:

```
 Ja znam PASCAL
Ja znam PASCAL 
a znam PASCAL J
 znam PASCAL Ja
znam PASCAL Ja 
nam PASCAL Ja z
am PASCAL Ja zn
m PASCAL Ja zna
 PASCAL Ja znam
PASCAL Ja znam 
ASCAL Ja znam P
SCAL Ja znam PA
CAL Ja znam PAS
```

```
AL Ja znam PASC
L Ja znam PASCA
 Ja znam PASCAL
Za nastavak kucaj ma koje slovo, potom ENTER.
```

Kada korisnik pritisne traženu kombinaciju tastera, nastavlja se sa štampom:

```
 Ti ne
Ti ne
i ne T
 ne Ti
ne Ti
e Ti n
 Ti ne
Završen prikaz datoteke ULAZ.
```

8. Datoteke

8.1.* Data je tekstovna datoteka. Napisati program za izracunavanje broja pojavljivanja svake dekadne cifre u datoj tekstovnoj datoteci, kao i ukupan broj cifara. Odrediti koliko puta se u tekstu pojavljuje broj 10.

8.2. Datoteka sadrži slogove sa sledecim podacima:

- naziv cveta,
- boja cveta,
- vrednost cveta u dinarima,
- broj cvetova.

Napisati program za izracunavnje ukupne vrednosti cveca, kao i vrednost svake vrste cveca.

8.3. Data je tekstovna datoteka u kojoj su reci medusobno razdvojene blanko-simbolima ili oznakom za kraj reda. Za zadatu rec ispitati da li se nalazi u datoj tekstovnoj datoteci. Ako se nalazi, odrediti broj pojavljivanja te reci.

8.4. Datoteka sadrži sledece podatke o vrhunskim sportistima:

- ime i prezime,
- godinu rodenja,
- naziv sportske discipline,
- licni rekord
- godinu kada je postignut rekord.

Napisati program za štampanje imena i sportske discipline tzv. perspektivnih sportista. Perspektivnim sportistima smatraju se mladi od 22 godine, sa licnim rekordom koji nije stariji od dve godine.

8.5. U jednom individualnom sportu (npr. gimnastika), nastupe sportista ocenjuje m sudija. Iz skupa svih ocena, za jednog sportistu, brišu se najviša i najniža i od preostalih ocena formira se konacna ocena izracunavanjem aritmeticke sredine preostalih ocena. Ako na takmicenju ucestvuje k sportista, napisati program za:

(a) izracunavanje ocene svakog sportiste kada su poznate ocene svih sudija,

(b) odredivanje rednih brojeva sudija koji su imali najveci broj maksimalnih, odnosno, minimalnih ocena,

(c) odredivanje rednog broja najuspešnijeg sportiste,
(d) odredivanje rednog broja sudije cija je srednja ocena za sve sportiste najbliža ukupnoj srednjoj oceni svih sportista.

8.6. U datoteci PRILIKE nalaze se slogovi sa podacima o kandidatima za ženidbu. Svaki slog sastoji se od polja:

- ime, koje sadrži prezime i ime kandidata;
- starost, koje sadrži godinu rodenja;
- prihod, koje sadrži prosecan mesecni prihod izražen u DIN;
- izgled, koje može biti: “veoma lep”, “lep”, “prosecan”, “ružan”, “veoma ružan”
- poroci, koje sadrži informaciju o tome da li kandidat ima neki od poroka “puši”, “pije”, “uživa lake droge”, “kocka se”, “tuce se”.

Napisati program koji sadrži meni u kom se mogu izabrati i realizovati sledece opcije:

(a) formiranje datoteke PRILIKE;
(b) dodavanje novih slogova u datoteku PRILIKE;
(c) spisak imena svih mladih (mladim se smatra kandidat koji ima manje od 36 godina) koji imaju osrednji prihod (smatra se da kandidat ima osrednji prihod ukoliko on iznosi 300-500 DIN);
(d) spisak imena prvih 10 kandidata, ukoliko je kriterijum izbora visina prihoda;
(e) spisak imena prvih 10 kandidata, ukoliko je kriterijum izbora skor koji se dobije na sledeci nacin: velic ina prihoda se uveca za 40% ako je kandidat vrlo lep, odnosno za 20% ako je kandidat lep, tj. velicina prihoda se umanji za 20% ukoliko je kandidat ružan, odnosno za 40% kada je kandidat vrlo ružan; Tako dobijenu vrednost treba podeliti sa brojem godina, a potom oduzeti po 12% vrednosti za svaku od mana koje kandidat ima.

8.7. Napisati program za rangiranje kandidata za upis na fakultet prema broju osvojenih poena. Unosi se broj poena sa pismenog, kao i ocena svakog razreda iz srednje škole (koja se krece od 2 do 5). Svaka ocena predstavlja odreden broj poena. Ukupan broj poena izracunava se sabiranjem ocena i broja poena sa pismenog.

8.8. Sprovedena je anketa o popularnosti hitova zabavne muzike. Broj hitova za koje se glasalo je n (n nije vece od 100). Ispitanici su podeljeni u cetiri kategorije, i to:

(i) muškarci mladi od 20 godina;
(ii) žene mlade od 20 godina;

(iii) muškarci stariji od 20 godina;

(iv) žene starije od 20 godina;

Slogovi u datoteci IZVODJ sadrže informacije o imenu izvodaca i šifri hita ciji je autor dati izvodac(jasno je da ova datoteka ima maksimalno n slogova). Slogovi u datoteci ANKETA sadrže sledece informacije: ime, pol i broj godina anketiranog, te njegov izbor od pet šifara hitova za koje anketirana osoba glasa.
Napisati program kojim se štampaju šifre hitova, imena izvodaca i odgovarajuci broj glasova u sve cetiri kategorije, poredani po broju osvojenih glasova. Ukoliko za neki od hitova niko nije glasao, onda taj hit ne treba ni štampati. Na kraju treba štampati zbirnu rang-listu hitova.

8.9. Date su datoteke d_1,d_2,d_3,d_4,d_5, koje sve sadrže cele brojeve. Napisati program za razmenu komponenti medju datotekama po sledecem pravilu:

$$d_1 => d_3,\ d_2 => d_4,\ d_3 => d_5,\ d_4 => d_2,\ d_5 => d_1.$$

Operacija $d_i => d_j$ oznacava da se elementi i-te datoteke prepisuju u j-tu datoteku. Koristiti maksimalno jednu pomocnu datoteku.

8.10. Data je tekstovna datoteka. Napisati program za štampanje broja pojavljivanja svake reci u toj tekstovnoj datoteci, kao i broja reda u kojem se ta rec javlja. Prilikom štampanja, reci treba da budu u abecednom (leksikografskom) poretku.

8.11. Data je tekstovna datoteka. Reci u datoj tekstovnoj datoteci su medusobno razdvojene blanko-simbolom, ili simbolom za kraj reda. Napisati program za štampanje n (n-dati broj) reci koje se najcešce javljaju u datoteci. Najpre se štampa rec sa najvecim brojem pojavljivanja, zatim sledeca po broju pojavljivanja itd. Pored reci odštampati broj pojavljivanja.

8.12. Iz ulazne datoteke CLANAK ucitava se nakakav tekst. Reci u datoteci su razdvojene blanko-simbolom, ili simbolom za kraj reda. Iz standardne ulazne datoteke ucitava se k reci. Napisati program za izracunavanje koliko se puta svaka od ucitanih reci može pojaviti u datoteci CLANAK ako je poznato da su mnoge reci u datoteci unete pogrešno. Smatrati da neka rec datoteci jednaka jednoj ucitanoj ako

- ako su permutovana dva susedna slova,
- ako je zamenjeno jedno slovo nekim drugim slovom,
- ako je izostavljeno jedno slovo.

UPUTSTVO. Izdvojiti jednu rec iz date datoteke i uporediti je sa svakom ulaznom reci u skladu sa navedenim pravilima. Prilikom izdvajanja reci iz datoteke voditi racuna da nekoliko blanko simbola mogu stajati jedan pored drugog i da na pocetku reda može da se pojavi nekoliko blanko-simbola.

8.13. Data je tekstovna datoteka DOK. Napisati program za zamenu svih pojavljivanja reci "covek" (u svim padežima) date datoteke, njenom množinom. Ako je prvo slovo reci u jednini veliko, takvo treba da bude i u množini. Nakon izvršene zamene, saopštiti koliko je reci zamenjeno.

8.14. Data je tekstovna datoteka RASIRENA. Napisati program za "sažimanje" date tekstovne datoteke, tj. za formiranje nove tekstovne datoteke pod nazivom SAZETA u kojoj ce za svaki simbol, koji se ponavlja uzastopno više od cetiri puta, stajati taj simbol i u malim zagradama broj njegovog ponavljanja. Štampati izveštaj za koliko je simbola datoteka SAZETA kraca od datoteke RASIRENA.

PRIMER. Neka datoteka RASIRENA sadrži sledeci tekst:

aaaaaaawretttrruyyyyyyyy0.000001

Datoteka SAZETA tada treba da izgleda ovako:

a(7)wretttrruy(8)0.0(5)1

Izvestaj treba da bude sledeceg oblika:

datoteka SAZETA za 8 slova je kraca od datoteke RASIRENA.

8.15. Data su: datoteka celih brojeva CEO.DAT i niz celih brojeva A. Napisati program za:

(a) izdvajanje u posebnu datoteku svih clanova datoteke CEO.DAT koji nisu u nizu A;
(b) ispitivanje koliko puta se svaki clan niza A javlja u datoteci CEO.DAT.
(c) ako su $a_1, a_2, a_3, \ldots$ clanovi niza A, program treba ispitati da li se clan a_1 pojavljuje, u datoteci CEO.DAT, više puta od a_2, zatim, da li se a_2 pojavljuje cešce od a_3 itd.

