Colegiul Naţional de Informatică „ *Spiru-Haret* ” Suceava

Matrici

Referat la Matematică

Elev :

Profesor :

Anul şcolar: 2008 - 2009

CUPRINS

MATRICI

Definiţie. Se numeşte **matrice cu** *m* **linii şi** *n* **coloane** (sau de tip $m \times n$) un tablou cu *m* linii şi *n* coloane

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ale cărui elemente a_{ij} sunt numere complexe.

1.1. Tabel matriceal. Mulţimi de matrice.

Să considerăm următorul enunţ din domeniul economiei.
„Un depozit de materiale se aprovizionează eşalonat pe o perioadă de 4 luni cu un anumit produs după urmatorul plan:

- în prima lună se aprovizionează cu 100 de bucăţi, la preţul unitar de 3 000 unităţi monetare (u.m.).
- În a doua lună se aprovizionează cu 120 bucăţi la preţul unitar de 3 500 u.m.
- În luna a treia primeşte cu 10 bucăţi mai puţin decât în luna precedenentă, cu preţul pe unitate de produs de 3 200 u.m., iar în luna a patra comandă o cantitate dublă faţă de prima lună plătind 3 200 u.m. pe unitatea de produs."

Pentru ţinerea unei evidenţe cât mai clare, aceste date pot fi ordonate şi clasate în diverse moduri, astfel încât obţinerea unor informaţii legate de acest proces de aprovizionare să se realizeze cât mai eficient.

Astfel, datele de mai sus pot fi grupate într-un tabel de forma:

Luna	1	2	3	4
Cantitate	100	120	110	200
Preţ unitar	3 000	3 500	3 200	3 200

Într-un mod mai simplificat, aceste date pot fi reorganizate într-un tabel de forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 100 & 120 & 110 & 200 \\ 3000 & 3500 & 3200 & 32000 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 100 & 120 & 110 & 200 \\ 3000 & 3500 & 3200 & 32000 \end{pmatrix}$$

Un astfel de tabel se numeşte **tabel matriceal.**

Primul tabel matriceal este format din 3 linii şi 4 coloane (este de tipul 3 x 4), iar al doilea tabel matriceal este format din 2 linii şi 4 coloane (este de tipul 2 x 4). Daca se ia în considerare numai linia care conţine cantităţile achiyiţionate lunar, se obţine un tabel de forma (100 120 110 200) numit **tabel matriceal linie.**

Dacă se consideră numai datele care caracterizează fenomenul în luna a treia se obţine un tabel de forma $\begin{pmatrix} 3 \\ 110 \\ 3200 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} 110 \\ 3200 \end{pmatrix}$, numit **tabel matriceal coloană.**

Aşadar, prin organizarea unor date legate de un fenomen în asemenea tabele matriceale, se stabileşte de fapt o corespondenţă între poziţia ocupată de un număr din tabel şi valoarea acestuia.

Poziţia numărului din tabelul matriceal este uşor de identificat printr-o pereche ordonată de numere naturale (i, j) care arată că numărul se aflp pe linia i şi pe coloana j a tabelului.

Generalizarea unei astfel de corespondenţe, făcându-se abstracţie de natura materială a datelor folosite, conduce la introducerea unei noi noţiuni matematice.

Cazuri particulare

1) O matrice de tipul $1 \times n$ (deci cu o linie şi n coloane) se numeşte **matrice linie** şi are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

2) O matrice de tipul $m \times 1$ (cu m linii şi o coloană) se numeşte **matrice coloană** şi are forma

$$B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

3) O matrice de tip $m \times n$ se numeşte **nulă** (**zero**) dacă toate elementele ei sunt zero. Se notează cu O

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Dacă numărul de linii este egal cu numărul de coloane, atunci matricea se numeşte **pătratică**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sistemul de elemente $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ reprezintă **diagonala principală** a matricii A, iar suma acestor elemente $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ se numeşte **urma matricii** A notată $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}$. Sistemul de elemente $\begin{pmatrix} a_{1n} & a_{2\,n-1} & \dots & a_{n1} \end{pmatrix}$ reprezintă **diagonala secundară a matricii *A*.**

Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A se numeşte **urma matricei A** şi se noteaya **Tr (A).**

Mulţimea acestor matrici se notează $M_n(C)$. Printre aceste matrici una este foarte importantă aceasta fiind

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

şi se numeşte **matricea unitate** (pe diagonala principală are toate elementele egale cu 1, iar în rest sunt egale cu 0).

Egalitatea matricelor

Fie matricele A, B $\in M_{m,n}(C)$, A= $(a_{i\,j})_{mxn}$, B=$(b_{i\,j})_{mxn}$.

<u>Definiţie.</u>

- Matricele A şi B se numesc **matrice egale,** dacă $a_{i\,j} = b_{i\,j}$, pentru fiecare i $\in$ {1,2,…,m}, j $\in$ {1,2,...,n}.

Problemă rezolvată

Să se determine a,b,x,y,m $\in$ R astfel încât să aibă loc egalitatea de matrice A=B, pentru $A = \begin{pmatrix} a^2 + 5i & 2b + 1 \\ 2^x + 3^y & 2^x + 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 + mi & 7 \\ 31 & 6 \end{pmatrix}$.

