

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Projekt iz kolegija bioinformatika

FM-index count

Autori:

Matea Donlić

Marko Đurasević

Maja Kontrec

Zagreb, 2013.

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Pomoćni algoritmi	3
2.1	Burrows-Wheeler transformacija	3
2.1.1	Algoritam transformacije	3
2.1.2	Rekonstrukcija originalnog teksta iz BWT transformacije	4
2.1.3	Konstrukcija BWT-a	5
2.1.4	Multikey quicksort	5
2.1.5	Konstrukcija sufiksnog polja	6
2.2	Wavelet stablo	13
2.2.1	Konstruiranje wavelet stabla	14
2.2.2	Upiti nad wavelet stablom	15
2.3	RRR struktura	16
2.3.1	Konstruiranje RRR strukture	17
2.3.2	Izračunavanje broja jedinica u nizu	17
3	FM-indeks	19
3.1	Originalna implementacija	19
3.2	Naša implementacija	20
3.2.1	Nedostaci implementacije u programskom jeziku Java	22
4	Testiranja	23
4.1	Vrijeme izgradnje FM-Indexa	23
4.2	Vrijeme obavljanja <i>count</i> upita	24
4.3	Memorijsko zauzeće FM-indexa	24
5	Literatura	26

Uvod

Porast količine tekstualnih informacija u zadnja dva desetljeća potaknuo je razvoj struktura podataka koje će tu informaciju memorijski efikasno pohraniti, omogućujući pritom vremensku efikasnost pretrage i dohvata. Jedno od područja koje ima veliku korist od razvoja ovakvih struktura je bioinformatika. Radi same prirode bioinformatičkih problema, odnosno, obrade bioloških podataka (npr. analiza dugačkih sekvenci DNK), vrlo je pogodno nad takvim biološkim podacima izgraditi spomenute strukture kako bi se njihova analiza ubrzala. Jedan od pristupa rješavanja ovog problema je upotreba indeksa pretraživanja po cijelom tekstu (eng. full-text search). Ove strukture omogućuju brzo i potpuno pretraživanje teksta nad kojim su izgrađene. Nakon izgradnje, pronalazak proizvoljnog tekstualnog uzorka (zajedno s njegovim brojem ponavljanja) vrlo je učinkovit. No, ovaj pristup, koji stavlja naglasak na brz pronalazak traženih uzoraka, često ne ispunjava memorijske zahtjeve. Budući da korisnost pretrage raste s količinom teksta, memorijska efikasnost vrlo je bitan faktor pri odabiru načina obrade i pohrane teksta kojega je potrebno analizirati. Novije izvedbe indeksa dobiveni tekst prvo sažmu, te tek nakon toga, nad sažetim tekstom grade indekse. Jedan od takvih indeksa je FM-index čija je implementacija i zadatak ovoga projekta.

Pomoćni algoritmi

U ovom poglavlju upisani su algoritmi koji su potrebni za konstruiranje i korištenje FM-indeksa u svrhu prebrojavanja broja ponavljanja podniza unutar zadanog niza nad kojim je konstruiran FM-indeks. Opisani su algoritmi Burrows-Wheeler transformacije, wavelet stabla i RRR strukture.

2.1 Burrows-Wheeler transformacija

Burrows-Wheeler transformacija (skraćeno BWT) [1], služi za kompresiju tekstualnog niza na osnovi pronalaska ponavljajućih uzoraka unutar njega. Ova transformacija je reverzibilna i ne iziskuje pohranu dodatnih podataka za rekonstrukciju originalnog niza. Osim ovoga, prilikom BWT transformacije, ni jedan znak originalnog niza se ne mijenja. Dodatna prednost je činjenica da se za transformaciju (osim dodavanja znaka \$) ne proširuje ulazna abeceda. Ukoliko ulazni niz sadrži više jednakih podnizova, velika je vjerojatnost da će transformirani niz sadržavati uzastopne nizove jednakih znakova, što kasnije uvelike pogoduje njegovom komprimiranju.

2.1.1 Algoritam transformacije

Algoritam transformacije provodi se u 4 koraka:

1. Na kraj teksta postavlja se znak \$ koji označava kraj te je, leksikografski gledano, najmanji znak ulazne abecede.
2. Stvara se matrica svih različitih cikličkih pomaka niza dobivenog nakon 1. koraka.
3. Matrica iz koraka 2 se sortira u leksikografskom poretku.
4. Dobivena transformacija isčitava se iz posljednjeg stupca matrice dobivene u koraku 3.

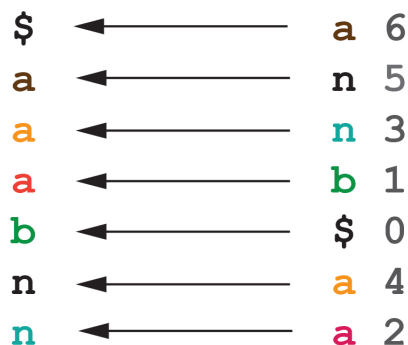
Tijek algoritma za riječ "banana" prikazan je na slici 2.1. Vidi se kako je BWT transformacija te riječi jednaka annb\$aa.



Slika 2.1: Ispunjene vrijednosti u poljima BS i SBS

2.1.2 Rekonstrukcija originalnog teksta iz BWT transformacije

Matrica dobivena u 3. koraku algoritma poslužiti će za rekonstrukciju originalnog teksta iz dane BWT transformacije. Naime, ta matrica ima svojstvo da u svakom njenom retku, zadnji znak prethodi prvom znaku u istom retku matrice u originalnom tekstu. To znači, da je za rekonstrukciju izvornog teksta dovoljan samo prvi i zadnji stupac te matrice. Budući da je poznatno da tu matricu čine sve permutacije ulaznog niza i to sortiranog, jednostavno se može rekonstruirati prvi stupac - jednostavno se uzmu i sortiraju svi znakovi danog transformiranog niza. Budući da znamo da je posljednji znak u nizu znak \$, lako je iz prvog i zadnjeg stupca matrice rekonstruirati originalni niz. Na slici 2.2 prikazan je postupak rekonstrukcije originalnog niza (sivi brojevi na desnoj strani označavaju broj koraka).



Slika 2.2: Ispunjene vrijednosti u poljima BS i SBS

2.1.3 Konstrukcija BWT-a

Iako je sam algoritam izgradnje BWT transformacije veoma jednostavan, nažalost nije i efikasan. Za povećanje tekstova je jednostavno nemoguće napraviti sve njihove rotacije i onda ih sortirati, jer bi memorijsko zauzeće bilo preveliko. Iz tog razloga potrebno je koristiti algoritme koji BWT transformaciju mogu obaviti memorijski i vremenski efikasno. U nastavku ćemo pogledati dva takva algoritma te vidjeti koje su njihove prednosti i nedostaci.

2.1.4 Multikey quicksort

Prvo ćemo proučiti jedan tip algoritma za sortiranje koji se temelji na quick sort algoritmu predloženom u [2]. Prednost ovog algoritma jest u tome da može sortirati sve rotacije jednog niza koristeći samo osnovni niz i dodatno polje pokazivača na taj niz. Na taj način nije potrebno raditi sve rotacije ulaznog niza. Algoritam u svojoj osnovi spaja quick sort i radix sort. Osnovni koraci algoritma prikazani su na slici ?? Prvo se nasumično odabere jedan niz, a prvi element toga niza je pivot. Odabrani niz se nakon toga zamijeni s prvim nizom. Sada djelomično sortiramo sve nizove tako da se nizovi koji počinju s elementom koji je jednak pivotu pozicioniraju na početak ili kraj niza, dok se ostali nizovi poredaju tako da tako da se u prvom dijelu nalaze svi nizovi koji započinju elementom koji je manji od pivoa (u primjeru na slici je to niz koji započinje s "\$"), dok se u drugom dijelu nalaze nizovi koji započinju s elementom koji je veći od pivoa (u primjeru su to nizovi koji započinju s "b" i "n"). Idući korak jest da se svi nizovi koji započinju elementom koji je iznosom jednak pivotu premjeste u sredinu i to tako da se nizovi koji započinju s manjim elementom nalaze ispred njih, a nizovi koji započinju s većim elementom iza njih. Sada su nizovi efektivno podijeljeni u tri dijela, prvi dio koji sadrži nizove koji započinje elementom koji je manji od pivoa, drugi dio koji čine nizovi koji počinje elementima koji su jednaki pivotu i treći dio koji sačinjavaju nizovi koji započinju elementom koji je veći od pivoa. Sada kada imamo ovu podjelu, svaki od ta tri dijela je potpuno neovisan o drugima i svi se mogu nezavisno sortirati (ovdje je očita i jedna prednost ovog postupka koju ćemo kasnije naglasiti). Sada prvu i treću grupu nizova sortiramo na isti način kao što smo sortirali sve nizove. Drugu grupu ćemo sortirati na isti način, jedina će razlika biti da ćemo sada sortirati po drugom znaku tih nizova (jer je očito da su sortirani po prvom znaku), no ostatak algoritma je u potpunosti jednak. Algoritam se nastavlja dok svi nizovi nisu u potpunosti međusobno sortirani.

