

**А.П. ИВАНОВ**

**ДИНАМИКА СИСТЕМ  
С МЕХАНИЧЕСКИМИ  
СОУДАРЕНИЯМИ**

**Москва  
“Международная программа образования”  
1997**

ББК 22.2

И20

УДК 531

РФИ

*Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту  
96-01-14155*

**И в а н о в А. П. Динамика систем с механическими соударениями.** — М.: Международная программа образования, 1997. — 336 с. — ISBN 5-7781-0031-0

Систематически изложены основные проблемы и методы динамики систем твердых тел при наличии соударений. Подробно изучены как закономерности отдельных ударов свободных или связанных тел, так и качественные свойства движений с ударами: устойчивость, бифуркции и т.п. Особое внимание удалено взаимосвязи между задачами этих двух групп.

Для научных работников и инженеров, специализирующихся в области динамики твердого тела и нелинейных колебаний, аспирантов и студентов старших курсов.

Ил. 104. Библиогр. 266 назв.

Р е ц е н з е н т

доктор физико-математических наук *А.П. Маркееев*

Научное издание  
*Иванов Александр Павлович*  
**Динамика систем с механическими соударениями**

Подписано к печати с оригинал-макета 12.06.97.  
Формат 60 x 90/16. Бумага кн.-журн. Усл. печ. л. 21  
Тираж 1000 экз. Заказ № К-1025

Лицензия ЛР № 064461 от 22.02.96  
“Международная программа образования”  
117049 Москва а/я 644  
Тел.: 955 35 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии издательства «Чувашия»  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковleva, 13.

ISBN 5-7781-0031-0

© А.П. Иванов, 1997

## ВВЕДЕНИЕ

С первых шагов от колыбели каждый из нас знакомится с явлением удара. Вначале оно лишь причиняет боль, когда мы падаем или натыкаемся на мебель. Постепенно мы учимся извлекать из ударов пользу: разбивая яйцо за завтраком, забивая гвоздь, музицируя или играя в футбол. Многочисленные применения ударов восходят корнями к доисторическим временам. На определенном уровне развития цивилизации появляется необходимость в научной теории удара. История ее развития насчитывает более трех веков — со времен исследований Гюйгенса, Валлиса и Рена, выполненных в 1668 году по заказу Лондонского Королевского Общества.

Основы теории удара излагаются в большинстве учебных курсов по теоретической механике. Это объясняется не только практическим интересом инженеров и исследователей к этой области динамики, но и подкупющей простотой уравнений импульсивного движения. Эти уравнения линейны, так что решение учебных задач вполне под силу студентам технических ВУЗов. Тем удивительнее масштабы трудностей, с которыми приходится сталкиваться при решении реальных задач.

Во-первых, не существует универсального подхода к вычислению импульсной реакции при соударении твердых тел. На практике продолжительность удара не превосходит тысячных или даже миллионных долей секунды, а силы взаимодействия в точках контакта могут достигать нескольких тонн. Ввиду этого удар может привести к значительной деформации или даже к разрушению тел, появлению ударных волн и звуковых колебаний, нагреванию тел, изменению механических свойств их материалов и др.

Правильный учет ударных явлений невозможен без задания физических свойств соударяемых тел. Рассмотрим, к примеру, падение шара на опору. Как показал Галилей, закон падения для разных тел одинаков. Напротив, последствия удара при приземлении невозможно предсказать без знания материалов, из которых сделаны шар и опора, так как чугунное ядро, теннисный мяч и стеклянный графин при падении на асфальт ведут себя по-разному. Этим объясняется многообразие теорий удара — от простейших, основанных на ньютоновском восстановлении и кулоновском трении, до более реалистичных моделей динамической теории упругости.

Выбор той или иной модели удара для решения конкретной задачи связан с компромиссом между простотой и реалистичностью, достигнуть которого на практике, однако, удается редко.

Во-вторых, в задачах динамики важно исследование поведения системы на значительных промежутках времени, в течение которых может произойти большое число соударений. При этом безударное движение описывается дифференциальными уравнениями, а удары — разностными, что делает невозможным непосредственно применить известные методы анализа. Традиционный метод "припасовывания"

граничных условий может применяться при решении простых задач, но не позволяет получить результаты общего характера, описывающие качественные свойства движений в системах с односторонними связями, которые могут включать касания ограничителя, участки "скольжения" и пр.

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена проблемам обеих групп. Закономерности отдельно взятых ударов обсуждаются в первой ее части. Здесь рассмотрены различные типы задач об ударе, а также методы их решения.

В *первой главе* излагается теория движения механических систем под действием заданных ударных сил. Наряду с теоремами об изменении количества движения и кинетического момента в применении к импульсивному движению здесь приведены различные варианты теорем об изменении кинетической энергии, важной, в частности, для понятия коэффициента восстановления при ударе. Рассмотрены задачи на импульсивное движение твердого тела с одной или двумя закрепленными точками и связанное с этим понятие центра удара; исследовано влияние жесткости крепления на характер этого движения.

Во *второй главе* рассмотрена простейшая задача теории механического удара — о коллинеарном соударении свободных твердых тел. Несмотря на относительно простую постановку, эта проблема по сей день не имеет общего решения. Причина кроется в сложности и многообразии физических явлений, сопровождающих удар и играющих заметную роль в формировании импульса. Этим объясняется и многообразие моделей коллинеарного удара, каждая из которых выделяет некоторые стороны явления и отбрасывает другие его аспекты. Наиболее известны классическая стереомеханическая теория, основанная на модели абсолютно твердого тела и ньютоновском коэффициенте восстановления, волновая теория удара, а также дискретные модели локальных деформаций. Приведены характеристики перечисленных подходов и примеры их использования.

Наряду со стандартными результатами, в данной главе проведено исследование роли "конечных" сил в динамике ударов с исчезающей малой скоростью сближения. Показано, что наличие этих сил в одних случаях (удар о пол) делает удар абсолютно неупругим, а в других — абсолютно упругим (удар о потолок). Получены некоторые оценки величины ударного импульса, существенные для последующего анализа динамики системы с ударами в целом.

*Третья глава* посвящена более общему и сложному случаю — пространственному удару двух свободных твердых тел. Здесь подробно обсуждается решение данной задачи в рамках классической стереомеханической теории удара. Эта теория основана на двух предположениях: гипотезе Ньютона о двух фазах удара и тому или иному допущению о характере ударного трения. Наиболее употребительно использование сухого, или кулонова трения. Для построения классической модели удара с трением достаточно задать два параметра: коэффициент восстановления и коэффициент трения. Тогда процесс

удара можно описать в виде системы дифференциальных уравнений, где роль независимой переменной играет нормальная составляющая ударного импульса. Задача об ударе всегда имеет единственное решение, которое в общем случае можно построить лишь численными методами.

Развитие стереомеханики в наши дни связано с новыми определениями коэффициента восстановления, в основе которых лежит сравнение кинетической энергии в различных фазах удара. Отмечены определенные преимущества энергетического определения коэффициента восстановления по сравнению с традиционными кинематическим и динамическим определениями.

Другую группу составляют вязкоупругие модели пространственного удара, в основе которых лежат потенциальная энергия упругих деформаций и диссипативная функция Релея. Такие модели обладают рядом преимуществ по сравнению с классическими, поскольку при том же числе параметров они демонстрируют лучшее соответствие с экспериментальными данными. Приведены примеры моделей удара с трением для случаев когда область контакта вырождается в точку или имеет ненулевой диаметр.

В четвертой главе обсуждается более сложная и важная с практической точки зрения задача о стесненном ударе. Здесь соударяемые тела не являются свободными: хотя бы одно из них подчинено некоторым дополнительным связям, например, имеет закрепленные точки или точки одностороннего контакта с другими телами. Рассматриваются различные подходы к решению данной задачи. В частности, для использования методов классической стереомеханики требуется принятие допущений об абсолютной жесткости дополнительных контактов. На простых примерах показано, что построенное таким методом решение может существенно отличаться от данных эксперимента. Результат, полученный на основе дискретных моделей, более реалистичен. Использование волновой теории в задаче о стесненном ударе ограничено, по видимому, простейшими случаями, к числу которых относится известная задача Буссинеска.

Подробно исследованы задачи об ударе маятника о массивную стенку и о соударении двух тел, имеющих дополнительную точку контакта. Проведен сравнительный анализ использования различных моделей стесненного удара. Показано, что коэффициент восстановления при ударе маятника зависит не только от физических свойств элементов системы, но и от ее конфигурации, причем при изменении точки подвеса этот коэффициент может измениться вдвое.

Использование аксиоматического подхода к решению задачи об ударе двух тел, имеющих дополнительную точку одностороннего контакта, может привести к парадоксальным ситуациям, когда решение либо неединственно, либо вообще не существует. В этом случае использование дискретных моделей не имеет разумной альтернативы.

В пятой главе рассматривается еще один тип задач, решение которых требует нестандартных подходов: одновременные столкнове-

ния трех и более твердых тел. Отличие таких задач от рассмотренных ранее состоит в их статистическом характере: существует несколько различных решений, реализующихся с той или иной вероятностью. Ситуация здесь качественно та же, что при бросании монеты или игральной кости: результат зависит от факторов, не поддающихся точному учету. Обсуждены различные методы решения задачи о кратном ударе и отмечено, что наиболее соответствует ее характеру метод статистического ансамбля. Возможности этого метода проиллюстрированы рядом примеров.

Предмет второй части книги составляют движения механических систем с соударяющимися элементами. Значения координат в таких системах подчиняются ограничениям, называемым геометрическими односторонними связями, и удары возникают при выходе траектории на границу области существования.

**Глава шестая** посвящена классификации различных видов движения в системах с односторонними связями и уравнениям, пригодным для их описания. Основная трудность в исследовании состоит в том, что различные виды движения — перелеты, "скользящие" режимы и удары — обычно задают при помощи разнотипных уравнений. Стыковка решений, известная как "припасовывание", технически довольно сложна, что препятствует использованию многих современных аналитических и численных методов. Предлагается новый подход, основанный на введение в рассмотрение новых переменных, остающихся непрерывными при ударах.

В **седьмой главе** обсуждаются периодические движения, складывающиеся из перелетов и ударов. Механические системы, допускающие движения такого вида, обычно называют виброударными. Получены условия устойчивости положений равновесия и периодических движений в зависимости от вида уравнений в вариациях и характера ударов. Обсуждены бифуркции движений с периодическими ударами. Здесь наряду с обычными типами имеется специфическая бифуркация касания, связанная с выходом траектории на границу области существования. При этом оказывается, что формулы для расчета коэффициентов характеристического уравнения, справедливые для движений с невырожденными ударами, неприменимы из-за появления нулей в знаменателе. На основе результатов второй главы, касающихся закономерностей низкоскоростного удара, построена регулярная модель бифуркации касания, позволяющая свести ее к некоторой последовательности стандартных бифуркаций.

В **восьмой главе** исследуются движения с участками "скольжения", т.е. напряженного состояния связи. Обсуждены общие свойства таких движений. В частности показано, что периодические движения с участками скольжения имеют пару нулевых мультипликаторов. Следовательно, движения такого вида в системе с одной степенью свободы всегда асимптотически устойчивы. Рассмотрены периодические безударные движения в консервативной системе с двумя степенями свободы и показано, что они обладают свойством полуустойчивости: наряду

с областями отталкивания в их окрестности имеются также области притяжения, заполненные асимптотическими движениями. Обсуждено решение задачи об определении характеристик "дребезга" в процессе "мягкой" посадки при помощи функций Ляпунова.

**Девятая глава** посвящена виброударным системам с одной степенью свободы. Подробно исследован автономный случай — динамическая система на полуплоскости. Получены результаты об устойчивости и бифуркациях положений равновесия и периодических движений, а также о качественной структуре фазового портрета, аналогичные теории Пуанкаре – Бендиксона. Для систем с периодическим возбуждением рассмотрены аналитические и численные методы исследования.

Приложение полученных результатов к различным задачам механики иллюстрируется многочисленными примерами в ходе изложения.

Автор надеется, что его работа может оказаться полезной для широкого круга специалистов в области нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений, конструкторов машин и механизмов, допускающих ударные явления, студентов и аспирантов, желающих найти приложение своего творческого потенциала.

Автор выражает глубокую благодарность А.П.Маркееву, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд важных замечаний, и В.К.Асташеву за исправление некоторых неточностей.

# Часть 1. ЗАКОНОМЕРНОСТИ МЕХАНИЧЕСКОГО УДАРА

## Глава 1. УДАРНЫЕ СИЛЫ И ИМПУЛЬСИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ

### 1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

**Ударная сила и импульс.** В классической механике движение материальных тел под действием тех или иных сил происходит в соответствии с законами Ньютона. Ударные силы характеризуются, в первую очередь, кратковременностью интервала времени их действия, и, во-вторых, значительной величиной. В результате координаты рассматриваемой механической системы за время удара не изменяются, а скорости получают конечные приращения.

Данное определение весьма условно, оно зависит от характерных масштабов длины и времени, принятых для описания системы. Например, если координаты измеряются с точностью до миллиметра, а скорости не превосходят десяти метров в секунду, то промежуток действия ударной силы ограничен одной десятитысячной долей секунды. Столь кратковременные взаимодействия возникают, как правило, при столкновениях упругих твердых тел.

Удобной мерой ударной силы  $\vec{F}$  служит ее интегральная характеристика — ударный импульс  $\vec{I}$ , задаваемый соотношением

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \vec{F}(t) dt , \quad (1.1)$$

где  $[t_0, t_0 + \tau]$  — промежуток времени, в течение которого действует сила.

В механике действующие силы определяют ускорения, с которыми движутся рассматриваемые тела, и задача определения координат и скоростей сводится к интегрированию дифференциальных уравнений. Под действием ударной силы, вследствие принятых допущений, происходит лишь изменение скоростей без заметных перемещений. Мерой этого изменения и служит ударный импульс (1.1). В дальнейшем мы будем называть движение под действием ударных сил импульсивным.

Если ударные импульсы заданы, то расчет новых значений скоростей сводится к алгебраическим операциям. Следует заметить, однако, что круг задач, в которых зависимость ударных сил от времени известна априори, весьма ограничен. Приведем ряд примеров.

**Примеры.** 1. При ударе кием по биллиардному шару последнему

сообщается определенное количество движения, зависящее от мышечного усилия игрока. Аналогичен штрафной удар в футболе, подача в волейболе, теннисе и др.

**2.** При игре на фортепиано музыкант рассчитывает усилие при ударах по клавишам для регулировки громкости звука.

**3.** Устройство для измерения скорости летящего снаряда — баллистический маятник — включает в себя сосуд с землей, в который попадает снаряд [Аппель, 1960, п.513]. В данном примере ударный импульс является величиной, подлежащей измерению. Это можно сделать, определив из эксперимента приращения скоростей, а затем воспользовавшись теоремами об импульсивном движении (см.ниже).

**4.** При ударе по биллиардному шару другим шаром ударный импульс заранее неизвестен, для его определения недостаточно знать начальные условия удара, но требуется принятие некоторых физических гипотез.

Можно заметить существование двух типов задач на импульсивное движение: прямые задачи состоят в определении приращений скоростей по заданным ударным импульсам, в то время как в обратных задачах ударные импульсы подлежат определению в зависимости от заданных приращений скоростей. В дальнейшем мы увидим, что решение в обоих случаях описывается одними и теми же алгебраическими соотношениями, поэтому в основном речь будет идти о прямых задачах.

**Импульсивное движение материальной точки.** Для материальной частицы массы  $m$ , движущейся под действием силы  $\vec{Q}$ , зависящей от радиуса-вектора частицы  $\vec{r}$ , ее скорости  $\vec{V} = \dot{\vec{r}} = d\vec{r}/dt$  и времени  $t$ , уравнения движения в соответствии со вторым законом Ньютона имеют вид

$$m\dot{\vec{V}} = \vec{Q}(t, \vec{r}, \vec{V}), \quad \dot{\vec{r}} = \vec{V}, \quad (1.2)$$

где каждое векторное равенство эквивалентно системе трех скалярных.

Уравнения (1.2) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка, решение которой эквивалентно определению движения частицы. Допустим теперь, что в дополнение к "конечной" силе  $\vec{Q}$  на частицу действует ударная сила  $\vec{F}$  с импульсом (1.1). На интервале времени  $(t_0, t_0 + \tau)$  запишем систему (1.2) в интегральной форме

$$\begin{aligned} m[\vec{V}(t_0 + \tau) - \vec{V}(t_0)] &= \vec{I} + \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \vec{Q}(t) dt, \\ \vec{r}(t_0 + \tau) - \vec{r}(t_0) &= \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \vec{V}(t) dt. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Переходя в соотношениях (1.3) к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ , получим разностные уравнения импульсивного движения в виде

$$m\Delta \vec{V} \equiv m(\vec{V}^+ - \vec{V}^-) = \vec{I}, \quad (1.4)$$

где знаки "минус" и "плюс" соответствуют началу и концу действия импульса.

Таким образом, ударный импульс равен приращению количества движения частицы.

Формулу (1.4) можно обобщить на случай, когда на частицу действуют сразу несколько ударных сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_l$ : согласно закону независимости действия сил в механике, результирующее усилие сводится к их сумме, в этой формуле достаточно положить

$$\vec{I} = \sum_{j=1}^l \vec{I}_j. \quad (1.5)$$

**Импульсивное движение системы материальных точек.** Рассмотрим теперь систему, состоящую из нескольких материальных точек с массами  $m_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). На каждую из них действуют некоторые внешние силы  $\vec{Q}_j$ , а также внутренние силы  $\vec{R}_{ji}$ , отражающие попарные взаимодействия. При этом вследствие третьего закона Ньютона

$$\vec{R}_{ij} = -\vec{R}_{ji}. \quad (1.6)$$

Изучим импульсивное движение системы. Если  $\vec{F}_j$  — ударная сила, действующая на частицу с номером  $j$ , то по аналогии с (1.2) уравнения движения последней выглядят так:

$$m_j \dot{\vec{V}}_j = \vec{Q}_j + \vec{F}_j + \sum_{i=1}^k \vec{R}_{ji}, \quad \dot{\vec{r}}_j = \vec{V}_j. \quad (1.7)$$

Изменяя индекс  $j$  в пределах от единицы до  $k$ , получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение данной механической системы. В такой форме они были предложены Даламбером [Даламбер, 1950]. Для получения уравнений импульсивного движения достаточно проинтегрировать (1.7) на интервале действия ударных сил. Пренебрегая в полученных соотношениях членами, исчезающими вместе с  $\tau$ , запишем эти уравнения в виде

$$m_j \Delta \vec{V}_j = \vec{I}_j + \sum_{i=1}^k \vec{I}_{ji}^*, \quad \vec{I}_{ji}^* = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{R}_{ji}(t) dt. \quad (1.8)$$

Здесь слагаемые  $\vec{I}_{ji}^*$  представляют собой ударные импульсы реакций, обусловленные взаимодействием элементов системы. Нужно различать два основных типа этого взаимодействия, которые можно назвать "мягким" и "жестким". "Мягкие" взаимодействия допускают относительные перемещения материальных точек, что сопровождается плавным изменением соответствующих внутренних сил  $\vec{R}_{ji}$ , которые могут быть отнесены к конечным. "Жесткие" взаимодействия характеризуются возникновением значительных усилий при попытке изменения конфигурации системы; им отвечают ударные импульсы  $\vec{I}_{ji}^*$ , подлежащие учету.

**Пример.** Рассмотрим систему, состоящую из двух частиц. Вначале будем считать, что они соединены пружинкой пренебрежимо малой массы (рис.1.1,а). В этом случае внутренняя сила  $\vec{R}_{12}$  направлена вдоль прямой, проходящей через обе точки, а ее величина является линейной функцией расстояния между ними:

$$R_{12} = c(d + x_1 - x_2) ,$$

где  $c$  — жесткость пружины,  $d$  — ее длина в ненапряженном состоянии,  $x_{1,2}$  — координаты частиц.

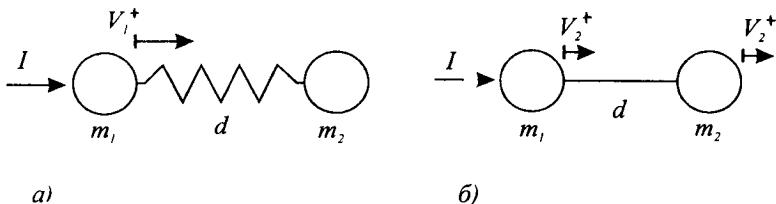


Рис. 1.1. "Мягкая" и "жесткая" связи

Допустим, что в начальный момент система находится в равновесии, а затем к точке  $m_1$  прикладывается ударная сила  $F$ , равная  $I/\tau$  на интервале  $t \in (0, \tau)$  и нулю вне этого интервала.

Уравнения (1.7) в данном случае выглядят так

$$m_1 \ddot{x}_1 = \frac{I}{\tau} - c(d + x_1 - x_2) , \quad m_2 \ddot{x}_2 = c(d + x_1 - x_2) . \quad (1.9)$$

В силу сделанных предположений начальные значения переменных задаются равенствами

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = d, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 . \quad (1.10)$$

Система (1.9), (1.10) линейна, она допускает явное аналитическое решение, которое на интервале  $(0, \tau)$  имеет вид

$$x_1 = \frac{I}{\tau(m_1 + m_2)} \left( \frac{1}{2} t^2 + \frac{m_2}{c} - \frac{1}{\omega^2} - \frac{m_2}{m_1 \omega^2} \cos \omega t \right) , \quad (1.11)$$

$$x_2 = \frac{Id}{\tau(m_1 + m_2)} \left( \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t \right), \quad \omega^2 = \frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}.$$

К моменту окончания удара  $t = \tau$  координаты получают приращения порядка  $\tau$ , а для скоростей имеем такие выражения:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(\tau) &= \frac{I}{m_1 + m_2} \left( 1 + \frac{m_2 \sin \omega \tau}{m_1 \omega \tau} \right), \\ \dot{x}_2(\tau) &= \frac{I}{m_1 + m_2} \left( 1 - \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} \right).\end{aligned}\tag{1.12}$$

Формулы (1.12) выражают решение прямой задачи о действии заданного удара на обсуждаемую механическую систему. Как показывает их анализ, результат определяется не малостью промежутка  $\tau$ , а зависит от величины произведения  $\omega \tau$ . В пределе при  $\omega \tau \rightarrow 0$  получаем

$$\dot{x}_1(\tau) = \frac{I}{m_1}, \quad \dot{x}_2(\tau) = 0, \tag{1.13}$$

что соответствует мягкому взаимодействию точек системы по отношению к данному удару (рис. 1.1, а). Другой предельный случай  $\omega \tau \rightarrow \infty$  приводит к результату

$$\dot{x}_1(\tau) = \dot{x}_2(\tau) = \frac{I}{m_1 + m_2}, \tag{1.14}$$

означающему, что скорости обеих точек после удара одинаковы.

Физический смысл решения (1.14) ясен из рассмотрения случая жесткого крепления точек  $A_1$  и  $A_2$  при помощи невесомого стержня неизменяемой длины  $d$  (рис. 1.1, б). Стержень накладывает жесткое ограничение на скорости точек:  $\dot{x}_1 \equiv \dot{x}_2$ , что делает возможным решение системы (1.8) относительно  $\Delta \dot{x}_1$  и  $I_{12}^*$ . В результате получаем

$$\dot{x}_1(\tau) = \dot{x}_2(\tau) = \frac{I}{m_1 + m_2}, \quad I_{12}^* = -\frac{I}{m_1 + m_2} m_2, \tag{1.15}$$

что совпадает с предельным случаем упругой пружины (1.14).

Данный пример достаточно характерен для задач об ударе: он демонстрирует относительность понятий жесткого и мягкого взаимодействия точек системы. Одна и та же упругая связь может приобретать и жесткий, и мягкий характер в зависимости от длительности ударного воздействия  $\tau$ . Выделение мягких и жестких связей облегчает решение уравнений удара (1.8): для первого типа  $\tilde{I}_{ij}^* = 0$ , связи второго типа устанавливают взаимосвязь скоростей  $\vec{V}_i$  и  $\vec{V}_j$ . Однако, два эти случая являются предельными и, естественно, не исчерпывают всех возможностей. Это соображение особенно следует учитывать при исследовании соударения твердых тел с закрепленными точками (см. главу 4).

## 1.2. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ В ПРИМЕНЕНИИ К ИМПУЛЬСИВНОМУ ДВИЖЕНИЮ

**Теорема об изменении количества движения.** *Количеством движения* системы материальных точек  $A_j$  с массами  $m_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) называют векторную сумму

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^k m_j \vec{V}_j . \quad (1.16)$$

Используем общие уравнения импульсивного движения (1.8) для определения изменения количества движения под действием заданных ударных сил:

$$\Delta \vec{L} = \sum_{j=1}^k m_j \Delta \vec{V}_j = \sum_{j=1}^k \left( \vec{I}_j + \sum_{i=1}^k \vec{I}_{ji}^* \right) . \quad (1.17)$$

Вследствие антисимметрии внутренних сил, выражаемой равенствами (1.6), сумма всех внутренних импульсов  $\vec{I}_{ji}^*$  равна нулю. Теорема об изменении количества движения выражается формулой

$$\Delta \vec{L} = \sum_{j=1}^k \vec{I}_j . \quad (1.18)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** *Изменение количества движения системы при ударе равно сумме всех внешних ударных импульсов и не зависит от характера внутренних сил.*

Данную теорему часто используют в несколько иной формулировке, как теорему об импульсивном движении центра масс. Для этого преобразуют количество движения (1.16) к виду

$$\vec{L} = M \vec{V}, \quad M = \sum_{j=1}^k m_j, \quad \vec{V} = M^{-1} \sum_{j=1}^k m_j \vec{V}_j . \quad (1.19)$$

В формулах (1.19)  $M$  — масса всей системы,  $\vec{V}$  — скорость ее *центра масс*  $G$ , т.е. такой точки (не обязательно принадлежащей самой системе) радиус-вектор которой определен равенством

$$\vec{r}(G) = M^{-1} \sum_{j=1}^k m_j \vec{r}_j .$$

**Теорема 1.1'.** Изменение количества движения центра масс будет таким же, как если бы в нем была сосредоточена вся масса системы и были бы к нему непосредственно приложены все внешние удары.

**Теорема об изменении кинетического момента.** Кинетическим моментом данной системы материальных точек  $A_j$  относительно некоторой неподвижной точки  $O$  называется векторная величина

$$\vec{K}_O = \sum_{j=1}^k m_j \vec{r}_j^o \times \vec{V}_j , \quad (1.20)$$

где  $\vec{r}_j^o$  обозначает вектор  $OA_j$ , а знак "×" – векторное произведение.

Моментом количества движения системы относительно неподвижной оси называется проекция кинетического момента, вычисленного относительно некоторой точки оси, на эту ось. Несложная проверка показывает, что данное определение корректно, т.е. инвариантно выбору такой точки.

Вычислим изменение кинетического момента под действием ударных сил при помощи формулы (1.8):

$$\Delta \vec{K}_O = \sum_{j=1}^k m_j \vec{r}_j^o \times \Delta \vec{V}_j = \sum_{j=1}^k \vec{r}_j^o \times \left( \vec{I}_j + \sum_{i=1}^k \vec{I}_{ji} \right) . \quad (1.21)$$

Поскольку

$$\vec{r}_j^o \times \vec{I}_{ji}^* + \vec{r}_i^o \times \vec{I}_{ij}^* = (\vec{r}_j^o - \vec{r}_i^o) \times \vec{I}_{ji}^* , \quad (1.22)$$

то для преобразования выражения (1.21) необходимо сделать оговорку о характере внутренних сил. Обычно считают физически очевидным, что для каждой пары частиц сила взаимодействия между ними направлена вдоль прямой, их соединяющей. Вообще говоря, данное допущение следует считать постулатом, не связанным с остальными законами динамики (см. [Раус, 1983], п. 66).

При данном дополнительном предположении правая часть формулы (1.22) представляет собой векторное произведение коллинеарных векторов, т.е. равна нулю. Следовательно, взаимно уничтожаются и все слагаемые, содержащие внутренние удары, в формуле (1.21), и она принимает вид

$$\Delta \vec{K}_O = \sum_{j=1}^k \vec{M}_j^O , \quad \vec{M}_j^O = \vec{r}_j^o \times \vec{I}_j . \quad (1.23)$$

Вектор  $\vec{M}_j^O$  в формуле (1.23) называется *моментом ударного импульса* относительно центра  $O$ . Мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 1.2.** Изменение кинетического момента системы относительно неподвижного центра при ударе равно сумме моментов всех внешних ударных импульсов.

Спроектируем векторное равенство (1.23) на некоторую ось, проходящую через точку  $O$ . Для этого достаточно скалярно умножить обе части на направляющий орт оси  $\vec{e}$ :

$$\Delta K_e = (\Delta \vec{K}_O, \vec{e}) = \sum_{j=1}^k (\vec{M}_j^O, \vec{e}). \quad (1.24)$$

В левой части данного равенства стоит приращение количества движения, слагаемые в правой части представляют собой моменты ударных импульсов относительно оси. Следовательно, теорему 1.2 можно сформулировать в несколько иной форме:

**Теорема 1.2'.** Изменение момента количества движения системы относительно неподвижной оси при ударе равно сумме моментов всех внешних ударных импульсов относительно этой оси.

**Замечание.** В [Аппель, 1960, п. 509] высказано утверждение о том, что теоремы 1.2, 1.2' могут быть приложены также к осям, связанным с одним из тел системы. Данное предложение нуждается в уточнении.

При вычислении приращения скорости  $\Delta \vec{V}_j$  в формуле (1.21) в случае подвижного полюса  $O$  появятся дополнительные слагаемые:

$$\Delta \vec{K}_O = \sum_{j=1}^k m_j \vec{r}_j^o \times (\Delta \vec{V}_j - \Delta \vec{V}_O) = \sum_{j=1}^k \vec{M}_j^O - M \vec{r}(G) \times \Delta \vec{V}_O.$$

Следовательно, формулы (1.23), (1.24) применимы в случае подвижного полюса при условии, что этот полюс совпадает с центром масс системы (или ось проходит через центр масс).

**Теорема об изменении кинетической энергии.** Сначала рассмотрим случай одной материальной точки. Элементарная работа произвольной силы  $\vec{F}$ , действующей на эту точку, определяется формулой

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = (\vec{F}, \vec{V}) dt, \quad (1.25)$$

где  $d\vec{r}$  — элементарное перемещение точки, а операция  $(\vec{a}, \vec{b})$  обозначает скалярное произведение векторов.

*Кинетическая энергия* материальной точки равна

$$T = \frac{1}{2} m(\vec{V}, \vec{V}), \quad (1.26)$$

откуда

$$dT = m(\vec{V}, d\vec{V}). \quad (1.27)$$

Если на точку действует "конечная" сила  $\vec{Q}$  и ударная сила  $\vec{F}$ , то уравнение ее движения (1.3) можно записать в форме

$$m d\vec{V} = (\vec{Q} + \vec{F}) dt . \quad (1.28)$$

Сравнивая выражения (1.25) и (1.27), можно убедиться, что они отличаются на величину  $\vec{Q} dt$ . Интегрируя их на промежутке действия силы  $\vec{F}$  и пренебрегая продолжительностью удара  $\tau$ , приходим к такому выводу: *изменение кинетической энергии материальной точки при ударе равно работе ударной силы*.

Перейдем к рассмотрению системы материальных точек, находящейся под действием ударных сил. В этом случае кинетическая энергия определяется как сумма

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k m_j (\vec{V}_j, \vec{V}_j) , \quad (1.29)$$

а ее изменение вследствие уравнений (1.7) выражается формулой

$$dT = \sum_{j=1}^k m_j (\vec{V}_j, d\vec{V}_j) = \sum_{j=1}^k \left( \vec{V}_j, \vec{Q}_j + \vec{F}_j + \sum_{i=1}^k \vec{R}_{ji} \right) dt \quad (1.30)$$

При этом элементарные работы внешних и внутренних ударных сил по аналогии с (1.25) имеют вид

$$dA = \sum_{j=1}^k (\vec{F}_j, d\vec{r}_j) = \sum_{j=1}^k (\vec{F}_j, \vec{V}_j) dt, \quad dA^* = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^k \vec{R}_{ji}, \vec{V}_j \right) dt \quad (1.31)$$

Сравнивая выражения (1.30) и (1.31) и пренебрегая малыми порядком  $\tau$ , приходим к такому результату.

**Теорема 1.3.** *Изменение кинетической энергии механической системы при ударе равно суммарной работе всех внешних и внутренних ударных сил.*

Данное утверждение имеет общий характер, а в обсуждаемом идеальном частном случае, когда к системе прикладываются заданные ударные импульсы, его можно уточнить. Как отмечалось выше, все возможные пары точек системы в этой задаче можно разбить на две группы: с "мягкими" и "жесткими" взаимодействиями. Работой сил  $\vec{R}_{ij}$ , относящихся к первой группе, можно пренебречь, уподобив их "конечным" силам  $\vec{Q}_j$ . Вычислим работу сил второй группы.

Как отмечалось выше, силы  $\vec{R}_{ji}$  направлены вдоль линий, соединяющих точки  $A_j$  и  $A_i$ . Для абсолютно жестких связей расстояния

между этими точками неизменны, следовательно, проекции скоростей  $\vec{V}_j$  и  $\vec{V}_i$  на прямую  $A_j A_i$  одинаковы. При этом

$$(\vec{V}_j, \vec{R}_{ji}) + (\vec{V}_i, \vec{R}_{ij}) = (\vec{V}_j - \vec{V}_i, \vec{R}_{ji}) = 0 .$$

Доказан следующий результат.

**Теорема 1.3'.** *Если к системе материальных точек прилагаются ударные силы, а взаимодействия между точками системы либо пренебрежимо малы, либо абсолютно жестки, то изменение кинетической энергии равно работе этих сил.*

**Замечание.** Понятия пренебрежимой малости и абсолютной жесткости относительны, поэтому пользоваться теоремой 1.3' следует с осторожностью. Рассмотрим, к примеру, двухмассовую упругую систему, обсуждавшуюся выше в §1.1. Начальное значение кинетической энергии здесь равно нулю, а конечное можно рассчитать по формуле

$$\Delta T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2(\tau) + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(\tau) ,$$

где значения скоростей после удара приведены в (1.12). В итоге получаем

$$\Delta T = \frac{I^2}{2(m_1 + m_2)} \left( 1 + \frac{m_2 \sin^2 \omega \tau}{m_1 \omega^2 \tau^2} \right) . \quad (1.32)$$

Работа, произведенная силой  $\vec{F}$  за время  $(t_0, t_0 + \tau)$ , равна

$$A = \frac{I}{\tau} \int_0^\tau \dot{x}_1(t) dt = \frac{I}{\tau} x_1(\tau) ,$$

где функция  $x_1(t)$  определена в (1.11). Следовательно,

$$A = \frac{I^2}{\tau^2 \omega^2 (m_1 + m_2)} \left( \frac{1}{2} \tau^2 \omega^2 + \frac{m_2}{m_1} (1 - \cos \omega \tau) \right) . \quad (1.33)$$

Выражения (1.32) и (1.33) совпадают в двух предельных случаях: если  $\omega \tau \rightarrow 0$  или  $\omega \tau \rightarrow \infty$ , что соответствует мягкому и абсолютно жесткому взаимодействиям. Для конечных значений произведения  $\omega \tau$  вследствие неравенства

$$\sin^2 \omega \tau \leq 2(1 - \cos \omega \tau) \quad (1.34)$$

получаем  $\Delta T \leq A$ , т.е. упругая сила пружины производит отрицательную работу. С физической точки зрения, это означает, что часть энергии удара переходит в кинетическую энергию системы, а другая

ее часть — в потенциальную энергию. Неравенство (1.34) переходит в равенство, если

$$\omega\tau = 2\pi n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.35)$$

т.е. если промежуток  $\tau$  кратен периоду собственных колебаний системы. При этом в конце удара пружина недеформирована, хотя скорости точек не совпадают. Следовательно, в послеударном движении расстояние  $|A_1 A_2|$  будет периодически изменяться.

Выведем формулу для приращения кинетической энергии системы при импульсивном движении. Учитывая уравнение удара (1.4), получим

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2}m(V^+)^2 - \frac{1}{2}m(V^-)^2 = \frac{1}{2}m(\Delta \vec{V}, \vec{V}^+ + \vec{V}^-) = \\ &= \frac{1}{2}(\vec{I}, \vec{V}^+ + \vec{V}^-). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Формула (1.36) принадлежит Кельвину [Kelvin, Tait, 1867], она справедлива и в более общем случае приложения заданных ударов к системе материальных точек. Пользуясь уравнениями импульсивного движения (1.8), получим

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k m_j ((V_j^+)^2 - (V_j^-)^2) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k m_j (\Delta \vec{V}_j, \vec{V}_j^+ + \vec{V}_j^-) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (\vec{I}_j, \vec{V}_j^+ + \vec{V}_j^-) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^k \vec{I}_{ji}^*, \vec{V}_j^+ + \vec{V}_j^- \right). \end{aligned} \quad (1.37)$$

В частности, если взаимодействия между точками системы мягкие или абсолютно жесткие, то подобно вышеприведенным рассуждениям можно показать, что вторая сумма в формуле (1.37) пренебрежимо мала, т.е.

$$\Delta T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (\vec{I}_j, \vec{V}_j^+ + \vec{V}_j^-). \quad (1.38)$$

### 1.3. ИМПУЛЬСИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

**Свободное твердое тело.** *Абсолютно твердым телом* в динамике называют систему материальных точек, попарные расстояния между которыми остаются неизменными. Согласно принятой выше терминологии, связи между всеми точками системы — абсолютно жесткие. С твердым телом можно связать некоторую декартову систему координат  $OXYZ$ , относительно которой все точки тела неподвижны, а сама она может перемещаться относительно инерциальной системы отсчета  $O^*X^*Y^*Z^*$ .

Реальные физические тела состоят не из отдельных точек, а из вещества, непрерывно распределенного в некоторой области  $W$ , неизменной в системе  $OXYZ$ ; эта область задает форму тела. С формальной точки зрения, переход от дискретной системы к непрерывной сводится к замене сумм (1.16), (1.20), (1.29) и пр. интегралами и масс плотностями.

Для определения скорости любой точки твердого тела достаточно знать скорость полюса  $\vec{V}_O$  и вектор  $\vec{\Omega}$ , называемый *мгновенной угловой скоростью*: в соответствии с формулой Эйлера, скорость произвольной точки тела  $A$  имеет вид

$$\vec{V}_A = V_O + \vec{\Omega} \times \vec{OA}. \quad (1.39)$$

С помощью данного равенства можно свести решение задачи о действии ударных импульсов на твердое тело к вычислению  $\Delta\vec{V}_O$  и  $\Delta\vec{\Omega}$ . Для этого воспользуемся основными теоремами динамики (см. §1.2). Теорема 1.1' позволяет найти изменение скорости центра масс системы  $G$ , поэтому удобно поместить начало связанной системы координат  $O$  в эту точку. Вследствие (1.18)

$$\Delta\vec{V}_G = M^{-1} \sum_{j=1}^l \vec{I}_j, \quad (1.40)$$

где  $l$  — число импульсов, действующих на тело.

Приращение угловой скорости определим по теореме 1.2. Сначала выразим кинетический момент  $\vec{K}_G$  через угловую скорость. Подставляя (1.39) в (1.20) и заменяя сумму интегралом, получим

$$\vec{K}_G = \iiint_W \gamma \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) dV = \mathbf{J} \vec{\Omega}, \quad (1.41)$$

где  $\gamma = \gamma(\vec{r})$  обозначает плотность в данной точке области  $W$ , занятой телом.

Матрица  $\mathbf{J}$  носит название *центрального тензора инерции*, она симметрична и положительно определена [Аппель, 1960]. Следовательно, в некотором ортонормированном базисе она имеет диагональную форму:  $\mathbf{J} = \text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ . Числа  $J_1, J_2, J_3$  называют *главными моментами инерции* данного твердого тела. Такие оси координат называют *главными центральными осями инерции*, а координатные плоскости — *главными центральными плоскостями инерции*.

При учете (1.41) формула (1.23) принимает вид

$$\mathbf{J} \Delta \vec{\Omega} = \sum_{j=1}^l G \vec{A}_j \times \vec{I}_j, \quad (1.42)$$

где  $A_j$  — точки приложения импульсов  $\vec{I}_j$ . Заметим, что поскольку изменением положения тела за время удара можно пренебречь, уравнения (1.40) и (1.42) имеют одинаковый вид в инерциальной и связанной с телом системах координат.

Определим распределение скоростей в точках данного тела, после удара. Вычисляя приращение обеих частей формулы (1.39), получим при учете (1.40), (1.42):

$$\Delta \vec{V}_A = \Delta \vec{V}_G + \Delta \vec{\Omega} \times \vec{G}A = M^{-1} \sum_{j=1}^l \vec{I}_j + \mathbf{J}^{-1} \left( \sum_{j=1}^l \vec{G}A_j \times \vec{I}_j \right) \times \vec{G}A. \quad (1.43)$$

**Пример.** Найдем импульсивное движение футбольного мяча под действием ударной силы, линия действия которой проходит на расстоянии  $d \leq r$  ( $r$  — радиус мяча), если до удара он покоялся. Будем считать мяч твердой тонкой сферической оболочкой, масса которой равномерно распределена по поверхности. Тензор инерции диагонален, причем  $J_{11} = J_{22} = J_{33} = \frac{2}{3}Mr^2$ . Формула (1.43) приводит к следующему распределению скоростей после удара:

$$\vec{V}_A = M^{-1} \vec{I}_1 + \frac{3}{2} M^{-1} r^{-2} (\vec{G}A_1 \times \vec{I}_1) \times \vec{G}A.$$

Данное выражение можно преобразовать по формуле двойного векторного произведения, в результате получим

$$\vec{V}_A = M^{-1} \vec{I}_1 \left( 1 + \frac{3}{2} r^{-2} (\vec{G}A, \vec{G}A_1) \right) - \frac{3}{2} M^{-1} r^{-2} (\vec{G}A, \vec{I}_1) \vec{G}A_1. \quad (1.44)$$

Интересно отметить, что если  $d \neq 0$ , т.е. линия действия ударной силы не проходит через центр шара, то формула (1.44) совпадает с формулой, описывающей распределение скоростей при вращательном движении вокруг оси (не пересекающей мяч), заданной уравнением  $\vec{V}_A = 0$ . Эта ось перпендикулярна ударному импульсу, а также диаметру, им пересекаемому, и удалена от центра шара на расстояние  $d' = \frac{2r^2}{3d}$ .

Аналогичный результат имеет место и для шаров с другим (симметричным) распределением масс. В частности, при равномерном распределении массы (бильярдный шар) имеем  $d' = 0.4r_0^2/d$ .

Вычислим приращение кинетической энергии тела, которое по теореме 1.3' равно работе ударного импульса. Сначала получим выражение кинетической энергии через  $\vec{V}_G$  и  $\vec{\Omega}$ . Подставляя (1.39) в (1.29), получим после преобразований

$$T = \frac{1}{2} \iiint_W \gamma (\vec{V}_G + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 dV = \frac{1}{2} MV_G^2 + \frac{1}{2} (\vec{\Omega}, \mathbf{J} \vec{\Omega}). \quad (1.45)$$

Полученный результат известен как теорема Кёнига. Отсюда в случае единственного ударного импульса получаем

$$\begin{aligned} A = \Delta T &= \frac{1}{2} M(\Delta \vec{V}, \vec{V}^+ + \vec{V}^-) + (\mathbf{J} \Delta \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) + \frac{1}{2} (\mathbf{J} \Delta \vec{\Omega}, \Delta \vec{\Omega}) = \\ &= \frac{1}{2} (\vec{I}, \vec{V}^+ + \vec{V}^-) + \frac{1}{2} (\vec{G} \cdot \vec{A} \times \vec{I}, \vec{\Omega}^+ + \vec{\Omega}^-) = \\ &= \frac{1}{2} (\vec{I}, \vec{V}^+ + \vec{V}^-) + \frac{1}{2} (\vec{I}, (\vec{\Omega}^+ + \vec{\Omega}^-) \times \vec{G} \cdot \vec{A}). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Учитывая формулу (1.39), приходим к результату

$$\Delta T = \frac{1}{2} (\vec{I}, \vec{V}_A^+ + \vec{V}_A^-). \quad (1.47)$$

Это — формула Кельвина в применении к импульсивному движению твердого тела. Она справедлива и при одновременном воздействии нескольких ударных сил: в этом случае

$$\begin{aligned} A = \Delta T &= \frac{1}{2} M(\Delta \vec{V}, \vec{V}^+ + \vec{V}^-) + (\mathbf{J} \Delta \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) + \frac{1}{2} (\mathbf{J} \Delta \vec{\Omega}, \Delta \vec{\Omega}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \left[ (\vec{I}_k, \vec{V}^+ + \vec{V}^-) + \frac{1}{2} (\vec{G} \cdot \vec{A}_k \times \vec{I}_k, \vec{\Omega}^+ + \vec{\Omega}^-) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l (\vec{I}_k, \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{G} \cdot \vec{A}_k)^+ + (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{G} \cdot \vec{A}_k)^- = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l (\vec{I}_k, \vec{V}_k^+ + \vec{V}_k^-), \end{aligned} \quad (1.48)$$

где  $\vec{V}_k$  — скорость точки  $A_k$ .

**Замечание.** На первый взгляд, каждое из слагаемых в формуле (1.48) представляет собой работу отдельно взятого ударного импульса  $\vec{I}_k$ , вычисленную по формуле (1.47). Однако, это не так: в общем случае каждую из этих работ по отдельности можно определить, лишь располагая зависимостью ударных сил от времени. Данный факт был впервые отмечен Кельвиным [Kelvin, Tait, 1867, Art.309]. Лишь в некоторых частных случаях парциальная работа выражается соотношением (1.47).

**Твердое тело с неподвижной осью.** Допустим теперь, что тело закреплено в двух точках  $O$  и  $O'$ . Тогда оно имеет единственную степень свободы, соответствующую вращению вокруг оси  $OO'$ . Пусть в точке  $A_1$  прилагается ударный импульс  $\vec{I}$ , при этом тело оказывает ударное воздействие на точки крепления, и со стороны последних возникают ударные импульсы реакции  $\vec{I}_O$  и  $\vec{I}_{O'}$ . Обозначим через  $\rho_l$  радиус инерции тела относительно оси  $OO'$ , тогда момент количества

движения относительно этой оси равен  $M\rho_i^2\vec{\Omega}$ , где  $\vec{\Omega}$  — угловая скорость вращения. По теореме 1.2' в проекции на ось  $OO'$

$$M\rho_i^2\Delta\Omega = (\vec{OA}_1 \times \vec{I}, \vec{e})\vec{e}, \quad (1.49)$$

где  $\vec{e}$  — орт, коллинеарный оси вращения. Импульсивные реакции не входят в уравнение (1.49), так как они не создают момента относительно оси вращения. Их можно попытаться определить из условия неизменности скоростей точек  $O$  и  $O'$  при ударе.

Общие уравнение удара (1.40), (1.42) в данном случае имеют вид

$$M\Delta\vec{V} = \vec{I} + \vec{I}_O + \vec{I}_{O'}, \quad J\Delta\vec{\Omega} = \vec{GA} \times \vec{I} + \vec{GO} \times \vec{I}_O + \vec{GO'} \times \vec{I}_{O'} \quad (1.50)$$

Условия неподвижности точек  $O, O'$  выглядят так:

$$\Delta\vec{V}_O = \vec{0}, \quad \Delta\vec{V}_{O'} = \vec{0}. \quad (1.51)$$

Запишем уравнения (1.51) при учете (1.50):

$$\begin{aligned} M^{-1}(\vec{I} + \vec{I}_O + \vec{I}_{O'}) + J^{-1}\vec{I} \times \vec{GO} &= \vec{0}, \\ M^{-1}(\vec{I} + \vec{I}_O + \vec{I}_{O'}) + J^{-1}\vec{I} \times \vec{GO}' &= \vec{0}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где принято обозначение  $\vec{I} = \vec{GA}_1 \times \vec{I} + \vec{GO} \times \vec{I}_O + \vec{GO'} \times \vec{I}_{O'}$ .

Проектируя равенства (1.52) на три взаимно перпендикулярные оси, получим систему шести скалярных уравнений для определения координат векторов  $\vec{I}_O$  и  $\vec{I}_{O'}$ . Поскольку в твердом теле расстояние между точками  $O$  и  $O'$  остается неизменным, из этих шести уравнений лишь пять независимых. Они позволяют однозначно определить составляющие импульсивных реакций, перпендикулярные оси вращения, а также сумму их проекций на эту ось [Аппель, 1960, п.511].

Что касается изменения кинетической энергии тела с неподвижной осью при ударе, то оно может быть рассчитано по формуле (1.47), так как реакции  $\vec{I}_O$  и  $\vec{I}_{O'}$  прилагаются в неподвижных точках, и их работа равна нулю.

**Центр удара.** С практической точки зрения представляет интерес случай, когда при импульсивном движении тела с неподвижной осью последняя не нагружается. К примеру, на этом принципе устроены молоток, теннисная ракетка и т.п.: ударяя по гвоздю или мячу, мы не чувствуем отдачи.

Для выяснения условий реализации данного случая допустим, что в точке  $A_1$  тела приложен импульс  $\vec{I}$ , при этом  $\vec{I}_O = \vec{I}_{O'} = \vec{0}$ . Система (1.52) примет вид

$$\begin{aligned} \vec{I} + MJ^{-1}(\vec{GA}_1 \times \vec{I}) \times \vec{GO} &= \vec{0}, \\ \vec{I} + MJ^{-1}(\vec{GA}_1 \times \vec{I}) \times \vec{GO}' &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

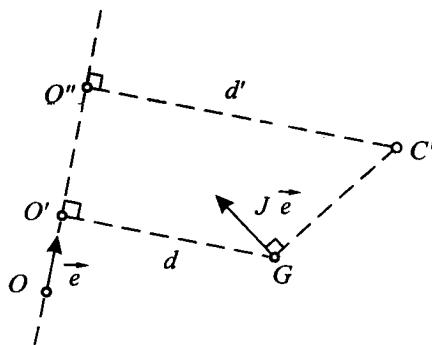


Рис. 1.2. Положение центра удара

Система (1.53) разрешима не всегда, а лишь при выполнении некоторых условий, налагаемых на расположение точек крепления в теле. Так, если центр масс  $G$  лежит на оси  $OO'$ , то из уравнений (1.53) получаем  $\vec{I} = \vec{0}$ . В общем случае вектор  $\vec{I}$  необходимо ортогонален плоскости  $GOO'$ . Далее, исключая  $\vec{I}$  из уравнений (1.53), получим

$$-M\vec{GA}_1 \times (\vec{e} \times \vec{GO}) = \mathbf{Je}. \quad (1.54)$$

Равенство (1.54) накладывает ограничения как на положение оси вращения, так и на положение точки  $A_1$  приложения импульса [Иванов, 1995, а].

Во-первых, вектор  $\mathbf{Je}$  лежит в плоскости  $GOO'$ , т.е.

$$(\mathbf{Je} \times \vec{e}, \vec{GO}) = 0. \quad (1.55)$$

Во-вторых, вектор  $\vec{GA}_1$  ортогонален к  $\mathbf{Je}$ :

$$(\vec{GA}, \mathbf{Je}) = 0. \quad (1.56)$$

В-третьих, проекция  $A'$  точки  $A_1$  на плоскость  $GOO'$  лежит по ту же сторону от оси вращения, что и точка  $G$ , причем

$$\rho_O^2 = dd', \quad (1.57)$$

где  $d, d'$  — расстояния от оси до точек  $G$  и  $A_1$  соответственно (рис. 1.2).

Действительно, умножая обе части равенства (1.54) скалярно на  $\vec{e}$ , получаем

$$(\mathbf{Je}, \vec{e}) = -M(\vec{e} \times \vec{GA}_1, \vec{e} \times \vec{GO}). \quad (1.58)$$

Учитывая определение моментов инерции, преобразуем это соотношение к виду

$$\begin{aligned} M\rho_O^2 &= (\mathbf{Je}, \vec{e}) + Md^2 = M(\vec{e} \times \vec{GO}, \vec{e} \times \vec{GO}) - M(\vec{e} \times \vec{GA}', \vec{e} \times \vec{GO}) = \\ &= M(\vec{e} \times \vec{AO}, \vec{e} \times \vec{GO}), \end{aligned}$$

что эквивалентно (1.57).

Подведем итог. Выполнение соотношения (1.55) необходимо и достаточно для существования точки  $A'$ , лежащей в плоскости  $GOO'$  и определяемой формулами (1.56), (1.57). Эта точка и называется *центром удара*. Ударные силы, линия действия которых проходит через  $A'$  ортогонально плоскости  $GOO'$ , не вызывают ответных реакций оси [Иванов, 1995, а].

Заметим, что известные классические условия существования центра удара (см.например [Аппель, 1960], [Раус, 1983]) имеют несколько иную форму. Вместо равенств (1.55),(1.56) налагаются требования: ось вращения тела  $OO'$  служит главной осью инерции для одной из своих точек  $O''$ . При этом проекция точки  $A'$  на ось совпадает с  $O''$ , и выполнено соотношение (1.57) (рис.1.2). Две эти группы условий эквивалентны, и в зависимости от решаемой задачи можно пользоваться любой из них. По нашему мнению, проверка условий (1.55),(1.56) более проста, так как она требует вычисления моментов инерции в единственной точке  $G$ .

**Примеры.** 1. При ударе кием по биллиардному шару радиуса  $r$  линия действия ударной силы может проходить на любом расстоянии  $d$  от центра в промежутке от нуля до  $r$ . Этот пример уже рассматривался выше, и было показано, что импульсивное движение всегда является вращательным, при этом мгновенная ось вращения лежит в диаметральной плоскости, ортогональной ударному импульсу, на расстоянии  $0.4r^2/d$  от центра шара и на расстоянии  $d + 0.4r^2/d$  от линии удара (рис.1.3,а). Поскольку  $d \leq r$ , то эта ось проходит не ближе, чем на расстоянии  $0.4r$  от центра шара.

Интересно отметить, что если нанести удар по стоящему на столе шару выше его центра на  $0.4r$  (так называемый верхний центр удара), то мгновенная ось вращения будет лежать на поверхности стола, и шар начнет катиться без проскальзывания [Кориолис, 1956].

2. Аналогично можно рассмотреть удар по произвольному телу вращения в двух частных случаях:

а) Линия удара проходит через ось вращения. Тогда вектор  $\vec{G}A_1 \times \vec{I}$  лежит в экваториальной плоскости, и формула (1.43) примет вид

$$\Delta \vec{V}_A = M^{-1} \vec{I} + \mathbf{J}_e^{-1} (\vec{I}(\vec{G}A_1, \vec{G}A) - \vec{G}A_1(\vec{I}, \vec{G}A)) , \quad (1.59)$$

аналогичный формуле (1.44) (здесь  $J_e$  — экваториальный момент инерции.) Ось мгновенного вращения будет лежать в плоскости, содержащей ось вращения и ортогональной ударному импульсу, на расстоянии  $J_e/Md$  от центра масс (рис.1.3,б).

б) Если линия удара лежит в экваториальной плоскости тела, то формула (1.43) выглядит так:

$$\Delta \vec{V}_A = M^{-1} \vec{I} + \mathbf{J}_e^{-1} (\vec{I}(\vec{G}A_1, \vec{G}A) - \vec{G}C(\vec{I}, \vec{G}A)) , \quad (1.60)$$

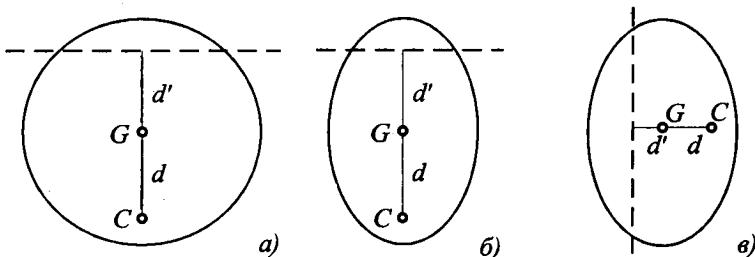


Рис. 1.3. Положение оси мгновенного вращения: а) однородный шар, б) тело вращения, удар в точке оси, в) тело вращения, удар в экваториальной плоскости

где  $J_a$  — осевой момент инерции. Ось мгновенного вращения располагается параллельно оси симметрии на расстоянии  $J_a/md$  от нее (рис.1.3,в).

**Тело с неподвижной точкой.** Обсудим теперь случай, когда тело закреплено в единственной точке  $O$ , тогда оно обладает тремя вращательными степенями свободы. Под действием ударных импульсов  $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \dots, \vec{I}_l$ , приложенных в точках  $A_1, A_2, \dots, A_l$ , возникает также ударная реакция  $\vec{I}_O$ , обеспечивающая неподвижность точки крепления.

Уравнения удара удобно записать, принимая точку  $O$  за полюс и пользуясь теоремой 1.2. Если  $\mathbf{J}_O$  — тензор инерции относительно точки  $O$ , то эти уравнения таковы:

$$\mathbf{J}_O \Delta \vec{\Omega} = \sum_{k=1}^l \vec{OA}_k \times \vec{I}_k . \quad (1.61)$$

Реакцию опоры можно определить из условия  $\Delta \vec{V}_O = \vec{0}$ , откуда аналогично (1.50)–(1.52) получаем

$$\vec{I}_O = M \mathbf{J}_O^{-1} \left( \sum_{k=1}^l \vec{OA}_k \times \vec{I}_k \right) \times \vec{OG} - \sum_{k=1}^l \vec{I}_k . \quad (1.62)$$

Что касается работы ударных сил, то и в данном случае она определяется формулой Кельвина (1.48), так как  $\vec{V}_O^- = \vec{V}_O^+ = \vec{0}$ .

Рассмотрим теперь вопрос о существования центра удара у тела, имеющего неподвижную точку, при наличии единственной ударной силы. Если эта сила приложена в центре удара и имеет подходящее направление, то  $\vec{I}_O = \vec{0}$ , т.е. точка  $O$  останется неподвижной и в отсутствие ее крепления. В соответствии с принципами кинематики, существует и ось мгновенного вращения, остающаяся при ударе неподвижной.

**О реакции опоры в случае упругого крепления.** В реальных механических системах невозможно добиться абсолютной неподвижности одной из точек тела, подверженного ударной нагрузке. Оставаясь в рамках гипотезы абсолютно твердого тела, рассмотрим следующую модель упругого крепления.

Будем считать, что неподвижная опора  $O^*$  и фиксированная точка  $O$  тела связаны жесткой пружиной, препятствующей их разделению. Реакция опоры зависит от смещения точки  $O$  и определяется формулой

$$\vec{R}_O = -c\vec{q}, \quad \vec{q} = -\vec{O}\vec{O}^*. \quad (1.63)$$

В формуле (1.63) коэффициент жесткости с предполагается большим по абсолютной величине.

При решении задачи об ударе с учетом силы (1.63) в уравнениях уже нельзя пренебрегать изменением координат точки  $O$ . В применении к твердому телу эти уравнения имеют вид:

$$M[\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)] = \vec{I} + \vec{I}_O = \int_{t_0}^t (\vec{F}(t) + \vec{R}_O) dt \quad (1.64)$$

$$\mathbf{J}[\vec{\Omega}(t) - \vec{\Omega}(t_0)] = \vec{G}\vec{A}_1 \times \vec{I} + \vec{G}\vec{O} \times \vec{I}_O, \quad \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{V}(t) dt.$$

Величина  $\dot{\vec{q}}$ , равная скорости точки  $O$ , вычисляется по формуле Эйлера (1.39):

$$\dot{\vec{q}} = \vec{V}_O = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{G}\vec{O}. \quad (1.65)$$

Объединяя равенства (1.63) – (1.65), получаем

$$M\ddot{\vec{q}} = \vec{F} - c\vec{q} + M\mathbf{J}^{-1}(\vec{G}\vec{A}_1 \times \vec{F} - c\vec{G}\vec{O} \times \vec{q}) \times \vec{G}\vec{O}. \quad (1.66)$$

Уравнение (1.66) линейно относительно  $\vec{q}$ , его можно записать в форме

$$M\ddot{\vec{q}} + c\mathbf{B}\vec{q} = \vec{F} + \mathbf{J}^{-1}(\vec{G}\vec{A}_1 \times \vec{F}) \times \vec{G}\vec{O}, \quad (1.67)$$

где матрица  $\mathbf{B}$  симметрична и положительно определена.

Система (1.67) распадается на три однотипных скалярных уравнения

$$M\ddot{x} + ca^2x = \varphi(t), \quad (1.68)$$

которые надо решать при начальных условиях  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ .

В (1.68) переменная  $x$  обозначает одну из нормальных координат,  $a^2$  — соответствующее этой координате собственное значение матрицы  $\mathbf{B}$ ,  $\varphi(t)$  — составляющая правой части в формуле (1.67).

Общее решение уравнения (1.68) выглядит так:

$$x = \frac{1}{a\sqrt{c}} \int_0^t \sin(a\sqrt{c}(t-s)) \varphi(s) ds, \dot{x} = \int_0^t \cos(a\sqrt{c}(t-s)) \varphi(s) ds. \quad (1.69)$$

По свойствам ударных сил подынтегральные функции в формулах (1.69) отличны от нуля лишь на отрезке  $s \in [0, \tau]$ , а интеграл от  $\varphi(s)$  на этом отрезке конечен. Отсюда по теореме Римана – Лебега из теории рядов Фурье [Корн, Корн, 1973] можно утверждать, что при  $c \rightarrow \infty$  функции  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  стремятся к нулю. Скорость сходимости определяется свойствами функции  $\varphi$ : если она непрерывно дифференцируема, то каждый из интегралов имеет порядок  $O(c^{-1/2})$ .

Следовательно, можно прийти к такому выводу: для достаточно больших значений  $c$  в формуле (1.63) податливостью опоры можно пренебречь Тем не менее, если величина  $a\tau\sqrt{c}$  не слишком велика, то скорость в конце удара может оказаться значительной. К этим результатам мы вернемся при изучении соударений несвободных тел (см. главу 4).

**Действие импульсивных сил на систему твердых тел.** Результаты, описанные выше, можно обобщить на случай приложения импульсивных сил к произвольной системе твердых тел. Ограничению (причем существенному) подлежит лишь величина промежутка времени, на котором локализованы ударные силы: с одной стороны, он должен быть достаточно малым, чтобы можно было пренебречь изменением координат и действием "конечных" сил, с другой стороны достаточно большим, чтобы не учитывать упругих свойств связей между телами (ср. с выводами предыдущего раздела).

Если эти допущения выполнены, то для нахождения послеударных скоростей можно воспользоваться *методом кинетостатики*: заменяя связи ударными импульсами, применить к каждому из тел, составляющих данную механическую систему, Теоремы об изменении импульса и кинетического момента.

Рассмотрим, к примеру, типовую задачу о действии заданного удара на систему двух твердых тел, соединенных сферическим шарниром в точке  $O$  (рис.1.4). При этом помимо импульса  $\vec{I}$  возникают также ударные импульсы в точке крепления:  $\vec{I}_O$ , действующий на первое тело, и  $-\vec{I}_O$  — на второе. В данной задаче неизвестными величинами, подлежащими определению, являются изменения скоростей центров масс каждого из тел  $\Delta \vec{V}_{1,2}$  и их угловых скоростей  $\Delta \vec{\Omega}_{1,2}$ , а также импульсивная реакция  $\vec{I}_O$ . Для их определения можно составить следующую систему уравнений, воспользовавшись формулами (1.40), (1.42) и условием сохранения контакта в точке  $O$  после удара, в силу которого скорость этой точки в составе обоих тел получает одинаковые

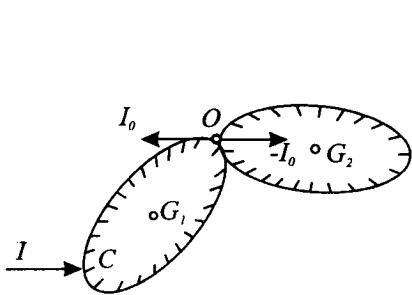


Рис. 1.4. Действие ударного импульса на систему твердых тел

приращения:

$$\begin{aligned} M_1 \Delta \vec{V}_1 &= \vec{I} + \vec{I}_O, & J_1 \Delta \vec{\Omega}_1 &= G_1 \vec{A}_1 \times \vec{I} + G_1 \vec{O} \times \vec{I}_O, \\ M_2 \Delta \vec{V}_2 &= -\vec{I}_O, & J_2 \Delta \vec{\Omega}_2 &= -G_2 \vec{O} \times \vec{I}_O, \\ \Delta \vec{V}_1 + \Delta \vec{\Omega}_1 \times G_1 \vec{O} &= \Delta \vec{V}_2 + \Delta \vec{\Omega}_2 \times G_2 \vec{O}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Система пяти векторных уравнений (1.70) позволяет однозначно определить пять векторных неизвестных.

**Пример.** Изучим действие заданного удара на двойной маятник, т.е. на систему двух твердых тел с массами  $M_1$  и  $M_2$ , связанных шарнирами друг с другом и с точкой подвеса (рис.1.5), причем точки крепления  $O_1, O_2$  и центр масс верхнего тела  $G_2$  лежат на одной прямой. До удара система находится в равновесии. Ограничимся плоским случаем и будем считать, что удар прилагается в горизонтальном направлении в некоторой точке нижнего тела.

Обозначим  $b_2$  и  $a_2$  расстояния от точки  $G_2$  до верхнего и нижнего шарниров соответственно,  $b_1$  и  $a_1$  — расстояния от точки  $G_1$  до нижнего шарнира и до линии действия ударной силы,  $\rho_{1,2}$  — центральные радиусы инерции тел.

Освободим систему от связей, заменяя их ударными реакциями, приложенными в точках  $O_{1,2}$ . Так как при данной конфигурации центры масс могут иметь скорости лишь в горизонтальном направлении, то эти реакции горизонтальны. На первое тело действует два импульса:  $\vec{I}$  и  $\vec{I}_1$ , уравнения его импульсивного движения таковы:

$$M_1 \Delta V_1 = I + I_1, \quad M_1 \rho_1^2 \Delta \Omega_1 = a_1 I - b_1 I_1. \quad (1.71)$$

Для второго тела, находящегося под действием двух импульсивных реакций, уравнения движения выглядят так

$$M_2 \Delta V_2 = I_2 - I_1, \quad M_2 \rho_2^2 \Delta \Omega_2 = -a_2 I_1 - b_2 I_2. \quad (1.72)$$

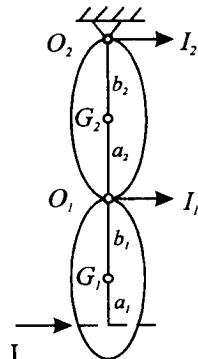


Рис. 1.5. Импульсивное движение двойного маятника

Вследствие наложенных связей, во-первых, приращение скорости в точке  $O_2$  равно нулю, откуда

$$I_2 - I_1 + \frac{b_2}{\rho_2^2} (I_1 a_2 + I_2 b_2) = 0, \quad (1.73)$$

и во-вторых, приращения скорости точки  $O_1$  в составе обоих тел равны друг другу:

$$-\frac{(a_2 + b_2)^2 I_1}{(\rho_2^2 + b_2^2) M_2} = \frac{(\rho_1^2 - a_1 b_1) I + (\rho_1^2 + b_1^2) I_1}{M_1 \rho_1^2}. \quad (1.74)$$

Система шести скалярных уравнений (1.71) – (1.74) позволяет однозначно определить неизвестные  $\Delta V_{1,2}, \Delta \Omega_{1,2}, I_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \frac{I}{M_1} \left( \frac{b_1(a_1 + b_1)}{\rho_1^2} + \frac{M_1(a_2 + b_2)^2}{M_2(\rho_2^2 + b_2^2)} \right) W, \quad \Delta V_2 = -\frac{I_1(a_2 + b_2)b_2}{M_2(\rho_2^2 + b_2^2)}, \\ \Delta \Omega_1 &= \frac{I}{M_1 \rho_1^2} \left( a_1 + b_1 + \frac{a_1 M_1(a_2 + b_2)^2}{M_2(\rho_2^2 + b_2^2)} \right) W, \quad \Delta \Omega_2 = -\frac{I_1(a_2 + b_2)}{M_2(\rho_2^2 + b_2^2)}, \\ I_1 &= \frac{a_1 b_1 - \rho_1^2}{\rho_1^2} W I, \quad I_2 = \frac{\rho_2^2 - a_2 b_2}{\rho_2^2 + b_2^2} I_1, \\ W &= \frac{M_2 \rho_1^2 (\rho_2^2 + b_2^2)}{M_1 \rho_1^2 (a_2 + b_2)^2 + M_2 (\rho_2^2 + b_2^2) (\rho_1^2 + b_1^2)}. \end{aligned}$$

Полученное решение позволяет сделать ряд выводов о характере импульсивного движения.

(1) Реакция  $I_1$  направлена одинаково с  $I$  при условии, что  $a_1 b_1 > \rho_1^2$ , при обратном знаке этого неравенства она имеет противоположное направление, а при обращении его в равенство  $I_1 = I_2 = 0$ .

(2) Реакция  $I_2$  направлена одинаково с  $I_1$  при условии, что  $a_2 b_2 < \rho_2^2$ , при обратном знаке этого неравенства она имеет противоположное направление, а при обращении его в равенство  $I_2 = 0$ .

(3) Точка  $O_1$  приобретает скорость в направлении, противоположном  $I_1$ .

(4) Оба тела, составляющие двойной маятник, приобретут одинаковые угловые скорости при условии

$$m_2(a_1 + b_1)(r_2^2 + b_2^2) + m_1 a_1 (a_2 + b_2)^2 = m_1(r_1^2 - a_1 b_1)(a_2 + b_2) \quad (1.75)$$

Если левая часть в соотношении (1.75) больше правой, то  $\Delta \Omega_1 > \Delta \Omega_2$ , т.е. маятник будет двигаться "коленом назад", в противном случае — "коленом вперед".

## Глава 2. КОЛЛИНЕАРНОЕ СОУДАРЕНИЕ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

### 2.1. КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

**Постановка задачи.** Стойная теория идеального удара, основные элементы которой были представлены в предыдущей главе, к сожалению, мало пригодна для решения наиболее естественных и важных с практической точки зрения задач о механическом соударении твердых тел. Дело в том, что постановка этих задач не предполагает задания ударных сил в виде явной функции времени, поэтому ударный импульс априори неизвестен. Уравнения, выражающие общие теоремы динамики, даже в простейших случаях содержат избыточное число неизвестных, поэтому для их однозначного решения необходимы некоторые дополнительные физические предположения.

В данной главе будет рассмотрен простейший случай, когда два соударяющихся твердых тела движутся поступательно вдоль некоторой прямой как до, так и после удара. Форма тел может быть произвольной, важно лишь, чтобы ударные силы действовали вдоль той же прямой и не создавали вращательного момента. Например, этим условиям удовлетворяют шары, стержни и эллипсоиды, ориентированные одной из осей вдоль линии движения. С точки зрения классической стереомеханики, все эти случаи эквивалентны.

Предполагается, что начальная скорость сближения соударяемых тел не слишком велика, так что при ударе они не разрушаются и не испытывают заметных деформаций. Задача состоит в определении значений скоростей тел сразу после удара, или, что эквивалентно, в определении ударного импульса.

**Уравнения импульсивного движения и их решения.** При поступательном движении абсолютно твердого тела скорости всех его точек одинаковы, поэтому достаточно определить одну из них. Кроме того, так как скорости направлены вдоль фиксированной прямой, они могут рассматриваться как скаляры, так же как и ударные силы.

Обозначая скорости центров масс данных тел  $V_1, V_2$ , а ударный импульс, приложенный ко второму из них  $I$  (по третьему закону Ньютона, к первому телу прикладывается противоположный импульс  $-I$ ), запишем теорему 1.1<sup>o</sup> движения центра масс в применении к каждому из тел:

$$M_1 \Delta V_1 = -I, \quad M_2 \Delta V_2 = I. \quad (2.1)$$

Система двух уравнений (2.1) относительно трех переменных имеет, очевидно, бесчисленное множество решений, которые можно записать в параметрической форме

$$\Delta V_1 = -M_1^{-1} \lambda, \quad \Delta V_2 = M_2^{-1} \lambda, \quad I = \lambda, \quad (2.2)$$

где  $\lambda$  — некоторый положительный параметр. В действительности величина  $\lambda$  может принимать значения из некоторого интервала, что

связано со следующими двумя ограничениями на характер послеударного движения.

Во-первых, значения скоростей непосредственно перед ударом удовлетворяют неравенству  $V_1^- \geq V_2^-$  (т.е. тела сближаются), а после удара  $V_1^+ \leq V_2^+$  (т.е. они расходятся). Отсюда при учете (2.2) следует, что

$$V_1^- - M_1^{-1}\lambda \leq V_2^- + M_2^{-1}\lambda,$$

или

$$\lambda \geq \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (V_1^- - V_2^-). \quad (2.3)$$

Во-вторых, суммарная кинетическая энергия двух данных тел при ударе не возрастает.

Данное условие не следует из теорем динамики и нуждается в комментарии. Согласно общему физическому закону сохранения и превращения энергии, ее величина в любой замкнутой материальной системе сохраняется. На первый взгляд, при ударе должна оставаться неизменной полная механическая энергия системы, однако простейшие эксперименты убеждают в обратном. Так, падающий мяч отскакивает от опоры на высоту, меньшую первоначальной, летящая пуля застревает в мишени, и т.п. Причина кроется в наличии у реальных твердых тел внутренних степеней свободы, которые не учитываются в рамках модели абсолютно твердого тела, но могут "оттягивать" часть его энергии (что проявляется в форме вибраций или волновых процессов), а затем рассеивать ее в тепло или звук.

Можно представить себе и ситуации, когда удар сопровождается высвобождением других источников энергии: например, удар бойка по капсюлю приводит к взрывному освобождению химической энергии, превращающейся затем в кинетическую энергию заряда. Однако, эти ситуации выходят за пределы динамики.

Что касается потенциальной энергии системы двух тел, то она зависит от их координат и, быть может, от времени. Поскольку изменения этих переменных за время удара пренебрежимо малы, то потенциальная энергия сохраняется.

Выразим приращение кинетической энергии по формуле Кельвина:

$$\Delta T = \frac{1}{2}(V_1^- + V_1^+)I - \frac{1}{2}(V_2^- + V_2^+)I.$$

Пользуясь выражениями (2.2), запишем условие невозрастания кинетической энергии в виде

$$\Delta T = \frac{1}{2}(2V_2^- + M_2^{-1}\lambda)\lambda - \frac{1}{2}(2V_1^- - M_1^{-1}\lambda)\lambda \leq 0. \quad (2.4)$$

Вследствие условия (2.3) величина  $\lambda$  положительна, поэтому неравенство (2.4) задает верхнюю границу для  $\lambda$ :

$$\lambda \leq \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2} (V_1^- - V_2^-). \quad (2.5)$$

Любое значение  $\lambda$ , удовлетворяющее неравенствам (2.3) и (2.5) определяет физически возможное решение (2.2) задачи об ударе. В частности, предельному значению, обращающему (2.3) в равенство, соответствует решение

$$V_1^+ = V_2^+ = \frac{M_1 V_1^- + M_2 V_2^-}{M_1 + M_2}. \quad (2.6)$$

Как видно из формулы (2.6), скорости тел выравниваются — так называемый *абсолютно неупругий*, или *пластический* удар. Этот случай впервые рассмотрел Валлис в 1668 г. Примером пластического удара может служить баллистический маятник: снаряд застревает в бочке с землей и дальше они движутся вместе. Заметим, что для абсолютно неупругого удара потери кинетической энергии максимальны.

Другое граничное значение, равное правой части в (2.5), соответствует *абсолютно упругому удару*. Такое решение задачи об ударе было впервые рассмотрено Марци (1639), Реном (1668) и Гюйгенсом (1669) [Huygens, 1929]. Заметим, что для реальных физических тел всегда имеются потери кинетической энергии при ударе, тем не менее, модель абсолютно упругого удара имеет свои области применения (см. вторую часть данной книги).

При абсолютно упругом ударе

$$V_1^+ = \frac{L + M_2(V_2^- - V_1^-)}{M_1 + M_2}, \quad V_2^+ = \frac{L - M_1(V_2^- - V_1^-)}{M_1 + M_2}, \quad (2.7)$$

где  $L = M_1 V_1^- + M_2 V_2^-$  — количество движения. Вычитая первое равенство (2.7) из второго, получим

$$V_2^+ - V_1^+ = -(V_2^- - V_1^-), \quad (2.8)$$

т.е. относительная скорость отскока противоположна относительной скорости сближения.

Наиболее распространен *неупругий удар*, к которому относят все промежуточные значения параметра  $\lambda$ . Такой удар можно описать формулой, аналогичной (2.8), но более общего вида

$$V_2^+ - V_1^+ = -e(V_2^- - V_1^-), \quad e \in (0, 1). \quad (2.9)$$

В данной формуле значение  $e$  не может быть определено при помощи основных теорем динамики, и его можно задавать по-разному. Наиболее распространено правило, обсуждаемое ниже.

**Гипотеза Ньютона.** На основании серии экспериментов Ньютон установил (1687) [Ньютон, 1936], что для данной пары тел коэффициент  $e$  в равенстве (2.9) определяется материалами, из которых они сделаны, и не зависит от скорости сближения. В частности, для

стеклянных шариков Ньютон нашел, что  $e = 15/16$ , для железных  $e = 5/9$  и т.д. Он также ввел понятие двух фаз удара: первая из них — деформация — характеризуется убыванием относительной скорости соударяемых тел до нуля, при этом кинетическая энергия убывает и накапливается энергией упругих деформаций. Во второй фазе — восстановлении — накопленная потенциальная энергия освобождается, и тела расходятся.

Равенство (2.9) позволяет определить значение  $\lambda$  в формулах (2.2):

$$\lambda = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (\Delta V_2 - \Delta V_1) = (1 + e) \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (V_1^- - V_2^-), \quad (2.10)$$

откуда по формуле (2.4) можно рассчитать приращение кинетической энергии:

$$\Delta T = -\frac{1}{2}(1 - e)^2 \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (V_2^- - V_1^-)^2. \quad (2.11)$$

Следовательно, при неупругом ударе ( $e < 1$ ) часть кинетической энергии теряется.

Используя понятие двух фаз удара, коэффициенту восстановления можно придать динамический смысл. Окончание фазы деформации характеризуется таким значением  $\lambda = \lambda_1$ , для которого неравенство (2.3) обращается в равенство:

$$\lambda_1 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (V_1^- - V_2^-).$$

Сравнивая данную величину со значением (2.10) ударного импульса, приходим к выводу, что коэффициент восстановления равен отношению составляющих ударного импульса в фазах восстановления и деформации, т.е.

$$e = (\lambda - \lambda_1)/\lambda_1. \quad (2.12)$$

Именно такой смысл вкладывал в коэффициент восстановления Пуассон [Poisson, 1838]. В рассматриваемом случае оба определения (2.9) и (2.12) эквивалентны, однако в задаче о пространственном ударе с трением, обсуждаемой в главе 3, это не так.

С формальной точки зрения, независимость коэффициента восстановления от начальных условий удара является гипотезой, справедливость которой в каждом конкретном случае подлежит проверке. Многочисленные экспериментальные данные показывают (см. [Голдсмит, 1965]), что в действительности величина  $e$  монотонно убывает с ростом разности  $V_1^- - V_2^-$ , так что при малых скоростях сближения удар близок к абсолютно неупругому, а при больших — к пластическому. Тем не менее, гипотеза Ньютона остается эффективным и простым

средством решения задачи о коллинеарном ударе в некотором ограниченном диапазоне скоростей (на практике — от десятков сантиметров до нескольких метров в секунду).

## 2.2. ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ КОЛЛИНЕАРНОГО УДАРА.

**Деформируемое твердое тело.** Основное отличие волновой теории удара от классической стереомеханики состоит в определении твердого тела. Связи между различными его точками здесь уже не считаются абсолютно жесткими, так что допустимы их относительные перемещения. При этом система существенно усложняется: каждая ее точка имеет три степени свободы (по числу пространственных координат), а общее число независимых координат равно  $3K$ . На практике даже для системы, состоящей из сотни точек, не удается получить обозримое численное или аналитическое решение основной задачи динамики о движении под действием заданных сил и при данных начальных условиях, не говоря уже о том, что реальные тела состоят из неизмеримо большего числа частиц. Ввиду этого иногда оказывается плодотворным представление о твердом теле как о сплошной среде, заполняющей определенный объем в пространстве.

Специфика такого подхода к твердому телу состоит в наличии двух линейных масштабов: относительные перемещения его точек считаются пренебрежимо малыми по сравнению с расстояниями между ними. На первый взгляд может показаться, что наличие малых деформаций не отражается принципиально на динамике системы. Тем не менее, это не так. Наиболее существенное и важное отличие двух моделей твердого тела состоит в наличии или отсутствии внутренних степеней свободы, которые позволяют описать деформации и могут нести потенциальную и кинетическую энергию. Полная механическая энергия тела складывается из предполагаемого значения  $W_0$ , вычисленного без учета деформаций, и внутренней энергии  $W_{in}$ .

**Пример.** Для системы двух частиц, скрепленных жесткой пружиной и движущихся вдоль некоторой прямой в отсутствие внешних сил (см. §1.1), полная механическая энергия равна сумме кинетической энергии частиц и потенциальной энергии пружины:

$$W = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}c(d + x_1 - x_2)^2. \quad (2.13)$$

Величина  $W_0$  равна кинетической энергии движения центра масс

$$W_0 = \frac{(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad (2.14)$$

она сохраняет неизменное значение и в том случае, когда пружина неидеальна и амплитуда колебаний затухает. Внутренняя энергия системы равна разности функций (2.13) и (2.14), т.е.

$$W_{in} = \frac{1}{2}c(d + x_1 - x_2)^2 + \frac{m_1m_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (2.15)$$

По мере затухания колебаний пружины и перехода ее в ненапряженное состояние величина (2.15) убывает до нуля.

Внутренние процессы в деформируемых твердых телах имеют волновой характер, т.е. характеризуются быстрой передачей возмущений вдоль среды без переноса вещества (точки тела совершают при этом колебательные движения). Они могут быть описаны уравнениями математической физики, точное решение которых возможно лишь в исключительных частных случаях, включая обсуждаемую задачу о коллинеарном ударе.

Надо заметить, что в отличие от предыдущего параграфа, использование модели коллинеарного удара деформируемых твердых тел ограничено случаем продольного соударения двух стержней, так как тела более сложной формы при ударе уже не будут двигаться поступательно.

Другая особенность задачи об ударе деформируемых тел состоит в выборе неизвестных величин, подлежащих определению. При поступательном движении абсолютно твердого тела скорости всех его точек одинаковы, а в обсуждаемом случае меняются от точки к точке. Вполне возможна и такая ситуация, когда уже после прекращения ударного контакта колебательные процессы в соударяемых телах продолжаются. В связи с этим нужно уточнить определение промежутка удара.

**Определение.** Промежутком удара деформируемых твердых тел называется интервал времени, на котором в них происходят волновые процессы, сопровождающие изменение внутренней энергии тел.

Таким образом, будем считать, что по окончании удара тела движутся как абсолютно твердые. Период затухания внутренних колебаний зависит от материалов, из которых сделаны тела, а также от их формы и может достигать нескольких секунд (колокол, камертон), но обычно не превышает долей секунды. Следовательно, удар деформируемых тел разбивается на две фазы: в первой из них они контактируют и сообщают друг другу ударные импульсы, во второй движутся независимо под действием приложенных внешних сил и сил инерции. Мы будем считать, что внешние силы не зависят от внутреннего состояния тел. В итоге задача об ударе сводится, как и в случае абсолютно твердого тела, к определению единственной величины — ударного импульса  $I$  в формуле (2.1).

**Уравнение движения деформируемого стержня.** Для описания состояния стержня выберем инерциальную систему отсчета с осью  $X$ , направленной вдоль него и будем обозначать  $u = u(x, t)$  перемещение поперечного сечения, имеющего в момент времени  $t$  абсциссу  $x$ , от некоторого начального его положения в отсутствие деформаций,  $S$  — площадь сечения,  $\gamma$  — плотность материала. Внутреннее состояние системы характеризуется *деформацией*  $\epsilon = du/dx$  и *напряжением*  $\sigma$ , т.е. силой, действующей на единичную площадку в данном сечении. Зависимость  $\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})$  считается заданной, она определяет упругие и пластические свойства материала. Наиболее простой вид она приобретает

для упругой среды: согласно закону Гука

$$\sigma = E\epsilon , \quad (2.16)$$

где коэффициент  $E$  (называемый модулем упругости) зависит только от свойств материала.

Составим баланс сил для элемента стержня  $dx$ , пренебрегая, как обычно, "конечными" силами, например, гравитационной. Напряжение на левом конце элемента равно  $-\sigma(x)$ , а на правом  $\sigma(x+dx) = \sigma(x) + \partial\sigma/\partial x dx$ , масса элемента равна  $\gamma S dx$ , а ускорение  $\partial^2 u / \partial t^2$ , откуда получаем

$$\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} . \quad (2.17)$$

В частности, если выполнено равенство (2.16), то уравнение (2.17) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{E}{\gamma} . \quad (2.18)$$

Это — хорошо известное волновое уравнение, в котором константа  $c$  имеет смысл скорости распространения волны в данной однородной среде. Для построения его решения необходимо задать начальные, а также граничные условия. В начальный момент удара  $t_0$  тела не напряжены, следовательно

$$u(x, t_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t_0) \equiv 0 . \quad (2.19)$$

При этом скорости всех точек стержня одинаковы, за исключением его граничной точки  $x = x_2$ , соударяющейся с другим телом. На концах стержня задаются граничные условия: на свободном конце  $x = x_1$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) \equiv 0 , \quad (2.20)$$

что выражает отсутствие внешней нагрузки, а условие в точке контакта зависит от постановки задачи.

**Примеры.** 1. Деформируемый стержень соударяется с неподвижной абсолютно жесткой преградой (рис. 2.1,а). В этом случае

$$u(x_2, t) = 0, \quad \text{при} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) \leq 0 . \quad (2.21)$$

Последнее неравенство означает, что стержень в точке контакта сжат, его нарушение свидетельствует о разделении тел.

2. При соударении двух стержней с одинаковыми сечениями граничное условие выражает равенство действия и противодействия:

$$E_1 \frac{\partial u_1(x_2, t)}{\partial x} = E_2 \frac{\partial u_2(x_2, t)}{\partial x} , \quad (2.22)$$

где  $u_{1,2}$  — перемещения точек первого и второго стержня соответственно.

**Решение волнового уравнения методом Даламбера.** Удобная в задачах об ударе форма решения волнового уравнения была предложена Даламбером:

$$u = \varphi(ct - x) + \psi(ct + x), \quad (2.23)$$

где функции  $\varphi, \psi$  определяются из начальных и граничных условий.

Вследствие начального условия (2.19)

$$\psi'(ct_0 + x) - \varphi'(ct_0 - x) = 0, \quad (2.24)$$

а сумму  $\psi' + \varphi'$  можно выразить, зная распределение скоростей в момент  $t_0$ . Тем самым можно найти функции  $\varphi'$  и  $\psi'$ , описывающие волны напряжений в соударяемых телах; первая из них распространяется со скоростью  $c$  в положительном направлении, вторая — в отрицательном. В момент достижения одной из волн конца стержня необходимо вновь определять функции  $\varphi', \psi'$  с учетом граничного условия, что соответствует явлению *отражения волны от границы тела*. Зная в каждый момент времени распределение напряжений, несложно определить и момент разъединения стержней, и ударный импульс.

**Примеры.** 1. При ударе стержня, движущегося со скоростью  $V$ , об абсолютно жесткую преграду, в момент времени  $t_0$  скорости всех его точек одинаковы, за исключением граничной точки  $x = x_2$ , скорость которой равна нулю. Не ограничивая общности, положим  $t_0 = 0, x_2 = 0$ , тогда  $x_1 = -l$ . Граничное условие (2.21) примет вид

$$\varphi(ct) + \psi(ct) = 0, \quad \text{пока } \psi'(ct) - \varphi'(ct) \leq 0. \quad (2.25)$$

Дифференцируя равенство в (2.25), получим

$$\psi'(y) = -\varphi'(y) \quad \text{при } y > 0, \quad \text{пока } \varphi'(y) \geq 0. \quad (2.26)$$

Второе граничное условие (2.20) можно записать в виде

$$\varphi'(y + l) = \psi'(y - l) \quad \text{при } y > 0. \quad (2.27)$$

Начальное распределение скоростей описывается формулой

$$\psi'(x) + \varphi'(-x) = \frac{V}{c} \quad \text{при } x \in (-l, 0). \quad (2.28)$$

Решая систему (2.24), (2.28), получаем

$$\psi'(y) = \varphi'(-y) = \frac{V}{2c}, \quad \text{при } y \in (-l, 0). \quad (2.29)$$

Формулы (2.23), (2.26), (2.29) описывают волну напряжений, распространяющуюся со скоростью  $c$  в направлении свободного конца (рис. 2.1,б): во всех точках, лежащих левее фронта волны, скорость равна  $V$ , а напряжение отсутствует; правее от фронта скорость равна нулю, а напряжение равно  $\sigma = -EV/c$ . В момент  $t_1 = l/c$  волна достигнет свободного конца стержня, при этом он будет равномерно деформирован и полностью остановлен (рис. 2.1,в). Такое состояние стержня не будет равновесным, так как оно не удовлетворяет граничному условию (2.20); для

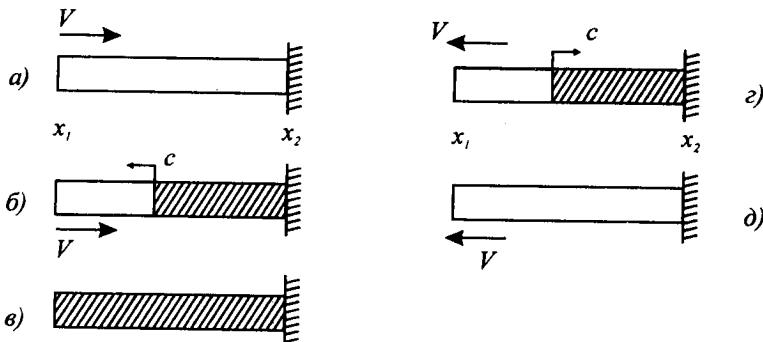


Рис. 2.1. Удар стержня о жесткую преграду

определения последующего движения нужно вычислить значения функций  $\psi(y)$  и  $\varphi(y)$  при  $y > 0$ . Это легко можно сделать на основе равенств (2.26), (2.27). В результате получаем, что обе эти функции нечетны, имеют период  $4l$  и взаимно противоположны, причем  $\varphi'(y) = V/2c$  при  $y \in (0, 2l)$ .

Формулы (2.23) описывают при  $t \in (l/c, 2l/c)$  волну разгрузки, идущую слева направо (рис. 2.1, г): в точках левее ее фронта напряжение отсутствует, а скорость равна  $-V$ . В момент  $t = t_2 = 2l/c$  произойдет полная разгрузка стержня, и в формулах (2.28) правая часть изменит знак, что в соответствии с условием (2.26) свидетельствует об отрыве от препятствия (рис. 2.1, д).

В данном примере ясно видно наличие двух фаз удара: при  $t \in (t_0, t_1)$  происходит переход кинетической энергии в потенциальную энергию упругих деформаций, при  $t \in (t_1, t_2)$  идет обратный процесс. В итоге стержень остается недеформированным, поэтому окончание удара совпадает с моментом прекращения контакта и удар абсолютно упругий. К последнему выводу можно прийти и на основании вычисления ударного импульса  $I$ : так как продолжительность контакта равна  $2(x_2 - x_1)/c$ , а сила, действующая на стержень со стороны препятствия постоянна и равна  $-EV/c$ , то

$$I = -2(x_2 - x_1) \frac{ES}{c^2} V = -2(x_2 - x_1) \gamma SV = -2MV. \quad (2.30)$$

**2. Задача о соударении двух стержней с одинаковыми сечениями** несколько более сложна, но ее можно свести к предыдущей. Для этого достаточно определить распределение скоростей в начальный момент  $t_0$ . Пусть скорость первого тела  $V_1$ , ее имеют все его точки за исключением правового конца, скорость которого неизвестна; обозначим ее  $V^*$ . Ту же скорость имеет левый конец второго тела, а для остальных его точек она равна  $V_2$ . При  $t > t_0$  в каждом из тел начинает распространяться волна напряжения (рис. 2.2, а) за ее фронтом устанавливается скорость  $V^*$  и напряжения  $\epsilon_{1,2}$  (для каждого из тел соответственно), где

$$\epsilon_1 = (V_1 - V^*)/c_1, \quad \epsilon_2 = (V^* - V_2)/c_2.$$

Отсюда вследствие граничного условия (2.22) можно найти величину  $V^*$ :

$$V^* = (E_1 V_1 / c_1 + E_2 V_2 / c_2) (E_1 / c_1 + E_2 / c_2)^{-1}. \quad (2.31)$$

Если времена пробега волн по каждому из тел совпадают, то после отражения от свободных концов к точке контакта одновременно придут волны разгрузки, и

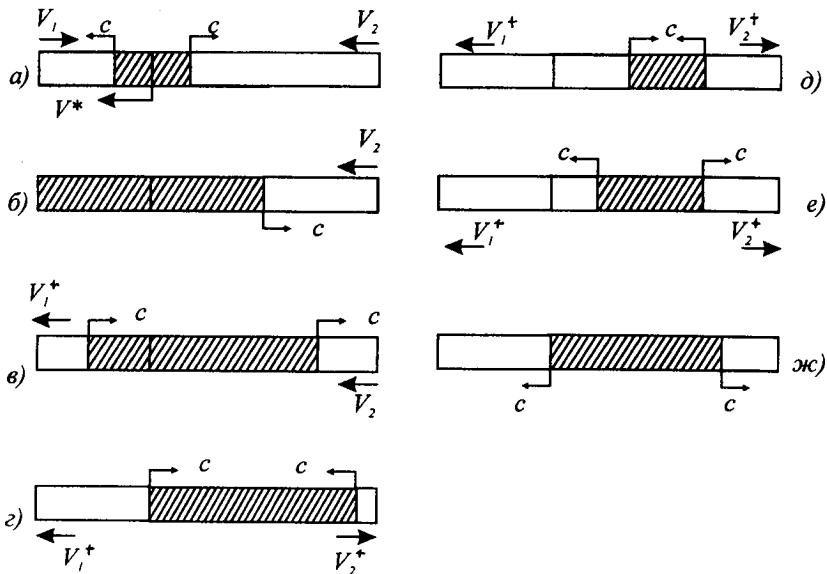


Рис. 2.2. Соударение двух стержней разной длины

удар завершится. Так как стержни разъединяются в ненапряженном состоянии, он абсолютно упругий.

В общем случае сначала удар будет происходить так же: в обоих стержнях возникнут распространяющиеся в обоих направлениях волны сжатия, заполняющие вначале один из стержней (рис. 2.2,б). После этого в нем возникает отраженная от свободного конца волна растяжения (рис. 2.2,в), и при  $t = 2l_1/c_1$  весь этот стержень окажется полностью разгруженным, тогда как во втором стержне еще распространяется волна сжатия (рис. 2.2,г).

Хотя начиная с этого момента сила взаимодействия между стержнями равна нулю, однако их разъединения еще не происходит, они продолжают двигаться совместно. Вдоль второго стержня в одном общем направлении будут распространяться две волны — ранее возникшая волна сжатия и волна растяжения от плоскости соприкосновения стержней. Затем от свободного торца второго стержня отразится волна растяжения; состояние стержней сначала соответствует рис. 2.2,д, а после встречи фронтов волн растяжения — рис. 2.2,е. Этот этап процесса закончится, когда фронт движущейся влево волны растяжения достигнет плоскости соприкосновения стержней (рис. 2.2,ж) и произойдет их разъединение.

Можно заметить, что величина ударного импульса после разгрузки области контакта уже не изменяется; по аналогии с (2.30)

$$I = -2M_1(V_1 - V^*) = \chi(V_2 - V_1)M_1, \quad \chi = \frac{2\gamma_2 c_2}{\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2}. \quad (2.32)$$

В итоге получаем следующее решение задачи об ударе:

$$V_1^+ = \chi V_2 + (1 - \chi)V_1, \quad V_2^+ = V_2 - \chi \frac{M_1}{M_2}(V_2 - V_1). \quad (2.33)$$

Заметим, что часть кинетической энергии системы перейдет во внутреннюю энергию второго стержня, т.е. удар будет неупругим. Для коэффициента восстановления имеем такое значение:

$$e = \frac{V_2^+ - V_1^+}{V_1 - V_2} = x \frac{M_1}{M_2} + x - 1. \quad (2.34)$$

Поскольку время прохождения ударной волны по первому стержню равно  $(x_2 - x_1)/c_1 = M_1/(S\gamma_1 c_1)$  и не превышает аналогичной величины, вычисленной для второго стержня, то  $M_1/M_2 \leq \gamma_1 c_1 / \gamma_2 c_2 = 2/x - 1$ . Следовательно, правая часть в формуле (2.34) не превосходит единицы.

В частности, если стержни сделаны из одинакового материала, то  $x = 1$ , откуда  $e = M_1/M_2$ .

Полученный результат имеет и отличие, и сходство с гипотезой Ньютона. Во-первых, в волновой теории удара коэффициент восстановления оказался зависящим не только от физических свойств соударяемых тел, но и от их формы и размеров. Во-вторых, он не зависит от начальной скорости сближения. Этот вывод на практике ограничен диапазоном от нуля до нескольких метров в секунду, что связано с правомерностью использования закона (2.16). В общем случае необходимо использовать более сложную зависимость напряжения от деформации, характеризующую упруго-пластичные свойства среды; соответственно усложняется решение задачи об ударе [Зукас и др., 1985].

### 2.3. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ

**Общая характеристика дискретных моделей.** Рассмотренные выше решения задачи о коллинеарном ударе двух твердых тел на основе гипотезы Ньютона и методами волновой теории могут рассматриваться как полярные и в смысле сложности вычислений, и в смысле соответствия результатов реальности. С практической точки зрения, каждая из этих моделей обладает весьма существенными недостатками: первая слишком груба и не позволяет определить такие важные характеристики процесса удара, как его длительность, максимальную нагрузку и т.п. Вторая модель в этом смысле более привлекательна, однако уравнения волновой теории, как правило, очень сложны для решения, поэтому в ее рамках остается открытым основной вопрос определения ударного импульса как функции начальных условий.

Использование дискретных моделей в теории удара можно рассматривать как компромисс, позволяющий с большей или меньшей достоверностью описать поведение деформируемых твердых тел посредством конечного числа переменных. Изменение этих переменных описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Последняя может быть решена известными методами (как правило, численными), в результате удается оценить различные характеристики удара.

Методы построения дискретных моделей отличаются разнообразием: к ним относится, прежде всего, представление твердого тела в виде некоторого конечного числа компонент, обладающих относительно простыми механическими свойствами — так называемых конечных элементов [Голдсмит, 1965, Джонсон, 1989, Кильчевский, 1976, Ляв, 1935, Пановко, 1977, Рагульскене, 1974]. Кроме того, следует отметить квазистатическую теорию Герца, которую можно обобщить путем добавления вязкого трения.

Известны также модели коллинеарного удара, объединяющие дискретные и волновые свойства [Sears, 1909]. Они неплохо согасуются с данными экспериментов по соударению стержней с закругленными концами.

**Одномерные деформируемые элементы.** Деформируемым элементом называют воображаемый объект, обладающий свойством деформироваться под действием приложенной нагрузки по заданному закону. Одномерный элемент характеризуется зависимостью

$$F = F(\epsilon, \dot{\epsilon}), \quad (2.35)$$

где  $\epsilon$  — деформация,  $F$  — действующая сила.

Простейшим деформируемым элементом является невесомая пружина (рис. 2.3, а): в данном случае имеет место линейная зависимость нагрузки от деформации (что аналогично закону Гука (2.16))

$$F = c\epsilon, \quad (2.36)$$

где  $c$  — коэффициент жесткости.

Заметим, что для всякого безынерционного элемента силы инерции равны нулю, поэтому имеется равновесие между силами, приложенными к его граничным точкам.

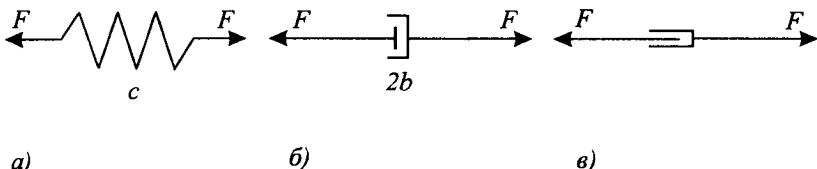


Рис. 2.3. Простейшие деформируемые элементы

Другие часто используемые в технической теории колебаний элементы схематично изображены на рисунках 2.3,б и 2.3,в:

б) вязкий элемент (демпфер) характеризуется явной зависимостью нагрузки лишь от скорости деформации  $\dot{\epsilon}$ , но не от  $\epsilon$ . Наиболее проста линейная модель

$$F = b\dot{\epsilon}, \quad (2.37)$$

где  $b$  — коэффициент вязкого трения;

в) жестко-пластичный элемент используется для описания систем с сухим трением, здесь зависимость силы от скорости деформации кусочно-постоянна:

$$F = F_0 \operatorname{sign} \dot{\epsilon}, \quad (2.38)$$

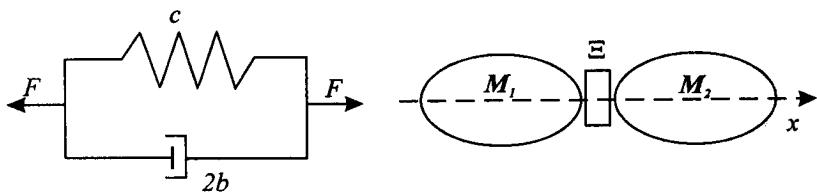


Рис. 2.4. Модель  
Кельвина – Фойхта

Рис. 2.5. Соударение с промежуточным  
деформируемым элементом

где \$F\_0\$ — некоторая константа.

В каждом из рассмотренных случаев деформируемый элемент отражает определенное физическое свойство — упругость, вязкость или пластичность материала. Для одновременного учета различных качеств можно либо использовать комбинацию из нескольких основных элементов, либо задать зависимость (2.35) непосредственно.

**Пример.** Вязкоупругая модель Кельвина – Фохта может быть составлена из элементов а) и б), подключенных параллельно (рис. 2.4), при этом

$$F = c\epsilon + b\dot{\epsilon}. \quad (2.39)$$

Другие примеры, имеющие прикладное значение, можно найти в [Голдсмит, 1965, Пановко, 1977].

**Исследование соударения твердых тел при помощи промежуточного деформируемого элемента.** Вновь обратимся к обсуждаемой задаче о коллинеарном ударе двух твердых тел. Простейший способ свести ее к дискретной системе состоит в добавлении (мысленно) в точку контакта элемента \$\Xi\$ вида (2.35) (рис. 2.5), который перед ударом недеформирован. Величина деформации \$\epsilon\$ равна сближению тел, \$\dot{\epsilon}\$ — скорости сближения. Уравнения движения в отсутствие прочих сил выглядят так:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 &= -F(\epsilon, \dot{\epsilon}), \\ M_2 \ddot{x}_2 &= F(\epsilon, \dot{\epsilon}), \quad \epsilon = x_2^0 - x_2 - x_1^0 + x_1. \end{aligned} \quad (2.40)$$

В данной формуле верхний индекс "0" обозначает значения переменных в начале удара.

**Замечание.** В задачах о соударении твердых тел реакция имеет односторонний характер: она сопутствует возникновению деформаций. Поэтому ниже будем подразумевать, что \$F \equiv 0\$ при \$\epsilon \leq 0\$.

Разделим первое уравнение (2.40) на \$M\_1\$ и вычтем из него второе уравнение, деленное на \$M\_2\$; в результате получим единственное уравнение относительно переменной \$\epsilon\$:

$$\ddot{\epsilon} + (M_1^{-1} + M_2^{-1})F(\epsilon, \dot{\epsilon}) = 0, \quad (2.41)$$

$$\epsilon(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}(t_0) = V_1^- - V_2^- .$$

Решение задачи Коши (2.41) не составляет технических трудностей, хотя, как правило, его можно построить лишь численными методами. Признаком окончания удара является равенство

$$\ddot{\epsilon}(t_0 + \tau) = 0 , \quad (2.42)$$

свидетельствующее о разгрузке элемента  $\Xi$ . Определив величину  $\tau$  из условия (2.42), вычисляем скорость отскока

$$\dot{\epsilon}(t_0 + \tau) = V_1^+ - V_2^+ . \quad (2.43)$$

Отсюда для ньютоновского коэффициента восстановления получаем

$$e = -\dot{\epsilon}(t_0 + \tau)/\dot{\epsilon}(t_0) . \quad (2.44)$$

Тем самым задача о коллинеарном ударе решена.

**Пример.** Пусть элемент  $\Xi$  описывается моделью Кельвина – Фохта (2.39). Уравнение (2.41) в этом случае принимает вид

$$\ddot{\epsilon} + b^* \dot{\epsilon} + c^* \epsilon = 0 , \quad (2.45)$$

$$b^* = (M_1^{-1} + M_2^{-1})b, \quad c^* = (M_1^{-1} + M_2^{-1})c .$$

Решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (2.45) является, как известно, линейной комбинацией показательных функций  $\exp(\lambda_1 t)$  и  $\exp(\lambda_2 t)$ , где  $\lambda_{1,2}$  — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + b^* \lambda + c^* = 0 . \quad (2.46)$$

Вследствие начальных условий (2.41) это решение выглядит так:

$$\epsilon(t) = \dot{\epsilon}(t_0)[\exp \lambda_1(t - t_0) - \exp \lambda_2(t - t_0)]/(\lambda_1 - \lambda_2) .$$

Продолжительность контакта  $\tau$  в соответствии с (2.42) удовлетворяет уравнению

$$\lambda_1^2 \exp \lambda_1 \tau - \lambda_2^2 \exp \lambda_2 \tau = 0 , \quad (2.47)$$

откуда путем несложных вычислений получаем

$$\tau = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad e = \exp(-\frac{1}{2} b^* \tau) . \quad (2.48)$$

Данные формулы требуют некоторого пояснения. В зависимости от знака дискриминанта квадратного уравнения (2.46) его корнями будут либо отрицательные действительные числа, либо комплексно

сопряженная пара. В первом из этих случаев всегда  $\tau > 0$ ,  $e < 1$ , что свидетельствует о физической непротиворечивости рассматриваемой модели. Во втором случае разность корней чисто мнимая, а их отношение имеет единичный модуль, так что логарифм также чисто мнимый. Из бесчисленного множества ветвей комплексного логарифма следует выбрать ту, для которой величина  $\tau$  в формуле (2.48) была наименьшим положительным числом.

Можно сделать вывод: использование модели Кельвина – Фохта приводит к классической гипотезе Ньютона, с коэффициентом восстановления, зависящим от параметров упругости и вязкости. В частности, удар будет абсолютно упругим, если  $b = 0$  и неупругим, если  $b > 0$ .

В общем случае промежуточного элемента, описываемого формулой (2.35), полученный результат может и не быть физически допустимым, если расчетное значение коэффициента восстановления оказывается большим единицы. Ниже рассматриваются методы построения дискретной модели, свободные от этого недостатка.

**Квазистатические модели.** Теория контактного взаимодействия деформируемых твердых тел была разработана Герцем для случая тел, ограниченных в окрестности точки касания криволинейными поверхностями [Hertz, 1882]. Она основана на допущениях, что характерные размеры области контакта малы по сравнению с размерами каждого из тел и с радиусами кривизны их поверхностей, а деформации упруги. Основной результат устанавливает связь между сближением тел  $\epsilon$  и сдавливающей силой  $F$  в виде

$$F = K \epsilon^{3/2}, \quad (2.49)$$

где коэффициент  $K$  зависит как от свойств материалов данных тел, так и от формы их поверхностей в точке контакта. В частности, для сферических поверхностей с радиусами  $r_1$  и  $r_2$

$$K = \frac{4}{3} \left( \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} \left( \frac{1 - \bar{\mu}_1^2}{E_1} + \frac{1 - \bar{\mu}_2^2}{E_2} \right)^{-1}. \quad (2.50)$$

Здесь  $E_{1,2}$  — модули упругости, а  $\bar{\mu}_{1,2}$  — коэффициенты Пуассона материалов обоих тел.

Формулу (2.49) часто используют и для описания соударений, если скорость сближения достаточно мала. Последнее ограничение обусловлено двумя физическими обстоятельствами. Во-первых, возможность пренебречь волновыми явлениями в соударяемых телах появляется лишь в том случае, когда продолжительность контакта намного больше времени пробега волны вдоль тела. Эксперименты показывают, что эта продолжительность уменьшается с ростом начальной скорости сближения. Во-вторых, допущение об упругом характере деформаций оправдано при условии, что возникающие напряжения не

превосходят некоторого предельного значения (так называемого *предела упругости*).

Уравнения удара, основанные на формуле (2.49), можно представить в форме (2.40) или (2.41). Их отличительной чертой является независимость ударной реакции от скорости деформации: в каждый момент времени она описывается точно так же, как если бы система находилась в равновесии. Ввиду этого модели удара вида

$$\ddot{\epsilon} + (M_1^{-1} + M_2^{-1})F(\epsilon) = 0 \quad (2.51)$$

(где  $F$  — произвольная положительная функция) называют *квазистатическими*.

Привлекательной чертой квазистатических моделей является их простота: вне зависимости от конкретного вида функции  $F(\epsilon)$ , уравнение (2.51) консервативно. Это означает, что если ввести в рассмотрение кинетическую энергию относительного движения соударемых тел в системе координат, связанной с центром масс системы:

$$T_r = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \dot{\epsilon}^2 \quad (2.52)$$

и потенциальную энергию упругих деформаций

$$W_e(\epsilon) = \int_0^\epsilon F(s)ds, \quad \epsilon > 0, \quad (2.53)$$

то оказывается, что сумма этих величин постоянна.

Действительно, в силу уравнения (2.51)

$$\frac{d}{dt}(T_r + W_e) = 0. \quad (2.54)$$

Как известно, всякая консервативная система с одной степенью свободы интегрируема, т.е. ее общее решение можно выразить явными формулами, содержащими конечное число алгебраических операций и квадратур. В обсуждаемой задаче об ударе начальные условия заданы в (2.41), с их помощью можно рассчитать постоянную энергии:

$$T_r + W_e = \frac{1}{2} M^* \dot{\epsilon}_0^2, \quad M^* = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}. \quad (2.55)$$

Подставляя выражения (2.52), (2.53) в тождество (2.55), после несложных преобразований получим

$$\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt = \pm (\dot{\epsilon}_0^2 - 2W_e(\epsilon)/M^*)^{1/2}, \quad (2.56)$$

где знак "плюс" соответствует первой фазе удара, "минус" — восстановлению. Решение дифференциального уравнения первого порядка (2.56) с начальным условием  $\epsilon_o = 0$  имеет вид

$$t - t_0 = \pm \int_0^{\epsilon} (\epsilon_0^2 - 2W_e(\epsilon)/M^*)^{-1/2} d\epsilon . \quad (2.57)$$

Максимальной деформации  $\epsilon_{\max}$  соответствует обращение правой части в (2.56) в ноль, при этом (вследствие подразумевающейся монотонности функции  $F'(\epsilon)$ ), будет максимальна и ударная нагрузка:

$$F_{\max} = F(\epsilon_{\max}), \quad 2W_e(\epsilon_{\max}) = \dot{\epsilon}_o^2 . \quad (2.58)$$

В момент окончания удара  $t_0 + \tau$  деформация вновь обращается в ноль, по соображениям симметрии

$$\tau = 2 \int_0^{\epsilon_{\max}} (\epsilon_0^2 - 2W_e(\epsilon)/M^*)^{-1/2} d\epsilon . \quad (2.59)$$

Следовательно, решение уравнения (2.51) дает полезную информацию о динамике удара, остающуюся вне пределов классической теории: оно позволяет определить его продолжительность и максимальную нагрузку. Эти данные хорошо согласуются с экспериментами [Голдсмит, 1965, Джонсон, 1989], что подтверждает практическую ценность квазистатических моделей.

Вместе с тем, они обладают существенным недостатком, так как не отражают потери энергии при ударе. Действительно, в конце удара  $W_e = 0$ , следовательно,  $\dot{\epsilon}^+ = -\dot{\epsilon}^-$ . Таким образом, удар в квазистатической модели всегда абсолютно упругий. Для учета диссипативных явлений следует усложнить формулу для напряжений, введя в нее зависимость от скорости деформации  $\dot{\epsilon}$ . Получаемые при этом модели удара обсуждаются ниже.

**Упругопластические деформации.** Чисто пластические деформации имеют необратимый характер. Это означает, что при сдавливании тел их кинетическая энергия преобразуется в потенциальную энергию деформирования, а обратная трансформация невозможна. В случае коллинеарного пластического удара скорости тел выравниваются в соответствии с формулой (2.6), при этом ударный импульс имеет минимальное возможное значение, а максимум соответствует абсолютно упругому удару. Промежуточные случаи можно получить, допуская одновременное наличие упругих и пластических деформаций. Такую комбинированную модель можно описать формулой

$$F = F(\epsilon, \text{sign } \dot{\epsilon}) . \quad (2.60)$$

Соотношение (2.60) означает, что сдавливание тел ( $\dot{\epsilon} > 0$ ) описывается функцией  $F = F_1(\epsilon)$ , а восстановление ( $\dot{\epsilon} < 0$ ) — другой функцией  $F = F_2(\epsilon)$ , причем  $F_2 < F_1$  (см. [Голдсмит, 1960, §4.3], [Зукас и др., 1985]). Для количественной оценки нужно задать зависимости потенциальной энергии упругих и пластических деформаций  $W_e, W_p$  от  $\epsilon$ . Величину наибольшей деформации  $\epsilon_{\max}$  можно определить из уравнения баланса энергии

$$\frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \dot{\epsilon}^2(t_0) = W_e(\epsilon_{\max}) + W_p(\epsilon_{\max}) . \quad (2.61)$$

Скорость отскока определяется энергией упругих деформаций:

$$\frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \dot{\epsilon}^2(t_0 + \tau) = W_e(\epsilon_{\max}) . \quad (2.62)$$

Следовательно, для коэффициента восстановления в соответствии с (2.44) получаем такое выражение:

$$\epsilon^2 = W_e(\epsilon_{\max}) / [W_e(\epsilon_{\max}) + W_p(\epsilon_{\max})] . \quad (2.63)$$

Конкретные выражения энергий деформаций приведены в [Джонсон, 1989, §11.5], где, в частности, показано, что коэффициент восстановления в упруго-пластичной модели зависит от начальной скорости сближения  $V$ . Для больших значений этой скорости  $e$  пропорционален  $V^{-0.25}$ .

**Упругие деформации с вязким трением.** Другой способ учета энергетических потерь при неупругом ударе состоит в добавлении к системе (2.51) силы трения. Простейшие способы задания этой силы выражаются формулами (2.37) (вязкое трение) и (2.38) (сухое трение). Заметим, что второй из этих случаев сводится к упруго-пластической модели (2.60). Поэтому остановимся подробнее на ударе с вязким трением.