<u>Soluţie</u>

Din egalitatea $a_{11}=b_{11}$ rezultă $a^2 + 5i = 1 + mi$. Aplicând egalitatea a două numere complexe se obţine $a^2 = 1 \;şi\; m = 5$, deci a $\in$ {-1,1}, m=5.

Din egalitatea $a_{21}=b_{21}$, rezultă 2b+1=7 şi b=3 . Egalităţile $a_{21}=b_{21}$ şi $a_{22}=b_{22}$ conduc la relaţiile $2^x + 3^y = 31 \;şi\; 2^x + 2 = 6$. Se obţine x=2 si y=3.

Observaţii

1. Folosind proprietăţile relaţiei de egalitate pe mulţimea C, relaţia de egalitate pe mulţimea $M_{m,n}(C)$ are următoarele proprietăţi:
   - Dacă A=A, $\forall$ A $\in M_{m,n}(C)$ **(proprietatea de reflexivitate)**.
   - Dacă A=B, atunci B=A, $\forall$ A, B $\in M_{m,n}(C)$ **(proprietatea de simetrie).**
   - Daca A=B şi B=c, atunci A=C, $\forall$ A,B,C $\in M_{m,n}(C)$ **(proprietatea de tranzitivitate).**
2. Dacă matricele A,B snu sunt egale, se scrie A $\neq$ B.

1.2.1. **Adunarea matricelor**

Definiţie. Fie $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n}(C)$. Matricea C se numeşte **suma** matricelor *A, B* dacă: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $(\forall)\ i=\overline{1,m}$, $(\forall)\ j=\overline{1,n}$.

Observaţii

1) Două matrici se pot aduna dacă **sunt de acelaşi tip**, adică dacă au acelaşi număr de linii şi acelaşi număr de coloane, deci $A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(C)$.

2) Explicit adunarea matricelor *A, B* înseamnă:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplu: Să se calculeze *A + B* pentru:

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

R. 1. Avem

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & -1+5 & 2-3 \\ 3+10 & 0+1 & 1+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 13 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Avem

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.=\begin{pmatrix} 1+0 & 1+1 \\ -1+1 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proprietăţi ale adunării matricelor

$\mathbf{A_1}$ **(Asociativitatea adunării).** Adunarea matricilor este **asociativă**, adică:

$$(A+B)+C=A+(B+C),\ (\forall)A, B, C \in \mathrm{M}_{m,n}(C).$$

$\mathbf{A_2}$ **(Comutativitatea adunării).** Adunarea matricelor este **comutativă**, adică:

$$A+B=B+A,\ (\forall)A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(C).$$

$\mathbf{A_3}$ **(Element neutru).** Adunarea matricelor admite matricea nulă ca **element neutru**, adică $\exists\ O_{m,n} \in \mathrm{M}_{m,n}(C)$ astfel încât $A+O_{m,n}=A,\ (\forall)A \in \mathrm{M}_{m,n}(C)$.

$\mathbf{A_4}$ **(Elemente opuse).** Orice matrice $A \in \mathrm{M}_{m,n}(C)$ are un opus, notat $-A$, astfel încât

$$A+(-A)=O_{m,n}.$$

1.2.2. Înmulţirea matricelor cu scalari

Definiţie. Fie $\lambda \in C$ şi $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(C)$. Se numeşte **produsul dintre scalarul $\lambda \in C$ şi matricea** A, matricea notată $\lambda A \in M_{m,n}(C)$ definită prin $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Obs.: A înmulţi o matrice cu un scalar revine la a înmulţi toate elementele matricii cu acest scalar.

Deci $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$.

Exemplu Fie $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 5 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $6A = \begin{pmatrix} 3 & -18 & 30 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Proprietăţi ale înmulţirii matricelor cu scalari

S₁ $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $(\forall)\ \lambda, \mu \in C, (\forall)\ A \in M_{m,n}(C)$;

S₂ $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $(\forall)\ \lambda \in C, (\forall)\ A, B \in M_{m,n}(C)$;

S₃ $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $(\forall)\ \lambda, \mu \in C, (\forall)\ A \in M_{m,n}(C)$;

S₄ $1 \cdot A = A, 1 \in C, (\forall)\ A \in M_{m,n}(C)$;

1.2.3. Înmulţirea matricelor

Definiţie. Fie $A = (a_{ki}) \in M_{m,n}(R)$, $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(R)$. **Produsul dintre matricele** A şi B (**în aceasta ordine**), notat AB este matricea $C = (c_{kj}) \in M_{m,p}(R)$ definită prin

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij},\ (\forall)\ k = \overline{1,m}, (\forall)\ j = \overline{1,n}.$$

Observaţii

1) Produsul AB a două matrici nu se poate efectua întotdeauna decât dacă $A \in M_{m,n}(R)$, $B \in M_{n,p}(R)$, adică **numărul de coloane ale lui** A **este egal cu numărul de linii ale lui** B, când se obţine o matrice $C = AB \in M_{m,p}(R)$.

2) Dacă matricile sunt pătratice $A,\ B \in \mathrm{M}_n(R)$ atunci are sens întotdeauna atât AB cât şi BA, iar, în general, $AB \neq BA$ adică înmulţirea matricelor **nu este comutativă**.