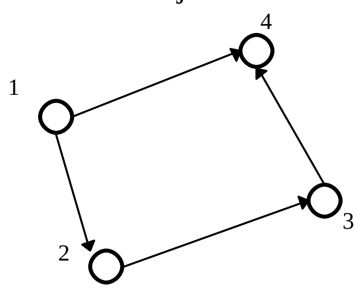
8.16.* Tekstovnu datoteku cine mala slova i blanko-simboli. Blanko-simboli razdvajaju jednu rec od druge u datoj tekstovnoj datoteci. Napisati program za formiranje nove tekstovne datoteke u kojoj ce sve reci iz date datoteke biti uredene u leksikografskom poretku.

8.17. Data je datoteka sa prezimenima, imenima i telefonskim brojevima korisnika. Prezime je od imena odvojeno jednim blanko-simbolom. Napisati program za ispitivanje koja prezimena se najviše (i koliko puta) pojavljuju u datoteci.

9. Grafovi i drveta

9.1. Orijentisanom grafu, koji se sastoji iz n cvorova, mogu se pridružiti dve matrice: matrica spajanja(cesto se zove i matrica susedstva) i matrica veza. Element $a_{ij},(i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n)$ matrice spajanja jednak je 1 ako postoji usmereni luk (grana) iz cvora i u cvor j, u suprotnom. jednak je 0. Element $b_{ij},(i=1,\ldots,n,$ $j=1,\ldots,n)$ matrice veza ima vrednost 1 ako se iz cvora i može stici do cvora j kretanjem po usmerenim granama grafa, a u suprotnom ima vrednost 0. Napisati program za nalaženje matrice veza kada je poznata matrica spajanja grafa.

PRIMER. Za graf prikazan na sledecoj slici:



Matrica spajanja A i matrica veza B su:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9.2. Graf je zadat preko grafoidne strukture podataka korišcenjem dinamickih promenljivih. Napisati proceduru za predstavljenje (na pregledan nacin) zadatog grafa na ekranu. Napisati proceduru za odredivanje puta od cvora i do cvora j. (Put, ako postoji, je predstavljen preko niza cvorova.)

9.3. Data je kvadratna matrica R_{nxn}, pri cemu je je element r_{ij} jednak 1 ako postoji direktan put od grada i do grada j, a u suprotnom je 0. Napisati program koji radi sledece:

(a) formira i ispisuje matricu A iz koje se vidi koji gradovi imaju vezu sa jednim presedanjem;

(b) formira i ispisuje matricu B iz koje se vidi koji gradovi imaju vezu sa tacno k presedanja;
(c) formira i ispisuje matricu C iz koje se vidi koji gradovi imaju vezu sa najviše k presedanja;
(d) formira izveštaje u kojim su gradovi poredani na osnovu broja direktnih veza izmedu njih i ostalih gradova, i na osnovu broja veza sa jednim presedanjem izmedu njih i ostalih gradova.

9.4. Data je kvadratna matrica R_{nxn}, pri cemu je je element r_{ij} jednak 1 ako postoji direktan put od grada i do grada j, a u suprotnom je 0. Napisati program za ispitivanje da li postoji put od grada k do grada m. Ako postoji put, odrediti kroz koliko se, najmanje, gradova mora proci da bi se iz grada k stiglo u grad m.

NAPOMENA. Ovaj problem se ponegde zove “problem lenjog trgovackog putnika”.

9.5. Date su informacije o direktnim putnim vezama izmedu n gradova pomocu matrice veza (p_{ij} je 1 ako postoji direktan put od grada i do grada j, a u suprotnom je 0). Napisati program koji ce za par celih brojeva (i,j), $(1?i,j?n)$ štampati najmanji broj gradova, kroz koje treba proci, prilikom putovanja od grada i do grada j. Odrediti redne brojeve gradova kroz koje treba proci.

9.6. Informacije o drumskoj povezanosti n gradova zadate su obliku matrice i to tako da je $p_{ij}=t$ $(t?0)$ ako postoji direktan put od grada i do grada j dužine t km, a u suprotnom $p_{ij}=0$. Napisati program koji ce za svaki par gradova odredivati minimalnu dužinu puta izmedu njih.

9.7. Informacije o železnickoj povezanosti n gradova zadate su obliku matrice i to tako da je dij=t (t¹0) ako postoji direktna pruga od grada i do grada j dužine t km, a u suprotnom dij=0. Grupa za brze pruge treba da predloži modernizaciju postojecih, tako da ukupna dužina modernizovanog dela bude minimalna, da svaki od n gradova može modernizovanim prugama biti povezan sa ostalima, a da najkrace veze sa ostalim gradovima ima onaj grad ciji je redni broj k. Napraviti program koji grupi za brze pruge pomaže da donese korektnu odluku.

9.8. Lavirint može biti zadat matricom spajanja preko koje je za svaki par soba ukazano da li su povezane direktno hodnikom ili ne. (Ako su i-ta soba i j-ta soba povezane direktno hodnikom, clan matrice spajanja p_{ij} je jedan, a u suprotnom je nula.) Napisati program za odredivanje puta iz sobe i u sobu j ako je zadata matrica spajanja lavirinta od n soba.

9.9. Za dva grafa G_1 i G_2 kaže se da su "izomorfni" ako se može uspostaviti bijektivna korespodencija izmedu njihovih cvorova na takav nacin da je par cvorova iz G_1 spojen granom ako i samo ako je odgovarajuci par cvorova iz G_2 spojen granom. Napisati program za ucitavanje dva grafa (na pogodan nacin) i ispitivanje da li su izomorfni.

9.10. Usmeren graf se sastoji iz skupa "cvorova" i skupa "grana" od kojih svaka spaja par cvorova. Graf koji se sastoji iz n cvorova i u kojem je svaki par cvorova spojen preko jedne grane naziva se "kompletni graf". Napisati program za zadavanje grafa na pogodan nacin i za odredivanje najveceg kompetnog podgrafa zadatog grafa. Predstaviti graficki (na pogodan nacin) najveci kompletan podgraf ucitanog grafa.

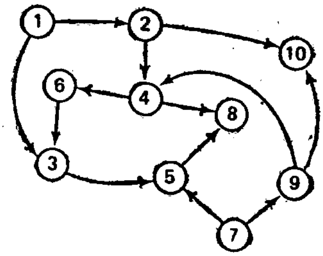
9.11. Napisati program koji (sa cetiri boje) boji mapu kontinenta koja se sastoji od n zemalja tako da dve zemlje koje se granice ne budu obojene istom bojom.

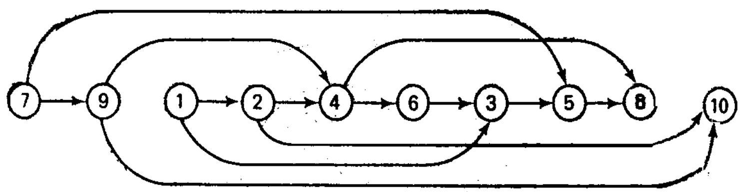
NAPOMENA. Dokazano je da su cetiri boje dovoljne za korektno bojenje ma koje mape.

9.12. Odredeni projekat je prirodno razdeljen na niz potprojekata. Završavanje nekih potprojekata obicno zahteva da se prethodno okoncaju neki drugi potprojekti. Neka su potprojekti oznaceni rednim brojevima $1,2,\ldots,n$ (n je dati broj). Zavisnost potprojekata zadata je obliku matrice P i to tako da je $p_{ij}=1$ ako potprojekat j zavisi od potprojekta i (tj. ako potprojekat i mora prethoditi potprojektu j), dok je $p_{ij}=0$ ukoliko to nije slucaj.

Napisati program koji za korektno zadatu matricu zavisnosti potprojekata odreduje i prikazuje na ekranu kojim bi se redosledom potprojekti mogli izvršavati pa da ne dode do kolizije.

PRIMER. Ako smo potprojekte oznacili rednim brojevima, zavisnost medu njima se može iskazati prvom slikom, a njihovo uredenje drugom slikom.





NAPOMENA. Ukoliko su potprojekti izdeljeni kako treba (tj .ako je na skupu potprojekata definisana relacija parcijalnog uredenja), tada mora postojati legalan redosled rešavanja potprojekata, i postupak nalaženja takvog redosleda se u literaturi naziva topološko sortiranje.

Relacija *R* ce biti relacija parcijalnog poreka, ukoliko je:

- tranzitivna, tj. *xRy* ? *yRz*⁇ *xRz*, za svako *x*,*y*,*z*
- asimetricna, tj. *xRy* ? ⁇ *yRx*, za svako *x*,*y*
- irefleksivna, tj. ? *xRx*, za svako *x*.

10. Kombinatorni zadaci

10.1. U sledecem trouglu:

? ?

? ?   ? ?

? ?   ?   ? ?

? ?   ? ?   ? ?   ? ?

zvezdice zameniti razlicitim ciframa, tako da zbirovi cifara duž stranica trougla budu medusobno jednaki i uz to jednaki unapred zadatom broju. Za koje, unapred zadate brojeve, postoji rešenje?

10.2. U sledecem šestouglu

12   9   1

6   8   19   18

4   16   2   17   3

11   13   15   14

7   10   5

zbirovi po stranicama i po poluprecnicima opisanog kruga su jednaki i iznose 22. Da li se može napraviti novi šestougao tako da zbirovi po stranicama i poluprecnicima budu k, gde je k prirodan broj iz intervala $20<k<40$. Ako to nije moguce uraditi za sve brojeve iz datog intervala, za koje je moguce?

10.3. Dat je ceo broj m. Napisati program za postavljanje operatora izmedu svake dve cifre u nizu $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ tako da dobijeni aritmeticki izraz ima vrednost m. Operatore birati iz unapred zadatog skupa operatora, predvidajuci mogucnost lake izmene skupa operatora. Ukoliko, pomocu zadatih operatora, nije moguce dobiti vrednost m, štampati odgovarajucu poruku.

