Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Факультет непрерывного и дистанционного обучения

Кафедра программного обеспечения информационных технологий

Электронный учебно-методический комплекс
по дисциплине

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

Для студентов специальности

1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий

Минск 2010

Сведения об ЭУМК

Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине «Теория информации» предназначен для студентов специальности программное обеспечение информационных технологий, а также может быть использован аспирантами и преподавателями высших учебных заведений, и практическими работниками предприятий.

Электронный учебно-методический комплекс составлен на основе рабочей учебной программы по курсу «Теория информации», утверждённой деканом факультета непрерывного и дистанционного обучения <дата утверждения>, регистрационный № УД 11-XX-YY/P и рабочей учебной программы для специальности 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий».

Составитель:
С.В. Ярмолик, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий Учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидат технических наук.

Рассмотрен и рекомендован к изданию на заседании кафедры программного обеспечения информационных технологий, протокол № __ от __.__.2010.

Одобрен и рекомендован к изданию методической комиссией факультета компьютерных систем и сетей, протокол № __ от __.__.2010.

Методические рекомендации по изучению дисциплины

В соответствии с учебным планом студенты дистанционной формы обучения студентов по специальности программное обеспечение информационных технологий изучают курс «Теория информации».

Учебным планом по данному курсу предусмотрено изучение теоретических вопросов и выполнение индивидуальных практических работ и контрольной работы по наиболее актуальным темам. Изучение курса заканчивается сдачей экзамена. К сдаче экзамена студенты допускаются только при условии выполненных и защищенных индивидуальных практических работ и контрольной работы.

Рекомендуется изучать курс «Теория информации» в соответствии с рабочей программой. Сначала необходимо ознакомиться с содержанием курса, затем изучить рекомендуемую литературу, обращая внимание на вопросы, выделенные в рабочей программе, после чего изучить теоретическое изложение курса по приведенным разделам, темам и вопросам, ответить на контрольные вопросы, выполнить задачи для решения (выполнения контрольных работ) в соответствии с заданием.

Так как теоретический материал излагается в строгой логической последовательности, рекомендуется изучать данную дисциплину, придерживаясь данной логики.

Рабочая учебная программа

Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета непрерывного
и дистанционного обучения
_____ В. М. Бондарик
«____» _____ 2010 г.
Регистрационный № УД-11-23-___/р.

Теория информации

Рабочая учебная программа

для специальности 1-40 01 01
Программное обеспечение информационных технологий

Факультет	**непрерывного и дистанционного обучения**
Кафедра	**программного обеспечения информационных технологий**
Курс	**четвертый**
Контрольные работы	**1 работы**
Индивидуальные практические работы	**2 работы**
Всего часов	**158 часов**
Экзамен	**4 курс**
Форма получения высшего образования	**дистанционная**

Минск 2010

Рабочая учебная программа составлена на основе рабочей учебной программы «Теория информации» для специальности 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий» дневной формы обучения.

Составитель:
С.В. Ярмолик, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий Учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидат технических наук.

Рассмотрена и рекомендована к утверждению на заседании кафедры программного обеспечения информационных технологий, протокол № __ от __.__.2010.

Зав. кафедрой ПОИТ_____ В.В. Бахтизин

Одобрена и рекомендована к утверждению научно-методической комиссией факультета № __ от __.__.2010.

Председатель _____ М.М. Лукашевич

СОГЛАСОВАНО
Начальник отдела
методического обеспечения
учебного процесса _____ Ц. С. Шикова

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Кафедра, обеспечивающая изучение этой дисциплины	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Защита информации	Программного обеспечения информационных технологий	нет	Учебные программы согласованы, дублирования нет, протокол № __ от __.__.2010 г.

СОГЛАСОВАНО:

Зав. кафедрой программного обеспечения
информационных технологий В.В. Бахтизин

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цель преподавания дисциплины. Дисциплина «Теория информации» является одной из основных дисциплин, формирующих знания студентов в области получения, обработки и преобразования дискретной информации. Целью преподавания дисциплины является получение студентами знаний о современных мерах оценки количества информации, ее криптографического и запутывающего преобразований и использования в различных приложениях.

Задачи изучения дисциплины. В результате изучения дисциплины обучаемый должен:

– понимать основополагающие концепции теории информации, включающие количественную меру информации;

– понимать основные положения теории криптографического преобразования информации;

– обладать навыками формирования псевдослучайных числовых последовательностей и их использования для прикладных целей, в том числе для потоковых криптографических систем;

– знать основы теории информации;

– знать симметричное и асимметричное криптографическое преобразование информации;

– знать алгоритмы генерирования псевдослучайных чисел и их применение для потоковых криптографических систем;

– знать способы построения абсолютно секретных систем шифрования информации;

– знать теорию и практику криптографических систем на базе эллиптических кривых;

– знать элементы теории вычислительной сложности;

– знать теоретические основы эквивалентного преобразования алгоритмов;

– знать методы защиты программного обеспечения путем запутывающего кодирования;

– знать протоколы и алгоритмы доказательства с нулевым знанием;

– уметь использовать на практике количественные меры информации;

– уметь генерировать псевдослучайные числовые последовательности;

– уметь реализовывать абсолютно секретные криптосистемы и криптографические системы на базе эллиптических кривых;

– применять методы обфускации для защиты программного обеспечения от обратного проектирования.

Перечень дисциплин, усвоение которых необходимо для изучения данной дисциплины

№ п./п.	Название дисциплины	Раздел, тема
1.	Конструирование программ и языки программирования	Тема: «Операторы управления»
2.	Основы алгоритмизации и программирования	Темы: «Определение алгоритма», «Структура программы»

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Номер		Название тем	Контрольная работа и индивидуальная практическая работа	Оснащение контрольных работ	Литература (номера)	Рекомендуемый объём для изучения (в часах)	Форма контроля знаний
Недели	Темы						
1	2	3	4	5	6	7	8
Четвертый курс							
1	1	Теория информации.			3, 4, 7, 10, 11, 13, 14, 20	4	
2	2	Мера информации.			3, 4, 7, 10, 11	2	
3	3	Криптографические системы.			9, 16, 17, 19, 20	6	
4	3	Криптографические системы.			9, 16, 17, 19, 20	4	
5	4	Кодирование информации			1, 2, 3	6	
6	5	Элементы теории чисел.			1, 2, 5, 6, 21, 26	2	
7	6	Псевдослучайные числа.			1, 2, 5, 15, 20, 21, 26	6	
8	7	М-последовательности.	1	1	5, 6, 15, 23, 25	4	Зачёт по индивидуальной практической работе

1	2	3	4	5	6	7	8
9	8 9	Тесты случайности. Генераторы криптографического ключа.			15, 27, 28, 29 9, 15, 17	6	
10	9	Генераторы криптографического ключа.			9, 15, 17	10	
11	10 11	Потоковое шифрование. Эллиптические криптосистемы.			9, 15 16	8	
12	11	Эллиптические криптосистемы.			16	2	
13	12	Квантовая криптография.	2	1	16, 22	4	Зачёт по индивидуальной практической работе
14	13	Элементы теории сложности.			4, 10, 16	2	
15	13 14	Элементы теории сложности. Сложности программного обеспечения.			4, 10, 16 12, 18, 24	12	
16	15 16 17	Преобразование алгоритмов. Обфускация. Доказательство с нулевым знанием	1	1	12, 18, 24 12, 18, 24 12, 18, 24	2	Зачёт по контрольной работе
							Зачёт (30 ч)

1. Наименование тем, их содержание

Тема 1. Теория информации

Сущность понятия информация. Определения информации. История развития теории информации. Теория информации. Теория Шеннона. Получение, преобразование и передача информации.

Р.Л.: [3]; [4]; [7]; [10]; [11]; [13]; [14]; [20].

Тема 2. Мера информации

Мера информации. Энтропия.

Р.Л.: [3]; [4]; [7]; [10]; [11].

Тема 3. Криптографические системы

Классификация криптографического преобразования информации. Симметричные и ассиметричные алгоритмы криптографического преобразования информации. Перестановочные и подстановочные алгоритмы шифрования. Гомофонные алгоритмы шифрования. Шифры Плэйфея и Вижинера. Полиалфавитное шифрование. Роторные машины.

Р.Л.: [9]; [16]; [17]; [19]; [20].

Тема 4. Кодирование информации

Кодирования дискретной информации с целью ее сжатия и защиты от внешних воздействий при передаче.

Р.Л.: [1]; [2]; [3].

Тема 5. Элементы теории чисел

Элементы теории чисел. Простые числа. Теория вычетов. Теорема Ферма. Функция Эйлера. Теорема Эйлера. Китайская теорема об остатках.

Р.Л.: [1]; [2]; [5]; [6]; [21]; [26].

Тема 6. Псевдослучайные числа

Конгруэнтные алгоритмы генерирования псевдослучайных чисел. Примитивные порождающие полиномы.

Р.Л.: [1]; [2]; [5]; [15]; [20]; [21]; [26].

Тема 7. М-последовательности

Методы формирования М-последовательностей. Свойства М-последовательностей

Р.Л.: [5]; [6]; [15]; [23]; [25].

Тема 8. Тесты случайности

Тесты случайности для псевдослучайных последовательностей, используемых в криптографии.

Р.Л.: [15]; [27]; [28]; [29].

Тема 9. Генераторы криптографического ключа

Генераторы криптографического ключа. Генераторы Геффе. Пороговые генераторы и др. Синхронные и самосинхронизирующие потоковые криптосистемы.

Р.Л.: [9]; [15]; [17].

Тема 10. Потоковое шифрование

Применение симметричных криптосистем (DES, IDEA, BLOWFISH, AES) для потокового шифрования.

Р.Л.: [1]; [3]; [4]; [5]; [8]; [10]; [12]; [29].

Тема 11. Эллиптические криптосистемы

Эллиптические группы. Операция сложения двух точек эллиптической группы. Скалярное умножение точки эллиптической группы.

Р.Л.: [16].

Тема 12. Квантовая криптография

Криптосистемы на базе гиперэллиптических кривых. Вероятностные криптосистемы. Квантовая криптография.

Р.Л.: [16]; [22].

Тема 13. Элементы теории сложности

Временная и пространственная сложность. Машина Тьюринга. NP – полные. NP – сложные задачи. Вычислительная сложность. Оценка вычислительной сложности.

Р.Л.: [4]; [10]; [16].

Тема 14. Сложность программного обеспечения

Метрики сложности программного обеспечения.

Р.Л.: [12]; [18]; [24].

Тема 15. Преобразование алгоритмов

Преобразование алгоритмов. Преобразование алгоритмов с целью их оптимизации.

Р.Л.: [12]; [18]; [24].

Тема 16. Обфускация

Лексическое запутывающее преобразование программ (обфускация). Запутывание кода программы.

Р.Л.: [12]; [18]; [24].

Тема 17. Доказательство с нулевым знанием

Алгоритмы доказательства с нулевым знанием.

Р.Л.: [12]; [18]; [24].

2. Контрольные работы, их характеристика

№ п./п.	Название темы	Характеристика	Объём в часах
1.	Темы 1-4	Целью работы является изучение алгоритмов, методов и конкретных схем преобразования информации, в том числе, криптографического преобразования для целей защиты информации посредством работы с литературными источниками и закрепление полученных знаний путём решения типовых задач теории информации.	8
		Итого	**8**

3. Индивидуальные практические работы, их характеристика

№ п./п.	Название темы	Характеристика	Объём в часах
2.	Темы 1-4	Целью индивидуальной практической работы является изучение методов и алгоритмов преобразования информации на примере простейших криптографических алгоритмов, а также оценка их эффективности.	8
3.	Темы 1-4	Целью индивидуальной практической работы является изучение методов и алгоритмов преобразования информации на примере сложных прикладных криптографических алгоритмов, а также оценка их эффективности. методов диагностики и оптимизации материальных потоков посредством работы с литературными источниками и закрепление полученных знаний путём решения типовых задач	8
		Итого	**16**

4. ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. Бухштаб, А. А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.

2. Виноградов, И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. – 9-е изд., перераб. – М. : Наука, 1981. – 412 с.

3. Галлагер, Р. Теория информации и надежная связь / Р. Галлагер. – М. : Сов. радио, 1974. – 720 с.

4. Каган, И. М. Прикладная теория информации / И. М. Каган. – М. : Радио и связь, 1981. – 216 с.

5. Кнут, Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2 : Получисленные алгоритмы / Д. Кнут. – М. : Мир, 1977. – 724 с.

6. Коблиц, Н. Курс теории чисел и криптографии / Н. Коблиц ; пер. с англ. – М. : ТВП, 2001. – 260 с.

7. Колесник, В. Д. Курс теории информации / В. Д. Колесник, Г. Ш. Полтырцев. – М. : Наука, 1982. – 416 с.

8. Кричевский, Р. Е. Сжатие и поиск информации / Р. Е. Кричевский. – М. : Радио и связь, 1989. – 168 с.

9. Романец, Ю. В. Защита информации в компьютерных системах и сетях / Ю. В. Романец, П. А. Тимофеев, В. Ф. Шаньгин. – М. : Радио и связь, 1999.

10. Свирид, Ю. В. Основы теории информации / Ю. В. Свирид. – Минск : БГУ, 2003. 137 с.

11. Стратонович, Р. Л. Теория информации / Р. Л. Стратонович. – М. : Сов. радио, 1975. – 424 с.

12. Чернов, А. В. Анализ запутывающих преобразований программ // Труды Института системного программирования : сб. ст. / А. В. Чернов ; под. ред. В. П. Иванникова. – М. : ИСП РАН, 2002. – С. 34–41.

13. Шеннон, К. Э. Теория связи в секретных системах // В кн. : Шеннон К. Э. Работы по теории информации и кибернетике. – М. : ИЛ, 1963. – С. 333–402.

14. Шеннон, К. Теория связи в секретных системах // В кн. : Введение в криптографию / К. Шеннон ; под. общ. ред. В. В. Ященко. – М. : МЦНМО, ЧеРо, 1998.

15. Ярмолик, В. Н. Генерирование и применение псевдослучайных сигналов в системах испытаний и контроля / В. Н. Ярмолик, С. Н. Демиденко. – Минск: Наука и техника, 1986.– 200 с.

16. Ярмолик, В. Н. Криптография, стеганография и охрана авторского права / В. Н. Ярмолик, С. С. Портянко, С. В. Ярмолик. – Минск: Издат. центр БГУ, 2007. – 241 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

17. Асосков, А. Поточные шифры / А. Асосков, М. Иванов, А. Мирский. – М. : Кудиц-образ, 2003. – 298 с.

18. Казарин, О. В. Теория и практика защиты программ / О. В. Казарин. – М. : МГУ, 2004. – 450 с.

19. Скляров, Д. Искусство защиты и взлома информации / Д. Скляров. – М. : BHV, 2004. – 288 с.

20. Самсонов, Б. Теория информации и кодирования / Б. Самсонов, Е. Плохов, А. Филоненков. – М. : Феникс, 2002. – 288 с.

21. Холл, М. Комбинаторика / М. Холл. – М. : Мир, 1970. – 424 с.

22. Bennett, C. H. Quantum cryptography / C. H. Bennett, G. Brassard, A. K. Ekert // Scientific American. – 1992. – №267. – P. 50–57.

23. Blum, M. How to generate cryptographically strong sequences of pseudo-random bits / M. Blum, S. Micali // SIAM J. on Computing. – 1984. – Vol.13. – P. 850–864.

24. Collberg, C. Watermarking, tamper proofing and obfuscation – tools for software protection / C. Collberg, C. Thomborson // IEEE Trans. on Software Engineering. – 2002. – Vol. 28. – P. 735–746.

25. Golomb, S.W. Shift Register Sequences / S. W. Golomb. – San Francisco. : Holden-Day, 1967. – 219 p.

26. Koblitz, N. Course in number theory and cryptography / N. Koblitz. – New-York. : Springer-Verlag, 1987. – 417 p.

27. Luby, M. Pseudorandmness and cryptographic applications / M. Luby. – New York. : Princeton Univ. Press, 1996. – 346 p.

28. Rabin, M. Probabilistic algorithms for testing Primality / M. Rabin // Journal of Number Theory. – 1980. – Vol.12. – P. 128–138.

29. Solovay, R. A Fast Monte-Carlo Test for Primality / R. Solovay, V. Strassen // SIAM J. Comp. – 1978. – Vol.7 (1). – P. 118–129.

5. ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММ, НАГЛЯДНЫХ И ДРУГИХ ПОСОБИЙ, МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ И МАТЕРИАЛОВ И ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ОБУЧЕНИЯ

1. Операционная система (например, Windows)

2. Среда программирования (например, Microsoft Visual Studio .NET)

3. Персональный компьютер с операционной системой Windows (XP или NT).

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Лекции

Тема 1. Теория информации

http://www.tspu.tula.ru/ivt/old_site/umr/timoi/solovieva/Computer/sys_kod.htm

Термин **"информатика"** (франц. *informatique*) происходит от французских слов *information* (информация) и *automatique* (автоматика) и дословно означает "информационная автоматика". Широко распространён также англоязычный вариант этого термина — "*Computer science*", что означает буквально "компьютерная наука".

Информатика — это основанная на использовании компьютерной техники дисциплина, изучающая структуру и общие свойства информации, а также закономерности и методы её создания, хранения, поиска, преобразования, передачи и применения в различных сферах человеческой деятельности. В 1978 году международный научный конгресс официально закрепил за понятием "информатика" области, связанные с разработкой, созданием, использованием и материально-техническим обслуживанием систем обработки информации, включая компьютеры и их программное обеспечение, а также организационные, коммерческие, административные и социально-политические аспекты компьютеризации — массового внедрения компьютерной техники во все области жизни людей. Таким образом, информатика базируется на компьютерной технике и немыслима без нее.

Информатика — научная дисциплина с широчайшим диапазоном применения. Её основные направления:

- разработка вычислительных систем и программного обеспечения;
- теория информации, изучающая процессы, связанные с передачей, приёмом, преобразованием и хранением информации;
- методы искусственного интеллекта, позволяющие создавать программы для решения задач, требующих определённых интеллектуальных усилий при выполнении их человеком (логический вывод, обучение, понимание речи, визуальное восприятие, игры и др.);
- системный анализ, заключающийся в анализе назначения проектируемой системы и в установлении требований, которым она должна отвечать;
- методы машинной графики, анимации, средства мультимедиа;
- средства телекоммуникации, в том числе, глобальные компьютерные сети, объединяющие всё человечество в единое информационное сообщество;
- разнообразные приложения, охватывающие производство, науку, образование, медицину, торговлю, сельское хозяйство и все другие виды хозяйственной и общественной деятельности.

Термином информатика обозначают совокупность дисциплин, изучающих свойства информации, а также способы представления, накопления, обработки и передачи информации с помощью технических средств. Теоретическую основу информатики образует группа фундаментальных наук, которую в равной степени можно отнести как к математике, так и к кибернетике: теория информации, теория алгоритмов, математическая логика, теория формальных языков и грамматик, комбинаторный анализ и т. д. Кроме них информатика включает такие разделы, как архитектура ЭВМ, операционные системы, теория баз данных, технология программирования и многие другие.

Информационная технология есть совокупность конкретных технических и программных средств, с помощью которых мы выполняем разнообразные операции по обработке информации во всех сферах нашей жизни и деятельности. Иногда информационную технологию называют компьютерной технологией или прикладной информатикой. Информатика является комплексной, междисциплинарной отраслью научного знания.

Понятие **информация** является одним из фундаментальных в современной науке. Информацию наряду с веществом и энергией рассматривают в качестве важнейшей сущности мира, в котором мы живем.

Термин **информация** ведет свое происхождение от латинского слова *informatio*, означающего разъяснение, изложение, осведомленность. Информацию мы передаем друг другу в устной и письменной форме, а также в форме жестов и знаков. Любую нужную информацию мы осмысливаем, передаем другим и делаем определенные умозаключения на ее основе. Информацию мы извлекаем из учебников и книг, газет и журналов, телепередач и кинофильмов. Записываем ее в тетрадях и конспектах. В производственной деятельности информация передается в виде текстов и чертежей, справок и отчетов, таблиц и других документов. Такого рода информация может предоставляться и с помощью ЭВМ.

В любом виде информация для нас выражает сведения о ком-то или о чем-то. Она отражает происходящее или происшедшее в нашем мире, например, что мы делали вчера или будем делать завтра, как провели летний отпуск или каков будет характер будущей работы. При этом информация обязательно должна получить некоторую форму - форму рассказа, рисунка, статьи и т. д. Чертежи и музыкальные произведения, книги и картины, спектакли и кинофильмы - все это формы представления информации.

Информация, в какой бы форме она ни предоставлялась, является некоторым отражением реального или вымышленного мира. Поэтому информация - это отражение предметного мира с помощью знаков и сигналов. Стоит отметить, что абсолютно точное определение информации дать невозможно, это такое же первичное понятие, как точка или плоскость в геометрии. Выделяют два подхода к понятию информация: субъективный и кибернетический.

Субъективный подход (бытовой человеческий):

Информация - это знания, сведения, которыми обладает человек, которые он получает из окружающего мира.

Человеку свойственно субъективное восприятие информации через некоторый набор ее свойств: важность, достоверность, своевременность, доступность и т.д. В этом смысле одно и то же сообщение, передаваемое от источника к получателю, может передавать информацию в разной степени. Так, например, вы хотите сообщить о неисправности компьютера. Для инженера из группы технического обслуживания сообщение "компьютер сломался" явно содержит меньше информации, чем сообщение "Не включается монитор", поскольку второе сообщение в большей степени снимает неопределенность, связанную с причиной неисправности компьютера.

Киберетический подход:

Между информатикой и кибернетикой существует тесная связь. Основал кибернетику в конце 1940-х гг. американский ученый Норберт Винер. Можно сказать, что кибернетика породила современную информатику, выполнила роль одного из ее источников. Сейчас кибернетика входит в информатику как составная часть. Кибернетика имеет дело со сложными системами: машинами, живыми организмами, общественными системами. Но она не стремится разобраться в их внутреннем механизме. Кибернетику интересуют процессы взаимодействия между такими системами или их компонентами. Рассматривая такие взаимодействия как процессы управления, кибернетику определяют как науку об общих свойствах процессов управления в живых и неживых системах.
Для описания сложных систем в кибернетике используется модель "черного ящика". Термины "черный ящик" и "кибернетическая система" можно использовать как синонимы. Главные характеристики "черного ящика" - это входная и выходная информация. И если два таких "черных ящика" взаимодействуют между собой, то делают они это только путем обмена информацией.

Информация - это содержание последовательностей символов (сигналов) из некоторого алфавита.

В таком случае все виды информационных процессов (хранение, передача, обработка) сводятся к действиям над символами, что и происходит в технических информационных системах.

Информация передается в виде **сообщений**, определяющих форму и представление передаваемой информации. Примерами сообщений являются музыкальное произведение; телепередача; команды регулировщика на перекрестке и т.д. При этом предполагается, что имеются **"источник информации"** и **"получатель информации".**

Сообщение от источника к получателю передается посредством какой-нибудь среды, являющейся в таком случае **"каналом передачи информации"**. Так, при передаче речевого сообщения в качестве такого канала связи можно рассматривать воздух, в котором распространяются звуковые волны.

Получение информации - это получение фактов, сведений и данных о свойствах, структуре или взаимодействии объектов и явлений окружающего нас мира.

Чтобы сообщение было передано от источника к получателю, необходима некоторая материальная субстанция - **носитель информации.**

Сигнал - сообщение, передаваемое с помощью носителя.

В общем случае сигнал - это изменяющийся во времени процесс. Такой процесс может содержать различные характеристики (например, при передаче электрических сигналов могут изменяться напряжение и сила тока).

Параметр сигнала - та из характеристик, которая используется для представления сообщений. Природа большинства физических явлений такова, что они могут принимать различные значения в определенном интервале (температура воды, скорость автомобиля и т.д.)

Непрерывный (аналоговый) способ представления информации - представление информации, в котором сигнал на выходе датчика будет меняться вслед за изменениями соответствующей физической величины.

Примеры непрерывной информации:

Примером непрерывного сообщения служит человеческая речь, передаваемая модулированной звуковой волной; параметром сигнала в этом случае является давление, создаваемое этой волной в точке нахождения приемника - человеческого уха.

Аналоговый способ представления информации имеет недостатки:

1. Точность представления информации определяется точностью измерительного прибора (например, точность числа отображающего напряжение в электрической цепи, зависит от точности вольтметра).
2. Наличие помех может сильно исказить представляемую информацию.

Дискретность (от лат. **discretus** – разделенный, прерывистый) – прерывность; противопоставляется непрерывности. Напр., дискретное изменение к.-л. величины во времени – это изменение, происходящее через определенные промежутки времени (скачками); система целых (в противоположность системе действительных чисел) является дискретной. Заметим, что в приведенной цитате указано на связь дискретности с системой целых чисел, и это можно считать подтверждением положения о том, что дискретные значения можно пронумеровать.

Дискретный сигнал - сигнал, параметр которого принимает последовательное во времени конечное число значений (при этом все они могут быть пронумерованы). Сообщение, передаваемое с помощью таких сигналов - **дискретным сообщением.** Информация, передаваемая источником, в этом случае также называется **дискретной информацией.**

Цифровой способ представления информации – представление

информации в дискретном виде.

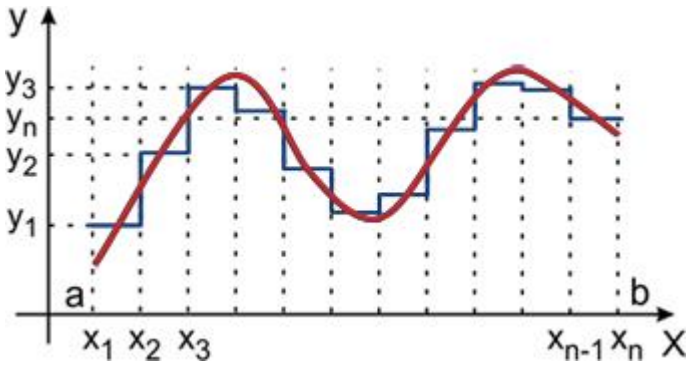
Дискретными являются показания цифровых измерительных приборов, например, вольтметра (сравните со "старыми", стрелочными приборами). Очевидным (в самом изначальном смысле этого слова!) образом дискретной является распечатка матричного принтера, а линия, проводимая графопостроителем, напротив, является непрерывной. Дискретным является растровый способ представления изображений, тогда как векторная графика по своей сути непрерывна. Дискретна таблица значений функции, но когда мы наносим точки из нее на миллиметровую бумагу и соединяем плавной линией, получается непрерывный график. Механический переключатель диапазонов в приемниках был сконструирован так, чтобы он принимал только фиксированные положения.

Тем не менее, все не так просто. То, что фотографии в старых газетах дискретны, видят и соглашаются все. А в современном красочном глянцевом журнале? А распечатка картинки на лазерном принтере – она дискретна или непрерывна (все-таки, она состоит из частичек специального порошка, а они маленькие, но конечные по размеру; да и сама характеристика dpi – количество точек на единицу площади наводит на сомнения в непрерывности картинки, хотя глаз упорно не видит дискретности)? Если еще в этот момент вспомнить, что твердые тела состоят из мельчайших атомов, а глаз, воспринимающий изображение, имеет чувствительные маленькие палочки и колбочки, то все вообще станет туманным и неоднозначным…

Видимо, чтобы не запутаться совсем, надо принять правило, что в тех случаях, когда рассматриваемая, величина имеет настолько большое количество значений, что мы не в состоянии их различить, то практически ее можно считать непрерывной.

Непрерывное сообщение может быть представлено непрерывной функцией, заданной на некотором отрезке **[a,b]**. Непрерывное сообщение можно преобразовать в дискретное, такая процедура называется **дискретизацией** (**оцифровывание**). Для этого из бесконечного множества значений этой функции (параметра сигнала) выбирается их определенное число, которое приближенно может характеризовать остальные значения. Один из способов такого выбора состоит в следующем. Этапы дискретизации:

Область определения функции разбивается точками $x_1, x_2, ..., x_n$ на отрезки равной длины и на каждом из этих отрезков значение функции принимается постоянным и равным, например, среднему значению на этом отрезке; полученная на этом этапе **функция называется ступенчатой.** Следующий шаг - проецирование значений "ступенек" на ось значений функции (ось ординат). Полученная таким образом последовательность значений функции $y_1, y_2, ..., y_n$ является дискретным представлением непрерывной функции, точность которого можно неограниченно улучшать путем уменьшения длин отрезков разбиения области значений аргумента.



Ось значений функции можно разбить на отрезки с заданным шагом и отобразить каждый из выделенных отрезков из области определения функции в соответствующий отрезок из множества значений. В итоге получим конечное множество чисел, определяемых, например, по середине или одной из границ таких отрезков.

Таким образом, любое сообщение может быть представлено как дискретное, иначе говоря, последовательностью знаков некоторого алфавита. Возможность дискретизации непрерывного сигнала с любой желаемой точностью (для возрастания точности достаточно уменьшить шаг) принципиально важна с точки зрения информатики. Компьютер - цифровая машина, т.е. внутреннее представление информации в нем дискретно. Дискретизация входной информации (если она непрерывна) позволяет сделать ее пригодной для компьютерной обработки. Существуют и другие вычислительные машины - аналоговые ЭВМ. Они используются обычно для решения задач специального характера и широкой публике практически не известны. Эти ЭВМ в принципе не нуждаются в дискретизации входной информации, так как ее внутренне представление у них непрерывно. В этом случае все наоборот - если внешняя информация дискретна, то ее перед использованием необходимо преобразовать в непрерывную.

Тема 2. Мера информации

Ярмолик В.Н., Портянко С.С., Ярмолик С.В. Криптография, стеганография и охрана авторского права. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. – 242с. (*Глава 3*.)

Неоценимый вклад в криптографию внес основоположник теории информации Клод Шеннон (**К.Shannon**). В 1949 К.Shannon опубликовал свои теоретические исследования по криптографии, основанные на полученных им ранее результатах в теории информации.

Одним из главных результатов по криптографии можно считать его теоретическое обоснование возможности создания **абсолютно секретных криптосистем**. Он определил теоретическую секретность шифра по

неопределённости возможного исходного текста на основании полученного шифротекста. Соответственно, если вне зависимости от того, сколько шифротекста перехвачено, нельзя получить никакой информации относительно исходного текста, то шифр обладает **идеальной секретностью.**

Теория информации измеряет количество информации в сообщении по среднему количеству бит, необходимых для оптимального кодирования всех возможных сообщений. Например, поле *Gender* («пол») в базе данных содержит только один бит информации, потому что оно может быть закодировано одним битом (*Male* может быть представлено как "0", *Female* – как "1"). Если поле будет представлено ASCII-кодами символов строк *Male* и *Female*, это потребует больше места на носителях информации, но не будет содержать в себе большего объема информации.

Количество информации в сообщении формально измеряется **энтропией** сообщения, которая базируется на понятии **количества информации**.

Пусть $X_1,...,\ X_n$ это n возможных сообщений, возникающих с вероятностями $p(X_1),...,p(X_n)$, и сумма этих вероятностей $p(X_i)$, $i=1,...,n$ равна 1. Тогда получение сообщения X_i можно оценить количеством полученной информации, которое вычисляется как $F(X_i)=-log_2p(X_i)=log_2(1/p(X_i))$. Очевидно, что при получении сообщения, вероятность которого крайне мала, будет получено большое количество информации, что следует из выражения $log_2(1/p(X_i))$ и наоборот для событий с большой вероятностью будет получено мало информации. Действительно, если $p(X_i)=1$, количество информации $F(X_i)=log_2(1/p(X_i))=log_21=0$. То есть, события, происходящие с вероятностью единица, не дают никакой информации.

Под **энтропией** понимают среднее количество информации при получении одного из возможных сообщений. Численно энтропия представляет собой средневзвешенное количество информации и вычисляется по формуле

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(X_i)\log_2(p(X_i)) = \sum_{i=1}^{n} p(X_i)\log_2(1/p(X_i)).$$

Интуитивно, каждый элемент $log_2(1/p(X_i))$ в последнем выражении представляет собой число бит, необходимых для оптимального кодирования сообщения X_i. Действительно, при оптимальном кодировании сообщения (события), а в нашем случае, например, символа исходного текста необходимо использовать меньшее число бит для кодирования часто встречающегося символа, а для редко встречающегося символа – большее число бит. Тогда в среднем для кодирования сообщения, состоящего из множества символов, будет использовано оптимальное суммарное количество бит.

Поскольку $1/p(X)$ уменьшается при увеличении $p(X)$, оптимальное кодирование использует короткие коды для часто встречающихся сообщений за счёт использования длинных кодов для редких сообщений. Этот принцип применён в **коде Морзе**, где наиболее часто используемые буквы представлены самыми короткими кодами.

Код Хаффмана является оптимальным кодом, ассоциированным с буквами, словами, фразами или машинными инструкциями. Односимвольный код **Хаффмана** часто используется для минимизации больших файлов.

Пример 2.1. Пусть $n=3$, и пусть три сообщения представлены событиями A,B, и C, где $p(A)=1/2$ и $p(B)=p(C)=1/4$. Тогда $log_2(1/p(A))=log_2 2=1$; $log_2(1/p(B))=log_2(1/p(C))=log_2 4=2$, что подтверждает наши предыдущие наблюдения о том, что для оптимального кодирования, часто встречающегося сообщении, нужно минимальное число бит.

Пример 2.2. Предположим, необходимо оптимально закодировать пол клиента в базе данных. Имеются две возможности (два события) *Male* и *Female* примерно с одинаковыми вероятностями $p(Male)=p(Female)=1/2$. Тогда значение энтропии будет вычисляться как

$$H(X)=p(Male)log_2(1/p(Male))+p(Female)log_2(1/p(Female))=$$
$$=(1/2)(log_2 2)+(1/2)(log_2 2)=1,$$

что подтверждает наши предыдущие наблюдения о том, что в поле базы данных пол оптимально будет закодирован одним битом. С другой стороны, независимо от того, как закодирован пол клиента в базе данных, он содержит в себе 1 бит информации.