Proprietăţi ale înmulţirii matricelor

$\mathbf{I_1}$ **(Asociativitatea înmulţirii). Înmulţirea matricelor este asociativă**, adică

$$(AB)C = A(BC), (\forall)A \in \mathrm{M}_{m,n}(C), (\forall)B \in \mathrm{M}_{n,p}(C), (\forall)C \in \mathrm{M}_{p,s}(C).$$

$\mathbf{I_2}$ **(Distributivitatea înmulţirii în raport cu adunarea). Înmulţirea matricelor este distributivă în raport cu adunarea matricelor**, adică

$(A+B)C = AC + BC,\quad C(A+B) = CA + CB,\quad (\forall)A,\ B,\ C$ matrici pentru care au sens operaţiile de adunare şi înmulţire.

$\mathbf{I_3}$ Dacă $I_n \in \mathrm{M}_n(C)$ este matricea unitate, atunci

$$I_n A = A I_n = A,\ (\forall)A \in \mathrm{M}_n(C).$$

Se spune că I_n este **element neutru** în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

1.2.4. Puterea unei matrice pătratice

Proprietatea de asociativitate a înmulţirii matricelor pătratice permite definirea puterii cu exponent natural a unei matrice pătratice.

Fie A $\in M_n$ (C). Definim $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A * A$. *Pentru* $n \in \mathrm{N}^*$ se defineşte puterea n a matricei A prin $A^n = A^{n-1} * A$.

Exemplu:

Daca A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ atunci :

$$A^2 = A * A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 * A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 * A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$$

1.2.5 Transpusa unei matrice

Definiţii:

- Fie matricea A=$(a_{ij})_{mxn}$. Se numeşte **transpusa** matricei A, matricea ${}^tA=(b_{kl})_{nxm}$, unde $b_{kl}=a_{lk}$, pentru oricare k$\in\{1,2,...,n\}$ *şi* $l\in\{1,2,...,m\}$.
- Operaţia prin care fiecărei marice A$\in M_{m,n}(C)$ i se asociază matricea transpusă ${}^tA\in M_{n,m}(C)$ se numeşte **operaţia de tramsăinere a matricelor.**

Observaţii:

1. Matricea transpusă ${}^tA$ se obţine din matricea A prin schimbarea liniilor în coloane şi a coloanelor în linii.
2. Dacă ${}^tA\in M_n(C), atunci\ {}^tA\in M_n(C)\ şi\ Tr(A)=Tr({}^tA),$ unde Tr(A) este urma matricei A.

APLICAŢII

<u>*1.*</u> Manual

Să se determine numerele reale *x*, *y*, *z* astfel încât să aibă loc egalitatea de matrici, în cazurile

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2x-3y \\ -7x+6y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-x-11 \\ 19 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 2x-3y=y-x-11 \Rightarrow 3x=4y-11 \Rightarrow x=\dfrac{4y-11}{3} \\ -7x+6y=19 \Rightarrow -7\cdot\dfrac{4y-11}{3}+6y=19 \Rightarrow 77-28y+18y=57 \Rightarrow 10y=20 \Rightarrow y=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{4y-11}{3} \\ \text{dar} \quad y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{8-11}{3} \Rightarrow x=-1$$

b) $\begin{pmatrix} 2x & 3x+y \\ x-7y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+3 & 8-y \\ -5 & 4y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=y+3 \Rightarrow 2\cdot 2y=y+3 \Rightarrow 3y=3 \Rightarrow y=1 \\ 3x+y=8-y \\ x-7y=-5 \\ 2x=4y \Rightarrow x=2y \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2y \\ \text{dar} \quad y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=2$$

c) $\begin{pmatrix} y+3x & -1 \\ 3 & y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+3x=x^2+1 \Rightarrow 6+x+3x=x^2+1 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \\ -1=-1 \\ 3=3 \\ y-x=6 \Rightarrow y=6+x \end{cases}$$

$$x^2-4x-5=0 \Rightarrow x^2-5x+x-5=0 \Rightarrow x(x-5)+(x-5)=0 \Rightarrow (x-5)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=5$$

$$\Rightarrow x_2=-1$$

I. dacă $x=5$, atunci $y=11$

II. dacă $x=-1$, atunci $y=5$

d) $\begin{pmatrix} xy & 0 \\ yz+yx & zx-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xz-5 & 0 \\ 4 & -zy \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy=-xz-5 \Rightarrow x(y+z)+5=0 \\ 0=0 \\ yz+yx=4 \Rightarrow y(x+z)-4=0 \Rightarrow y\left(x+\dfrac{3}{x+y}\right)=4 \Rightarrow y\left(\dfrac{x^2+xy+3}{x+y}\right)=4 \Rightarrow x^2y+y^2x+3y=4x+4y \\ zx-3=-zy \Rightarrow z(x+y)-3=0 \Rightarrow z=\dfrac{3}{x+y} \end{cases}$$