10.4. Neka je na slucajan nacin izabrano p dvocifrenih brojeva i neka je s dvocifren slucajan broj. Da li se operacijama sabiranja i oduzimanja p slucajno izabranih brojeva može dobiti broj s? Pri tome se moraju iskoristiti svih p slucajnih brojeva. Koliko treba da bude p da bi se povecale šanse za predstavljanje broja s na opisani nacin?

NAPOMENA. Ako se izabere malo p, male su šanse da se dobije s. Ukoliko se izabere veliko p, broj mogucnosti naglo raste pa su opet male šanse da se okonca izracunavanje.

10.5. Data je suma S i k moneta $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Napisati program za odredivanje da li se suma S može dobiti pomocu datih moneta i ako može, na koliko nacina. Navesti sve nacine.

10.6. Napisati program za štampanje svih particija zadatog prirodnog broja n.
NAPOMENA. Pod particijom se podrazumeva jedan nacin predstavljanja broja pomocu njegovih sabiraka. Sve particije broja 4 su:

4
$3 + 1$
$2 + 1 + 1$
$2 + 2$
$1 + 1 + 1 + 1$

10.7. Dato je n razlicitih celih brojeva $b_1, \ldots, b_n$,(uredenih u rastucem redosledu) koji se ucitavaju iz standardne ulazne datoteke.Napisati procedure koji ce:

(a) proveriti da li ucitani brojevi ispunjavaju uslove zadatka;
(b) odštampati sve moguce permutacije korektno ucitanih brojeva;
(c) odštamati sve parne permutacije korektno ucitanih brojeva.

Glavni program treba da testira oformljene procedure.
NAPOMENA. Permutacija je parna ukoliko je broj inverzija u permutaciji paran. Inverzija u permutaciji je par elemenata takav da se elemenat sa vecim pocetnim indeksom našao u posmatranoj permutaciji ispred elementa sa manjim pocetnim indeksom.

10.8. U jednoj školi n profesora $P_1, \ldots, P_n$, u toku jednog dana, predaje u n razlicitih odeljenja $O_1, \ldots, O_n$. Svaki profesor treba da ima jedan cas u jednom odeljenju u toku jednog dana, tj ukupno n casova. Napisati program za pravljenje rasporeda tako da postavljeni uslovi budu ispunjeni. Nadi sva rešenja. Raspored predstaviti pomocu matrice ciji element a_{ij} odreduje redni broj casa, koji treba da drži i-ti profesor u j-tom odeljenju.
NAPOMENA. U ovom zadatku imamo posla sa tzv. Latinskim kvadratima. Latinski kvadrat reda n je matrica formata $n x n$, ciji elementi su prirodni brojevi od 1 do n izabrani tako da se svaki broj javlja samo jedanput u svakoj vrsti i svakoj

koloni. Latinski kvadrati se srecu u mnogim kombinatornim zadacima. U postavljenom zadatku matrica kojom je odreden raspored predstavlja jedan latinski kvadrat.

10.9. Dva Latinska kvadrata (videti napomenu uz zadatak 10.6) reda n nazivaju se ortogonalnim ako izmedu n^2 parova odgovarajucih komponenti ne postoje dva jednaka. Napisati program u kojem ce se za zadato k odredivati dva ortogonalna Latinska kvadrata reda k.

PRIMER. Dva ortogonalna Latinska kvadrata reda 4 su:

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

10.10. Dat je šablon ukrštenice (tj. data je pravougaona mreža sastavljena iz kvadrata; neki kvadrati su obojeni belo, a neki crno). U jedan beli kvadrat može se upisati jedno slovo.
Napisati program za popunjavanje niza belih kvadrata recima iz datog skupa reci u skladu sa pravilima za rešavanje ukrštenih reci. Drugacije receno, ako je beli kvadrat na preseku neke vrste i kolone on treba da sadrži slovo koje pripada dvema recima iz datog skupa tako da je jedna napisana horizontalno, a druga vertikalno u skladu sa pravilima za rešavanje ukrštenih reci.

10.11. Data je pravougaona mreža P_{mxn} $(m<80,\ n<25)$ sastavljena iz kvadrata; neki kvadrati su obojeni belo, a neki crno. Mreža predstavlja lavirint, beli kvadrati predstavljaju prolaze (pristupacna polja), dok crni predstavljaju zidove (nepristupacna polja).
Napisati program koji odreduje prolazak kroz lavirint od zadate startne pozicije, do zadatog cilja, ukoliko je moguce kretanje u pravcima: jug, istok, sever i zapad. Po mogucnosti, pregledno prikazati na ekranu lavirint i put kroz njega. U slucaju da startna pozicija ili pozicija cilja nisu korektno zadate, treba prikazati odgovarajucu poruku.

10.12.* Napisati program koji, za ucitano neparno n, prikazuje na ekranu magicni kvadrat dimenzije nxn, u koji se smeštaju celi brojevi izmedu 1 i n^2.

NAPOMENA. Magicni kvadrati su bili popularni vec u staroj Indiji i Kini. To su tablice kvadratnog oblika, sa n vrsta i kolona, u svako od polja je smešten broj i to tako da su zbirovi svake od vrsta, zbirovi svake od kolona i zbirovi po dijagonalama medusobno jednaki.

PRIMER. U slucaju $n=3$, magicni kvadrat ce imati sledeci izgled:

4	*9*	*2*
3	*5*	*7*
8	*1*	*6*

10.13. Dato je n predmeta sa težinama $a_1, \ldots, a_n$. Napisati program za:

(a) deljenje datih predmeta u dve grupe tako da zbirovi težina predmeta po grupama budu maksimalno bliski.

(b) deljenje datih predmeta u k grupa (k - dati broj i $k<n$) tako da zbirovi težina predmeta po grupama budu maksimalno bliski.

10.14. Dati su prirodni brojevi k i n ($n<k$). Napisati program za ispitivanje da li se može izbrati n tegova tako da se izmeri svaka celobrojna težina od 1 do k. (Tegovi se mogu stavljati samo na jedan tas vage.) Ako se mogu izabrati n tegova, odrediti njihove težine.

10.15. Duž kružnog puta dužine d km treba izgraditi n kuca tako da izmedu svake od njih bude bar jedno celobrojno rastojanje (mereno od fiksiranog pocetka). Napisati program za ispitivanje da li postoji rešenje zadatka i ako postoji naci sva rešenja.

10.16. Napisati program za nalaženje što veceg broje rešenja (po mogucnosti svih) u sledecem deljenju:

```
xx7xxxxxxx : xxxx7x = xx7xx
xxxxxx
xxxxx7x
xxxxxxx
 x7xxxx
  x7xxxx
  xxxxxxx
  xxxx7xx
  xxxxxx
  xxxxxx
  000000
```

U opisanom deljenju x može biti ma koja cifra dekadnog sistema.

10.17. Na jednom fudbalskom turniru ucestvovale su ekipe A,B,C i D. Svaka ekipa igrala je sa svakom pri cemu pobeda donosi 2 boda, nerešen rezultat 1, a poraz 0 bodova. Plasman ekipa, na kraju turnira, bio je sledeci:

		igrao	dobio	nereš.	izgub.	gol-razlika	bodovi
1.	A	x	x	x	x	6:x	x
2.	C	x	x	x	x	2:4	x
3.	D	x	x	x	x	3:3	x
4.	B	x	x	2	x	1:x	x

Napisati program za rekonstruisanje tabele na osnovu navedenih podataka.

10.18. Na nekom takmicenju ucestvovali su takmicari: A,B,C,D,E. Pre takmicenja dva prijatelja dala su prognoze za poredak takmicara (koje se ucitavaju iz ulazne datoteke). Posle takmicenja ispostavilo se da prvi prognozer nije pogodio tacan plasman ni za jednog takmicara, cak nije pogodio neposrednog prethodnika ni za jednog takmicara. Drugi prognozer je pogodio plasman dvojice takmicara, a za dvojicu je pogodio i neposredne prethodnike. Napisati program za odredivanje mogucih rasporeda takmicara na osnovu ucitanih podataka.

11. Simulacija i poducavanje

11.1. Napisati program za simuliranje rada Postove mašine.

11.2. Napisati program za simulranje rada Tjuringove mašine.

11.3. Napisati program za simuliranje rada mašine sa beskonacnim registrima.
NAPOMENA. Prethodna tri zadatka odnose na simulaciju hipotetickih mašina, za koje je karakteristicno postojanje beskonacne memorije. Savremeni racunari ne raspolažu beskonacnim memorijama pa se postavlja pitanje da li ima smisla takva simulacija. Odgovor je da ima smisla u edukativne svrhe, tj. u cilju boljeg upoznavanja pomenutih formalizacija pojma algoritam.

11.4. Napisati program za proracune vezane za isplatu stare devizne štednje. U programu treba da se izvrše sledeca izracunavanja:

(a) Ako jedna banka ima k šaltera, isplacuje 12 sati neprekidno po 30 dinara i svaki štediša provede t minuta u redu, koliku ce sumu banka isplatiti i toku jednog dana.

(b) Ako u m banaka radi $k_1,\dots,k_m$ šaltera i važe isti uslovi kao pod (a), kolika ce ukupna suma biti isplacena u toku jednog mesecea.

(c) Ako udruženje banaka raspolaže ukupno sa SUM dinara, za koje ce vreme cela ova suma biti potrošena, uracunavajuci prethodno navedene uslove.

(d) Koliko ce radnih sati biti potrošeno u redovima da bi se potrošila ukupna novcana masa SUM?

