Laborator 6 - Grafuri - Basics

Responsabili

- Alexandra Bodîrlău [mailto:mailto:alexandra.bodirlau@gmail.com]
- Dănuț Matei [mailto:mailto:matei.danut.dm@gmail.com]
- Cosmin Petrișor [mailto:mailto:cosmin.ioan.petrisor@gmail.com]

Obiective

În urma parcurgerii acestui laborator, studentul va fi capabil să:

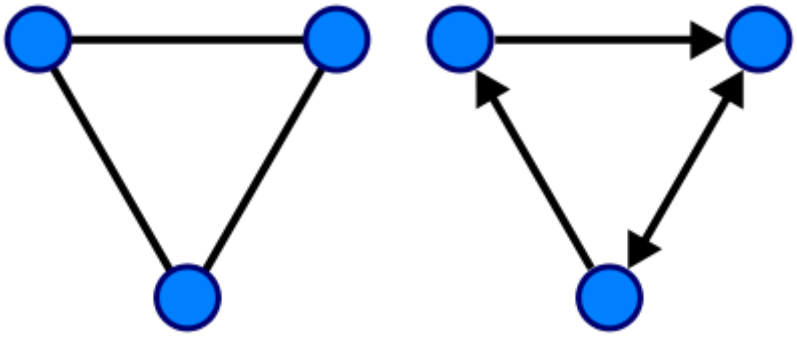
- înțeleagă operațiile de parcurgere a grafurilor și diferențele dintre ele.
- implementeze parcurgerile pe grafuri având la dispoziție structurile de date studiate.
- evalueze complexitatea parcurgerii grafurilor.

Ce este un graf?

Un graf este o pereche de mulţimi `G = (V, E)`. Mulțimea V conține nodurile grafului (**vertices**), iar mulțimea E conține muchiile sale (**edges**), fiecare muchie stabilind o relație de vecinătate între două noduri. Mulţimea E este inclusă în mulţimea VxV.

Diferenţa între graf orientat şi graf neorientat

Dacă pentru orice element al mulţimii E, `e = (u, v)`, elementul `e' = (v, u)` aparţine de asemenea mulţimii E, atunci spunem că graful este **neorientat**. În caz contrar, graful este **orientat**. În cazul grafului orientat, muchiile se mai numesc şi arce.



Reprezentările grafurilor în memorie

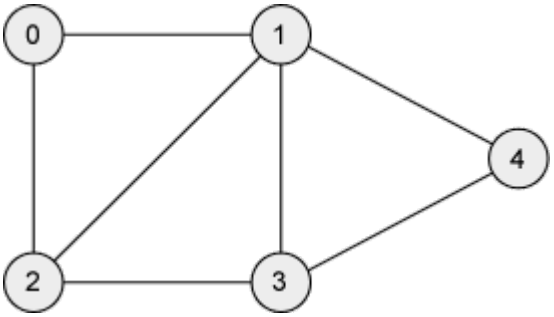
În funcţie de problemă şi de tipul grafurilor, avem 2 reprezentări: liste de adiacenţă sau matrice de adiacenţă.

Liste de adiacenţă

Reprezentarea prin liste de adiacenţă constă într-un tablou `Adj` cu `|V|` liste, una pentru fiecare vârf din V. Pentru fiecare u din V, lista de adiacenţă `Adj[u]` conţine referinţe către toate vârfurile v pentru care există

muchia `(u, v)` în `E`. Cu alte cuvinte, `Adj[u]` este formată din totalitatea vârfurilor adiacente lui `u` în `G`.

Această reprezentare este preferată pentru grafurile rare (`|E|` este mult mai mic decât `|V|x|V|`).



Pentru graful de mai sus, lista de adiacenţă este următoarea:

- **0**: 1→2
- **1**: 0→2→3→4
- **2**: 0→1→3
- **3**: 1→2→4
- **4**: 1→3

Matrice de adiacenţă

Reprezentarea prin matrice de adiacenţă a unui graf constă într-o matrice `A[i][j]` de dimensiune `|V|x|V|` astfel încât:

- `A[i][j] = 1`, dacă muchia `(i,j)` aparţine lui `E`
- `A[i][j] = 0`, în caz contrar.

Această reprezentare este preferată pentru grafurile dense (`|E|` este aproximativ egal cu `|V|x|V|`).