Следующий пример иллюстрирует применение энтропии для определения содержания сообщения.

Пример 2.3. Пусть $n=3$, и пусть три сообщения представлены буквами A,B, и C, где $p(A)=1/2$, $p(B)=p(C)=1/4$. Тогда $H(X)=(1/2)log_2 2+2(1/4)log_2 4=0,5+1,0=1,5$.

Оптимальное кодирование может быть достигнуто с использованием однобитного кода для кодирования A в силу того, что вероятность этого сообщения наибольшая, и двухбитных кодов для B и C. Например, A может быть закодировано битом 0, в то время как B и C могут кодироваться двумя битами каждый: 10 и 11. Применяя подобное кодирование, последовательность, состоящая из восьми букв ABCAABAC, кодируется, как 12-битная последовательность 010110010011 как показано ниже:

A	B	C	A	A	B	A	C
0	10	11	0	0	10	0	11

Среднее число бит на букву равно 12/8=1,5, что соответствует нашим предварительным наблюдениям. Действительно, при получении одного из трех сообщений $A,B,$ или C среднее ожидаемое количество информации равняется 1,5.

Достижения в теории информации позволили формальным образом исследовать исходные тексты, представленные на конкретном языке, и использовать эти результаты для взлома криптосистем. Одним из таких методов взлома является **частотный анализ**. В соответствии с данным

методом, распределение букв в криптотексте сравнивается с распределением букв в алфавите исходного сообщения. Вероятность успешного вскрытия повышается с увеличением длины криптотекста.

Пусть для заданного языка определено множество сообщений длиной N символов, тогда **частота (скорость) языка** для сообщений X длиной N определяется как

$$r=H(X)/N,$$

где величина r определяет среднее число бит информации в каждом символе сообщения.

Простейший способ определения частоты языка (**абсолютной частоты R**), основывается на предположении, что все буквы алфавита языка имеют одинаковую вероятность появления во всех возможных сообщениях так же, как и всевозможные последовательности букв алфавита в сообщениях равновероятны. Если алфавит языка содержит L букв, тогда **абсолютная частота** может быть получена так:

$$R=log_2L,$$

Для английского языка $L=26$, тогда $R=log_2L=log_226 \approx 4,7$.

Абсолютная частота языка $R\approx4,7$ определяет максимальное число бит информации, которое может быть получено при получении одной буквы сообщения. Или, максимальное количество бит, необходимых для кодирования сообщения, представленного на английском языке.

Реальная частота английского языка значительно меньше абсолютной частоты. Это происходит потому, что английский язык, так же как и другие неискусственные языки, слишком многословный или, что то же самое, избыточный. Например, фраза «occurring frequently» («часто появляющийся») может быть сокращена на 58% как «crng frg» без потери информации.

Существуют множество различных таблиц распределений букв в том или ином языке, но, ни одна из них не содержит окончательной информации – даже порядок букв может отличаться в различных таблицах. Распределение букв очень сильно зависит от типа текста: проза, разговорный язык, технический язык и т.п. Наиболее часто встречающиеся распределения для английского и русского языка приведены в таблице 2.1 и таблице 2.2.

Таблица 2.1.

Частота букв английского языка

A	0,0804	B	0,0154	C	0,0306
D	0,0399	E	0,1251	F	0,0230
G	0,0196	H	0,0554	I	0,0726
J	0,0016	K	0,0067	L	0,0414
M	0,0253	N	0,0709	O	0,0760
P	0,0200	Q	0,0011	R	0,0612
S	0,0654	T	0,0925	U	0,0271
V	0,0099	W	0,0192	X	0,0019
Y	0,0173	Z	0,0009		

Таблица 2.2.

Частота букв русского языка

А	0,062	Л	0,053	Ц	0,004
Б	0,014	М	0,026	Ч	0,012
В	0,038	Н	0,053	Ш	0,006
Г	0,013	О	0,090	Щ	0,003
Д	0,025	П	0,023	Ы	0,016
Е	0,072	Р	0,040	Ь,Ъ	0,014
Ж	0,007	С	0,045	Э	0,003
З	0,016	Т	0,053	Ю	0,006
И	0,062	У	0,021	Я	0,018
Й	0,010	Ф	0,002		
К	0,028	Х	0,009		

Несмотря на то, что нет таблицы, которая может учесть все виды текстов, есть характерные черты общие для всех таблиц. Например, в английском языке буква *E* всегда возглавляет таблицу частот встречаемости, а *T* идет на второй позиции. *A* и *O* почти всегда третьи. Кроме того, девять букв английского языка *E, T, A, O, N, I, S, R, H* всегда имеют частоту выше, чем любые другие. Эти девять букв занимают примерно 70% английского текста. Ниже приведены соответствующие таблицы для различных языков.

Таблица 2.3.

Частота встречаемости девяти букв в различных языках

Русский		Английский		Немецкий		Французский		Итальянский		Финский	
О	0,090	E	0,125	E	0,184	E	0,159	E	0,118	A	0,121
Е	0,072	T	0,092	N	0,114	A	0,094	A	0,117	I	0,106
А	0,062	A	0,080	I	0,080	I	0,084	I	0,113	T	0,098
И	0,062	O	0,076	R	0,071	S	0,079	O	0,098	N	0,086
Н	0,053	I	0,073	S	0,070	T	0,073	N	0,069	E	0,081
Т	0,053	N	0,071	A	0,054	N	0,072	L	0,065	S	0,078
С	0,045	S	0,065	T	0,052	R	0,065	R	0,064	L	0,059
Р	0,040	R	0,061	U	0,050	U	0,062	T	0,056	O	0,055
В	0,038	H	0,055	D	0,049	L	0,053	S	0,050	K	0,052
#	0,515	#	0,699	#	0,726	#	0,741	#	0,750	#	0,736

Используя частоту встречаемости букв английского алфавита как распределение вероятностей $p(X_i)$ для вычисления энтропии получим значение частоты языка равную $r=H(1\text{-}grams)/1\approx4{,}15$. Как видим, реальные частоты встречаемости букв (1-*grams*) в английском тексте заметно уменьшили количество информации, которое они содержат.

Отметим, что в двух предыдущих случаях вычисления частоты языка была использована гипотеза отсутствия зависимости последовательностей букв в исходных текстах, хотя очевидно, что такая зависимость, безусловно, существует.

Известны статистические распределений частоты биграмм (двух символов) исходных текстов. Например, для английского языка такие сочетания букв как *TH* и *EN* возникают гораздо чаще, чем другие. Некоторые биграммы (например, OZ) никогда не возникают в сообщениях, содержащих смысловую информацию (исключение составляют акронимы). Используя подобное распределение для пар букв, частота английского языка будет иметь величину

$r=H(2\text{-}grams)/2\approx 3{,}62.$

Доля значащих (имеющих смысл) последовательностей букв любого языка понижается, когда длина последовательности увеличивается. Например, в английском языке можно встретить сочетание *BB* из двух букв *B*, и практически невозможно встретить триграммы *BBB*. Учитывая частоту распределения триграмм в английском языке, численное значение частоты языка примет значение $r=H(3\text{-}grams)/3\approx 3{,}22.$

Частота языка (значение энтропии на один символ) будет иметь максимально близкую величину к истинному значению при использовании статистических результатов распределения N-грамм для возрастающих значений N. Когда N возрастает, энтропия на символ уменьшается, потому что для больших N количество сообщений, содержащих смысл, резко уменьшается по отношению к произвольному случайному набору из N букв. Показано, что в зависимости от структуры текста, использованного языка и других факторов реальное значение энтропии на один символ для больших значений N принимает значение из диапазона $r=1\div 1{,}5$.

Как видно, реальное значение количества информации, содержащегося в одном символе сообщения, заметно меньше абсолютной частоты $R=4{,}7$. С другой стороны, такое их соотношение свидетельствует об избыточности языков. Формально избыточность языка с частотой r и абсолютной частотой R определена как $D=R-r$. Для $R=4{,}7$ и частоты $r=1$, $D=3{,}7$, что свидетельствует о том, что английский язык на 79% избыточен. Для $r=1{,}5$, $D=3{,}2$, предполагается избыточность на 68%.

Тема 3. Криптографические системы

Ярмолик В.Н., Портянко С.С., Ярмолик С.В. Криптография, стеганография и охрана авторского права. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. – 242с. (*Глава 3*.)

3.2. Перестановочные шифры

Многие используемые ранее шифры просты как в понимании, так и в применении для шифрования данных. Показано, что достаточно только изменить порядок слов, букв, или правило чтения, для того чтобы превратить сообщение в секретный код. Самые простые примеры перестановочного шифрования достаточно примитивны по своей сути, однако требуют некоторых усилий для восприятия зашифрованного текста. Наиболее простым шифром подобного типа является алгоритм, реализующий объединение слов исходного текста. Шифрование в данном случае будет заключаться в удалении пробелов в исходном тексте и представлении его в виде щифротекста. Использование заглавных букв позволяет усложнить код и сделать его тяжелее для чтения и расшифрирования.

Например, зашифрованный текст:

THISISHARDCODEFORMANYPEOPLE,

является достаточно сложно воспринимаемым текстом для многих пользователей. Хотя на самом деле он соответствует легко восстанавливаемому исходному тексту

This Is Hard Code For Many People.

Следующим шагом усложнения перестановочного алгоритма шифрования является разбиение зашифрованного текста на блоки. В этом случае сообщение разбивается на блоки по два, три или больше символов. Тот же исходный текст для случая блочного представления по два символа будет представлен шифротекстом

TH IS IS HA RD CO DE FO RM AN YP EO PL E.

Весьма эффективной для шифрования может быть запись слов исходного текста в обратной последовательности. Написание слов, предложений или полного сообщения в обратном порядке (задом наперед) может быть весьма эффективным способом шифрования. Так, для того же случая исходного текста “This Is Hard Code For Many People“ зашифрованный текст имеет вид

SIHT SI DRAH EDOC ROF YNAM ELPOEP.

Обратный порядок чтение слова SIHT позволяет получить исходное слово THIS.

В общем случае перестановочный шифр переставляет символы исходного текста согласно определенной схеме. Эта перестановка может быть описана

при помощи некоторой геометрической фигуры. В этом случае процедура шифрования состоит из двух шагов.

Рис.3.1. Общая структура перестановочных шифраторов

Согласно общей схеме, первоначально исходный текст записывается в виде определенной геометрической фигуры в соответствии с некоторым ***правилом записи*** (***Write-in***), затем записанный таким образом текст читается согласно некоторому ***правилу чтения*** (***Take-off***). Ключом подобной схемы шифрования является правило записи *Write-in* и правило чтения *Take-off*.

Пример 3.1. Предположим, что обычный текст CRYPTOGRAPHY записан согласно правилу записи в матрицу (3 строки и 4 столбца) следующим образом:

1	**2**	**3**	**4**
C	R	Y	P
T	O	G	R
A	P	H	Y

Правило чтения заключается в считывании столбцов в следующей последовательности 3-1-4-2, тогда полученный зашифрованный текст будет иметь вид - YGHCTAPRYROP. Для дешифрования используется обратная процедура.

В общем виде процедуру шифрования в соответствии с перестановочными алгоритмами можно описать следующим образом. Исходный текст M представляется в виде блоков данных из d символов $M=m_1,...,m_d\ m_{d+1},\ldots,m_{2d},...,$ Тогда зашифрованный текст представляется как совокупность блоков исходного текста преобразованных в соответствии с функцией f. В результате получим

$$E_K(M)=m_{f(1)},...,m_{f(d)},m_{f(d+1)},...,m_{f(2d)},...$$

Дешифрование использует обратную перестановку.

Пример 3.2. Предположим, что $d=4$ и функция перестановки f имеет вид

i	1	2	3	4
$f(i)$	3	1	4	2

таким образом, исходный текст делится на блоки по 4 бита каждый, затем для

каждого блока первый символ исходного текста перемещают на вторую позицию, второй знак на четвертую позицию и т.д. В результате получим

M	=	C	R	Y	P	T	O	G	R	A	P	H	Y
$E_K(M)$	=	Y	C	P	R	G	T	R	O	H	A	Y	P

Подобно перемещению столбцов, периодический шифр перестановки может рассматриваться как перемещение столбцов матрицы, в которой обычный текст записан строками.

Пример 3.3. Предположим, что *d=12* и геометрическая фигура - матрица, состоит из четырех строк и трех столбцов, а функция перестановки столбцов *f* имеет форму

i	1	2	3	4
f(i)	3	1	4	2

Таким образом, исходный текст делится на блоки по 12 бит каждый, тогда каждый блок имеет вид матрицы *3×4*, где третий столбец каждой матрицы записывается как первая часть блока зашифрованного текста, первый столбец соответствует второй части блока и т.д. Для исходного текста M= HERE IS A SECRET MESSAGE ENCIPHERED BY TRANSPOSITION, деление на блоки и запись в виде матриц имеет вид:

H	E	R	E		T	M	E	S		P	H	E	R		S	P	O	S
I	S	A	S		S	A	G	E		E	D	B	Y		I	T	I	O
E	C	R	E		E	N	C	I		T	R	A	N		N			

Тогда шифротекст будет преобразован к виду:

$E_K(M)$=RARHIEESEESCEGCTSESEIMANEBAPETRYNHDROISINSOPT

Одна из наиболее известных модификаций метода перестановок типа простая перестановка столбцов использует ключевое слово или фразу в качестве криптографического ключа. Например, слово CONVENIENCE, используемое как ключ, определяет порядковый номер для каждого символа в слове согласно следующему правилу. Буквам ключевого слова назначаются порядковые номера, начиная с номера 1. Порядок их назначения вначале определяется в соответствии с алфавитом исходного текста, а в случае, когда один и тот же символ появляется дважды, нумерация определяется порядком их следования в ключевом слове.

Пример 3.4. Ключевое слово CONVENIENCE определяет количество столбцов для записи исходных текстов, а буквы этого слова определяют

порядок чтения столбцов текста. Таким образом, получим следующую нумерацию столбцов.

C	O	N	V	E	N	I	E	N	C	E
1	***10***	***7***	***11***	***3***	***8***	***6***	***4***	***9***	***2***	***5***

Здесь буква *C* определяет столбец с номером 1. Отмерим, что в ключевом слове отсутствуют буквы, предшествующие букве *C*, то есть, буквы *A* и *B*. Вторая буква *C* в ключевом слове определяет второй столбец. Следующей буквой английского алфавита, используемой в ключевом слове, является буква *E*, которая определяет 3, 4 и 5 столбцы матрицы.

Для исходного текста *M*=HERE IS A SECRET MESSAGE ENCIPHERED BY TRANSPOSITION получим следующую запись

C	O	N	V	E	N	I	E	N	C	E
1	***10***	***7***	***11***	***3***	***8***	***6***	***4***	***9***	***2***	***5***
H	E	R	E	I	S	A	S	E	C	R
E	T	M	E	S	S	A	G	E	E	N
C	I	P	H	E	R	E	D	B	Y	T
R	A	N	S	P	O	S	I	T	I	O
N										

Используя правило чтения, определенное ключевым словом, получим следующий зашифрованный текст *C*=HECRN CEYI ISEP SGDI RNTO AAES RMPN SSRO EEBT ETIA EEHS.

Пример 3.5. Развитием предыдущего метода является использование нумерации букв ключевого слова для задания правила чтения, а также правила записи. Правило записи определяет длину строки. Здесь первая строка оканчивается на номере столбца 1. Конечный символ второй строки записывается под номером 2 и так далее.

C	O	N	V	E	N	I	E	N	C	E
1	***10***	***7***	***11***	***3***	***8***	***6***	***4***	***9***	***2***	***5***
H										
E	R	E	I	S	A	S	E	C	R	
E	T	M	E	S						
S	A	G	E	E	N	C	I			
P	H	E	R	E	D	B	Y	T	R	A
N	S	P	O	S	I	T				
I	O	N								

В результате получим следующий зашифрованный текст *C*=HEESPNI RR SSEES EIY A SCBT EMGEPN ANDI CT RTAHSO IERO.

Следующим достаточно интересным перестановочным шифратором является метод "поворачивающейся решетки", который был использован Германией во времена первой мировой войны.

Суть метода заключается в том, что квадратная решетка, разделенная на сетку квадратов, часть из которых имеют отверстия, помещается на листе бумаги. Исходный текст записывается на бумаге через отверстия, затем решетка поворачивается на 90 градусов, и далее сообщение продолжает записываться в позициях решетки, где имеются отверстия. Данная процедура продолжается для всех четырех возможных положений решетки.

Сущность проектирования такой решетки состоит в делении квадратной решетки на зоны, нумеруя квадраты в каждой четверти так, чтобы при вращении решетки соответствующие квадраты имели тот же самый номер. Затем выбираются по одному квадрату с каждым порядковым номером для выполнения перфорирования.

Пример 3.6. Пример проектирования поворачивающейся решетки состоящей из 25 квадратов.

1	2	3	4	1
4	5	6	5	2
3	6	7	6	3
2	5	6	5	4
1	4	3	2	1

	2		4	1
2	5	6	5	
3	6			3
4		6	5	4
1		3	2	1

Пример 3.7. Пример поворачивающейся решетки и ее использования для сообщения: *M*=HERE IS A SECRET MESSAGE WRITE.

В первом раунде получим

	2		4	1
4	5	6	5	
3	6			3
2		6	5	4
1		3	2	1

H		E		
				R
		E	I	
	S			
	A			

Во втором раунде имеем

1	2	3	4	
		6	5	2
3	6	*	6	
2	5		5	4
1	4	3		1

H		E		S
E	C			R
		E	I	R
	S	E		
	A		T	

В третьем раунде получим

1	2	3		1
4	5	6		2
3		*	6	3
	5	6	5	4
1	4		2	

H		E	M	S
E	C		E	R
	S	E	I	R
S	S	E		
	A	A	T	G

В четвертом раунде имеем

1		3	4	1
4	5		5	2
	6	*	6	3
2	5	6		
	4		2	

H	E	E	M	S
E	C	W	E	R
R	S	E	I	R
S	S	E	I	T
E	A	A	T	G

Окончательно получим зашифрованный текст *C*=HEEMS ECWER RSEIR SSEIR SSEIT EAATG.

3.2. Подстановочные шифры

Простейшие ***шифры подстановки*** (***замены***) реализуют замену каждого символа исходного текста на соответствующий символ зашифрованного текста. Для того чтобы зашифровать исходный текст согласно простейшему подстановочному шифру необходимо наличие таблицы подстановки, которая определяет соответствие символов исходного текста символам шифротекста.

Простейший шифр замены заменяет каждый символ алфавита исходных текстов, обозначенного как *M*, на соответствующий символ алфавита шифротекстов, обозначенного как *C*. Чаще всего *C* представляет собой простую перестановку лексикографического порядка символов в алфавите *M*.

Предположим, алфавит *M* состоит из *n* символов $M=\{a0,a1,...,an\}$, тогда *C* представляет собой *n*-символьный алфавит $C=\{f(a0),f(a1),...,f(an)\}$, где функция *f* выполняет отображение $M \rightarrow C$, то есть, непосредственную замену каждого знака из *M* соответствующим знаком из *C*. Ключом простейшего подстановочного шифра является ***таблица подстановки***, которая может задаваться в явном виде или описываться некоторой функцией *f*.

Для того чтобы зашифровывать, сообщение *M=m1m2...,* представляющее собой исходный текст, используется таблица подстановки, и в результате получается зашифрованное сообщение $E_K(M)=f(m1)f(m2)\ldots$.

Пример 3.7. Предположим, что функция *f* определяет соответствие

символов английского алфавита *M = {A, B, ...}* символам того же алфавита, но представленного в другой последовательности, определенной следующей таблицей подстановки:

M:ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
C:YARMOLIKBCDEFGHJNPQSTUVWXZ.

Тогда исходный текст *M*=CRYPTOGRAPHY будет зашифрован как: *C*=RPXJSHIPYJKX.

В предыдущем примере с целью уменьшения размерности ключа использовалось ключевое слово (в данном случае YARMOLIK), которое позволяет однозначно определить всю таблицу подстановки. Схема использования ключевого слова достаточно проста. Первоначально под первыми буквами алфавита исходных текстов записывается ключевое слово без повторяющихся символов. Если символ повторяется в ключевом слове несколько раз, то для построения таблицы подстановки используется только одно его значение, а остальные игнорируются. Затем символы исходного алфавита, которые не были использованы в ключевом слове, в упорядоченном порядке записываются в таблицу подстановки. Очевидны различные модификации приведенного алгоритма генерирования таблицы подстановки как по месту записи в таблице подстановки ключевого слова, так и по правилам ее генерирования.

Существует достаточно много способов генерирования таблиц подставки, являющихся ключом подстановочного шифра. Одним из возможных путей, как показано ниже, может быть так называемый ***метод компаса***. Сущность данного метода состоит в том, что в системе прямоугольных координат выписываются символы алфавита вдоль каждой линии координат по часовой стрелке. Штрих пунктирные стрелки на приведенном ниже рисунке показывают направление, используемое для заполнения диаграммы по спирали. Как только все символы алфавита окажутся вписанными в диаграмму компаса, затем они объединяют в строку символов. И, наконец, исходный алфавит используется для построения результирующей таблицы подстановки.

В результате получим ключ, представленный в виде таблицы подстановки

M:ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
C:YUQMIEAZVRNJFBWSOKGCXTPLHD

Суть рассмотренного выше метода генерирования таблицы подстановки заключается в том, что правило компаса позволяет формально описать таблицу подстановки или точнее формализовать правило ее построения.

Аналогичным по своей сути является метод ***говорящих часов,*** предложенный ***Angie Wimer***. В соответствии с данным методом, алфавит исходных текстов записывается по окружности, и каждый символ соединяется с другим случайно выбранным символом путем проведения хорды, соединяющей

две точки окружности, соответствующие символам исходного алфавита.

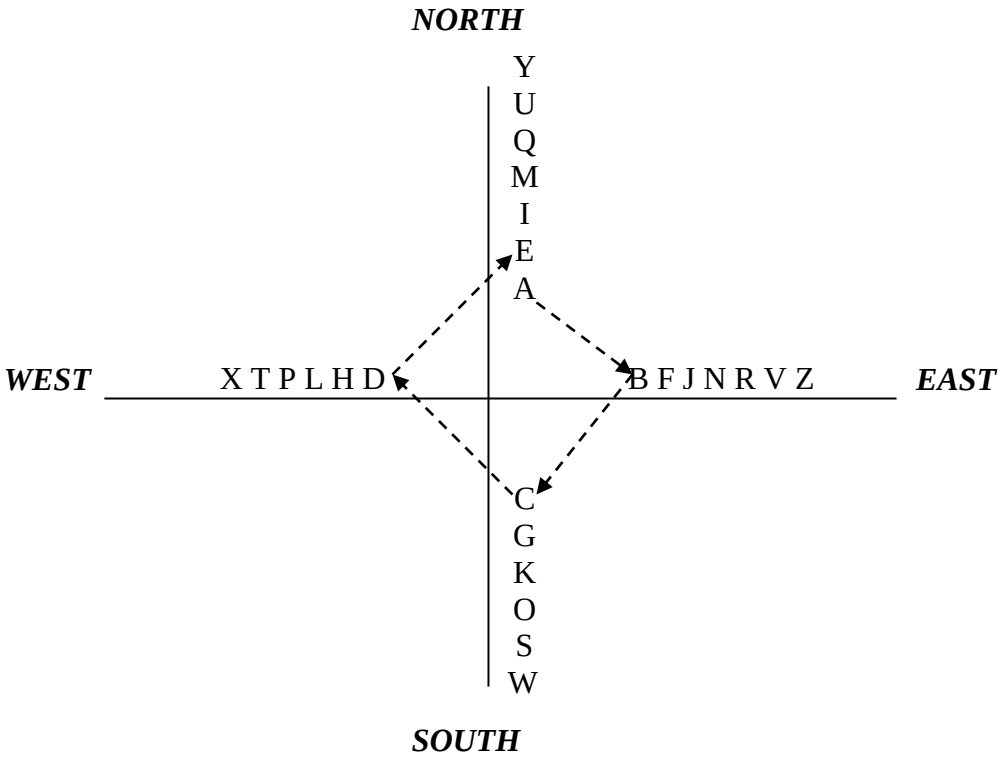


Рис.3.2. Общая структура метода компаса

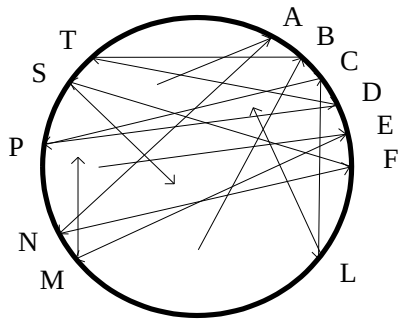


Рис.3.3. Общая структура метода говорящих часов

Дальнейшие попытки формализовать описание таблицы подстановки привели к появлению так называемых ***Полибианских квадратов***. За два века до нашей эры греческий писатель и историк *Полибий* изобрел для целей шифрования таблицу размером 5×5, заполненную в случайном порядке буквами греческого алфавита, например, как показано на рис 3.4.

α	ρ	κ	θ	φ
β	χ	ω	π	υ
δ	ψ	ο	γ	η
ζ	μ		ϕ	σ
ν	ξ	ε	τ	ϖ

Рис.3.4. Полибианский квадрат

При шифровании очередная буква исходного текста заменялась буквой, расположенной ниже ее в том же столбце квадрата. Если буква текста оказывалась в нижней строке таблицы, то для шифротекста выбирали самую верхнюю букву из того же столбца.

Пример 3.8. Например, для исходного текста *M*=ψξζψσα получается шифротекст *C*=μρνμϖβ.

Концепция полибианского квадрата оказалась весьма плодотворной и нашла свое практическое применение и развитие в последующих криптографических алгоритмах.

3.3. Шифратор Цезаря

Последующие изыскания в части создания эффективных подстановочных шифраторов были направлены в сторону поиска математического описания процедуры шифрования. В этом случае таблица подстановки присутствует в неявном виде, что существенно упрощает как саму процедуру шифрования, так и использование подобных систем на практике.

Классическим примером подобных криптосистем является ***метод Цезаря***. Свое название этот шифр получил по имени римского императора Гая Юлия Цезаря, который использовал этот шифр при переписке с Цицероном (около 50 лет до нашей эры).

Согласно методу Цезаря, при шифровании исходного текста каждая буква заменяется другой буквой того же алфавита путем смещения по алфавиту от исходной буквы на *k* букв. При достижении последнего символа алфавита осуществляется циклический переход к его началу. Согласно легенде, Цезарь использовал подобный шифр для *k*=3.

Математически метод Цезаря описывается выражением

$$f(a)=(a+k) \bmod n,$$

где *n* - размерность алфавита (количество символов), *k*-криптографический ключ, а величина *a* обозначает символ исходного текста его порядковым номером в алфавите *M*.

Для английского алфавита, используя последовательную нумерацию букв

0-A, 1-B, 2-C, 3-D, 4-E, 5-F, 6-G, 7-H, 8-I, 9-J, 10-K, 11-L, 12-M, 13-N, 14-O, 15-P, 16-Q, 17-R, 18-S, 19-T, 20-U, 21-V, 22-W, 23-X, 24-Y, 25-Z, процедура шифрования, предложенная Цезарем, будет описываться соотношением

$$f(a)=(a+3) \bmod 26.$$

Следует отметить, что как a, так и $f(a)$ представляют собой номера букв в исходном алфавите. При шифровании буквы G исходного алфавита, имеющей номер 6, получим $f(a)=6+3=9$, что соответствует букве J, используемой в качестве подстановочного элемента в шифротексте.

Пример 3.9. Например, для случая использования шифра Цезаря при шифровании исходного текста *M*=CRYPTOGRAPHY получим *C*=FUBSWRJ UDSKB.

Более сложное преобразование алфавита исходного текста основывается на использовании так называемого метода ***децимаций***. Шифраторы подобного вида описываются соотношением, основанным на операции умножения

$$f(a)=(k\times a) \bmod n,$$

где k и n являются взаимно простыми числами. Данное требование необходимо для выполнения однозначного декодирования зашифрованного текста.

Пример 3.10. Например, для исходного текста *M*=CRYPTOGRAPHY и k=3 получим $f(a)=(3\times a) \bmod 26$, соответственно *C*=GZUTFQSZATVU.

Комбинацией двух приведенных выше методов шифрования является ***афинное преобразование***, описываемое выражением

$$f(a)=(k_0\times a+ k_1) \bmod n.$$

Здесь криптографический ключ состоит из двух частей k_0 и k_1**.** Увеличение составных частей ключа приводит к использованию в качестве алгоритма шифрования полиномиального преобразования.

3.4. Шифраторы, использующие различные алфавиты

Все ранее рассмотренные примеры простейших подстановочных алгоритмов шифрования основывались на использовании одного и того же алфавита для исходных текстов и шифротекстов.

Чаще всего подстановочные элементы шифротекста кодируются цифровыми эквивалентами. Примером подобного подхода может быть метод, основанный на использовании ключа в виде некоторого предложения либо словосочетания в котором используются все буквы алфавита исходных текстов. Например, фраза ключевого словосочетания, имеющего определенный смысл,

“*The quick brown fox jumps over the lazy dog*” содержит все символы английского алфавита. Отметим, что повторение символов исходного текста еще больше усложняет шифр, так как в данном случае одной букве исходного текста будет соответствовать несколько подстановочных элементов. При построении ключевой фразы необходимо придерживаться ограничений на длину выбираемых слов, которая не должна превышать девяти символов.

THE	QUICK	BROWN	FOX	JUMPS	OVER	THE	LAZY	DOG
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Рис.3.5. Ключевая фраза, определяющая таблицу подстановки

Так, в соответствии с приведенной таблицей символу исходного текста *T* соответствую подстановочные элементы 11 и 71.

Пример 3.11. Для исходного текста *M*=JOHNSON IS SPY получим

J	O	H	N	S	O	N	I	S	S	P	Y
51	33	12	35	55	33	35	23	55	55	54	84

Тогда шифротекст принимает вид *C*=513312355533352355555484.

Весьма оригинальным шифром, использующим различные алфавиты для исходных текстов и шифротекстов, является шифр ***церковного двора*** (***The Churchyard cipher***), который был использован для шифрования текста на надгробном камне.

В соответствии с шифром церковного двора, на надгробной плите на одном из кладбищ Нью-Йорка в 1794 был выгравирован текст

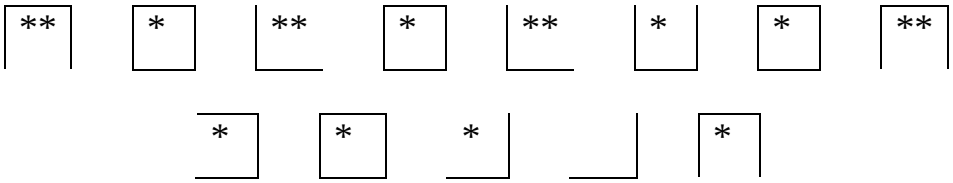


Рис.3.6. Криптограмма шифра церковный двор

Для того, что бы прочитать зашифрованный текст необходимо знать соответствующий криптографический ключ, который в данном случае представляется в виде таблицы подстановки следующего вида:

A*	B*	C*
D*	E*	F*
G*	H*	I-J*

K**	L**	M**
N**	O**	P**
Q**	R**	S**

T	U	V
W	X	Y
Z		

Данный пример показывает многообразие возможных реализаций простейших подстановочных шифраторов.

3.5. Свойства подстановочных шифров

Определяющим недостатком всех ранее рассмотренных простейших подстановочных шифраторов является сохранение частотных свойств исходных текстов в шифротекстах. Простейшие криптографические атаки основаны на анализе частот появления символов в шифротексте, что является основой для взлома подобных криптосистем. В общем случае простейший подстановочный шифр легко взламывается, используя для атаки распределение вероятностей символов в исходном тексте. Как было показано в ряде литературных источников, буквы английского алфавита могут быть разделены на подмножества с различной частотой использования в исходных текстах В англоязычных текстах выделяют высокую, среднюю, низкую, и редкую повторяемость букв английского алфавита:

Высокая	E T A O N I R S H
Средняя	D L U C M
Низкая	P F Y W G B V
Редкая	J K Q X Z

Сравнивая частоты повторяемости букв в зашифрованном тексте с ожидаемыми частотами, специалист криптоаналитик может сопоставить букву зашифрованного текста с буквой обычного текста и таким образом расшифровать зашифрованный текст. Ниже приведена средняя оценка процентного использования букв английского алфавита в исходных текстах.

E	12.31	L	4.03	B	1.62
T	9.59	D	3.65	G	1.61
A	8.05	C	3.20	V	0.93
O	7.94	U	3.10	K	0.52
N	7.19	P	2.29	Q	0.20
I	7.18	F	2.28	X	0.20
S	6.59	M	2.25	J	0.10
R	6.03	W	2.03	Z	0.09
H	5.14	Y	1.88		

Рис.3.7. Процентная оценка использования букв английского алфавита

Следует отметить, что приведенная оценка у различных авторов имеет незначительное отличие, что соответствует статистическому разбросу и спецификой исследований авторов.

Распределение биграмм и триграмм также весьма полезно для взлома криптограмм. Наиболее часто встречаемые в английском языке пары букв и их употребление в процентном отношении представлены в следующей таблице.

TH	HE	AN	IN	ER	RE	ES	ON	EA	TI	AT	ST	…
3.15	2.51	1.72	1.69	1.54	1.48	1.45	1.45	1.31	1.28	1.24	1.21	…

Наиболее часто встречаемые триграммы в английских текстах распределены в следующей последовательности:

THE AND THA ENT ION TIO FOR NDE HAS NCE EDT TIS OFT STH MEN.

Сохранение частотных свойств исходных текстов в шифротекстах является основой для простейшего рода атак для взлома подобных криптосистем, что является свидетельством низкой криптостойкости простейших подстановочных криптосистем.