11.5. U pozorištu ima nxm sedišta. Stiglo je k zahteva za rezervaciju odredenog broja sedišta u jednom redu. Napisati program za razrešenje postavljenih zahteva ako se zna da su prihvatljivi isti brojevi sedišta i u susednim redovima. Iz ulazne datoteke ucitavaju se brojevi m,n i k, a broj rezervisanih sedišta generiše se na slucajan nacin.

11.6. U luci može biti istovaren samo jedan brod u jednom trenutku. Vreme koje protekne izmedu dolaska dva broda, je slucajna velicina i krece se od 10 do 120 minuta. Vreme istovara broda zavisi od kolicine i tipa tereta i traje od 40 do 90 minuta.

Koristeci slucajne brojeve, napisati program za n odvojenih simulacija pristizanja i istovara k brodova. Za svaku simulaciju izracunati:

(a) srednje i maksimalno vreme boravka broda u luci;
(b) srednje i maksimalno vreme cekanja broda (vreme cekanja je vreme koje protekne od dolaska broda do startovanja istovara);
(c) srednji i maksimalni broj brodova, koji se nalaze na "liniji cekanja".

11.7.* Kada su prodavca pitali koliko ima jaja u korpi, odgovorio je: " Ako uzimam po $2, 3, \ldots, k-1$, u korpi uvek ostane jedno jaje, ali ako uzimam po k, ispraznim korpu!". Napisati program za odredivanje koliko ima jaja u korpi za $k<20$. Ako ima više rešenja, naci najmanje.

11.8. Napisati program za isplatu odredene svote novca. Zadaje se zaliha-koliko se ima od svakog apoena, kao i velicina svote koja se isplacuje. Isplatu treba izvršiti sa što je moguce manje apoena, i ceo tok isplate treba biti pregledno prikazan (npr. da se vidi kako prelaze novcani apoeni iz zalihe u svotu koja se isplacuje).

11.9. Napisati program za konverziju jedne valute u drugu. Zadaje se vrsta valute i kolicina, kao i vrsta valute u koju se vrši konverzija. Program treba da ima mogucnosti ucitavanja kursne liste (prema formatu iz dnevnog lista "Politika") ili ažuriranja postojece kursne liste. Prilikom konverzije voditi racuna o prodajnom, kupovnom i srednjem kursu valuta.

11.10. Napisati program za simuliranje Braunovog kretanja molekula. Dozvoliti mogucnost menjanja temperature. Graficki prikazati kretanje molekula.

11.11. Poznato je da kod ljudi postoje cetiri krvne grupe: O, A, B i AB. Oznacimo sa X? Y tvrdenje "Osoba krvne grupe X može dati krv osobi krvne grupe Y, bez opasnosti za Y". Tada važe sledeci zakoni:

1. X ? X, za svako X,
2. O ? X, za svako X,
3. X ? AB, za svako X i
4. Svaka relacija X ? Y, koja se ne svodi na 1., 2. ili 3. je lažna.

Feliks Bernštajn je prvi formulisao zakone nasledivanja krvnih grupa: A, A, B i AB. Opišimo to na sledecem primeru. Neka otac ima krvnu grupu A, a majka krvnu grupu AB. Dopišimo slovu A, slovo O, tj. krvnu grupu oca oznadimo sa AO. Za odredivanje krvne grupe dece, uzecemo jedno slovo krvne grupe majke i jedno

slovo krvne grupe oca. Tako dobijamo sledece moguce kombinacije: AA, AB, OA i OB. Zatim uprostimo oznake brišuci jedno slovo gde se javljaju dva ista i brišuci slovo O gde je u kombinaciji sa drugim. Definitivno dobijamo: A, AB, A i B, tj deca mogu imati jednu od tri krvne grupe: A, B, i AB.
Kada su poznate krvne grupe predaka (i to za nekoliko kolena), napisati program za odredivanje mogucih krvnih grupa potomaka.

11.12. Napisati program za obuku (i testiranje) korisnika iz:
- poznavanja glavnih gradova Evrope,
- poznavanja glavnih gradova sveta.

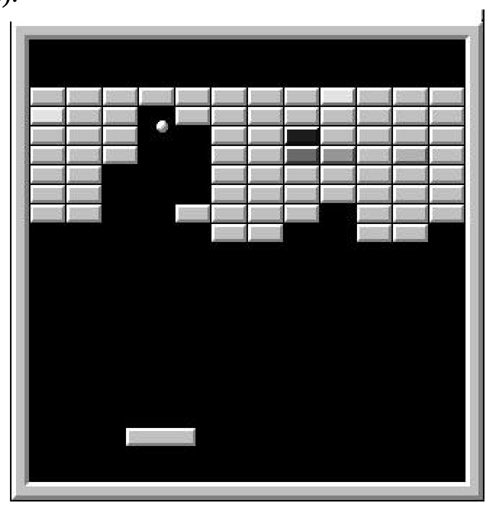
11.13. Napisati program za:
(a) ucenje Morzeove azbuke;
(b) testiranje poznavanja Morzeove azbuke.

11.14. Napisati program za obuku iz nekog stranog jezika. Poznato je da postoji k lekcija i u svakoj bar po m nepoznatih reci ($k,m>1$). Za izabranu lekciju na slucajan nacin se ispisuje rec na ekranu, a ucenik treba na maternjem jeziku da napiše šta ta rec znaci. Jedna strana rec može imati više znacenja.

12. Programiranje igara

12.1. Napisati proceduru za generisanje slucajnih brojeva. Na osnovu ove procedure realizovati igru za treniranje memorije: racunar na slucajan nacin generiše odreden broj obeleženih tacaka na ekranu; korisnik pogada redosled pojavljivanja tih tacaka i dobija odgovarajuci broj poena. Posle odredenog broja serija, štampa se ukupan broj poena i ocenjuje uspeh korisnika.

12.2. Napisati program koji korisniku omogucava igranje igrice "Zidovi". Cilj igre je da se lopticom, koja se odbija od pokretne ploce u dnu prozora (korisnik kursorskim tasterima pokrece plocu), unište sve cigle u zadatom zidu (vidi sliku!). Za svaku uništenu ciglu se poveca broj bodova. Korisnik ima pravo na tri lopte (tj. toliko lopti može da mu propadne).



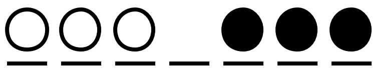
12.3. Date su tri gomile istih predmeta. Dva igraca naizmenicno uzimaju proizvoljan broj predmeta, ali samo sa jedne gomile u toku jednog uzimanja. Igra tece dok se ne pokupe predmeti sa svih gomila. Pobednik je onaj igrac koji je poslednji uzimao. Ova igra poznata je pod nazivom "Nim". Napisati program koji ce omogucavati da korisnik sa racunarom igra "Nim". Zavisno od broja predmeta na gomili, racunar treba da ima pobednicku strategiju, bilo da igra prvi, bilo drugi.

12.4. Napisati program za realizaciju sledece igre na racunaru. Racunar generiše matricu ?a_{ij}?$_{mxn}$ slucajnih brojeva iz intervala ?$-k, k$? razlicitih od 0.

Dva igraca igraju na sledeci nacin: prvi igrac bira redni broj vrste i, a drugi igrac bira redni broj kolone j, neznajuci redni broj vrste izabran od prvog igraca. Ako je element $a_{ij}>0$, prvi igrac dobija a_{ij} dinara, a ako je $a_{ij}<0$, drugi igrac dobija $?a_{ij}?$ dinara. Svaki igrac ima na raspolaganju r poteza; posle svakog poteza generiše se nova matrica slucajnih brojeva i stoji na uvid igracima. Nakon r poteza, racunar proglašava pobednika. Da li postoji pobednicka strategija jednog od igraca?

UPUTSTVO. Napraviti funkciju za generisanje slucajnih brojeva i pozvati je $m?n$ puta prilikom generisanja matrice slucajnih brojeva.

12.5. Zadato je 7 pozicija, tri crne i tri bele kuglice, kao na sledecoj slici.



Napisati program za zamenu pozicija belih i crnih kuglica, poštujuci sledecu proceduru: kuglica se može pomeriti bilo u njoj susednu praznu poziciju, bilo u praznu poziciju ako je iza kuglice, koja je susedna praznoj poziciji.

12.6. Na stolu se nalazi n predmeta. Svaki igrac uzima odreden broj predmeta (veci od 0, a manji od 6). Pobednik je onaj ko uzima poslednji predmet sa stola. Napisati program za:

(a) dva igraca, pri cemu racunar na slucajan nacin bira broj predmeta iz unapred zadatog intervala.

(b) igru racunara i korisnika. Da li (i kada) racunar može imati pobednicku strategiju?

12.7. Napisati program za realizaciju sledece igre: korisnik zamisli ma koji dvocifren broj i saopštava racunaru ostatke prilikom deljenja tog broja sa: 15, 19 i 28. Racunar pogada koji broj je zamišljen.

12.8. Na šahovskoj tabli (predstavljenoj na uobicajen nacin) zadata je pozicija dame. Sva polja, koja dama tuce, oznaditi zvezdicama, a ostala nulama. Napisati program za prikazivanje ovakve šahovste table na ekranu.

12.9. Polja šahovske table oznaciti parom cije su komponente:

- slovo iz intervala *['A','H']*,
- prirodni broj iz intervala $[1,8]$,

pri cemu prva komponenta predstavlja oznaku vertikale (gledano s leva nadesno), a druga broj horizontale (gledano odozdo nagore). Za zadate parove (k,l) i (m,n) ispitati:

(a) da li su zadata polja iste boje;
(b) da li dama sa polja (k,l) napada polje (m,n)
(c) koji najmanji broj poteza treba da napravi konj da bi sa polja (k,l) stigao na polje (m,n), i koji su to potezi.

12.10. Napisati program za nalaženje maršrute konja, koji polazi iz jednog polja na šahovskoj tabli, a dolazi u drugo zadato polje. Polje ne može da se pojavi dva puta u maršruti konja. Prikazati pregledno, na ekranu, svaki potez koji konj nacini.