Pentru graful de mai sus, matricea de adiacenţă este următoarea:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
2	1	1	0	1	0
3	0	1	1	1	0
4	0	1	0	1	0

În general, preferăm reprezentarea prin liste de adiacență deoarece au o complexitate mai bună în cazul parcurgerilor (cea mai comună operație pe grafuri). Totuși, există situații în care alegerea reprezentării prin matrice de adiacență simplifică mult rezolvarea unei probleme. Un exemplu ar fi algoritmul Floyd-Warshall [https://en.wikipedia.org/wiki/Floyd%E2%80%93Warshall_algorithm] care se bazează pe faptul că putem obține ușor distanța dintre două noduri pe baza matricei în care reținem, adițional, și costurile muchiilor.

Parcurgerea grafurilor

Parcurgerea în lăţime

Parcurgerea în lățime (**Breadth-first Search - BFS**) presupune vizitarea nodurilor în următoarea ordine:

- nodul sursă (considerat a fi pe nivelul 0)
- vecinii nodului sursă (aceștia constituind nivelul 1)
- vecinii încă nevizitați ai nodurilor de pe nivelul 1 (aceștia constituind nivelul 2)
- vecinii încă nevizitați ai nodurilor de pe nivelul 2
- ş.a.m.d.

Caracteristica esențială a acestui tip de parcurgere este, deci, că se preferă explorarea **în lățime**, a nodurilor de pe același nivel (aceeași depărtare față de sursă) în detrimentul celei **în adâncime**, a nodurilor de pe nivelul următor.

Pași de execuție

- colorarea nodurilor. Pe parcurs ce algoritmul avansează, se colorează nodurile în felul următor:
  - **alb** - nodul este nedescoperit încă
  - **gri** - nodul a fost descoperit și este în curs de procesare
  - **negru** - procesarea nodului s-a încheiat
- păstrarea informațiilor despre distanța până la nodul sursă.
  - pentru fiecare nod în `d[u]` se reține distanța până la nodul sursă (poate fi util în unele probleme)
- obținerea arborelui BFS.
  - în urma aplicării algoritmului BFS se obține un arbore de acoperire (prin eliminarea muchiilor pe care nu le folosim la parcurgere). Pentru a putea reconstitui acest arbore, se păstrează pentru fiecare nod dat informația despre părintele său în `p[u]`.

Pseudocod

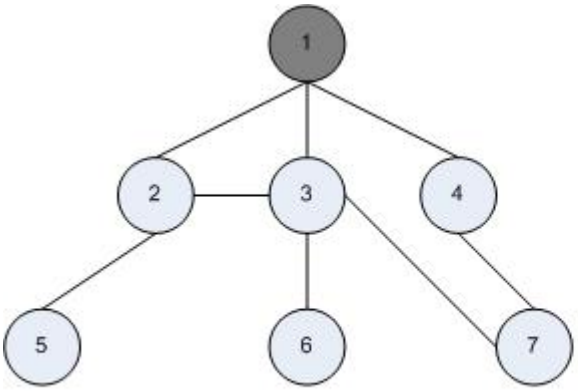
Pentru implementarea BFS se utilizează o coadă (`Q`) în care inițial se află doar nodul sursă. Se vizitează pe rând vecinii acestui nod şi se pun și ei în coada. În momentul în care nu mai există vecini nevizitați, nodul sursă este scos din coadă.

```
// Inițializări
pentru fiecare nod u din V
{
    culoare[u] = alb
    d[u] = infinit
    p[u] = null
}

culoare[sursa] = gri
d[sursa] = 0
enqueue(Q,sursa) // Punem nodul sursă în coada Q

// Algoritmul propriu-zis
cât timp coada Q nu este vidă
{
    v = dequeue(Q)       // Extragem nodul v din coadă
    pentru fiecare u dintre vecinii lui v
        dacă culoare[u] == alb
        {
            culoare[u] = gri
            p[u] = v
            d[u] = d[v] + 1
            enqueue(Q,u) // Adăugăm nodul u în coadă
        }
    culoare[v] = negru   // Am terminat de explorat toți vecinii lui v
}
```

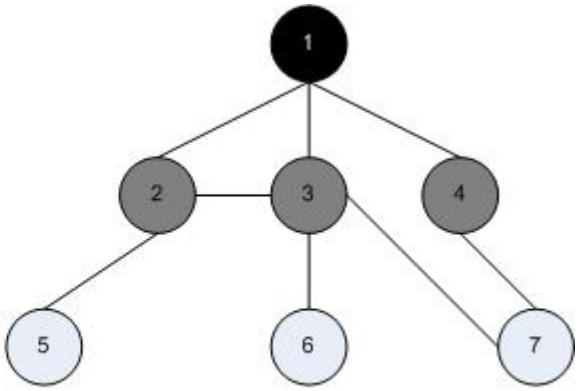
Dacă graful are mai multe componente conexe, algoritmul, în forma dată, va parcurge doar componenta din care face parte nodul sursă. Pe grafuri cu mai multe componente conexe se va aplica în continuare

algoritmul pentru fiecare nod rămas nevizitat și astfel se vor obține mai mulți arbori, câte unul pentru fiecare componentă.