Наряду с простейшей формулой Кельвина – Фохта (2.39), к числу вязкоупругих относится и более общий нелинейный тип зависимости

$$F = f(\epsilon) + g(\epsilon)\dot{\epsilon} , \quad (2.64)$$

где  $f, g$  — произвольные положительные функции. В частности, можно положить в соответствии с формулой Герца (2.49)

$$f(\epsilon) = K\epsilon^{3/2} . \quad (2.65)$$

Простейшим типом функции  $g(\epsilon)$  является константа, однако, из физических соображений, такое описание трения не всегда реалистично. Действительно, в начальной фазе ударного контакта, когда деформация  $\epsilon$  близка к нулю, первое слагаемое в формуле (2.64) исчезающее

мало, а второе равно нулю при  $\epsilon = 0$ , но скачкообразно возрастает при  $\epsilon > 0$ . В соответствии с законом вязкости, установленным Ньютоном в 1687 году, сила сопротивления пропорциональна площади, на которой происходит сдвиг. Отсюда следует, что при ударе выпуклых тел функция  $g(\epsilon)$  должна быть порядка  $\epsilon$ , а при ударе тел с плоскими поверхностями можно считать  $g(\epsilon) = \text{const}$ .

На практике используются и другие выражения для функции  $g(\epsilon)$ . Так, в [Hunt, Grossley, 1975] предложена формула

$$g(\epsilon) = C_1 \epsilon^{3/2} . \quad (2.66)$$

В [Lankarani, Nikravesh, 1990] получена оценка диссипации энергии при ударе с трением вида (2.66) в предположении, что эта диссипация намного меньше максимума потенциальной энергии упругих деформаций. В этом случае

$$1 - e^2 = \frac{4C_1}{3K} \dot{\epsilon}(t_0) . \quad (2.67)$$

Из формулы (2.67) можно получить, что для достаточно малых значений скорости сближения коэффициент восстановления линейно зависит от последней:

$$e = 1 - \frac{2C_1}{3K} \dot{\epsilon}(t_0) . \quad (2.68)$$

Заметим, что выражению (2.64) можно придать наглядный физический смысл, преобразуя его к виду

$$F = \frac{dW_e}{d\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon}, \quad W_e = \int_0^\epsilon f(s) ds, \quad \mathcal{R} = \frac{1}{2} g(\epsilon) \dot{\epsilon}^2 . \quad (2.69)$$

Здесь, как и ранее,  $W_e$  — потенциальная энергия упругих деформаций,  $\mathcal{R}$  — диссипативная функция, или функция Релея.

Формула (2.64) с достаточной точностью описывает процесс деформирования в телах, быстро восстанавливающих свою форму. Ее можно использовать, например, для анализа соударения металлических или стеклянных шаров. В том случае, когда одно из тел (или оба) сделаны из материалов со значительными реологическими свойствами, такими, как многие из полимеров (например, жесткая резина), более оправдано применение таких моделей, в которых упругий элемент и демпфер соединены последовательно. Наиболее известна упруговязкая модель Максвелла (рис. 2.6). Оказывается, динамика этой системы не определяется полностью заданием величин  $\epsilon$  и  $\dot{\epsilon}$  в некоторый момент времени: условно говоря, для этого надо знать состояния демпфера и пружины по отдельности.

Представим деформацию в виде суммы

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_d , \quad (2.70)$$

где индексы отмечают принадлежность к упругому элементу или демпферу. Так как оба эти элемента считаются безмассовыми, условия динамического равновесия выглядят так:

$$F = c\epsilon_1, \quad F = b\dot{\epsilon}_2 . \quad (2.71)$$

Продифференцируем первое из соотношений (2.71), умножим на  $b/c$  и сложим со вторым. При учете формулы (2.70) получаем

$$\frac{b}{c} \dot{F} + F = b\dot{\epsilon} . \quad (2.72)$$

Решая линейное дифференциальное уравнение (2.72) относительно  $F$ , получим

$$F = c \exp(-ct/b) \int_0^t \exp(ct/b)\dot{\epsilon}(t) dt . \quad (2.73)$$

Можно сказать, что в модели Максвелла сжимающее усилие зависит не только от деформации и скорости деформации в текущий момент времени, но и от предыстории системы. Это свойство вообще присуще и другим, более сложным вязкоупругим моделям, включающим последовательно соединенные элементы.

Рассмотрим соударение твердых тел с преграждающим элементом  $\Xi$ , заданным формулой (2.73). Для получения уравнений движения в дифференциальной форме нужно выразить  $F$  через  $\dot{\epsilon}$  из равенства (2.41):

$$F = -M^* \ddot{\epsilon}, \quad M^* = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} . \quad (2.74)$$

Отсюда можно выразить производную  $\dot{F}$  через  $d^3\epsilon/dt^3$ , а затем подставить полученные значения в формулу (2.72). Итогом является следующая система

$$\frac{d^3\epsilon}{dt^3} + \frac{c}{b} \ddot{\epsilon} + c \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \dot{\epsilon} = 0 , \quad (2.75)$$

$$\epsilon(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}(t_0) = V_1^- - V_2^-, \quad \ddot{\epsilon}(t_0) = 0 .$$

Последнее начальное условие означает, что в начальный момент удара сила взаимодействия между телами равна нулю.

Решение линейного уравнения (2.75) с постоянными коэффициентами не составляет сложностей. По аналогии с примером, приведенным выше, можно определить характеристики удара: его продолжительность  $\tau$ , наибольшее значение силы сжатия и т.п. (см. [Пановко,

1977]). Приведем лишь выражение для коэффициента восстановления (как и в модели Кельвина – Фохта, он не зависит от начальной скорости сближения):

$$e = \exp\left(-\alpha\pi/\sqrt{1-\alpha^2}\right), \quad \alpha = \sqrt{cM^*}/2b. \quad (2.76)$$

**Многомассовые дискретные модели.** Наряду с рассмотренной выше моделью соударения с промежуточным деформируемым элементом (рис. 2.5), в которой тела считаются абсолютно твердыми, используются и более сложные конструкции, составленные из конечного числа массивных и безынерционных деформируемых элементов. При этом оказывается возможным не только определение сил взаимодействия между телами, но и учет внутренних колебательных процессов. В то же время число степеней свободы данной механической системы конечно, что позволяет исследовать ее методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как показывает следующий простейший пример многомассовой системы, анализ требует привлечения численных методов.

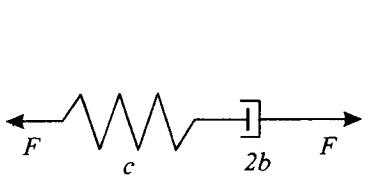


Рис. 2.6. Модель Maxwellла

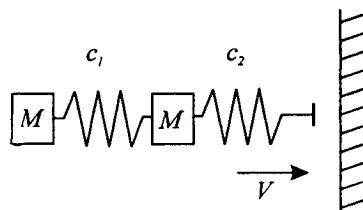


Рис. 2.7. Удар двухмассовой системы о препятствие

**Пример.** Система, состоящая из двух равных масс и двух линейных упругих элементов, ударяется о жесткое препятствие (рис. 2.7). Число степеней свободы равно двум: в качестве лагранжевых координат можно взять смещения масс  $x_1, x_2$  от их положения в начальный момент контакта. Предполагается, что начальная деформация отсутствует.

Для составления уравнений движения заметим, что деформации пружин равны  $\epsilon_1 = x_2 - x_1$ ,  $\epsilon_2 = x_2$ . Из условия баланса сил инерции и упругости для каждой из масс получаем

$$M\ddot{x}_1 = c_1(x_2 - x_1), \quad M\ddot{x}_2 = c_1(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}c_2(x_2 + |x_2|), \quad (2.77)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = V.$$

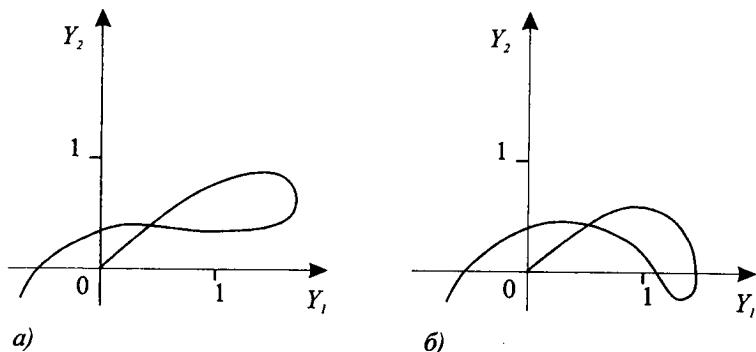


Рис. 2.8. Орбиты двухмассовой системы в области удара: а) с одним интервалом контакта, б) с двумя интервалами контакта

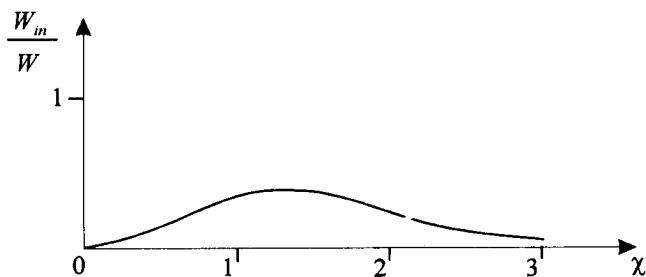


Рис.2.9. Зависимость энергетических потерь от параметра  $\chi$

Отметим важную особенность второго из уравнений (2.77): оно имеет разную форму при  $x_2 > 0$  и при  $x_2 < 0$ , что отражает односторонний характер связи между двухмассовой системой и препятствием (если  $x_2 < 0$ , то реакция равна нулю).

Для удобства анализа перейдем к безразмерным переменным  $y_1, y_2$  таким образом, чтобы максимально сократить число параметров задачи. В итоге получим следующую систему с единственным параметром  $\chi = c_2/2c_1$ :

$$y''_1 = \frac{d^2 y}{d w^2} = y_2 - y_1, \quad y''_2 = y_1 - y_2 - \chi(y_2 + |y_2|) \quad w = t \sqrt{\frac{c_1}{M}}, \quad (2.78)$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y'_1(0) = y'_2(0) = 1, \quad y_{1,2} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{c_1}{M}} x_{1,2}.$$

Система (2.78) кусочно-линейна, ее общее решение выражается стандартными формулами, имеющими различный вид в областях  $x_2 > 0$  и  $x_2 < 0$ . Следует особо подчеркнуть то важное обстоятельство, что в рассматриваемой задаче (и вообще при использовании многомассовых моделей) изменение знака величины  $y_2$  с плюса на минус еще не

свидетельствует об окончании удара, так как собственные колебания могут привести к возобновлению контакта с препятствием. Аналогичная ситуация наблюдается, в частности, в задаче о поперечном ударе шара по упругой балке [Timoshenko, 1913]. Как показали проведенные расчеты, для значений  $\chi < 1.9$  ударный контакт будет одиночным. Вид орбиты в плоскости переменных  $y_1, y_2$  представлен на рис. 2.8,а для значения  $\chi = 1$ .

Если  $\chi > 1.9$ , то удар содержит два интервала контакта, аналогично траектории рис. 2.8,б для  $\chi = 3$ . По окончании первого контакта (что соответствует значению  $w = 1.43$ )  $\dot{y}_1 = 0.39, \dot{y}_2 = -0.58$ , т.е. первая масса еще движется вправо. Повторный контакт происходит при  $w \in (2.30, 3.63)$  и оканчивается при скоростях  $\dot{y}_1 = -0.98, \dot{y}_2 = -0.97$ .

Рис. 2.9 показывает зависимость доли внутренней энергии в конце удара от параметра  $\chi$ . Заметим, что для  $\chi > 1.9$  после первого отрыва поступательное движение системы почти отсутствует, так что "промежуточное" значение коэффициента потерь близко к единице. Так, для  $\chi = 3$  это значение равно 0.99, тогда как после повторного контакта  $W_{in} = 0.05W$ .

Интересно отметить, что удар переходит в абсолютно упругий как в пределе при  $\chi \rightarrow \infty$  (жесткий контакт с препятствием), так и при  $\chi \rightarrow 0$  (жесткая связь между массами). Наибольшая потеря энергии поступательного движения (около 23%) происходит при  $\chi = 1.1$ , а при  $\chi \leq 0.3$  и при  $\chi \geq 10$  величина  $W_{in}/W$  практически равна нулю.

## 2.4. РОЛЬ "КОНЕЧНЫХ" СИЛ В ТЕОРИИ НИЗКОСКОРОСТНОГО УДАРА

**Уравнения удара с учетом "конечных" сил.** При выводе уравнений импульсивного движения в §1.1 мы пренебрегли величинами интегралов от действующих на точки активных сил  $\mathbf{Q}$  по промежутку действия ударных сил по сравнению с ударными импульсами. Такое допущение общепринято и вполне оправдано в задачах о действии заданных ударов на механическую систему. В данной главе рассматриваются задачи иного рода: ударные силы не заданы заранее, а подлежат определению. Методам решения этой задачи посвящены предыдущие два параграфа, причем внешние силы предполагались отсутствующими. Примером может служить прямой центральный удар биллиардных шаров, движущихся по горизонтальному столу без трения.

Пример другого рода: мяч движется в комнате, ударяясь о стены, пол или потолок (как при игре в сквош). Сила тяжести возвращает мяч, летящий некоторое время вверх, на пол вне зависимости от того, коснется он потолка или нет. Если максимальная высота свободного полета близка к высоте комнаты, то не всегда можно с уверенностью сказать, имел ли место удар или нет. Следовательно, наличие "конечной" силы влияет на характер удара с низкой начальной скоростью.

Для количественной оценки этого влияния необходимо составить уравнения импульсивного движения в форме (2.40) с учетом всех действующих сил, а затем исследовать их одним из описанных выше методов. Определяющими являются уравнения движения центров масс, которые при коллинеарном ударе выглядят так:

$$M_1 \dot{V}_1 = Q_1 - F, \quad M_2 \dot{V}_2 = Q_2 + F. \quad (2.79)$$

В моделях удара, учитывающих его продолжительность, ударная сила  $F$  имеет максимальное значение, убывающее до нуля при убывании начальной скорости сближения ( $V_1^- - V_2^-$ ). Поэтому при низкоскоростном ударе активные силы  $Q_{1,2}$  могут оказаться более весомыми, чем ударная реакция. В последующих разделах данного параграфа получены формулы для вычисления ударного импульса для различных моделей силы  $F$ .

**Соударение деформируемого стержня с горизонтальной опорой.** Вернемся к задаче о соударении деформируемого стержня с абсолютно жесткой преградой, рассмотренной в §2.2 без учета внешних сил. Будем теперь считать, что стержень движется вдоль вертикали под действием силы тяжести. Здесь возможно два принципиально разных случая — удары о "пол" или "потолок", схематично изображенные на рис. 2.10. В обоих случаях выберем начало отсчета на границе препятствия, так что недеформированный стержень занимает промежуток  $x \in [-l, 0]$ .

Для вывода уравнения движения надо учесть в равенствах (2.17) и (2.18) силу тяжести. В результате получим неоднородное волновое уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm g, \quad (2.80)$$

где знак "плюс" соответствует полу, "минус" — потолку. Функция  $u(x, t)$  удовлетворяет начальным условиям (2.19) и граничным условиям (2.20), (2.21), где будем считать  $t_0 = 0$ ,  $x_2 = 0$ .

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$u = \varphi(ct - x) + \psi(ct + x) \pm \frac{1}{2}gt^2, \quad (2.81)$$

где функции  $\varphi$ ,  $\psi$  определяются из начальных и граничных условий. Несложная проверка показывает, что уравнение (2.80) удовлетворяется при любом выборе дважды дифференцируемых функций  $\varphi$ ,  $\psi$ , поэтому ими надо распорядиться в соответствии с другими ограничениями.

По аналогии с рассмотрениями §2.2, из начальных условий можно определить значения функций  $\varphi(-y)$  и  $\psi(y)$  при  $y \in (-l, 0)$  (см. формулу (2.29)), а затем продолжить их для других значений аргумента при помощи граничных условий. Первое из них (для свободного конца) совпадает с (2.27), второе же несколько отличается от (2.26).

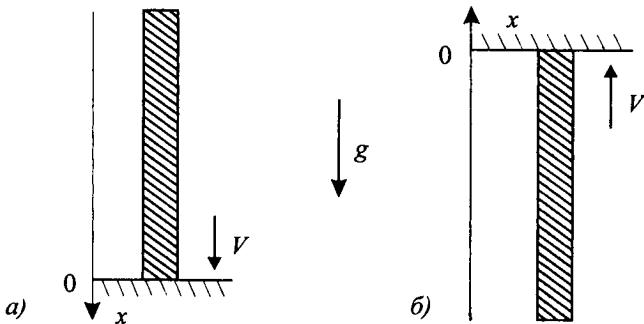


Рис. 2.10. Удар стержня о горизонтальное препятствие

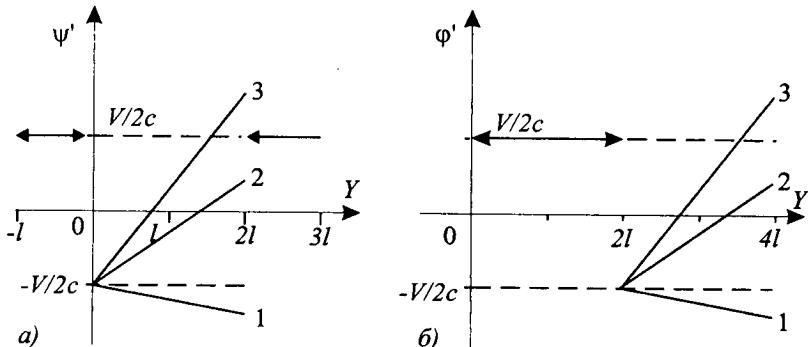


Рис. 2.11. Графики вспомогательных функций: 1) удар о пол, 2), 3) удар о потолок

Подставляя выражение (2.81) в формулы (2.21), получим

$$\varphi(ct) + \psi(ct) \pm \frac{1}{2}gt^2 = 0, \quad \text{но } \psi'(ct) - \varphi'(ct) \leq 0. \quad (2.82)$$

Дифференцируя равенство в (2.82), представим его в виде

$$\psi'(y) + \varphi'(y) = \mp \frac{gy}{c^2}. \quad (2.83)$$

Формулы (2.27), (2.29), (2.83) позволяют построить функции  $\psi'(y)$  и  $\varphi'(y)$  при  $y > 0$ :

$$\varphi'(y) = \frac{V}{2c}, \quad \psi'(y) = -\frac{V}{2c} \mp \frac{gy}{c^2} \quad \text{при } y \in (0, 2l), \quad (2.84)$$

$$\varphi'(y + 2l) \equiv \psi'(y), \quad \psi'(y + 2l) \equiv \varphi'(y).$$

(см. рис. 2.11). Момент разделения тел сопровождается изменением знака неравенства (2.82) с "меньше" на "больше".

Теперь мы в состоянии перейти к анализу продолжительности контакта при низкоскоростном ударе и определению величины ударного импульса.

а) В первом из обсуждаемых случаев (знак минус в правой части соотношения (2.84)) — ударе о пол (рис. 2.10, а) — напряжение в точке контакта остается отрицательным до момента  $t_2 = 2l/c$ , соответствующего прохождению ударной волны вдоль стержня в обоих направлениях. Формулы (2.84) приводят к следующим финальным распределениям скоростей и деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_2) &= -V, & \frac{\partial u}{\partial x}(x, t_2 - 0) &= -\frac{2g}{c^2}(2l + x), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t_2 + 0) &= \frac{V}{c} > 0. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Сравнивая полученный результат с рассмотренным ранее случаем отсутствия внешних сил, заметим, что в обоих случаях коэффициент восстановления скорости оказался равным единице. Наличие силы тяжести приводит к тому, что после отрыва от препятствия стержень остается деформирован, т.е. колебательные процессы внутри него продолжаются. Таким образом, оказалось, что сумма кинетической и внутренней энергий стержня при ударе увеличилась! Кажущийся парадокс объясняется одновременным уменьшением потенциальной энергии в поле силы тяжести вследствие деформации.

Величину ударного импульса определим путем интегрирования силы реакции опоры по промежутку  $t \in (0, t_2)$ :

$$I = ES \int_0^{t_2} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) dt = -ES \int_0^{2l/c} \left( \frac{gt}{c} + \frac{V}{c} \right) dt = -2M \left( V + \frac{gl}{c} \right). \quad (2.86)$$

Изменение количества движения стержня  $-2MV$  складывается из импульса (2.86) и импульса силы тяжести  $2Mgl/c$ .

б) При анализе удара о потолок в правой части формулы (2.84) следует выбрать знак плюс, тогда деформация в точке контакта имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{gt}{c} - \frac{V}{c}. \quad (2.87)$$

Эта функция может оказаться как отрицательной, так и знакопеременной на интервале  $t \in (0, 2l/c)$  в зависимости от величины скорости сближения  $V$ . Если выполнено неравенство

$$2lg \leq Vc \quad (2.88)$$

(при этом вид волновых функций соответствует случаю 2 на рис. 2.11), то удар описывается теми же формулами (2.85), (2.86) с переменой

знака ускорения  $g$ . Таким образом,

$$\tau = \frac{2l}{c}, \quad I = -2M(V - \frac{gl}{c}). \quad (2.89)$$

При обратном знаке неравенства (2.88) напряжение в точке контакта исчезнет раньше, чем ударная волна пройдет стержень в обоих направлениях. Этот момент и определит окончание удара, при этом

$$\tau = \frac{V}{g}, \quad I = ES \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) dt = -\frac{Mc}{2lg} V^2. \quad (2.90)$$

Данные формулы принципиально отличны от выражений (2.86) и (2.89), полученных при других предположениях. Во-первых, продолжительность удара стремится к нулю вместе с  $V$ . Во-вторых, ударный импульс пропорционален квадрату скорости сближения, а в предыдущих случаях эта зависимость была линейной.

**Замечание.** Значения ударного импульса в формулах (2.86) и (2.90) не удовлетворяют неравенствам (2.3), (2.5), задающим граничицы изменения этой величины в рамках классической стереомеханики. В этом нет противоречия, так как результаты получены при разных физических допущениях.

**Квазистатическая модель удара с дополнительными силами.** Другая модель удара, допускающая исчерпывающий анализ, была рассмотрена в §2.3. Обобщим уравнения (2.40), включив в них "конечные" силы:

$$M_1 \ddot{x}_1 = Q_1 - F(\epsilon, \dot{\epsilon}), \quad M_2 \ddot{x}_2 = Q_2 + F(\epsilon, \dot{\epsilon}), \quad (2.91)$$

где  $Q_{1,2}$  зависят от координат, скоростей и времени. Изменением этих сил за время удара будем пренебречь, считая их постоянными. Тогда уравнение (2.51) (полученное в предположении, что  $F = F(\epsilon)$ ) примет вид

$$M^* \ddot{\epsilon} + F(\epsilon) + Q = 0, \quad Q = \frac{M_1 Q_2 - M_2 Q_1}{M_1 + M_2}. \quad (2.92)$$

Система (2.92) консервативна при любом значении  $Q$ , поэтому удар будет абсолютно упругим. Изменение количества движения каждого из соударяемых тел складывается из ударного импульса и импульса активных сил, следовательно,

$$\int_0^\tau (Q + F(\epsilon)) dt = 2M^* V.$$

Учитывая формулу (2.59), получим для продолжительности удара и величины ударного импульса следующие явные выражения:

$$I = 2M^*V - Q\tau, \quad \tau = 2 \int_0^{\epsilon_{\max}} (V^2 - 2(W_e(\epsilon) + Q\epsilon)/M^*)^{-1/2} d\epsilon \quad (2.93)$$

причем значение  $\epsilon_{\max}$  определяется как наименьший положительный ноль подынтегральной функции.

В простейшем случае, когда зависимость  $F(\epsilon)$  линейна:  $F(\epsilon) = c\epsilon$ , потенциальная энергия будет квадратичной функцией:  $W_e(\epsilon) = c\epsilon^2/2$ , и интеграл (2.93) выглядит так:

$$\tau = 2(M^*/c)^{1/2} \operatorname{arcctg} \left( QV^{-1}(cM^*)^{-1/2} \right). \quad (2.94)$$

В данной формуле константа  $c$ , имеющая смысл контактной жесткости, велика, поэтому продолжительность соударения вне зависимости от  $Q$  и  $V$  ограничена малой константой. Внимания заслуживает другое обстоятельство: при  $Q \neq 0$  и малых значениях скорости сближения  $V$  величина  $\tau$ , а с ней и ударный импульс  $I$  могут существенно отличаться от тех значений, которые они имеют при  $Q = 0$ . При этом следует различать два случая:  $Q > 0$  и  $Q < 0$ .

В первом из этих случаев (удар о потолок)

$$\begin{aligned} \operatorname{arcctg} \left( QV^{-1}(cM^*)^{-1/2} \right) &= \operatorname{arctg} \left( VQ^{-1}(cM^*)^{1/2} \right) = \\ &= VQ^{-1}(cM^*)^{1/2} - \frac{1}{3}V^3Q^{-3}(cM^*)^{3/2} + O(V^5) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Подставляя данное выражение в (2.93), при учете (2.94) получим

$$\tau = 2M^*Q^{-1}V + O(V^3), \quad I = \frac{2}{3}Q^{-2}cM^{*2}V^3 + O(V^5). \quad (2.96)$$

Если  $Q < 0$  (удар о пол), то

$$\operatorname{arcctg} \left( QV^{-1}(cM^*)^{-1/2} \right) = \pi + \operatorname{arctg} \left( VQ^{-1}(cM^*)^{1/2} \right). \quad (2.97)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tau &= 2(M^*/c)^{1/2} \left( \pi + VQ^{-1}(cM^*)^{1/2} \right) + O(V^3), \\ I &= -2\pi Q(cM^*)^{-1/2} + \frac{2}{3}Q^{-2}cM^{*2}V^3 + O(V^5). \end{aligned} \quad (2.98)$$

На рис. 2.12 представлены графики зависимости  $I(V)$ , как следует из формул (2.96) и (2.98), при малых  $V$  величина  $I$  будет порядка  $V^3$

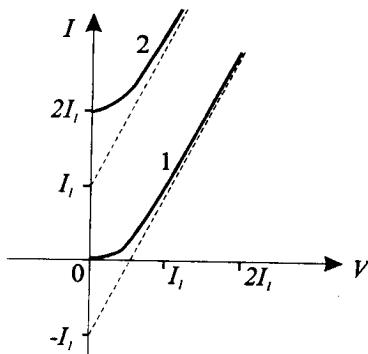


Рис. 2.12. Зависимость ударного импульса от скорости сближения:  
1) удар о потолок, 2) удар о пол;  $I_l = \pi Q(AM^*)^{-1/2}$

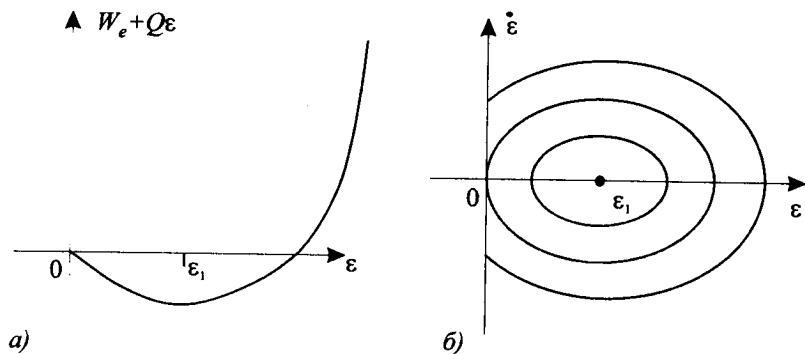


Рис. 2.13. Квазистатическая модель удара о пол:  
а) график потенциальной энергии, б) фазовый портрет

в первом из рассмотренных случаев и остается конечной во втором случае.

Заметим, что столь полное исследование формул (2.93) оказалось возможным благодаря простейшей линейной форме зависимости  $F(\epsilon)$ . В общем случае, интеграл (2.93) не выражается через элементарные функции. При этом для анализа низкоскоростного удара можно использовать качественные и приближенные методы.

В случае  $Q < 0$  воспользуемся методом фазовой плоскости. На рис. 2.13,а изображен график потенциальной энергии системы (2.92), складывающейся из энергии упругих деформаций  $W_e(\epsilon)$  и величины  $Q\epsilon$ , соответствующей энергии поля внешних сил. Его отличительной чертой является наличие минимума в области  $\epsilon > 0$ . Следовательно, система имеет положение равновесия типа "центр" (рис. 2.13,б). Удару соответствуют траектории на фазовой плоскости, начинающиеся на полуоси  $\epsilon = 0$ ,  $\dot{\epsilon} = V > 0$ . Очевидно, что при  $V \rightarrow 0$  эти траектории не вырождаются, а стягиваются к замкнутой траектории, проходящей через начало координат. При этом величины  $\epsilon_{\max}$ ,  $\tau$  и  $I$

остаются конечными (т.е. не бесконечно малы). Предельные значения определяются формулой (2.93), где  $V = 0$ .

В случае  $Q > 0$  (удар о потолок) для оценки продолжительности удара и величины импульса удобно записать дифференциальное уравнение второго порядка (2.92) в интегральной форме (не ограничивая общности будем считать  $M^* = 1$ ):

$$\epsilon(t) = Vt - \frac{1}{2}Qt^2 - \int_0^t ds \int_0^s F(\epsilon(u)) du . \quad (2.99)$$

Так как  $F \geq 0$ , то из формулы (2.99) сразу следует, что

$$\epsilon_{\max} \leq \frac{V^2}{2Q}, \quad \tau \leq \frac{2V}{Q} , \quad (2.100)$$

т.е. в рассматриваемом случае при  $V \rightarrow 0$  удар вырождается.

Величину ударного импульса будем вычислять непосредственно по определению:

$$I = \int_0^\tau F(\epsilon(t)) dt . \quad (2.101)$$

**Предложение 2.1.** Пусть функция  $F(\epsilon)$  дифференцируема при  $\epsilon = 0$  и  $F(0) = 0$ . Тогда ударный импульс в системе (2.92), где  $Q > 0$ , допускает при  $V \rightarrow 0$  следующую оценку:

$$I = C^* V^3 + o(V^3), \quad C^* = \frac{2}{3} Q^{-2} F'(0) M^{*2} . \quad (2.102)$$

**Доказательство.** При сделанных предположениях  $F(\epsilon) = F'(0)\epsilon + o(\epsilon)$ , поэтому двойной интеграл в формуле (2.99) мал по сравнению с первыми двумя слагаемыми. Следовательно,

$$\epsilon = Vt - \frac{1}{2}Qt^2 + o(t^2), \quad \tau = \frac{2V}{Q} + o(V) . \quad (2.103)$$

Непосредственный расчет по формуле (2.101) приводит при учете соотношений (2.100), (2.103) к такому результату:

$$I = F'(0) \int_0^\tau \epsilon(t) dt + \tau o(V^2) = F'(0) \int_0^{2V/Q} \left( Vt - \frac{1}{2}Qt^2 \right) dt + o(V^3) ,$$

что эквивалентно формуле (2.102).

**Замечания.** 1. Доказанная оценка аналогична формуле (2.96), полученной в предположении о линейности функции  $F(\epsilon)$ .

2. Если  $F'(0) = 0$ , то оценку (2.102) можно модифицировать. Для этого выделим главную часть функции  $F$ :

$$F(\epsilon) = K\epsilon^\alpha + o(\epsilon^\alpha) \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.104)$$

Подставляя функцию (2.104) в интеграл (2.101), получим

$$I = K \int_0^{2V/Q} (Vt - \frac{1}{2}Qt^2)^\alpha dt + o(V^{2\alpha+1}). \quad (2.105)$$

Заменой переменной  $t = \frac{2V}{Q}s$  интеграл (2.105) приводится к виду

$$I = KJ_\alpha \frac{2^{\alpha+1}V^{2\alpha+1}}{Q^{\alpha+1}} + o(V^{2\alpha+1}), \quad J_\alpha = \int_0^1 s^\alpha (1-s)^\alpha ds.$$

В данной формуле интеграл выразим через гамма-функцию [Корн, Корн, 1973]

$$J_\alpha = \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+2)}. \quad (2.106)$$

В частности, в контактной теории Герца  $\alpha = 3/2$  и

$$J_{3/2} = \frac{\Gamma^2(2.5)}{\Gamma(5)} = \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 \frac{1}{4!} = \frac{3\pi}{128},$$

откуда

$$I = K \frac{3\pi V^4}{2^{4.5} Q^{2.5}} + o(V^4), \quad (2.107)$$

**Вязкоупругая модель низкоскоростного удара.** Переходим к исследованию системы (2.91) без упрощающего предположения о независимости  $F$  от  $\dot{\epsilon}$ . Приведем ее к одному уравнению (считая для простоты выкладок  $M^* = 1$ ):

$$\ddot{\epsilon} + F(\epsilon, \dot{\epsilon}) + Q = 0. \quad (2.108)$$

Здесь, как и выше, следует различать два случая: 1)  $Q < 0$ , 2)  $Q > 0$ .

1) Система имеет в окрестности начала координат фазовой плоскости особую точку  $(\epsilon^*, 0)$  (рис. 2.14), где  $\epsilon^*$  — корень уравнения

$$F(\epsilon, 0) + Q = 0.$$

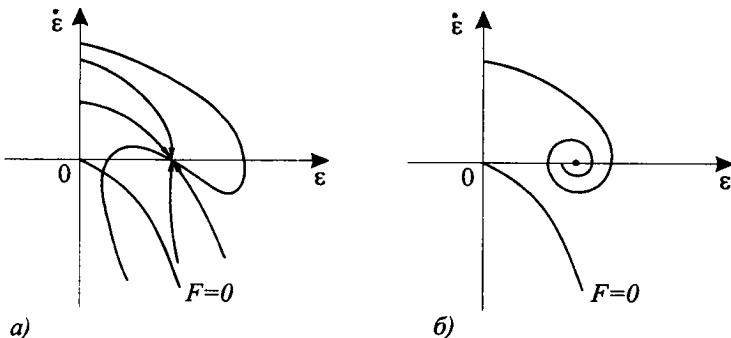


Рис. 2.14. Фазовый портрет системы с трением: а) узел, б) фокус

В отличие от квазистатической модели, наличие трения обуславливает притягивающие свойства этой точки. Если функция  $F(\epsilon, \dot{\epsilon})$  дифференцируема, то тип особенности определяется значениями частных производных  $F_1 = \partial F(\epsilon^*, 0)/\partial \epsilon$  и  $F_2 = \partial F(\epsilon^*, 0)/\partial \dot{\epsilon}$ . Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + F_2 \lambda + F_1 = 0 , \quad (2.109)$$

либо отрицательны — при условии  $D = F_2^2 - 4F_1 \geq 0$  — либо комплексно сопряжены и имеют отрицательные вещественные части, если  $D < 0$ . Двум этим случаям соответствуют особенности типа "узел" и "фокус", представленные на рис. 2.14, а, б.

Признаком окончания удара является выполнение хотя бы одного из равенств  $\epsilon = 0$  или  $F = 0$ , поэтому кривая  $F(\epsilon, \dot{\epsilon}) = 0$  служит частью границы области, соответствующей контакту.

**Пример.** Для вязкоупругой модели (2.64) величина  $\epsilon^*$  определяется как корень уравнения  $f(\epsilon) + Q = 0$ , при этом  $F_1 = f'(\epsilon^*)$ ,  $F_2 = g(\epsilon^*)$ , а кривая  $F = 0$  задается уравнением  $\dot{\epsilon} = -f(\epsilon)/g(\epsilon)$ .

В частности, для функций  $f, g$ , определенных формулами (2.65), (2.66), имеем  $\epsilon^* = (-Q/K)^{2/3}$ ,  $F_1 = 1.5(-QK^2)^{1/3}$ ,  $F_2 = -C_1Q/K$ , а  $F = 0$  при  $\epsilon = 0$  и при  $\dot{\epsilon} = -K/C_1$ .

Неупругому удару отвечают фазовые кривые системы (2.108), начинающиеся на полуоси  $\epsilon = 0$ ,  $\dot{\epsilon} > 0$ , и оканчивающиеся на кривой  $F = 0$ . Важной особенностью обсуждаемой модели является существование траекторий, не попадающих на эту кривую и асимптотически стремящихся к особой точке. С динамической точки зрения, такие траектории описывают пластический удар.

Области значений  $\dot{\epsilon}_0$ , соответствующих пластическому удару, существуют в малой окрестности начала координат (ее радиус приблизительно равен  $Q/c$ ). Наличие или отсутствие такой области в каждом конкретном случае можно установить, построив фазовую кривую, выходящую из начала координат: если она пересекает линию  $F = 0$ ,

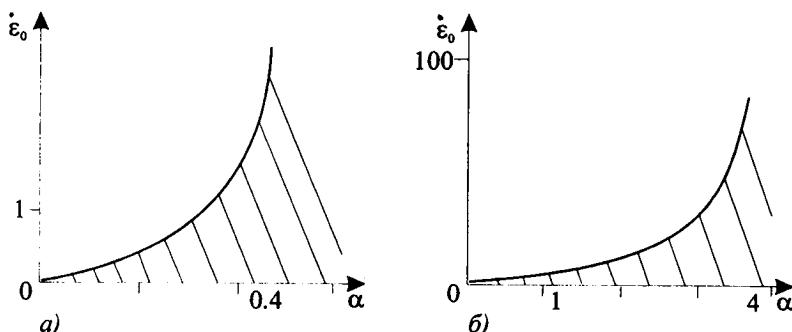


Рис. 2.15. Область пластического удара:  
а) модель Герца с трением, б) модель Кельвина – Фойхта

то пластический удар невозможен, в противном случае он имеет место для достаточно малых значений начальной скорости сближения. Граница области пластического удара соответствует траектория, касающаяся кривой  $F = 0$ , но не пересекающая ее.

**Примеры.** 1. В предыдущем примере проведем масштабирование переменных, заменяя  $\epsilon$  на  $K^{2/5}C_1^{-4/5}\epsilon$ , а  $t$  на  $K^{-3/5}C_1^{1/5}t$ . В итоге получим систему с единственным параметром

$$\dot{\epsilon} + \epsilon^{3/2}(1 + \dot{\epsilon}) = \alpha, \quad \alpha = -K^{-8/5}C_1^{6/5}Q. \quad (2.110)$$

Поскольку при  $\dot{\epsilon} = -1$  величина  $\dot{\epsilon}$  в уравнении (2.110) положительна, то линия  $1 + \dot{\epsilon} = 0$  не может достигаться фазовой кривой сверху. Следовательно, окончанию удара соответствует выход изображающей точки в левую полуплоскость.

Система (2.110) решалась численно для различных значений параметра. Результаты представлены на рис. 2.15,а, где по оси абсцисс откладывается величина  $\alpha$  (пропорциональная  $|Q|$ ), а по оси ординат — начальное значение  $\dot{\epsilon}$  в системе (2.110), в исходных переменных равное  $KV/C_1$ . Оказалось, что область пластического удара существует при любых  $\alpha > 0$ , а ее размеры увеличиваются вместе с  $\alpha$ . При  $\alpha \geq 0.4$  удар будет пластическим при любых (а не только при достаточно малых) значениях начальной скорости.

Заметим, что особая точка является фокусом при  $\alpha \in (0, \alpha^*)$  и узлом при  $\alpha > \alpha^*$ , где  $\alpha^* = 6^{0.6} = 2.930\dots$ .

2. Модель Кельвина – Фойхта (2.45) с добавочной постоянной силой:

$$\ddot{\epsilon} + b\dot{\epsilon} + c\epsilon + Q = 0 \quad (2.111)$$

(верхние индексы опущены для наглядности). При  $Q \neq 0$  промасштабируем переменные для сокращения числа параметров: заменим  $\epsilon$  на  $-Q\epsilon/c$ , а  $t$  — на  $t/\sqrt{c}$ . В итоге получим систему

$$\ddot{\epsilon} + \alpha\dot{\epsilon} + \epsilon = 1, \quad \alpha = b/\sqrt{c}, \quad (2.112)$$

где единственный параметр  $\alpha$  характеризует диссипативные свойства среды: при  $\alpha < 2$  движение имеет колебательный тип (особая точка типа "фокус"), при  $\alpha > 2$  — апериодический тип (особая точка типа "узел").

Решение уравнения (2.112) с начальными условиями  $\epsilon(0) = 0$ ,  $\dot{\epsilon}(0) = V > 0$  имеет вид

$$\epsilon = -1 + [(V - \lambda_2) \exp(\lambda_1 t) - (V - \lambda_1) \exp(\lambda_2 t)] (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}, \quad (2.113)$$

где  $\lambda_{1,2} = -\alpha/2 \pm (\alpha^2/4 - 1)^{1/2}$  — корни характеристического уравнения. В отличие от рассмотренного выше случая  $Q = 0$ , траектории (2.113) могут вообще не выходить на границу области удара.

Аналитическое определение корней уравнения (2.42) (или доказательство их отсутствия) невозможно. Можно лишь утверждать, что если  $\alpha > 2$ , то к пластическому удару заведомо приводят все значения начальной скорости, отвечающие расположению изображающей точки на фазовой плоскости ниже верхней сепаратрисы узла  $\dot{\epsilon} = \lambda_2(\epsilon - 1)$  (см. рис. 2.14, а).

Было проведено численное исследование, в результате которого построена область существования пластического удара (рис. 2.15, б). Оказалось, что диапазон значений начальной скорости  $\dot{\epsilon}_0 = -V\sqrt{c}/Q$ , приводящих к пластическому удару, быстро увеличивается вместе с  $\alpha$ : в частности, при  $\alpha = 0.1$  критическое значение безразмерной скорости деформации равно 0.9, при  $\alpha = 1$  оно равно 7, а при  $\alpha = 5$  составляет около 170.

2) Случай  $Q > 0$  существенно отличается от предыдущего: активная сила способствует разделению соударяемых тел, поэтому в области удара  $\epsilon > 0$  система (2.108) не имеет особых точек. Для оценки продолжительности низкоростного удара и величины ударного импульса можно использовать интегральное уравнение типа (2.99), но с функцией  $F$  более общего вида:

$$\epsilon(t) = Vt - \frac{1}{2}Qt^2 - \int_0^t ds \int_0^s F(\epsilon(u), \dot{\epsilon}(u)) du. \quad (2.114)$$

Поскольку в любом случае  $F \geq 0$ , то оценки (2.100) останутся верными вне зависимости от характера трения.

Рассмотрим вязкоупругую модель (2.64). По аналогии с предложением 2.1, можно доказать следующее утверждение.

**Предложение 2.2.** Пусть функции  $f(\epsilon)$  и  $g(\epsilon)$  дифференцируемы при  $\epsilon = 0$  и  $f(0) = g(0) = 0$ . Тогда ударный импульс в системе (2.108), (2.64) допускает при  $V \rightarrow 0$  следующую оценку:

$$I = C^*V^3 + o(V^3), \quad C^* = \frac{2}{3}Q^{-2}f'(0). \quad (2.115)$$

**Доказательство.** При сделанных предположениях  $f(\epsilon) = f'(0)\epsilon + o(\epsilon)$ ,  $g(\epsilon) = g'(0)\epsilon + o(\epsilon)$ , и справедливы соотношения (2.103). В выражении для ударного импульса

$$I = \int_0^\tau (f(\epsilon(t)) + \dot{\epsilon}(t)g(\epsilon(t))) dt \quad (2.116)$$

второе слагаемое будет  $o(V^3)$ , а первое слагаемое оценивается по аналогии с доказательством предложения 2.1. В итоге получаем формулу (2.115).

**Замечания.** 1. Если функции  $f(\epsilon), g(\epsilon)$  являются при  $\epsilon \rightarrow 0$  величинами одинакового порядка малости выше первого, то второе слагаемое в формуле (2.116) мало по сравнению с первым. Поэтому для расчета ударного импульса при низкоскоростном ударе можно воспользоваться соотношениями, полученными выше. В частности, для модели Герца с трением (2.65), (2.66) справедлива формула (2.107).

2. В случае  $g'(0) \neq 0$  реакция (2.64) оказывается при ударе разрывной функцией времени: в начальный момент контакта она скачком приобретает ненулевое значение. Для реальных физических тел такое поведение нереалистично, однако оно присуще, например, модельной системе (2.111). Поэтому исследование данного случая представляет интерес.

Будем строить решение системы (2.111), где  $Q > 0$ , пользуясь формулой Тейлора:

$$\epsilon(t) = \epsilon(0) + t\dot{\epsilon}(0) + \frac{1}{2}t^2\ddot{\epsilon}(0) + \dots \quad (2.117)$$

где в силу начальных условий  $\epsilon(0) = 0$ ,  $\dot{\epsilon}(0) = V$ . Начальные значения старших производных определяются непосредственно из уравнения (2.111) и уравнений, полученных в результате его дифференцирования:

$$\ddot{\epsilon}(0) = -Q - c\epsilon(0) - b\dot{\epsilon}(0), \quad \frac{d^3\epsilon}{dt^3}(0) = -c\dot{\epsilon}(0) - b\ddot{\epsilon}(0)$$

и т.д. Формула (2.117) принимает вид

$$\epsilon(t) = V - t(Q + bV) + o(t). \quad (2.118)$$

Принимая во внимание неравенства (2.100), получаем такие оценки для продолжительности удара и величины ударного импульса:

$$\tau = \frac{V}{Q} + o(V), \quad I = \frac{b}{2Q}V^2 + o(V^2). \quad (2.119)$$

**Выводы.** Исследования, проведенные в данном параграфе, демонстрируют специфику задачи об ударе с произвольно малой скоростью сближения. В этой задаче допущение классической теории удара о возможности пренебречь активными силами по сравнению с ударной реакцией оказывается неправомерным, так как последняя при  $V \rightarrow 0$  сама оказывается бесконечно малой величиной.

Исследована роль добавочных сил на примере некоторых волновых и дискретных моделей удара. Следует различать два основных случая, условно обозначаемые как удар "о пол" или "о потолок".

Показано, что в первом из этих случаев удар не вырождается при  $V \rightarrow 0$ , т.е. при этом продолжительность удара и ударный импульс имеют ненулевые пределы. Особо следует подчеркнуть результат, относящийся к неупругому удару: при достаточно малых значениях  $V$  он может оказаться абсолютно неупругим, или пластическим.

Совсем другими свойствами обладает удар "о потолок". Как показано на различных моделях, продолжительность контакта в этом случае будет при  $V \rightarrow 0$  малой порядка  $V$ , а величина ударного импульса — малой порядка  $V^3$  или (в некоторых моделях) — порядка  $V^2$ .

Данные выводы весьма важны для понимания динамики систем с ударами в целом. Мы еще вернемся к ним во второй части книги.

# Глава 3. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ СОУДАРЕНИЕ ДВУХ СВОБОДНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

## 3.1. КЛАССИЧЕСКАЯ СТЕРЕОМЕХАНИКА

**Допустимые значения ударного импульса.** Пусть система двух твердых тел совершает движение под действием некоторых конечных (неимпульсивных) сил. Каждое из тел может занимать произвольное положение в пространстве, единственное ограничение состоит в невозможности одновременного занятия точками двух тел одинаковых положений. Когда тела сталкиваются, они пытаются нарушить это условие, однако появляющиеся ударные реакции изменяют распределение скоростей и делают возможным дальнейшее раздельное движение.

Классическая теория пространственного удара, называемая *стереомеханикой*, основана на ряде упрощающих предположений, касающихся его продолжительности и величины ударных сил. С одной стороны, продолжительность удара достаточно мала, чтобы пренебречь перемещениями тел, с другой — достаточно велика, чтобы не учитывать волновые процессы [Голдсмит, 1965]. Ударные силы достаточно велики, чтобы пренебречь влиянием "конечных" сил, но все же не столь значительны, чтобы вызвать заметные деформации тел или их разрушение.

Совокупность этих условий позволяет свести задачу об ударе к более простой задаче об импульсивном движении абсолютно твердого тела, рассмотренной в первой главе. Единственной величиной, подлежащей определению, является ударный импульс  $\vec{I}$ , действующий на первое тело со стороны второго: по третьему закону Ньютона, ко второму телу прилагается импульс  $-\vec{I}$ .

Будем считать диаметр области контакта пренебрежимо малым по сравнению с размерами тел, так что можно считать, что столкновение происходит в единственной точке  $C$ , лежащей на обеих поверхностях.

Уравнения импульсивного движения для каждого из тел имеют вид (см. §1.3)

$$\begin{aligned} M_1 \Delta \vec{V}_1 &= \vec{I}, & \mathbf{J}_1 \Delta \vec{\Omega}_1 &= G_1 \vec{C} \times \vec{I}, \\ M_2 \Delta \vec{V}_2 &= -\vec{I}, & \mathbf{J}_2 \Delta \vec{\Omega}_2 &= -G_2 \vec{C} \times \vec{I}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

где сохранены прежние обозначения, а индекс указывает на отношение к первому или второму телу.

На рис. 3.1 схематично изображено соударение двух тел: здесь вектор нормали  $\vec{N}_C$  направлен от точки  $C$  внутрь первого тела, вектор  $\vec{V}_C$  равен относительной скорости точки контакта. Удар возникает, если угол между этими двумя векторами тупой.

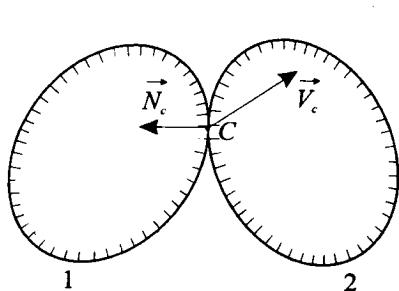


Рис. 3.1. Пространственное соударение двух твердых тел

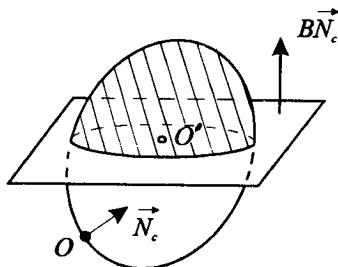


Рис. 3.2. Область допустимых значений ударного импульса

Определим область допустимых значений ударного импульса, исходя из следующих двух требований.

1. Скорости тел после удара допускают дальнейшее движение без взаимопроникновения:

$$(\vec{V}_C^+, \vec{N}_C) \geq 0. \quad (3.2)$$

2. Суммарная кинетическая энергия системы не увеличивается, так как при ударе не происходит высвобождения потенциальной энергии:

$$\Delta T \leq 0. \quad (3.3)$$

Данные условия удобно выразить геометрически, воспользовавшись предложенной Раусом (1884) [Раус, 1983], (пп.193, 321) интерпретацией удара в виде дуги кривой  $\vec{I}(t)$ . В момент  $t = t_0$  величина  $\vec{I}$  равна нулю, и изображающая точка находится в начале координат. На промежутке  $[t_0, t_0 + \tau]$  эта точка перемещается по некоторому закону до конечного положения  $\vec{I} = \vec{I}(t_0 + \tau)$ , полностью определяющего удар: на первое тело действует импульс  $\vec{I}$ , на второе  $-\vec{I}$ .

Выясним геометрический смысл неравенств (3.2) и (3.3). Вычислим приращение относительной скорости в точке контакта  $\vec{V}_C$ , пользуясь формулой Эйлера и уравнениями (3.1):

$$\begin{aligned} \Delta \vec{V}_C &= \Delta(\vec{V}_1 + \vec{\Omega}_1 \times \vec{G}_1 C) - \Delta(\vec{V}_2 + \vec{\Omega}_2 \times \vec{G}_2 C) = \\ &= (M_1^{-1} + M_2^{-1})\vec{I} + \mathbf{J}_1^{-1}(\vec{G}_1 C \times \vec{I}) \times \vec{G}_1 C + \mathbf{J}_2^{-1}(\vec{G}_2 C \times \vec{I}) \times \vec{G}_2 C \end{aligned} \quad (3.4)$$

Представим равенство (3.4) в матричной форме:

$$\Delta \vec{V}_C = \mathbf{B} \vec{I}, \quad \mathbf{B} = (M_1^{-1} + M_2^{-1}) \mathbf{E}_3 + \|b_{ij}\|, \quad (3.5)$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^2 \left( \mathbf{J}_k^{-1}(\vec{G}_k C \times \vec{e}_i), \vec{G}_k C \times \vec{e}_j \right) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где  $\vec{e}_i$  — координатные орты,  $E_3$  — единичная матрица третьего порядка. Матрица  $B$  симметрична и положительно определена, как следует из соответствующих свойств тензоров инерции  $J_k$ .

Знак равенства в (3.2) достигается при условии

$$(\vec{I}, \mathbf{B} \vec{N}_C) = -(\vec{V}_C^-, \vec{N}_C). \quad (3.6)$$

Данное линейное относительно  $\vec{I}$  уравнение описывает плоскость, названную Раусом *плоскостью наибольшего сжатия*. Эта плоскость ортогональна вектору  $\mathbf{B} \vec{N}_C$  и проходит через точку  $O'$ , соответствующую нулевой относительной скорости точки контакта. Радиус-вектор этой точки вычисляется по формуле

$$\vec{O}\vec{O}' = -\mathbf{B}^{-1} \vec{V}_C^-. \quad (3.7)$$

Требование 1 выполняется для всех точек того полупространства, ограниченного плоскостью (3.6), которое не содержит начала координат  $O$ .

Через точку  $O'$  проходит *прямая несхождения*, в точках которой относительная скорость параллельна вектору  $\vec{N}_C$ , вследствие (3.5) она задается уравнением

$$\mathbf{B} \vec{I} \times \vec{N}_C = -\vec{V}_C^- \times \vec{N}_C. \quad (3.8)$$

Для анализа условия 2 применим формулу Кельвина (1.47) к каждому из тел:

$$\Delta T_1 = \frac{1}{2} (\vec{I}, \vec{V}_{C_1}^- + \vec{V}_{C_1}^+), \quad \Delta T_2 = \frac{1}{2} (\vec{I}, \vec{V}_{C_2}^- + \vec{V}_{C_2}^+).$$

откуда

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{1}{2} (\vec{I}, \vec{V}_C^- + \vec{V}_C^+). \quad (3.9)$$

Равенство (3.9) выражает формулу Кельвина для случая соударения двух твердых тел. С ее помощью условие (3.3) можно представить в виде

$$2(\vec{I}, \vec{V}_C^-) + (\vec{I}, \mathbf{B} \vec{I}) \leq 0. \quad (3.10)$$

Так как матрица  $B$  положительно определена и симметрична, неравенство (3.10) описывает внутренность эллипсоида с центром в точке  $O'$  (рис. 3.2).

Следовательно, область физически допустимых значений ударного импульса представляет собой половину эллипсоида (на рис. 3.2 эта область заштрихована).

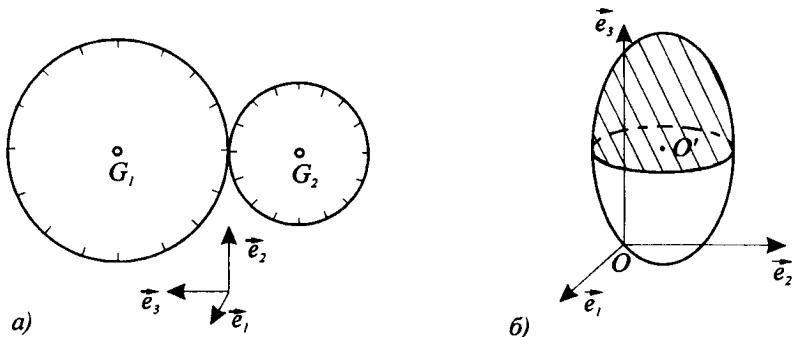


Рис. 3.3. Соударение двух шаров: а) система координат, б) эллипсоид энергии

**Пример.** Соударение двух шаров. Обозначим  $R_k, \rho_k$  ( $k = 1, 2$ ) радиусы и радиусы инерции шаров. Проведем орты  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  в касательной плоскости,  $\vec{e}_3 = \vec{N}_C$  (рис. 3.3,а). Для тензоров инерции и векторов  $G_k C$  имеем такие выражения:

$$\mathbf{J}_k = M_k \rho_k^2 \mathbf{E}_3 \quad (k = 1, 2), \quad \vec{G}_1 C = -R_1 \vec{e}_3, \quad \vec{G}_2 C = R_2 \vec{e}_3.$$

Отсюда для матрицы  $\mathbf{B}$  в формуле (3.5) получаем

$$\mathbf{B} = \text{diag}\{b_1, b_2, b_3\}, \quad (3.11)$$

$$b_1 = b_2 = \sum_{k=1}^2 M_k^{-1} (1 + R_k^2 \rho_k^{-2}), \quad b_3 = M_1^{-1} + M_2^{-1},$$

т.е. матрица  $\mathbf{B}$  диагональна. Следовательно, вектор  $O\vec{O}'$  противонаправлен с  $\vec{V}_C^-$ , а  $\mathbf{B}\vec{N}_C$  сонаправлен с  $\vec{N}_C$ , и плоскость наибольшего сжатия параллельна плоскости  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ . Эллипсоид энергии имеет ось симметрии, параллельную  $\vec{e}_3$  (рис. 3.3,б) и совпадающую с прямой нескольжения (3.8).

**Удар без трения.** Как показывают рассмотрения предыдущего пункта, существует бесчисленное множество векторов  $\vec{l}$ , каждый из которых определяет физически непротиворечивое решение задачи о соударении двух твердых тел. Для определенности необходимо принять некоторые дополнительные предположения о характере ударных реакций. Одним из таких предположений является их ортогональность к поверхностям соударяемых тел. В этом случае мы будем говорить, что трение при ударе отсутствует. Данное допущение оправдано, в частности, при прямом ударе двух шаров, а также при произвольном соударении тел любой формы, имеющих абсолютно гладкие поверхности.

Удар без трения изображается отрезком прямой, выходящим из начала координат параллельно вектору  $\vec{N}_C$ :

$$\vec{I}(t) = \alpha(t)\vec{N}_C, \quad (3.12)$$

где  $\alpha(t)$  — монотонно возрастающая неотрицательная функция, равная нулю при  $t = t_0$ . Прямая (3.12) пересекает плоскость наибольшего сжатия (3.6) в точке  $O_1$  при значении  $\alpha^*$ , определяемом из уравнения

$$\alpha^*(\vec{N}_C, \mathbf{B}\vec{N}_C) = -(\vec{V}_C^-, \vec{N}_C). \quad (3.13)$$

При этом изменение кинетической энергии системы двух тел определяется по формуле (3.9):

$$2\Delta T = 2(\vec{I}, \vec{V}_C^-) + (\vec{I}, \mathbf{B}\vec{I}) = -\alpha^{*2}(\vec{N}_C, \mathbf{B}\vec{N}_C) < 0. \quad (3.14)$$

Следовательно, точка  $O_1$  лежит внутри эллипсоида энергии (3.10) и существует промежуток прямой (3.12)  $\alpha(t) \in [\alpha^*, \alpha^{**}]$ , соответствующий допустимым значениям ударного импульса. Здесь значение  $\alpha^{**}$  определяется условием  $\Delta T = 0$ , откуда по аналогии с (3.14) получаем  $\alpha^{**} = 2\alpha^*$ .

Мы видим, что ударный импульс  $\vec{I}$  пока еще нельзя определить однозначно. Неопределенность можно устраниТЬ, принимая гипотезу Ньютона о двух фазах удара. Эта гипотеза обсуждалась в §2.1, в применении к пространственному удару она выражается в постоянстве отношения нормальных составляющих относительной скорости  $\vec{V}_C$  до и после удара:

$$-(\vec{V}_C^+, \vec{N}_C) / (\vec{V}_C^-, \vec{N}_C) = e. \quad (3.15)$$

Промежутку  $[\alpha^*, 2\alpha^*]$  соответствуют значения ньютоновского коэффициента восстановления  $e$  от нуля до единицы. Двум предельным случаям удара без трения:  $\alpha = \alpha^*$ , когда  $(\vec{V}_C^-, \vec{N}_C) = 0$  (пластический удар), и  $\alpha = 2\alpha^*$ , когда  $\Delta T = 0$  (упругий удар), отвечают значения  $e = 0$  и  $e = 1$  соответственно.

Можно сделать вывод: каждому значению коэффициента  $e$  из промежутка  $[0, 1]$  соответствует вполне определенное, физически непротиворечивое решение задачи о соударении двух твердых тел без трения.

**Удар шероховатых тел с кулоновским трением.** В общем случае силы, возникающие при соударении твердых тел, имеют касательную составляющую, и условие (3.12) не выполнено. Для определения ударного импульса необходимо задаться правилами вычисления этой составляющей и условием окончания удара.

Наиболее распространена гипотеза сухого трения по закону Кулона — Амонтона при ударе [Poisson, 1838, Rauc, 1983], согласно которой

$$\vec{R}_t/R_n = -\mu \vec{e}_t, \quad , \quad \vec{e}_t = \vec{V}_t / |\vec{V}_t|, \quad \text{если } \vec{V}_t \neq \vec{0}, \quad (3.16)$$

$$|\vec{R}_t|/R_n \leq \mu, \quad \text{если } \vec{V}_t = \vec{0}.$$

Здесь  $\vec{V}_t, V_n$  — касательная и нормальная составляющие относительной скорости точки  $C$ ;  $\vec{R}_t$  и  $R_n$  — касательная и нормальная составляющие ударной силы  $\vec{R}_C$ , действующей на первое тело со стороны второго,  $\mu$  — коэффициент трения,

$$\begin{aligned} V_n &= (\vec{V}_C, \vec{N}_C), \quad R_n = (\vec{R}_C, \vec{N}_C), \quad I_n = (\vec{I}(t), \vec{N}_C), \\ \vec{V}_t &= \vec{V}_C - V_n \vec{N}_C, \quad \vec{R}_t = \vec{R}_C - R_n \vec{N}_C, \quad \vec{I}_t = \vec{I}(t) - I_n \vec{N}_C. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Согласно первой из формул (3.16), сила трения направлена противоположно касательной составляющей относительной скорости соударяемых тел в точке контакта. В общем случае вектор  $\vec{V}_t$  изменяет свое направление на промежутке удара  $[t_0, t_0 + \tau]$ , что делает задачу об ударе с трением значительно более сложной, чем об ударе без трения. Траектория изображающей точки  $\vec{I}(t)$  криволинейна, для ее построения необходимо решать систему дифференциальных уравнений. В этой системе роль независимой переменной играет нормальная составляющая ударного импульса  $\chi = I_n$ , монотонно возрастающая в течение удара. Поскольку ударный импульс определяется как интеграл от силы  $\vec{R}_C$ , то

$$\vec{R}_C = d\vec{I}(t)/dt.$$

По формуле параметрического дифференцирования первое из уравнений (3.16) примет вид

$$d\vec{I}_t/d\chi = -\mu \vec{e}_t. \quad (3.18)$$

Дифференцируя соотношение (3.5), получим при учете (3.18)

$$d\vec{V}_C/d\chi = \mathbf{B}d(\vec{I}_t + \chi \vec{N}_C)/d\chi = \mathbf{B}(\vec{N}_C - \mu \vec{e}_t). \quad (3.19)$$

Уравнения (3.18), (3.19) составляют систему пятого порядка, интегрирование которой с начальными условиями  $\vec{I}_t(0) = \vec{0}$ ,  $\vec{V}_C(0) = \vec{V}_C^-$  позволяет определить зависимость  $\vec{I}(\chi)$ , если величина  $\vec{V}_t$  не обращается в нуль.

Удобрная геометрическая интерпретация удара с кулоновым трением была предложена Болотовым [Болотов, 1908], (см. также [Bhatt, Koechling, 1995]) в виде кривой в касательной плоскости

$$\vec{u}(\chi) = -d\vec{I}_t/d\chi. \quad (3.20)$$

Вектор  $\vec{u}(\chi)$  равен отношению касательной и нормальной составляющих ударной реакции  $\vec{R}_C$ , взятому с противоположным знаком

(отметим, что в оригинальной работе [Болотов, 1908] изучалось поведение величины  $-\vec{u}(\chi)$ ). Будем отождествлять изображающую точку с ее радиус - вектором  $\vec{u}$ . Если  $\vec{V}_t \neq \vec{0}$ , то вследствие (3.18)  $\vec{u}(\chi) = \mu \vec{e}_t$ , т.е. точки кривой (3.20) лежат на окружности радиуса  $\mu$  с центром в начале координат, а направление вектора  $\vec{u}(\chi)$  совпадает с направлением скорости скольжения  $\vec{V}_t$ . С ростом величины  $\chi$  точка смещается по окружности в направлении вектора  $d\vec{e}_t/d\chi$  или остается неподвижной, если

$$d\vec{e}_t/d\chi = \vec{0}. \quad (3.21)$$

В зависимости от конкретного вида матрицы  $\mathbf{B}$  и начальных условий относительное проскальзывание может продолжаться в течение всего удара или прерываться.

Оказывается [Болотов, 1908], для остановки скольжения необходимо выполнение равенства (3.21). При дальнейшем возрастании величины  $\chi$  в зависимости от значения  $\mu$  возможно два случая:

(i) после остановки скольжения оно тут же возобновляется в новом направлении  $\vec{e}_t^*$ , удовлетворяющем условиям (3.21) и

$$\frac{d|\vec{V}_t|}{d\chi} \Big|_{\vec{e}_t = \vec{e}_t^*} > 0; \quad (3.22)$$

(ii) вплоть до окончания удара  $\vec{V}_t = \vec{0}$ , при этом изображающая точка занимает в круге трения неизменное положение, определяемое направляющим вектором прямой (3.8).

Соотношениям (3.21), (3.22) можно придать геометрическую форму. Прежде всего, получим ряд следствий формулы (3.19):

$$dV_n/d\chi = (d\vec{V}_C/d\chi, \vec{N}_C) = (\vec{U}, \vec{N}_C) = U_n, \quad (3.23)$$

$$d\vec{V}_t/d\chi = d\vec{V}_C/d\chi - \vec{N}_C dV_n/d\chi = \vec{U} - \vec{N}_C U_n = \vec{U}_t,$$

$$d|\vec{V}_t|/d\chi = d\sqrt{(\vec{V}_t, \vec{V}_t)}/d\chi = |\vec{V}_t|^{-1}(\vec{V}_t, d\vec{V}_t/d\chi) = (\vec{U}, \vec{e}_t),$$

$$d\vec{e}_t/d\chi = d(\vec{V}_t |\vec{V}_t|^{-1})/d\chi = [\vec{U} - (\vec{U}, \vec{N}_C)\vec{N}_C - (\vec{U}, \vec{e}_t)\vec{e}_t]|\vec{V}_t|^{-1},$$

где принято обозначение  $\vec{U} = \mathbf{B}(\vec{N}_C - \mu \vec{e}_t)$ .

Следовательно, условие (3.21) выполнено тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{U}$ ,  $\vec{N}_C$  и  $\vec{e}_t$  компланарны, т.е.

$$(\vec{N}_C \times \vec{u}, \mathbf{B}\vec{N}_C) = (\vec{N}_C \times \vec{u}, \mathbf{B}\vec{u}), \quad \vec{u} = \mu \vec{e}_t. \quad (3.24)$$

Условие (3.22) при учете третьего из равенств (3.23) выглядит так:

$$(\mathbf{B}\vec{u}, \vec{u}) < (\mathbf{B}\vec{N}_C, \vec{u}). \quad (3.25)$$

Множество решений уравнения (3.24) описывает на изображающей плоскости гиперболу, так как это — кривая второго порядка со

знакопеременной квадратичной формой. В частных случаях гипербола может вырождаться. Например, если  $\vec{N}_C$  — собственный вектор матрицы  $\mathbf{B}$ , то левая часть в (3.24) исчезает, и кривая распадается на пару взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в начале координат и коллинеарных двум другим собственным векторам. Если любой вектор в касательной плоскости является собственным для  $\mathbf{B}$ , то уравнение (3.24) обращается в тождество.

Множество решений неравенства (3.25) заполняет внутренность эллипса (рис. 3.4), так как матрица  $\mathbf{B}$  положительно определена. В случае, когда  $\vec{N}_C$  — собственный вектор матрицы  $\mathbf{B}$ , этот эллипс вырождается в единственную точку — начало координат.

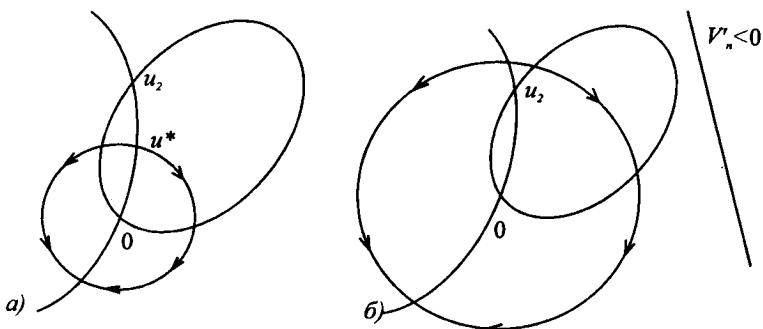


Рис. 3.4. Геометрическая интерпретация удара с трением

Гипербола проходит через начало координат и в зависимости от величины  $\mu$  имеет с окружностью трения от двух до четырех общих точек (на рис. 3.4 изображен первый из этих двух случаев). Эти точки соответствуют неизменяемым направлениям скольжения, а в промежутках между ними направление движения вектора  $\vec{u}$  зависит от ориентации тройки векторов  $\vec{e}_t, d\vec{e}_t/d\chi$  и  $\vec{N}_C$ : при выполнении неравенства

$$(\vec{e}_t \times d\vec{e}_t/d\chi, \vec{N}_C) > 0 \quad (3.26)$$

(правая тройка), он смещается против часовой стрелки, иначе — по часовой стрелке. Условие (3.26) эквивалентно тому, что левая часть в (3.24) больше правой.

Точки пересечения эллипса и гиперболы можно определить, решая систему уравнений

$$\left( \mathbf{B}(\vec{N}_C - \vec{u}), \vec{u} \right) = 0, \quad \left( \mathbf{B}(\vec{N}_C - \vec{u}), \vec{N}_C \times \vec{u} \right) = 0. \quad (3.27)$$

Данная система всегда имеет два решения:

$$\vec{u}_1 = \vec{0}, \quad \vec{u}_2 = \vec{N}_C - \mathbf{B}^{-1} \vec{N}_C (\mathbf{B}^{-1} \vec{N}_C, \vec{N}_C)^{-1}. \quad (3.28)$$

Заметим, что точка  $\vec{u}_2$  соответствует прямой нескользжения (3.8). Ее расположение по отношению к кругу трения определяет, по какому из сценариев (i) или (ii) будет развиваться удар после остановки скольжения.

В случае, если  $|\vec{u}_2| > \mu$ , внутри эллипса имеется единственная точка  $\vec{u}^*$  пересечения гиперболы и окружности (см.рис. 3.4,а), она определяет направление возобновления скольжения:

$$\vec{e}_t^* = \mu^{-1} \vec{u}^*. \quad (3.29)$$

Если же  $|\vec{u}_2| \leq \mu$ , то система (3.21), (3.22) не имеет решений (рис. 3.4,б). При этом до окончания удара  $\vec{V}_t = \vec{0}$  и  $\vec{u} = \vec{u}_2$ .

Одним из необходимых условий окончания удара является неотрицательность нормальной составляющей относительной скорости в точке контакта:  $V_n \geq 0$ . Если бы при неограниченном возрастании переменной  $\chi$  эта величина оставалась отрицательной, мы имели бы парадоксальную ситуацию, свидетельствующую о математической некорректности исследуемой модели. К счастью, подобный парадокс невозможен, что можно доказать геометрическими методами. Действительно, уравнение

$$dV_n/d\chi = 0$$

вследствие первого из равенств (3.23) описывает на изображающей плоскости прямую

$$(\mathbf{B}\vec{u}, \vec{N}_C) = (\mathbf{B}\vec{N}_C, \vec{N}_C) \quad (3.30)$$

Эта прямая параллельна касательной к эллипсу (3.25), проведенной в начале координат и не пересекает эллипс, причем начало является точкой эллипса, наиболее удаленной от прямой (рис. 3.4). Для доказательства данных свойств достаточно исследовать знак производной  $dV_n/d\chi$  в точках эллипса:

$$\begin{aligned} dV_n/d\chi &= (\mathbf{B}\vec{N}_C, \vec{N}_C) - (\mathbf{B}\vec{u}, \vec{N}_C) = (\mathbf{B}\vec{N}_C, \vec{N}_C) - (\mathbf{B}\vec{u}, \vec{u}) = \\ &= (\mathbf{B}\vec{N}_C, \vec{N}_C) - 2(\mathbf{B}\vec{N}_C, \vec{u}) + (\mathbf{B}\vec{u}, \vec{u}) = (\mathbf{B}(\vec{N}_C - \vec{u}), \vec{N}_C - \vec{u}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Данная величина положительна, поскольку матрица  $\mathbf{B}$  положительно определена, и достигает своего наибольшего значения в начале координат  $\vec{u} = \vec{0}$ .

Если коэффициент трения достаточно велик, то прямая (3.30) пересекается с окружностью трения, соответствующей движению с проскальзыванием. При этом может оказаться, что какое-то время изображающая точка проведет в области  $dV_n/d\chi < 0$ , т.е. с ростом нормальной составляющей ударного импульса нормальная скорость убывает. Тем не менее, это время будет конечным, так как вне эллипса  $d|\vec{V}_t|/d\chi < 0$ , и скольжение рано или поздно прекращается. Затем  $\vec{u} \equiv \vec{u}^*$  или  $\vec{u} \equiv \vec{u}_2$ ; в обоих случаях  $dV_n/d\chi > 0$ , так как обе эти точки лежат внутри эллипса или на его границе.

Таким образом, гипотеза Раяса (3.16) позволяет однозначно построить траекторию изображающей точки при ударе шероховатых тел [Darboux, 1880, Keller, 1986]. В общем случае для этого необходимо численно проинтегрировать систему (3.18), (3.19). Лишь в некоторых частных случаях задача имеет алгебраическое решение. Приведем соответствующие примеры.

**Примеры.** 1. Удар двух шаров [Кориолис, 1956]. В этом случае матрица  $\mathbf{B}$  описывается формулой (3.11). Собственными векторами этой матрицы являются  $\vec{N}_C$ , а также плоскость всевозможных касательных векторов  $\vec{e}_t$ . Поэтому вектор  $\vec{U}$  является линейной комбинацией  $\vec{N}_C$  и  $\vec{e}_t$ , и по четвертой из формул (3.23)

$$d\vec{e}_t/d\chi \equiv \vec{0}.$$

Следовательно, при ударе с трением направление скольжения не изменяется. Поскольку

$$d|\vec{V}_t|/d\chi = (\vec{U}, \vec{e}_t) = -\mu(\mathbf{B}\vec{e}_t, \vec{e}_t) < 0,$$

то в случае остановки скольжения в ходе удара оно уже не возобновляется.

2. Плоский удар с трением. Допустим, что соударяются тела, имеющие лишь два измерения (пластины) и движущиеся в некоторой фиксированной плоскости. Тогда в той же плоскости лежит ударный импульс  $\vec{I}$ . Направим ось  $\vec{e}_2$  из точки контакта по нормали в сторону первого тела, а ось  $\vec{e}_1$  — по касательной, и обозначим  $x_1, y_1$  координаты вектора  $\vec{G}_1C$ ,  $x_2, y_2$  — координаты вектора  $\vec{G}_2C$ . Элементы матрицы  $\mathbf{B}$  имеют вид

$$b_{11} = M_1^{-1} + M_2^{-1} + J_1^{-1}y_1^2 + J_2^{-1}y_2^2, \quad (3.32)$$

$$b_{12} = b_{21} = -J_1^{-1}x_1y_1 - J_2^{-1}x_2y_2, \quad b_{22} = M_1^{-1} + M_2^{-1} + J_1^{-1}x_1^2 + J_2^{-1}x_2^2.$$

Формула (3.18) в рассматриваемом случае выглядит так:

$$dI_1/d\chi = -\mu \operatorname{sign} V_1.$$

В зависимости от элементов матрицы  $\mathbf{B}$  и начальной скорости  $\vec{V}^-$  существуют следующие три типа удара с кулоновым трением:

1. Направление скольжения неизменно в течение всего удара, тогда

$$I_1 = -\mu I_2 \operatorname{sign} V_1^-.$$

2. Скольжение в ходе удара останавливается и тут же возобновляется в противоположном направлении, при этом  $|b_{12}| > \mu b_{11}$ ,  $b_{12}V_1^- < 0$ ,

$$I_1 = \mu(I_2 - 2I_2^*) \operatorname{sign} V_1^-, \quad I_2^* = |V_1^-|/(\mu b_{11} - b_{12} \operatorname{sign} V^-), \quad (3.33)$$

где  $I_2^*$  — значение, соответствующее остановке скольжения.

3. Скольжение в ходе удара останавливается и более не возобновляется. В этом случае

$$I_1 = [\mu^*(I_2 - I_2^*) - \mu I_2^*] \operatorname{sign} V_1^- . \quad (3.34)$$

где  $\mu^* = |b_{12}|/b_{11} \leq \mu$ .

Если  $V_1^- = 0$ , то удар относится ко второму или третьему случаю, при этом в формулах (3.33), (3.34) надо положить  $I_2^* = 0$  и заменить  $\operatorname{sign} V_1^-$  на  $\operatorname{sign} b_{12}$ .

Кроме данных случаев, алгебраическое решение имеет задача о соударении двух тел вращения, если точка контакта лежит на их осах симметрии. Решение задачи об ударе тела вращения о массивное препятствие в общем случае сводится к квадратурам.

Способы определения нормального импульса  $I_2$  обсуждаются ниже.

#### **Различные определения коэффициента восстановления.**

Для решения задачи об ударе недостаточно принять гипотезу о характере трения: необходимо задать еще одно граничное условие типа равенства (3.15) для удара без трения. Такое условие в случае удара с трением можно накладывать по-разному. Рассмотрим некоторые определения момента окончания удара, представляющие наибольший практический интерес.

1. *Кинематическое определение* связано с заданием коэффициента восстановления  $e \in [0, 1]$  в граничном условии (3.15). Однако, такое прямолинейное обобщение закономерностей удара без трения некорректно, так как расчетное значение ударного импульса может оказаться физически невозможным [Brach, 1984, Kane, Levinson, 1985].

**Пример.** Для плоского соударения тела с препятствием, обсуждавшемся выше, зададим значения параметров так:

$$e = 1, \mu = 0.3, M_1 = 1, J_1 = 1, x_1 = 0.1, y = 1, V_1^- = 0.7, V_2^- = -6,$$

тогда  $b_{11} = 2, b_{12} = -0.1, b_{22} = 1.01, \mu^* = 0.05$  и удар проходит по третьему из возможных сценариев. Скольжение останавливается при значениях  $I_2^* = 1, I_1^* = -0.3$ , при этом  $V_2(I^*) = -4.96$ , затем оно уже не возобновляется. Расчеты показывают, что  $I_2 = 11.905, I_1 = 0.245$ , и в формуле (1.9)  $\Delta T = 0.0875 > 0$ .

2. *Динамическое определение* коэффициента восстановления основано на сравнении нормальной составляющей ударного импульса в двух фазах удара. В первой фазе — деформации — скорость относительного сближения тел погашается за счет накопления потенциальной энергии деформаций и диссипативных явлений; признаком окончания этой фазы является выполнение равенства (3.6) в некоторый момент времени  $t^o \in [t_0, t_0 + \tau]$ .

Во второй фазе происходит восстановление кинетической энергии. Коэффициент восстановления  $\nu$  определяется по формуле [Poisson, 1838]

$$I_n(t_0 + \tau) = (1 + \nu) I_n(t^0), \quad \nu \in [0, 1]. \quad (3.35)$$

Следующее утверждение было доказано в [Wang, Mason, 1992] для плоского соударения и в [Иванов, 1992, в] для общего случая.

**Предложение 3.1.** *Определение момента окончания удара в соответствии с формулой (3.35) всегда приводит к физически допустимым расчетным значениям  $\Delta T \leq 0$ .*

**Доказательство.** [Иванов, 1992, в] Воспользуемся непосредственно определениями работы ударной силы на элементарном перемещении  $d\vec{r}$  и ударного импульса:

$$dA = (\vec{R}_C, d\vec{r}) = \left( \frac{d\vec{I}}{dt}, \vec{V}_C dt \right) = (d\vec{I}, \vec{V}_C).$$

Величина  $\Delta T$  выражается криволинейным интегралом, взятым вдоль дуги кривой  $\vec{I}(t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta T &= \int_0^{I_\tau} dA = \int_0^{I_\tau} (\vec{V}_C, d\vec{I}) = \int_0^{I_\tau} (V_n dx + \vec{V}_t d\vec{I}_t) = \\ &= \int_0^{x_\tau} (V_n + \vec{V}_t \frac{d\vec{I}_t}{dx}) dx = \int_0^{(1+\nu)x^\circ} W(x) dx, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\vec{I}_\tau = \vec{I}(t_0 + \tau), \quad x_\tau = x(t_0 + \tau), \quad x^\circ = I_n(t^0), \quad W(x) = V_n(x) - \mu |\vec{V}_t(x)|.$$

При выводе данной формулы использованы соотношения (3.18) и (3.35); она справедлива в обоих случаях  $\vec{V}_t \neq \vec{0}$  и  $\vec{V}_t = \vec{0}$ , так как во втором случае  $(\vec{V}_C, d\vec{I}) = V_n dx$ . Установим некоторые свойства функции  $W(x)$ , важные для оценки определенного интеграла в правой части формулы (3.36).

(i)  $W(x) \leq 0$  при  $x = x^\circ$ , так как при этом  $V_n = 0$ ,  $|\vec{V}_t| \geq 0$ .

(ii)  $dW(x)/dx > 0$  при  $x \geq 0$ , поскольку при  $\vec{V}_t \neq \vec{0}$  при учете равенств (3.23) получаем

$$dW(x)/dx = dV_n/dx - \mu d|\vec{V}_t|/dx = (\vec{U}, \vec{N}_C) - \mu(\vec{U}, \vec{e}_t) = (\vec{U}, \mathbf{B}^{-1}\vec{U}) > 0, \quad (3.37)$$

а при  $\vec{V}_t = \vec{0}$  вследствие (3.8) и положительной определенности матрицы  $\mathbf{B}$  имеем

$$dW(x)/dx = (\mathbf{B}^{-1}\vec{N}_C, \vec{N}_C)^{-1} > 0. \quad (3.38)$$

(iii) Если  $\vec{V}_t \neq \vec{0}$ , то  $d^2W(x)/dx^2 \leq 0$ , так как в силу (3.23), (3.35) и неравенства Бесселя получаем

$$d^2W(x)/dx^2 = 2(\vec{U}, -\mu \frac{d\vec{e}_t}{dx}) = -2\mu[(\vec{U}, \vec{U}) - (\vec{U}, \vec{N}_C)^2 - (\vec{U}, \vec{e}_t)^2]/|\vec{V}_t| \leq 0.$$

(iv) Среди всевозможных векторов  $\vec{e}_t$  минимум функции  $dW/dx$  доставляет вектор  $\vec{e}_t^*$ , определенный системой (3.21), (3.22) если он существует.

Для проверки этого свойства составим базис из векторов  $\vec{e}_t^*$ ,  $\vec{N}_C \times \vec{e}_t^*$ ,  $\vec{N}_C$  и обозначим  $\|\beta_{ij}\|$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) — коэффициенты квадратичной формы

$$Q(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}, \mathbf{Bq})$$

в этом базисе. Представляя произвольный касательный орт  $\vec{e}_t$  в виде

$$\vec{e}_t = \vec{e}_t^* \cos \xi + (\vec{N}_C \times \vec{e}_t^*) \sin \xi,$$

получим при учете соотношений

$$\beta_{23} = \mu \beta_{12}, \quad \mu \beta_{11} < \beta_{13}$$

следующую оценку

$$\begin{aligned} dW(x)/dx - (\vec{U}^*, \mathbf{B}^{-1} \vec{U}^*) &= \\ = (\vec{N}_C - \mu \vec{e}_t, \mathbf{B}(\vec{N}_C - \mu \vec{e}_t)) - (\vec{N}_C - \mu \vec{e}_t^*, \mathbf{B}(\vec{N}_C - \mu \vec{e}_t^*)) &= \\ = (1 - \cos \xi)[2\mu \beta_{13} - 2\mu^2 \beta_{12} \sin \xi + \mu^2(1 + \cos \xi)(\beta_{22} - \beta_{11})] &\geq \\ \geq \mu^2(1 - \cos \xi)[(1 + \cos \xi)\beta_{22} - 2\beta_{12} \sin \xi + (1 - \cos \xi)\beta_{11}] &= \\ = 2\mu^2(1 - \cos \xi)(\mathbf{N}_C \times \vec{e}_t^* \cos \xi/2 - \vec{e}_t^* \sin \xi/2, \mathbf{B}(\vec{N}_C \times \vec{e}_t^* \cos \xi/2 - \vec{e}_t^* \sin \xi/2)) &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

(v) Значение функции  $dW(x)/dx$  в отсутствие скольжения меньше ее значения на любом из векторов  $\vec{e}_t$ .

Данное свойство можно доказать, используя прежние обозначения: вследствие равенств (3.37), (3.38) имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^{-1} \vec{N}_C, \vec{N}_C)^{-1} - (\vec{N}_C - \mu \vec{e}_t^*, \mathbf{B}(\vec{N}_C - \mu \vec{e}_t^*)) &= \\ = (\mathbf{B}^{-1} \vec{N}_C, \vec{N}_C)^{-1} - \beta_{33} + \beta_{13}^2/\beta_{11} - (\mu - \beta_{13}/\beta_{11})^2 \beta_{11} &\leq \\ \leq (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2)^{-1} \det\{\mathbf{B}\} - \beta_{33} + \beta_{12}^2/\beta_{11} &= \\ = -(\beta_{12} \beta_{13} - \beta_{11} \beta_{23})^2 \beta_{11}^{-1} (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2)^{-1} &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Вследствие свойств (i)–(v), функция  $W(x)$  монотонно возрастает в течение удара и выпукла вниз. Из формулы (3.36) следует, что кинетическая энергия убывает при возрастании величины  $x$  от нуля до значения  $x_1$  такого, что  $W(x_1) = 0$ , а затем она возрастает; при этом  $x_1 \geq x^0$ . Потеря кинетической энергии на интервале  $x \in [0, x_1]$  всегда меньше ее прироста при  $x \in [x_1, x_r]$ .

**Замечание.** Отмеченная выше некорректность модели удара, основанной на кинематическом определении коэффициента восстановления, обусловлена тем фактом, что из выполнения неравенства  $e \leq 1$  в формуле (3.15) не следует, что динамический коэффициент  $\nu$  также не превосходит единицы. В частности, для приведенного выше примера  $I_2(t_0) = 5.935$ , следовательно, в формуле (3.35)  $\nu = 1.006 > 1$ .

3. Энергетические определения коэффициента восстановления основаны на оценке потенциальной энергии упругих деформаций в продолжение удара. Возможны различные подходы к определению коэффициента восстановления в зависимости от тех или иных физических допущений.

В [Stronge, 1990, 1991, 1994b] рассматривался случай, когда податливость соударяемых тел в касательной плоскости пренебрежимо мала, так что потенциальная энергия деформаций зависит лишь от нормальных относительных перемещений. Накопление этой энергии происходит на промежутке  $\chi \in [0, \chi^o]$ , пока  $V_n < 0$ , а ее отдача — на промежутке  $\chi \in [\chi^o, \chi_\tau]$ . Коэффициент  $\eta$  определяется как квадратный корень из отношения работ нормальной составляющей реакции в двух фазах удара, взятого с противоположным знаком:

$$\eta^2 = - \int_{\chi^o}^{\chi_\tau} V_n d\chi \left( \int_0^{\chi^o} V_n d\chi \right)^{-1}, \quad \eta \in [0, 1]. \quad (3.41)$$

Непосредственно из определения коэффициента  $\eta$  следует, что при  $\eta \leq 1$  величина  $\Delta T$  отрицательна, так как силы сухого трения диссилиативны в обеих фазах удара. Следовательно, использование коэффициента  $\eta$  для определения момента окончания удара не приводит к некорректности. Заметим, что аналогичное определение коэффициента восстановления ранее использовалось в [Boulanger, 1939].

Другой подход к энергетическому коэффициенту восстановления связан с учетом тангенциальной податливости [Иванов, 1992, б]. При этом накопление энергии деформаций происходит в интервале  $\chi \in [0, \chi_1]$ , где значение  $\chi_1$  соответствует минимуму кинетической энергии. Затем при  $\chi \in [\chi_1, \chi_\tau]$  энергия частично восстанавливается; мерой восстановления служит коэффициент  $\zeta$ , определяемый так:

$$\zeta^2 = (T^+ - T_{\min}) / (T^- - T_{\min}), \quad \zeta \in [0, 1]. \quad (3.42)$$

Очевидно, что и при таком определении приращение кинетической энергии при ударе неположительно.

Использование того или иного определения коэффициента восстановления обусловлено практическими соображениями: хотя все модели, обсужденные выше, являются довольно грубыми, они могут аппроксимировать реальный удар.

Рассмотрим, к примеру, случай, когда направление относительного скольжения при ударе остается неизменным (как при ударе без трения или при соударении двух шаров с небольшим сухим трением). При этом траектория изображающей точки  $\vec{I}(t)$  прямолинейна (ср. (3.12)):

$$\vec{I}(t) = \alpha(t) \vec{l}^-, \quad \vec{l}^- = \vec{N}_C - \mu \vec{e}_t, \quad \alpha(t) > 0. \quad (3.43)$$

Полупрямая (3.43) пересекает плоскость наибольшего сжатия (3.6) при значении  $\alpha(t) = \alpha^*$ , определяемом из уравнения

$$\alpha^*(\vec{l}^-, \mathbf{B}\vec{N}_C) = -(\vec{V}_C^-, \vec{N}_C). \quad (3.44)$$

Как следует из данной формулы, обсуждаемый случай неизменности вектора  $\vec{e}_t$  в течение удара возможен лишь при условии

$$(\vec{l}^-, \mathbf{B}\vec{N}_C) > 0. \quad (3.45)$$

При выполнении этого условия значение  $\chi^0$  определяется так:

$$\chi^0 = \alpha^* = -(\vec{V}_C^-, \vec{N}_C)/(\vec{l}^-, \mathbf{B}\vec{N}_C). \quad (3.46)$$

Нетрудно проверить, что при ударе без трения ( $\mu = 0$ ) все четыре определения коэффициента восстановления: (3.15), (3.35), (3.41) и (3.42) эквивалентны, т.е. полагая

$$e = \nu = \eta = \zeta,$$

мы приходим к одинаковым условиям окончания удара.

Если  $\mu \neq 0$ , то эквивалентными оказываются лишь три первых определения:

$$e = \nu = \eta > \zeta.$$

Различие коэффициентов  $\eta$  и  $\zeta$  обусловлено несовпадением значений  $\chi_1$  и  $\chi^0$ . Как показано в [Иванов, 1992, в], в рассматриваемом случае

$$\zeta = -(\vec{V}_C^+, \vec{l}^-)/(\vec{V}_C^-, \vec{l}^-). \quad (3.47)$$

Анализ некоторых экспериментальных данных показывает предпочтительность определения (3.42) [Иванов, 1992, в].

Возможны и другие определения коэффициентов восстановления (см. [Brach, 1989, 1991], [Smith, 1991]).

**Другие виды ударного трения.** Гипотеза (3.16) является лишь одним из возможных подходов к описанию касательной составляющей удара импульса. Хотя этот подход наиболее известен и признан, его не следует абсолютизировать, так как полученные на его основе результаты не соответствуют ряду экспериментальных данных: обращению направления скольжения при центральном ударе [Ногак, 1948, Maw et al., 1977, 1981], зависимости коэффициента восстановления относительной скорости от угла атаки [Лавендел, Субач, 1966, Lewis, Rogers, 1988, Haslinger, Steininger, 1995] и др. Эти данные можно объяснить наличием определенной податливости соударяемых тел в касательной плоскости, не учитываемой законами сухого трения, согласно которым всякое скольжение приводит к необратимым диссипативным последствиям. Соответствующие модели обсуждаются в следующем параграфе.

Можно предложить и другие модели касательных напряжений, которые в ряде задач могут оказаться более реалистичными. Одна из возможностей состоит в применении гипотезы вязкого трения: вместо условий (3.16) предполагается выполненным соотношение

$$\mathbf{R}_t = -\mu^* \mathbf{V}_t, \quad (3.48)$$

где  $\mu^*$  — коэффициент вязкого трения. Такая гипотеза может быть оправдана при наличии жидкой пленки или смазки на поверхности тел [Haslinger, Steininger, 1995]. Некоторые математические аспекты удара с вязким трением рассматривались в [Козлов, 1989].

### 3.2. ВЯЗКОУПРУГИЕ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО УДАРА

Наряду с классическим подходом к описанию пространственного удара, при котором соударяемые тела считают абсолютно твердыми, возможно также использование различных моделей теории упругости (см. главу 2).

Заметим, что волновые процессы в трехмерных телах сопровождаются многократными отражениями фронта волны от ограничивающих их поверхностей. Точное описание этих явлений в общем случае невозможно, а приближенные оценки, выполненные для некоторых конкретных задач, показывают [Джонсон, 1989], что при скоростях удара, не превосходящих нескольких процентов от скорости ударной волны (на практике, нескольких десятков м/с) энергия колебаний составляет пренебрежимо малую часть кинетической энергии.

Ввиду этого ограничимся рассмотрением простейших дискретных моделей пространственного удара. Присущие таким моделям недостатки, обусловленные неопределенностью в выборе числа параметров и их значений, компенсируются аналитической простотой и реалистичностью результатов (см. [Пановко, 1977, Рагульскене, 1974]).

**Общее уравнение пространственного удара.** Как отмечалось выше, соударение твердых тел с абсолютно гладкими поверхностями сходно с задачей о коллинеарном ударе: в обоих случаях определению подлежит единственная скалярная величина — модуль ударного импульса, направленного по общей нормали в точке контакта. Поэтому для анализа можно использовать методы, изложенные во второй главе, с незначительной модификацией.

Как было показано в §2.3, в одномерном случае вязкоупругие деформации можно описать при помощи двух функций: потенциальной энергии упругих деформаций  $W_e(\epsilon)$  и диссипативной функции Релея  $\mathcal{R}(\epsilon, \dot{\epsilon})$ . В рассматриваемой задаче о пространственном ударе величина  $\epsilon$  является уже не скаляром, а вектором, равным относительному перемещению в точке контакта:

$$\vec{\epsilon} = \vec{r}_1(C) - \vec{r}_2(C), \quad (3.49)$$

где индекс указывает на принадлежность к первому или второму телу. Уравнения движения свободного твердого тела под действием произвольной системы сил с главным вектором  $\vec{Q}$  и главным моментом относительно центра масс  $\vec{N}$ , а также ударной силы  $\vec{F}$ , приложенной в точке  $C$ , имеют в инерциальной системе отсчета вид

$$M\ddot{\vec{r}}_G = \vec{Q} - \vec{F}, \quad (\mathbf{J}\vec{\Omega})' = \vec{N} - G\vec{C} \times \vec{F} \quad (3.50)$$

(смысл остальных обозначений разъяснен в §1.3). Если пренебречь изменением углового положения тела (и, следовательно, тензора инерции  $\mathbf{J}$ ) за время удара и воспользоваться формулой Эйлера, то получим для ускорения точки  $C$  такое выражение:

$$\ddot{\vec{r}}_C = M^{-1}(\vec{Q} - \vec{F}) + \mathbf{J}^{-1}(\vec{N} - \vec{G}_C \times \vec{F}) \times \vec{G}_C \quad (3.51)$$

Дифференцируя дважды формулу (3.49), получим при учете (3.51)

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{\epsilon}} &= M_1^{-1}(\vec{Q}_1 - \vec{F}) + \mathbf{J}_1^{-1}(\vec{N}_1 - \vec{G}_1 C \times \vec{F}) \times \vec{G}_1 C - \\ &- M_2^{-1}(\vec{Q}_2 + \vec{F}) - \mathbf{J}_2^{-1}(\vec{N}_2 + \vec{G}_2 C \times \vec{F}) \times \vec{G}_2 C, \end{aligned} \quad (3.52)$$

где индексы обозначают отношение соответствующей величины к первому или второму телу.

В правой части уравнения (3.52) наряду с членами, линейными по отношению к  $\vec{F}$ , имеются также слагаемые, не зависящие от характера контактных напряжений. В классической теории удара второй группой членов обычно пренебрегают, хотя в случае соударений с низкой скоростью сближения они могут играть главную роль (см. §2.4).

Для того, чтобы получить решение поставленной задачи о пространственном ударе при помощи уравнения (3.52), необходимо задать зависимость  $\vec{F}(\vec{\epsilon}, \dot{\vec{\epsilon}})$ . Ниже рассматриваются два основных случая, когда тела имеют шероховатые или абсолютно гладкие поверхности.

**Случай абсолютно гладких поверхностей.** В обсуждаемой задаче о пространственном ударе деформация  $\vec{\epsilon}$  и реакция  $\vec{F}$  являются векторами, имеющими составляющие  $\epsilon_n$ ,  $F_n$ , нормальные к поверхностям соударяемых тел в точке контакта, и  $\vec{\epsilon}_t$ ,  $\vec{F}_t$ , касательные к этим поверхностям.

Под абсолютно гладкостью поверхностей деформируемых тел будем понимать совокупность двух свойств. Во-первых, касательная составляющая реакции равна нулю:  $\vec{F}_t = \vec{0}$ . Во-вторых, касательные деформации не вызывают напряжений в соударяемых телах. Таким образом,

$$\vec{F} = \vec{n} F_n(\epsilon_n, \dot{\epsilon}_n), \quad \text{при } \epsilon_n > 0, \quad (3.53)$$

причем  $\vec{F} \equiv \vec{0}$  при  $\epsilon_n \leq 0$ . Подставим выражение (3.53) в общую формулу (3.52) и умножим обе части скалярно на единичный вектор нормали  $\vec{n}$ :

$$\vec{\epsilon}_n + Q^* + A^* F_n(\epsilon_n, \dot{\epsilon}_n) = 0, \quad (3.54)$$

$$Q^* = (\vec{n}, M_2^{-1}\vec{Q}_2 - M_1^{-1}\vec{Q}_1 + \mathbf{J}_2^{-1}\vec{N}_2 - \mathbf{J}_1^{-1}\vec{N}_1),$$

$$A^* = M_1^{-1} + M_2^{-1} + (\mathbf{J}_1^{-1}(\vec{G}_1 C \times \vec{n}), \vec{G}_1 C \times \vec{n}) + (\mathbf{J}_2^{-1}(\vec{G}_2 C \times \vec{n}), \vec{G}_2 C \times \vec{n})$$

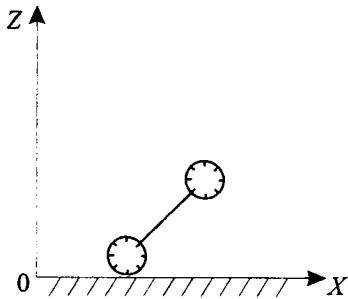


Рис. 3.5. Удар гантели о препятствие

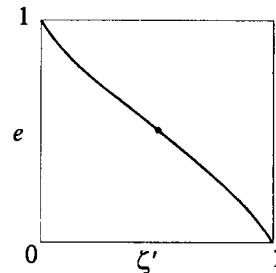


Рис. 3.6. Зависимость коэффициента восстановления от коэффициента диссипации при прямом ударе шара

Скалярное уравнение второго порядка (3.54) аналогично уравнению (2.108). Поэтому для него справедливы все качественные результаты, полученные в §§2.3, 2.4. Однако, пространственный случай отличается от коллинеарного наличием зависимости количественных характеристик удара — импульса, коэффициента восстановления и т.п. — от распределения масс в соударяемых телах (т.е. от тензоров  $J_{1,2}$ ).

По аналогии с формулой (2.69), запишем выражение ударной реакции в виде

$$\vec{F} = \text{grad } W_e + \text{grad}_1 \mathcal{R}, \quad (3.55)$$

где  $\text{grad}_1$  обозначает дифференцирование по  $\dot{\epsilon}$ .

Условия гладкости означают, что

$$W_e(\epsilon) = W_e(\epsilon_n), \quad \mathcal{R}(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}) = \mathcal{R}(\epsilon_n, \dot{\epsilon}_n). \quad (3.56)$$

При учете равенств (3.56), величину (3.55) можно представить так:

$$\vec{F} = F_n \vec{n}, \quad F_n = W'_e(\epsilon_n) + \frac{\partial \mathcal{R}(\epsilon_n, \dot{\epsilon}_n)}{\partial \dot{\epsilon}_n}. \quad (3.57)$$

Подставляя выражение (3.57) в (3.54), получим уравнение относительно нормальной деформации, аналогичное уравнению (2.92). Следовательно, свойства удара тел с гладкими поверхностями аналогичны рассмотренным выше свойствам коллинеарного удара.

**Пример.** Рассмотрим удар тела гантелеобразной формы о массивное препятствие с плоской гладкой границей (рис. 3.5) в отсутствие активных сил. Выберем систему координат  $OXYZ$  таким образом, чтобы ось  $OZ$  была направлена ортогонально препятствию вовне, а ось  $OY$  — ортогонально оси гантели. Если  $A_3, A_1$  — осевой и экваториальный моменты инерции гантели, то тензор инерции имеет вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} A_1 \cos^2 \vartheta + A_3 \sin^2 \vartheta & 0 & (A_3 - A_1) \sin \vartheta \cos \vartheta \\ 0 & A_1 & 0 \\ (A_3 - A_1) \sin \vartheta \cos \vartheta & 0 & A_1 \sin^2 \vartheta + A_3 \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

где  $\vartheta$  — угол между нормалью  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  и осью тела. В формуле (3.54)  $Q^* \equiv 0$ , а величины  $M_2^{-1}, J_2^{-1}$  пренебрежимо малы, откуда

$$A^* = M_1^{-1} + (\vec{J}_1^{-1}(\vec{G}_1 C \times \vec{n}), \vec{G}_1 C \times \vec{n}) = M_1^{-1} + A_1^{-1} l^2 \sin^2 \vartheta. \quad (3.59)$$

Здесь  $l$  обозначает расстояние между центром инерции гантели и центром той ее половины, которая соприкасается с препятствием. Следовательно, величина  $A^*$  зависит от  $\vartheta$ : она минимальна, когда ось гантели ортогональна препятствию и максимальна — когда ось параллельна ему.

Положим функцию  $F_n$  в уравнении (3.54) линейной (среда Кельвина — Фохта, см. формулу (2.39)):

$$\ddot{\epsilon}_n + A^*(b\dot{\epsilon}_n + c\epsilon_n) = 0. \quad (3.60)$$

Коэффициент восстановления можно определить из (2.48) (см. также [Козлов, Трещёв, 1991]):

$$e = \exp \left( -\frac{1}{\sqrt{1-\nu}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\nu}}{1-\sqrt{1-\nu}} \right), \quad \nu = \frac{4c}{b^2 A^*}. \quad (3.61)$$

Величина  $e$  монотонно возрастает вместе с  $\nu$ , откуда следует, что она будет максимальной, когда ось гантели ортогональна препятствию (при этом  $\nu = 4cM_1/b^2$ ) и минимальна, когда она параллельна препятствию.

**Квазистатические модели удара шероховатых тел.** Поверхность всякого реального физического тела имеет не только определенную форму (например, сфера или гантель), но и обладает некоторым микрорельефом. Последний можно описать при помощи тех или иных статистических характеристик: распределений шага, высоты или крутизны микронеровностей, корреляционных функций и т.д. [Дёмкин, 1966, Мур, 1978].

Шероховатость поверхностей служит причиной возникновения касательных напряжений при относительном движении тел, в том числе и при косом ударе. Эти напряжения можно описать при помощи задания вектор-функции  $\vec{F}(\vec{\epsilon}, \vec{\dot{\epsilon}})$  в уравнении (3.52), зависящей не только от  $\epsilon_n$ , но и от  $\dot{\epsilon}_t$ . Некоторые результаты в этом направлении получены в [Иванов, 1988, Козлов, 1989, Ivanov, 1995, б].

Обсудим сначала квазистатические модели удара шероховатых тел. В этом случае функция  $\vec{F}$  в уравнении (3.52) зависит только от  $\vec{\epsilon}$ , но не от  $\vec{\dot{\epsilon}}$ . Это векторное равенство можно записать в проекции на произвольное направление  $\nu$ , поменяв затем порядок сомножителей в тройном произведении и воспользовавшись симметрией тензоров инерции:

$$\ddot{\epsilon}_\nu + Q_\nu^* + A_\nu^* F_\nu = 0, \quad (3.62)$$

$$\epsilon_\nu = (\vec{\epsilon}, \vec{\nu}), \quad F_\nu = (\vec{F}, \vec{\nu}), \quad Q_\nu^* = (\vec{\nu}, M_2^{-1} \vec{Q}_2 - M_1^{-1} \vec{Q}_1 + \mathbf{J}_2^{-1} \vec{N}_2 - \mathbf{J}_1^{-1} \vec{N}_1)$$

$$A_\nu^* = \sum_{j=1}^2 M_j^{-1}(\vec{\nu}, \vec{\nu}) + (\mathbf{J}_j^{-1}(\vec{G}_j C \times \vec{\nu}), \vec{G}_j C \times \vec{\nu}).$$

В частности, при  $\vec{\nu} = \vec{n}$  формула (3.62) переходит в (3.54). Однако, в отличие от случая абсолютно гладких поверхностей, функция  $F_\nu$  зависит не только от  $\epsilon_\nu$ , но и от других компонент вектора  $\vec{\epsilon}$ . Поэтому удар шероховатых тел в общем случае описывается системой шестого порядка: они состоят из трех равенств вида (3.62), составленных для трех взаимно перпендикулярных направлений.

В формуле (3.57)  $\mathcal{R} \equiv 0$ , откуда

$$\vec{F} = \text{grad } W_e(\vec{\epsilon}), \quad W_e(\vec{\epsilon}) \equiv 0 \text{ при } \epsilon_n < 0. \quad (3.63)$$

Задавая ту или иную формулу для потенциальной энергии упругих деформаций  $W_e(\vec{\epsilon})$ , мы будем получать различные квазистатические модели удара. Если в системе (3.62) добавочные силы отсутствуют,  $Q_\nu^* \equiv 0$ , то при учете (3.63) она будет консервативной, а удар — абсолютно упругим.

Обсудим структуру потенциала  $W_e$ . Он равен нулю в области  $\epsilon_n \leq 0$  и возрастает с ростом нормальной деформации  $\epsilon_n$ , а также абсолютной величины касательной деформации  $\vec{\epsilon}_t$ . Вид этой функции зависит не только от упругих свойств материалов, из которых изготовлены рассматриваемые тела, но и от микрорельефа их поверхностей, который зависит от качества обработки, степени износа и т.п. Обычно считают характеристики рельефа одинаковыми во всех направлениях в касательной плоскости — такие поверхности называют *изотропными*. Потенциал деформации пары изотропных поверхностей обладает осевой симметрией относительно общей нормали, что позволяет представить его в виде функции двух переменных. В качестве этих переменных удобно взять нормальную деформацию и модуль вектора деформаций:

$$W_e(\vec{\epsilon}) = W(\epsilon_n, |\vec{\epsilon}|). \quad (3.64)$$

Выбор той или иной конкретной зависимости (3.64) диктуется обычными требованиями к математической модели, которая должна сочетать реалистичность с простотой анализа. Заметим, что даже в простейших случаях определение ударного импульса при ударе шероховатых тел при помощи формул (3.62) — (3.64) связано с численным интегрированием.

**Примеры.** 1. Линейно упругая среда в применении к контакту шероховатых тел описывается формулой

$$W_e(\vec{\epsilon}) = c_1 \left( \frac{1}{2} \epsilon_n^2 + \chi \epsilon_n |\vec{\epsilon}| \right), \quad (3.65)$$

где константа  $c_1$  равна жесткости контакта в направлении нормали, а параметр  $\chi$  характеризует степень шероховатости. В частности, при  $\chi = 0$  мы приходим к случаю абсолютно гладких поверхностей, а предельный случай  $\chi \rightarrow \infty$  можно квалифицировать как абсолютную шероховатость.

Равенство (3.63) принимает вид

$$\vec{F} = c_1 \left( \vec{n}(\epsilon_n + \chi |\vec{\epsilon}|) + \chi \epsilon_n \frac{\vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|} \right). \quad (3.66)$$

Таким образом, касательная компонента реакции имеет направление, противоположное касательной деформации. Заметим, что величина  $c_1$  определяет продолжительность соударения, но не влияет (в отсутствие добавочных сил) на конечное значение ударного импульса, так как уравнения (3.62) допускают изменение масштаба посредством введения новой независимой переменной.

**2.** Обобщением квазистатической модели Герца (см. §2.3) на случай удара шероховатых тел может служить потенциал вида

$$W_e(\vec{\epsilon}) = c_2 \left( \frac{2}{5} \epsilon_n^{2.5} + 2\chi \epsilon_n^{1.5} |\vec{\epsilon}| \right), \quad (3.67)$$

так как при  $\chi = 0$  (шероховатость отсутствует) нормальная реакция пропорциональна деформации в степени  $3/2$ . В общем случае реакция будет иметь и касательную составляющую в соответствии с формулой

$$\vec{F} = c_2 \epsilon_n^{0.5} \left( \vec{n}(\epsilon_n + 3\chi |\vec{\epsilon}|) + \frac{2\chi \epsilon_n}{|\vec{\epsilon}|} \vec{\epsilon} \right). \quad (3.68)$$

При этом, как и в предыдущем примере, коэффициент  $c_2$  не влияет на конечную величину ударного импульса.

**Соударение шероховатых тел с диссипацией.** Рассмотренные выше квазистатические модели удара позволяют описать касательные напряжения, однако они недостаточны для учета энергетических потерь. Это можно сделать при помощи диссипативной функции Релея в формуле (3.55). Если эта функция является квадратичной формой по отношению к  $\vec{\epsilon}$ , трение пропорционально скорости деформации, что характерно для вязкого трения. В случае формы первой степени сопротивление не зависит от модуля скорости (но может зависеть от ее направления), подобно кулоновскому сухому трению. В обоих случаях функция  $\mathcal{R}$  равна нулю при  $\epsilon_n \leq 0$ . Простейшие выражения для функции Релея таковы:

$$\mathcal{R} = c_3 \epsilon_n \dot{\epsilon}^2 \quad (3.69)$$

(вязкое трение), или

$$\mathcal{R} = c_3 \epsilon_n |\dot{\epsilon}| \quad (3.70)$$

(сухое трение).

Объединим потенциал в форме (3.65) с функцией Релея (3.70). Формула (3.55) приводит к реакции такого вида:

$$\vec{F} = c_1 \left( \vec{n} (\epsilon_n + \chi |\vec{\epsilon}|) + \chi \epsilon_n \frac{\vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|} \right) + c_3 \epsilon_n \frac{\dot{\vec{\epsilon}}}{|\vec{\epsilon}|}. \quad (3.71)$$

Отметим, что касательная составляющая данной силы складывается из двух членов: один из них коллинеарен касательной деформации  $\vec{\epsilon}_t$ , второй — ее скорости изменения  $\dot{\vec{\epsilon}}_t$ .

Подставляя выражение (3.71) в уравнение (3.62) и выбирая затем в качестве  $\vec{v}$  взаимно перпендикулярные орты  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ , получим систему

$$\epsilon_{\nu_j} + Q_{\nu_j}^* + A_{\nu_j}^* F_{\nu_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (3.72)$$

$$F_{\nu_j} = c_1 \left( (\vec{n}, \vec{\nu}_j) (\epsilon_n + \chi |\vec{\epsilon}|) + \chi \epsilon_n \frac{1}{|\vec{\epsilon}|} (\vec{\epsilon}, \vec{\nu}_j) \right) + c_3 \epsilon_n \frac{1}{|\vec{\epsilon}|} (\dot{\vec{\epsilon}}, \vec{\nu}_j).$$

подлежащую решению при начальных условиях

$$\vec{\epsilon}(0) = \vec{0}, \quad \dot{\vec{\epsilon}}(0) = \left( \dot{\vec{r}}_1(C) - \dot{\vec{r}}_2(C) \right) \Big|_{t=0} \quad (3.73)$$

и граничном условии

$$F_n(\tau) = 0. \quad (3.74)$$

**Замечание.** Для описания сухого трения скольжения можно воспользоваться методом деформируемых элементов. Для этого в точку контакта надо поместить деформируемый элемент  $\Xi$ , для которого касательное и нормальное усилия связаны зависимостью

$$\vec{F}_t = \mu F_n \frac{\dot{\vec{\epsilon}}_t}{|\dot{\vec{\epsilon}}_t|}, \quad (3.75)$$

где функцию  $F_n = F_n(\epsilon_n, \dot{\epsilon}_n)$  можно задать по формуле Кельвина – Фохта, Герца с диссиляцией или других. Хотя формула (3.75) теряет смысл при  $\dot{\vec{\epsilon}}_t = \vec{0}$ , ее можно использовать при численном интегрировании, имея в виду нереальность получения "чистого" нуля при вычислениях.

Аналогичный подход применялся в [Stronge, 1994,b] для исследования соударений сферических частиц о шероховатое препятствие. В работе [Stronge, 1995] предлагается упруго-пластическая модель плоского удара с сухим трением.

Ниже рассматривается пример анализа системы (3.72) – (3.74).

**Удар шара о шероховатую плоскость.** Проиллюстрируем применение вязкоупругой модели (3.71) на примере косого удара однородного шара о шероховатую плоскость в отсутствие внешних сил. В

обозначениях §3.1 найдем выражения для коэффициентов  $A_{\nu_j}^*$  в формулах (3.62), (3.72): поскольку  $\vec{G}\vec{C} = -R\vec{n}$ , то

$$A_n^* = M^{-1}, \quad A_t^* = M^{-1}(1 + \gamma), \quad \gamma = R^2/\rho^2, \quad (3.76)$$

где  $\vec{t}$  — произвольное касательное направление. Для однородного шара  $\gamma = 2.5$ , а в плоском случае (когда шар заменяется диском)  $\gamma = 2$ .

При подстановке значений (3.76) в уравнения (3.72) последние будут зависеть от параметров  $M, \gamma$ , относящихся к шару, и  $\chi, c_1, c_3$ , характеризующих принятую модель реакции. Число параметров можно уменьшить на два путем масштабирования времени, полагая  $t' = \sqrt{c_1/M}t$ . В итоге остаются три параметра:  $\gamma, \chi$  и  $\zeta = c_3/c_1$ , последний из них характеризует диссипацию.

Если шар до удара не вращался, то движение останется параллельным нормальной плоскости, содержащей вектор начальной скорости его центра. Для его описания достаточно двух координат:  $z = \epsilon_n$  и  $x = \epsilon_t$ . Уравнения (3.72), (3.73) принимают вид

$$\begin{aligned} x'' &= -\chi(1 + \gamma)xz(x^2 + z^2)^{-1/2} - \zeta zx'(x'^2 + z'^2)^{-1/2}, \\ z'' &= -z - \chi(x^2 + 2z^2)(x^2 + z^2)^{-1/2} - \zeta zz'(x'^2 + z'^2)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$x(0) = z(0) = 0, \quad x'(0) = \sqrt{M/c_1}\dot{x}(0), \quad z'(0) = \sqrt{M/c_1}\dot{z}(0),$$

где штрихом обозначено дифференцирование по новой независимой переменной  $t'$ .