Bitno je za napomenuti da je zbog ilustracije rad algoritam prikazan na nezavisnim nizovima (kao da smo prvo napravili sve rotacije osnovnog niza i onda njih sortirali). Naravno u implementaciji to nije tako napravljeno, već postoji niz brojeva koji predstavljaju pokazivače (odnosno indekse pošto pokazivači ne postoje u programskom jeziku Java) na elemente ulaznog polja. Onda umjesto da se zamjenjuju čitavi nizovi jednostavno se zamijene pokazivači u tom polju.

Prednost ovog postupka su prije svega njegova jednostavnost. Sam algoritam je veoma intuitivan i nije ga teško razumjeti. Druga, mnogo očitija prednost jest mogućnost paralelizacije ovog algoritma. Kako je ranije navedeno, nizovi su na kraju podijeljeni u tri



Slika 2.3: Multikey quicksort algoritam

nezavisne grupe, od kojih se svaka sortira nezavisno. To znači da bi teoretski svaku ovu grupu mogli sortirati međusobno paralelno. Nažalost zbog veoma loše implementacije paralelnih mehanizama u programskom jeziku Javi, ovo ipak nije napravljeno. No kada bi implementacija bila napravljena u nekom programskom jeziku koji je više specijaliziran za paralelizaciju to bi bilo dobro napraviti. Najveći nedostaci ovog postupka su svakako nešto veća složenost naspram konstrukcije BWT-a korištenjem sufiksnog polja, ta također rekurzivna priroda algoritma koja zahtijeva puno rekurzivnih poziva i iz tog razloga također i alokaciju veće količine memorije za stog.

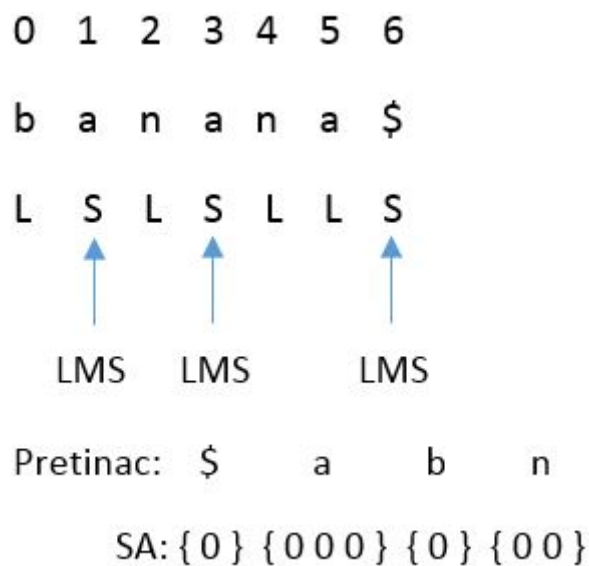
Iako se ovdje radi o veoma zanimljivom algoritmu (algoritmu koji nije naravno primjenjiv samo na pronalazak BWT transformacije), nažalost pokazao se je kao prespor u usporedbi s izračunavanjem BWT transformacije korištenjem sufiksnog polja.

2.1.5 Konstrukcija sufiksnog polja

Sufiksno polje jest jednostavna struktura podataka koje je sastavljena od niza cijelih brojeva koji sadrže početna mjesta abecedno poredanih sufiksa nekog niza. Dobra stvar kod sufiksnog polja jest da se iz njega može izračunati BWT transformacija u linearnom vremenu. Još veća prednost ovakvog postupka jest da se sufiksno polje isto tako može konstruirati u linearnom vremenu. Iako postoje mnogi algoritmi za konstrukciju sufiksnih polja, u ovoj implementaciji iskorišten je algoritam koji je predložen u [3] i [4].

Prije nego što se krene na objašnavanje samog algoritma potrebno je uvesti određenu

terminologiju koju ćemo koristiti za objašnjenje postupaka ovog algoritma. Ulazni niz znakova ćemo označiti sa S . Neka je ulazni niz znakova duljine n , i neka je oznaka indeksiranja jednog elementa $S[i]$ pri čemu je $i \in [0, n - 1]$. Posljednja stvar koju je bitno napomenuti jest da znakovni niz mora obavezno završavati znakom koji je strogo manji od svih znakova u ostatku niza. Definirat ćemo dvije različite vrste znakova, L-znakove i S-znakove. S-znak je onaj znak koji je manji od znaka koji dolazi neposredno iza njega (odnosno formalnije, ako gledamo i -ti znak onda mora vrijediti $S[i] < S[i + 1]$) ili je jednak znaku koji se nalazi desno od njega i taj znak je S-znak (formalnije $S[i] = S[i + 1]$ i $S[i + 1]$ je L-znak). L-znak je onaj znak za koji vrijedi da je veći od znaka koji se nalazi desno od tog znaka (odnosno formalnije, ako gledamo i -ti znak onda mora vrijediti $S[i] < S[i + 1]$) ili je jednak znaku koji se nalazi desno od njega i taj znak je L-znak (formalnije $S[i] = S[i + 1]$ i $S[i + 1]$ je L-znak). Iznimka od ovog pravila jest zadnji znak koji će uvijek biti definiran kao S-znak. Ovaj koncept možemo proširiti i na sufikse, pa reći da je S-sufiks sufiks koji počinje S-znakom i L-sufiks sufiks koji počinje L-znakom. Uvest ćemo još pojam LMS-znak i LMS-podniz. LMS-znak je S-znak kojemu se na lijevom mjestu nalazi L-znak, odnosno vrijedi $S[i]$ je S-znak i $S[i - 1]$ je L-znak. LMS-podniz je niz koji započinje LMS-znakom i završava LMS-znakom, te se u njemu ne nalaze drugi LMS-znakovi. Primjer jednog ovako označenog niza može se vidjeti na slici 2.4.



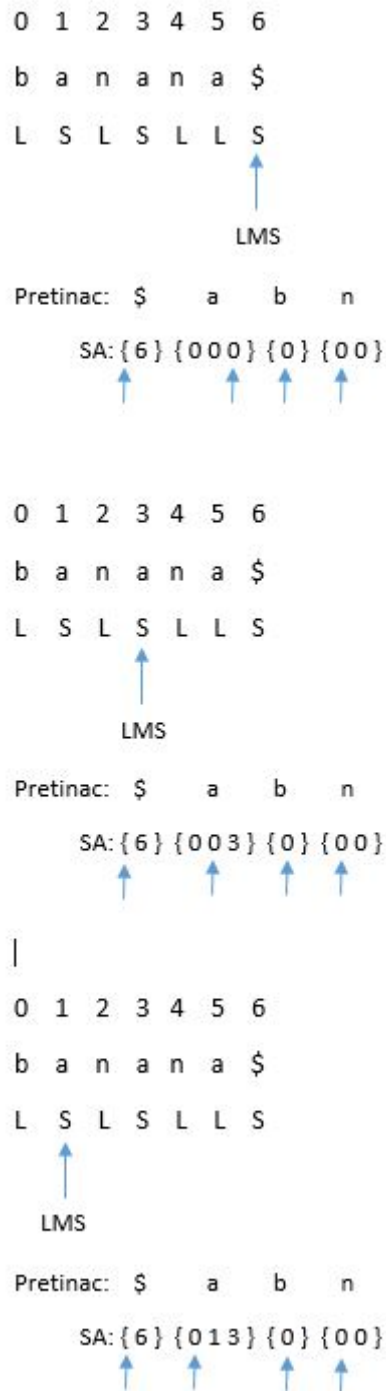
Slika 2.4: Oznake znakova u jednom nizu

Sada kada su uvedene osnovne oznake, možemo pojasniti samo ideju algoritma. Osnovna ideja algoritma predložena je već u [5]. U svojoj osnovnoj inačici, algoritam se je zasnovao na svojstvu da ako znamo poredak svih S-sufiksa ona možemo odrediti i poredak svih L-sufiksa. Nažalost, problem je ostao u tome kako zapravo efikasno sortirati S-sufikse. U tom radu je predložen način kako bi se to moglo riješiti korištenjem S-udaljenosti, što je opet zahtjevalo dodatnog memorijskog prostora. Ta ideja je razrađena i poboljšana te je konačno predložen novi algoritam u [nang] koji se zasniva na istoj ideji, ali uvodi neke promjene koje su rezultirale mnogo boljim ponašanjem ovog algoritma. Prvo bitno