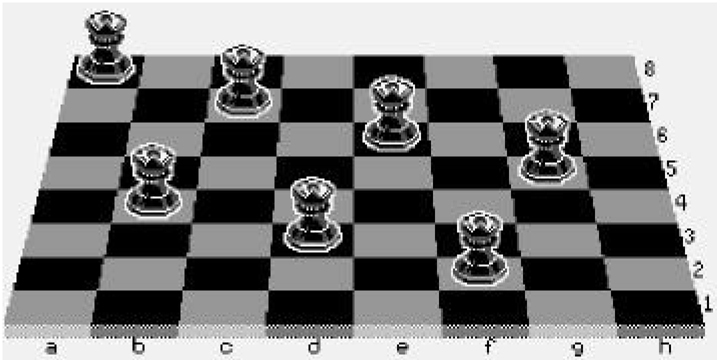
12.11. Napisati program za kengurov obilazak šahovske table, tako da kengur stane na svako polje table, a da ni na jedno polje ne stane dva puta. Kengur u obilazak polazi sa polja na šahovskoj tabli cije se obeležje ucitava. Prikazati pregledno na ekranu svaki potez koji kengur nacini. Ukoliko je obilazak nemoguc, odštampati odgovarajucu poruku.

NAPOMENA. Pozicije na koje kengur može da skoci prikazane su na sledecoj slici (kružic oznacava njegovu trenutnu poziciju, a tacke oznacavaju pozicije na tabli na koje kengur može da skoci).

?	?	?	?	?	?	?	?
?	?	??	?	??	?	?	?
?	?	?	?	?	?	?	?
??	?	?	?	?	?	??	?
?	?	?	? ?	?	?	?	?
??	?	?	?	?	?	??	?
?	?	?	?	?	?	?	?
?	?	??	?	??	?	?	?

12.12. Napisati program za postavljanje *m* dama na šahovskoj tabli,tako da se nijedne dve medusobno ne tuku. Treba pronaci sve mogucnosti i pregledno ih prikazati na ekranu. Ukoliko je rasporedivanje nemoguce, štampati odgovarajucu poruku.

PRIMER. Jedna od mogucnosti za razmeštaj sedam dama na šahovkoj tabli je data sledecom slikom.



NAPOMENA. Pozicije koje tuce dama prikazane su na sledecoj slici (oznacene tackicom), dok je pozicija same dame oznacena kružicem.

?	?	?	??	?	?	?	??
??	?	?	??	?	?	??	?
?	??	?	??	?	??	?	?
?	?	??	??	??	?	?	?
??	??	??	? ?	??	??	??	??
?	?	??	??	??	?	?	?
?	??	?	??	?	??	?	?
??	?	?	??	?	?	??	?

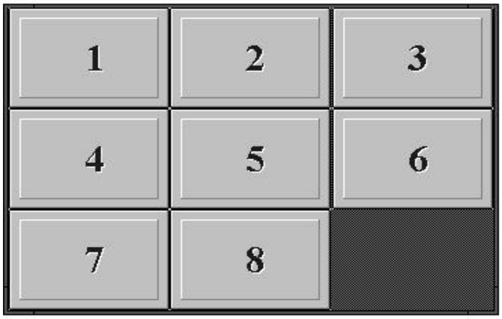
12.13. Pravougaonik je podeljen na šest delova A, B, C, D, E i F (kao na slici).

A	B	C
D	E	F

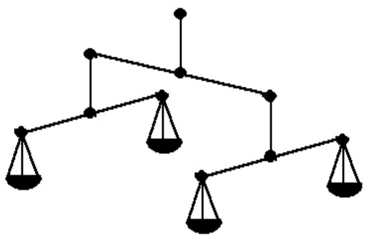
Na polje A postavljeno je n žetona, koji su pocev od vrha pa naniže numerisani brojevima od 1 do n. Potrebno je u što manjem broju poteza prebaciti sve žetone na kvadratno polje F pod sledecim uslovima:

- u jednom potezu vrši se prebacivanje jednog žetona u bilo koji deo pravougaonika,
- žeton sa vecim brojem nikada ne sme biti iznad žetona sa manjim brojem.

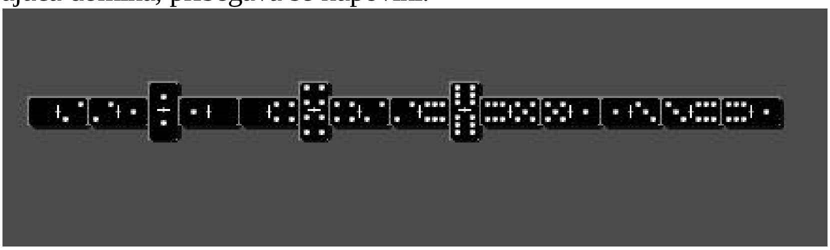
12.14. “Slagalica” se sastoji iz osam plocica, koje sadrže brojeve od 1 do 8; deveto polje je prazno (kao na slici). Prazno polje služi za pomeranje plocica sa brojevima. Napisati program za generisanje prvih osam brojeva na slucajan nacin u osam polja kvadrata. Ispitati da li se plocice mogu urediti kao na slici i ako je odgovor potvrdan, opisati poteze koje treba napraviti da bi se formiralo uredenje.



12.15. Data je vaga (koja se sastoji od tri spregnute podvage-kao na slici) i skup od n tegova razlicite težine $a_1, a_2, \ldots a_n$. Smatra se da je vaga u ravnoteži ukoliko razlika težina izmedu leve i desne strane na svakoj od podvaga nije veca od unapred zadate težine d. Cilj igre je da se rasporede svi tegovi na tasove vage, a da sve to vreme vaga ostane u ravnoteži. Napisati program koji omogucuje korisniku da igra ovu igru. Zahteva se da tokom igranja igre budu na pregledan nacin prikazane sve relevantne informacije koje korisniku omogucuju da oformi zahtevani razmeštaj tegova (naravno, ukoliko takav razmeštaj postoji).

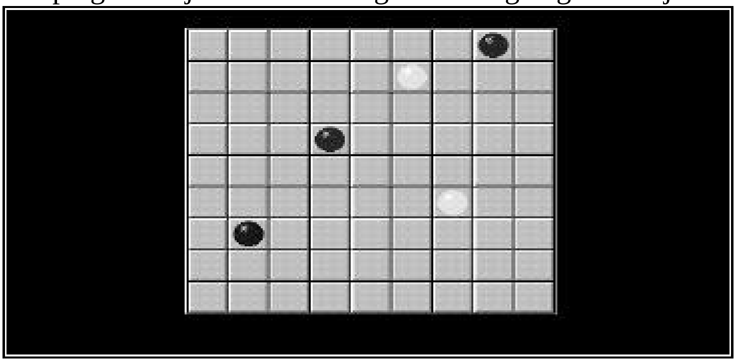


12.16. Napisati program koji korisniku omogucava da igra domine sa racunarom. Na pocetku oboje dobiju po sedam domina, ko ima vecu duplu dominu pocinje prvi, a ako niko nema duplu dominu, izbor prvog se vrši na slucajan nacin. Ukoliko se ne poseduje odgovarajuca domina, pribegava se kupovini.



UPUTSTVO. Obratiti pažnju na strategiju igre racunara (ako može postaviti više domina, kako izabrati najbolju alternativu-poželjno je da se vodi racun o tome koje su domine prošle, koje su ostale, koliko je od ostalih kod nas, itd.).

12.17. Napisati program koji korisniku omogucava da igra igru “Obojene linije”.



Pravila ove igre su sledeca: na kvadratnu tablu dimenzije nxn se na slucajan nacin rasporedi k razlicito obojenih loptica (vidi sliku!). Igrac ima pravo da premesti jednu od loptica sa njenog mesta na neko drugo dostižno prazno mesto. Mesto je dostižno ukoliko se od polaznog mesta može doci do njega prelaskom sa jednog praznog mesta na drugo, iskljucivo po horizontali i vertikali. Ukoliko je takvim pomeranjem igrac oformio liniju od pet ili više loptica (po horizontali, vertikali ili dijagonali), loptice iz te linije nestaju, a broj bodova se uvecava za odredenu sumu. U tom slucaju igracima pravo na još jedno pomeranje loptica. Po završenom pomeranju, slucajno se postavlja novih k loptica na prazna mesta. Igra je završena kad loptice ispune sva polja na kvadratnoj tabli.

13. Geometrijski zadaci

13.1. Date su jednacina prave $ax+by+c=0$ i jednacina kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ u ravni. Na istu ravan postavlja se k puta duž sa slucajno izbranim koordinatama krajnjih tacaka. Napisati program za odredivanje koliko puta ce od k postavljanja biti ispunjeno:
(a) duž sece pravu i kružnicu
(b) duž sece samo pravu
(c) duž sece samo kružnicu

NAPOMENA. U postavljenom zadatku (kao i mnogima slicnim) treba ispitati da li su dve tacke (koje ne pripadaju datoj pravoj) sa iste strane prave ili sa razlicitih. Ako je data prava $ax+by+c=0$ i dve tacke $M(t,v)$ i $N(z,w)$, onda:

- ove dve tacke se nalaze sa iste strane date prave, ukoliko izrazi $at+bv+c$ i $az+bw+c$ imaju isti znak;
- u suprotnom, date tacke se nalaze sa razlicitih strana date prave.

Naravno, ako je jedan od ovih izraza jednak nuli, tacka je na pravoj. Važi i opštija cinjenica: ako jednacina $F(x,y)=0$ predstavlja pravu ili krivu, koja razbija koordinatnu ravan na dva dela, tada tacke $M(t,v)$ i $N(z,w)$ (koje ne pripadaju datoj liniji), pripadaju istom delu ravni ako su $F(t,v)$ i $F(z,w)$, brojevi istog znaka.