Частный случай  $\dot{x}(0) = 0$  соответствует прямому удару. При этом вследствие первого из уравнений (3.77)  $x \equiv 0$ , а второе уравнение выглядит так:

$$z'' = -(1 + 2\chi)z - \zeta z \operatorname{sign} z'. \quad (3.78)$$

Дифференциальное уравнение (3.78) однородно: если  $z^*(t)$  — некоторое его решение, то и функция  $Cz^*(t)$ , где  $C$  — произвольная константа, также будет решением. Отсюда при учете начального условия  $z(0) = 0$  следует, что общее решение задачи о прямом ударе описывается формулой

$$z(t) = z'(0)z_1(t), \quad (3.79)$$

где  $z_1(t)$  — решение с начальным условием  $z'_1(0) = 1$ .

Формула (3.79) позволяет сделать два важных вывода о свойствах обсуждаемой модели. Во-первых, продолжительность соударения  $\tau$  не зависит от начальной скорости сближения. Во-вторых, коэффициент восстановления относительной скорости  $e = -z'(\tau)/z'(0) = -z'_1(\tau)/z'_1(0)$  также сохраняет постоянное значение, что согласуется с гипотезой Ньютона.

Отметим, что по своему характеру уравнение (3.78) оказалось аналогичным упругопластической модели (2.60). Кусочно-линейный вид

правой части позволяет построить решение аналитически. При учете формулы (3.79), достаточно ограничиться случаем  $z'(0) = 1$ .

В первой фазе удара  $z' > 0$ , и уравнение (3.78) имеет вид

$$z'' = -(1 + 2\chi + \zeta)z. \quad (3.80)$$

Система (3.80) консервативна, она обладает интегралом

$$\Pi = z'^2 + (1 + 2\chi + \zeta)z^2 = 1,$$

что позволяет определить наибольшую деформацию

$$z_{\max} = (1 + 2\chi + \zeta)^{-1/2}.$$

В стадии восстановления  $z' < 0$ , и уравнение (3.78) выглядит так

$$z'' = -(1 + 2\chi - \zeta)z. \quad (3.81)$$

Интеграл энергии для системы (3.81) имеет такую форму:

$$\Pi = z'^2 + (1 + 2\chi - \zeta)z^2 = (1 + 2\chi - \zeta)z_{\max}^2.$$

Отсюда можно определить, что коэффициент восстановления определяется формулой

$$e = \left( \frac{1 - \zeta'}{1 + \zeta'} \right)^{1/2}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{1 + 2\chi}. \quad (3.82)$$

График зависимости коэффициента восстановления от  $\zeta'$  представлен на рис. 3.6.

Аналитическое решение системы (3.77) в случае  $x'(0) \neq 0$  не представляется возможным, поэтому ограничимся изложением численных результатов. На рис. 3.7,а построена зависимость среднего коэффициента трения  $\mu^* = |I_x|/I_z$  от угла падения  $\alpha = \arctan(x'(0)/z'(0))$ , а на рис. 3.7,б — зависимость угла отражения  $\beta = -\arctan(x'(\tau)/z'(\tau))$  от угла падения — для серии значений параметров  $\chi, \zeta$ . При этом считалось, что  $z'(0) = 1, \gamma = 2.5$ . Здесь же пунктиром показано классическое решение той же задачи.

Можно отметить ряд качественных отличий полученных результатов от классических. Во-первых, коэффициент  $\mu^*$  с ростом угла атаки не остается постоянным, а обнаруживает падающий участок характеристики после прохождений максимума при  $\alpha = 50^\circ - 60^\circ$ . Аналогичное поведение обнаруживалось в ряде экспериментов, в частности, оно описано в [Лавендел, Субач, 1966, Haslinger, Steininger, 1995, Стоименов, 1972, 1992].

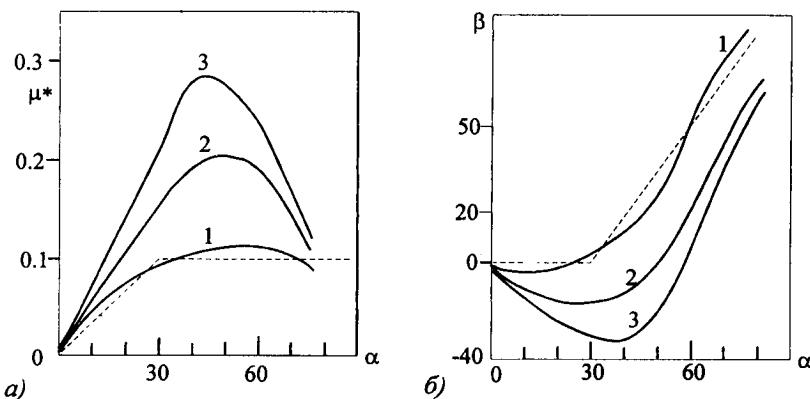


Рис. 3.7. Зависимость а) среднего коэффициента трения и б) угла отражения — от угла падения: 1)  $\chi = 0.1, \zeta = 0.2$ ; 2)  $\chi = 0.3, \zeta = 0.5$ ; 3)  $\chi = 1, \zeta = 0.7$ . Пунктирная линия: классическое решение при  $\mu = 0.1, e = 0.83$ .

Во-вторых, здесь проявляется весьма интересное явление обращения направления скольжения, которое было обнаружено и объяснено в [Maw et al., 1977, 1981] с позиций волновой теории. Оба этих свойства не могут быть объяснены в рамках классической стереомеханики.

**Замечание.** К недостаткам описанной модели следует отнести неопределенность в выборе потенциала и функции Релея. Тем не менее, рассмотренный пример показывает, что простая и реалистичная модель удара содержит, так же как и классическая модель, два параметра. При этом имеется одно явное соотношение (3.82) между параметрами двух моделей, а второе соотношение можно подобрать по данным моделирования. Например, из рисунка 3.7 можно сделать вывод, что паре  $\chi = 0.1, \zeta = 0.2$  отвечает значение  $\mu = 0.1$ , при этом вследствие (3.77)  $e = 0.85$ .

Другие модели удара шара о шероховатую плоскость использовались в [Maw et al., 1977, Jaeger, 1994,b, Stronge, 1994,a].

**Об учете ненулевого размера области контакта.** Везде выше в рассмотрениях данной главы контакт между соударяющимися телами считался точечным. В действительности деформирование поверхностей под действием нагрузки приводит к появлению целой области контакта [Джонсон, 1989]. В большинстве случаев диаметр этой области настолько мал, что можно пренебречь различием относительной скорости в ее точках, что оправдывает представление о точечном контакте. Имеются, однако, и примеры другого рода. В частности, в работе Хорака, посвященной падению на опору мяча, изначально закрученного относительно вертикали [Horák, 1948], установлено, что при достаточно малых начальных значениях угловой скорости после удара вращение имеет противоположное направление.

Обычный подход к описанию подобных явлений, связанный с ис-

пользованием закона сухого трения (3.16), требует знания распределения нормальной нагрузки нагрузки в области контакта. С математической точки зрения, эта задача приводит к уравнениям в частных производных, решение которых представляет весьма сложную проблему. Поэтому часто пользуются теми или иными упрощающими предположениями [Mindlin, 1949, Мак-Миллан, 1951, Lubkin, 1951, Jäger, 1994, а], позволяющими обойти ее.

К примеру, в работе [Hogák, Pacáková, 1961] построена теория чисто вращательного удара упругого шара об абсолютно твердое основание для объяснения экспериментов Хорака. Здесь основное предположение состоит в независимости вертикального движения центра тяжести шара от его вращательного движения и скручивающих деформаций. Получено уравнение для угла  $\psi$  поворота шара вида

$$\ddot{\psi} = F(a, \psi, \dot{\psi}), \quad (3.83)$$

где  $a$  — текущий радиус зоны контакта, а нелинейная функция  $F$  задана графически. Численное решение этого уравнения достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Для описания в рамках вязкоупругой модели особенностей удара, связанных с ненулевым размером области контакта, изменим определение потенциала  $W_e$  таким образом, чтобы эта функция зависела не только от сдвиговых деформаций в точке контакта  $\vec{\epsilon} = \vec{r}_1(C) - \vec{r}_2(C)$ , но и от приращений углов, определяющих ориентацию соударяемых тел и обуславливающих наличие крутильных деформаций. В общем случае формула для  $W_e$  весьма сложна и громоздка, поэтому ограничимся анализом задачи Хорака.

**Пример.** Для шара, соударяющегося с плоским основанием, радиус зоны контакта  $a$  согласно контактной теории Герца пропорционален  $\sqrt{\epsilon_n}$ . Суммарные крутильные деформации в области контакта можно оценить по формуле

$$\epsilon_\psi = |\psi| \iint_{D_a} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{2}{3} \pi |\psi| a^3, \quad (3.84)$$

где  $D_a$  — круг радиуса  $a$ . Добавляя в формулу (3.67) крутильные деформации, представим потенциал в виде

$$W_e(\vec{\epsilon}) = c_2 \left( \frac{2}{5} \epsilon_n^{2.5} + 2\chi \epsilon_n^{1.5} |\vec{\epsilon}| + 2\vartheta \epsilon_n^{1.5} |\psi| \right). \quad (3.85)$$

В выражении (3.85)  $\vartheta$  — некоторый коэффициент.

В рассматриваемом случае  $|\vec{\epsilon}| = \epsilon_n$ , и уравнения вязкоупругой модели принимают вид

$$\epsilon_n'' = -\epsilon_n^{0.5} (\epsilon_n + 3\vartheta_1 |\psi|), \quad \psi'' = -2\vartheta_1 \epsilon_n^{1.5} \operatorname{sign} \psi, \quad \vartheta_1 = \frac{\vartheta}{1 + 5\chi}. \quad (3.86)$$

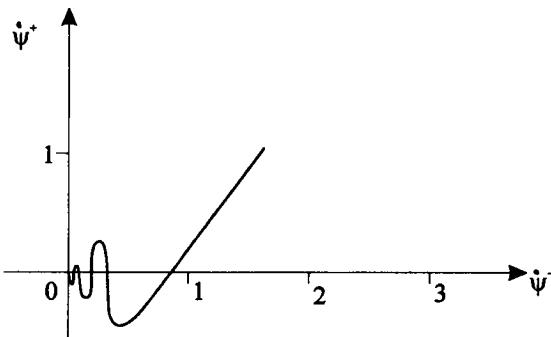


Рис. 3.8. Обращение направления верчения при вращательном ударе

Система (3.86) была численно проинтегрирована при значениях  $\vartheta_1 = 0.1$ ,  $\dot{\epsilon}_n(t_0) = 1$  для значений начальной скорости вращения  $\dot{\psi}(t_0)$  из интервала от нуля до трех, на рис. 3.8 представлены результаты расчета конечной угловой скорости  $\dot{\psi}(t_0 + \tau)$ . Заметим, что здесь обнаружено как минимум три области, в которых направление верчения меняется на противоположное.

**Выводы.** При соударении двух тел, имеющих три невырожденных измерения, волновые процессы обычно не играют существенной роли в формировании ударного импульса (хотя они могут быть значительными и интересными с других точек зрения — например, звон колокола). Поэтому для решения задачи об ударе целесообразно применять какую-либо из дискретных моделей либо классическую стереомеханику. Последняя обладает тем достоинством, что в некоторых частных случаях решение удается построить чисто алгебраически, а к ее недостаткам следует отнести плохое согласование с экспериментальными данными.

Что касается дискретных моделей трехмерного удара, следует отметить их большую реалистичность по сравнению с классической. При этом хорошее согласование с экспериментом демонстрирует даже довольно простая двупараметрическая вязкоупругая модель, не пре-восходящая по сложности классическую модель Пуассона. Увеличивая число параметров, можно описать и более тонкие эффекты, связанные с ненулевым размером области ударного контакта. Недостаток дискретных моделей состоит в том, что физический смысл параметров, как правило, неясен. Поэтому значения констант можно определить лишь путем подбора их из сравнения с опытными данными.

## Глава 4. СТЕСНЕННЫЙ УДАР

### 4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

**Понятие стесненного удара.** В предыдущих двух главах задача о соударении двух твердых тел рассматривалась в отсутствие каких-либо ограничений на их перемещения. Такая постановка не охватывает, очевидно, всех возможных случаев удара, так как зачастую одно из тел (или оба) связано с некоторыми другими телами, не принимающими, на первый взгляд, непосредственного участия в ударе. Например, при ударе молотком по гвоздю молоток контактирует с рукой, а гвоздь — с доской. Биллиардные шары соприкасаются со столом, и т.д.

Решение задачи об ударе несвободных твердых тел включает в себя анализ поведения не только тех из них, которые составляют ударную пару, но и других контактирующих с ними тел, составляющих в совокупности некоторую механическую систему. Ввиду многообразия и сложности такой общей постановки целесообразно ограничить ее, выделив *задачу о стесненном ударе*.

Будем называть соударение двух твердых тел стесненным, если хотя бы одно из них подчинено некоторой механической связи. К такому типу относится тело с одной или двумя закрепленными точками, тело, движущееся по некоторой поверхности или подвешенное на нити, тело, плавающее в жидкости [Жуковский, 1936] и пр.

В задаче о стесненном ударе неизвестными величинами, подлежащими определению, являются ударный импульс, возникающий непосредственно в ударной паре, а также ударные реакции связей. Ниже излагаются основные методы решения этой задачи.

**Аксиоматический метод.** В известном учебнике по теоретической механике П. Аппеля [Appell, 1960, п. 522] рассмотрена задача о внезапном наложении на механическую систему дополнительных связей без трения. Показано, что изменение части переменных описывается уравнениями Лагранжа. Решение задачи об ударе системы материальных точек об идеальную неудерживающую связь, основанное на использовании динамического коэффициента восстановления, содержится в [Ляпунов, 1982, Суслов, 1946]. По существу, оно совпадает с решением задачи об ударе твердых тел без трения (см. §3.1).

Впоследствии аналогичный подход получил широкое распространение в задачах об ударе в системах твердых тел (см. [Кобринский, Кобринский, 1973, Виттенбург, 1980, Brach, 1991, Kane, Levinson, 1985] и др.). Этот подход можно охарактеризовать как аксиоматический, так как он основан на определенных формальных предположениях, сделанных без учета физической природы связей между элементами системы.

Суть этих допущений сводится к рассмотрению связей как абсолютно жестких по сравнению с контактом в ударной паре. В результате проблема стесненного удара сводится к более простой задаче об им-

пульсивном движении твердого тела с неподвижной точкой или осью, решение которой приведено в §1.3. Действительно, задавая текущее значение ударного импульса  $\vec{I}(t)$ , можно однозначно определить распределения скоростей в соударяемых телах, а также реакции связей. В свою очередь, сила контактного взаимодействия  $\vec{R} = d\vec{I}(t)/dt$  определяется вектором относительной скорости в точке контакта в соответствии с принятой гипотезой о характере ударного трения (см. §3.1). Тем самым оказывается возможным описать стесненный удар системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой роль независимой переменной играет нормальная составляющая ударного импульса  $I_n$ .

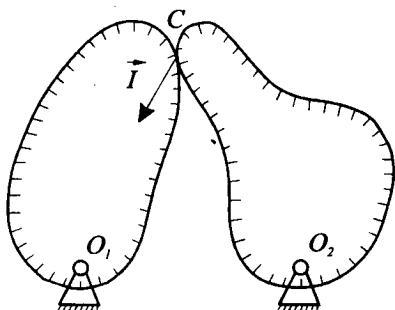


Рис. 4.1. Пример стесненного удара

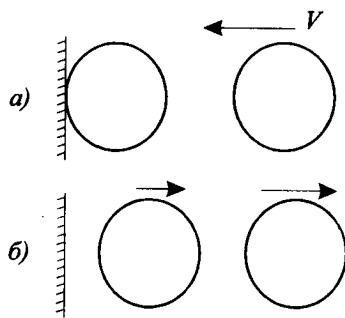


Рис. 4.2. Эксперимент со стесненным ударом

**Пример.** Пусть два твердых тела, закрепленные в точках  $O_1$  и  $O_2$  соответственно, соударяются в точке  $C$ , не лежащей на прямой  $O_1O_2$  (рис. 4.1). Согласно формуле (1.61), справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_1(\vec{\Omega}_1(t) - \vec{\Omega}_1(t_0)) &= O_1\vec{C} \times \vec{I}(t), \\ \mathbf{J}_2(\vec{\Omega}_2(t) - \vec{\Omega}_2(t_0)) &= -O_2\vec{C} \times \vec{I}(t),\end{aligned}\quad (4.1)$$

где  $\mathbf{J}_{1,2}$  — тензоры инерции каждого из тел относительно неподвижных точек.

Относительную скорость в точке  $C$  можно определить по формуле Эйлера при учете равенств (4.1):

$$\begin{aligned}\vec{V}_C(t) &= \vec{\Omega}_1(t) \times O_1\vec{C} - \vec{\Omega}_2(t) \times O_2\vec{C} = \vec{V}_C(t_0) + \mathbf{B}\vec{I}(t), \\ \mathbf{B}\vec{I} &= \mathbf{J}_1^{-1}(O_1\vec{C} \times \vec{I}) \times O_1\vec{C} + \mathbf{J}_2^{-1}(O_2\vec{C} \times \vec{I}) \times O_2\vec{C}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Заметим, что матрица  $\mathbf{B}$  симметрична и положительно определена.

Примем гипотезу сухого трения (3.16), тогда рассматриваемая задача решается совершенно аналогично случаю соударения свободных

тел (см. §3.1) с единственной разницей в формуле для определения матрицы  $B$ . В частном случае  $\mu = 0$  получаем решение задачи о стесненном ударе тел с гладкими поверхностями, аналогичное решению, приведенному в §3.1.

Данный пример показывает возможность непосредственного обобщения классической стереомеханики на случай стесненного удара. Однако, следующий эксперимент заставляет усомниться в практической ценности такого подхода.

**Пример.** Поставим биллиардный шар к борту и ударим по нему другим шаром перпендикулярно борту (рис. 4.2, а). Сложный реквизит можно с успехом заменить парой монет на гладком столе, одна из которых соприкасается с пепельницей. В данном примере борт накладывает на движение первого шара одностороннюю связь, не позволяя ему сдвигаться в направлении удара. Согласно классической теории, первый шар должен после удара остаться у борта, а второй отскочить назад со скоростью, равной произведению скорости сближения и коэффициента восстановления при ударе двух шаров. На практике результат будет иным: первый шар отойдет от борта (рис. 4.2, б), соответственно скорость второго шара будет несколько ниже расчетной.

Следующая поучительная задача, в которой связями стеснены оба соударяющихся тела, известна с середины прошлого века.

**Пример.** Биллиардный шар, катящийся по столу, ударяет по другому, неподвижному, шару, который не касается бортов. В данном случае движение обоих шаров ограничено столом, который реализует односторонние связи. Решение данной задачи существенно зависит от допущений о наличии трения между шарами, а также между каждым из них и сукном. Это трение, конечно, имеет место в действительности: эксперименты, проведенные Г.Кориолисом [Кориолис, 1956], позволяют оценить коэффициент трения между шарами величиной  $\mu_1 = 0.028$ , а коэффициент трения скольжения между шаром и сукном — величиной  $\mu_2 = 0.25$ .

В общем случае уравнения импульсивного движения имеют вид

$$\begin{aligned} M\Delta\vec{V}_1 &= \vec{I} + \vec{R}_1, & M\rho^2\Delta\vec{\Omega}_1 &= G_1\vec{C} \times \vec{I} + G_1\vec{A}_1 \times \vec{R}_1, \\ M\Delta\vec{V}_2 &= -\vec{I} + \vec{R}_2, & M\rho^2\Delta\vec{\Omega}_2 &= -G_2\vec{C} \times \vec{I} + G_2\vec{A}_2 \times \vec{R}_2, \\ \frac{d\vec{I}_t}{dI_n} &= -\mu_1 \frac{\vec{V}_t}{|\vec{V}_t|}, & \frac{d\vec{R}_{1h}}{dR_{1v}} &= -\mu_2 \frac{\vec{V}_{1h}}{|\vec{V}_{1h}|}, \quad \frac{d\vec{R}_{2h}}{dR_{2v}} = -\mu_2 \frac{\vec{V}_{2h}}{|\vec{V}_{2h}|}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $A_{1,2}$  — точки контакта шаров со столом,  $\rho$  — радиус инерции шаров (для однородного шара  $\rho^2 = \frac{2}{5}r^2$ ),  $\vec{V}_t$  — проекция относительной скорости в точке  $C$  на касательную плоскость в этой точке,  $\vec{V}_{1h}$  и  $\vec{V}_{2h}$  — горизонтальные составляющие скоростей точек  $G_{1,2}$ ,  $\vec{R}_{jh}$  и  $R_{jv}$  — горизонтальные и вертикальные составляющие импульсивных реакций реакций стола  $R_j$  ( $j = 1, 2$ ),  $I_n$  — проекция ударного импульса на

нормаль в точке  $C$ . Последние две группы уравнений системы (4.3) справедливы при условии, что знаменатель в правой части отличен от нуля, иначе  $|d\vec{I}_t| \leq \mu_1 dI_n$ , и т.д.

К наибольшим упрощениям приводит предположение об отсутствии трения между шарами во время удара [Кориолис, 1956]:  $\mu_1 = 0$ . В такой постановке ударный импульс всегда горизонтален и не влияет на нормальные реакции стола: последние тождественно равны весу шаров. Отсюда следует, что сила трения между шарами и столом ограничена произведением веса на коэффициент трения, а ее ударный импульс исчезающе мал. Отбрасывая в уравнениях (4.3) малые слагаемые, получим

$$\begin{aligned} M\Delta\vec{V}_1 &= \vec{I}, & M\rho^2\Delta\vec{\Omega}_1 &= G_1\vec{C} \times \vec{I}, \\ M\Delta\vec{V}_2 &= -\vec{I}, & M\rho^2\Delta\vec{\Omega}_2 &= -G_2\vec{C} \times \vec{I}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Система (4.4) не содержит реакций связей, поэтому решение задачи об ударе имеет точно такой же вид, как если бы шары были свободны (см. §3.1).

К более сложной математической проблеме приводит учет трения между шарами с одновременным пренебрежением ударным трением между шарами и сукном [Кориолис, 1956]:  $\mu_2 = 0$ . Такая постановка задачи правомерна, поскольку отношение модуля ударного импульса между шаром и сукном к нормальному импульсу между шарами равно произведению коэффициентов  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , т.е. составляет менее одного процента.

В уравнениях (4.3) векторы  $\vec{R}_{1,2}$  вертикальны, поэтому уравнения моментов не содержат реакций.

Система (4.3) недостаточна для определения *всех* неизвестных величин  $\vec{I}$ ,  $\vec{R}_{1,2}$ ,  $\Delta\vec{V}_{1,2}$ ,  $\Delta\vec{\Omega}_{1,2}$ , так как их количество больше числа уравнений. Тем не менее, она позволяет вычислить *некоторые* неизвестные.

Действительно, изменение составляющих скорости вдоль линии  $G_1G_2$  зависит только от нормального импульса  $I_n$ . Это дает возможность определить величины  $\Delta V_{n1}$ ,  $\Delta V_{n2}$ ,  $I_n$  при помощи ньютоновского коэффициента восстановления.

Весьма показательна ошибка, сделанная Кориолисом [Кориолис, 1956] при определении импульса силы трения. По его мнению, касательная составляющая относительной скорости  $\vec{V}_t$  сохраняет в течение удара неизменяемое направление. Таким свойством в действительности обладает соударение двух *свободных* шаров (см. пример в §3.1), откуда вовсе не следует, что оно присуще и удару двух шаров *при наличии дополнительных связей*. Проверим, что при косом ударе с трением направление вектора  $\vec{V}_t$  переменно. Для этого сравним выражения для приращений его горизонтальной и вертикальных составля-

ющих  $\Delta V_{th}$ ,  $\Delta V_{tv}$ , следующих из уравнений (4.3):

$$\begin{aligned} M\Delta V_{th} &= 2(1 + r^2/\rho^2)I_{th}, \\ M\Delta V_{tv} &= 2(1 + r^2/\rho^2)I_{tv} + R_{1v} - R_{2v}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь  $I_{th}$  и  $I_{tv}$  обозначают горизонтальную и вертикальную составляющие импульса трения. Формулы (4.5) показывают, что векторы  $\vec{I}_t$  и  $\Delta \vec{V}_t$  коллинеарны лишь при выполнении одного из условий  $R_{1v} = R_{2v}$  или  $V_{th} \equiv 0$ . В рассматриваемом случае всегда  $R_{2v} > 0$ ,  $R_{1v} = 0$ , так как вертикальная составляющая трения прижимает второй шар к опоре и стремится оторвать от нее первый шар.

Второе условие выполняется если только соударение является прямым. При этом в дополнение к найденному значению  $I_n$  можно вычислить и  $\vec{I}_t$ :  $I_{th} = 0$ ,  $I_{tv} = \mu_1 I_n$  (здесь имеется в виду, что проскальзывание не прекращается в течение всего удара, в противном случае вертикальную составляющую импульса можно определить из условия равенства нулю вертикальной составляющей относительной скорости в конце удара).

Тем не менее, даже в этом случае задачу о стесненном ударе нельзя считать полностью решенной, так как для определения двух неизвестных  $\Delta V_{2v}$  и  $R_2$  имеется единственное уравнение:

$$M\Delta V_{2v} = R_2 - I_{tv}. \quad (4.6)$$

Для получения законченного решения нужно сделать какое-либо дополнительное допущение: например, полагая

$$V_{2v} \equiv 0, \quad (4.7)$$

найдем, что  $R_2 = I_{tv}$ .

В рассматриваемой задаче равенство (4.7) выражает абсолютную жесткость контакта между вторым шаром и опорой; принимая его как гипотезу, мы действуем в рамках обсуждаемого аксиоматического метода.

Заметим, что условие (4.7) достаточно для однозначного решения задачи Кориолиса и в случае косого соударения, однако это решение уже не будет алгебраическим: поскольку направление скольжения переменно, система (4.3) может быть проинтегрирована только численно.

Наконец, в работе [Нагаев, Холодилин, 1992] сделана попытка решения задачи об ударе катящегося шара по неподвижному при учете трения как между шарами, так и между шаром и столом:  $\mu_1 \neq 0$ ,  $\mu_2 \neq 0$ . При этом использовалась гипотеза о неизменности направления проскальзывания в точке контакта двух шаров, об ошибочности которой в случае стесненного удара говорилось выше.

Следует отметить, что при учете трения между шарами и в опорах из системы (4.3) невозможно определить никакие неизвестные без дополнительной гипотезы типа (4.7).

Подведем итог обсуждаемой задачи. Анализ различных вариантов трения показывает, что проблема стесненного удара может

а) иметь единственное решение (в том случае, когда ударные реакции связей равны нулю);

б) иметь единственное решение для части неизвестных (если уравнения импульсивного движения для этих неизвестных отделяются);

в) не иметь однозначного решения без принятия некоторых дополнительных гипотез.

Что касается гипотезы (4.7), то к ней в полной мере можно применить критические замечания, высказанные при рассмотрении предыдущего примера.

**Дискретные модели стесненного удара.** Для устранения противоречий с реальными явлениями, возникающими при использовании аксиоматического подхода к проблеме кратного удара, пример которых был рассмотрен в начале предыдущего раздела, необходимо отказаться от постулата об абсолютной жесткости связи между шаром и бортом. Вместо этого воспользуемся одной из моделей теории упругости, мысленно помещая деформируемые элементы  $\Xi_1, \Xi_2$  в точки контакта шара и борта и двух шаров соответственно (рис. 4.3). Каждый из элементов характеризуется зависимостью силы от деформации вида  $F_j = F_j(\epsilon_j, \dot{\epsilon}_j)$  ( $j = 1, 2$ ). Обозначим  $x_1, x_2$  расстояния от центров шаров до недеформированной плоскости борта,  $r$  — их радиусы,  $M$  — массы, тогда

$$\epsilon_1 = r - x_1, \quad \epsilon_2 = 2r + x_1 - x_2. \quad (4.8)$$

Уравнения движения системы в отсутствие внешних сил выглядят так:

$$M\ddot{x}_2 = F_2, \quad M\ddot{x}_1 = F_1 - F_2, \quad (4.9)$$

$$x_1(t_0) = r, \quad x_2(t_0) = 3r, \quad \dot{x}_1(t_0) = 0, \quad \dot{x}_2(t_0) = -V,$$

где вследствие одностороннего характера деформаций  $F_1 = 0$  при  $\epsilon_1 \leq 0$  и  $F_2 = 0$  при  $\epsilon_2 \leq 0$ .

При учете определений (4.8) отсюда получаем

$$M\ddot{\epsilon}_1 = F_2 - F_1, \quad M\ddot{\epsilon}_2 = F_1 - 2F_2, \quad (4.10)$$

$$\epsilon_1(t_0) = \epsilon_2(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_1(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_2(t_0) = V.$$

Если конкретные зависимости  $F_j(\epsilon_j, \dot{\epsilon}_j)$  заданы, то система (4.10) может быть проинтегрирована тем или иным методом на интервале  $(t_0, t_0 + \tau)$ , где продолжительность соударения  $\tau$  определяется из граничных условий

$$F_1(t_0 + \tau) = 0, \quad F_2(t_0 + \tau) = 0, \quad \dot{\epsilon}_1 \leq 0, \quad \dot{\epsilon}_2 \leq 0 \quad (4.11)$$

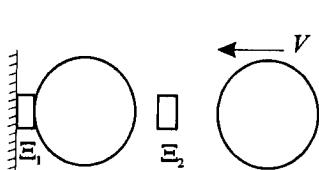


Рис. 4.3. Дискретная модель стесненного удара

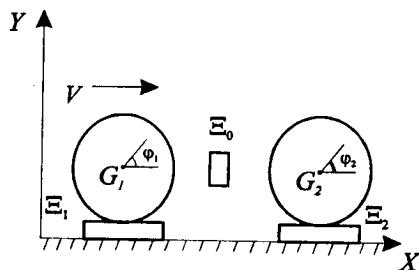


Рис. 4.4. Соударение двух биллиардных шаров

(имеется в виду, что  $\tau$  — минимальное положительное решение системы (4.11)).

Одна из возможностей связана с использованием квазистатической теории Герца. Если считать, что модуль упругости у борта гораздо выше, чем у шара, то расчеты по формулам (2.49), (2.50) приводят к следующим зависимостям:

$$F_2(\epsilon) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\tau} \frac{E}{1 - \bar{\mu}^2} \epsilon^{3/2}, \quad F_1(\epsilon) = 2\sqrt{2}F_2(\epsilon). \quad (4.12)$$

Заметим, что даже в рассматриваемом предельном случае жесткость контакта шара и борта менее чем в три раза превышает жесткость контакта двух шаров. Это свидетельствует о нереалистичности допущений аксиоматической теории стесненного удара.

Численное интегрирование системы (4.10)–(4.12) приводит к такому результату:  $\dot{x}_2(t_0 + \tau) = 0.96V$ ,  $\dot{x}_1(t_0 + \tau) = 0.28V$ .

Мы подробно разобрали применение дискретной модели на конкретном примере стесненного удара, имея ввиду общий характер данных рассмотрений. В том случае, когда на тело наложена двусторонняя связь, изменится вид формул (4.9), определяющих деформации: последние могут принимать отрицательные значения или даже быть векторными величинами (см. ниже §4.2). В данном примере тип связи можно изменить, прикрепляя первый шар к борту. Это не отразится на поведении второго шара, потерянная им кинетическая энергия в этом случае уйдет на возбуждение упругих колебаний связки первого шара и борта.

Перейдем к анализу задачи о стесненном соударении двух шаров, обсуждавшейся в предыдущем разделе. В данном случае имеется три точки контакта, в каждую из которых мысленно добавляется деформируемый элемент (рис. 4.4). Для учета сил трения необходимо считать деформации векторными величинами:

$$\vec{\epsilon}_1 = -\Delta \vec{r}_1, \quad \vec{\epsilon}_2 = -\Delta \vec{r}_2, \quad \vec{\epsilon}_0 = \Delta \vec{r}_1(C) - \vec{r}_2(C), \quad (4.13)$$

где  $\Delta\vec{r}_{1,2}$  — смещения центров шаров,  $\Delta\vec{r}_{1,2}(C)$  — смещения точки контакта  $C$  в составе каждого из шаров (эти величины можно выразить через  $\Delta\vec{r}_{1,2}$  и углы поворота шаров).

Если теперь задать характеристику каждого из деформируемых элементов в виде вектор-функции от соответствующей деформации и ее производной по времени, то система (4.3) трансформируется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений двадцать четвертого порядка (так как каждый из шаров имеет шесть степеней свободы). Ясно, что проинтегрировать такую систему можно лишь численно, однако, как было показано выше, и при "классическом" подходе алгебраическое решение возможно лишь в частном случае прямого удара. Остановимся на этом частном случае подробнее.

Для описания прямого удара катящегося шара по неподвижному достаточно шести координат, так как движение происходит в фиксированной вертикальной плоскости. Направим ось  $X$  горизонтально в этой плоскости на поверхности стола, а ось  $Y$  — вертикально вверх и возьмем координаты  $x_{1,2}, y_{1,2}$  центров шаров и углы  $\varphi_{1,2}$  их поворота в качестве неизвестных (рис. 4.4). Определения (4.13) примут вид

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon}_1 &= -(\Delta x_1, \Delta y_1), \quad \vec{\epsilon}_2 = -(\Delta x_2, \Delta y_2), \\ \vec{\epsilon}_0 &= (\Delta x_1 - \Delta x_2, \Delta y_1 + r\Delta\varphi_1 - \Delta y_2 + r\Delta\varphi_2).\end{aligned}\quad (4.14)$$

Будем пренебречь трением в опоре и считать, что относительное скольжение шаров в течение удара не прекращается. Для нормальной составляющей реакций примем квазистатическую модель Герца, а для касательной составляющей реакции  $\vec{F}_0$  — закон Кулона:

$$F_1 = K_1 \epsilon_1^{3/2}, \quad F_2 = K_1 \epsilon_2^{3/2}, \quad \vec{F}_0 = K_0 \epsilon_{0x}^{3/2} (-1, \mu_1). \quad (4.15)$$

Как и выше, каждая из реакций здесь имеет односторонний характер. Уравнения дискретной модели имеют вид

$$\begin{aligned}M\ddot{\epsilon}_1 &= -F_{0y} - F_1, \quad M\ddot{\epsilon}_2 = F_{0y} - F_2, \\ M\ddot{\epsilon}_{0x} &= M\ddot{x}_1 - M\ddot{\epsilon}_2 = 2F_{0x}, \\ M\ddot{\epsilon}_{0y} &= M(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + Mr(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) = -2F_{0y}(1 + r^2/\rho^2) + F_1 - F_2,\end{aligned}\quad (4.16)$$

$$\epsilon_1(t_0) = \epsilon_2(t_0) = \epsilon_0(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_1(t_0) = \dot{\epsilon}_2(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_{0x}(t_0) = -\dot{\epsilon}_{0y}(t_0) = V.$$

Как отмечалось выше,  $\epsilon_1 \leq 0$  и  $F_1 = 0$ ; третье уравнение системы (4.16) отделяется от остальных и может быть проинтегрировано самостоятельно. В результате получаем, что первый шар полностью передает свой импульс второму, при этом  $\dot{y}_2(t_0 + \tau) = \mu_1 V = 0.028 V$ . После этого интегрируем второе уравнение, где функция  $F_{0y}$  является уже известной функцией времени. В результате будет найдена величина ударного импульса стола, и задача о стесненном ударе окажется решенной без интегрирования четвертого уравнения.

В результате численного интегрирования системы (4.15), (4.16) получен такой результат:  $\dot{y}_2(t_0 + \tau) = 0.0272V$ . Таким образом, шар, неподвижный до удара, приобретает после него вертикальную скорость, величина которой составляет около трех процентов от первоначальной скорости центра первого шара.

**Задача Буссинеска.** Наличие дополнительных связей при стесненном ударе может быть учтено в виде граничных условий для волнового уравнения. Показательным примером может служить следующая известная задача, решение которой было получено Буссинеском (1883) [Boussinesq, 1885].

Рассмотрим продольный удар жестким телом по упругому стержню, противоположный конец которого закреплен (рис. 4.5). Для составления уравнений движения воспользуемся результатами §2.2.

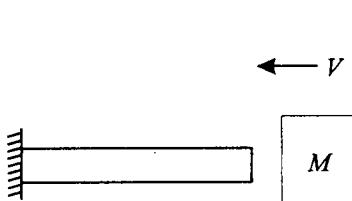


Рис. 4.5. Задача Буссинеска

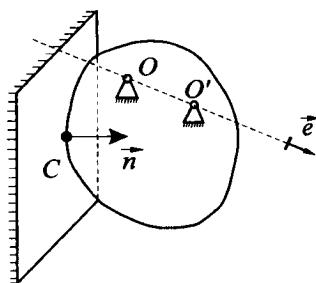


Рис. 4.6. Физический маятник

Функция  $u(x, t)$ , описывающая перемещения точек стержня, удовлетворяет волновому уравнению (2.18) и двум граничным условиям на его концах. На правом конце это условие по аналогии с (2.22) выражает равенство действия и противодействия:

$$ES \frac{\partial u(x_2, t)}{\partial x} = M \frac{\partial^2 u(x_2, t)}{\partial t^2} \text{ пока } \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) \leq 0. \quad (4.17)$$

На закрепленном конце стержня

$$u(x_1, t) \equiv 0. \quad (4.18)$$

Будем решать задачу методом Даламбера, представляя неизвестную функцию  $u$  в виде (2.23); не ограничивая общности, положим  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = l$ . Вследствие условия (4.18) имеем  $\psi(y) \equiv -\varphi(y)$ , и равенство (4.17) принимает вид

$$\varphi'(ct - l) + \varphi'(ct + l) = \sigma l [\varphi''(ct - l) - \varphi''(ct + l)], \quad (4.19)$$

где  $\sigma$  — отношение массы тела к массе стержня.

Обозначая  $z = ct - l$ , получим следующее функциональное уравнение:

$$\varphi''(z + 2l) + \frac{1}{\sigma l} \varphi'(z + 2l) = \varphi''(z) - \frac{1}{\sigma l} \varphi'(z). \quad (4.20)$$

Учитывая начальные условия

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad \forall x \in (0, l), \quad \frac{\partial u(l, +0)}{\partial t} = -V, \quad (4.21)$$

приходим к выводу, что

$$\varphi'(z) = 0, \quad \forall z \in (-l, l), \quad \varphi'(l) = V/c. \quad (4.22)$$

Решение уравнения (4.21) строится последовательно следующим образом. Поскольку в интервале  $z \in (-l, l)$  правая часть в формуле (4.21) равна нулю, эта формула может рассматриваться как линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции  $\varphi'(z)$  в интервале  $z \in (l, 3l)$ . Решение этого уравнения с начальным условием (4.22) выглядит так:

$$\varphi'(z) = \frac{V}{c} \exp\left(\frac{l-z}{\sigma l}\right), \quad \forall z \in (l, 3l). \quad (4.23)$$

Подставляя выражение (4.23) в правую часть формулы (4.20), получим неоднородное линейное уравнение первого порядка относительно  $\varphi'(z)$  в следующем интервале  $z \in (3l, 5l)$ . Решая это уравнение по стандартным формулам, получим

$$\varphi'(z) = \frac{V}{c} \exp\left(\frac{l-z}{\sigma l}\right) + \frac{V}{c} \left(1 - \frac{2z-6l}{\sigma l}\right) \exp\left(\frac{3l-z}{\sigma l}\right) \quad (4.24)$$

и т.д. (более подробное изложение решения задачи Буссинеска можно найти в [Ляв, 1935, Тимошенко, Гудьер, 1979]).

Заметим, что момент окончания контакта определяется из неравенства (4.17), которое в принятых обозначениях имеет вид

$$\varphi'(z) + \varphi'(z + 2l) \geq 0. \quad (4.25)$$

Как следует из формул (4.22), (4.23), условие (4.25) выполнено в интервале  $z \in (-l, l)$ , соответствующем прохождению ударной волны вдоль стержня в обоих направлениях. Если  $z \in (l, 3l)$ , то левая часть меняет знак при значении

$$z = z^* = l + \sigma l + \frac{\sigma l}{2} \exp\left(\frac{-2}{\sigma}\right), \quad (4.26)$$

которое принадлежит рассматриваемому интервалу если  $\sigma < 1.73$ . Если  $\sigma > 1.73$ , то нужно исследовать следующие интервалы изменения переменной  $z$ .

Финальная скорость твердого тела определяется так:

$$V^+ = \frac{\partial u(l, \tau)}{\partial t} = c[\varphi'(z) - \varphi'(z + 2l)], \quad (4.27)$$

откуда при учете (4.25), (4.26) приходим к следующему выражению для коэффициента восстановления:

$$e = \frac{2c}{V} \varphi'(z^*) = 2 \exp\left(\frac{l - z^*}{\sigma l}\right) = 2 \exp\left[-1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2}{\sigma}\right)\right] \quad (4.28)$$

(напомним, что данная формула справедлива лишь при  $\sigma < 1.73$ ).

Расчеты по формуле (4.28) показывают: в интервале  $\sigma \in (0, 1.73)$  величина  $e$  монотонно убывает от 0.74 до 0.63.

Заметим, что коллинеарное соударение свободного стержня с абсолютно твердым телом абсолютно упруго (см. §2.2). Следовательно, наличие консольного крепления изменяет закономерности удара.

**Выводы.** Результаты данного параграфа показывают, что проблема стесненного удара не сводится к совокупности задач о соударениях свободных твердых тел. Поэтому было бы серьезной ошибкой применять какие-либо результаты, полученные без учета дополнительных связей, к системам со связями.

При решении конкретных задач аксиоматический метод, основанный на постулировании абсолютной жесткости ограничений, наложенных на соударяющиеся тела, в некоторых случаях позволяет построить однозначное решение. Тем не менее, сами постулаты не выдерживают экспериментальной проверки и теоретического анализа. Следовательно, возникает необходимость учета деформаций.

Поскольку полный учет явлений, происходящих при ударе деформируемых твердых тел, на современном уровне развития теории и вычислительной техники невозможен, на первый план выходит построение некоторых упрощенных моделей. Одним из примеров может служить задача Буссинеска, при решении которой рассматриваются только волновые процессы без учета характера контактных деформаций.

С вычислительной точки зрения, привлекательнее другая идеализация, когда твердые тела считаются деформируемыми лишь в малой окрестности тех точек, в которых они контактируют друг с другом или с наложенными связями. Такая модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, для численного решения которой можно использовать стандартные алгоритмы. Анализ некоторых примеров показывает, что дискретная модель сочетает достаточную простоту и наглядность с реалистичностью результатов.

Дальнейшие примеры решения задач о стесненном ударе составляют содержание двух следующих параграфов.

## 4.2. СОУДАРЕНИЕ МАЯТНИКА С ПРЕПЯТСТВИЕМ

**Постановка задачи и "классическое" решение.** Рассмотрим твердое тело, имеющее закрепленную точку (так называемый сферический маятник) или пару таких точек (физический маятник, рис. 4.6) и соударяющееся с массивным препятствием. Поверхность препятствия может быть абсолютно гладкой или шероховатой, во втором случае принимается гипотеза сухого кулонова трения. В случае физического маятника ось вращения не обязательно параллельна поверхности препятствия.

Очевидно, что здесь мы имеем дело с задачей о стесненном ударе, так как маятник представляет собой несвободное твердое тело. Будем решать ее методами, описанными в предыдущем параграфе. Сначала приведем традиционное решение в рамках аксиоматического подхода, основанное на предположении об абсолютной жесткости крепления маятника.

1. *Физический маятник* имеет единственную — вращательную степень свободы. Пусть  $\vec{I}$  — ударный импульс, действующий на тело со стороны препятствия, тогда уравнения импульсивного движения имеют вид (см. §1.3)

$$M\rho_l^2 \Delta\vec{\Omega} = (\vec{e} \times \vec{OC}, \vec{I}) \vec{e}, \quad (4.29)$$

где  $\vec{e}$  — орт, коллинеарный оси вращения,  $\vec{\Omega}$  — угловая скорость тела. Для приращения скорости тела в точке контакта  $C$  имеем такое выражение:

$$\Delta\vec{V}_C = \Delta\vec{\Omega} \times \vec{OC} = (M\rho_l^2)^{-1} (\vec{e} \times \vec{OC}, \vec{I}) (\vec{e} \times \vec{OC}). \quad (4.30)$$

Ударный импульс имеет составляющую  $I_n \vec{n}$ , нормальную поверхности препятствия (здесь  $\vec{n}$  — орт нормали) и касательную составляющую  $\vec{I}_t$ , противоположную по направлению касательной составляющей  $\vec{V}_t$  скорости точки  $C$ . Эта скорость ортогональна каждому из векторов  $\vec{e}$  и  $\vec{n}$ , следовательно, она коллинеарна вектору  $\vec{t} = \vec{e} \times \vec{n} / |\vec{e} \times \vec{n}|$ . Связь между компонентами импульса, согласно формулам (3.16), описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{I}_t}{dI_n} &= -\mu \vec{t} \operatorname{sign}(\vec{V}_t, \vec{t}), \quad \text{если } \vec{V}_t \neq \vec{0}, \\ \left| \frac{d\vec{I}_t}{dI_n} \right| &\leq \mu, \quad \text{если } \vec{V}_t = \vec{0}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Уравнение (4.29) при учете (4.31) принимает вид

$$M\rho_l^2 \Delta\vec{\Omega} = (\vec{e} \times \vec{OC}, \vec{n} I_n + \vec{I}_t) \vec{e} = D I_n \vec{e}, \quad (4.32)$$

$$D = (\vec{e} \times \vec{OC}, \vec{n}) - \mu |(\vec{e} \times \vec{OC}, \vec{t})| \operatorname{sign}(\vec{\Omega}, \vec{e}).$$

В начальный момент соударения угловая скорость тела равна  $\vec{\Omega}^o$ , а нормальная составляющая скорости точки контакта

$$V_n^o = (\vec{\Omega}^o, \vec{e})(\vec{e} \times \vec{OC}, \vec{n})$$

отрицательна (иначе удара бы не было). При этом коэффициент  $D$  в формуле (4.32) имеет знак, противоположный знаку величины  $(\vec{\Omega}^o, \vec{e})$ . Следовательно, в первой фазе удара угловая скорость убывает по абсолютной величине.

По окончании фазы деформации угловая скорость, а с ней и нормальная составляющая скорости точки контакта, равны нулю. Из этого условия можно определить значение первой порции ударного импульса:

$$I_n(t^o) = -M\rho_l^2(\vec{\Omega}^o, \vec{e})/D^+, \quad \vec{I}_t(t^o) = -\mu I_n \vec{t} \operatorname{sign}(\vec{V}_t^o, \vec{t}), \quad (4.33)$$

где обозначение  $D^+$  свидетельствует о том, что слагаемые в формуле (4.32), определяющей значение  $D$ , имеют одинаковые знаки.

Во второй фазе соударения маятник должен изменить направление вращения либо остаться неподвижным. В первом из этих случаев в формуле (4.32) изменится лишь знак у второго слагаемого в определении коэффициента  $D$ , который будет теперь складываться из положительного и отрицательного членов. Динамическое определение коэффициента восстановления (см. формулу (3.35)) приводит к такому полному значению ударного импульса:

$$I_n(t_0 + \tau) = (1 + \nu)I_n(t^o), \quad \vec{I}_t(t_0 + \tau) = \vec{I}_t(t^o)(1 - \tau). \quad (4.34)$$

Конечную угловую скорость маятника можно определить из формул (4.32), (4.34):

$$\vec{\Omega}(t_0 + \tau) = -\nu \frac{D^-}{D^+} \vec{\Omega}^o. \quad (4.35)$$

В частности, если стенка абсолютно гладкая, то  $\mu = 0$  и  $D^+ = D^-$ , в этом случае динамическое определение коэффициента восстановления совпадает с кинематическим.

Из соотношения (4.35) несложно получить условие, при котором во второй фазе удара маятник движется: коэффициенты  $D^+$  и  $D^-$  должны иметь одинаковые знаки. Это условие эквивалентно неравенству

$$\mu < \frac{|(\vec{e} \times \vec{OC}, \vec{n})|}{|(\vec{e} \times \vec{OC}, \vec{t})|}. \quad (4.36)$$

Как известно, модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на данной тройке векторов. Два параллелепипеда, соответствующих правой части формулы (4.36), различаются лишь одним из ребер. Следовательно, неравенство (4.36) преобразуется к виду

$$\mu < \frac{\sin \vec{n} \wedge \pi}{\sin \vec{t} \wedge \pi}, \quad (4.37)$$

где углы измеряются между вектором  $\vec{n}$  или  $\vec{t}$  и плоскостью  $\pi$ , проходящей через точки  $O, O'$  и  $C$ .

Нарушение неравенства (4.37) свидетельствует о том, что трение делает вращение маятика в обратном направлении невозможным. По сути дела, в этом случае удар состоит из единственной фазы — деформации, по окончании которой маятник заклинивается.

Для определения реакций связей в точках крепления  $O, O'$  можно воспользоваться уравнениями (1.52). Важно то обстоятельство, что при наличии ненулевого трения ударная сила меняет свое направление в ходе удара, и реакции связей не равны нулю тождественно. Если силы трения отсутствуют (поверхность препятствия абсолютно гладкая или вектор  $\vec{t}$  лежит в плоскости  $\pi$ ), то возможен случай, когда ось подвеса маятника при ударе не испытывает нагрузки. Условия, при которых это имеет место, получены в §1.3 и связаны с понятием центра удара. Одним из них является ортогональность вектора  $\vec{n}$  плоскости  $\pi$ , т.е. ось подвеса и центр масс лежат в плоскости, параллельной поверхности препятствия.

*2. Сферический маятник* обладает тремя вращательными степенями свободы, поэтому его удар о препятствие более сложен. Полагая в уравнении (4.2) массу второго тела (препятствие) бесконечно большой, получим следующую формулу, выражающую зависимость скорости точки  $C$  от ударного импульса:

$$\vec{V}_C(t) = \vec{V}_C(t_0) + \mathbf{B}\vec{I}(t), \quad \mathbf{B}\vec{I} = \mathbf{J}_1^{-1}(\vec{O}_1\vec{C} \times \vec{I}) \times \vec{O}_1\vec{C}. \quad (4.38)$$

Заметим, что матрица  $\mathbf{B}$  симметрична и имеет два положительных собственных значения и одно нулевое, соответствующее собственному вектору  $\vec{O}_1\vec{C}$ .

Для описания удара с трением можно воспользоваться результатами §3.1. На изображающей плоскости Болотова линия (3.24), соответствующая неизменному направлению скольжения, описывается уравнением (для наглядности нижний индекс опускаем)

$$(\vec{n} \times \vec{u}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{O}\vec{C} \times \vec{n}) \times \vec{O}\vec{C}) = (\vec{n} \times \vec{u}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{O}\vec{C} \times \vec{u}) \times \vec{O}\vec{C}), \quad (4.39)$$

а линия  $d|\vec{V}_t|/d\chi = 0$  — уравнением

$$(\vec{O}\vec{C} \times \vec{u}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{O}\vec{C} \times \vec{u})) = (\vec{O}\vec{C} \times \vec{u}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{O}\vec{C} \times \vec{n})). \quad (4.40)$$

Уравнение (4.39) в общем случае описывает равнобочную гиперболу, которая может вырождаться в частных случаях в пару пересекающихся прямых. Если точка подвеса маятника не лежит на поверхности препятствия, то формула (4.40) задает, так же как и в случае свободных твердых тел, эллипс. Здесь можно использовать методы и выводы, содержащиеся в §3.1.

Единственное отличие касается возможности стопорного удара маятника, которая отсутствует в случае соударения свободных тел. С геометрической точки зрения, она объясняется наличием общей точки у прямой, изображающей решение уравнения

$$dV_n/d\chi = 0,$$

и эллипса (4.40), что обусловлено полуопределенностью матрицы  $\mathbf{B}$  в (4.38). Уравнение этой прямой выглядит так:

$$(\vec{OC} \times \vec{n}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{OC} \times \vec{n})) = (\vec{OC} \times \vec{n}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{OC} \times \vec{u})). \quad (4.41)$$

В обсуждаемой задаче формула (3.31) принимает вид

$$dV_n/d\chi = (\mathbf{B}(\vec{n} - \vec{u}), \vec{n} - \vec{u}) = (\mathbf{J}^{-1}(\vec{OC} \times (\vec{n} - \vec{u})), \vec{OC} \times (\vec{n} - \vec{u})). \quad (4.42)$$

Очевидно, в касательной плоскости существует единственный вектор  $\vec{u}_*$  такой, что разность  $\vec{n} - \vec{u}_*$  коллинеарна вектору  $\vec{OC}$ , т.е.

$$\vec{u}_* \times \vec{OC} = \vec{n} \times \vec{OC}. \quad (4.43)$$

При подстановке равенства (4.43) в уравнения (4.39), (4.40) они будут удовлетворены, следовательно, прямая (4.41) касается эллипса в точке  $\vec{u}_*$  его пересечения с гиперболой, диаметрально противоположной началу координат.

Стопорный удар может иметь место при условии, что  $|\vec{u}_*| \leq \mu$ . В этом случае после остановки скольжения ударная сила будет направлена вдоль прямой  $OC$ , т.е. ее момент относительно точки подвеса будет равен нулю. Найдем аналитическую форму этого условия.

Умножая обе части равенства (4.43) скалярно на  $\vec{n}$ , получим

$$(\vec{u}_* \times \vec{OC}, \vec{n}) = 0.$$

Следовательно, вектор  $\vec{u}_*$  лежит в плоскости, проходящей через точки  $O$  и  $C$  ортогонально поверхности препятствия. Поскольку к тому же этот вектор ортогонален нормали  $\vec{n}$ , его можно представить в виде

$$\vec{u}_* = \lambda \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{OC}) = \lambda (\vec{n}(\vec{n}, \vec{OC}) - \vec{OC}). \quad (4.44)$$

(здесь использована формула преобразования двойного векторного произведения). Для определения константы  $\lambda$  подставим выражение (4.44) в уравнение (4.43):

$$\lambda(\vec{n}, \vec{OC})(\vec{n} \times \vec{OC}) = \vec{n} \times \vec{OC},$$

откуда  $\lambda = (\vec{n}, \vec{OC})^{-1}$ .

Условие стопорного удара принимает вид

$$(\vec{n}, \vec{OC})^{-1} |\vec{n} \times \vec{OC}| \leq \mu,$$

что по свойствам скалярного и векторного произведения эквивалентно неравенству

$$tg\theta \leq \mu. \quad (4.45)$$

В условии (4.45)  $\theta$  — угол между нормалью  $\vec{n}$  и прямой  $OC$ .

Ударную реакцию в точке подвеса маятника во всех случаях можно рассчитать по формулам §1.3:

$$\vec{I}_O = M\mathbf{J}_O^{-1}(\vec{OC} \times \vec{I}) \times \vec{OG} - \vec{I}. \quad (4.46)$$

Можно сделать вывод: при достаточно больших значениях коэффициента трения удар маятника о шероховатое препятствие имеет стопорный характер.

**Пример.** Пусть маятник представляет собой тело вращения, закрепленное в своем центре масс. Вычисления показывают, что уравнения гиперболы и эллипса имеют вид

$$\alpha_1 x z \eta = \xi \eta (b_{22} - \alpha_1 z^2), \quad (4.47)$$

$$\alpha_1 z^2 \xi^2 + b_{22} \eta^2 = -\alpha_1 x z \xi. \quad (4.48)$$

Уравнение (4.47) описывает пару прямых:  $\xi = \alpha_1 x z / (b_{22} - \alpha_1 z^2)$  и  $\eta = 0$ ; эллипс (4.48) симметричен относительно оси  $\xi$ . Эти две линии пересекаются в точке

$$\vec{u}_* = \left( -\frac{x}{z}, 0 \right).$$

Прямая (4.41) в рассматриваемом примере задается уравнением

$$-x z \xi = x^2, \quad (4.49)$$

т.е. она касается эллипса в точке  $\vec{u}_*$  (рис. 4.7). Стопорный удар возможен, если эта точка лежит в круге трения.

Заметим, что в граничном случае  $x = \mu z$ , как показывают расчеты по формулам (3.23), изображающая точка при движении по окружности трения в направлении точки с радиус - вектором  $\vec{u}_*$  не может

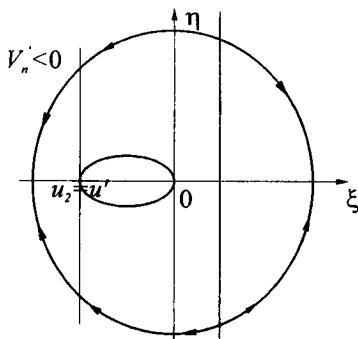


Рис. 4.7. Геометрическая интерпретация соударения сферического маятника с препятствием

достигнуть последней. При этом оказывается, что удар имеет асимптотический характер: при неограниченном возрастании переменной  $\chi$  скорость относительного проскальзывания остается конечной (не исчезающей малой) величиной, а ее направление асимптотически приближается к прямой, являющейся проекцией оси симметрии на опорную плоскость.

**Определение закономерностей удара при учете упругости подвеса.** В предыдущем разделе рассматривалась идеализированная модель подвеса маятника, основанная на следующих предположениях [Виттенбург, 1980]:

- в креплениях нет люфта;
- шарниры не деформируются под действием внутренних импульсов и импульсивных пар;
- не допускается потеря кинетической энергии в шарнирах во время удара.

Первые два данных допущения не вызывают никаких возражений, так как при импульсивном движении перемещения соударяемых тел всегда считаются пренебрежимо малыми. Третье предположение не столь бесспорно, так как оно означает, что и скорость тела в точке шарнирного крепления остается пренебрежимо малой величиной. Поскольку скорость тела в точке его контакта с препятствием за время удара претерпевает значительные изменения, такая гипотеза обоснована в единственном случае: препятствие сделано из гораздо менее жесткого материала, чем маятник. В общем случае крепление нельзя считать существенно более жестким по сравнению с контактом ударной пары (см. §4.1).

С другой стороны, как было показано в §1.3, закономерности импульсивного движения существенно зависят от жесткости подвеса маятника. Поэтому можно ожидать, что решение обсуждаемой задачи, полученное при учете неидеальности шарнира, будет отличаться от традиционного решения. Исключение составляет лишь случай, когда

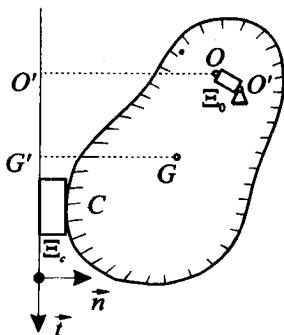


Рис. 4.8. Дискретная модель удара сферического маятника о стенку

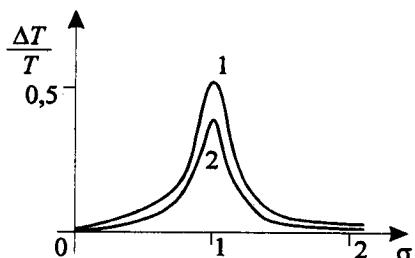


Рис. 4.9. Зависимость энергетических потерь от упругости подвеса:  
1)  $\rho = 2$ , 2)  $\rho = 0.5$

расчетное значение импульсивной реакции подвеса равно нулю, так как при этом скорость этой точки также равна нулю даже в отсутствие крепления. Условия реализации этого случая приведены в § 1.3.

1. Вначале исследуем сферический маятник. Примем следующую модель стесненного удара: соударяемые тела будем считать абсолютно твердыми, а точку подвеса  $O$  — неподвижной, но не обязательно совпадающей с фиксированной в теле точкой  $O$ . В точку контакта со стенкой поместим деформируемый элемент  $E_C$ , а между точками  $O$  и  $O$  — деформируемый элемент  $E_O$  (рис. 4.8).

При составлении уравнений импульсивного движения будем, как и ранее, учитывать лишь главные члены, пренебрегая, в частности, изменением ориентации тела за время удара. Основные теоремы динамики выражаются формулами

$$M\dot{\vec{V}}_G = \vec{F}_C + \vec{F}_O, \quad J\dot{\vec{\Omega}} = \vec{G}\vec{C} \times \vec{F}_C + \vec{G}\vec{O} \times \vec{F}_O, \quad (4.50)$$

где  $J$  — центральный тензор инерции,  $\vec{F}_C, \vec{F}_O$  — усилия в деформируемых элементах:

$$\vec{F}_C = \vec{F}_C(\vec{\epsilon}_C, \dot{\vec{\epsilon}}_C), \quad \vec{F}_O = \vec{F}_O(\vec{\epsilon}_O, \dot{\vec{\epsilon}}_O), \quad \vec{\epsilon}_O = -\Delta\vec{r}_O, \quad \vec{\epsilon}_C = -\Delta\vec{r}_C, \quad (4.51)$$

причем вследствие одностороннего характера контакта  $\vec{F}_O = \vec{0}$  если  $(\vec{\epsilon}_O, \vec{n}) \leq 0$ .

Уравнения (4.50), (4.51) при учете формулы Эйлера позволяют получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений двенадцатого порядка с начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{\epsilon}}_C &= -M^{-1}(\vec{F}_C + \vec{F}_O) + \vec{G}\vec{C} \times J^{-1}(\vec{G}\vec{C} \times \vec{F}_C + \vec{G}\vec{O} \times \vec{F}_O), \\ \ddot{\vec{\epsilon}}_O &= -M^{-1}(\vec{F}_C + \vec{F}_O) + \vec{G}\vec{O} \times J^{-1}(\vec{G}\vec{C} \times \vec{F}_C + \vec{G}\vec{O} \times \vec{F}_O), \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\ddot{\epsilon}_O(t_0) = \ddot{\epsilon}_C(t_0) = \vec{0}, \quad \dot{\epsilon}_O(t_0) = \vec{0}, \quad \dot{\epsilon}_C(t_0) = -\vec{V}_C(t_0)$$

$$(\vec{F}_C, \vec{n})|_{t=t_0+\tau} = 0$$

Если функции  $\vec{F}_C, \vec{F}_O$  заданы, то решение задачи об ударе сводится к интегрированию системы (4.52), которое в общем случае может быть выполнено лишь численно. В результате будут найдены скорости  $\vec{V}_C(t_0 + \tau)$  и  $\vec{V}_O(t_0 + \tau)$  двух точек тела в конце удара. Отсюда можно определить распределение скоростей во всех точках тела, решая алгебраическую систему

$$\begin{aligned} \vec{V}_G(t_0 + \tau) + \vec{\Omega}(t_0 + \tau) \times \vec{GC} &= \vec{V}_C(t_0 + \tau) \\ \vec{V}_G(t_0 + \tau) + \vec{\Omega}(t_0 + \tau) \times \vec{GO} &= \vec{V}_O(t_0 + \tau) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Наличие ненулевой скорости в точке  $O$  свидетельствует о продолжении вибраций в окрестности этой точки. Эти вибрации быстро затухают, при этом кинетическая энергия тела уменьшается. Данный процесс можно рассматривать как мгновенную остановку точки  $O$  тела. Таким образом, по окончании стесненного удара тело вновь может рассматриваться как сферический маятник.

**Пример.** Рассмотрим плоскую задачу об ударе подвешенной пластины о перпендикулярную ей стенку. Уравнения (4.52) примут вид

$$\begin{aligned} M\ddot{\epsilon}_C &= -(\vec{F}_C + \vec{F}_O) + \rho^{-2}[\vec{GC}(\vec{GC}, \vec{F}_C) - \vec{F}_C(\vec{GC}, \vec{GC}) + \\ &\quad + \vec{GO}(\vec{GC}, \vec{F}_O) - \vec{F}_O(\vec{GO}, \vec{GC})] \\ M\ddot{\epsilon}_O &= -(\vec{F}_C + \vec{F}_O) + \rho^{-2}[\vec{GC}(\vec{GO}, \vec{F}_C) - \vec{F}_C(\vec{GO}, \vec{GC}) + \\ &\quad + \vec{GO}(\vec{GO}, \vec{F}_O) - \vec{F}_O(\vec{GO}, \vec{GO})] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Выясним, при каких условиях реакция в точке подвеса равна нулю тождественно. Для этого положим  $\ddot{\epsilon}_O \equiv \vec{0}$ ,  $\vec{F}_O \equiv \vec{0}$  во втором из уравнений (4.54), в итоге получим

$$\vec{F}_C \equiv \rho^{-2}[\vec{GC}(\vec{GO}, \vec{F}_C) - \vec{F}_C(\vec{GO}, \vec{GC})]. \quad (4.55)$$

Умножим обе части тождества (4.55) на вектор  $\vec{F}_C$ : один раз скалярно, другой раз — векторно. В итоге получим соотношения

$$\begin{aligned} (\vec{GO}, \vec{F}_C)\vec{GC} \times \vec{F}_C &\equiv \vec{0}, \\ (\vec{F}_C, \vec{F}_C)(\rho^2 + (\vec{GO}, \vec{GC})) &\equiv (\vec{GC}, \vec{F}_C)(\vec{GO}, \vec{F}_C). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Первое из равенств (4.56) выполняется в двух случаях: во-первых, если вектор  $\vec{F}_C$  коллинеарен  $\vec{GC}$ , во-вторых, если  $\vec{F}_C$  ортогонален к  $\vec{GO}$ . В первом из этих случаев  $\vec{F}_C = \lambda \vec{GC}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , и подстановка в

формулу (4.55) приводит к результату  $\vec{F}_C \equiv \vec{0}$ . Во втором случае при учете второго из равенств (4.56) получаем необходимые и достаточные условия равенства нулю реакции подвеса в виде

$$\vec{F}_C \perp \vec{GO}, \quad \rho^2 + (\vec{GO}, \vec{GC}) = 0. \quad (4.57)$$

Таким образом, реакция опоры должна сохранять постоянное направление. Данное требование выполнено лишь в том случае, когда трение при ударе отсутствует (строго говоря, имеется еще одна возможность — абсолютно неупругий удар с кулоновым трением). Второе условие (4.57) накладывает ограничение на положение точек контакта.

Если хотя бы одно из равенств (4.57) не выполнено, для решения задачи об ударе маятника необходимо численное интегрирование системы (4.54). В результате определяются значения  $\epsilon'_{Ot}(t_0 + \tau)$ ,  $\epsilon'_{Cn}(t_0 + \tau)$  и  $\epsilon'_{On}(t_0 + \tau)$ . Затем можно рассчитать распределение скоростей во всех точках тела, решая алгебраическую систему (4.53), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{aligned} V_{Gn} + (\vec{GC}, \vec{t})\Omega &= V_{Cn} = -\epsilon'_{Cn}(t_0 + \tau), \\ V_{Gn} + (\vec{GO}, \vec{t})\Omega &= V_{On} = -\epsilon'_{On}(t_0 + \tau), \\ V_{Gt} - (\vec{GO}, \vec{n})\Omega &= V_{Ot} = -\epsilon'_{Ot}(t_0 + \tau). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Отсюда получаем

$$\Omega(t_0 + \tau) = [\epsilon'_{On}(t_0 + \tau) - \epsilon'_{Cn}(t_0 + \tau)]/[(\vec{GC}, \vec{t}) - (\vec{GO}, \vec{t})], \quad (4.59)$$

$$V_{Gt} = (\vec{GO}, \vec{n})\Omega - \epsilon'_{Ot}(t_0 + \tau), \quad V_{Gn} = -(\vec{GO}, \vec{t})\Omega - \epsilon'_{On}(t_0 + \tau).$$

Потерю энергии при остановке точки  $C$  рассчитываем по формуле Кельвина. В итоге получаем

$$\Delta T = -\frac{1}{2}(V_{Ot}^2 + V_{On}^2) + \frac{1}{2}[(\vec{GO}, \vec{n})V_{Ot} - (\vec{GO}, \vec{t})V_{On}]^2/\rho_O^2. \quad (4.60)$$

Рассмотрим частный случай этой задачи, полагая  $M = 1$ ,  $|\vec{GO}| = 1$ ,  $|\vec{GC}| = 1$  (причем  $(\vec{GO}, \vec{GC}) = -1$ ),  $|GG'| = |OO'|$ , где  $G'$  и  $O'$  — проекции точек  $G$  и  $O$  соответственно на препятствие (см.рис. 4.8). Характеристики деформируемых элементов примем линейными, полагая

$$\vec{F}_C = c_1(\vec{\epsilon}_C, \vec{n})\vec{n}, \quad \vec{F}_O = c_2\vec{\epsilon}_O, \quad (4.61)$$

Таким образом, стенка считается абсолютно гладкой. Вследствие этого в уравнения (4.54) не входит переменная  $\epsilon_{Ct}$ ; кроме того, ввиду ортогональности векторов  $\vec{OG}$  и  $\vec{FC}$  имеем  $\epsilon_{Ot} \equiv 0$ . Поэтому порядок системы (4.54) можно понизить до четвертого и представить ее в виде

$$\begin{aligned} \epsilon''_{On} &= -\epsilon_{On}(1 + \rho^{-2}) - \sigma\epsilon_{Cn}(1 - \rho^{-2}), \\ \epsilon''_{Cn} &= -\epsilon_{On}(1 - \rho^{-2}) - \sigma\epsilon_{Cn}(1 + \rho^{-2}) \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\epsilon_{On}(t_0) = \epsilon_{Cn}(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_{On}(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_{Cn}(t_0) = 1,$$

$$\sigma = c_1/c_2, \quad \epsilon_{Cn}(t_0 + \tau) = 0.$$

На рис. 4.9 представлены графики зависимости относительной потери энергии  $\Delta T/T_0$  от отношения жесткостей  $\sigma$  для двух значений параметра  $\rho$ . Расчеты показывают, что для  $\rho = 0.5$  наибольшая потеря происходит при значении  $\sigma = 1$  (около тридцати шести процентов всей кинетической энергии маятника), а для  $\rho = 2$  — также при  $\sigma = 1$  (около пятидесяти трех процентов). При значениях  $\rho$  из интервалов  $(0, 0.3)$ ,  $(0.7, 1.4)$ ,  $(3, +\infty)$  для  $\sigma \in (0, 5)$  энергетические потери не превосходят пятнадцати процентов.

Для решения задачи об ударе маятника о шероховатое препятствие в общем случае необходимо интегрировать систему двенадцатого порядка (4.52). Можно сделать следующий априорный вывод: при ударе с переменным направлением реакции опоры учет неидеальности подвеса имеет принципиальный характер.

2. Переходим к обсуждению физического маятника. В этом случае в уравнениях (4.50) добавляется реакция второй точки крепления:

$$M\ddot{V}_G = \vec{F}_C + \vec{F}_O + \vec{F}_{O'}, \quad J\ddot{\Omega} = \vec{G}\vec{C} \times \vec{F}_C + \vec{G}\vec{O} \times \vec{F}_O + \vec{G}\vec{O}' \times \vec{F}_{O'}, \quad (4.63)$$

$$\vec{F}_{O'} = \vec{F}_{O'}(\ddot{\epsilon}_{O'}, \dot{\epsilon}_{O'}), \quad \ddot{\epsilon}_{O'} = -\Delta \vec{r}_{O'}.$$

Таким образом, система включает в себя три деформируемых элемента, первый из которых имеет односторонний характер:  $\Xi_C$ ,  $\Xi_O$  и  $\Xi_{O'}$ . Уравнения (4.52) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon}_C &= -M^{-1}(\vec{F}_C + \vec{F}_O + \vec{F}_{O'}) + \\ &\quad + \vec{G}\vec{C} \times J^{-1}(\vec{G}\vec{C} \times \vec{F}_C + \vec{G}\vec{O} \times \vec{F}_O + \vec{G}\vec{O}' \times \vec{F}_{O'}) \\ \ddot{\epsilon}_O &= -M^{-1}(\vec{F}_C + \vec{F}_O + \vec{F}_{O'}) + \\ &\quad + \vec{G}\vec{O} \times J^{-1}(\vec{G}\vec{C} \times \vec{F}_C + \vec{G}\vec{O} \times \vec{F}_O + \vec{G}\vec{O}' \times \vec{F}_{O'}) \\ \ddot{\epsilon}_{O'} &= -M^{-1}(\vec{F}_C + \vec{F}_O + \vec{F}_{O'}) + \\ &\quad + \vec{G}\vec{O}' \times J^{-1}(\vec{G}\vec{C} \times \vec{F}_C + \vec{G}\vec{O} \times \vec{F}_O + \vec{G}\vec{O}' \times \vec{F}_{O'}) \\ \ddot{\epsilon}_O(t_0) &= \ddot{\epsilon}_{O'}(t_0) = \ddot{\epsilon}_C(t_0) = \vec{0}, \quad \dot{\epsilon}_O(t_0) = \dot{\epsilon}_{O'}(t_0) = \vec{0}, \quad \dot{\epsilon}_C(t_0) = -\vec{V}_C(t_0), \\ (\vec{F}_C, \vec{n})|_{t=t_0+\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Подбирая характеристики деформируемых элементов в соответствии с конкретными условиями задачи, можно свести проблему стесненного удара к численному интегрированию системы (4.64). Заметим, что эта система содержит три избыточных переменных, так как для описания расположения твердого тела в пространстве достаточно шести координат. Поэтому в принципе можно понизить порядок до

двенадцатого, исключая часть переменных, хотя эта процедура весьма громоздка. При наличии достаточных вычислительных ресурсов предпочтительнее сохранить избыточные переменные, которые затем можно использовать для коррекции результатов.

Затем надо вычислить долю кинетической энергии, ушедшей на возбуждение вибраций в точках подвеса. Для этого надо вычислить ударные импульсы, необходимые для мгновенной остановки точек  $O$  и  $O'$  и работу этих импульсов.

Заметим, что учет неидеальности подвеса маятника необходим во всех случаях, за исключением удара без трения при выполнении условий центра удара, гарантирующих равенство нулю реакции оси подвеса вне зависимости от типа крепления (см. §1.3).

**Выводы.** Сравнение двух моделей удара маятника о препятствие: идеализированной, основанной на предположении об абсолютной жесткости подвеса, и более реалистичной, учитывающей его упругость, показывает их существенное различие. При некоторых значениях конструктивных параметров потери кинетической энергии вследствие неидеальности подвеса могут достигать пятидесяти процентов. Уменьшить эти потери можно за счет изменения взаимного расположения в теле точек подвеса и ударного контакта с препятствием. Для этого надо предварительно провести исследование дискретной модели, принимая во внимание жесткость маятника и стенки и характер трения. Такое исследование связано с численным интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений двенадцатого (при наличии избыточных переменных — восемнадцатого) порядка.

### 4.3. СОУДАРЕНИЕ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ДОПОЛНИТЕЛЬНУЮ ТОЧКУ КОНТАКТА

**Постановка задачи и примеры.** Одним из распространенных типов стесненного удара является соударение с массивным основанием тела, опирающегося на него некоторыми своими точками. Такие случаи имеют место при передвижении людей или антропоморфных механизмов, при сильной качке корабля со стоящими на палубе кон্�тайнерами и т.п.

В упрощенной постановке будем рассматривать твердое тело с невыпуклой поверхностью, при движении опирающееся одной из своих точек  $O$  на плоское основание и ударяющееся об него другой своей точкой  $C$ . Очевидно, такое соударение будет стесненным, причем основание играет двоякую роль: с одной стороны, оно выступает как элемент ударной пары, с другой — связывает движение тела. Характер этой связи может быть разным, основные случаи представлены на рис. 4.10: а) тело прикреплено к опоре сферическим шарниром — частный случай сферического маятника, исследованного в предыдущем параграфе, для которого точка подвеса лежит на поверхности препятствия; б) тело может скользить по опоре или отрываться от нее по действием приложенных сил, но не может проникать ниже поверхности опоры; в)

тело может отрываться от опоры, но не может скользить по ней или проникать ниже нее.

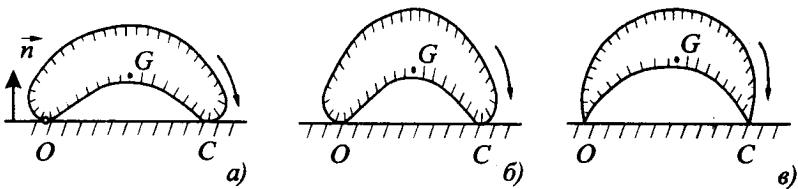


Рис. 4.10. Варианты задачи об ударе с дополнительной точкой контакта

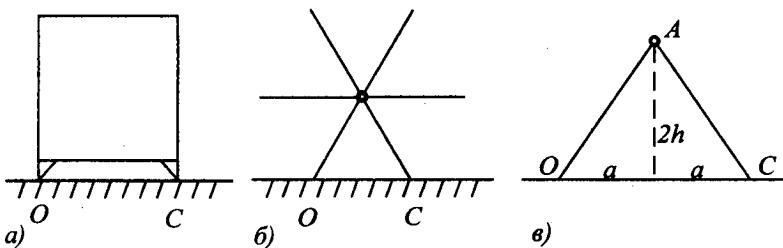


Рис. 4.11. Твердое тело с двумя острыми гранями и шагающий механизм

**Примеры.** Рассмотрим плоскопараллельное движение твердого тела, имеющего две острые грани, которыми оно может опираться на основание. На рис. 4.11 изображены две системы, относящиеся к этому типу. Первая из них связана с изучением воздействия землетрясений на сооружения, при этом обсуждались два типа контакта: а (см. [Hogan, 1992б]) и б [Нагаев, 1985, Hogan, 1989, 1992а].

Вторая система связана с исследованием динамики шагающих механизмов [Формальский, 1982]: она представляет собой "циркуль", опирающийся на основание поочередно своими спицами (рис. 4.11, б). При этом предполагается, что контакт относится к третьему типу, т.е. проскальзывание в опорной ноге отсутствует.

Ниже обсуждаются методы решения поставленной задачи для каждого из вышеперечисленных типов связи в точке  $O$ .

**Случай шарнирного крепления.** Как уже отмечалось, система, схематически изображенная на рис. 4.10, а может рассматриваться как частный вырожденный случай сферического маятника, для которого прямая  $OC$  лежит в касательной плоскости. Это обстоятельство ведет к существенному упрощению задачи, поскольку вектор скорости точки  $C$  необходимо лежит в вертикальной плоскости, ортогональной к  $OC$ , следовательно,  $\vec{V}_t, \vec{I}_t$  коллинеарны вектору  $\vec{t} = \vec{OC} \times \vec{n}/|OC|$ .

Спроектируем уравнение удара сферического маятника (4.38) на

орты  $\vec{n}$  и  $\vec{t}$ , в итоге получим уравнения удара с кулоновским трением в виде

$$\begin{aligned}\Delta V_n &= (\mathbf{J}^{-1}(I_n \vec{t} - I_t \vec{n}), \vec{t}) |OC|^2, \\ \Delta V_t &= -(\mathbf{J}^{-1}(I_n \vec{t} - I_t \vec{n}), \vec{n}) |OC|^2, \quad \vec{I} = I_n \vec{n} + I_t \vec{t} \\ \frac{dI_t}{dI_n} &= -\mu \operatorname{sign} V_t, \quad \text{если } V_t \neq 0, \\ \left| \frac{dI_t}{dI_n} \right| &\leq \mu, \quad \text{если } V_t = 0.\end{aligned}\tag{4.65}$$

Дифференцируя первые два уравнения по переменной  $\chi = I_n$ , получим

$$\frac{dV_n}{d\chi} = j_{11} - j_{12} \frac{dI_t}{d\chi}, \quad \frac{dV_t}{d\chi} = j_{22} \frac{dI_t}{d\chi} - j_{12}, \tag{4.66}$$

$$j_{11} = (\mathbf{J}^{-1} \vec{t}, \vec{t}) |OC|^2, \quad j_{12} = (\mathbf{J}^{-1} \vec{n}, \vec{t}) |OC|^2, \quad j_{22} = (\mathbf{J}^{-1} \vec{n}, \vec{n}) |OC|^2.$$

Анализ уравнений (4.66) типичен для удара с фиксированным направлением скольжения, примерами которого могут служить соударение плоских тел или удар двух шаров, и достаточно прост. Динамику удара в данном случае легко проследить, пользуясь геометрической интерпретацией Рауса (см. §3.1).

Допустим, что в начальный момент удара  $V_t = V_t^o > 0$ , тогда  $dI_t/d\chi = -\mu$ , т.е. на плоскости  $(I_t, I_n)$  изображающая точка выходит из начала координат вдоль прямой  $I_t = -\mu I_n$ . В зависимости от расположения этой прямой по отношению к линии нескользжения  $V_t = 0$  и линии наибольшего сжатия возможно три варианта:

(i) изображающая точка движется по прямой  $I_t = -\mu I_n$  вплоть до окончания удара;

(ii) по достижении линии нескользжения изображающая точка продолжает движение вдоль нее;

(iii) по достижении линии нескользжения изображающая точка продолжает движение вдоль прямой  $I_t = \mu I_n$ .

На рис. 4.12 построены кривые, отвечающие разным типам удара. Если  $j_{12} < 0$  (рис. 4.12, а), то в зависимости от коэффициента трения и начальных условий возможен случай (i) или (ii), если же коэффициент  $j_{12}$  положителен, возможен каждый из трех вариантов (рис. 4.12, б).

Условием реализации случая (i) является выполнение в ходе всего удара неравенств

$$\Delta V_t > 0, \quad dV_n/d\chi > 0. \tag{4.67}$$

При учете соотношений (4.65), (4.66) система (4.67) принимает вид

$$j_{11} + \mu j_{12} > 0, \quad V_t^o + \frac{j_{12} + \mu j_{22}}{j_{11} + \mu j_{12}} (1 + \nu) V_n^o > 0. \tag{4.68}$$

При выполнении неравенств (4.68) ударный импульс выражается формулами

$$I_n = -\frac{1}{j_{11} + \mu j_{12}}(1 + \nu)V_n^o, \quad I_t = -\mu I_n. \quad (4.69)$$

Аналогично можно вывести формулы для расчета ударного импульса в двух других случаях.

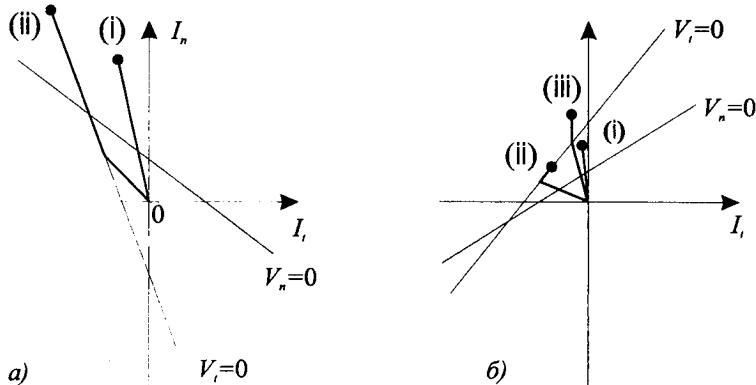


Рис. 4.12. Варианты удара при шарнирном креплении точки О:  
а)  $j_{12} < 0$ , б)  $j_{12} > 0$

Заметим, что в отличие от рассмотренного в предыдущем параграфе маятника с точкой подвеса вне опоры, в рассматриваемой задаче стопорный удар невозможен.

Ударную реакцию в точке подвеса маятника можно рассчитать по формуле (4.46).

**Пример.** Рассмотрим плоский удар о стенку пластины, шарнирно закрепленной на ней в точке  $O$ . В отличие от примера предыдущего параграфа (где точка подвеса лежит вне опоры), в данном случае начальная скорость точки контакта  $C$  направлена по нормали. Если считать шарнир идеальным, то касательная составляющая скорости остается равной нулю в течение всего удара, а изменение угловой скорости пластины обусловлено лишь нормальной составляющей ударного импульса. Таким образом,  $V_t \equiv 0$  вне зависимости от того, является ли стенка гладкой или шероховатой. Система (4.66) сводится к единственному уравнению

$$\frac{dV_n}{d\chi} = \frac{|OC|^2}{M\rho_O^2}, \quad (4.70)$$

где  $\rho_O$  — радиус инерции относительно точки  $O$ . Отсюда можно определить нормальную составляющую ударного импульса в точке контакта  $C$ :

$$I_n = -(1 + \nu)V_n(t_o) \frac{M\rho_O^2}{|OC|^2}. \quad (4.71)$$

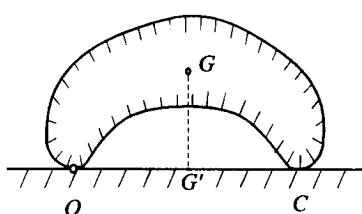


Рис. 4.13. Удар о стенку пластины с шарнирным креплением

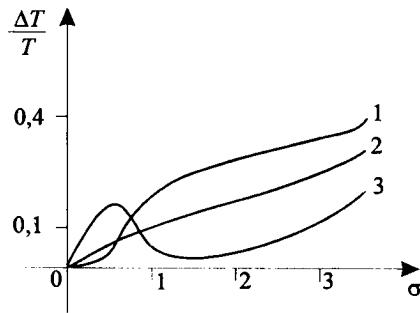


Рис. 4.14. Энергетические потери:  
1)  $\rho = \sqrt{2}$ , 2)  $\rho = 1$ , 3)  $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Допустим, что стенка абсолютно гладкая, тогда  $I_t = 0$ , и формула (4.46) приводит к таким значениям составляющих ударного импульса в точке  $C$ :

$$I_{On} = I_n [ |OG'| |OC| - \rho_O^2 ] / \rho_O^2, \quad I_{Ot} = - |OC| |G'G| I_n / \rho_O^2. \quad (4.72)$$

где  $G'$  — проекция точки  $G$  на препятствие (рис. 4.13).

Если же стенка шероховатая, то выражение для  $I_{On}$  останется без изменения. Что касается касательных составляющих ударных реакций, то их уже нельзя определить по отдельности, а только в сумме:

$$I_t + I_{Ot} = - |OC| |G'G| I_n / \rho_O^2. \quad (4.73)$$

Подобная неопределенность вообще присуща классическому решению задач об ударе при наличии нескольких неподвижных точек (см., например, §1.3).

Заметим, что величина  $I_{On}$  равна нулю тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$|OG'| |OC| = \rho_O^2, \quad (4.74)$$

а для выполнения равенства  $I_{Ot} = 0$  необходимо, чтобы точка  $G$  лежала на прямой  $OC$ .

В частности, для прямоугольной однородной пластины со сторонами  $|OC| = a$  и  $b$  и малыми острыми гранями (рис. 4.11, а) величину  $\rho_O$  можно вычислить как двойной интеграл

$$\rho_O^2 = \frac{1}{ab} \int_0^a dx \int_0^b (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{3}(a^2 + b^2). \quad (4.75)$$

Условие (4.74) при подстановке выражения (4.75) принимает вид

$$a^2 = 2b^2. \quad (4.76)$$

Если левая часть равенства (4.76) больше правой, то  $I_{On} > 0$  (т.е. точка  $O$  стремится вглубь стенки), если же больше правая часть, то  $I_{On} < 0$  (т.е. точка  $O$  стремится оторваться от опоры).

Можно сделать вывод, что в обсуждаемой задаче реакция шарнира всегда отлична от нуля (поскольку центр масс тела всегда лежит вне опоры). Поэтому решение, полученное при учете неидеальности крепления, может существенно отличаться от вышеприведенного решения. Воспользуемся для построения дискретной модели системой (4.52), в которой прямая  $OC$  ортогональна вектору  $\vec{n}$ . Последнее ограничение не приводит к заметному упрощению вычислений, однако результаты обладают рядом особенностей по сравнению с общим случаем. Главная из них отмечалась выше — реакция опоры не может быть тождественно равной нулю. Для определения других свойств необходимо рассматривать конкретные примеры.

**Пример.** Вновь обратимся к предыдущему примеру, используя на сей раз для описания удара систему уравнений (4.54). Стенку будем считать абсолютно гладкой, вследствие чего реакция  $\vec{F}_C$  параллельна  $\vec{n}$  и не зависит от  $\epsilon_{Ct}$ . Обозначая  $a_1 = |CG'|$ ,  $a_2 = |G'O|$ ,  $h = |GG'|$ , запишем уравнения, описывающие изменение переменных  $\epsilon_{Cn}$ ,  $\epsilon_{On}$ ,  $\epsilon_{Ot}$  в виде

$$\begin{aligned} M\ddot{\epsilon}_{Cn} &= -F_{Cn}(1 + a_1^2/\rho^2) - F_{On}(1 - a_1 a_2/\rho^2) + F_{Ot} a_1 h/\rho^2, \\ M\ddot{\epsilon}_{On} &= -F_{Cn}(1 - a_1 a_2/\rho^2) - F_{On}(1 + a_2^2/\rho^2) - F_{Ot} a_2 h/\rho^2, \\ M\ddot{\epsilon}_{Ot} &= -F_{Cn} a_1 h/\rho^2 - F_{On} a_2 h/\rho^2 - F_{Ot}(1 + h^2/\rho^2), \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\epsilon_{On}(t_0) = \epsilon_{Ot}(t_0) = \epsilon_{Cn}(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_{On}(t_0) = \dot{\epsilon}_{Ot}(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_{On}(t_0) = V,$$

$$(\vec{F}_C, \vec{n})|_{t=t_0+\tau} = 0.$$

После интегрирования системы (4.77) можно определить потери энергии в точке крепления по формуле (4.60).

Зададим характеристики деформируемых элементов по формулам (4.57) и обозначим  $\sigma = c_1/c_2$ . Положим  $a_1 = a_2 = h = 1$  и изменим масштаб независимой переменной. Тогда уравнения (4.77) запишутся так:

$$\begin{aligned} \epsilon''_{Cn} &= -\frac{1}{2}\sigma(\epsilon_{Cn} + |\epsilon_{Cn}|)(1 + \rho^{-2}) - \epsilon_{On}(1 - \rho^{-2}) + \epsilon_{Ot}\rho^{-2}, \\ \epsilon''_{On} &= -\frac{1}{2}\sigma(\epsilon_{Cn} + |\epsilon_{Cn}|)(1 - \rho^{-2}) - \epsilon_{On}(1 + \rho^{-2}) - \epsilon_{Ot}\rho^{-2}, \\ \epsilon''_{Ot} &= -\frac{1}{2}\sigma(\epsilon_{Cn} + |\epsilon_{Cn}|)\rho^{-2} - \epsilon_{On}\rho^{-2} - \epsilon_{Ot}(1 + \rho^{-2}), \end{aligned} \quad (4.78)$$

Система (4.78) была проинтегрирована для различных значений параметров  $\rho$  и  $\sigma$ , а затем производился расчет энергетических потерь, обусловленных неидеальностью крепления, результаты представлены на рис. 4.14. Здесь коэффициент восстановления относительной скорости в точке  $C$  вычислялся по формуле

$$e = \sqrt{1 - \Delta T/T}. \quad (4.79)$$

**Случай одностороннего контакта с гладкой опорой.** Переходим к обсуждению другого типа контакта: тело в точке  $O$  свободно опирается на основание и может отрываться от него либо скользить по нему (рис. 4.10,б). В этом случае для описания импульсивного движения можно использовать формулы §1.3:

$$M\Delta\vec{V}_G = \vec{I}_C + \vec{I}_O, \quad J\Delta\vec{\Omega} = \vec{G}_C \times \vec{I}_C + \vec{G}_O \times \vec{I}_O. \quad (4.80)$$

Для однозначного решения системы (4.80) необходимо задаться правилами вычисления импульса в опоре  $I_O$ . Заметим, что в обсуждаемом случае тип контакта в точках  $O$  и  $C$  одинаков, разница состоит лишь в наличии у второй из точек начальной скорости сближения с опорой. Односторонний характер связи выражается неравенствами

$$(\vec{F}_O, \vec{n}) \geq 0, \quad (\vec{V}_O, \vec{n}) \geq 0 \quad (4.81)$$

(аналогичные условия выполняются и для точки  $C$ ).

Система (4.80), (4.81) имеет бесчисленное множество решений. Для устранения неопределенности в рамках классической теории удара необходимо принять некоторую дополнительную гипотезу. Наиболее соответствует характеру задачи следующая аксиома.

*Если при ударе точка  $O$  отрывается от опоры, то реакция последней в этой точке равна нулю на всем промежутке удара:*

$$(\Delta\vec{V}_O, \vec{n}) > 0 \Rightarrow \vec{F}_O \equiv \vec{0}. \quad (4.82)$$

Иными словами, связь проявляет себя лишь при попытке проникновения точки вглубь опоры, но не препятствует отрыву (нет адгезионного "прилипания" тела к опоре).

Приняв гипотезу (4.82), можно решать задачу по следующей схеме.

1. Решаем задачу о соударении свободного твердого тела с препятствием в точке  $C$  при данных начальных условиях и определяем приращение скорости  $\Delta\vec{V}_O$ .

2. Предполагаем, что

$$(\Delta\vec{V}_O, \vec{n}) \equiv 0. \quad (4.83)$$

Отсюда выражаем реакцию  $\vec{F}_O$  через  $\vec{F}_C$ , учитывая характер трения в точках  $O$  и  $C$ . Затем находим зависимость  $\Delta V_{Cn}$  от  $I_{Cn}$  и рассчитываем импульс  $\vec{I}_C$ , используя граничное условие (коэффициент восстановления).

3. Для каждого из решений, построенных в п.п. 1, 2, проверяем выполнение условий (4.81). При этом, вообще говоря, возможны случаи, когда подходят оба решения, одно из них или ни одного.

**Определение.** В математике задачу называют *корректно поставленной*, если для любых допустимых значений параметров (к числу которых относятся и начальные условия) она имеет единственное решение, причем это решение непрерывно зависит от параметров.

В данном разделе проведем анализ корректности в случае абсолютно гладкой опоры, полагая в уравнениях (4.80)  $\vec{I}_C = I_{Cn} \vec{n}$ ,  $\vec{I}_O = I_{On} \vec{n}$ .

1. При ударе без трения в точке  $C$  ударный импульс определяется по формулам §3.1:

$$\vec{I}_C = -\vec{n}(\vec{V}_C^-, \vec{n})(1+e)/(\vec{n}, \mathbf{B}\vec{n}), \quad (4.84)$$

при этом  $\vec{I}_O = \vec{0}$ .

2. При учете уравнений (4.80) равенство (4.83) принимает вид

$$(F_{Cn} + F_{On})M^{-1} + (\vec{GO} \times \vec{n}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{GC} \times \vec{n}))F_{Cn} + \\ + (\vec{GO} \times \vec{n}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{GO} \times \vec{n}))F_{On} = 0,$$

откуда

$$F_{On} = -D \left[ M^{-1} + (\vec{GO} \times \vec{n}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{GO} \times \vec{n})) \right]^{-1} F_{Cn}. \quad (4.85)$$

Для решения задачи об ударе надо определить одну неизвестную величину  $I_{Cn}$ . Для этого достаточно выразить приращение скорости  $V_{Cn}$  из уравнений (4.80) при учете формулы (4.85). В итоге получаем

$$\Delta V_{Cn} = I_{Cn} \left( M^{-1} + (\vec{GC} \times \vec{n}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{GC} \times \vec{n})) \right) - \\ - D^2 I_{Cn} \left( \left[ M^{-1} + (\vec{GO} \times \vec{n}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{GO} \times \vec{n})) \right]^{-1} \right). \quad (4.86)$$

В данной формуле правая часть положительна ввиду положительной определенности матрицы  $\mathbf{J}$ , поэтому величину  $I_{Cn}$  можно вычислить, задавая коэффициент восстановления (в данном случае кинематическое определение этого коэффициента совпадает с динамическим и энергетическим).

**3.** В случае 1 первое условие (4.81) выполнено автоматически, а второе выглядит так:

$$D = M^{-1} + (\vec{GO} \times \vec{n}, \mathbf{J}^{-1}(\vec{GC} \times \vec{n})) > 0. \quad (4.87)$$

В случае 2 второе условие (4.81) выполнено автоматически, а первое вследствие (4.85) выглядит так:

$$D \leq 0. \quad (4.88)$$

Сделаем вывод: гипотеза (4.82) позволяет получить единственное решение задачи об ударе об абсолютно гладкую опору при наличии дополнительной точки контакта. Если выполнено неравенство (4.87), то последняя отрывается от опоры, в противном случае — нет.

**Пример.** Рассмотрим плоский удар пластины о гладкое препятствие, убирая крепление в точке  $O$  и сохранив прежние обозначения, смысл которых представлен на рис. 4.13. Условие (4.87) выглядит так:

$$\rho^2 > a_1 a_2. \quad (4.89)$$

Если данное неравенство выполнено, то пластина после удара отойдет от опоры, в противном случае контакт в точке  $O$  сохраняется, но эта точка начинает скользить вдоль опоры в направлении точки  $C$ . Заметим, что если части неравенства (4.89) равны, то реакция в точке  $O$  равна нулю, но точка не отрывается от опоры.

Формула (4.86) в рассматриваемом примере выглядит так:

$$\Delta V_{Cn} = I_{Cn} M^{-1} \rho^{-2} (a_1 + a_2)^2.$$

В частности, для прямоугольной пластины со сторонами  $a$  и  $b$  с опорами в углах (рис. 4.11, а) центральный радиус инерции рассчитывается по формуле (ср. с (4.75))

$$\rho^2 = \frac{1}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{12}(a^2 + b^2), \quad (4.90)$$

причем  $a_1 = a_2 = a/2$ . Неравенство (4.89) принимает вид

$$b^2 > 2a^2. \quad (4.91)$$

Следовательно, пластина с пропорциями стандартного листа писчей бумаги принадлежит к граничному типу: более высокие прямоугольники целиком отрываются от опоры, более низкие — сохраняют контакт с ней в точке  $O$ .

Несмотря на то, что гипотеза (4.82) достаточна для решения поставленной задачи, она является весьма спорной, поскольку в ее основе неявно лежит подвергавшееся выше критике допущение об абсолютной жесткости контакта в точке  $O$ . Нереалистичность этого допущения в данном случае особенно очевидна, поскольку физически точки  $O$  и  $C$  равноправны. Поэтому оправдано использование альтернативных — дискретных моделей.

Поместим деформируемые элементы  $\Xi_O$  и  $\Xi_C$  в точки контакта и воспользуемся системой (4.52). Принимая во внимание, что в отсутствие трения реакции направлены по нормали к опоре и зависят только от нормальных составляющих соответствующих деформаций, можно понизить ее порядок до четвертого:

$$\begin{aligned}\ddot{\epsilon}_{Cn} &= -M^{-1}(F_{Cn} + F_{On}) - (\mathbf{J}^{-1}(\vec{GC} \times \vec{n}), \vec{GC} \times \vec{n}F_{Cn} + \vec{GO} \times \vec{n}F_{On}) \\ \ddot{\epsilon}_{On} &= -M^{-1}(F_{Cn} + F_{On}) - (\mathbf{J}^{-1}(\vec{GO} \times \vec{n}), \vec{GC} \times \vec{n}F_{Cn} + \vec{GO} \times \vec{n}F_{On}) \\ \epsilon_{On}(t_0) &= \epsilon_{Cn}(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_{On}(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_{Cn}(t_0) = -V_{Cn}(t_0).\end{aligned}\quad (4.92)$$

Границные условия для определения момента окончания удара в данном случае аналогичны (4.11). Задав характеристики деформируемых элементов, можно свести решение к численному интегрированию.

**Пример.** Для предыдущего примера система (4.92) принимает вид

$$\begin{aligned}M\rho^2\ddot{\epsilon}_{Cn} &= -(\rho^2 + a_2^2)F_{Cn} - (\rho^2 - a_1a_2)F_{On}, \\ M\rho^2\ddot{\epsilon}_{On} &= -(\rho^2 - a_1a_2)F_{Cn} - (\rho^2 + a_1^2)F_{On}.\end{aligned}\quad (4.93)$$

При выполнении неравенства (4.89) величина  $\epsilon_{On}$  остается равной нулю в продолжении удара, и наличие контакта в точке  $O$  не играет роли. В противном случае эта величина меняется со временем, и для определения распределения скоростей в конце удара необходимо численное интегрирование системы (4.93). Ограничимся частным случаем, когда система симметрична, а деформируемые элементы упругие:

$$a_1 = a_2, \quad F_{Cn} = \frac{1}{2}c(\epsilon_{Cn} + |\epsilon_{Cn}|), \quad F_{On} = \frac{1}{2}c(\epsilon_{On} + |\epsilon_{On}|).$$

На рис. 4.15 изображены графики зависимостей скоростей отскока в точках  $O$  и  $C$  от параметра  $s = a_1^2/\rho^2$  (скорость сближения в точке  $C$  принята равной единице). Промежуток  $s \in (0, 1)$  соответствует равенству нулю реакции в точке  $O$ . На промежутках  $s \in (0.33, 2.1)$  и  $s \in (6, 12)$  угловая скорость тела при ударе изменяет направление, а для значений  $s \in (0, 0.33)$ ,  $s \in (2.1, 6)$ , и т.д. знак угловой скорости сохраняется. При  $s = 9$  отскок такой же, как и при  $s = 1$ , а для значения  $s = 4$  точка  $C$  остается на опоре, а угловая скорость не изменяется. Заметим, что для однородной прямоугольной пластины со сторонами  $a$  и  $b$  имеем  $s = 3a^2/(a^2 + b^2) < 3$ .

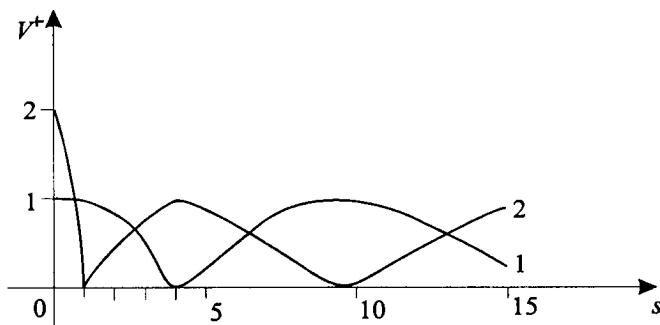


Рис. 4.15. Зависимость скоростей отскока от радиуса инерции: 1)  $V_C^+$ , 2)  $V_O^+$

**Случай одностороннего контакта с шероховатой опорой.** Переходим к исследованию случая, когда в точке  $O$  тело опирается на шероховатое препятствие. Будем считать, что касательная составляющая ударных импульсов описывается законом Амонтана – Кулона.

Вначале применим схему исследования, описанную в предыдущем разделе и основанную на гипотезе (4.82). Как было показано в главе 3, в общем случае задача о пространственном ударе шероховатых тел не имеет алгебраического решения. Это затрудняет анализ корректности аксиоматической модели удара при наличии дополнительной точки контакта. Тем не менее, можно исследовать до конца важный частный случай плоского удара, для которого в случае единственной точки контакта известны явные формулы для расчета ударного импульса.

Таким образом, будем рассматривать задачу о соударении с опорой пластины при наличии двух точек контакта (рис. 4.10,б). В начальный момент удара точка  $O$  неподвижна, а точка  $C$  имеет скорость, ортогональную опоре. В каждом из случаев 1 и 2 надо учитывать две возможности: либо трение достаточно велико, чтобы воспрепятствовать проскальзыванию в точке контакта, либо при ударе тело приобретает в точках контакта скорость в касательном направлении.

1. Уравнения удара с трением при наличии единственной точки контакта  $C$  имеют вид

$$M\Delta V_{Cn} = I_{Cn}, \quad M\Delta V_{Ct} = I_{Ct}, \quad M\rho^2\Delta\Omega = a_2 I_{Cn} + h I_{Ct}. \quad (4.94)$$

Отсюда определяем составляющие скоростей в точках  $O$  и  $C$ :

$$\begin{aligned} M\rho^2\Delta V_{Cn} &= I_{Cn}(\rho^2 + a_2^2) + I_{Ct}a_2h, \\ M\rho^2\Delta V_{Ot} &= M\Delta V_{Ct} = I_{Ct}(\rho^2 + h^2) + I_{Cn}a_2h, \\ M\rho^2\Delta V_{On} &= I_{Cn}(\rho^2 - a_1a_2) - I_{Ct}a_1h. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Пользуясь второй из этих формул, можно определить, будет ли удар сопровождаться проскальзыванием: если при подстановке  $I_{Ct} =$

$-\mu I_{Cn}$  правая часть будет положительной, то тело скользит в направлении  $OC$ , в противном случае  $V_{Ct} \equiv 0$ . Следовательно, первый из этих случаев описывается соотношениями

$$\begin{aligned}\mu < a_2 h / (\rho^2 + h^2), \quad M \rho^2 \Delta V_{On} = I_{Cn} (\rho^2 - a_1 a_2 + \mu a_1 h), \\ M \rho^2 \Delta V_{Cn} = I_{Cn} (\rho^2 - \mu a_2 h + a_2^2).\end{aligned}\quad (4.96)$$

Во втором случае имеем

$$I_{Ct} = -I_{Cn} a_2 h / (\rho^2 + h^2),$$

откуда

$$\begin{aligned}\mu \geq a_2 h / (\rho^2 + h^2), \quad M \Delta V_{On} = I_{Cn} (\rho^2 - a_1 a_2 + h^2) / (\rho^2 + h^2), \\ M \Delta V_{Cn} = I_{Cn} (\rho^2 + h^2 + a_2^2) / (\rho^2 + h^2).\end{aligned}\quad (4.97)$$

**2.** При двухточечном контакте используем уравнения (4.80), которые для рассматриваемого плоского случая выглядят так:

$$\begin{aligned}M \Delta V_{Gn} = I_{Cn} + I_{On}, \\ M \Delta V_{Gt} = I_t, \quad M \rho^2 \Delta \Omega = a_2 I_{Cn} - a_1 I_{On} + h I_t\end{aligned}\quad (4.98)$$

где обозначено  $I_t = I_{Ct} + I_{Ot}$ . Считая  $\Delta V_{On} \equiv 0$ , отсюда получаем

$$\begin{aligned}M \rho^2 \Delta V_{On} = I_{Cn} (\rho^2 - a_1 a_2) + I_{On} (\rho^2 + a_1^2) - I_t a_1 h = 0, \\ M \rho^2 \Delta V_{Cn} = I_{Cn} (\rho^2 + a_2^2) + I_{On} (\rho^2 - a_1 a_2) + I_t a_2 h, \\ M \rho^2 \Delta V_{Ct} = I_{Cn} a_2 h - I_{On} a_1 h + I_t (\rho^2 + h^2).\end{aligned}\quad (4.99)$$

Наличие проскальзывания проверяем, полагая в уравнениях (4.99)  $I_t = -\mu(I_{Cn} + I_{On})$ . Тогда первое из этих уравнений примет вид

$$I_{Cn} (\rho^2 - a_1 a_2 + \mu a_1 h) + I_{On} (\rho^2 + a_1^2 + \mu a_1 h) = 0. \quad (4.100)$$

Выражая отсюда величину  $I_{On}$  и подставляя полученное значение в третье уравнение, получаем

$$M \Delta V_{Ct} = I_{Cn} (a_1 + a_2) (h - \mu a_1) / (\rho^2 + \mu a_1 h + a_1^2). \quad (4.101)$$

Проскальзывание будет иметь место при условии положительности правой части неравенства (4.101), при этом

$$M \Delta V_{Cn} = I_{Cn} (a_1 + a_2)^2 / (\rho^2 + \mu a_1 h + a_1^2). \quad (4.102)$$

Неположительность правой части в (4.101) свидетельствует об отсутствии скольжения при двухточечном контакте, в этом случае

$$\begin{aligned}\Delta V_{Ct} &= 0, \quad I_{On} = -I_{Cn}(\rho^2 - a_1 a_2 + h^2)/(\rho^2 + h^2 + a_1^2), \\ I_t &= -h I_{Cn}(a_1 + a_2)/(\rho^2 + h^2 + a_1^2), \\ M \Delta V_{Cn} &= I_{Cn}(a_1 + a_2)^2/(\rho^2 + h^2 + a_1^2).\end{aligned}\quad (4.103)$$

**3.** Сделаем проверку, удовлетворяют ли построенные решения условиям (4.81).

(а) Для контакта в одной точке с проскальзыванием условия положительности правых частей равенств (4.96) выглядят так:

$$\mu < a_2 h / (\rho^2 + h^2), \quad \rho^2 - a_1 a_2 + \mu a_1 h > 0. \quad (4.104)$$

(б) Для контакта в одной точке без проскальзывания требование положительности правых частей равенств (4.97) приводит к таким условиям:

$$\mu \geq a_2 h / (\rho^2 + h^2), \quad \rho^2 - a_1 a_2 + h^2 > 0. \quad (4.105)$$

(с) В случае двухточечного контакта со скольжением должны выполняться неравенства  $\Delta V_{Ct} > 0$ ,  $I_{On} \geq 0$  и  $\Delta V_{Cn} > 0$ . При учете соотношений (4.100) – (4.102), преобразуем их к виду

$$h - \mu a_1 > 0, \quad \rho^2 + \mu a_1 h + a_1^2 > 0, \quad \rho^2 - a_1 a_2 + \mu a_1 h < 0. \quad (4.106)$$

(д) Наконец, двухточечный контакт без проскальзывания реализуется при условиях

$$h - \mu a_1 \leq 0, \quad \rho^2 - a_1 a_2 + h^2 \leq 0. \quad (4.107)$$

Собирая формулы (4.104)–(4.107), приходим к таким окончательным выводам:

Если выполнено неравенство  $\rho^2 + h^2 \leq a_1 a_2$ , то ударный контакт будет двухточечным. При этом в случае  $\mu \geq h/a_1$  трение препятствует проскальзыванию, иначе тело скользит в направлении  $OC$ .

Если  $\rho^2 + h^2 > a_1 a_2$ , то в зависимости от величины коэффициента трения имеется три возможности. В случае  $\mu \geq a_2 h / (\rho^2 + h^2)$  ударный контакт одноточечный, а скольжение отсутствует. Для значений  $\mu$  из интервала  $((a_1 a_2 - \rho^2) / a_1 h, a_2 h / (\rho^2 + h^2))$  контакт также одноточечный, но со скольжением. Наконец, при выполнении неравенства  $\mu \leq (a_1 a_2 - \rho^2) / a_1 h$  контакт двухточечный, со скольжением.

Таким образом, обсуждаемая задача при любых значениях параметров имеет единственное решение.

**Пример.** Для однородной прямоугольной пластины со сторонами  $a$  и  $b$  имеем  $a_1 = a_2 = a/2$ ,  $h = b/2$ ,  $\rho^2 = (a^2 + b^2)/12$ , и вышеперечисленные возможности отвечают следующим условиям: двухточечный

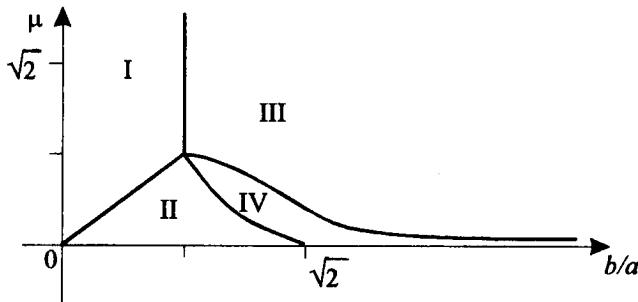


Рис. 4.16. Варианты удара с сухим трением: I) двухточечный контакт без скольжения; II) двухточечный со скольжением; III) одноточечный без скольжения; IV) одноточечный со скольжением

контакт без скольжения:  $2b^2 \leq a^2$ ,  $\mu \geq b/a$ ; двухточечный контакт со скольжением:  $2b^2 \leq a^2$ ,  $\mu < b/a$  или  $2b^2 > a^2$ ,  $\mu < (2a^2 - b^2)/3ab$ ; одноточечный контакт без скольжения:  $2b^2 > a^2$ ,  $\mu \geq 3ab/(a^2 + 4b^2)$ ; одноточечный контакт со скольжением:  $2b^2 > a^2$ ,  $(2a^2 - b^2)/3ab < \mu < 3ab/(a^2 + 4b^2)$ .

На рис. 4.16 в плоскости параметров  $b/a$  и  $\mu$  построены области, соответствующие данным четырем вариантам удара. Заметим, что в пределе при  $\mu \rightarrow 0$  получаются два случая, определяемые неравенством (4.89).

Один из вариантов удара, а именно одноточечный без скольжения, был изучен в [Нагаев, 1985], причем коэффициент восстановления в точке  $C$  полагался равным нулю. В этом случае из формул (4.97) можно определить приращение скорости в точке  $O$ :

$$\Delta V_{On} = \Delta V_{Cn}(\rho^2 - a_1 a_2 + h^2)/(\rho^2 + h^2 + a_2^2). \quad (4.108)$$

Поскольку при абсолютно неупругом ударе  $V_{Cn}^+ = 0$ , то формула (4.108) позволяет вычислить послеударное значение угловой скорости:

$$\Omega^+ = \Omega^- (2b^2 - a^2)/(2b^2 + 2a^2) \quad (4.109).$$

Перейдем к исследованию данной проблемы при помощи дискретных моделей удара. Поместим в точки контакта деформируемые элементы  $\Xi_O$ ,  $\Xi_C$  и определим контактные деформации аналогично (4.51). Дифференцируя уравнения (4.99) по времени, получим

$$\begin{aligned} M\rho^2\ddot{\epsilon}_{Cn} &= -F_{Cn}(\rho^2 + a_2^2) - F_{On}(\rho^2 - a_1 a_2) - F_t a_2 h, \\ M\rho^2\ddot{\epsilon}_{On} &= -F_{Cn}(\rho^2 - a_1 a_2) - F_{On}(\rho^2 + a_1^2) + F_t a_1 h, \\ M\rho^2\ddot{\epsilon}_{Ct} &= -F_{Cn}a_2 h + F_{On}a_1 h - F_t(\rho^2 + h^2), \\ \epsilon_{On}(t_0) &= \epsilon_{Cn}(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_{On}(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_{Cn}(t_0) = -V_{Cn}(t_0). \end{aligned} \quad (4.110)$$

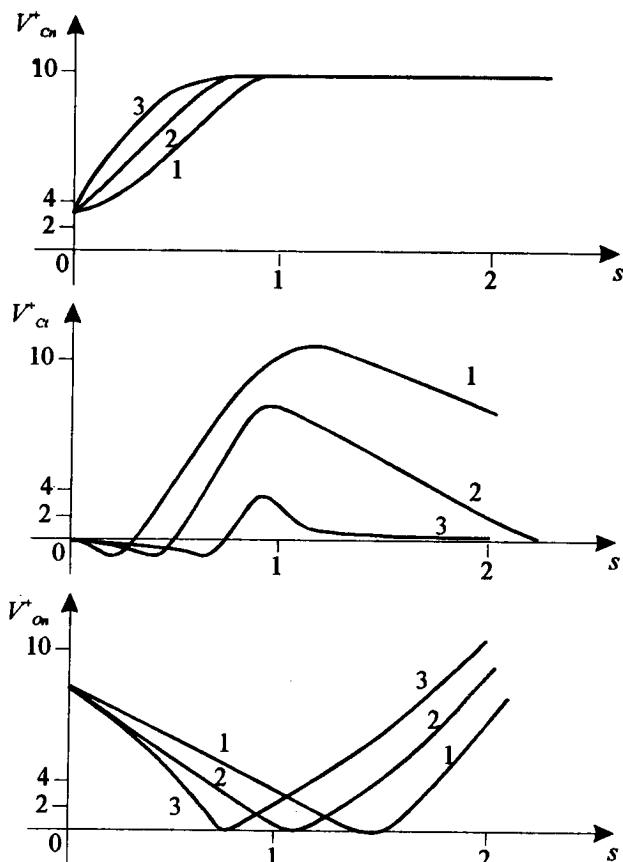


Рис. 4.17. Зависимость скоростей отскока от отношения сторон в случае шероховатой опоры: 1)  $\mu = 0.1$ , 2)  $\mu = 0.3$ , 3)  $\mu = 0.5$

Характеристики  $F_{Cn}$ ,  $F_{On}$  примем линейными, а касательную составляющую  $F_t$  будем описывать посредством формулы (3.75):

$$F_{Cn} = \frac{1}{2}c(\epsilon_{Cn} + |\epsilon_{Cn}|), \quad F_{On} = \frac{1}{2}c(\epsilon_{On} + |\epsilon_{On}|), \quad (4.111)$$

$$F_t = \mu(F_{Cn} + F_{On})\text{sign } \dot{\epsilon}_{Ct}.$$

Интегрируя систему шестого порядка (4.110), (4.111) получаем решение задачи о стесненном ударе, основанное на физических соображениях без принятия аксиомы (4.82).