2. Să se calculeze $A+B$ în cazurile:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+2 & -3+4 \\ 0+(-5) & 4+(-3) \end{pmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $A=\begin{pmatrix} 1+i & -i & 3i \\ 0 & -1-i & i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1-3i & 2+i & 1 \\ i & 1+i & -i \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+i+(-1-3i) & -i+2+i & 3i+1 \\ 0+i & -1-i+1+i & i+(-i) \end{pmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} -2i & 2 & 3i+1 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Se consideră matricile

$$A=\begin{pmatrix} 2 & m & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2m & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} n & m & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 6 & -3 \\ -1 & -5 & 6 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -m & 2 \\ p & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine *m*, *n*, *p* astfel încât $A+B=C$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+n=-1 \Rightarrow n=-3 \\ m+m=-4 \Rightarrow 2m=-4 \Rightarrow m=-2 \\ 2m+6=-m \\ 2-1=p \Rightarrow p=1 \end{cases}.$$

Deci $\begin{cases} n=-3 \\ m=-2 \\ p=1 \end{cases}$

4. Se consideră matricile $A, B \in \mathbf{M}_{2,3}(C)$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & i & -1\\ 0 & 2 & 3i\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-i & 1 & 0\\ 1 & i & i+1\end{pmatrix}.$$

Să se calculeze: $3A-2iB$, $iA+2B$.

$$3A-2iB=3\begin{pmatrix}1 & i & -1\\ 0 & 2 & 3i\end{pmatrix}-2i\begin{pmatrix}-i & 1 & 0\\ 1 & i & i+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3i & -3\\ 0 & 6 & 9i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -2i & 0\\ -2i & 2 & 2-2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & i & -3\\ -2i & 8 & 7i+2\end{pmatrix}$$

$$iA+2B=i\begin{pmatrix}1 & i & -1\\ 0 & 2 & 3i\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-i & 1 & 0\\ 1 & i & i+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & -1 & -i\\ 0 & 2i & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2i & 2 & 0\\ 2 & 2i & 2i+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i & 1 & -i\\ 2 & 4i & 2i-1\end{pmatrix}$$

5. Calculaţi produsele de matrici $A\cdot B$, unde

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}6+2+1 & 2+1+0\\ 9+0+1 & 3+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 3\\ 10 & 3\end{pmatrix}$$

b) $A=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ -2i & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}i & -3i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot i+i\cdot 0 & -3i\cdot 1+i\cdot 1\\ -2i\cdot i+0\cdot 0 & -2i\cdot(-3i)+0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & -2i\\ 2 & -6\end{pmatrix}$$

d) $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 6\\ 5 & 2 & -7\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2\\ -4\\ 5\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}-5\\52\\-33\end{pmatrix}$$

e) $A=\begin{pmatrix}3&4&9\\5&-1&6\\5&3&5\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}5&6&4\\8&9&7\\-4&-5&-3\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}11&9&13\\-22&-27&-17\\29&32&26\end{pmatrix}$$

6. Să se calculeze $f(A)$, dacă:

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$; $f(X)=X^2-5X+7I_2$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2\\4&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}f(A)&=\begin{pmatrix}-1&-2\\4&-1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}-1&-2\\4&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&5\\-10&-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}-6&3\\-6&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}1&3\\-6&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

7. Fie $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n\in N^*$.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

Inducţie matematică $P(k) \to P(k+1)$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(A)}$$

Deci $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

8. Calculaţi determinanţii de ordinul doi:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 3 + 2 = 5$

2) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = 2 - 3 = -1$

3) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -3 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3} \cdot \left(-\sqrt{3}\right) - (-3) \cdot 1 = -3 + 3 = 0$

9. Calculaţi determinanţii de ordinul trei:

1)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot (-2) - \left[(-2) \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 \cdot 3\right] =$$

$$= -6 - 4 - 60 - [8 + 10 - 18] =$$
$$= -70$$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 0 \cdot 3 \cdot 0 + 5 \cdot 4 \cdot (-5) - \left[(-5) \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \cdot 6\right] =$

$$= 36 + 0 - 100 - [0 + 24 + 0] =$$
$$= -64 - 24 =$$
$$= -88$$

3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \cdot (-3) - \left[(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3\right] =$$

$$= -1-8-27-[-6+6+6] =$$
$$= -36-6 =$$
$$= -42$$

10. Calculaţi determinanţii următori:

1) $$\begin{vmatrix} a+d & b+d & c+d \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & d & d \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + d\cdot 0 = 0$$

2) $$\begin{vmatrix} a+b & b-a & b \\ b+c & c-b & c \\ c+a & a-c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -a & b \\ b & -b & c \\ c & -c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & b \\ c & c & c \\ a & a & a \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} a & a & b \\ b & b & c \\ c & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & b \\ c & c & c \\ a & a & a \end{vmatrix} = -1\cdot 0 + 0 = 0$$

11. Să se rezolve ecuaţiile:

1) $$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + x\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + x\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2-x(x-x^2)+x(x^2-x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2-x^2+x^3+x^3-x^2=0 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-2x^2-x^2+1=0 \Leftrightarrow 2x^2(x-1)-(x^2-1)=0 \Leftrightarrow 2x^2(x-1)-(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x^2-x-1)=0 \Rightarrow (x-1)=0 \Rightarrow x_1=1$$

$$\Rightarrow 2x^2-x-1=0 \Rightarrow \Delta = 1+8=9 \Rightarrow x_2=1$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$$

Deci $x \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$.