13.2. Prava u ravni je zadata jednacinom $ax+by+c=0$ pri cemu a i b nisu istovremeno jednaki 0. Neka je zadata datoteka PRAVA i neka sadrži niz uredenih trojki celih brojeva. Tretirajuci svaku trojku kao koeficijente prave u ravni, napisati program za ispitivanje da li:

(a) medu datim pravama ima paralelnih ili onih koje se poklapaju;
(b) postoje tri prave koje se seku u jednoj tacki;

Po mogucnosti nacrtati sliku.

13.3. Napisati proceduru za nalaženje odnosa izmedu dve zadate duži u ravni.Ako duži imaju zajednickih tacaka, odrediti skup zajednickih tacaka.

13.4. Napisati program za ispitivanje da li zadati pravougaonik i zadata duž imaju zajednickih tacaka. Ako imaju, nadi skup zajednickih tacaka.

13.5. Date su cetiri tacke pomocu svojih koordinata. Napisati proceduru za ispitivanje da li te tacke odreduju cetvorougao u ravni. Ako je odgovor potvrdan, ispitati da li je cetvorougao tetivni, odnosno, tangentni. Testirati proceduru.

13.6. Poligon je zadat nizovima koordinata svojih temena. Napisati program za ispitivanje da li je zadati poligon prost.

NAPOMENA. Poligon je prost ukoliko samo susedne ivice poligona imaju zajednicke tacke. Te zajednicke tacke su temena poligona.

13.7. Zadat je prost poligon koordinatama svojih temena. Napisati program za ispitivanje da li je zadati poligon konveksan.

NAPOMENA. Poligon je konveksan ukoliko se svaka duž ciji su krajevi unutar poligona ili na njegovom rubu cela nalazi unutar poligona, ukljucujuci njegov rub.

13.8. Napisati program za odredivanje površine ma kojeg prostog poligona, koji je zadat koordinatama svojih temena.

13.9. Pravougaonik je zadat koordinatama svojih temena. Napisati program za izracunavanje površine onog dela pravougaonika, koji se nalazi u prvom kvadrantu pravouglog Dekartovog sistema.

13.10. U ravni je dato n tacaka tako da se ne mogu naci tri kolinearne medu njima. Napisati program za odredivanje zatvorenog n-tougla, cije se strane ne seku, a da su mu temena zadate tacke. Da li uvek postoji rešenje?

13.11. U ravni su zadate cetiri tacke tako da ne pripadaju niti pravoj, niti krugu. Napisati program za odredivanje kruga koji prolazi kroz tri date tacke, a sadrži cetvrtu. Da li uvek postoji rešenje?

13.12. Napisati program za odredivanje rastojanja zadate tacke M od ruba konveksnog poligona, koji je zadat koordinatama svojih temena.

UPUTSTVO. Razlikovati slucajeve kada je tacka M u poligonu, na ivici poligona i izvan poligona.

13.13. Dat je skup kvadrata cija je ukupna površina jednaka (veca) površini zadatog pravougaonika. Napisati program za ispitivanje da li zadati pravougaonik može da se prekrije zadatim skupom kvadrata.

13.14. Dati su realni brojevi x_1,y_1,x_2,y_2 $(x_1 ? x_2)$, koje odreduju dve tacke u ravni A i B. Napisati program za nalaženje tacke C na x-osi tako da:

(a) ciji zbir rastojanja do tacaka A i B je najmanji;

(b) C bude izmedu projekcija tacaka A i B na x-osi i da površina trougla ABC bude maksimalna.

13.15. Data su tri niza realnih brojeva $A=\{a_i\}$, $B=\{b_i\}$, $C=\{c_i\}$, $(i=1,2,\dots,n)$. Pretpostavljajuci da su nizovima A i B odredene koordinate centra n kvadrata u ravni, a nizom C dužine stranica kvadrata, napisati program za izracunavanje površine figure koju pokrivaju dati kvadrati.

13.16. Date su tacke $M_1(x_1,y_1),\dots,M_n(x_n,y_n)$ razlicite medusobno. Napisati program za odredivanje konveksnog mnogougla sa vrhovima u nekim od datih tacaka, a koji ce sadržati sve date tacke.

13.17. Napisati program za razbijanje prostog poligona na trouglove tako da minimalni ugao svih formiranih trouglova bude što veci. Prost poligon je zadat koordinatama svojih temena.

NAPOMENA. Prilikom primene metoda konacnog elementa, površinu (koja se može zadati pomocu prostog poligona) treba razdeliti na manje elemente (u našem slucaju trouglove), a koji moraju ispunjavati odredene uslove. Metod konacnog elementa daje dobre rezultate kada uglovi trougla ispunjavaju prethodno zadati uslov.

13.18. Data su dva poligona koordinatama svojih temena. Napisati program za ispitivanje da li je prvi poligon u potpunosti obuhvacen drugim.

NAPOMENA. Ukoliko je potrebno, uvesti dodatna ogranicenja.

13.19. Dat je prirodan broj n i $3n$ tacaka u ravni tako da bilo koje tri tacke (od datih) ne mogu biti kolinearne. Tretirajuci date tacke kao vrhove n trouglova, odrediti trouglove tako da se ne seku i ne sadrže jedan u drugom. Prethodno dokazati da uvek postoji rešenje.

13.20. "Zlatnim pravougaonikom" naziva se pravougaonik cije se dužine stranica a i b nalaze u proporciji zlatnog preseka, tj. zadovoljavaju jednakost:

$$a:b = b:(a-b).$$

Neka su zadatata dva temena zlatnog pravougaonika u ravni. Napisati program za odredivanje koordinata preostala dva temena. Nakon toga iseci kvadrat maksimalne površine iz dobijenog pravougaonika. Preostali deo je opet zlatni pravougaonik manjih dimenzija, cije koordinate temena, takode, treba odrediti. Iseci kvadrat i iz ovog pravougaonika i odrediti koordinate temena preostalog pravougaonnika. Ovaj postupak nastaviti za k (k-dati prirodan broj) pravougaonika. Odredit koordinate granicne tacke kada se postupak produžava u beskonacnost.

13.21. Dato je n tacaka svojim koordinatama i n realnih brojeva. Napisati program za ispitivanje da li postoje tacke u ravni (nadi bar jednu ako postoje) tako da pripadaju svim krugovima ciji su centri date tacke, a poluprecnici, redom, dati realni brojevi.

13.22. Dato je n tacaka u ravni svojim koordinatama. Napisati program za ispitivanje da li medu zadatim tackama postoje cetiri koje predstavljaju koordinate temena pravougaonika.

13.23. Putnik A prelazi x km/h, putnik B prelazi y km/h. Oba putnika u isto vreme i iz iste pozicije pocinju višestruki obilazak grada kružnim putem dužine s km. Napisati program za odredivanje kada ce se putnici ponovo naci u istoj tacki. Koliko je prešao putnik A, a koliko putnik B?

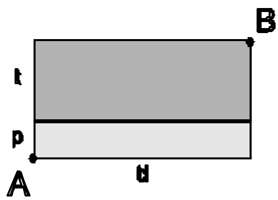
13.24. Kolona vojnika postrojena u kvadratu, cija stranica je dužine d metara, maršira konstantnom brzinom. Iz sredine poslednjeg reda izdvaja se kurir i trci pravo, napred do cela kolone. Istovremeno, sa istog mesta, polazi kurirov pas i obilazi citavu kolonu po "ivicama kvadrata", a zatim se vraca na svoje mesto u isto vreme kad i kurir, pošto je predao poruku. U tom momemtu kolona je prešla d metara (za vreme od kurirovog polaska pa do dolaska u poslednji red kolone).
Napisati program za odredivanje koje rastojanje je prešao kurir, a koje pas.

13.25. Na ivici kružne livade poluprecnika r (r se ucitava iz ulazne datoteke) treba vezati kravu pomocu konopca tako da može da pase travu samo sa polovine livade. Napisati program za izracunavanje dužine konopca.

13.26. Koordinatama u ravni odredeni su položaji tri grada. Napisati program za odredivanje koordinata transportnog centra tako da zbir puteva, od položaja pomenutih gradova do transportnog centra, bude najmanji.

13.27. Soba ima oblik kvadra dimenzija a, b i c. Dimenzijama a i b odredeni su pravougaonici poda i plafona i oznaceni rednim brojevima, redom, 1 i 2. Dimenzijama a i c odredeni su zidovi 3 i 4, a dimezijama b i c - zidovi 4 i 5. U sobi se nalaze muva i pauk (Bilo na zidovima, bilo na podu ili plafonu). Položaji muve i pauka zadaju se rednim brojem pravougaonika i odstojanjima od stranica pravougaonika i to onim redom kako je naznaceno da stranice odreduju pravougaonike.
Napisati program za odredivanje najkraceg puta, koji mora da prode pauk, da bi stigao do muve.

13.28. Kurir, na konju, treba da stigne iz mesta A u mesto B. Teren preko kojeg treba da prece je najpre peskovit(svetlije šrafirano), a zatim travnat (tamnije šrafirano). Poznato je da se kurir može kretati k $(1<k<3)$ puta brže po travnatom terenu u poredenju sa peskovitim.
Ako je dužina pravougaonika d, širina peskovitog terena p, a travnatog t, napisati program za odredivanje putanje kojom kurir treba da se krece da bi što pre stigao iz A u B.



13.29. Iz zadatog skupa tacaka u ravni izabrati dve razlicite tacke tako da razlika izmedu broja tacaka, koje leže sa razlicitih strana prave odredene tim dvema tackama, bude minimalna.