poboljšanje koje je uvedeno jest da se umjesto sortiranja S-sufiksa mogu sortirati LMS-sufiksi, koji su sasvim dovoljni kako bi se odredio poredak L-sufiksa, pomoću kojih se konačno može odrediti poredak S-sufiksa. Kako su LMS-sufiksi obično dulji, to znači kako ćemo vjerojatno imati manji broj takvih sufiksa koje moramo sortirati nego bi to bio slučaj da sortiramo sve S-sufikse (u najgorem slučaju broj LMS-sufiksa je polovica duljine ulaznog niza). Drugo veoma zanimljivo poboljšanje jest da se za sortiranje tih LMS-sufiksa ne mora koristiti nikakav posebni algoritam za sortiranje nego se može koristiti isti postupak kao i kod sortiranja L-znakova i S-znakova. U nastavku ćemo pogledati detaljnije korake ovog algoritma.

Prvo je potrebno svim znakovima odrediti jesu li to S-znakovi, L-znakovi ili LMS-znakovi. Nakon tog koraka slijedi postupak induciranog sortiranja. Definirajmo prvo inducirano sortiranje. To je postupak kojim ćemo iz LMS-sufiksa inducirati poredak L-sufiksa i potom S-sufiksa. Ovo je zapravo centralni i najvažniji dio algoritma. Za rad ovog algoritma potrebno nam je nekoliko struktura: ulazni niz, sufixno polje, niz sa oznakama tipova znakova i pokazivači na pretince. Sve strukture su već ranije spomenute i poznate, osim pokazivača na pretince. Pretince ćemo zapravo definirati kao područja u nizu u kojima se nalaze sufiksi koji počinju s istim početnim znakom. Broj pretinaca će dakle biti jednak veličini abecede (originalne abecede proširene s dodatnim znakom koji je manji od svih ostalih). Kada imamo sve te strukture možemo provesti postupak induciranog sortiranja. Postupak induciranog sortiranja se provodi kroz tri koraka opisanih u nastavku.

Prije početka prvog koraka pretpostavimo da svi pokazivači na pretince pokazuju na krajeve tih pretinaca, i neka su vrijednosti elemenata sufixnog polja inicijalno postavljene na vrijednost 0. Prvi korak se sastoji od toga da prođemo kroz niz i da sve LMS-znakove stavimo u odgovarajući pretinac (smjer prolaska kroz niz je u potpunosti nebitan, može se prolaziti od početka ili od kraja niza). Kada stavimo LMS-znak u odgovarajući pretinac potrebno je pokazivač na taj pretinac smanjiti tako da pokazuje ne iduće prazno mjesto. Ovaj korak algoritma detaljno je prikazan na slici 2.5



Slika 2.5: Prvi korak u induciranom sortiranju

Prije početka drugog koraka potrebno je pokazivače postaviti na početke svih pretinaca. Drugi korak algoritma jest induciranje L-znakova. U ovom koraku prolazimo kroz sufiksno polje s lijeva na desno i za svaki element koji je veći od 0, dakle za elemente za koje vrijedi $SA[i] > 0$. Svaki taj element zapravo predstavlja indeks nekog znaka u ulaznom nizu. Za svaki element iz sufiksnog polja ispitat ćemo da li je znak iz ulaznog niza koji se nalazi na poziciji koja je određena vrijednošću trenutnog elementa sufiksnog polja umanjenoj za

jedan L-znak. Mnogo jednostavnije rečeno ispitujemo da li je znak $S[SA[i]]$ L-znak, pri čemu je i index elementa sufiksnog polja na kojem se trenutno nalazimo. Ukoliko je taj znak L-znak, onda u pretinac koji predstavlja taj znak stavimo njegov indeks i uvećamo pokazivač na taj pretinac.

0	1	2	3	4	5	6
b	a	n	a	n	a	\$
L	S	L	S	L	L	S

i=0

Pretinac: \$ a b n

SA: {6} {5 1 3} {0} {0 0}

0	1	2	3	4	5	6
b	a	n	a	n	a	\$
L	S	L	S	L	L	S

i=1

Pretinac: \$ a b n

SA: {6} {5 1 3} {0} {4 0}

0	1	2	3	4	5	6
b	a	n	a	n	a	\$
L	S	L	S	L	L	S

i=2

Pretinac: \$ a b n

SA: {6} {5 1 3} {0} {4 0}

0	1	2	3	4	5	6
b	a	n	a	n	a	\$
L	S	L	S	L	L	S

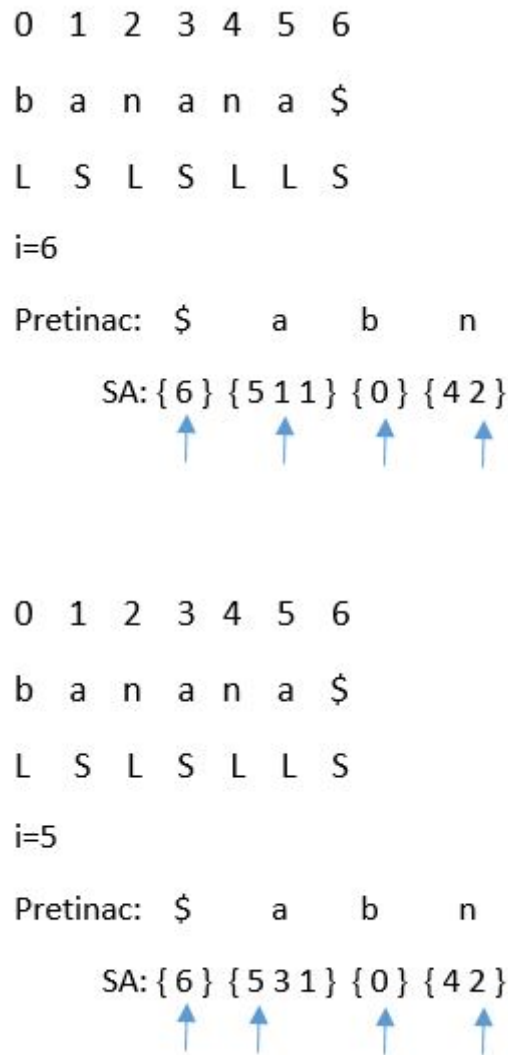
i=3

Pretinac: \$ a b n

SA: {6} {5 1 3} {0} {4 2}

Slika 2.6: Prvi korak u induciranom sortiranju

Prije početka treće i posljednje faze induciranog sortiranja moramo pokazivače postaviti na kraj pretinaca. Treći dio induciranog sortiranja je veoma sličan drugom koraku. Kroz sufiksno polje se ovaj puta prolazi od kraja prema početku. Opet izostavljamo elemente koji su jednaki 0. Za svaki element iz sufiksnog polja ispitat ćemo da li je znak iz ulaznog niza, koji se nalazi na poziciji koja je određena vrijednošću trenutnog elementa sufiksnog polja umanjenoj za jedan, S-znak, odnosno ispitujemo da li je znak $S[SA[i]]$ S-znak, pri čemu je i index elementa sufiksnog polja na kojem se trenutno nalazimo. Ukoliko je taj znak S-znak, onda u pretinac koji predstavlja taj znak stavimo njegov indeks i smanjimo vrijednost pokazivača na taj pretinac.