3.6. Омофонные шифраторы

Система ***омофонов*** (***гамофонов***) обеспечивает простейшую защиту от криптографических атак, основанных на анализе частот появления символов в шифротексте. Система омофонов является одноалфавитной хотя при этом каждый символ исходного текста имеет несколько подстановочных элементов - омофонов.

Предварительно каждому символу исходного текста ставится в соответствие несколько подстановочных элементов – омофонов. Их количество прямо пропорционально частоте использования данного символа в исходных текстах. Далее, при шифровании каждый символ исходного текста заменяется омофоном, выбранным из множества омофонов, соответствующих данному конкретному символу. Процедура выбора омофона из множества возможных значений для данного символа должна выполняться случайным образом равновероятно.

Пример 3.12. Предположим, что в качестве омофонов для английских букв использованы двухзначные целые числа, лежащие в диапазоне между 00 и 99. Количество омофонов для конкретного символа алфавита (например, английский алфавит) исходных текстов выбирается пропорционально относительной частоте букв английского языка в исходных текстах, кроме того, один и тот же омофон используется как подстановочный элемент только для одной буквы английского языка. Возможное сопоставление целых двухзначных чисел омофонов выбранным буквам английского языка приведено в следующей таблице

A 23, 25, 97, 95, 89, 33, 12, 11, 34
G 44, 77, 35, 51
C 87, 41
H 59, 90, 00, 26, 36
O 66, 02, 15, 22, 09, 83, 54

P 04, 58
R 38, 07, 94, 30, 56, 67
T 55, 71, 72, 80, 01, 12, 29, 50, 68
Y 88

Рис.3.8. Соответствие английских букв множествам омофонов

Тогда для исходного текста *M*=CRYPTOGRAPHY возможный вариант шифротекста имеет вид *C*= 87 07 88 58 72 54 51 30 97 04 00 88.

Улучшение качества омофонного шифратора достигается увеличением количества омофонов, используемых при шифровании, однако здесь необходимо отметить, что это приводит к усложнению процедур шифрования и дешифрования.

3.7. Шифратор Билла

Шифратор Билла (***Beale Cipher***) является классическим примером омофонного шифратора. Ключом данного шифратора является Декларация Независимости США. В данном случае используется гипотеза о среднестатистической природе текста представляющего собой Декларацию Независимости США. Предполагается, что частота использования букв в данном документе равняется частоте использования английских букв в любом другом тексте независимо от их местоположения в слове. Текст Декларации записывается построчно по десять слов в строке. Количество слов определяется требованиями качества омофонного шифратора. Большее их число позволяет более полно нивелировать частотные свойства исходного текста. Предположим, используется 1000 строк, тогда первые десять строк будут выглядеть следующим образом.

001 When, in the course of human events, it becomes necessary
011 for one people to dissolve the political bands, which have
021 connected them with another, and to assume among the Powers
031 of the earth the separate and equal station to which
041 the Laws of Nature and of Nature’s God entitle them,
051 a decent respect to the opinions of mankind requires that
061 they should declare the causes which impel them to the
071 separations. We hold these truths to be self-evident, that
081 all men are created equal, that they are endowed by
091 there Creator with certain unalienable rights; that among
… …

Рис.3.9. Ключ шифратора Билла

Билл зашифровывал каждый символ в сообщении исходного текста, подставляя номер слова Декларации, которое начиналось с того же символа.

Символ *W*, например, может быть зашифрован омофонами 001, 019, 040, 066, 072.

Пример 3.13. Предположим, исходный текст состоит из одного слова *M*=PLAIN. В результате шифрования получим: *C* =013 042 081 008 044.

3.8. Биграммный шифр Плейфейра

Шифр Плейфейра (***Playfair Cipher***), предложенный в 1854 году, является наиболее известным биграммным шифром замены. Данный шифр применялся в Великобритании во время первой мировой войны.

В отличие от всех ранее рассмотренных шифров, шифр Плайфейра основан на шифровании одновременно не одного, а двух символов, что также позволяет видоизменить частотные зависимости характерные для исходных текстов.

Основой данного шифра является шифрующая таблица со случайно расположенными буквами алфавита исходных текстов. Такая таблица представляет собой сеансовый ключ. Для удобства запоминания шифрующей таблицы подобно, как и для подстановочных таблиц используется ключевое слово или фраза, записываемая при заполнении начальных строк таблицы.

Для случая английского языка шифрующая таблица задается матрицей

Ключ шифра Плэйфэйра

Y	A	R	M	O
L	I	K	B	C
D	E	F	G	H
N	P	Q	S	T
U	V	W	X	Z

5×5, состоящей из 25 позиций. Позиция для символа *J* соответствует позиции для символа *I* .

Процедура шифрования включает следующие этапы.

1.Исходный текст *M* разбивается на пары символов *M=m1m2…* (биграммы).

2.Последовательность биграмм *m1m2…* открытого текста *M* преобразуется с помощью шифрующей таблицы в последовательность биграмм *c1c2…* шифротекста *C* по следующим правилам.

2.1.Если буквы биграммы исходного текста *m1* и *m2* находятся в одной и той же строке шифрующей матрицы, то *c1* и *c2* представляют собой два символа справа от *m1* и *m2*, соответственно. Здесь первый столбец матрицы, является столбцам справа по отношении к последнему столбцу. Например, если *m1m2=EH* то *c1c2=FD.*

2.2.Если *m1* и *m2* находятся в одном и том же столбце, то *c1* и *c2* принимают значения, соответствующие символам ниже *m1* и *m2*, соответственно. Первая строка считается строкой ниже последней. Например, если *m1m2= FW* то *c1c2=QR.*

2.3.Если *m1* и *m2* находятся в различных строках и столбцах, то *c1* и *c2* соответствуют двум другим углам прямоугольника, имеющего *m1* и *m2*, в качестве двух исходных углов, при этом *c1* находится в той же строке что и *m1*, а *c2* находится в той же строке что и *m2*. Например, если *m1m2=KT*, то *c1c2=CQ* как видно из следующей диаграммы

Y	A	R	M	O
L	I	**K**	B	***C***
D	E	F	G	H
N	P	***Q***	S	**T**
U	V	W	X	Z

2.4.Если *m1=m2* тогда пустой (нулевой) символ (например, *X*) вставляется в исходный текст между *m1* и *m2*, чтобы устранить равенство *m1=m2*. Например, если *m1m2=KK*, тогда *m1m2m3=KXK* и соответственно *c1c2=DW*.

2.5.Если исходный текст имеет нечетное число знаков, пустой символ добавляется в конец текста для получения четного числа символов исходного текста.

Пример 3.14. Исходный текст *M*=CRYPTOGRAPHY. В результате шифрования согласно алгоритма Плейфейра получим *C*=KOANZCFMIVDO.

Следует отметить, что шифрование биграммами существенно повышает стойкость шифров к взлому, однако частотные свойства распределения биграмм по-прежнему является ключом для злоумышленника.

С целью упрощения процедур шифрования и дешифрования была предложена модификация данного метода путем использования четырех шифрующих матриц. Причем две матрицы (второй и четвертый квадрант) используются для задания символов исходного текста, а матрицы первого и третьего квадранта для получения символов шифротекста. Подобная модификация предполагает меньшее число правил по сравнению с шифратором Плэйфэйра.

Пример 3.15. Предположим, шифрующие матрицы имеют следующий вид.

M	W	X	Y	N		W	O	M	L	H
V	A	P	K	L		U	A	N	K	I
U	R	B	O	Z		S	B	C	Z	Y
E	F	Q	C	I		Q	P	D	E	Z
T	S	G	***H***	D		R	***T***	V	F	G
A	K	O	N	I		P	R	M	O	N
Z	B	L	P	H		I	D	S	E	F
U	T	C	M	G		H	G	C	T	Y
X	S	W	***D***	F		K	***W***	L	B	Z
Y	R	V	Q	E		V	Q	X	U	A

При шифровании диаграммы *m1m2=HW* получим *c1c2=TD*.

3.9. Расщепленный шифр

Идея ***расщепленного шифра*** (***Bifid cipher***) заключается в представлении каждого символа исходного текста в виде совокупностей частей этого символа, которые легко выделяются при шифровании. Затем для получения символа шифротекста используются части нескольких, как правило, последовательных символов исходного текста. Данная идея была предложена Деластелом (***Delastelle***). Суть его идеи состояла в последовательном использовании расщепления и объединения при получении шифротекста.

Подобно, как и для методологии шифрования Плэйфэйра, основой данного метода является шифрующая матрица, представляющая собой ключ шифра. Это предполагает использование номеров координат строк и столбцов для получения шифротекста. Выбрав в качестве шифрующей матрицы прямоугольник, состоящий из пяти строк и пяти столбцов, пронумеруем их последовательными номерами. В результате получим:

	1	2	3	4	5
1	T	X	V	H	R
2	L	K	M	U	P
3	N	Z	O	Q	E
4	C	G	W	Y	A
5	F	B	S	D	I

Тогда каждой букве английского алфавита можно поставить в соответствие двухзначное целое число, которое представляется двумя частями, а именно первой и второй цифрой, соответственно номером строки и номером столбца.

При шифровании исходный текст представляется блоками, состоящими из нескольких символов. Например, исходный текст *M*=THIS IS MY SECRET MESSAGE представляется в виде блоков состоящих из пяти символов, то есть *M*=THISI SMYSE CRETM ESSAG E. Далее каждому символу ставится в соответствие его код, состоящий из двух частей на основании шифрующей матрицы, приведенной выше. В результате получим.

T	H	I	S	I
1	1	5	5	5
1	4	5	3	5

S	M	Y	S	E
5	2	4	5	3
3	3	4	3	5

C	R	E	T	M
4	1	3	1	2
1	5	5	1	3

E	S	S	A	G

E

3	5	5	4	4		3
5	3	3	5	2		5

Приведенная выше таблица кодировки используется для получения кодов символов шифротекста. Первоначально цифры кодов считываются по строкам в рамках каждого блока. Тогда для первого блока получим 1155514535, для второго 5245333435, третьего 4131215513, четвертого 3554453352 и для пятого 35. Далее, используя для первого блока ту же шифрующую матрицу, получим следующие символы *T*=11, *I*=55, *F*=51, *A*=45, *E*=35. Отметим, что при получении символа *T* шифротекста использовались две первые цифры (части) кодов символов *T* и *H* исходного текста. Данное правило справедливо для всех символов шифротекста. Каждый из них получается из частей двух символов исходного текста. Окончательный результат шифрования в соответствии с расщепленным шифром принимает следующий вид *C*=TIFAEBAOQECNLIVEDAOBE.

Весьма эффективной модификацией ***расщепленного шифра*** (***Bifid cipher***) в котором символы исходного текста представляются двумя расщепляемыми частями, является ***Trifid cipher*** шифратор, для которого каждый символ исходного текста расщепляется на три части.

Как и в оригинальном методе, данная модификация базируется на шифрующей матрице, являющейся ключом при шифровании и дешифрировании. Каждый символ в подобной матрице кодируется тремя цифрами 1, 2 и 3. Трехзначные числа, задаваемые тремя цифрами, позволяют закодировать 3×3×3=27 символов, аналогично, как и для оригинального метода, двузначные числа, задаваемые пятью цифрами, позволили закодировать 5×5=25 символов. Пример подобной матрицы имеет следующий вид.

W 111	N 211	C 311	A 112	E 212	X 113	K 113	Q 213	I 313
M 121	O 221	T 321	& 122	V 222	J 322	B 123	R 223	F 323
Z 131	L 231	U 331	Y 132	P 232	G 332	H 133	S 233	D 333

Аналогично оригинальному методу и в данном случае исходный текст разделяется на блоки, состоящие из символов исходного текста. В данном случае длина блока не должна делиться нацело на три. Выберем длину блока равную семь, тогда исходный текст будет закодирован следующим образом.

T	H	I	S	I	S	M
3	1	3	2	3	2	1
2	3	1	3	1	3	2
1	3	3	3	3	3	1

Y	S	E	C	R	E	T
1	2	2	3	2	2	3
3	3	1	1	2	1	2
2	3	2	1	3	2	1

M	E	S	S	A	G	E
1	2	2	2	1	3	2
2	1	3	3	1	3	1
1	2	3	3	2	2	2

Очевидно, что при кодировании использовалась шифрующая таблица

являющаяся ключом. Для получения символов шифротекста используются три последовательные цифры в строке для каждого блока. Так первый блок и последующие блоки отобразятся в символы шифротекста следующим образом 313-I, 232-P, 123-B, 131-Z, 321-T, 333-D, 331-U, 122-&, 322-J, 333-D, 112-A 122-&, 321-T, 321-T, 122-&, 213-Q, 221-O, 331-U, 311-C, 233-S, 222-V. Соответственно *C*=IPBZTDU&JDA&TT&QOUCSV.

Расщепленный шифр считается одним из наиболее стойких ручных (***pencil-and-paper ciphers***) шифров. Его модификации по-прежнему вызывают интерес у любителей кроссвордов и головоломок.

3.10. Шифры, использующие коды переменной длины

Большие возможности криптографии часто использовались разведками разных стран для шифрования секретной информации, передаваемой их резидентами. Следующий метод шифрования (***The Straddling Checkerboard***) использовался разведкой СССР. Суть данного метода основана на использование так называемых ***префиксных кодов*** или кодов с переменной длиной. Подобно уже рассмотренным ранее шифрам, основой данного метода также является шифрующая матрица. На основании данной матрицы каждому символу исходного текста ставится в соответствие цифровой код, причем конкретный символ может быть зашифрован одной либо двумя десятичными цифрами.

Шифрующая матрица состоит из десяти столбцов и трех строк. Для нумерации столбцов используются все десять десятичных цифр. Их последовательность случайна. В первой строке записывается только восемь символов исходного текста. Символы A, T, O, N, E, S, I, R которые соответствуют ключевой фразе “At One Sir” являются ключом для построения остальной части матрицы. Примером такого ключа является следующая матрица.

	9	8	2	7	0	1	6	4	3	5
	A	T		O	N	E		S	I	R
2	B	C	D	F	G	H	J	K	L	M
6	P	Q	U	V	W	X	Y	Z	.	/

В первой строке матрицы пустыми (без символов) остаются только две позиции которые могут быть любыми из десяти возможных. В последующие строки матрицы последовательно записываются символы алфавита исходных текстов, которые не использовались в ключевой фразе. Для нумерации второй и третьей строки матрицы используются цифры соответствующие номерам столбцов с отсутствующими символами.

Структура шифрующей матрицы определяет алгоритм шифрования. Так, символы первой строки кодируются одной цифрой, а символы второй и третьей

строки кодируются двумя цифрами - номером строки и номером столбца.

Пример 3.16. Предположим, исходный текст имеет вид *M*=SEND MONEY. Тогда в результате шифрования в соответствии с ранее полученной шифрующей матрицей получим *C*=410222570166.

Очевидно, самым безопасным из простейших (***pencil-and-paper ciphers***) шифров является ***VIC шифр***, разработанный в Советском Союзе, по крайней мере, одному из его агентов. Это был шифр, в котором сообщение было написано на найденной в 1953 году в Нью-Йорке мальчиком, продавцом газет части микрофильма.

Для использования данного шифра агент должен владеть тремя частями секретного ключа для шифрования и дешифрирования сообщений.

Агент должен был запомнить.

1.Шесть цифр, которые задаются в виде даты.

2.Первые 20 символов ключевой фразы, которые были началом популярной песни.

3.Пять случайных цифр для использования их в качестве указателя сообщения либо, что есть то же самое, сеансового ключа.

Пусть в качестве даты будет выбрано 4 июля 1776, тогда в цифровой форме имеем число 741776. В качестве случайных пяти цифр возьмем 77651. Ключевая фраза "I dream of Jeannie with t…"была выбрана как начальные слова популярной песни. Все три части ключа далее используются для генерирования шифрующей матрицы, которая для каждого сеанса будет уникальной, отличной от других в силу различного указателя сообщения.

Получение шифрующей матрицы состоит из следующих основных этапов:

1.На первом шаге от пяти случайных цифр указателя сообщения вычитаются пять старших цифр даты.

$$\begin{array}{rccccc} & 7 & 7 & 6 & 5 & 1 \\ (-) & 7 & 4 & 1 & 7 & 7 \\ \hline & 0 & 3 & 5 & 8 & 4 \end{array}$$

При вычитании переносы между разрядами не учитываются.

2.На втором шаге на основании фразы ключа из 20 символов получаются 20 цифр. Первоначально фраза делится на две половины, и в пределах каждой половины, порядковый номер 1 назначается символу, который раньше всего встречается в алфавите, порядковый номер 2 - следующему символу и так далее. Порядковый номер 0 назначается символу, который встречается последним в упорядоченном алфавитном порядке символов. Таким образом, для фразы-ключа "I dream of Jeannie with t" мы имеем:

I	D	R	E	A	M	O	F	J	E

A	N	N	I	E	W	I	T	H	T

6	2	0	3	1	8	9	5	7	4

1	6	7	4	2	0	5	8	3	9

3.На данном шаге результат первого шага расширяется до десяти цифр путем ***цепного сложения*** (***chain addition***). Начиная с группы цифр (в этом случае пяти, а позже мы выполним ту же самую операцию с группой из десяти цифр), последовательно складываем по две цифры, начиная с первых двух, записывая результат сложения следующей цифрой результирующего числа.

При выполнении операции сложения переносы игнорируются. В результате получим.

					0+3=	3+5=	5+8=	8+4=	4+3=
0	3	5	8	4	3	8	3	2	7

4.Результат третьего этапа 0 3 5 8 4 3 8 3 2 7 суммируется с первой частью ключевой фразы представленной в виде числа 6 2 0 3 1 8 9 5 7 4. Здесь переносы также игнорируются. В результате получим 6 2 0 3 1 8 9 5 7 4 + 0 3 5 8 4 3 8 3 2 7 = 6 5 5 1 5 1 7 8 9 1.

5.Используя предыдущий результат, полученный в пункте 4, и вторую часть ключевой фразы получается цифровой код из десяти цифр согласно следующей диаграмме

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*0*
(2)	1	6	7	4	2	0	5	8	3	9
(4)	6	5	5	1	5	1	7	8	9	1
	0	***2***	***2***	***1***	***2***	***1***	***5***	***8***	***3***	***1***

Первый символ 0 определяется значением второй строки 0 которое соответствует индексу 6 указанному в первой строке. Второй и третий символы результата принимает значение 2, так как значение 2 во второй строке имеет индекс 5. Результат преобразования 0 2 2 1 2 1 5 8 3 1.

6.Используя результат предыдущего этапа и применяя операцию цепного сложения получим 50 новых псевдослучайных значений. В результате будем иметь: 0 2 2 1 2 1 5 8 3 1 * 2 4 3 3 3 6 3 1 4 3 * 6 7 6 6 9 9 4 5 7 9 * 3 3 2 5 8 3 9 2 6 2 * 6 5 7 3 1 2 1 8 8 8 * 1 2 0 4 3 3 9 6 6 9.

7.Последние десять псевдослучайных цифр используем для организации перестановок десятичных цифр. В результате на основании 1 2 0 4 3 3 9 6 6 9 получим 1 2 0 5 3 4 8 6 7 9. Преобразование начинается с цифры 1 и далее по возрастанию с последним нулем. По сути, преобразование заключается в исключении повторяющихся цифр. Так в коде 1 2 0 4 3 3 9 6 6 9 первой повторяющейся цифрой была цифра 3, второй дубликат которой, заменяется

следующей цифрой 4. Тогда последующие цифры исходного кода увеличиваются на единицу вплоть до следующей повторяющейся цифры 6.

8.Окончательный результат 1 2 0 5 3 4 8 6 7 9 используется для кодирования столбцов шифрующей матрицы.

	1	2	0	5	3	4	8	6	7	9
	A	T		O	N	E		S	I	R
0	B	C	D	F	G	H	J	K	L	M
8	P	Q	U	V	W	X	Y	Z	.	/

Полученная таким образом матрица используется для шифрования и дешифрирования передаваемых сообщений.

3.11. Метод диаграммы Порта

Метод ***диаграммы (таблицы) Порта*** (***Giovanni Baptista della Porta***) был предложен в 565 году. Данный метод основан на использовании таблицы Порта и ключевого слова (рис. 3.10).

Для шифрования сообщения (например, *M*=LOOK UNDER THE COUCH) необходимо использовать ключ (например, *K*= JACKET) таким образом, чтобы буквы ключа последовательно записывались под буквами исходного текста как это показано на диаграмме.

L	O	O	K	U	N	D	E	R	T	H	E	C	O	U	C	H
J	A	C	K	E	T	J	A	C	K	E	T	J	A	C	K	E

На следующем шаге необходимо использовать таблицу Порта, чтобы получить зашифрованное сообщение. Символы ключевого слова (*JACKET* в нашем примере), используются для определения строки, в которой выбирается символ шифруемого сообщения. В примере выше *J* – первый символ ключевого слова. Таким образом, необходимо определить местонахождение *J* на левой части таблицы Порта. Как видно, *J* находится в 5-ой строке таблицы Порта. В этой же строке в правой части находим шифруемый символ *L*, а ниже под этим символом будет находиться символ шифротекста *U*. Результирующий шифротекст имеет вид *C*=UBCS JJZRF LSVYBIXS

Таблица Порта

AB	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
CD	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	Z	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
EF	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	Y	Z	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
GH	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	X	Y	Z	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
IJ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	W	X	Y	Z	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
KL	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	V	W	X	Y	Z	N	O	P	Q	R	S	T	U
MN	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	U	V	W	X	Y	Z	N	O	P	Q	R	S	T
OP	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	T	U	V	W	X	Y	Z	N	O	P	Q	R	S
QR	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	S	T	U	V	W	X	Y	Z	N	O	P	Q	R
ST	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	N	O	P	Q
UV	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	N	O	P
WX	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	N	O
YZ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	N

Рис.3.10. Таблица Порта для английского языка

3.12. Шифратор Виженера

Система шифрования Виженера (***Vigenere Cipher***) впервые была опубликована в 1586 году и является одной из старейших и наиболее известных много алфавитных систем шифрования. ***Шифратор Виженера***, подобно как и шифр Порта, по своей сути использует развитие идеи Цезаря. Отличается только тем, что число реальных таблиц подстановки зависит от длины криптографического ключа и используемого алфавита. Важной особенностью шифратора Виженера является чередование использования таблиц подстановки в зависимости от последовательности символов используемого ключа. Этот шифр много алфавитной подстановки можно описать таблицей шифрования называемой ***таблицей (квадратом) Виженера***. Ниже приведен пример таблицы Виженера.

В таблице Виженера каждая строка представляет собой циклически сдвинутую на один символ предыдущую строку таблицы таким образом, что

каждая строка по своей сути является таблицей подстановки шифратора Цезаря для конкретного значения ключа.

Таблица Виженера используется для шифрования и дешифрирования. Верхняя строка таблицы Виженера используется для задания символов исходных текстов, а левый столбец для задания символов криптографического ключа.

При шифровании исходного сообщения его записывают в строку, а под ним ключевое слово либо фразу. Если ключ оказался короче исходного текста, то его циклически повторяют необходимое число раз. На каждом шаге шифрования в верхней строке таблицы Виженера находят очередную букву исходного текста, а в левом столбце - очередное значение символа ключа. В результате очередная буква шифротекста находится на пересечении столбца определенного символом исходного текста и строки, соответствующей строке символа ключа.

Таблица Виженера

	a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***	***i***	***j***	***k***	***l***	***m***	***n***	***o***	***p***	***q***	***r***	***s***	***t***	***u***	***v***	***w***	***x***	***y***	***z***
a	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
b	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a
c	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b
d	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c
e	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d
f	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e
g	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f
h	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g
i	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h
j	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i
k	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
l	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
m	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
n	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
o	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
p	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
q	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
r	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q
s	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r
t	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s
u	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
y	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
w	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v
x	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w
y	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x
z	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y

Рис.3.11. Таблица Виженера для английского языка

При шифровании слова *M*=CRYPTOGRAPHY по методу Виженера для

ключа RAND предварительно исходный текст и ключевое слова запишем в виде двух строк.

C R Y P T O G R A P H Y
R A N D R A N D R A N D

Тогда первая буква исходного текста *C* определяет третий столбец таблицы Виженера а буква *R* ключа семнадцатую строку таблицы на пересечении которых находится символ шифротекста *T*. Окончательный результат шифрования имеет вид *C*=TRLSKOTURPUB.

Различают три возможных варианта использования криптографического ключа: прямое использование (***Straight Keyword***); прогрессивный ключ (***Progressive Key***); самогенерирующийся ключ (***Auto Key***). Рассмотрим использование всех трех вариантов для исходного сообщения "*Wish you were here*".

Пример 3.17. Для шифрования сообщения "Wish you were here", используем ключ SIAMESE. Тогда для первого случая прямого использования ключа получим:

M=	W	I	S	H	Y	O	U	W	E	R	E	H	E	R	E
K=	S	I	A	M	E	S	E	S	I	A	M	E	S	E	S
C=	O	Q	S	T	C	G	Y	O	M	R	Q	L	W	V	W

Идея использования прогрессивного ключа заключается в циклическом сдвиге символов ключа на одну позицию в упорядоченном алфавите символов при повторном применении ключа. Тогда для ключа SIAMESE при повторном его использовании по прогрессивной схеме имеем TJBNFTF, а при третьем UKCOGUG, и так далее.

Пример 3.18. Для шифрования сообщения "Wish you were here", используем ключ SIAMESE и прогрессивную схему его применения получим.

M=	W	I	S	H	Y	O	U	W	E	R	E	H	E	R	E
K=	S	I	A	M	E	S	E	T	J	B	N	F	T	F	U
C=	O	Q	S	T	C	G	Y	P	N	S	R	M	X	W	Y

В случае самогенерирующегося ключа в качестве его последующих символов используется исходный текст.

Пример 3.19. Для шифрования сообщения "Wish you were here", используем самогенерирующийся ключ SIAMESE. В результате имеем.

M=	W	I	S	H	Y	O	U	W	E	R	E	H	E	R	E

K=	S	I	A	M	E	S	E	W	I	S	H	Y	O	U	W
C=	O	Q	S	T	C	G	Y	S	M	J	L	F	S	L	W

Модификациями метода Вижинера могут быть алгоритмы, в которых используются другие алфавиты, в том числе и различные алфавиты для исходных текстов и криптографических ключей, а также другой принцип генерирования строк шифрующей таблицы.

3.13. Роторные машины

Простейший шифр замены использует единственную таблицу подстановки, что приводит к тому, что частотные свойства исходного текста трансформируются без изменений в шифротекст. Развития простейшего шифра замены, рассмотренные выше, позволяют несколько снизить указанный недостаток, однако они оказались далеки от практического использования.

Первым методом, заслуживающим внимания при практическом использовании в настоящее время, является метод ***роторных машин***, который реально использует огромное количество различных таблиц подстановки.

Основная идея метода роторных машин лежит в многократных либо много алфавитных заменах. В 1568, Олберти (***Alberty***) издал рукопись, описывающую шифрующий диск, который определял многократные замены. Диск устанавливал соответствие *n* (где *n* - как пример может быть числом английских символов) символам исходного текста на внешнем диске (кольце) ротора возможные замены символами зашифрованного текста на внутреннем диске ротора. В зависимости от взаимного положения дисков, которое меняется путем поворота одного из дисков по отношению к другому, задаются различные таблицы подстановки. Очень важным развитием, полученным Олберти, безусловно, является динамическое изменение таблиц подстановки в процессе шифрования. Эта идея оказалась весьма конструктивной для практических систем шифрования.

В начале XX века были изобретены электромеханические устройства шифрования позволившие автоматизировать процесс шифрования. Принцип работы таких машин был основан на много алфавитной замене символов исходного текста в соответствии с идеями Олберти. В литературе широко описаны американская машина SIGABA (M-134), английская TYPEX, японская PURPLE и наиболее известная немецкая ENIGMA.

Главной деталью роторной машины является ***ротор*** (или диск) с электропроводящими перемычками внутри. На каждой стороне диска расположены равномерно по окружности *n* электрических контактов, где *n* – число символов алфавита исходных текстов. Каждый контакт на передней стороне диска соединен с одним из контактов на внутренней стороне. В результате электрический сигнал, соответствующий символу исходных текстов, будет заменен символом шифротекста. Соответствие символов исходных

текстов символам шифротекстов определяется таблицей подстановки и реализуется в роторе внутренними электропроводящими перемычками. Коммутация перемычек может быть изменена путем изменения соединений перемычек. Для фиксированной коммутации один ротор позволяет сгенерировать *n* таблиц подстановки путем поворота одного диска ротора по отношению к другому.

Роторная машина, как правило, состоит из нескольких роторов и механизма изменения положения дисков ротора с каждым зашифрованным символом. Механизм движения роторов может быть различным как по направлению, так и по количеству позиций на которое изменяется положение дисков ротора. Простейшим принципом движения является принцип одометра, использованный в немецкой машине ENIGMA. При шифровании машиной ENIGMA одного символа исходного текста правый крайний ротор поворачивается на одну позицию. Когда данный ротор (и любой другой) переместится на *n* позиций и совершит полный оборот ротор, расположенный справа от него, перемешается на одну позицию. Таким образом, для каждого символа исходного текста роторная машина будет иметь определенное состояние роторов, которому соответствует своя таблица подстановки. Подобным образом последовательно роторная машина принимает все возможные состояния, число которых для *m* роторов и *n* символов ровняется n^m. Для английского алфавита и, например, двух роторов в роторной машине число возможных состояний роторной машины или что, то же самое, таблиц подстановки равняется $n^m=26^2$. Учитывая то, что количество возможных таблиц подстановки в случае английского алфавита ровняется ≈26! количество роторов роторной машины, как правило, не превышает десяти. Попытка упростить реализацию роторной машины привела к повторному использованию одного и того же ротора при шифровании одного символа исходного текста. Структура подобной роторной машины приведена на следующем рисунке. В данном случае роторная машина состоит из трех роторов *R1, R2, R3* и рефлектора (*Reflec*.) (отражателя). В результате данная машина реально использует шесть роторов при шифровании каждого символа исходного текста.

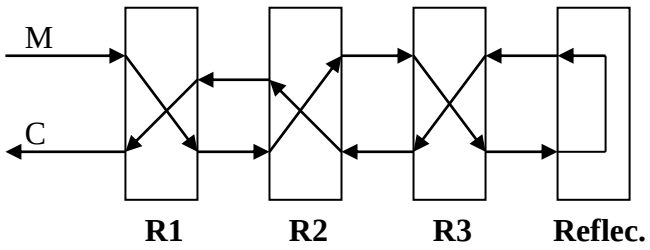


Рис.3.12. Роторная машина

Ключом роторной машины могут быть различные ее параметры, например, такие как:

- количество роторов и их порядок подключения.

- коммутация каждого ротора, определяющая его уникальную таблицу подстановки.

- механизм перемещения дисков роторов.

Развитием классической роторной машины может быть ее электронная версия, где основным элементом является запоминающее устройство (ЗУ), которое выполняет функции ротора. Содержимое ячеек запоминающего устройства определяется двоичными кодами символов шифротекста, а адреса соответствуют кодам символов исходных текстов. Для случая, когда алфавиты шифротекстов и исходных текстов тождественны и представляют собой 256 символов ASCII кодов, запоминающее устройство будет содержать 256 ячеек, каждая из которых имеет восемь бит. Во все ячейки ЗУ записываются ASCII коды в случайной последовательности таким образом, что каждому адресу ЗУ соответствует его ячейка с конкретным ASCII кодом. По своей сути такое ЗУ реализует простейшую таблицу подстановки, когда коды символов исходных текстов представляют собой адреса ЗУ, а содержимое ячеек - коды символов шифротекстов. Структурная схема электронного ротора приведена на рис.3.13.

Запоминающее устройство (RAM)	
Адрес ячейки ЗУ	Ячейка ЗУ
0	01010101
1	10010011
2	11000011
…	…
255	00011101

Рис.3.13. Электронный ротор

Приведенный ротор представляет собой статическую структуру, в которой отсутствует механизм вращения. Реализация данного механизма возможна на базе операции суммирования кода адреса ЗУ (символа шифротекста) с некоторой изменяющейся последовательностью двоичных кодов. Например, для случая равновероятных псевдослучайных последовательностей чисел (ПСЧ) будем иметь реализацию механизма сдвига на случайное количество позиций.

На рис. 3.14 приведен пример возможной структуры роторной машины состоящей из одного ротора.

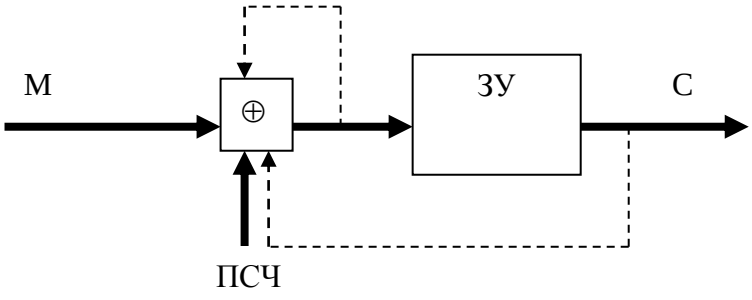


Рис.3.14. Электронная роторная машина

На основании ASCII кода символа исходного текста M и текущего значения кода псевдослучайного числа формируется адрес ЗУ как их поразрядная сумма по модулю два. Возможно использование большего числа аргументов для получения значения адреса ЗУ, а именно предыдущего адреса ЗУ и/или предыдущего значения символа шифротекста. Этот случай показан на рисунке пунктирной линией. Далее в соответствии со сформированным таким образом адресом считывается значение ячейки ЗУ, что и будет представлять собой код символа шифротекста.

В заключение следует отметить, что роторные машины позволяют достичь хорошего сочетания трех главных требований предъявляемых к криптографическим системам, а именно:

1.Высокой криптостойкости.

2.Высокого быстродействия.

3.Простаты реализации как программной, так и аппаратной.