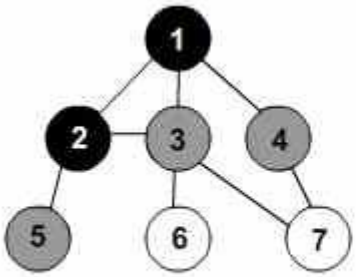
Exemplu



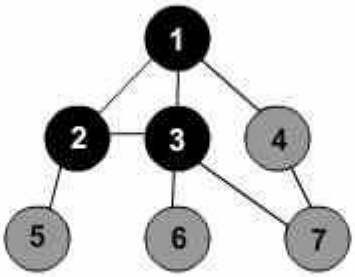
Q: 1



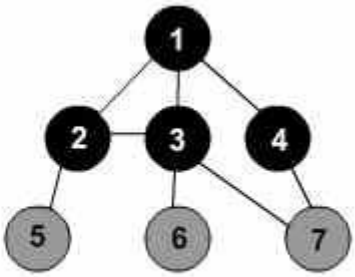
Q: ~~1~~,2,3,4



Q: ~~2~~, 3, 4, 5

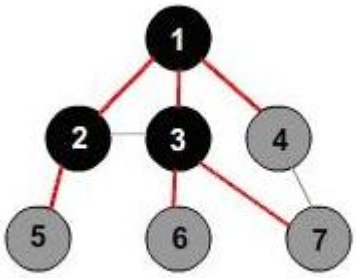


Q: ~~3~~, 4, 5, 6, 7



Q: ~~4~~, 5, 6, 7

Arborele obținut în urma execuției este următorul:



Q: ~~3~~, 4, 5, 6, 7

Parcurgerea în adâncime

Parcurgerea în adâncime (**Depth-First Search - DFS**) presupune explorarea nodurilor în următoarea ordine:

- nodul sursă
- primul vecin nevizitat al nodului sursă (îl vom numi V1)
- primul vecin nevizitat al lui V1 (îl vom numi V2)
- primul vecin nevizitat al lui V2
- s.a.m.d.

- în momentul în care am epuizat vecinii unui nod `Vn`, continuăm cu următorul vecin nevizitat al nodului anterior, `Vn-1`

Așadar, spre deosebire de BFS, acest tip de parcurgere pune prioritate pe explorarea **în adâncime** (la distanțe tot mai mari față de nodul sursă), în detrimentul celei **în lățime** (pe același nivel).