Slika 2.7: Prvi korak u induciranom sortiranju

S ta tri koraka završen je postupak induciranog sortiranja koji predstavlja središnji dio ovog algoritma za izgradnju sufiksnog polja. Ovim postupkom smo zapravo djelomično sortirali sve LMS-sufikse. Problem nam predstavljaju LMS-sufiksi koji su jednaki, jer njih na ovaj način ne možemo sortirati. Kako bi sortirali LMS-sufikse moramo još pogledati znakove koji dolaze iza tog LMS-sufiksa. Definirajmo prvo što znači da su dva

LMS-sufiksa jednaka. Dva LMS-sufiksa su jednaka ako su jednake duljine, ako na istim pozicijama imaju jednake znakove i dodatno ako su znakovi na istim pozicijama u oba niza istog tipa (s-znak ili l-znak). Kako bi odredili njihov poredak moramo vidjeti koji LMS-sufiksi slijedi nakon tih LMS-sufiksa. To veoma lako možemo napraviti na način da svakom sufiksu pridjelimo neku leksičku vrijednost, odnosno neki broj. LMS-sufiksi koji su manji dobit će manju leksičku vrijednost, oni koji su veći dobit će veću leksičku vrijednost, dok će jednaki LMS-sufiksi dobiti jednake leksičke vrijednosti. Na taj način smo originalni niz zamijenili kompaktnijim nizom gdje je svaki LMS-sufiks predložen svojom leksičkom vrijednošću. Sada možemo ponoviti cijeli algoritam i na isti način kao i za originalni niz (jer i znakovi su zapravo predstavljeni brojevima, tako da to ništa ne mijenja na stvari) i tako nastavljamo dok ne uspijemo odrediti poredak svih LMS-sufiksa. Kada je on određen, indukcijom lako dobijemo poredak svih L-sufiksa i S-sufiksa te je time postupak računanja sufiksnog polja dovršen.

Sada kada smo pogledali sve korake algoritma zasebno, rezimirajmo cjelokupni algoritam još jednom. U prvom koraku je potrebno odrediti tipove svih znakova (da li je znak l-znak ili s-znak), kao i koji su znakovi LMS-znakovi. Drugi korak algoritma je provođenje inducirano sortiranja nad ulaznim nizom. Time smo dobili međusobno sortirane LMS-nizove, no bitno je za zapamtiti da su sortirani samo oni koji su međusobno u potpunosti različiti. Ukoliko je dva ili više LMS-niza u potpunosti jednako (po jednakosti definiranoj ranije), onda ovim korakom nije jednoznačno određeno koji je od tih LMS-nizova nizova manji a koji veći. Kako bi odredili poredak LMS-nizova potrebno ih je ponovo sortirati, i to radimo tako da sve LMS-nizove zamijenimo leksikografskim znakovima po principu da LMS-nizovi koji se u sortiranom poretku pojavljuju ranije dobe manje leksikografske znakove, jednakim LMS-nizovima pridjele se jednaki leksikografski znakovi i onim LMS-znakovima koji se pojavljuju kasnije pridjele veće leksičke vrijednosti. Time smo stvorili novi, reducirani, problem koji možemo riješiti istim postupkom kao i originalni problem. Kada je riješen ovaj reducirani problem, jednoznačno nam je određen poredak LMS-nizova, i sada ukoliko provedemo ponovno inducirano sortiranje, dobit ćemo sufiksno polje.

Kao što vidimo radi se o vrlo jednostavnom, konciznom i elegantnom algoritmu koji u linearnom vremenu može izgraditi sufiksno polje. Teoretski, memorijsko zauzeće algoritma je $O(5n)$, no u implementaciji ono je obično nešto veće zbog dodatnih struktura koje su potrebne za rad algoritma (primjerice polje koje sadrži tipove svih znakova kako se ono ne bi moralo ponovo određivati u pojedinim koracima algoritma). Možda se kao jedna zamjerka algoritma može učiniti to što je potrebno raditi rekurzivne pozive tijekom rješavanja problema, no to nije toliko problem koliki se čini jer je obično broj rekurzivnih poziva dosta malen, čak i za veće nizove.

2.2 Wavelet stablo

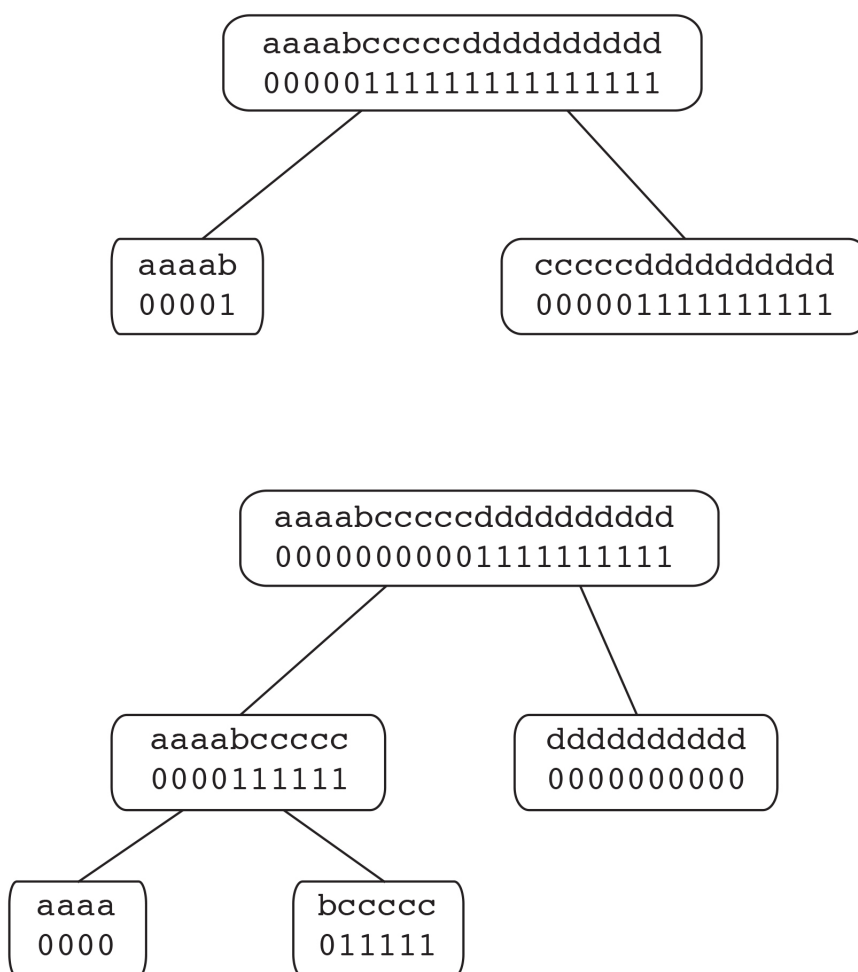
Wavelet stablo (engl. *wavelet tree*) je podatkovna struktura koja tekstualni niz organizira u hijerarhiju nizova nula i jedinica - *bit-vektora*. Ova struktura omogućuje pronalazak broja pojavljivanja do nekog indeksa u nizu - *ranga* nekog znaka sa složenošću od

$O(\log n)$, gdje je n veličina abecede danog tekstualnog niza. Velika prednost ove strukture je činjenica da je ona samokomprimirajuća.

Stablo se izgrađuje rekurzivno, razdijeljujući abecedu u parove podabeceda. Nakon izgradnje stabla, svaki list odgovara jednom znaku abecede, dok ostali unutarnji čvorovi označavaju da li pojedini znak teksta pripada prvoj ili drugoj podabecedi. Ukoliko se bit-vektori koji izgrađuju stablo pohrane u RRR strukturu (koja je opisana u idućem poglavlju), moguće je da se memorijsko zauzeće smanji s obzirom na originalno stablo koje ne koristi RRR strukturu.