12. Să se rezolve ecuaţiile:

1) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$0\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + x\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0-\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}-x\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0-[(x\cdot 0\cdot 0+1\cdot 1\cdot 1+1\cdot x\cdot 1)-(1\cdot 0\cdot 1+1\cdot 0\cdot 1+x\cdot 1\cdot x)]+[x\cdot 0\cdot x+0\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1\cdot 1-(1\cdot x\cdot 1+1\cdot x\cdot 1+0\cdot 0\cdot 1)]-$$

$$-x[(x\cdot x\cdot x+0\cdot 0\cdot 1+1\cdot 1\cdot 1)-(1\cdot x\cdot 1+1\cdot 0\cdot x+1\cdot 0\cdot x)]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x+1-x^2)+(1-2x)-x(x^3+1-x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1-2x+1-x^4-x+x^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^4+2x^2-4x=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2+4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^3-2x+4)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\Rightarrow x^3-2x+4=0$$

13. Fie $A, B \in \mathbf{M}_3(R)$ pentru care $\det(A)=\det(B)=\det(A+B)=\det(A-B)=0$. Să se arate că $\det(xA+yB)=0$, $(\forall)\ x, y \in R$.

$$\det(xA+yB)=P(x,y)=\lambda_1 x^3+\lambda_2 x^2 y+\lambda_3 xy^2+\lambda_4 y^4=0$$

Pentru $x=0$ şi $y=1$

$$P(0,1)=\det(B)=0 \Rightarrow \lambda_4=0$$

Pentru $x=1$ şi $y=0$

$$P(1,0)=\det(A)=0 \Rightarrow \lambda_1=0$$

Pentru $x=1$ şi $y=1$

$$P(1,1)=\det(A+B)=0 \Rightarrow \lambda_2+\lambda_3=0$$

Pentru $x=1$ şi $y=-1$

$$P(1,-1)=\det(A-B)=0 \Rightarrow \lambda_2-\lambda_3=0$$

$$\Rightarrow \lambda_2=\lambda_3=0$$

Deci $\det(xA+yB)=0$

<u>2.</u> Bacalaureat

1. Să se determine matricea X din ecuaţia

$$3X+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3X=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 14 & 8 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 5 & 11 \\ -1 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 6 & 9 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. a) Găsiţi matricea $X \in \mathbf{M}_2(R)$ astfel încât

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Să se determine $m \in R$ astfel încât sistemul următor să fie compatibil şi apoi rezolvaţi-l:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -1 \\ 3x + y = m \end{cases}$$

a) $X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \cdot 1 + y \cdot 0 & x \cdot 2 + y \cdot 1 \\ 2 \cdot z + t \cdot 0 & z \cdot 2 + t \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 2x + y \\ 2z & 2z + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \\ 2x + y = 1 \Rightarrow 6 + y = 1 \Rightarrow y = -5 \\ 2z + t = 4 \Rightarrow t = 4 \end{cases}$$

Deci $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -1 \\ 3x + y = m \end{cases}$

$x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$

$$x-2y=-1 \Rightarrow 1-y-2y=-1 \Rightarrow -3y=-2 \Rightarrow y=\frac{2}{3}$$

$$x=1-y=1-\frac{2}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$3x+y=m \Rightarrow 3\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=m \Rightarrow m=1+\frac{2}{3} \Rightarrow m=\frac{5}{3}$$

3. a) Fie matricea $A \in \mathbf{M}_2(R)$; $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$. Să se calculeze A^2 şi A^3 şi apoi să se determine A^n, $n \in N^*$ în funcţie de n.

b) Să se afle x, y, u, v, numere reale astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+a\cdot 0 & a\cdot 1+a\cdot 1 \\ 0\cdot 1+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2a\cdot 0 & a\cdot 1+2a\cdot 1 \\ 0\cdot 1+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inducţie matematică $P(k) \rightarrow P(k+1)$

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+na\cdot 0 & a\cdot 1+na\cdot 1 \\ 0\cdot 1+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(A)}$$

Deci $A^n=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+u & y+v \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+u=1 \Rightarrow x=0 \\ y+v=0 \Rightarrow y=-1 \\ u=1 \\ v=1 \end{cases}$$

Deci $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. a) Să se determine x, y, u, v, astfel încât:

$$\begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 3v & 1-2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Să se detrmine matricea A astfel încât:

$$2A + \begin{pmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 11 \\ 12 & 1 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 21 & 4 \end{pmatrix}.$$

a)

$$\begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 3v & 1-2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y & -x \\ -3v & 2u-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x-y & y-x \\ u+1-3v & v+2u-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -(x+y) = -3 \Rightarrow x+y=3 \\ y-x=1 \\ u-3v+1=-8 \\ 2u+v-1=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y+y-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=4 \\ x=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u-3v+1=-8 \\ 2u+v-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3v-9 \\ 2(3v-9)+v=3 \Rightarrow 7v=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3 \\ u=0 \end{cases}$$

b) $2A + \begin{pmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 11 \\ 12 & 1 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 21 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 13 \\ 16 & 22 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 13 \\ 16 & 22 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 & 5 \\ -6 & -12 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 18 \\ 10 & 10 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

5. Să se rezolve ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-a)\left[(x-a)^3 - 0\right] = 0 \Rightarrow (x-a)^4 = 0 \Rightarrow x_{1,2,3,4} = a$$

6. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$ să se calculeze determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2 \\ x_1x_2x_3 = -17 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$$

$$x_1^3 - 2x_1^2 + 2x_1 + 17 = 0$$

$$x_2^3 - 2x_2^2 + 2x_2 + 17 = 0$$

$$\underline{x_3^3 - 2x_3^2 + 2x_3 + 17 = 0} \quad (+)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1 + x_2 + x_3) - 51 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2(2-2) - 2\cdot 2 - 51 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -55$$

$$d = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 3\cdot(-17) + 55 \Rightarrow \underline{d = 4}$$

7). Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^4}$

f(x) = (x – 1)(x – 3)(x – 4)(x – 7)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^4} = \frac{x^4 + ...}{x^4} = 1$$

8). Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}, dacă\ f(x) = x^2 + x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + x + x + 1} = 1$$

9). Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2 - x}$

f(x) =(x – 1)arcsin x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2 - x} = \frac{(x-1)\arcsin x}{(x-1)} = 1$$

3. Bacalaureat 2009

1).

Fie matricele $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Definim matricele** $A = X \cdot Y^t$ şi $B(a) = aA + I_3$, unde $a \in \mathbb{R}$ şi Y^t este transpusa matricei Y.

a) **Să se arate că matricea** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$.

b) **Să se calculeze determinantul matricei** A.

c) **Să se arate că matricea** $B(a)$ este inversabilă, oricare ar fi $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

a) $A = X \cdot Y^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$;

b) $\det A = -36 - 36 - 36 + 36 + 36 + 36 = 0$;

c) Obținem $B(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 2a & -3a \\ 2a & 4a+1 & -6a \\ 3a & 6a & -9a+1 \end{pmatrix}$. Trebuie să aflăm dacă $\exists b \in \mathbb{C}$ astfel încât $B(a) \cdot B(b) = I_3$. Prin calcul se obține că $B(a) \cdot B(b) = B(a + b - 4ab)$; $I_3 = B(0)$; $a + b - 4ab = 0$, $b = \frac{a}{4a-1}$. Deci B este inversabilă $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

2).

Fie matricea $A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & x_k & x_k^2 \\ -2 & x_k^2 & x_k \end{pmatrix}$, cu $k \in \{0, 1, 2\}$. $x_0 = 1$ şi x_1, x_2 **sunt** soluțiile ecuației $x^2 + x - 2 = 0$.

a) Să se calculeze determinantul matrice $A(0)$.

b) Să se determine matricea $A(1) + A(2)$.

c) Să se calculeze suma elementelor matricei $A(k)$, pentru fiecare $k \in \{0, 1, 2\}$.

a) $\det A(0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & x_0 & x_0^2\\ -2 & x_0^2 & x_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$.

b) $x^2+x-2=0,\ x^2+2x-x-2=0,\ (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-2$.

$$A(1)+A(2)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & 4\\ -2 & 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -4 & -1 & 5\\ -4 & 5 & -1\end{pmatrix}.$$

3).

Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ și matricele $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $B^2=3B$, unde $B^2=B\cdot B$.

b) Să se arate că $mI_3+nB\in G$, oricare ar fi $m,n\in\mathbb{Z}$.

c) Să se arate că, dacă $A\in G$ și $A^2=O_3$, atunci $A=O_3$.

a) $B^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}=3B$.

b) $mI_3+nB=\begin{pmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n & n & n\\ n & n & n\\ n & n & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+n & n & n\\ n & m+n & n\\ n & n & m+n\end{pmatrix}\in G$.

Notăm $b=n, a=m+n\in\mathbb{Z}\Rightarrow mI_3+nB\in G$.

c) $A^2=\begin{pmatrix}a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2\\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2\\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2\end{pmatrix}$; Dacă $A_2=O_3$, atunci $a^2+2b^2=0 \Leftrightarrow$

$a=b=0$; deci și $2ab+b^2=0$. Rezultă că $A=O_3$.

4).

În mulțimea $M_3(\mathbb{Z}_8)$ fie matricele $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{5}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{0}\\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{0}\\ \hat{3} & \hat{7} & \hat{5}\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

Se notează $X^2=X\cdot X$ pentru $\forall X\in M_3(\mathbb{Z}_8)$.

a) Să se arate că $A^2=I_3$.

b) Să se rezolve ecuația matricială $A\cdot X=I_3$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_8)$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{9} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = I_3$.

b) $AX = I_3$, adică $X = A^{-1} \cdot I_3 = A^{-1}$. Cum $A^2 = I_3$ avem $A \cdot A = I_3$, de unde $A^{-1} = A$, deci $X = A$.

c) $B - A = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{7} & \hat{0} \end{pmatrix}$; $(B-A)^2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{7} & \hat{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{7} & \hat{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{6} & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

5).

Se consideră determinantul $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$, unde a este număr real.

a) Să se calculeze valoarea determinantului $D(9)$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(a) = 0$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(3^x) = 0$.

a) $D(9) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 9 & 9^2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 \cdot 2 = 96$.

b) $D(a) = 0$ dacă $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = 0$. Avem $2a^2 - 8a + 6 = 0$, $2(a-1)(a-3) = 0$.