**Пример.** Вновь обратимся к последнему примеру, на сей раз применяя для решения задачи об ударе прямоугольной пластины о препятствие дискретный метод. Результаты расчетов системы (4.110),

(4.111) представлены на рис. 4.17, где изображены зависимости конечных скоростей от параметра  $s = b/a$  для трех значений коэффициентов трения  $\mu$ . Можно сделать вывод: в областях 3 и 4, соответствующих одноточечному ударному контакту, результаты расчетов дискретной модели практически совпадают с расчетами по обычным формулам удара с единственной точкой контакта. В областях 1 и 2 различие между двумя методами весьма существенно, так как дискретная модель предсказывает наличие ненулевой нормальной составляющей конечной скорости в точке  $O$  (исключение для каждого значения  $\mu$  составляет единственное значение  $s$ , для которого точка  $O$  не отрывается от опоры). Кроме того, в области 1 обнаруживаются участки перемены направления проскальзывания.

**Многозвездный механизм с двумя опорами.** В рассмотренных выше примерах стесненного удара использование аксиомы (4.82) не приводило к явным логическим противоречиям: для любых значений параметров задача об ударе имела единственное решение, в большей или меньшей степени соответствующее реальности. Поэтому может сложиться впечатление, что аксиоматическая модель, несмотря на свой приближенный характер, вполне надежна и может использоваться при анализе более сложных систем, состоящих из нескольких звеньев. В частности, задачи двуногой ходьбы связаны с исследованием ударной постановки ноги на опору, в то время как вторая нога уже стоит на ней. Простейшая модель такого рода изображена на рис. 4.11,в: шагающее устройство состоит из двух одинаковых стержней (ног), скрепленных шарниром. Как показано Формальским [Формальский, 1982], если опора шероховата, то задача об ударе некорректна: при некоторых значениях параметров она может не иметь решений, удовлетворяющих неравенствам (4.81), при других — иметь два или даже три решения.

Для выяснения причины возникновения парадоксов предположим, что к произвольной системе твердых тел в двух точках  $O$  и  $C$  приложены заданные импульсы  $\vec{I}_O$  и  $\vec{I}_C$ . Уравнения импульсивного движения приведем к виду

$$\Delta \vec{V}_O = \mathbf{B}_{OO} \vec{I}_O + \mathbf{B}_{OC} \vec{I}_C, \quad \Delta \vec{V}_C = \mathbf{B}_{CO} \vec{I}_O + \mathbf{B}_{CC} \vec{I}_C, \quad (4.112)$$

где элементы матриц  $\mathbf{B}_{OO}$ ,  $\mathbf{B}_{OC}$  и  $\mathbf{B}_{CC}$  можно определить, пользуясь методом кинетостатики (см. §1.3).

Наиболее важным свойством системы (4.112) является положительная определенность ее правых частей, т.е. для любого ненулевого удара выполнено неравенство

$$(\Delta \vec{V}_O, \vec{I}_O) + (\Delta \vec{V}_C, \vec{I}_C) > 0. \quad (4.113)$$

Справедливость данного утверждения следует из формулы Кельвина, так как левая часть неравенства (4.113) представляет собой удвоенную кинетическую энергию системы после удара, если до удара эта система покоялась.

Допустим сначала, что импульсы возникают при ударе об абсолютно гладкую опору, тогда

$$\vec{I}_O = I_{On} \vec{n}, \quad \vec{I}_C = I_{Cn} \vec{n}.$$

Умножим обе части уравнений (4.112) скалярно на вектор нормали  $\vec{n}$ :

$$(\Delta \vec{V}_O, \vec{n}) = b_{OO} I_{On} + b_{OC} I_{Cn}, \quad (\Delta \vec{V}_C, \vec{n}) = b_{CO} I_{On} + b_{CC} I_{Cn} \quad (4.114)$$

$$b_{OO} = (\mathbf{B}_{OO} \vec{n}, \vec{n}), b_{OC} = (\mathbf{B}_{OC} \vec{n}, \vec{n}), b_{CO} = (\mathbf{B}_{CO} \vec{n}, \vec{n}), b_{CC} = (\mathbf{B}_{CC} \vec{n}, \vec{n})$$

Несложно проверить, что свойство положительной определенности сохраняется в системе (4.114), поскольку в рассматриваемом случае

$$(\Delta \vec{V}_O, \vec{n}) I_{On} + (\Delta \vec{V}_C, \vec{n}) I_{Cn} = (\Delta \vec{V}_O, \vec{I}_O) + (\Delta \vec{V}_C, \vec{I}_C).$$

Исследуем систему (4.114) по схеме, изложенной выше.

1. Положим  $I_{On} = 0$ , тогда

$$(\Delta \vec{V}_O, \vec{n}) = b_{OC} I_{Cn}, \quad (\Delta \vec{V}_C, \vec{n}) = b_{CC} I_{Cn}. \quad (4.115)$$

2. Полагая  $(\Delta \vec{V}_O, \vec{n}) = 0$ , приходим к соотношениям

$$b_{OO} I_{On} + b_{OC} I_{Cn} = 0, \quad (\Delta \vec{V}_C, \vec{n}) = I_{Cn} (b_{CC} - b_{OC} b_{CO} / b_{OO}). \quad (4.116)$$

3. Вследствие положительной определенности правой части системы (4.115) имеем  $b_{OO} > 0$ ,  $b_{CC} > 0$ ,  $D = b_{CC} b_{OO} - b_{OC} b_{CO} > 0$ . Поэтому неравенства (4.81) будут выполнены в двух случаях: 1.  $b_{OC} > 0$  (точка  $O$  отрывается от опоры) и 2.  $b_{OC} \leq 0$  (контакт в точке  $O$  сохраняется).

Таким образом, в случае гладкой опоры задача об ударе имеет единственное решение.

В общем случае шероховатой опоры можно построить систему, аналогичную (4.114), выражая касательные составляющие ударных реакций через их нормальные составляющие при помощи законов трения. Рассмотрим, в частности, случай абсолютно шероховатой опоры, исключающей проскальзывание, считая, что начальная скорость точки  $C$  нормальна опоре.

1. Положим в (4.112)  $\vec{I}_O = \vec{0}$ , тогда выполняются равенства

$$\Delta \vec{V}_O = \mathbf{B}_{OC} \vec{I}_C, \quad \Delta \vec{V}_C = \mathbf{B}_{CC} \vec{I}_C. \quad (4.117)$$

Связь между компонентами импульса  $\vec{I}_C$  можно найти из условия отсутствия проскальзывания в точке  $C$ :  $\Delta \vec{V}_{Ct} = \vec{0}$  (заметим, что при

отрыве точки  $O$  от опоры равенство  $\Delta \vec{V}_{Ot} = \vec{0}$ ) может быть не выполнено. Умножая затем обе части первого из уравнений (4.117) скалярно на вектор  $\vec{n}$ , получим соотношение вида

$$(\Delta \vec{V}_O, \vec{n}) = \beta I_{Cn} . \quad (4.118)$$

2. Если контакт в точке  $O$  сохраняется, то ввиду отсутствия проскальзывания  $\Delta \vec{V}_O = \vec{0}$ . Уравнения (4.112) примут вид

$$\vec{I}_O = -\mathbf{B}_{OO}^{-1} \mathbf{B}_{OC} \vec{I}_C, \quad \Delta \vec{V}_C = (-\mathbf{B}_{CO} \mathbf{B}_{OO}^{-1} \mathbf{B}_{OC} + \mathbf{B}_{CC}) \vec{I}_C . \quad (4.119)$$

Выражая, как и в предыдущем пункте, компоненту  $\vec{I}_{Ct}$  через  $I_{Cn}$  из условия  $\Delta \vec{V}_{Ct} = \vec{0}$ , преобразуем второе соотношение (4.119) к виду

$$I_{On} = \gamma I_{Cn} . \quad (4.120)$$

3. Проверка условий (4.81) сводится к определению знаков коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$ . Задача имеет единственное решение лишь в том случае, когда одно из этих чисел положительно, а другое — нет. В случае  $\beta > 0, \gamma > 0$  годятся оба решения 1 и 2, если же  $\beta \leq 0, \gamma \leq 0$ , то задача не имеет ни одного решения.

**Пример.** Рассмотрим движение двузвенной системы, изображенной на рис. 4.11,в. В этом случае система (4.112) выглядит так:

$$M \Delta V_{Cn} = \alpha_1^* I_{Cn} + \alpha_3^* I_{On} + \alpha_2 I_{Ct} + \alpha_4 I_{Ot} , \quad (4.121)$$

$$M \Delta V_{On} = \alpha_3^* I_{Cn} + \alpha_1^* I_{On} - \alpha_4 I_{Ct} - \alpha_2 I_{Ot} ,$$

$$M \Delta V_{Ct} = \alpha_2 I_{Cn} - \alpha_4 I_{On} + \alpha_1 I_{Ct} + \alpha_3 I_{Ot} ,$$

$$M \Delta V_{Ot} = \alpha_4 I_{Cn} - \alpha_2 I_{On} + \alpha_3 I_{Ct} + \alpha_1 I_{Ot} ,$$

$$\alpha_1 = \rho^2 (\rho^4 + 6\rho^2 h^2 + h^4 + 5a^2 h^2 + \rho^2 a^2) / [2(\rho^2 + h^2)(\rho^2 + a^2)] ,$$

$$\alpha_1^* = \rho^2 (\rho^4 + 6\rho^2 a^2 + a^4 + 5a^2 h^2 + \rho^2 h^2) / [2(\rho^2 + h^2)(\rho^2 + a^2)] ,$$

$$\alpha_2 = ah\rho^2 (h^2 + a^2 + 2\rho^2) / [(\rho^2 + h^2)(\rho^2 + a^2)] ,$$

$$\alpha_3 = \rho^2 (\rho^4 - 2\rho^2 h^2 + h^4 - 3a^2 h^2 + \rho^2 a^2) / [2(\rho^2 + h^2)(\rho^2 + a^2)] ,$$

$$\alpha_3^* = \rho^2 (\rho^4 - 2\rho^2 a^2 + a^4 - 3a^2 h^2 + \rho^2 h^2) / [2(\rho^2 + h^2)(\rho^2 + a^2)] ,$$

$$\alpha_4 = ah\rho^2 (h^2 - a^2) / [(\rho^2 + h^2)(\rho^2 + a^2)] .$$

В частности, если стержни однородны, то  $\rho^2 = (a^2 + h^2)/3$ .

В случае отсутствия проскальзывания в точке  $C$  с отрывом точки  $O$  имеем  $I_{Ot} = I_{On} = 0, \Delta V_{Ct} = 0, \Delta V_{On} = 0$ , откуда

$$I_{Ct} = -\alpha_2/\alpha_1 I_{Cn}, \quad \Delta V_{On} = \beta I_{Cn}, \quad \beta = \alpha_3^* + \alpha_2 \alpha_4 / \alpha_1 . \quad (4.122)$$

Если обе точки остаются в контакте с опорой (проскальзывание отсутствует), то  $\Delta V_{Ct} = \Delta V_{Ot} = \Delta V_{On} = 0$ , откуда получаем в формуле (4.120)

$$\gamma = \alpha_3^* (\alpha_3^2 - \alpha_1^2) + \alpha_3 (\alpha_2^2 + \alpha_4^2) - 2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 . \quad (4.123)$$

В результате расчетов коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$ , проведенных для различных значений отношения  $h/a$  оказалось, что для значений  $h/a \in (0, 0.19)$  оба коэффициента  $\beta$  и  $\gamma$  положительны, т.е. задача имеет два решения. В интервале  $h/a \in (0.19, 1.41)$  имеем  $\beta < 0, \gamma > 0$  (точка  $O$  не отрывается от опоры). Для значений  $h/a \in (1.41, 2)$  выполнены неравенства  $\beta < 0, \gamma < 0$ , т.е. задача не имеет решения. Наконец, для  $h/a > 2$  величина  $\beta$  положительна, а  $\gamma$  отрицательна (точка  $O$  отрывается от опоры).

При наличии трения скольжения компоненты ударной реакции связаны соотношениями

$$F_{Ot} = \pm \mu F_{On}, \quad F_{Ct} = \pm \mu F_{Cn}, \quad (4.124)$$

где знак "минус" соответствует направлению проскальзывания от точки  $O$  к точке  $C$ , "плюс" — противоположному направлению. Подставляя соотношения (4.124) в (4.121), получим систему

$$\begin{aligned} M\dot{V}_{Cn} &= (\alpha_1^* \pm \mu\alpha_2)F_{Cn} + (\alpha_3^* \pm \mu\alpha_4)F_{On}, \\ M\dot{V}_{On} &= (\alpha_3^* \mp \mu\alpha_4)F_{Cn} + (\alpha_1^* \mp \mu\alpha_2)F_{On}, \\ M\dot{V}_{Ct} &= (\alpha_2 \pm \mu\alpha_1)F_{Cn} - (\alpha_4 \mp \mu\alpha_3)F_{On}, \\ M\dot{V}_{Ot} &= (\alpha_4 \pm \mu\alpha_3)F_{Cn} - (\alpha_2 \mp \mu\alpha_1)F_{On}, \end{aligned} \quad (4.125)$$

в которой направления скольжения в точках  $O$  и  $C$  независимы. Всего, таким образом, имеется четыре типа скольжения. Для реализации каждого из них необходимо выполнение неравенств (4.81), а также соответствие знаков, выбранных в формулах (4.124), направлениям скольжения точек в уравнениях (4.125).

Возможны и более сложные случаи, когда одна из точек скользит при ударе, а другая — нет. Исследование проводится по обычной схеме с учетом всех возможностей. Ограничимся, как и выше, частным случаем, когда начальная скорость точки  $C$  нормальна опоре.

1. Точка  $O$  отрывается от опоры, тогда  $\ddot{I}_O = \vec{0}$ , и система (4.121) примет вид

$$\begin{aligned} M\dot{V}_{Cn} &= \alpha_1^*F_{Cn} + \alpha_2F_{Ct}, \quad M\dot{V}_{On} = \alpha_3^*F_{Cn} - \alpha_4F_{Ct}, \\ M\dot{V}_{Ct} &= \alpha_2F_{Cn} + \alpha_1F_{Ct}, \quad M\dot{V}_{Ot} = \alpha_4F_{Cn} - \alpha_2F_{Ct}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Наличие скольжения и его направление можно сразу установить из анализа третьей формулы (4.126). Полагая  $F_{Ct}/F_{Cn} = -\alpha_2/\alpha_1$ , получим, что согласно закону сухого трения условие отсутствия скольжения имеет ввиду положительности параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  вид

$$\alpha_2 \leq \mu\alpha_1, \quad (4.127)$$

при этом коэффициент  $\beta$  рассчитывается аналогично (4.122). При нарушении неравенства (4.127) в точке  $C$  будет иметь место проскальзывание, направление которого — от точки  $O$  к точке  $C$ . В этом случае

$$I_{Ct} = -\mu I_{Cn}, \quad \beta = \alpha_3^* + \mu\alpha_4. \quad (4.128)$$

2. При сохранении контакта точки  $O$  с опорой возможно девять различных случаев: для каждой из точек  $O$  и  $C$  проскальзывание влево или вправо или отсутствие онного. В каждом из этих случаев необходимо провести расчеты системы (4.125).

3. Отбор решений, сопровождающихся отрывом точки  $O$ , сводится к проверке неравенства  $\beta > 0$ . Для двухточечного контакта эта процедура более сложна: помимо исследования знака величины  $\gamma$  она включает в себя проверку противоположности силы трения направлению скольжения.

Были проведены расчеты для некоторых значений коэффициента трения  $\mu$ . Если  $\mu = 0.1$ , то оказалось, что задача имеет единственное решение: для значений  $h/a \in (0, 0.37)$  это — отрыв точки  $O$  с проскальзыванием в точке  $C$ ; для  $h/a \in (0.37, 1.27)$  — скольжение точек  $O$  и  $C$  в разные стороны (друг от друга); для  $h/a \in (1.27, 1.37)$  — точка  $O$  застопорена,  $C$  — скользит вправо; для  $h/a \in (1.37, 2.5)$  обе точки скользят вправо; наконец, для значений  $h/a > 2.5$  точка  $O$  отрывается от опоры, а точка  $C$  скользит по ней вправо.

Также корректно решается задача об ударе двузвенника при значении  $\mu = 0.5$ . Здесь имеются интервалы отрыва точки  $O$  без скольжения в точке  $C$ :  $h/a < 0.2$  или  $h/a > 2$ ; отрыва этой точки со скольжением в  $C$ :  $h/a \in (0.1, 0.25)$ ; скольжения точек в разные стороны:  $h/a \in (0.25, 0.85)$ ; скольжения обеих точек вправо:  $h/a \in (1.2, 1.5)$ ; скольжения точки  $C$  вправо при неподвижной точке  $O$ :  $h/a \in (0.85, 1.2)$ ; а также скольжения точки  $O$  вправо при неподвижной точке  $C$ :  $h/a \in (1.5, 2)$ .

Для большого значения коэффициента трения  $\mu = 5$  обнаружены случаи неединственности решения. Так, для значений  $h/a \in (0, 0.18)$  или  $h/a > 2$  точка  $O$  отрывается от опоры, а точка  $C$  не скользит; на интервале  $h/a \in (0.13, 0.18)$  имеются сразу три решения: наряду с отрывом от опоры здесь возможно скольжение точки  $O$  влево по опоре при отсутствии проскальзывания в точке  $C$ , кроме того, для  $h/a \in (0.13, 1.38)$  имеется решение с двумя нескользящими точками контакта. Помимо этого, в интервале  $h/a \in (1.38, 2)$  точка  $C$  не скользит, а  $O$  — скользит вправо.

Таким образом, обсуждаемая задача о двуногой ходьбе многозвенного механизма может не иметь корректного решения в рамках аксиоматической модели стесненного удара. Данного недостаток можно устранить за счет использования дискретных моделей контактных деформаций.

Для рассмотренной выше двузвенной системы полная модель содержит в себе три деформируемых элемента, размещенных в точках контакта с опорой, а также в месте соединения ног. При ходьбе в фиксированной вертикальной плоскости такая система будет иметь шесть степеней свободы. При некоторых допущениях можно ограничиться двумя элементами  $\Xi_O$  и  $\Xi_C$ , считая шарнир идеальным. Такое упрощение оправдано, если жесткость контакта в опоре намного меньше

жесткости шарнира, например, если металлические ноги идут по земле, или они обуты резиновыми шинами. В этом случае число степеней свободы понижается до четырех. Соответствующие уравнения легко построить, используя систему (4.121):

$$\begin{aligned} -M\ddot{\epsilon}_{Cn} &= \alpha_1^* I_{Cn} + \alpha_3^* I_{On} + \alpha_2 I_{Ct} + \alpha_4 I_{Ot}, \\ -M\ddot{\epsilon}_{On} &= \alpha_3^* F_{Cn} + \alpha_1^* F_{On} - \alpha_4 F_{Ct} - \alpha_2 F_{Ot}, \\ -M\ddot{\epsilon}_{Ct} &= \alpha_2 F_{Cn} - \alpha_4 F_{On} + \alpha_1 F_{Ct} + \alpha_3 F_{Ot}, \\ -M\ddot{\epsilon}_{Ot} &= \alpha_4 F_{Cn} - \alpha_2 F_{On} + \alpha_3 F_{Ct} + \alpha_1 F_{Ot}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Зададим характеристики деформируемых элементов по аналогии с формулами (4.111):

$$\begin{aligned} F_{Cn} &= \frac{1}{2}c(\epsilon_{Cn} + |\epsilon_{Cn}|), & F_{Ct} &= \mu F_{Cn} \operatorname{sign} \dot{\epsilon}_{Ct}, \\ F_{On} &= \frac{1}{2}c(\epsilon_{On} + |\epsilon_{On}|), & F_{Ot} &= \mu F_{On} \operatorname{sign} \dot{\epsilon}_{Ot}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Система (4.129), (4.130) имеет единственное решение для любых начальных условий, однако построить его можно лишь численно. Это решение будет совпадать с "аксиоматическим" решением лишь в случае, когда  $\vec{I}_O = \vec{0}$ , иначе эти два решения существенно различны: в модели (4.129), (4.130) точка  $O$ , как правило, отрывается от опоры. Как показывают расчеты, в случаях неединственности решения, отмеченных выше при  $\mu = 5$ , дискретная модель предсказывает результат  $\vec{I}_O = \vec{0}$ .

**Выводы.** Задачи, рассмотренные в данном параграфе, связаны с анализом стесненного удара при наличии двух однотипных точек контакта. Традиционный метод решения, основанный на принятии аксиомы (4.82), можно охарактеризовать как физически необоснованный, так как эта аксиома как раз выражает неравноправие точек контакта. Помимо этого, при таком подходе задача может оказаться некорректной и с математической точки зрения.

В противоположность аксиоматическому методу, дискретные модели удара при наличии дополнительной точки контакта демонстрируют свою реалистичность и практическую ценность.

# Глава 5. СОУДАРЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

## 5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЗОР МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ

**Краткая история задачи о кратном ударе.** При движении твердых тел возможна такая ситуация, когда одновременно сталкиваются три или более из них. На первый взгляд, такое событие крайне маловероятно, поэтому принято считать, что изучение кратных ударов не имеет значительной практической ценности. При более пристальном внимании к задаче выясняется, что явление кратного удара весьма распространено: к нему относится, в частности, примеры, рассмотренные в §4.3 (случай свободного опирания), начальная разбивка шаров или карамболь в биллиарде, забивание гвоздя в стену или сваи в землю и т.д. Можно сделать вывод, что проблема заслуживает серьезного исследования.

Первые решения задачи о соударении нескольких тел были получены еще в 18-м веке. Иоганн Бернулли рассматривал упругий удар движущегося шара по системе одинаковых неподвижных шаров, расположенных симметрично по отношению к первому телу [Бернулли, 1937]. Полученные результаты он применил к исследованию законов сопротивления при движении твердого тела в однородной среде. Известный шотландский математик, последователь Ньютона К.Маклорен исследовал [McLaurin, 1742] более общую задачу об упругом, неупругом, или пластическом ударе нескольких шаров, используя для построения решения геометрический метод, по существу эквивалентный применению ньютоновских коэффициентов восстановления. В классификации, принятой в данной книге, методы Бернулли и Маклорена можно отнести к аксиоматическим.

В противоположность упомянутым работам, Ж.Даламбер использовал дискретную модель кратного удара: он мысленно разместил невесомые пружинки в места контактов [Даламбер, 1950]. Вывод был довольно неожиданным: получаемый при таком подходе результат не совпадает с суммой ударов, вычисленных для каждой пары по отдельности.

К сожалению, выводы Даламбера не нашли должного признания, и по сей день задачи о кратном ударе традиционно решаются на основе тех или иных нефизических аксиом. Типичные подходы и их недостатки обсуждаются ниже. Основные результаты данной главы опубликованы в работах автора [Иванов, 1987, 1995, б].

**Метод независимого восстановления.** Данный метод решения задач о соударении нескольких твердых тел восходит к Маклорену [McLaurin, 1742] и остается наиболее популярным по сей день. Суть подхода такова: при одновременном соударении нескольких тел

каждая пара из них, имеющая общую точку контакта, рассматривается по отдельности, при этом ударный импульс вычисляется по тем же правилам, как если бы другие тела отсутствовали. В частности, если поверхности соударяемых тел абсолютно гладкие, то удар вполне характеризуется коэффициентом восстановления нормальной составляющей относительной скорости (см. §3.1):

$$e = -(\vec{V}_C^+, \vec{N}_C) / (\vec{V}_C^-, \vec{N}_C), \quad e \in [0, 1]. \quad (5.1)$$

Исходя из граничного условия (5.1), можно определить импульс в данной ударной паре, а затем и во всех остальных парах соударяющихся тел. Результат определяется простым сложением ударных импульсов и моментов.

**Пример.** [Киргетов, 1960, Синицын, 1981]. Пусть мяч движется внутри двугранного угла величины  $2\alpha$ , образованного гладкими плоскостями, так что его центр остается в биссекторной плоскости, и попадает в его вершину (рис. 5.1). Рассчитаем отскок методом независимого восстановления, считая коэффициенты восстановления при ударе мяча о каждую из граней равными  $e_1$  и  $e_2$ .

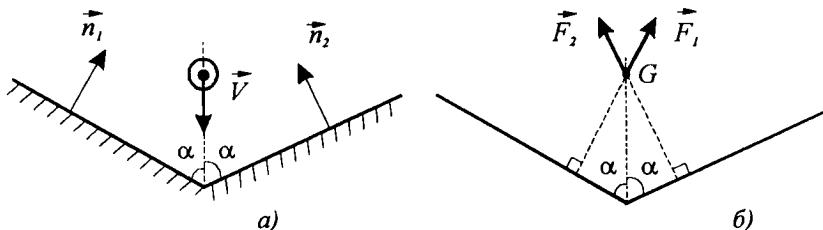


Рис. 5.1. Удар шара о двугранный угол

Ударная реакция первой грани направлена по нормали  $\vec{n}_1$ , из граничного условия (5.1) находим

$$\vec{I}_1 = (1 + e_1)V \sin \alpha \vec{n}_1, \quad (5.2)$$

где  $V$  — модуль вектора начальной скорости  $\vec{V}^-$ .

Аналогично можно найти реакцию второй грани, а затем и суммарный ударный импульс:

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = (1 + e_1)V \sin \alpha \vec{n}_1 + (1 + e_2)V \sin \alpha \vec{n}_2. \quad (5.3)$$

В частности, если коэффициенты восстановления равны, то шар должен отскочить в направлении, противоположном исходному.

Реалистичность вышеприведенного решения будет обсуждена ниже, пока же рассмотрим другой пример, в котором несостоительность метода независимого восстановления проявляется со всей очевидностью.

**Пример (разбивка "пирамиды").** Начальный удар в биллиардной игре производится битком по системе пятнадцати неподвижных шаров, каждый из которых соприкасается с несколькими соседями. При сильном ударе шары раскатятся по всему столу. Можно сделать вывод, что для каждой пары первоначально покоящихся шаров коэффициент восстановления бесконечно велик! Аналогичный эксперимент, но с более простым реквизитом, можно провести в домашних условиях, имея несколько одинаковых монет на гладком столе.

Таким образом, использование независимых коэффициентов восстановления непримлемо для решения данной задачи. Соответственно следует скептически относиться к результатам, полученным данным методом, и в тех случаях, когда они выглядят правдоподобно (см. предыдущий пример).

**Метод последовательных "парных" соударений.** Явные противоречия метода независимого восстановления свидетельствуют о необходимости его исправления. Одной из модификаций является метод последовательных соударений. Он также связан с расчетом "парных" ударов, однако предполагается, что они следуют друг за другом с малыми интервалами, а не строго одновременны. Таким образом, надо сначала установить порядок, в котором происходят парные соударения, а затем уже производить расчеты, принимая конечные значения скоростей при каждом ударе за начальные условия для последующего [Нагаев, 1967].

Такой подход обладает определенными достоинствами в тех случаях, когда можно однозначно установить порядок парных ударов, однако в общем случае он приводит к неоднозначному решению.

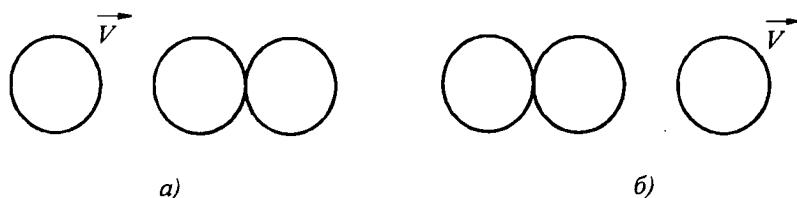


Рис. 5.2. Кратный удар в системе одинаковых шаров

**Примеры.** 1. Положим рядом две одинаковые монеты и направим третью такую же монету вдоль линии, соединяющей их центры

(рис. 5.2,а). Будем считать удары абсолютно упругими и пренебречь трением о поверхность стола. Тогда парное соударение сводится к обмену скоростями между участвующими в нем монетами. Поэтому при ударе движущейся монеты по центральной она передаст ей свою скорость, а сама остановится. Затем центральная монета передает скорость третьей, а сама остается неподвижной. В результате будем иметь две неподвижные соприкасающиеся монеты и третью, удаляющуюся от них (рис. 5.2,б). Несложный эксперимент показывает, что данный вывод весьма близок к реальности.

2. Попытка применить аналогичный подход к задаче об ударе мяча о двугранный угол (рис. 5.1) оказывается не столь удачной. Допустим, что вначале мяч ударяется о первую грань и обозначим  $\vec{V}^*$  его скорость после этого удара, тогда вследствие (5.2)

$$\vec{V}^* = \vec{V}^- + \vec{n}_1(1 + e_1)V \sin \alpha. \quad (5.4)$$

После отскока от первой грани мяч ударится о вторую грань при условии, что угол между векторами  $\vec{V}^*$  и  $\vec{n}_2$  тупой, то есть

$$(\vec{V}^*, \vec{n}_2) = -[1 + (1 + e_1) \cos 2\alpha]V \sin \alpha < 0. \quad (5.5)$$

Очевидно, что неравенство (5.5) всегда выполнено, если  $\alpha < \pi/3$ , а для больших значений угла  $\alpha$  его справедливость зависит от величины коэффициента  $e_1$ . В частности, если  $e_1 = 1$  (абсолютно упругий удар), то для всех  $\alpha \geq \pi/3$  удар о вторую грань не состоится, а при  $e_1 \rightarrow 0$  критическое значение угла между гранями близко к  $\pi$ .

Если неравенство (5.5) выполнено, то удар о вторую грань описывается по аналогии с (5.2) формулой

$$\vec{I}_2 = -M(1 + e_2)(\vec{V}^*, \vec{n}_2)\vec{n}_2. \quad (5.6)$$

Скорость шара после двух ударов имеет вид

$$\vec{V}^+ = \vec{V}^- + (1 + e_1)V\vec{n}_1 \sin \alpha + (1 + e_2)V\vec{n}_2 \sin \alpha [1 + (1 + e_1) \cos 2\alpha]. \quad (5.7)$$

Совершенно равноправен с рассмотренным и другой сценарий: сначала мяч ударяется о вторую грань, а затем — о первую. Аналогичные вычисления приводят в этом случае к такому финальному значению скорости:

$$\vec{V}^+ = \vec{V}^- + (1 + e_2)V\vec{n}_2 \sin \alpha + (1 + e_1)V\vec{n}_1 \sin \alpha [1 + (1 + e_2) \cos 2\alpha]. \quad (5.8)$$

Сравнение правых частей в формулах (5.7) и (5.8) показывает, что они совпадают в единственном случае, когда угол между гранями прямой.

Можно сделать вывод, что обсуждаемый метод не позволяет в общем случае найти однозначное решение задачи о кратном ударе.

**Замечания.** 1. Если  $\cos 2\alpha = 0$ , то решение, полученное методом последовательных соударений, совпадает с решением (5.3), полученным методом независимого восстановления.

2. Если после отскока от первой, а затем второй грани выполнено неравенство  $(\vec{V}^+, \vec{n}_1) < 0$ , то происходит еще один удар о первую грань и т.д. Последовательность повторных "парных" соударений может оказаться весьма длинной (теоретически даже бесконечной).

**Метод "вдавливания".** Данный метод, восходящий к Даламберу [Даламбер, 1950], связан с построением дискретной модели кратного удара. Размещая деформируемые элементы в точки ударных контактов, мы сводим задачу об ударе к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. По сути, мы уже встречались с применением этого метода в §4.3.

**Примеры.** 1. Вновь обратимся к задаче о коллинеарном соударении трех шаров (рис. 5.2,а). Введем на прямой, содержащей их центры, систему координат и обозначим  $x_j$  — координаты центров,  $R_j$  — радиусы ( $j = 1, 2, 3$ ). Если бы шары были абсолютно твердыми, то при кратном ударе выполнялись бы равенства

$$x_2 - x_1 = R_1 + R_2, \quad x_3 - x_2 = R_2 + R_3.$$

Поэтому нормальные деформации следует определить формулами

$$\epsilon_1 = R_1 + R_2 - x_2 + x_1, \quad \epsilon_2 = R_2 + R_3 - x_3 + x_2. \quad (5.9)$$

Уравнения движения системы под действием ударных сил имеют вид

$$M_1 \ddot{\epsilon}_1 = -F_1, \quad M_2 \ddot{\epsilon}_2 = F_1 - F_2, \quad M_3 \ddot{\epsilon}_3 = F_2, \quad (5.10)$$

$$F_1 = F_1(\epsilon_1, \dot{\epsilon}_1), \quad F_2 = F_2(\epsilon_2, \dot{\epsilon}_2).$$

где вследствие одностороннего характера контакта шаров каждая из реакций равна нулю для отрицательных значений соответствующей деформации.

Дифференцируя равенства (5.9), получим при учете соотношений (5.10) уравнения метода вдавливания в такой форме:

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon}_1 &= M_2^{-1} F_2(\epsilon_2, \dot{\epsilon}_2) - (M_1^{-1} + M_2^{-1}) F_1(\epsilon_1, \dot{\epsilon}_1), \\ \ddot{\epsilon}_2 &= M_2^{-1} F_1(\epsilon_1, \dot{\epsilon}_1) - (M_2^{-1} + M_3^{-1}) F_2(\epsilon_2, \dot{\epsilon}_2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Решение системы (5.11) должно удовлетворять начальным условиям  $\epsilon_1(t_0) = \epsilon_2(t_0) = 0, \dot{\epsilon}_1(t_0) = V, \dot{\epsilon}_2(t_0) = 0$ . Признаком окончания удара являются соотношения

$$\epsilon_{1,2}(t_k) \leq 0, \quad \dot{\epsilon}_{1,2}(t_k) \leq 0. \quad (5.12)$$

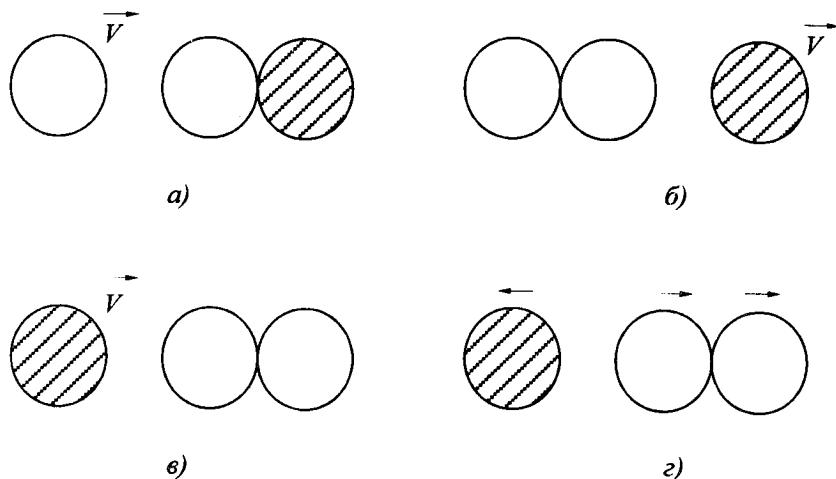


Рис. 5.3. Кратный удар в системе шаров разной жесткости

В частности, пусть шары идентичны, тогда  $M_1 = M_2 = M_3$ , а функции  $F_1$  и  $F_2$  выражаются в соответствии с контактной теорией Герца формулами  $F_1(x) = F_2(x) = Kx^{1.5}$ . Численное интегрирование системы (5.11) приводит к следующему результату:

$$\dot{x}_1^+ = -0.071V, \quad \dot{x}_2^+ = 0.076V, \quad \dot{x}_3^+ = 0.995V. \quad (5.13)$$

Заметим, что в данном примере результаты оказались близкими к тем, что были получены ранее методом последовательных соударений. И те, и другие следует признать в равной мере реалистичными, так как в обоих случаях присутствуют погрешности, связанные с отсутствием учета диссипации.

2. Заменим теперь один из шаров на мяч той же массы, но гораздо менее жесткий. Можно взять, к примеру, два биллиардных шара и резиновый мячик или две монеты и жесткий ластик. Простой эксперимент показывает, что результат будет сильно зависеть от порядка, в котором располагаются соударямыми тела до удара. В случае, когда менее жесткий шар расположен противоположно битку, он отскочит от двух первых шаров аналогично случаю трех одинаковых тел (рис. 5.3, а,б). Если же использовать резиновый шар в качестве битка, то оба жестких шара придут в движение, а первый шар будет двигаться в направлении, противоположном исходному. Если отношение жесткостей достаточно мало, то два жестких шара ведут себя как одно твердое тело (рис. 5.3, в,г).

Подобный результат можно получить из анализа системы (5.11). Если жесткость контакта первого и второго шаров намного больше, чем для второго и третьего, тогда  $F_1(x) \gg F_2(x)$ . Промежуток удара распадается на две различные фазы: в первой из них  $\epsilon_1 > 0$ , при этом величина  $F_2$  пренебрежимо мала, и можно считать, что происходит соударение двух тел. Во второй фазе  $\epsilon_1 < 0$ , и наличие первого шара не сказывается на ударе второго шара о третий.

Поменяем первый и третий шары местами, тогда  $F_1(x) \ll F_2(x)$ . В данном случае величина  $\epsilon_2$  остается на протяжении всего удара очень близкой к нулю, т.е. второй и третий шар ведут себя как одно твердое тело.

Заметим, что решение по методу последовательных соударений вовсе не зависит от жесткостей шаров.

3. В задаче об ударе мяча о двугранный угол деформации  $\epsilon_1, \epsilon_2$  определяются как разности между радиусом и расстоянием от центра мяча до соответствующей грани. Ударные реакции направлены по нормалям к соответствующим плоскостям и образуют угол величины  $\pi - 2\alpha$  (рис. 5.1,б). Составим уравнения движения в проекции на векторы  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  из условия баланса активных сил и сил инерции:

$$M\ddot{\epsilon}_1 = -F_1 + F_2 \cos 2\alpha, \quad M\ddot{\epsilon}_2 = F_1 \cos 2\alpha - F_2. \quad (5.14)$$

Сравнивая две системы: (5.11) и (5.14), можно отметить их сходство. Если в уравнениях (5.11)  $M_1 = M_3$ , то они эквивалентны (5.14), где

$$\cos 2\alpha = M_1/(M_1 + M_2). \quad (5.15)$$

В частности, соударению трех одинаковых шаров соответствует удар мяча об угол  $\pi/3$ , причем отношение начальных скоростей сближения шаров определяет направление движения мяча до удара. Так, удару шара по системе двух неподвижных шаров отвечает движение мяча параллельно одной из граней угла (так что он касается этой грани), а движение мяча в биссекторной плоскости соответствует одновременному удару с разных сторон шарами, движущимися с равными скоростями.

Рассмотрим следующий численный пример: положим  $\alpha = 40^\circ$ , а мяч попадает в вершину угла так, что вектор его скорости образует угол  $20^\circ$  с первой гранью. Это означает, что начальные условия связаны отношением  $\dot{\epsilon}_1(t_0)/\dot{\epsilon}_2(t_0) = \sin 20^\circ / \sin 60^\circ \approx 0.40$ . Характеристики деформируемых элементов зададим линейными и квазистатическими:

$$F_1 = c\epsilon_1, \quad F_2 = c\epsilon_2. \quad (5.16)$$

Как показывают расчеты, мяч отскочит под углом  $16^\circ$  к первой грани.

Существование и единственность решения систем (5.11) или (5.15) для любых начальных условий следует из общей теории обыкновенных

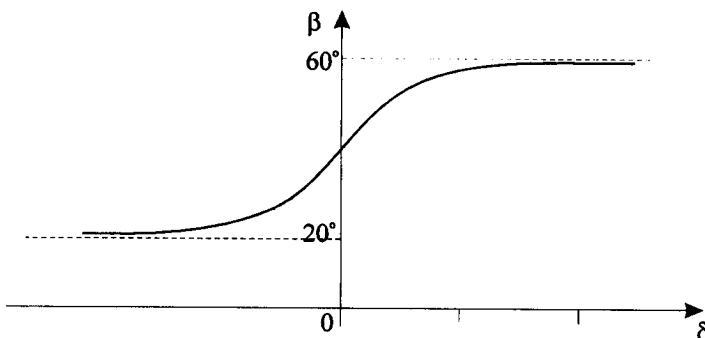


Рис. 5.4. Зависимость угла отскока мяча от начального смещения

дифференциальных уравнений. Отсюда, однако, не следует корректность задачи о кратном ударе, поскольку данное свойство подразумевает также непрерывную зависимость от параметров, включая начальные условия.

Особенность этих уравнений состоит в различии диапазонов изменения переменных: скорости  $\dot{\epsilon}_{1,2}$  принимают конечные значения, координаты  $\epsilon_{1,2}$  и промежуток интегрирования  $\tau$  исчезающе малы, а ускорения  $\ddot{\epsilon}_{1,2}$  очень велики. По сути дела, эта система неявно содержит большой параметр  $\Upsilon$ , равный отношению принятого за единицу промежутка времени (обычно одна секунда) к продолжительности удара  $\tau$ .

Для удобства анализа произведем масштабирование единиц длины и времени, полагая  $\epsilon = \epsilon^*/\Upsilon$ ,  $t - t_0 = t^*/\Upsilon$ . Уравнения (5.11) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\epsilon_1^{**} &= M_2^{-1} F_2^*(\epsilon_2^*, \epsilon_2^{**}) - (M_1^{-1} + M_2^{-1}) F_1^*(\epsilon_1^*, \epsilon_1^{**}), \\ \epsilon_2^{**} &= M_2^{-1} F_1^*(\epsilon_1^*, \epsilon_1^{**}) - (M_2^{-1} + M_3^{-1}) F_2^*(\epsilon_2^*, \epsilon_2^{**}), \\ F^*(\epsilon^*, \epsilon^{**}) &= F(\tau\epsilon^*, \epsilon^{**})/\Upsilon.\end{aligned}\quad (5.17)$$

где штрихом обозначается дифференцирование по переменной  $t^*$ .

Система (5.17) имеет регулярную форму, и ее решения обладают свойствами существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий. Это означает, в частности, что при малых отклонениях начальных значений переменных  $\epsilon^*$  от нуля конечные значения производных  $\epsilon^{**}$  получат приращения того же порядка малости. В применении к исходным уравнениям (5.11) это означает, что изменение начальных значений координат на величину  $\delta$  может привести к изменениям скоростей в конце удара на величину порядка  $\delta\Upsilon$ . В пределе при  $\tau \rightarrow 0$  это свидетельствует о разрывной зависимости решения от начальных условий, т.е. о некорректности задачи о кратном ударе.

**Пример.** Сделаем расчеты в системе (5.14), (5.16), полагая  $M = 1$ ,  $c = 1$ ,  $\dot{\epsilon}_1(t_0) = \dot{\epsilon}_2(t_0) = 1$ ,  $\alpha = 40^\circ$ . При таких значениях параметров

величина  $\tau$  лежит в пределах от 3 до 10, а максимальная деформация близка к единице. Будем считать, что до удара скосить мяча строго параллельна биссекторной плоскости, но его центр смещен относительно этой плоскости на величину  $\delta$ . Результаты изображены на рис. 5.4, в виде зависимости угла отскока  $\varphi$  (отсчитываемого от первой грани) от  $\delta$  (при значениях  $\delta > 0$  шар смещен в сторону второй грани). Данная функция выглядит регулярной, что обусловлено начальным выбором параметра  $c$  (жесткость контакта). С ростом этой константы график функции  $\varphi(\delta)$  сжимается вдоль оси абсцисс, а в пределе при  $c \rightarrow \infty$  он переходит в разрывную кусочно-постоянную функцию. Ввиду отсутствия диссипации модуль скорости отскока равен модулю начальной скорости, поэтому по углу  $\varphi$  можно однозначно определить значения ударных импульсов.

Интересно отметить, что значение  $\varphi(0)$  соответствует решению, полученному методом независимого восстановления, а значения  $\varphi(-\infty)$  и  $\varphi(+\infty)$  — двум вариантам решения по методу последовательных ударений. При этом предельные значения практически достигаются (с точностью до одного процента) уже при величинах начальных отклонений  $\delta$  равных единице, что соответствует в реальном масштабе максимальным контактным деформациям при ударе.

Можно сделать вывод: характерный для классической теории удара предельный переход  $\tau \rightarrow 0$  приводит, в общем случае, к некорректности задачи о кратном ударе при использовании методов последовательных соударения или "вдавливания". Лишь в некоторых частных случаях имеет место непрерывная зависимость решения от начальных условий. Например, если в системе (5.14)  $\cos 2\alpha = 0$ , т.е. угол между гранями — прямой, то она распадается на два независимых уравнения. В этом случае два варианта удара в методе последовательных соударений приводят к тому же результату, что и метод независимого восстановления. Этот же результат получается и при интегрировании уравнений (5.14), если деформируемые элементы имеют линейные характеристики, согласующиеся с заданными коэффициентами восстановления (см. §2.3).

Таким образом, некорректность задачи о кратном ударе связана не с использованием того или иного метода, а с присущей системам с несколькими ударными парами чувствительности к начальным условиям, когда их изменение на величину порядка ударных деформаций приводит к значительным изменениям ударных импульсов.

**Метод статистического ансамбля.** Данный метод обычно применяется в задачах статистической механики при исследовании систем, состоящих из очень большого числа однотипных частиц. Ввиду невозможности точного определения положений и скоростей всех частиц в начальный момент времени рассматривают статистический ансамбль, т.е. некоторое бесконечное множество систем, различающихся лишь начальными условиями. Затем вычисляют не конкретные траектории отдельных систем, а некоторые их характеристики, усред-

ненные по ансамблю, например, температура, давление и т.п.

В обсуждаемой проблеме кратного удара целесообразность введения в рассмотрения статистических ансамблей обусловлена не большим числом степеней свободы, а отмеченной выше чувствительностью результата к начальным условиям, сочетающейся с невозможностью определить эти условия с достаточно высокой точностью, исключающей неопределенность. Искомой величиной здесь являются, как правило, не средние значения координат и скоростей, а теоретико-вероятностные распределения этих значений. Здесь уместна аналогия с падением монеты в вертикальной плоскости: в идеале после нескольких подскоков монета должна остаться стоять на ребре. На практике, однако, такого результата достичь невозможно ввиду наличия неподдающихся учету и исправлению погрешностей. Поэтому считают, что задача о падении монеты имеет два равновероятных решения: "орел" или "решка". В следующем примере аналогичный вывод делается уже непосредственно в задаче о кратном ударе.

**Пример.** В задаче об упругом ударе мяча о двугранный угол, рассматривавшейся в предыдущем разделе, отклонения от биссектрисы приводят к результатам, представленным на рис. 5.4. Если считать, что максимальная контактная деформация при ударе намного меньше, чем абсолютная погрешность в задании начальных условий, то можно сделать вывод: задача имеет два равновероятных решения. В одном из них мяч отскакивает под углом  $20^\circ$  к первой грани, в другом — под тем же углом, но к второй грани. Промежуточные значения угла отскока также возможны, но маловероятны.

**Выводы.** Задача об одновременном столкновении трех или более твердых тел отличается от задачи об ударе двух тел тем, что ее корректное решение в общем случае в принципе невозможно. Причина кроется в том, что результат кратного удара может существенно измениться при изменении начальных условий на величину порядка контактных деформаций. На практике, системы с кратными соударениями следует рассматривать как стохастические, подобно брошенной монете или игральной кости: возможно несколько решений, реализующихся с той или иной вероятностью.

Для учета такой неоднозначности удобно использовать метод статистического ансамбля, допуская неопределенность в начальных условиях удара. Расчет различных вариантов можно провести методом последовательных соударений или методом "вдавливания". Традиционный метод независимого восстановления в общем случае нереалистичен: построенное на его основе решение соответствует отсутствию погрешностей, т.е. имеет очень малую вероятность.

## 5.2. СОУДАРЕНИЕ ТРЕХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

**Коллинеарный удар трех шаров.** Рассмотрим более подробно задачу об одновременном коллинеарном соударении трех шаров с массами  $M_1, M_2, M_3$ , являющуюся простейшей в проблеме кратного удара. Простота постановки этой задачи делает экспериментальную проверку различных гипотез общедоступной: достаточно иметь несколько монет на гладкой поверхности стола.

Начальные скорости тел удовлетворяют двойному неравенству

$$V_1^- \geq V_2^- \geq V_3^-, \quad (5.18)$$

причем знак равенства означает, что два шара до удара касаются друг друга в течение некоторого интервала времени (в случае двух знаков равенства удара нет). Данный случай был рассмотрен выше, его отличает однозначность решения задачи об ударе. Ниже будем считать, что оба неравенства (5.18) — строгие.

Следуя идее метода статистического ансамбля, будем варьировать начальные условия, при этом соударения будут не одновременными, а поочередными. В зависимости от того, с каким из двух других шаров вначале столкнется средний шар, возможно два сценария, вероятность каждого из которых близка к одной второй. Промежуточный случай, когда интервалы контакта обеих ударных пар перекрываются, маловероятен.

Вначале рассматриваем удар первого шара о второй, пренебрегая существованием третьего шара, и вычисляем скорости после такого "парного" соударения  $V_1^1, V_2^1, V_3^1$  при помощи коэффициента восстановления:

$$\begin{aligned} V_1^1 &= [V_1^-(M_1 - e_1 M_2) + V_2^- M_2(1 + e_1)]/(M_1 + M_2), \\ V_2^1 &= [V_2^-(M_2 - e_1 M_1) + V_1^- M_1(1 + e_1)]/(M_1 + M_2), \quad V_3^1 = V_3^-. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Затем рассчитываем скорости  $V_j^2 (j = 1, 2, 3)$  после удара второго шара о третий:

$$\begin{aligned} V_2^2 &= [V_2^1(M_2 - e_2 M_3) + V_3^1 M_3(1 + e_2)]/(M_2 + M_3), \\ V_3^2 &= [V_3^1(M_3 - e_2 M_2) + V_2^1 M_2(1 + e_2)]/(M_2 + M_3), \quad V_1^2 = V_1^-. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Общее число парных соударений зависит от коэффициентов восстановления и соотношений масс и может быть сколь угодно большим и даже теоретически бесконечным [Иванов, 1987]. Признаком окончания кратного удара является выполнение двойного неравенства  $V_1^k \leq V_2^k \leq V_3^k$ , справедливость которого можно проверить, вычисляя после каждого удара величину  $\beta_k = (V_2^k - V_1^k)/(V_3^k - V_2^k)$ . Очевидно, что парные соударения продолжаются, пока  $\beta_k < 0$ , и заканчиваются, если величина  $\beta_k$  становится положительной.

Изменение параметра  $\beta$  при ударе первого и второго шаров описывается формулой

$$\beta^+ = \varphi_1(\beta^-) = -e_1\beta^-/(1 + \theta_1\beta^-), \quad \theta_1 = M_1(1 + e_1)/(M_1 + M_2). \quad (5.21)$$

а при ударе второго и третьего шаров — формулой

$$\beta^+ = \varphi_2(\beta^-) = -(\beta^- + \theta_2)/e_2, \quad \theta_2 = M_3(1 + e_2)/(M_2 + M_3). \quad (5.22)$$

Пусть в начальный момент времени  $\beta = \beta^-$ . Первой из возможных последовательностей парных соударений соответствует цепочка

$$\beta_1 = \varphi_1(\beta^-), \quad \beta_2 = \varphi_2(\beta_1), \quad \beta_3 = \varphi_1(\beta_2), \dots \quad (5.23)$$

где число ударов  $k$  определяется из условий  $\beta_i < 0$  ( $i = 1 \div k-1$ ),  $\beta_k > 0$ .

Вторая последовательность описывается соотношениями

$$\beta_1 = \varphi_2(\beta^-), \quad \beta_2 = \varphi_1(\beta_1), \quad \beta_3 = \varphi_2(\beta_2), \dots \quad (5.24)$$

причем число ударов  $k'$  может быть отличным от  $k$ .

Как правило, формулы (5.23) и (5.24) приводят к различным результатам, что свидетельствует о стохастичности рассматриваемой системы. Возможны и некоторые исключения, когда результаты совпадают.

**Примеры.** 1. Пусть параметры системы и начальные условия таковы:

$$M_1 = M_3 = \frac{1}{3}M_2, \quad e_1 = e_2 = 1, \quad V_1^- = 1, \quad V_2^- = 0, \quad V_3^- = -1.$$

тогда  $\beta^- = (V_2^- - V_1^-)/(V_3^- - V_2^-) = 1$ . В первом варианте сначала соударяются первый и второй шары, в результате

$$V_1^1 = -0.5, \quad V_2^1 = 0.5, \quad V_3^1 = -1, \quad \beta_1 = -\frac{2}{3}.$$

После следующего затем удара второго шара о третий скорости принимают следующие значения:

$$V_1^2 = -0.5, \quad V_2^2 = -0.25, \quad V_3^2 = 1.25, \quad \beta_2 = \frac{1}{6}. \quad (5.25)$$

Поскольку  $\beta_2 > 0$ , на этом парные соударения прекращаются.

В втором варианте считают, что вначале соударяются второй и третий шары, в результате чего

$$V_1^1 = 1, \quad V_2^1 = -0.5, \quad V_3^1 = 0.5, \quad \beta_1 = -1.5.$$

а затем — первый и второй. В итоге

$$V_1 = -1.25, \quad V_2 = 0.25, \quad V_3 = 0.5, \quad \beta_2 = 6. \quad (5.26)$$

Заметим, что несмотря на симметрию данной системы по отношению к центральному (второму) шару, ни одно из построенных решений не симметрично.

**2.** Пусть  $M_1 = M_3, e_1 = e_2 = e$ . Тогда

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta = (1 + e)M_1/(M_1 + M_2).$$

Выясним, при каких условиях два варианта кратного удара приводят к одинаковым результатам. Для этого необходимо, чтобы конечные значения параметра  $\beta$  совпадали для любых начальных значений  $\beta^-$ .

Уравнение

$$\varphi_1 \circ \varphi_2(\beta^-) \equiv \varphi_2 \circ \varphi_1(\beta^-),$$

где функции  $\varphi_{1,2}$  определены в (5.21), (5.22), запишется в виде

$$\frac{e(\beta^- + \theta)}{e - \theta(\beta^- + \theta)} \equiv -\frac{\theta}{e} + \frac{\beta^-}{1 + \theta\beta^-}. \quad (5.27)$$

После приведения к общему знаменателю и упрощений тождество (5.27) будет выглядеть так:

$$(\beta^-)^2(e^2 + e - \theta^2) + \theta\beta^-(e^2 + e - \theta^2 + e - 1) + e^2 + e - \theta^2 \equiv 0. \quad (5.28)$$

Полагая все коэффициенты трехчлена (5.28) равными нулю, получим единственное решение  $e = 1, \theta = \sqrt{2}$ . При этом  $\varphi_1 \circ \varphi_2(\beta^-) < 0$  для всех  $\beta^- < 0$ , а  $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(\beta^-) > 0$ . Следовательно, кратный удар сводится к четырем парным соударениям.

Далее, аналогичные рассуждения показывают, что уравнение

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$$

имеет единственное решение  $\kappa = 1, \theta = \sqrt{3}$ , и удар сводится к трем парным соударениям. Аналогично можно составлять цепочки произвольной длины  $m$  ( $m = 5, 6, \dots$ ). Оказывается, что во всех случаях регулярность достигается лишь при условиях  $\kappa = 1, \theta = \theta_m = 2 \cos(\pi/m)$ . С динамической точки зрения, данная система оказывается эквивалентной абсолютно упругому удару частицы о плоский угол величины  $2\alpha = \arccos(\theta/2)$ , имеющему регулярный характер лишь в случаях  $2\alpha = \pi/m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) [Иванов, 1987, Козлов, Трещев, 1991].

В каждом из упомянутых случаев совпадения обоих вариантов удара решение задачи о кратном ударе имеет одинаковый вид

$$V_j^+ = -V_j^- + 2(M_1 V_1 + M_2 V_2 + M_3 V_3)/(M_1 + M_2 + M_3) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5.29)$$

Помимо этого, возможен еще случай квазипластического удара, при котором последовательность парных соударений теоретически бесконечна. Условие его реализации, полученное в [Иванов, 1987], выглядит так:

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} > \frac{2\sqrt{e}}{1+e}, \quad (5.30)$$

а результат имеет вид

$$V_1^+ = V_2^+ = V_3^+ = (M_1 V_1^- + M_2 V_2^- + M_3 V_3^-) / (M_1 + M_2 + M_3).$$

Помимо перечисленных случаев, возможно также совпадение двух сценариев кратного удара для отдельных значений параметра  $\beta^-$ , характеризующего начальные условия.

Подведем итог. Если постановка задачи о кратном ударе допускает погрешность в задании начальных условий, то результат надо определять методом статистического ансамбля, т.е. рассматривать различные варианты последовательных соударений. Как правило, в итоге задача имеет два различных равновероятных решения, но возможно и их совпадение при некоторых значениях параметров.

**Пространственное соударение трех шаров.** Рассмотрим теперь общий пространственный случай соударения трех шаров с гладкими поверхностями. Реакции  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$  представляют собой векторы, направленные вдоль прямых  $G_2G_1$  и  $G_2G_3$ , соединяющих центры шаров (рис. 5.5, а). Они не создают вращательных моментов, поэтому удар сводится к изменению скоростей  $\vec{V}_j (j = 1, 2, 3)$  центров шаров.

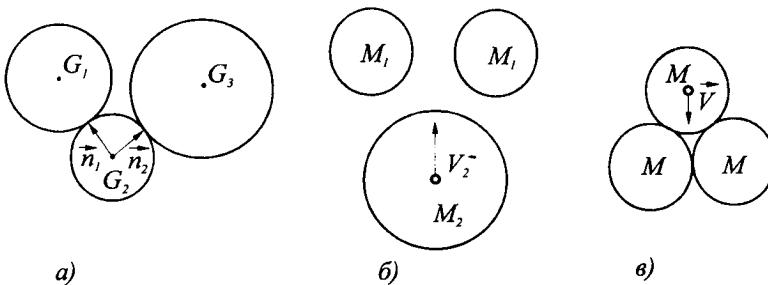


Рис. 5.5. Пространственное соударение трех шаров

Уравнения импульсивного движения имеют вид

$$M_1 \dot{\vec{V}}_1 = \vec{F}_1, \quad M_2 \dot{\vec{V}}_2 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2, \quad M_3 \dot{\vec{V}}_3 = \vec{F}_2, \quad (5.31)$$

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{n}_1, \quad \vec{F}_2 = F_2 \vec{n}_2, \quad \vec{n}_1 = \vec{G}_2 \vec{G}_1 / |G_1 G_2|, \quad \vec{n}_2 = \vec{G}_2 \vec{G}_3 / |G_3 G_2|.$$

Для составления уравнений дискретной модели (метод "вдавливания") определим контактные деформации по формулам

$$\epsilon_1 = R_1 + R_2 - |G_1 G_2|, \quad \epsilon_2 = R_2 + R_3 - |G_2 G_3|. \quad (5.32)$$

Дифференцируя равенства (5.32), получим

$$\dot{\epsilon}_1 = (\vec{V}_2 - \vec{V}_1, \vec{n}_1), \quad \dot{\epsilon}_2 = (\vec{V}_2 - \vec{V}_3, \vec{n}_2). \quad (5.33)$$

После повторного дифференцирования получаем при учете (5.31) уравнения удара в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon}_1 &= -M_2^{-1}(\vec{n}_1, \vec{n}_2)F_2(\epsilon_2, \dot{\epsilon}_2) - (M_1^{-1} + M_2^{-1})F_1(\epsilon_1, \dot{\epsilon}_1), \\ \ddot{\epsilon}_2 &= -M_2^{-1}(\vec{n}_1, \vec{n}_2)F_1(\epsilon_1, \dot{\epsilon}_1) - (M_2^{-1} + M_3^{-1})F_2(\epsilon_2, \dot{\epsilon}_2), \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\epsilon_1(t_0) = \epsilon_2(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_1(t_0) = \dot{\epsilon}_1^0, \quad \dot{\epsilon}_2(t_0) = \dot{\epsilon}_2^0.$$

В частности, для коллинеарного соударения  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ , и мы получаем формулы (5.11).

Уравнения (5.34) разделяются в случае, если векторы  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  ортогональны:

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0. \quad (5.35)$$

При этом кратный удар сводится к сумме независимых парных соударений, и решение задачи выглядит так

$$\begin{aligned} \vec{V}_1^+ &= \vec{V}_1^- + (1 + e_1)(\vec{V}_2^- - \vec{V}_1^-, \vec{n}_1)M_2(M_1 + M_2)^{-1}\vec{n}_1, \\ \vec{V}_2^+ &= \vec{V}_2^- + \theta_1(\vec{V}_1^- - \vec{V}_2^-, \vec{n}_1)\vec{n}_1 + \theta_2(\vec{V}_3^- - \vec{V}_2^-, \vec{n}_1)\vec{n}_2, \\ \vec{V}_3^+ &= \vec{V}_3^- + (1 + e_2)(\vec{V}_2^- - \vec{V}_3^-, \vec{n}_2)M_2(M_3 + M_2)^{-1}\vec{n}_2, \end{aligned} \quad (5.36)$$

причем параметры  $\theta_{1,2}$  определены в (5.21), (5.22).

Если условие (5.35) нарушено, то корректное решение системы (5.34), вообще говоря, невозможно. Случайные погрешности в задании начальных условий приведут к неодновременности ударного контакта. Результат может значительно меняться в зависимости от того, какая из ударных пар включается первой. Два равновероятных решения можно построить методом последовательных "парных" соударений.

Для некоторых исключительных случаев два варианта кратного удара приводят к одинаковому результату. Как и в задаче о коллинеарном ударе трех шаров, рассмотренной выше, здесь имеется аналогия с ударом мяча о двугранный угол величины  $2\alpha$ , которую можно рас считать по формуле [Иванов, 1995]

$$\cos 2\alpha = -(1 + M_2/M_1)^{-1/2}(1 + M_2/M_3)^{-1/2} \cos \angle G_1 G_2 G_3. \quad (5.37)$$

Если для некоторого целого числа  $m$  выполнено равенство  $2\alpha = \pi/m$ , а  $e_1 = e_2 = 1$ , то задача о кратном ударе имеет единственное решение.

**Пример.** (Задача И.Бернулли) Шар с массой  $M_2$  ударяет по двум покоящимся одинаковым и симметрично расположенным другим шарам (рис. 5.5, б); диссипацией энергии пренебрегаем. Можно получить решение этой задачи, если к законам сохранения энергии и количества движения добавить условие сохранения симметрии после удара [Бернулли, 1937]. Однако данный результат не будет, как показывают эксперименты с монетами, отражать поведение реальной системы. Если угол  $G_1G_2G_3$ , образуемый центрами в момент соударения, острый, то незаметная на глаз начальная асимметрия системы приводит к значительной разнице в послеударных скоростях первого и третьего шаров. Если  $M_2 < M_1$ , то кратный удар может свестись к обычному соударению движущегося шара с одним из двух неподвижных без контакта с другим неподвижным шаром, а в общем случае он представляет собой последовательность "парных" соударений, причем первенство в этой последовательности определяется случайными факторами. Длина последовательности зависит от угла  $2\alpha$ , который вследствие равенства  $M_1 = M_3$  вычисляется по формуле

$$\cos \beta = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} \cos \angle G_1G_2G_3.$$

Сохранение симметрии после удара, которое Бернулли рассматривал как постулат, в данной задаче имеет место лишь в случаях, когда угол  $2\alpha$  составляет целую часть от развернутого угла, т.е.

$$\cos \angle G_1G_2G_3 = -(1 + M_2/M_1) \cos \pi/k \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (5.38)$$

Критерий (5.38) выполнен вне зависимости от соотношения масс, если угол, образуемый центрами шаров, прямой ( $k = 2$ ). Если  $M_2 \geq M_1$ , то других решений нет, так как правая часть по абсолютной величине будет превосходить единицу. В случае  $M_2 < M_1$  уравнение (5.38) имеет несколько решений, количество которых возрастает с ростом отношения  $M_1/M_2$ .

Допустим, в частности, что все три шара идентичны, причем первый и третий до удара соприкасаются (фиг. 5.5, в). Тогда центры шаров в момент удара образуют (без учета случайных погрешностей) равносторонний треугольник. По формуле (5.37) получаем  $\cos \beta = -0,25$ , откуда  $\beta \approx 0,58\pi$ . Следовательно, условие (5.38) не выполнено, и система относится к стохастическому типу. Несложные расчеты показывают, что удар сначала по первому, а потом по третьему шару приводит к такому результату:

$$\vec{V}_1^+ = \frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{V}_2^-| \vec{n}_1, \quad \vec{V}_2^+ = \frac{\sqrt{3}}{12} |\vec{V}_2^-| (\vec{n}_2 - 2\vec{n}_1), \quad \vec{V}_3^+ = \frac{\sqrt{3}}{4} |\vec{V}_2^-| \vec{n}_2. \quad (5.39)$$

К иному итогу ведет другая последовательность парных соударений — вначале второй шар ударяет по третьему, а затем — по первому:

$$\vec{V}_1^+ = \frac{\sqrt{3}}{4} |\vec{V}_2^-| \vec{n}_1, \quad \vec{V}_2^+ = \frac{\sqrt{3}}{12} |\vec{V}_2^-| (\vec{n}_1 - 2\vec{n}_2), \quad \vec{V}_3^+ = \frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{V}_2^-| \vec{n}_2. \quad (5.40)$$

В зависимости от случайных погрешностей задача имеет два равновероятных решения (5.39) и (5.40). Заметим, что в обоих случаях после удара один из покоящихся вначале шаров приобретет скорость вдвое большую, нежели другой.

Заметим, что стохастический характер данной задачи сохраняется и в предположении, что соударения абсолютно неупруги, исследованном в [McLaurin, 1742]: несложные вычисления показывают, что при поочередных ударах о симметрично расположенные шары движущий шар отклоняется от оси симметрии.

**Соударение трех тел произвольной формы.** Рассмотрим теперь соударение трех твердых тел произвольной формы с гладкими поверхностями. Будем пренебречь размером области контакта и считать, что первое и второе тело имеют единственную общую точку  $C_1$ , а второе и третье — общую точку  $C_2$ . Обозначая  $G_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) центры масс тел,  $\mathbf{J}_k$  — их центральные тензоры инерции,  $\vec{\Omega}_k$  — угловые скорости, представим уравнения импульсивного движения в виде

$$M_1 \dot{\vec{V}}_1 = \vec{F}_1, \quad M_2 \dot{\vec{V}}_2 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2, \quad M_3 \dot{\vec{V}}_3 = \vec{F}_2, \quad (5.41)$$

$$\mathbf{J}_1 \dot{\vec{\Omega}}_1 = G_1 \vec{C}_1 \times \vec{F}_1, \quad \mathbf{J}_3 \dot{\vec{\Omega}}_3 = G_3 \vec{C}_2 \times \vec{F}_2, \quad \mathbf{J}_2 \dot{\vec{\Omega}}_2 = -G_2 \vec{C}_1 \times \vec{F}_1 - G_2 \vec{C}_2 \times \vec{F}_2$$

Нормальные деформации определяются соотношениями

$$\epsilon_1 = \left( \vec{r}_{C_1}^{(1)} - \vec{r}_{C_1}^{(2)}, \vec{n}_1 \right), \quad \epsilon_2 = \left( \vec{r}_{C_2}^{(3)} - \vec{r}_{C_2}^{(2)}, \vec{n}_2 \right). \quad (5.42)$$

Здесь  $\vec{r}_C^{(j)}$  — радиус-вектор точки  $C$ , лежащей на недеформированной поверхности  $j$ -го тела,  $\vec{n}_{1,2}$  — орты, нормальные поверхностям контакта. Тогда скорость деформирования вычисляется по формулам

$$\dot{\epsilon}_1 = \left( \vec{V}_{C_1}^{(1)} - \vec{V}_{C_1}^{(2)}, \vec{n}_1 \right), \quad \dot{\epsilon}_2 = \left( \vec{V}_{C_2}^{(3)} - \vec{V}_{C_2}^{(2)}, \vec{n}_2 \right). \quad (5.43)$$

Выразим относительные скорости в точках контакта по формулам Эйлера и вычислим вторые производные деформаций, дифференцируя уравнения (5.43). В результате получим

$$\ddot{\epsilon}_1 = \left( \frac{1}{M_1} \vec{F}_1 + \frac{1}{M_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \mathbf{J}_1^{-1} (G_1 \vec{C}_1 \times \vec{F}_1) \times G_1 \vec{C}_1, \vec{n}_1 \right) + \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \mathbf{J}_2^{-1}(\vec{G_2C_1} \times \vec{F_1}) \times \vec{G_2C_1} + \mathbf{J}_2^{-1}(\vec{G_2C_2} \times \vec{F_2}) \times \vec{G_2C_1}, \vec{n}_1 \right), \\
 \ddot{\epsilon}_2 = & \left( \frac{1}{M_3} \vec{F_2} + \frac{1}{M_2} (\vec{F_1} + \vec{F_2}) + \mathbf{J}_3^{-1}(\vec{G_3C_2} \times \vec{F_2}) \times \vec{G_3C_2}, \vec{n}_2 \right) + \\
 & + \left( \mathbf{J}_2^{-1}(\vec{G_2C_1} \times \vec{F_1}) \times \vec{G_2C_2} + \mathbf{J}_2^{-1}(\vec{G_2C_2} \times \vec{F_2}) \times \vec{G_2C_2}, \vec{n}_2 \right).
 \end{aligned}$$

В формулах (5.44) каждая из реакций  $\vec{F}_{1,2}$  коллинеарна соответствующему нормальному вектору  $\vec{n}_{1,2}$  и зависит только от одноименной деформации и скорости ее изменения. Условие возможности корректного решения задачи о кратном ударе сводится к независимости правой части первого из уравнений от  $\vec{F}_1$ , а второго — от  $\vec{F}_2$  и выражается единственным равенством

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + M_2 \left( \mathbf{J}_2^{-1}(\vec{G_2C_2} \times \vec{n}_2), \vec{G_2C_1} \times \vec{n}_1 \right) = 0. \quad (5.45)$$

Интересно отметить, что условие (5.45) связывает только динамические характеристики второго тела с расположением точек ударного контакта на его поверхности и не зависит от свойств двух других тел. В случае, когда хотя бы один из векторов  $\vec{G_2C_1}$  или  $\vec{G_2C_2}$  ортогонален поверхности тела, это условие сводится к равенству (5.35).

**Пример.** Пусть тело подковообразной формы ударяется о барьер сразу двумя своими точками (удар плоский, рис. 5.6). В этом случае подкова играет роль центрального тела, а первым и третьим телом служит массивное основание. При этом  $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ ,  $M_2 \mathbf{J}_2^{-1} = \rho^{-2} \mathbf{E}_2$  ( $\rho$  — радиус инерции,  $\mathbf{E}_2$  — единичная матрица), и равенство (5.45) принимает вид

$$|G'C_1||G'C_2| = \rho^2, \quad (5.46)$$

где  $G'$  — проекция центра масс на основание.

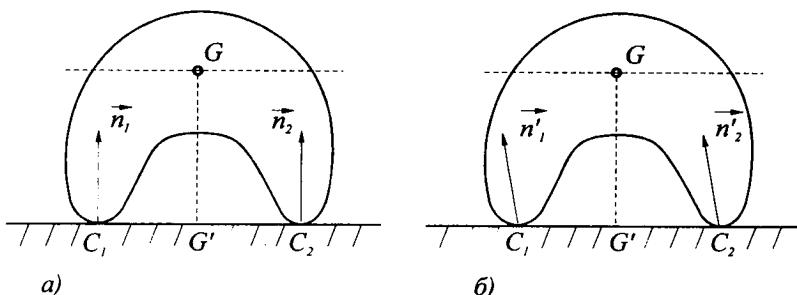


Рис. 5.6. Удар подковы об а) гладкое, б) шероховатое основание

Данное соотношение означает, что если закрепить тело в одной из точек контакта  $C_1$  или  $C_2$ , то вторая из этих точек будет лежать на

линии действия ударного импульса, приложенного в центре удара. Таким образом, ударная реакция в каждой из точек контакта не создает нагрузки в другой точке.

Интересно сравнить полученный результат с рассмотренной в §4.3 задачей о стесненном ударе пластины о гладкое основание. Единственное отличие в постановке состоит в том, что ранее начальная скорость сближения в одной из точек контакта полагалась равной нулю. При этом, очевидно, исчезает двузначность, присущая общему случаю. Равенство (5.46) по форме совпадает (при учете неравенства (4.89)) с условием одновременного обращения в нуль реакции опоры в точке  $O$  и нормальной составляющей скорости в этой точке.

**Случай шероховатых тел.** Обсудим коротко случай, когда поверхности соударяемых тел шероховаты. Здесь можно воспользоваться описанным выше подходом: поместить в точки контакта деформируемые элементы и составить уравнения импульсивного движения относительно деформаций. В отличие от удара без трения, эти уравнения никогда не разделяются, т.е. нельзя так подобрать физические параметры, чтобы кратный удар распадался на сумму двух независимых "парных" ударов при любых начальных условиях. Ввиду этого необходимо рассматривать статистический ансамбль, варьируя начальные условия.

На практике вероятность одновременного тройного столкновения мала, поэтому вполне оправдано использовать для расчета кратного удара метода последовательных соударений, имея ввиду, что он приводит, вообще говоря, к двум различным равновероятным результатам. Совпадения этих результатов также возможны, однако весьма редки.

**Пример.** Вернемся к предыдущему примеру, полагая опору шероховатой. Если угол падения достаточно велик, то скольжение при ударе не прекращается и направление реакций остается неизменным и коллинеарным векторам  $\vec{n}'_1 = \vec{n}'_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \mu$ , где  $\mu$  — коэффициент трения (фиг.5.6,б). В данном случае равенство (5.45), где вместо  $\vec{n}_{1,2}$  подставлены  $\vec{n}'_{1,2}$  после преобразований будет выглядеть так:

$$(1 + \mu^2)\rho^2 = |G'C_1| |G'C_2| - \mu^2 |GG'|^2 + \mu |GG'|(|G'C_1| - |G'C_2|). \quad (5.47)$$

При выполнении равенства (5.47) задача о кратном ударе имеет корректное решение *при условии, что подкова скользит слева направо*. При обратном (или переменном) направлении скольжения задача стохастична.

### 5.3. СОУДАРЕНИЕ МНОГИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

**Особенности соударения при наличии трех и более ударных пар.** Полученные выше результаты можно обобщить на случай одновременного соударения твердых тел, образующих более двух

ударных пар. Для получения условий корректности надо выделить в системе все возможные тройки тел, составляющих две ударные пары, и для каждой из них выписать равенства типа (5.45). Оказывается, что общее число соударяемых тел, для которых могут быть выполнены эти условия, неограничено, однако ни одно из них не должно ударяться более чем о шесть (по числу степеней свободы) других тел [Иванов, 1995]. Кроме того, и для достижения этого максимального значения требуется весьма специальная форма тела и выбор точек касания с другими телами. В частности, для шара возможно лишь три взаимно перпендикулярных направления.

Некоторое представление о более сложных случаях попарной ортогональности дает следующий пример.

**Пример.** Вновь рассмотрим подкову (рис. 5.6,а), для которой выполнено условие регулярности (5.46). Наряду с двумя независимыми ударами в точках  $C_1$  и  $C_2$  существует и третий удар, независимый от них обоих: линия его действия проходит через центр масс  $G$  параллельно линии  $C_1C_2$ . Действительно, такой импульс придает подкове поступательное движение, причем точки касания с препятствием движутся вдоль него. Однако, возможность такого удара реализуется лишь в том случае, когда прямая, проходящая через точку  $G$  параллельно  $C_1C_2$ , пересекает границу подковы под прямым углом.

Отметим, что для плоского тела число степеней свободы равно трем, и построенный пример дает максимальное число ортогональных ударов.

В тех случаях, когда условия попарной независимости ударных импульсов выполнены, для решения задачи о кратном ударе можно применять любой из методов, обсуждавшихся в первом параграфе, например, наиболее простой (и в общем случае неверный!) метод независимого восстановления.

**Пример.** Пусть мяч ударяется об угол комнаты, образуемый двумя стенами и полом. Тогда он отскочит в направлении, противоположном первоначальному. Данный эффект нашел практическое применение в катафотах — оптических устройствах, отражающих свет обратно к освещющему его источнику независимо от угла падения света. Катафот состоит из нескольких оптических призм с тремя взаимно перпендикулярными гранями каждая и устанавливается на автомобилях и велосипедах для предупреждения ночных наездов.

С формальной точки зрения, удар без трения о трехгранный угол описывается уравнением

$$\dot{M\vec{V}} = F_1\vec{n}_1 + F_2\vec{n}_2 + F_3\vec{n}_3 , \quad (5.48)$$

где  $\vec{n}_j (j = 1, 2, 3)$  — орты, нормальные к граням. Если эти векторы попарно ортогональны, то, умножая обе части равенства (5.48) на векторы  $\vec{n}_j$ , получим соотношения

$$(M\dot{\vec{V}}, \vec{n}_j) = F_j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (5.49)$$

Формулы (5.49) показывают, что изменение проекций скорости на орты  $\vec{n}_j$  определяется лишь реакцией соответствующей плоскости. Поэтому в данном случае эти проекции восстанавливаются независимо друг от друга. Ввиду равноправия граней все три коэффициента восстановления равны  $e_1 = e_2 = e_3 = e'$ , откуда следует, что

$$\vec{V}^+ = -e\vec{V}^- ,$$

что соответствует сформулированному выше утверждению.

При невыполнении условий ортогональности следует применять метод статистического ансамбля, или метод последовательных "парных" соударений. Заметим, что получаемое при этом решение качественно сложнее, чем в рассматривавшихся выше случаях: число возможных вариантов последовательностей ударов может быть сколь угодно большим, а сами эти варианты иметь разные вероятности осуществления.

Причина кроется в более сложной геометрии трехгранного (тем более многогранного) угла по сравнению с двугранным, так как его грани имеют различный видимый угловой размер, зависящий к тому же от позиции наблюдателя. Ввиду этого случайные отклонения от траектории, идущей в вершину, приведут к попаданию на различные грани угла с неравной вероятностью. Для количественной оценки различных возможностей необходимо задать в фазовом пространстве системы вероятностную меру, описывающую случайные погрешности в определении координат и скоростей. Окрестность невозмущенной траектории (идущей в вершину многогранного угла) разбивается на части, отвечающие попаданию изображающей точки на ту или иную грань. В свою очередь, каждая из этих частей подразделяется на подобласти, соответствующие различным вариантам второго удара и т.д. Вычисляя меру каждой из подобластей, получим в итоге решение задачи о кратном ударе в виде случайной функции, принимающей несколько значений с той или иной вероятностью.

**Примеры. 1.** Вновь рассмотрим систему, изображенную на рис. 5.5,в, но для других начальных условий: будем считать, что все три шара имеют скорости, равные по величине единице и направленные к общему центру симметрии. В проекции на орты  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ , параллельные направлениям  $G_2G_1$  и  $G_2G_3$  соответственно, начальные условия выглядят так:

$$\vec{V}_1^- = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{n}_2 - 2\vec{n}_1), \quad \vec{V}_2^- = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{n}_1 + \vec{n}_2), \quad \vec{V}_3^- = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{n}_1 - 2\vec{n}_2). \quad (5.50)$$

Система имеет три ударные пары, которые вследствие случайных погрешностей включаются последовательно.

Рассмотрим один из возможных сценариев удара. Пусть сначала второй шар упруго ударяется о первый, а затем — о третий. При

первом ударе импульс и приращения скоростей коллинеарны вектору  $\vec{n}_1$ :

$$\vec{V}_1^1 = \vec{V}_1^- + \lambda \vec{n}_1, \quad \vec{V}_2^1 = \vec{V}_2^- - \lambda \vec{n}_1, \quad (5.51)$$

где множитель  $\lambda$  определяется из граничных условий удара

$$(\vec{V}_1^1 - \vec{V}_2^1, \vec{n}_1) = -(\vec{V}_1^- - \vec{V}_2^-, \vec{n}_1). \quad (5.52)$$

Подставляя выражения (5.51) в (5.52), получаем

$$\lambda = (\vec{V}_2^- - \vec{V}_1^-, \vec{n}_1) = \sqrt{3}, \quad (5.53)$$

откуда

$$\vec{V}_1^1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{n}_2 + \vec{n}_1), \quad \vec{V}_2^1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{n}_2 - 2\vec{n}_1), \quad \vec{V}_3^1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{n}_1 - 2\vec{n}_2). \quad (5.54)$$

Следовательно, первый и второй шары обменялись скоростями. Далее, при соударении второго и третьего шаров импульс и приращения скоростей коллинеарны  $\vec{n}_2$ . По аналогии с (5.51)–(5.54) имеем

$$\vec{V}_2^2 = \vec{V}_2^1 - \lambda \vec{n}_2, \quad \vec{V}_3^2 = \vec{V}_3^1 + \lambda \vec{n}_2, \quad \lambda = (\vec{V}_2^1 - \vec{V}_3^1, \vec{n}_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (5.55)$$

При вычислениях принято во внимание, что  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1/2$ . Таким образом,

$$\vec{V}_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{n}_2 + \vec{n}_1), \quad \vec{V}_2^2 = -\frac{\sqrt{3}}{6}(\vec{n}_2 + 4\vec{n}_1), \quad \vec{V}_3^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(2\vec{n}_1 - \vec{n}_2). \quad (5.56)$$

Для выяснения дальнейшего хода удара необходимо определить знаки относительных скоростей в ударных парах:

$$(\vec{V}_1^2 - \vec{V}_2^2, \vec{n}_1) = \frac{5\sqrt{3}}{4} > 0, \quad (\vec{V}_3^2 - \vec{V}_2^2, \vec{n}_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \quad (5.57)$$

$$(\vec{V}_3^2 - \vec{V}_1^2, \vec{n}_2 - \vec{n}_1) = -\frac{\sqrt{3}}{4} < 0.$$

Поскольку лишь одна из скоростей оказалась отрицательной, следующее соударение происходит между первым и третьим шарами. Аналогично (5.51) – (5.54), имеем

$$\vec{V}_3^3 = \vec{V}_3^2 + \lambda(\vec{n}_2 - \vec{n}_1), \quad \vec{V}_1^3 = \vec{V}_1^2 - \lambda(\vec{n}_2 - \vec{n}_1), \quad (5.58)$$

$$\lambda = (\vec{V}_1^2 - \vec{V}_3^2, \vec{n}_2 - \vec{n}_1) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно,

$$\vec{V}_1^3 = \frac{\sqrt{3}}{12}(\vec{n}_2 + 7\vec{n}_1), \quad \vec{V}_2^3 = -\frac{\sqrt{3}}{6}(\vec{n}_2 + 4\vec{n}_1), \quad \vec{V}_3^3 = \frac{\sqrt{3}}{12}(\vec{n}_1 + \vec{n}_2). \quad (5.59)$$

Вычисления относительных скоростей в ударных парах по формулам, аналогичным (5.57), но для скоростей  $\vec{V}_j^3$ , показывают, что все они положительны. Следовательно, кратный удар сводится к последовательности парных соударений вида  $\{(1+2), (3+2), (1+3)\}$ .

По соображениям симметрии имеется еще пять равновероятных вариантов кратного удара. Например, последовательность вида  $\{(1+2), (3+2), (1+3)\}$  приводит к результату

$$\vec{V}_1^3 = \frac{\sqrt{3}}{6}(5\vec{n}_1 - \vec{n}_2), \quad \vec{V}_2^3 = \frac{\sqrt{3}}{12}(\vec{n}_2 - 8\vec{n}_1), \quad \vec{V}_3^3 = \frac{\sqrt{3}}{12}(\vec{n}_2 - 2\vec{n}_1). \quad (5.60)$$

Аналогично можно построить решение и в четырех других возможных случаях. Таким образом, в данном примере имеется шесть вариантов кратного удара, вероятность каждого из которых близка к одной шестой.

**2.** Изучим вариант задачи Бернулли — удар движущегося шара по системе трех неподвижных равных ему шаров, имеющих две точки контакта (рис. 5.7). Примем следующую модель погрешностей: точка  $G_2$  лежит точно на линии движения четвертого шара,  $\angle G_4 G_2 G_1 = \pi/3 + \delta_1$ ,  $\angle G_4 G_2 G_3 = \pi/3 + \delta_2$ , где  $\delta_{1,2}$  — случайные величины с одинаковым распределением. Если  $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ , то удар сводится к единственному парному соударению — четвертого шара со вторым (вероятность такого варианта близка к 0,25). Если  $\delta_1 < 0$  и  $\delta_1 < \delta_2$ , то четвертый шар вначале ударяется о первый, затем о второй и, наконец, о третий. В итоге скорости шаров будут составлять по абсолютной величине соответственно  $1/2, 3/4, 3/8$  и  $\sqrt{3}/8$  от первоначальной скорости четвертого шара.

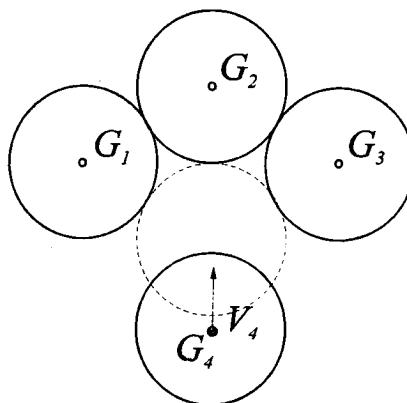


Рис.5.7. Вариант задачи Бернулли

Другая возможность:  $\delta_2 < 0$ ,  $\delta_2 < \delta_1$  приводит к аналогичному результату, но с перестановкой первого и третьего шаров. По соображениям симметрии, два этих варианта имеют равные вероятности, близкие к 0,375.

**Выводы.** Выше рассмотрен ряд задач, относящихся к проблеме кратного удара. Как показал проведенный анализ, методы решения этих задач также как и сама возможность решения в значительной мере определяются конфигурацией системы в момент соударения. Можно предложить следующую классификацию возможных случаев.

1. В *регулярном* случае ударные пары действуют независимо друг от друга. При этом задача о кратном ударе распадается на несколько более простых задач о соударении двух тел. Каждая из этих задач может быть решена в рамках данной дискретной системы без привлечения теории упругости на основе стандартной гипотезы о коэффициенте восстановления. Для реализации этого случая требуется выполнение довольно жестких условий (см. (5.35), (5.45), (5.46)) механический смысл которых состоит в том, что каждая из ударных пар не нагружает другие пары.

2. Второй, более распространенный тип задач, допускающих корректное решение, можно назвать *квазирегулярным*. Он характеризуется невыполнением условий регулярности, что делает решение поставленной задачи в рамках динамики дискретных систем невозможным. Можно, например, использовать для решения ту или иную модель теории упругости, отражающую физические свойства соударяемых тел. Получаемый результат обладает свойством непрерывной зависимости от начальных условий. Отличие от регулярного случая заключается в том, что этот результат существенно изменится, если изменить физические свойства соударяемых тел (например, жесткость). К этому типу можно отнести частный случай коллинеарного соударения трех шаров, при котором два из них до удара неподвижны и касаются друг друга.

3. Наиболее распространенным является третий тип задач о кратном ударе, который можно назвать *стохастическим*. Он характеризуется высокой чувствительностью результата к начальным условиям удара, сочетающейся с невозможностью определить эти условия с необходимой точностью. В этом случае однозначное корректное решение проблемы кратного удара, согласующееся с экспериментом, невозможно. Один из возможных путей преодоления данного парадокса, состоит в представлении решения в виде случайной вектор — функции, принимающей несколько значений. Примеры такой ситуации рассмотрены выше.

С качественной точки зрения, стохастическая система аналогична монете или игральной кости, брошенной на стол.

Для расчета различных вариантов движения в стохастическом случае можно использовать метод статистического ансамбля или метод последовательных "парных" соударений.

# Часть 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЙ С УДАРАМИ

## Глава 6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

### 6.1. ОДНОСТОРОННИЕ СВЯЗИ В МЕХАНИКЕ

**Основные понятия и примеры.** Предметом исследования во второй части книги являются *дискретные механические системы*. Такие системы состоят из твердых тел, которые могут двигаться свободно или подчиняясь некоторым ограничениям на координаты, называемым *геометрическими связями*, в соответствии с законами Ньютона. Термин "дискретная система" означает, что для полного и однозначного описания расположения всех ее элементов в пространстве достаточно некоторого конечного множества чисел. Такие числа принято называть *лагранжевыми координатами*.

Например, абсолютно твердое тело представляет собой дискретную механическую систему, в качестве лагранжевых координат можно взять декартовы координаты произвольных его трех точек, не лежащих на одной прямой. Точно так же и любая *конечная* система абсолютно твердых тел дискретна. Напротив, деформируемый стержень не является дискретной механической системой, так как для описания его состояния необходимо задавать координаты *бесконечного* множества точек. Дискретные модели удара, рассматривавшиеся в первой части, по существу представляют собой компромисс, позволяющий учесть контактные деформации в рамках дискретной механической системы.

Число лагранжевых координат для данной дискретной системы может быть различным. Минимальное число координат, достаточное для однозначного описания системы, называется ее *числом степеней свободы*, а сами такие координаты — *обобщенными*. Будем обозначать обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ( $n$  — число степеней свободы).

Например, абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы: для определения его положения достаточно задать положение одной из точек и три угла, описывающие ориентацию. Твердое тело с закрепленной точкой имеет три вращательные степени свободы, а с закрепленной осью — одну вращательную степень свободы.

Связи физически могут быть реализованы в виде разного рода шарниров или направляющих, а формально они выражаются в виде тождеств относительно лагранжевых координат. Наличие таких связей, называемых *двусторонними*, приводит к понижению числа степеней свободы системы, при этом обобщенные координаты надо выбирать с учетом уравнений связей.

**Пример.** Для пластины, движущейся в некоторой фиксированной плоскости, число степеней свободы равно трем, а в качестве обобщенных координат можно взять декартовы координаты центра масс  $x, y$  и угол поворота  $\varphi$ . Закрепим одну из точек пластины, тогда  $x, y, \varphi$  останутся лагранжевыми, но не обобщенными координатами, поскольку они уже будут связаны двумя соотношениями вида

$$x - x^* = a \cos \varphi, \quad y - y^* = a \sin \varphi. \quad (6.1)$$

Здесь  $x^*, y^*$  — координаты точки крепления на плоскости,  $a$  — расстояние от этой точки до центра масс пластины.

Можно сделать вывод, что пластина с закрепленной точкой имеет одну степень свободы и одну обобщенную координату  $\varphi$ , так как  $x$  и  $y$  однозначно выражаются через  $\varphi$  по формулам (6.1).

Другой тип составляют геометрические связи, называемые *односторонними*, или *неудерживающими*. Такие связи препятствуют проникновению тел друг в друга. Они не мешают раздельному движению тел, "включаясь" лишь при наличии контакта. Односторонние связи формально выражаются неравенствами вида

$$f(t, q_1, \dots, q_n) \geq 0, \quad (6.2)$$

где  $t$  — время.

**Примеры.** 1. В системе двух шаров с радиусами  $R_1, R_2$  расстояние между центрами не может превосходить суммы радиусов:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \leq R_1 + R_2, \quad (6.3)$$

где  $\vec{r}_{1,2}$  — радиус-векторы центров.

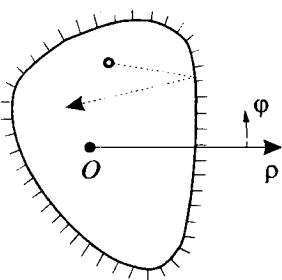


Рис. 6.1. Биллиард Биркгофа

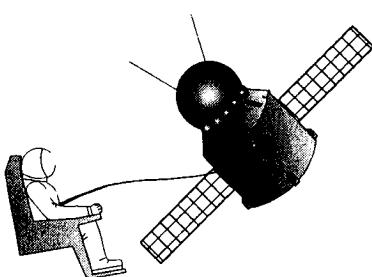


Рис. 6.2. Тросовая космическая система

**2.** Материальная точка единичной массы движется по инерции внутри плоской области  $D$ , ограниченной замкнутой выпуклой кривой — так называемый биллиард Биркгофа [Биркгоф, 1941] (рис. 6.1). Поместим полюс  $O$  в некоторую точку области  $D$  и введем полярные координаты  $\rho, \varphi$ . Односторонняя связь запишется так:

$$\rho \leq f(\varphi), \quad (6.4)$$

где знак равенства соответствует граничной кривой.

**3.** Частица на вибрирующей горизонтальной платформе может находиться в области

$$z \geq h(t), \quad (6.5)$$

где  $z$  — аппликата частицы,  $h(t)$  — зависящая от времени высота платформы.

**4.** Два спутника, связанные гибким нерастяжимым тросом длины  $l$ , подчиняются соотношению (рис. 6.2)

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \leq l,$$

где  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  — радиус-векторы точек крепления троса к спутникам.

**5.** В системе трех шаров односторонних связей три: они задаются аналогично неравенству (6.3) с заменой индексов.

К системам с односторонними связями относятся различные технические устройства: вибротранспортеры, подъемники, виброударные механизмы [Кобринский, Кобринский, 1973, 1981, Бабицкий, 1978, Блемхман, 1964], шагающие аппараты [Формальский, 1982], тросовые космические системы [Белецкий, Новикова, 1969], сверлильный станок [Glocke, Pfeiffer, 1992] и др.

В фундаментальных исследованиях представляют интерес биллиардные системы [Биркгоф, 1941, Синай, 1970, Лихтенберг, Либерман, 1984]. К такому же типу может привести решение задач, в которых неудерживающие связи и удары не присутствуют явно — например, задача о геодезической кривой на замкнутой поверхности [Биркгоф, 1941].

**Реакция односторонней связи.** В механических системах наличие связей обусловлено взаимодействием между ее элементами, а мерой этого взаимодействия может служить реакция связи. С точки зрения динамики, реакции равноправны с так называемые "активными" силами: согласно принципу Даламбера, *в каждый момент времени существует равновесие между заданными силами, реакциями связей и силами инерции*.

Различие между этими двумя группами сил состоит в характере их зависимости от координат и скоростей системы: в то время как активные силы заданы в виде явных однозначных функций от этих переменных и времени и не зависят от наличия связей, реакции обусловлены связями и зависят как от движения системы, так и от приложенных к ней сил [Аппель, 1960, Маркеев, 1990]. Задача определения

реакций в общем случае может иметь несколько решений или не иметь их вовсе [Пэнлеве, 1954].

Реакция при точечном контакте твердых тел представляет собой вектор  $\vec{R}$ , имеющий касательную и нормальную составляющие  $\vec{R}_t, \vec{R}_n$ . Задавая характер трения между этими телами, мы можем представить  $\vec{R}_t$  в виде функции от  $\vec{R}_n$ , а также от координат и скоростей системы в данный момент времени. Следовательно, для определения реакции достаточно вычислить ее нормальную составляющую.

Заметим, что в этом случае функция  $f$  в формуле (6.2) представляет собой кратчайшее расстояние между двумя твердыми телами. Если выполнено неравенство  $f > 0$ , то контакта нет, и реакция очевидно равна нулю. Если в данный момент времени  $t_0$  выполнены соотношения  $f = 0, df/dt > 0$ , то при  $t > t_0$  тела разъединяются; в этом случае также  $\vec{R} = \vec{0}$ . Следующий случай:  $f = 0, df/dt < 0$  свидетельствует о соударении двух тел. При этом реакция имеет импульсивный характер, методы ее определения подробно разбирались в первой части данной книги.

Допустим теперь, что в некоторый момент времени  $t_0$  выполнены соотношения  $f = 0, df/dt = 0$ . Составим выражение для второй производной  $d^2f/dt^2$ , учитывая конкретный вид системы и принцип Даламбера. В итоге получим соотношение вида

$$\frac{d^2f}{dt^2} = A_0 + A_1 R_n , \quad (6.6)$$

где  $A_0, A_1$  — некоторые функции от координат и скоростей системы.

Вследствие одностороннего характера контакта в момент  $t = t_0$  выполняются неравенства

$$\frac{d^2f}{dt^2} \geq 0, \quad R_n \geq 0. \quad (6.7)$$

Первое из данных неравенств выражает абсолютную жесткость связи, второе — отсутствие адгезионного прилипания.

Очевидно, что условий (6.7) недостаточно для однозначного определения величины  $R_n$  из уравнения (6.6). Для этого необходимо сделать дополнительное допущение о характере связи. Обычно считают [Суслов, 1946, п.176], что если связь ослабляется при  $t > t_0$ , ее реакция в данный момент равна нулю. При учете равенств  $f(t_0) = 0, df(t_0)/dt = 0$  отсюда следует, что

$$\frac{d^2f}{dt^2} \vec{R} = \vec{0}. \quad (6.8)$$

Соотношения (6.7), (6.8) часто называют *условиями дополнительности*.

Заметим, что с условием, аналогичным (6.8), мы встречались в задаче об ударе тела с дополнительной точкой опоры (см. (4.82)). Анализ той же задачи при помощи дискретной модели показал, что к освобождению связи связи приводят и случаи, когда в данной точке возникает ненулевой ударный импульс. Поэтому мы сначала построим решение при помощи гипотезы (6.8), а затем обсудим его реалистичность.

В зависимости от знаков величин  $A_0, A_1$  в момент  $t_0$  возможно несколько вариантов решения.

1. Пусть  $A_1 > 0, A_0 \geq 0$ . Тогда из неравенства  $R_n > 0$  следовало бы, что  $d^2f/dt^2 > 0$ , что противоречит (6.8). Поэтому имеется единственное решение  $\vec{R} = \vec{0}, d^2f/dt^2 \geq 0$ , т.е. реакция равна нулю, а связь (в случае строгого неравенства  $A_0 > 0$ ) при  $t > t_0$  ослабляется.

2. В случае  $A_1 > 0, A_0 < 0$  условию (6.8) также удовлетворяет единственное значение  $R_n = -A_0/A_1$ ; при этом  $d^2f/dt^2 = 0$ . Следовательно, односторонняя связь остается напряженной для  $t > t_0$ .

3. Если  $A_1 \leq 0, A_0 < 0$ , то уравнение (6.6) не имеет решений, удовлетворяющих неравенствам (6.7), выражающим односторонний характер связи. Следовательно, в рамках модели абсолютно твердых тел задача об определении реакции односторонней связи и последующего движения системы неразрешима.

4. В случае  $A_1 < 0, A_0 > 0$  задача имеет два решения:

- (i)  $\vec{R} = \vec{0}, d^2f/dt^2 > 0$ , — связь ослабляется;
- (ii)  $R_n = -A_0/A_1, d^2f/dt^2 = 0$ , — связь остается напряженной.

5. Если  $A_1 < 0, A_0 = 0$ , то условию (6.8) удовлетворяет единственное значение  $R_n = 0$ .

6. При выполнении соотношений  $A_1 = 0, A_0 > 0$  задача также решается однозначно:  $R_n = 0$ .

7. Наконец, для значений  $A_1 = 0, A_0 = 0$  гипотезе (6.8) удовлетворяет любое значение  $R_n \geq 0$ .

Таким образом, задача о нахождении реакции односторонней связи имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (6.8), лишь в четырех из семи возможных случаев. Выясним, какие из этих случаев могут иметь место при рассмотрении реальных систем.

Сначала рассмотрим односторонний контакт между телами с *абсолютно гладкими* поверхностями. Как следует из доказанного ниже утверждения, в этом случае реакция определяется однозначно.

**Предложение 6.1.** В формуле (6.6), выражающей зависимость нормального относительного ускорения в точке контакта от нормальной составляющей реакции, в случае тел с гладкими поверхностями необходимо  $A_1 > 0$ .

**Доказательство.** Допустим, что  $R_n \rightarrow +\infty$ . Этот предельный переход позволяет установить аналогию с соударением двух твердых тел, которое описывается формулой (см. §3.1)

$$\Delta \vec{V}_C = \mathbf{B} \vec{I}, \quad (6.9)$$

где матрица  $\mathbf{B}$  положительно определена. Дифференцируя это соотношение и умножая затем обе части скалярно на вектор нормали  $\vec{n}$ , получим

$$\dot{(\vec{V}_C, \vec{n})} = (\mathbf{B}\vec{R}, \vec{n}). \quad (6.10)$$

Учитывая, что реакция коллинеарна нормали:  $\vec{R} = R_n \vec{n}$  и сравнивая формулы (6.6) и (6.10), получаем

$$A_1 = (\mathbf{B}\vec{n}, \vec{n}) > 0, \quad (6.11)$$

что и требовалось.

**Следствие.** В случае контакта двух гладких тел реакция определяется формулой

$$R_n = \max\{0, -A_0/A_1\} \quad (6.12)$$

**Замечания.** 1. Соотношение типа (6.9) имеет место при ударении не только свободных твердых тел, но и тел с закрепленными точками, или связанных шарнирами с другими телами. При этом предложение 6.1 остается справедливым.

2. Предложение 6.1 верно и для некоторых типов трения между контактирующими телами, например, для вязкого трения (см. §3.1). Важно, чтобы сила трения не зависела от нормальной реакции.

3. Имеется еще один тип односторонней связи, для которого выполняется утверждение предложения 6.1. Это — гибкая нерастяжимая нить, соединяющая точки двух различных тел. Такая связь задается неравенством (6.5) и характеризуется, подобно контакту гладких тел, коллинеарностью реакции и направления, вдоль которого измеряется расстояние между точками ее приложения. По аналогии с формулами (6.9) – (6.11), в данном случае получаем

$$A_1 = (\mathbf{B}\vec{e}, \vec{e}) > 0, \quad (6.13)$$

где  $\vec{e}$  — единичный вектор, направленный вдоль нити.

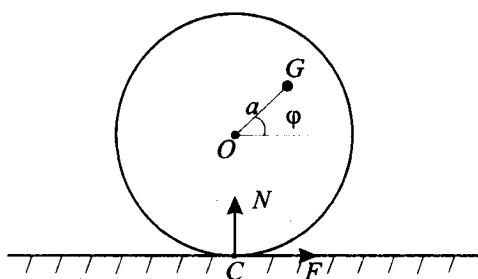


Рис. 6.3. Неоднородный диск на шероховатой опоре

В случае *сухого (кулонова) трения* возможно выполнение неравенства  $A_1 \leq 0$ . Соответствующие примеры были обнаружены Пенлеве [Пэнлеве, 1954].

**Пример.** Рассмотрим движение тяжелого круглого неоднородного диска на шероховатой горизонтальной опоре в фиксированной вертикальной плоскости (рис. 6.3). За обобщенные координаты возьмем декартовы координаты центра масс  $G$  (ось  $X$  горизонтальна, ось  $Y$  направлена вертикально вверх) и угол  $\varphi$  между отрезком  $OG$  и осью  $X$  ( $O$  — геометрический центр диска). По смыслу задачи связь между диском и опорой является неудерживающей, она выражается неравенством

$$y_C = y - R + a \cos \varphi \geq 0, \quad a = |\vec{OG}|. \quad (6.14)$$

Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения выражаются уравнениями (массу тела считаем единичной)

$$\ddot{x} = F, \quad \ddot{y} = N - g, \quad \rho^2 \ddot{\varphi} = -aN \cos \varphi + F(R + a \sin \varphi), \quad (6.15)$$

где  $R, \rho$  — радиус диска и его радиус инерции,  $N, F$  — нормальная и касательная составляющие реакции. Для составляющих скорости точки контакта  $C$  имеем такие выражения:

$$\dot{x}_C = \dot{x} + (R + a \sin \varphi) \dot{\varphi}, \quad \dot{y}_C = \dot{y} - a \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (6.16)$$

Пусть начальные условия таковы, что  $\dot{x}_C < 0, \dot{y}_C = 0, \dot{y}_C = 0$ , тогда  $F = \mu N$ , и в результате дифференцирования второй из формул (6.16) получаем

$$\ddot{y}_C = A_0 + A_1 N, \quad (6.17)$$

$$A_0 = a \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - g, \quad A_1 = \rho^{-2} [\rho^2 + a^2 \cos^2 \varphi - \mu a (R + a \sin \varphi) \cos \varphi].$$

Таким образом, каждая из величин  $A_0$  и  $A_1$  может принимать значения обоих знаков, и наряду со случаями корректности 1 и 2 возможны и остальные варианты решения 3 – 7.

Методы решения парадоксов Пенлеве обсуждались многими авторами (см. дискуссию в [Пэнлеве, 1954], а также [Неймарк, Фуфаев, 1995] и приведенную в этой работе библиографию), они основаны на снятии допущения об абсолютной жесткости контакта. При этом допускается нарушение неравенства (6.2), левая часть которого в этом случае будет противоположна контактной деформации  $\epsilon$ . Зависимость реакции от  $\epsilon$  и  $\dot{\epsilon}$  задается той или иной явной формулой, поэтому парадоксальные ситуации несуществования и неединственности устраниются автоматически. По сути дела, такой подход совпадает с дискретными моделями удара, включающими деформируемые элементы. В парадоксальных ситуациях возникает удар особого типа, называемый тангенциальным ударом, который более подробно будет рассмотрен в следующем параграфе.

Заметим, что аналогичные парадоксальные ситуации могут возникать и в системах с идеальными связями.

**Пример.** [Иванов, 1993, а]. Вновь рассмотрим неоднородный диск на горизонтальной опоре, которую теперь будем считать абсолютно шероховатой. Это означает, что наряду со связью (6.14) система подчинена двусторонней связи

$$\dot{x}_C = 0. \quad (6.18)$$

Отличительная особенность соотношения (6.18) состоит в том, что оно выполняется лишь при контакте диска с опорой (т.е. если  $y_C = 0$ ), а в случае  $y_C > 0$  оно может нарушаться.

Дифференцируя равенства (6.16) при учете (6.15), получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x}_C &= a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + F + (R + a \sin \varphi)[-aN \cos \varphi + F(R + a \sin \varphi)]\rho^{-2}, \\ \ddot{y}_C &= a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - g + N - a \cos \varphi[-aN \cos \varphi + F(R + a \sin \varphi)]\rho^{-2}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Если  $N = 0$ , то и  $F = 0$ , откуда

$$\ddot{y}_C = a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - g. \quad (6.20)$$

В случае  $y_C = 0$  касательную составляющую реакции можно выразить через  $N$ , приравнивая правую часть первой из формул (6.19) к нулю. Подставим полученное выражение во вторую формулу:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_C &= A_0 + A_1 N, \quad A_1 = 1 + \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{\rho^2 + (R + a \sin \varphi)^2} > 0, \\ A_0 &= a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - g + \frac{a^2(R + a \sin \varphi) \cos^2 \varphi}{\rho^2 + (R + a \sin \varphi)^2} \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Парадоксальная ситуация возникает при выполнении неравенств

$$a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - g < 0, \quad A_0 > 0. \quad (6.22)$$

В системе (6.21) при этом реализуется случай 1, следовательно,  $N = 0$  и диск отрывается от опоры. С другой стороны, при ослаблении связи следует пользоваться уравнением (6.20), которое свидетельствует о том, что  $y_C < 0$  при  $t > t_0$ .

Данное противоречие свидетельствует о нереалистичности гипотезы об абсолютной шероховатости опоры. Для его преодоления необходимо учитывать конечную жесткость контакта не только в нормальном, но и в касательном направлении.

Подведем итог. Задача об определении реакции односторонней связи имеет единственное решение в случаях, когда эта связь реализуется в виде контакта твердых тел в отсутствие трения или при наличии трения вязкого типа, а также в виде гибкой нерастяжимой нити,

соединяющей точки двух тел. Это решение можно построить в рамках модели абсолютно твердого тела на основе гипотезы (6.8).

Та же задача может быть неразрешимой или неопределенной в тех случаях, когда касательная составляющая реакции зависит от ее нормальной составляющей. Для преодоления противоречия можно воспользоваться дискретной моделью, учитывающей конечную жесткость контакта. Ниже будет показано, что движение в этих случаях имеет импульсивный характер.

**Уравнения движения в независимых координатах.** Применим к каждому из твердых тел, составляющих рассматриваемую систему, теоремы об изменении количества движения и кинетического момента. Для этого выберем некоторую инерциальную систему отсчета и обозначим  $\vec{r}_k$  — радиус - вектор центра масс  $k$ -го тела,  $\vec{\Omega}_k$  — его угловую скорость,  $M_k, \mathbf{J}_k$  — массу и центральный тензор инерции,  $\vec{Q}_k^*, \vec{M}_k^*$  — главный вектор и главный момент активных сил, действующих на  $k$ -е тело,  $\vec{R}_{ki}$  — силы взаимодействия между телами, включая реакции односторонних связей,  $C_{ki}$  — точки приложения этих реакций. Дифференциальные уравнения движения выглядят так:

$$M_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{Q}_k^* + \sum_i \vec{R}_{ki}, \quad (\mathbf{J}_k \vec{\Omega}_k) \cdot = \vec{M}_k^* + \sum_i G_k C_{ki} \times \vec{R}_{ki}. \quad (6.23)$$

К системе (6.23) следует добавить алгебраические уравнения и неравенства, выражающие наложенные на систему двусторонние и односторонние связи.

Известный метод, позволяющий исключить реакции *идеальных двусторонних связей* из уравнений движения, был разработан Лагранжем. Классическая процедура построения уравнений Лагранжа в независимых координатах (второго рода) подробно описана в учебниках (см. напр. [Аппель, 1960], [Маркеев, 1990]), поэтому ограничимся кратким изложением этого метода для систем с двусторонними и односторонними связями.

Для получения уравнений Лагранжа надо выразить кинетическую энергию  $T$  через обобщенные координаты и скорости:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k [M_k (\dot{\vec{r}}_k, \dot{\vec{r}}_k) + (\mathbf{J}_k \vec{\Omega}_k, \vec{\Omega}_k)] = T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (6.24)$$

где  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Затем вычисляем для каждой из координат  $q_j$  производную Эйлера - Лагранжа

$$[T]_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (6.25)$$

двумя способами — непосредственно и через промежуточные переменные  $\dot{\vec{r}}_k, \vec{\Omega}_k$  по правилам дифференцирования сложных функций при учете уравнений (6.23) — и приравниваем полученные выражения.

Основное свойство производных (6.25) состоит в том, что их выражение не содержит реакций идеальных двусторонних связей, к числу которых принадлежат геометрические связи без трения. Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$[T]_j = Q_j + \sum_m \mathcal{R}_{jm} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_k \left( M_k \dot{\vec{r}}_k, \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) + \left( \vec{Q}_k^*, \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) + \left( \mathbf{J}_k \vec{\Omega}_k, \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{\Omega}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) + \\ &+ \left( \vec{M}_k^*, \frac{\partial \vec{\Omega}_k}{\partial \dot{q}_j} \right), \quad \mathcal{R}_{jm} = \sum_k \left( \vec{R}_{km}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) + \left( G_k C_{km} \times \vec{R}_{km}, \frac{\partial \vec{\Omega}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \end{aligned}$$

где индекс  $m$  отвечает односторонним связям. Величины  $Q_j$  в уравнениях Лагранжа называют *обобщенными силами*, их можно также определить из уравнения баланса мощностей, связывающего выражения работы действующих сил в различных системах координат [Маркев, 1990].

## 6.2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ С ОДНОСТОРОННЕЙ СВЯЗЬЮ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

В данном параграфе мы будем рассматривать систему с односторонней связью (6.2), считая, что функция  $f$  непрерывно дифференцируема, а ее частные производные по переменным  $q_1, q_2, \dots, q_n$  не обращаются в нуль одновременно. За счет подходящего выбора обобщенных координат упростим формулу связи и будем впредь считать, что она имеет вид  $q_1 \geq 0$ .

В основе предлагаемой ниже классификации лежит состояние односторонней связи.

**Перелеты.** Если на некотором промежутке времени выполняется неравенство  $q_1 > 0$ , т.е. связь ослаблена, то ее наличие никак не сказывается на движении. Поэтому уравнения движения можно записать в лагранжевой форме (6.26), где  $R_{j1} = 0$ :

$$[T]_j = Q_j \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.27)$$

Решая систему (6.27), можно построить фазовую кривую вплоть до ее пересечения с плоскостью  $q_1 = 0$ . Схематично зависимость  $q_1(t)$  показана на рис. 6.4,а.

**Пример.** Для частицы на вибрирующем основании (пример 3 параграфа 6.1) координату  $q_1$  определим как расстояние от частицы до

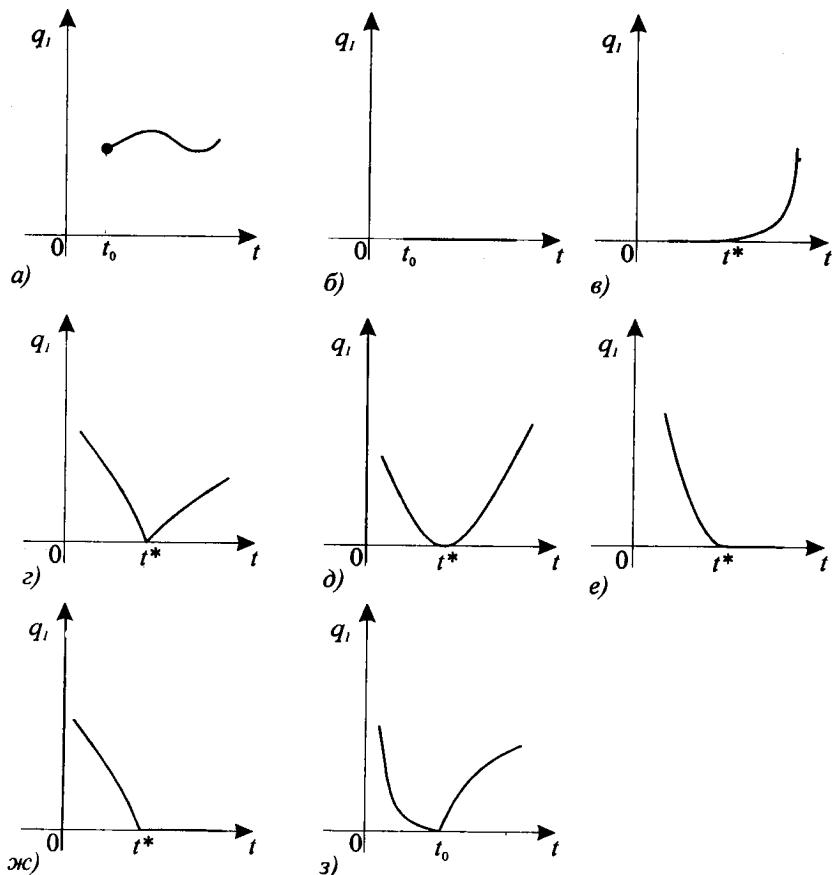


Рис. 6.4. Различные типы движения в системе с односторонней связью: а) перелет, б) "скользящий" режим, в) сход со связи, г) удар, д) касание ограничителя, е) безударное приземление, ж) пластический удар, з) тангенциальный удар

опоры, а  $q_{2,3}$  как ее абсциссу и ординату соответственно. В отсутствие других сил, кроме силы тяжести, система (6.27) имеет вид

$$\ddot{q}_2 = \ddot{q}_3 = 0, \quad \ddot{q}_1 = -g - \ddot{h}(t), \quad (6.28)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

Решение системы (6.28) при начальных условиях  $\mathbf{q}(t^o) = \mathbf{q}^o$  выглядит так:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1^o + (\dot{q}_1^o + \ddot{h}(t^o))(t - t^o) - \frac{1}{2}g(t - t^o)^2 - h(t) + h(t^o), \\ q_j &= q_j^o + \dot{q}_j^o(t - t^o) \quad (j = 2, 3). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Формулами (6.29) можно пользоваться до тех пор, пока величина  $q_1$  не обратится в нуль. Заметим, что точное решение нелинейного уравнения  $q_1(t) = 0$  невозможно даже для простейших периодических функций  $h(t)$ . Момент, когда частица падает на опору, можно определить лишь приближенно при помощи численных методов.