2.2.1 Konstruiranje wavelet stabla

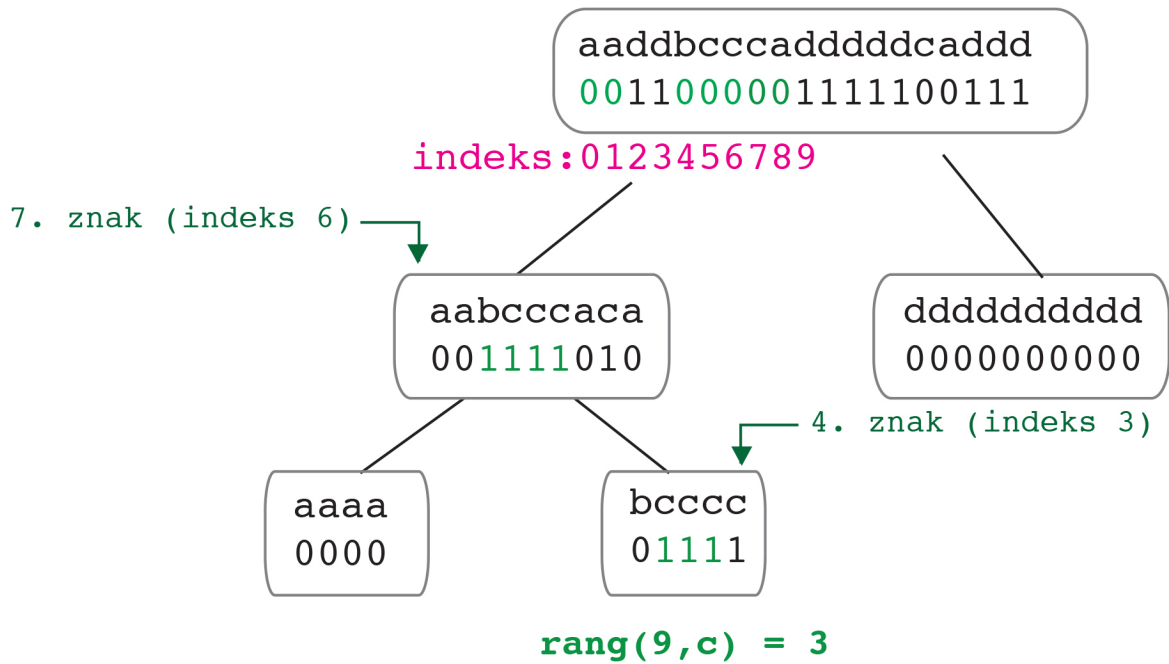
Wavelet stablo pretvara dovedeni niz u balansirano binarno stablo bit-vektora, gdje se dio znakova, koji pripadaju prvoj polovici dane abecede, kodira kao 0, a drugi dio kao 1. Iako se na prvi pogled čini kako ovo unosi nejednoznačnost u dekodiranju sadržaja stabla, to ipak nije tako. Naime, prelaskom u slijedeću razinu, prva polovica abecede iz prethodne razine ponovno se dijeli na dva dijela te se njeni znakovi ponovo kodiraju kao 0 ili 1. Postupak se rekurzivno nastavlja sve dok se abeceda ne sadrži samo dva znaka, koji se tada jednoznačno kodiraju; prvi s 0, a drugi s 1. Originalna podjela ulazne abecede predložena je u [6] - abeceda se uvijek dijeli na dva jednaka dijela. Podjela abecede koja je implementirana u sklopu ovog projekta razlikuje se od originalne. Naime, kako bi se ujednačila veličina podijeljenih abeceda, a time i memorijsko zauzeće strukture, abecede se dijele na osnovu učestalosti pojavljivanja pojedinog znaka abecede unutar ulaznog niza. U ovoj implementaciji, abeceda se dijeli na prvom znaku čiji broj pojavljivanja u ulaznog nizu, zbrojen s ukupnim brojem pojavljivanja svih znakova koji su u abecedi njegovi prethodnici, veći ili jednak polovici veličine ulaznog niza. Na slici 2.8 prikazana je usporedba izgradnje stabla originalnim (gore) i ovdje implementiranim postupkom (dolje). Abeceda ulaznog niza je a,b,c,d. Broj pojavljivanja znaka a je 4, znaka b 1, znaka c 5, a znaka d 10 puta. Veličina ulaznog niza iznosi 20. U prvom slučaju, ulazna abeceda dijeli se na podabecede a,b i c,d, dok se u drugom slučaju abeceda dijeli na a,b,c i d. Razlog tomu je što je zbroj broja pojavljivanja znakova a, b i c jednak polovici veličine ulaznog niza. Razlog zašto je ovaj način memorijski efikasniji objašnjen je u idućem poglavlju iz razloga što ovisi o RRR strukturi koja pohranjuje bit-vektore stabla.



Slika 2.8: Razlika između originalnog i ovdje implementiranog wavelet stabla

2.2.2 Upiti nad wavelet stablom

Slika 2.9 prikazuje primjer pronalaska ranga unutar wavelet stabla. Točnije, primjer pronalazi rang znaka *c* na poziciji 9. U prvom koraku, budući da znamo da je slovo *c* kodirano s 0, brojimo nule do indeksa 9. Nakon što smo pronašli 7 nula, spuštamo se u slijedeću razinu stabla - u lijevu granu, iz razloga što je znak *c* kodiran s 0. Sada, u ovoj grani, budući da je znak *c* kodiran s 1, brojimo koliko ima jedinica u prvih 7 znakova. Važno je primjetiti kako u ovom koraku ustvari idemo do indeksa 6, a ne 7. Nakon što su pronađene 4 jedinice, spuštamo se u iduću razinu, u desnu granu, te brojimo jedinice do četvrtog znaka (indeks 3). U ovoj razini, ujedno i posljednjoj razini stabla, do četvrtog znaka prebrojavamo 3 jedinice iz čega zaključujemo da je rang znaka *c* na poziciji 9 jednak 3.



Slika 2.9: Razlika između originalnog i ovdje implementiranog wavelet stabla

2.3 RRR struktura

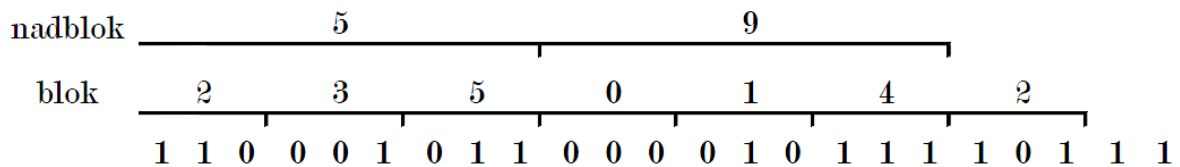
RRR struktura je struktura koja za dani niz nula i jedinica proizvoljne duljine vraća broj postavljenih jedinica do određene pozicije. Općenito, za dobivanje broja jedinica u nizu nula i jedinica, potrebno je proći kroz cijeli niz i provjeravati svaki element niza. Takvo prebrojavanje niza odvija se u linearnoj vremenskoj složenosti $O(n)$ gdje je n duljina niza. RRR strukturom se ukupan broj jedinica do određene pozicije u nizu može izračunati u konstantnom vremenu $O(1)$. Također, korištenjem RRR strukture se postiže i implicitna kompresija.

Ideja RRR strukture je da se inicijalno nad nizom konstruiraju blokovi (engl. *buckets*) i nadblokovi (engl. *superbuckets*) u kojima se pohranjuju brojevi jedinica za određene intervale niza. Na taj način se izbjegava pregledavanje cijelog dijela niza u potrazi za brojem jedinica, već je potrebno pregledati samo mali dio niza i određene vrijednosti pohranjene u blokovima i nadbloku.

RRR struktura implementirana u ovom projektu se djelomično razlikuje od originalne RRR opisane u [7]. U originalnoj RRR strukturi niz je podijeljen u blokove tako da je svaki blok predstavljen parom (SB,B) te su definirane dodatne tri tablice [8]. Implementacija u ovom projektu je nešto drugačije izvedena, ali je zadržala izračun broja jedinica u nizu u konstantnom vremenu te je opisana u nastavku teksta.

2.3.1 Konstruiranje RRR strukture

U ovoj implementaciji RRR strukture, niz duljine n se dijelio u blokove veličine l i nadblokove veličine l^2 , a vrijednost l se pritom izračunavala kao logaritam duljine niza, tj. $l = \log_2 n$. Stvorena su polja BS i SBS veličina $\lfloor n/l \rfloor$ i $\lfloor n/l^2 \rfloor$ za pohranjivanje vrijednosti blokova i nadblokova. Za stvaranje RRR strukture potrebno je proći kroz cijeli niz znamenki. Brojač jedinica je inicijalno postavljen na nula i povećava se kada se prolaskom kroz niz naiđe na element koji ima vrijednost 1. Kada se prođe kroz l elemenata niza, vrijednost brojača pohranjuje se u polje BS kao zbroj vrijednosti stvorenih blokova u još neispunjenom nadbloku. To znači da se blokovi u jednom nadbloku pune kumulativno. Kada se prođe l^2 elemenata niza, vrijednost novog nadbloka jednaka je zbroju vrijednosti prošlog nadbloka (ako postoji) i vrijednosti brojača, odnosno zadnjeg konstruiranog bloka. Nakon izračuna vrijednosti nadbloka brojač se postavlja ponovo na vrijednost nula. Primjer ispunjenih vrijednosti u poljima BS i SBS dan je 2.10.