Se obţin soluţiile $a_1 = 1$ şi $a_2 = 3$.

c) $D(3^x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 3^x & 3^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3^2 - 1 \\ 1 & 3^x - 1 & 3^{2x} - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3^x - 1 & 3^{2x} - 1 \end{vmatrix} = 2(3^{2x} - 1) - 8(3^x - 1) =$

$= 2(3^x - 1)(3^x + 1 - 4) = 2(3^x - 1)(3^x - 3)$. $D(3^x) = 0$ dacă $3^x = 1$ sau $3^x = 3$, adică $x = 0$ sau $x = 1$.

7).

Fie determinantul $D(a,b,x) = \begin{vmatrix} 1 & x & ab \\ 1 & a & bx \\ 1 & b & ax \end{vmatrix}$, unde a, b şi x sunt numere reale.

a) Să se calculeze $D(1, 1, 0)$.

b) Să se demonstreze că $D(a, a, x)$ nu depinde de numărul real x.

c) Să se rezolve ecuaţia $D(a,b,x) = 0$, unde a, b sunt numere reale distincte.

a) $D(1,\ 1,\ 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$.

b) $D(a,\ a,\ x) = \begin{vmatrix} 1 & x & a^2 \\ 1 & a & ax \\ 1 & a & ax \end{vmatrix} = 0$, deoarece linia a II-a este egală cu linia a III-a.

c) $D(a, b, x) = \begin{vmatrix} 1 & x & ab \\ 0 & x-a & -b(x-a) \\ 0 & x-b & -a(x-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & -b(x-a) \\ x-b & -a(x-b) \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & -a \end{vmatrix} =$

$=(x-a)(x-b)(b-a)$; $(x-a)(x-b)(b-a) = 0$ dacă $x = a$ sau $x = b$ $(a \neq b)$.

8).

Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $a = -1,\ b = 0$ şi $c = 1$, să se calculeze determinantul Δ.

b) Să se arate că $\Delta = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = -1,\ b = 0,\ c = 1$, obținem $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$.

b) $\Delta \overset{l_1+l_2+l_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} =$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

c) Din **b)**, ecuația devine: $(2^x+1+1)(2^{2x}+1+1-2^x-2^x-1)=0$;

$(2^x+2)(2^{2x}-2\cdot 2^x+1)=0$. Cum $2^x+2\neq 0$, atunci $2^{2x}-2\cdot 2^x+1=0$. Notăm $2^x=t$ şi obținem $t^2-2t+1=0$; $t_1=t_2=1$; $2^x=1$, de unde $x=0$.

9).

a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{2008}-1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2008}+1 \end{vmatrix}$.

b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-4x+2=0$.

c) Fie matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3+A^2+A=O_3$, unde $A^2=A\cdot A$ și $A^3=A^2\cdot A$.

a) $d=(\sqrt{2008}-1)(\sqrt{2008}+1)+1=2008$.

b) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix}=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4^2-2\cdot 2=12$, deoarece, conform relațiilor lui Viéte, $x_1+x_2=4$ și $x_1\cdot x_2=2$.

c) $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; deci $A^3+A^2+A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=O_3$.

10).

Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3-2x=0$.

a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

b) Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

c) Să se calculeze valoarea determinantului d.

a) Din relațiile lui Viéte avem $x_1+x_2+x_3=0$.

b) Din relațiile lui Viéte avem: $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-2$. Avem $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=4$.

c) $d=3x_1x_2x_3-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$. Din relațiile lui Viéte avem $x_1x_2x_3=0$ și $x_1+x_2+x_3=0$. Cum x_1,x_2 și x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3-2x=0$ avem: $x_1^3-2x_1=0$, $x_2^3-2x_2=0$, $x_3^3-2x_3=0$. Adunând obținem: $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2(x_1+x_2+x_3)=0$. Rezultă că $d=0$.

<u>4).</u> Olimpiada

O1). Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}} y \geq 1 \end{cases}$$

Rezolvare:

Condiţii de existenţă: x,y$\in \mathbf{R}^*_+$

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} y = 2 - \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}} y \geq 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x\left(2 - \log_{\frac{1}{2}} x\right) \geq 1 \Rightarrow 2\log_{\frac{1}{2}} x - \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 1 \geq 0$$

Ecuaţia ataşată: $-\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{2}} x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{-2}{-2} = 1$

$\log_{\frac{1}{2}} x$	**1**
$-\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{2}} x - 1$	- - - - - - - - **0** - - - - - -

$$-\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{2}} x - 1 \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

Deci $x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{3}$

O2) Să se găsească valorile lui x astfel încât:

$$\log_2(x+1) + \log_3(x+1) + \ldots + \log_n(x+1) + n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \ldots\left(\frac{1}{n}\right)^x$$

Răspuns:

Se observă că **x=0** este soluţie

$$\underbrace{\log_2(x+1)}_{0} + \underbrace{\log_3(x+1)}_{0} + \ldots + \underbrace{\log_n(x+1)}_{0} + n - 1 = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n-1 ori} \Rightarrow n - 1 = n - 1 (A)$$