**"Скользящие" режимы.** Данный случай движения соответствует напряженному состоянию неудерживающей связи:  $q_1 \equiv 0$  на некотором интервале времени (рис. 6.4,б). При этом в уравнениях движения необходимо добавить реакцию односторонней связи:

$$[T]_j = Q_j + R_{j1} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.30)$$

Заметим, что пользуясь формулами (6.26), можно выразить компоненты  $R_{21}, \dots, R_{n1}$  как функции от  $R_{11}, \dot{q}_1$  и  $t$ , а затем получить из системы (6.30) уравнение вида (6.6), где  $f = q_1$ ,  $R_n = R_{11}$ . Скользящий режим имеет место в случае 2 из перечисленных в разд. 1.2.

В частности, если односторонняя связь обусловлена контактом двух твердых тел с гладкими поверхностями или гибкой нитью, то выполнено условие идеальности

$$R_{21} = R_{31} = \dots = R_{n1} \equiv 0 \quad (6.31)$$

Поскольку квадратичная по отношению к обобщенным скоростям часть кинетической энергии является положительно определенной, для идеальной связи всегда  $A_1 > 0$ , что согласуется с утверждением предложения 6.1.

Условием окончания скользящего режима является изменение знака величины  $A_0$  с "минуса" на "плюс".

**Пример.** В вышеприведенном примере скользящий режим соответствует скольжению частицы по опоре, условие идеальности означает отсутствие трения. Решение уравнений движения имеет вид

$$q_1 = 0, \quad R_1 = M(g + \ddot{h}(t)), \quad q_j = q_j^o + \dot{q}_j^o(t - t^o) \quad (j = 2, 3). \quad (6.32)$$

Контакт с опорой продолжается, пока  $\ddot{h}(t) \geq -g$ .

**Сход со связью.** Наибольшие трудности для исследования представляют такие движения, которые включают в себя участки ослабления и напряжения односторонней связи. Допустим, что при  $t \leq t^*$  связь напряжена, а при  $t > t^*$  происходит ее ослабление, т.е. величина  $q_1$  становится положительной (рис. 6.4,в). Для описания этого процесса от уравнений движения (6.30) надо перейти к форме (6.27). Если в уравнении (6.6) функции  $A_0(t, \dot{q}, \ddot{q})$  и  $A_1(t, \dot{q}, \ddot{q})$  непрерывны, то такой переход происходит плавно и связан с непрерывным убыванием реакции  $R_{11}$  с последующим ее исчезновением. К такому случаю относится контакт тел без трения или с кулоновским трением.

Напротив, в случаях абсолютной шероховатости или вязкого трения, характеризующихся тем, что касательная составляющая реакции не обязательно бесконечно мала при стремлении к нулю ее нормальной составляющей, величины  $A_0, A_1$  при  $q_1 = 0$  и при  $q_1 > 0$  выражаются разными формулами. Это может привести к парадоксальным ситуациям, когда невозможен ни скользящий режим, ни сход с опоры (см. пример в §6.1), либо возможны оба этих типа движения. Для разрешения парадоксов необходимо задать более реалистичную модель касательных напряжений, в которой  $\vec{R} \rightarrow \vec{0}$  при  $R_n \rightarrow 0$ .

**Удар при "приземлении".** Случай обратного перехода — от полета к опорной фазе — более многообразен. В данном разделе мы ограничимся обсуждением ударов системы о связь. Условия удара в момент  $t = t^*$  таковы:

$$q_1(t^* - 0) = 0, \quad \dot{q}_1(t^* - 0) < 0. \quad (6.33)$$

Если выполнены соотношения (6.33), то при  $t > t^*$  либо не выполнено ограничение  $q_1 \geq 0$ , либо обобщенная скорость  $\dot{q}_1$  терпит в момент  $t^*$  скачкообразный разрыв (рис. 6.4,г).

С физической точки зрения, неравенство  $q_1 < 0$  означает, что твердые тела, составляющие исследуемую систему, деформируются. В примерах, приведенных в §1, это означает, что: 1), 5) шары несколько сдавливаются; 2) граница бильярда отходит наружу; 3) частица вдавливается в опору; 4) трос удлиняется.

Следствием этих деформаций является возникновение значительных кратковременных напряжений, что и характеризует наличие удара. Для точного описания этого явления недостаточно выбранных обобщенных координат: модели динамической теории упругости бесконечномерны (см. §2.2). Можно, однако, использовать упрощенные дискретные модели, рассматривавшиеся в первой части книги для определения закономерностей соударений твердых тел.

Более грубый метод связан со вторым предположением: продолжительность удара исчезающе мала, и он рассматривается как преобразование фазовых переменных по формулам вида

$$\mathbf{q}^+ = \mathbf{q}^-, \quad \dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- + \mathbf{I}, \quad I_1 \geq 0, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}(t^*, \mathbf{q}^-, \dot{\mathbf{q}}^-), \quad (6.34)$$

где знаки "минус" и "плюс" соответствуют началу и концу удара. Методы вычисления ударного импульса подробно обсуждались в первой части данной книги.

Формулы (6.34) показывают, что координаты системы при ударе остаются неизменными, а скорости изменяются по определенному закону. В результате при  $t > t^*$  значения  $\dot{\mathbf{q}}$  совместимы с односторонней связью  $q_1 \geq 0$ , и система совершает перелет (если  $\dot{q}_1^+ > 0$ ) или скольжение (если  $\dot{q}_1^+ = 0$ ).

Предельным случаем является так называемое касание ограничителья, реализующееся при условиях

$$q_1^- = 0, \quad \dot{q}_1^- = 0, \quad \ddot{q}_1^- > 0, \quad (6.35)$$

где величина  $\ddot{q}_1$  определяется по данным значениям координат и скоростей из уравнений движения (6.27).

Из формул (6.35) следует, что координата  $q_1$  положительна как при  $t < t^*$ , так и при  $t > t^*$  (рис. 6.4,д). Поэтому уравнения (6.27) остаются справедливыми и при  $t \geq t^*$ . Касание служит как бы промежуточным случаем между перелетом и невырожденным ударом, при котором скорости терпят разрыв.

**“Приземление” без удара.** Важным с практической точки зрения является случай безударного перехода от перелета к скользящему режиму (рис. 6.4,е). Примерами могут служить приземление лыжника — прыгуна с трамплина или мягкая посадка самолета. Привлекательность этого типа движения обусловлена отсутствием ударных перегрузок, вибраций, энергетических потерь и т.п.; свойства безударных движений будут рассмотрены в главе 8.

Формально безударное приземление выражается соотношениями:  $q_1 < 0$  при  $t < t^*$ ,  $q_1 \equiv 0$  при  $t \geq t^*$ , причем  $\dot{q}_1(t^* - 0) = 0$  (данная оговорка необходима, чтобы исключить случай пластического удара, схематично изображенный на рис. 6.4,ж).

**Пример.** Для частицы массы  $m$  на вибрирующем основании изменение координаты  $q_1$  описывается уравнением

$$\ddot{q}_1 = -m^{-1}g - \ddot{h}(t)$$

где  $m$  — масса частицы. Для безударного приземления на гладкое основание достаточно выполнения соотношений

$$q_1(t^*) = 0, \quad \dot{q}_1(t^*) = 0, \quad \ddot{h}(t^*) = -m^{-1}g, \quad \frac{d^3h(t^*)}{dt^3} > 0. \quad (6.36)$$

Заметим, что равенства в (6.36) являются также необходимыми условиями безударного приземления.

**“Тангенциальный” удар.** Интересный частный случай удара в системах с сухим трением связан с возникновением конечного (не бесконечно малого) ударного импульса при исчезающей малой начальной скорости сближения  $V_n$ . Следуя Пэнлеве [Пэнлеве, 1954], будем называть такой удар тангенциальным. Для выяснения условий его появления обратимся к интерпретации удара по Болотову (см. §3.1).

Допустим, что начальное направление скорости относительного скольжения соответствует точке на окружности трения, для которой выполнено неравенство  $dV_n/d\chi < 0$  (такие точки существуют, если прямая (3.30) пересекает круг трения). Согласно первой из формул (3.23), это означает, что

$$(\mathbf{B}\vec{N}_C, \vec{N}_C) < \mu(\mathbf{B}\vec{N}_C, \vec{e}_t^-), \quad (6.37)$$

где  $\vec{e}_t^-$  — орт, идущий в направлении начального скольжения.

Сценарий удара с начальным условием (6.37) обсуждался в §3.1, где было показано, что изображающая точка необходимо перейдет в полуплоскость  $dV_n/d\chi > 0$  и останется в ней до конца соударения. Если динамический коэффициент восстановления больше нуля, то  $V_n^+ > 0$  несмотря на то, что  $V_n^- = 0$  (рис. 6.4,3).

Следовательно, неравенство (6.37) является необходимым и достаточным условием тангенциального удара в системе с сухим трением.

**Примеры.** 1. В задаче о движении неоднородного диска на шероховатой опоре для построения матрицы  $\mathbf{B}$  можно воспользоваться формулами (6.15), (6.16), считая в них реакцию опоры импульсивной и пренебрегая силой тяжести и изменением координат при ударе. Для приращения скорости точки контакта имеем

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_C &= F[1 + (R + a \sin \varphi)^2 \rho^{-2}] - N a \rho^{-2} \cos \varphi (R + a \sin \varphi), \\ \Delta \dot{y}_C &= -F a \rho^{-2} \cos \varphi (R + a \sin \varphi) + N[1 + a^2 \rho^{-2} \cos^2 \varphi].\end{aligned}\quad (6.38)$$

Элементами матрицы  $\mathbf{B}$  являются коэффициенты в правой части формул (6.13). Если в начальный момент  $\dot{x}_C < 0$ , то  $\tilde{\epsilon}_t^- = (-1, 0)$ ,  $\vec{N}_C = (0, 1)$ , и неравенство (6.37) принимает вид

$$\rho^2 + a^2 \cos^2 \varphi - \mu a (R + a \sin \varphi) \cos \varphi < 0. \quad (6.39)$$

Сравнивая условие тангенциального удара с условием  $A_1 < 0$  невозможности корректного определения реакции (парадоксы Пенлеве), где величина  $A_1$  определена в (6.17), убеждаемся в их равносильности.

Поскольку движение диска плоскопараллельное, задача об ударе допускает алгебраическое решение (см.разд.1.3 третьей главы). Ввиду условия (6.39) и положительной определенности матрицы  $\mathbf{B}$  выполняется неравенство  $\mu^* < \mu$ , следовательно, при ударе направление скольжения меняется на противоположное и справедлива формула (3.33). Выразим величины  $I_2$  и  $I_2^*$  через начальные условия, используя динамический коэффициент восстановления  $\nu$ .

В начале удара диск скользит влево:

$$\dot{x}_C < 0, \quad \Delta \dot{y}_C = (b_{22} + \mu b_{12}) I_2^*, \quad \Delta \dot{x}_C = (\mu b_{11} + b_{12}) I_2^*. \quad (6.40)$$

По окончании этой фазы  $\dot{x}_C = 0$  следовательно,

$$I_2^* = -\dot{x}_C^- (\mu b_{11} + b_{12})^{-1}, \quad \dot{y}_C^* = -\dot{x}_C^- (\mu b_{11} + b_{12})^{-1} (b_{22} + \mu b_{12}) < 0, \quad (6.41)$$

где  $\dot{y}_C^*$  — нормальная составляющая скорости точки контакта в момент, совпадающий с остановкой скольжения.

После остановки скольжение возобновляется в противоположном направлении, при этом выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\dot{x}_C > 0, \quad \Delta \dot{y}_C &= (b_{22} - \mu b_{12})(I_2 - I_2^*), \\ \Delta \dot{x}_C &= (-\mu b_{11} + b_{12})(I_2 - I_2^*).\end{aligned}\quad (6.42)$$

Значение  $I_2 = I_2^o$  соответствует равенству  $\dot{y}_C = 0$ , т.е. окончанию фазы деформации. При учете (6.41) и (6.42) получаем

$$I_2^o = I_2^* + \dot{x}_C^- (\mu b_{11} + b_{12})^{-1} (b_{22} + \mu b_{12})(b_{22} - \mu b_{12})^{-1}. \quad (6.43)$$

Полная величина ударного импульса определяется формулами

$$I_2 = (1 + \nu) I_2^o, \quad I_1 = \mu(2I_2^* - I_2). \quad (6.44)$$

Собирая формулы (6.39), (6.41), (6.43), (6.44), получаем следующее выражение для нормальной составляющей скорости точки контакта в конце удара:

$$\dot{y}_C^+ = 2\mu\nu b_{12} \dot{x}_C^- (\mu b_{11} + b_{12})^{-1} > 0. \quad (6.45)$$

Таким образом, стереомеханическая теория предсказывает, что при тангенциальном ударе диск отрывается от опоры, причем скорость отскока пропорциональна начальной скорости скольжения.

К иному результату можно прийти при учете роли "конечных" сил в процессе удара, изученной в §2.4. Для этого надо отказаться от предположения об абсолютной жесткости контакта, помещая в точку  $C$  деформируемый элемент. Уравнение (6.17) примет вид

$$\ddot{\epsilon} = -A_0 - A_1 N(\epsilon, \dot{\epsilon}), \quad \epsilon(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}(t_0) = 0. \quad (6.46)$$

В случае, если  $A_0 > 0$ , получаем  $\epsilon < 0$  при  $t > t_0$  и  $N \equiv 0$ ; при этом знак величины  $A_1$  несуществен. Следовательно, ударный импульс равен нулю и тангенциальный удар имеет характер касания (рис. 6.4,e).

При выполнении неравенств  $A_0(t_0) < 0$ ,  $A_1(t_0) < 0$  вследствие неотрицательности реакции  $N$  удар необходимо будет невырожденным. В этом случае уже можно можно пренебречь первым членом в правой части формулы (6.46) и считать, что удар происходит в соответствии с уравнениями стереомеханики.

**2.** Тормозная колодка [Самсонов, 1980, Неймарк, Фуфаев, 1995]. Рассмотрим торможение колеса, вращающегося вокруг неподвижной вертикальной оси  $O$  при помощи колодки, которая может поворачиваться относительно оси  $O'$ , параллельной  $O$  и прижимается к колесу силой  $P$  (рис. 6.5).

Уравнения движения системы имеют вид

$$J\dot{\Omega} = -RF, \quad J_1\dot{\Omega}_1 = b(N - P) - aF, \quad F = \mu N \operatorname{sign} \Omega, \quad (6.47)$$

где  $R$  — радиус колеса,  $\Omega, \Omega_1$  — угловые скорости колеса и колодки,  $J, J_1$  — их моменты инерции,  $F$  — сила трения.

Пусть в начальный момент торможения  $\Omega > 0, \Omega_1 = 0$ , а коэффициент трения  $\mu$  больше, чем  $b/a$ . Тогда из второго уравнения (6.47)

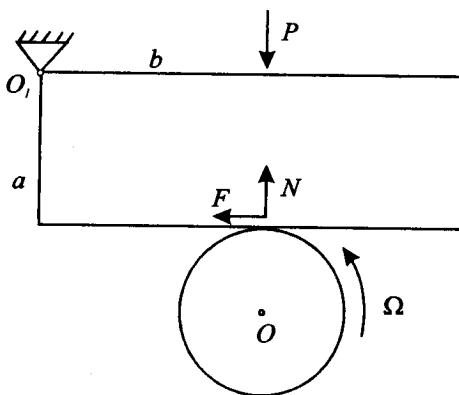


Рис. 6.5. Тормозная колодка

получим, что величина  $\dot{\Omega}_1$  отрицательна для любого  $N \geq 0$ , т.е. колодка поворачивается в сторону колеса. Следовательно, в рамках модели абсолютно твердых тел система не имеет решений.

Если учесть податливость контакта в нормальном направлении, то можно прийти к выводу: вначале величина  $N$  быстро возрастает от нуля, что сопровождается торможением колеса и его остановкой; затем  $\Omega \equiv 0$  и  $F \equiv 0$ , и накопленная энергия деформаций переходит в кинетическую энергию колодки.

Таким образом, торможение имеет импульсивный характер, и его можно описать количественно при помощи стереомеханической теории удара.

В первой фазе удара происходит остановка вращения колеса, из первого уравнения (6.47) находим

$$I_t^1 = J\Omega(t_0)/R, \quad I_n^1 = \mu^{-1}I_t^1, \quad J_1\Omega_1^1 = (b - \mu a)I_n^1.$$

В дальнейшем  $F = 0$ , и угловая скорость  $\Omega_1$  монотонно возрастает. При значении  $I_n^2 = I_n^1\mu a/b$  нормальная деформация максимальна, для полного нормального импульса получаем значение  $I_n = (1 + \nu)I_n^2$ . Следовательно,

$$\Omega^+ = 0, \quad J_1\Omega_1^+ = a\nu J\Omega(t_0)/R. \quad (6.48)$$

Формула (6.48) получена в предположении об идеальности шарниров.

Следует заметить, что несмотря на значительное число теоретических работ, посвященных тангенциальному удару, отсутствуют экспериментальные данные, подтверждающие существование этого явления в реальных системах. Поэтому нельзя однозначно сказать, являются ли отмеченные в системах с трением парадоксы их сущностью или артефактом, обусловленным погрешностями модели.

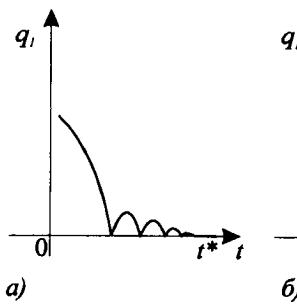


Рис. 6.6. Бесконечноударные процессы

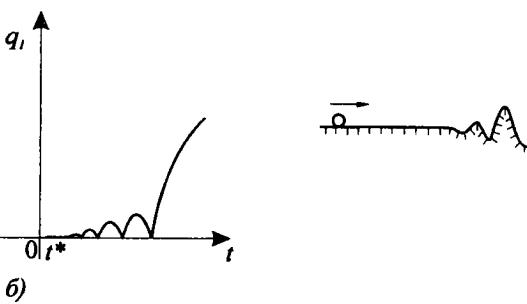


Рис. 6.7. Невыпуклый биллиард

**Другие виды движения.** Рассмотренные выше основные типы движения в системах с односторонней связью не исчерпывают всех возможностей. Помимо них существуют движения, включающие бесконечное число чередующихся участков напряженного и ослабленного состояния связи в сколь угодно малой окрестности данного значения  $t^*$ . Рассмотрим некоторые примеры.

**Примеры.** 1. [Мак-Миллан, 1951]. Шарик отвесно падает на горизонтальную опору, при ударах (продолжительность которых равна нулю) коэффициент восстановления скорости равен  $e \in (0, 1)$ . Если при первом ударе скорость сближения  $V_1^-$  равна единице, то скорость отскока  $V_1^+$  будет равна скорости сближения при втором ударе  $V_2^-$  и равна  $e$ . Далее имеем  $V_2^+ = V_3^- = e^2$ ,  $V_3^+ = V_4^- = e^3$ , и т.д. Скорости образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, что свидетельствует о бесконечном числе ударов в принятой модели. При этом промежутки времени между последовательными соударениями также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $e$ . Поскольку эта прогрессия имеет конечную сумму, то данный бесконечноударный процесс сходится за конечное время (см. также [Нагаев, 1985, Фейгин, 1994]). Примерный график зависимости высоты шарика над опорой представлен на рис. 6.6.a.

2. Более сложный и удивительный случай связан с бесконечно-ударным процессом, происходящем при  $t > t^*$ , причем  $q_1 \equiv 0$  при  $t \leq t^*$  (рис. 6.6,б). Одним из примеров рождения такого процесса может служить задача о движении частицы вдоль границы невыпуклого биллиарда. Если граничная кривая имеет прямолинейный участок, к которому с другой стороны примыкает дуга, имеющая бесконечное число точек перегиба (рис. 6.7), то после схода с прямой невозможно как движение вдоль границы ( $q_1 \equiv 0$ ), так и внутри биллиардной области ( $q_1 > 0$ ) [Козлов, Трещёв, 1991].

С другой стороны, в работах [Paoli, Schatzman, 1993, a, b] доказано следующее утверждение.

**Теорема 6.1.** Пусть некоторая механическая система с координатами  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  подчинена односторонней связи  $\mathbf{q}(t) \in \mathbf{K}$ , где  $\mathbf{K}$  — выпуклое замкнутое множество с гладкой (класса  $C^2$ ) границей. Вне границы движение описывается системой уравнений

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (6.49)$$

где правая часть удовлетворяет условиям Липшица по последним двум аргументам, причем по  $\mathbf{q}$  — равномерно. В точках границы  $\partial\mathbf{K}$  уравнения (6.49) заменяются на

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \lambda \mathbf{n}, \quad \lambda \geq 0, \quad (6.50)$$

где  $\mathbf{n}$  нормаль к  $\partial\mathbf{K}$ , направленная внутрь  $\mathbf{K}$ ,  $\lambda$  — некоторый коэффициент. Последний принимает такие значения, что для всех  $\mathbf{q}(t) \in \partial\mathbf{K}$  выполняется соотношение

$$\dot{\mathbf{q}}(t+0) = -e\dot{\mathbf{q}}_n(t-0) + \dot{\mathbf{q}}_t(t-0), \quad (6.51)$$

т.е. касательная составляющая скорости сохраняется, а нормальная ее составляющая умножается на коэффициент восстановления с обращением знака (неупругий удар без трения).

Тогда решение системы (6.49) – (6.51) с начальными условиями  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0 \in \mathbf{K}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^0 \in \mathbb{R}^n$  всегда существует.

Это решение можно аппроксимировать, заменяя абсолютно жесткую границу  $\partial\mathbf{K}$  на вязкоупругую среду Кельвина – Фохта (см. §3.2). Возьмем последовательность решений, отвечающих значениям жесткостей  $c_n \rightarrow \infty$  (при этом коэффициенты вязкости  $b_n$  изменяются согласовано с  $c_n$ , так что коэффициент восстановления  $e$  остается неизменным). Из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Оказывается, что ее предел является решением задачи Коши для системы (6.49)–(6.51).

Данную теорему можно обобщить и на тот случай, когда область возможных движений  $\mathbf{K}$  невыпукла. Для этого достаточно ввести в окрестности точки  $\mathbf{q}^0 \in \partial\mathbf{K}$  новую систему координат  $\mathbf{q}^*$  таким образом, чтобы область  $\mathbf{K}$  описывалась неравенством  $q_1^* \geq 0$ , а вектор нормали  $\mathbf{n}$  в новых координатах имел вид  $\mathbf{n}^* = (1, 0, \dots, 0)$  (такая система координат носит название полугеодезической [Рашевский, 1967], более подробно о ее построении будет сказано в следующем параграфе). Тогда изменятся правые части уравнений (6.49) и (6.50), а граничное условие (6.51) сохранит свою форму. В новой системе координат решение существует, значит, оно существует и в исходных координатах.

В общем случае движение при  $t > t_0$  не является ни перелетом, ни скользящим режимом, а состоит из бесчисленного множества чередующихся перелетов и ударов (рис. 6.6б). К этому случаю, в частности, относится и вышеупомянутый пример невыпуклого биллиарда.

Заметим, что решение задачи Коши в системе с односторонней связью не обладает свойством единственности [Bressan, 1959, Schatzman, 1978, 1979]. Это довольно неожиданное свойство можно проиллюстрировать следующим примером.

**Пример.** Возьмем на плоскости кривую, заданную уравнением

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ x^3, & \text{если } x > 0. \end{cases} \quad (6.52)$$

Впишем в кривую (6.52) ломаную с вершинами в точках  $M_j$  с абсциссами  $x_j = 1/j$ ,  $j \in N$ . Угловой коэффициент отрезка, соединяющего точки  $M_j$  и  $M_{j+1}$  вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_j = k_j = \frac{y(x_j) - y(x_{j+1})}{x_j - x_{j+1}} = \frac{3j^2 + 3j + 1}{j^2(j+1)^2}. \quad (6.53)$$

Будем строить границу биллиарда  $y = g(x)$ , проходящую через все точки  $M_j$  и обеспечивающую выполнение закона упругого отражения для ломаной траектории с вершинами в этих точках. Это означает, что

$$g(x_j) = x_j^3, \quad g'(x_j) = \operatorname{tg} \frac{\alpha_j + \alpha_{j-1}}{2} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (6.54)$$

Нетрудно построить функцию  $g(x)$ , выпуклую книзу при  $x \geq 0$  и удовлетворяющую всем условиям (6.54). Проще всего это сделать, полагая

$$g(x) = g(x_j) + g'(x_j)(x - x_j) + \frac{1}{2}C_j(x - x_j)^2 \quad \text{при } x \in (x_j, x_{j-1}) \quad (6.55)$$

$$C_j = \frac{g'(x_j) - g'(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}$$

( $g(x) \equiv 0$  при  $x < 0$ ). Тогда задача Коши для материальной частицы, движущейся не ниже кривой  $y = g(x)$  с начальными условиями  $x(t_0) = y(t_0) = 0$ ,  $\dot{x}(t_0) = 1$ ,  $\dot{y}(t_0) = 0$  допускает как минимум два решения: для одного из них  $y \equiv g(x)$  (частица скользит вдоль границы), другое описывается бесконечнозвенной ломаной с вершинами в точках  $M_j$ .

Некоторые достаточные условия единственности получены в работах [Schatzman, 1979, Carriero, Pascali, 1982, Percivale, 1985, 1991]. В частности, в биллиардной системе (внешние силы отсутствуют, а удары упруги) для единственности достаточно одного из двух условий: 1) функция  $f(\mathbf{q})$  бесконечно дифференцируема, а поверхность  $f(\mathbf{q}) = 0$  имеет строго отрицательную гауссову кривизну [Schatzman, 1979]; 2) функция  $f(\mathbf{q})$  — вещественно-аналитична [Percivale, 1991].

Следует заметить, что неединственность решения присуща лишь системам с абсолютно жесткими односторонними связями, в то время как дискретные модели контакта корректны. Если при стремлении

жесткости к бесконечности решения сходятся к некоторому пределу, то этот предел естественно считать "истинным" решением.

Данная идея аналогична решению парадоксов Пэнлеве в системах с сухим трением (см. §6.1), однако строгое обоснование возможности ее осуществления является довольно сложной математической задачей, не решенной до конца к настоящему времени. Некоторые результаты в данном направлении получены В.В.Козловым и его учениками (см. [Козлов, 1988], [Козлов, Трещёв, 1991], [Дерябин, 1994], [Дерябин, Козлов, 1995]). В частности, в [Дерябин, Козлов, 1995] рассматривалась модель среды Кельвина - Фойхта с присоединенными массами. Здесь было доказано, что если система с абсолютно жесткой связью обладает решением типа скользящего режима, то это решение будет пределом решений вспомогательной системы при согласованном стремлении коэффициентов жесткости, вязкости и присоединенных масс к бесконечности.

Исходя из этих результатов, в приведенном выше примере "истинным" решением следует считать скользящий режим  $y \equiv g(x)$ .

**Кратный удар в системе с несколькими односторонними связями.** В системах с несколькими односторонними связями вида (6.3) возможен удар о две или более такие связи одновременно. Закономерности таких ударов подробно обсуждались в пятой главе, где было выяснено, что корректное определение ударного импульса при кратном ударе, как правило, невозможно. Исключение составляет регулярный случай, характеризующийся взаимной независимостью импульсивных реакций в ударных парах. Выясним формальный смысл этого условия в системе с двумя идеальными связями вида

$$q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0. \quad (6.56)$$

Уравнения движения (6.26) выглядят так:

$$[T]_1 = Q_1 + R_{11}, \quad [T]_2 = Q_2 + R_{22}, \quad [T]_j = Q_j \quad (j = 3, \dots, n). \quad (6.57)$$

Следовательно, уравнения импульсивного движения имеют вид (здесь импульсы "конечных" сил считаем пренебрежимо малыми)

$$\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = I_1, \quad \Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = I_2, \quad \Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0. \quad (6.58)$$

Выразим из системы (6.58) приращения обобщенных скоростей:

$$\Delta \dot{q}_l = M_{1l} I_1 + M_{2l} I_2 \quad (l = 1, \dots, n), \quad (6.59)$$

где  $M_{ij}$  — элементы матрицы, обратной к матрице кинетической энергии системы  $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ .

Независимость ударных реакций выражается равенством

$$M_{12} = 0 \quad (6.60)$$

означающим ортогональность координат  $q_1$  и  $q_2$ .

Для связей, представленных в форме (6.3), условие ортогональности выглядит так:

$$(\operatorname{grad} f_1, \mathbf{A}^{-1} \operatorname{grad} f_2) = 0. \quad (6.61)$$

Геометрически равенство (6.61) означает ортогональность нормалей к поверхностям удара в смысле метрики Якоби [Якоби, 1936]. В такой форме условие ортогональности без труда можно обобщить на случай удара о три и более идеальных связи одновременно.

**Пример.** Тело, опирающееся на гладкое основание двумя гранями (см. §4.3), имеет кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} M\rho^2 \dot{\varphi}^2, \quad (6.62)$$

а односторонние связи, выражающие неотрицательность ординат опорных точек, выражаются неравенствами

$$y - b_1(\varphi) \geq 0, \quad y - b_2(\varphi) \geq 0. \quad (6.63)$$

В формулах (6.63)  $b_{1,2}$  обозначает вертикальные составляющие векторов  $\vec{C}_1G$  и  $\vec{C}_2G$  соответственно.

Матрица кинетической энергии и обратная к ней матрица диагональны, а векторы  $\operatorname{grad} f_{1,2}$  можно вычислить, дифференцируя левые части неравенств (6.63) при учете формулы Эйлера:

$$A^{-1} = M^{-1} \operatorname{diag}\{1, 1, \rho^{-2}\}, \quad \operatorname{grad} f_1 = (0, 1, -a_1), \quad \operatorname{grad} f_2 = (0, 1, a_2),$$

где  $a_{1,2}$  — горизонтальные составляющие векторов  $\vec{C}_1G$  и  $\vec{G}\vec{C}_2$  соответственно.

Условие ортогональности (6.61) выглядит так (ср. с формулой (4.89)):

$$\rho^2 = a_1 a_2. \quad (6.64)$$

### 6.3. МЕТОД ОТРАЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ С УПРУГИМ УДАРОМ БЕЗ ТРЕНИЯ

**Метод припасовывания.** Как было установлено в предыдущем параграфе, движение системы с односторонними связями складывается из участков непрерывности фазовых переменных и ударов, при которых эти переменные изменяются скачком. Дифференциальные уравнения описывают изменение координат и скоростей со временем лишь в промежутках между ударами, а последние математически выражаются системой алгебраических уравнений для определения новых значений обобщенных скоростей. На первый взгляд, уравнения этих двух

типов нельзя свести к единой форме. Поэтому традиционный подход к построению фазовых траекторий, известный как метод "припасовывания", состоит в поэтапном интегрировании системы на каждом из интервалов безударного движения с расчетом начальных условий для каждого из интервалов по конечным значениям переменных на предыдущем интервале [Кобринский, Кобринский, 1973, 1981, Рагульскене, 1974]. В принципе данный подход позволяет построить разрывную фазовую траекторию, однако он имеет ряд существенных недостатков.

Во-первых, моменты ударов априори неизвестны. Они зависят от начальных условий и определяются в процессе интегрирования уравнений движения как корни уравнения  $q_1(t) = 0$ . Как правило, это уравнение невозможно решить аналитически, более того, зачастую даже неясно, имеет ли оно решение. При численном интегрировании для достижения заданной точности требуется значительное усложнение алгоритма [Lötstedt, 1982, Osterreicher, 1988].

Во-вторых, для разрывных траекторий разрушаются привычные топологические понятия: окрестность, связность и т.п. Ввиду этого требуются новые определения качественных понятий, например, устойчивости [Gayeskii, Radzhevskii, 1987, Ахметов, Перестюк, 1992].

В-третьих, само припасовывание может представлять собой технически сложную и громоздкую задачу [Журавлев, Клинов, 1988, Журавлев, Фуфаев, 1993].

**Пример.** Частица на вибрирующем основании (см. §6.1). Пусть  $z_0, \dot{z}_0$  — начальные значения аппликаты частицы и вертикальной составляющей ее скорости. Во время перелета

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2, \quad (6.65)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения. Для определения момента удара частицы об опору  $t'$  необходимо решить уравнение

$$z(t') = h(t'), \quad (6.66)$$

где  $h(t)$  — заданная периодическая функция (высота опоры), а величина  $z(t)$  задается формулой (6.65). Очевидно, что даже в простом случае гармонических колебаний, когда  $h(t) = \epsilon \sin \omega t$ , не существует элементарной функции  $t' = t'(z_0, \dot{z}_0)$ , удовлетворяющей уравнению (6.66).

Это обстоятельство является серьезным препятствием при качественном анализе системы. Чтобы преодолеть его, в [Holmes, 1982] задача рассматривалась в ограниченной постановке: считалось, что величина  $\epsilon$  пренебрежима мала, в то время как произведение  $\epsilon \omega$  конечно. К сожалению, результаты, полученные в упрощенной системе, не переносятся автоматически на исходную задачу (см. [Варат и др., 1986]).

Сделанные замечания свидетельствуют о целесообразности поиска иных методов исследования.

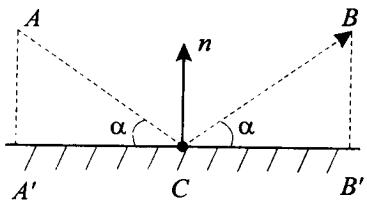


Рис. 6.8. Закон оптического отражения

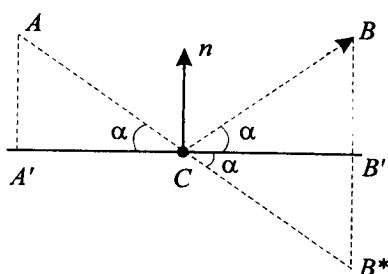


Рис. 6.9. Метод отражения

**Метод выпрямления биллиардной траектории.** Математическим биллиардом называют частицу, движущуюся по инерции внутри некоторой плоской или пространственной области и упруго отражающуюся от ее границ. В первом параграфе упоминался биллиард Биркгофа, для которого область возможного движения плоская и выпуклая.

Для биллиардной системы характерен закон абсолютно упругого отражения, аналогичный закону отражения в оптике и выражаемый следующим правилом.

**Закон оптического отражения.** *Отраженный и падающий лучи лежат в плоскости, нормальной поверхности зеркала, а углы падения и отражения равны между собой* (рис. 6.8).

Выясним механический аналог данного условия. В отсутствие трения ударный импульс  $\vec{I}$  направлен по нормали  $\vec{n}$ , поэтому касательная составляющая скорости частицы при ударе остается неизменной. Из равенства углов  $ACA'$  и  $BCB'$  на рис. 6.8 отсюда следует

**Закон биллиардного отражения.** *Касательная составляющая скорости остается неизменной, а нормальная ее составляющая изменяется на противоположную.*

Для решения некоторых биллиардных задач применяется удобный метод "зеркального отражения" или "выпрямления биллиардной траектории", принадлежащий известному немецкому математику Г.Шварцу. В его основе лежит замена отраженной части траектории на ее зеркальное отражение. В силу закона отражения, в результате такой замены биллиардная траектория будет прямолинейной. Подобно герояне сказки Кэрролла, мы переходим в Зазеркалье!

**Пример.** Пусть требуется построить траекторию, попадающую из точки  $A$  в точку  $B$  после отражения от прямолинейной границы биллиарда. Для решения этой задачи достаточно найти точку  $B^*$ , симметричную с  $B$  относительно границы, а затем соединить  $A$  и  $B$  прямолинейным отрезком. Часть этого отрезка, лежащая внутри бил-

лиарда, является участком искомой траектории, а вне биллиарда — ее отражением (рис. 6.9).

Некоторые приложения метода отражения можно найти в [Гальперин, Земляков, 1990].

**Биллиардная аналогия в системе с одной степенью свободы.** Запишем уравнения движения системы  $\mathcal{M}$  с одной степенью свободы и неудерживающей связью в общем виде:

$$\ddot{q} = f(t, q, \dot{q}), \quad q \geq 0. \quad (6.67)$$

Абсолютно упругий удар характеризуется равенством

$$\dot{q}^+ = -\dot{q}^-. \quad (6.68)$$

Конфигурационным пространством системы (6.67) является полусось; если изображающая точка достигает начала координат, то она отскакивает назад по правилу (6.68). Такое поведение аналогично одномерному биллиарду с точечной границей. Разница состоит лишь в том, что в биллиарде движение происходит с постоянной скоростью, а для рассматриваемой системы скорость изменяется в соответствии с уравнениями (6.67).

Воспользуемся методом выпрямления биллиардной траектории для преобразования системы (6.67) к более простому виду. Во-первых, вспомогательная система  $\mathcal{M}^*$  не должна подчиняться связям, поэтому ее конфигурационным пространством является вся ось  $s$ . Во-вторых, траектории этой системы должны совпадать с траекториями  $\mathcal{M}$  в области  $s > 0$  и являться их зеркальным отражением относительно начала в области  $s < 0$ .

Следовательно, связь между двумя системами описывается формулой

$$q = |s|, \quad (6.69)$$

откуда

$$\dot{q} = \dot{s} \operatorname{sign} s. \quad (6.70)$$

Соотношения (6.69), (6.70) позволяют построить траектории системы  $\mathcal{M}$  из траекторий вспомогательной системы  $\mathcal{M}^*$ . Обратное преобразование определено неоднозначно: каждая точка фазовой полуплоскости  $(q, \dot{q})$ ,  $q > 0$  имеет, очевидно, два прообраза на фазовой плоскости  $(s, \dot{s})$ , симметричных относительно начала координат.

Переходя к новым переменным в уравнении (6.67), получим уравнение движения системы  $\mathcal{M}^*$  в виде

$$\ddot{s} = f(t, |s|, \dot{s} \operatorname{sign} s). \quad (6.71)$$

Заметим, что переменные  $s, \dot{s}$  могут принимать произвольные значения и остаются непрерывными во все время движения.

Уравнение (6.71) имеет особенность при  $s = 0$ , так как правая часть при этом терпит разрыв. Если  $s = 0, \dot{s} \neq 0$ , то фазовая кривая пересекает прямую  $s = 0$  в единственной точке, и ее вид не зависит от доопределения функции  $f$  при  $s = 0$ . В случае  $q = \dot{q} = 0$  в исходной системе (6.67) значение  $\ddot{q}$  будет положительным, если  $f > 0$  и равным нулю, если  $f \leq 0$ . Для сохранения соответствия между двумя системами необходимо доопределить правую часть в формуле (6.71) так:

$$\ddot{s} \Big|_{s=0} = \max\{0, f(t, 0, 0)\}. \quad (6.72)$$

Отметим два принципиальных различия между системами (6.67) и (6.71). Во-первых, фазовым пространством для первой из них служит полуплоскость  $q \geq 0$ , а для второй — вся плоскость  $(s, \dot{s})$ . Во-вторых, уравнение (6.71) описывает движение на произвольном интервале времени, а (6.67) — только на участках безударного движения, и для учета ударов необходимы дополнительные операции.

**Пример.** Движение вдоль вертикали тяжелого невращающегося шарика не ниже горизонтального основания; удары абсолютно упруги. Обозначим  $q$  расстояние от шарика до опоры, тогда уравнение движения в области  $q > 0$  имеет вид

$$\ddot{q} = -g. \quad (6.73)$$

Общее решение уравнения (6.73) выглядит так

$$\dot{q}(t) = \dot{q}^o - g(t - t^o), \quad q(t) = q^o + \dot{q}^o(t - t^o) - \frac{1}{2}g(t - t^o)^2, \quad (6.74)$$

т.е. траектории на фазовой полуплоскости имеют вид парабол с осью симметрии  $q$  (рис. 6.10,а). Приравнивая величину  $q(t)$  в формуле (6.74) к нулю, можно определить момент удара из квадратного уравнения, а затем значение  $\dot{q}^-$  и максимальную высоту шарика над опорой  $h$ :

$$\dot{q}^- = -(2gh)^{1/2}, \quad h = q^o + \frac{1}{2}\dot{q}^{o2}. \quad (6.75)$$

После удара изображающая точка попадает на ту же параболу (6.74). Следовательно, движение описывается разрывной периодической траекторией, а период  $\tau^o$  равен

$$\tau^o = 2(2h/g)^{1/2}. \quad (6.76)$$

Зависимость  $q(t)$  представлена на рис. 6.11 в виде графика периодической непрерывной функции, недифференцируемой в моменты ударов. Если зеркально отразить каждую вторую полуволну данного

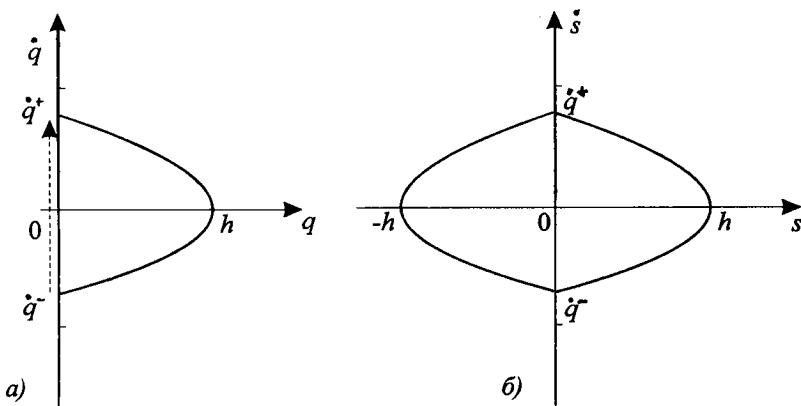


Рис. 6.10. Отражение фазовой кривой в системе "шарик на опоре"

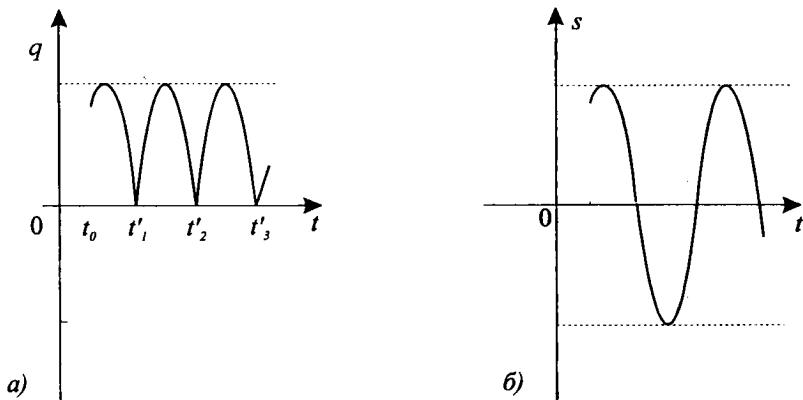


Рис. 6.11. Орбиты основной и вспомогательной систем

графика относительно оси абсцисс, получим график дифференцируемой функции  $s(t)$  (рис. 6.11,б). Вспомогательная переменная  $s$  удовлетворяет уравнению

$$\ddot{s} = -g \operatorname{sign} s. \quad (6.77)$$

На фазовой плоскости  $(s, \dot{s})$  изображающая точка описывает замкнутую кривую, движение по которой происходит за время  $2\tau^o$  (рис. 6.10,б). В силу соответствия (6.69), (6.70) точки этой кривой, лежащие в левой полуплоскости, отвечают симметричным точкам плоскости  $(q, \dot{q})$ .

**Уравнения удара в обобщенных координатах.** Для исследования удара системы в обобщенных координатах воспользуемся уравнениями (6.26). Будем считать, что система подчинена единственной

идеальной односторонней связи  $q_1 \geq 0$  и некоторым идеальным двусторонним связям. Случай дифференциальных (неголономных) связей рассматривался в [Неймарк, Фуфаев, 1967, Журавлев, Фуфаев, 1993, Иванов 1995, б].

Идеальность связи  $q_1 \geq 0$  выражается равенствами  $R_{21} = R_{31} = \dots = R_{n1}$  в уравнениях (6.26). Умножим обе части каждого из них на  $dt$  и проинтегрируем на интервале  $[t_0, t_0 + \tau]$ , соответствующем удару. При сделанных допущениях получим оценки вида

$$\Delta p_1 = \int_{t_0}^{t_0+\tau} R_{11}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt + O(\tau), \quad \Delta p_j = O(\tau) \quad (j = 2, \dots, n), \quad (6.78)$$

где  $p_k = \partial T / \partial \dot{q}_k$  — обобщенные импульсы.

Отбросим в (6.78) члены порядка  $\tau$ :

$$\Delta p_1 = I_1, \quad \Delta p_j = 0 \quad (j = 2, \dots, n). \quad (6.79)$$

Уравнения удара в форме (6.79) были получены Аппелем [Аппель, 1896, 1960, т.2, п. 522], с их помощью можно определить диапазон физически допустимых значений ударного импульса  $I_1$ . Для этого заметим, что в натуральной механической системе кинетическая энергия является квадратичной формой относительно обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad p_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j. \quad (6.80)$$

Выразим кинетическую энергию через  $\dot{q}_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ :

$$T = \frac{1}{2} a_{11}^*(\mathbf{q}) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n a_{ij}^*(\mathbf{q}) p_i p_j. \quad (6.81)$$

В формуле (6.81) величина  $a_{11}^*$  положительна, так как кинетическая энергия положительно определена, а произведения вида  $\dot{q}_1 p_j$ , как показано ниже, отсутствуют. Для выражения коэффициентов  $a_{ij}^*$  через  $a_{ij}$  представим равенство (6.81) в матричном виде:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}^T, \quad (\dot{q}_1, p_2, \dots, p_n) = \dot{\mathbf{q}} \mathbf{C}, \quad (6.82)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \|a_{ij}\|_{i,j=2}^n, \quad \mathbf{A}_1 = (a_{12}, \dots, a_{1n}), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{pmatrix}$$

Для обратной матрицы  $\mathbf{C}^{-1}$  имеем такое выражение:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда для матрицы  $\mathbf{A}^*$  получаем

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} - \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$a_{11}^* = a_{11} - \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1^T, \quad a_{1j}^* = 0, \quad \|a_{ij}^*\|_{i,j=2}^n = \mathbf{A}_0^{-1}. \quad (6.83)$$

При учете выражения (6.81) и уравнений (6.79) приращение кинетической энергии при ударе равно

$$\Delta T = \frac{1}{2} a_{11}^* \left[ (\dot{q}_1^+)^2 - (\dot{q}_1^-)^2 \right]. \quad (6.84)$$

Это приращение неположительно, если

$$|\dot{q}_1^+| \leq |\dot{q}_1^-|. \quad (6.85)$$

При учете того, что  $\dot{q}_1^- < 0$ ,  $\dot{q}_1^+ \geq 0$ , неравенство (6.85) можно записать в форме

$$\dot{q}_1^+ = -e\dot{q}_1^-, \quad e \in [0, 1]. \quad (6.86)$$

Равенство (6.86) аналогично по форме определению ньютоновского коэффициента восстановления (3.15). Упругому удару соответствует значение  $e = 1$ , при этом кинетическая энергия вследствие (6.84) сохраняется.

Заметим, что величина  $e$  определяется не только свойствами ударной пары, но и видом наложенных на систему двусторонних связей (см. главу 4).

В системах с внешним возбуждением кинетическая энергия может содержать члены, линейные относительно  $\dot{q}_1$ . В этом случае понятие упругого удара уже не связано с сохранением кинетической энергии, и его определяют при помощи равенства (6.86) где  $e = 1$ .

Например, для частицы на вибрирующем основании кинетическая энергия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2} [\dot{q}_1 + \dot{h}(t)]^2.$$

При упругом ударе

$$T^- = \frac{1}{2} [\dot{q}_1^- + \dot{h}(t_0)]^2, \quad T^+ = \frac{1}{2} [\dot{q}_1^+ - \dot{h}(t_0)]^2.$$

Так как  $\dot{q}_1^- < 0$ , то в случае  $\dot{h}(t_0) < 0$  кинетическая энергия при ударе уменьшается, а в случае  $\dot{h}(t_0) > 0$  — увеличивается. Равенство  $T^+ = T^-$  имеет место лишь при условии  $\dot{h}(t_0) = 0$ .

**Уравнения Раяса для многомерных систем.** Прямолинейная попытка обобщения метода отражения на системы с несколькими степенями свободы при помощи замены (6.69), (6.70) обречена на неудачу. Причина кроется в специфике законов отражения траектории в конфигурационном пространстве от плоскости удара  $q_1 = 0$ .

**Пример.** Рассмотрим удар частицы, движущуюся в биллиардной области  $\rho \leq F(\varphi)$ , о границу. Обозначим  $q_1 = F(\varphi) - \rho$ ,  $q_2 = \varphi$ . Кинетическая энергия имеет вид (масса равна единице):

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} [(F' \dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + (F - q_1)^2 \dot{q}_2^2]. \quad (6.87)$$

При ударе величина  $\dot{q}_1$  изменяется на противоположную, а обобщенный импульс

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = F'(F' \dot{q}_2 - \dot{q}_1) + (F - q_1)^2 \dot{q}_2 \quad (6.88)$$

остается непрерывным (см. предыдущий раздел). Следовательно, если  $F' \neq 0$ , то фазовая траектория в пространстве переменных  $s, \dot{s}, q_2, \dot{q}_2$  при ударе терпит разрыв.

Переменные для непрерывного представления можно задать по-разному. Один из способов предложен в работах [Журавлев, 1976, 1977, 1978]: в качестве фазовых переменных выбираются величины  $s, \dot{s}, q_j, p_j$  ( $j = 2, 3, \dots, n$ ). Преимущество обобщенных импульсов  $p_j$  в сравнении со скоростями  $\dot{q}_j$  состоит в их неизменности при ударах без трения.

Не ограничивая общности, будем считать кинетическую энергию квадратичной формой относительно обобщенных скоростей. В том случае, если она содержит члены первой или нулевой степени, соответствующие им производные Эйлера – Лагранжа следует перенести в правые части уравнений (6.27), добавляя их к обобщенным силам.

Функцию  $\mathcal{R}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  определим формулой

$$\mathcal{R} = T - \sum_{j=2}^n \dot{q}_j p_j. \quad (6.89)$$

Уравнения движения в области  $q_1 > 0$  в форме Раяса имеют вид

$$[\mathcal{R}]_1 = Q_1, \quad \dot{q}_j = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j} + Q_j \quad (j = 2, \dots, n), \quad (6.90)$$

а в случае  $q_1 = 0$  к правой части первого из этих уравнений добавляется реакция связи.

Переход к вспомогательной системе  $\mathcal{M}^*$ , свободной от неудерживающей связи, производится по формулам (6.69), (6.70) без изменения

переменных  $q_j$ ,  $p_j$ . Эта система также описывается уравнениями в форме Рауса

$$[\mathcal{R}^*]_s = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial s} \right) - \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial s} = Q_1 \operatorname{sign} s, \quad \dot{q}_j = -\frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial q_j}, \quad (6.91)$$

$$\mathcal{R}^*(t, s, \dot{s}, q_j, p_j) = \mathcal{R}(t, q_1 \operatorname{sign} s, \dot{q}_1 \operatorname{sign} s, q_j, p_j).$$

Примечательное свойство уравнений (6.91) состоит в том, что они позволяют описать как перелеты, так и удары. Их недостаток состоит в неединственности решения: траектория с начальными условиями  $s(t_0) = 0$ ,  $\dot{s}(t_0) = 0$ , может уйти в область  $s > 0$  или  $s < 0$ , что соответствует одной и той же траектории исходной системы  $\mathcal{M}$ .

**Пример.** Для биллиарда Биркгофа импульс имеет форму (6.88), и функция Рауса выглядит так:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{1}{2} [(1 - F'^2) \dot{q}_1^2 - 2F' \dot{q}_1 p_2 - p_2^2] [F'^2 + (F - q_1)^2]^{-1}, \\ \mathcal{R}^* &= \frac{1}{2} [(1 - F'^2) \dot{s}^2 - 2F' \dot{s} p_2 \operatorname{sign} s - p_2^2] [F'^2 + (F - |s|)^2]^{-1}. \end{aligned}$$

В частном случае кругового биллиарда, принимая центр круга за полюс, получим  $F = \text{const}$ ,  $F' \equiv 0$ ,  $p_2 = (F - q_1)^2 q_2$ . Поэтому при ударах наряду с  $p_2$  остается непрерывной и обобщенная скорость  $\dot{q}_2$ .

**Непрерывное представление в гамильтоновой форме.** Последний пример показывает, что в некоторых случаях переменные  $\dot{q}_j$  при ударах не изменяются, и их можно использовать для непрерывного представления движения. Выясним, при каких условиях это имеет место.

Из уравнений удара без трения (6.79), (6.80) получаем

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \Delta \dot{q}_j = 0 \quad (k = 2, \dots, n). \quad (6.92)$$

В системе линейных уравнений (6.92) выразим приращения скоростей  $\dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  через  $\Delta \dot{q}_1$ . В принятых обозначениях

$$(\Delta \dot{q}_2, \dots, \Delta \dot{q}_n) = -\Delta \dot{q}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0^{-1}. \quad (6.93)$$

Следовательно, сохранение скоростей при ударе эквивалентно соотношениям

$$a_{1j} = 0 \quad (j = 2, \dots, n). \quad (6.94)$$

Условия (6.94) выражают ортогональность координат  $q_1$  и  $q_j$ . Как известно из римановой геометрии [Рашевский, 1967], этим условиям всегда можно удовлетворить за счет подходящего выбора обобщенных

координат  $q_2, \dots, q_n$  без изменения  $q_1$ . В [Иванов, Маркеев, 1984] построена приводящая замена переменных. Опишем эту замену в случае  $n = 2$ .

Определим новые переменные по формулам

$$q_1 = q_1^*, \quad q_2 = \phi(q_1^*, q_2^*), \quad (6.95)$$

где функцию  $\phi$  подберем таким образом, чтобы в выражении кинетической энергии отсутствовало произведение  $\dot{q}_1^* \dot{q}_2^*$ . Выражая обобщенные скорости из формул (6.95), получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{11}^* = a_{11} + 2a_{12}\phi_1 + a_{22}\phi_1^2, \\ a_{12}^* &= a_{12}\phi_2 + a_{22}\phi_1\phi_2, \quad a_{22}^* = a_{22}\phi_2^2, \quad \phi_{1,2} = \frac{\partial \phi}{\partial q_{1,2}}. \end{aligned} \quad (6.96)$$

В новых переменных условие ортогональности (6.94) будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$\phi_1 = -a_{12}(q_1^*, \phi)/a_{22}(q_1^*, \phi), \quad \phi(0, q_2^*) = q_2^*. \quad (6.97)$$

Равенства (6.97) при фиксированном значении  $q_2^*$  представляют собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции  $\phi$ ; по теореме Линделёфа [Камке, 1976]  $\phi_2 \neq 0$  при  $q_1^* > 0$ , так что решение этой задачи определяет обратимую замену переменных (6.95).

**Пример.** Тяжелая частица движется в некоторой вертикальной плоскости внутри чаши, имеющей форму полусфера единичного радиуса (рис. 6.12). В декартовых координатах  $x, z$  односторонняя связь задается неравенством

$$z \geq 1 - (1 - x^2)^{1/2}.$$

Полагая

$$q_1 = z - 1 + (1 - x^2)^{1/2}, \quad q_2 = x,$$

получим для коэффициентов кинетической энергии такие выражения:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = q_2(1 - q_2^2)^{-1/2}, \quad a_{22} = (1 - q_2^2)^{-1}.$$

Уравнение (6.97) принимает вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_1^*} = -\phi(1 - \phi^2)^{1/2}, \quad \phi(0, q_2^*) = q_2^*, \quad (6.98)$$

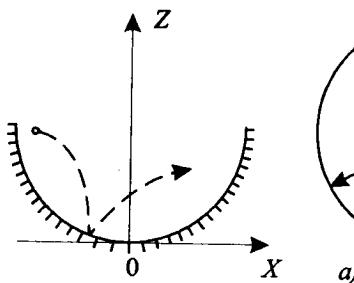
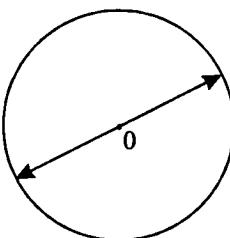
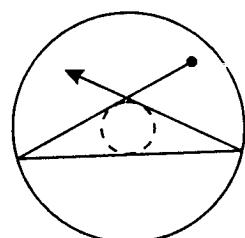


Рис. 6.12. Частица внутри чашки



a)



б)

Рис. 6.13. Круговой биллиард

откуда получаем

$$\phi = q_2^* [\operatorname{ch} q_1^* + (1 - q_2^{*2})^{1/2} \operatorname{sh} q_1^*]^{-1}. \quad (6.99)$$

Заметим, что в общем случае аналитическое решение уравнения (6.97) невозможно. Поэтому при решении задач можно несколько снизить требования к редуцирующей замене (6.95), потребовав выполнения условий (6.94) не для всех значений переменных, а лишь при напряженной связи  $q_1 = 0$ . Тогда дифференциальное уравнение (6.97) с правой частью, зависящей от  $\phi$ , заменится более простым соотношением

$$\phi_1 = -a_{12}(0, q_2^*)/a_{22}(0, q_2^*) \text{ при } q_1^* = 0, \quad \phi(0, q_2^*) = q_2^*, \quad (6.100)$$

которое можно удовлетворить разными способами. В частности, полагая

$$\phi = q_2^* - a_{12}q_1^*/a_{22}, \quad (6.101)$$

мы получим простейшее решение системы (6.100), которое, однако, задает обратимую замену лишь для достаточно малых значений  $q_1^*$ . Данный недостаток можно исправить путем некоторого усложнения формулы (6.101), полагая

$$\phi = q_2^* - a_{12}q_1^*/a_{22} + Cq_2^*q_1^{*2}, \quad (6.102)$$

где константу  $C$  надо подобрать так, чтобы в рассматриваемой области конфигурационного пространства выполнялось условие обратимости

$$\phi_2 = 1 - q_1^* \frac{d(a_{12}a_{22}^{-1})}{dq_2^*} + Cq_1^{*2} > 0. \quad (6.103)$$

В рассмотренном выше примере формула (6.101) принимает вид

$$\phi = q_2^* - q_1^*q_2^*(1 - q_2^{*2})^{1/2},$$

а замена (6.102) выглядит так:

$$\phi = q_2^* [1 - q_1^* (1 - q_2^{*2})^{1/2} + q_1^{*2}].$$

Далее будем считать, что выбор обобщенных координат сделан так, что равенства (6.94) выполнены. Тогда при абсолютно упругих ударах непрерывными остаются переменные

$$s, \dot{s}, q_j, \dot{q}_j \quad (j = 2, \dots, n), \quad (6.104)$$

Изменение этих переменных можно описать уравнениями Лагранжа

$$[T]_s = Q_1 \operatorname{sign} s, \quad [T]_j = Q_j \quad (j = 2, \dots, n), \quad (6.105)$$

где в выражениях  $T$  и  $Q$  осуществлена замена (6.69), (6.70).

Уравнения (6.105) справедливы для  $s \neq 0$ , а также при ударах о связь; для того, чтобы они описывали также скользящие режимы, к правой части первого из них надо добавить реакцию  $R_1$ , отличную от нуля лишь при  $s = 0$ . Величина  $R_1$  выражается формулой (ср. с (6.72))

$$R_1 = \max \left\{ 0, - \left( \frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 \right) \Big|_{q_1=+0} \right\}. \quad (6.106)$$

Если рассматриваемая система консервативна, то действующие силы обладают силовой функцией  $U(q)$ :

$$Q_k = \partial U / \partial q_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (6.107)$$

В этом случае удобно ввести в рассмотрение функцию Лагранжа

$$L = T + U \quad (6.108)$$

и записать уравнения (6.105) в виде

$$[L^*]_s = 0, \quad [L^*]_j = 0 \quad (j = 2, \dots, n), \quad (6.109)$$

$$L^*(s, \dot{s}, q_j, \dot{q}_j) = L(|s|, \dot{s} \operatorname{sign} s, q_j, q_j).$$

Функция Лагранжа  $L^*$  не имеет частной производной по переменной  $s$  при  $s = 0$  ввиду наличия знака абсолютной величины в определяющей ее формуле. Доопределим эту производную так:

$$\frac{\partial L^*}{\partial s} \Big|_{s=0} = \max \left\{ 0, \frac{\partial L^*}{\partial s} \Big|_{s=+0} \right\}. \quad (6.110)$$

Тогда в соответствии с (6.106), система (6.109) может быть использована для описания любого из типов движения: перелета, скользящего режима, удара и пр.

От уравнений Лагранжа (6.109) можно перейти к гамильтоновой форме, полагая

$$H = \dot{s}p_s + \sum_{j=2}^n \dot{q}_j p_j - L^*, \quad p_s = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{s}}, \quad p_j = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} \quad (6.111)$$

и доопределяя частную производную функции Гамильтона по формуле

$$\left. \frac{\partial H}{\partial s} \right|_{s=0} = \min \left\{ 0, \left. \frac{\partial H}{\partial s} \right|_{s=+0} \right\}. \quad (6.112)$$

В итоге получим уравнения движения в канонической форме:

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial s}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (6.113)$$

Достоинства уравнений в форме (6.113) заключены в возможностях применения развитого для них математического аппарата. Более подробно этот вопрос обсуждался в [Иванов, Маркеев, 1984, Иванов, 1990], здесь же мы ограничимся рассмотрением некоторых биллиардных задач.

**Примеры интегрируемых биллиардных задач.** Воспользуемся методами гамильтоновой механики для интегрирования двух частных случаев биллиарда.

**1. Круговой биллиард.** Для области в форме круга радиуса  $R$  в соотношениях (6.87), (6.88)  $F \equiv R$ ,  $F' = 0$ , и для функций Лагранжа и Гамильтона в соответствии с определениями получаем такие выражения:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2(R - q_1)^2] = \frac{1}{2} [\dot{s}^2 + \dot{q}_2^2(R - |s|)^2], \\ H &= \frac{1}{2} p_s^2 + \frac{1}{2}(R - |s|)^{-2} p_2^2. \end{aligned} \quad (6.114)$$

Канонические уравнения движения имеют вид

$$\dot{s} = p_s, \quad \dot{p}_s = -(R - |s|)^{-3} p_2^2 \operatorname{sign} s, \quad \dot{q}_2 = (R - |s|)^{-2} p_2, \quad \dot{p}_2 = 0 \quad (6.115)$$

Циклической координате  $q_2$  соответствует интеграл площадей  $p_2 = \text{const}$ . Так как система (6.115) обладает еще и интегралом энергии  $H = \text{const}$ , то она интегрируема. Опишем картину движения в зависимости от значений интегралов. Если  $H = 0$ , то частица не изменяет своего положения, при  $H > 0$ ,  $p_2 = 0$  она движется вдоль фиксированного диаметра круга, отражаясь от бортов биллиарда через равные промежутки времени (рис. 6.13, а). Наконец, если  $p_2 \neq 0$ , то биллиардная траектория состоит из хорд, равноудаленных от центра круга (на

рис. 6.13,б изображен случай  $p_2 > 0$ , при  $p_2 < 0$  направление движения противоположное). Действительно, минимальному значению переменной  $s$  соответствуют моменты, когда  $p_s = 0$ . При этом гамильтониан (6.114) равен

$$H = \frac{1}{2}(R - |s_{\min}|)^{-2} p_2^2, \quad (6.116)$$

откуда следует, что величина  $s_{\min}$  принимает одно и то же значение.

**2. Биллиард в эллипсе** тесно связан с задачей о движении материальной точки по гладкой поверхности трехосного эллипсоида [Якоби, 1936]. Эта последняя задача была проинтегрирована К. Якоби с использованием эллиптических координат. Как заметил Биркгоф, геодезические линии на эллипсоиде переходят в траектории эллиптического биллиарда при стремлении одной из полуосей к нулю. Ниже задача об эллиптическом биллиарде исследуется непосредственно.

Выберем оси координат так, чтобы фокусы эллипса попали в точки  $(1, 0)$  и  $(-1, 0)$ . Положение движущейся точки будем определять эллиптическими координатами

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}(r_1 + r_2), & q_2 &= \frac{1}{2}(r_1 - r_2), \\ r_1^2 &= (x - 1)^2 + y^2, & r_2^2 &= (x + 1)^2 + y^2. \end{aligned} \quad (6.117)$$

где  $r_1, r_2$  — расстояния до фокусов. Тогда координатные линии  $q_1 = \text{const}$  представляют собой софокусные эллипсы, а линии  $q_2 = \text{const}$  — гиперболы с теми же фокусами. Координаты (6.117) применяются в небесной механике (см. [Мультон, 1935, Дубошин, 1964]) для исследования задачи двух неподвижных центров.

Из определений (6.117) следуют соотношения

$$x = q_1 q_2, \quad y^2 = (q_1^2 - 1)(1 - q_2^2), \quad (6.118)$$

откуда для кинетической энергии получаем выражение

$$T = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2) \left( \frac{\dot{q}_1^2}{q_1^2 - 1} + \frac{\dot{q}_2^2}{1 - q_2^2} \right), \quad (6.119)$$

а потенциальная энергия системы равна нулю. Как следует из выражения (6.119), условие ортогональности (6.94) выполнено. Так как граница биллиарда задается уравнением

$$q_1 = r, \quad r > 1, \quad (6.120)$$

то переменные непрерывного представления (6.104) можно ввести по формулам

$$q_1 = r - |s|, \quad \dot{q}_1 = -\dot{s} \operatorname{sign} s. \quad (6.121)$$

В результате функция  $T$  сохранит вид (6.119) с заменой  $\dot{q}_1^2$  на  $\dot{s}^2$  и  $q_1$  на  $r - |s|$ . Гамильтониан (6.111) выглядит так:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (q_1^2 - q_2^2)^{-1} [(q_1^2 - 1)p_s^2 + (1 - q_2^2)p_2^2], \\ p_s &= \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - 1}\dot{s}, \quad p_2 = \frac{q_1^2 - q_2^2}{1 - q_2^2}\dot{q}_2, \quad q_1 = r - |s|. \end{aligned} \quad (6.122)$$

Полагая  $H = h$ , составим для системы (6.122) уравнение Гамильтона – Якоби

$$(q_1^2 - 1) \left( \frac{\partial W}{\partial s} \right)^2 + (1 - q_2^2) \left( \frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 = 2h(q_1^2 - q_2^2). \quad (6.123)$$

Уравнение (6.123) относится к случаю интегрируемости Лиувилля [Парс, 1971], и его общее решение может быть найдено в квадратурах. Полагая  $W = W_1(s) + W_2(q_2)$ , запишем уравнение (6.123) в форме

$$(q_1^2 - 1)(W_1'^2 - 2h) + (1 - q_2^2)(W_2'^2 - 2h) = 0. \quad (6.124)$$

Здесь первое слагаемое не зависит от  $q_2$ , а второе — от  $s$ , поэтому каждое из них постоянно:

$$(q_1^2 - 1)(W_1'^2 - 2h) = C, \quad (1 - q_2^2)(W_2'^2 - 2h) = -C. \quad (6.125)$$

Решение системы (6.125), зависящее от двух постоянных  $C$  и  $h$ , можно определить квадратурой, после чего обычным способом найти общее решение биллиардной задачи. Для определения вида биллиардной траектории в зависимости от значений  $C$  и  $h$  выразим эти постоянные из соотношений (6.125) при учете (6.122):

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2) \left( \frac{\dot{q}_1^2}{q_1^2 - 1} + \frac{\dot{q}_2^2}{1 - q_2^2} \right), \\ C &= (q_1^2 - q_2^2) \left( \frac{\dot{q}_1^2}{q_1^2 - 1}(1 - q_2^2) - \frac{\dot{q}_2^2}{1 - q_2^2}(q_1^2 - 1) \right). \end{aligned} \quad (6.126)$$

Оба первых интеграла (6.126) являются четными функциями относительно  $\dot{s}$ , поэтому их значения при ударах не изменяются.

Биллиардная траектория имеет точки пересечения с большой осью эллипса; обозначим  $x^o$  абсциссу какой-либо из таких точек,  $t^o$  — момент прохождения через эту точку. Возможны четыре случая:

(i) Если  $x^o > 1$ , то при значении  $t^o$  координата  $q_2$  принимает вследствие определений (6.117) максимальное значение, равное единице, при этом  $q_1 > 1$ . Следовательно, в формулах (6.126)  $C < 0$ . Минимальное значение координаты  $q_1$  на произвольном звене траектории найдем, полагая в (2.46)  $\dot{q}_1 = 0$ : при этом

$$C = -2h(q_1^2 - 1).$$

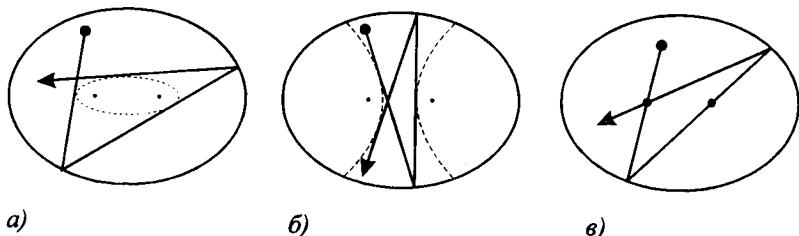


Рис. 6.14. Эллиптический биллиард

Таким образом, все звенья ломаной касаются одного и того же эллипса (см.рис. 6.14,а)

$$q_1^2 = 1 - \frac{C}{2h}. \quad (6.127)$$

(ii) Если  $x^o \in (0, 1)$ , то при  $t = t^o$  минимальное значение, равное единице, принимает координата  $q_1$ , при этом  $q_2 < 1$ . В данном случае  $C > 0$ , и можно определить экстремальные значения координаты  $q_2$ . Для этого положим в (6.126)  $\dot{q}_2 = 0$  и получим

$$C = -2h(q_2^2 - 1),$$

т.е. все звенья ломаной касаются одной и той же гиперболы (рис. 6.14,б)

$$q_2^2 = 1 - \frac{C}{2h}. \quad (6.128)$$

(iii) Если  $x^o = 1$ , т.е. траектория проходит через фокус, то

$$q_1(t^o) = q_2(t^o) = 1, \quad \dot{q}_1(t^o) = \dot{q}_2(t^o) = 0.$$

Следовательно,  $C = 0$  и звенья траектории поочередно проходят через один из фокусов (рис. 6.14,в).

(iv) Если  $x^o = 0$  и  $\dot{x}(t^o) = 0$ , то  $x \equiv 0$ , т.е. траектория совпадает с малой осью эллипса.

#### 6.4. НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ С НЕУПРУГИМ УДАРОМ

**Система с одной степенью свободы и постоянным коэффициентом восстановления.** В предыдущем параграфе рассматривались системы с абсолютно упругими соударениями. Покажем,

что методы непрерывного представления можно распространить и на системы с не вполне упругими ударами.

Обсудим сначала систему с одной степенью свободы (6.67), в которой удары описываются в соответствии с гипотезой Ньютона формулой

$$\dot{q}^+ = -e \dot{q}^-, \quad e \in (0, 1). \quad (6.129)$$

Для непрерывного представления возьмем вспомогательные переменные  $s, v$ , связанные с  $q, \dot{q}$  соотношениями [Иванов, 1993, 6]

$$\begin{aligned} q &= |s|, \quad \dot{q} = Wv \operatorname{sign} s, \\ W &= 1 - k \operatorname{sign}(sv), \quad k = \frac{1-e}{1+e} \in (0, 1). \end{aligned} \quad (6.130)$$

которые в случае абсолютно упругого удара переходят в формулы (6.69), (6.70), где  $v = \dot{s}$ . Для значений  $e < 1$  переменная  $v$  отличается от  $\dot{s}$  положительным множителем  $W$ , принимающим в зависимости от координатной четверти плоскости  $(s, v)$  одно из двух постоянных значений. Эти значения подобраны так, что из непрерывности переменных  $s, v$  автоматически следует выполнение граничных условий удара (6.129).

В самом деле, на плоскости  $(s, v)$  пересечение линии удара  $s = 0$  возможно лишь в направлении по часовой стрелке (рис. 6.15), так как  $\dot{v}s \geq 0$ . При этом знак произведения  $sv$  меняется с минуса на плюс, и множитель  $W$  изменяет свое значение с  $(1+k)$  на  $(1-k)$ . Значит, равенство (6.129) в силу замены (6.130) выполняется при каждом пересечении фазовой кривой оси  $s = 0$ .

Изменение новых переменных описывается уравнениями

$$\dot{s} = Wv, \quad \dot{v} = W^{-1}f(t, |s|, Wv \operatorname{sign} s) \operatorname{sign} s, \quad (6.131)$$

правые части которых терпят разрыв при  $s = 0$  или  $v = 0$ . Тем не менее, решения системы (6.131) кусочно-дифференцируемы, что предопределяет ее преимущества по сравнению с исходной системой (6.67), решения которой разрывны.

**Пример.** [Мак-Миллан, 1951] Вновь обратимся к прямолинейному движению тяжелого шарика, рассматривавшемуся в §6.3, но будем теперь считать, что  $0 < e < 1$ . Так как часть кинетической энергии расходуется при неупругом ударе, высота отскока с каждым ударом уменьшается, и движение непериодично.

Во время полета при подскоке шарика на высоту  $h_0$  сохранение полной энергии выражается соотношением (масса равна единице)

$$h_0 = \frac{1}{2g} \dot{q}^2 + q. \quad (6.132)$$

На фазовой плоскости  $(q, \dot{q})$  формула (6.132) задает параболу; на вспомогательной плоскости  $(s, v)$  эта парабола деформируется: та ее

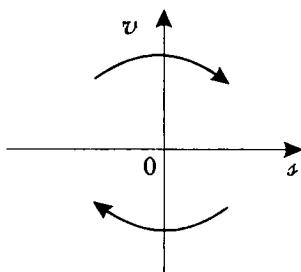


Рис. 6.15. Направление траекторий на вспомогательной плоскости

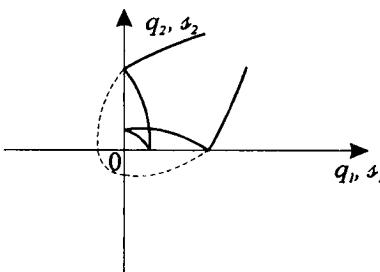


Рис. 6.17. Метод отражения в системе с двумя ортогональными связями

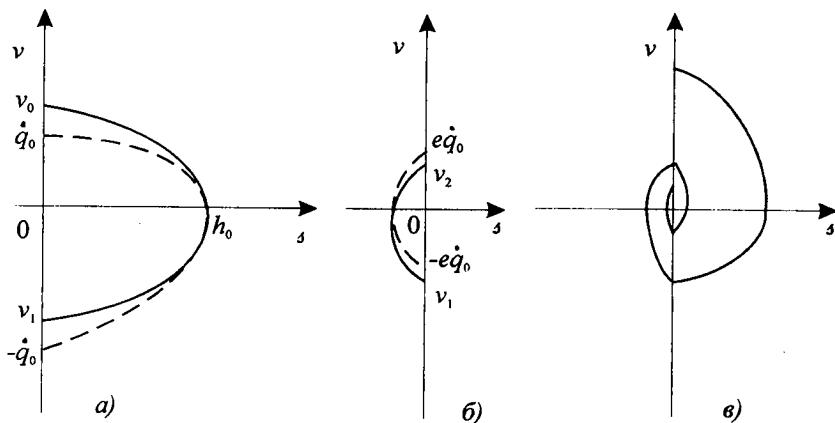


Рис. 6.16. Непрерывное представление системы "шарик на опоре"

часть, которая лежит в первой четверти, растягивается в  $(1 + k)$  раз, а в четвертой четверти — в  $(1 - k)$  раз (рис. 6.16,а). Следовательно, в момент отрыва от опоры  $v = v_0 = (1 + k)\dot{q}_0$ , а в момент, непосредственно предшествующий приземлению,  $v = v_1 = -(1 - k)\dot{q}_0$ . После удара изображающая точка попадает в третью четверть и продолжает движение по кривой, соответствующей в исходных переменных параболе

$$h_1 = \frac{1}{2g}q^2 + q, \quad h_1 = e^2 h_0. \quad (6.133)$$

При переходе к вспомогательной системе по формулам (6.130) парабола (6.133) зеркально отражается в левую полуплоскость, а затем растягивается вдоль вертикали в  $(1 + k)$  раз в третьей четверти и в

$(1 - k)$  раз — во второй четверти (рис. 6.16,б). Следующему удару соответствует переход изображающей точки из второй четверти в первую и т.д. В результате соединения отдельных дуг получим непрерывную кривую, асимптотически приближающуюся к началу координат (рис. 6.16,в). Движение вдоль этой кривой происходит за конечное время  $\Delta t = 2(2h_0/g)^{1/2}(1 - e)^{-1}$ , но сопровождается бесконечным числом пересечений оси  $v$ , что соответствует ударам шарика об опору.

Замена (6.130) имеет простейшую форму, но обладает тем недостатком, что правые части системы (6.131) разрывны при  $v = 0$ , в то время как траектории исходной системы (6.67) при  $\dot{q} = 0$  остаются гладкими. При необходимости этот недостаток можно устранить за счет усложнения замены переменных [Иванов, 1993,б]. В частности, используя формулы

$$q = |s|, \quad \dot{q} = \left[ 1 - \frac{2k}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{v}{s} \right] v \operatorname{sign} s, \quad (6.134)$$

мы получим непрерывное представление с потерей гладкости лишь на линии удара  $s = 0$ . Однако, уравнения движения в новых переменных более громоздки, нежели уравнения (6.131). В данном случае выбор той или иной замены переменных диктуется поставленной задачей.

В начале координат фазового пространства правые части уравнений (6.131) доопределим, по аналогии с (6.72), так:

$$\dot{s} = 0, \quad \dot{v} = (1 - k)^{-1} \max\{0, f(t, 0, 0)\}. \quad (6.135)$$

Данное определение означает, что изображающая точка может оставаться в начале координат до тех пор, пока значение  $f$  отрицательно.

**Произвольный закон восстановления.** Рассмотрим более общий закон восстановления, заменяя равенство (6.129) соотношением

$$\dot{q}^+ = -F(|\dot{q}^-|)\dot{q}^-, \quad F \in (0, 1), \quad (6.136)$$

где функция  $F$  непостоянна; будем считать ее непрерывно дифференцируемой, причем величина  $\dot{q}^+$  монотонно возрастает вместе с  $|\dot{q}^-|$ .

Введем вспомогательные переменные по формуле (6.130), считая в ней величину  $k$  уже не постоянной, но зависящей от  $|v|$ . Характер этой зависимости установим, исходя из требования выполнения граничного условия (6.136) при непрерывном изменении вспомогательных переменных в окрестности оси  $s = 0$ . Аналогично рассуждениям предыдущего раздела получим, что множитель  $W$  изменяется при ударах с  $(1 + k)$  на  $(1 - k)$ , следовательно, равенство (6.136) принимает вид

$$F(|v|(1 + k)) = \frac{1 - k}{1 + k}. \quad (6.137)$$

В данном соотношении величина  $k$  является искомой, ее можно рассматривать как неявно заданную функцию  $k = k(|v|)$ .

**Пример.** Допустим, что  $F(x) = (1+x)^{-1}$ . Такой закон отражения означает, что при малых скоростях сближения удар близок к абсолютно упругому, а при больших — к абсолютно неупругому. Уравнение (6.137) принимает вид

$$\frac{1}{|v|(1+k)+1} = \frac{1-k}{1+k}, \quad (6.138)$$

откуда

$$k = [(v^2 + 1)^{1/2} - 1]/|v|. \quad (6.139)$$

В частности,  $k \rightarrow 0$  при  $v \rightarrow 0$  и  $k \rightarrow 1$  при  $v \rightarrow \infty$ .

**Случай нескольких степеней свободы.** Перейдем теперь к системам с несколькими степенями свободы и односторонней связью  $q_1 \geq 0$  с неабсолютно упругим ударом без трения. В этом случае по аналогии с §6.3 для непрерывного представления можно взять переменные

$$s, v, q_j, p_j \quad (j = 2, \dots, n), \quad (6.140)$$

где  $s, v$  связаны с  $q_1, \dot{q}_1$  формулами, аналогичными (6.130).

Другая возможность: если выполнены условия ортогональности (6.94), то для непрерывного представления годятся и переменные

$$s, v, q_j, \dot{q}_j \quad (j = 2, \dots, n). \quad (6.141)$$

**Пример.** Круговой биллиард с неабсолютно упругими соударениями. Уравнения движения с лагранжианом (6.114) имеют вид

$$\ddot{q}_1 = -q_1^{-3}p_2^2, \quad \dot{q}_2 = p_2q_1^{-2}, \quad \dot{p}_2 = 0. \quad (6.142)$$

В результате последовательности замен переменных по формулам  $q_1 = R - q$  и (6.130) система (6.142) преобразуется так:

$$\dot{s} = Wv, \quad \dot{v} = -W^{-1}(R - |s|)^{-3}p_2^2, \quad \dot{q}_2 = p_2(R - |s|)^{-2}, \quad \dot{p}_2 = 0. \quad (6.143)$$

Следовательно, и в случае неидеального отскока  $p_2 = \text{const}$ . Если  $p_2 = 0$ , то точка движется вдоль фиксированного диаметра, отражаясь от борта биллиарда, причем промежутки времени между последовательными соударениями растут в геометрической прогрессии со знаменателем  $1/e$ .

В случае  $p_2 \neq 0$  звенья биллиардной траектории описываются уравнениями

$$\begin{aligned} q &= [h_k^2 + (t - t_k)^2 p_2^2 h_k^{-2}]^{1/2}, \\ \dot{q} &= (t - t_k)p_2^2 h_k^{-2}[h_k^2 + (t - t_k)^2 p_2^2 h_k^{-2}]^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.144)$$

где  $t_k$  — момент прохождения середины звена,  $h_k$  — расстояние от данного отрезка ломаной до центра круга. Кривая (6.144) симметрична относительно оси абсцисс, а на плоскости  $(s, v)$  в силу замены (6.130) она перейдет в асимметричную дугу, как в примере разд. 4.1. Изображающая точка описывает спираль как на рис. 6.16,в, и за конечное время (но при бесконечном числе ударов) координата  $q$  станет тождественным нулем. При этом биллиардная траектория сольется с граничной окружностью и в дальнейшем частица движется вдоль борта с постоянной угловой скоростью  $\Omega = \dot{q}_2 = r^{-2} p_2$ .

**Система с двумя односторонними связями.** Метод отражения можно обобщить и на системы с несколькими односторонними связями, если выполнены условия ортогональности. Ограничимся обсуждением системы с двумя степенями свободы с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2), \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0 \quad (6.145)$$

и обобщенными силами  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Уравнения движения в области  $q_1 > 0, q_2 > 0$  разрешим относительно обобщенных ускорений:

$$\ddot{q}_1 = f_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \ddot{q}_2 = f_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (6.146)$$

Допустим сначала, что удары абсолютно упруги. Тогда, полагая

$$q_1 = |s_1|, \quad \dot{q}_1 = \dot{s}_1 \operatorname{sign} s_1, \quad q_2 = |s_2|, \quad \dot{q}_2 = \dot{s}_2 \operatorname{sign} s_2, \quad (6.147)$$

мы получим непрерывное представление системы (6.146) в переменных  $s_1, s_2, \dot{s}_1, \dot{s}_2$ . Изменение этих переменных описывается уравнениями

$$\ddot{s} = f_1(t, |\mathbf{s}|, \dot{\mathbf{s}} \operatorname{sign} \mathbf{s}), \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2). \quad (6.148)$$

Данную систему можно доопределить на координатных прямых по аналогии с формулой (6.110).

Геометрически можно представить переход (6.147) от  $\mathbf{s}$  к  $\mathbf{q}$  как отражение от двух перпендикулярных зеркал (рис. 6.17).

**Пример.** Тяжелая частица абсолютно упруго подскакивает над парой перпендикулярных плоскостей, пересекающихся по оси  $Y$  и образующих с вертикалью углы  $\alpha$  и  $\pi/2 - \alpha$  (рис. 6.18). Движение частицы описывается во время перелетов уравнениями

$$\ddot{q}_1 = -g \cos \alpha, \quad \ddot{q}_2 = -g \sin \alpha \quad (6.149)$$

и вспомогательная система (6.148) будет выглядеть так:

$$\ddot{q}_1 = -g \cos \alpha \operatorname{sign} s_1, \quad \ddot{q}_2 = -g \sin \alpha \operatorname{sign} s_2. \quad (6.150)$$

Правые части в формулах (6.150) представляют собой кусочно постоянное силовое поле, изображенное на рис. 6.18 в каждой из четвертей плоскости  $(s_1, s_2)$  стрелкой. Переменные  $s_1, s_2$  разделяются, изменение каждой из них описывается уравнением, аналогичным (6.77).

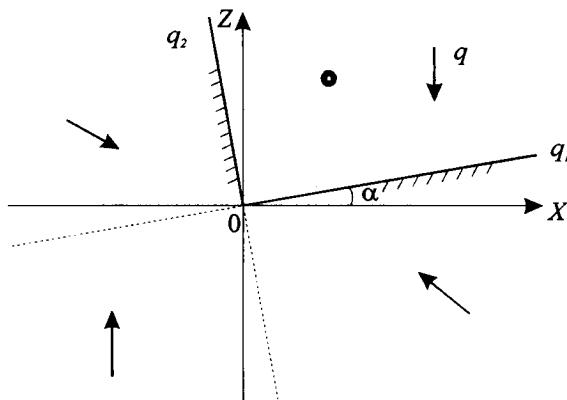


Рис. 6.18. Шарик над системой двух перпендикулярных плоскостей

Каждая из этих переменных является периодической функцией времени, а величина периода зависит от начальных условий. На плоскости  $(s_1, s_2)$  траектория лежит в прямоугольнике (вершины которого соответствуют обращению кинетической энергии шарика в нуль) и либо замкнута (типа фигур Лиссажу), либо заполняет прямоугольник всюду плотно. Четверть прямоугольника, лежащая в первом квадранте, составляет область возможного движения в исходных переменных.

Перейдем к случаю неупругих ударов: пусть коэффициенты восстановления  $e_1, e_2$  при ударах в системе (6.145) меньше единицы. Тогда вместо формул (6.147) следует использовать замену (6.132):

$$\begin{aligned} q_j &= |s_j|, \quad \dot{q}_j = W_j v_j \operatorname{sign} s_j, \\ W_j &= 1 - k_j \operatorname{sign}(s_j v_j), \quad k_j = \frac{1 - e_j}{1 + e_j} \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (6.151)$$

Тогда непрерывное представление системы (6.146) в новых переменных имеет вид

$$\dot{s}_j = W_j v_j, \quad \dot{v}_j = W_j^{-1} f_j(t, |s_j|, W_j v_j \operatorname{sign} s_j) \quad (j = 1, 2). \quad (6.152)$$

**Пример.** Пусть в предыдущем примере удары о плоскости характеризуются коэффициентами восстановления  $e_{1,2} \in (0, 1)$ . В результате замены (6.151) получим для каждой пары переменных однотипные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= W_1 v_1, \quad \dot{v}_1 = -g W_1^{-1} \cos \alpha \operatorname{sign} s_1, \\ \dot{s}_2 &= W_2 v_2, \quad \dot{v}_2 = -g W_2^{-1} \sin \alpha \operatorname{sign} s_2. \end{aligned} \quad (6.153)$$

Решение уравнений (6.153) обсуждалось в §6.3: в результате бесконечноударного процесса за конечное время каждая из координат  $s_{1,2}$

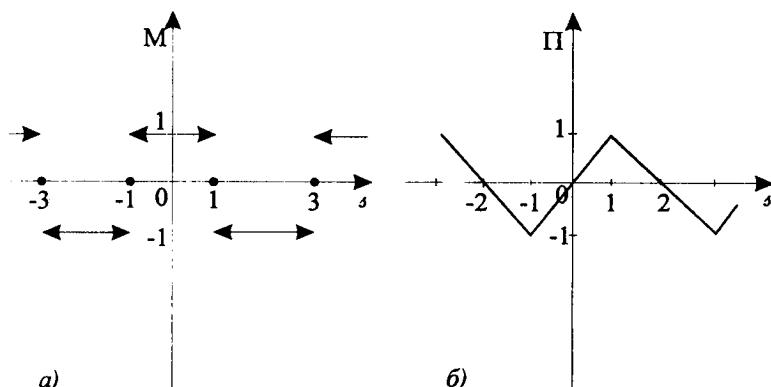


Рис. 6.19. Специальные функции

обращается в тождественный нуль. В общем случае эти времена различны, и шарик в течение некоторого промежутка времени продолжает соударяться с одной из плоскостей, скользя по другой.

**Связи, выражаемые двойным неравенством.** В задачах механики число односторонних связей в системе может превышать количество степеней свободы. Простейшим примером служит частица, совершающая одномерное движение в зазоре между двумя ограничителями:  $q = -1$  и  $q = 1$ . Область возможного движения в этом случае описывается двойным неравенством  $-1 \leq q \leq 1$  или  $|q| \leq 1$ .

Рассмотрим сначала случай системы с одной степенью свободы и двумя односторонними связями. При подходящем выборе обобщенной координаты  $q$  оба ограничения можно записать в виде двойного неравенства

$$|q| \leq 1. \quad (6.154)$$

Для непрерывного представления воспользуемся методом специальных функций [Журавлев, 1976]. Вспомогательная переменная  $s$  принимает произвольные значения, а формула замены такова:

$$q = \Pi(s), \quad \dot{q} = M(s)\dot{s}, \quad (6.155)$$

$$M(s) = \operatorname{sign} \left( \cos \frac{\pi s}{2} \right), \quad \Pi(s) = \int_0^s M(u)du.$$

Графики функций  $M$  и  $\Pi$  представлены на рис. 6.19. При непрерывном изменении переменных  $s, \dot{s}$  граничные условия абсолютно упругого удара выполняются автоматически при целых нечетных значениях  $s$ . В результате проведения замены (6.155) в системе (6.67) получаем непрерывное представление в виде

$$\ddot{s} = M(s)f(t, \Pi(s), M(s)\dot{s}). \quad (6.156)$$

**Пример.** Задача Улама [Улам, 1963]. Данная система была предложена в качестве модели ускорения Ферми космических лучей. Частица движется по инерции между двумя ограничителями, один из которых неподвижен, а второй совершают гармонические колебания, абсолютно упруго отражаясь от них поочередно. Пусть ограничители задаются неравенствами

$$0 \leq x \leq 1 + \epsilon \sin t, \quad \epsilon \in (0, 1).$$

Для приведения к стандартной форме (6.154) определим координату  $q$  по формуле

$$q = a(t)x - 1, \quad a(t) = 2(1 + \epsilon \sin t)^{-1}. \quad (6.157)$$

При движении между стенками  $\ddot{x} \equiv 0$ , следовательно, изменение координаты  $q$  описывается уравнением

$$\ddot{q} = 2a'a^{-1}\dot{q} + (a'' - 2a'^2a^{-1})a^{-1}(q + 1). \quad (6.158)$$

Усложнение уравнений движения в новых переменных является платой за упрощение неравенств, ограничивающих область возможного движения.

Замена (6.155) позволяет получить непрерывное представление данной системы в виде

$$\ddot{s} = 2a'a^{-1}\dot{s} + (a'' - 2a'^2a^{-1})a^{-1}(1 + \Pi(s))M(s). \quad (6.159)$$

Данное уравнение значительно упрощается в случае  $\epsilon = 0$  (задача Улама переходит при этом в биллиард на отрезке). Правая часть при этом тождественно равна нулю, поэтому переменная  $s$  является линейной функцией времени, а координата  $q$  вычисляется по формуле (6.155).

Аналогичный подход можно применить и в том случае, когда удары о связи (6.154) неупруги [Журавлев, 1976]. При этом вместо формул (6.155) следует использовать замену

$$q = \frac{2}{\pi}[\Pi(s) - k \cos s], \quad (6.160)$$

где коэффициент  $k$  определен в (6.130). Преобразование (6.160) обеспечивает выполнение граничных условий удара с данным коэффициентом восстановления для любых движений, для которых  $\dot{s} > 0$ .

### .6.5. НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В СИСТЕМАХ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

**Вспомогательная замена переменных.** Обсудим теперь более сложный и общий случай механической системы с односторонней связью при наличии сухого трения и зависимости коэффициента восстановления от начальных условий удара.

Изменение фазовых переменных  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  на промежутках ослабления связи  $q_1 > 0$  можно описать при помощи уравнений Лагранжа (6.27). При ударе обобщенные скорости получают приращения в соответствии с формулой (6.34). Залишем зависимость переменных после удара от их доударных значений для случая сухого (кулоновского) трения в виде

$$\dot{q}_1^+ = -H_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^-)\dot{q}_1^-, \quad \dot{q}_j^+ = \dot{q}_j^- + H_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^-)\dot{q}_1^- \quad (j = 2, \dots, n). \quad (6.161)$$

В формулах (6.161) величина  $H_1$  играет роль коэффициента восстановления относительной скорости  $e$ . Допустим, что эта величина изменяется в диапазоне от нуля до единицы. Зададим вспомогательные переменные  $s, v, y_2, \dots, y_n$  следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1 &= |s|, \quad \dot{q}_1 = Wv \operatorname{sign} s, \quad q_j = y_j + \dot{q}_1 \Phi_j(|v|, y_2, \dots, y_n), \\ W &= 1 - k \operatorname{sign} sv, \quad k = \frac{1 - H_1}{1 + H_1} \quad (j = 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (6.162)$$

где функции  $\Phi_j$  подберем таким образом, чтобы переменные  $v, y_j$  оставались при ударах (6.161) непрерывными. Для этого они должны удовлетворять соотношениям

$$\Phi_j = -\frac{H_j}{1 + H_1}. \quad (6.163)$$

Действительно, в этом случае

$$\dot{q}_j^+ = y_j + \Phi_j \dot{q}_1^+ = \dot{q}_j^- + (\dot{q}_1^+ - \dot{q}_1^-) \Phi_j = \dot{q}_j^- - (1 + H_1) \dot{q}_1^- \Phi_j = \dot{q}_j^- + H_j \dot{q}_1^-$$

что совпадает с формулами (6.161).

Дифференцируя равенства (6.162) при  $sv \neq 0$ , получим непрерывное представление системы с ударами в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями.

**Пример** [Иванов, 1993, б]. Тяжелая частица падает под углом на шероховатую горизонтальную плоскость. Для кулонова трения уравнения удара таковы (ось  $q_1$  направлена вертикально вверх):

$$\dot{q}_1^+ = -e\dot{q}_1^-, \quad \dot{q}_2^+ = \dot{q}_2^- + \mu(1 + e)\dot{q}_1^-. \quad (6.164)$$

Второе из уравнений (6.164) справедливо в том случае, если рассчитанное с его помощью значение  $\dot{q}_2^+$  имеет тот же знак, что и  $\dot{q}_2^-$ , в противном случае надо считать  $\dot{q}_2^+ = 0$ , т.е. скольжение частицы прекращается. Формулы (6.164) имеют форму (6.161), где  $H_1 = e$ ,  $H_2 = \mu(1 + e)$ , поэтому вспомогательная переменная  $y_2$  определяется так:

$$y_2 = \mu\dot{q}_1 + \dot{q}_2 . \quad (6.165)$$

В промежутках между ударами  $\ddot{q}_1 = 0$ ,  $\ddot{q}_2 = -g$ , поэтому новые переменные (6.162) изменяются в соответствии с уравнениями

$$\dot{s} = Wv, \quad \dot{v} = -gW^{-1}\operatorname{sign} s, \quad \dot{y}_2 = -\mu g \quad (y_2 \geq 0). \quad (6.166)$$

Система (6.166) легко интегрируется: первые два уравнения описывают движение шарика, отвесно падающего на опору, рассмотренное в разд. 2.7 и имеющее вид бесконечноударного процесса, затухающего за конечное время  $\Delta t$  (рис. 6.20, а). Третье уравнение имеет такой же вид, как для тела, скользящего по опоре. Если начальное значение скорости  $\dot{q}_2$  достаточно велико, то это уравнение остается справедливым и после прекращения подскоков. Изобразим графики функций  $y_2(t)$  и  $\dot{q}_2(t) = y_2(t) - \mu Wv \operatorname{sign} s$  на одном чертеже (рис. 6.20, б): первый из них линеен, второй — кусочно-постоянен до момента  $t = \Delta t$ , а затем сливается с первым. Если выполнено неравенство

$$y_2^o - \mu g \Delta t > 0, \quad y_2^o = \mu \dot{q}_1^o + \dot{q}_2^o , \quad (6.167)$$

то скольжение продолжается и при  $t > \Delta t$ , а при обратном знаке этого неравенства после некоторого из ударов величина  $\dot{q}_2$  обратится в нуль, и в дальнейшем будут изменяться только переменные  $s, v$ .

После определения переменных  $s, v, y_2$  остается найти величину  $q_2$  квадратурой из третьего уравнения (6.165). График  $q_2(t)$  можно построить как разность между величиной  $y$ , равной пути в равноускоренном движении с ускорением  $-\mu g$  и функцией  $\mu q_1(t)$  (рис. 6.20, в); он представляет собой ломаную, вписанную в параболу

$$q_2(t) = q_2^o + y_2^o t - \frac{1}{2} \mu g t^2 \quad (6.168)$$

и сливающуюся с этой параболой в момент  $\Delta t$ , если он предшествует вершине параболы (т.е. если горизонтальная составляющая скорости при ударах не исчезает).

**Замечание.** Применение описанного выше метода ограничено условиями  $H_1 \in (0, 1)$  и  $\vec{I} = O(I_1)$ , каждое из которых в некоторых случаях может нарушаться. Пример увеличения нормальной скорости при ударе с трением приведен в §3.1; второе соотношение не выполнено при тангенциальном ударе (см. §6.2).

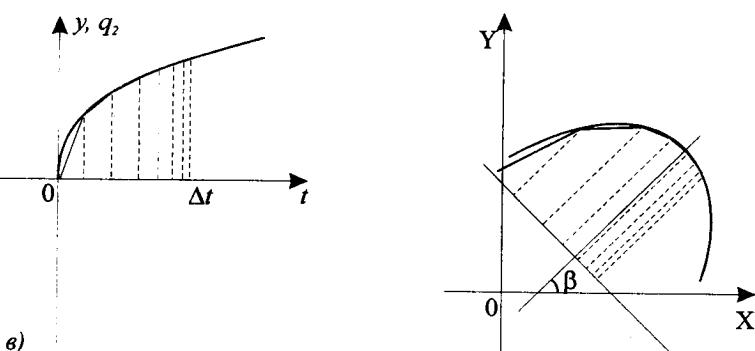
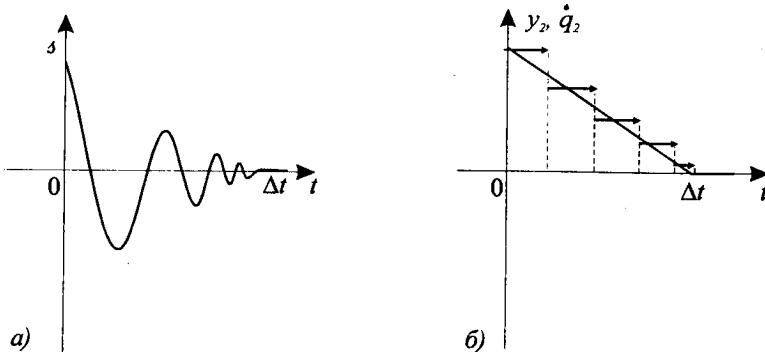


Рис. 6.20. Зависимость координат и скоростей от времени

Рис. 6.21. Траектория центра мяча, падающего на шероховатую опору

**Падение шара на шероховатую плоскость.** Более сложна задача о падении на шероховатую плоскость твердого тела, имеющего три измерения. Общий вид замены переменных, позволяющей построить непрерывное представление системы, получен в [Иванов 1993, в]. Ниже подробно обсудим частный случай, когда тело обладает центральной симметрией (бильярдный шар, полый мяч и т.п.).

Уравнения, описывающие движение шара в контакте с опорой, имеют вид

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= F_X, & M\ddot{z} &= F_Z - Mg, \\ M\ddot{y} &= F_Y, & M\rho^2\dot{\Omega} &= R(F_Y, -F_X, 0), \end{aligned} \quad (6.169)$$

где  $\vec{F}$  — реакция плоскости, ось  $Z$  направлена вертикально вверх.

Скорость скольжения в точке контакта с опорой  $C$  вычисляется

по формуле

$$\dot{x}_C = \dot{x} - R\Omega_Y, \quad \dot{y}_C = \dot{y} + R\Omega_X. \quad (6.170)$$

В случае, когда скольжение отсутствует, касательная составляющая реакции равна нулю, в противном случае она имеет вид

$$\begin{aligned} F_X &= -\mu F_Z \cos \beta, & F_Y &= -\mu F_Z \sin \beta, \\ \cos \beta &= \dot{x}_C(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2)^{-1/2}, & \sin \beta &= \dot{y}_C(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6.171)$$

Здесь  $\beta$  — угол между вектором скорости скольжения и осью  $X$ .

Уравнениями (6.169) можно описать и фазу полета, полагая в них  $\vec{F} = \vec{0}$ , и удары, при которых реакция  $\vec{F}$  импульсивна.

Пользуясь уравнениями (6.169), несложно составить выражения для трех новых переменных так, чтобы их производные не зависели от  $\vec{F}$ . Для этого положим

$$\dot{\pi}_1 = \rho^2 \Omega_X - R\dot{y}, \quad \dot{\pi}_2 = \rho^2 \Omega_Y + R\dot{x}, \quad \dot{\pi}_3 = \Omega_Z. \quad (6.172)$$

Дифференцируя формулы (6.172), получим при учете (6.169)

$$\ddot{\pi}_1 = \ddot{\pi}_2 = \ddot{\pi}_3 = 0. \quad (6.173)$$

Еще две переменных определим соотношениями

$$\dot{\pi}_4 = \dot{x} \sin \beta - \dot{y} \cos \beta, \quad \dot{\pi}_5 = \dot{x} \cos \beta + \dot{y} \sin \beta + \mu \dot{z}. \quad (6.174)$$

При дифференцировании выражений (6.174) нужно принять во внимание, что угол  $\beta$  для сферически симметричного тела остается неизменным как во время полетов, так и при ударах и при скольжении (пока  $\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 > 0$ ). В итоге получаем

$$\ddot{\pi}_4 = 0, \quad \ddot{\pi}_5 = -\mu g. \quad (6.175)$$

Что касается движения вдоль вертикали, то оно в силу (6.169) независимо от остальных степеней свободы; для его описания можно использовать переменные  $s, v$  и первые два уравнения (6.166).

Система уравнений (6.173), (6.175) легко интегрируется, в результате получаем

$$\dot{\pi}_1 = \dot{\pi}_1^o, \quad \dot{\pi}_2 = \dot{\pi}_2^o, \quad \dot{\pi}_3 = \dot{\pi}_3^o, \quad (6.176)$$

$$\pi_4 = \pi_4^o + \dot{\pi}_4^o(t - t_0), \quad \pi_5 = \pi_5^o + \dot{\pi}_5^o(t - t_0) - \frac{1}{2}\mu g(t - t^o)^2.$$

Поскольку в рассматриваемом случае  $\beta = \text{const}$ , то переменные (6.174) допускают такие представления:

$$\pi_4 = x \sin \beta - y \cos \beta, \quad \pi_5 = x \cos \beta + y \sin \beta + \mu z. \quad (6.177)$$

Предположим, что  $z \equiv R$ , т.е. шар движется по плоскости. Тогда уравнения (6.176), (6.177) определяют (при условии  $\pi_4^o \neq 0$ ) на опорной плоскости параболу, ось которой  $Y'$  образует угол  $\beta$  с осью  $X$  (рис. 6.21). Точка касания описывает параболу до тех пор, пока скорость проскальзывания не исчезнет, а затем ее траектория прямолинейна [Маркеев, 1992].

Во время перелетов  $\dot{x} = const$ ,  $\dot{y} = const$ ,  $z > R$ , следовательно, проекция центра шара на опорную плоскость движется по хорде параболы, соединяющей точки, соответствующие моментам ударов. Весь бесконечноударный процесс описывается ломаной линией, проекции звеньев которой на направление, ортогональное оси параболы, составляют геометрическую прогрессию (рис. 6.21). После прекращения подскоков траектория сливается с параболой. Угловое движение шара можно определить из уравнений (6.172), (6.176); в частности, пока подскoki не закончатся, угловая скорость  $\Omega$  кусочно-постоянна.

В случае  $\dot{\pi}_4 = 0$  движение мяча плоскопараллельно.

**Выводы.** Движение в системах с односторонними связями отличается разнообразием форм. Наряду с основными видами — перелет, скольжение, удар — возможны более сложные случаи, включающие чередующиеся участки напряжения и ослабления связи, причем количество таких переключений на данном отрезке времени может быть сколь угодно большим (теоретически бесконечным).

Традиционно разные виды движения описываются разнотипными уравнениями. Так, во время перелетов выполняются уравнения Лагранжа порядка  $2n$  ( $n$  — число степеней свободы). Скользящие режимы удовлетворяют таким же уравнениям, но с понижением порядка. Удары описывают разностными уравнениями. Недостатки такого подхода сказываются при большом количестве переключений с одного режима на другой, а в случае бесконечного чередования фаз он вообще не может быть реализован.

Для преодоления отмеченных затруднений в ряде случаев можно рекомендовать метод, связанный с непрерывным представлением данной разрывной системы при помощи некоторой вспомогательной системы, не испытывающей ударов. Достоинства такого подхода, в простейшем варианте известного как метод зеркального отражения, состоят в унификации разнотипных уравнений. К его недостаткам можно отнести определенное усложнение формы этих уравнений для каждого из видов по отдельности.

Еще один подход к исследованию динамики систем с односторонними связями связан с заданием реакций связей в виде некоторых функций контактных деформаций. Его привлекательность обусловлена физичностью и возможностью устранения парадоксов, присущих аксиоматическим моделям. На наш взгляд, возможности дискретных методов в теории систем с ударами пока раскрыты далеко не в полной мере. Их недостатком является неопределенность в выборе зависимости напряжений от деформаций.

# Глава 7. УСТОЙЧИВОСТЬ В СИСТЕМАХ С УДАРАМИ

## 7.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В СИСТЕМАХ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

**Условия равновесия системы с идеальными связями.** Рассмотрим механическую систему с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j , \quad (7.1)$$

подчиненную идеальным односторонним связям

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_l \geq 0 \quad (l \leq n). \quad (7.2)$$

Будем считать, что на систему действуют обобщенные силы  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Запишем уравнения движения в форме Лагранжа

$$[T]_i = Q_i + R_i, \quad [T]_j = Q_j \quad (i = 1, \dots, l; j = l+1, \dots, n). \quad (7.3)$$

Здесь принята во внимание идеальность связей: реакция каждой из них входит лишь в уравнение для соответствующей координаты. Односторонний характер связей выражается соотношениями

$$R_i \geq 0, \quad q_i R_i \equiv 0 . \quad (7.4)$$

Допустим, что точка  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0$  является положением равновесия системы (7.1). Полагая в (7.3)  $\dot{q}_i = \dot{q}_j = 0$ , получим условия равновесия в виде

$$Q_i \leq 0, \quad Q_j = 0 , \quad (7.5)$$

где диапазон изменения индексов такой же, как в формуле (7.3). При учете формул (7.4) можно сделать вывод, что строгие неравенства в (7.5) могут иметь место лишь для тех значений индексов, для которых  $q_i^0 = 0$ .

В частном случае, когда действующие силы потенциальны, т.е.  $\mathbf{Q} = \text{grad } U(\mathbf{q})$ , условия (7.5) принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} \leq 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 . \quad (7.6)$$

**Пример.** Математический маятник, движение которого ограничено стенкой (рис. 7.1): расстояние от точки подвеса до стенки  $d$

меньше длины маятника  $l$ . Угол  $\theta$  между осью маятника и вертикалью изменяется в пределах

$$-\arcsin \frac{d}{l} \leq \theta \leq \pi + \arcsin \frac{d}{l}. \quad (7.7)$$

Силовая функция пропорциональна высоте подъема грузика относительно точки подвеса с противоположным знаком:

$$U = -mg l(1 - \cos \theta). \quad (7.8)$$

Внутри интервала (7.7) имеются два положения равновесия:  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Проверим выполнение неравенства (7.6) на концах этого интервала. В окрестности значения  $\theta = \theta_1^o = -\arcsin \frac{d}{l}$  одностороннюю связь можно представить в виде (7.2), полагая  $q = \theta - \theta_1^o$ . В этом случае  $dU/dq = \partial U/\partial \theta = mgd > 0$ , и условие равновесия не выполнено.

В окрестности другого граничного значения  $\theta = \theta_2^o = \pi + \arcsin \frac{d}{l}$  положим  $q = \theta_2^o - \theta \geq 0$ . Тогда  $dU/dq = -\partial U/\partial \theta = -mgd < 0$ , т.е. маятник уравновешивается при контакте со стенкой выше точки подвеса (рис. 7.1).

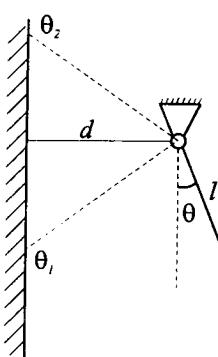


Рис. 7.1. Математический маятник вблизи стенки

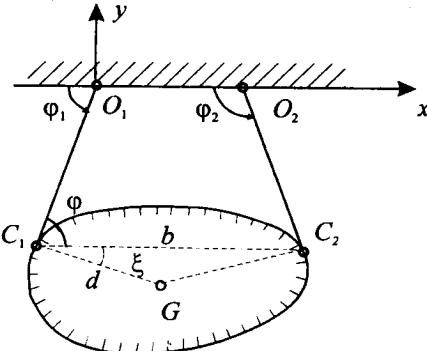


Рис. 7.2. Система с двумя идеальными односторонними связями

**Условия устойчивости системы с потенциальными силами.** Пусть точка  $q = q^o$  является положением равновесия системы с односторонними связями. Для исследования устойчивости достаточно ограничиться рассмотрением малой окрестности данной точки, что позволяет учитывать лишь такие связи, которые в самой точке напряжены. Представим их локально в виде (7.2). Далее, односторонние связи можно разделить на две группы, отнеся к первой группе те из них, для которых неравенства (7.5) строгие, а ко второй — остальные. Таким образом, связи первой группы в положении равновесия

обладают ненулевой реакцией, а для второй группы реакции равны нулю.

В приведенном выше примере равновесие  $\theta = \theta_2^o$  относится к первому типу. Если перенести точку подвеса на стенку, реакция связи обратится в нуль, т.е. она уже будет принадлежать второму типу.

В системе с потенциальными силами связи первого типа характеризуются строгими неравенствами (7.6). Заметим, что такая система консервативна в промежутках между соударениями и ее полная механическая энергия

$$E = T - U \quad (7.9)$$

сохраняет постоянное значение. При неупругих ударах величина  $E$  уменьшается.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} U'(\mathbf{q}') &= U(0, \dots, 0, |q_{m+1}|, \dots, |q_l|, q_{l+1}, \dots, q_n), \\ \mathbf{q}' &= (q_{m+1}, \dots, q_n) \in R^{n-m}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где значения индексов от 1 до  $m$  соответствуют связям первого типа, а значения индексов от  $m+1$  до  $l$  — связям второго типа. Сформулируем достаточные условия устойчивости положения равновесия, которые можно рассматривать как обобщение теоремы Д.11 (см. Дополнение).

**Предложение 7.1.** [Иванов, 1984] *Если функция (7.10) имеет в точке  $\mathbf{q}^o$  строгий локальный максимум, то эта точка является устойчивым положением равновесия системы (7.1) – (7.3).*

**Доказательство.** Из условия следует, что  $U(\mathbf{q}^o) > U(\mathbf{q})$  для всех точек  $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}^o$  из некоторой окрестности  $U_0$ , координаты которых удовлетворяют связям (7.2). Следовательно, функция (7.9) положительно определена в пересечении окрестности точки  $\mathbf{q}^o$  с областью возможного движения. Как отмечалось выше, с ростом времени эта функция не возрастает. Отсюда по теореме Д.6 следует доказываемое утверждение.

**Замечание.** В случае  $m = n$  вектор  $\mathbf{q}'$  имеет нулевую размерность. При этом положение равновесия устойчиво.

**Пример.** Для маятника у стенки, рассмотренного выше, положение равновесия  $\theta = \theta_2^o$  устойчиво.

Перейдем к обсуждению необходимых условий устойчивости. Сначала допустим, что в положении равновесия  $\mathbf{q}^o$  все односторонние связи принадлежат к первому типу, т.е.  $l = m$ . Рассмотрим вспомогательную систему с координатами  $\mathbf{q}'$ , силовой функцией  $U'$  (см.(7.10)) и кинетической энергией

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i,j=l+1}^n a_{ij}(\mathbf{q}') \dot{q}_i' \dot{q}_j' . \quad (7.11)$$

**Предложение 7.2.** Для устойчивости положения равновесия системы (7.1) – (7.3) с односторонними связями только первого типа необходима устойчивость положения равновесия  $\mathbf{q}'^o = (q_{l+1}^o, \dots, q_n^o)$  вспомогательной системы (7.10), (7.11).

**Доказательство.** Покажем, что в достаточно малой окрестности  $\mathbf{U}'$  точки  $\mathbf{q}'^o$  каждой траектории вспомогательной системы  $\dot{\mathbf{q}}'(t)$  соответствует траектория исходной системы, для которой  $q_i(t) \equiv 0$ ,  $q_j(t) \equiv q'_j(t)$  ( $i = 1, \dots, l$ ;  $j = l+1, \dots, n$ ). Тогда из неустойчивости вспомогательной системы следует неустойчивость исходной: достаточно взять  $\epsilon$  настолько малым, чтобы шар  $\|\mathbf{q}' - \mathbf{q}'^o\| < \epsilon$  лежал внутри  $\mathbf{U}'$ .