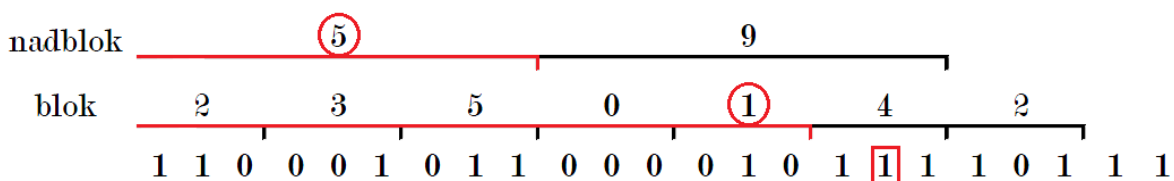
Slika 2.10: Ispunjene vrijednosti u poljima BS i SBS

Ukoliko se osvrnemo na primjer wavelet stabla prikazanim u prethodnom poglavlju (2.8), lako možemo izračunati da, ukoliko stablo izgrađujemo originalnim algoritmom, ukupna veličina izgrađenih polja BS i SBS jednaka je 17. Ako se stablo izgradi dijeljenjem abecede na osnovi broja pojavljivanja znakova unutar ulaznog niza, ukupna veličina izgrađenih BS i SBS polja iznosi 14. Već na ovako malom primjeru zamjećuje se poprilična razlika između dobivenih veličina polja BS i SBS.

2.3.2 Izračunavanje broja jedinica u nizu

Broj jedinica u nizu se izračunava kao zbroj vrijednosti zadnjeg popunjenog nadbloka i bloka do zadane pozicije te broja jedinica u ostatku niza koji nije obuhvaćen blokom. Zbog načina punjenja blokova i nadblokova, kod računanja ukupnog broja pojavljivanja jedinica u nizu do određene pozicije potrebno je pripaziti na određene situacije. Ako se tražena pozicija nalazi na mjestu u nizu jednakom $k \cdot l^2$, onda je broj pojavljivanja jedinica u podnizu jednak samo vrijednosti nadbloka, a ako se pozicija nalazi na mjestu u nizu $k \cdot l$, to znači da je vrijednost broja jedinica u podnizu dan ili samo nadblokom (ranije naveden slučaj) ili zbrojem vrijednosti nadbloka i bloka, te nema dijela niza koji nije obuhvaćen blokom/nadblokom za koji treba dodatno provjeravati vrijednosti znamenki. U ostalim slučajevima se vrijednostima zadnjeg popunjenog nadbloka i bloka pridodaje broj jedinica u dijelu niza od zadnjeg popunjenog bloka do pozicije do koje se traži izračun broja pojavljivanja jedinica u podnizu, i to je jedini dio u računanju kada je potrebno slijedno prolaziti kroz elemente niza prebrajajući pojavljivanje jedinica.

U nastavku je opisan postupak izračunavanja broja jedinica za primjer niza prikazanog slikom 2.11. Neka se želi izračunati broj pojavljivanja jedinica do pozicije 17. elementa niza (uključujući). Zadnji popunjeni nadblok moguće je pronaći formulom $indNadblok = \lfloor pozicija/l^2 \rfloor = \lfloor 17/9 \rfloor = 1$, a zadnji popunjeni blok formulom $indBlok = \lfloor pozicija/l \rfloor = \lfloor 17/3 \rfloor = 5$. Broj pojavljivanja jedinica u ostatku podniza računa se provjeravanjem broja jedinica u dijelu niza od pozicije $indBlok \cdot l + 1$ do tražene pozicije (uključujući). U ovom primjeru potrebno je provjeriti pojavljivanje jedinica u još dva elementa niza, 16. i 17. elementu, čime se dobiva vrijednost dodatnih jedinica $dodatno = 2$. Ukupan broj pojavljivanja jedinica u nizu do 17. elementa niza se izračunava kao ukupno $= SBS(indNadblok) + BS(indBlok) + dodatno = 5 + 1 + 2 = 8$.



Slika 2.11: Ispunjene vrijednosti u poljima BS i SBS

FM-indeks

FM-indeks je samostojeći indeks koji su 2000. godine u svom radu opisali i objavili Ferragina i Manzini. Općenito indeks je podatkovna struktura koja omogućuje učinkovito dohvaćanje podataka. Samostojeći indeks (engl. *self-index*) je struktura koja se stvara nad određenim tekstom te ga indeksira na način da je memorijski proporcionalna veličini komprimiranog teksta te omogućava efikasno dohvaćanje i prebrojavanje dijelova tog teksta (bez potrebe za dekompresijom cijelog teksta).

3.1 Originalna implementacija

FM-indeks count je implementacija FM-indeksa koja služi za pronalaženje broja pojavljivanja uzorka P u tekstu S . Općenito se FM-indeks temelji na Burrows-Wheeler transformaciji i sufisknom polju, ali kod izvedbe samo prebrojavanja, ne i dohvaćanja svih pojavljivanja (FM-indeks find), struktura sufisknog polja se može izostaviti. FM-indeks count je ustvari samo izvedba algoritma pretraživanja unatrag (engl. *backward search*) u kojemu se kreće s pretraživanjem od zadnjeg znaka uzorka P te ako uzorak postoji u tekstu, algoritam vraća koliko se puta on u tekstu ponavlja. Pronalaženje broja pojavljivanja uzorka u tekstu provodi se tako da se nad zadanim tekstom prvo stvori FM-indeks sa svojim strukturama OCC tablicom i C tablicom te se zatim koristeći stvorene tablice provodi prebrojavanje za zadani uzorak. U originalnoj implementaciji FM-indeksa [9], algoritam pretraživanja unatrag se provodi nad nizom znakova koji je dobiven iz originalnog teksta na koji su primjenjene različite operacije. Nad originalnim tekstom provedene su redom Burrows-Wheeler transformacija, *Move-To-Front* i *Run-length* kodiranje te stvaranje prefiksnog koda promjenjive duljine. Za provođenje algoritma potrebne su funkcije $C(c)$ i $Occ(c,i)$. $C(c)$ daje broj znakova u (originalnom) tekstu koji su abecedno prije znaka c uključujući i ponavljanje pojedinih znakova. $Occ(c,i)$ daje broj pojavljivanja znaka c u nizu $B[1,i]$, $i=1..|S|$, gdje je S originalni tekst, B niz dobiven transformacijama originalnog teksta, a znak c je bilokoji znak iz abecede originalnog teksta. Pokazano je [neka referenca] da brzina izvođenja funkcije $Occ(c,i)$ određuje brzinu izvođenja cijelog algoritma pretraživanja unatrag. U originalnoj implementaciji funkcija $Occ(c,i)$ se računa korištenjem transformiranog (sažetog) originalnog teksta te nekoliko dodatnih pomoćnih struktura.