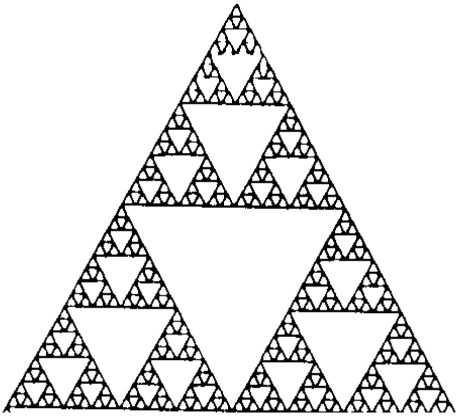
13.30. Dat je skup pravih u ravni (koeficijentima svojih jednacina). Napisati program za:

(a) prebrojavanje presecnih tacaka zadatih pravih,

(b) nalaženje prave (medu zadatim), koja ima najveci broj presecnih tacaka sa ostalim pravama.

14. Grafika na racunaru

14.1. Racunajuci koeficijente Paskalovog trougla (odnosno neku, u ovom slucaju važnu, osobinu tih koeficijenata), napisati program za iscrtavanje trougla koji odgovara trouglu na slici. Ulazni parametri su velicina ivice najsitnijeg trougla i broj sitnijih trouglova u trouglu koji se crta.



NAPOMENA. Paskalov trougao u svakoj vrsti sadrži koeficijente binomnog razvoja. Takode, k-ti clan n-te vrste Paskalovog trougla je jednak $\binom{n}{k}$, ili, kako se još oznacava C_n^k, tj. jednak je broju kombinacija k-te klase skupa od n elemenata..

14.2. Data je jednacina:

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$$

Napisati program za ispitivanje šta data jednacina predstavlja u ravni. Nacrtati sliku u ravni.

14.3. Data je pravougaona mreža sastavljena iz mxn kvadrata. Neki od kvadrata su obojeni crno (kao u ukrštenim recima). Napisati program za nalaženje belog pravougaonika (pravougaonika koji ne sadrži crne kvadrate) maksimalne površine. Ucitanu mrežu, graficki predstaviti.

14.4. Data je pravougaona mreža sastavljena iz *mxn* kvadrata *(1?m?80, 1?n?25)*. Neki od kvadrata su obojeni crno . Ti crni kvadrati obrazuju pravougaonike. Smatra se da je merža korektno zadata ukoliko se razliciti pravougaonici ne dodiruju.

Napisati:

(a) proceduru koja ispituje da li je mreža korektno zadata;

(b) Proceduru koja prebrojava pravougaonike u korektno zadatoj mreži;

Glavni program treba da testira rad ovih procedura. Ucitanu pravougaonu mrežu, po mogucnosti, predstaviti na ekranu.

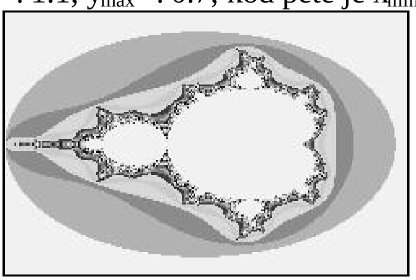
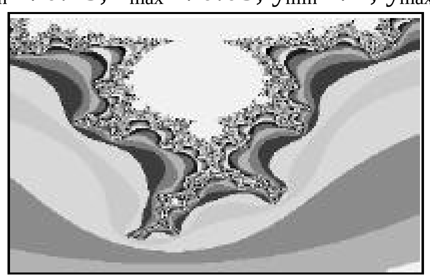
NAPOMENA. Kvadrat je takode pravougaonik.

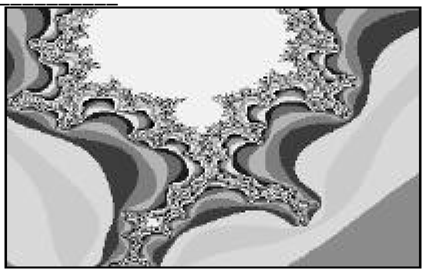
14.5. Zadat je bilijarski sto i na njemu dve kugle. Napisati program za odredivanje ugla pod kojim treba udariti prvu kuglu, da bi posle jednog odbijanja od martinele pogodila drugu kuglu. Prikazati slucaj graficki.

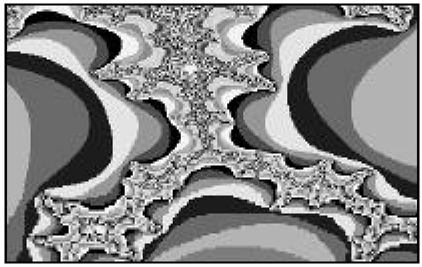
14.6. Napisati program koji za ucitane parametre velicine regiona odreduje i prikazuje Mandelbrotov skup (Benoa Mandelbrot - Francuski matematicar iz druge polovine 20. veka) u tom regionu. Kalitet prikaza (tj. broj mrežnih tacaka) i vreme izracunavanja (što se svodi na broj iteracija) treba da zavisi od parametra koji unosi korisnik.

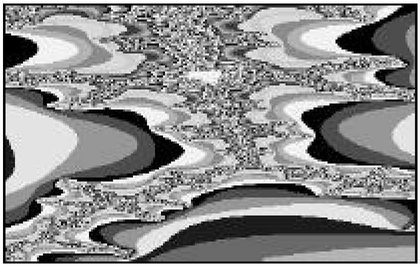
NAPOMENA. Ovaj skup je primer korišcenja fraktala. Fascinantna ososbina fraktala je, da bez obzira kako mali region ispitivali, necemo naici na smanjenje složenosti slike.

PRIMER. Na sledecim slikama su prikazani Mandelbrotovi skupovi za neke od mogucih vrednosti za ivice regiona (kod prve slike je x_{min}=?2, x_{max}=2, y_{min}=?2, y_{max}=2; kod druge je x_{min}=?0.7, x_{max}=0.5, y_{min}=?1.2, y_{max}=0; kod trece je x_{min}=?0.4, x_{max}=0.2, y_{min}=?1.2, y_{max}=?0.6; kod cetvrte je x_{min}=?0.3, x_{max}=0.1, y_{min}=?1.1, y_{max}=?0.7; kod pete je x_{min}=?0.15, x_{max}=?0.05, y_{min}=?1, y_{max}=?0.9).



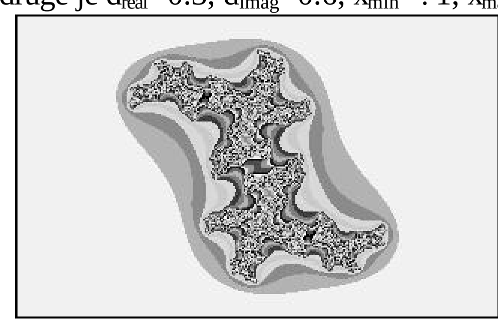


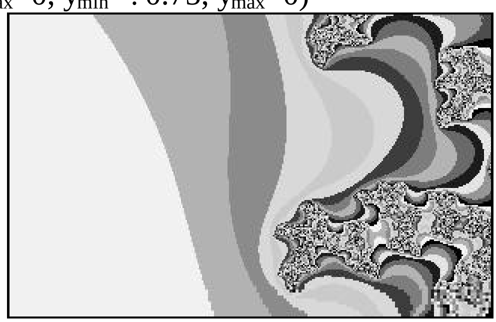


UPUTSTVO. Mandelbrotov skup se formira postupkom u kom se za svaku (mrežnu) tacku kompleksne ravni c njena boja odreduje iterativno: uoci se $z=(x,y)=(0,0)$, pa se ponavlja potupak $z=z^2+c$, sve dok ne bude $x^2+y^2>4$(tj dok tacka z ne izade van kruga u kompleksnoj ravni, ciji je centar u nuli, a poluprecnik 2) ili dok broj iteracija ne dostigne prethodno ucitanu vrednost. Boja tacke c ce biti odredena brojem izvršenih iteracija.

14.7. Napisati program koji za ucitane parametre velicine regiona, te kompleksnog broja d, odreduje i prikazuje Julijin skup u tom regionu. Kvalitet prikaza (tj. broj mrežnih tacaka) i vreme izracunavanja (što se svodi na broj iteracija) treba da zavisi od parametra koji unosi korisnik.

PRIMER. Na sledecim slikama su prikazani Julijini skupovi za sledece parametre (kod prve slike je d_{real}=0.3, d_{imag}=0.6, x_{min}=?2, x_{max}=2, y_{min}=?1.5, y_{max}=1.5; kod druge je d_{real}=0.3, d_{imag}=0.6, x_{min}=?1, x_{max}=0, y_{min}=?0.75, y_{max}=0)



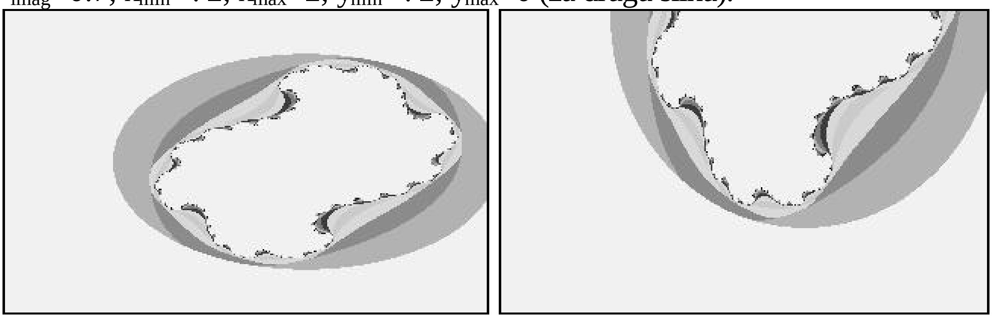


UPUTSTVO. Julijin skup se formira postupkom u kom se za svaku tacku kompleksne ravni c iz zadatog regiona njena boja odreduje iterativno: uoci se $z=(x,y)=c$, pa se ponavlja potupak $z=z^2+d$, (d je kompleksni parametar cija je vrednost poznata) sve dok ne bude $x^2+y^2>4$ (tj dok tacka z ne izade van kruga u kompleksnoj ravni, ciji je centar u nuli, a poluprecnik je 2) ili dok broj iteracija ne dostigne prethodno ucitanu vrednost. Boja tacke c ce biti odredena brojem izvršenih iteracija.