Возьмем начальное возмущение таким, чтобы координаты точки фазового пространства  $(\mathbf{q}^o + \Delta \mathbf{q}, \Delta \dot{\mathbf{q}})$  удовлетворяли условиям напряжения связей  $\Delta q_i = 0$ ,  $\Delta \dot{q}_i = 0$  ( $i = 1, \dots, l$ ). Система (7.3) имеет решение с данным начальным условием, для которого  $q_i(t) \equiv 0$  ( $i = 1, \dots, l$ ) на некотором интервале времени, пока выполняются неравенства  $R_i > 0$  ( $i = 1, \dots, l$ ). При этом реакции  $R_i$  рассчитываются из первой группы уравнений (7.3) в предположении  $q_i \equiv 0$ ; поскольку в положении равновесия все реакции положительны, они сохранят знак и в некоторой его окрестности  $\mathbf{U}'$ . Отсюда ввиду вышесказанного следует вывод о неустойчивости полной системы, что и требовалось.

**Следствие.** [Иванов, 1992] Разложим силовую функцию в окрестности равновесия в степенной ряд

$$U = - \sum_{i=1}^l R_i(q_i - q_i^o) + U_2 + U_3 + \dots, \quad j \geq 3, \quad (7.12)$$

где  $U_j$  — однородная форма степени  $j$  относительно  $\mathbf{q} - \mathbf{q}^o$ . Если при  $q_1 = \dots = q_l = 0$  функция  $U^*(\mathbf{q}') = U_2(\mathbf{q}') + U_j(\mathbf{q}')$  отрицательно определена (может принимать положительные значения), то положение равновесия устойчиво по Ляпунову (неустойчиво).

Более сложен случай, когда в равновесии имеются односторонние связи второго типа. Доказано [Виннер, 1989] следующее необходимое условие устойчивости для частного случая  $l = 1, m = 0$  (т.е. система подчинена единственной неудерживающей связи, причем последняя относится ко второму типу).

**Предложение 7.3.** Пусть  $S$  — единичная сфера в конфигурационном пространстве  $R^n$  с центром в точке  $\mathbf{q}^o$ ,  $S^o$  — пересечение этой сферы с плоскостью  $q_1 = 0$ , а  $S^+$  — с областью  $q_1 > 0$ . Если выполнено хотя бы одно из двух условий:

1.  $U^*$  имеет на  $S^+$  точку локального максимума, где  $U^* > 0$ ;
2.  $U^*$  имеет на  $S^+ \cup S^o$  точку локального максимума, принадлежащую  $S^o$ , где  $U^* > 0$  причем эта точка не является локальным максимумом сужения функции  $U$  на сферу  $S$ , то положение равновесия неустойчиво.

В [Рапопорт, 1992] рассмотрен случай  $l \geq 1$ ,  $m = 0$ ; здесь предложен метод проверки условия предложения 7.1, а также получены некоторые условия неустойчивости.

**Об устойчивости в системах с неупругими ударами.** В неконсервативных системах наряду с устойчивостью по Ляпунову возможно наличие и более сильного свойства — асимптотической устойчивости. В гладких динамических системах ее наличие можно установить по первому приближению на основе теорем Д.9 и Д.10. В системах с односторонними связями аналогичные общие результаты неизвестны. Ограничимся рассмотрением частного случая, когда связи идеальны, а удары об эти связи неупруги. Последнее требование означает, что при соударении о каждую из связей (7.2) по отдельности выполнено неравенство

$$\dot{q}_j^+ \leq e_j |\dot{q}_j^-|, \quad e_j < 1 \quad (j = 1, \dots, l). \quad (7.13)$$

Кроме того, аналогичное соотношение выполняется для кратных ударов. В частности, для описания удара о первую и вторую связи представим кинетическую энергию системы в виде суммы

$$\begin{aligned} T &= T_{12} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=3}^n a_{ij}^*(\mathbf{q}) p_i p_j, \\ T_{12} &= \frac{1}{2} a_{11}^* \dot{q}_1^2 + a_{12}^* \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} a_{22}^* \dot{q}_2^2. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Аналогично рассмотрениям §6.3, можно показать, что в формуле (7.14) отсутствуют произведения обобщенных скоростей и импульсов.

Свойство неупругости означает, что

$$T_{12}^+ \leq e_{12}^2 T_{12}^-, \quad e_{12} = \max\{e_1, e_2\} < 1. \quad (7.15)$$

Неравенства такого же типа выполняются и для других всевозможных комбинаций индексов, отвечающих неудерживающим связям.

**Предложение 7.4.** *Допустим, что в положении равновесия все односторонние связи идеальны и принадлежат к первому типу, а удары об них неупруги. Если положение равновесия устойчиво (асимптотически устойчиво) по отношению к таким начальным возмущениям, для которых все связи остаются напряженными, то оно устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво).*

**Доказательство** основано на следующем свойстве: если начальные возмущения не превосходят величины  $\delta$ , то за время порядка  $O(\delta)$  изображающая точка выйдет на многообразие  $q_1 = \dots = q_l = \dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_l = 0$ . Последующее движение будет описываться гладкой системой с  $n - l$  степенями свободы, которая по условию устойчива.

Проверим указанное свойство в случае  $l = 1$ . В положении равновесия  $Q_1 = Q_1^o < 0$ . В качестве меры отклонения от многообразия  $q_1 = \dot{q}_1 = 0$  возьмем величину

$$h_1 = \frac{1}{2} a_{11}^*(\mathbf{q}^o) \dot{q}_1^2 - Q_1^o q_1 \geq 0. \quad (7.16)$$

Производная от функции (7.16) в силу уравнений (7.3) является величиной порядка  $h_1 O(\delta)$ , а промежуток времени между ударами об одностороннюю связь — величиной порядка  $O(\sqrt{h_1})$ . Вследствие неравенства (7.13) приходим к выводу, что величина  $h_1$  за время порядка  $O(\delta)$  обращается в нуль.

Аналогично, но более громоздко, рассматривается случай  $l > 1$ .

**Пример.** Пластина подвешена на двух невесомых нерастяжимых гибких нитях и может двигаться в вертикальной плоскости, содержащей точки подвеса (рис. 7.2). Помимо реакций связей, на тело действуют активные силы с главным вектором  $\vec{Q} = \vec{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  и главным моментом  $\vec{M}_G = \vec{M}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , где в качестве  $\mathbf{q}$  можно взять координаты  $x, y$  центра инерции  $G$  и угол  $\varphi$  между вектором  $C_1C_2$  и осью абсцисс. Здесь за начало отсчета выбрана одна из точек подвеса  $O_1$ , а ось  $x$  проходит через вторую точку  $O_2$ ;  $C_{1,2}$  — точки крепления нитей к телу.

Будем искать такие положения равновесия системы, для которых обе нити натянуты, и исследовать их устойчивость. При этом расстояния между точками подвеса тела и крепления нитей фиксированы:  $|O_1C_1| = l_1$ ,  $|O_2C_2| = l_2$ , и положение пластины можно описать при помощи единственной координаты  $\varphi_1$ . Зависимость  $y$  и  $\varphi$  от  $\varphi_1$  определяется из соотношений, выражающих неизменность длин сторон четырехугольника  $O_1O_2C_2C_1$  и треугольника  $C_1C_2G$ , затем составляется уравнение Лагранжа (см. §6.3).

Положения равновесия определяются из уравнения

$$Q_{\varphi_1}(\varphi_1^0, 0) = 0, \quad (7.17)$$

причем для каждого корня необходима проверка неотрицательности реакций связей.

Для исследования устойчивости по первому приближению достаточно решить для каждого из положений равновесия характеристическое уравнения, а затем воспользоваться предложениями 7.2, 7.4.

Допустим, в частности, что  $l_1 = l_2 = l$  и  $|O_1O_2| = |C_1C_2| = a$ , а внешние силы горизонтальны, причем их равнодействующая приложена в точке  $G^*$  (боковой ветер).

Четырехугольник  $O_1O_2C_2C_1$  представляет собой параллелограмм, следовательно,

$$\varphi \equiv 0, \quad \varphi_2 = \varphi_1, \quad x = a_1 - l \cos \varphi_1, \quad y = -b l \sin \varphi_1, \quad (7.18)$$

где  $a_1$  — горизонтальная составляющая вектора  $C_1G$ ,  $b, b_1$  — вертикальные составляющие векторов  $GC_1$  и  $GG^*$  соответственно.

Условия равновесия можно получить, приравнивая к нулю сумму всех действующих на тело сил и их моментов:

$$\begin{aligned} Q + (R_1 + R_2) \cos \varphi_1 &= 0, & -Mg + (R_1 + R_2) \sin \varphi_1 &= 0, \\ -Qb_1 - (R_1 + R_2)b \cos \varphi_1 - R_1 a_1 \sin \varphi_1 + R_2(a - a_1) \sin \varphi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Решение системы (7.19) имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \varphi_1 &= -\frac{Q}{Mg}, & R_1 &= \frac{(a - a_1)Mg + (b - b_1)Q}{a \sin \varphi_1}, \\ R_2 &= \frac{a_1 Mg - (b - b_1)Q}{a \sin \varphi_1}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Будем считать, что  $b > b_1$ , т.е. центр давления лежит ниже точек крепления нитей к телу. Условия положительности реакций выглядят так:

$$-\frac{a - a_1}{b - b_1} Mg < Q < \frac{a_1}{b - b_1} Mg. \quad (7.21)$$

Если неравенства (7.21) выполнены, то для исследования устойчивости можно воспользоваться предложением 7.4. Пользуясь формулами (7.18), выразим кинетическую энергию через  $\varphi_1$ ,  $\dot{\varphi}_1$ :

$$2T = M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + J\dot{\varphi}^2 = Ml^2\dot{\varphi}_1^2. \quad (7.22)$$

Определим обобщенную силу, соответствующую координате  $\varphi_1$ , из уравнения баланса мощностей

$$Q_{\varphi_1} \delta \varphi_1 = Q \delta x - Mg \delta y - b_1 Q \delta \varphi, \quad (7.23)$$

откуда при учете формул (7.18) получаем

$$Q_{\varphi_1} = Ql \sin \varphi_1 + Mg l \cos \varphi_1. \quad (7.24)$$

В рассматриваемом случае ориентация тела неизменна, поэтому можно считать силу  $Q$  зависящей лишь от его скорости по отношению к воздушному потоку:

$$Q(\dot{x}) = Q_0 \left(1 - \frac{\dot{x}}{V}\right)^2, \quad (7.25)$$

где  $V$  — скорость ветра,  $Q_0$  — равновесное значение.

Собирая формулы (7.22) – (7.25), получим уравнение движения в виде

$$Ml^2\ddot{\varphi}_1 = Mgl \cos \varphi_1 + Q_0 l \left( 1 - \frac{l\dot{\varphi}_1}{V} \sin \varphi_1 \right)^2 \sin \varphi_1. \quad (7.26)$$

В положении равновесия выполнены равенства (7.20), и правая часть в формуле (7.26) обращается в нуль. Выделим в ней линейные члены:

$$Ml^2\ddot{\varphi}_1 = D_1\dot{\varphi}_1 + D_0(\varphi_1 - \varphi_1^0), \quad (7.27)$$

$$D_1 = \frac{\partial Q_{\varphi_1}}{\partial \dot{\varphi}_1} = -2Q_0 l^2 V^{-1} \sin^2 \varphi_1^0, \quad D_0 = \frac{\partial Q_{\varphi_1}}{\partial \varphi_1} = -\sin \varphi_1^0 \left( Mg + \frac{Q_0^2}{Mg} \right)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$Ml^2\lambda^2 - D_1\lambda - D_0 = 0. \quad (7.28)$$

Поскольку  $D_1 < 0$ ,  $D_0 < 0$ , то корни уравнения (7.28) лежат в левой полуплоскости. Следовательно, при выполнении неравенств (7.21) система имеет асимптотически устойчивое положение равновесия.

## 7.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ С УДАРАМИ

**Понятие устойчивости движения с ударами.** В предыдущем параграфе изучалась устойчивость положений равновесия в системах с односторонними связями. При этом использовались классические определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости, сформулированные в Дополнении для гладких динамических систем. Что касается периодических движений с ударами, то они описываются разрывными интегральными кривыми и фазовыми траекториями. Поскольку моменты разрывов для исследуемого и возмущенного движений могут не совпадать, то такие движения неустойчивы в смысле стандартного определения. Тем не менее, движения с ударами могут обладать свойством устойчивости в несколько более широком смысле, и наличие этого свойства позволяет сделать вывод о структуре траекторий в окрестности данного движения. Следовательно, определение устойчивости для систем с односторонними связями нуждается в модификации.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^k \quad (7.29)$$

с односторонними связями

$$f_1(x) \geq 0, \dots, f_l(x) \geq 0. \quad (7.30)$$

К виду (7.29) можно привести уравнения (7.3), полагая  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T$  при этом  $f_j = q_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ).

Удары происходят в моменты, когда хотя бы для одной из связей выполняются соотношения  $f_j = 0$ ,  $\dot{f}_j < 0$ , и описываются равенствами

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^- + \mathbf{I}(\mathbf{x}^-, \dot{\mathbf{x}}^-). \quad (7.31)$$

В формуле (7.31) зависимость ударного импульса от обобщенных скоростей и ускорений отражает выводы второй главы о роли "конечных" сил в динамике низкоскоростного удара. В данном параграфе рассматриваются движения, складывающиеся из перелетов (описываемых уравнениями (7.29)) и ударов о связи (7.30) без участков "скольжения", когда одна или несколько этих связей напряжены и "касаний", характеризующихся выполнением условий  $f_j = 0$ ,  $\dot{f}_j = 0$ ,  $\ddot{f}_j > 0$ .

Имеется два подхода к определению устойчивости периодических движений с ударами. Первый из них связан с рассмотрением периодического движения как неподвижной точки отображения Пуанкаре [Неймарк, 1972, Кобринский, Кобринский, 1973, 1981]. При этом, как правило, используется сечение по поверхности удара в фазовом (в случае автономной системы) или расширенном фазовом пространстве. Реже применяются стrobоскопические сечения [Nordmark, 1991].

Второй подход основан на обобщении определения Д.1 на разрывные траектории: выполнение неравенства  $\|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| < \epsilon$  требуется лишь для значений  $t \geq t^o$  вне  $\epsilon$ -окрестности точек разрыва [Gayewskii, Radzijewskii, 1987, Ахметов, Перестюк, 1992]. Неудобство такого определения проявляется для движений, включающих бесконечное число ударов на конечном интервале времени. На наш взгляд, более естественны следующие определения.

**Определение 7.1.** Разрывное решение  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  системы (7.29) – (7.31) будем называть устойчивым, если интегральная кривая  $\Upsilon = (t, \tilde{\mathbf{x}}(t))$  в расширенном фазовом пространстве является устойчивым множеством. Иными словами, для любого  $\epsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , такое, что для каждого другого решения  $\mathbf{x}(t)$ , удовлетворяющего условию  $d^*((t^o, \mathbf{x}(t^o)), \Upsilon) < \delta$  имеем  $d^*((t, \mathbf{x}(t)), \Upsilon) < \epsilon$  для всех  $t \geq t^o$ . Здесь  $d^*$  обозначает расстояние между точками расширенного фазового пространства (в евклидовой метрике).

**Определение 7.2.** Разрывное решение  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  системы (7.29) – (7.31) будем называть притягивающим, если интегральная кривая  $\Upsilon$  представляет собой притягивающее множество в расширенном фазовом пространстве. Иными словами, найдется  $\delta > 0$ , такое, что для каждого другого решения  $\mathbf{x}(t)$ , такого что  $d^*((t^o, \mathbf{x}(t^o)), \Upsilon) < \delta$  имеем  $d^*((t, \mathbf{x}(t)), \Upsilon) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Определение 7.3.** Разрывное решение  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  системы (7.29) – (7.31) будем называть устойчивым, если оно устойчивое и притягивающее в смысле определений 7.1 и 7.2.

Отличие от классических определений Д.1 – Д.3 состоит в том, что возмущенное решение  $\mathbf{x}(t)$  сравнивается со значениями  $\tilde{\mathbf{x}}$  на неко-

тором малом интервале времени. Тем самым асинхронность ударов не свидетельствует о неустойчивости.

Покажем, что для непрерывных траекторий определения 7.1 – 7.3 эквивалентны классическим. Очевидно, что из устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости следуют соответствующие понятия в смысле вышеупомянутых определений. Для проверки обратной импликации заметим, что по формуле конечных приращений

$$\|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq d^*((t, \mathbf{x}(t)), \Upsilon) + \epsilon \sum_j \max_{t'} |\dot{x}_j(t')|. \quad (7.32)$$

Следовательно, для справедливости сформулированного утверждения достаточно ограниченности функции  $F(t, \mathbf{x}(t))$  при  $t > t^o$  в некоторой окрестности рассматриваемого движения.

Заметим, что определение орбитальной устойчивости Д.5 переносится на случай разрывных решений безо всяких изменений.

Рассмотрим вопрос о взаимосвязи двух вышеупомянутых подходов к исследованию устойчивости. Пусть  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  — периодическое решение системы (7.29) – (7.31) периода  $T$ . Ему отвечает неподвижная точка отображения Пуанкаре (Д.13). Выберем момент  $t^o$  таким образом, чтобы все связи (7.30) были ослаблены. Если имеет место устойчивость в смысле определения 7.1, то устойчивость неподвижной точки следует из неравенства (7.32), где  $t = t^o$ . Аналогично можно показать, что из асимптотической устойчивости в смысле определения 7.3 следует асимптотическая устойчивость неподвижной точки.

В отличие от гладких динамических систем, в разрывном случае из устойчивости неподвижной точки отображения Пуанкаре не следует, вообще говоря, устойчивости соответствующего периодического движения. Причина кроется в отсутствии в таких системах свойства непрерывной зависимости решения от начальных условий. Соответствующие примеры были рассмотрены выше: кратные удары (глава 5), неединственность решения задачи Коши в системе с односторонней связью (§6.2), парадоксы в системах с неидеальными односторонними связями (§6.1) и т.д. Может оказаться, что близким начальным условиям соответствуют решения, которые далеки друг от друга в некоторых точках интервала  $(t^o, t^o + T)$ , но близки в концах этого интервала.

**Пример.** Рассмотрим биллиард в форме ромба с углом  $\pi/3$  (рис. 7.3). Пусть в начальный момент времени скорость частицы параллельна меньшей диагонали ромба. Тогда траектория будет периодичной и четырехзвенной: если первое звено лежит левее меньшей диагонали, то остальные располагаются правее нее и наоборот. Следовательно, если начальные положения  $M_1$  и  $M_2$  близки, но разделены диагональю, то они будут близкими и после четырех отражений от стенок. Тем не менее, после первого отражения траектории расходятся в разные стороны (рис. 7.3). Очевидно, что периодическое движение, траектория которого целиком лежит на диагонали ромба, орбитально неустойчиво. В то же время ему соответствует устойчивая неподвижная точка

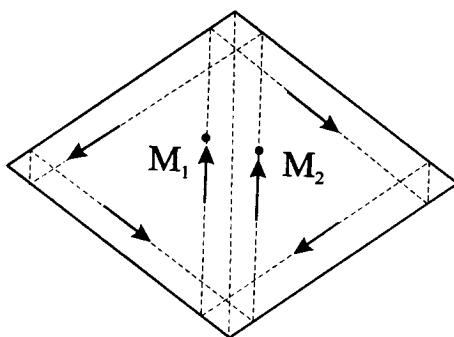


Рис. 7.3. Биллиард в ромбе

отображения Пуанкаре, построенного для сечения, состоящего из небольшого отрезка большой диагонали в окрестности центра ромба.

В случаях, когда решение непрерывно зависит от начальных условий, из устойчивости неподвижной точки отображения Пуанкаре следует, очевидно, устойчивость соответствующего периодического движения. При этом непрерывность понимается в смысле расстояния  $d^*$ . Отметим распространенный тип движений, называемых вибродарными, обладающими этим свойством. Пусть  $\tilde{x}(t)$  — периодическое решение, включающее конечное число ударов на любом конечном интервале времени, причем среди этих ударов нет кратных и во все время движения выполнены строгие неравенства

$$f_j^2 + \dot{f}_j^2 > 0 \quad (j = 1, \dots, l). \quad (7.33)$$

Условие (7.33) означает отсутствие участков "скольжения" по связи, а также касаний ее без начальной скорости.

Функции  $F$ ,  $f_j$  и  $I$  будем считать непрерывно дифференцируемыми. Покажем, что при таких предположениях возмущенное движение непрерывно зависит от начальных возмущений. Для этого достаточно изучить влияние ударов о связь. Пусть  $t'$  — момент удара, т.е.

$$f_j(\tilde{x}(t')) = 0, \quad \dot{f}_j(\tilde{x}(t')) < 0. \quad (7.34)$$

Для возмущенного движения удар произойдет в момент  $t' + \Delta t$ , определяемый из уравнения

$$f_j(x(t' + \Delta t)) = 0. \quad (7.35)$$

По теореме о неявной функции вследствие второго условия (7.34) уравнение (7.35) определяет дифференцируемую функцию  $\Delta t(\Delta x^0)$ . Следовательно, расстояние  $d^*$  между двумя интегральными кривыми остается малой величиной. Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Предложение 7.5.** Из устойчивости периодического решения системы (7.29) – (7.31) следует устойчивость соответствующей неподвижной точки отображения Пуанкаре. Для решений, включающих лишь простые (некратные) удары, удовлетворяющие условию (7.34), справедлива и обратная импликация (в момент  $t^0$  все односторонние связи ослаблены).

**Замечания.** 1. В определениях устойчивости 7.1, 7.3 время равноправно с фазовыми переменными. Следовательно, предложение 7.5 остается справедливым для отображений Пуанкаре более общего вида, построенным в расширенном фазовом пространстве. В частности, для движений, удовлетворяющих неравенствам (7.33), в качестве секущей поверхности можно выбрать поверхность удара, например,  $f_1(x) = 0$ . При этом, разумеется, надо учитывать различие не только в координатах, но и в моментах пересечений траекториями этих поверхностей [Неймарк, 1972].

2. Для периодических движений с кратными ударами или участками напряжения связей второе утверждение предложения 7.5 справедливо при условии наличия непрерывной зависимости решения от начальных условий. Методы проверки данного свойства будут обсуждены ниже.

**Построение характеристического уравнения.** Исследуем в первом приближении устойчивость движений с некратными ударами без участков "скольжения". Для этого построим линейную часть отображения Пуанкаре в окрестности неподвижной точки, отвечающей данному решению. Будем сопоставлять с периодическим движением пару целых чисел  $(N, K)$ , если его период равен  $2\pi N$  и оно испытывает в течение этого времени  $K$  ударов.

Обозначим моменты соударений  $t'_1, t'_2, \dots, t'_K$  в порядке их следования, причем моменту  $t'_i$  соответствует удар о связь (7.30) с номером  $n_i$ ,  $1 \leq n_i \leq l$  ( $i = 1, \dots, K$ ). Вектор возмущений  $\xi(t)$  определим как разность между данным периодическим и близким к нему решением:

$$\xi = x(t) - \tilde{x}(t). \quad (7.36)$$

На участках безударного движения переменная  $\xi$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\xi} = F(t, \tilde{x}(t) + \xi) - F(t, \tilde{x}(t)). \quad (7.37)$$

Правая часть системы (7.37) равна нулю при  $\xi = 0$ , поэтому ее можно представить в виде (Д.24). Как известно, решение системы (7.37) в случае гладкой системы допускает оценку вида

$$\xi(t) = X(t)\xi^0 + o(\xi^0), \quad (7.38)$$

где  $X(t)$  — фундаментальная матрица решений линейной системы

$$\dot{X} = A(t)X, \quad A(t) = F_x(t, \tilde{x}(t)). \quad (7.39)$$

Формула (7.38) справедлива до первого момента удара  $t'_1$ . Определим поведение переменной  $\xi$  при ударе. Для наглядности индексы, обозначающие номер связи, опущены. При варьировании в первом приближении можно не учитывать, согласно результатам второй главы, зависимость ударного импульса (7.31) во втором аргументе от  $\xi$ . В силу сделанных предположений

$$\begin{aligned} f(\tilde{\mathbf{x}}(t')) &= 0, \\ \dot{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t')) &= (\text{grad } f, \mathbf{F}(t', \tilde{\mathbf{x}}(t'))) = -V < 0. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Обозначим момент удара для возмущенного движения  $t' + \Delta t$ . В общем случае  $\Delta t \neq 0$ , и компоненты переменной  $\xi$ , соответствующие скоростям системы, на интервале  $(t', t' + \Delta t)$  могут быть не малы. Поэтому имеет смысл оценить значение  $\xi(t' + \Delta t + 0)$ . Величину  $\Delta t$  определим из уравнения

$$f(\mathbf{x}(t' + \Delta t)) = 0. \quad (7.41)$$

Подставляя (7.36) в (7.41) получим

$$f(\tilde{\mathbf{x}}(t' + \Delta t) + \xi^-) = 0, \quad \xi^- = \xi(t' - 0).$$

Отсюда по формуле Тейлора будем иметь

$$f(\tilde{\mathbf{x}}(t')) + \dot{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t')) \Delta t + (\xi^-, \text{grad } f(\tilde{\mathbf{x}}(t'))) + o(\Delta t) = 0. \quad (7.42)$$

При выводе формулы (7.42) принят во внимание геометрический характер связей (7.30) (т.е. независимость функций  $f_j$  от обобщенных скоростей), а также неизменность координат при ударе. При учете формул (7.40) получаем

$$\Delta t = (\xi^-, \text{grad } f(\tilde{\mathbf{x}}(t'))) / V + o(\xi^-). \quad (7.43)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \xi(t' + \Delta t + 0) &= \mathbf{x}(t' + \Delta t + 0) - \tilde{\mathbf{x}}(t' + \Delta t) = \\ &= \mathbf{x}(t') + \Delta t \dot{\mathbf{x}}(t') + \mathbf{I}(\mathbf{x}(t') + \Delta t \dot{\mathbf{x}}(t'), \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t')) - \\ &- \tilde{\mathbf{x}}(t' - 0) - \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{x}}(t'), \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t')) - \Delta t \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t') + o(\xi^-). \end{aligned} \quad (7.44)$$

В матричной форме соотношение (7.44) принимает вид

$$\begin{aligned} \xi^+ &= \mathcal{J}\xi^- + o(\xi^-), \quad \xi^+ = \xi(t' + \Delta t + 0), \\ \mathcal{J} &= \mathbf{E}_k + \mathbf{I}_x + V^{-1}(\mathbf{F}^- - \mathbf{F}^+) \otimes \text{grad } f + V^{-1}\mathbf{I}_x(\mathbf{F}^- \otimes \text{grad } f), \\ \mathbf{F}^\pm &= \mathbf{F}(t', \tilde{\mathbf{x}}(t' \pm 0)). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Здесь знак " $\otimes$ " обозначает внешнее произведение двух векторов:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \|a_i b_j\| \quad (i, j = 1, \dots, k). \quad (7.46)$$

Доказано следующее утверждение.

**Предложение 7.6.** Для движения с ударами возмущения описываются формулой (7.38), где  $\mathbf{X}(t)$  — кусочно-непрерывное решение системы (7.39). Точки разрыва матрицы  $\mathbf{X}(t)$  совпадают с моментами ударов для невозмущенного движения, при этом

$$\mathbf{X}^+ = \mathcal{J} \mathbf{X}^-, \quad \mathbf{X}^\pm = \mathbf{X}(t' \pm 0), \quad (7.47)$$

где матрица удара  $\mathcal{J}$  определена в (7.45).

**Примеры вычисления матрицы удара.** 1. Пусть система имеет единственную степень свободы, односторонняя связь выражается неравенством  $q \geq 0$ , а удар об эту связь описывается при помощи ньютонаовского коэффициента восстановления:  $\dot{q}^+ = -e\dot{q}^-$ . В этом случае

$$\mathbf{x} = (q, \dot{q})^T, \quad f(\mathbf{x}) = x_1, \quad \mathbf{F} = (x_2, F_2)^T, \quad \mathbf{I} = (0, -(1 + e)x_2)^T, \quad (7.48)$$

$$\text{grad } f = (1, 0)^T, \quad \mathbf{I}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 - e \end{pmatrix},$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ (F_2^+ + eF_2^-)/x_2^- & -e \end{pmatrix}. \quad (7.49)$$

2. В случае системы с одной степенью свободы и ударами вида  $\dot{q}^+ = \dot{q}^- + I(\dot{q}^-)$  формула (7.49) изменится следующим образом:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 + I/x_2^- & 0 \\ (F_2^+ - (1 + I')F_2^-)/x_2^- & 1 + I' \end{pmatrix}, \quad I' = \frac{\partial I}{\dot{x}_2^-}. \quad (7.50)$$

3. Для системы с  $n$  степенями свободы, идеальной неудерживающей связью  $q_1 \geq 0$  и ударами вида (см. §6.3)

$$\dot{q}_1^+ = \dot{q}_1^- + I(\dot{q}_1^-), \quad p_j^+ = p_j^-, \quad p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 2, \dots, n) \quad (7.51)$$

обозначим  $\mathbf{x} = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n)^T$ . По аналогии с (7.48) имеем

$$\text{grad } f = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad \mathbf{I}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.52)$$

Подставляя данные выражения в формулу (7.45), получаем

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 + I/x_2^- & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (F_2^+ - (1 + I')F_2^-)/x_2^- & 1 + I' & 0 & \dots & 0 \\ (F_3^+ - F_3^-)/x_2^- & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (F_{2n}^+ - F_{2n}^-)/x_2^- & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.53)$$

Исходя из Предложений 7.5, 7.6, можно предложить следующий метод исследования устойчивости по первому приближению периодического движения с ударами  $\tilde{x}(t)$ . Линеаризуем систему (7.37) и будем строить решение линейного дифференциального матричного уравнения (7.39) с начальным условием  $\mathbf{X}(t^o) = \mathbf{E}_k$  и разрывами в моменты ударов  $t'_j$  в соответствии с формулой (7.47). Тогда матрица

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}(t^o + 2\pi N, t'_K) \mathcal{J}_K \mathbf{X}(t'_K, t'_{K-1}) \mathcal{J}_{K-1} \dots \mathcal{J}_1 \mathbf{X}(t'_1, t^o) \quad (7.54)$$

представляет собой линейную часть отображения Пуанкаре в окрестности неподвижной точки. В формуле (7.54) принято обозначение  $\mathbf{X}(t_2, t_1)$  для значения при  $t = t_2$  решения системы (7.39) с начальным условием  $\mathbf{X} = \mathbf{E}_k$  при  $t = t_1$ .

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det |\mathbf{Z} - \rho \mathbf{E}_k| = 0. \quad (7.55)$$

Из общих результатов (см. §Д.3) следует такое утверждение.

**Предложение 7.7.** *Если все корни уравнения (7.55) по абсолютной величине меньше единицы, то периодическое движение с ударами  $\tilde{x}(t)$  асимптотически устойчиво. Если хотя бы один из этих корней больше единицы, то движение неустойчиво.*

**Замечание.** При изменении начального момента  $t^o$  матрица  $\mathbf{Z}$  изменяется, оставаясь подобной себе самой. При этом характеристическое уравнение (7.55) не изменяется. Следовательно, при составлении этого уравнения формально можно положить  $t^o = t'_1$ .

**Устойчивость одноударных периодических движений частицы на вибрирующем основании.** Рассмотрим пример применения описанной методики.

Уравнения движения частицы на вибрирующем основании имеют вид (см. §6.2)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g - \ddot{h}(t), \quad x_1 \geq 0, \quad (7.56)$$

где аппликата платформы  $h(t)$  — некоторая дважды дифференцируемая  $2\pi$ -периодическая функция времени. Допустим, что  $\tilde{x}(t)$  — периодическое движение системы (7.56) типа  $(N, 1)$  с моментами ударов  $t'_j$ ,

$t' + 2\pi N, \dots$  Матрица  $\mathbf{A}$  в уравнении (7.39) и решение этого уравнения выглядят так:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(t) = \exp\{\mathbf{A}t\} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.57)$$

Для матрицы удара можно воспользоваться формулой (7.50), где  $F_2^\pm = -g - \ddot{h}(t')$ . Полагая  $t^0 = t'$ , получим для матрицы (7.54) следующее выражение

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}(2\pi)\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 + (I + 2\pi NuI')/x_2^- & 2\pi N(1 + I') \\ uI'/x_2^- & 1 + I' \end{pmatrix}, \quad u = g + \ddot{h}(t'). \quad (7.58)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 - a_1\rho + a_2 = 0, \quad (7.59)$$

$$a_1 = \text{Tr } \mathbf{Z} = 2 + I' + (I + 2\pi NuI')/x_2^-, \quad a_2 = \det \mathbf{Z} = (1 + I')(1 + I/x_2^-).$$

Условия асимптотической устойчивости  $|\rho_{1,2}| < 1$  выполнены в двух случаях: либо оба мультипликатора вещественны и лежат в интервале  $(-1, 1)$ , либо они комплексно сопряжены, а их произведение (т.е.  $a_2$ ) меньше единицы. Элементарные вычисления приводят к двойному неравенству, объединяющему оба этих случая:

$$|a_1| < 1 + a_2 < 2. \quad (7.60)$$

В частности, в случае постоянного коэффициента восстановления получаем

$$a_1 = -2e - (1 + e)2\pi Nu/x_2^-, \quad a_2 = e^2. \quad (7.61)$$

и условия (7.60) принимают вид

$$|2e + (1 + e)2\pi Nu/x_2^-| < 1 + e^2. \quad (7.62)$$

Условия существования периодического движения обсуждаемого типа выглядят так

$$x_1 > 0 \text{ при } t \in (t', t' + 2\pi N), \quad \dot{z}(t' + 0) = -\dot{z}(t' - 0) = \pi Ng. \quad (7.63)$$

Здесь  $z = x_1 + h$  — аппликата частицы. Неравенство (7.63) означает, что в промежутке между ударами частица летит выше платформы, а равенства показывают, что продолжительность полета равна  $2\pi N$ . Поскольку  $\dot{z}(t' - 0) = x_2^- + \dot{h}(t')$ ,  $\dot{z}(t' + 0) = -ex_2^- + \dot{h}(t')$ , то из (7.63) получаем

$$\dot{x}_2^- = -2\pi Ng(1 + e)^{-1}, \quad \dot{h}(t') = \pi Ng(1 - e)(1 + e)^{-1}. \quad (7.64)$$

Подставляя найденные значения в условие устойчивости (7.62), приведем его к виду

$$-2g(1+e^2)(1+e)^{-2} < \ddot{h}(t') < 0, \quad (7.65)$$

причем момент удара  $t'$  определяется вторым уравнением (7.64).

**Об устойчивости движений с кратными ударами.** Движения, включающие удары о несколько односторонних связей одновременно, принципиально отличаются от рассмотренных выше движений без таких ударов: как показано в пятой главе, возмущение начальных условий на величину порядка контактных деформаций приводит в общем случае к значительному изменению ударного импульса. Такое поведение свидетельствует о неустойчивости движения, так как в дискретной системе (7.29) деформации связей (7.30) считаются пренебрежимо малыми по сравнению с характерной единицей длины. Соответствующий пример обсуждался выше в §7.1.

Для возмущенного движения кратный удар распадается на последовательность более простых ударов о связи по отдельности. При исследовании движения с кратными ударами следует рассмотреть все возможные случаи и определить характер возмущенного движения по окончании ударов. Необходимым условием устойчивости является совпадение результатов при всех сценариях.

Допустим, например, что движение включает двойной удар об идеальные связи  $q_1 \geq 0$  и  $q_2 \geq 0$ . Тогда для возмущенного движения имеется два варианта последовательных соударений, различающихся номером той связи, которая включается первой. Они приводят к одинаковым результатам, если выполнено условие ортогональности, означающее взаимную независимость импульсивных реакций связей при двойном ударе (см. §6.2). Другие случаи непрерывной зависимости от начальных условий — пластический удар, а также абсолютно упругий удар об угол, являющийся целой частью развернутого угла (Иванов, 1987, Козлов, Трешёв, 1991). Мы приходим к следующему утверждению.

**Предложение 7.8.** Для устойчивости периодического движения, включающего неупругие удары о несколько односторонних связей одновременно, необходимо попарная ортогональность поверхностей удара в точке их пересечения, принадлежащей невозмущенной траектории.

Если условия ортогональности выполнены, то возмущенное движение непрерывно зависит от начальных условий. В этом случае можно воспользоваться предложением 7.5 и свести задачу об устойчивости к исследованию неподвижной точки отображения Пуанкаре.

Воспользуемся методом линеаризации, применявшимся выше к исследованию движений с простыми ударами. Оказывается, что отображение Пуанкаре в окрестности неподвижной точки, отвечающей периодическому движению с кратными ударами об ортогональные связи,

кусочно-дифференцируемо: вид матрицы удара  $J$  зависит от вектора возмущений  $\xi^-$ . Ее можно вычислить как произведение матриц  $J_i$ , соответствующих ударам об одну связь и вычисляемых по формулам, аналогичным (7.45). При этом порядок сомножителей зависит от величин  $\Delta_1 t$ , вычисляемых по аналогии с (7.43). В частности, для удара о связь  $f_1 \geq 0$  и  $f_2 \geq 0$  имеем

$$\mathcal{J} = \begin{cases} J_1 J_2, & \text{если } \Delta_1 t > \Delta_2 t \\ J'_2 J'_1, & \text{если } \Delta_1 t < \Delta_2 t \end{cases}, \quad \Delta_{1,2} t = (\xi^-, \operatorname{grad} f_{1,2}) / V_{1,2}, \quad (7.66)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= E_k + I_{1x} + V_1^{-1} (F^{-+} - F^{++}) \otimes \operatorname{grad} f_1 + V_1^{-1} I_{1x} (F^{-+} \otimes \operatorname{grad} f_1), \\ J'_1 &= E_k + I_{1x} + V_1^{-1} (F^{--} - F^{+-}) \otimes \operatorname{grad} f_1 + V_1^{-1} I_{1x} (F^{--} \otimes \operatorname{grad} f_1), \\ J_2 &= E_k + I_{2x} + V_2^{-1} (F^{--} - F^{-+}) \otimes \operatorname{grad} f_2 + V_2^{-1} I_{2x} (F^{--} \otimes \operatorname{grad} f_2), \\ J'_2 &= E_k + I_{2x} + V_2^{-1} (F^{+-} - F^{++}) \otimes \operatorname{grad} f_2 + V_2^{-1} I_{2x} (F^{+-} \otimes \operatorname{grad} f_2), \\ F^{--} &= F(\tilde{x}), \quad F^{+-} = F(\tilde{x} + I_1), \quad F^{-+} = F(\tilde{x} + I_2), \quad F^{++} = F(\tilde{x} + I_1 + I_2), \end{aligned}$$

Если  $\Delta_1 t = \Delta_2 t$ , то в формулах для вычисления матриц  $J_{1,2}, J'_{1,2}$  надо подставить те же значения правых частей  $F$ , что и в (7.45). При этом вследствие ортогональности связей произведение  $\mathcal{J}$  не зависит от порядка сомножителей.

Поскольку матрица  $\mathcal{J}$  "сшита" из нескольких кусков, исследование устойчивости, основанное на решении характеристического уравнения (см. Предложение 7.7), в общем случае невозможно. Здесь можно рекомендовать непосредственное использование теорем прямого метода Ляпунова (см. §Д.2).

**Пример.** Рассмотрим плоское движение твердого тела, опирающегося двумя острыми гранями на вибрирующее основание (рис. 4.11а). Помимо силы тяжести, на тело действуют силы сопротивления, препятствующие его вращению. Будем считать, что главный вектор этих сил равен нулю, а их главный момент  $M^*$  пропорционален квадрату угловой скорости.

Уравнения движения в промежутках между ударами имеют вид

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad \dot{\varphi} = -\varsigma \dot{\varphi} |\dot{\varphi}|, \quad (7.67)$$

где  $\varsigma$  — некоторый коэффициент. Система подчинена двум односторонним связям вида (6.63).

Существуют периодические движения, для которых тело движется поступательно вдоль вертикали (т.е.  $\varphi \equiv 0$ ), неупруго соударяясь с опорой обеими ногами сразу. Согласно Предложению 7.8, для устойчивости таких движений необходимо выполнение условия ортогональности, которое в обсуждаемой задаче имеет вид (6.64). Другое необходимое условие устойчивости имеет вид (7.65), поскольку среди возмущений есть и такие, при которых  $\varphi \equiv 0$ . Попытаемся получить достаточные условия устойчивости для случая  $a_1 = a_2 = a$ .

Горизонтальная составляющая скорости центра масс неизменна как при перелетах, так и при ударах, поэтому ограничимся изучением вертикального и вращательного движений. Для их описания достаточно двух координат, в качестве которых удобно выбрать расстояния от опорных точек тела до основания, тогда

$$q_1 = y - a \sin \varphi, \quad q_2 = y + a \sin \varphi. \quad (7.68)$$

Подставим выражения (7.68) в уравнения (7.67) и выпишем в полученных формулах главные в окрестности  $\varphi = 0$  члены:

$$\ddot{q}_1 = -g + \frac{1}{4}\varsigma(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)|\dot{q}_2 - \dot{q}_1|, \quad \ddot{q}_2 = -g - \frac{1}{4}\varsigma(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)|\dot{q}_2 - \dot{q}_1|. \quad (7.69)$$

Следовательно, в формулах (7.66)

$$\begin{aligned} F_1^{+-} &= F_2^{-+} = -g - \ddot{h}(t') - \gamma V, & F_1^{-+} &= F_2^{+-} = -g - \ddot{h}(t') + \gamma V, \\ F_1^{--} &= F_2^{--} = F_1^{++} = F_2^{++} = -g - \ddot{h}(t'), & \gamma &= \frac{1}{4}\varsigma(1+e)^2 V, & V &= -\dot{q}_{1,2}. \end{aligned}$$

Расчеты по формулам (7.66) показывают, что в случае  $\varsigma = 0$  отображение Пуанкаре дифференцируемо, а матрица удара  $\mathcal{J}$  является блочно-диагональной, причем оба диагональных блока имеют вид (7.58). Следовательно, в этом случае условия устойчивости имеют точно такую же форму (7.65), как и в задаче о движении частицы на вибрирующем основании.

Если  $\varsigma \neq 0$ , то матрица  $\mathcal{J}$  разрывна. Вывод об асимптотической устойчивости периодического движения для достаточно малых значений  $\varsigma$  можно сделать на основе анализа функции

$$\mathcal{V} = J_{21}(\xi_1^2 + \xi_3^2) + 2\pi N J_{21}(\xi_1 \xi_2 + \xi_3 \xi_4) + 2\pi N e(\xi_2^2 + \xi_4^2), \quad (7.70)$$

где  $J_{21} = (1+e)(g + \ddot{h}(t'))/V$ .

Функция (7.70) положительно определена при условии  $2\pi N J_{21} \in (0, 4e)$ , которое в области (7.65) выполнено. При этом

$$\mathcal{V}(\bar{\xi}) = e^2 \mathcal{V}(\xi) + O(\varsigma) \|\xi\|^2. \quad (7.71)$$

При  $e < 1$  из аналога теоремы Д.7 для отображений следует асимптотическая устойчивость рассматриваемых периодических движений в области (7.65) для достаточно малых значений коэффициента  $\varsigma$ .

**Замечание.** В рассмотренном примере ортогональность связей достигается лишь для отдельных значений параметров, а в общем случае она не имеет места. Данное обстоятельство физически обусловлено абсолютной жесткостью крепления опор к корпусу. Напротив, если сделать эти крепления упругими (при этом число степеней свободы системы повысится), то условия ортогональности будут выполнены автоматически.

### 7.3. БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ С УДАРАМИ

**Случай невырожденных ударов.** Исследуем эволюцию периодических движений с ударами, считая в системе (7.29) – (7.31) функцию  $\mathbf{F}$  зависящей, помимо  $t$  и  $\mathbf{x}$ , от некоторого параметра  $\mu$ . Ограничимся бифуркациями коразмерности единица (см. §Д.4), тогда можно считать  $\mu$  скаляром. Примем допущение об отсутствии для рассматриваемого периодического движения  $\tilde{\mathbf{x}}(\mu, t)$  при  $\mu = 0$  участков скольжения и касаний ограничителей, а также кратных ударов; оно включает в себя удары с ненулевой скоростью сближения в моменты  $t_j$  ( $j = 1, \dots, K$ ).

Как было показано в предыдущем параграфе, обсуждаемая проблема сводится к изучению неподвижной точки отображения Пуанкаре за период  $2\pi N$ . Если функции  $\mathbf{F}$ ,  $f_j$  и  $\mathbf{I}$  в (7.29) – (7.31) дифференцируемы достаточно число раз в некоторой окрестности исследуемого движения, то аналогичным свойством обладает и отображение Пуанкаре в окрестности соответствующей неподвижной точки. Данное свойство следует из теоремы неявной функции в применении к (7.35). Поэтому мы можем в полной мере воспользоваться результатами, приведенными в §Д.4.

Важную информацию о наличии бифуркации содержит определяющая матрица (7.54). Если все корни характеристического уравнения (7.55) по модулю не равны единице, то периодическое движение принадлежит к гиперболическому типу, т.е. при малых изменениях параметра фазовый портрет сохраняет свою локальную структуру. Три основных типа бифуркаций описываются соотношениями (Д.34), (Д.35) и (Д.37).

Окончательный вывод о характере бифуркации можно сделать лишь на основе анализа нелинейных членов отображения в окрестности неподвижной точки. В принципе, эти члены можно определить методом, аналогичным построению матрицы  $\mathbf{Z}$  в §7.2, однако получаемые формулы оказываются чрезесчур громоздкими для анализа. Ввиду этого часто судят о характере бифуркации непосредственно, путем аналитического или численного построения периодических движений, близких к данному.

**Пример.** Для периодических движений типа  $(N, 1)$  частицы на вибрирующем основании выясним поведение на границе области устойчивости (7.65). Будем считать для рассматриваемого движения геометрические условия существования выполненными. Рассмотрим два основных случая.

- Пусть  $\ddot{h} = 0$ ,  $d^3h/dt^3 \neq 0$  при  $t = t'$ . Коэффициенты характеристического уравнения в формуле (7.61) при учете (7.64) имеют такие значения:  $a_1 = 1 + e_0^2$ ,  $a_2 = e_0^2$ . Следовательно, один из корней характеристического уравнения равен единице. Допустим, что параметр  $e$  получает малое приращение от значения  $e_0$ , тогда во второй из формул (7.64) правая часть получает приращение противоположного знака. В

силу сделанных предположений

$$\dot{h}(t' + \Delta t) = \dot{h}(t') + \frac{1}{2} \frac{d^3 h(t')}{dt^3} (\Delta t)^2 + o(\Delta t)^2.$$

Следовательно, уравнение (7.64) в зависимости от знака разности  $e - e_0$  имеет два решения (в том случае, когда числа  $d^3 t / dt^3$  и  $e - e_0$  имеют разные знаки) или ни одного решения. Такое поведение характеризует бифуркацию "седло-узел".

2. В случае  $\ddot{h}(t') = -2g(1 + e_0^2)(1 + e_0)^{-2}$  коэффициенты характеристического уравнения равны  $a_1 = -1 - e_0^2$ ,  $a_2 = e_0^2$ , и один из мультиплликаторов равен минус единице. Можно сделать вывод, что при выполнении некоторого условия невырожденности мы имеем бифуркацию удвоения периода. Явный вид этого условия, также как и тип бифуркации (субкритическая или суперкритическая) выясняются при ниже следующем анализе.

Будем строить движения типа  $(2N, 2)$ . Обозначим моменты ударов  $t' + \eta_1$ ,  $t' + 2\pi N + \eta_2$ , а абсолютные скорости частицы после отскоков

$$\dot{z}(t' + \eta_1 + 0) = \pi N g + \nu_1, \quad \dot{z}(t' + 2\pi N + \eta_2 + 0) = \pi N g + \nu_2$$

и составим условия периодичности.

Уравнения первого перелета имеют вид

$$\begin{aligned} z(t) &= z(t' + \eta_1) + \dot{z}(t' + \eta_1 + 0)(t - t' - \eta_1) - \frac{1}{2}g(t - t' - \eta_1)^2, \\ \dot{z}(t) &= \dot{z}(t' + \eta_1 + 0) - g(t - t' - \eta_1). \end{aligned} \quad (7.72)$$

В момент приземления  $z(t) = h(t)$ , откуда при учете (7.72) получаем

$$\begin{aligned} h_2 &= h_1 + \nu_1(2\pi N + \eta_2 - \eta_1) - \pi N g(\eta_2 - \eta_1) - \frac{1}{2}g(\eta_2 - \eta_1)^2, \\ \dot{z}(2\pi N + \eta_2 - 0) &= -\pi N g + \nu_1 - g(\eta_2 - \eta_1), \quad h_{1,2} = h(t' + \eta_{1,2}). \end{aligned} \quad (7.73)$$

При ударе  $x_2^+ = -ex_2^-$ , откуда

$$\dot{z}(t' + 2\pi N + \eta_2 + 0) = -e\dot{z}(t' + 2\pi N + \eta_2 - 0) + (1 + e)\dot{h}_2. \quad (7.74)$$

Из формул (7.73), (7.74) получаем два соотношения, связывающие переменные  $\eta$ ,  $\nu$ :

$$\begin{aligned} \nu_2 + e\nu_1 &= (1 + e)\dot{h}_2 - \pi N g(1 - e) + eg(\eta_2 - \eta_1), \\ \nu_1(2\pi N + \eta_2 - \eta_1) &= \pi N g(\eta_2 - \eta_1) + \frac{1}{2}g(\eta_2 - \eta_1)^2 + h_2 - h_1. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Рассматривая второй перелет, получим при учете периодичности уравнения, аналогичные (7.75), но с перестановкой индексов:

$$\begin{aligned}\nu_1 + e\nu_2 &= (1+e)\dot{h}_1 - \pi Ng(1-e) + eg(\eta_1 - \eta_2), \\ \nu_2(2\pi N + \eta_1 - \eta_2) &= \pi Ng(\eta_1 - \eta_2) + \frac{1}{2}g(\eta_2 - \eta_1)^2 + h_1 - h_2,\end{aligned}\quad (7.76)$$

Уравнения (7.75), (7.76) следует решать совместно. Переменные  $\nu_{1,2}$  входят в них линейно и их легко исключить. В итоге остаются следующие два уравнения для определения неизвестных  $\eta_{1,2}$ :

$$2\pi Nk(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 - 2\pi Ngk) = g(\eta_2 - \eta_1)^2 + (\dot{h}_2 - \dot{h}_1)(\eta_2 - \eta_1), \quad (7.77)$$

$$k(\eta_2 - \eta_1)(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 - 2\pi Ngk) = 2\pi N(\dot{h}_2 - \dot{h}_1) + 2\pi Ng(\eta_2 - \eta_1) + 2k(h_2 - h_1),$$

где  $k = \frac{1-e}{1+e}$ . По формуле Тейлора

$$h(t' + \eta) = h(t') + \pi Ngk\eta + \frac{1}{2}\ddot{h}(t')\eta^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3h}{dt^3}(t')\eta^3 + o(\eta^3), \quad (7.78)$$

$$\dot{h}(t' + \eta) = \pi Ngk + \ddot{h}(t')\eta + \frac{1}{2}\frac{d^3h}{dt^3}(t')\eta^2 + \frac{1}{6}\frac{d^4h}{dt^4}(t')\eta^3 + o(\eta^3)$$

Подставляя (7.78) в первую из формул (7.77), получим

$$\eta_2 = -\eta_1 + \varpi\eta_1^2 + o(\eta_1^2), \quad \varpi = -\frac{1}{\ddot{h}(t')}\left(\frac{d^3h}{dt^3}(t') - \frac{2}{\pi N k}\left(g + \ddot{h}(t')\right)\right) \quad (7.79)$$

Второе уравнение (7.77) удовлетворяется при  $\eta_1 = \eta_2$ , при этом вследствие (7.79)  $\eta_1 = 0$ , т.е. построенное движение совпадает с рассматриваемом движением типа  $(N, 1)$ . Сокращая обе части этого уравнения на разность  $(\eta_2 - \eta_1)$  и пользуясь разложениями (7.78), (7.79), получим

$$2\pi N \left[ \ddot{h}(t') + g(1 + k^2) \right] = \varpi^* \eta_1^2 + o(\eta_1^2) \quad (7.80)$$

$$\varpi^* = \frac{d^3h}{dt^3}(t') \left( \frac{2}{3}k - \pi N \varpi \right) - \frac{1}{3}\pi N \frac{d^4h}{dt^4}(t')$$

Вышеупомянутое условие невырожденности означает, что  $\varpi^* \neq 0$ . Если  $\varpi^* > 0$ , то уравнение (7.80) имеет решения в области (7.65), следовательно, бифуркация субкритическая. В случае  $\varpi^* < 0$  бифуркация суперкритическая, т.е. потеря устойчивости движения типа  $(N, 1)$  сопровождается рождением пары устойчивых движений типа  $(2N, 2)$ .

**Движения с касаниями ограничителя.** Наряду с обсуждавшимися выше движениями с невырожденными ударами, возможны

случаи, когда траектория касается одной из поверхностей (7.30). Для касания первого порядка в момент  $t = t^*$  выполняются условия

$$f_j = 0, \quad \dot{h}_j = 0, \quad \ddot{h}_j > 0. \quad (7.81)$$

На практике касания возникают, как правило, при выходе на границу области выполнения геометрических условий существования движений с невырожденными ударами. Например, в технических системах с зазором имеется некоторый люфт, в пределах которого возможны движения без ударов. Границное движение такого вида включает касание ограничителя.

Само по себе касание не влияет на движение, так как реакция связи остается равной нулю. Однако, оно имеет драматическую роль для семейства периодических движений: приобретение с изменением параметра касания ограничителя вызывает "внезапную смерть" семейства. Такое явление связано с теми или иными перестройками фазового портрета и носит название бифуркации касания; оно присуще только системам с неудерживающими связями.

Первостепенным звеном в исследовании бифуркации касания является задание правила для вычисления ударного импульса. Традиционный подход, связанный с описанием удара в системе с односторонней связью  $q \geq 0$  соотношением вида

$$\dot{q}^+ = G(\dot{q}^-) \geq 0 \quad (7.82)$$

делает невозможным применение регулярных методов исследования, представленных в Дополнении. Причина кроется в отсутствии гладкости у отображения Пуанкаре  $\varphi_T$  в неподвижной точке, соответствующей периодическому движению с касанием. Данный факт легко установить, пользуясь результатами предыдущего параграфа. Действительно, сколь угодно малые начальные возмущения могут привести траекторию к удару о связь в окрестности момента  $t^*$ . При расчёте определяющей матрицы по формуле (7.54) данный низкоскоростной удар следует учитывать путём добавления сомножителя вида (7.49). Здесь знаменатель может быть произвольно мал, в то время как числитель в силу неравенств (7.81), (7.82) имеет при  $x_2^- \rightarrow 0$  положительный предел. Следовательно, отображение  $\varphi_T$  недифференцируемо.

Подробный анализ данного отображения для системы с одной степенью свободы и ударами вида (7.82) проведен в [Nordmark, 1991], где показано, что при подходящем выборе координат  $\xi$  на секущей поверхности оно имеет вид

$$\varphi_T = \begin{cases} \mathbf{A}^+ \xi + O(\xi^2), & \text{если } \xi_1 \geq 0, \\ \mathbf{A}^- \xi^* + O(\xi^{*2}), & \text{если } \xi_1 < 0, \end{cases} \quad (7.83)$$

где  $\xi^* = (\sqrt{-\xi_1}, \xi_2)^T$  и  $\mathbf{A}^+ \xi = \mathbf{A}^- \xi$  при  $\xi_1 = 0$ .

В общем случае (когда в первом столбце матрицы  $\mathbf{A}^-$  имеется ненулевой элемент) отображение (7.83) непрерывно, но не дифференцируемо.

При использовании плоскости  $q = 0$  в качестве секущей поверхности соответствующее отображение даже разрывно [Whiston, 1992].

Ряд работ ([Фейгин, 1970, 1974, 1977, 1995, Foale, 1994, Иванов, 1993, б] и др.) посвящен исследованию бифуркации касания в задаче о вынужденных колебаниях линейного осциллятора при наличии жесткого ограничителя амплитуды. При этом использовался подход, основанный на непосредственном построении периодических движений для различных значений параметров. Полученные результаты показывают многообразие сценариев бифуркации касания: она может сопровождаться рождением субпериодических движений различных периодов, переходом в область притяжения другого периодического или непериодического аттрактора. Они свидетельствуют, с одной стороны, о сложности проблемы и, с другой стороны, о необходимости разработки новых методов ее решения, поскольку точное построение решений в нелинейной системе невозможно.

К еще большим затруднениям приводит исследование бифуркации касания в системах с несколькими степенями свободы, если удары сопровождаются сухим трением. При этом может оказаться, что ударный импульс не стремится к нулю при стремлении скорости соударения к нулю (см. §6.2). Отсюда следует, что отображение  $\varphi$  разрывно.

Альтернативный подход связан с учетом роли конечных сил в динамике низкоскоростного удара, обсуждавшейся в §2.4 [Иванов, 1994, Ivanov, 1994, a, 1995, a]. При учете неравенства (7.81) ударный импульс при малых скоростях сближения допускает оценку

$$I = O(|x_2^-|^3). \quad (7.84)$$

Вследствие данного соотношения в формуле (7.50)

$$F_2^+ = F_2(x_2^- + I(x_2^-)) = F_2(x_2^-) + O(|x_2^-|^3), \quad J = J^*(E_2 + O(|x_2^-|)), \quad (7.85)$$

$$J^* = E_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I' F_2^- / x_2^- & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично в формуле (7.53)

$$F_j^+ = F_j^- + O(|x_2^-|^3), \quad J = J^*(E_2 + O(|x_2^-|)), \quad (7.86)$$

$$J^* = E_{2n} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -I' F_2^- / x_2^- & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица удара имеет регулярный вид: она переходит при  $x_2^- \rightarrow 0$  в единичную матрицу.

В случае касания об ограничитель с трением неравенство (7.81) обеспечивает отсутствие тангенциальных ударов (см. §6.2) и регуляризацию отображения  $\varphi_t$ .

Общие свойства бифуркации касания рассмотрены ниже.

**Бифуркация касания в системе с одной степенью свободы.**  
Пусть уравнения движения имеют вид

$$\ddot{q} = F_2(t, \mu, q, \dot{q}), \quad (7.87)$$

причем касание об ограничитель  $q \geq 0$  происходит для периодического движения  $\tilde{x}(t, 0)$  в момент  $t = t^*$ , причем  $F_2(t^*, 0, 0, 0) > 0$ . Будем считать, что для  $\mu < 0$  траектории  $\tilde{x}(t, \mu)$  в окрестности значения  $t^*$  проходят в области  $q > 0$ , при этом не исключаются удары о неудерживающие связи в другие моменты времени. Кроме того, движение  $\tilde{x}(t, 0)$  асимптотически устойчиво по первому приближению. Исследуем эволюцию этого движения при малых значениях  $\mu > 0$ .

Воспользуемся для описания низкоскоростного удара результатами §2.4: примем для ударного импульса формулу

$$I(V) = C^* V^m (1 + O(V)), \quad m \geq 3, \quad (7.88)$$

где  $V = |x_2^-| = |\dot{q}^-|$ . Формула (7.88) справедлива лишь для достаточно малых значений  $V$ , так как из условия невозрастания кинетической энергии при ударе следует, что  $I \leq 2V$ . Кроме того, как видно из графиков на рис. 2.12,  $I'(V) < 2$ .

Эти общие соображения позволяют построить примерную зависимость элемента  $J_{21}$  матрицы удара (7.42) от  $V$  (рис. 7.4). Сначала этот коэффициент резко убывает (на рисунке изображен случай  $m = 3$ , соответствующий линейному росту) и достигает своей наименьшей величины порядка  $(C^*)^{1/(m-1)}$  в окрестности значения  $V^* = O((C^*)^{1/(1-m)})$ , а затем возрастает примерно по обратно пропорциональному закону. Поскольку коэффициент  $C^*$ , выражющий контактную жесткость, велик, то велико и максимальное значение  $|J_{21}|$ .

Составим определяющую матрицу  $Z(\mu)$  для периодического движения  $\tilde{x}(t, \mu)$  по формуле (7.54). При  $\mu > 0$  к имеющимся невырожденным ударам добавляется еще один — в окрестности  $t = t^*$ . Его учет при малых  $\mu$  сводится к добавлению в формуле (7.54) сомножителя (7.85). Воспользуемся замечанием к предложению 7.7 о независимости коэффициентов характеристического уравнения от выбора начального момента  $t^0$  и совместим последний с  $t^*$ . В итоге получим

$$Z(\mu) = J^* Z(-0), \quad (7.89)$$

где опущены слагаемые, малые по сравнению с выписанными.

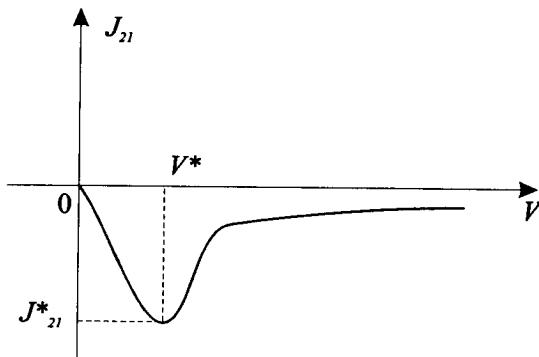


Рис. 7.4. Зависимость элемента матрицы удара от скорости сближения

Коэффициенты характеристического уравнения для матрицы (7.89) выглядят так:

$$a_2 = \rho_1^o \rho_2^o, \quad a_1(\mu) = \rho_1^o + \rho_2^o + J_{21}(\mu) z_{12}, \quad (7.90)$$

где  $\rho_{1,2}^o$  — собственные значения матрицы  $Z(-0)$ . С ростом параметра  $\mu$  от нуля растет и скорость удара  $V = |x_2^-|$ , а вместе с ней стремительно убывает величина  $J_{21}$ . По существу, бифуркация происходит при некотором значении  $\mu_1 > 0$ , причем  $\mu_1 \rightarrow 0$  при  $C^* \rightarrow +\infty$ . Ниже приводится классификация основных случаев.

**Предложение 7.9.** Характер эволюции устойчивого периодического движения, включающего при  $\mu = 0$  касание ограничителя, определяется знаком элемента  $z_{12}$  определяющей матрицы  $Z(-0)$ , а именно

- а) если  $z_{12} < 0$ , то в общем случае движение  $\tilde{x}(t, \mu)$  сливается с неустойчивым движением того же периода и исчезает;
- б) если  $z_{12} > 0$ , то движение  $\tilde{x}(t, \mu)$  сохраняется при  $\mu > 0$ , но теряет устойчивость;
- в) если  $z_{12} = 0$ , то устойчивое движение  $\tilde{x}(t, \mu)$  сохраняется при  $\mu > 0$ .

**Доказательство.** а) При значении  $\mu_1$ , определяемом равенством

$$J_{21}(\mu_1) = z_{12}^{-1} (1 - \rho_1^o)(1 - \rho_2^o) \quad (7.91)$$

одно из собственных значений матрицы (7.89) равно единице. В общем случае это является признаком бифуркации "седло-узел".

б) В данном случае соотношение

$$J_{21}(\mu_1) = -z_{12}^{-1} (1 + \rho_1^o)(1 + \rho_2^o) \quad (7.92)$$

определяет бифуркационное значение, при котором один из мультиплликаторов равен минус единице. При  $\mu > \mu_1$  движение сохраняется, но теряет устойчивость (бифуркация удвоения периода).

в) Если  $z_{12} = 0$ , то коэффициенты характеристического уравнения в формулах (7.90) не зависят от  $\mu$ . Следовательно, в данном случае бифуркации не происходит.

**Замечания.** 1. В условиях а) и б) подразумевается, что величина  $|z_{12}|$  не слишком мала, так что правая часть в соответствующей формуле (7.91) или (7.92) лежит в области значений функции  $J_{21}(V)$ .

2. Утверждение о характере эволюции в случае а) справедливо для систем общего вида, в особых случаях здесь возможны также бифуркации типа "вилка" или "смена устойчивости" (см. §Д.4). Один из таких случаев в системе с симметрией обсуждается ниже.

Будем теперь считать, что система (7.87) обладает следующей симметрией: во-первых, она инвариантна относительно замены переменных  $q \rightarrow -q$ ,  $t \rightarrow t + \pi N$ ; во-вторых, движение  $\tilde{x}(t, \mu)$  антипериодично с периодом  $\pi N$  (т.е.  $q(t + \pi N) = -q(t)$ ); в третьих, имеются два симметрично расположенных ограничителя  $-a \leq q \leq a$ . Таким образом, при  $\mu = 0$  происходят касания обоих ограничителей.

При сделанных предположениях рассматриваемому движению отвечает неподвижная точка отображения  $-\varphi_{\pi N}$ , противоположного к отображению Пуанкаре вдоль фазовых траекторий за время  $\pi N$ , при чем  $(-\varphi_{\pi N})^2 = \varphi_{2\pi N}$ . Линейную часть  $Z_1(\mu)$  отображения  $-\varphi_{\pi N}$  можно рассчитать по формуле (7.54). Если принять за начальный момент касания правого ограничителя, то по аналогии с (7.89) получим

$$Z_1(\mu) = -J^* Z_1(-0). \quad (7.93)$$

Наличие знака "минус" в формуле (7.93) меняет местами возможности, обсуждавшиеся в предложении 7.9: если коэффициент  $z_{12}$  матрицы  $Z_1(-0)$  отрицателен, то матрица  $Z_1(\mu_1)$  имеет собственное значение минус единица. При этом происходит бифуркация удвоения периода для отображения  $-\varphi_{\pi N}$ , что соответствует бифуркации потери симметрии для неподвижной точки отображения за период  $\varphi_{2\pi N}$ . Случай  $z_{12} > 0$  соответствует бифуркации "седло-узел" для обоих отображений. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

**Предложение 7.10.** Характер эволюции устойчивого периодического симметричного движения, включающего при  $\mu = 0$  касание двух ограничителей, определяется знаком элемента  $z_{12}$  определяющей матрицы  $Z_1(-0)$ , вычисленной за половину периода, а именно:

- а) если  $z_{12} > 0$ , то в общем случае движение  $\tilde{x}(t, \mu)$  сливается с неустойчивым движением того же периода и исчезает;
- б) если  $z_{12} > 0$ , то движение  $\tilde{x}(t, \mu)$  сохраняется при  $\mu > 0$ , но теряет устойчивость (бифуркация типа "вилка");
- в) если  $z_{12} = 0$ , то устойчивое движение  $\tilde{x}(t, \mu)$  сохраняется при  $\mu > 0$ .

Необходимо отметить, что предложения 7.9, 7.10 достаточно полно описывают сценарий бифуркации касания лишь в тех случаях, когда она имеет тип "седло-узел". В случаях б) (удвоение периода или "вилка") для определения типа бифуркации необходимо привлекать нелинейные члены отображения Пуанкаре. Априори можно лишь сказать, что субкритические бифуркации, для которых неустойчивые движения существуют при  $\mu < \mu_1$ , устроены обычным образом. Что касается суперкритических бифуркаций, то рождающиеся при  $\mu > \mu_1$  устойчивые движения испытывают вторичную бифуркацию при  $\mu = \mu_2$ , где  $\mu_2 \rightarrow 0$  при  $C^* \rightarrow +\infty$ .

Таким образом, бифуркация касания в системе с одной степенью свободы распадается на последовательность (конечную или бесконечную) бифуркаций обычных типов: "седло-узел", "вилка", удвоение периода и т.п. При этом конечная последовательность оканчивается субкритической бифуркацией, в то время как бесконечная последовательность суперкритических бифуркаций ведет к хаосу по сценарию Фейгенбаума [Арнольд, 1990].

В [Ivanov, 1996] разработана приближенная модель бифуркации касания, удобная для аналитического и численного исследования. В системе с ограничителем  $q \geq 0$  в качестве переменной  $\alpha$  выберем минимальное значение, которое приняла бы координата  $q$  в окрестности момента  $t^*$ , если бы ограничитель в этот момент отсутствовал. Значения этой переменной сравним для последовательных участков возмущенной траектории, в результате получим такое разностное уравнение второго порядка:

$$\alpha'' = \mu + (\rho_1^o + \rho_2^o)\alpha' - \rho_1^o \rho_2^o \alpha + z_{12} I(\sqrt{-2f_0 \alpha'}), \quad (7.94)$$

где  $f_0 = f(t^*, 0, 0, 0)$ , а подкоренное выражение для положительных значений  $\alpha'$  считается равным нулю;  $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$  — последовательные значения переменной.

Анализ уравнения (7.94) позволил получить ряд результатов. В частности, показано [Ivanov, 1996], что для законов удара  $m = 3$  и  $m = 4$  в формуле (7.88) бифуркация удвоения периода (случай "б" предложения 7.9) является суперкритической. Эволюция рождающихся при этом устойчивых движений периода  $4\pi N$  описывается следующим утверждением [Ivanov, 1996].

**Предложение 7.11.** *Имеются два основных случая эволюции устойчивых движений удвоенного периода, рождающихся в бифуркации касания:*

- а) если  $\rho_1^o + \rho_2^o < 0$ , то эти движения исчезают, сливаясь с неустойчивыми движениями того же типа;*
- б) если  $\rho_1^o + \rho_2^o > 0$ , то эти движения сохраняются, но теряют устойчивость.*

Перечисленные выше сценарии бифуркации касания дают лишь основной скелет этого явления. С математической точки зрения, при

возрастании от нуля скорости соударения происходит очень быстрое изменение коэффициентов характеристического уравнения. Это приводит к тому, что на малом интервале изменения параметра  $\mu$  происходит очень большое число элементарных бифуркаций для субпериодических движений различных периодов, полный учет которых не представляется возможным.

Некоторые примеры бифуркации касания содержатся в цитированных выше работах, а также в девятой главе данной книги.

**Бифуркация касания в системе с несколькими степенями свободы.** По аналогии с вышеприведенными рассмотрениями можно исследовать бифуркацию касания в системе с несколькими степенями свободы. Здесь появляются дополнительные возможности за счет бифуркации рождения квазипериодического движения, невозможной в системе с одной степенью свободы вследствие неравенства

$$\det \mathbf{Z}(\mu) = \det \mathbf{J}^* \det \mathbf{Z}(-0) < 1, \quad (7.95)$$

исключающего наличие у матрицы второго порядка  $\mathbf{Z}(\mu)$  пары собственных значений, по модулю равных единице.

Обсудим случай, когда имеет место касание об идеальную неудерживающую связь. Не ограничивая общности, будем считать, что эта связь выражается неравенством  $q_1 \geq 0$ . Зададим фазовые переменные по аналогии с примером 3 разд. 2.2, тогда матрица удара выражается формулой (7.53), которая в случае низкоскоростного удара переходит в (7.86).

Определяющая матрица имеет вид (7.89), а характеристическое уравнение выглядит так:

$$\det \begin{pmatrix} z_{11} - \rho & z_{12} & \dots & z_{1k} \\ z_{21} + J_{21}z_{11} & z_{22} + J_{21}z_{12} - \rho & \dots & z_{2k} + J_{21}z_{1k} \\ z_{31} & z_{32} & \dots & z_{3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{k1} & z_{k2} & \dots & z_{kk} - \rho \end{pmatrix} = 0. \quad (7.96)$$

где  $k = 2n$ . Вычитая из второй строки матрицы (7.96) первую, умноженную на  $J_{21}$  и раскладывая затем на сумму двух определителей по второй строке, приведем уравнение (7.96) к виду

$$\chi_0(\rho) + J_{21}\rho M_{21}(\rho) = 0. \quad (7.97)$$

В уравнении (7.97)  $\chi_0(\rho)$  — определитель матрицы  $\mathbf{Z}(-0) - \rho E_k$ ,  $M_{21}(\rho)$  — алгебраическое дополнение к элементу этой матрицы, стоящему на пересечении второй строки и первого столбца.

Так как движение при  $\mu = 0$  устойчиво по первому приближению, то  $\chi_0(1) \neq 0$ . В зависимости от знака величины  $M_{21}(1)$  возможно две ситуации: с ростом  $\mu$  от нуля левая часть формулы (7.97) либо сохраняет свой знак, либо изменяет его. Второй из этих случаев сви-

детельствует о бифуркации типа "седло-узел", первый — о сохранении периодического движения (в общем случае с потерей устойчивости в результате бифуркации Неймарка-Саккера или удвоения периода). Следовательно, мы пришли к такому результату.

**Предложение 7.12.** *Характер эволюции устойчивого периодического движения в системе с несколькими степенями свободы, включающего при  $\mu = 0$  касание ограничителя, определяется знаком числа  $\chi_1 = \chi_0(1)M_{21}(1)$ :*

- a) если  $\chi_1 > 0$ , то в общем случае движение  $\tilde{x}(t, \mu)$  сливается с неустойчивым движением того же периода и исчезает;
- b) если  $\chi_1 < 0$ , то движение  $\tilde{x}(t, \mu)$  сохраняется при  $\mu > 0$ , но теряет устойчивость.

Заметим, что для системы с одной степенью свободы  $\chi_0(1) > 0$ ,  $M_{21}(1) = -z_{12}$ , и предложение 7.12 следует из предложения 7.9.

Аналогичный подход можно применять и в случаях касания с неидеальной связью, комбинируя его со специальным выбором фазовых переменных (см. §6.5) для упрощения выражения ударного импульса.

Примеры исследования бифуркации касания в системах с несколькими степенями свободы можно найти в [Ivanov 1994, a, 1995, a].

**Выводы.** Исследования периодических движений с ударами о неудерживающие связи, проведенные в данной главе, показывают, что для них остаются справедливыми многие результаты, известные в гладких динамических системах. Такая аналогия основана на достаточной гладкости отображения Пуанкаре стробоскопического типа в окрестности неподвижной точки, соответствующей периодическому движению с конечным числом ударов за период. Получены явные формулы для построения определяющей матрицы и характеристического уравнения. Корни этого уравнения определяют характер устойчивости и бифуркаций периодических движений.

Особый тип бифуркаций, присущий только системам с неудерживающими связями, обусловлен касаниями ограничителя, т.е. вырожденными соударениями. Важнейшую роль в анализе такого явления играет выбор модели низкоскоростного удара. Оказывается, что при традиционном описании таких ударов при помощи коэффициента восстановления точечное отображение, соответствующее движению с касанием, недифференцируемо. В этом случае приходится прибегать к изучению эволюции периодических движений непосредственно, путем построения этих движений. Однако, такой метод плодотворен лишь при условии, что общее решение в промежутках между ударами описывается известными формулами, выполненным лишь в линейных системах.

Альтернативный подход связан с учетом роли конечных сил в динамике низкоскоростного удара, обсуждавшейся в параграфе 2.4. С его помощью удается свести бифуркацию касания в произвольной нелинейной системе к последовательности бифуркаций обычных типов: "седло-узел", удвоение периода и пр.

# Глава 8. ДВИЖЕНИЯ С УЧАСТКАМИ СКОЛЬЖЕНИЯ

В главе 7 изучались такие движения, для которых наложенные на систему неудерживающие связи проявляют себя лишь в моменты соударений. Помимо этого, значительный практический интерес представляет и другой тип движений, включающий целые интервалы напряжения связи — так называемые "скользящие" режимы [Ишлинский, 1955, Уткин, 1981]. Примерами могут служить приземление самолета, двуногая ходьба, качение колеса и пр. Данная глава посвящена исследованию качественных свойств движений такого вида.

## 8.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЙ С УЧАСТКАМИ СКОЛЬЖЕНИЯ

**Условия существования.** Определим условия возникновения и окончания "скользящих" движений. Пусть  $\hat{x}(t)$  — некоторое движение системы с односторонней связью  $x_1 \geq 0$ . Будем считать, что связь напряжена в интервале  $t \in (t_1, t_2)$ , а ее реакция не обращается в нуль:  $\forall t \in (t_1, t_2) : x_1 \equiv 0, R \neq 0$ , причем в любом интервале, содержащем  $t_1$  или  $t_2$ , имеются моменты, когда  $\dot{x}_1(t) > 0$ . Движение начинается в момент  $t^o$ , предшествующий  $t_1$ .

Уравнения движения при напряженной связи в лагранжевой форме имеют вид (см. §6.2)

$$[T]_j = Q_j + R_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (8.1)$$

Учитывая характер трения, выразим все компоненты реакции через  $R_1$ , а затем определим  $\ddot{x}_1$  из системы (8.1):

$$\ddot{x}_1 = A_0 + A_1 R_1. \quad (8.2)$$

Здесь  $A_0, A_1$  — некоторые непрерывные функции от  $t$  и  $x$ , величина  $R_1$  больше нуля в интервале  $(t_1, t_2)$ . Как было показано выше (Предложение 6.1), в случае идеальной связи величина  $A_1$  строго положительна, а при наличии сухого трения она может принимать отрицательные значения. Для скользящего режима  $\dot{q}_1 \equiv 0, R_1 > 0$ , значит, из неравенства  $A_1 < 0$  следует  $A_0 > 0$ . При этом возникает парадоксальная ситуация неединственности решения: уравнение (8.2) наряду с решением  $\dot{q}_1 \equiv 0, R_1 > 0$  обладает также решением, для которого  $\dot{q}_1 > 0, R_1 = 0$ . На практике предпочтительнее второе решение, так как в реальных системах с сухим трением контакт прерывается микрополетами [Толстой, 1963]. Если  $A_0 > 0$ , то при отрыве от связи продолжительность полета не будет малой, т.е.  $R_1 = 0$ .

Ввиду этого будем считать, что для скользящего режима  $A_1 > 0$ . Отсюда ввиду положительности  $R_1$  следует, что  $A_0 < 0$  в интервале  $(t_1, t_2)$ . На левой границе этого интервала функция  $A_0$  либо отрицательна, либо равна нулю.

В первом из этих двух случаев переход к скользящему режиму необходи́мо сопровождается ударами. Действительно, если бы фазовые переменные были непрерывными при  $t = t_1$ , то в некоторой окрестности этого момента величина  $A_0$  была бы отрицательной. Так как  $\dot{\hat{x}}_1(t_1) = \dot{\hat{x}}_2(t_1) = 0$ , (здесь принято обозначение  $x_2 = \dot{x}_1$ ), то при  $t < t_1$  получаем  $x_1 < 0$ , что противоречит наложенной на систему односторонней связи.

Если удары о связь имеют пластический характер, то после такого удара в момент  $t = t_1$  система остается на связи, при этом  $\dot{\hat{x}}_2(t_1 - 0) < 0$  и  $\dot{\hat{x}}_1 > 0$  при  $t < t_1$ .

В случае неупругих ударов переход к скользящему движению более сложен. В рамках модели мгновенного удара с коэффициентом восстановления  $e < 1$  за конечное время происходит бесконечное число таких ударов (см. задачу Мак-Миллана, §6.2). Условия существования бесконечно-ударных процессов, методы их расчета и конкретные примеры рассматривались многими авторами, основные результаты приведены в монографиях [Нагаев, 1985, Фейгин, 1994].

При использовании вязкоупругих моделей контактных деформаций для описания низкоскоростных ударов необходимо учитывать наличие "конечной" силы  $A_0 < 0$ . Как было показано в §2.4, в этом случае удары с достаточно малой скоростью сближения имеют пластический характер. Поэтому процесс затухающих повторных соударений конечен и оканчивается в момент  $t = t_1$ .

Заметим, что в обеих упомянутых моделях относительная скорость движения элементов ударный пары гасится за конечное время ударными импульсами. Различие состоит лишь в формулах для описания зависимости импульса от скорости сближения, т.е. носит количественный характер.

Случай  $A_0(t_1, \dot{\hat{x}}(t_1)) = 0$  имеет существенное отличие: здесь переход от полета к скольжению может быть безударным. Сформулируем достаточные условия такого перехода.

**Предложение 8.1.** [Иванов, 1992а] Пусть в левой окрестности точки  $t_1$  выполняются неравенства  $\dot{\hat{x}}_1(t) < 0$ ,  $A_0(t, \dot{\hat{x}}(t)) > 0$ , причем  $\dot{\hat{x}}_1(t_1 - 0) = \dot{\hat{x}}_2(t_1 - 0) = 0$ . Если полная производная от функции  $A_0(t, \dot{\hat{x}}(t))$ , вычисленная в силу уравнений движения при  $t = t_1 - 0$ , отрицательна, то решение  $\dot{\hat{x}}(t)$  можно продолжить непрерывным образом для  $t > t_1$ , так что  $\dot{\hat{x}}_1(t) \equiv 0$ .

**Доказательство.** Полагая в системе (8.1)  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $R_1 = -A_0/A_1$ , понизим тем самым ее порядок на две единицы. В качестве начальных значений переменных  $x_3, \dots, x_{2n}$  при  $t = t_1$  возьмем  $x_3(t_1 - 0), \dots, x_{2n}(t_1 - 0)$ . Дифференцируемость правых частей достаточна для существования единственного решения задачи Коши. Для

этого решения  $x_1 = 0$ ,  $R_1 > 0$ , а фазовые переменные сохраняют непрерывность.

Условия окончания скользящего движения в определенном смысле противоположны условиям его безударного начала.

**Предложение 8.2.** [Иванов, 1992а] Пусть в левой полуокрестности точки  $t_2$  выполняются соотношения  $\dot{x}_1(t) = 0$ ,  $A_0(t, \dot{x}(t)) < 0$ , причем  $A_0(t_2 - 0, \dot{x}(t_2 - 0)) = 0$ . Если полная производная от функции  $A_0(t, \dot{x}(t))$ , вычисленная в силу уравнений движения при  $t = t_2 - 0$ , положительна, то решение  $\dot{x}(t)$  можно продолжить непрерывным образом для  $t > t_2$ , так что  $\dot{x}_1(t) > 0$ .

**Доказательство.** Положим в системе (8.1)  $R \equiv 0$  и зададим начальные условия  $x(t_2 + 0) = x(t_2 - 0)$ . Дифференцируемости правых частей достаточно для существования единственного решения, причем при сделанных предположениях  $\ddot{x}_1(t) > 0$ , следовательно,  $x_1(t) > 0$ .

**Вариация скользящих движений.** Наряду с данным движением  $\dot{x}(t)$ , обладающим участком скольжения  $t \in (t_1, t_2)$ , будем рассматривать и движения с близкими начальными условиями:

$$x(t^o) = \dot{x}(t^o) + \xi^o. \quad (8.3)$$

В случае  $A_0(t_1, \dot{x}(t_1)) < 0$ , как отмечалось выше, переход к скользящему движению сопровождается серией ударов. Как показано в [Горбиков, Неймарк, 1981, б], к скольжению приходят все траектории, проходящие в достаточно малой окрестности многообразия  $x_1 = x_2 = 0$  ( $\dot{x}_1 < 0$ ). Следовательно, для достаточно малых значений  $\|\xi^o\|$  возмущенное движение также выйдет на скользящий режим после серии затухающих ударов.

Аналогичное заключение можно сделать в случае  $A_0(t_1, \dot{x}(t_1)) = 0$ ,  $\dot{A}_0(t_1, \dot{x}(t_1)) < 0$ , основываясь на результатах работы [Горбиков, 1987]. Таким образом, свойство движения иметь участок скольжения сохраняется при малых возмущениях.

Для описания изменения возмущений  $\xi$  с течением времени воспользуемся методом, применявшимся в §7.2. Заметим, что Предложение 7.6, доказанное в случае наличия конечного числа ударов на рассматриваемом отрезке времени, не допускает автоматического переноса на движение  $\dot{x}(t)$ , включающее бесконечноударный процесс. Ввиду этого модель удара с постоянным коэффициентом восстановления не может быть исследована данным методом. Напротив, одним из свойств вязкоупругой модели низкоскоростного удара при наличии дополнительной силы, "сжимающей" элементы ударной пары, является падение коэффициента восстановления до нуля при достаточно малых значениях скорости сближения. Ввиду этого серия ударов конечна, и предложение 7.6 правомочно.

**Пример.** В задаче о падении тяжелой частицы на горизонтальную опору (см. §6.2) для любых начальных условий частица после серии соударений останется лежать на опоре. Это означает, что  $\xi \equiv 0$

для всех значений времени, начиная с некоторого момента. Попробуем получить этот результат при помощи предложения 7.6.

Сначала будем считать, что коэффициент восстановления имеет постоянное значение  $e$ . В данной задаче  $\mathbf{F} = (x_2, -g)$ , поэтому в промежутках между ударами фундаментальная матрица решений описывается формулой (7.57). Матрица удара (7.49) имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ -g(1+e)/x_2^- & -e \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Поскольку продолжительность перелета, предшествующая удару с начальной скоростью  $x_2^-$ , равна  $-2x_2^-/g$ , изменение переменной  $\xi$  за время такого перелета и последующего удара описывается соотношением

$$\xi^+ = \mathbf{X}^* \xi^- + O(\|\xi^-\|^2), \quad (8.5)$$

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{J} \begin{pmatrix} 1 & -2x_2^-/g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e & 2ex_2^-/g \\ -g(1+e)/x_2^- & 2+e \end{pmatrix}.$$

При последующих соударениях скорости образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $e$ . Можно показать, что при перемножении матриц вида (8.5) элемент второй строки и второго столбца будет монотонно возрастать. Следовательно, при бесконечноударном процессе возмущения не стремятся к нулю.

При учете пластического характера низкоскоростного удара предложение 7.6 приводит к верному результату: при таком ударе в матрице (7.49) следует считать  $e = 0$  и  $F_2^+ = 0$ . В итоге все элементы матрицы (8.4) равны нулю.

В другом случае:  $A_0 = 0$ ,  $\dot{A}_0 < 0$  переход к скольжению вдоль траектории  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  не сопровождается ударом. При этом возмущенные движения включают в себя серии ударов, затухающие за период времени, величина которого стремится к нулю при  $\|\xi\| \rightarrow 0$  [Горбиков, 1987]. В первом приближении этот процесс можно рассматривать как один пластический удар.

В системе с одной степенью свободы после установления скользящего движения возмущенное движение тождественно невозмущенному.

В случае  $n \geq 2$  степеней свободы фазовые переменные  $x_3, \dots, x_{2n}$  выберем таким образом, чтобы при ударах они оставались непрерывными (см. главу 6). В частности, если неудерживающая связь  $q_1 \geq 0$  идеальна, то в качестве этих переменных можно взять обобщенные координаты  $q_2, \dots, q_n$  и соответствующие им обобщенные импульсы. Для описания изменения фундаментальной матрицы решений в случае невозмущенного движения с ударами можно использовать предложение 7.6. Во втором случае, когда невозмущение движение безударно,

при приземлении  $\xi_{1,2}$  обращаются в нуль, что соответствует умножению на матрицу

$$\mathbf{J}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

На интервале скользящего движения  $q_1 \equiv 0$ , следовательно,  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ . Для его описания необходимо сначала выразить реакцию из уравнения (8.2):

$$R_1 = -A_0/A_1, \quad (8.7)$$

а затем подставить полученное значение в систему (8.1). В итоге получим уравнения скользящего движения в виде

$$x_1 = x_2 \equiv 0, \quad \dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{x}^*), \quad \mathbf{x}^* = (x_3, \dots, x_{2n}). \quad (8.8)$$

В частности, в случае идеальной связи и вышеупомянутого выбора фазовых переменных реакция связи входит только в уравнение для  $\dot{x}_2$ . Следовательно, для построения функции  $\mathbf{F}_0$  достаточно положить  $x_1 = x_2 = 0$  в функции  $\mathbf{F}$ . Вариация решений системы (8.8) описывается формулой

$$\xi_1 = \xi_1^1, \quad \xi_2 = \xi_2^1, \quad \xi^*(t) = \mathbf{X}^*(t)\xi^1 + o(\xi^1), \quad \xi^1 = \xi^*(t_1), \quad (8.9)$$

где  $\xi^* = (\xi_3, \dots, \xi_{2n})^T$ ,  $\mathbf{X}(t)$  — фундаментальная матрица решений системы, полученной в результате линеаризации уравнений (8.8) в окрестности невозмущенного движения  $\hat{\mathbf{x}}^*(t)$ .

Еще один тип движения — окончание скользящего режима и ослабление неудерживающей связи — может быть исследован стандартными методами. При выполнении условий предложения 8.2 правые части системы (8.1) кусочно-дифференцируемы в окрестности  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  при  $t = t_2$ . В этом случае при  $t < t_2$  вариации описываются соотношениями (8.9), а при  $t > t_2$  — соотношениями

$$\xi(t) = \mathbf{X}(t)\xi^2 + o(\xi^2), \quad \xi^2 = \xi(t_2), \quad (8.10)$$

где  $\mathbf{X}(t)$  — фундаментальная матрица решений системы, полученной в результате линеаризации уравнений (8.1) в окрестности невозмущенного движения  $\hat{\mathbf{x}}^*(t)$  в предположении  $\mathbf{R} \equiv 0$  [Филиппов, 1985].

**Существование и устойчивость периодических движений.** Сначала рассмотрим систему с одной степенью свободы. Уравнение движения запишем в виде (8.2), где  $A_0, A_1$  — некоторые дифференцируемые функции, периодичные по времени, причем  $A_1 > 0$ . Для построения периодических движений с участками скольжения необходимо вначале исследовать знак функции

$$A_0^*(t) = A_0(t, 0, 0). \quad (8.11)$$

Функция (8.11) может быть отрицательной на конечном или счетном множестве интервалов  $(t_1^j, t_2^j)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), лежащих на отрезке длины  $2\pi$ . Допустим, что вне этих интервалов  $A_0^*(t) > 0$ , тогда скользящие движения оканчиваются в один из моментов  $t_2^j$ . Построим для каждого  $j$  траекторию системы (8.2) с начальными условиями  $x_1(t_2^j) = x_2(t_2^j) = 0$  и проверим, включает ли она участок скольжения в интервале  $(t_1^j + 2\pi N, t_2^j + 2\pi N)$  для  $N = 1, 2, \dots$  В случае положительного ответа существует периодическое (если  $N = 1$ ) или супер周期ическое (если  $N > 1$ ) движение обсуждаемого вида.

Как показано выше, для систем с неупругим ударом возмущения на участке скольжения исчезают, т.е. возмущенное движение будет (для достаточно малых возмущений) совпадать с невозмущенным. Следовательно, имеет место асимптотическая устойчивость.

Следующий по сложности случай составляют автономные системы с двумя степенями свободы. Здесь для отыскания периодических движений с участками скольжения и перелетами следует построить на многообразии  $q_1 = 0, \dot{q}_1 = 0$  кривую отрыва  $A_0 = 0, \dot{A}_0 > 0$ , в точках которой оканчиваются скользящие движения. Затем через каждую точку этой кривой надо провести фазовую кривую в область  $q > 0$  и выяснить, попадет ли эта кривая вновь на многообразие  $q = 0, \dot{q} = 0$  (разумеется, при численном исследовании фазовые кривые строятся лишь для конечного множества точек). Положительный ответ на этот вопрос не гарантирует периодичности: участок скольжения может оканчиваться в точке кривой отрыва, отличной от исходной. Если же периодические движения существуют, то, как правило, они образуют дискретное множество.

Для решения вопроса об устойчивости можно воспользоваться результатами предыдущего раздела. Определяющая матрица для движения с участком скольжения и неупругим ударом всегда имеет два нулевых собственных значения и одно значение, отвечающее сдвигу времени в автономной системе, равное единице. Решение вопроса об орбитальной устойчивости зависит, следовательно, от вида отображения кривой отрыва в себя в окрестности неподвижной точки. При учете результатов, приведенных в Дополнении, приходим к такому утверждению.

**Предложение 8.3.** *Пусть  $\varphi_0$  — отображение кривой отрыва*

$$q_1 = 0, \dot{q}_1 = 0, A_0 = 0, \dot{A}_0 > 0 \quad (8.12)$$

*в себя вдоль фазовых траекторий системы,  $x^*$  — его неподвижная точка. Соответствующее периодическое движение с участками скольжения и перелетами орбитально устойчиво тогда и только тогда, когда точка  $x^*$  устойчива. В частности, неравенство*

$$|\varphi'_0(x^*)| < 1 \quad (8.13)$$

*достаточно для орбитальной асимптотической устойчивости, при противоположном его знаке имеет место неустойчивость.*

Для систем большей размерности множество (8.12) представляется собой многообразие размерности больше единицы. Периодическому движению с участками скольжения и перелетами соответствуют неподвижная точка отображения  $\varphi_0$  этого многообразия в себя. Вопрос об устойчивости решается по аналогии с предложением 8.3. В случае неавтономных систем множество (8.12) следует рассматривать в расширенном фазовом пространстве, а отображение  $\varphi_0$  строить вдоль интегральных кривых системы.

## 8.2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ БЕЗУДАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

**Существование и устойчивость.** В данном параграфе рассматриваются натуральные механические системы с двумя степенями свободы и идеальной неудерживающей связью  $q_1 \geq 0$ . Действующие силы предполагаются потенциальными, а удары о связь — неупругими. Уравнения движения имеют вид

$$[L]_1 = R, \quad [L]_2 = 0, \quad L = T + U, \quad (8.14)$$

$$T = \frac{1}{2} a_{11}(\mathbf{q}) \dot{q}_1^2 + a_{12}(\mathbf{q}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} a_{22}(\mathbf{q}) \dot{q}_2^2, \quad U = U(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2)^T.$$

Здесь  $T$  — кинетическая энергия,  $U$  — силовая функция,  $L$  — функция Лагранжа,  $R$  — реакция связи, а квадратные скобки обозначают производную Эйлера — Лагранжа.

В отсутствие ударов система (8.14) консервативна, в ней сохраняется полная механическая энергия

$$W = T - U. \quad (8.15)$$

В самом деле, для производной функции (8.15), вычисленной при учете уравнений (8.14), имеем такое выражение

$$\frac{dW}{dt} = R\dot{q}_1. \quad (8.16)$$

При ослабленной связи  $R = 0$ , а при скольжении  $\dot{q}_1 = 0$ , откуда и следует сохранение энергии.

При ударах величина  $W$  уменьшается: в соответствии с формулой (6.84) при неупругом ударе  $\Delta T < 0$ , в то время как силовая функция не изменяется.

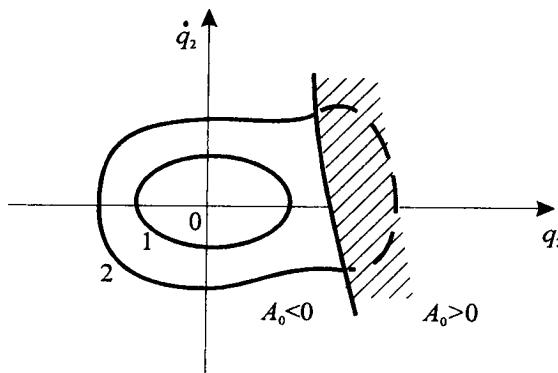


Рис. 8.1. Периодические движения с участками скольжения: 1 — безотрывные, 2 — с перелетами

Отсюда следует важный вывод: периодические движения рассматриваемой системы необходимо безударны. Имеется три основных случая:

1. Во все времена движения связь ослаблена:  $q_1 > 0$ . Такие периодические движения можно исследовать стандартными для гладких систем методами (см. Дополнение).

2. Во все времена движения связь напряжена, причем ее реакция не обращается в нуль:  $q_1 \equiv 0, R > 0$ . Такое периодическое движение можно изобразить на плоскости  $q_1 = \dot{q}_1 = 0$  в фазовом пространстве в виде замкнутой кривой, лежащей на уровне энергии  $W = W_0$  (рис. 8.1). Будем считать, что значение  $W_0$  не является критическим для силовой функции  $U(0, q_2)$ , тогда достаточно близким к  $W_0$  значениям энергии также соответствуют замкнутые кривые на фазовой плоскости и периодические движения того же вида. При этом с ростом  $W$  растет и площадь ограничивающей траекторией области. Таким образом, существует семейство периодических скользящих движений.

Допустим, что в начальный момент времени система подвергается малым возмущениям, изменяющим значения фазовых переменных. Тогда движение сопровождается серией затухающих ударов, после которых энергия системы уменьшится на величину, стремящуюся к нулю вместе с амплитудой возмущений. Затем траектория будет лежать на многообразии  $q = \dot{q} = 0$  и на замкнутой линии уровня  $W = W + \Delta W$ . Очевидно, в данном случае невозмущенная траектория орбитально устойчива (неасимптотически).

3. Более сложны движения, состоящие как из участков скольжения, так и из перелетов. Для их исследования воспользуемся методами, изложенными в предыдущем параграфе. Построим на фазовой плоскости  $(q_2, \dot{q}_2)$  кривую отрыва  $A_0 = 0$  (она может иметь несколько ветвей). Пересечение поверхности  $W = \text{const}$  с этой плоскостью

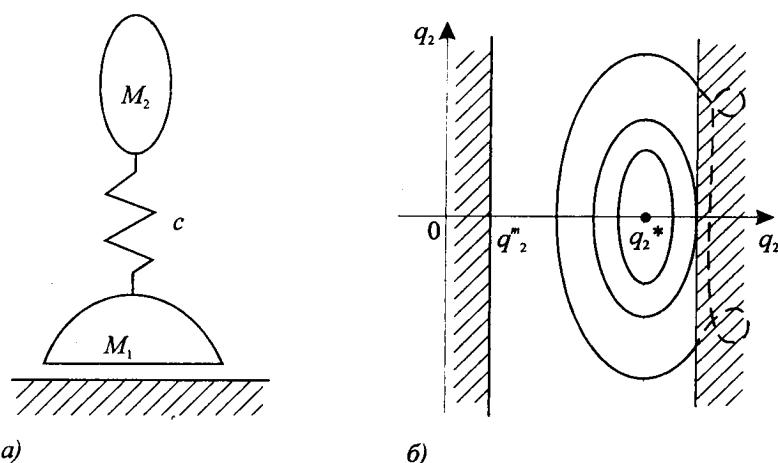


Рис. 8.2. Двухмассовый прыжун

представляет собой линию, содержащую участки фазовой траектории, лежащие в области  $A_0 < 0$ . Как только изображающая точка попадает на линию отрыва, связь ослабляется, т.е. траектория выходит из плоскости скользящих движений.

В области  $q_1 > 0$  движение описывается уравнениями (8.14), где  $R = 0$ . Принимая момент отрыва за начало отсчета, построим решение на участке перелета  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(W, t)$ . Продолжительность полета  $t_f$  равна минимальному положительному корню уравнения

$$q_1(W, t_f) = 0. \quad (8.17)$$

Необходимыми условиями безударного приземления являются равенства

$$\dot{q}_1(W, t_f) = 0, \quad A_0(\mathbf{q}(W, t_f), \dot{\mathbf{q}}(W, t_f)) = 0. \quad (8.18)$$

Соотношения (8.18) задают некоторую линию на трехмерном многообразии  $q_1 = 0$ . Другая линия состоит из точек  $\mathbf{q}(W, t_f)$  первого пересечения траекторий, выходящих из кривой отрыва, с этим многообразием. Поскольку в общем случае две линии в трехмерном пространстве не пересекаются, наличие периодических безударных движений у систем обсуждаемого типа является исключением, а не правилом. На практике существование таких движений обусловлено наличием в уравнениях движения определенной симметрии.

**Примеры.** 1. [Schiehlen, Gao, 1989, Иванов, 1992, а] Исследуем движение двухмассовой системы, состоящей из упруго связанных корпуса и ноги (рис. 8.2, а), по вертикали в поле силы тяжести. Обозначим  $q_1, q_2$  расстояния от ноги и корпуса до опоры;  $M_1, M_2$  — их массы;  $c$

— жесткость пружины, масса которой пренебрежимо мала. Функция Лагранжа системы такова:

$$L = \frac{1}{2}M_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{q}_2^2 - g(M_1q_1 + M_2q_2) - \frac{1}{2}c(q_2 - q_1 - a)^2, \quad q_1 \geq 0 \quad (8.19)$$

где величина  $a$  равна разности  $q_2 - q_1$  при ненапряженном состоянии пружины. Уравнения (8.14) имеют вид

$$\ddot{q}_1 = -g + cM_1^{-1}(q_2 - q_1 - a) + M_1^{-1}R, \quad \ddot{q}_2 = -g - cM_2^{-1}(q_2 - q_1 - a) \quad (8.20)$$

Уравнение линии отрыва на фазовой плоскости получим, полагая в правой части первого из равенств (8.20)  $q_1 \equiv 0, R = 0$ :

$$q_2 = q_2^M, \quad q_2^M = a + gM_1c^{-1}. \quad (8.21)$$

Скользящие движения соответствуют наличию контакта ноги с опорой. Линии уровня энергии на фазовой плоскости имеют вид

$$W = \frac{1}{2}M_2\dot{q}_2^2 + gM_2q_2 + \frac{1}{2}c(q_2 - a)^2 = \text{const} \quad (8.22)$$

и представляют собой семейство концентрических эллипсов с центром в точке  $(q_2^*, 0)$ ,  $q_2^* = a - gM_2c^{-1}$ , являющейся положением равновесия (рис. 8.2,б). Физически возможны лишь такие движения, для которых значение  $q_2$  больше положительной величины  $q_2^m$ , соответствующей полностью сжатой пружине.

Скользящим движениям соответствуют эллипсы, целиком лежащие в области  $q_2^m < q_2 < q_2^M$ . Предельная амплитуда таких движений равна разности между  $q_2^M$  и  $q_2^*$ , т.е.  $gc^{-1}(M_1 + M_2)$ . Физически движения такой амплитуды возможны, если

$$gc^{-1}(M_1 + M_2) < q_2^* - q_2^m. \quad (8.23)$$

Если неравенство (8.23) не выполнено, то периодические движения с участками полета невозможны. В противном случае существуют такие эллипсы (8.22), которые целиком лежат в области  $q_2 > q_2^m$  и пересекают кривую отрыва. Для периодичности необходимо и достаточно, чтобы участок перелета, начинающийся в верхней точке пересечения эллипса с кривой отрыва, оканчивался в нижней такой точке (на рис. 8.2,б этот участок показан условно штриховой линией, не лежащей в плоскости  $q_1 = \dot{q}_1 = 0$ ). Такие движения существуют благодаря наличию у системы (8.20) в фазе полета дополнительного интеграла, выражающего сохранение механической энергии относительного движения:

$$I_O = \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + c(q_2 - q_1 - a)^2. \quad (8.24)$$

Непосредственная проверка показывает, что производная функции (8.24) по времени, вычисленная в силу уравнений (8.20), равна нулю, если только  $R = 0$ . Покажем, что из равенства (8.17) в совокупности с первым из условий (8.18) автоматически следует второе из этих условий.

Подставляя в выражения (8.22), (8.24) равенства

$$q_1(0) = q_1(t_f) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_1(t_f) = 0,$$

получим следующую систему для определения значений  $q_2^+ = q_2(t_f)$  и  $\dot{q}_2^+ = \dot{q}_2(t_f)$  в зависимости от  $\dot{q}_2^- = \dot{q}_2(0)$  (напомним, что  $q_2(0) = q_2^M$ ):

$$\begin{aligned} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} [(\dot{q}_2^+)^2 - (\dot{q}_2^-)^2] &= c [(q_2^M - a)^2 - (q_2^+ - a)^2], \\ M_2 [(\dot{q}_2^+)^2 - (\dot{q}_2^-)^2] &= c [(q_2^M - a)^2 - (q_2^+ - a)^2] + 2gM_2(q_2^M - q_2^+) \end{aligned} \quad (8.25)$$

Исключая из уравнений (8.25) скорости, получим квадратное уравнение относительно переменной  $q_2^+$ , имеющее двойной корень  $q_2^+ = q_2^M$ , что эквивалентно второму условию (8.18). Отсюда для скорости  $\dot{q}_2^+$  получим два значения:  $\dot{q}_2^+ = \pm \dot{q}_2^-$ ; первое из них является посторонним, так как в соответствующей точке фазового пространства  $\dot{A}_0 > 0$ .

Таким образом, для безударного приземления необходимо и достаточно единственного условия  $\dot{q}_1(t_f) = 0$ . Явный вид этого условия можно получить, построив при  $R = 0$  решение линейной системы (8.20):

$$\begin{aligned} q_1 &= g\omega^{-2}(1 - \cos \nu - \frac{1}{2}\nu^2 + \alpha\nu - \alpha \sin \nu), \\ q_2 &= q_2^- + g\omega^{-2}[\alpha\nu - \frac{1}{2}\nu^2 + \frac{m_1}{m_2}(\alpha \sin \nu + \cos \nu - 1)], \\ \nu &= \omega t, \quad \alpha = \frac{\omega M_2}{g(M_1 + M_2)} \dot{q}_2^-, \quad \omega^2 = \frac{c(M_1 + M_2)}{M_1 M_2}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Безударные движения реализуются при положительных значениях  $\alpha$ , удовлетворяющих уравнению

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha, \quad (8.27)$$

при этом  $t_f = 2\alpha/\omega$ . Уравнение (8.27) имеет бесчисленное множество положительных корней, минимальный из которых лежит в интервале  $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ . Физически возможны лишь те из них, для которых во все время движения выполнено неравенство  $q_2 > q_2^M$ .

Заметим, что интеграл типа (8.24) имеет место и в том случае, когда пружина имеет нелинейную характеристику, и периодические движения также существуют.

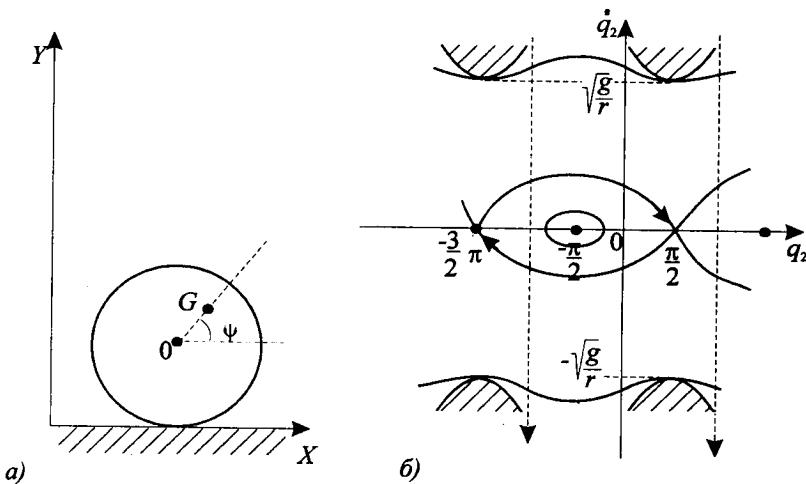


Рис. 8.3. Неоднородный диск на гладкой опоре:

а) система координат, б) фазовый портрет скользящих движений

2. [Иванов, 1992, б] Круглый неоднородный диск, движущийся в фиксированной вертикальной плоскости на гладкой горизонтальной опоре, представляет собой систему с тремя степенями свободы: положение диска однозначно определяется координатами  $x$ ,  $y$  его центра  $O$  и углом  $\psi$  между вектором  $OG$  ( $G$  — центр масс) и горизонтальной осью  $X$  (рис. 8.3, а). Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}J\dot{\psi}^2 - Mgy_G, \quad y \geq r, \quad (8.28)$$

$$x_G = x + r \cos \psi, \quad y_G = y + r \sin \psi,$$

где  $r$  — радиус диска,  $J$  — момент инерции относительно центра масс.

Уравнения движения выглядят так:

$$M\ddot{x}_G = 0, \quad M\ddot{y}_G = R - Mg, \quad J\ddot{\psi} = -Rr \cos \psi. \quad (8.29)$$

Вследствие первого из этих уравнений величина  $\dot{x}_G$  сохраняет во все времена движения постоянное значение; данное свойство позволяет исключить ее из рассмотрения и понизить порядок системы до двух. Обозначим  $q_1 = y - r$ ,  $q_2 = \psi$ , тогда второе и третье уравнения (8.29) примут вид

$$\ddot{q}_1 + r\ddot{q}_2 \cos q_2 - r\dot{q}_2^2 \sin q_2 = -g + RM^{-1}, \quad J\ddot{q}_2 = -Rr \cos q_2. \quad (8.30)$$

Уравнения (8.30)  $2\pi$ -периодичны по  $q_2$ , поэтому фазовую плоскость скользящих движений можно интерпретировать как развертку

цилиндра. Выражая величину  $\dot{q}_1$  из системы (8.30), получим равенство типа (8.2), где  $A_0 = r\dot{q}_2^2 \sin q_2 - g$ . Следовательно, кривая отрыва описывается уравнением

$$r\dot{q}_2^2 \sin q_2 - g = 0. \quad (8.31)$$

На фазовой плоскости кривая (8.31) имеет две неограниченные ветви в области  $q_2 \in (-\pi, \pi)$ , скользящие движения возможны вне заштрихованных областей (рис. 8.3,б). Соответствующие траектории лежат на линиях уровня интеграла энергии, который при  $q_1 = \dot{q}_1 = 0$  принимает вид

$$W = \frac{1}{2}(J + Mr^2 \cos^2 q_2)\dot{q}_2^2 + Mrg \sin q_2 = \text{const}. \quad (8.32)$$

Значения  $W = \pm Mr$  являются стационарными для потенциальной энергии, им соответствуют положения равновесия диска  $q_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ , для которых его центр масс занимает соответственно наивысшее (при контакте с опорой) и наимизшее положения. Диск может совершать в контакте с опорой либрационные движения в окрестности устойчивого равновесия, асимптотические движения к неустойчивому равновесию, или вращательные движения с не слишком большой скоростью. Максимальное значение  $W$ , при котором возможно безотрывное движение, можно определить из решения задачи на условный минимум функции (8.32) на кривой отрыва (8.31). Для этого выразим величину  $\dot{q}_2$  из уравнения (8.31), а затем подставим полученное выражение в (8.32):

$$W = \frac{1}{2}Mr^2[(\theta + 1)z^{-1} + z], \quad z = \sin q_2, \quad \theta = \frac{J}{Mr^2}. \quad (8.33)$$

Поскольку производная функции (8.33) при значениях  $|z| \leq 1$  отрицательна, минимальное значение

$$W_m = Mr^2 + \frac{1}{2}J \quad (8.34)$$

достигается при  $z = 1$ , т.е.  $q_2 = \frac{\pi}{2}$ . При значениях  $W > W_m$  движений без отрыва от опоры не существует.

В фазе полета  $R \equiv 0$ , и из второго уравнения (8.30) следует, что  $\dot{q}_2 = \text{const}$ . Данный интеграл выражает теорему о сохранении момента количества движения в отсутствие приложенных моментов, благодаря его наличию система обладает периодическими безударными движениями. Как и в предыдущем примере, для безударного приземления оказывается достаточным единственное условие  $\dot{q}_1(t_f) = 0$ . Действительно, учитывая интегралы движения (8.32) и  $\dot{q}_2 = \text{const}$ , придем к такому уравнению

$$(\sin q_2^+ - \sin q_2^-) [2g - r\dot{q}_2^2 (\sin q_2^+ + \sin q_2^-)] = 0. \quad (8.35)$$

Ввиду того, при отрыве выполнено равенство (8.31), приходим к выводу, что  $\sin q_2^+ = \sin q_2^-$ . Из двух групп решений данного уравнения одна является посторонней: соотношение  $q_2^+ = q_2^- + 2\pi m$  не может быть выполнено при приземлении, так как из него следует, что  $q_1 \leq 0$  при  $t < t_f$ . Следовательно,

$$q_2^+ = \pi - q_2^- + 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z}). \quad (8.36)$$

Не ограничивая общности, будем считать  $\dot{q}_2^- > 0$ , тогда  $m \in \mathbb{N}$ . Поскольку в полете диск вращается с постоянной угловой скоростью, а его центр масс совершают равноускоренное движение, то

$$q_2^+ - q_2^- = \dot{q}_2^- t_f, \quad 2\dot{y}_G^- = gt_f. \quad (8.37)$$

Исключая отсюда продолжительность полета  $t_f$ , получим при учете формул (8.28), (8.31) и (8.36) такое уравнение относительно  $q_2^-$ :

$$q_2^- + \operatorname{ctg} q_2^- = \frac{1}{2}\pi + \pi m. \quad (8.38)$$

Левая часть уравнения (8.38) представляет собой функцию, непрерывную в интервале  $(0, \pi/2)$ , причем ее производная  $1 - \sin^{-2} q_2^-$  отрицательна в этом интервале; при  $\dot{q}_2^- \rightarrow +0$  эта функция бесконечно велика, а при  $q_2^- = \pi/2$  она равна  $\pi/2$ . Следовательно, уравнение (8.38) имеет для каждого  $m = 1, 2, \dots$  единственный корень  $q_2^{(m)} \in (0, \pi/2)$ . Для  $m = 0$  получаем  $q_2^- = q_2^+ = \pi/2$ , т.е. фаза прыжка фактически отсутствует. Таким образом, в обсуждаемой системе имеется счетное множество периодических движений с участками скольжения и перелетами. Некоторые свойства таких движений изучены в [Иванов, 1992, б].

Несложные энергетические соображения позволяют сделать вывод об орбитальной неустойчивости безударных движений третьего типа. Для изолированного периодического движения, отвечающего значению энергии  $W_0$ , скорость приземления  $\dot{q}_1(t_f)$  равна нулю. Близким значениям энергии  $W_0 + \Delta W$  также соответствуют движения, включающие участок скольжения и перелет, однако скорость приземления уже не будет равна нулю. При неупругих ударах энергия системы уменьшится, и следующий участок скольжения и перелет будут отвечать уже значению  $W_0 + \Delta W_1$ , где  $\Delta W_1 < \Delta W$ . С ростом числа перелетов мы получим убывающую последовательность  $\{W_0 + \Delta W_n\}_{n=1}^\infty$ . Нетрудно показать, что пределом этой последовательности, если таковой существует, является число, соответствующее некоторому безударному движению. Так как начальное приращение  $\Delta W$  можно взять отрицательным, отсюда следует неустойчивость.

В случае  $\Delta W > 0$  возможно равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta W_n = 0$ . Более по-

дробно эта ситуация обсуждается ниже.