3.14. Шифратор Вернама

Шифратор Вернама (***Gilbert Vernam***), или что есть то же самое, шифратор типа бегущий ключ был предложен Вернамом в 1917. Основная идея данного метода заключается в использовании ключа такой же длины, как и длина исходного текста и простейшего алгоритма шифрования, например поразрядной операции сложения по модулю кодов символов исходных текстов с кодами символов ключа. Данный шифратор часто называется одноразовым шифротором или шифратором одноразового блокнота (***one time pad***).

В качестве ключа может быть использована последовательность детерминированных символов полученных, например, из некоторой известной книги или любого другого документа доступного отправителю и получателю сообщения.

Пример 3.20. Предположим, что в качестве ключа будем использовать текст из учебника “Cryptography and Data Security”, который начинается с начала второго параграфа, а в качестве исходного текста “THE TREASURE IS BURIED...” тогда в процессе шифрования по методу Вижинера получим.

M =	t	h	e	t	r	e	a	s	u	r	e	i	s	b	u	r	i	e	d
K =	t	h	e	s	e	c	o	n	d	c	i	p	h	e	r	i	s	a	n

C = m o i l v g o f x t m x z f l z a e q

Для общего случая пусть $M=m_1m_2...$ обозначает последовательность бит исходного текста, а $K=k_1k_2...$ последовательность бит ключа. Тогда в соответствии с шифром Вермана шифротекст будет иметь вид

$$C=E_K(M)=c_1c_2... \text{, где } c_i=(m_i \oplus k_i) \textbf{ mod } 2,\ i=1,2,... .$$

Шифр Вернама может быть эффективно реализован с использованием последних достижений микроэлектроники, на базе элементарной операции “исключающее ИЛИ”. В соответствии с указанной операцией, каждой паре исходный текста/ключ (m_i/k_i) ставиться в соответствие символ шифротекста $c_i=m_i \oplus k_i$. Так как $k_i \oplus k_i = 0$ для любого значения $k_i=0$ или 1, дешифрирование выполняется аналогичным образом: $c_i \oplus k_i = m_i \oplus k_i \oplus k_i = m_i$.

Как будет показано далее, шифр Вернама является наиболее близким приближением к абсолютно секретной криптосистеме.

Тема 4. Кодирование информации

http://www.tspu.tula.ru/ivt/old_site/umr/timoi/solovieva/Computer/sys_kod.htm

Информация передается в виде сообщений. **Дискретная информация** записывается с помощью некоторого конечного набора знаков, которые будем называть буквами, не вкладывая в это слово привычного ограниченного значения (типа "русские буквы" или "латинские буквы"). Буква в расширенном понимании любой из знаков, которые некоторым соглашением установлены для общения. Например, при привычной передаче сообщений на русском языке такими знаками будут русские буквы - прописные и строчные, знаки препинания, пробел; если в тексте есть числа - то и цифры.

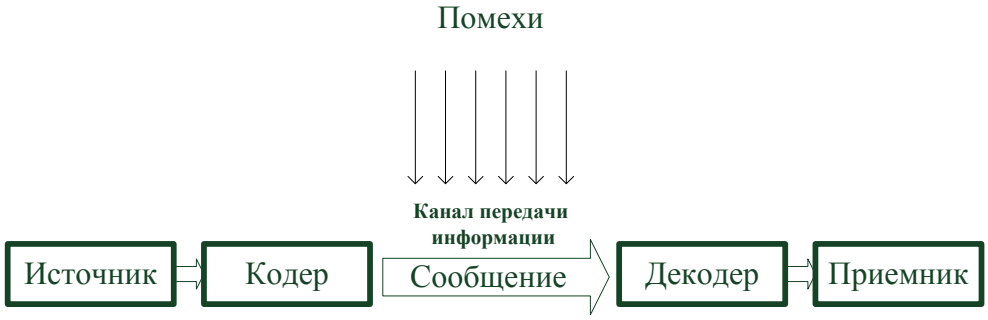
Буква - элемент некоторого конечного множества (набора) отличных друг от друга знаков.

Алфавит - множество знаков (букв), в котором определен их порядок. Например, общеизвестен порядок знаков в русском алфавите: А, Б, ..., Я.

Некоторые примеры алфавитов:

1. Алфавит Морзе;
2. Алфавит клавиатурных символов;
3. Алфавит арабских цифр;
4. Алфавит шестнадцатеричных цифр (этот пример, в частности, показывает, что знаки одного алфавита могут образовываться из знаков других алфавитов);
5. Алфавит латинских букв;
6. Алфавит нотных символов.

В канале связи сообщение, составляемое из символов (букв) одного алфавита, может преобразовываться в сообщение из символов (букв) другого алфавита. Правило, описывающее однозначное соответствие букв алфавитов при таком преобразовании, называют **кодом**. Саму процедуру преобразования сообщения называют **кодированием** (перекодировкой). Подобное преобразование сообщения может осуществляться в момент поступления сообщения от источника в канал связи (кодирование) и в момент приема сообщения получателем (декодирование). Устройства, обеспечивающие кодирование и декодирование, будем называть **кодером** (кодировщиком) и **декодером** (декодировщиком).



На рисунке представлена схема, иллюстрирующая процесс передачи сообщения в случае перекодировки, а также воздействия помех.

Рассмотрим некоторые примеры кодов.

1. Азбука **Морзе** в русском варианте (алфавиту, составленному из алфавита русских заглавных букв и алфавита арабских цифр, ставится в соответствие алфавит Морзе)

2. Код **Trifid** (знакам латинского алфавита ставятся в соответствие комбинации из трех знаков: 1, 2, 3):

A	111	J	211	S	311
B	112		212	T	312
C	113	L	213	U	313
D	121	M	221	V	321
E	122	N	222	W	322
F	123	O	223	X	323
G	131	P	231	Y	331
H	132	Q	232	Z	332
I	133	R	232	.	333

Код Trifid является примером, так называемого, равномерного кода (такого, в котором все кодовые комбинации содержат одинаковое число знаков - в данном случае три). Пример неравномерного кода - азбука Морзе.

3. Кодирование чисел знаками различных систем счисления.

Ранее отмечалось, что при передаче сообщений по каналам связи могут возникать помехи, способные привести к искажению принимаемых знаков. Так, например, если вы попытаетесь в ветреную погоду передать речевое сообщение человеку, находящемуся от вас на значительном расстоянии, то оно может быть сильно искажено такой помехой, как ветер. Вообще, передача сообщений при наличии помех является серьезной теоретической и практической задачей. Ее значимость возрастает в связи с повсеместным внедрением компьютерных телекоммуникаций, в которых помехи неизбежны.

Основные проблемы, возникающие при работе с кодированной информацией, искажаемой помехами:

- установление самого факта того, что произошло искажение информации;
- выяснение того, в каком конкретно месте передаваемого текста произошло искажение информации;
- исправление ошибки, хотя бы с некоторой степенью достоверности.

Помехи в передачи информации - вполне обычное дело во всех сферах профессиональной деятельности и в быту. Один из примеров был приведен выше, другие примеры - разговор по телефону, в трубке которого "трещит", вождение автомобиля в тумане и т.д. Чаще всего человек вполне справляется с каждой из указанных выше задач, хотя и не всегда отдает себе отчет, как он это делает (т.е. неалгоритмические, а исходя из каких-то ассоциативных связей). Известно, что естественный язык (язык на котором разговаривают люди) большой избыточностью (в европейских языках - до 70%), чем объясняется большая помехоустойчивость сообщений, составленных из знаков алфавитов таких языков.

Примером, иллюстрирующим устойчивость русского язык к помехам, может служить предложение **"в словох всо глосноо зомононо боквой о".** Здесь 26% символов "поражены", однако это не приводит к потере смысла. Таким образом, в данном случае избыточность является полезным свойством. Избыточность могла бы быть использована и при передаче кодированных сообщений в технических системах. Например, каждый фрагмент текста ("предложение") предается трижды, и верным считается та пара фрагментов, которая полностью совпала. Однако, большая избыточность приводит к большим временным затратам при передаче информации и требует большого объема памяти при ее хранении.

Впервые теоретическое исследование эффективного кодирования предпринял К.Шеннон. Информатика и ее приложения интернациональны. Это связано как с объективными потребностями человечества в единых правилах и законах хранения, передачи и обработки информации. Компьютер считают универсальным преобразователем информации. Тексты на естественных языках и числа, математические и специальные символы - одним словом все, что в быту или профессиональной деятельности может быть необходимо человеку, должно иметь возможность быть введенным в компьютер.

В силу безусловного приоритета двоичной системы счисления при внутреннем представлении информации в компьютере кодирование "внешних"

символов основывается на сопоставлении каждому из них определенной группы двоичных знаков. При этом из технических соображений и из соображений удобства кодирования-декодирования следует пользоваться равномерными кодами, т.е. двоичными группами равной длины.
Попробуем подсчитать наиболее короткую длину такой комбинации с точки зрения человека, заинтересованного в использовании лишь одного естественного алфавита - скажем, английского: 26 букв следует умножить на 2 (прописные и строчные) - итого 52; 10 цифр; будем считать 10 знаков препинания; 10 разделительных знаков (три вида скобок, пробел и др.), знаки привычных математических действий, несколько специальных символов (типа %, @, &, $ и др.) - итого приблизительно 100. Точный подсчет здесь не нужен, поскольку нам предстоит решить задачу: имея, скажем равномерный код по N двоичных знаков, сколько можно образовать разных кодовых комбинаций. Ответ очевиден: $K=2^N$. Итак, при N = 6, K = 64 - явно мало, при N = 7, K = 128 - вполне достаточно. Однако, для кодирования нескольких (хотя бы двух) естественных алфавитов (плюс все отмеченные выше знаки) и этого недостаточно. Минимально достаточное значение N в этом случае 8; имея 256 комбинаций двоичных символов, вполне можно решить указанную задачу. Поскольку 8 двоичных символов составляют 1 байт, то говорят о **системах "байтового" кодирования.**

Наиболее распространены две такие системы: EBCDIC (Extended Binary Coded Decimal Interchange Code) и ASCII (American Standard Information Interchange). Первая - исторически тяготеет к "большим" машинам, вторая чаще используется на мини- и микроЭВМ (включая персональные компьютеры). Но даже 8-битная кодировка недостаточна для кодирования всех символов, которые хотелось бы иметь в расширенном алфавите. Все препятствия могут быть сняты при переходе на 16 - битную кодировку Unicode, допускающую 65536 кодовых комбинаций

Тема 5. Элементы теории чисел

Ярмолик В.Н., Портянко С.С., Ярмолик С.В. Криптография, стеганография и охрана авторского права. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. – 242с. (*Глава 3.*)

Все множество **натуральных чисел** состоит их двух подмножеств: **действительных чисел** и **целых чисел.** Наиболее часто используемым подмножеством в криптографии и различных приложениях по защите информации является подмножество целых чисел. В свою очередь целые числа делятся на **простые** и **составные** числа.

Целое число d является делителем n тогда и только тогда, когда это число может быть представлено в виде произведения, то есть $n=kd$, и обозначается как $d \mid n$.

Целое число p, $p>1$ является **простым**, если его делителями являются только 1 и p. Последовательность простых чисел начинается с чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113,….

Натуральные целые числа, имеющие больше двух делителей, называются **составными**. Таким образом, все натуральные целые числа делятся на простые и составные числа.

Любое целое $n>1$ может быть представлено единственным образом как произведение простых чисел в соответствующих степенях. Представление натурального целого числа в виде произведения простых чисел называется **каноническим разложением Евклида**, а процедура получения такого разложения – **разложением на простые сомножители** или **факторизацией** числа.

На настоящий момент не известны полиномиальные алгоритмы факторизации чисел, хотя и не доказано, что таких алгоритмов не существует. На этом факте базируется большинство из существующих криптосистем.

Весьма значимым с точки зрения криптографических приложений является факт того, что не известен эффективный алгоритм разложения чисел на множители, кроме того, не было получено никакой конструктивной нижней оценки временной сложности такого разложения. Более того, не известно никаких эффективных методов даже в таком простом случае, когда необходимо восстановить два простых числа p и q на основании их произведения $n=pq$. Единственной альтернативой является последовательное деление числа n на все простые числа. Поэтому получение простых чисел и в особенности больших простых чисел является одной из первоочередных задач криптографии.

Для оценки этой проблемы приведем несколько тривиальных теорем.

Теорема 5.1. (**Евклида**) Существует бесконечное множество простых чисел.

Доказательство: Предположим, что это множество конечно и состоит из простых чисел $p_1, p_2, p_3,\ldots,p_k$, тогда получим противоречие, заключающееся в том, что число

$$\left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right)+1,$$

не делится ни на одно простое число $p_1, p_2, p_3,\ldots,p_k$, тогда как оно делится на 1 и на самого себя, а это значит, что это число простое. #

Важным выводом приведенной теоремы является тот факт, что простых чисел существует бесконечное множество.

Теорема 5.2. Для сколь угодно большого положительного целого числа $k>1$, на числовой оси существует k последовательно идущих друг за другом составных чисел.

Доказательство: Число $(k+1)!=2\times3\times4\times\ldots\times(k+1)$ делится на любое из следующих чисел $2,3,4,\ldots,(k+1)$. Тогда числа, следующие последовательно в числовом ряду целых чисел $(k+1)!+2$, $(k+1)!+3$, $(k+1)!+4,\ldots$, $(k+1)!+(k+1)$, являются составными числами вследствие того факта, что первое число делится, по крайней мере, на 2, второе на 3 и т. д. #

Приведенная теорема свидетельствует о сложности нахождения простых чисел, так как их удельный вес по сравнению с составными числами является несравненно меньшим.

Реальный подсчет простых чисел в каждой сотне целых чисел для интервала от 1 до 1000, то есть в первой сотне от 1 до 100, во второй сотне от 101 до 200 и так далее равен: 25, 21, 16, 16, 17, 14, 16, 14, 15, 14. Аналогичный подсчет для интервала от 1 000 001 до 1 001 000 равен: 6, 10, 8, 8, 7, 7, 10, 5, 6, 8. Еще меньше простых чисел в интервале от 10 000 001 до 10 001 000, а именно: 2, 6, 6, 6, 5, 4, 7, 10, 9, 6.

Количество целых чисел для произвольного интервала может быть оценено с помощью следующей теоремы.

Теорема 5.3. Отношение количества простых чисел $\pi(x)$ находящихся в интервале от 2 до x к величине равной $x/ln(x)$ стремиться к единице при x стремящемся к бесконечности, то есть

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}=1,$$

где $ln(x)$ есть натуральный логарифм от x.

Количественно приведенная теорема иллюстрируется таблицей.

x	$\pi(x)$	$x/ln(x)$	$\pi(x)/(x/ln(x))$
1 000	168	145	1,159
10 000	1 229	1 086	1,132
100 000	9 592	8 686	1,104
1 000 000	78 498	72 382	1,084
10 000 000	664 579	620 421	1,071
100 000 000	5 761 455	5 428 681	1,061
1 000 000 000	50 847 476	48 254 942	1,054

Один из первых алгоритмов, позволяющих уменьшить сложность определения простоты целых чисел, был предложен еще во времена Евклида и базируется на использовании следующей теоремы.

Теорема 5.4. Если целое число $n>1$ не делится ни на одно из простых чисел не большее чем $(n)^{1/2}$, то это число есть простое число.

Доказательство: Пусть n есть составное число, и соответственно может быть выражено как произведение двух сомножителей $n=ab$, где $1<a<n$; $1<b<n$. Числа a и b не могут быть больше, чем $(n)^{1/2}$ одновременно. #

Алгоритм получения простых чисел описывается следующей теоремой.

Теорема 5.5. (**Эратосфена**)

1) Если в наборе целых чисел 2,3,4,..,N удалить все числа, которые делятся на первые r простых чисел 2,3,5,7,…,p_r, тогда первое (наименьшее) не удаленное число будет простым.

2) Если в наборе целых чисел 2,3,4,..,N удалить все числа, которые делятся на простые числа меньшие или равные $(N)^{1/2}$, тогда все оставшиеся числа будут простыми числами p, принадлежащими интервалу $(N)^{1/2}<p\leq N$.

Доказательство:

1) Любое составное число n делится, по крайней мере, на одно простое число меньшее, чем n.

2) Каждое составное число n, такое что $(N)^{1/2}< n\leq N$ делится, по крайней мере, на одно простое $p_i\leq(n)^{1/2}\leq(N)^{1/2}$, то есть на одно из чисел 2, 3,…, p_r ($p_r<(N)^{1/2}\leq p_{r+1}$) и, следовательно, будет вычеркнуто. #

Пример 5.1. В качестве примера рассмотрим пятьдесят первых чисел числового ряда, то есть

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49											

В результате удаления всех чисел кратных 2,3,5 и 7 получим множество простых чисел: 11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47, которое удовлетворяет вышеприведенной теореме.

Попытки определить формальным образом простые числа приводили к отрицательному результату.

Так простые числа **Эйлера** (**Euler's**) могут быть сгенерированы в соответствии с формулой x^2-x+41, для целых чисел x принадлежащих интервалу, $0<x<40$. Очевидно, что для больших значений x данная формула неприменима.

Простые числа **Ферма** (**Fermat's**): 3,5,17,257,65537 генерируются в соответствии с формулой 2^K+1, где $K=2^k$, для целых значений k.

Простые числа **Мерсенна** (**Mersenne's**) могут быть сгенерированы по формуле 2^n-1, для простых чисел n=2,3,5,7,13,17,19,31,61. Интерес к числам Мерсенна не ослабевает.

Наибольшее известное на данный момент простое число $M=2^{25964951}-1$ содержит 7816230 десятичных цифр. Это 42-е известное простое число Мерсенна было найдено 18 февраля 2005 года в проекте по распределённому поиску простых чисел Мерсенна GIMPS.

Предыдущее по величине известное простое число $M=2^{24036583}-1$ (из 7235733 десятичных цифр). Это 41-е простое число Мерсенна, также было найдено GIMPS 15 мая 2004.

Числа Мерсенна выгодно отличаются от остальных наличием эффективного **теста простоты**, носящего имя **Люка-Лемера**. Благодаря этому тесту простые числа Мерсенна давно удерживают рекорд как самые большие известные простые числа. За нахождение простого числа, состоящего из более чем 10^7 десятичных цифр, назначена награда в 100000 долларов США.

Составные числа могут быть представлены в канонической форме

$$a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i},$$

где p_i – простые числа, α_i – целые числа, a – составное число.

Пример 5.2. $a=120=2^3\times3^1\times5^1$.

Общим делителем чисел $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ является целое число d, такое, что $d \mid a_1$, $d \mid a_2$, $d \mid a_3,\ldots$, $d \mid a_n$.

Наибольший общий делитель чисел $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ это наибольший целый делитель d, который может быть поделен любым общим делителем этих чисел $d=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$.

Пример 5.3. (6,15,27)=3.

Теорема 5.6. Если

$$a_n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i},\ a_2 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i} \quad \ldots a_1 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

тогда наибольший общий делитель (НОД) будет равен:

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i,\ldots,\gamma_i)}.$$

Пример 5.4. Если $6=2^1\times3^1$, $15=3^1\times5^1$, $27=3^3$, тогда НОД(6,15,27)= $=2^{min\{1,0,0\}}\times3^{min\{1,1,3\}}\times5^{min\{0,1,0\}}=2^0\times3^1\times5^0=3$.

Теорема 5.7. Если

$$a_n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i},\ a_2 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i} \quad \ldots a_1 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

тогда наименьшее общее кратное (НОК) будет равно:

$$НОК(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i,\ldots,\gamma_i)}.$$

Пример 5.5. Если $6=2^1\times3^1$, $15=3^1\times5^1$, $27=3^3$, тогда НОК(6,15,27)= $=2^{max\{1,0,0\}}\times3^{max\{1,1,3\}}\times5^{max\{0,1,0\}}=2^1\times3^3\times5^1=270$.

Алгоритм Евклида

Проблема нахождения наибольшего общего делителя является одной из часто используемых процедур в криптографии, которая в частности позволяет определить взаимную простоту целых чисел. Одним из исторически первых инструментов определения взаимной простоты является хорошо известный

алгоритм Евклида. Методологической основой указанного алгоритма является следующая теорема.

Теорема 5.8. Если $a=bq+r$, тогда наибольший общий делитель чисел a,b равен наибольшему общему делителю чисел b,r, то есть $(a,b)=(b,r)$.

Доказательство:

Пусть $d=(a,b)$, тогда из утверждения $d \mid a$ и $d \mid b$ можно сделать вывод, что d является делителем bq, а также делителем разности чисел a и bq. Таким образом d является делителем $a-bq=r$.#

Теорема 5.9. **(Алгоритм Евклида)** Для любых целых чисел $a>0$ и $b>0$ таких, что $a>b$, и b не является делителем a, для некоторого s, существуют целые числа $q_0,q_1,q_2,\ldots,q_s$ и $r_1,r_2,\ldots,r_s$ такие, что $b>r_1>r_2>\ldots>r_s>0$ и $a=bq_0+r_1$, $b=r_1q_1+r_2$, $r_1=r_2q_2+r_3,\ldots$, $r_{s-2}=r_{s-1}q_{s-1}+r_s$, $r_{s-1}=r_sq_s$, и соответственно $(a,b)=r_s$

Доказательство последней теоремы следует из последовательного применения теоремы 3.8 для пар чисел (a,b), (b,r_1), $(r_1,r_2),\ldots,$ (r_{s-1},r_s), для которых выполняется равенство $(a,b)=(b,r_1)=(r_1,r_2)=\ldots=(r_{s-1},r_s)$.

В виде вычислительной процедуры алгоритм Евклида можно представить следующим кодом.

Алгоритм Евклида

```
begin
    g0:=a;
    g1:=b;
    while gi≠0 do
    begin
        gi+1:= gi-1 mod gi;
        i:=i+1;
    end
    gcd:= gi-1          {gcd – Greatest Common Divisor (НОД)}
end
```

Пример 5.9. Определим НОД для целых чисел 1173 и 323, (1173,323) =?. Так как 1173=323·3+204, то НОД для целых чисел 1173 и 323 равен НОДу для чисел 323 и 204. Повторяя подобное разложение чисел: 323=204×1+119; 204=119×1+85; 119=85×1+34; 85=34×2+17; 34=17×2 окончательно получим, что (1173,323) =17.

В соответствии с приведенным выше алгоритмом Евклида получим:

***gi*+1**	**:=**	***gi*-1 *mod* *gi*;**
204	:=	1173 *mod* 323
119	:=	323 *mod* 204
85	:=	204 *mod* 119
34	:=	119 *mod* 85
17	:=	85 *mod* 34
0	:=	34 *mod* 17

Одним из существенных недостатков алгоритма Евклида является применение операции деления для его реализации, что заметно увеличивает его вычислительную сложность. Развитием алгоритма Евклида является **бинарный алгоритм.** Этот алгоритм является расширением алгоритма Евклида и основан на следующих очевидных утверждениях:

1. Если и a и b чётные числа, тогда $(a,b)=2(a/2,b/2)$;
2. Если a чётное, а b нечётное число, то $(a,b)=(a/2,b)$;
3. В соответствии с теоремой 3.8 $(a,b)=(b,a-b)$;
4. Если и a и b нечётные числа, то $a-b$ является чётным числом.

Пример 5.10. Определим НОД для целых чисел 1173 и 323, (1173,323) =?. Последовательно применяя утверждения, приведенные выше, получим следующие равенства (1173,323)=(323,850)=(323,425)=(323,102)=(323,51)=(51, 272)=(51,136)=(51,68)=(51,34)=(51,17)=(17,34)=(17,17)=17. Отметим, что в данном примере от проблемы определения НОД для чисел (1173,323) перешли к такой же проблеме для чисел (323,850) на основании утверждения 3. А последующий переход выполнен на основании утверждения 2 и так далее.

Числа $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ называются **взаимно простыми** тогда и только тогда, когда $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)=1$.

Числа $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ называются **попарно взаимно простыми** тогда и только тогда, когда для любых i и $j\neq i$ $(a_i,a_j)=1$.

Теорема 5.10. Если $(a,b)=1$, тогда для любых целых чисел n и m $(a^n,b^m)=1$. Справедливо также и обратное утверждение: если $(a^n,b^m)=1$, для любых целых чисел n и m, то выполняется равенство $(a,b)=1$.

Доказательство: Предположим, что выполняется равенство $(a,b)=1$. Тогда, если в каноническом представлении числа $a=p_1^{\alpha 1},p_2^{\alpha 2},\ldots,p_k^{\alpha k}$ для некоторого показателя степени αi выполняется неравенство $\alpha i>0$, то $\gamma i=0$ для канонического представления числа $b=p_1^{\gamma 1},p_2^{\gamma 2},\ldots,p_k^{\gamma k}$. Это следует из равенства $(a,b)=1$. Аналогично в случае, когда $n\alpha i>0$ получим $\gamma i=0$. #

Сравнения

Два целых числа a и b **сравнимы (конгруэнтны) по модулю** натурального числа m, если при делении на m они дают одинаковые остатки. Другими словами, a и b **сравнимы по модулю** m, если их разность $a - b$ делится на m. Например, 32 и 39 сравнимы по модулю 7, так как $32 = 7\times4 + 4$, $39 = 7\times5 + 4$. Утверждение «a и b сравнимы по модулю m» записывается в виде:

$$a\equiv b \ \mathbf{mod}\ m.$$

Последнее выражение называется **сравнением (конгруэнцией).**

Пример 5.11. Следующие равенства являются сравнениями $32\equiv5 \ mod\ 9$; $48\equiv12 \ mod\ 9$; $17\equiv7 \ mod\ 5$.

Числа a и b **несравнимы по модулю** m, если их разность $a - b$ не делится на m. Этот факт обозначается неравенством $a\not\equiv b \ mod\ m$. Очень часто для

представления сравнения $a \equiv b \bmod m$ используют символ равенства (=), тогда $a = b \bmod m$ означает, что a и b сравнимы по модулю m, а $a \neq b \bmod m$, что числа не сравнимы по модулю m.

В случае, когда в сравнении $a = b \bmod m$ величина $b < m$, b называется **вычетом** a по модулю m.

Для сравнений существует несколько полезных лемм.

Лемма 5.1. Если $a \equiv b \bmod m$, тогда для любого целого k будет справедливо $ka \equiv kb \bmod m$.

Лемма 5.2. Если $ka \equiv kb \bmod m$, и $(k,m)=1$, то $a \equiv b \bmod m$.

Лемма 5.3. Если $ka \equiv kb \bmod km$, где k и m любые целые числа, то $a \equiv b \bmod m$.

Лемма 5.4. Если $a \equiv b \bmod m$, и $c \equiv d \bmod m$, то $a+c \equiv b+d \bmod m$.

***Лемма* 5.5.** Если $a_1 \equiv b_1 \bmod m$, и $a_2 \equiv b_2 \bmod m, \ldots, a_n \equiv b_n \bmod m$, то $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n \equiv b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n \bmod m$.

Лемма 5.6. Если $a \equiv b \bmod m$, и $c \equiv d \bmod m$, то $a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m$.

Лемма 5.7. Если $a_1 \equiv b_1 \bmod m$, и $a_2 \equiv b_2 \bmod m, \ldots, a_n \equiv b_n \bmod m$, то $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \equiv b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n \bmod m$.

Лемма 5.8. Если $a \equiv b \bmod m$, то для любого целого $k>0$ будет справедливо $a^k \equiv b^k \bmod m$.

Теория сравнений эффективно используется для выполнения различных вычислений при реализации криптографических алгоритмов. Основой для реализации вычислительных процедур является так называемая **модулярная арифметика**.

Модульная арифметика основана на следующей классической лемме, используемой во многих технических приложениях.

Лемма 5.9. $(a*b) \bmod m = [(a \bmod m)*(b \bmod m)] \bmod m$, где $*$ это любая из следующих операций "+", "–" или "×".

Приведенная лемма показывает, что вычисление $(a*b) \bmod m$ в модульной арифметике даёт тот же результат, что и в случае обычной целочисленной арифметики, однако существенно упрощает вычисление результата $(a*b) \bmod m$.

Пример 5.12. $7 \cdot 9 \bmod 5 = [(7 \bmod 5) \cdot (9 \bmod 5)] \bmod 5 = 3$.

Заметим, что принцип модульной арифметики также применяется и для возведения в степень, так как операция возведения в степень равносильна повторяющемуся выполнению операции умножения.

Пример 5.13. Рассмотрим выражение $3^5 \bmod 7$. Возможны три очевидных алгоритма получения искомого результата. Этот результат может быть вычислен путём возведения 3 в степень 5, и затем получения результата по $\bmod 7$ или в соответствии с двумя алгоритмами приведенными ниже.

В первом случае число 3 последовательно умножается на предыдущий результат умножения до тех пор, пока не будет получено значение 3^5. Отметим, что для данного примера необходимо выполнить 4 операции умножения, а для общего случая $a^z \bmod m$ необходимо выполнить z-1 операцию умножения. Далее необходимо выполнить операцию деления для определения искомого

значения 3^5 *mod* 7. Отметим неоправданно высокую вычислительную сложность такого алгоритма и, в первую очередь, в части операции возведения в степень. Значительно меньшую вычислительную сложность можно достичь, используя быстрые алгоритмы возведения в степень.

Во втором случае, при использовании быстрых алгоритмов возведения в степень, искомый результат для 3^5 *mod* 7 может быть получен в следующей последовательности.

1. Величина 3 возводится в квадрат: $3^2=3\times3=9$.
2. Используя значение 3^2, получаем: $3^4=3^2\times3^2=9\times9=81$.
3. Вычисляется 3^5 как: $3^5=3^4\times3=81\times3=243$.
4. Выполняя операцию деления, получим: $3^5 \bmod 7=243 \bmod 7=5$.

В данном случае, для нашего примера 3^5 *mod* 7, количество операций умножения равняется 3, а для общего случая (a^z *mod* m) необходимо не более чем $2(\lceil \log_2 z \rceil-1)$ операций умножения. Очевидным недостатком второго алгоритма является большая размерность операндов, которые могут быть существенно больше чем величина m.

Третий алгоритм основан на использовании основополагающей леммы 3.9. Все промежуточные вычисления будут выполняться по модулю 7 или для общего случая (a^z *mod* m) по модулю m, в следующей последовательности.

1. Величина 3 возводится в квадрат по модулю 7, в результате получим $3^2 \bmod 7=3\cdot3 \bmod 7=2$.

2. Для получения 3^4 *mod* 7 используем предыдущий результат, тогда, в соответствии с леммой 3.9, получим $3^4 \bmod 7=[(3^2 \bmod 7)\times(3^2 \bmod 7)] \bmod 7= =2\times2 \bmod 7=4$.

3. Для получения окончательного результата, выполним следующие вычисления $3^5 \bmod 7=[(3^4 \bmod 7)\times(3 \bmod 7)] \bmod 7= 4\times3 \bmod 7=5$.

Для общего случая (a^z *mod* m) последний алгоритм можно представить в виде следующей вычислительной процедуры.

Алгоритм быстрого возведения в степень

```
begin "возвращаем x=a^z mod m"
    a1:=a; z1:=z;
    x:=1;
    while z1≠0 do "x(a1^z1 mod m)=a^z mod m"
    begin
        while z1 mod 2=0 do
        begin "возводим в квадрат a1 пока z1 чётно"
            z1:= z1 div 2;
            a1:= (a1×a1) mod m;
        end;
        z1:= z1–1;
```

x:=(x×a_1) *mod* m; *“умножение”*

end;

fastexp:=x;

end

Пример 5.14. Рассмотрим вычисление $x=5^{10}$ *mod* $7=5^{(1010)}$ *mod* 7 с использованием алгоритма быстрого возведения в степень. Здесь $10_{10}=1010_2$. В последующей диаграмме приведена последовательность вычислений в соответствии с указанным алгоритмом.

a_1:=5; z_1:=10; x:=1;

$z_1\neq0$; (10≠0);

z_1 *mod* 2=0; (10 *mod* 2=0);

z_1 *div* 2=5; (10/2=5);

a_1:= a_1·a_1 *mod* m=4; (5·5 *mod* 7=4);

z_1 *mod* 2≠0; (5 *mod* 2≠0);

z_1:= z_1–1=4; (5-1=4);

x:= (x·a_1) *mod* m =4; (1·4 *mod* 7=4);

$z_1\neq0$; (4≠0);

z_1 *mod* 2=0; (4 *mod* 2=0);

z_1 *div* 2=2; (4/2=2);

a_1:= a_1·a_1 *mod* m=2; (4·4 *mod* 7=2);

z_1 *mod* 2=0; (2 *mod* 2=0);

z_1 *div* 2=1; (2/2=1);

a_1:= a_1·a_1 *mod* m=4; (2·2 *mod* 7=4);

z_1 *mod* 2≠0; (1 *mod* 2≠0);

z_1:= z_1–1=0; (1-1=0);

x:= (x·a1) *mod* m =2; (4·4 *mod* 7=2).

z_1=0; (0=0);

Таким образом, результирующее значение $x=5^{10}$ ***mod*** 7 равняется 2.

Теорема Эйлера

С понятием сравнения тесно связана величина **вычета** r ($0<r<m$) числа a по модулю m. **Вычетом** числа a по модулю m называется остаток от деления величины a на m. Согласно приведенному определению, если $a=r$ *mod* m, ($0<r<m$), то $m \mid (a-r)$. Отсюда, справедливо равенство $a-r=qm$ или $a=qm+r$.

Если набор из m целых чисел $\{a_i\}=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ формирует полный набор чисел, сравнимых по **модулю** m с каждым значением r_i в системе вычетов $\{0,1,2,\ldots,m-1\}$, то этот набор $\{a_i\}$ называется **полной системой вычетов по модулю *m*.** Так, для любого целого a_i, выполняется сравнение $a_i=r_j$ *mod* m где r_j является уникальным значением неповторяющимся для остальных чисел множества $\{a_i\}$.

Пример 5.15. Набор целых чисел {16,12,19,48,65} является полной системой вычетов по модулю 5. Действительно, 16=1 *mod* 5, 12=2 *mod* 5, 19=4 *mod* 5, 48=3 *mod* 5, 65=0 *mod* 5 и мы получаем полный набор вычетов {0,1,2,3,4}.