14.8. Napisati program koji za ucitane parametre velicine regiona i ucitanu vrednost kompleksnog broja ? odreduje i prikazuje Lambda skup u tom regionu.

NAPOMENA. Ovaj skup takode predstavlja primer fraktala.

PRIMER. Na sledecim slikama je prikazan Lambda skup za parametre $?_{real}=0.5$, $?_{imag}=0.7$, $x_{min}=?2$, $x_{max}=2$, $y_{min}=?2$, $y_{max}=2$ (za prvu sliku), odnosno, $?_{real}=0.5$, $?_{imag}=0.7$, $x_{min}=?2$, $x_{max}=2$, $y_{min}=?2$, $y_{max}=0$ (za drugu sliku).



UPUTSTVO. Lambda skup se formira iterativnim postupkom za svaku (mrežnu) tacku kompleksne ravni c: njena boja se odreduje tako što se uoci $z=(x,y)=c$, pa se ponavlja potupak $z=?z(1-z^2)$, (? je kompleksni parametar cija je vrednost poznata) sve dok ne bude $x^2+y^2>4$ ili dok broj iteracija ne dostigne prethodno ucitanu vrednost. Boja tacke c ce biti odredena brojem izvršenih iteracija.

14.9. Napisati program koji (unutar zadatog kvadrata):

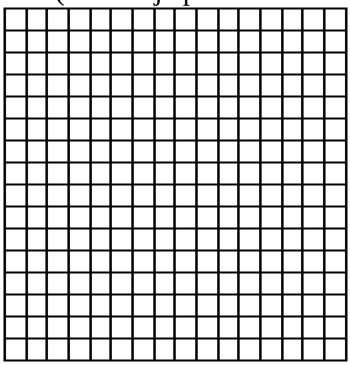
(a) za uneseno n, rekurzivnim postupkom, crta kvadratnu shemu od nxn kvadratica;

(b) za uneseno n, rekurzivnim postupkom, crta kvadratnu shemu tako da je u spoljšnijem okviru postavjeno po n kvadrata duž svake od ivica, u unutrašnjijem je postavljeno $n-1$ kvadrata duž svake od ivica, pa $n-2$ u sledecem okviru, itd. dok se ne dode do jednog kvadratica.

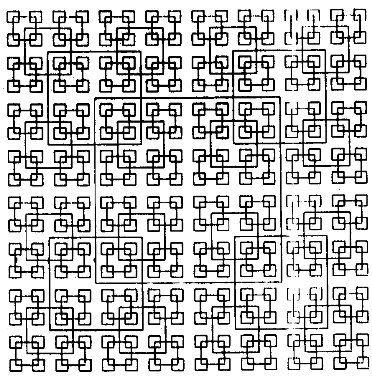
NAPOMENA. Lepi vizuelni efekti bi se dobili ukoliko se, ako je to moguce, iscrtani kvadratici oboje po nekom fiksiranom šablonu.

_14.10._ Napisati program koji (unutar zadatog kvadrata):

(a) za uneseno n, koristeci rekurzivnu proceduru, crta kvadratnu shemu od $2^n x 2^n$ kvadratica (na slici je prikazano za $n=4$);



(b) za uneseno n, rekurzivnim postupkom, koristeci modifikovanu proceduru iz dela (a), crta shemu kao na sledecoj slici (tu je, takode, $n=4$).

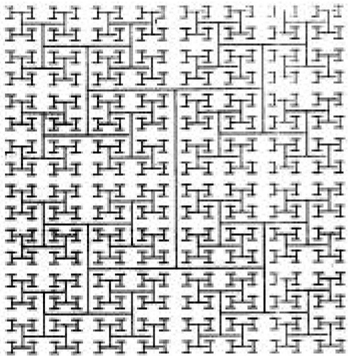


UPUTSTVO. Za crtanje pod (a) najbolje bi bilo da parametri rekurzivne procedure budu temena koja treba nacrtati. Kada n postane jedinica, treba crtati kvadrat (i to je izlaz iz rekurzije), a u suprotnom se izvršavaju odgovarajuci rekurzivni pozivi.

_14.11._ Napisati program koji (unutar zadatog kvadrata):

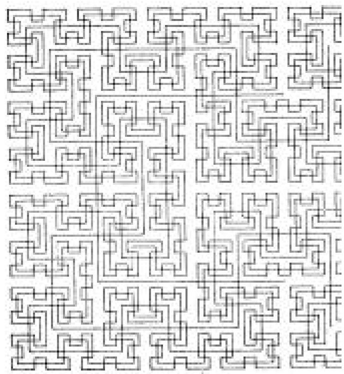
(a) za uneseno n, koristeci rekurzivnu proceduru, crta kvadratnu shemu od $2^n x 2^n$ kvadratica;

(b) za uneseno n, rekurzivnim postupkom, koristeci modifikovanu proceduru iz dela (a), crta shemu kao na sledecoj slici (tu je $n=4$).

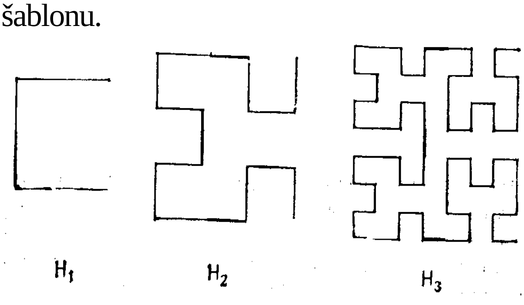


UPUTSTVO. Pogledati uputstvo zadatka *14.10.*

14.12. Napisati program koji crta Hilbertove krive reda 1 do 5, tj. $H_1,\ldots,H_5$ (kao na slici).

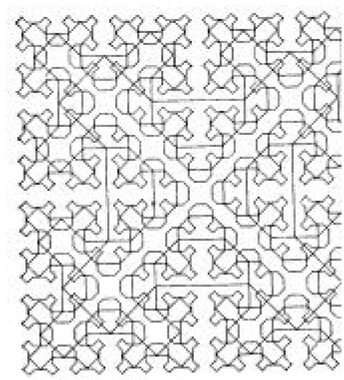


NAPOMENA. Hilbertove krive se definišu rekurzivnim postupkom. Na slici vidimo prva tri clana familije Hilbertovih krivih. Svaki clan se dobija od neposrednog prethodnog po istom šablonu.

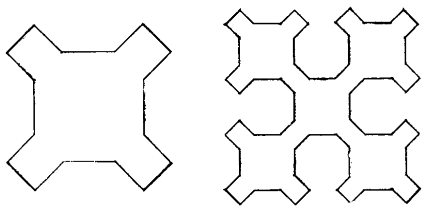


UPUTSTVO. Zakonitost za odredivanje H_{i+1} se lakše može uociti ako sa A oznacimo H_i orjentisanu ulevo (tj. baš H_i), sa B istu krivu koja je orjentisana naviše, sa C krivu orjentisanu udesno, a sa D orjentisanu naniže. Za $i=0$ su i A i B i C i D su tacke.

14.13. Napisati program koji crta krive Serpinskog reda 1 do 4, tj. $S_1,\ldots,S_4$ (kao na slici).



NAPOMENA. Krive Sijerpinskog se definišu rekurzivnim postupkom. Na slici vidimo prva dva clana ove familije krivih. Svaki sledeci clan se dobija od neposrednog prethodnog po istom šablonu.



S_1 S_2

UPUTSTVO. Zakonitost za odredivanje S_{i+1} zahteva da se, kao u zadatku 14.12, uoce sitniji "gradivni elementi". U ovom slucaju bi najjednostavnije bilo da A, B, C i D budu severna, zapadna, južna i istocna ivica respektivno, pri cemu u njihov sastav ne ulaze kose ivice koje se nalaze krajnje severozapadno, severoistocno, jugozapadno i jugoistocno.

LITERATURA

[1] H. A. Maurer, M. R. Williams, *A collection of programming problems and techniques*, Prentice-Hall, 1972.

[2] J. Nievergelt, J. C. Farrar, E. M. Reingold, *Computer Approaces to Mathematical Problems*, Prentice-Hall, 1974.

[3] Gilles Brassard and Paul Bratley, *ALGORITHMICS - Theory and Practice*, Prentice-Hall, 1985.

[4] S. J. Abas and J. Rangel Mondragon, *Pascal: An Interactive Text,* Adam Hilger, Bristol and New York, ESM, Cambridge

[5] N. Virt, *Algoritmì i strukturì dannìh*, "Mir", Moskva, 1989. (prevod na ruski jezik knjige *Alghoritms and data structure*)

[6] S. A. Abramov, G. G. Gnezdilova, E. N. Kapustina, M. I. Sel¥n, *ZadaËi po programmirovani¥*, "Nauka", Moskva, 1988.

[7] V.N. KasÍ®nov, V.K. SabelÍfelÍd, Sbornim z*adaniñ po praktikumu na ÏBM*, "Nauka", Moskva, 1986.

[8] J. Arsac, *Jeux at casse-tete a programmer*, Dunod, Bordas, Paris, 1985.

[9] R. Tošic i M. Vuksanovic, *Zadaci o brojevima za programere*, Novi Sad, 1991.

[10] D. Tošic, *FORTRAN 77 - zbirka rešenih zadataka*, "Tehnicka knjiga", Beograd, 1991.

[11] **M. Cabarkapa, N. Ilijevski-Spalevic, *Metodicka zbirka zadataka iz programiaranja sa rešenjima u PASCAL-u*, "Gradevinska knjiga", Beograd, 1990.**

SADRŽAJ