(opisat te strukture? ako bude ugrubo bit će nejasno, ali sve objasniti će biti predugačko)

3.2 Naša implementacija

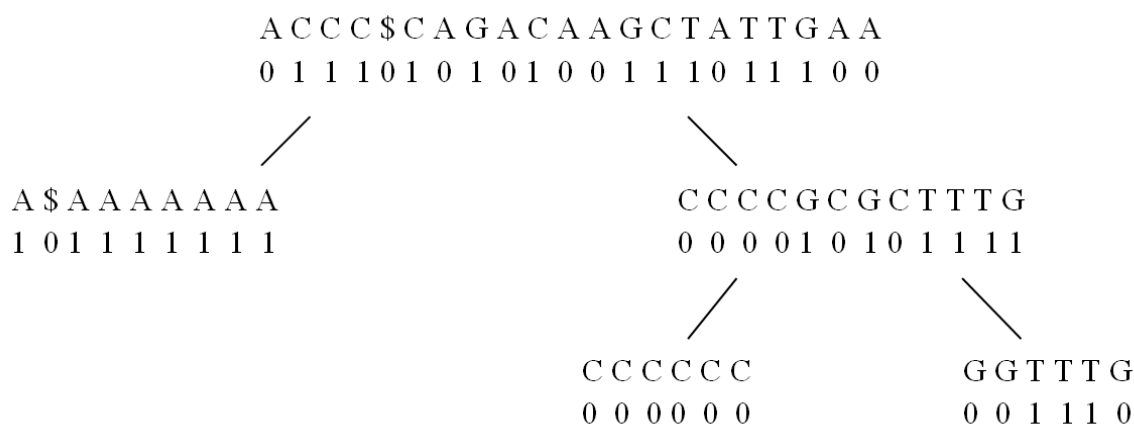
U ovoj implementaciji FM-indeksa koristi se algoritam pretraživanja unatrag i ranije spomenuta struktura C tablice na isti način kao i u originalnoj implementaciji, ali je funkcija $\text{Occ}(c,i)$ izvedena korištenjem wavelet stabla i RRR struktura čiji je princip objašnjen u ranijem poglavlju.

Prvi korak je dodavanje znaka \$ na kraj niza te stvaranje C tablice koja za svaki znak iz abecede ulaznog teksta sadrži informacije koliko je znakova abecedno manjih ispred tog znaka abecede, uključujući i ponavljanje znakova. Pretpostavimo da ulazni niz s nadodanim znakom kraja niza glasi *ACAAGATGCACAATGTCCCA\$*. Stvorena struktura (C tablica) izgledala bi ovako:

Tablica 3.1: C tablica

c	\$	A	C	G	T
C(c)	0	1	9	15	18

Sljedeći korak je provođenje Burrows-Wheeler transformacije nad zadanim tekstom korištenjem *multikey quick* sortiranja čime se iz niza *ACAAGATGCCAATGTCCCA\$* dobiva niz *ACCC\$CAGACAAGCTATTGAA*. Burrows-Wheeler transformacija i *multikey quick* sortiranje detaljno su opisani u prethodnom poglavlju. Na temelju dobivenog niza stvara se OCC tablica koja je u ovoj implementaciji predstavljena wavelet stablom. Na temelju izgrađenog stabla prikazanog slikom 3.1, uz korištenje RRR struktura koje se stvaraju za svaki list stabla (i služe za računanje broja jedinica u dijelu niza pojedinog lista), lako se računaju vrijednosti $Occ(c,i)$ koje su potrebne za algoritam pretraživanja unatrag. Struktura wavelet stabla i RRR struktura su detaljnije opisane u ranijim potpoglavljima.



Slika 3.1: Prikaz izgrađenog wavelet stabla za niz *ACCC\$CAGACAAGCTATTGAA*

Ovim dijelom implementacije završeno je stvaranje same strukture FM-indeksa te je još samo potrebno implementirati algoritam koji će obuhvatiti prebrojavanje pojavljivanja nekog podniza u nizu nad kojim je napravljen FM-indeks, tj. *Count* dio implementacije

projekta (*? malo čudno zvuči*). Za završni dio implementacije korišten je algoritam pretraživanja unatrag (engl. *backward search algorithm*). Algoritam je implementiran kao i u originalnoj implementaciji FM-indeksa [9], prema sljedećem pseudokodu:

Algorithm 1 Pretraživanje unatrag

```

Ulaz: P[0, p - 1] – zadani podniz
Izlaz: broj pojavljivanja podniza
i = p - 1;
c = P[i];
startPosition = C[c] + 1;
endPosition = C[c + 1];
for (i=i-1; i>=0; i--) do
    c = P[i];
    startPosition = C[c] + Occ(c, startPosition - 2) + 1;
    endPosition = C[c] + Occ(c, endPosition - 1);
end for
if endPosition >= startPosition then
    return endPosition - startPosition + 1;
else
    return 0;
end if

```

Ako se i dalje pretpostavi da se FM-indeks izgradio nad nizom *ACAAGATGCCAATGT-CCCA* u kojemu se želi pronaći broj pojavljivanja podniza *ATG*, algoritam pretraživanja unatrag se provodi prema sljedećim koracima:

```

i = 2;
c = 'G';
startPosition = 15 + 1 = 16;
endPosition = 18;

i = 1;
c = 'T';
startPosition = 18 + 1 + 1 = 20;
endPosition = 18 + 3 = 21;

i = 0;
c = 'A';
startPosition = 1 + 6 + 1 = 8;
endPosition = 1 + 8 = 9;

```

STOP

broj pojavljivanja = 9 - 8 + 1 = 2

3.2.1 Nedostaci implementacije u programskom jeziku Java

Implementacija ovog algoritma napravljena je u programskom jeziku Java. Iako Java kao programski jezik nudi mnoge pogodnosti, kao jednostavnu sintaksu, dobre popratne biblioteke i automatsko upravljanje memorijom, ipak postoje i određeni nedostaci ovakvog jezika. Možda najveći nedostatak Jave dolazi upravo od jedne predosti samog jezika a to je automatsko upravljanje memorijom. To znači da se programski jezik sam brine oko oslobađanja i zauzimanja memorije, što može biti problematično prilikom izvođenja aplikacije koje troše puno memorije. U tim slučajevima potrebno je ručno pozvati *garbage collector* kako bi oslobodio zauzetu memoriju, no to nažalost opet ima utjecaj na brzinu izvođenja, posebno ukoliko je takvih poziva više. Osim toga, Java virtualna mašina često zauzme više memorije nego joj je uistinu potrebno, što se jako dobro može vidjeti korištenjem alata za profiliranje. To svakako predstavlja problem ukoliko program prilikom izvođenja zauzima velike količine memorije, jer se one dodatno povećaju zbog tog praznog prostora kojeg zauzem Java virtualna mašina. Iako postoje naredbe kojima se može pokušati regulirati količina memorije koju će virtualna mašina smjeti zauzeti, kao i naredbe kojima bi se trebalo moći natjerati virtualnu mašinu da memoriju koju je zauzela, a ne koristi ju, vrati operacijskom sustavu, uočeno je kako je potrebno dobro podesiti parametre tih naredbi prilikom izvođenja kako bi se dobili što bolji rezultati. Osim toga, Java virtualni stroj sam po sebi zauzima dosta veliku količinu memorije (prilikom testiranja to je otprilike bilo oko 10MB), što svakako predstavlja još jedan nedostatak programskog jezika Java. Možda se memorija od 10MB ne čini kako velika količina memorije, posebice uzevši u obzir raspoloživu količinu memorije u današnjim računalima, no svejedno nije to ni zanemariva količina memorije, posebice ako se indeksiraju kraći znakovni nizovi.

Osim toga upitna je i brzina Java programskog jezika naspram jezika C/C++. Ovdje se neće ulaziti u detalje oko tog pitanja, jer različiti izvori nude različita mjerenja performansi. Programi koji su napisani u programskom jeziku Java obično postižu nešto lošije rezultate, no to sve ovisi o tome koliko su efikasno napravljene pojedine implementacije, kao i o problemu koji je rješavan.

section ili subsection??

Testiranja

Testiranja su obavljena na računalu s procesorom Intel Core i7 920 @ 2.66 GHz, s 6 GB RAM memorije i na operacijskom sustavu Windows 7. Razlog zašto testiranja nisu bila obavljena na Biolinuxu (ili nekoj drugoj Linux distribuciji) je taj što se Biolinux, na računalu koje se je koristilo za testiranja, pokreće u virtualnom stroju, pa je upitno kako bi to utjecalo na performanse izvođenja samog programa.

Za obavljanje ovih testiranja korištena su tri tipa tekstualnih datoteka. Prvi tip tekstualnih datoteka se je sastojao od nizova nukleotida i dodatnih znakova koji se još mogu pojaviti u takvim nizovima. Drugi tip tekstualnih datoteka sastojao se je od nizova znakova koji predstavljaju proteine. Posljednji tip tekstualnih datoteka koje su korištene sastojale su se od nizova slučajno generiranih znakova iz osnovnog ASCII skupa znakova. Prvi i drugi tip datoteka su preuzeti sa [referenca na pizza i chilli] te su ponešto prilagođene za obavljanje testiranja. Treći tip datoteka je bio generiran uz pomoć posebnog programa.