Множество целых чисел $\{a_i\}=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ формирует ***класс вычета по модулю m,*** если все вычеты для данного множества одинаковы и равны *r*.

Пример 5.16. Набор целых чисел {16,21,56,91,106} является классом вычета по модулю 5. Действительно, 16=1 *mod* 5, 21=1 *mod* 5, 56=1 *mod* 5, 91=1 *mod* 5, 106=1 *mod* 5 и мы имеем одинаковый вычет 1 для всех чисел исходного множества.

Большое практическое значение в криптографии имеет известная теорема Ферма.

Теорема 5.11. (***Fermat***). Если *p* простое число и (*a*,*p*)=1, где *a* целое, тогда

$$a^{p-1}=1 \ \textbf{mod}\ p.$$

Доказательство: Пусть для заданных взаимно простых величин *p* и *a*, (*a*,*p*)=1 существует *p*-1 положительных произведений *a*,2*a*,3*a*,…,(*p*-1)*a*. Тогда любая пара *ia*, *ja* (*i*≠*j*) этих произведений не сравнима по модулю *p*, то есть

$$ia \neq ja \bmod p,$$

что следует из леммы 3.2 для сравнений, приведенной ранее. Следовательно, каждое произведение имеет свой уникальный ненулевой вычет r_i , ($1 \le r_i \le p-1$). Эти вычеты {1,2,3,…,(*p*-1)} для множества чисел {*a*,2*a*,3*a*,…,(*p*-1)*a*} расположены в произвольном порядке и формируют полную систему вычетов $\{r_\alpha,r_\beta,r_\chi,\ldots,r_\lambda\}=\{1,2,3,\ldots,(p-1)\}$, где $a=r_\alpha \bmod p$, $2a=r_\beta \bmod p$, $3a=r_\chi \bmod p$,…,$(p-1)a=r_\lambda \bmod p$.

На основе леммы 3.7 для сравнений $a=r_\alpha \bmod p$, $2a=r_\beta \bmod p$, $3a=r_\chi \bmod p$,…,$(p-1)a=r_\lambda \bmod p$ получим $a\times 2a\times 3a\times\ldots\times(p-1)\times a=r_\alpha\times r_\beta\times r_\chi\times\ldots\times r_\lambda \bmod p$. Учитывая, что $\{r_\alpha,r_\beta,r_\chi,\ldots,r_\lambda\}=\{1,2,3,\ldots,(p-1)\}$ и выполнив перестановку, будем иметь $a\times 2a\times 3a\times\ldots\times(p-1)\times a=1\times 2\times 3\times\ldots\times(p-1) \bmod p$. Окончательно $a^{p-1}\times(p-1)!=(p-1)! \bmod p$. Поскольку (*p*-1)*!* и *p* взаимно простые целые числа, то есть ((*p*-1)!,*p*)=1, тогда окончательно получаем $a^{p-1}=1 \ \textbf{mod}\ p$.#

Отметим, что теорема Ферма справедлива только для простых чисел *p*. Обобщением данной теоремы является теорема Эйлера, которая основана на использовании функции Эйлера. Определим данную функцию для целого числа *n*.

Функцией Эйлера (Euler's) $\psi(n)$ целого числа $n\ge 1$ является количество целых чисел, которые меньше чем *n* и взаимно просты с *n*. Для небольших значений *n* эта функция принимает следующие значения: $\psi(1)=0$, $\psi(2)=1$, $\psi(3)=2$, $\psi(4)=2$, $\psi(5)=4$, $\psi(6)=2$, $\psi(7)=6$, $\psi(8)=4$, $\psi(9)=6$, $\psi(10)=4$, $\psi(11)=10$,…. Не сложно показать, что согласно приведенному определению, если *n* есть простое число, то $\psi(n)=n-1$.

Для функции Эйлера справедлив ряд утверждений и теорем. Одной и наиболее часто используемых в криптографии теорем относительно функции Эйлера является следующая теорема.

Теорема 5.12. Если $n=pq$, где p и q ($p\neq q$) простые числа, то $\psi(n)=\psi(p)\psi(q)=(p-1)(q-1)$.

Доказательство: Имеем множество $\{0,1,2,\ldots,pq-1\}$ из pq целых чисел, которые меньше чем $n=pq$. Все эти числа взаимно простые с $n=pq$ за исключением $(p-1)$ чисел $\{q,2q,3q,\ldots,(p-1)q\}$, кратных q, и $(q-1)$ чисел $\{p,2p,3p,\ldots,(q-1)p\}$, кратных p и 0. Тогда, $\psi(pq)=pq-(p-1)-(q-1)-1=pq-p-q+1=(p-1)(q-1)$.#

Пример 5.17. $\psi(10)=\psi(2\times5)=\psi(2)\times\psi(5)=1\times4=4$.

Теорема 5.13. Если p простое число, и $k>0$ целое число, то $\psi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^{k-1}(p-1)$.

Доказательство: Множество целых чисел, которые меньше чем p^k и не взаимно простые с p^k, включает числа $\{p,2p,3p,\ldots,(p^{k-1}-1)p\}$. Это значит, что среди p^k-1 чисел, меньших, чем p^k, исключая ноль, есть $p^{k-1}-1$ целых, не взаимно простых с p^k. Тогда, $\psi(p)=p^k-1-(p^{k-1}-1)=p^k-p^{k-1}$.#

Пример 5.18. $\psi(8)=\psi(2^3)=2^3-2^2=8-4=4$.

Теорема 5.14. Функция Эйлера является мультипликативной для произведения целых чисел, если эти числа являются взаимно простыми, то есть $\psi(n\times m)=\psi(n)\times\psi(m)$, если $(n,m)=1$.

Данная теорема позволяет сформулировать алгоритм вычисления функции Эйлера для произвольного целого числа a.

Первоначально представим число в виде канонического разложения Евклида $a=p_1^{\alpha1}\ p_2^{\alpha2}\ldots p_r^{\alpha r}$, тогда в силу того, что $p_i^{\alpha i}$ и $p_j^{\alpha j}$ являются взаимно простыми для любых $i\neq j$ используя предыдущую теорему получим $\psi(a)=\psi(p_1^{\alpha1})\psi(p_2^{\alpha2})\ldots\psi(p_r^{\alpha r})=(p_1^{\alpha1}-p_1^{\alpha1-1})(p_2^{\alpha2}-p_2^{\alpha2-1})\ldots(p_r^{\alpha r}-p_r^{\alpha r-1})=a(1-1/p_1)(1-1/p_2)\ldots(1-1/p_r)$.

Пример 5.19. $\psi(2700)=?$ $270=2^2 3^3 5^2$. $\psi(2700)=2700(1-1/2)(1-1/3)(1-1/5)=720$.

Теорема 5.15. (***Euler's***). Если $n\geq0$ положительное целое число, и $(a,n)=1$, где a – целое, то

$$a^{\psi(n)}=1\ \textbf{mod}\ n.$$

Доказательство: Пусть $\{r_1,r_2,r_3,\ldots,r_{\psi(n)}\}$ представляет собой приведенную систему вычетов по модулю n, тогда для $(a,n)=1$ числа ar_1, ar_2, $ar_3,\ldots$, $ar_{\psi(n)}$ образуют ту же приведенную систему вычетов. То есть, $ar_1=r_\alpha\ mod\ n$, $ar_2=r_\beta\ mod\ n$, $ar_3=r_\chi\ mod\ n,\ldots,ar_{\psi(n)}=r_\lambda\ mod\ p$, где $\{r_\alpha,r_\beta,r_\chi,\ldots,r_\lambda\}$ это есть те же значения вычетов $\{r_1\ ,r_2\ ,r_3,\ldots,r_{\psi(n)}\}$, переставленные в ином порядке. Используя аналогичный подход, который применялся при доказательстве теоремы 3.11, перемножив правую и левую части сравнений $ar_1=r_\alpha\ mod\ n$, $ar_2=r_\beta\ mod\ n$, $ar_3=r_\chi$

mod n, …,ar$_{\psi(n)}$ *=r*$_{\lambda}$ *mod p,* получим: *a*$^{\psi(n)}$*r*$_1$ *r*$_2$ *r*$_3$*…r*$_{\psi(n)}$*= r*$_{\alpha}$ *r*$_{\beta}$ *r*$_{\chi}$*…r*$_{\psi(n)}$ *mod n.* Учитывая, что {*r*$_1$,*r*$_2$, *r*$_3$,*…,r*$_{\psi(n)}$, *m*}=1, окончательно получим *a*$^{\psi(n)}$ =1 ***mod*** *n.#*

Пример 5.20. 3^{10} *mod* 11=?. Согласно теореме Ферма 3^{10}=1 *mod* 11, где *p*=11 есть простое число, и *a*=3 есть целое взаимно простое с *p*=11, то есть (11,3)=1.

Пример 5.21. 3^{12} *mod* 26=?. Согласно теореме Эйлера 3^{12} *mod* 26=1, где *n*=26, $\psi(26)=\psi(2\times13)=\psi(2)\times\psi(13)=1\times12=12$.

Линейные сравнения

Под линейным сравнением (линейной конгруэнцией) понимают выражение вида

$$ax=b \ \textbf{mod}\ n,$$

где *a*, *b* и *n* есть целые числа, и *b*<*n*, а *x* (*x*<*n*) – неизвестное целое число, удовлетворяющее линейному сравнению.

Существует три возможных случая для линейного сравнения относительно его решения *x*. Линейное сравнение может: 1) не иметь решений; 2) иметь одно решение; 3) иметь множество решений, удовлетворяющих этому линейному сравнению.

Теорема 5.16. Если наибольший общий делитель *d* чисел *a* и *n* (*d*=(*a*,*n*)) не является делителем *b*, то линейное сравнение *ax=b* ***mod*** *n* не имеет решений.

Доказательство: Предположим противоположное, что есть решение x_0, которое удовлетворяет линейному сравнению, то есть $ax_0=b$ ***mod*** *n.* Согласно теореме 3.16, *d* является делителем *a* и *n,* откуда следует, что *d* должен являться делителем ax_0 и *nq*, так же как и делителем $ax_0–nq=b$. Здесь *q* есть положительное целое число. Тогда получим противоречие: по условию теоремы *d* не является делителем *b*, а в случае наличия решения x_0, *d* должно является делителем *b.* Значит, линейное сравнение *ax=b* ***mod*** *n* не имеет решений, если *d*=(*a*,*n*) не является делителем *b. #*

Пример 5.22. Линейное сравнение 2*x*=1 *mod* 4 не имеет решения, так как наибольший общий делитель *d*=2 чисел *a*=2 и *n*=4 (2=(2,4)) не является делителем *b*=1. Действительно, ни одно из возможных целочисленных значений *x*<4 не удовлетворяет сравнению 2*x*=1 *mod* 4.

Теорема 5.17. Если наибольший общий делитель *d* чисел *a* и *n* равен единице (*a*,*n*)=1, то есть *a* и *n* являются взаимно простыми числами, то линейное сравнение *ax=b* ***mod*** *n* имеет одно решение.

Доказательство: Предположим, что существует полная система вычетов {0,1,2,…,*n*-1} по модулю *n.* Тогда согласно тому, что *a* и *n* взаимно простые целые числа, множество чисел {0·*a*, 1·*a*, 2·*a*,…, (*n*-1)·*a*} образует полную систему вычетов по модулю *n*. Тогда среди всех целых чисел есть одно и только одно ax_0 с вычетом равным *b.#*

Пример 5.18. Линейное сравнение 2*x*=1 *mod* 3 имеет одно решение x_0=2, так как *a*=2 и *n*=3 являются взаимно простыми числами.

Теорема 3.17 позволяет сформулировать задачу нахождения решения линейного сравнения для случая, когда a и n являются взаимно простыми числами. Здесь возможны два случая в зависимости от величины b.

Для $b=1$ линейное сравнение принимает вид $ax=1$ ***mod*** n, где неизвестная величина $x=a^{-1}$ является **мультипликативной инверсной величиной** по отношению к a. Тогда $aa^{-1}=1$ ***mod*** n.

Для вычисления мультипликативной инверсной величины возьмём два линейных сравнения: исходное сравнение $ax=1$ ***mod*** n в соответствии с условием теоремы 3.17 и сравнение $1=a^{\varphi(n)}$ ***mod*** n, соответствующее теореме Эйлера. Затем, используя лемму 3.6, перемножим левую и правую части этих сравнений. Как результат получим $ax=a^{\varphi(n)}$ ***mod*** n. Используя лемму 3.2, разделим правую и левую части последнего равенства $ax=a^{\varphi(n)}$ ***mod*** n на a, получим

$$x=a^{\varphi(n)-1} \textbf{ mod } n,$$

что и является основным расчетным соотношением для вычисления мультипликативной инверсной величины. Для случая, когда n является простым числом $x=a^{n-2}$ ***mod*** n.

Пример 5.19. Найти решение линейного сравнения $3x=1 \ mod \ 7$.

Так как 7 это простое число, тогда $x=a^{n-2}$ ***mod*** $n=3^{7-2}$ ***mod*** $7=3^5$ ***mod*** $7=5$.

Пример 5.20. Найти решение линейного сравнения $4x=1 \ mod \ 9$.

Функция Эйлера целого числа $n=9$ вычисляется как $\varphi(9)=6$. Тогда $x=a^{\varphi(n)-1}$ ***mod*** $n=4^{6-1}$ ***mod*** $9=4^5$ ***mod*** $9=7$.

Для $b\neq1$ линейное сравнение принимает вид $ax= b$ ***mod*** n, где неизвестная величина x будет вычисляться согласно соотношению

$$x=ba^{\varphi(n)-1} \textbf{ mod } n,$$

а для случая когда n является простым числом – по формуле $x=ba^{n-2}$ ***mod*** n.

Пример 5.21. Найти решение линейного сравнения $3x=3 \ mod \ 7$.

Принимая во внимание, что $(3,7)=1$, а 7 есть простое число $x=ba^{n-2}$ ***mod*** $n=3\times3^{7-2}$ ***mod*** $7=3^6$ ***mod*** $7=1$.

Теорема 5.18. Если наибольший общий делитель d чисел a и n является делителем числа b ($d \mid b$), то существует d решений линейного сравнения вида $ax=b$ ***mod*** n.

Доказательство: Согласно условию теоремы, d является делителем a, n и b. Тогда из линейного сравнения $ax=b$ ***mod*** n получим $a_1dx=b_1d$ ***mod*** n_1d. Используя лемму 3.3, получим линейное сравнение вида $a_1x=b_1$ ***mod*** n_1, где $(a_1,n_1)=1$. Сравнение $a_1x=b_1$ ***mod*** n_1 имеет одно решение x_0. Целые числа того же класса по модулю n/d будут решениями для исходного сравнения $ax=b$ ***mod*** n. То есть $x_1=x_0$ ***mod*** n, $x_2=x_0+n/d$ ***mod*** n, $x_3=x_0+2n/d$ ***mod*** $n,\ldots, x_d=x_0+((d-1)n)/d$ ***mod*** n.#

Пример 5.22. Найти решения для следующего линейного сравнения $6x=4 \ mod \ 10$.

Принимая во внимание, что $(6,10)=2$ и 2 это делитель 4, получим сравнение $3x=2 \ mod \ 5$. Решением последнего сравнения будет $x_0=ba^{n-2} \ \textbf{mod} \ n=2\times3^{5-2} \ \textbf{mod} \ 5=2\times3^3 \ \textbf{mod} \ 5=4$. Тогда решениями сравнения $6x=4 \ mod \ 10$ будут $x_1=x_0 \ \textbf{mod} \ n=4 \ \textbf{mod} \ 10=4$; $x_2=x_0+n/d \ \textbf{mod} \ n=4+10/2 \ \textbf{mod} \ 10=9$.

Тема 6. Псевдослучайные числа

V.N.Yarmolik, S.N.Demidenko, "Generation and Application of Pseudorandom Sequences for Random Testing", John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1988, 176 p.

В.Н.Ярмолик, С.Н.Демиденко, "Генерирование и применение псевдослучайных последовательностей в системах испытаний и контроля", Наука и Техника, Минск, 1986, 200с.

В задачах активных экспериментальных исследований современных сложных технических систем с применением статистических методов важное место принадлежит генерированию сигналов возбуждения. Диктуется это не только необходимостью подачи на объект требуемого числа воздействий с заданными свойствами, но и максимальной скорости их выработки. Одним из наиболее распространенных в настоящее время методов формирования таких процессов является преобразование сигналов, получаемых с помощью, так называемых генераторов белого шума (ГБШ). В применении к цифровым методам генерирования под белым шумом понимается последовательность некоррелированных чисел или цифр, распределенных, как правило, по равномерному закону.

Известны два основных метода получения цифрового белого шума: физический — генерирование случайных двоичных чисел с помощью специальных устройств — генераторов случайных чисел (ГСЧ); математический — формирование псевдослучайных числовых последовательностей (ПСЧП) по специальным программам или с использованием генераторов псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Возможен также и третий путь, совмещающий в себе физический и математический принципы.

Принцип действия ГСЧ состоит в преобразовании случайного сигнала на выходе физического источника шума в импульсную последовательность с вероятностью появления импульса $p(1)= 0,5$.

В зависимости от способа формирования числовых последовательностей существующие ГСЧ можно разделить на четыре основных типа :

1) ГСЧ, основанные на использовании случайных состояний бистабильной схемы при периодическом включении и выключении источника питания;

2) ГСЧ с пересчетом импульсов периодической последовательности за

случайный интервал времени;

3) ГСЧ с пересчетом импульсов случайной последовательности за фиксированный интервал времени;

4) ГСЧ, основанные на дискретизации непрерывного шумового сигнала по двум уровням.

Наиболее часто при разработке быстродействующих и высококачественных ГСЧ применяются последних два способа.

В генераторах с пересчетом случайных импульсов за фиксированный интервал времени равновероятность символов выходной последовательности достигается путем выполнения суммирования по модулю два. В то же время данная операция, протекающая последовательно во времени, снижает быстродействие ГСЧ, что ограничивает область их применения. Более высоким быстродействием обладают ГСЧ, основанные на дискретизации непрерывного шумового сигнала по двум уровням. Однако данным устройствам свойственна высокая чувствительность к изменениям параметров первичного шумового сигнала, главным образом его среднего значения.

Общими и наиболее существенными недостатками, затрудняющими применение ГБШ, являются ограниченное быстродействие, определяемое первичным аналоговым источником шума; низкая стабильность основных вероятностных характеристик, объясняемая нестабильностью первичных источников, дрейфом параметров преобразующих схем, источников питания и др., что требует периодической статистической проверки качества генерируемой последовательности; сложность аппаратурной реализации, вызываемая наличием нескольких источников питания (для физического источника шума и цифровых схем), необходимостью стабилизации и фильтрации их напряжения, развязки линий питания от линий устройства, коррекции выходной последовательности и др.; невозможность воспроизведения и предсказания генерируемых последовательностей в силу их случайной природы; неоднородность структуры генераторов вследствие наличия как аналоговых, так и цифровых узлов, что затрудняет миниатюризацию ГСЧ.

Указанные недостатки физических ГСЧ явились причиной все более широкого распространения математических методов получения шумовых числовых последовательностей. Мгновенные значения таких псевдослучайных последовательностей в отличие от случайных в принципе могут быть предсказаны заранее. В то же время все оценки статистических характеристик конкретной реализации ПСЧП совпадают с оценками соответствующей ей случайной выборки. Любую статистическую характеристику псевдослучайной числовой последовательности можно получить, используя реализацию длиной в один период повторения ПСЧП. Для истинно случайной последовательности это потребовало бы бесконечно большую длину реализации. Искусственное увеличение периода ПС-сигнала неограниченно приближает его структуру к структуре одной из возможных реализаций истинно случайного процесса.

Однако и при ограниченных величинах периода в определенных условиях псевдослучайные числовые последовательности могут заменить случайные. При анализе псевдослучайной реализации равной или меньшей длине периода вообще практически невозможно определить, является ли она отрезком регулярной или случайной последовательности. С другой стороны, если записать конкретную случайную реализацию на каком-либо носителе, и периодически воспроизводить ее, то получим регулярную ПСЧП.

Таким образом, с точки зрения реальных характеристик трудно установить границу между случайными и псевдослучайными числовыми последовательностями. В то же время применение ПСЧП имеет ряд существенных преимуществ: периодический характер псевдослучайного сигнала обусловливает низкий уровень дисперсии оценок, получаемых при усреднении в течение целого числа периодов; характеристики ПСЧП абсолютно стабильны и определяются алгоритмом формирования псевдослучайных чисел; последовательность можно повторить с любого желаемого участка реализации, для чего не требуется сложных запоминающих устройств и др.

Наиболее часто при генерировании ПСЧП с равномерным распределением используются два метода. Первый, лежащий в основе большинства современных программных датчиков и некоторых специализированных устройств, описывается рекуррентным соотношением

$$X_k = AX_{k-1} + C(\mathbf{mod} R),\ k=1, 2, 3, \ldots ,$$

где A, C, R — постоянные числа; $X_0>0$, $A>0$, $C>0$, $R>X_0$, $R>A$, $R>C$. Данный метод получил название мультипликативного конгруэнтного (при $C=0$) или смешанного конгруэнтного (при $C>0$), а формируемая в соответствии с ним последовательность — линейной конгруэнтной.

Тема 7. М-последовательности

V.N.Yarmolik, S.N.Demidenko, "Generation and Application of Pseudorandom Sequences for Random Testing", John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1988, 176 p.

В.Н.Ярмолик, С.Н.Демиденко, "Генерирование и применение псевдослучайных последовательностей в системах испытаний и контроля", Наука и Техника, Минск, 1986, 200с.

Генераторы *М*-последовательностей являются одними из наиболее часто используемых типов генераторов псевдослучайных последовательностей, применяемых в различных приложениях. Для их реализации используется сдвиговый регистр с линейной обратной связью (***Linear Feedback Shift Register – LFSR***). Подобный генератор часто используется как источник криптографического ключа для потоковых систем шифрования. Одной из

основных причин широкого применения генераторов *M*-последовательностей является сравнительно простая их реализация, как программная, так и аппаратная. Кроме того, отмечаются хорошие статистические свойства *M*-последовательностей, практически не отличающиеся от свойств случайных последовательностей. В то же время генераторы *M*-последовательностей, подобно, как и любые другие генераторы псевдослучайных последовательностей, обеспечивают воспроизводимость выходных последовательностей. Подобные генераторы (далее их будем обозначать LFSR) строятся на основании примитивных порождающих полиномов. Так, согласно примитивному порождающему полиному $\varphi(x)=1+x+x^4$, структурная схема LFSR представлена на рис.7.1.

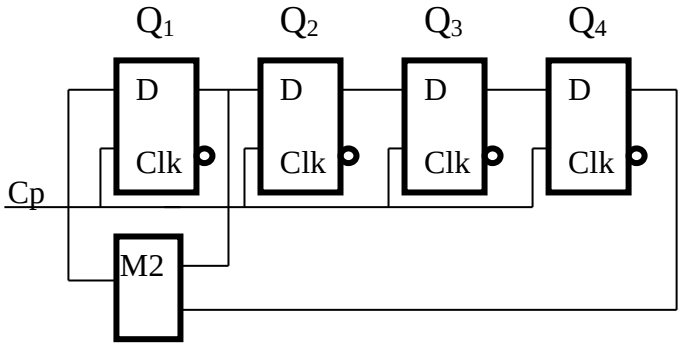


Рис.*7.1. *Структурная схема LFSR

Схема LFSR, приведенного на рис.7.1, состоит из четырехразрядного регистра сдвига на один разряд вправо и двухвходового сумматора по модулю два, включенного в цепь обратной связи. Аналитически функционирование приведенного генератора описывается системой уравнений:

$$Q_1(k+1)=Q_1(k)\oplus Q_4(k);$$
$$Q_2(k+1)=Q_1(k);$$
$$Q_3(k+1)=Q_2(k);$$
$$Q_4(k+1)=Q_3(k).$$

Последовательные состояния генератора приведены в таблице 7.1.

***Таблица* 7.1.**

Состояния генератора LFSR

#	$Q_1Q_2Q_3Q_4$	#	$Q_1Q_2Q_3Q_4$
0	1 0 0 0	8	1 1 0 1
1	1 1 0 0	9	0 1 1 0
2	1 1 1 0	10	0 0 1 1
3	1 1 1 1	11	1 0 0 1
4	0 1 1 1	12	0 1 0 0
5	1 0 1 1	13	0 0 1 0
6	0 1 0 1	14	0 0 0 1
7	1 0 1 0	15	1 0 0 0

Как видно из приведенной таблицы, используя начальное состояние 1000, LFSR генерирует всевозможные четырехразрядные двоичные коды кроме нулевого кода (0000). Последовательность генерируемых кодов имеет случайный характер, и её свойства не зависят от ненулевого начального состояния.

Для любой разрядности двоичных кодов существуют примитивные порождающие полиномы. Полиномы с минимальным количеством ненулевых коэффициентов для разрядностей от 1 до 28 приведены в таблице 7.2.

***Таблица* 7.2.**

Примитивные порождающие полиномы

$m=deg\varphi(x)$	$\varphi(x)$	$m=deg\varphi(x)$	$\varphi(x)$
1	$1+x$	15	$1+x+x^{15}$
2	$1+x+x^2$	16	$1+x^2+x^3+x^5+x^{16}$
3	$1+x+x^3$	17	$1+x^3+x^{17}$
4	$1+x+x^4$	18	$1+x^7+x^{18}$
5	$1+x^2+x^5$	19	$1+x+x^2+x^5+x^{19}$
6	$1+x+x^6$	20	$1+x^3+x^{20}$
7	$1+x+x^7$	21	$1+x^2+x^{21}$
8	$1+x+x^5+x^6+x^8$	22	$1+x+x^{22}$
9	$1+x^4+x^9$	23	$1+x^5+x^{23}$
10	$1+x^3+x^{10}$	24	$1+x^3+x^4+x^{24}$
11	$1+x^2+x^{11}$	25	$1+x^3+x^{25}$
12	$1+x^3+x^4+x^7+x^{12}$	26	$1+x+x^2+x^6+x^{26}$
13	$1+x+x^3+x^4+x^{13}$	27	$1+x+x^2+x^5+x^{27}$
14	$1+x+x^{11}+x^{12}+x^{14}$	28	$1+x^3+x^{28}$

Для произвольной степени $m=deg\varphi(x)$ порождающего полинома $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m$; $a_m=a_0=1$; $a_i\in\{0,1\}$ существуют две альтернативные структуры реализации LFSR с внешними и внутренними сумматорами по модулю два. На рис.7.2 приведена структура LFSR с внешними сумматорами по модулю два.

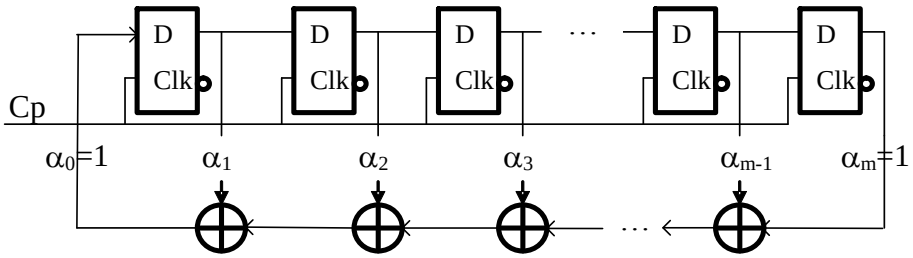


Рис.*7.2. *Структурная схема LFSR с внешними сумматорами по модулю два

На рис.7.3 приведена структура LFSR с внутренними сумматорами по модулю два. Альтернативная структура LFSR описывается тем же примитивным порождающим полиномом, что и предыдущая структура.

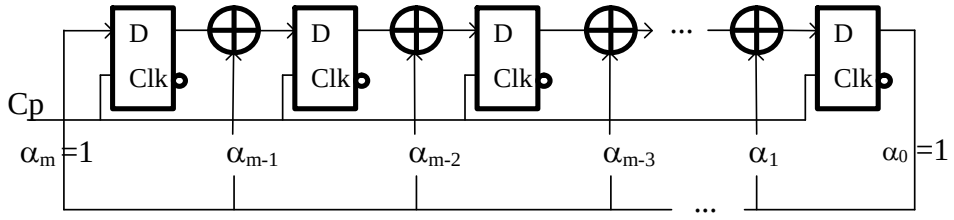
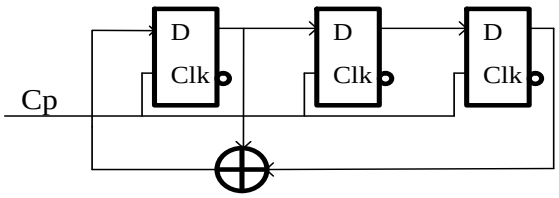


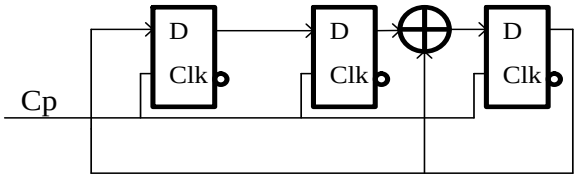
Рис.7.3. Структурная схема LFSR с внутренними сумматорами по модулю два

***Пример* 7.1.** В качестве примера LFSR с внешними и внутренними сумматорами рассмотрим случай порождающего полинома $\varphi(x)=1+x+x^3$, для которого ниже приведены соответствующие структуры и временные диаграммы формируемых последовательностей.



1 0 0
1 1 0
1 1 1
0 1 1
1 0 1
0 1 0
0 0 1

а)



1 0 0
0 1 0
0 0 1
1 0 1
1 1 1
1 1 0
0 1 1

б)

Рис.7.4. Структурные схемы LFSR для порождающего полинома $\varphi(x)=1+x+x^3$ с внешними а) и внутренними б) сумматорами по модулю два

Функционирование LFSR описывается следующим математическим

$$a_1(k+1)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i(k);$$

$$a_j(k+1)=a_{j-1}(k),\ j=\overline{2,m},k=0,1,2,\ldots$$

соотношением, представленным системой уравнений:

Матричное описание LFSR имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_1(k+1) \\ a_2(k+1) \\ a_3(k+1) \\ \dots \\ a_m(k+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1(k) \\ a_2(k) \\ a_3(k) \\ \dots \\ a_m(k) \end{vmatrix}$$

В векторной форме будем иметь

$$A(k+1) = V \times A(k),$$

где V представляет собой порождающую (генерирующую) матрицу, $A(k)$ – вектор-столбец текущего, а $A(k+1)$ – последующего состояния LFSR.

Псевдослучайные последовательности (M-последовательности) характеризуются следующими свойствами.

1.Существует $\psi(2^m-1)/m$ примитивных полиномов для заданного значения его степени m, где ψ есть функция Эйлера. Так, например, для $m=3$ $\psi(2^m-1)/m=\psi(2^3-1)/3=6/3=2$. Таким образом, для $m=3$ существует два примитивных полинома $\varphi(x)=1+x+x^3$ и $\varphi(x)=1+x^2+x^3$. Следует отметить, что функция Эйлера принимает большие значения даже для небольших значений m.

2.Для заданного полинома $\varphi(x)$ существует инверсный полином $\varphi(x)^{-1}$, который может быть получен согласно следующему отношению

$$\varphi(x)^{-1}=x^m\varphi(x^{-1}).$$

***Пример* 7.2.** Так, например, для порождающего полинома $\varphi(x)=1+x^2+x^5$ $\varphi(x)^{-1}= x^5\varphi(x^{-1}) = x^5 (1+x^{-2}+x^{-5})= 1+x^3+x^5$.

3.Период M-последовательности зависит от степени (m) примитивного порождающего полинома и равняется $L=2^m-1$.

Отметим что LFSR, построенный на базе примитивного порождающего полинома $\varphi(x)$ степени m, генерирует всевозможные m-разрядные двоичные коды кроме кода, состоящего из всех нулей.

4.Для заданного полинома $\varphi(x)$ существует L различных M-последовательностей, каждая из которых отличается фазовым сдвигом.

***Пример* 7.3.** Для порождающего полинома $\varphi(x)=1+x+x^4$ существует 15 M-последовательностей, приведенных в таблице 7.3.

***Таблица* 7.3.**

***M*-последовательности, описываемые полиномом $\varphi(x)=1+x+x^4$**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1

5.*M*-последовательность представляет собой псевдослучайную последовательность, в которой вероятность появления нулей и единиц определяется соотношениями

$$p(a_k=1)=\frac{2^{m-1}}{2^m-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{m+1}-2};$$

$$p(a_k=0)=\frac{2^{m-1}-1}{2^m-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{m+1}-2}.$$

Как видно из приведенных соотношений, вероятность появления нуля и единицы практически равняется 0,5.

7.Функция автокорреляции *M*-последовательности максимально близка к автокорреляционной функции идеальной случайной последовательности. Действительно, оригинальная *M*-последовательность является идентичной в $2^{m-1}-1$ позициях со сдвинутой своей копией на любое число тактов, и будет отличаться в 2^{m-1} позициях.

Так, например, последовательность 000111101011001, генерируемая в соответствии с полиномом $\varphi(x)=1+x+x^4$, и ее сдвинутая на две позиции копия 011110101100100 совпадают на семи позициях и имеют различное значение на восьми позициях.

8.Свойство ***сдвига и сложения***. Для любого s ($1\le s<L$) существует $r\ne s$ ($1\le r<L$) такое что $\{a_k\}\oplus\{a_{k-s}\}=\{a_{k-r}\}$:

$\{a_0\}$	000111101011001
$\{a_{-2}\}$	011110101100100

$\{a_{-9}\}$ 011001000111101

9.Среди L M-последовательностей, полученных на основании примитивного полинома $\varphi(x)$, существует единственная M-последовательность, для которой выполняется равенство $a_k=a_{2k}$, k=0,1,2,....