Pași de execuție

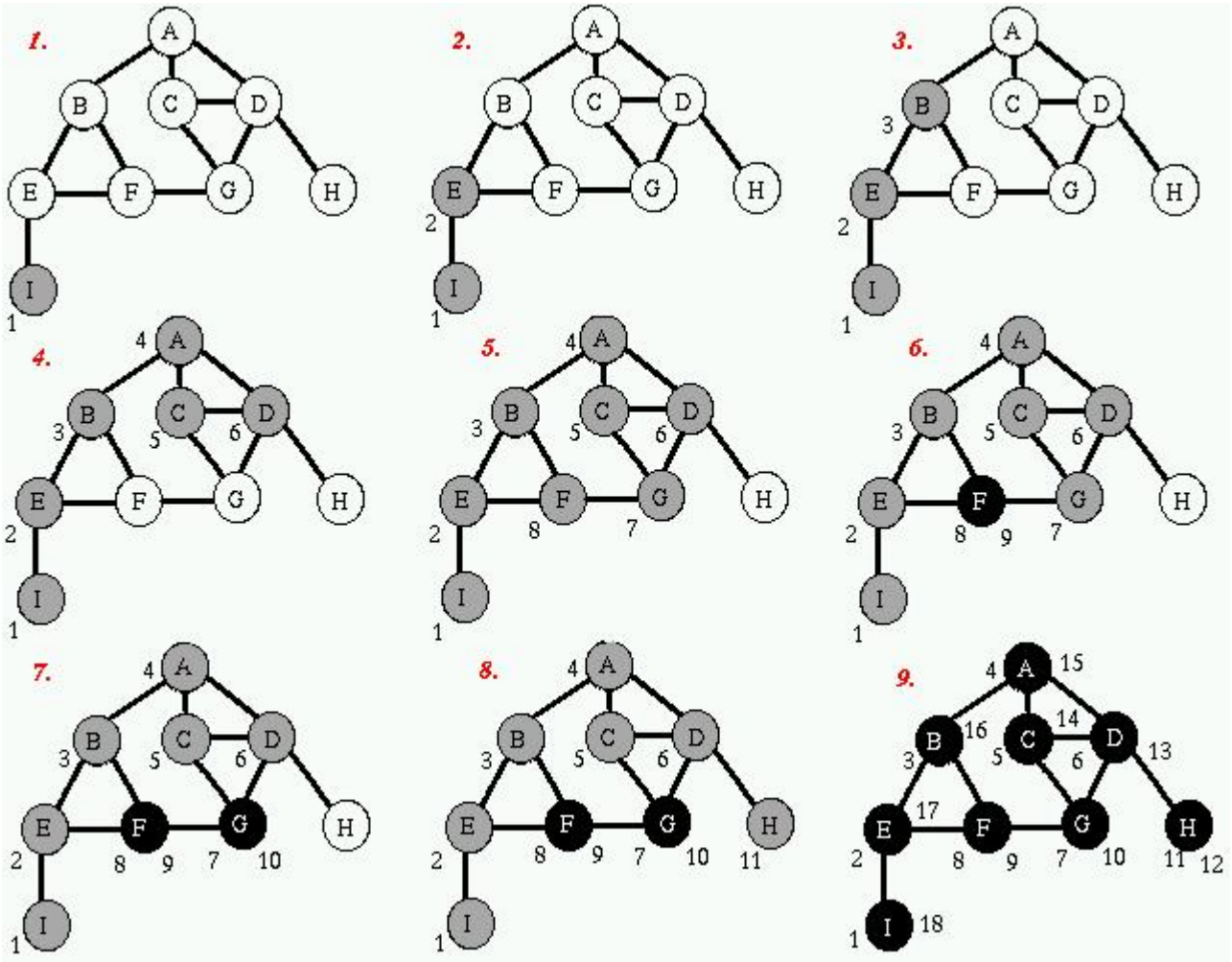
- colorarea nodurilor. Pe parcurs ce algoritmul avansează, se colorează nodurile in felul următor:
  - **alb** - nodul este nedescoperit încă
  - **gri** - nodul a fost descoperit și este în curs de procesare
  - **negru** - procesarea nodului s-a încheiat
- păstrarea informațiilor despre timp. Fiecare nod are două momente de timp asociate:
  - `tDesc[u]` - momentul descoperirii nodului (și a schimbării culorii din alb în gri)
  - `tFin[u]` - momentul în care procesarea nodului s-a încheiat (și culoarea acestuia s-a schimbat din gri în negru)
- obținerea arborelui DFS.
  - în urma aplicării algoritmului DFS asupra fiecărei componente conexe a grafului, se obține pentru fiecare dintre acestea câte un arbore de acoperire (prin eliminarea muchiilor pe care nu le folosim la parcurgere). Pentru a putea reconstitui acest arbore, păstram pentru fiecare nod dat informația despre părintele său în `p[u]`.

Pseudocod

```
// Inițializări
pentru fiecare nod u din V
{
    culoare[u] = alb
    p[u] = NULL
    tDesc[u] = 0
    tFin[u] = 0
}
contor_timp = 0

// Funcție de vizitare a nodului
vizitare(nod)
{
    contor_timp = contor_timp + 1
    tDesc[nod] = contor_timp
    culoare[nod] = gri
    printeaza nod;
}

// Algoritmul propriu-zis
DFS(nod)
{
    stiva s;

    viziteaza nod;
    s.introdu(nod);

    cât timp stiva s nu este goală
    {
        nodTop = nodul din vârful stivei

        vecin = află primul vecin nevizitat al lui nodTop.
        dacă vecin există
        {
            p[v] = nodTop
            viziteaza v;
            s.introdu(v);
        }
        altfel
```