U ovom poglavlju pogledat ćemo performanse koje pruža implementirani FM-Index i to u tri kategorije: brzina izgradnje, brzina obavljanja *count* upita i memorijska potrošnja.

4.1 Vrijeme izgradnje FM-Indexa

Pogledajmo prvo performanse izgradnje FM-indexa. Ovo je možda i jedan od najbitnijih faktora prilikom ocjene koliko je neka implementacija dobra, pošto je izgradnja samog indeksa računalno veoma zahtjevna operacija. Kako bi rezultati koji će biti prikazani u ovom poglavlju bili što relevantniji, vrijednosti koje su prikazane u tablicama izračunate su kao prosjek od deset izgradnji FM-indeksa za svaku pojedinu veličinu datoteka. Osim toga, prilikom provođenja ovih eksperimenata nije bio pokrenut profiler, jer on dodatno usporava izvođenje programa, stoga su mjerenja za memorijsku potrošnju obavljena zasebno. Eksperimenti su ovaljni za svaki tip datoteke koji bio ranije spomenut i to za 9 različitih veličina takvih datoteka, od manjih (1MB), pa sve do većih (500MB). Osim toga, posebno su izdvojena vremena izgradnje BWT transformacije i Wavelet stabla, koji ipak sačinjavaju glavne građevne blokove FM-Indexa, pa je iz tog razloga dobro vidjeti koliko se mijenja i vrijeme izgradnje ovih struktura s promjenom veličine ulazne datoteke.

Pogledajmo prvo rezultate koji su dobiveni za datoteke koje su sadržavale nizove nukleotida. Tablica ?? prikazuje vremena izgradnje FM-Indexa nad tipom datoteka koje sadrže nukleotide. Dodatno su iscrtana tri grafa koji prikazuju kako se brzina izgradnje FM-Indexa i nekih njegovi djelova ponaša s povećanjem nizova nad kojima se te strukture izgrađuju. Tako graf ?? prikazuje ovisnost vremena izgradnje FM-Indexa u odnosu

na veličinu ulaznog niza, graf ?? prikazuje ovisnost algoritam izgradnje sufisknog stavla u odnosu na veličinu ulaznog niza i graf ref izgradnju Wavelet stabla u ovisnosti na veličinu ulaznog niza.

TABLICA NUKLEOTIDI

GRAF FMINDEX GRAF BWT GRAF WAVELET

Ukoliko malo proučimo podatke iz tablice i grafova, možemo vidjeti kako je složenost izgradnje indeksa linearno ovisna o veličini ulaznog niza. To je svojstvo koje smo i željeli postići, odnosno htjeli smo da nam je složenost izgradnje indeksa linearna. No svejedno vidimo kako je složenost izgradnje FM-Indexa za veće nizove veoma zahtjevan i dugotrajan proces te da za veće ulazne nizove može potrajati i po nekoliko minuta.

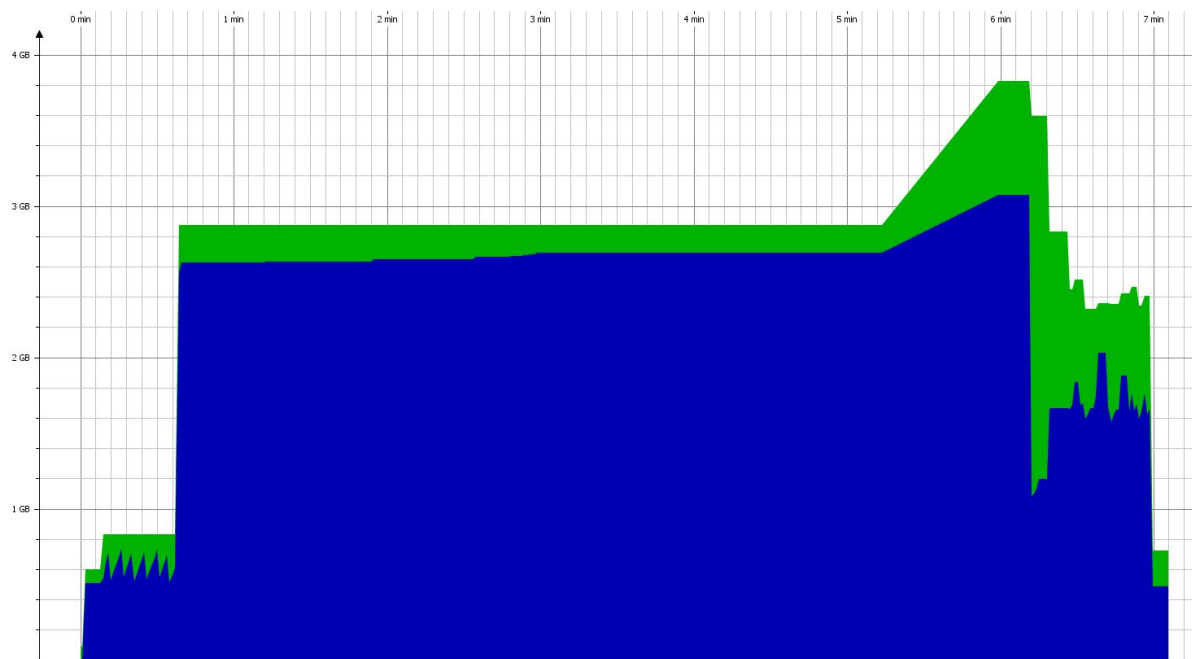
4.2 Vrijeme obavljanja *count* upita

Drugi važan parametar pomoću kojeg se može ocijeniti uspješnost implementacije FM-Indexa jest obavljanje *count* upita nad izgrađenim nizom.

4.3 Memorijsko zauzeće FM-indexa

Posljednji parametar kojeg možemo promatrati tijekom izrade FM-indeksa jest memorijsko zauzeće programa. U ovom poglavlju istaknut ćemo koliko je memorijsko zauzeće tokom izgradnje indeksa, kao i na kraju kada je indeks u potpunosti izgrađen. Osim toga, u ovom poglavlju pokazat će se kako Java virtualni stroj zauzima mnogo više memorije nego što je zaista potrebno za samo izvođenje algoritma, što predstavlja jedan veliki nedostatak.

Pogledajmo sada sliku ?? koja je preuzeta iz profilera koje predstavlja memorijsko zauzeće algoritma kroz vrijeme. Plavom bojom označena je memorija koju program, odnosno algoritam stvarno koristi za spremanje struktura, dok je zelenom bojom označena slobodna memorija koju je Java virtualni stroj dodatno zauzeo. Vidimo da cijelo vrijeme Java virtualni stroj zauzima mnogo više memorije nego što mu doista treba za rad. To je ogroman nedostatak pri izradi memorijski zahtjevnih algoritama kao što je ovaj, jer Java programski jezik ne omogućuje efikasno rukovanje memorijom.



Slika 4.1: Zauzeće memorije Java virtualnog stroja tijekom konstrukcije indeksa

Literatura

- [1] David J. Burrows, Michael; Wheeler. A block sorting lossless data compression algorithm. *Technical Report 124, Digital Equipment Corporation*, 1994.
- [2] Jon L. Bentley; Robert Sedgwick. Fast algorithms for sorting and searching strings. *SODA '97 Proceedings of the eighth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, 1997.
- [3] Ge Nong; Sen Zhang ; Wai Hong Chan. Linear suffix array construction by almost pure induced-sorting. *Data Compression Conference, 2009. DCC '09*, 2009.
- [4] Ge Nong; Sen Zhang ; Wai Hong Chan. Two efficient algorithms for linear time suffix array construction. *Computers, IEEE Transactions on*, 2011.
- [5] Pang Ko; Srinivas Aluru. Space efficient linear time construction of suffix arrays. *Journal of Discrete Algorithms*, 2003.
- [6] J. Vitter R. Grossi, A. Gupta. High-order entropy-compressed text indexes. *In Proceedings of the 14th annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 841–850, 2003.
- [7] S. Srinivasa Rao R. Raman, V. Raman. Succinct indexable dictionaries with applications to encoding k-ary trees and multisets. *SODA*, pages 233–242, 2002.
- [8] Gonzalo Navarro Francisco Claude. Practical rank/select queries over arbitrary sequences. 2009.
- [9] Giovanni Manzini Paolo Ferragina. Opportunistic data structures with applications. *Foundations of Computer Science, 2000. Proceedings. 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 390–398, 2000.