Такая M-последовательность называется ***характеристикой*** и получается следующим образом. Для заданного примитивного порождающего полинома строится система линейных уравнений $a_i=a_{2i}$, i=0,1,2,..., m-1. Ненулевое решение приведенной системы уравнений и есть искомая характеристическая последовательность.

***Пример* 7.4.** В качестве примера рассмотрим процедуру определения характеристической последовательности для полинома $\varphi(x)=1+x+x^4$. Для этого случая система линейных уравнений имеет форму

$$a_0=a_0;$$
$$a_1=a_2;$$
$$a_2=a_4=a_0\oplus a_3;$$
$$a_3=a_6=a_2\oplus a_5= a_1\oplus a_1\oplus a_4= a_0\oplus a_3.$$

Единственное ненулевое решение $a_0a_1a_2a_3$=0111, удовлетворяющее приведенной системе, и есть искомая характеристическая M-последовательность. В таблице 5.3 эта последовательность приведена под номером 2.

10.Свойство ***децимаций***. Децимация M-последовательности $\{a_i\}$ по индексу q, (q=1,2,3,...) означает порождение другой последовательности $\{b_j\}$ как q-тые элементы первоначальной M-последовательности $\{a_i\}$, то есть $b_j=a_{qj}$. Если наибольший общий делитель периода L M-последовательности и индекса q равен единице, то есть (L,q)=1, то период $\{b_j\}$ будет равен $L=2^m$-1, и децимация называется нормальной.

***Пример* 7.5.** В качестве примера рассмотрим нормальную децимацию M-последовательности, соответствующей полиному $\varphi(x)=1+x+x^4$ по индексу два. В результате получим

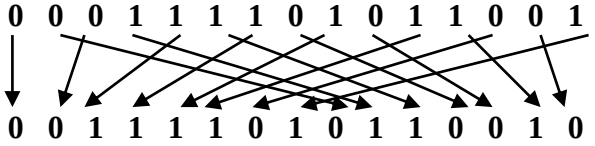


Рис.*7.5. *Пример децимации М-последовательности

Как видно из предыдущего примера, в результате децимации получили M-последовательность, описываемую тем же полиномом. В общем случае результатом децимации может быть любая M-последовательность, описываемая любым примитивным порождающим полиномом той же степени m.

В общем случае генераторы нелинейных последовательностей строятся с использованием нелинейных зависимостей для получения очередного выходного значения. Чаще всего для этих целей используются регистры сдвига с нелинейной обратной связью F. Структура подобного генератора включает в себя два основных блока, а именно сдвиговой регистр на один разряд вправо и комбинационную схему, реализующую нелинейную функцию, которая описывает обратную связь. Аналогично регистрам сдвига с линейной обратной связью (LFSR) подобные устройства называются ***регистрами сдвига с нелинейной обратной связью*** (***Nonlinear Feedback Shift Register – NFSR***). Общий вид подобного устройства приведен на рисунке 7.6.

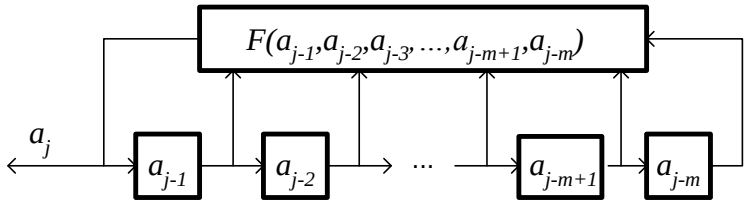


Рис.7.6. Регистр сдвига с нелинейной обратной связью

Хорошо изученной разновидностью подобных генераторов являются генераторы ***последовательностей де Брейна*** (***De Bruijn***), характерной чертой для которых является генерирование всевозможных 2^m двоичных комбинаций, где m является разрядностью регистра сдвига, на котором формируется последовательность де Брейна. Существует процедура преобразования LFSR в *NFSR*, генерирующего последовательность де Брейна. В этом случае нелинейная функция $F(a_{j-1},a_{j-2},a_{j-3},\ldots,a_{j-m+1},a_{j-m})$ образуется как сумма по модулю два функции $f(a_{j-1},a_{j-2},a_{j-3},\ldots,a_{j-m+1},a_{j-m})$, описывающей линейную обратную связь LFSR, с нелинейной функцией $g(a_{j-1},a_{j-2},a_{j-3},\ldots,a_{j-m+1})=a^*_{j-1},a^*_{j-2},a^*_{j-3},\ldots,a^*_{j-m+2},a^*_{j-m+1}$. Здесь $a^*_i=1\oplus a_i$.

Вид функции $g(a_{j-1},a_{j-2},a_{j-3},\ldots,a_{j-m+1})=a^*_{j-1},a^*_{j-2},a^*_{j-3},\ldots,a^*_{j-m+2},a^*_{j-m+1}$ свидетельствует о том, что данная нелинейная функция принимает единичное значение только на двух наборах переменных (двух состояниях регистра сдвига), а именно на наборе 000…001 и 000…000. Отметим, что в последовательности кодов, формируемых LFSR, присутствует только код 000…001, и нет больше кодов, у которых все первые m-1 бита принимают нулевое значение. Кроме того, независимо от вида конкретного примитивного порождающего полинома, функция $f(a_{j-1},a_{j-2},a_{j-3},\ldots,a_{j-m+1},a_{j-m})$, описывающая линейную обратную связь LFSR, всегда принимает единичное значение на наборе 000…001.

Таким образом, при появлении на регистре сдвига набора 000…001 обе функции g и f принимают единичное значение, а F, соответственно, нулевое, в силу чего на регистре сдвига будет получен код 000…000, который будет являться следующим набором аргументов для указанных функций g, f и F. В

следующем цикле g будет равняться единице, а f – нулю. Тогда F=1, и на регистре сдвига будет получен код 100…000.

***Пример* 7.6.** Простейшим примером генератора последовательности де Брейна является генератор, представленный на рисунке 7.7.

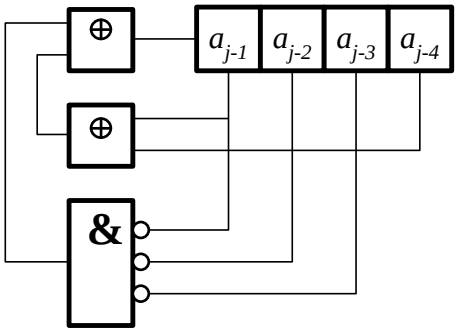


Рис.7.7. Генератор последовательности де Брейна

Данный генератор синтезирован на базе LFSR, соответствующего порождающему полиному $\varphi(x)=1\oplus x^1\oplus x^4$, линейная обратная связь которого описывается функцией $f(a_1,a_2,a_3,a_4)=a_1\oplus a_4$. Нелинейная функция $F(a_{j-1},a_{j-2},a_{j-3},\ldots,a_{j-m+1},a_{j-m})$ для данного примера принимает вид $F(a_{j-1},a_{j-2},a_{j-3},\ldots,a_{j-m+1},a_{j-m})=$ $=a_1\oplus a_4\oplus(a^*_1a^*_2a^*_3)$. Диаграмма состояний генератора приведена в таблице.

***Таблица* 7.4.**

Диаграмма состояний генератора последовательности де Брейна

#	*a*1	*a*2	*a*3	*a*4	#	*a*1	*a*2	*a*3	*a*4
1	1	0	0	0	9	1	1	0	1
2	1	1	0	0	10	0	1	1	0
3	1	1	1	0	11	0	0	1	1
4	1	1	1	1	12	1	0	0	1
5	0	1	1	1	13	0	1	0	0
6	1	0	1	1	14	0	0	1	0
7	0	1	0	1	15	0	0	0	1
8	1	0	1	0	16	0	0	0	0

Последовательность де Брейна, как видно из приведенного примера, может быть получена путем добавления нулевого символа к последовательности из 2^m-1 бит, таким образом, чтобы на периоде ее повторения образовалась серия из m нулей. Такая последовательность соответственно имеет период равный 2^m и характеризуется наличием на интервале повторения всевозможных кодов длиной m, каждый из которых встречается только один раз. Последнее свойство и определило интерес к использованию последовательностей де Брейна для различных приложений в криптографии.

Частным случаем последовательностей де Брейна являются так называемые ***последовательности Форда***, которые описываются более простым алгоритмом формирования. Последний носит рекуррентный характер и заключается в формировании очередного m-разрядного кода $X_k=(b_2,b_3,b_4,\ldots,b_{m+1})$ на основе предыдущего кода $X_{k-1}=(b_1,b_2,b_3,\ldots,b_m)$, где значение $b_{m+1}\in\{0,1\}$ определяется следующим образом. Формируется код вида $X^*_{k-1}=(b_2,b_3,b_4,\ldots,b_m,1)$ и строятся всевозможные его циклические сдвиги. Среди них выбирается код $X^{**}_{k-1}=(b_i,b_{i+1},\ldots,b_m,1,b_2,\ldots,b_{i-1})$, представляющий собой наибольшее m-разрядное число. Если $b_2=\ldots=b_{i-1}=0$, то значение b_{m+1} равно $b_1\oplus1$, а в противном случае b_{m+1} равно b_1. Отметим, что начальным кодом X_0 для формирования последовательности Форда может быть любой код, включая $X_0=(0,0,0,\ldots,0)$.

В качестве примера в таблице 7.5 приведены результаты формирования последовательности Форда для m=4.

***Таблица* 7.5.**

Диаграмма состояний генератора последовательности Форда

k	$X_k=(b_2,b_3,b_4,\ldots,b_{m+1})$	$X^{**}_{k-1}=(b_i,b_{i+1},\ldots,b_m,1,b_2,\ldots,b_{i-1})$	b_{m+1}
0	0 0 0 0	1 0 0 0	$b_1\oplus1=0\oplus1=1$
1	0 0 0 1	1 1 0 0	$b_1\oplus1=0\oplus1=1$
2	0 0 1 1	1 1 1 0	$b_1\oplus1=0\oplus1=1$
3	0 1 1 1	1 1 1 1	$b_1\oplus1=0\oplus1=1$
4	1 1 1 1	1 1 1 1	$b_1\oplus1=1\oplus1=0$
5	1 1 1 0	1 1 1 0	$b_1=1$
6	1 1 0 1	1 1 1 0	$b_1=1$
7	1 0 1 1	1 1 1 0	$b_1\oplus1=1\oplus1=0$
8	0 1 1 0	1 1 1 0	$b_1=0$
9	1 1 0 0	1 1 0 0	$b_1=1$
10	1 0 0 1	1 1 0 0	$b_1\oplus1=1\oplus1=0$
11	0 0 1 0	1 0 1 0	$b_1\oplus1=0\oplus1=1$
12	0 1 0 1	1 1 1 0	$b_1=0$
13	1 0 1 0	1 0 1 0	$b_1\oplus1=1\oplus1=0$
14	0 1 0 0	1 1 0 0	$b_1=1$
15	1 0 0 0	1 0 0 0	$b_1\oplus1=1\oplus1=0$
16	0 0 0 0	1 0 0 0	…
…	…		

Весьма близкими по свойствам к M-последовательностям и находящими наряду с ними широкое практическое применение являются ***последовательности Голда и Касами***. Последовательность Голда образуется путем суммирования по модулю 2 двух M-последовательностей, порождаемых отличными примитивными полиномами $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$ одной и той же степени

m. Период данной последовательности равен 2^m-1, а порождающий ее полином представляет собой произведение $\varphi'(x)$ на $\varphi''(x)$.

Более широким классом последовательностей, включающим в качестве подмножества последовательности Голда, является множество последовательностей Касами. Последние могут быть получены в результате двоичного сложения трех M-последовательностей $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ и $\{c_i\}$, порождаемых полиномами $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$ степени m и $\varphi^*(x)$ степени $m/2$ соответственно, где m – четно. Наиболее важное качество последовательностей Касами, а также входящих в них подмножеств последовательностей, является их высокие корреляционные свойства.

Тема 8. Тесты случайности

Эффективность статистического моделирования систем на ЭВМ и достоверность получаемых результатов зависит от качества исходных (базовых) последовательностей псевдослучайных чисел, которые являются основой для получения стохастических воздействий на элементы моделируемой системы. Поэтому перед моделированием на ЭВМ необходимо убедиться в том, что исходная последовательность псевдослучайных чисел удовлетворяет предъявляемым к ней требованиям.

При моделировании важными характеристиками качества генератора являются длина периода p и длина отрезка апериодичности L. Длина отрезка апериодичности L псевдослучайной последовательности есть наибольшее целое число, такое, что все числа x_i в пределах этого отрезка не повторяются.

Способ экспериментального определения длины периода p и длины отрезка апериодичности L сводится к следующему:

1. Запускается программа генерации последовательности $\{x_i\}$ с начальным значением x_0 и генерируется V чисел x_i. В большинстве случаев V – $(1 – 5)10^6$. Генерируются числа и фиксируется число x_V.

2. Затем программа запускается повторно с начальным числом x_0 и при генерации очередного числа проверяется истинность события $p\{x_i = x_V\}$. Если это событие истинно $i = i_1$ и $i = i_2$ ($i_1 < i_2 < V$), то вычисляется длина периода последовательности $p = i_2 – i_1$.

3. Проводится запуск программы генерации с начальными числами x_0 и x_p. При этом фиксируется минимальный номер $i = i_3$, при котором истинно событие $p''\{x_i = x_{p+i}\}$, и вычисляется длина отрезка апериодичности $L = i_3 + p$.

Применяемые в имитационном моделировании генераторы случайных чисел должны пройти тесты на пригодность.

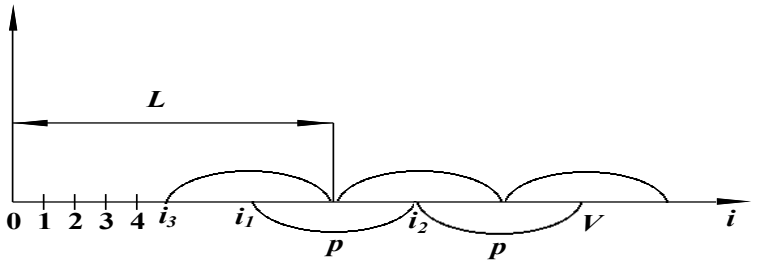


Рис.* 8.1. *Представление определения длин периода P и отрезка периодичности L

Существуют тесты двух типов.

Эмпирические тесты – это обычный тип статистических тестов, они основаны на действительных значениях x_i, выдаваемых генератором.

Теоретические тесты не являются тестами в том смысле, в каком они предусматриваются в статистике. Однако в них используются числовые параметры, чтобы оценить генератор глобально без фактического генерирования некоторых или всех значений x_i.

Основные анализируемые характеристики генерируемых датчиком последовательностей:

- равномерность;
- стохастичность (случайность);
- независимость.

Рассмотрим методы проведения такого анализа, наиболее часто применяемые на практике.

Проверка равномерности может быть выполнена с помощью гистограммы относительных частот генерируемой случайной величины. Для ее построения интервал (0;1) разбивается на *m* равных частей и подсчитывается относительное число попаданий значений случайной величины в каждый интервал. Чем ближе огибающая гистограммы к прямой, тем в большей степени генерируемая последовательность отвечает требованию равномерности распределения (рис. 8.2).

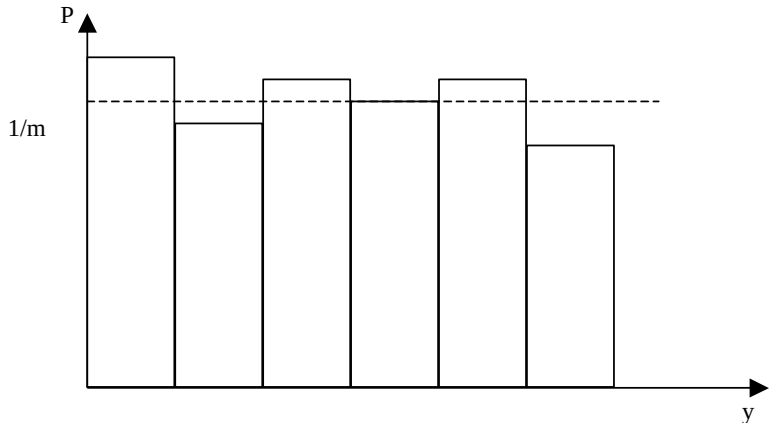


Рис. 8.2. Гистограмма относительных частот случайных чисел

Проверка стохастичности

Рассмотрим один из основных методов проверки – *метод комбинаций.*

Суть его сводится к следующему. Выбирают достаточно большую последовательность случайных чисел x_i и для нее определяют вероятность появления в каждом из x_i ровно j единиц. При этом могут анализироваться как все разряды числа, так и только l старших. Теоретически закон появления j единиц в l разрядах двоичного числа может быть описан как биномиальный закон распределения (исходя из независимости отдельных разрядов).

Тогда при длине выборки N ожидаемое число появлений случайных чисел x_i с j единицами в проверяемых l разрядах будет равно:

$$n_j = N \times C_l^j \, p^l(1),$$

где C_l^j – число комбинаций (сочетаний) j единиц в l разрядах,

$p^l(1)$ – вероятность появления единицы в двоичном разряде, $p(1)=0.5$.

Для полученной последовательности определяется эта же характеристика. Проверка соответствия реального значения теоретическому выполняется с помощью одного из статистических критериев согласия.

Проверка независимости

Проверка независимости проводится на основе вычисления корреляционного момента.

Напомним, что две случайные величины a и b называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая. Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.

Для оценки независимости элементов последовательности поступают следующим образом.

Вводят в рассмотрение дополнительную последовательность Y, в которой $y_i = x_i + t$, где t – величина сдвига последовательности Y относительно исходной последовательности X.

Вычисляют коэффициент корреляции случайных величин X и Y, для чего используются специальные расчетные соотношения.

Тема 9. Генераторы криптографического ключа

Ярмолик В.Н., Портянко С.С., Ярмолик С.В. Криптография, стеганография и охрана авторского права. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. – 242с. (*Глава 5.*)

Характерной особенностью потоковых шифраторов является использование при их реализации криптографических ключей большой размерности часто равной длине исходного текста.

Различают два типа потоковых шифров: ***синхронные*** (***synchronous***) и ***самосинхронизирующиеся*** (***self-synchronizing***) шифраторы.

В первом случае последовательность значений ключа является независимой от открытого текста и шифротекста. Понятие синхронный шифратор связано с тем, что для успешного дешифрования требуется синхронизация между последовательностью значений ключа и зашифрованным текстом. В то время как для самосинхронизирующихся шифраторов значения ключа зависят либо от исходного текста, либо от шифротекста. Обобщенная структура синхронного потокового шифратора приведена на рис.9.1.

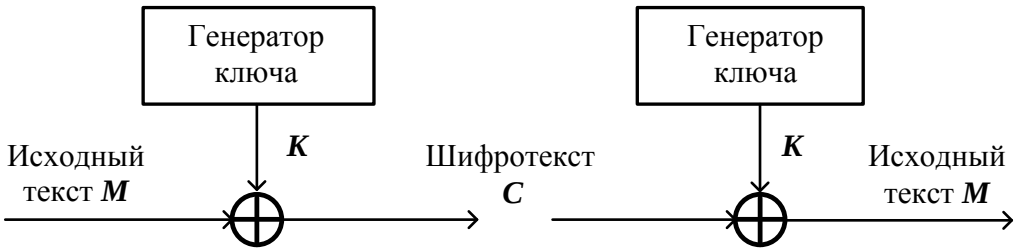


Рис.*9.1.** ***Структурная схема синхронного потокового шифратора

Подобная структура шифратора позволяет достичь высокой помехозащищенности и надежности функционирования. Действительно, искажение одного символа в зашифрованном тексте приведет к искажению только одного символа исходного текста при дешифровании. В то же время нарушение синхронизации является причиной искажения всех последующих символов исходного текста с момента потери синхронного формирования ключа с шифротекстом. Подобная ситуация может возникнуть при удалении либо добавлении символов шифротекста.

С целью восстановления синхронизации используются самосинхронизирующиеся потоковые шифраторы. При их использовании ошибочно добавленный или удаленный бит вызывает только ограниченное количество ошибочных символов в дешифрованном тексте, после чего правильный текст восстанавливается.

Различают принципиальные отличия между симметричными блочными шифраторами (DES, IDEA, BLOWFISH, …) и потоковыми системами шифрования.

1.Блочный шифр одновременно шифрует целый блок данных, как правило, 64 бита, а в потоковых шифраторах процедура шифрования и дешифрования выполняется поразрядно.

2.В блочном шифре каждый бит зашифрованного текста является сложной функцией открытого текста, и криптографического ключа. В потоковом шифраторе (см. рис.9.1) каждый бит шифротекста получается в

результате поразрядной операции сложения по модулю два очередного бита открытого текста и бита ключа.

3.Блочный шифр не требует задания начального вектора для генератора последовательности символов ключа, а в потоковом шифраторе такой вектор необходим.

4. Блочные шифры (подобно как DES) используется в коммерческом секторе, а потоковые шифры используется для специальных приложений и, как правило, широко не обсуждаются.

Основная составная часть любого потокового шифратора включает в себя алгоритм генерирования последовательности символов криптографического ключа. По сути, проблема создания эффективных симметричных блочных алгоритмов шифрования в случае потоковых шифраторов перенесена на проблему создания эффективных генераторов последовательностей ключа. Таким образом, генерирование непредсказуемых, как правило, двоичных последовательностей большой длины является одной из важных проблем классической криптографии. Для решения этой проблемы широко используются генераторы двоичных псевдослучайных последовательностей.

Обычно для генерирования последовательностей псевдослучайных чисел применяют аппаратные либо чаще всего программные генераторы, которые, хотя и называются генераторами случайных чисел, на самом деле формируют числовые последовательности, которые по своим свойствам только очень похожи на случайные числа. Наиболее часто используемым алгоритмом генерирования псевдослучайных чисел в различных приложениях является ***линейный конгруэнтный генератор***, описываемый рекуррентным соотношением

$$x_{t+1}=(ax_t+c) \bmod N,$$

где параметр x_0 называется начальным значением (вектором), величина $a \neq 0$ – множителем, параметр c – приращением, а значение N (мощность алфавита) – модулем. В случае $c=0$ приведенное соотношение определяет ***мультипликативный конгруэнтный генератор***, а в случае $c \neq 0$ – ***смешанный конгруэнтный генератор***. Существует большое множество конкретных реализаций подобного генератора в разнообразных приложениях. Так, мультипликативный конгруэнтный генератор для персональных компьютеров Pentium с 32-разрядной архитектурой Intel использует модуль $N=2^{31}-1=2147483647$. При этом рекомендуемыми значениями множителя a являются следующие числа: 16807, 630360016, 1078318381, 1203248318, 397204094, 2027812808, 1323257245, 764261123, 112817.

Наиболее часто используемые генераторы псевдослучайных чисел приведены ниже.

1. $x_{t+1}=(1176x_t+1476x_{t-1}+1776x_{t-2}) \bmod (2^{32}-5)$;

2. $x_{t+1}=(2^{13}(x_t+x_{t-1}+x_{t-2})) \bmod (2^{32}-5)$;

3. $x_{t+1}=(1995x_t+1998x_{t-1}+2001x_{t-2}) \bmod (2^{32}-849)$;

4. $x_{t+1}=(2^{19}(x_t+x_{t-1}+x_{t-2})) \bmod (2^{32}-1629)$;

5. $x_{t+1}=(5115x_t+1776x_{t-1}+1492x_{t-2}+2111111111x_{t-3}+c_t) \bmod 2^{32}$,

$c_t = \lfloor (5115x_{t-1}+1776x_{t-2}+1492x_{t-3}+2111111111x_{t-4}+$

$+c_{t-1})/\, 2^{32} \rfloor$;

6. *COMBO*: $z_n=(x_n+y_n) \bmod 2^{32}$,

$x_n=(x_{n-1}*x_{n-2}) \bmod 2^{32}$,

$y_n=(30903y_{n-1}+c_n) \bmod 2^{16}$,

$c_n=\lfloor (y_{n-1}+c_{n-1}) /2^{16} \rfloor$

Характерной особенностью приведенных алгоритмов генерирования псевдослучайных чисел является необходимость задания начальных значений, которые могут быть использованы как сеансовые криптографические ключи.

Определяющим недостатком конгруэнтных генераторов, используемых для поточного шифрования, является их сложность реализации, которая заключается в необходимости выполнения операции умножения. Кроме того, данный класс генераторов является достаточно хорошо изученным и в силу этого легко поддающимся прогнозированию и соответственно взлому криптосистемы.

Генераторы *M*-последовательностей являются одними из наиболее часто используемых типов генераторов псевдослучайных последовательностей, применяемых в различных приложениях. Для их реализации используется сдвиговый регистр с линейной обратной связью (***Linear Feedback Shift Register – LFSR***). Подобный генератор часто используется как источник криптографического ключа для потоковых систем шифрования. Одной из основных причин широкого применения генераторов *M*-последовательностей является сравнительно простая их реализация, как программная, так и аппаратная.

Как отмечалось в предыдущих разделах, генераторы *M*-последовательностей (LFSR) являются весьма эффективным средством для генерирования криптографического ключа. Обычно для этих целей можно использовать один LFSR или несколько подобных структур, желательно описываемых различными порождающими полиномами. Если длины формируемых последовательностей являются взаимно простыми и порождающие полиномы – примитивными, оказывается возможным получить последовательность бит ключа максимальной длины. ***Сеансовым ключом*** (ключом, используемым для шифрования одного сообщения) может быть начальное состояние используемых LFSR.

Очередной бит ключа формируется в соответствии с некоторой функцией, как правило, нелинейной. Эта функция называется

комбинированной функцией (***combining function***), а сами генераторы ключа ***комбинированными генераторами*** (***combination generators***).

Одним из наиболее очевидных решений при построении комбинированных генераторов ключа является ***генератор Геффи*** (***Geffe generator***). В основе данного генератора лежит использование трех *LFSR* и двухвходового мультиплексора как показано на рис.9.2.

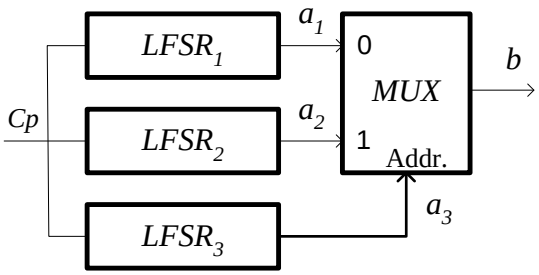


Рис.9.2. Комбинированный генератор Геффи

Два генератора *M*-последовательностей $LFSR_1$ и $LFSR_2$ являются источниками последовательностей a_1 и a_2, подаваемых на информационные входы мультиплексора, а последовательность a_3, формируемая $LFSR_3$, подается на адресный вход мультиплексора. Все три LFSR функционируют синхронно при подаче синхронизирующих импульсов *Cp*. Выходная последовательность *b* формируется в соответствии с выражением $b=(a_2a_3)+(a_1(1\oplus a_3))$, а ее период равен наименьшему общему кратному периодов трех *M*-последовательностей, генерируемых $LFSR_1$, $LFSR_2$ и $LFSR_3$. Если их порождающие полиномы имеют степени $m1$, $m2$ и $m3$, то максимальный период последовательности *b* будет равен $(2^{m1}-1)\times(2^{m2}-1)\times(2^{m3}-1)$. Обычно $m1\neq m2\neq m3$, а их величины близки и, как правило, определяются размерностью сеансового ключа.

Возможны различные модификации генератора Геффи в части увеличения количества используемых LFSR, а также режимов их функционирования.

Идея модификации режимов функционирования LFSR используется в ***генераторе Бета-Пайпера*** (***Beth-Piper Stop-and-Go generator***). В отличие от предыдущего метода, используемые в нем LFSR синхронизируются различными сигналами. Для случая трех LFSR структурная схема такого генератора приведена на рис.9.3.

Как видно из приведенного рисунка, $LFSR_1$ управляет синхронизацией $LFSR_2$, а результирующая выходная последовательность определяется как сумма по модулю два выходных последовательностей, формируемых $LFSR_2$ и $LFSR_3$. Функционирование $LFSR_2$ определяет термин ***Stop-and-Go***. Действительно, в зависимости от выходного значения $LFSR_1$, данный блок ($LFSR_2$) выполняет микрооперацию сдвига либо нет, то есть, стоит либо идет. При выборе порождающих полиномов для трех LFSR генератора Бета-Пайпера руководствуются теми же требованиями, что и в случае генератора Геффи.

Тогда оказывается возможным получение максимально возможной длины генерируемой последовательности.

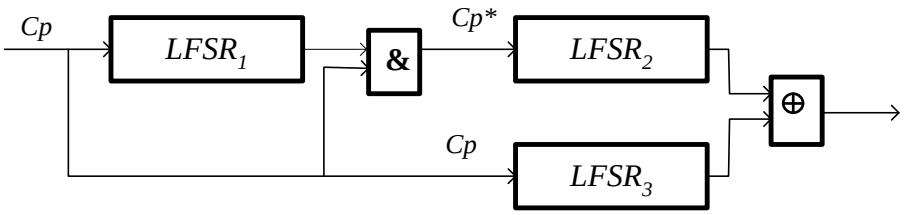


Рис.*9.3.*Генератор Бета-Пайпера

Видоизмененная структура генератора Бета-Пайпера (***Alternating Stop-and-Go generator***) имеет большее распространение и также основана на использовании трех генераторов *M*-последовательностей $LFSR_1$, $LFSR_2$ и $LFSR_3$. Подобно как и в предыдущих случаях, *M*-последовательности, генерируемые тремя генераторами, имеют различные взаимно простые периоды. Как видно из рис.9.4, $LFSR_1$ управляет синхронизацией $LFSR_2$ и $LFSR_3$. Причем если один из них выполняет микрооперацию сдвига (идет), то второй в это время ничего не выполняет (стоит). Выходная последовательность, как и в предыдущих случаях, формируется как сумма по модулю два выходных последовательностей, формируемых $LFSR_2$ и $LFSR_3$.

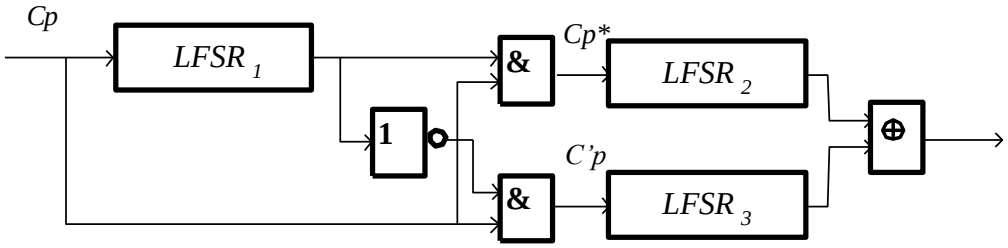


Рис.*9.4. *Альтернативный генератор Бета-Пайпера

Дальнейшим развитием идеи внесения нелинейных зависимостей по управлению синхронизацией является каскадная схема Голмана (***Gollmann Cascaded Key stream generator***), которая позволяет достигать желаемого качества в зависимости от количества используемых каскадов. Для случая трех каскадов подобный генератор приведен на рис.9.5.

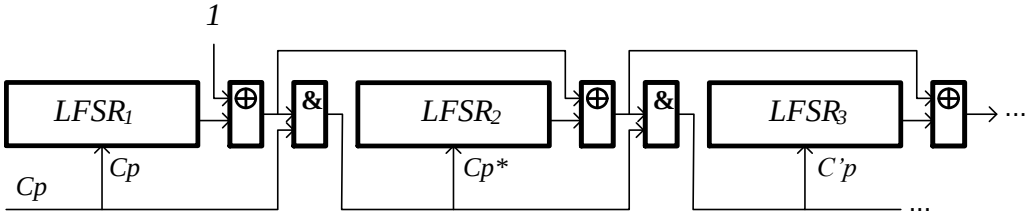


Рис.*9.5. *Каскадная схема Голмана

Основным достоинством приведенной схемы является возможность ее адаптации для достижения желаемого качества. Отметим, что синхронизация второго и последующих каскадов управляется предыдущими каскадами. Выполнение микрооперации сдвига либо ее отсутствие для конкретного LFSR зависит от состояний на выходах всех предыдущих генераторов *M*-последовательностей. В то же время необходимо отметить, что данная микрооперация выполняется для каждого LFSR с вероятностью 0,5.

Большое количество LFSR используется в так называемом ***пороговом генераторе*** (***Threshold generator***), приведенном на рис.9.6.

Количество (n) LFSR выбирается нечётным. Тогда нелинейная функция F формирует выходное значение 0 или 1 в зависимости от соотношения единичных и нулевых значений на выходах генераторов *M*-последовательностей.

Если количество единичных значений больше нулевых, на выходе генератора формируется единичное значение, в противном случае выходное значение равняется нулю.

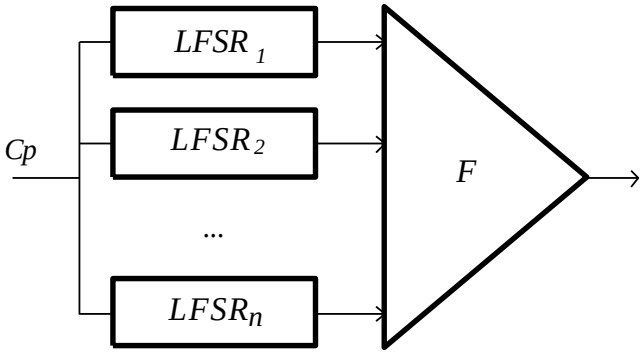


Рис.*9.6. *Пороговый генератор

Подобно как и в предыдущих случаях, периоды *M*-последовательностей должны быть взаимно простыми, а степени порождающих их полиномов иметь сравнимые величины и, как правило, превышающие 10.