**Асимптотические движения с участками скольжения и перелетами.** Неустойчивость периодических безударных движений третьего типа, установленная в предыдущем разделе, имеет относительно слабый, неэкспоненциальный характер. Это означает, что вывод об устойчивости отображения  $\varphi_0$ , фигурирующего в формулировке предложения 8.3, нельзя сделать по первому приближению, так как  $\varphi'_0(x^*) = 1$ . Для проверки этого свойства построим это отображение, задавая в качестве координаты на кривой отрыва значение полной механической энергии  $W$ . Продолжительность перелета  $t_f$  определяется из неявного уравнения (8.17). Для периодического движения  $W = W_0$ ,  $t_f = t_f^o$ , причем  $\dot{q}_1 = \ddot{q}_1 = 0$ ,  $d^3 q_1 / dt^3 = \dot{A}_0 < 0$ . Раскладывая функцию  $q_1(W, t_f)$  по формуле Тейлора в окрестности значения  $W_0$ , получим

$$q_1(W_0 + \Delta W, t_f^o + \Delta t) = b(\Delta W) + \frac{1}{6} \dot{A}_0 (\Delta t)^3 + \dots, \quad (8.39)$$

где опущенные члены имеют более высокий порядок, нежели выписанные. В общем невырожденном случае  $b = \frac{\partial}{\partial W} q_1(W_0, t_f^o) \neq 0$ . Приравнивая левую часть формулы (8.39) к нулю, получим

$$\Delta t = -\gamma(\Delta W)^{1/3} + \dots, \quad \gamma = (6b/\dot{A}_0)^{1/3}. \quad (8.40)$$

Скорость соударения при выходе на связь определим, дифференцируя равенство (8.39) по времени. При учете формулы (8.40) получаем

$$\dot{q}_1^+ = \frac{1}{2} \dot{A}_0 \gamma^2 (\Delta W)^{2/3}. \quad (8.41)$$

В соответствии с формулой (6.81), кинетическую энергию системы (8.14) можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} a_{11}^*(q) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22}^*(q) p_2^2, \quad a_{11}^* = a_{11} - a_{12}^2/a_{22}. \quad (8.42)$$

При пластическом ударе первое слагаемое в выражении (8.42) уменьшается до нуля, а второе остается неизменным. Отсюда следует, что

$$\varphi_0(W_0 + \Delta W) = W_0 + \Delta W - \gamma^* (\Delta W)^{4/3} + \dots, \quad \gamma^* = \frac{1}{8} a_{11}^* \dot{A}_0^2 \gamma^4. \quad (8.43)$$

Из данного соотношения следуют два вывода. Во-первых, как отмечалось выше,  $\varphi'_0(W_0) = 1$ . Во-вторых, несмотря на неустойчивость неподвижной точки  $W_0$  отображения  $\varphi_0$ , она обладает и областью притяжения. Последняя описывается неравенством

$$\varphi_0(W_0 + \Delta W) > W_0. \quad (8.44)$$

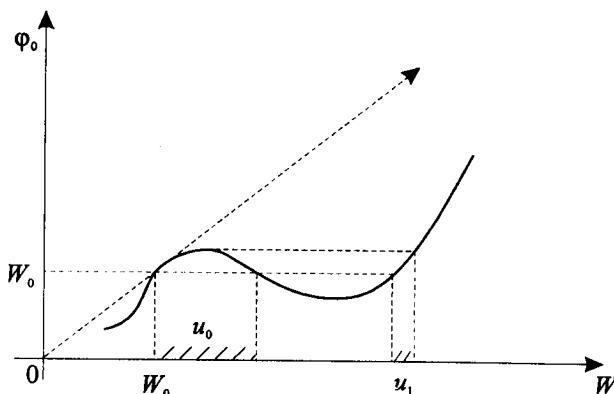


Рис. 8.4. Области существования асимптотических движений

Множество решений неравенства (8.44) имеет связную компоненту  $\mathcal{U}_0$ , примыкающую к точке  $W_0$  (рис. 8.4). Это множество представляет собой интервал, правую границу которого можно приближенно определить, пользуясь формулой (8.43):

$$U_0 : W_0 < W < W_0 + (\gamma^*)^{-3}. \quad (8.45)$$

Если возмущенное движение имеет участок скольжения и обладает на этом участке энергией  $W \in U_0$ , то оно имеет асимптотический характер: при  $t \rightarrow +\infty$  траектория неограниченно приближается к орбите периодического безударного движения. Помимо участков скольжения и перелетов, возмущенное движение включает в себя удары с малой скоростью сближения, причем потери энергии при ударах настолько малы, что члены последовательности  $\{\Delta W_n\}$  положительны.

Существование у периодического безударного движения области притяжения в случае неупругого удара с коэффициентом восстановления  $e \in (0, 1/2)$  показано в [Иванов, 1992, а]. Приведенное в этой статье доказательство основано на следующей оценке: решение задачи Коши

$$\ddot{y} = f(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y} = V$$

при условиях  $-f(0) = O(V^{1/2})$ ,  $f'(0) = -1$  обращается в нуль за время  $\tau = O(V^{1/2})$ , при этом  $|\dot{y}(\tau)| < 2V$ . Более точно,

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{4V}{f(0)(\Theta + 1)} + O(V), \quad \dot{y}(\tau) = -\frac{2V\Theta}{\Theta + 1} + O(V^{3/2}), \\ f(\tau) &= f(0)\left(\frac{3}{2}\Theta - \frac{1}{2}\right) + O(V), \quad \Theta = \sqrt{1 + \frac{8V}{3f(0)^2}}. \end{aligned}$$

Далее можно учесть граничные условия удара  $\dot{y}(\tau + 0) = -e\dot{y}(\tau - 0)$  и принять момент  $t = \tau$  за начальный, а затем воспользоваться аналогичной оценкой. При этом параметр будет иметь новое значение:

$$\Theta_1 = \sqrt{1 + \frac{8e\Theta(\Theta - 1)}{(3\Theta - 1)^2}}.$$

Элементарные вычисления показывают, что для всех  $\Theta > 1$

$$\Theta_1 - 1 < e(\Theta - 1),$$

откуда следует затухание последовательности ударов и для значений  $e \in [1/2, 1)$ . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Предложение 8.4.** Пусть для периодического безударного движения в точке выхода на связь удовлетворяются условия невырожденности

$$\frac{d^3 q_1}{dt^3} < 0, \quad \frac{\partial q_1}{\partial W} \neq 0, \quad (8.46)$$

а удары о связь неупруги. Тогда это движение орбитально полуустойчиво, т.е. его траектория лежит на границе областей притяжения и отталкивания в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^4$ .

**Пример.** Для двухмассового прыгуна, рассматривавшегося выше, для построения отображения  $\varphi_0$  в качестве параметра удобнее вместо энергии использовать параметр  $\alpha$ , пропорциональный скорости отрыва (см.(8.26)). В данной задаче

$$a_{11}^* = M_1, \quad A_0 = cM_1^{-1}(q_2 - q_1 - a) - g, \quad \dot{A}_0 = cM_1^{-1}\dot{q}_2^- = g\omega\alpha, \quad (8.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} q_1(\alpha, t_f^o) = \frac{g}{\omega^2}(2\alpha - \sin 2\alpha) = 2 \frac{\alpha g}{\omega^2(1 + \alpha^2)}, \quad T = \frac{\alpha^2 g^2 (M_1 + M_2)^2}{2\omega^2 M_2}.$$

Расчеты по формуле (8.45) при учете (8.47) приводят к такому результату [Иванов, 1992а]:

$$\Delta\alpha < \frac{2(M_1 + M_2)^6(1 + \alpha^2)^4}{81\alpha^{11}M_1^3M_2^3}. \quad (8.48)$$

Интересно отметить, что правая часть формулы (8.48) для данного периодического движения (для которого  $\alpha$  определяется из уравнения (8.27)) зависит только от соотношения масс составляющих систему тел и достигает минимума, когда эти массы равны. На рис. 8.2,б область (8.48) отмечена штриховкой.

Область существования асимптотических движений может иметь и дополнительные компоненты [Иванов, Базиян, 1995]:

$$U_1 = \varphi_0^{-1}(U_0), \quad U_2 = \varphi_0^{-1}(U_1), \dots \quad (8.49)$$

Количество непустых областей (8.49) зависит от конкретного вида функции  $\varphi_0$ . Следует заметить: эта функция дифференцируема в окрестности значения  $W_0$ , но в других точках она может иметь довольно нерегулярный характер. В частности, в следующей задаче эта функция имеет бесконечное множество точек разрыва.

**Пример.** Рассмотрим связку двух спутников на круговой орбите Земли. Будем считать тела материальными точками, а соединительный трос — гибкой нерастяжимой нитью. Функция Лагранжа системы такова [Белецкий, Новикова, 1969]:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - r^2\dot{\theta} + \frac{3}{2}r^2 \sin^2 \theta, \quad r \leq 1. \quad (8.50)$$

Здесь  $r, \theta$  — полярные координаты одной из масс в орбитальной системе координат. Если  $r = 1$ , то система образует "гантель", вращение которой описывается уравнением

$$\ddot{\theta} - 3 \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (8.51)$$

Скользящие движения  $r \equiv 1$  существуют при условии

$$R = \dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta} + 3 \sin^2 \theta > 0, \quad (8.52)$$

выражающем неотрицательность силы натяжения троса.

Система (8.50) обладает бесконечным множеством периодических безударных движений третьего типа [Белецкий, 1969]. Подобно вышеприведенным примерам, их наличие обусловлено существованием в фазе полета дополнительного интеграла движения — полной механической энергии для одной из масс. Значения угловой скорости относительного движения в момент ослабления троса для таких движений определяются из уравнения

$$Y \frac{x}{3-2x} = \operatorname{tg} \left( Y \frac{2x-1}{6-3x} \right), \quad Y = \left( \frac{3}{2x-x^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad x = \dot{\theta}^-. \quad (8.53)$$

Заметим, что не каждому корню данного уравнения соответствует периодическое движение обсуждаемой системы: необходима дополнительная проверка неравенства  $r < 1$  на интервале перелета. Как показывают расчеты, периодические безударные движения реализуются для следующих значений постоянной энергии  $h = 2W = 2x^2 - 2x$ :

$$\begin{aligned} h_0 &= 1.01579658\dots, \quad h_1 = -0.00843754\dots, \\ h_2 &= -0.00211048\dots, \dots \end{aligned} \quad (8.54)$$

Расчеты отображения  $\varphi_0(h)$  были проведены в [Белецкий, 1969] и затем уточнены [Иванов, Базиян, 1995]. В итоге сделан вывод, что для

каждого из периодических движений со значением  $h_j (j = 0, 1, 2, \dots)$  существует бесконечная система интервалов  $U_1^{(j)}, U_2^{(j)}, \dots$ , определяющих асимптотические движения. Длина этих интервалов очень мала: как показали расчеты [Иванов, Базиян, 1995]

$$U_1^{(0)} = (h_0, h_0 + 1.8 \cdot 10^{-7}), \quad U_2^{(0)} = (h_0^*, h_0^* + 1 \cdot 10^{-7}), \dots \quad (8.55)$$

где  $h_0^* = 1,99744306\dots$  и т.д. Дополнительными компонентами обладают и периодические движения, соответствующие значениям  $h_1, h_2, \dots$ . На фазовой плоскости множества  $U_k^{(j)}$  представляют собой узкие полоски, которые причудливо чередуются друг с другом, сгущаясь около периодических безударных движений [Иванов, Базиян, 1995].

### 8.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК "ДРЕБЕЗГА" В ПРОЦЕССЕ "МЯГКОЙ" ПОСАДКИ

**Постановка задачи.** Важной задачей динамики систем с односторонними связями является безударный перевод связи от свободного к напряженному состоянию. Примерами могут служить посадка самолета или захват роботом - манипулятором хрупкого предмета. Как показано выше, идеальное "приземление" теоретически возможно для отдельных траекторий в фазовом пространстве системы. На практике в силу разного рода погрешностей установление контакта характеризуется ненулевой скоростью сближения. За этим следует серия затухающих ударов — так называемый "дребезг", предваряющий "скользящий" режим. Данное нежелательное явление может привести к поломкам, поэтому задача состоит в его минимизации (в том или ином смысле) за счет подходящего выбора конструктивных и управляющих параметров.

Обозначим  $t'$  момент первого соударения, тогда для  $t < t'$  односторонняя связь ослаблена:  $q_1 > 0$ . Пусть  $\Delta t$  — продолжительность "дребезга", т.е.  $q_1 \equiv 0$  при  $t > t' + \Delta t$ , а в интервале  $(t', t' + \Delta t)$  перелеты чередуются с ударами. Можно определить различные характеристики переходного процесса:

1) наибольший ударный импульс

$$I_{\max} = \max_k |I_k|; \quad (8.56)$$

2) продолжительность "дребезга"  $\Delta t$  ;  
3) суммарный импульс

$$\langle I \rangle = \sum_k |I_k|; \quad (8.57)$$

4) механическая энергия, потерявшая при "дребезге"  $\Delta W$  , и т.д.

Ниже предлагается метод оценки характеристик дребезга, основанный на непрерывном представлении движений с ударами и построении для вспомогательной системы функции Ляпунова. Подробно изучается случай одной степени свободы, затем кратко обсуждаются возможности обобщения. Изложение следует работе [Ivanov, 1994,b].

**Система с одной степенью свободы.** Пусть уравнение движения в области  $q > 0$  имеет вид

$$\ddot{q} = f(t, q, \dot{q}), \quad (8.58)$$

а удары о связь характеризуются постоянным коэффициентом восстановления. Система (8.58) обладает решением  $q^*(t)$ , для которого  $q^*(t) > 0$  при  $t < t^*$  и  $q^*(t) \equiv 0$  при  $t \geq t^*$ ; будем считать выполнеными достаточные условия безударного приземления (см. §8.1)

$$f(t^*, 0, 0) = 0, \quad \partial f(t^*, 0, 0)/\partial t < 0. \quad (8.59)$$

Для исследования траекторий системы (8.58), близких к  $q^*(t)$ , перейдем к вспомогательным переменным по формулам (6.130). Уравнения движения вне начала координат примут вид

$$\dot{s} = Wv, \quad \dot{v} = W^{-1}f(t, |s|, Wv \operatorname{sign} s) \operatorname{sign} s, \quad (8.60)$$

а в точке  $s = v = 0$  надо считать, что  $\dot{v} = 0$  при  $t \geq t^*$ .

Положим

$$\mathcal{V} = \rho^3 + \theta sv, \quad \rho^2 = v^2 + A|s|, \quad (8.61)$$

где коэффициенты  $\theta, A$  подберем таким образом, чтобы  $\mathcal{V}$  обладала свойствами функции Ляпунова. Из определения величины  $\rho$  следуют неравенства

$$|s| \leq \rho^2/A, \quad |v| \leq \rho. \quad (8.62)$$

Следовательно, в случае  $\theta < A$  функция (8.61) будет положительно определена, причем  $\mathcal{V} < 2\rho^3$ . Вычислим производную этой функции в силу системы (8.60):

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} = & \frac{3}{2}\rho \left( -k|v|\left(A - \frac{2f}{1-k^2}\right) + v \operatorname{sign} s \left(A + \frac{2f}{1-k^2}\right) \right) + \\ & + \theta \left(Wv^2 + \frac{1}{W}|s|f\right). \end{aligned} \quad (8.63)$$

Положим  $\theta = \frac{3}{2}k(1+k+\frac{1}{2}e)^{-1}A$ . Тогда для значений переменных, удовлетворяющих двойному неравенству

$$(1-k)A < -2f < (1+k)A \quad (8.64)$$

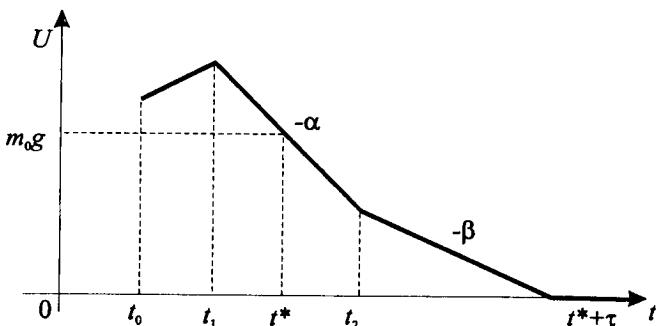


Рис. 8.5. Кусочно-линейное управление "мягкой" посадкой

производная (8.63) допускает оценку

$$\dot{V} < -\frac{\theta}{2e} \left(\frac{V}{2}\right)^{2/3} \quad (8.65)$$

Неотрицательная функция, удовлетворяющая неравенству (8.65), обращается в нуль за время, меньшее величины

$$\tau^* = B(e)A^{-1}[V(\bar{t})]^{1/3}, \quad B(e) = 4\sqrt[3]{4}e(1 + k + \frac{1}{2}e)/k \quad (8.66)$$

Здесь  $\bar{t}$  — некоторый момент времени, выбираемый таким образом, чтобы на интервале  $(\bar{t}, \bar{t} + \tau^*)$  выполнялось неравенство (8.64). Данный выбор возможен при условии, что начальные возмущения (и, следовательно, величина  $V(\bar{t})$ ) достаточно малы.

**Пример.** Рассмотрим тяжелую частицу, масса которой известна не точно, а с некоторой погрешностью:  $m = m_0 + \Delta m$ . Подобная ситуация типична для перевозок пассажиров и грузов. Движение вдоль вертикали происходит под действием силы тяжести, а также некоторой управляющей функции  $U(t)$ , выбираемой из условия обеспечения безударной посадки в случае  $\Delta m = 0$ . Исследуем дребезг, возникающий в случае  $\Delta m \neq 0$ .

Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{q} = -mg + U(t), \quad q \geq 0, \quad (8.67)$$

где  $q$  — высота частицы над опорой. Пусть функция  $U(t)$  кусочно-линейна (рис. 8.5). Согласно результатам §8.1, для безударного приземления в момент  $t = t^*$  необходимо  $U(t^*) = m_0g$ ; далее,  $U(t^* + \tau) = 0$ , где  $\tau$  — продолжительность посадки (т.е. период времени, в течение которого реакция опоры возрастает от нуля до своего максимального значения, равного весу частицы). Начальное значение  $U(t_0)$  и момент

переключения  $t_1$  можно определить из условий мягкой посадки для данных значений  $q(t_0)$ ,  $\dot{q}(t_0)$ . Для этого дважды проинтегрируем уравнение (8.67):

$$\ddot{q}(t^*) = \ddot{q}(t_0) - g(t^* - t_0) - \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t^*} \mathcal{U}(t) dt = 0, \quad (8.68)$$

$$q(t^*) = q(t_0) + (t^* - t_0)\dot{q}(t_0) - \frac{1}{2}g(t^* - t_0)^2 - \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t^*} dt \int_{t_0}^t \mathcal{U}(s) ds = 0.$$

Подставляя в систему (8.68) при  $m = m_0$  явное выражение для  $\mathcal{U}(t)$ , найдем две неизвестные величины. Остается выбрать угловые коэффициенты второго и третьего звеньев  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 8.5). Второе звено является определяющим для характеристик дребезга, а третье звено лишь обеспечивает непрерывность функции  $\mathcal{U}(t)$ .

Функция  $q^*(t)$  удовлетворяет уравнению (8.67), где  $m = m_0$ . Следовательно,

$$\ddot{q} - \ddot{q}^* = \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m_0} \right) \mathcal{U}(t). \quad (8.69)$$

Интегрируя уравнение (8.69), получим при учете (8.68)

$$\ddot{q}(t^*) = -C_2\delta + o(\delta), \quad q(t^*) = -C_1\delta + o(\delta), \quad \delta = \frac{\Delta m}{m_0}, \quad (8.70)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}g(t^* - t_0)^2 - \dot{q}(t_0)(t^* - t_0), \quad C_2 = g(t^* - t_0) - \dot{q}(t_0).$$

Выразим величину  $\ddot{q}(t)$  из уравнения (8.67) для значений времени, соответствующих второму звену ломаной:

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) &= -g + (m_0 + \Delta m)^{-1} [\mathcal{U}(t^*) - \alpha(t - t^*)] = \\ &= -\alpha^*(t - t^*)(1 - \delta) - \delta g + o(\delta), \end{aligned} \quad (8.71)$$

$$\frac{d^3 q}{dt^3}(t) = -\alpha^*(1 - \delta) + o(\delta), \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{m_0}.$$

Соотношения (8.70), (8.71) получены в предположении, что  $q > 0$ . Определим с их помощью момент  $t'_1$  первого удара частицы об опору. Для этого воспользуемся формулой Тейлора:

$$\begin{aligned} q(t'_1) &= q(t^*) + \dot{q}(t^*)(t'_1 - t^*) + \frac{1}{2}\ddot{q}(t^*)(t'_1 - t^*)^2 + \\ &+ \frac{1}{6}\frac{d^3 q}{dt^3}(t^*)(t'_1 - t^*)^3 + o(t'_1 - t^*)^3 = 0. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Подставляя в (8.72) выражения (8.70), (8.71), получаем

$$t'_1 = t^* - (6C_1\delta/\alpha^*)^{1/3} + o(\delta^{1/3}). \quad (8.73)$$

Поскольку константы  $C_1$  и  $\alpha^*$  положительны, можно сделать вывод: при недогрузе (т.е.  $\Delta m < 0$ ) момент удара наступает позднее предполагаемого безударного приземления, а при перегрузе этот момент предшествует  $t^*$ . Дифференцируя формулу (8.72), найдем скорость сближения при первом ударе:

$$\dot{q}(t'_1) = \dot{q}(t^*) + \ddot{q}(t^*)(t'_1 - t^*) + \frac{1}{2}q'''(t^*)(t'_1 - t^*)^2 + o(t'_1 - t^*)^2,$$

откуда

$$\dot{q}(t'_1 - 0) = -\frac{1}{2}\alpha^*(t'_1 - t^*)^2 + o(\delta^{2/3}). \quad (8.74)$$

Перелет между первым и вторым ударами описывается в силу (8.71), (8.74) формулой (здесь и далее опущены слагаемые, малые по сравнению с выписанными)

$$\begin{aligned} q &= \frac{1+e}{2}\alpha^*(t'_1 - t^*)^2(t - t'_1) - \frac{1}{6}\alpha^*(t - t^*)^3 + \frac{1}{6}(t'_1 - t^*)^3, \\ \dot{q} &= \frac{1+e}{2}\alpha^*(t'_1 - t^*)^2 - \frac{1}{2}\alpha^*(t - t^*)^2. \end{aligned} \quad (8.75)$$

Приравнивая правую часть первой из формул (8.75) к нулю, найдем момент второго удара  $t'_2$ :

$$t'_2 - t^* = (t'_1 - t^*) \left[ -\frac{1}{2} \pm \left( \frac{9}{4} + 3e \right)^{1/2} \right]. \quad (8.76)$$

В формуле (8.76) знак выбирается таким образом, чтобы правая часть была положительной. Таким образом, в случае  $\delta < 0$  это плюс, а в случае  $\delta > 0$  — минус. В обоих случаях  $t'_2 > t^*$ , т.е. второй удар следует за моментом предполагаемого идеального приземления. Для скорости сближения при учете второй формулы (8.75) получаем

$$\dot{q}(t'_2 - 0) = \dot{q}(t'_1 - 0) \left[ \frac{3}{2} + 2e \mp \left( \frac{9}{4} + 3e \right)^{1/2} \right], \quad (8.77)$$

где выбор знака согласуется с формулой (8.76). Если  $\delta < 0$ , то это минус, если же  $\delta > 0$ , то плюс.

Положим  $\bar{t} = t'_2$ ,  $A = -2f(\bar{t})/(1-k)$  и выясним, при каких условиях затухание дребезга произойдет на интервале  $(\bar{t}, \bar{t} + \tau^*)$ , где величина  $\tau^*$  определена формулой (8.66). Для этого достаточно проверить выполнение неравенства

$$-f(\bar{t} + \tau^*) < -f(\bar{t})/e. \quad (8.78)$$

При учете формулы (8.71) данное условие примет вид

$$e(\bar{t} + \tau^* - t^*) < \bar{t} - t^*,$$

откуда

$$\tau^* < \frac{1-e}{e}(\bar{t} - t^*). \quad (8.79)$$

Принимая во внимание, что  $q = 0$  при  $t = \bar{t}$ , получим, что  $\mathcal{V}(\bar{t}) = v^3 = |\dot{q}_2(t_2 - 0)|^3/(1+k)^3$ . При помощи формул (8.66), (8.71), (8.74), (8.76), (8.77) преобразуем (8.79) к виду

$$e^2 B(e) \left[ \frac{3}{2} + 2e \mp \left( \frac{9}{4} + 3e \right)^{1/2} \right] < 4(1-e) \left[ -\frac{1}{2} \pm \left( \frac{9}{4} + 3e \right)^{1/2} \right]^2. \quad (8.80)$$

Решение неравенства (8.80) зависит от знака числа  $\delta$ : если  $\delta < 0$  (недогруз), то оно выполняется для значений  $e < 0.56$ , а в случае  $\delta > 0$  — для  $e < 0.46$ . Если реальное значение коэффициента восстановления не лежит в этих границах, то следует принять за  $\bar{t}$  момент следующего удара  $t'_3$  и т.д.

Проведенный анализ позволяет сделать некоторые выводы о характеристиках дребезга. Во-первых, перегруз приводит к более интенсивным по сравнению с недогрузом ударам (для противоположных значений  $\delta$  максимальные скорости при ударе различаются более чем втрое) и более длительному дребезгу. Во-вторых, максимальный ударный импульс (8.56) пропорционален угловому коэффициенту второго звена  $\alpha$ , а продолжительность дребезга обратно пропорциональна  $\alpha^{2/3}$ .

**Случай нескольких степеней свободы.** Обсудим кратко методику исследования дребезга в системе с несколькими степенями свободы и односторонней связью  $q_1 \geq 0$ . Запишем уравнения движения в лагранжевой форме:

$$[T]_j = Q_j + U_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (8.81)$$

Здесь  $Q_j$  — обобщенные силы,  $U_j$  — управляющие воздействия, направленные на обеспечение мягкой посадки. Предполагается, что система (8.81) обладает решением  $q^*(t)$ , для которого  $q_1^*(t) > 0$  при  $t < t^*$  и  $q_1^*(t) \equiv 0$  при  $t \geq t^*$ , причем функция  $f_1 = Q_1 + U_1$  удовлетворяет условиям (8.59). Для изучения траекторий, близких к  $q^*(t)$ , выполним следующие шаги.

Вначале перейдем в системе (8.81) к новым переменным, сохраняющим непрерывность при ударах. Способы их определения подробно обсуждались в §§6.4, 6.5. В частности, для абсолютно гладкой опоры можно воспользоваться переменными (6.140), а в случае сухого трения использовать замены (6.162), (6.163). В преобразованных к новым переменным уравнениях движения основными для рассматриваемой

задачи являются те два, которые описывают изменение переменных  $s$  и  $v$ .

Затем построим функцию по формуле (8.61) и подберем константы  $A, \theta$  и начальный момент затухания подскоков  $\bar{t}$  по аналогии с одномерным случаем. При этом считается, что все переменные, за исключением  $s$  и  $v$ , описываются известными функциями времени (а именно, теми же самыми, что и в невозмущенном движении  $q^*$ ).

Наконец, возвращаясь к исходным переменным, восстанавливаем весь процесс неидеальной посадки.

**Пример.** Вновь обратимся к тяжелой частице, падающей под углом на шероховатую плоскость (см. §6.5), считая на этот раз, что помимо веса на нее действуют некоторые управляющие силы. Уравнения полета в прямоугольных координатах имеют вид

$$m\ddot{q}_1 = -mg + U_1, \quad m\ddot{q}_2 = U_2. \quad (8.82)$$

Для непрерывного представления возьмем переменные  $s, v, q_2$  и  $y_2 = \mu q_1 + \dot{q}_2$ , где  $\mu$  — коэффициент трения (предполагается, что горизонтальная скорость  $\dot{q}_2$  остается положительной). Их изменение в силу (8.82) описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{s} &= Wv, & \dot{v} &= (U_1/m - g)W^{-1}\operatorname{sign} s, \\ \dot{q}_2 &= y_2 - \mu Wv \operatorname{sign} s, & \dot{y}_2 &= \mu(U_1/m - g) + U_2/m. \end{aligned} \quad (8.83)$$

Заметим, что первые два из этих уравнений имеют точно такую же форму, как и в рассмотренном в предыдущем разделе одномерном случае. Следовательно, полученные выше выводы остаются в силе.

Для заданных функций  $U_{1,2}(t)$  зависимость  $y_2(t)$  определяется из четвертого уравнения системы (8.83) квадратурой, затем из третьего уравнения можно определить последнюю неизвестную  $q_2(t)$ .

# Глава 9. ДИНАМИКА ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

## 9.1 ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

Наиболее полно в теории гладких динамических систем изучены те из них, фазовое пространство которых двумерно. Им посвящены многочисленные монографии и статьи, в том числе [Пуанкаре, 1947, Бендиксон, 1941, Немышкий, Степанов, 1947, Peixoto, 1959, Андронов и др., 1966, 1967, Баутин, Леонтович, 1990]. При наличии односторонней связи  $q \geq 0$ , получим систему, фазовым пространством которой является полу平面. Примеры таких систем рассматривались в [Закржевский, 1980, Виба, 1988]. Поскольку траектории терпят разрыв на линии  $q = 0$ , то непосредственное использование теории систем на плоскости в данном случае невозможно.

Отмеченное затруднение можно преодолеть, используя метод непрерывного представления, изложенный в §§6.3, 6.4. Результаты такого подхода изложены ниже.

**Непрерывное представление на вспомогательной плоскости.** Рассмотрим систему с одной степенью свободы и односторонней связью

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}), \quad q \geq 0, \tag{9.1}$$

где функцию  $F$  будем считать непрерывно дифференцируемой в некоторой замкнутой области  $\Omega$ , содержащей начало координат. Фазовым пространством данной системы является полу平面: при попадании изображающей точки на полупрямую  $q = 0$ ,  $\dot{q} < 0$  она перемещается скачком. Если удар частично упругий, то траектория продолжается в первой четверти. Величина скачка описывается соотношением

$$\dot{q}^+ = \dot{q}^- + I(\dot{q}^-, F_0), \tag{9.2}$$

выражающим ударный закон. Для классической модели удара имеем  $I = -(1 + e)\dot{q}^-$ ,  $e = \text{const}$ ; при использовании вязкоупругих моделей для малых значений скорости сближения коэффициент восстановления  $e$  зависит от значения  $F_0 = F(0, 0)$ : если  $F_0 > 0$ , то  $e(0) = 1$ , а в случае  $F_0 < 0$  имеем  $e(0) = 0$  (см. §2.4).

Для построения фазового портрета в более привычном непрерывном виде воспользуемся результатами §6.4. На вспомогательной фазовой плоскости  $(s, v)$  траектории непрерывны, но не обязательно дифференцируемы на линии склейки  $s = 0$ . Пара точек, симметричных относительно начала координат на вспомогательной плоскости, соответствует единственная точка исходной полу平面.

**Типы особых точек.** Особые точки динамической системы на полу平面 (9.1) делятся на два основных типа:

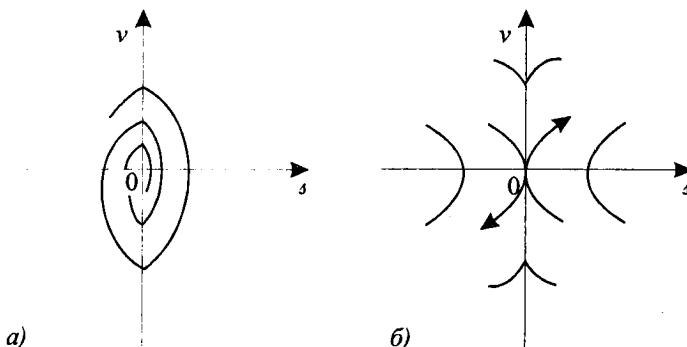


Рис. 9.1. "Квазифокус" и "квазиседло"

### 1. Положительным корням уравнения

$$F(q, 0) = 0 \quad (9.3)$$

соответствуют равновесия вида  $(q^*, 0)$ ,  $q^* > 0$ . Односторонняя связь  $q > 0$  не влияет на движение в достаточно малой окрестности такой точки, поэтому она относится к одному из известных типов: узел, фокус, седло или центр — в зависимости от значений

$$F_1 = \partial f(q^*, 0)/\partial q, \quad F_2 = \partial f(q^*, 0)/\partial \dot{q}. \quad (9.4)$$

**2.** Начало координат является положением равновесия системы (9.1) в двух случаях: если  $F_0 < 0$  или если  $F_0 = 0$ . Если удары о связь неупруги, то в первом из этих случаев согласно предложению 7.4 равновесие асимптотически устойчиво. Более того, за конечное время все точки из некоторой окрестности начала координат  $U^o$  попадают в начало координат, после чего система уравновешивается за счет реакции связи [Иванов, 1993, б]. Этот случай соответствует "сбитому" фокусу или "квазифокусу" системы непрерывного представления [Баутин, Леонтьевич, 1990] (рис. 9.1, а).

Оценим время притяжения для случая ньютонаского закона восстановления  $e = const$ , используя прямой метод Ляпунова. Уравнения непрерывного представления имеют вид (см. §6.4)

$$\begin{aligned} \dot{s} &= Wv, & \dot{v} &= W^{-1}F(|s|, Wv \operatorname{sign} s) \operatorname{sign} s, \\ W &= 1 - k \operatorname{sign}(sv), & k &= (1 - e)/(1 + e). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Область  $\Omega^*$  определим условиями

$$0 < C_1 \leq -F(q, \dot{q}) \leq \frac{1}{2}C_2^2(1 - k), \quad \left| 1 - \frac{F}{F_0} \right| \leq \frac{6}{7} \frac{k}{1 + k}, \quad (9.6)$$

где  $C_1, C_2$  — некоторые константы. Рассмотрим функцию

$$G(s, v) = \rho^3 + \theta sv, \quad \rho = \left[ \frac{(k^2 - 1)v^2}{2F_o} + |s| \right]^{1/2}, \quad \theta = C_2^{-1} \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3k}{3+k} \right\} \quad (9.7)$$

В силу определения величины  $\rho$  и неравенств (9.6) в области  $\Omega^*$  выполнены оценки

$$\frac{3}{2}\rho^3 \geq G \geq \frac{1}{2}\rho^3, \quad \frac{dG}{dt} \leq -C_1\theta\rho^2(1+k)^{-1} = O(G^{2/3}).$$

Возьмем в качестве  $U^o$  наибольшее из множеств  $G \leq \epsilon$ , содержащихся в  $\Omega^*$ .

Так как несобственный интеграл

$$J(G_0) = \int_0^{G_0} G^{-2/3} dG = 3G_0^{1/3}$$

сходится, приходим к выводу, что функция  $G$  обращается в нуль за время порядка  $\rho$ . При этом изображающая точка попадает в начало координат, и система уравновешивается.

Если  $F_0 = 0$ , то характер устойчивости зависит от величин  $F_1 = \partial F(0, 0)/\partial q$ ,  $F_2 = \partial F(0, 0)/\partial \dot{q}$ . В [Иванов, 1993, б] доказано следующее утверждение.

**Предложение 9.1.** *Если  $F_0 = 0$ , то в каждом из следующих случаев:*

- 1)  $F_1 > 0$ ;
- 2)  $F_1 < 0$ ,  $D = F_2^2 + 4F_1^2 > 0$ ,  $F_2 > 0$ ;
- 3)  $F_2 < 0$ ,  $D < 0$ ,  $\sigma = e \exp\{\pi f_2/\sqrt{-D}\} > 1$

*нулевое положение равновесия системы (9.1) неустойчиво, в случаях*

- 4)  $F_1 < 0$ ,  $D > 0$ ,  $F_2 < 0$ ;
- 5)  $F_1 < 0$ ,  $D < 0$ ,  $\sigma < 1$  —

*асимптотически устойчиво.*

Заметим, что данное утверждение остается справедливым и в том случае, если коэффициент восстановления зависит от скорости удара: при этом в качестве  $e$  следует взять предельное значение  $e(0)$ . Если  $F_0 = 0$ ,  $e > 0$ , то притяжение к началу (при наличии асимптотической устойчивости) за конечное время невозможно [Иванов, 1992, г].

Если  $F_0 > 0$ , то начало координат не является положением равновесия. Более того, за конечное время все точки из некоторой окрестности начала координат  $U^o$  покидают эту окрестность. Для системы на плоскости с разрывной правой частью особенность этого типа называют "сшитым седлом" или "квазиседлом" [Баутин, Леонович, 1990] (рис. 9.1, б).

**Бифуркации начала координат.** Теории бифуркаций динамических систем на плоскости посвящено большое число работ, среди которых следует выделить [Пуанкаре, 1947, Бендиксон, 1941, Андронов и др., 1967].

В применении к особым точкам, при бифуркации может меняться их число или тип особенности. Если особая точка системы (9.1) лежит в правой полуплоскости, то для ее локального анализа можно воспользоваться известными результатами. Самостоятельный интерес представляет исследование особенности в начале координат при наличии зависимости от параметров.

Рассмотрим систему

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}, \mu), \quad q \geq 0 \quad (9.8)$$

с ударными взаимодействиями, описываемыми формулами (9.2).

Вначале будем считать, что функция  $F$  линейна, а коэффициент восстановления не зависит от скорости удара:

$$F = \mu + F_1 q + F_2 \dot{q}, \quad I(\dot{q}^-) = -(1+e)\dot{q}^-, \quad F_1 \neq 0. \quad (9.9)$$

Тогда вспомогательная система (9.5) выглядит так:

$$\dot{s} = Wv, \quad \dot{v} = \mu W^{-1} \operatorname{sign} s + W^{-1} F_1 s + F_2 v. \quad (9.10)$$

Наряду с началом координат, система (9.10) обладает еще двумя особыми точками

$$s_{1,2} = \pm \mu / F_1, \quad v_{1,2} = 0, \quad (9.11)$$

существующими для тех значений  $\mu$ , для которых  $\mu F_1 < 0$ . Построим фазовые портреты для различных значений параметров.

1) В случае  $F_1 > 0$  система имеет при  $\mu < 0$  два седла с прямолинейными сепаратрисами

$$v = \frac{1}{2}(s - s_{1,2})(F_2 \pm \sqrt{D})W^{-1} \quad (9.12)$$

(см.рис. 9.2). В зависимости от значений  $e$ ,  $F_1$  и  $F_2$  существует три подслучаи:

а) Если

$$e(F_2 + \sqrt{D}) < \sqrt{D} - F_2, \quad (9.13)$$

то между сепаратрисами имеется щель, в которую проникают фазовые кривые из некоторой окрестности полубесконечной сепаратрисы: внутренность треугольников, образованных осью  $v$  и сепаратрисами, входит в область притяжения квазифокуса.

б) При обратном знаке неравенства (9.13) фазовые кривые проходят щели между сепаратрисами изнутри наружу. Поэтому область притяжения квазифокуса составляет только часть вышеупомянутых

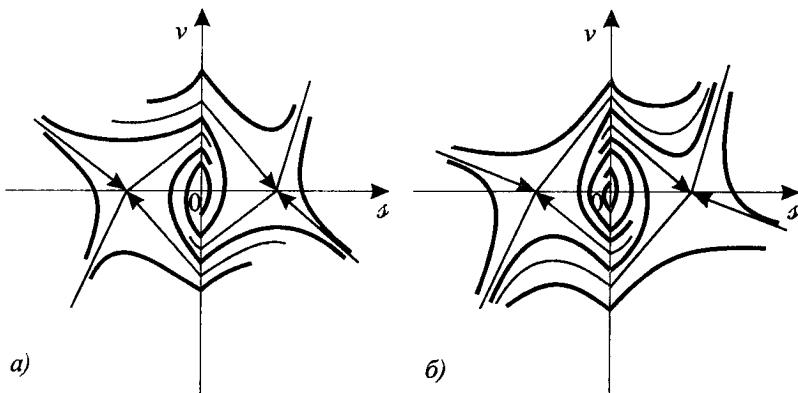


Рис. 9.2. Фазовый портрет в случае  $F_1 > 0$ :  
а)  $e(F_2 + \sqrt{D}) < \sqrt{D} - F_2$ , б)  $e(F_2 + \sqrt{D}) > \sqrt{D} - F_2$

треугольников; границей этой области служит неустойчивый предельный цикл, составленный из интегральных кривых системы (9.10).

в) Если обе части соотношения (9.13) равны между собой, сепаратрисы образуют ромб, внутренность которого и составляет область притяжения.

В каждом из этих подслучаев для значений  $\mu > 0$  фазовый портрет имеет вид, изображенный на рис. 9.1,б (квазиседло).

2) В случае  $F_1 < 0$ ,  $D > 0$  точки (9.11) узлового типа существуют при  $\mu > 0$ . Наличие инвариантных лучей (9.12) помогает построить фазовые портреты, представленные на рис. 9.3 ( $F_2 > 0$ ) и 9.4 ( $F_2 < 0$ ). Область притяжения квазифокуса на рис. 9.3,б ограничена неустойчивым предельным циклом, а на рис. 9.4,б она составляет всю фазовую плоскость.

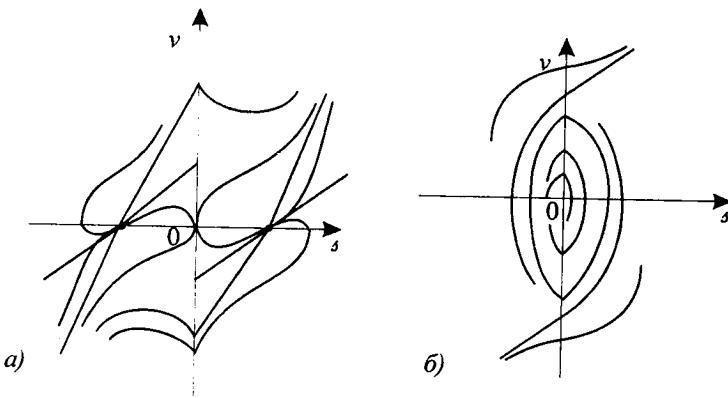
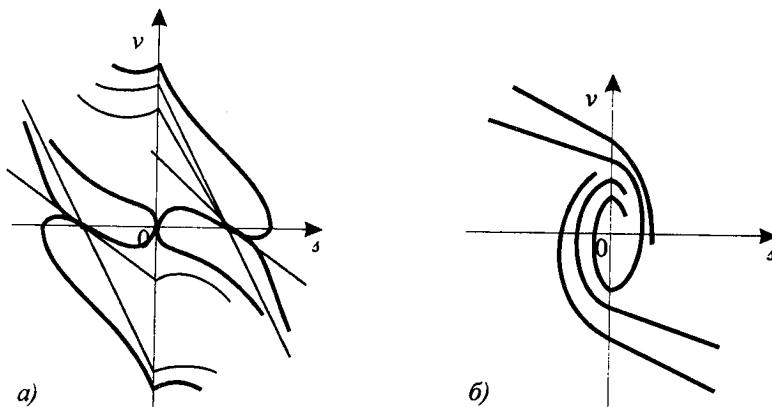
3) В случае  $D < 0$  точки (9.11) существуют лишь при  $\mu > 0$  и являются фокусами. Здесь возможно три подслучая в зависимости от значений  $F_2$  и  $\sigma = e \exp(\pi F_2 / \sqrt{-D})$ .

а) Если  $\sigma > 1$ , то при  $\mu > 0$  фокусы неустойчивы, а при  $\mu < 0$  область притяжения квазифокуса ограничена неустойчивым предельным циклом (рис. 9.5).

б) Если  $\sigma < 1$ ,  $F_2 > 0$ , то при  $\mu < 0$  начало координат притягивает всю плоскость, а при  $\mu > 0$  наряду с парой неустойчивых фокусов система имеет устойчивый предельный цикл (см. также [Баутин, Леонович, 1990]) (рис. 9.6).

в) Если  $\sigma < 1$ ,  $F_2 < 0$ , то при  $\mu > 0$  система имеет пару устойчивых фокусов (рис. 9.7), а при  $\mu < 0$  фазовый портрет аналогичен предыдущему подслучаю (рис. 9.6,б).

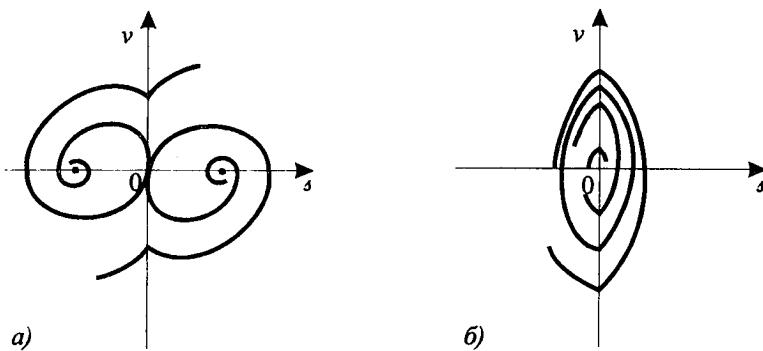
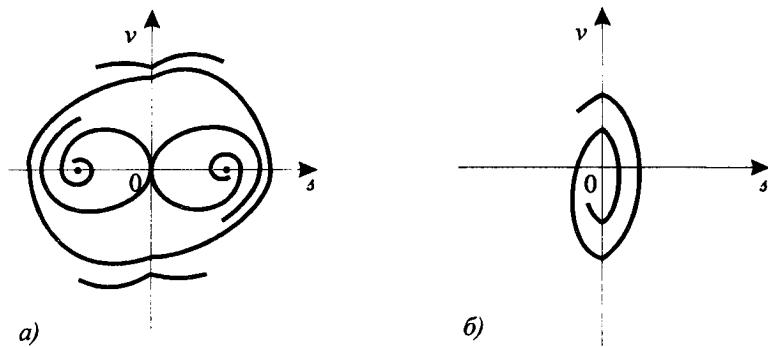
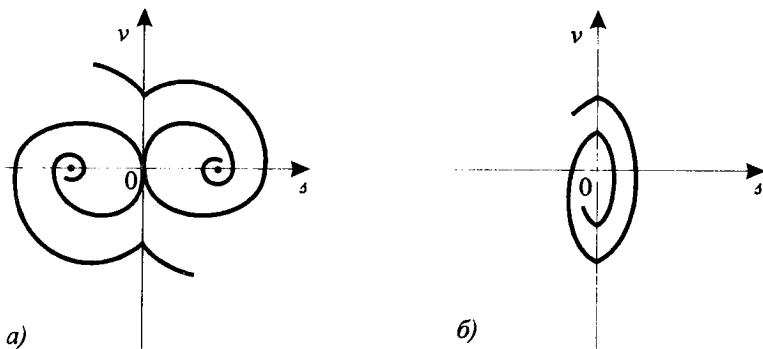
Во всех перечисленных случаях фазовый портрет обладает устойчивой структурой, за исключением подслучаев 1,в (сепаратриса, иду-

Рис. 9.3. Фазовый портрет в случае  $F_1 < 0, D > 0, F_2 > 0$ : а)  $\mu > 0$ , б)  $\mu < 0$ Рис. 9.4. Фазовый портрет в случае  $F_1 < 0, D > 0, F_2 < 0$ : а)  $\mu > 0$ , б)  $\mu < 0$ 

щая из седла в седло). Такая структурная устойчивость следует из теории Пуанкаре – Бендиксона в применении к системам с разрывной правой частью [Баутин, Леонтьевич, 1990, Филиппов, 1985] и означает, что для достаточно малого изменения правых частей в системе (9.10) количество особых точек и траекторий и их характер не изменяются. Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности начала координат фазовые портреты системы (9.10) и системы непрерывного представления для нелинейного уравнения (9.8) подобны. Для того, чтобы построить фазовый портрет системы на полуплоскости (9.8), надо сохранить лишь правую часть портрета вспомогательной системы и деформировать ее как было описано в параграфе 6.4.

В итоге получаем следующее утверждение.

**Предложение 9.2.** Пусть при  $\mu = q = \dot{q} = 0$  функция  $F(q, \dot{q}, \mu)$

Рис. 9.5. Фазовый портрет в случае  $D < 0, \sigma > 1$ : а)  $\mu > 0$ , б)  $\mu < 0$ Рис. 9.6. Фазовый портрет в случае  $D < 0, \sigma < 1, F_2 > 0$ : а)  $\mu > 0$ , б)  $\mu < 0$ Рис. 9.7. Фазовый портрет в случае  $D < 0, \sigma < 1, F_2 < 0$ : а)  $\mu > 0$ , б)  $\mu < 0$ 

равна нулю, а ее частная производная по  $\mu$  положительна. Тогда при изменении знака параметра  $\mu$  с минуса на плюс фазовый портрет системы (9.8) в окрестности начала координат перестраивается в соответствии со следующей таблицей.

- 1)  $F_1 > 0, e(F_2 + \sqrt{D}) < \sqrt{D} - F_2$  : *квазифокус + седло*  $\Rightarrow$  *квазиседло*;
- 2)  $F_1 > 0, e(F_2 + \sqrt{D}) > \sqrt{D} - F_2$  : *квазифокус + седло + неустойчивый предельный цикл*  $\Rightarrow$  *квазиседло*;
- 3)  $F_1 < 0, D > 0, F_2 > 0$  : *квазифокус + неустойчивый предельный цикл*  $\Rightarrow$  *квазиседло + неустойчивый узел*;
- 4)  $F_1 < 0, D > 0, F_2 < 0$  : *квазифокус*  $\Rightarrow$  *квазиседло + устойчивый узел*;
- 5)  $D < 0, \sigma > 1$  : *квазифокус + неустойчивый предельный цикл*  $\Rightarrow$  *квазиседло + неустойчивый фокус*;
- 6)  $D < 0, \sigma < 1, F_2 > 0$  : *квазифокус*  $\Rightarrow$  *квазиседло + неустойчивый фокус + устойчивый предельный цикл*;
- 7)  $D < 0, F_2 < 0$  : *квазифокус*  $\Rightarrow$  *квазиседло + устойчивый фокус*.

При значениях  $F_1, F_2$ , не отвечающих ни одному из перечисленных случаев, структура фазового портрета зависит от нелинейных членов.

#### Орбитальная устойчивость периодических движений.

Многие качественные свойства динамической системы на плоскости являются следствием теоремы единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. В частности, любое периодическое движение изображается замкнутой кривой, не имеющей самопересечений.

Что касается системы на полуплоскости (9.1), то ее периодические движения различаются прежде всего наличием ударов о связь. Движения без контакта изображаются замкнутыми кривыми, целиком лежащими в полуплоскости  $q > 0$  (рис. 9.8, а). Движению с касанием ограничителя соответствует кривая, проходящая через начало координат (б). Наконец, движение с периодическими ударами описывается незамкнутой кривой, имеющей разрывы на оси ординат (в).

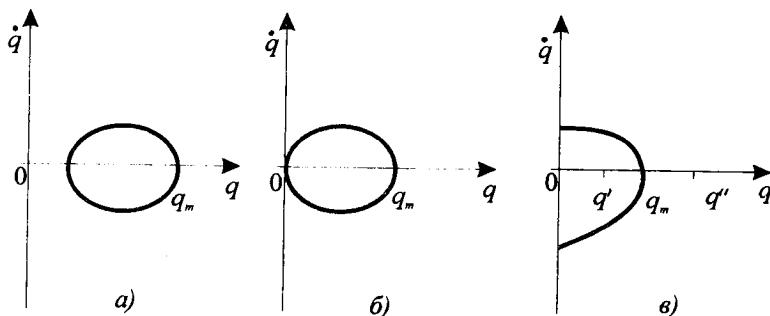


Рис. 9.8. Периодические траектории на полуплоскости

На вспомогательной фазовой плоскости единственность может нарушаться лишь в начале координат, поэтому периодическое движение

ние с ударами изображается замкнутой кривой без самопересечений. Ввиду отмеченной выше симметрии вспомогательных траекторий, эта кривая симметрична относительно начала координат. Следовательно, все удары происходят при одинаковых начальных скоростях сближения.

Отсюда следует, что траектория всякого периодического движения  $q^*(t)$  на фазовой полуплоскости пересекает ось абсцисс в одной или в двух точках. Одна из таких точек соответствует максимальному значению координаты:

$$q_m = \max_t \{q^*(t)\}.$$

В момент пересечения  $\dot{q} < 0$ , так как на периодической траектории нет особых точек, и траектория образует с осью прямой угол. То же самое можно сказать и о всех близлежащих траекториях. Следовательно, интервал оси абсцисс ( $q'$ ,  $q''$ ), содержащий точку  $(q_m, 0)$  и не содержащий особых точек системы (9.1), можно взять в качестве сечения  $\Sigma$  для построения отображения Пуанкаре.

*Функцией последования*  $\chi(q)$  называется отображение интервала  $(q', q'')$  в себя, ассоциированное с движением системы (9.1). Для определения значения этой функции достаточно провести через точку  $(q, 0)$  траекторию системы вплоть до ее следующего пересечения с осью  $\dot{q} = 0$ . Абсцисса точки пересечения и будет равна  $\chi(q)$ . Эта функция является, очевидно, отображением Пуанкаре  $\varphi_\Sigma$ .

Заметим, что функция последования обладает следующими двумя свойствами:

1) вследствие периодичности рассматриваемого движения  $\chi(q_m) = q_m$ ;

2) функция  $\chi(q)$  строго монотонно возрастает, так как траектории системы (9.1) не пересекаются.

Функция  $\chi(q)$  содержит информацию о структуре фазового портрета в окрестности данного периодического движения и, в частности, об орбитальной устойчивости этого движения, эквивалентной устойчивости неподвижной точки отображения  $\bar{q} = \chi(q)$ .

Допустим сначала, что для данного периодического движения координата  $q$  во все время остается положительной. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если  $\chi'(q_m) < 1$ , то данное периодическое движение асимптотически орбитально устойчиво, если же  $\chi'(q_m) > 1$  — неустойчиво (см. §Д.3).

2. Если  $\chi'(q_m) = 1$ , то вопрос об устойчивости решается из рассмотрения производных старших порядков от функции  $\chi$ . А именно, если

$$\chi''(q_m) = \chi'''(q_m) = \dots = \chi^{(l-1)}(q_m) = 0, \quad \chi^{(l)}(q_m) \neq 0 \quad (9.14)$$

то при четном  $l$  периодическое движение неустойчиво (в данном случае имеет место "полуустойчивость"), а при нечетном  $l$  неустойчиво

в случае  $\chi^{(l)}(q_m) > 0$  и асимптотически орбитально устойчиво при противоположном знаке этого неравенства [Андронов и др., 1967].

Заметим, что в случае 1 замкнутую траекторию называют простым предельным циклом, а в случае 2 — предельным циклом кратности  $l$ .

Величину  $\chi'(q_m)$ , играющую определяющую роль в вопросе устойчивости, называют *мультипликатором предельного цикла*; она вычисляется по формуле [Андронов и др., 1967]

$$\chi'(q_m) = \exp \oint_0^T \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) dt. \quad (9.15)$$

Формула (9.15) неприменима к периодическим движениям с ударами, которые требуют специального исследования. Заранее нельзя даже сказать, является ли для таких движений функция последования дифференцируемой.

Рассмотрим сначала движение с невырожденными ударами (рис. 9.10,в). Будем описывать его  $T$ -периодической функцией  $q = \Psi(t)$ , непрерывно дифференцируемой при всех  $t$ , за исключением моментов ударов  $t = t' + jT$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), в которые производная  $\dot{q} = \Psi'(t)$  терпит разрыв в соответствии с формулой (9.2). Функция последования является композицией трех отображений:

$$\chi(q) = \chi_3 \circ \chi_2 \circ \chi_1, \quad (9.16)$$

где  $\chi_1$  переводит интервал  $(q', q'')$ , содержащий точку  $q_m$ , вдоль фазовых траекторий в полуось  $q = 0, \dot{q} < 0$ ,  $\chi_2$  отображает эту полуось в верхнюю полуось  $q = 0, \dot{q} > 0$  по формулам (9.2), наконец,  $\chi_3$  отображает интервал верхней полусоси в исходный интервал  $(q', q'')$ .

В окрестности разрывной траектории  $\Gamma$  введем ортогональные координаты  $\phi, \eta$  по формулам

$$q = \Psi(\phi) + \eta\Psi''(\phi), \quad \dot{q} = \Psi'(\phi)(1 - \eta). \quad (9.17)$$

Замена (9.17) обратима при  $\phi \neq t' + jT$ , значению  $\eta = 0$  соответствует сама траектория  $\Gamma$  (при этом  $\phi = t$ ). В области, ограниченной кривой  $\Gamma$  и отрезком оси ординат, величина  $\eta$  положительна, а в остальной части фазовой полуплоскости — отрицательна. В [Андронов и др., 1967] доказано соотношение

$$\frac{d\eta(\phi)}{d\eta(0)} \Big|_{\eta(0)=0} = \frac{(\Psi'(0))^2 + (\Psi''(0))^2}{(\Psi'(\phi))^2 + (\Psi''(\phi))^2} \exp \int_0^\phi \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\Psi(t), \Psi'(t)) dt, \quad (9.18)$$

справедливое на участках непрерывности фазовой траектории.

Определим координаты точки пересечения возмущенной траектории с полуосью  $q = 0$ ,  $\dot{q} < 0$  из равенств (9.17):

$$\Psi(t' + \Delta\phi) + \eta\Psi''(t' + \Delta\phi) = 0, \quad \Psi'(t' + \Delta\phi)(1 - \eta) = \Psi'(t') + \Delta\dot{q}. \quad (9.19)$$

Учитывая, что  $\Psi'(t') \neq 0$  вследствие невырожденности ударов, получаем отсюда

$$\Delta\dot{q} = -\eta\{[\Psi'(t')]^2 + [\Psi''(t')]^2\}/\Psi'(t') + o(\eta). \quad (9.20)$$

Из формул (9.18) и (9.20) получим для производной функции  $\chi_1$ :

$$\frac{d\chi_1(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{[\Psi'(0)]^2 + [\Psi''(0)]^2}{\Psi'(t' - 0)} \exp \int_0^{t'} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\Psi(t), \Psi'(t)) dt. \quad (9.21)$$

При помощи аналогичных построений можно найти выражение для производной функции  $\chi_3$ :

$$\frac{d\chi_3(\dot{q}^+)}{d\dot{q}^+} \Big|_{\dot{q}^+ = \Psi'(t'+0)} = -\frac{\Psi'(t'+0)}{[\Psi'(T)]^2 + [\Psi''(T)]^2} \exp \int_{t'}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\Psi(t), \Psi'(t)) dt. \quad (9.22)$$

Наконец, согласно (9.2)

$$\dot{q}^+ = \dot{q}^- + I(\dot{q}^-), \quad \frac{d\chi_2(\dot{q}^-)}{d\dot{q}^-} \Big|_{\dot{q}^- = -V} = 1 + I'(-V). \quad (9.23)$$

Собирая формулы (9.21)–(9.23), получим окончательно при учете периодичности функции  $\Psi(t)$ :

$$\chi'(q_m) = \chi'_3\chi'_2\chi'_1 = (1 + I')(1 + I/\dot{q}^-) \exp \int_0^T \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\Psi(t), \Psi'(t)) dt. \quad (9.24)$$

Доказано следующее утверждение.

**Предложение 9.5.** Для периодического движения с невырожденными ударами функция последования дифференцируема в точке  $q_m$ , а ее производная вычисляется по формуле (9.24).

Заметим, что выражения (9.24) и (9.15) совпадают лишь в случае абсолютно упругого удара; для ньютоновского восстановления коэффициент перед экспонентой в формуле (9.24) равен  $e^2$ .

Перейдем теперь к анализу случая б) периодического движения с касаниями ограничителя. Так как начало координат не является положением равновесия, то  $F_0 > 0$ . Тип возмущенного движения зависит

от начальных условий: если начальная точка на оси  $q$  выбирается слева от  $q_m$ , то оно безударно. Следовательно, функция  $\chi(q)$  имеет левую производную, вычисляемую по формуле (9.15).

При выборе начальной точки справа от  $q_m$  возмущенное движение сопровождается ударами. При этом формула (9.18) остается в силе, но система (9.19) решается по-иному: так как  $\Psi(t') = \Psi'(t') = 0$ ,  $\Psi''(t') > 0$ , то из первого уравнения находим

$$\eta = -\frac{1}{2}(\Delta\phi)^2 + o(\Delta\phi)^2.$$

Отсюда после подстановки во второе уравнение получаем

$$\Delta\dot{q} = \Psi''(t')\Delta\phi + o(\Delta\phi) = -\Psi''(t')\sqrt{-2\eta(t')} + o(\sqrt{-\eta(t')}). \quad (9.25)$$

Формула (9.25) справедлива и непосредственно до удара, и сразу после него, поэтому при ударе координата  $\eta$  изменяется следующим образом

$$\eta^+ = \frac{(\Delta\dot{q}^+)^2}{(\Delta\dot{q}^-)^2}\eta^- + o(\eta^-) = [1 + I'(0)]^2\eta^- + o(\eta^-). \quad (9.26)$$

Из формул (9.21), (9.22) и (9.26) получим следующее выражение для производной справа:

$$\chi'(q_m + 0) = [1 + I'(0)]^2 \exp \int_0^T \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\Psi(t), \Psi'(t)) dt. \quad (9.27)$$

Заметим, что в пределе при  $V \rightarrow 0$  формула (9.24) переходит в (9.27). Можно сделать такой вывод.

**Предложение 9.6.** Для периодического движения с вырожденными ударами функция последования имеет производную слева, вычисляемую по формуле (9.15), и производную справа, имеющую вид (9.27).

Проведенное исследование позволяет теперь сформулировать основной результат об устойчивости периодических движений динамической системы на полуплоскости. Обозначим символом  $\mathcal{I}$  интеграл, стоящий в правой части формул (9.15), (9.24) или (9.27). Этот интеграл имеет одинаковую форму для движений разного типа.

**Предложение 9.7. 1)** Периодическое движение без ударов асимптотически орбитально устойчиво, если  $\mathcal{I} < 0$  и неустойчиво, если  $\mathcal{I} > 0$ .

**2)** Периодическое движение с касаниями асимптотически орбитально устойчиво, если  $\mathcal{I} < 0$ , неустойчиво, если  $\exp\{\mathcal{I}\} > [1 + I'(0)]^{-2}$  и полуустойчиво, если  $1 < \exp\{\mathcal{I}\} < [1 + I'(0)]^{-2}$ .

3) Периодическое движение, сопровождающееся ударами с начальной скоростью  $V > 0$ , асимптотически орбитально устойчиво, если

$$(1 + I')(1 + I/\dot{q}^-) \exp\{\mathcal{I}\} < 1,$$

и неустойчиво при противоположном знаке этого неравенства.

**Пример.** Рассмотрим линейный осциллятор

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + c(q - q^0) = 0, \quad c > b^2, \quad q \geq 0 \quad (9.28)$$

при  $q^0 \neq 0$ , считая коэффициент восстановления не зависящим от скорости сближения:  $I' \equiv -(1 + e)$ ,  $e \in (0, 1)$ .

В данной задаче  $F = -2b\dot{q} - c(q - q^0)$ , откуда  $\partial F / \partial \dot{q} = -2b$ , и величина  $\mathcal{I}$  имеет знак, противоположный  $b$ . Периодические движения возможны лишь если  $b < 0$  (отрицательное трение), так как при  $b \geq 0$  диссипация энергии при ударах ничем не скомпенсирована.

Решение с начальными условиями  $q(0) = 0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0 > 0$  в области  $q > 0$  задается формулой

$$\begin{aligned} q(t) &= q^0(1 - e^{-bt} \cos \delta t) + C_1 e^{-bt} \sin \delta t, \\ C_1 &= (\dot{q}_0 - bq^0)/\delta, \quad \delta^2 = c - b^2. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Величина  $T$  определяется условием  $q(T) = 0$ , а ордината точки пересечения траектории с полуосью  $\dot{q} < 0$  равна  $\dot{q}(T) = -V$ . Условие периодичности имеет вид

$$\dot{q}_0 = I - V. \quad (9.30)$$

Для определения корней данного уравнения относительно  $\dot{q}_0$  исследуем функцию  $\gamma(\dot{q}_0) = -\dot{q}_0/V$  при  $\dot{q}_0 > 0$ . Анализ формулы (9.29) показывает, что эта функция строго монотонна. Следовательно, уравнение (9.30) имеет в случае  $I' = \text{const}$  не более одного решения.

Необходимо различать два основных варианта.

1) при установке системы с зазором  $q^0 > 0$  начало координат является квазиседлом. Продолжительность  $T$  пребывания траектории (9.29) в области  $q > 0$  лежит в интервале от  $\pi/\delta$  до  $2\pi/\delta$  (данные значения соответствуют полуобороту и полному обороту спирали вокруг положения равновесия), причем она максимальна при  $\dot{q}_0 = 0$  и монотонно убывает к  $\pi/\delta$  при  $\dot{q}_0 \rightarrow \infty$ .

Функция  $\gamma(\dot{q}_0)$  монотонно возрастает. При  $\dot{q}_0 \rightarrow 0$  эта функция бесконечно мала, а при  $\dot{q}_0 \rightarrow +\infty$  величина  $T$  стремится к  $\pi/\delta$ , поэтому  $\gamma(+\infty) = \exp(\pi b/\delta)$ . Если  $e \geq \gamma(+\infty)$ , то уравнение (9.30) не имеет корней, в этом случае амплитуда колебаний осциллятора неограниченно возрастает (фазовый портрет на вспомогательной фазовой плоскости приведен на рис. 9.9,а). Если же  $e < \gamma(+\infty)$ , то система

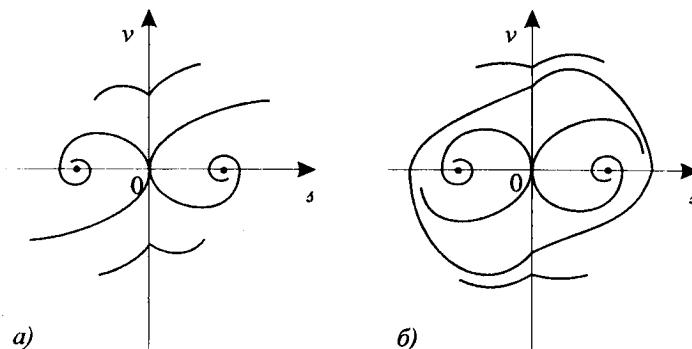


Рис. 9.9. Фазовый портрет линейного осциллятора с зазором

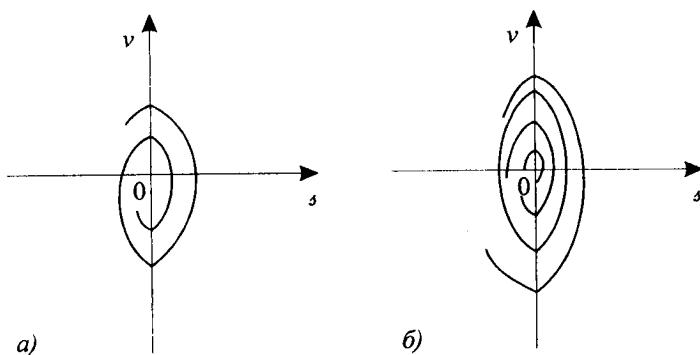


Рис. 9.10. Фазовый портрет линейного осциллятора с натягом

имеет единственное периодическое движение. Характер устойчивости определяется предложением 9.6: поскольку  $I = -2bT$ , то

$$e^2 \exp(I) = e^2 \exp(-2bT) < e^2 (\gamma(+\infty))^{-2} < 1. \quad (9.31)$$

Следовательно, периодическое движение орбитально асимптотически устойчиво. Фазовый портрет для данного случая представлен на рис. 9.9,б.

2) При установке системы с натягом  $q^0 < 0$  начало будет квазифокусом. Если  $\dot{q}_0 = 0$ , то система уравновешена, а в случае  $\dot{q}_0 > 0$  время нахождения траектории (9.29) в области  $q > 0$  возрастает от нуля до значения  $\pi/\delta$  (соответствующего полуобороту спирали).

Функция  $\gamma(\dot{q}_0)$  монотонно убывает от единицы до значения  $\gamma(+\infty) = \exp(\pi b/\delta)$ . Если  $e \leq \gamma(+\infty)$ , то периодических движений нет: начало координат притягивает все траектории (рис. 9.10, а). В случае  $e > \gamma(+\infty)$  уравнение (9.30) имеет один положительный корень. Соответствующее периодическое движение неустойчиво, так как

$$e^2 \exp(I) = e^2 \exp(-2bT) > e^2 (\gamma(+\infty))^{-2} > 1. \quad (9.32)$$

**Бифуркации предельных циклов.** Вновь обратимся к системе (9.8); исследуем эволюцию периодических движений при изменении параметра. Как отмечалось выше, таким движениям соответствуют неподвижные точки отображения последования

$$\bar{q} = \chi(q, \mu). \quad (9.33)$$

Предположим, что для значения  $\mu = \mu_0$  имеется неподвижная точка  $q = q_0$ . Если функция  $\chi(q, \mu)$  дифференцируема, то можно воспользоваться результатами, представленными в §Д.4. Поскольку величина  $\chi'_q$  необходимо неотрицательна, то гиперболичность нарушается лишь в случае  $\chi'_q = 1$ . При этом в зависимости от кратности  $l$  предельного цикла от него может ответвляться при  $\mu \neq \mu_0$  до  $l$  различных периодических движений [Андронов и др., 1967]. В общем невырожденном случае кратность равна двум, т.е. выполнены соотношения

$$\chi'_q = 1, \quad \chi''_{qq} \neq 0, \quad \chi'_{\mu} \neq 0, \quad (9.34)$$

где частные производные вычисляются при  $q = q_0, \mu = \mu_0$ .

Количество неподвижных точек отображения (9.33) при условиях (9.34) зависит от знака произведения  $(\mu - \mu_0)\chi'_{\mu}\chi''_{qq}$ . Если оно положительно, то вблизи  $q^0$  таких точек нет, при отрицательном знаке имеются две точки, одна из которых соответствует устойчивому периодическому движению, вторая — неустойчивому. Таким образом, при прохождении параметра  $\mu$  через критическое значение  $\mu_0$  в системе либо рождается пара предельных циклов, либо пара предельных циклов слиивается в один и исчезает.

Этот вывод остается справедливым как для безударных движений, так и при наличии невырожденных ударов (функция  $I$  в (9.2) считается дважды дифференцируемой). Отличие состоит лишь в формулах для расчета величины  $\chi''_{qq}$ . Для безударных движений соответствующие выкладки приведены в [Андронов и др., 1967]; хотя они и не сложны, но весьма громоздки. Обобщение на случай невырожденных ударов не составляет принципиальных трудностей.

Особый случай бифуркации связан с прохождением замкнутой орбиты через начало координат. Один из возможных сценариев показан на рис. 9.8: а) при  $\mu < \mu_0$  существует периодическое безударное движение, б) при  $\mu = \mu_0$  орбита проходит через начало координат, в) при  $\mu > \mu_0$  движение сопровождается ударами.

Согласно предложению 9.6, при  $\mu = \mu_0$  функция последования в точке  $q^0 = q_m$  имеет левую и правую производные, которые в общем случае  $|I'(0)| < 2$  связаны неравенством

$$\chi'_q(q_0 + 0) < \chi'_q(q_0 - 0). \quad (9.35)$$

Будем строить неподвижные точки отображения (9.33) графически. Для этого изобразим график функции  $\chi(q, \mu_0)$  и найдем его точки пересечения с биссектрисой первой четверти  $\chi = q$  (рис. 9.11). Имеется три основных возможности:

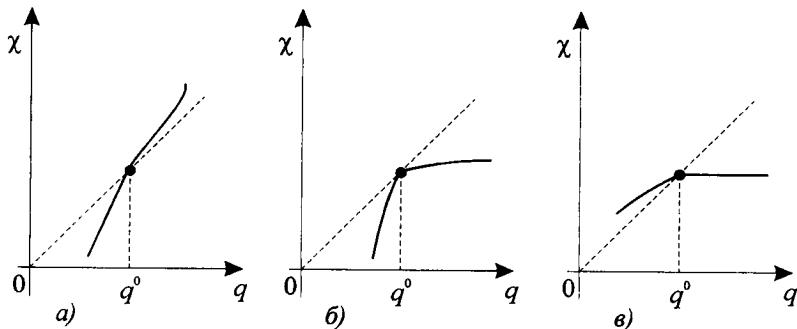


Рис. 9.11. Определение типа бифуркации касания

а)  $\chi'_q(q_0 + 0) > 1$ ; периодическая орбита неустойчива. При малом изменении параметра  $\mu$  график смещается и пересекает биссектрису либо в точке левее угловой, что соответствует неустойчивому безударному движению, либо в точке правее угловой, соответствующей неустойчивому движению с периодическими ударами.

б)  $\chi'_q(q_0 + 0) < 1$ ,  $\chi'_q(q_0 - 0) > 1$ ; периодическая орбита полуустойчива. При изменении параметра график либо вовсе не пересекает биссектрису, либо пересекает ее в двух точках, соответствующих устойчивому движению с ударами и неустойчивому безударному движению. Данный тип бифуркации аналогичен рассмотренному выше случаю двукратного цикла.

в)  $\chi'_q(q^0 - 0) < 1$ ; периодическая орбита устойчива. При изменении параметра мы получим либо устойчивое безударное движение, либо также устойчивое движение с ударами.

Таким образом, в случае б) бифуркация односторонняя, а в случаях а), в) — двусторонняя, причем она не связана с изменением устойчивости, а лишь с добавлением ударов.

Кроме перечисленных основных типов возможны также вырожденные случаи, когда одна из односторонних производных равна единице. При этом для  $\mu \neq \mu_0$  соответствующая ветвь графика может иметь более одной точки пересечения с биссектрисой.

Заметим, что в случае абсолютно упругого удара  $I'(0) = -2$ , и односторонние производные равны между собой. При этом остаются

лишь две возможности из трех: а) и в). К этому случаю относятся и вязкоупругие модели удара.

**Пример.** Рассмотрим систему

$$\ddot{q} + z[\dot{q}^2 + (q - 1)^2 - (1 + \mu)^2]\dot{q} + q - 1 = 0, \quad q \geq 0, \quad z = \pm 1. \quad (9.36)$$

При  $\mu \leq 0$  система обладает  $2\pi$ -периодическими движениями вида

$$q = 1 - (1 + \mu) \cos t, \quad \dot{q} = (1 + \mu) \sin t, \quad (9.37)$$

причем при  $\mu = 0$  орбита содержит начало координат. Вычисление величины  $\partial F / \partial \dot{q}$  в точках кривой (9.37) приводит к такому результату:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = -2z\dot{q}^2 = -2z(1+\mu)^2 \sin^2 t, \quad \chi'(-0) = \exp(-2\pi z(1 + \mu)^2). \quad (9.38)$$

Следовательно, три вышеперечисленных случая бифуркации касания реализуются при таких условиях:

- а)  $z = -1$ ,  $\ln[F(0)] > -2\pi(1 + \mu)^2$ ;
- б)  $z = -1$ ,  $\ln[F(0)] < -2\pi(1 + \mu)^2$ ;
- в)  $z = 1$ .

В частности, если  $F(0) = 1$ , то в зависимости от знака  $z$  имеют место случаи а) или в).

## 9.2. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА

**Предельные точки траекторий.** В своих работах [Poincaré, 1881, 1882, 1885, 1886] Пуанкаре дал достаточно полную картину поведения интегральных кривых динамических систем на плоскости; его исследования получили завершение в работе Бендиксона (1941). Броуэр провел [Brower, 1909, 1910] аналогичный анализ для случая, когда не выполняются условия единственности.

Основной результат теории Пуанкаре – Бендиксона касается характера множества предельных точек полутраектории

$$\omega(x^0) = \{(q(t), \dot{q}(t)) | t \geq 0\}, \quad x^0 = (q(0), p(0)),$$

лежащей в ограниченной части фазовой плоскости. Именно, существует ровно три возможных типа множества  $\omega(x^0)$ :

- 1) состояние равновесия;
- 2) замкнутая траектория;
- 3) конечное число особых точек и траекторий, стремящихся к ним как при  $t \rightarrow +\infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ .

Доказательство данного утверждения основывается лишь на свойствах существования и единственности траектории, проходящей через данную точку. Это позволяет обобщить его на случай динамической

системы на полуплоскости (9.1), (9.2). Для этого достаточно перейти к вспомогательной непрерывной системе на фазовой плоскости (см. гл. 6).

Возможно два случая в зависимости от значения  $F_0 = F(0, 0)$ . В первом из них  $F_0 \leq 0$  начало координат является положением равновесия. При этом вспомогательная система обладает свойствами существования и правой единственности траекторий, а левая единственность нарушается лишь в начале координат, что связано с попаданием всех близлежащих траекторий в квазифокус за конечное время. Поэтому можно непосредственно применить теорию Пуанкаре – Бендиксона.

Во втором случае  $F_0 > 0$  начало координат будет квазиседлом — точкой нарушения единственности для вспомогательной системы на плоскости. В этой точке траектория раздваивается: одна ветвь идет в первую четверть, а другая — в третью. При этом вспомогательные траектории обладают свойством симметрии. Следовательно, достаточно найти множество  $\omega(0)$  для одной из ветвей, а затем отобразить его в исходных переменных. Если траектория вторично попадает в начало координат, то она периодична и совпадает с множеством своих предельных точек. Иначе нарушение единственности не оказывается на характере предельных точек данной полутраектории, также как и других полутраекторий, не проходящих через начало координат.

Возвращаясь к исходной системе, приходим к следующему утверждению.

**Предложение 9.8.** Для динамической системы (9.1), (9.2) на полуплоскости множество  $\omega(x^0)$  относится к одному из следующих типов (рис. 9.12):

- состояние равновесия;
- замкнутая траектория;
- незамкнутая траектория, концы которой лежат на оси  $q = 0$ , причем ординаты связаны соотношением (9.2);
- конечному числу особых точек и траекторий, стремящихся к ним при  $t \rightarrow +\infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$ , являющихся непрерывными или имеющими разрыв на оси  $q = 0$  в соответствии с уравнениями (9.2) (число разрывных траекторий не превосходит единицы).

**Индекс кривой на полуплоскости.** Понятие индекса было введено Пуанкаре для качественного анализа векторного поля  $\vec{a}(x, y)$  на плоскости. Если  $\Gamma : \{x(t), y(t) | t \in (t_1, t_2)\}$  — простая замкнутая кривая, ориентированная против часовой стрелки, то ее **индексом** называют число вращений вектора  $\vec{a}(x(t), y(t))$  при изменении параметра от  $t_1$  до  $t_2$  (векторное поле предполагается непрерывным и невырожденным на кривой  $\Gamma$ ). **Индекс особой точки** векторного поля — это индекс всякой замкнутой кривой, внутри которой лежит эта точка и нет других особых точек.

Докажем простую формулу для вычисления индекса для векторного поля  $\vec{a} = (y, F(x, y))$ , соответствующего системе на плоскости

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}) \quad (9.39)$$

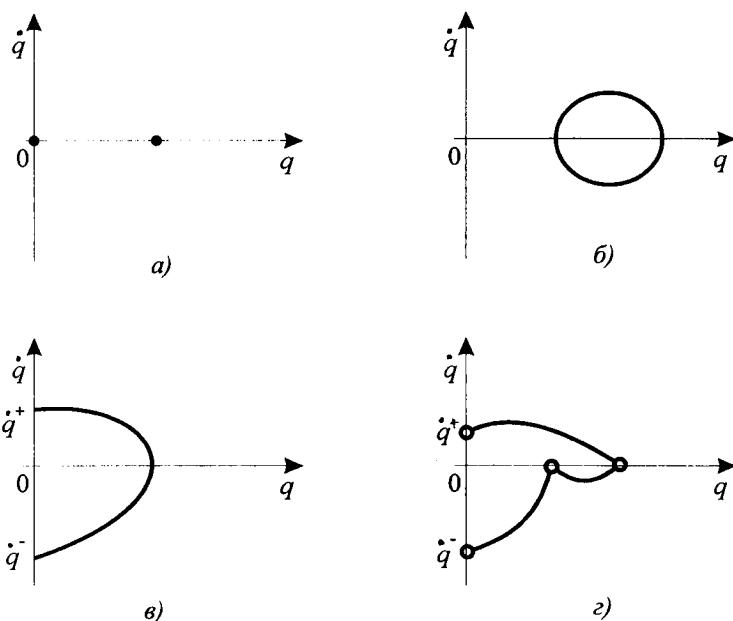


Рис. 9.12. Типы предельных множеств

при обозначениях  $x = q$ ,  $y = \dot{q}$ . Данное поле обладает очевидным свойством: в верхней полуплоскости его первая координата положительна, а в нижней — отрицательна. Следовательно, число его вращений однозначно определяется знаками функции  $F$  в точках пересечения рассматриваемой кривой с осью абсцисс. Если таких точек нет, индекс кривой равен нулю.

Рассмотрим дугу кривой, соединяющую две произвольные точки оси  $y = 0$  и не пересекающую эту ось; пусть  $x_1, x_2$  — абсциссы этих точек. Обозначим  $F^{(1)}, F^{(2)}$  — значения функции в точках  $M_1(x_1, 0)$  и  $M_2(x_2, 0)$  (рис. 9.13). Докажем следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма.** При движении точки вдоль дуги  $M_1 M_2$  векторное поле  $\vec{a}$  совершает в положительном направлении  $Z(M_1 M_2)$  полуоборотов, где

$$Z(M_1 M_2) = \frac{1}{2}(\operatorname{sign} F^{(2)} - \operatorname{sign} F^{(1)})\operatorname{sign}(x_2 - x_1)\Pi(M_1 M_2). \quad (9.40)$$

В данной формуле величина  $\Pi(M_1 M_2)$  равна единице, если дуга  $M_1 M_2$  лежит в верхней полуплоскости и минус единице в противоположном случае.

**Доказательство.** В справедливости формулы (9.40) можно убедиться на основе простого перебора всех возможных случаев. Если

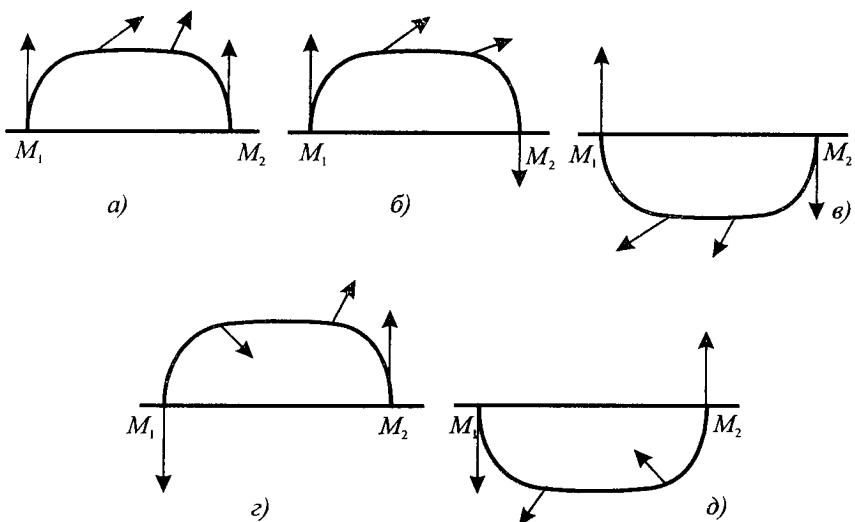


Рис. 9.13. Определение числа вращений

знаки  $F^{(1)}$  и  $F^{(2)}$  совпадают, то число вращений равно нулю (рис. 9.13, а). Если  $F^{(1)} < 0$ ,  $F^{(2)} > 0$ , то при расположении дуги  $M_1M_2$  в верхней полуплоскости число полуоборотов равно минус единице (б), в нижней полуплоскости — плюс единице (в). Аналогично разбираются случаи противоположных знаков (г, д), а также  $x_2 < x_1$ .

Сформулируем теперь правило расчета индекса для замкнутой кривой, пересекающей ось  $y = 0$  при движении в положительном направлении последовательно в точках с абсциссами  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_1$ . Каждая из этих точек, которые мы будем обозначать  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , соединена с предыдущей и последующей дугами, расположенными по-очередно в нижней и в верхней полуплоскостях. Если  $M_1$  имеет минимальную абсциссу, то дуга  $M_1M_2$  лежит в нижней полуплоскости,  $M_2M_3$  — в верхней, и т.д. Последняя из дуг  $M_nM_1$  лежит в верхней полуплоскости (для замкнутой кривой количество точек пересечений с осью, очевидно, четно). В итоге приходим к такому утверждению:

**Предложение 9.9.** Индекс кривой  $\Gamma$  вычисляется по формуле

$$I(\Gamma) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (-1)^i (\text{sign } F^{(i+1)} - \text{sign } F^{(i)}) \text{sign } (x_{i+1} - x_i). \quad (9.41)$$

**Замечание.** Выражение (9.41) можно получить непосредственно из определения индекса, данного Пуанкаре (1947), если в качестве базовой прямой выбрать ось ординат.

**Следствия.** 1. Если кривая имеет две точки пересечения с осью абсцисс, то ее индекс имеет вид

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2}(\operatorname{sign} F^{(1)} - \operatorname{sign} F^{(2)}). \quad (9.42)$$

2. Для простого узла или фокуса индекс равен единице, а для седла — минус единице.

3. Для замкнутой траектории индекс равен единице.

4. Если внутри кривой  $\Gamma$  имеется конечное число особых точек  $O_1, O_2, \dots, O_m$ , то

$$I(\Gamma) = \sum_{i=1}^m I(O_i). \quad (9.43)$$

Попытаемся обобщить определение индекса на случай динамической системы (9.1) на полуплоскости с сохранением основных свойств 3, 4 для разрывных траекторий.

**Определение.** Пусть начальная и конечная точки кривой  $\Gamma$  лежат на оси  $q = 0$ :  $q(t_1) = q(t_2) = 0$ , причем значения  $\dot{q}^- = \dot{q}(t_1)$  и  $\dot{q}^+ = \dot{q}(t_2)$  связаны законом отражения (9.2). Индексом разрывной кривой  $\Gamma$  назовем величину

$$I(\Gamma) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (-1)^i (\operatorname{sign} F^{(i+1)} - \operatorname{sign} F^{(i)}) \operatorname{sign} (x_{i+1} - x_i), \quad (9.44)$$

где  $x_2, x_3, \dots, x_n$  — точки пересечения кривой с осью абсцисс,  $x_1 = 0, F^{(1)} = 1$ .

В частности, если кривая имеет единственную точку пересечения с осью абсцисс  $(x_2, 0)$ , то

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sign} F^{(2)}). \quad (9.45)$$

Аналогия между формулами (9.44), (9.45) и (9.41), (9.42) станет понятной, если замкнуть кривую  $\Gamma$  отрезком оси ординат, соответствующим ударному отображению (9.2). Так как ударная реакция положительна, естественно считать, что  $F^{(1)} > 0$ .

Установим свойства индекса разрывных кривых.

1) индекс квазифокуса равен единице, квазиседла — минус единице;

2) для разрывной периодической траектории индекс равен единице, так как она имеет единственную точку пересечения с осью абсцисс;

3) если внутри разрывной кривой  $\Gamma$  (замкнутой отрезком оси ординат) имеется лишь конечное число особых точек  $O_1, O_2, \dots, O_m$  (включая начало координат), то выполняется соотношение (9.43).

Справедливость последнего утверждения легко проверить, учитывая, что все особые точки лежат на оси абсцисс, причем направление

векторного поля  $\mathbf{a}$  в точках этой оси может меняться лишь в особых точках.

**Признаки существования предельных циклов.** В [Андронов и др., 1967] приведен ряд признаков существования или отсутствия предельных циклов в некоторой области  $G$  для динамической системы на плоскости. Часть этих результатов можно использовать и для анализа системы (9.1) на полу平面. С учетом свойств индекса для разрывной периодической траектории справедливо следующее утверждение.

**Предложение 9.9.** Пусть в замкнутой односвязной области  $G$  на полу平面  $q \geq 0$  выполнено одно из следующих условий:

1) Нет состояний равновесия (если область включает начало координат, то оно является квазиседлом);

2) Имеется конечное число состояний равновесия, но из их индексов нельзя сложить единицу (т.е. все они — седлового типа);

3) Имеется конечное число состояний равновесия, причем для каждого из них, имеющего индекс плюс единица, существует стремящаяся к нему траектория, другим концом уходящая в бесконечность или имеющая точки вне  $G$ ;

Тогда в области  $G$  нет замкнутых траекторий, а также разрывных периодических траекторий.

Еще одно условие отсутствия предельных циклов для системы на плоскости известно как критерий Бендиクсона. Для системы на полу平面 оно выглядит следующим образом.

**Предложение 9.10.** Пусть во всех точках области  $G$  величина  $df/d\dot{q}$  отрицательна. Тогда в этой области нет замкнутых траекторий, а также разрывных периодических траекторий.

Справедливость данного утверждения следует из предложения 9.9.

Важную роль для отыскания периодических движений с ударами играет следующее предложение, также обобщающее известный критерий для гладкой динамической системы [Андронов и др., 1967].

**Предложение 9.11.** Пусть область  $\bar{G}$  ограничена отрезками  $[\dot{q}_1^-, \dot{q}_2^-]$  и  $[\dot{q}_1^+, \dot{q}_2^+]$  оси ординат и непересекающимися простыми кривыми  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ , соединяющими точки  $\dot{q}_1^-$  с  $\dot{q}_1^+$  и  $\dot{q}_2^-$  с  $\dot{q}_2^+$  (рис. 9.14). Если внутри этой области нет особых точек системы (9.1), а векторное поле в точках кривых  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  направлено внутрь  $G$ , то в ней имеется орбитально устойчивая периодическая разрывная траектория. При наличии конечного числа неустойчивых траекторий такого типа число устойчивых траекторий превышает их на единицу.

**Доказательство** нетрудно провести, основываясь на построении функций последования на дуге  $[\dot{q}_1^+, \dot{q}_2^+]$ .

**Структурная устойчивость.** Под структурной устойчивостью или грубостью, динамической системы понимают свойство ее фазового портрета сохранять свои основные черты при возмущении правых частей уравнений движения. Определение структурной устойчивости было дано в [Андронов, Понтрягин, 1937] для компактной области  $G$ ,

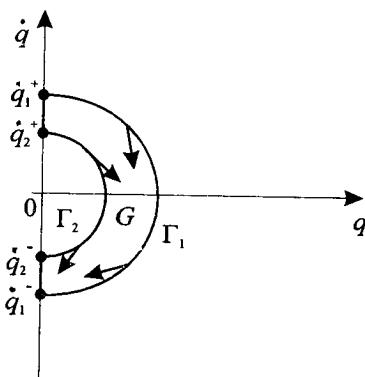


Рис. 9.14. Область существования разрывного периодического движения

граница которой ни в одной из своих точек не касается данного векторного поля. Некоторые обобщения этого определения рассматривались в [Peixoto, 1959, a, b, Андронов и др., 1967].

Аналогичное понятие можно ввести и для системы (9.1) на полуплоскости.

Будем считать, что область  $G \subset \mathbb{R}^2 \cap \{q \geq 0\}$  замкнута и ограничена замкнутой гладкой кривой  $\Gamma$ , либо незамкнутой кривой и отрезком  $[\dot{q}^-, \dot{q}^+]$  оси ординат, где граничные значения согласованы равенством (9.2). При этом  $\Gamma$  ни в одной из своих точек не касается фазовых кривых системы (9.1).

**Определение.** Система (9.1) называется *структурно устойчивой* в области  $G$ , если существует такое положительное число  $\delta$ , что для всякой функции  $g(q, \dot{q})$ , для которой в области  $G$  выполнены неравенства

$$|F^* - F| < \delta, \quad |\partial F^*/\partial q - \partial F/\partial q| < \delta, \quad |\partial F^*/\partial \dot{q} - \partial F/\partial \dot{q}| < \delta \quad (9.46)$$

существует обратимое непрерывное преобразование  $G$  в себя, при котором траектории исходной системы переходят в траектории возмущенной системы

$$\ddot{q} = F^*(q, \dot{q}). \quad (9.47)$$

Для структурной устойчивости системы с непрерывными траекториями необходимо и достаточно выполнение таких условий [Peixoto, 1959, a, b]:

- 1) В области  $G$  имеется лишь конечное число состояний равновесия системы, причем все они являются простыми узлами, седлами или фокусами.
- 2) В области  $G$  имеется лишь конечное число периодических орбит, причем каждая из них — простой предельный цикл.

3) В области  $G$  нет сепаратрис, идущих из седла в седло.

Из этих условий и теории Пуанкаре – Бендиксона следует, что в структурно устойчивой системе предельными траекториями могут быть только состояния равновесия и предельные циклы.

Для системы (9.1), траектории которой могут быть разрывными, дополнительные ограничения на устойчивый фазовый портрет связанны с требованиями к разрывным траекториям. В дополнение к 1) – 3) получаем такие условия:

4) Если начало координат принадлежит области  $G$ , то  $F(0, 0) \neq 0$

5) В области  $G$  существует лишь конечное число разрывных периодических траекторий, все они — простые предельные циклы.

6) В области  $G$  не существует разрывных сепаратрис, идущих из седла в седло.

Доказательство необходимости и достаточности свойств 1) – 6) для структурной устойчивости можно дать по аналогии с гладким случаем.

### 9.3. СИСТЕМА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

В предыдущем параграфе рассмотрен простейший тип систем с ударами, характеризующийся отсутствием явной зависимости правых частей уравнений движения от времени. Показано, что такие системы в основных чертах устроены аналогично динамическим системам на плоскости, и их качественные свойства поддаются весьма полному анализу.

Заметим, что даже незначительное, на первый взгляд, усложнение задачи может привести к появлению принципиально новых свойств движения. В частности, в [Неймарк, Ланда, 1987] рассмотрена одностепенная модель часов, представляющая собой автономную систему с одной степенью свободы, отрицательным трением и ударами с разрывной (кусочно-постоянной) характеристикой  $I(V)$  и показана возможность хаотических движений, не существующих в гладкой системе на плоскости.

В данном параграфе обсуждаются вынужденные колебания систем с одной степенью свободы и ударами об ограничитель. Теория таких систем получила активное развитие начиная с середины 20-го века в связи с решением ряда практических задач с виброударными элементами. К их числу относятся известные задачи о вертикальном движении частицы на вибрирующем основании [Бабицкий, 1978, Кобринский, Кобринский, 1973, 1981, Holmes, 1982 и др.] и о линейном осцилляторе, соударяющемся с неподвижным ограничителем [Русаков, Харкевич, 1942, Senator, 1970 и др.].

Для реализации периодических движений в системе с неупругими ударами необходим внешний источник энергии. Обычно она передается в колебательной форме, так что в уравнениях движения появляются члены, периодически зависящие от времени. Динамика таких

систем имеет ряд особенностей по сравнению с автономным случаем: поскольку состояние системы не определяется однозначно фазовыми переменными, то на фазовой плоскости траектории могут пересекаться. Это приводит к существенному усложнению динамики, причем неавтономным системам с одной степенью свободы присущи и некоторые свойства многомерных систем.

**Особые точки и их характер.** В данном параграфе мы будем изучать системы вида

$$\ddot{q} = F(t, q, \dot{q}), \quad q \geq 0 \quad (9.48)$$

с ударными взаимодействиями (9.2). Здесь функция  $F$   $2\pi$ -периодична по переменной  $t$  и непрерывно дифференцируема. Происхождение зависимости от  $t$  в системе с одной ударной парой двояко: либо к ударнику приложена периодическая нагрузка, либо ограничитель совершают периодические колебания.

**Примеры.** 1. Изменение высоты частицы над горизонтальной платформой, совершающей гармонические колебания, описывается уравнением

$$\ddot{z} = A \sin \omega t - g, \quad (9.49)$$

где  $A$ ,  $\omega$  — амплитуда и круговая частота колебаний.

Принимая за новую переменную фазу колебаний  $t' = \omega t$  и полагая  $q = z\omega^2$ , преобразуем уравнение (9.49) к форме, аналогичной (9.48):

$$q'' = d^2q/dt'^2 = J \sin t' - 1, \quad J = A\omega^2/g. \quad (9.50)$$

Величина  $J$  в формуле (9.50) называется интенсивностью возбуждения колебаний. В данном примере ударник движется по инерции, а ограничитель совершает заданное движение.

2.. Вынужденные колебания осциллятора с ударами о неподвижный ограничитель под действием  $2\pi$ -периодической силы  $P(t)$  описываются уравнением

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + cq = P(t), \quad q \geq 0. \quad (9.51)$$

В этом примере нагрузка прилагается к ударнику.

Система (9.48) имеет положение равновесия в точке  $(q^*, 0)$ ,  $q^* > 0$ , если  $f(t, q^*, 0) \equiv 0$  при всех  $t \in [0, 2\pi]$ . Для определения характера такой особой точки часто бывает достаточно рассмотрения уравнений в вариациях: если мультипликаторы  $\rho_{1,2}$  по модулю меньше единице, то вне зависимости от нелинейных членов особая точка асимптотически устойчива, а если хотя бы один из них имеет модуль больше единицы, то неустойчива(см. Д.3).

Специфической для системы с односторонней связью является особенность в начале координат. Ее тип определяется в первую очередь

знаком функции  $F_0(t) = F(t, 0, 0)$ . По аналогии с автономным случаем, справедливо следующее утверждение.

**Предложение 9.12.** 1) Если удары системы о связь не вполне упруги и

$$\max_t F(t, 0, 0) < 0, \quad (9.52)$$

то все точки из некоторой окрестности начала координат  $U^o$  попадают в начало за конечное время, и система уравновешивается.

2) Если

$$\min_t F(t, 0, 0) > 0, \quad (9.53)$$

то все точки из некоторой окрестности  $U^o$  покидают эту окрестность за конечное время.

**Замечание.** В случае, когда функция  $F_0(t)$  знакопеременна, начало координат системы (9.48) проявляет свойства обоих основных типов при различном выборе начального момента  $t^o$ : если  $F_0(t^o, 0, 0) < 0$ , то некоторая окрестность  $U^o$  стягивается в начало координат за конечное время, затем при изменении знака величины  $F_0$  равновесие нарушается, и изображающая точка уходит из начала координат. Дальнейшее поведение траектории зависит от вида всей функции  $F(t, q, \dot{q})$ , а не только ее главной части  $F_0(t)$ .

**Пример.** В системе (9.50)  $F_0 \equiv F$ . Начало координат является квазифокусом при условии  $I < 1$ . При этом формула (9.6) показывает, что диаметр области притяжения  $U^o$  стремится к нулю вместе с  $k$ , т.е. в случае упругого удара она исчезает. Если  $I > 1$ , то частица неминуемо покидает опорную плоскость. В дальнейшем ее траектория зависит от коэффициента восстановления  $e$ . Как показано в [Горбиков-Неймарк, 1981, а], траектория вечно остается в некоторой окрестности начала координат. При этом она может содержать участки скольжения или не содержать их.

**Устойчивость периодических движений.** В отличие от изученного в §9.1 автономного случая, периодические движения системы (9.48) могут включать в себя  $K > 1$  ударов за период  $T = 2\pi N$ . Для исследования устойчивости по первому приближению можно использовать алгоритмы, описанные в §7.2. Фундаментальная матрица решений уравнений в вариациях описывается формулами (7.49), (7.50), (7.54), а вывод об устойчивости делается на основе предложения 7.7. Непосредственная проверка выполнения условий этого предложения возможна лишь после интегрирования уравнений в вариациях, и представляет интерес получение легкопроверяемых условий, хотя бы отдельно необходимых или достаточных. Докажем одно такое утверждение.

**Предложение 9.13.** Пусть движение  $q = q_0(t)$  с  $K$  ударами за

период  $T$  асимптотически устойчиво. Тогда выполнено неравенство

$$\exp \left\{ \int_0^T \frac{\partial F}{\partial q}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) dt \right\} \prod_{j=1}^K (1 + I'_j) \left( 1 + \frac{I_j}{\dot{q}_j^-} \right) \leq 1, \quad (9.54)$$

$$I_j = I(\dot{q}_j^-), \quad \dot{q}_j^- = \dot{q}_0(t'_j - 0).$$

В частности, в случае постоянного коэффициента восстановления произведение в формуле (9.54) равно  $e^{2K}$ .

**Доказательство.** Определитель фундаментальной матрицы решений линейной системы дифференциальных уравнений с матрицей  $\mathbf{A}(t)$  описывается формулой Лиувилля [Якубович, Старжинский, 1972]

$$\det \mathbf{X}(t) = \det \mathbf{X}(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{Tr } \mathbf{A}(t) dt. \quad (9.55)$$

В случае уравнений в вариациях для системы (9.48)  $\text{Tr } \mathbf{A} = \partial F / \partial \dot{q}$ . В промежутках между ударами можно пользоваться формулой (9.55), а при ударах вследствие предложения 7.6 и формулы (7.50) определитель меняется скачком. Величина в левой части неравенства (9.54) равна детерминанту определяющей матрицы  $\mathbf{Z}$ . С другой стороны, по формулам Виета этот определитель равен произведению корней характеристического уравнения. При учете предложения 7.7 получаем доказываемое неравенство.

**Замечание.** В случае  $K = 1$  левая часть неравенства (9.54) совпадает по форме с выражением (9.24) для мультипликатора предельного цикла автономной системы. При этом строгое неравенство достаточно для асимптотической устойчивости.

**Бифуркации периодических движений.** Допустим, что правая часть в системе (9.48) зависит от параметра  $\mu$  и при  $\mu = 0$  имеется решение  $q_0(t)$  периода  $T = 2\pi N$ . Для исследования эволюции этого решения при малых изменениях  $\mu$  воспользуемся общими результатами, изложенными в главе 7 и Дополнении.

Для системы с периодической зависимостью от времени удобно рассматривать  $T$  — периодические движения как неподвижные точки стробоскопического отображения Пуанкаре фазовой плоскости в себя:  $\varphi_T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Дифференциалом этого отображения в особой точке является матрица монодромии, вычисленная для соответствующего периодического решения. Если собственные значения этой матрицы  $\rho_{1,2}$  не лежат на единичной окружности, то неподвижная точка непрерывно зависит от параметра  $\mu$ . Необходимым условием бифуркации является выполнение хотя бы одного из равенств  $|\rho_j| = 1$  ( $j = 1, 2$ ).

В плоскости коэффициентов  $a_1, a_2$  бифуркациям соответствуют точки границы треугольника

$$|a_1| < 1 + a_2 < 2, \quad (9.56)$$

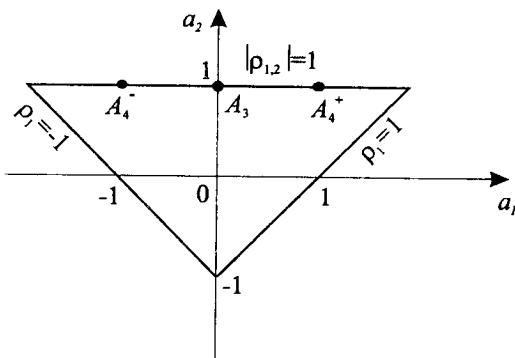


Рис. 9.15. Треугольник устойчивости

внутренность которого представляет собой область асимптотической устойчивости (рис. 9.15). В точках правой границы  $\rho_1 = 1$ , на левой границе  $\rho_1 = -1$ , на верхней  $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$ .

Основным типам бифуркации  $1^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$ , (см. §Д.4), соответствует выход изображающей точки из треугольника через одну из его сторон вне вершин, отвечающих кратным резонансам, а также точек  $A_3(a_1 = 0, a_2 = 1)$  и  $A_4^\pm(a_1 = \pm 1, a_2 = 1)$ , соответствующих бифуркации Неймарка – Саккера при наличии дополнительных резонансов третьего и четвертого порядков. Для определения характера бифуркации необходимо вычислить, помимо коэффициентов  $a_{1,2}$ , нелинейные члены отображения  $\varphi_T$ .

Бифуркация, связанная с касанием ограничителя  $q = 0$ , обсуждалась в §7.3. Заметим, что в отличие от автономного случая, устойчивое движение данного периода при переходе параметра  $\mu$  через критическое значения как правило не сохраняется (см. предложение 7.9).

Для движений, включающих участки скольжения,  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ , т.е. они всегда относятся к гиперболическому типу.

**Численный анализ фазового портрета.** По сравнению с автономным случаем, рассмотренным в параграфе 9.1, системы с периодической зависимостью от времени отличает существенно большая сложность и разнообразие динамики. Причина кроется в различии размерностей фазового портрета: для автономной системы через каждую точку фазовой плоскости проходит единственная орбита, а для неавтономной — целое семейство траекторий, отличающихся сдвигом времени. Разумеется, полное отображение трехмерной картины на экране монитора или на листе бумаги невозможно, и обычно рассматривают некоторые его узловые фрагменты или сечения.

Наиболее естественно использовать в *гладких* динамических системах стробоскопическое сечение  $t = 0 \pmod{2\pi}$ : при этом периоди-

ческим движениям соответствуют неподвижные точки отображения Пуанкаре, субпериодическим движениям — кратные точки, квазипериодическим — замкнутые инвариантные кривые. Как правило, лишь некоторые из этих регулярных движений удается построить аналитически, а основные выводы основываются на численных расчетах.

Согласно теореме Пуанкаре — Бендиксона множество предельных точек для автономной системы устроено достаточно просто (см. §9.2). В системах с периодической зависимостью от времени имеется принципиально новая возможность, когда предельные точки образуют множества весьма причудливой формы, обладающие дробной топологической размерностью [Лихтенберг, Либерман, 1984]. Каждая траектория, начинающаяся на таком множестве, всюду плотна на нем, причем близкие траектории расходятся с экспоненциальной скоростью (один из показателей Ляпунова положителен, другой — отрицателен). На секущей плоскости такой "странный" аттрактор образует некоторую фигуру неправильной формы, обладающую ненулевой лебеговой мерой. Для ее приближенного построения достаточно взять начальную точку вблизи аттрактора, а затем найти достаточно большое число точек ее пересечения с секущей плоскостью.

Особенность системы (9.48) с односторонней связью состоит в разрывном характере ее траекторий при ударах. Ввиду этого стандартные методы исследования нуждаются в адаптации. Переход к отображению при помощи сечения  $q = 0$  позволяет получить ряд результатов в системах с гарантированным возвратом траекторий на связь [Holmes, 1982, Горбиков, Неймарк, 1981, а, Горбиков, 1990, Whiston, 1992], но в общем случае он обладает очевидными недостатками. Во-первых, сечение  $q = 0$  может не иметь глобального характера: наряду с траекториями, возвращающимися на эту плоскость, существуют и движения, для которых связь во все время ослаблена. Во-вторых, отображение на уровне ограничителя может быть разрывным, что связано с касаниями элементов ударной пары [Иванов, 1992, б]. В-третьих, при численном построении траекторий для малых  $q > 0$  необходимо усложнять алгоритмы для определения момента выхода на связь [Östermeier, 1988].

Более привлекательным выглядит использования стробоскопического сечения, так как при этом устраняется первый из перечисленных выше недостатков. Тем не менее, остальные два замечания остаются в силе: в данном случае отображение Пуанкаре разрывно в тех случаях, когда  $q(2\pi) = 0$ ,  $\dot{q}(2\pi) < 0$ , т.е. образ лежит на поверхности удара.

Для исправления указанных нежелательных свойств можно использовать метод непрерывного представления (см. §6.4). В результате оказывается возможным использование стандартных алгоритмов и комплексов программ (например, [Nusse, Yorke, 1994]).

**Частица на выбирирующем основании.** Одной из наиболее известных виброударных систем с периодическим возбуждением является однородный шар, движущийся поступательно вдоль вертикали

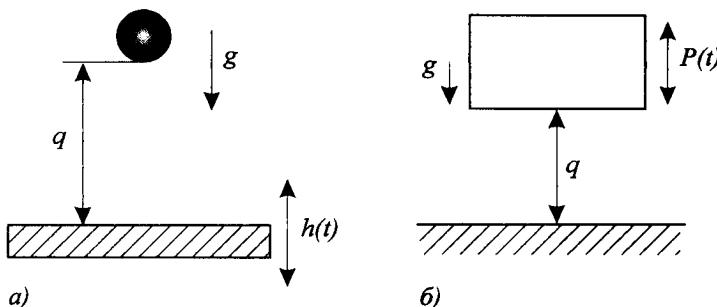


Рис. 9.16. Шарик на вибрирующей платформе и ыибромолот

над горизонтальной платформой, высота которой периодически изменяется по заданному закону, например, гармоническому (рис. 9.16, а). В простейшей постановке влияние ударов на движение платформы и сопротивления среды на движение шарика считают пренебрежимо малыми, а коэффициент восстановления при ударах постоянным. Исследования данной задачи ведутся с начала 40-х годов 20 века и насчитывают десятки работ (см. [Кобринский, Кобринский, 1973, 1981, Блехман, Джанелидзе, 1964, Нагаев, 1978] и имеющуюся в этих монографиях библиографию, [Быховский и др., 1964, Holmes, 1982, Bapat и др., 1986, Горбиков, Неймарк, 1981, a, Isomaki и др., 1985, Pieranski, Malecki, 1986, Tufillaro, Albano, 1986, Mello, Tufillaro, 1987, Wiesenfeld, Tufillaro, 1987]. В [Senator, 1970] учитывалось вязкое сопротивление среды, а в [Ахметов, Перестюк, 1992] методом Пуанкаре построены периодические решения при наличии малого сопротивления среды и возмущений платформы. Более реалистичная и сложная модель рассматривалась в [Субач, 1969, 1970], где учитывалось влияние ударов на движение платформы. В [Brach, 1991] платформа предполагалась шероховатой, а ее колебания — круговыми.

Другое направление развития обсуждаемой модели связано с заменой однородного шара на произвольное твердое тело. Исследованию данной задачи посвящены работы [Маркеев, 1984, 1985, Маркеев, Холостова, 1985, Иванов, 1985, б, Ivanov, 1994, a], в которых получен ряд результатов по устойчивости периодических движений и их бифуркациям.

Неослабевающий интерес ученых к динамике частицы на вибрирующем основании можно объяснить двумя обстоятельствами. Во-первых, данная система может служить базовой моделью различных технических процессов и физических явлений: вибротранспортировка [Блехман, Джанелидзе, 1964], вибротрамбовка [Быховский и др., 1964], ускорение Ферми космических лучей [Заславский, 1970], [Пустыльников, 1968, 1987, 1995] и др. Она достаточно проста и ее можно исследовать экспериментально в лабораторных условиях. В [Tufillaro, Albano,

1986] описана простейшая установка для проведения студенческих лабораторных работ, аналогичная схема с использованием компьютера использовалась в [Kowalik et al., 1988].

Во-вторых, в зависимости от параметров задачи и вида функции  $h(t)$ , описывающей движение основания, система проявляет различные качественные свойства. Новые результаты дополняют общую картину, но в то же время показывают богатство возможностей и неисчерпаемость проблемы.

Остановимся на некоторых аспектах обсуждаемой задачи.

1. *Периодические движения типа (N, 1).* Изменение координаты  $q$ , равной расстоянию от шара до платформы, во время перелетов описывается уравнением (см. (7.56))

$$\ddot{q} = -g - \ddot{h}(t), \quad q \geq 0. \quad (9.57)$$

Не ограничивая общности, будем считать период функции  $h(t)$  равным  $2\pi$ . Решение уравнения (9.57) имеет вид

$$q(t) = q(t') + (t - t')(\dot{q}(t' + 0) + \dot{h}(t')) - \frac{1}{2}g(t - t')^2 - h(t) + h(t'). \quad (9.58)$$

Будем искать периодические движения типа (N, 1); обозначим момент удара  $t' \pmod{2\pi N}$ . Условия Т - периодичности при учете (9.2) выглядят так:

$$q(t' + T) = q(t') = 0, \quad \dot{q}(t' + 0) = -V + I(V), \quad V = -\dot{q}(t' + T - 0). \quad (9.59)$$

Подставляя формулу (9.59) в (9.58), получим

$$I(V) = gT, \quad \dot{h}(t') = V - \frac{1}{2}I(V). \quad (9.60)$$

Первое из уравнений (9.60) служит для определения скорости удара  $V$ ; естественно считать, что тогда левая часть монотонно возрастает вместе с  $V$  и принимает любые положительные значения. Следовательно, величина  $V$  однозначно определяется периодом движения. Второе уравнение в зависимости от вида функции  $h(t)$  может иметь несколько решений или не иметь их вовсе. В частности, для упругого удара  $I(V) = 2V$ , откуда получаем, что  $t'$  — стационарная точка для  $h(t)$ ; всякая периодическая функция имеет по крайней мере две таких точки на любом отрезке длины периода.

Помимо условий (9.60), периодическое движение должно удовлетворять геометрическому условию существования (см. (7.63))

$$q(t' + \tau) > 0, \quad \forall \tau \in (0, T). \quad (9.61)$$

Для его проверки подставим равенства (9.60) в формулу (9.58):

$$q(t' + \tau) = \frac{1}{2}g\tau(T - \tau) - h(t' + \tau) + h(t'), \quad (9.62)$$

причем значение  $t'$  определяется из второго уравнения (9.60).

Проверка неравенства (9.61) для функции (9.62), как правило, связана с численными расчетами. В частных случаях достаточные условия существования могут быть получены аналитически [Кобринский, Кобринский, 1981].

Устойчивость одноударного периодического движения обсуждается в §7.2.

**Пример.** Допустим, что основание движется по гармоническому закону:  $h(t) = A \sin t$ , а коэффициент восстановления при ударах постоянен. Из уравнений (9.60) получим

$$V = \frac{gT}{1+e}, \quad A \cos t' = \frac{1}{2}kgT, \quad k = \frac{1-e}{1+e}. \quad (9.63)$$

Второе уравнение (9.63) разрешимо при условии

$$A \geq kgT/2. \quad (9.64)$$

Область устойчивости описывается неравенством (7.65), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$0 < w \sin t' < 2(1+e^2)(1+e)^{-2}, \quad w = A/g, \quad (9.65)$$

где  $t'$  определяется из второго уравнения (9.63). Исключая фазу  $t'$  из (9.63), преобразуем (9.64), (9.65) к двойному неравенству

$$\pi k N < w < [4(1+e^2)^2 + \pi^2 N^2 (1-e^2)^2]^{1/2} (1+e)^{-2}. \quad (9.66)$$

Соотношения (9.66) достаточны для асимптотической устойчивости периодических движений типа  $(N, 1)$ , если только для них выполнено геометрическое условие существования (9.61). Аналитическая проверка последнего не представляется возможной, численные расчеты для значений  $n = 1, 2, 3$  проводились в [Быховский и др., 1964, Нагаев, 1978]. В [Кобринский, Кобринский, 1981] показано, что для выполнения геометрических условий существования достаточно хотя бы одного из условий

$$e \geq (8N - 1)^{-1}, \quad w^2 \geq 1 + (\pi k N)^2. \quad (9.67)$$

2. *Бифуркация удвоения периода.* Общий анализ бифуркации удвоения периода для движений типа  $(N, 1)$  проведен выше (см. пример

в §7.3). Применим полученные результаты к случаю основания, колеблющегося по гармоническому закону:  $h(t) = A \sin t$ .

В этом случае  $h''' \equiv -h'$ ,  $h^{IV} \equiv -h''$ . В точке бифуркации  $h'' = -g(k^2 + 1)/k^2$ , а из условия периодичности  $h' = kgT/2$ . Подставляя данные значения в формулы (7.79), (7.80), получим после преобразований

$$\omega = \frac{1}{k(1+k^2)} \left( \frac{2}{\pi N} - \pi N k^4 \right),$$

$$\omega^* = \pi N g \left( \frac{2}{1+k^2} - \frac{1+k^2}{3k^2} - \frac{2}{3}k^2 - \frac{\pi^2 N^2}{1+k^2} k^4 \right).$$

Как показывает несложный анализ, для всех натуральных  $N$  и  $k \in (0, 1)$  величина  $\omega^*$  отрицательна. Следовательно, для основания, движущегося по гармоническому закону, бифуркация удвоения периода приводит к рождению пары устойчивых движений типа  $(2N, 2)$ .