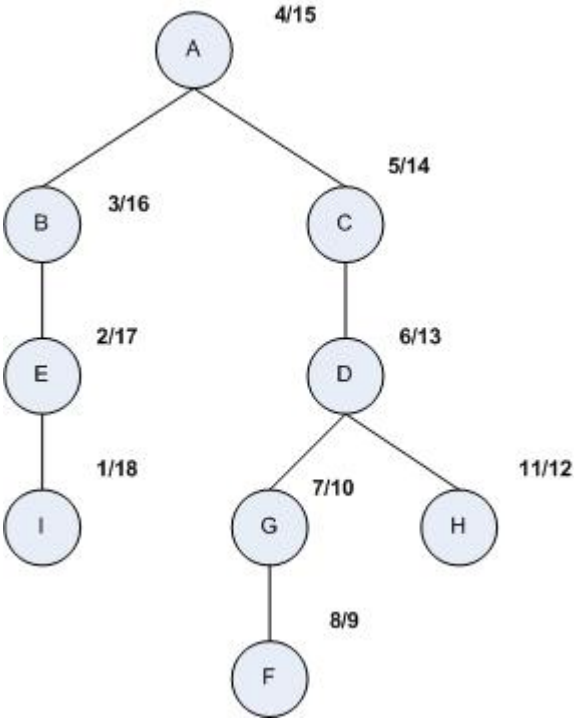
```
        {
            contor_timp = contor_timp + 1
            tFin[nodTop] = contor_timp
            culoare[nodTop] = negru
            s.scoate(nodTop);
        }
    }
}
```

Exemplu



Nodul de pornire este I, iar pentru simplificare vecinii sunt aleși în ordine alfabetică. În stânga nodului este notat `tDesc`, iar în dreapta `tFin`. Dacă se afișează nodurile, în urma parcurgerii se obține următorul output: **I, E, B, A, C, D, G, F, H**

Arborele obținut în urma parcurgerii este următorul:



Complexitate

Pentru ambele tipuri de parcurgeri, complexitatea este O(|E|+|V|) - unde |E| este numărul de muchii, iar |V| este numărul de noduri.

Explicație: în cazul cel mai defavorabil, vor fi explorate toate muchiile și toate nodurile (când graful este liniarizat).

De remarcat faptul că, pentru ambele tipuri de parcurgeri, complexitatea este cea menționată O(|E|+|V|) **numai în cazul în care grafurile sunt reținute ca liste de adiacență**. În acest caz, lista corespunzătoare nodului x reține numai vecinii nodului x. În cazul matricei de adiacență, pentru a parcurge vecinii unui nod x, trebuie să parcurgem toate nodurile. Această limitare duce la o complexitate de O(|V|^2)

Schelet

Schelet

Exerciţii

Fiecare laborator va avea unul sau doua exerciții publice si un pool de subiecte ascunse, din care asistentul poate alege cum se formeaza celelalte puncte ale laboratorului.

1) [**2p**] Implementaţi clasa **Graf** pentru un graf neorientat, plecând de la antetul definit anterior.

2) [**4p**] Implementaţi parcurgerea **BFS**, urmărind paşii descrişi în secţiunea Parcurgerea în lăţime.

3) [**4p**] Implementaţi parcurgerea **DFS**, urmărind paşii descrişi în secţiunea Parcurgerea în adâncime.

4) [**2p**] Implementați parcurgerea **DFS**, în variantă recursivă.

5) [**2p**] Implementați, la alegere:

- un algoritm pentru determinarea arborelui parțial de cost minim (ex: Algoritmul lui Kruskal [https://ro.wikipedia.org/wiki/Algoritmul_lui_Kruskal]).
- algoritmul Floyd-Warshall [https://en.wikipedia.org/wiki/Floyd%E2%80%93Warshall_algorithm].

Interviu

Această secțiune nu este punctată și încearcă să vă facă o oarecare idee a tipurilor de întrebări pe care le puteți întâlni la un job interview (internship, part-time, full-time, etc.) din materia prezentată în cadrul laboratorului.

Cum multe din companiile mari folosesc date stocate sub formă de grafuri (Facebook Open Graph, Google Social Graph şi Page Rank, etc.) la angajare vor dori să vadă ca ştiţi grafuri:

- cum se reprezintă grafurile
- cum funcţionează şi cum se implementează parcurgerile (BFS, DFS)

Puteţi căuta mai multe întrebări pe http://www.careercup.com/ [http://www.careercup.com/] şi pe http://www.glassdoor.com/ [http://www.glassdoor.com/]

Bibliografie

1. BFS [http://en.wikipedia.org/wiki/Breadth-first_search]
2. DFS [http://en.wikipedia.org/wiki/Depth-first_search]
3. Algoritmul Floyd-Warshall [https://en.wikipedia.org/wiki/Floyd%E2%80%93Warshall_algorithm]
4. Algoritmul lui Kruskal [https://ro.wikipedia.org/wiki/Algoritmul_lui_Kruskal]

sd-ca/2018/laboratoare/lab-06.txt · Last modified: 2019/02/01 13:24 by teodora.serbanescu