Тема 10. Потоковое шифрование

Ярмолик В.Н., Портянко С.С., Ярмолик С.В. Криптография, стеганография и охрана авторского права. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. – 242с. (*Глава 5.*)

Различают ***синхронные потоковые шифраторы*** основаные на синхронном функционировании генераторов ключа у отправителя и получателя сообщения. Процедура синхронизации обеспечивается ***начальным состоянием*** (***seed***) генераторов псевдослучайных последовательностей криптографического ключа. В случае использования простейших генераторов ключа, таких как генераторы *M*-последовательностей типа LFSR, синхронизация достигается за

счет установки регистров генераторов ключа у отправителя и получателя в одно и то же состояние. Начальное состояние генератора ключа часто интерпретируется как ***сеансовый ключ***, который используется только для одного сеанса передачи данных, а структура генератора – как ***долгосрочный ключ***, используемый для заданного временного промежутка использования криптосистемы. Структура синхронного потокового шифратора приведена на рис. 10.1.

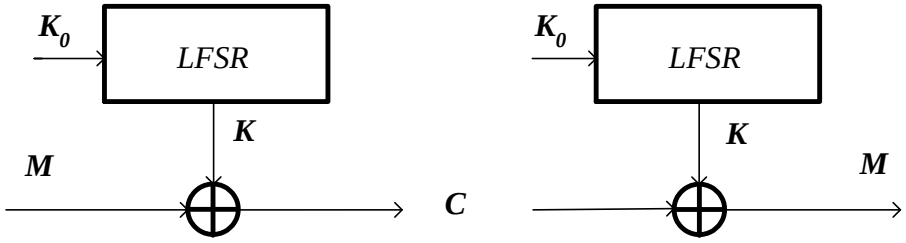


Рис.*10.1. *Синхронный потоковый шифратор

Здесь K представляет собой криптографический ключ, длина которого равняется длине шифруемого сообщения, а K_0 представляет собой сеансовый ключ.

***Пример* 10.1.** В качестве примера рассмотрим потоковый шифратор (рис.10.2.), использующий в качестве ключа M-последовательность, генерируемую в соответствии с примитивным порождающим полиномом $\varphi(x)=1+x+x^4$. Предположим, что начальное состояние генератора ключа K_0 при шифровании и при дешифровании сообщения принимает одно и то же значение равное 0010, что позволит нам достичь синхронной работы криптографической системы в целом. Отметим, что в данном случае сеансовым ключом может быть любой код из четырех символов кроме кода 0000. В соответствии с выбранным начальным состоянием обоих генераторов, у отправителя и получателя сообщения будет сгенерирована одна и та же последовательность ключа K=011110101100100….

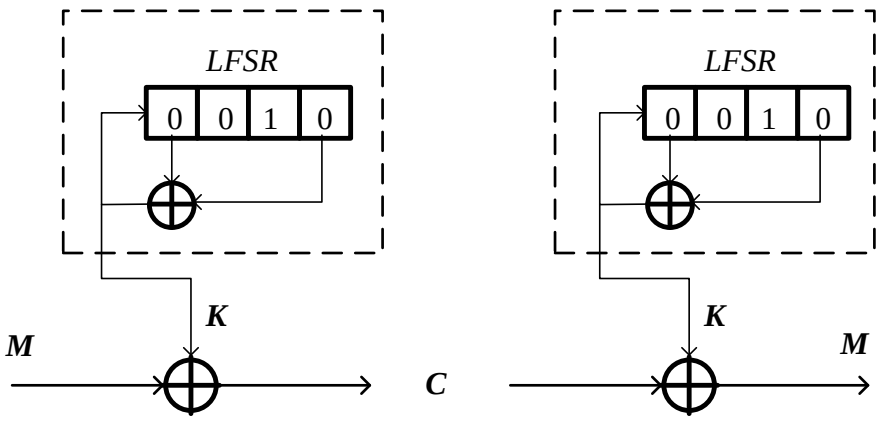


Рис.*10.2. *Синхронный потоковый шифратор, описываемый полиномом $\varphi(x)=1+x+x^4$

В качестве исходного текста используем двоичную последовательность M=101011111100001, тогда шифрование будет состоять из последовательного поразрядного сложения по модулю два. В результате получим:

$$\begin{array}{ll} M & = 101011111100001 \\ \oplus & \qquad\qquad \oplus \\ K & = 011110101100100 \\ \hline C & = 110101010000101 \end{array}$$

Получатель сообщения, получив зашифрованный текст C=11010101000 0101, выполнит обратное преобразование:

$$\begin{array}{ll} C & = 110101010000101 \\ \oplus & \qquad\qquad \oplus \\ K & = 011110101100100 \\ \hline M & = 101011111100001 \end{array}$$

К сожалению, многие генераторы псевдослучайных последовательностей криптографических ключей подвержены различного рада атакам и, зачастую, легко взламываются. В данном случае под взломом понимается получение третьей стороной структуры генератора криптографического ключа, то есть, так называемого долгосрочного ключа. В случае генератора M-последовательности, его структура однозначно описывается порождающим полиномом $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m$; $a_m=a_0=1$; $a_i\in\{0,1\}$, и для его взлома злоумышленнику необходимо получить $2m$ бит шифротекста, что почти всегда достижимо, и столько же бит соответствующего ему исходного текста, что тоже является реальной задачей. Тогда непосредственно взлом будет состоять в нахождении решения системы из m линейных уравнений, неизвестными в которой будут коэффициенты порождающего полинома, а коэффициентами – значения $2m$ бит последовательности ключа K. Такая система уравнений для общего случая имеет следующий вид

$$\begin{aligned} k_{m+1} &= \alpha_1 k_m \oplus \alpha_2 k_{m-1} \oplus \alpha_3 k_{m-2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{m-1} k_2 \oplus k_1; \\ k_{m+2} &= \alpha_1 k_{m+1} \oplus \alpha_2 k_m \oplus \alpha_3 k_{m-1} \oplus \ldots \oplus \alpha_{m-1} k_3 \oplus k_2; \\ k_{m+3} &= \alpha_1 k_{m+2} \oplus \alpha_2 k_{m+1} \oplus \alpha_3 k_m \oplus \ldots \oplus \alpha_{m-1} k_4 \oplus k_3; \\ &\ldots \\ k_{2m} &= \alpha_1 k_{2m-1} \oplus \alpha_2 k_{2m-2} \oplus \alpha_3 k_{2m-3} \oplus \ldots \oplus \alpha_{m-1} k_{m+1} \oplus k_m. \end{aligned}$$

Здесь коэффициент a_m так же как и a_0 для любого полинома равен единице.

***Пример* 10.2.** В качестве примера рассмотрим потоковый шифратор, приведенный на рис.10.2. Допустим, что злоумышленник получил доступ к $2m$=2×4=8 битам исходного текста M=10101111 и шифротекста C=11010101. Тогда он сможет восстановить элементы ключа K, которые будут равны поразрядной сумме по модулю два исходного текста и шифротекста.

Соответственно получим: $k_1=1\oplus1=0$, $k_2=0\oplus1=1$, $k_3=1\oplus0=1$, $k_4=0\oplus1=1$, $k_5=1\oplus0=1$, $k_6=1\oplus1=0$, $k_7=1\oplus0=1$, $k_8=1\oplus1=0$. Система из $m=4$ линейных уравнений имеет вид

$$k_5=\alpha_1k_4\oplus\alpha_2k_3\oplus\alpha_3k_2\oplus\alpha_4k_1;$$
$$k_6=\alpha_1k_5\oplus\alpha_2k_4\oplus\alpha_3k_3\oplus\alpha_4k_2;$$
$$k_7=\alpha_1k_6\oplus\alpha_2k_5\oplus\alpha_3k_4\oplus\alpha_4k_3;$$
$$k_8=\alpha_1k_7\oplus\alpha_2k_6\oplus\alpha_3k_5\oplus\alpha_4k_4.$$

Окончательно будем иметь $1=\alpha_1\oplus\alpha_2\oplus\alpha_3$; $0=\alpha_1\oplus\alpha_2\oplus\alpha_3\oplus1$; $1=\alpha_2\oplus\alpha_3\oplus1$ и $0=\alpha_1\oplus\alpha_3\oplus1$. Откуда получим $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$ и $\alpha_1=1$, что соответствует примененному полиному.

С целью увеличения качества шифрования можно использовать комбинированный подход применения классических симметричных и потоковых криптосистем.

***Пример* 10.3.** В качестве примера подобных решений рассмотрим случай совместного применения алгоритма шифрования DES и LFSR. В данном случае поток бит ключа формируется на выходе системы шифрования DES. Начальное значение ключа K_0 определяет исходное состояние LFSR и может использоваться как криптографический ключ для DES. Его значение удобно рассматривать как сеансовый ключ комбинированной криптосистемы, в которой очередные 64 бита ключа получаются при шифровании в соответствии с алгоритмом DES очередного состояния LFSR.

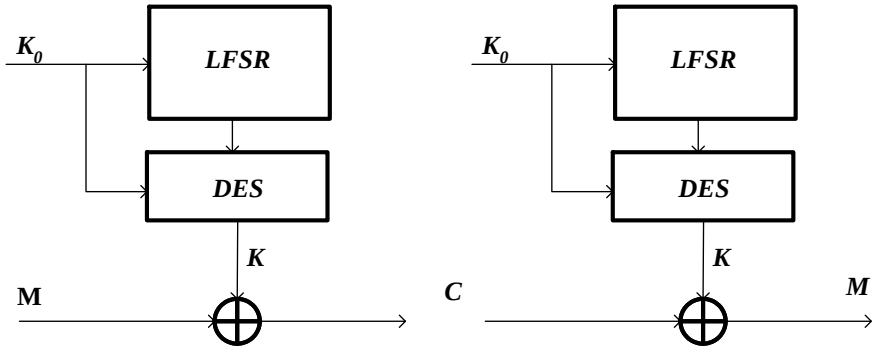


Рис.*10.3. *Комбинированная криптосистема

Могут быть использованы и другие комбинации классических криптографических систем и применения для них принципа потокового шифрования исходных сообщений.

Тема 11. Эллиптические криптосистемы

Ярмолик В.Н., Портянко С.С., Ярмолик С.В. Криптография, стеганография и охрана авторского права. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. – 242с. (*Глава 6.*)

Понятие эллиптических кривых является относительно новым понятием в криптографии, однако весьма активно обсуждаемым как один из кандидатов на последующее широкое применение для практических нужд защиты информации.

Эллиптические кривые (***Elliptic Curves***) в общем случае описываются кубическими уравнениями вида

$$y^2+axy+by=x^3+cx^2+dx+e,$$

где a, b, c, d и e представляют собой действительные числа, которые удовлетворяют достаточно простым требованиям. Определение эллиптических кривых включает понятие элемента O называемого ***бесконечным элементом*** (***infinite element***) или нулевым элементом (***zero element***). На следующих рисунках (11.1 и 11.2) приведены два примера эллиптических кривых.

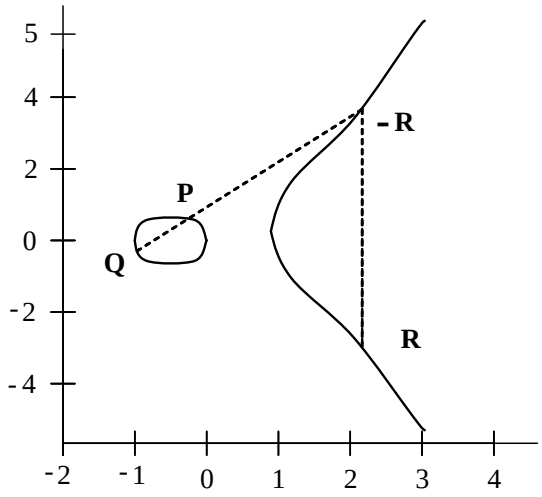


Рис.*11.1. *Эллиптическая кривая, описываемая уравнением $y^2=x^3-x$

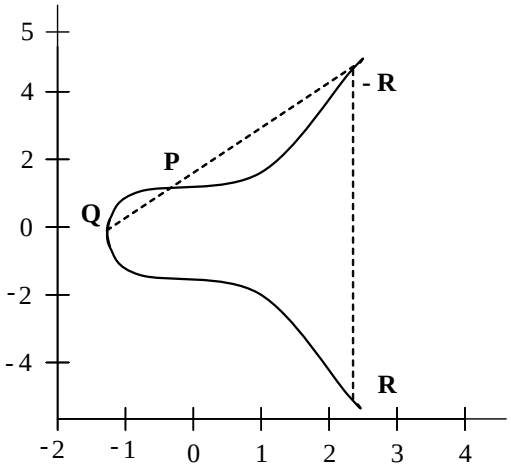


Рис.*11.2. *Эллиптическая кривая, описываемая уравнением $y^2=x^3+x+1$

Эллиптические кривые над множеством действительных чисел определяются парами чисел (x,y) задающих координаты ***точек*** эллиптической

кривой. На практике чаще всего применяются эллиптические кривые, описываемые уравнением

$$y^2=x^3+ax+b,$$

где x, y, a и b являются действительными числами.

Если для эллиптической кривой, описываемой уравнением $y^2=x^3+ax+b$, выполняется условие $4a^3+27b^2\neq 0$, тогда эллиптическая кривая $y^2=x^3+ax+b$ может быть использована для задания множества действительных точек, описываемых данной кривой. Это множество составляет группу точек, включающую также и специальную точку O, над которыми могут быть определены различные операции. Главным элементом эллиптической кривой является точка (***point***) $P=(x,y)$, определяемая ее координатами x и y, принадлежащими этой кривой. По определению различают точку $P=(x,y)$ эллиптической кривой и инверсную ей точку $-P=(x,-y)$.

Основополагающим свойством эллиптических кривых является следующее свойство.

Секущая прямая линия всегда пересекает эллиптическую кривую только в трех точках. Исключением является случай вертикальной секущей прямой, для которой третьей точкой является бесконечный элемент O.

Приведенное свойство позволяет определить операцию сложения двух точек эллиптической кривой. Предположим, что P и Q являются двумя различными точками эллиптической кривой и P не равняется $-Q$. Для сложения двух точек P и Q, проводится прямая линия через эти две точки. Согласно свойству эллиптических кривых, приведенному выше, эта линия пересечет эллиптическую кривую только в еще одной точке, называемой $-R$. Точке $-R$ всегда соответствует симметричная ей точка R (см. рис.11.1 и рис.11.2). Таким образом, операция сложения над группой, задаваемой точками эллиптической кривой, определяется как

$$P + Q = R.$$

Приведенное определение операции сложения является геометрической интерпретацией операции сложения точек эллиптической кривой.

Для случая, когда точка Q равняется $-P$, прямая линия является вертикальной линией, которая пересекается только в этих двух точках, поэтому в основном для этих целей и был определен бесконечный элемент (нулевой элемент) O. Тогда согласно определению, $P + (-P) = O$. Как результат данного равенства, $P + O = P$. Элемент O называется аддитивным элементом (***additive identity***) либо нулевым аддитивным элементом группы, определяемой эллиптической кривой. Все эллиптические кривые имеют аддитивный элемент. Более детально основные свойства операции сложения приведены ниже.

1.Элемент O является нулевым аддитивным элементом, для которого выполняется равенство $O=-O$. Тогда соответственно для любой точки P эллиптической кривой получим $P+O=P$.

2.Прямая линия, проведенная через точки P и $-P$ является вертикальной линией. Тогда согласно определению $P+(-P)=O$.

3.Для $P \neq Q$ и $P \neq -Q$ результатом сложения двух точек будет являться третья точка, принадлежащая эллиптической кривой, то есть $P+Q=R$.

4.В случае, когда $P = Q$, то есть когда точка P складывается сама с собой и $P \neq (x,0)$, в точке P проводится касательная линия к эллиптической кривой. Эта линия пересечет эллиптическую кривую только в одной точке $-R$. Тогда результатом удвоения точки P будет точка R симметричная точке $-R$.

Таким образом

$$P+P=2P=R.$$

5.Для случая, когда $P = (x,0)$, касательная к эллиптической кривой в этой точке будет представлять собой вертикальную линию. Тогда, согласно определению, для такой точки $2P = O$. Для случая вычисления $3P$ будем иметь $2P + P$. Выполнив подстановку вместо $2P$ нулевого элемента O, окончательно получим $P + O = P$. Таким образом, $3P = P$. Для $P = (x,0)$ будут выполняться равенства $3P = P$, $4P = O$, $5P = P$, $6P = O$, $7P = P$ и так далее.

6.Операция умножения точки P на положительное целое число k определяется как сумма k точек P так, что $kP=P+P+P+...+P$.

Несмотря на то, что геометрическая интерпретация операции сложения точек эллиптических кривых является достаточно наглядной иллюстрацией арифметики эллиптических кривых, она не может быть использована для практической реализации вычислений. Для этих целей используется алгебраическое определение операции сложения двух точек $P=(x_P,y_P)$ и $Q=(x_Q,y_Q)$, которое однозначно вытекает из геометрической интерпретации этой операции.

1.Если P и Q являются различными точками эллиптической кривой и P не равняется $-Q$, тогда результатом операции сложения $P+Q=R$ является точка $R=(x_R,y_R)$, координаты которой вычисляются по следующим соотношениям:

$$s=(y_P-y_Q)/(x_P-x_Q);$$

$$x_R =s^2- x_P -x_Q;$$

$$y_R =-y_P+s(x_P -x_R).$$

2. Удвоение точки P будет осуществляться подобным образом:

$$s=(3x_P^2+a)/(2y_P);$$

$$x_R =s^2- 2x_P;$$

$$y_R =-y_P+s(x_P -x_R).$$

Величина a, используемая в последнем выражении, является одним из параметров эллиптической кривой, описываемой уравнением $y^2=x^3+ax+b$.

Очевидно, что даже аналитические соотношения, определяющие операцию сложения точек эллиптической кривой, не позволяют достичь высокой степени точности вычислений. Вычисления являются, как правило, медленными, а результат не точен, что неприемлемо для криптографии, где

вычисления должны давать абсолютно точный результат, а процедура вычисления результата должна выполняться за реальное время.

Для практического применения в криптографии используются конечные поля (поля Галуа) $GF(M)$ и $GF(2^m)$. Так, например, конечное поле $GF(M)$ оперирует целыми числами от 0 до M-1, где M, как правило, представляет собой большое простое число, а все вычисления выполняются по модулю M.

Если в уравнении $y^2=x^3+ax+b$ параметры a и b принадлежат конечному полю $GF(M)$ и оно не содержит повторяющихся сомножителей ($4a^3 + 27b^2 \neq 0 \mod M$), то эллиптическая кривая, описываемая таким уравнением, определяет эллиптическую группу $E_M(a,b)$ над полем Галуа $GF(M)$. Эллиптическая группа $E_M(a,b)$ также может быть описана как $y^2=x^3+ax+b \mod M$. Она включает точки, принадлежащие эллиптической кривой $y^2=x^3+ax+b$, координаты которых являются элементами конечного поля $GF(M)$.

***Пример* 11.1**. Рассмотрим эллиптическую группу $E_M(a,b)=E_{23}(1,0)$, описываемую эллиптической кривой $y^2=x^3+x$ в конечном поле $GF(23)$.

Данной группе принадлежит точка (9,5) так как ее координаты удовлетворяют уравнению $y^2=x^3+x \mod 23$. Действительно, подставив в уравнение
$y^2 \mod M = x^3 + x \mod M$ значения $x=9$ и $y=5$, последовательно получим

$5^2 \mod 23 = 9^3 + 9 \mod 23,$

$5^2 \mod 23 = 729 + 9 \mod 23,$

$25 \mod 23 = 738 \mod 23,$

$2 = 2.$

Таким образом, точка (9,5) принадлежит эллиптической группе $E_{23}(1,0)$. Всего этой группе принадлежит 23 точки, и сама группа представляется как
{O (0,0) (1,5) (1,18) (9,5) (9,18) (11,10) (11,13) (13,5) (13,18) (15,3) (15,20) (16,8) (16,15) (17,10) (17,13) (18,10) (18,13) (19,1) (19,22) (20,4) (20,19) (21,6) (21,17)}.

Графически эллиптическая группа $E_{23}(1,0)$ показана на рис. 11.3.

Приведенный пример иллюстрирует структуру эллиптической группы в целом. Можно отметить две характерные черты эллиптической группы. Во-первых, их природа носит достаточно случайный характер, а во-вторых, не все целочисленные значения конечного поля $GF(23)$, равно как и не все возможные точки с координатами, принадлежащими $GF(23)$ входят в эллиптическую группу.

Общее количество точек эллиптической группы определяется в соответствии с утверждением Хоссего (***Hassego***):

$$M+1-2M^{1/2} \leq \#E_M(a,b) \leq M+1+2M^{1/2}.$$

Анализ последнего соотношения показывает, что для больших значений модуля M, количество точек эллиптической группы практически равняется величине M.

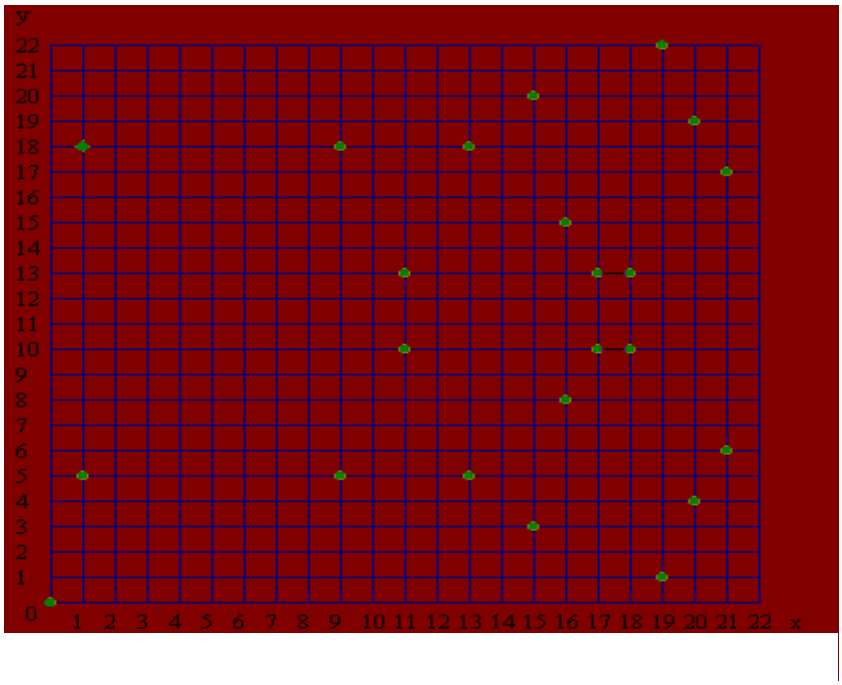


***Рис.*11.3. *Эллиптическая группа* E_{23}(1,0)**

***Пример* 11.2**. В качестве второго примера рассмотрим эллиптическую группу $E_M(a,b)=E_5(0,1)$, описываемую эллиптической кривой $y^2=x^3+1$ в конечном поле $GF(5)$. Данная группа будет состоять из следующих точек {O, (0,1), (0,4), (2,2), (2,3), (4,0)}.

Для эллиптических групп также справедливы все свойства, которые касались эллиптических кривых для действительных чисел. Единственным отличием является выполнение всех операций по модулю M. Так, отрицательная точка $-P$ будет определяться как $-P = (x_P, -y_P \bmod M)$. Например, для эллиптической группы $E_5(0,1)$ и ее точки -(2,2) будем иметь -(2,2)=(2,-2 mod 5)=(2,3).

Для эллиптических групп соотношения для определения координат точки R, являющейся суммой $P+Q$ двух исходных точек, определяется следующим образом.

1.Если P и Q являются различными точками эллиптической группы $E_M(a,b)$, и P не равняется $-Q$, тогда результатом операции сложения $P+Q=R$ является точка $R=(x_R,y_R)$, координаты которой вычисляются по следующим соотношениям:

$$s=(y_P-y_Q)/(x_P-x_Q) \bmod M;$$
$$x_R = s^2 - x_P - x_Q \bmod M;$$
$$y_R = -y_P + s(x_P - x_R) \bmod M.$$

2.Удвоение точки P будет осуществляться подобным образом:

$$s=(3x_P^2+a)/(2y_P) \bmod M;$$

$$x_R = s^2 - 2x_P \bmod M;$$
$$y_R = -y_P + s(x_P - x_R) \bmod M.$$

Величина a является одним из параметров эллиптической группы $E_M(a,b)$ и принадлежит конечному полю $GF(M)$. Все вычисления выполняются в конечном поле по модулю M.

***Пример* 11.3.** Рассмотрим операцию сложения двух точек (0,1) и (2,2), принадлежащих эллиптической группе $E_5(0,1)$. В силу того, что $(0,1)\neq(2,2)$ и $(2,2)\neq-(0,1)$, используем первый случай для операции сложения. Тогда $s=(y_P-y_Q)/(x_P-x_Q) \bmod M=(1-2)/(0-2) \bmod 5$. Отсюда получим линейное уравнение $2s=1 \bmod 5$, решением которого является $s=3$. Далее значения координат результирующей точки $R=(x_R,y_R)$ вычисляются как $x_R=s^2-x_P-x_Q \bmod M=(3^2-0-2) \bmod 5=2$; $y_R = -y_P+s(x_P-x_R) \bmod M=-1+3(0-2) \bmod 5=-7 \bmod 5=3$. Окончательно получим точку $R=(x_R,y_R)=(2,3)$.

***Пример* 11.4.** Рассмотрим удвоение точки (2,2), принадлежащей этой же эллиптической группе $E_5(0,1)$. В силу того, что (2,2)=(2,2), используем второй случай для операции сложения. Тогда $s=(3x_P^2+a)/(2y_P) \bmod M=(3\times2^2+0)/(2\times2) \bmod 5=3$. Откуда значения координат точки $R=(x_R,y_R)$ вычисляются как $x_R=s^2-2x_P \bmod M=(3^2-2\times2) \bmod 5=0$; $y_R = -y_P+s(x_P-x_R) \bmod M=-2+3(2-0) \bmod 5=4$. В результате получили точку $R=(x_R,y_R)=(0,4)$.

***Пример* 11.5.** Рассмотрим случай, когда $P=-P$. Возьмем точки (2,2) и (2,3), принадлежащие этой же эллиптической группе $E_5(0,1)$. Тогда в силу того, что (2,2)=-(2,3), результатом будет точка O. Формально это значение получается при вычислении значения $s=(y_P-y_Q)/(x_P-x_Q) \bmod M = (2-3)/(2-2) \bmod 5=\infty$. Тогда $(2,2)+(2,3)=O$.

Таблица 11.1 для операции сложения точек эллиптической группы $E_5(0,1)$ содержит результаты сложения всевозможных пар точек данной группы. Используя данную таблицу легко выполнять основные операции для эллиптических точек эллиптической группы $E_5(0,1)$.

***Таблица* 11.1.**

Операция сложения точек E_5(0,1)

+	O	(0,1)	(0,4)	(2,2)	(2,3)	(4,0)
O	O	(0,1)	(0,4)	(2,2)	(2,3)	(4,0)
(0,1)	(0,1)	(0,4)	O	(2,3)	(4,0)	(2,2)
(0,4)	(0,4)	O	(0,1)	(4,0)	(2,2)	(2,3)
(2,2)	(2,2)	(2,3)	(4,0)	(0,4)	O	(0,1)
(2,3)	(2,3)	(4,0)	(2,2)	O	(0,1)	(0,4)
(4,0)	(4,0)	(2,2)	(2,3)	(0,1)	(0,4)	O

Более сложные вычисления необходимо выполнить для эллиптических групп большей размерности.

***Пример* 11.6.** Предположим, имеем эллиптическую группу $E_{23}(9,17)$, описываемую эллиптической кривой $y^2=x^3+9x+17 \bmod 23$. Нетрудно убедится,

что точка P=(16,5) принадлежит данной группе. Действительно, y^2 mod 23 =5^2 mod 23=2 и $16^3+9\times16+17$ mod 23=2.

Вначале вычислим $2P=P+P$. Для этого последовательно определим $s=(3x_P^2+a)/(2y_P)$ mod $M=(3\times16^2+9)/(2\times5)$ mod 23. Как результат вычислений получим линейное сравнение $10s$=18 mod 23, решением которого в свою очередь будет $s=18\times10^{\varphi(23)-1}$ mod 23 = 18×10^{21} mod 23 =11.

Тогда $x_R=s^2-2x_P$ mod $M=(11^2-2\times16)$ mod 23=20 и $y_R=-y_P+s(x_P-x_R)$ mod M=-5+11(16-20) mod 23=-49 mod 23= -3 mod 23=20. Как результат получим новую точку $Q=2P$=(20,20).

Для вычисления $R=P+Q=3P$ последовательно выполним вычисления $s=(y_P-y_Q)/(x_Q-x_P)$ mod M=(5-20)/(20-16) mod 23. Затем $4s$=-15 mod 23 =8 mod 23 и $s=8\times4^{\varphi(23)-1}$ mod 23 = 8×4^{21} mod 23 = 2.

Тогда, $x_R=s^2-x_P-x_Q$ mod M = (22-16-20) mod 23 = -9 mod 23 = 14 и $y_R=-y_P+s(x_P-x_R)$ mod M = -5+2(14-16) mod 23 = -9 mod 23 = 14. В результате получим точку $R=3P$=(14,14).

Основной операцией, выполняемой при реализации криптографических алгоритмов, является операция вычисления скалярного произведения kP, которая реализуется путем последовательного выполнения операции сложения $P+P+P+\ldots$.

При последовательном выполнении подобного сложения на каждом шаге будет получаться результирующая точка, которая также должна принадлежать исходной эллиптической группе. Если операция последовательного добавления точки P к уже полученной сумме $P+P+P+\ldots$ достаточно продолжительна то в силу того, что эллиптическая группа содержит конечное множество точек, наступит такой момент, что для некоторых целых k и l ($l>k$) наступит равенство $kP=lP$. Из последнего утверждения следует, что для некоторого целого $c=l-k$ будет выполняться равенство $cP=O$. Наименьшее значение c, для которого выполняется равенство $cP=O$, называется ***порядком*** точки P. Для эллиптической группы, рассмотренной в примере 6.9, результаты последовательного добавления $P+P+P+\ldots$приведены в таблице 11.2.

***Таблица* 11.2.**

Результат выполнения операции P+P+P+… для E_5(0,1)

+	(0,1)	(0,4)	(2,2)	(2,3)	(4,0)
P	(0,1)	(0,4)	(2,2)	(2,3)	(4,0)
$2P$	(0,4)	(0,1)	(0,4)	(0,1)	O
$3P$	O	O	(4,0)	(4,0)	(4,0)
$4P$	(0,1)	(0,4)	(0,1)	(0,4)	O
$5P$	(0,4)	(0,1)	(2,3)	(2,2)	(0,4)
$6P$	O	O	O	O	O

Как видно из приведенной таблицы, у каждой точки различный порядок. Так, точки (0,1) и (0,4) имеют порядок c=3, точки (2,2) и (2,3) – порядок c=6, а точка (4,0) имеет c=2.

В реальных криптографических приложениях модуль M эллиптической группы выбирается как большое простое число, содержащее сотни знаков. Кроме того, весьма важным элементом является так называемая генерирующая точка G, порядок которой (c) должен являться также большим простым числом. В качестве примера для описания эллиптической группы возьмем эллиптическую кривую $y^2=x^3+10x+10$.

***Пример* 11.7.** На базе кривой $y^2=x^3+10x+10$ и модуля $M=23$ построим эллиптическую группу $E_{23}(10,10)$ с генерирующей точкой $G=G(x,y)=G(5,1)$. Результаты скалярного произведения генерирующей точки G на целые значения величины k приведены в таблице 11.3.

***Таблица* 11.3.**

Результаты выполнения операции kG для E_{23}(10,10)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
kG	(5,1)	(8,21)	(11,5)	(10,11)	(12,8)	(7,20)	(15,19)	(9,1)	(9,22)
k	10	11	12	13	14	15	16	17	18
kG	(15,4)	(7,3)	(12,15)	(10,12)	(11,18)	(8,2)	(5,22)	(O)	(5,1)

Для выбранной генерирующей точки $G(5,1)$ ее порядок равняется 17, так как 17 является минимальным целым простым числом, для которого выполняется равенство $cP=O$.

Основой всех существующих криптографических приложения является проблема дискретного логарифма. В случае эллиптических групп эта проблема имеет следующую формулировку.

Для заданных двух точек P и Q эллиптической группы найти такое целое положительное число k, для которого выполняется равенство $kP=Q$. Величина k называется дискретным логарифмом от Q по основанию P.

Эллиптическая открытая система распределения ключей (***public key distribution algorithm***), подобно, как и алгоритм, предложенный ***W.Diffie*** и ***M.Hellman,*** предназначается для распределения ключей по открытому каналу. Стойкость предложенного алгоритма основывается на сложности вычисления дискретного логарифма над эллиптической группой $E_M(a,b)$. Рассмотрим пару взаимно инверсных преобразований:

$$Q=kG;$$
$$k=log_G Q \pmod M \text{ над группой } E_M(a,b),$$

где k – простое целое число, а G – генерирующая точка эллиптической группы $E_M(a,b)$. Вычисление точки Q как результата скалярного произведения целого положительного k на генерирующую точку G представляет собой достаточно простую вычислительную задачу. В то же время вычисление значения k на основании точек Q и G является вычислительно трудной задачей. Для больших значений M эта задача вычислительно неразрешима. На этом факте и основана рассматриваемая эллиптическая система распределения ключей.

Злоумышленник при попытке получения значения ключа столкнется с проблемой дискретного логарифма над эллиптической группой $E_M(a,b)$.

Первоначально определяются параметры эллиптической группы $E_M(a,b)$. Для этого выбирается большое простое целое число M и определяются параметры a и b эллиптической кривой, на базе которых строится эллиптическая группа $E_M(a,b)$. Затем определяется генерирующая точка $G=G(x,y)$ таким образом, что значение c, для которого выполняется равенство $cG=O$, является большим целым простым числом. Параметры эллиптической группы $E_M(a,b)$ и значение координат генерирующей точки $G=G(x,y)$ являются открытыми параметрами, доступными для всех пользователей.