3. *Устойчивость движений типа  $(2N, 2)$ .* Построим движения типа  $(2N, 2)$ . Допустим, что удары происходят в моменты  $t'_1, t'_2, t'_1 + 2T, t'_2 + 2T, \dots$ , где  $T = 2\pi N$ , а соответствующие скорости сближения равны  $V_1$  и  $V_2$ . Перелеты и удары описываются уравнениями (9.58) и (9.2) соответственно; условия периодичности по аналогии с (9.59) выглядят так:

$$\begin{aligned} q(t'_1 + 2T) &= q(t'_1) = q(t'_2 + 2T) = q(t'_2) = 0, \\ \dot{q}(t'_1 + 0) &= -V_1 + I(V_1), \quad \dot{q}(t'_2 + 0) = -V_2 + I(V_2). \end{aligned} \quad (9.68)$$

Систему (9.68) при учете (9.58) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} h(t'_1) &= g(\phi - T) + V_1 - \frac{\phi}{2T} I(V_1), \\ h(t'_1 + \phi) &= g(T - \phi) + V_2 - \frac{2T - \phi}{2T} I(V_2), \quad I(V_1) + I(V_2) = 2gT, \\ h(t'_1 + \phi) - h(t'_1) &= \frac{1}{2}g\phi(\phi - 2T) + \frac{\phi(2T - \phi)}{2T} I(V_1), \quad \phi = t_2 - t_1. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Решение системы (9.69) можно свести к определению неподвижных точек отображения прямой в прямую следующим образом. Зададим значение  $V_1$  и определим  $V_2$  из третьего уравнения. Затем из первых двух уравнений выразим значения  $t'_1$  и  $\phi$  через  $V_1$ ; наконец, рассчитываем  $\bar{V}_1(V_1)$  из четвертого уравнения.

В частности, в случае постоянного коэффициента восстановления периодические движения обсуждаемого типа, близкие к движениям типа  $(N, 1)$ , задаются формулой (7.80). Определим условия их устойчивости, пользуясь результатами §7.2. Матрица монодромии (7.54) при учете (7.57) и (7.49), где  $F_2^\pm = -g - \ddot{h}$ , принимает вид

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}(2T - \phi) \mathcal{J}_2 \mathbf{X}(\phi) \mathcal{J}_1. \quad (9.70)$$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_j = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ b_j & -e \end{pmatrix}, \quad b_j = (1+e)(g + \ddot{h}_j)/V_j \quad (j = 1, 2).$$

Для коэффициентов характеристического уравнения получаем такие выражения:

$$a_2 = e^4, \quad a_1 = 2e^2 - 2eT(b_1 + b_2) + \phi(2T - \phi)b_1b_2. \quad (9.71)$$

Область устойчивости (9.56) такова

$$-(1+e^2)^2 < -2eT(b_1 + b_2) + \phi(2T - \phi)b_1b_2 < (1-e^2)^2. \quad (9.72)$$

Обращение правого неравенства (9.72) в равенство соответствует появлению мультиликатора  $\rho = 1$  (бифуркация "седло-узел"), левого — мультиликатора  $\rho = -1$  (удвоение периода). Заметим, что для существования движений обсуждаемого типа требуется выполнение наряду с (9.69) геометрических условий существования.

4. *Глобальная устойчивость безотрывного режима.* Если для всех  $t \in [0, 2\pi]$  выполнено неравенство

$$\ddot{h}(t) > -g, \quad (9.73)$$

то правая часть уравнения (9.57) отрицательна. При этом возможно такое движение, для которого  $q \equiv 0$ , т.е. частица не отрывается от опоры. Как показано выше, в случае неупругих ударов такой скользящий режим асимптотически устойчив, причем притяжение происходит за конечное время. Это не исключает, вообще говоря, существования при тех же условиях периодических движений с ударами. При определенных условиях безотрывное движение обладает более сильным свойством *глобальной асимптотической устойчивости*, означающей, что область притяжения совпадает со всем фазовым пространством. При этом для любых начальных условий частица через некоторое конечное время будет двигаться в непрерывном контакте с основанием.

Достаточное условие глобальной асимптотической устойчивости имеет в случае постоянного коэффициента восстановления вид [Иванов, 1993, б]

$$\max_t \ddot{h}(t) < 2kg/(1+k). \quad (9.74)$$

Для доказательства данного утверждения перейдем в уравнениях (9.57) к вспомогательным переменным  $s, v$  по формулам (4.2) шестой главы. В итоге получим систему непрерывного представления

$$\dot{s} = Wv, \quad \dot{v} = -W^{-1}(g + \ddot{h}(t))\text{sign } s. \quad (9.75)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$L = \frac{1}{2g}(1-k^2)v^2 + |s|, \quad (9.76)$$

положительную для любых значений переменных, не равных нулю одновременно. Производная функции (9.76), вычисленная при учете уравнений (9.75), выглядит так:

$$\frac{dL}{dt} = -|v| \left( 2k - \frac{\ddot{h}(t)}{g} (k + \operatorname{sign}(sv)) \right). \quad (9.77)$$

Условие (9.74) гарантирует положительность выражения в правой части формулы (9.77), заключенного в скобки. Следовательно,  $dL/dt \leq 0$ , причем равенство достигается лишь в случае  $v = 0$ . Единственной траекторией системы (9.75), для которой  $v \equiv 0$ , является нулевое положение равновесия. Вывод о глобальной асимптотической устойчивости следует из теоремы Барбашина – Красовского [Красовский, 1959].

**Линейный виброударник.** Обобщением задачи, рассмотренной в предыдущем разделе, является осциллятор (9.51); линейность уравнений движения позволяет выписать общее решение в промежутках между ударами. Эта система используется для моделирования различных технических устройств, начиная с вибромолотов и дробилок и заканчивая танками с нефтью и системой охлаждения ядерных реакторов. Ее исследованию посвящены многочисленные работы, использующие аналитические, численные, экспериментальные и аналоговые методы, в числе которых [Thompson, Ghaffari, 1982, Thompson, 1983, Shaw, Holmes, 1983, a, b, Shaw, 1985, Peterka 1974, 1981, 1982, 1984, Nordmark, 1991, Isomaki и др., 1985, Meijaard, 1993, Ivanov, 1993, Руслаков, Харкевич, 1942, Беспалова, 1957, Асташев, 1971, Кобринский, Кобринский, 1973, 1981, Бабицкий, 1978, Горбиков, 1990, Фейгин 1970, 1974, 1977, 1994, Федосенко, Фейгин, 1971]. Полученные результаты показывают сложность динамики виброударника, который в зависимости от параметров задачи и начальных условий может совершать периодические, субпериодические, асимптотические или хаотические движения. Основное отличие от задачи, рассмотренной в предыдущем разделе состоит в возможности, при определенных условиях, движений, для которых во все время  $q > 0$ .

Остановимся подробнее на анализе периодических движений типа  $(N, 1)$ . Обозначим  $p(t)$  периодическое решение системы (9.51),  $\varphi_{1,2}(t)$  — фундаментальную систему решений однородного уравнения,  $t'$  — момент удара,  $\mathbf{X}(t)$  — фундаментальную матрицу решений:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_2(t) \end{pmatrix}, \quad (9.78)$$

$$\varphi_1(t) = (\cos \delta t + \frac{b}{\delta} \sin \delta t) \exp(-bt), \varphi_2(t) = \frac{1}{\delta} \sin \delta t \exp(-bt), \quad \delta^2 = c - b^2.$$

Периодическое решение в промежутке между ударами описывается формулами

$$\begin{aligned} q(t) &= p(t) + (q(t') - p(t'))\varphi_1(t - t') + (\dot{q}(t') - \dot{p}(t'))\varphi_2(t - t'), \\ \dot{q}(t) &= \dot{p}(t) + (q(t') - p(t'))\dot{\varphi}_1(t - t') + (\dot{q}(t') - \dot{p}(t'))\dot{\varphi}_2(t - t'). \end{aligned} \quad (9.79)$$

Подстановка условий периодичности (9.59) в формулы (9.79) приводит к такому результату:

$$\begin{aligned} p(t')(1 - \varphi_1(T)) + (I(V) - V - \dot{p}(t'))\varphi_2(T) &= 0, \\ p(t')\dot{\varphi}_1(T) + (I(V) - V - \dot{p}(t'))(1 - \dot{\varphi}_2(T)) &= I(V). \end{aligned} \quad (9.80)$$

Система (9.80) линейна относительно  $p(t')$ ,  $\dot{p}(t')$ , ее решение удобно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} p(t') \\ \dot{p}(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I(V) - V \end{pmatrix} - I(V)(\mathbf{E}_2 - \mathbf{X}(T))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.81)$$

Уравнение (9.81) можно решить геометрическим методом. Для этого изобразим на фазовой плоскости замкнутую кривую  $(p(t'), \dot{p}(t'))$ , а также график правой части, для которого скорость сближения  $V > 0$  играет роль параметра. Каждому периодическому решению типа  $(N, 1)$  отвечает точка пересечения этих кривых. Данное соответствие не является взаимно однозначным: для каждого из решений системы (9.81) необходима проверка геометрических условий существования.

Отметим важное свойство второй из двух данных кривых: она выходит при  $V = 0$  из начала координат и в зависимости от элемента  $x_{12} = \varphi_2(T)$  определяющей матрицы лежит в левой (в случае  $x_{12} > 0$ ) или правой (если  $x_{12} < 0$ ) полуплоскости. Если  $x_{12} = 0$ , все точки данной кривой лежат на оси ординат. Это свойство позволяет сделать вывод о существовании движений типа  $(N, 1)$  при различных значениях параметров.

Допустим, что замкнутая кривая  $(p(t'), \dot{p}(t'))$  целиком лежит в правой полуплоскости, тогда система обладает периодическим безударным движением. При этом она заведомо не имеет движений периода  $T$ , если  $\varphi_2(T) \geq 0$ . Касанию ограничителя соответствует прохождение замкнутой кривой через начало координат, являющееся граничной точкой графика правой части уравнения (9.81) при любом  $N$ . Наконец, если кривая охватывает начало координат, то она пересекает все эти графики.

Можно сделать следующий вывод о характере бифуркаций касания в системе (9.51).

**Предложение 9.14.** *Пусть в системе (9.51) правая часть зависит от параметра  $\mu$ , а замкнутая кривая  $(p(t), \dot{p}(t))$  лежит в правой полуплоскости при  $\mu < 0$ , проходит через начало координат при  $\mu = 0$  и охватывает начало при  $\mu > 0$ .*

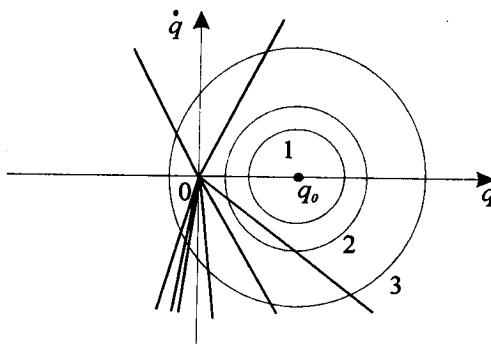


Рис. 9.17. Эволюция одноударных периодических движений линейного виброударника с зазором: 1) нет таких движений, 2) рождение пары периодических движений, 3) бифуркация касания

(i) Если  $c < b^2$ , то для любого натурального числа  $N$  и достаточно малых  $V > 0$  движения типа  $(N, 1)$ , характеризующиеся скоростью сближения при ударах  $V$ , могут существовать при  $\mu > 0$  и не существуют при  $\mu < 0$ .

(ii) Если  $c > b^2$ , то при  $\mu < 0$  могут существовать те движения, для которых  $\sin 2\pi N\delta < 0$ , а при  $\mu > 0$  — лишь такие движения, для которых  $\sin 2\pi N\delta > 0$ .

Заметим, что данный качественный результат остается справедливым вне зависимости от вида функции  $I(V)$ . Он свидетельствует о бесконечном разнообразии сценариев бифуркации касания в зависимости от параметров системы.

**Пример.** Пусть  $P(t) = A \sin t + cq_0$ ,  $I(V) = (1 + e)V$ . Периодическое решение уравнения (9.51) имеет вид

$$p(t) = q_0 + \alpha \sin t + \beta \cos t, \quad (9.82)$$

$$\alpha = A(c - 1)[4b^2 + (1 - c)^2]^{-1}, \quad \beta = -2bA[4b^2 + (1 - c)^2]^{-1}.$$

Траектория (9.82) представляет собой окружность с центром в точке  $q_0$  радиуса  $r = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} = A[4b^2 + (1 - c)^2]^{-1/2}$  (рис. 9.17). Правая часть формулы (9.81) изображается полупрямой, выходящей из начала координат.

Из простых геометрических соображений следует, что в том случае, когда начало координат лежит внутри окружности, последняя пересекается с полупрямой в единственной точке. В противном случае полупрямая может не иметь общих точек с окружностью или пересекать ее в двух точках, а также касаться окружности.

Полагая последовательно  $T = 2\pi$ ,  $T = 4\pi, \dots$ ,  $T = 2k\pi, \dots$ , получим бесконечно много лучей, выходящих из начала координат. Если вязкость системы ненулевая:  $b > 0$ , то в формулах (9.78)  $\mathbf{X}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Формула (9.81) показывает, что лучи в пределе стремятся к нижней вертикальной полуоси. В случае  $b = 0$  (модель Русакова – Харкевича, [Русаков, Харкевич, 1942]) функции  $\varphi_{1,2}$  периодичны с периодом  $2\pi/\delta$ . Если число  $\delta$  иррационально, то лучи всюду плотно заполняют фазовую плоскость. В случае  $\delta = m/n$  они образуют правильную звезду с  $n$  лучами.

Можно показать, что если окружность не проходит через начало координат, то из бесконечного числа точек пересечения лучей с окружностью движениям типа  $(N, 1)$  соответствует лишь конечное число. Действительно, в противном случае хотя бы одна из таких точек была неизолированной, а скорость сближения при ударах в соответствующем ей периодическом движении — отличной от нуля. Следовательно, для достаточно близких по начальным условиям движений большего периода нарушаются геометрические условия существования.

Обсудим случай системы с зазором при изменении амплитуды внешней силы  $A$ . Для этого построим семейство лучей, соответствующих значениям  $N = 1, 2, \dots$ . Если величина  $A$  достаточно мала, то окружность не пересекает ни одного из этих лучей, т.е. периодических движений нет (кривая 1 на рис. 9.17). С ростом  $A$  окружность сначала пересекает тот из лучей, который лежит в правой полуплоскости и имеет наименьший по абсолютной величине угловой коэффициент (кривая 2 на рис. 9.17). При этом рождается пара периодических движений (в случае выполнения геометрических условий существования) — бифуркация "седло-узел". Затем окружность пересекает другие лучи, лежащие в правой полуплоскости, что означает (при выполнении геометрических условий существования) рождение пары движений соответствующего периода. Все эти движения существуют с безударным движением до тех пор, пока окружность целиком лежит в правой полуплоскости.

Критический момент наступает при пересечении окружностью с осью ординат, что соответствует бифуркации касания (см. §7.3). При этом она также пересекает все лучи, лежащие в левой полуплоскости, одновременно теряя одну из точек пересечения с каждым из лучей в правой полуплоскости.

Положение лучей относительно оси ординат несложно определить из рассмотрения правой части уравнения (9.81): при учете (9.78), абсцисса направляющего вектора противоположна величине  $\sin \delta T$ . Следовательно, при выполнении условия

$$\sin 2\pi N \delta < 0 \quad (9.83)$$

соответствующий луч лежит в правой полуплоскости, при обратном знаке неравенства — в левой.

В частности, если выполнено неравенство

$$\sin 2\pi \delta > 0, \quad (9.84)$$

то луч для  $N = 1$  лежит в левой полуплоскости, и движение периода  $2\pi$  в результате бифуркации касания сохраняется (теряет устойчивость). При обратном знаке неравенства (9.84) неустойчивое движение типа  $(1, 1)$  сливаются с устойчивым безударным движением и оба исчезают. Данный вывод согласуется с предложением 7.9.

**Выводы.** По сравнению с автономным случаем, системы с периодическим возбуждением обладают значительно более сложной динамикой, что ограничивает возможности аналитических методов. В таких системах оказывается возможным одновременное существование на фазовой плоскости устойчивых равновесий и периодических движений с областями стохастичности, движение в которых имеет хаотический характер. При глобальном анализе на первый план выходят численные методы, эффективность которых возрастает при использовании вспомогательных замен переменных, описанных в §6.4.

# Дополнение. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

## Д.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

*Динамической системой* называют объект, состояние которого можно однозначно описать при помощи переменных  $x \in U \subseteq \mathbb{R}^k$ , изменяющихся со временем по известному закону. Различают два типа динамических систем: непрерывные и дискретные. Первые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, \mu), \quad (\text{Д.1})$$

вторые — разностными уравнениями

$$\bar{x} = G(x, \mu). \quad (\text{Д.2})$$

В уравнениях (Д.1) и (Д.2)  $\mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$  — некоторые параметры. Систему (Д.2) называют также системой с дискретным временем, или отображением.

Будем считать, что вектор-функция  $F$  в (Д.1) не зависит от  $t$  явно (такие системы называют автономными), либо  $2\pi$  - периодична по  $t$  и непрерывно дифференцируема по совокупности переменных при  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in U$ ,  $\mu \in V$ . Решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений (Д.1) называется всякая дифференцируемая вектор-функция  $x(t)$ , для которой

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), \mu).$$

Решения отождествляются с движениями данной динамической системы. Сделанных допущений достаточно для существования решения системы (Д.1) для любых начальных условий

$$x(t^0) = x^0 \in U. \quad (\text{Д.3})$$

Более того, решение задачи Коши (Д.1), (Д.3) единственно и непрерывно зависит от  $x^0$  и  $\mu$ . Оно может быть продолжено для любого  $t > t^0$  вплоть до выхода на границу области определения  $U$ . Это решение называют также *траекторией*, или *фазовой кривой* в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^k$ , проходящей через точку  $x^0$  при  $t = t^0$ . Совокупность

всех траекторий называют фазовым портретом данной динамической системы.

*Интегральной кривой* называется график функции  $\mathbf{x}(t)$ , т.е. множество точек расширенного фазового пространства  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^k$ .

Что касается отображения (Д.2), будем считать его непрерывно дифференцируемым в области  $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ ,  $\mu \in \mathbb{V}$ . В случае, когда это отображение обратимо (причем  $G^{-1}$  также непрерывно дифференцируемо), его называют диффеоморфизмом. *Движением системы с дискретным временем с начальным условием* (Д.3) называют последовательность

$$\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 = \mathbf{G}(\mathbf{x}^0, \mu), \mathbf{x}^2 = \mathbf{G}(\mathbf{x}^1, \mu), \dots, \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^n, \mu), \dots \quad (\text{Д.4})$$

Последовательность (Д.4) бесконечна, если все ее точки лежат в  $\mathbb{U}$ , или конечна. Для диффеоморфизма можно также определить значения

$$\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^0, \mu), \dots, \mathbf{x}^{-n-1} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{-n}, \mu), \dots \quad (\text{Д.5})$$

с аналогичной оговоркой о числе членов последовательности (Д.5).

Точка  $\mathbf{x}_e \in \mathbb{U}$  называется *положением равновесия* системы (Д.1) для данных значений параметров  $\mu$ , если

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_e, \mu) \equiv 0 . \quad (\text{Д.6})$$

Очевидно, что траектория, проходящая через точку  $\mathbf{x}_e$ , состоит из этой единственной точки, т.е.  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_e$ . Таким образом, система, помещенная в положение равновесия, остается в нем неограниченно долго.

Аналогичным понятием для отображения является *неподвижная точка*. Такая точка  $\mathbf{x}_e$  определяется соотношением

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{G}(\mathbf{x}_e, \mu) . \quad (\text{Д.7})$$

Решение  $\mathbf{x}_p(t)$  системы (Д.1) называется *периодическим* периода  $T$ , если для всех  $t \geq t^0$  выполнено равенство

$$\mathbf{x}_p(t + T) = \mathbf{x}_p(t) . \quad (\text{Д.8})$$

Заметим, что в автономной системе период может быть любым положительным числом, а в случае  $2\pi$  - периодической зависимости правой части системы (Д.1) от  $t$  его величина, как правило, кратна  $2\pi$ . Часто решения периода  $2\pi K$  при  $K \geq 2$  называют субпериодическими. В принципе, в некоторых исключительных случаях могут существовать периодические решения неавтономных систем с периодом  $T^*$ , не кратным  $2\pi$ , если вдоль этих решений правая часть системы (Д.1) не только  $2\pi$  - периодична, но и  $T^*$  - периодична.

**Пример.** Система

$$\dot{x}_1 = \omega x_2 + (x_1^2 + x_2^2 - 1) \sin t, \quad \dot{x}_2 = -\omega x_1 + (x_1^2 + x_2^2 - 1) \cos t$$

обладает решением периода  $T^* = 2\pi/\omega$ :  $x_1 = \sin \omega t$ ,  $x_2 = \cos \omega t$ .

Ниже изучаются лишь решения периода, кратного  $2\pi$ .

Всякое периодическое движение можно интерпретировать как положение равновесия некоторой вспомогательной неавтономной динамической системы. Для этого надо определить переменные  $y$  по формуле

$$y = x - x_p(t). \quad (\text{Д.9})$$

Изменение  $y$  описывается системой

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y + x_p(t), \mu) - F(t, x_p(t), \mu), \quad (\text{Д.10})$$

обладающей тривиальным решением  $y \equiv 0$ .

Решение  $x_a(t)$  системы (Д.1) называется *асимптотическим* к равновесию  $x_e$  при  $t \rightarrow +\infty$ , если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_a(t) = x_e. \quad (\text{Д.11})$$

Аналогично можно определить движение, асимптотическое к равновесию при  $t \rightarrow -\infty$  и движение, асимптотическое к периодическому  $x_p(t)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  (для этого можно воспользоваться заменой (Д.9)).

Отметим еще один относительно простой тип — *квазипериодические* движения. Решение  $x_q(t)$  системы (Д.1) называется *квазипериодическим* с частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ , если его можно представить в виде

$$x_q(t) = \Phi(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_m t), \quad (\text{Д.12})$$

где функция  $\Phi : R^m \rightarrow R^k$  имеет период  $2\pi$  по всем своим переменным.

Перечисленные выше типы движения достаточно просты. Наряду с ними существуют сложные нерегулярные движения, называемые *хаотическими* или *стокастическими* [Лихтенберг, Либерман, 1984, Неймарк, Ланда, 1987]. Хаотическая траектория занимает ограниченную область фазового пространства, всюду плотно покрывая некоторое множество  $\mathcal{K}$ . Общепринятого определения хаоса пока нет, его наличие устанавливается на основе некоторых количественных характеристик движения: энтропии, хаусдорфовой размерности аттрактора  $\mathcal{K}$  (не являющейся целым числом), показателей Ляпунова и др.

## Д.2. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

Для отыскания положений равновесия системы дифференциальных уравнений (Д.1) достаточно решить систему алгебраических уравнений (Д.6). То же самое справедливо и по отношению к неподвижным

точкам системы (Д.2): они определяются из системы (Д.7). Последняя даже проще, нежели (Д.6), так как она не содержит времени.

Основной подход к анализу периодических движений непрерывной системы (Д.1) связан с построением отображения Пуанкаре [Пуанкаре, 1972], для которого эти движения являются неподвижными точками. Он наиболее удобен для построения решений заданного периода  $T$ : в этом случае отображение строится по следующей схеме.

Некоторый момент времени  $t = t^0$  фиксируется как начальный, затем для каждой из точек  $\mathbf{x}^0 \in U$  строится траектория системы (Д.1) с начальным условием (Д.3). Обозначим  $\varphi(t, t^0, \mathbf{x}^0)$  эту траекторию,  $U_0 \subseteq U$  — множество начальных условий таких, что  $\varphi(t, t^0, \mathbf{x}^0) \in U$  для всех  $t \in [t^0, t^0 + T]$ . Если это множество непусто, то можно определить отображение  $\varphi_T : U_0 \rightarrow U$  по формуле

$$\varphi_T(\mathbf{x}) = \varphi(t^0 + T, t^0, \mathbf{x}). \quad (\text{Д.13})$$

Пусть правая часть системы (Д.1) не изменяется при замене  $t \rightarrow t + T$ . Тогда справедливо следующее утверждение, принадлежащее Пуанкаре.

**Теорема Д.1.** *Точка  $\mathbf{x}^0$  является неподвижной для отображения (Д.13) тогда и только тогда, когда  $\varphi(t, t^0, \mathbf{x}^0)$  периодическое решение системы (Д.1) периода  $T$ .*

Если система (Д.1)  $2\pi$ -периодична, то ее периодические решения можно искать как неподвижные точки отображения  $\varphi_{2\pi}$ , а субпериодические — как неподвижные точки отображений  $\varphi_{4\pi}, \varphi_{6\pi}$ , и т.д. Таким образом, задача построения периодических движений сводится к решению алгебраической системы вида (Д.7).

Более сложен случай автономной системы (Д.1), поскольку период ее решений априори может быть любым положительным числом. В этом случае нельзя дать универсального рецепта для построения *всех* периодических решений, можно лишь дать рекомендации для отыскания некоторых из них.

Возьмем в области  $U$  некоторую плоскую площадку  $\Sigma$  размерности  $k - 1$ , обладающую следующим свойством: для каждой точки  $\mathbf{x}^0 \in \Sigma$  траектория  $\varphi(t, t^0, \mathbf{x}^0)$ , проходящая через эту точку, пересекает  $\Sigma$  под ненулевым углом. Тогда, в силу непрерывности правой части системы (Д.1), все траектории пересекают  $\Sigma$  с одной и той же стороны  $\Sigma^-$  (рис. Д.1). Заметим, что в силу автономности траектории инвариантны относительно сдвига времени, т.е.  $\varphi(t, t^0, \mathbf{x}^0) \equiv \varphi(t - t^0, 0, \mathbf{x}^0)$ .

Обозначим  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$  совокупность таких точек, для которых при некотором положительном числе  $\tau(\mathbf{x}^0)$  выполняется соотношение  $\varphi(\tau(\mathbf{x}^0), 0, \mathbf{x}^0) \in \Sigma$ . Если множество  $\Sigma_0$  непусто, то можно определить отображение  $\varphi_\Sigma : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  по формуле

$$\varphi_\Sigma(\mathbf{x}) = \varphi(\tau_1(\mathbf{x}), 0, \mathbf{x}), \quad (\text{Д.14})$$

где  $\tau_1(\mathbf{x})$  — момент первого возврата.

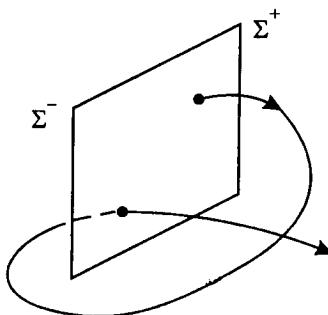


Рис. Д.1. Сечение Пуанкаре для автономной системы

**Теорема Д.2.** *Если  $x^0$  — неподвижная точка отображения (Д.14), то  $\varphi(t, t^0, x^0)$  — периодическое решение системы (Д.1) периода  $\tau_1(x^0)$ .*

Данное утверждение останется справедливым и в случае, когда сечение  $\Sigma$  не плоское, а представляет собой кусок двусторонней гладкой поверхности. Выбирая разные сечения, можно обнаружить различные периодические движения системы.

Таким образом, задача построения периодических движений может быть сведена к решению алгебраической системы (Д.7). Методы ее решения можно разбить на две группы: топологические и асимптотические.

*Топологические методы* имеют качественный характер: они позволяют установить существование неподвижных точек в выделенной области, но не содержат указаний, как построить эту область в конкретных системах. Наиболее известны следующие два результата.

**Теорема Д.3.** [Brower, 1909] *Всякое непрерывное отображение единичного замкнутого шара из  $R^k$  в себя имеет неподвижную точку.*

Теорема Брауэра остается справедливой и для отображения в себя замкнутого множества  $D$  более общей формы, например, параллелепипеда. Важно лишь, чтобы множество  $D$  можно было получить из шара путем непрерывной деформации.

**Теорема Д.4.** (Банах) *Пусть множество  $D \in R^k$  замкнуто, а отображение  $G : D \rightarrow D$  является сжимающим т.е. существует такая константа  $\lambda \in (0, 1)$ , что для любых  $x_1, x_2 \in D$  выполнено неравенство*

$$\|G(x_1) - G(x_2)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\|. \quad (\text{Д.15})$$

*Тогда отображение  $G$  имеет единственную неподвижную точку  $x_e$ . При этом*

$$x_e = \lim_{n \rightarrow \infty} G^n(x_0) \quad (\text{Д.16})$$

при любом выборе начального приближения  $x_0 \in D$ .

На практике сложность применения теорем Брауэра и Банаха состоит не в проверке (достаточно простой) их условий, а в отыскании области  $D$ . Возможный подход состоит в разбиении фазового пространства  $U$  на отдельные "клетки" и построении их образов [Hsu, 1987].

*Асимптотические методы* позволяют строить решения системы (Д.7) при наличии малого параметра  $\epsilon$ , если при  $\epsilon = 0$  такие решения известны. Основным результатом является следующая теорема Пуанкаре [Шуанкаре, 1972].

**Теорема Д.5.** *Пусть в системе (Д.7)  $\mu \in R$  и при  $\mu = 0$  она имеет решение  $x = x_e$ . Если матрица Якоби  $DG(x_e, 0)$  невырождена, то при достаточно малом  $\mu$  существует ровно одно решение системы  $x(\mu)$ , переходящее в  $x_e$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Если функция  $G(x, \mu)$  аналитична в окрестности точки  $x = x_e, \mu = 0$ , то и решение  $x(\mu)$  аналитично в окрестности  $\mu = 0$ .*

Более подробное и полное изложение асимптотических методов можно найти в книгах [Малкин, 1949, Неймарк, 1958, Гребеников, Рябов, 1979, Моисеев, 1981, Farkas, 1994].

### Д.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

*Устойчивость* является важным качественным свойством движения динамической системы, связанным с его поведением при малых возмущениях.

Пусть  $\tilde{x}(t)$  — некоторое решение системы (Д.1), определенное для всех  $t \geq t^0$ .

**Определение Д.1.** Решение  $\tilde{x}(t)$  называется *устойчивым по Ляпунову* [Ляпунов, 1892], если для любого  $\epsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , такое, что для каждого другого решения  $x(t)$ , удовлетворяющего условию  $\|x(t^0) - \tilde{x}(t^0)\| < \delta$ , имеем  $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| < \epsilon$  для всех  $t \geq t^0$ . В противном случае решение  $\tilde{x}(t)$  называется *неустойчивым*.

**Определение Д.2.** Решение  $\tilde{x}(t)$  называется *притягивающим*, если существует  $\delta > 0$ , такое, что для каждого другого решения  $x(t)$ , удовлетворяющего условию  $\|x(t^0) - \tilde{x}(t^0)\| < \delta$ , имеем  $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Определение Д.3.** Решение  $\tilde{x}(t)$  называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчивое по Ляпунову и притягивающее одновременно.

Если ввести новые переменные по формуле (Д.9), то можно свести данные определения к соответствующим свойствам тривиального решения вспомогательной системы (Д.10). При этом в случае, когда  $\tilde{x}(t)$  — положение равновесия автономной системы, вспомогательная система также автономна. Если же  $\tilde{x}(t)$  — периодическое решение, то и система (Д.10) периодична.

Аналогичные понятия можно определить для системы с дискретным временем (Д.2).

Прямой метод Ляпунова исследования устойчивости основан на использовании вспомогательных функций, называемых функциями Ляпунова [Ляпунов, 1954, Руш и др., 1980]. Ниже сформулирован ряд теорем, составляющих ядро этого метода, в применении к тривиальному решению системы (Д.1).

**Определение Д.4.** Функцией класса  $\mathcal{H}$  называется всякая функция  $a : R^+ \rightarrow R^+$ , непрерывная, строго возрастающая и удовлетворяющая условию  $a(0) = 0$ . Будем писать для такой функции  $a \in \mathcal{H}$ .

**Теорема Д.6.** [Ляпунов, 1892]. Если существует непрерывно дифференцируемая функция  $\mathcal{V}(t, x)$  такая, что  $\mathcal{V}(t, 0) = 0$  и для некоторой функции  $a \in \mathcal{H}$  и любых  $t > t^0$  и  $\|x\| \leq \delta$  выполнены условия

$$\mathcal{V}(t, x) \geq a(\|x\|), \quad \dot{\mathcal{V}}(t, x) \leq 0, \quad (\text{Д.17})$$

то начало устойчиво.

В формулах (Д.17) производная функции Ляпунова вычисляется при учете уравнений движения (Д.1).

**Замечание.** Утверждение теоремы Д.6 остается справедливым и при более слабых требованиях к функции  $\mathcal{V}$ . Если эта функция непрерывна и удовлетворяет в окрестности начала условия Липшица по переменной  $x$ , но не дифференцируема, то второе условие (Д.17) можно заменить неравенством [Руш и др., 1980]

$$D^+ \mathcal{V}(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \sup \frac{\mathcal{V}(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) - \mathcal{V}(t, x)}{\Delta t} \leq 0. \quad (\text{Д.18})$$

**Теорема Д.7.** (Ляпунов). Если существует непрерывно дифференцируемая функция  $\mathcal{V}(t, x)$  такая, что для некоторых функций  $a, b, c \in \mathcal{H}$  и любых  $t > t^0$  и  $\|x\| \leq \delta$  выполнены условия

$$a(\|x\|) \leq \mathcal{V}(t, x) \leq b(\|x\|), \quad \dot{\mathcal{V}}(t, x) \leq -c(\|x\|), \quad (\text{Д.19})$$

то начало асимптотически устойчиво. Все решения с начальными условиями

$$\|x^0\| \leq \delta, \quad \mathcal{V}(t^0, x^0) \leq a(\delta)$$

притягиваются к началу.

**Замечание.** Аналогичное утверждение справедливо для недифференцируемых функций Ляпунова, где аналогично предыдущей теореме второе условие (Д.19) заменяется на

$$D^+ \mathcal{V}(t, x) \leq -c(\|x\|). \quad (\text{Д.20})$$

**Теорема Д.8.** [Четаев, 1955]. Если существует непрерывно дифференцируемая функция  $\mathcal{V}(t, x)$ , число  $C$  и область  $\Psi$  в окрестности

$\|\mathbf{x}\| \leq \delta$  такие, что для некоторой функции  $a \in \mathcal{H}$  и любых  $t > t^*$  и  $\mathbf{x} \in \Psi$  выполнены условия

$$0 < \mathcal{V}(t, \mathbf{x}) \leq C, \quad \dot{\mathcal{V}}(t, \mathbf{x}) \geq a(\mathcal{V}(t, \mathbf{x})) \quad (\text{Д.21})$$

и, кроме того, точка  $\mathbf{x} = 0$  принадлежит границе  $\partial\Psi$  области  $\Psi$  и  $\mathcal{V}(t, \mathbf{x}) = 0$  при  $t \geq t^*$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\Psi$ , то начало неустойчиво.

Сформулированные теоремы можно перенести на систему с дискретным временем (Д.2). В этом случае функция Ляпунова непрерывна и не зависит от времени, а вместо производной в условиях следует подставить ее приращение

$$\Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathcal{V}(\mathbf{x}). \quad (\text{Д.22})$$

Справедливы и утверждения, обратные теоремам Д.6 и Д.7: в случаях устойчивости и асимптотической устойчивости существуют функции Ляпунова со свойствами (Д.17) и (Д.19) соответственно [Красовский, 1959]. Следует, однако, заметить, что в общем случае построить эту функцию столь же сложно, как найти общее решение системы. Во многих случаях вывод об устойчивости можно получить по первому приближению, используя метод линеаризации.

Допустим, к примеру, что система (Д.1) автономна и в окрестности начала координат ее можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|), \quad \mathbf{A} = \|\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x}\|_{\mathbf{x}=0}. \quad (\text{Д.23})$$

**Теорема Д.9.** [Ляпунов, 1892] Если все собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  лежат в левой полуплоскости, то нулевое положение равновесия системы (Д.23) асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно из них лежит в правой полуплоскости, то имеет место неустойчивость.

В случае периодической правой части можно по аналогии с (Д.23) представить систему (Д.1) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|), \quad \mathbf{A} = \|\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x}\|_{\mathbf{x}=0}. \quad (\text{Д.24})$$

Фундаментальная матрица решений  $\mathbf{X}(t)$  определяется условиями

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_k. \quad (\text{Д.25})$$

Характеристическое уравнение выглядит так

$$\det \|\mathbf{X}(2\pi) - \rho\mathbf{E}_k\| = 0, \quad (\text{Д.26})$$

где  $\mathbf{E}_k$  — единичная матрица порядка  $k$ .

**Теорема Д.10.** Если все корни уравнения (Д.26) лежат внутри единичной окружности комплексной плоскости, то нулевое положение равновесия системы (Д.24) асимптотически устойчиво. Если хотя бы один из них лежит вне этой окружности, то имеет место неустойчивость.

Аналогичный результат справедлив для отображения (Д.2): разложим в окрестности неподвижной точки правую часть по формуле

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{B}\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|), \quad \mathbf{B} = \|\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{x}\| \quad (\text{Д.27})$$

Выход об устойчивости на основании анализа собственных значений матрицы  $\mathbf{B}$  делается в соответствии с теоремой Д.10.

Теоремы Д.9 и Д.10 не позволяют решить вопрос об устойчивости в тех случаях, когда необходимые условия устойчивости выполнены, а достаточные — нет. При этом в зависимости от нелинейных членов разложений (Д.23), (Д.24), (Д.27) возможна как устойчивость, так и неустойчивость. В настоящее время теория устойчивости в критических случаях продолжает развиваться. Наиболее сильные результаты получены для гамильтоновых систем, в которых асимптотическая устойчивость вообще невозможна [Мозер, 1973, Маркеев, 1978, Арнольд, 1979].

Примером применения теорем второго метода Ляпунова может служить следующая классическая теорема Лагранжа — Дирихле:

**Теорема Д.11.** Пусть дана консервативная система

$$[T]_j = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (\text{Д.28})$$

Если в точке  $\mathbf{q}^0$  силовая функция  $U$  имеет строгий локальный максимум, то  $\mathbf{q}^0$  — устойчивое положение равновесия.

Доказательство основано на теореме Д.6: функция Ляпунова задается формулой

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) + U(\mathbf{q}^0), \quad \mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (\text{Д.29})$$

Другая особенность связана с исследованием устойчивости периодических решений автономных систем. Дело в том, что для такого решения один из мультипликаторов (т.е. корней характеристического уравнения) всегда равен единице, что связано с инвариантностью решения относительно сдвига времени [Пуанкаре, 1972]. Поэтому теорема Д.9 не позволяет доказать устойчивость. В таком случае можно построить отображение Пуанкаре (Д.14) при помощи подходящего сечения фазового пространства и представить его в виде (Д.27) в окрестности неподвижной точки, соответствующей данному периодическому решению. Если эта точка устойчива, то можно сделать вывод об орбитальной устойчивости периодического решения в смысле следующего определения.

**Определение Д.5.** Решение  $\tilde{x}(t)$  автономной системы (Д.1) называется *орбитально устойчивым*, если для любого  $\epsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что для каждого другого решения  $x(t)$ , удовлетворяющего условию  $\|x(t^0) - \tilde{x}(t^0)\| < \delta$ , имеем  $\inf_{t'} \|x(t) - \tilde{x}(t')\| < \epsilon$  для всех  $t \geq t^0$  (нижняя грань берется по всем  $t' > t^0$ ).

Данное свойство означает, что траектории возмущенного и данного решений близки, при этом их интегральные кривые не обязательно близки, т.е. может иметь место неустойчивость по Ляпунову.

Аналогично можно дать определения орбитального притяжения и орбитальной асимптотической устойчивости, модифицируя определения Д.2, Д.3.

Вывод об орбитальной устойчивости  $T$ -периодического решения  $x_p(t)$  автономной системы по первому приближению можно сделать и непосредственно, решая характеристическое уравнение

$$\det \|X(T) - \rho E_k\| = 0 \quad (\text{Д.30})$$

где  $X(t)$  — фундаментальная матрица решений уравнений в вариациях

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \quad A = \|\partial F / \partial x\|_{x=x_p(t)} \quad (\text{Д.31})$$

**Теорема Д.12.** [Демидович, 1967] Если хотя бы один из корней характеристического уравнения (Д.30) по модулю больше единицы, периодическое движение орбитально неустойчиво. Соотношения

$$\rho_1 = 1, \quad |\rho_j| < 1 \quad (j = 2, \dots, k) \quad (\text{Д.32})$$

достаточны для орбитальной асимптотической устойчивости.

#### Д.4. БИФУРКАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

Выше мы не принимали во внимание зависимость правых частей систем (Д.1) и (Д.2) от параметров. При изменении этих параметров изменяются решения этих систем и фазовый портрет. Обычно эти изменения имеют плавный характер. Особые случаи скачкообразного, качественного изменения фазового портрета при непрерывном изменении параметров называют *бифуркациями*. Общая теория бифуркаций весьма сложна и пока далека от завершения (см. [Неймарк, 1958, Арнольд, 1978, 1990, Guckenheimer-Holmes, 1983]), мы ограничимся обсуждением основных типов локальных бифуркаций положений равновесия системы (Д.1) и неподвижных точек отображения (Д.2). Ввиду отмеченной выше связи между периодическими движениями и неподвижными точками отображения Пуанкаре (теоремы Д.1, Д.2) следующие ниже результаты можно перенести и на бифуркации этих движений.

Хотя бифуркации присущи только нелинейным системам, их предварительный анализ связан с рассмотрением уравнений первого приближения. Допустим, что все собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  не лежат на мнимой оси (соответственно, модули всех собственных значений матрицы  $\mathbf{B}$  не равны единице), тогда неподвижную точку называют гиперболической. Согласно теореме Хартмана – Гробмана [Арнольд, 1978; Palis, deMelo, 1982], структура фазовых портретов исходной системы и ее линейного приближения в окрестности гиперболической неподвижной точки одинаковы. Можно, в частности, сделать вывод, что положение равновесия или неподвижная точка изолированы, а в случае выполнения условий асимптотической устойчивости они обладают некоторой областью притяжения.

Иначе обстоит дело, когда при некоторых значениях параметров матрица  $\mathbf{A}$  имеет одно или несколько собственных значений на мнимой оси (или  $\mathbf{B}$  имеет одно или несколько собственных значений на единичной окружности в комплексной плоскости). Поскольку эта матрица вещественна, то ее собственные значения либо действительны, либо попарно комплексно сопряжены. Имеется три простейших случая негиперболичности:

1. Матрица  $\mathbf{A}$  имеет простое собственное значение, равное нулю, а остальные ее собственные значения не лежат на мнимой оси:

$$\lambda_1 = 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_j \neq 0 \quad (j = 2, \dots, k). \quad (\text{Д.33})$$

1\*. Матрица  $\mathbf{B}$  имеет простое собственное значение, равное единице, а остальные ее собственные значения по модулю не равны единице

$$\rho_1 = 1, \quad |\rho_j| \neq 1 \quad (j = 2, \dots, k). \quad (\text{Д.34})$$

2\*. Матрица  $\mathbf{B}$  имеет простое собственное значение, равное минус единице, а остальные ее собственные значения по модулю не равны единице

$$\rho_1 = -1, \quad |\rho_j| \neq 1 \quad (j = 2, \dots, k). \quad (\text{Д.35})$$

3. Матрица  $\mathbf{A}$  имеет пару простых комплексно сопряженных чисто мнимых собственных значений, а остальные ее собственные значения по модулю не равны единице

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega i, \quad \omega > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_j \neq 0 \quad (j = 3, \dots, k). \quad (\text{Д.36})$$

3\*. Матрица  $\mathbf{B}$  имеет пару простых комплексно сопряженных собственных значений, лежащих на единичной окружности, а остальные ее собственные значения по модулю не равны единице

$$\rho_{1,2} = \exp(\pm 2\pi\omega i), \quad |\rho_j| \neq 1 \quad (j = 3, \dots, k) \quad (\text{Д.37})$$

причем числа  $3\omega$  и  $4\omega$  не являются целыми.

Все перечисленные случаи относятся к бифуркациям коразмерности единицы [Guckenheimer, Holmes, 1983]. Это означает, что для описания перестройки фазового портрета в этих случаях достаточно считать, что изменяется лишь один из параметров, а остальные сохраняют фиксированные значения.

Дальнейшее упрощение связано с понижением размерности фазового пространства. Наиболее известны два метода: редукция Ляпунова - Шмидта [Chow, Hale, 1982, Golubitski, Schaeffer, 1985] и метод центрального инвариантного многообразия [Guckenheimer, Holmes, 1983]. Мы изложим кратко суть этих методов в применении к отображению (Д.2).

Идея первого из методов состоит в разложении решения уравнения (Д.7) в сумму

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{y} + \mathbf{z}(\mathbf{y}, \mu), \quad (\text{Д.38})$$

где  $\mathbf{y}$  принадлежит многообразию размерности один (в случаях 1\* и 2\*) или два (в случае 3\*), а  $\mathbf{z}$  принадлежит многообразию, размерность которого  $k_z$  равна числу мультиплликаторов, по модулю не равных единице. Существование дифференцируемой функции  $\mathbf{z}(\mathbf{y}, \lambda)$ , обращающей  $k_z$  уравнений системы (Д.7) в тождество, следует из теоремы о неявной функции. Оставшиеся  $k - k_z$  уравнений, связывающие  $\mathbf{y}$  и  $\lambda$ , имеют минимально возможный порядок для бифуркации данного типа.

Метод центрального многообразия также связан с разбиением фазовых переменных на две группы. Сначала методами линейной алгебры выполняем такое разбиение в линейной системе, представляя (Д.2) в виде

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{B}_1 \mathbf{y} + \mathbf{f}_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{B}_2 \mathbf{z} + \mathbf{f}_2(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad (\text{Д.39})$$

где собственные значения матрицы  $\mathbf{B}_1$  равны по модулю единице, а матрицы  $\mathbf{B}_2$  — нет. Центральное многообразие для системы (Д.39) в окрестности начала координат строим как график функции

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{h}(0) = 0, \quad \mathbf{D}\mathbf{h}(0) = 0, \quad (\text{Д.40})$$

где функция  $\mathbf{h}(\mathbf{y})$  удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{h}(\mathbf{B}_1 \mathbf{y} + \mathbf{f}_1(\mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y}))) = \mathbf{B}_2 \mathbf{h}(\mathbf{y}) + \mathbf{f}_2(\mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y})). \quad (\text{Д.41})$$

Доказательства существования центрального многообразия и его свойства приведены в [Carr, 1981]. Заметим, что такое многообразие неединственно. Для его приближенного построения можно разложить функцию  $\mathbf{h}(\mathbf{y})$  по степеням  $\mathbf{y}$  до некоторого порядка и приравнять в уравнении (Д.41) коэффициенты при одинаковых степенях.

Динамика системы (Д.39) на многообразии (Д.40) описывается уравнением

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{B}_1 \mathbf{y} + \mathbf{f}_1(\mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y})). \quad (\text{Д.42})$$

При этом из устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости тривиального решения системы (Д.42) следует соответствующее свойство полной системы (Д.39) [Carr, 1981].

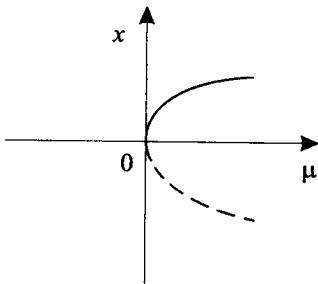


Рис. Д.2. Бифуркация "седло-узел"

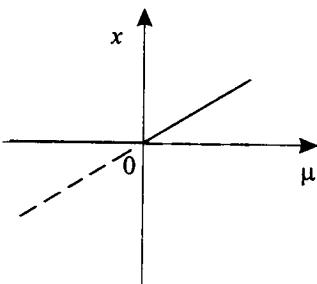


Рис. Д.3. Транскритическая бифуркация

Перейдем к обсуждению основных типов бифуркаций. Не ограничивая общности, будем считать бифуркационное значение параметра нулевым.

1. При выполнении условий (Д.33) система (Д.1) в окрестности положения равновесия сводится редукцией к единственному уравнению

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x, \mu \in R, \quad F(0, 0) = F'_x(0, 0) = 0. \quad (\text{Д.43})$$

а) В общем случае  $F'_\mu(0, 0) \neq 0$ ,  $F''_{xx}(0, 0) \neq 0$  уравнение (Д.43) после надлежащего масштабирования переменных примет вид

$$\dot{x} = \mu - x^2 + O(x^3, \mu^2). \quad (\text{Д.44})$$

Будем искать положения равновесия системы (Д.44), полагая  $\dot{x} = 0$ . Для значений  $\mu > 0$  в окрестности начала координат имеется две таких точки:

$$x_\pm = \pm\sqrt{\mu} + O(\mu). \quad (\text{Д.45})$$

Для решения вопроса об устойчивости найдем корень характеристического уравнения для каждой из этих точек:

$$\lambda_\pm = F''_{x\mu}(x_\pm, \mu) = \mp 2\sqrt{\mu} + O(\mu). \quad (\text{Д.46})$$

По теореме Д.9, точка  $x_+$  асимптотически устойчива, а точка  $x_-$  — неустойчива при достаточно малых значениях  $\mu$ .

Если  $\mu < 0$ , то система (Д.44) не имеет положений равновесия в окрестности начала координат. Наконец, для  $\mu = 0$  имеется единственное равновесие  $x = 0$ .

Результаты анализа удобно отобразить на плоскости  $(\mu, x)$  в виде кривой  $x = x_\mp(\mu)$ , называемой бифуркационной диаграммой (рис. Д.2). Здесь ветвь устойчивых решений изображена сплошной линией, неустойчивых — пунктирной. Данный тип зависимости решений от параметра называется бифуркацией "седло - узел": при изменении знака параметра  $\mu$  устойчивое решение сливаются с неустойчивым и оба исчезают.

б) Наряду с общим случаем а) имеются и важные частные случаи, реализующиеся при наличии у исследуемой системы некоторых специальных свойств. Одним из таких свойств является существование положения равновесия  $x = 0$  при любых значениях параметра. Отсюда следует, что  $F(0, \mu) \equiv 0$ .

Условия невырожденности в рассматриваемом случае имеют вид  $F''_{xx}(0, 0) \neq 0$ ,  $F''_{x\mu}(0, 0) \neq 0$ . Если оно выполнено, то после масштабирования переменных уравнение (Д.43) запишется так:

$$\dot{x} = \mu x - x^2 + xO(x^2, \mu^2). \quad (\text{Д.47})$$

Полагая в (Д.47)  $\dot{x} = 0$ , найдем положения равновесия  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \mu + O(\mu^2)$ . По аналогии с (Д.46) решим характеристическое уравнение для каждой из этих точек:

$$\lambda_1 = \mu, \quad \lambda_2 = -\mu + O(\mu^2). \quad (\text{Д.48})$$

Первая из точек асимптотически устойчива при  $\mu < 0$  и неустойчива при  $\mu > 0$ . Для второй точки картина обратная (рис. Д.3). Данного типа называют транскритической бифуркацией, или сменой устойчивости.

в) Другой частный случай связан с наличием в исследуемой системе определенной симметрии, вследствие чего функция  $F(x, \mu)$  в формуле (Д.43) нечетна относительно  $x$ :  $F(-x, \mu) \equiv -F(x, \mu)$ . В этом случае  $F''_{xx}(0, 0) = 0$ ,  $F'_{\mu}(0, 0) = 0$ , а условия невырожденности имеют вид  $F''_{x\mu}(0, 0) \neq 0$ ,  $F'''_{xxx}(0, 0) \neq 0$ . Здесь в зависимости от знака последней величины имеются две возможности:

$$\dot{x} = \mu x \mp x^3 + xO(x^4, \mu^2). \quad (\text{Д.49})$$

Данная бифуркация носит название "вилка", соответствующие бифуркационные диаграммы изображены на рис. Д.4. В первом из возможных подслучаев (знак "минус" в формуле (Д.49)) при  $\mu < 0$  имеется единственное — устойчивое — равновесие  $x = 0$ . При  $\mu > 0$  эта точка также существует, но теряет устойчивость, зато рождается пара устойчивых точек (Д.45). Таким образом, при изменении знака параметра устойчивое решение как бы раздваивается (так называемая суперкритическая бифуркация).

Во втором подслучае (знак "плюс" в формуле (Д.49)) точка  $x = 0$  устойчива при  $\mu < 0$  и неустойчива при  $\mu > 0$ . Кроме того, при  $\mu < 0$  имеется две симметричные неустойчивые точки

$$x_{\pm} = \pm\sqrt{-\mu} + O(\mu), \quad (\text{Д.50})$$

исчезающие при  $\mu > 0$  (субкритическая бифуркация).

1\*. При выполнении условий (Д.34) отображение (Д.2) в окрестности неподвижной точки сводится к отображению прямой в прямую

$$\bar{x} = x + F(x, \mu), \quad x, \mu \in R, \quad F(0, 0) = F'_x(0, 0) = 0. \quad (\text{Д.51})$$

а) В общем случае  $F'_\mu(0, 0) \neq 0, F''_{xx}(0, 0) \neq 0$  отображение (Д.51) после надлежащего масштабирования переменных примет вид

$$\bar{x} = x + \mu - x^2 + O(x^3, \mu^2). \quad (\text{Д.52})$$

Будем искать неподвижные точки отображения (Д.52), полагая  $\bar{x} = x$ . Для значений  $\mu > 0$  в окрестности начала координат имеется две таких точек, заданные формулой (Д.45).

Для решения вопроса об устойчивости вычислим мультипликатор для каждой из этих точек:

$$\rho_\pm = 1 + F''_{x\mu}(x_\pm, \mu) = 1 \mp 2\sqrt{\mu} + O(\mu). \quad (\text{Д.53})$$

Следовательно, точка  $x_+$  асимптотически устойчива, а точка  $x_-$  — неустойчива при достаточно малых значениях  $\mu$ .

Если  $\mu < 0$ , то отображение (Д.52) не имеет неподвижных точек вблизи начала координат. Наконец, для  $\mu = 0$  имеется единственная точка  $x = 0$ .

Можно сделать вывод: в рассматриваемом случае мы имеем бифуркацию "седло - узел", аналогичную случаю 1, а (рис. Д.2).

б) Пусть  $F(0, \mu) \equiv 0, F''_{xx}(0, 0) \neq 0, F''_{x\mu}(0, 0) \neq 0$ . Тогда после масштабирования переменных отображение (Д.51) запишется так:

$$\bar{x} = x + \mu x - x^2 + xO(x^2, \mu^2). \quad (\text{Д.54})$$

Полагая в (Д.54)  $\bar{x} = x$ , найдем неподвижные точки  $x_1 = 0, x_2 = \mu + O(\mu^2)$ . По аналогии со случаем 1, б получаем, что бифуркация относится к типу "смена устойчивости" (рис. Д.3).

в) Если правая часть в (Д.51) нечетна относительно  $x$ :

$$F(-x, \mu) \equiv -F(x, \mu)$$

и выполнены условия невырожденности

$$F''_{x\mu}(0, 0) \neq 0, \quad F'''_{xxx}(0, 0) \neq 0,$$

то в зависимости от знака последней величины имеются две возможности:

$$\bar{x} = x + \mu x \mp x^3 + xO(x^4, \mu^2). \quad (\text{Д.55})$$

Здесь аналогично случаю 1, в мы имеем бифуркацию типа "вилка" (см. рис. Д.4). В первом из возможных подслучаев (знак "минус" в

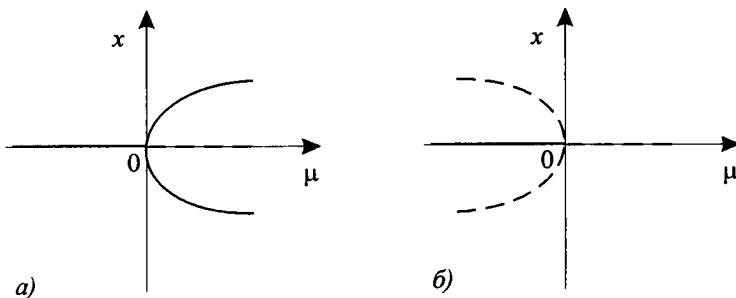


Рис. Д.4. Бифуркация "вилка": а) суперкритическая, б) субкритическая

формуле (Д.55)) при  $\mu < 0$  имеется единственная — устойчивая — неподвижная точка  $x = 0$ . При  $\mu > 0$  эта точка также существует, но теряет устойчивость, зато рождается пара устойчивых точек (Д.45).

Во втором подслучае (знак "плюс" в формуле (Д.55)) точка  $x = 0$  устойчива при  $\mu < 0$  и неустойчива при  $\mu > 0$ . Кроме того, при  $\mu < 0$  имеется две симметричные неустойчивые точки (Д.50), исчезающие при  $\mu > 0$ .

**2\***. При выполнении условий (Д.35) система (Д.2) в окрестности неподвижной точки сводится к отображению

$$\bar{x} = -x + F(x, \mu), \quad x, \mu \in R, \quad F(0, 0) = F'_x(0, 0) = 0. \quad (\text{Д.56})$$

В данном случае  $\rho \neq 1$  и, согласно аналогу теоремы Пуанкаре Д.5 для отображений, неподвижная точка существует и изолирована для достаточно малых значений параметра. Мультипликатор в этой точке равен

$$\rho = -1 + \mu F''_{xx}(0, 0) + O(\mu^2). \quad (\text{Д.57})$$

Следовательно, при изменении знака  $\mu$  неподвижная точка меняет неустойчивость на асимптотическую устойчивость. Более полную картину бифуркации дает рассмотрение квадрата отображения (Д.56):

$$\bar{\bar{x}} = -\bar{x} + F(\bar{x}, \mu) = x + a_1 \mu x + a_3 x^3 + O(\mu^2, x^4), \quad (\text{Д.58})$$

$$a_1 = F'_{\mu} F''_{xx} + 2F''_{x\mu}, \quad a_3 = -\frac{1}{2}(F''_{xx})^2 - \frac{1}{3}F'''_{xxx},$$

где производные вычисляются в начале координат. При выполнении условий невырожденности  $a_1 \neq 0$ ,  $a_3 \neq 0$  отображение (Д.58) испытывает в начале координат бифуркацию типа "вилка": суперкритическую, если  $a_1 a_3 < 0$  и субкритическую в противоположном случае. При этом симметричные ветви соответствуют решениям периода два для исходной системы (Д.56).

Заметим, что такая бифуркация не имеет аналога в системе (Д.1).

3. В случае, когда выполнены условия (Д.36), минимальная размерность фазового пространства равна двум. Ввиду вещественности

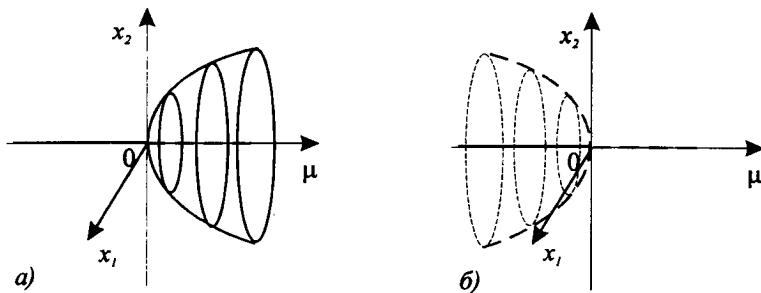


Рис. Д.5. Бифуркация Пуанкаре – Андронова – Хопфа

системы собственные значения матрицы  $\mathbf{A}(\mu)$  лежат симметрично относительно действительной оси и при изменении параметра в общем случае сходят с мнимой оси. При этом перемене знака  $\mu$  соответствует смена устойчивости положения равновесия на фазовой плоскости. Помощью подходящей замены переменных отображение может быть приведено к нормальной форме [Guckenheimer, Holmes, 1983]

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (\alpha\mu + \beta r^2)r + O(\mu^2r, \mu r^3, r^5), \\ \dot{\phi} &= \omega + \varphi_1\mu + \varphi_2r^2 + O(\mu^2, \mu r^2, r^4),\end{aligned}\quad (\text{Д.59})$$

где  $r, \phi$  — полярные координаты:  $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$ . Начало координат  $r = 0$  асимптотически устойчиво, если  $\alpha\mu < 0$  или  $\mu = 0, \beta < 0$  и неустойчиво в случаях  $\alpha\mu > 0$  и  $\mu = 0, \beta > 0$ .

Формулы для коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  приведем для случая, когда линейная часть системы при  $\mu = 0$  нормализована:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{Д.60})$$

При этом

$$\alpha = \frac{d}{d\mu}(\operatorname{Re} \lambda(\mu)) \Big|_{\mu=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu}(\operatorname{Tr} \mathbf{A}(\mu)) \Big|_{\mu=0}, \quad (\text{Д.61})$$

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{16}(F_{xxx}^1 + F_{xyy}^1 + F_{xxy}^2 + F_{yyy}^2) + \\ &+ \frac{1}{16\omega}[F_{xy}^1(F_{xx}^1 + F_{yy}^1) - F_{xy}^2(F_{xx}^2 + F_{yy}^2) - F_{xx}^1F_{xx}^2 + F_{yy}^1F_{yy}^2].\end{aligned}$$

Наряду с изолированной особой точкой, система (Д.59) обладает в случае  $\alpha\beta\mu < 0$  периодическим решением

$$r = \sqrt{-\alpha\mu/\beta} + O(\mu). \quad (\text{Д.62})$$

Данное решение асимптотически устойчиво, если  $\beta < 0$  и неустойчиво, если  $\beta > 0$ .

Заменяя, в случае необходимости,  $\mu$  на  $-\mu$ , можно добиться положительности коэффициента  $\alpha$ . Тогда в зависимости от знака  $\beta$  получим два случая. Если  $\beta > 0$ , то бифуркация субкритическая: для  $\mu < 0$  устойчивое положение равновесия существует с неустойчивым периодическим движением (циклом), а для  $\mu > 0$  имеется лишь неустойчивое равновесие (рис. Д.5, б). В случае  $\beta < 0$  бифуркация суперкритическая: устойчивое при  $\mu < 0$  равновесие теряет устойчивость при  $\mu > 0$  с одновременным рождением устойчивого инвариантного множества (рис. Д.5, а)

Данный тип бифуркации называют бифуркацией Пуанкаре – Андронова – Хопфа.

3\*. В случае, когда выполнены условия (Д.37), отображение можно привести к нормальной форме, аналогичной (Д.59):

$$\begin{aligned}\bar{r} &= r + (\alpha\mu + \beta r^2)r + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^4), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \varphi_0 + \varphi_1 \mu + \varphi_2 r^2 + O(\mu^2, \mu r^2, r^3), \\ \alpha &= \frac{d}{d\mu} \lambda(\mu) \Big|_{\mu=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} (\det \mathbf{A}(\mu)) \Big|_{\mu=0}.\end{aligned}\quad (\text{Д.63})$$

Формулы для вычисления коэффициента  $\beta$  довольно громоздки; они приведены в [Йосс, Джозеф, 1983].

Начало координат  $r = 0$  асимптотически устойчиво, если  $\alpha\mu < 0$  или  $\mu = 0$ ,  $\beta < 0$  и неустойчиво в случаях  $\alpha\mu > 0$  и  $\mu = 0$ ,  $\beta > 0$ .

Наряду с изолированной особой точкой, система (Д.63) обладает при условии  $\alpha\beta\mu < 0$  инвариантным множеством

$$r = \sqrt{-\alpha\mu/\beta} + O(\mu). \quad (\text{Д.64})$$

В зависимости от значений параметра  $\mu$  и коэффициентов  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , множество (Д.64) может состоять из периодических точек отображения (Д.63) либо из условно-периодических точек. Данное инвариантное множество асимптотически устойчиво, если  $\beta < 0$  и неустойчиво, если  $\beta > 0$ .

Заменяя, в случае необходимости,  $\mu$  на  $-\mu$ , можно добиться положительности коэффициента  $\alpha$ . Тогда в зависимости от знака  $\beta$  получим два случая. Если  $\beta > 0$ , то бифуркация субкритическая: для  $\mu < 0$  устойчивая неподвижная точка существует с неустойчивым инвариантным множеством, а для  $\mu > 0$  имеется лишь неустойчивая неподвижная точка. В случае  $\beta < 0$  бифуркация суперкритическая: устойчивая при  $\mu < 0$  неподвижная точка теряет устойчивость при  $\mu > 0$  с одновременным рождением устойчивого инвариантного множества.

Данный тип бифуркации называют бифуркацией Пуанкаре – Андронова – Хопфа для отображений или бифуркацией Неймарка – Саккера.

## С П И С О К Л И Т Е Р А Т У Р Ы

- Айзerman M. A., Гантмахер F. R. Об устойчивости периодических движений. //ПММ.—1958.—Т. 22, вып. 6.—С. 750–758.
- Александров Е. В., Соколинский В. Б. Прикладная теория и расчеты ударных систем.—М.: Наука, 1969.—199 с.
- Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы. //ДАН СССР.—1937.—Т. 14, № 5.—С. 247–251.
- Андронов А. А., Леонтьевич Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка.—М.: Наука, 1966.—568 с.
- Андронов А. А., Леонтьевич Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.—М.: Наука, 1967.—487 с.
- Аппель П. Теоретическая механика. Т.2.—М.: Физматгиз, 1960.—487 с.
- Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.—304 с.
- Арнольд В. И. Математические методы классической механики.—М.: Наука, 1979.—431 с.
- Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 3-е изд.—М.: Наука, 1984.—271 с.
- Арнольд В. И. Теория катастроф. 3-е изд.—М.: Наука, 1990.—127 с.
- Асташев В. К. К динамике осциллятора, ударяющегося об ограничитель. //Машиноведение.—1971, № 2.—С. 5–9.
- Ахметов М. У., Перестюк Н. А. Периодические и почти периодические решения сильно нелинейных импульсных систем. //ПММ.—1992.—Т. 56, вып. 6.—С. 926–934.
- Бабицкий В. И. Теория виброударных систем: Приближенные методы.—М.: Наука, 1978.—352 с.
- Бутин Н. Н., Леонтьевич Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. 2-е изд.—М.:Наука, 1990.—486 с.
- Белепкий В. В., Новиков Е. Т. Об относительном движении связки двух тел на орбите. Часть 1. //Космич. исслед.—1969.—Т. 7, № 3.—С. 377–384.
- Белепкий В. В. Об относительном движении связки двух тел на орбите. Часть 2. //Космич. исслед.—1969.—Т. 7, № 6.—С. 827–840.
- Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. //УМН.—1941.—т.9.—С. 191–211.
- Бернуlli И. Избранные сочинения по механике.—М.; Л.: Гостехиздат, 1937.—294 с.
- Беспалова Л.В. К теории виброударного механизма. //Изв.АН СССР.—1957.—Сер.ОТН, вып. 5,—С. 3–14.
- Биркгоф Дж. Д. Динамические системы.—М.; Л.: Гостехиздат, 1941.—320 с.
- Блеман И. И., Джанелидзе Г. И. Вибрационное перемещение.—М.: Наука, 1964.—410 с.
- Болотов Е. А. Об ударе двух тел при действии трения. //Изв. Моск. Инж. училища.—1908.—Ч.2, вып.2.—С. 43–55.
- Брусины В. А., Неймарк Ю. И., Фейгин М. И. О некоторых случаях зависимости периодических движений релейной системы от параметров. //Изв.ВУЗов.—1963.—Сер. Радиофизика, т.6, № 4.—С. 785–800.
- Быховский И. И., Дорохова А. Д., Зарецкий Л. Б., Лукомский С. И. О некоторых периодических движениях и структуре фазового пространства ударно-колебательной системы с постоянной восстанавливющей силой. // Изв.АН СССР.—1964.—Сер. Механика и машиностроение, №. 2.—С. 161–165.
- Вайнкоф Я. Ф., Иносов С. В. Непериодическое движение при вибромассопереносе в режимах с подбрасыванием. //Машиноведение.—1976.—№. 5.—С. 3–6.

- В и б а Я. А. Оптимизация и синтез виброударных машин.—Рига: Зинатне, 1988.—253 с.
- В и н н е р Г. М. Устойчивость равновесия механической системы с неудерживающей связью. //Вестник МГУ.—1989.—Сер.1. № 4.—С. 54–57.
- В и т т е н б у р г Й. Динамика систем твердых тел.—М.: Мир, 1980.—292 с.
- Г а л ь п е р и н Г. А., З е м л я к о в А. Н. Математические биллиарды.—М.: Наука, 1990 (Библиотека "Квант", вып.77).—287 с.
- Г л у ш к о в В. С., И в а н о в А. П. О безударных перелетах тяжелого тела вращения на гладкой плоскости.—М., 1991.—38 с.—Деп. в ВИНТИ 18.03.1991, № 1169-В91.
- Г о л д с м и т В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.—М.: Стройиздат, 1965.—448 с.
- Г о р б и к о в С. П., Н е й м а р к Ю. И. Основные режимы движения при вибротранспортировке с подбрасыванием. //Изв. АН СССР.—Сер. МТТ, 1981, а, № 4.—С. 39–50.
- Г о р б и к о в С. П., Н е й м а р к Ю. И. Вспомогательные скользящие движения динамических систем с ударными взаимодействиями. //Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвузовский сборник.—Горький: изд-во ГГУ, 1981, б.—Вып.5.—С. 59–64.
- Г о р б и к о в С. П. Особенности строения фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями. //Изв. АН СССР.—Сер. МТТ, 1987, № 3.—С. 23–26.
- Г о р б и к о в С. П. Установившиеся движения осциллятора с предварительным натягом и неподвижным ограничителем. //Изв. АН СССР.—Сер. МТТ, 1990, № 2.—С. 44–50.
- Г р е б е н и к о в Е. А., Р я б о в Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем.—М.: Наука, 1979.—431 с.
- Г у б а р ъ Н. А. О бифуркациях в окрестности "спитого" фокуса. //ПММ.—1971.—Т. 35, вып.5.—С. 937–941.
- Д а л а м б е р Ж. Динамика.—М.; Л.: Гостехиздат, 1950.—343 с.
- Д е м и д о в и ч Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.—М.: Наука, 1967.—472 с.
- Д е р я б и н М. В. О реализации неудерживающих связей. //ПММ.—1994.—Т. 58, вып. 6.—С. 136–140.
- Д е р я б и н М. В., К о з л о в В. В. К теории систем с односторонними связями. //ПММ.—1995.—Т. 59, вып. 4.—С. 531–539.
- Д ё м к и н Н. Б. Контактирование шероховатых поверхностей.—М.: Наука, 1970. 227 с.
- Д ж о н с о н К. Л. Механика контактного взаимодействия.—М.: Мир, 1989.—509 с.
- Д у б о ш и н Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы.—М.: Наука, 1964.—560 с.
- Ж у к о в с к и й Н. Е. Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости. /Полн.собр.соч. Т. 3.—М.; Л.: Гл. ред. авиационной лит-ры, 1936–1937.—С. 15–19.
- Ж у р а в л е в В. Ф. Метод анализа вибруударных систем при помощи специальных функций. //Изв. АН СССР.—1976.—Сер. МТТ, № 2.—С. 43–46.
- Ж у р а в л е в В. Ф. Исследование некоторых вибруударных систем методом негладких преобразований. //Изв. АН СССР.—1977.—Сер. МТТ, № 6.—С. 24–28.
- Ж у р а в л е в В. Ф. Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями. //ПММ.—1978.—Т. 42, вып. 5.—С. 781–788.
- Ж у р а в л е в В. Ф., К л и м о в Д. М. Прикладные методы в теории колебаний.—М.: Наука, 1988.—326 с.
- Ж у р а в л е в В. Ф., Ф у ф а е в Н. А. Механика систем с неудерживающими связями.—М.: Наука, 1993.—240 с.

- Закржевский М. В. Колебания существенно нелинейных механических систем.—Рига: Зинатне, 1980.—189 с.
- Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах.—М.: Наука, 1970.—143 с.
- Зукас Дж. А., Николос Т., Свифт Х. Ф., Грепшук Л. Б., Курран Д. Р. Динамика удара.—М.: Мир, 1985.—296 с.
- Иванов А. П., Маркеев А. П. О динамике систем с односторонними связями. //ПММ.—1984.—Т. 48, вып. 4.—С. 632–636.
- Иванов А. П. Об устойчивости в системах с неудерживающими связями. //ПММ.—1984.—Т. 48, вып. 5.—С. 725–732.
- Иванов А. П. Об уравнениях движения неголономной системы с неудерживающей связью. //ПММ.—1985, а.—Т. 49, вып. 5.—717–723.
- Иванов А. П. О периодических движениях тяжелого симметричного твердого тела с ударами о горизонтальную плоскость. //Изв. АН СССР.—1985, б.—Сер. МТТ, № 2.—С. 30–35.
- Иванов А. П. Об устойчивости перманентных вращений тела, подвешенного на струне, при наличии ударных взаимодействий. //Изв. АН СССР.—1985, в.—Сер. МТТ, № 6.—С. 47–50.
- Иванов А. П. Об ударах в системе с несколькими неудерживающими связями. //ПММ.—1987.—Т. 51, вып. 4.—С. 559–566.
- Иванов А. П. Конструктивная модель удара с трением. //ПММ.—1988.—Т. 52, вып. 6.—С. 895–902.
- Иванов А. П. О динамике тела на вибрирующем неудерживающем подвесе. //Изв. АН СССР.—1989.—Сер. МТТ, № 2.—С. 30–36.
- Иванов А. П. Качественная теория движения в системах с неудерживающими связями.—Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—М., МГУ, 1990.—236 с.
- Иванов А. П. О безударных движениях в системах с неудерживающими связями. //ПММ.—1992, а.—Т. 56, вып. 1.—С. 3–15.
- Иванов А. П. О безударных прыжках неоднородного колеса. 1. Случай гладкой опоры. //Изв. АН СССР.—1992, б.—Сер. МТТ, № 1.—С. 25–31.
- Иванов А. П. Энергетика удара с трением. //ПММ.—1992, в.—Т. 56, вып. 4.—С. 527–534.
- Иванов А. П. Моделирование систем с механическими соударениями.—М.: Изд-во Моск. ин-та приборостроения, 1992, г.—83 с.
- Иванов А. П. О безударных прыжках неоднородного колеса. 2. Шероховатая опора. //Изв. АН СССР.—1993, а.—Сер. МТТ, № 1.—С. 61–64.
- Иванов А. П. Аналитические методы в теории вибродемпфирующих систем. //ПММ.—1993, б.—Т. 57, вып. 2.—С. 5–21.
- Иванов А. П. Единая форма уравнений движения тяжелого твердого тела на горизонтальной опоре. //Изв. АН СССР.—1993, в.—Сер. МТТ, вып. 3.—С. 73–79.
- Иванов А. П. О динамике систем в окрестности касательного удара. //ПММ.—1994.—Т. 58, вып. 3.—С. 63–70.
- Иванов А. П. К задаче о центре удара. //ПММ.—1995, а.—Т. 59, вып. 1.—С. 162–164.
- Иванов А. П. О кратном ударе. //ПММ.—1995, б.—Т. 59, вып. 6.—С. 930–946.
- Иванов А. П., Базиан А. Б. Исследование асимптотических движений связки двух тел на круговой орбите. //Космич. исслед.—1995—Т. 33, № 5.—С. 485–490.
- Ишлинский А. Ю. О скользящих движениях динамических систем. //Прикл. механика.—1955.—№ 1. С. 51–66.
- Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.—М.: Мир, 1983.—300 с.
- Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 5-е изд.—М.: Наука, 1976.—576 с.

- Карапетян А. В., Румянцев В. В.** Устойчивость консервативных и диссипативных систем. //Итоги науки и техники. Общая механика. Т.6.—М.: ВИНИТИ, 1983.—132 с.
- Кильчевский Н. А.** Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар.—Киев: Наукова думка, 1976.—319 с.
- Киргетов В. И.** Об абсолютно упругом ударе материальных систем. //ПММ.—1960.—Т. 24, вып.5.—С. 781–789.
- Киргетов В. И.** Анализический метод механики в теории абсолютно упругого удара материальных систем. //ПММ.—1960.—Т. 25, вып.3.—С. 407–420.
- Кобринский А. Е., Кобринский А. А.** Виброударные системы. —М.: Наука, 1973.—592 с.
- Кобринский А. А., Кобринский А. Е.** Двумерные виброударные системы.—М.: Наука, 1981.—335 с.
- Козлов В. В.** Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями. //ПММ.—1988.—Т. 52, вып. 6.—С. 883–894.
- Козлов В. В.** Об ударе с трением. //Изв. АН СССР.—1989.—Сер. МТТ, № 6.—С. 54–60.
- Козлов В. В., Трещёв Д. В.** Бильярды. Генетическое введение в динамику систем с ударами.—.: Изд-во МГУ, 1991.—168 с.
- Кориолис Г.** Математическая теория явлений бильярдной игры.—М.: Гостехиздат, 1956.—235 с.
- Кори Г., Кори Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров.—М.: Наука, 1973.—831 с.
- Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения.—М.: Физматгиз, 1959.—211 с.
- Лавендел Э. Э., Субач А. П.** Результаты экспериментального исследования удара с трением. //В кн.: Вибрационная техника. - М., 1966.—С. 285–292.
- Ламб Г.** Теоретическая механика. Т.2.—М.; Л.: Гостехиздат, 1935.—311 с.
- Левин-Чивита Т., Амальди У.** Курс теоретической механики. Т.2, Ч.2.—М.: ИЛ, 1951.—555 с.
- Лихтенберг А., Либерман М.** Регулярная и стохастическая динамика.—М.: Мир, 1984.—528 с.
- Ля A.** Математическая теория упругости.—М.; Л.: ОНТИ, 1935.—674 с.
- Ляпунова А. М.** Общая задача об устойчивости движения. /Собр.соч., Т.2.—М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954.—С. 7–263.
- Ляпунов А. М.** Лекции по теоретической механике.—Киев: Наукова думка, 1982.—632 с.
- Мак-Миллан В. Д.** Динамика твердого тела.—М.: ИЛ, 1951.—468 с.
- Малкин И. Г.** Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.—М.; Л.: Гостехиздат, 1949.—244 с.
- Маркеев А. П.** Точки либрации в небесной механике и космодинамике.—М.: Наука, 1978.—312 с.
- Маркеев А. П.** Об устойчивости вращения твердого тела вокруг вертикали при наличии соударений с горизонтальной плоскостью. //ПММ.—1984.—Т. 48, вып. 3.—С. 363–369.
- Маркеев А. П.** О движении твердого тела с идеальной неудерживающей связью. //ПММ.—1985.—Т. 49, вып. 5.—С. 707–716.
- Маркеев А. П.** Теоретическая механика.—М.: Наука, 1990.—414 с.
- Маркеев А. П.** Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью.—М.: Наука, 1992.—335 с.
- Маркеев А. П., Холостова О. В.** Об устойчивости движения твердого тела при наличии соударений с вибрирующей плоскостью. /Некоторые задачи и методы исследования динамики механических систем.—М.: Изд-во МАИ, 1985.—С. 34–40.
- Марден Дж., Мак-Кракен М.** Бифуркация рождения цикла и ее приложения.—М.: Мир, 1980.—368 с.

- М е р к и н Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения.—М.: Наука, 1976.—320 с.
- М е т р и к и н В. С. Исследование устойчивости периодических движений системы с ударным взаимодействием. //Изв. АН СССР.—1975.—Сер. МТТ, № 3.—С. 43—48.
- М о з е р Ю. Лекции о гамильтоновых системах.—М.: Мир, 1973.—164 с.
- М о и с е е в Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики.—М.: Наука, 1981.—400 с.
- М у льт о н Ф. Р. Введение в небесную механику.—М.; Л.: 1935.—479 с.
- М у р Д. Основы и применения трибоники.—М.: Мир, 1978,—487 с.
- Н а г а е в Р. Ф. Правильные импульсные движения в одномерной системе. //ПММ.—1967.—Т. 31, вып. 2.—С. 242—252.
- Н а г а е в Р. Ф. Периодические режимы вибрационного перемещения.—М.: Наука, 1978.—160 с.
- Н а г а е в Р. Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями.—М.: Наука, 1985.—200 с.
- Н а г а е в Р. Ф., Х о л о д и л и н Н. А. К теории соударения бильярдных шаров. //Изв. АН СССР.—1992. Сер. МТТ, № 6.—С. 48—55.
- Н еймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. 2 (Элементы теории бифуркаций неподвижных точек преобразования). //Изв. ВУЗов.—1958.—Сер. Радиофизика, т.1, № 2.—С. 95—117.
- Н еймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1972.—471 с.
- Н еймарк Ю. И. Еще раз о парадоксах Пэнлеве. //Изв. АН СССР.—1995.—Сер. МТТ, № 1.—С. 17—21.
- Н еймарк Ю. И., Л а н д а П. С. Стохастические и хаотические колебания.—М.: Наука, 1987.—423 с.
- Н еймарк Ю. И., Ф у ф а е в Н. А. Динамика неголономных систем.—М.: Наука, 1967.—519 с.
- Н еймарк Ю. И., Ф у ф а е в Н. А. Парадоксы Пэнлеве и динамика тормозной колодки. //ПММ.—1995.—Т. 59, вып. 3.—С. 366—375.
- Н емцык В. Б., С т е п а н о в В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.—М.; Л.: Гостехиздат, 1947.—448 с.
- Н ъю т о н И. Математические начала натуральной философии. /Собр. трудов акад. А.Н.Крылова. Т.7.—М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936.—С. 1—676.
- П а н о в к о Я.Г. Введение в теорию механического удара.—М.: Наука, 1977—232 с.
- П а р с Л. А. Аналитическая динамика.—М.: Наука, 1971.—635 с.
- П р о с к у р я к о в А. П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1977.—256 с.
- П у а н к а р е А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.—М.; Л.: ОГИЗ, 1947.—392 с.
- П у а н к а р е А. Избранные труды. Т.1.—М.: Наука, 1971.—771 с.
- П у с тыльников Л. Д. Об одной динамической системе. //УМН.—1968.—T.XXIII, № 4(142)—С. 251—252.
- П у с тыльников Л. Д. О модели Ферми—Улама. //ДАН СССР.—1987.—Т. 292, № 3.—С. 549—553.
- П у с тыльников Л. Д. Модели Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики из механики и механизм ускорения Ферми. //УМН.—1995.—Т. 50, № 1.—С. 143—186.
- П э н л е в е П. Лекции о трении.—М.: Гостехиздат, 1954.—316 с.
- Р а г у ль с к е н е В. Л. Виброударные системы. Теория и применение.—Вильнюс: Минтис, 1974.—320 с.
- Р а п о п о р т Л. Б. Устойчивость равновесия систем с неудерживающими связями и знакопределенность пучка квадратичных форм в конусе. // ПММ.—1992.—Т. 56, вып. 4.—С. 597—603.

- Р а у с Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 1.—М.: Наука, 1983.—463 с.
- Р а ш е в с к и й П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд. 3.—М.: Наука, 1967.—664 с.
- Р у с а к о в И. Г., Х а р к е в и ч А. А. Вынужденные колебания системы, ударяющейся об ограничитель. //ЖТФ.—1942.—Т. 12. № 11–12.—С. 715–721.
- Р у ш Н., А б е т с П., Л е л у а М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.—М.: Мир, 1980.—300 с.
- Р э л ей . Теория звука. Т.1.—М.: Гостехиздат, 1940.—476 с.
- С а м с о н о в В. А. Очерки о механике: Некоторые задачи, явления и парадоксы.—М.: Наука, 1980.—64 с.
- С и н а я Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассыпающих билиардов. //УМН.—1970.—Т. 25, № 2.—С. 141–192.
- С и н и цы н В. А. Введение в теорию импульсивных движений.—М.: Изд-во Моск.авиапр-ва, 1981.—94 с.
- С о л н ц е в Ю. К. Об устойчивости по Ляпунову положений равновесия системы двух дифференциальных уравнений в случае разрывных правых частей. //Уч.записки МГУ.—1951.—Сер.матем., вып.148.—С. 144–180.
- С т а в р а к о в а Н. Е. Принцип Гамильтона – Остроградского для систем с односторонними связями. //ПММ.—1965.—Т. 29, вып. 4.—С. 738–741.
- С т о и м е н о в Л. Г. Некоторые результаты экспериментального изучения удара шероховатых тел при скольжении. //Прикл.механика.—1972.—Т. 8, № 8.—С. 116–120.
- С т о и м е н о в Л. Г. О решении проблемы косого удара тел. Модели удара шероховатых тел. //Прикл.механика.—1992.—Т. 28, вып. 8.—С. 3–10.
- С у б а ч А. П. Вынужденные колебания виброударной системы при неупругом соударении масс. //Вопросы динамики и прочности.—Рига, 1969.—№ 18.—С. 67–78.
- С у б а ч А. П. Исследование вынужденных колебаний системы платформа - загрузка при взаимном неупругом соударении масс. //Вопросы динамики и прочности.—Рига, 1970.—№ 20.—С. 63–74.
- С у с л о в Г. К. Теоретическая механика.—М.; Л.: Гостехиздат, 1946.—655 с.
- Т и м о ш е н к о С. П., Г у д ъ е р Дж. Теория упругости. 2 -е изд.—М.: Наука, 1979.—560 с.
- Т о л с т о й Д. М. Собственные колебания ползуна, зависящие от контактной жесткости, и их влияние на трение. //Докл. АН СССР.—1963.—Т. 53, № 4.—С. 820–823.
- У л а м С. М. О некоторых статистических свойствах динамических систем. //Сб. перев. "Математика".—1963.—Т. 7, № 5.—С. 137–142.
- У т к и н В. И. Скользящие движения в задачах оптимизации и управления.—М.: Наука, 1981.—367 с.
- Ф е д о с е н к о Ю. С., Ф е й г и н М. И. Периодические движения виброударника, включающие участок скользящего режима. //ПММ.—1971.—Т. 35, вып. 5.—С. 892–898.
- Ф е й г и н М. И. Удвоение периода колебаний при С-бифуркациях в кусочно непрерывных системах. //ПММ.—1970.—Т. 34, вып. 5.—С. 861–869.
- Ф е й г и н М. И. О рождении семейств субгармонических режимов в кусочно непрерывной системе. //ПММ.—1974.—Т. 38, вып. 5.—С. 810–818.
- Ф е й г и н М. И. О поведении динамических систем вблизи границ области существования периодических движений. //ПММ.—1977.—Т. 41, вып. 4.—С. 628–636.
- Ф е й г и н М. И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями.—М.: Наука, 1994.—285 с.
- Ф и л и п п о в А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.—М.: Наука, 1985.—224 с.

- Ф о р м а ль с к и й А. М. Моделирование антропоморфных механизмов.—М.: Наука, 1982.—368 с.
- Ф у ф а е в Н. А. Динамика системы в примере Пэнлеве-Клейна: о парадоксах Пэнлеве. //Изв.АН СССР.—1991.—Сер. МТТ, № 4.—С. 48–53.
- Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.—М.: Изд-во АН СССР, 1962.—535 с.
- Я к о б и К. Лекции по динамике.—М.; Л.: ОНТИ, 1936.—271 с.
- Я к у б о в и ч В. А., С т а р ж и н с к и й В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.—М.: Наука, 1972.—718 с.
- A p r e l l P. Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions. //J.de Mathématiques Pures et Appliquées.—1896.—5-ème série, t. 2.—Pp. 5–20.
- B a p a t C. N. The general motion of an inclined impact damper with friction. //J.Sound and Vibrations.—1995.—V. 184, No 3. Pp. 417–427.
- B a p a t C. N., S a n k a r S., P o p p l e w e l l N. Repeated impacts on a sinusoidally vibrating table reapprised. //J.Sound and Vibrations.—1986.—V. 108, No 1.—Pp. 99–115.
- B a t t l e J. A. On Newton's and Poisson's rules of percussive dynamics. //Trans.ASME, J.Appl.Mech.—1993.—V. 60, No 6.—Pp. 376–381.
- B h a t t V., K o e c h l i n g J. Three dimensional frictional rigid body impact. //ASME J.Appl.Mech.—1995.—V. 62, No 4.—Pp. 893–898.
- B o u l a n g e r G. Note sur le choc avec frottement des corps non parfaitement élastiques. //Revue scientifique.—1939.—No 5.—Pp. 325–327.
- B o u s s i n e s q J. Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques.—Paris: Gauthier-Villars, 1885.—721 p.
- B r a c h R. M. Moments between impacting rigid bodies. //Trans.ASME, J. Mech. Design.—1981.—V. 103, No 10.—812–817.
- B r a c h R. M. Friction restitution and energy loss in planar collisions. //Trans.ASME, J.Appl.Mech.—1984.—V. 51, No 1.—Pp. 164–170.
- B r a c h R. M. Rigid body collisions. //Trans. ASME, J.Appl.Mech.—1989.—V. 56, No 1.—Pp. 133–138.
- B r a c h R. M. Mechanical impact dynamics. Rigid body collisions.—N.Y.: Wiley, 1991.—260 p.
- B r e s a n A. Incompatibilità dei teoremi di esistenza e di unicità del moto per un tipo molto comune e regolare di sistemi meccanici, //Rend.Scu.Norm.di pizza.—1959.—Pp. 333–348.
- B r o w e r L. E. J. On continuous vector distributions. 1,2,3. //Verhandl. Nederl. Akad. Wetersh. Afd. Natuurk., Sec.1.—1909.—V. 11.—Pp. 850–858;—1910.—V. 12.—Pp. 716–734;—1910.—V. 13.—Pp. 171–186.
- B u d d C., D u x F. Chattering and related behaviour in impact oscillator. //Phil. Trans. Royal Soc. London.—1994,a.—V. 347 A, No 1683.—Pp. 365–389.
- B u d d C., D u x F. Intermittency in impact oscillators close to resonance. //Nonlinearity.—1994,b.—V. 7.—Pp. 1191–1224.
- B u d d C., D u x F. The effect of frequency and clearance variations on single-degree-of-freedom impact oscillator. //J.Sound and Vibrations.—1995—V. 184, No 3.—Pp. 475–502.
- C a r r J. Applications of Center Manifold Theory.—N.Y. et al: Springer-Verlag, 1981.—142 p.
- C a r r i e r o M., P a s c a l i E. Uniqueness of the one-dimensional bounce problem as a generic property in  $L_1([0, T], R)$ . //Bollettino U.M.I.—1982—V. 6, No 1 A.—Pp. 87–91.
- C h e r n i k o v A. A., S c h m i d t G. Chaotic motion of colliding oscillators. //Physics Letters.—1994.—Ser. A.—Pp. 328–332.

- Chow S. N., Hale J. K. Methods of bifurcation theory.—N.Y. et al.: Springer-Verlag, 1982.—515 p.
- Darboux M. G. Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps. //Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, Deuxième Série. T. 4, 1880. Ss. 126—160.
- Crawford F. S. A theorem on elastic collisions between ideal rigid bodies. //Am. J. Phys.—1989—V. 57, No 2.—Pp. 121—125.
- Farkas M. Periodic Motions.—N.Y.: Springer-Verlag, 1994 (Ser. Appl. Math. Sciences, Vol.104).—577 p.
- Foale S. Analytical determination of bifurcations in an impact //Proc. Roy. Soc. Lond.—1994.—Ser. A, v. 347.—Pp. 353—364.
- Foale S., Bishop S. R. Bifurcations in Impact Oscillator. // Nonlinear Dynamics.—1994.—V. 6.—P. 285.
- Foale S., Bishop S. R. Dynamical complexities of forced impacting systems. //Proc. Roy. Soc. Lond.—1992.—Ser. A, v. 338.—Pp. 547—556.
- Gajewski K., Radziszewski B. On the stability of impact systems. //Bull. of the Polish Academy of Sciences, Technical Sc.—1987.—V. 35, No 3—4. Pp. 183—188.
- Glocker C., Pfeiffer F. Dynamical systems with unilateral contacts. //Nonlinear Dynamics.—1992.—V. 3. Pp. 245—259.
- Golubitsky M., Schaeffer D. Singularities and Groups in Bifurcation theory, Vol.1.—N.Y. et al., Springer-Verlag, 1985.—463 p.
- Guckenheimer J., Holmes P. J. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields.—N.Y. et al.: Springer-Verlag, 1983.—453 p.
- Hasslinger K. H., Steininger D. A. Experimental characterization of sliding and impact friction coefficients between steam generator tubes and AVB supports. //J.Sound and Vibration.—1995.—V. 181, No 5.—Pp. 851—871.
- Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. //J. reine und angewandte Mathematik.—1882.—B. 92.—S. 156—171.
- Hoggan S. J. On the dynamics of rigid-block motion under harmonic forcing. //Proc. Roy. Soc. London.—1989.—V. 425 A, No 1869.—Pp. 441—476.
- Hoggan S. J. The effect of on damping on rigid block motion under harmonic forcing. //Proc. Roy. Soc. London.—1992, a.—V. 437 A, No 1899.—Pp. 97—108.
- Hoggan S. J. On the motion of a rigid block, tethered at one corner, under harmonic forcing. //Proc. Roy. Soc. London.—1992, b.—V. 439 A, No 1905.—Pp. 35—45.
- Holmes P. J. The Dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table. //J. Sound and Vibrations.—1982.—V. 84, No 2.—Pp. 173—189.
- Horaček Z. Impact of a Rough Ball Spinning Round its Vertical Diameter onto a Horizontal Plane.—Trans.Faculty of Mech. and Elec.Engg., Techn.Univ.of Prague, Czechoslovakia, 1948.—16 p.
- Horaček Z., Pacákova I. The theory of the spinning impact of imperfectly elastic bodies. // Czech. J. Phys.—1961.—V. B 11.—Pp. 46—65
- Hsu, C. S. U. Cell-to-cell mapping: A method of global analysis for nonlinear systems.—N.Y.: Springer-Verlag, 1987 (Ser.Appl.Math. Sciences, Vol.64).—352 p.
- Hunt K. H., Grossley F. R. E. Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact. // ASME J. of Appl. Mech.—1975.—No 6.—Pp. 440—445.
- Huygens C. Oeuvres Complètes, publiée par la Société hollandaise des Sciences. Vol.16.—The Hague: M.Nijhoff, 1829.—599 p.
- Ismakih M., von Bohm J., Ratty R. Devil's attractors and chaos of a driven impact oscillator. //Phys. Letters.—1985.—V. 107 A, No 8.—Pp. 343—346.
- Ivanov A. P. Stabilization of an impact oscillator near grazing incidence owing to resonance. //J. Sound and Vibrations.—1993.—V. 162, No 3.—Pp. 562—565.
- Ivanov A. P. Impact Oscillations: Linear Theory of Stability and Bifurcations //J.Sound and Vibrations.—1994,a.—V. 178, No 3.—Pp. 361—378.

- I v a n o v A. P. Analysis of chatter during soft landing by means of Lyapunov technique. //Proc. Workshop Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques. Benevento, Italy. September 7-9.—1994,b.—P.97-100.
- I v a n o v A. P. Bifurcations associated with grazing collisions. / in: Nonlinear Dynamics: New Theoretical and Applied Results.—1995,a.—Berlin: Akademie Verlag. Pp. 67-91.
- I v a n o v A. P. Visco-Elastic Approach to Impact with Friction. //Am. Mech. Div.—V.205: Impact, Waves and Fracture, eds. R.C.Batra, A.K.Mal and G.P.MacSithigh.—1995,b.—Pp. 115-127.
- I v a n o v A. P. Bifurcations in impact systems. //Chaos, Solitons and Fractals.—1996.—V.7, No 10. Pp. 1615-1634.
- J ä g e r J. Torsional Impact of elastic spheres. //Archive of Appl. Mech.—1994,a.—V. 64.—Pp. 235-248.
- J ä g e r J. Oblique Impact of similar bodies with circular contact. //Acta Mechanica.—1994,b.—V. 107.—Pp. 101-115.
- J e a n M. Dynamics of rigid bodies with dry friction and partially elastic collisions. //Int.Series of Num. Math.—1991.—V. 101.—Pp. 57-70.
- K a n e T. R., L e v i n s o n D. A. Dynamics: Theory and applications.—N.Y.: McGraw-Hill, 1985.—379 p.
- K e l l e r J. B. Impact with Friction. //Trans. ASME, J. Appl. Mech.—1986—V. 53, No 1.—Pp. 1-4.
- K e l v i n W. T., T a i t P. G. Treatise on Natural Philosophy. Vol.1, Part 1.—Oxford: Clarendon Press, 1867.
- K o w a l i k Z. J., F r a n a s z e k M., P i e r a n s k i P. Self-reanimating chaos in the bouncing-ball system. //Phys.Review A.—1988.—V. 37, No 10.—Pp. 4016-4022.
- L a m b a H. Chaotic, regular and unbounded behaviour in the elastic impact oscillator. //Physica D.—1995.—V. 82. Pp. 117-135.
- L a n k a r a n i H. M., N i k r a v e s h P. E. A Contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems. // J. Mech. Design.—1990.—V. 112.—Pp. 369-376.
- L e w i s i s A. D., R o g g e r s R. J. Experimental and numerical study of forces during oblique impact. //J. Sound and Vibrations—1988.—V. 125, No 3.—Pp. 403-412.
- L ö t s t e d t P. Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints. //SIAM J. Appl. Math.—1982.—V. 42, No 2. Pp. 281-296.
- L u b k i n J. L. The torsion of elastic spheres in contact. //J.Appl. Mech.—1951.—V. 18.—Pp. 183-187.
- M c L a u r i n C. A treatise on fluxions.—Edinburg: Ruddimans, 1742.—763 p.
- M a r c i M. De proportione Motus. /In book: Mach E. Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 7-th ed.—Leipzig: Brockhaus, 1912.—521 s.)
- M a w N., B a r b e r J. R., F a w c e t t J. N. The Rebound of Elastic Bodies in Oblique Impact. //Mech.Res.Comm.—1977.—V. 4.—Pp. 17-21.
- M a w N., B a r b e r J. R., F a w c e t t J. N. The Role of Elastic Tangential Compliance in Oblique Impact. //Trans. ASME, J. Lubr. Tech.—1981.—V. 103 A, No 1.—Pp. 74-80.
- M a y H. - O. Variational principles and differential inclusions for unilateral constraints in analytical mechanics. //Meccanica.—1984.—V. 19.—Pp. 315-319.
- M e l l o T. M., T u f i l l a r o N. B. Strange attractors of a bouncing ball. //Amer. J.of Physics—1987.—V. 55, No. 4.—Pp. 316-320.
- M e i j a a r d J. P. Continuous and discontinuous modelling of the contact between wheel flange and rail. /In book: Topics in Applied Mechanics. Eds.: Dijksman J.F., Niewstadt F.T.M.—Netherlands: Kluver Academic Publishers, 1993.—Pp. 119-126.
- M i n d l i n R. D. Compliance of elastic bodies in contact. //J. Appl. Mech.—1949.—V. 16. Pp. 259-268.
- M o o r e D. B., S h a w S. W. The experimental response of an impacting pendulum system. //Int. J. Non-linear mech.—1990.—V. 25, No 1. Pp. 1-16.

- N o r d m a r k A. B. Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator. //J. Sound and Vibrations.—1991.—V. 145, No 2. Pp. 279–297.
- N u s s e H. E., Y o r k e J. A. Dynamics: numerical explorations.—N.Y. et al.: Springer Verlag, 1994.—484 p.
- O s t e r m e y e r G. P. Zur numerischen Behandlung von elastischen Stoßen in Mehrkörpersystemen. //Ingenier-Archiv—1988—V. 58, No 1. Pp. 67–79.
- P a l i s J., d e M e l o W. Geometric theory of dynamical systems: An introduction.—N. Y. et al.: Springer Verlag, 1982.—198 p.
- P a o l i L., S c h a t z m a n M. Vibrations avec contraintes unilatérales et perte d'énergie aux impacts, en dimension finie. //C.R. Acad. Sci. Paris.—1993,a.—V. 317, sér. 1.—Pp. 97–101.
- P a o l i L., S c h a t z m a n M. Mouvement à un nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales: ces avec perte d'énergie. //Modélisation mathématique et analyse numérique.—1993,b.—V. 26, No 6.—Pp. 673–717.
- P e i x o t o M. M. On structural stability. //Ann.Math.—1959.—V. 69, No 1.—Pp. 199–222.
- P e r c i v a l e D. Uniqueness in the elastic bounce problem. //J. diff. equations.—1985.—V. 56, No 2.—Pp. 206–215.
- P e r c i v a l e D. Uniqueness in the elastic bounce problem 2. //J. diff. equations.—1991.—V. 90, No 2. Pp. 304–315.
- P e i f f e r F. Seltsame Attraktoren in Zahnradgetrieben. //Ingenier-Archiv.—1988.—V. 58.—S. 113–125.
- P e t e r k a F. Laws of impact motion of mechanical systems with one degree of freedom:
- Part 1. Theoretical analysis of  $n$  - multiple ( $1/n$ ) - impact motions. //Acta technica ČSAV.—1974.—No 4.—Pp. 462–473.
  - Part 2. Results of analogue computer modelling of the motion. //Acta technica ČSAV.—1974.—No 5.—Pp. 569–580.
- P e t e r k a F., V a c i k J. Laws of impact motion of mechanical systems with one degree of freedom. Part 3. Statistic characteristic of beat motion. //Acta technica ČSAV.—1981.—No 2.—Pp. 161–184.
- P e t e r k a F., K o t e r a T. Laws of impact motion of mechanical systems with one degree of freedom. Part 4. Analytical solution of the  $2/n$  - impact motion and its stability. //Acta technica ČSAV.—1981.—No 6. Pp. 747–758.
- Part 5. Regions of existence and stability of domains of attraction of different kinds of impact motion. //Acta technica ČSAV.—1982.—No 1, Pp. 92–117.
  - Part 6. Analytical and analogue solution of the multi-impact motion and its stability. //Acta technica ČSAV.—1984.—No 3. Pp. 255–279.
- P e t e r k a F. Úvod do kmitání mechanických soustav s vnitřními rázy.—Praha: Vydala Academia, nakl. ČSAV, 1981.—271 c.
- P e t e r k a F. Dynamics of impact motions of a beam between stops and of a spherical pendulum in a channel with a flow of liquid. //Advances in Mech.—1992,—V. 15, No 3–4. Pp. 93–121.
- P e t e r k a F. Transition to chaotic motion in mechanical systems with impacts. //J. Sound and Vibration.—1992.—V. 154, No 1. Pp. 95–115.
- P e i f f e r F. Seltsame Attraktoren in Zahnradgetrieben. //Ingenieur-Archiv.—1988.—V. 58.—Pp. 113–125.
- P i e r a ñ s k i P., M a l e c k i J. Noisy precursors and resonant properties of the period-doubling modes in a nonlinear dynamical system. //Phys. Review A.—1986.—V. 34, No 1. Pp. 582–590.
- P o i n c a r é H. Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles. //Journ. de Math., 3 Sér.—1881.—T. 7.—Pp. 375–422;—1882.—T. 8.—Pp. 251–296.
- P o i n c a r é H. Sur les courbes définies par les équations différentielles. //Journ. de Math., 4 Sér.—1885.—T. 1.—Pp. 167–244;—1886.—T. 2.—Pp. 151–217.

- Poisson S. D. *Traité de mécanique*. 3-me ed.—Bruxelles: Haumann, 1838.—XXIV, 447 p.
- Schatzman M. A class of nonlinear differential equations of second order in time. //Nonlinear Anal., Theory, Methods and Appl.—1978.—V. 2, No 3.—Pp. 355–373.
- Schatzman M. Problèmes unilatéraux d'évolution du 2ème ordre en temps. /Thèse de Doctorat d'État.—Paris, Université Pierre et Marie Curie, 1979.
- Schiehlen W., Gao J. Simulation des Stoßfreien Hüpfens. //ZAMM.—1989.—V. 69, No 5.—Ss. 302–303.
- Sears I. E. On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends. // Trans. Cambridge Phil. Soc.—1909.—V. 21, No 11.—Pp. 49–105.
- Senatore M. Existence and stability of periodic motions of a harmonically forced impacting system. //J. Acoustical Soc. of America.—1970.—V. 47, No 5, part 2.—P. 1390–1397.
- Stern-Venant B. D., Flamanant. Courbes représentatives des lois du choc longitudinal et du choc transversal d'une barre prismatique. //J. école polytech., Paris.—1889.—V. 59.—P. 97.
- Shaw S. W., Rand R. H. The transition to chaos in a simple mechanical system. //Int.J.Non-linear mech.—1989.—V. 24, No 1.—Pp. 41–56.
- Shaw S. W., Holmes P. J. A periodically forced impact oscillator with large dissipation. //ASME J. of Appl. Mech.—1983.—V. 50.—Pp. 849–857.
- Shaw S. W., Holmes P. J. A periodically forced piecewise linear oscillator. //J. of Sound and Vibrations.—1983.—V. 90.—Pp. 129–155.
- Shaw S. W. The dynamics of a harmonically excited system having rigid amplitude constraints. Part 1: Subharmonic motions and local bifurcations. Part 2: Chaotic motions and global bifurcations. //ASME J. Applied Mech.—1985.—V. 52, No 6.—Pp. 453–464.
- Smith Ch. E. Predicting rebounds using rigid-body dynamics. //Trans. ASME, J.Appl.Mech.—1991.—V. 58. Pp. 754–758.
- Stronge W. J. Rigid body collisions with friction. //Proc.Royal Soc.London.—1990.—Ser. A, V. 431, No 1881.—Pp. 169–181.
- Stronge W. J. Unravelling paradoxical theories for rigid body collisions. //Trans. ASME, J. Appl. Mech.—1991.—V. 58, No 12.—Pp. 1049–1055.
- Stronge W. J. Planar impact of rough compliant bodies. //Int. J. Impact Engng.—1994,a.—V. 15, No 4.—Pp. 435–450.
- Stronge W. J. Swerve during three-dimensional impact of rough rigid bodies. //Trans. ASME, J. Appl. Mech.—1994,b.—V. 61.—Pp. 605–611.
- Stronge W. J. Theoretical coefficient of restitution for planar impact of rough elasto-plastic bodies. //Amer. Mech. Divis. V.205: Impact, Waves, and Fracture (eds R.C.Batra, A.K.Mal and G.P.MacSithigh)—1995.—Pp. 351–362.
- Hompson J. M. T., Ghaffari R. Chaos after period-doubling bifurcations in the resonance of an impact oscillator. //Phys. Letters.—1982.—V. 91 A.—Pp. 5–11.
- Hompson J. M. T. Complex dynamics of compliant offshore structures. //Proc. Roy. Soc. London.—1983.—V. 387, No 1793.—Pp. 407–427.
- Timoshenko S. P. Zur Frage nach der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken. //Zeits. Math. Phys.—1913.—V. 62.—S. 198.
- Tufillaro N. B., Albano A. B. Chaotic dynamics of a bouncing ball. //Am. J. Phys.—1986.—V. 54, No 10.—Pp. 939–944.
- Wang Y., Mason M. T. Two-dimensional rigid-body collisions with friction. //Trans. ASME, J. Appl. Mech.—1992.—V. 59.—Pp. 635–642.
- Whiston G. S. Singularities in Vibro-Impact Dynamics. //J. Sound and Vibrations.—1992.—V. 152, No 3.—Pp. 427–460.
- Wiesenfeld K., Tufillaro N. B. Suppression of period doubling in the dynamics of a bouncing ball. //Physica D.—1987.—V. 26.—Pp. 321–335.
- Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.—N.Y. et al.: Springer-Verlag, 1990.—672 p.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>Ч а с т ь 1. ЗАКОНОМЕРНОСТИ МЕХАНИЧЕСКОГО УДАРА</b>	
<b>Глава 1. Ударные силы и импульсивное движение .....</b>	<b>8</b>
1.1. Основные понятия .....	8
Ударная сила и импульс (8). Импульсивное движение материальной точки (9). Импульсивное движение системы материальных точек (10).	
1.2. Основные теоремы динамики в применении к импульсивному движению .....	13
Теорема об изменении количества движения (13). Теорема об изменении кинетического момента (14). Теорема об изменении кинетической энергии (15).	
1.3. Импульсивное движение твердого тела .....	18
Свободное твердое тело (18). Твердое тело с неподвижной осью (21). Центр удара (22). Тело с неподвижной точкой (25). О реакции опоры в случае упругого крепления (26). Действие импульсивных сил на систему твердых тел (27).	
<b>Глава 2. Коллинеарное соударение двух твердых тел .....</b>	<b>30</b>
2.1. Классическое решение .....	30
Постановка задачи (30). Уравнения импульсивного движения и их решения (30). Гипотеза Ньютона (32).	
2.2. Волновая теория коллинеарного удара .....	34
Деформируемое твердое тело (34). Уравнение движения деформируемого стержня (35). Решение волнового уравнения методом Даламбера (37).	
2.3. Дискретные модели .....	40
Общая характеристика дискретных моделей (40). Одномерные деформируемые элементы (41). Исследование соударения твердых тел при помощи промежуточного деформируемого элемента (42). Квазистатические модели (44). Упругопластические деформации (46). Упругие деформации с вязким трением (47). Многомассовые дискретные модели (50).	
2.4. Роль "конечных" сил в теории низкоскоростного удара ...	52
Уравнения удара с учетом "конечных" сил (52). Соударение деформируемого стержня с горизонтальной опорой (53). Квазистатическая модель удара с дополнительными силами (56). Вязкоупругая модель низкоскоростного удара (60). Выводы (65).	
<b>Глава 3. Пространственное соударение двух свободных твёрдых тел .....</b>	<b>66</b>
3.1. Классическая стереомеханика .....	66
Допустимые значения ударного импульса (66). Удар без трения (69). Удар шероховатых тел с кулоновским трением (70). Различные опре-	

деления коэффициента восстановления (76). Другие виды ударного трения (80).	
3.2. Вязкоупругие модели пространственного удара .....	81
Общее уравнение пространственного удара (81). Случай абсолютно гладких поверхностей (82). Квазистатические модели удара шероховатых тел (84). Соударение шероховатых тел с диссипацией (86). Удар шара о шероховатую плоскость (87). Об учете ненулевого размера области контакта (90). Выводы (92).	
<b>Глава 4. Стесненный удар .....</b>	<b>93</b>
4.1. Постановка задачи и методы ее решения .....	93
Понятие стесненного удара (93). Аксиоматический метод (93). Дискретные модели стесненного удара (98). Задача Буссинеска (101). Выводы (103).	
4.2. Соударение маятника с препятствием .....	104
Постановка задачи и "классическое" решение (104). Определение закономерностей удара при учете упругости подвеса (109). Выводы (114).	
4.3. Соударение тел, имеющих дополнительную точку контакта .....	114
Постановка задачи и примеры (114). Случай шарнирного крепления (115). Случай одностороннего контакта с гладкой опорой (120). Случай одностороннего контакта с шероховатой опорой (124). Многозвездный механизм с двумя опорами (129). Выводы (134).	
<b>Глава 5. Соударение нескольких твердых тел .....</b>	<b>135</b>
5.1. Постановка задачи и обзор методов решения .....	135
Краткая история задачи о кратном ударе (135). Метод независимого восстановления (135). Метод последовательных "парных" соударений (137). Метод "вдавливания" (139). Метод статистического ансамбля (143). Выводы (144).	
5.2. Соударение трех твердых тел .....	145
Коллинеарный удар трех шаров (145). Пространственное соударение трех шаров (148). Соударение трех тел произвольной формы (151). Случай шероховатых тел (153).	
5.3. Соударение многих твердых тел .....	153
Особенности соударения при наличии трех и более ударных пар (153). Выводы (158).	
<b>Ч а с т ь 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЙ С МЕХАНИЧЕСКИМИ УДАРАМИ</b>	
<b>Глава 6. Уравнения движения систем с односторонними связями .....</b>	<b>159</b>
6.1. Односторонние связи в механике .....	159
Основные понятия и примеры (159). Реакция односторонней связи (161). Уравнения движения в независимых координатах (167).	

6.2. Основные типы движения в системе с односторонней связью и их математическое описание .....	168
Перелеты (168). "Скользящие" режимы (170). Сход со связи (170). Удар при "приземлении" (171). "Приземление" без удара (172). "Тангentialный" удар (172). Другие виды движения (176). Кратный удар в системе с несколькими односторонними связями (179).	
6.3. Метод отражения в системах с упругим ударом без трения .....	180
Метод припасовывания (180). Метод выпрямления биллиардной траектории (182). Биллиардная аналогия в системе с одной степенью свободы (183). Уравнения удара в обобщенных координатах (185). Уравнения Рауса для многомерных систем (188). Непрерывное представление в гамильтоновой форме (189). Примеры интегрируемых биллиардных задач (193).	
6.4. Непрерывное представление систем с неупругим ударом .....	196
Система с одной степенью свободы и постоянным коэффициентом восстановления (196). Произвольный закон восстановления (199). Случай нескольких степеней свободы (200). Система с двумя односторонними связями (201). Связи, выражаемые двойным неравенством (203).	
6.5. Непрерывное представление в системах с сухим трением .....	205
Вспомогательная замена переменных (205). Падение шара на шероховатую плоскость (207). Выводы (209).	
<b>Глава 7. Устойчивость в системах с ударами .....</b>	<b>210</b>
7.1. Устойчивость положений равновесия в системах с односторонними связями .....	210
Условия равновесия системы с идеальными связями (210). Условия устойчивости системы с потенциальными силами (211). Об устойчивости в системах с неупругими ударами (214).	
7.2. Устойчивость периодических движений с ударами .....	217
Понятие устойчивости в системах с ударами (217). Построение характеристического уравнения (221). Примеры вычисления матрицы у dara (223). Устойчивость одноударных периодических движений частицы на выбирирующем основании (224). Об устойчивости движений с кратными ударами (226).	
7.3. Бифуркации периодических движений с ударами .....	229
Случай невырожденных ударов (229). Движения с касаниями ограничителя (231). Бифуркация касания в системе с одной степенью свободы (234). Бифуркация касания в системе с несколькими степенями свободы (238). Выводы (239).	
<b>Глава 8. Движения с участками скольжения .....</b>	<b>240</b>
8.1. Общие свойства движений с участками скольжения .....	240
Условия существования (240). Вариация скользящих движений (242). Существование и устойчивость периодических движений (244).	

8.2. Периодические безударные движения в консервативной системе с двумя степенями свободы .....	246
Существование и устойчивость (246). Асимптотические движения с участками скольжения и перелетами (254).	
8.3. Исследование характеристик "дребезга" в процессе "мягкой" посадки .....	258
Постановка задачи (258). Система с одной степенью свободы (259).	
Случай нескольких степеней свободы (263).	
<b>Глава 9. Динамика виброударной системы с одной степенью свободы .....</b>	<b>265</b>
9.1. Динамическая система на полу平面ости .....	265
Непрерывное представление на вспомогательной плоскости (265). Типы особых точек (266). Бифуркации начала координат (268). Орбитальная устойчивость периодических движений (272). Бифуркации предельных циклов (279).	
9.2. Качественный анализ фазового портрета .....	281
Предельные точки траекторий (281). Индекс кривой на полу平面ости (282). Признаки существования предельных циклов (286). Структурная устойчивость (286).	
9.3. Система с периодическим возбуждением .....	288
Особые точки и их характер (289). Устойчивость периодических движений (290). Бифуркации периодических движений (291). Численный анализ фазового портрета (292). Частица на вибрирующем основании (293). Линейный виброударник (299). Выводы (303).	
<b>Дополнение. Элементы теории периодических движений в гладких динамических системах .....</b>	<b>304</b>
Д.1. Основные понятия .....	304
Д.2. Построение периодических движений .....	306
Д.3. Устойчивость положений равновесия и периодических движений .....	309
Д.4. Бифуркации положений равновесия и периодических движений .....	313
<b>Список литературы .....</b>	<b>322</b>