Se consideră $f(x) = \log_2(x+1) + \log_3(x+1) + ... + \log_n(x+1) + n - 1$ şi

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + ...\left(\frac{1}{n}\right)^x$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{f(x) este strict crescătoare pe } \mathbf{R} \\ \text{g(x) este strict descrescătoare}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\mathbf{x=0} \text{ este soluţie unică a ecuaţiei} \\ \text{pe } \mathbf{R}\end{array}$$

O3) Fie a$\in$R. Să se rezolve în R ecuaţia: $\left(a^x\right)^{2x} = 4$

Rezolvare:

$\left(a^x\right)^{2x} = 4 \Rightarrow a^{2x^2} = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

O4) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\log_3 x + \log_2 y = 2 \\ 3^x - 2^y = 23\end{cases}$$

Rezolvare:

Condiţii de existenţă: x,y$\in \mathbf{R}^*_+$

Observăm că $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ este soluţie a sistemului

Verificare:

$\log_3 x + \log_2 y = 1 + 1 = 2$

$3^3 - 2^2 = 27 - 4 = 23$

Cazul 1 x$\in$(0;3)

$$\begin{cases}\log_3 x < 1 \\ \log_3 + \log_2 y = 2\end{cases} \Rightarrow \log_2 y > 1 \Rightarrow \log_2 y > 2^2 \Rightarrow y > 2(1)$$

$$\begin{cases}3^x < 27 \\ 3^x - 2^y = 23\end{cases} \Rightarrow 2^y < 4 \Rightarrow y < 2(2)$$

Din relaţiile (1) şi (2)→contradicţie→nu există soluţii pentru **x$\in$(0;3) (3)**

Cazul 2 x$\in$(3;+∞)

$$\begin{cases}\log_3 x > 1 \\ \log_3 x + \log_2 y = 2\end{cases} \Rightarrow \log_2 y < 1 \Rightarrow \log_2 y < 2^2 \Rightarrow y < 2(1)$$

$$\begin{cases}3^x > 27 \\ 3^x - 2^y = 23\end{cases} \Rightarrow 2^y > 4 \Rightarrow y > 2(2)$$

Din relaţiile (1) şi (2)→contradicţie→nu există soluţii pentru **$x \in$ (3;+∞) (4)**

Din relaţiile (3) şi (4)→ecuaţia are soluţie unică $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

O5) Să se rezolve ecuaţia:
$4^x+9^x+25^x=6^x+10^x+15^x$

Răspuns:
Observăm că **x=0** verifică ecuaţia.
Verificare: 1+1+1=1+1+1→3=3 **(A)**
Soluţia 1:
Notăm $2^x=a$
$3^x=b$
$5^x=c$
ecuaţia $4^x+9^x+25^x=6^x+10^x+15^x$ se poate scrie $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

$a^2+b^2\geq 2ab$
$a^2+c^2\geq 2bc$
$b^2+c^2\geq 2ac$ +
$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ac) \rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$

Egalitatea are loc dacă **a=b=c** → $3^x=2^x=5^x$→**x=0**

Soluţia 2

$4^x+9^x-6^x = +10^x+15^x-25^x \quad /:10^x$

$$\left(\frac{4}{10}\right)^x+\left(\frac{9}{10}\right)^x-\left(\frac{6}{10}\right)^x=\left(\frac{10}{10}\right)^x+\left(\frac{15}{10}\right)^x-\left(\frac{25}{10}\right)^x$$

Definim următoarele funcţii:

f(x)= $\left(\frac{4}{10}\right)^x+\left(\frac{9}{10}\right)^x-\left(\frac{6}{10}\right)^x$ este strict descrescătoare pe **R**

g(x)= $\left(\frac{10}{10}\right)^x+\left(\frac{15}{10}\right)^x-\left(\frac{25}{10}\right)^x$ este strict crescătoare pe **R**

$\Rightarrow$ Soluţia unică este **x=0**

O6) Să se rezolve ecuaţia:
$(\cos\alpha)^x+(\sin\alpha)^x=1,$
$\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
Rezolvare:
Observăm că **x=2** este soluţie a ecuaţiei.
Verificare: $(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2=1$

Definim următoarele funcţii:

f(x)= $(\cos\alpha)^x$, $\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\rightarrow$ f(x) este strict descrescătoare pe **R**

g(x)=$(\sin\alpha)^x$, $\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\rightarrow$ g(x) este strict crescătoare pe **R**

$\Rightarrow$

f(x)+g(x)= $(\cos\alpha)^x + (\sin\alpha)^x$ este strict descrescătoare pe **R**

Deci x=2 este soluţie unică.

BIBLIOGRAFIE

1. Marius Burtea şi Georgeta Burtea, Manual de Matematică, clasa a XI-a, Editura Carminis.

2. C. Niţă, C. Năstăsescu, M. Brandiburu, D. Joiţa, Culegere de probleme pentru liceu - algebra - clasele IX - XII (editie noua revizuita si adaugita), Editura Rotech Pro.

3. Carmen Angelescu, Nicolae Baciu, Cătălin Zîrnă, Ismet Omer, Nicolae Buzduga, Ghid de recapitulare pentru BACALAUREAT 2009 - MATEMATICA M1+M2 , Editura Sigma.

4. Materia predată la oră, de către profesorul Oanea Călin.

5. Caietul de notiţe, dar şi de teme acasă.

6. Internet.