Сущность эллиптической открытой системы распределения ключей состоит в том, что два пользователя A и B используя открытый канал, обмениваются криптографическим ключом, который будет известен только им двоим. Для остальных пользователей этот ключ будет закрытым. Непосредственно реализация эллиптической открытой системы распределения ключей состоит из следующих этапов.

1.Пользователь A случайным образом выбирает целое число n_A, такое, что $n_A<M$, которое является аналогом секретного ключа пользователя A. Значение числа n_A должен знать только пользователь A. Затем A генерирует свой открытый параметр (ключ) как результат скалярного произведения n_A на G, то есть выполняет вычисление точки $P_A=n_AG$, которая является точкой эллиптической группы $E_M(a,b)$.

2.Пользователь B повторяет аналогичные действия и в результате получает свой секретный параметр n_B и соответствующий ему открытый параметр P_B.

3.По открытому каналу пользователь A высылает в адрес пользователя B свой открытый параметр P_A, а пользователь B – свой параметр P_B в адрес пользователя A.

4.Пользователь A получает значение секретного ключа K как результат скалярного произведения $K=n_AP_B$. Аналогично пользователь B генерирует значение общего с пользователем A секретного ключа K как результат вычисления $K=n_BP_A$. В результате оба пользователя получат одно и то же значение ключа K в силу того, что для скалярного произведения целого числа на точку эллиптической группы выполняется следующее равенство
$n_AP_B=n_A(n_BG)=$
$=n_B(n_AG)=n_BP_A$.

***Пример* 11.8.** Рассмотрим пример реализации эллиптической открытой системы распределения ключей на базе эллиптической группы $E_{23}(10,10)$ с генерирующей точкой $G=G(5,1)$.

1.Пользователь A случайным образом выбирает целое число $n_A=2$, для которого выполняется неравенство $n_A=2<M=23$. Затем A генерирует свой открытый параметр как результат скалярного произведения n_A на G, то есть

выполняет вычисление точки $P_A=n_AG=2(5,1)=(8,21)$, которая также является точкой эллиптической группы $E_{23}(10,10)$.

2.Пользователь B повторяет аналогичные действия и в результате получает свой секретный параметр $n_B=3$ и соответствующий ему открытый параметр $P_B=n_BG=3(5,1)=(11,5)$.

3.По открытому каналу пользователь A высылает в адрес пользователя B свой открытый параметр $P_A=(8,21)$, а пользователь B – свой открытый параметр $P_B=(11,5)$ в адрес пользователя A.

4.Пользователь A получает значение секретного ключа K как результат скалярного произведения $K=n_AP_B=2(11,5)=(7,20)$. Аналогично пользователь B генерирует значение общего с пользователем A секретного ключа K как результат вычисления $K=n_BP_A=3(8,21)=(7,20)$. В результате оба пользователя получат одно и то же значение ключа $K=(7,20)$.

Для реализации эллиптической криптосистемы предварительно как и для произвольной криптосистемы с открытым ключом необходимо определить эллиптическую группу $E_M(a,b)$ и генерирующую точку этой группы G. При этом сама эллиптическая группа и ее генерирующая точка являются открытыми параметрами, которые доступны всем пользователям криптосистемы. Кроме того, для всех пользователей A, B, C,...генерируются их закрытые ключи $n_A,n_B,n_C,\ldots$, которые представляют собой случайные целые числа меньшие чем c, где c – порядок генерирующей точки G. Далее используя эллиптическую группу $E_M(a,b)$ и ее генерирующую точку G вычисляются соответствующие им открытые ключи $P_A=n_AG$, $P_B=n_BG$, $P_C=n_CG,\ldots$. Каждый из пользователей держит в тайне свой секретный ключ и обеспечивает доступ всем пользователям к своему открытому ключу.

Непосредственно перед процедурой шифрования отправитель кодирует свое сообщение m точкой $P_m=P_m(x,y)$ эллиптической группы $E_M(a,b)$. Здесь значения координат (x, y) и определяют сообщение m. Предположим, что пользователь A решил выслать в адрес пользователя B сообщение закодированное точкой $P_m=P_m(x,y)$. Для этого он должен выполнить следующие действия.

1.Пользователь A случайным образом генерирует целое число $k<c$, где c представляет собой порядок генерирующей точки G.

2.Используя точку G эллиптической группы $E_M(a,b)$ пользователь A вычисляет скалярное произведение kG, результатом которого является точка, принадлежащая этой же эллиптической группе.

3.На основании открытого ключа P_B пользователя B пользователь A определяет точку kP_B группы $E_M(a,b)$.

4.Пользователь А вычисляет сумму P_m+kP_B двух точек P_m и kP_B эллиптической группы $E_M(a,b)$, полученных ранее.

5.Криптограмма $C_m=(kG, P_m+kP_B)$, которая высылается в адрес получателя сообщения, состоит из двух точек эллиптической группы.

Процедура дешифрования криптограммы $C_m=(kG,P_m+kP_B)$ на стороне пользователя B будет состоять из следующих этапов.

1.Используя первую точку kG эллиптической группы $E_M(a,b)$ пользователь B вычисляет скалярное произведения своего секретного ключа n_B на точку kG. В результате получает $n_B(kG)=kP_B$.

2.Далее, используя вторую точку P_m+kP_B криптограммы $C_m=(kG,P_m+kP_B)$, пользователь B выполняет операцию сложения $(P_m+kP_B)+(-kP_B)$ и в результате получает исходное сообщение, закодированное точкой P_m. Отметим, что $-P=-P(x,y)=P(x,-y)=P(x,M-y)$.

***Пример* 11.9.** Рассмотрим пример реализации эллиптической криптосистемы на базе эллиптической группы $E_{23}(10,10)$ с генерирующей точкой $G=G(5,1)$. Предположим, что секретный ключ пользователя B равен $n_B=3$, а соответствующий ему открытый ключ $P_B=n_BG=3(5,1)=(11,5)$. Кроме того, пользователь A решил выслать в адрес B закодированное в виде точки $P_m=(15,4)$ исходное сообщение m. В результате пользователь A выполнит следующие действия.

1.Пользователь A случайным образом генерирует целое число $k=7<c=17$.

2.Используя точку $G=(5,1)$ эллиптической группы $E_{23}(10,10)$ пользователь A вычисляет скалярное произведение $kG=7(5,1)=(15,19)$.

3.На основании открытого ключа $P_B=(15,4)$ пользователя B пользователь A определяет точку $kP_B=7(11,5)=(10,11)$.

4.Пользователь А вычисляет сумму $P_m+kP_B=(15,4)+(10,11)=(11,18)$.

5.Криптограмма C_m, которая высылается в адрес получателя сообщения, состоит из двух точек эллиптической группы $C_m=((15,19),(11,18))$.

При получении криптограммы $C_m=((15,19),(11,18))$ пользователь B последовательно выполняет следующие действия.

1.Используя первую точку $kG=(15,19)$ эллиптической группы $E_{23}(10,10)$, пользователь B вычисляет скалярное произведение своего секретного ключа $n_B=3$ на точку $kG=(15,19)$. В результате он получает $n_B(kG)=3(15,19)=(10,11)$.

2.Далее, используя вторую точку $P_m+kP_B=(11,18)$ криптограммы C_m, пользователь B выполняет операцию сложения $(11,18)+(-(10,11))=(11,18)+(10,-11)=(11,18)+(10,12)=(15,4)$. Таким образом, пользователь B получает сообщение m закодированное точкой $P_m=(15,4)$.

Достаточно интересной представляется криптосистема, предложенная *Менезесом* и *Ванстоуном* (***Menezes-Vanstone Elliptic Curve Cryptosystem***). Ее суть, так же как и в предыдущем случае, состоит на проблеме дискретного логарифма для циклических подгрупп эллиптических групп.

Исходными открытыми данными для данной криптосистемы является эллиптическая группа $E_M(a,b)$ и ее генерирующая точка G, для которой вычисляются соответствующие открытые ключи $P_A=n_AG$, $P_B=n_BG$, $P_C=n_CG$,... для всех пользователей. Закрытые ключи $n_A,n_B,n_C,...$пользователей $A,B,C,\ldots$ представляют собой случайные целые числа и являются закрытыми параметрами.

Аналогично как и в предыдущем случае, непосредственно перед процедурой шифрования отправитель A кодирует свое сообщение m точкой $P_m=P_m(x_1,y_1)$ эллиптической группы $E_M(a,b)$ перед высылкой его в адрес пользователя B. Здесь значения координат (x_1, y_1) и определяют сообщение m.

Непосредственно процедура шифрования состоит из следующих шагов.

1.Отправитель закодированного сообщения $P_m(x_1,y_1)$ генерирует случайное целое число $k<c$, где c – порядок генерирующей точки G.

2.Пользователь A вычисляет точку $kP_B=(x_2,y_2)$, используя открытый ключ пользователя B, принадлежащую эллиптической группе $E_M(a,b)$.

3.Пользователь A вычисляет дополнительную точку $C_0=kG$.

4.Пользователь A вычисляет два целых числа c_1 и c_2 по следующим соотношениям.

$$c_1=x_1x_2 \bmod M;\ c_2=y_1y_2 \bmod M.$$

5. Пользователь A высылает в адрес пользователя B шифрограмму $C_m=(C_0,c_1,c_2)$.

При получении шифрограммы $C_m=(C_0,c_1,c_2)$ пользователь B последовательно выполняет следующие действия.

1.Пользователь B умножает первую точку C_0 криптограммы C_m на свой секретный ключ n_B. В результате получает $n_BC_0=n_BkG=kP_B=(x_2,y_2)$

2.Пользователь B получает закодированное сообщение $P_m(x_1,y_1)$ путем решения линейных сравнений $c_1=x_1x_2 \bmod M$; $c_2=y_1y_2 \bmod M$, где неизвестными являются x_1 и y_1.

Пример **11.10.** Рассмотрим пример реализации эллиптической криптосистемы *Менезеса-Ванстоуна* на базе эллиптической группы $E_{23}(10,10)$ с генерирующей точкой $G=G(5,1)$. Предположим, что секретный ключ пользователя B равен $n_B=9$, а соответствующий ему открытый ключ $P_B=n_BG=9(5,1)=(9,22)$. Закодированное сообщение m пользователем A представляется в виде точки $P_m=(12,15)$. Перед его отправлением в адрес пользователя B, пользователь A выполняет следующие действия.

1.Отправитель A генерирует случайное целое $k=5$.

2.Затем пользователь A вычисляет точку $kP_B=5(9,22)=(7,3)$.

3.Пользователь A вычисляет дополнительную точку $C_0=kG=5(5,1)=(12,8)$.

4.Пользователь A вычисляет $c_1=x_1x_2 \bmod M=12\times7 \bmod 23=15$ и $c_2=y_1y_2 \bmod M=15\times3 \bmod 23=22$.

5. И, наконец, пользователь A высылает в адрес пользователя B шифрограмму $C_m=(C_0,c_1,c_2)=((12,8),15,22)$.

При получении шифрограммы $C_m=(C_0,c_1,c_2)=((12,8),15,22)$ пользователь B последовательно выполняет следующие действия.

1.Умножает первую точку $C_0=(12,8)$ криптограммы C_m на свой секретный ключ n_B. В результате получает $n_BC_0=9(12,8)=(7,3)$.

2.Пользователь B получает закодированное сообщение $P_m(x_1,y_1)$ путем решения линейных сравнений $15=7x_1 \bmod 23$; $22=3y_1 \bmod 23$, где неизвестными являются x_1 и y_1. В результате $x_1=15\times7^{21} \bmod 23=12$, а $x_2=22\times3^{21} \bmod 23=15$.

Тема 12. Квантовая криптография

Ярмолик В.Н., Портянко С.С., Ярмолик С.В. Криптография, стеганография и охрана авторского права. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. – 242с. (*Глава 6.*)

Развитие новых технологий для создания элементной базы ЭВМ и в первую очередь нанотехнологии, подходя к атомному пределу, неизбежно столкнется с квантовыми свойствами материи, которые до настоящего времени никак не использовались в сфере информационных технологий. Применение новых свойств материи будет означать радикальную трансформацию идеологии современной вычислительной техники, основанной на известном поведении сигнала (носителя информации), и четко определяемом состоянии носителя этого сигнала.

Из всех квантовых информационных технологий, которые должны прийти на смену существующим приложениям, ближе всего к созданию приложений, пригодных для использования в реальной жизни, подошла квантовая криптография.

Технология квантовой криптографии опирается на фундаментальное свойство природы известное в физике как ***принцип неопределенности Гейзенберга***, сформулированный в 1927г., который базируется на принципиальной неопределенности поведения квантовой системы. Невозможно одновременно получить координаты и импульс частицы, невозможно измерить один параметр фотона, не исказив другой.

Благодаря этому свойству возможно построение каналов передачи данных, защищенных от подслушивания. Отправитель кодирует отправляемые данные, задавая определенные квантовые состояния, а получатель регистрирует эти состояния. Затем получатель и отправитель совместно обсуждают результаты наблюдений. При передаче данных задается и контролируется поляризация фотонов.

Впервые идея квантовой криптографии была предложена в 1984г. ***Чарльзом Беннетом*** и ***Жиль Брассаром,*** которые предложили использовать фотоны в криптографии для получения защищенного канала передачи информации. Для кодирования нулей и единиц они предложили использовать фотоны, поляризованные в различных направлениях, и разработали простую схему квантового распределения ключей шифрования, названную ими ***BB*84.** Позднее, в 1991г. идея была развита ***Экертом*.**

Сущность предложенной ими идеи заключался в том, что импульс горизонтально поляризованных фотонов проходит через горизонтальный поляризационный фильтр. Если поворачивать фильтр, то поток пропускаемых фотонов будет уменьшаться до тех пор, пока угол поворота не составит 90 градусов. Тогда ни один фотон из горизонтально поляризованного импульса не

будет пропускаться вертикально поляризованным фильтром. При повороте фильтра на 45° он пропустит горизонтально поляризованный фотон с вероятностью 1/2.

Реализация идеи заключается в том, что отправителем исходного сообщения свет фильтруется, поляризуется и формируется в виде коротких импульсов малой интенсивности. Поляризация каждого импульса задается отправителем произвольным образом в соответствии с одним из четырех перечисленных состояний (горизонтальная, вертикальная, лево- или право-циркулярная).

Получатель сообщения измеряет поляризацию фотонов, используя произвольную последовательность базовых состояний (ортогональная или циркулярная).

В соответствии с законами квантовой физики, с помощью измерения можно различить лишь два ортогональных состояния: если известно, что фотон поляризован либо вертикально, либо горизонтально, то путем измерения, можно установить, как именно он поляризован. То же самое можно утверждать относительно поляризации под углами 45 и 135 градусов. Однако с достоверностью отличить вертикально поляризованный фотон от фотона, поляризованного под углом 45 градусов, невозможно.

Получатель открыто сообщает отправителю, какую последовательность базовых состояний он использовал. Далее отправитель открыто уведомляет получателя о том, какие базовые состояния использованы получателем корректно. Все измерения, выполненные при неверных базовых состояниях, не совпадающих у получателя и отправителя, отбрасываются. Измерения интерпретируются согласно двоичной схеме: лево-циркулярная поляризация или горизонтальная – 1, право-циркулярная или вертикальная – 0.

Очень важным достоинством передачи информации по такому каналу, образованному потоком световых импульсов, является невозможность перехвата сообщения, то есть его подслушивания.

Примером использования квантовой криптографии на практике является ***алгоритм генерирования*** двумя пользователями ***секретного ключа***.

Целью данного алгоритма является получение отправителем и получателем секретного ключа, который будет известен только им обоим.

Первоначально отправитель формирует последовательность фотонных импульсов. Каждый из импульсов случайным образом поляризован в одном из четырех направлений. Возможна вертикальная поляризация (|), горизонтальная (–), лево-циркулярная (\) и право-циркулярная (/). Например, отправитель посылает последовательность из девяти фотонных импульсов, поляризация которых задается, как | / / – \ | | – –.

Получатель настраивает свой детектор произвольным образом (случайно) на измерение серии либо диагонально (×), либо ортогонально (+) поляризованных импульсов (мерить одновременно и те и другие невозможно).

Предположим, получатель для измерения девяти фотонных импульсов использует поляризацию в следующей последовательности + × + + × × × + ×.

Предположим, что получатель верно определил поляризацию фотонов, тогда его регистрирующее устройство будет пропускать либо не пропускать импульс фотонов, что будет означать получение либо единичного символа сообщения, либо нулевого. Если же получатель неверно выбрал поляризацию фильтра, фотон всегда будет проходить либо не проходить через фильтрующее устройство с вероятностью 0,5, так как угол поляризации по отношению к поляризации фильтра составляет 45 градусов. И это не будет зависеть от того, какая поляризация использовалась при передаче исходного сообщения: та, которая соответствует единице, или та, которая соответствовала нулю.

Таким образом, при представлении исходного текста как последовательность равновероятных двоичных символов, результаты анализа будут представляться как случайная последовательность двоичных цифр.

Для примера, когда отправитель использовал поляризацию | / / – \ | | – –, а получатель + × + + × × × + ×, результаты алгоритма генерирования секретного ключа сведены в таблицу 12.1.

***Таблица* 12.1**

Алгоритм генерирования секретного ключа

Отправитель	|	/	/	–	\	|	|	–	–
Получатель	+	×	+	+	×	×	×	+	×
Результат измерений	0	0	0	1	1	0	1	1	0
Анализатор выбран правильно	Да	Да	Нет	Да	Да	Нет	Нет	Да	Нет
Ключ	0	0		1	1			1	

В графе «*Результаты измерения*» представлены результаты физического эксперимента фильтрации потока импульсов фотонов, а конкретные значения свидетельствуют о либо не прохождении импульса фотонов либо нет через конкретный фильтр. Эти результаты являются секретной данными.

По открытому каналу связи получатель сообщает отправителю, какие анализаторы им использовались (см. строку «*Получатель*»), но не сообщает, какие результаты им были получены.

В ответ отправитель по общедоступному каналу связи сообщает получателю, какие анализаторы он выбрал правильно. Эта информация представлена в строке «*Анализатор выбран правильно*» и может быть общедоступной. Те импульсы фотонов, для которых получатель неверно выбрал анализатор, отбрасываются и не принимаются для дальнейшего рассмотрения, а результаты измерения для правильно выбранных результатов могут быть использованы обоими пользователями для криптографического ключа, так как только отправитель и только получатель будут владеть этой информацией. Отправитель – в силу того, что он формировал поляризацию

сам, а получатель – принимал, используя правильную поляризацию своего анализатора.

В среднем, в половине случаев из импульсов фотонов будет получен очередной бит ключа, а в остальных случаях информация будет носить случайный характер в силу неправильно выбранной поляризации анализатора и поэтому игнорируется обоими пользователями.

Если бы злоумышленник производил перехват информации при помощи оборудования, подобного оборудованию Боба, то примерно в 50 процентах случаев он выберет неверный анализатор, не сможет определить состояние полученного им импульса фотонов, и отправит импульс фотонов получателю в состоянии поляризации, выбранной наугад. При этом в половине случаев он выберет неверную поляризацию и, таким образом, примерно в 25 процентах случаев результаты измерений получателя могут отличаться от результатов отправителя.

Для обнаружения подобного перехвата отправитель и получатель выбирают случайный участок ключа и сравнивают его по общедоступному каналу связи. Если процент ошибок велик, то он может быть отнесен на счет злоумышленника. В этом случае предыдущий эксперимент полностью аннулируется, а процедура обмена секретным ключом повторяется сначала.

Тема 13. Элементы теории сложности

М.Г. Адигеев Введение в теорию сложности. Методические указания для студентов механико-математического факультета. – Министерство образования и науки Российской Федерации Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ростовский Государственный Университет» 2004 г.

Сложность алгоритмов

Под алгоритмом обычно понимают четко определенную последовательность действий, приводящую через конечное число шагов к результату – решению задачи, для которой разработан алгоритм.

Основные свойства, присущие любому алгоритму:

1. массовость – алгоритм предназначен для решения задачи с некоторым множеством допустимых входных данных;

2. конечность – алгоритм должен завершаться за конечное число шагов (но это количество шагов может быть разным для разных входных данных).

Задачи могут быть сформулированы по-разному (дифференциальные уравнения, задачи на графах, задачи оптимизации и т.п.). Для того чтобы можно было строить единую теорию алгоритмов, необходимо свести разные формулировки задач к какому то «единому знаменателю». Например, можно

считать, что задача сводится к вычислению некоторой функции F:$X \to Y$. Ясно, что в таком виде можно сформулировать любую задачу. Но для некоторых задач функция F может быть выражена неявно. Например, для задачи поиска минимума функции φ на отрезке [0,1] имеем: X = множество функций, Y = [0,1], $F(\varphi) = x^*$: $\varphi(x^*) = \min\{\varphi(x): x \in [0,1]\}$. Не для любой задачи можно построить алгоритм. Существуют алгоритмически неразрешимые задачи. Например: задача самоприменимости машины Тьюринга, задача об остановке алгоритма. Еще один важный пример алгоритмически неразрешимой задачи – автоматическое доказательство теорем. Но даже если существует алгоритм, решающий задачу, это еще не значит, что мы сможем этим алгоритмом воспользоваться на практике для решения реальных задач. Потому что алгоритм может требовать для своей работы слишком много ресурсов. Например, если решение задачи на самых современных компьютерах займет 10^{10} лет. Очевидно, такой алгоритм для нас бесполезен. Иными словами, недостаточно существования какого-нибудь алгоритма, должен существовать алгоритм, не требующий для своей работы слишком много ресурсов.

Определение 13.1. *Количественная характеристика потребляемых ресурсов, необходимых программе или алгоритму для работы* (*успешного решения задачи*) *– это и есть* сложность алгоритма.

Основные ресурсы: время (*временна́я сложность*) и объем памяти (*ёмкостная сложность*). Наиболее важной (критической) характеристикой является *время*.

Очевидно, что для разных экземпляров задачи (для разных входных данных) алгоритму может требоваться разное количество ресурсов. С каждым экземпляром x задачи Z связывается определенное число (реже – набор чисел) $|x|$, называемое *длиной* или *размером входных данных (размером задачи)*. Размер задачи – это объем входных данных, необходимых для задания всех параметров задачи. Однако для многих задач количество времени, необходимое для решениязадачи, зависит не только от *размера* входных данных, но и от самих данных. То есть для решения задачи для двух входных данных x и y одинакового размера ($|x|=|y|$) алгоритм может тратить разное время. Поэтому для получения оценок временной сложности в зависимости от размера задачи определяют ее как *максимальное* время, затрачиваемое алгоритмом для входных данных длины n:

$$T(n)=\boldsymbol{max}\{T(x): |x|=n\}.$$

Эта функция называется *сложностью* алгоритма *в худшем случае*. Во многих случаях более важной для практики характеристикой алгоритма является его *сложность в среднем*. Формально сложность в среднем определяется так:

$$Tcp(n)= \Sigma\ T(x)p(x),$$

где p(x) — вероятность появления входных данных x, а суммирование ведется по всем возможным входным данным размера n. К сожалению, только для небольшого количества задач (например, для задачи сортировки) удается найти естественный способ определения вероятностей для входных данных. Поэтому при оценке сложности алгоритма обычно рассматривают его сложность в худшем случае. Более того, обычно оценивают не точное значение функции сложности T(n), а *порядок роста* этой функции, т.е. находят такую функцию $f(n)$, что T(n) = O(n) при $n \to \infty$.

Классы сложности

В предыдущем параграфе мы ввели понятие «сложность алгоритма». Хотелось бы аналогичным образом определить и сложность **задачи** – например, как сложность самого эффективного (по времени или ёмкости) алгоритма, решающего эту задачу (для данных размера n). К сожалению, это невозможно. Доказано, что есть задачи, для которых *не существует* самого быстрого алгоритма, потому что любой алгоритм для такой задачи можно «ускорить», построив более быстрый алгоритм, решающий эту задачу. Это утверждение называют теоремой Блюма об ускорении. Если отвлечься от технических деталей, то упрощенный вариант теоремы Блюма можно сформулировать следующим образом:

Теорема 13.1. (теорема Блюма об ускорении). *Существует такая алгоритмически разрешимая задача Z, что любой алгоритм A, решающий задачу Z, можно ускорить следующим образом: существует другой алгоритм A*, также решающий Z и такой, что TA*(n) ≤ log TA(n) для почти всех n.*

Теорема Блюма не утверждает, что ускорение возможно для *любой* задачи. Более того, в дальнейшем мы увидим, что для задач, интересных с практической точки зрения, ускорение не возможно; для таких задач существует оптимальный (самый быстрый) алгоритм. Тем не менее, утверждение теоремы Блюма о существовании «неудобных» задач не позволяет определить универсальное (применимое ко всем задачам) понятие «оптимального алгоритма».

Поэтому в теории сложности использован другой подход – через классы сложности.

Определение 13.2. *Пусть $f(n)$ – некоторая функция, отображающая **N** в **N**.* Класс сложности *C($f(n)$) – это множество всех задач, для которых существует хотя бы один алгоритм, сложность которого не превышает O($f(n)$).*

Это определение в некотором смысле условно – обозначение C($f(n)$) никогда не применяют. Почему? Потому что для задания реального класса задач необходимо еще уточнить: что мы понимаем под «алгоритмом»; какая сложность (временная, емкостная или какая-нибудь еще) нас интересует.

При разных ответах на эти вопросы получатся разные классы задач, и для каждого класса используется специальное обозначение. В теории сложности

под «алгоритмом» обычно понимают ту или иную разновидность машины Тьюринга. Перейдем к рассмотрению различных типов алгоритмов (машин Тьюринга) и соответствующих им классов сложности.

Детерминированные алгоритмы

В данном параграфе мы рассмотрим простейший вариант машины Тьюринга — детерминированную МТ. Прилагательное «*детерминированная*» пока будем опускать — его значение будет объяснено позже, при рассмотрении *недетерминированных* машин.

Детерминированная одноклеточная машина Тьюринга

Определение 13.3. *Алфавитом называется произвольное непустое счетное множество. Обычно рассматривают конечные алфавиты. Элементы алфавита называются* символами *или* буквами. Словом *в алфавите A называется конечная последовательность букв из этого алфавита. Количество букв в слове x называется* длиной *слова и обозначается* $|x|$. A^* = *множество всех слов над алфавитом A.* A^k = *множество всех слов длины k.*

Определение 13.4. *Машина Тьюринга* (*МТ*) *— это четверка* $M = (Q, A, S, \Pi)$, *где A — «ленточный» алфавит (содержит специально выделенный символ* $\wedge$ *— «пробел»),* $Q = \{q0, q1, \ldots, qm\}$ *— алфавит состояний,* $S = \{-1, 0, +1\}$ *— алфавит сдвигов, и* Π *— программа, представляющая собой отображение* $Q \times A \rightarrow Q \times A \times S$.

Формализовав таким образом интуитивное понятие «алгоритм», мы можем четко определить временную и емкостную сложность: $TM(x)$ — количество шагов, сделанных машиной M при обработке входа x, $SM(x)$ — количество ячеек на ленте, на которых побывала головка машины M при обработке входа x. Если на входе x машина зацикливается, то значения $TM(x)$ и $SM(x)$ не определены. После этого указанным выше образом определяются функции $TM(n)$ и $SM(n)$.

Рассмотренное определение задает простейшую модель алгоритма — *детерминированную одноленточную* машину Тьюринга.

Многоклеточная машина

Наше определение временной и ёмкостной сложности алгоритма опирается на простейшую модель МТ. В связи с этим возникают следующие вопросы. Насколько сильно временная и ёмкостная сложности зависят от вычислительной модели? Изменится ли сложность алгоритма, если мы расширим модель — скажем, «разрешим» машине Тьюринга иметь более одной ленты?

Введем новое определение.

Определение 13.5. *Пусть k целое число,* $k \geq 1$. *k*–ленточная машина Тьюринга *— это пятерка* $M = (k, A, Q, S, \Pi)$, *где* $\Pi : Q \times A^k \rightarrow Q \times (A \times S)^k$.

Принцип работы многоленточных машин в целом такой же, как и у одноленточных. Отличия связаны с количеством лент. Очередной шаг многоленточной машины определяется символами, расположенными в текущих ячейках на *всех* лентах, т.е. набором $(q, a1, \ldots, ak) \in Q \times A^k$. По этому набору

определяются выполняемые действия: $(q'\ , b1, s1,\ldots, bk, sk)\in Q\times(A\times S)k$. Эти действия также производятся на всех лентах: на i-й ленте в текущую ячейку записывается символ bi и головка смещается в соответствии с si. Обратите внимание на то, что головки на лентах перемещаются независимо друг от друга. Временная сложность многоленточной машины определяется точно так же, как и для одноленточной. В определении емкостной сложности есть небольшое изменение: емкостная сложность k-ленточной МТ M на входе x SM(x) определяется как *максимум* количества ячеек, на которых при обработке входа x побывали головки машины M на всех лентах. Очевидно, что это определение согласуется с данным ранее определением для k=1. В будущем нам потребуется следующее вспомогательное утверждение (его доказательство остается в качестве упражнения).

Теорема 13.2. *Для любой машины Тьюринга выполняется неравенство* $S(n)\le T(n)$*, т.е. емкостная сложность не превышает временную.*

Эквивалентность машин

Очевидно, что понятие k–ленточной МТ шире, чем понятие «обычной» одноленточной машины. Но насколько увеличилась «вычислительная мощь» машин Тьюринга за счет добавления лент? Более точно, нас интересуют следующие вопросы.

1. *Качественные* отличия: есть ли такие задачи, которые можно решать с помощью k–ленточных машин (при $k>1$), но нельзя решить с помощью одноленточной машины?

2. *Количественные* отличия. Очевидно, что за счет использования дополнительных лент можно получить выигрыш в скорости. Как сильно можно ускорить решение задачи, добавляя ленты? Для того чтобы ответить на эти вопросы, введем следующие определения.

Определение 13.6. (k+1)*–ленточная МТ* M' *с программой* w симулирует k*–ленточную машину M, если для любого набора входных слов* ($x1, x2, \ldots, xk$) *результат работы* M' *совпадает с результатом работы M на этих же входных данных. Предполагается, что вначале слово* w *записано на* (k+1)*-й ленте* M' *. Под результатом понимается состояние первых k лент МТ в момент остановки, а если на данном входе M не останавливается, то симулирующая ее машина также не должна останавливаться на данном входе.*

Определение 13.7. (k+1)*–ленточная МТ M* называется* универсальной машиной Тьюринга для k–ленточных машин*, если для любой k- ленточной машины M существует программа w, на которой M* симулирует M.*

Обратите внимание: в определении универсальной МТ одна и та же машина M' должна симулировать разные k-ленточные машины (на разных программах w).

Рассмотрим следующую теорему.

Теорема 13.3. *Для любого* $k\ge1$ *существует универсальная* (k+1)*–ленточная машина Тьюринга.*

Доказательство. Теорему докажем конструктивно, т.е. покажем, как можно построить требуемую универсальную машину **M***. Рассмотрим лишь общую схему построения, опустив сложные детали. Основная идея заключается в том, чтобы на дополнительную (k+1)-ю ленту разместить описание симулируемой машины Тьюринга и использовать это описание в процессе симулирования.

Пусть M = (k, Q, A, S, П) — произвольная k–ленточная машина Тьюринга. Не нарушая общности можно считать, что алфавит A содержит символы ‘0’, ‘1’ и вспомогательный символ ‘*’ (и, возможно, какие-то другие символы). Каждое состояние $q \in$ Q можно закодировать двоичным словом фиксированной длины r ($r \geq \log 2|Q|$). Очевидно также, что сдвиги $s \in$ S можно закодировать с помощью двух бит (т.е. двоичных слов длины 2). Рассмотрим одну ячейку из табличного представления программы машины M. Пусть эта ячейка соответствует состоянию q и обозреваемым символам ai (на i-й ленте текущим символом является ai, i=1,…,k); и пусть машина должна в этом случае перейти в состояние q' , напечатать символы bi и выполнить смещения si (i=1,…,k). Такую ячейку можно закодировать словом

$$qa1\ a2\ \ldots\ akq'\ \ b1\ b2\ \ldots\ bks1\ s2\ \ldots\ sk\ .$$

Это слово состоит из $2r+4k$ символов алфавита A. В дальнейшем каждое такое слово будем называть *блоком*. Закодируем таким образом все ячейки в программе машины M и запишем их в виде последовательности блоков на (k+1)-ю ленту машины.

Для того чтобы просимулировать поведение машины M, нам необходимо не только иметь программу этой машины, но и отслеживать ее текущее состояние. Текущее состояние машины M также будем записывать на (k+1)-ю ленту. Для того чтобы различать запись программы и запись текущего состояния, будем разделять их символом ‘*’. Например, слева от символа ‘*’ расположим слово α — закодированное представление текущего состояния машины M, а справа — слово π, представляющее собой закодированное представление программы этой машины.

Процедура моделирования машины M включает в себя следующие шаги (выполняемые машиной **M***):

1. Найти в слове π блок, соответствующий «текущему состоянию» α и текущим символам на первых k лентах.
2. На первых k лентах выполнить действия, задаваемые найденным блоком, т.е. изменить символы в текущих ячейках и сместить головки.
3. Изменить «текущее состояние» симулируемой машины, записав на (k+1)-й ленте слева от символа ‘*’ вместо слова α слово α' , считанное из найденного блока.
4. Проверить, является ли «состояние» α' заключительным. Если является, то завершить работу, иначе перейти к п.1. Очевидно, что каждый из шагов 1–4

можно «запрограммировать» в виде машины Тьюринга. Искомая универсальная машина **M*** представляет собой их композицию.

Доказанная теорема позволяет нам подойти к ответу на поставленные ранее два вопроса — убедиться, что количество лент у МТ не имеет принципиального значения ни с точки зрения вычислительной мощности, ни с точки зрения временной сложности. Напомню, что «принципиальное значение» для нас имеет только различие между полиномиальной и неполиномиальной (экспоненциальной) сложностью. Часто нас интересует только «выходное» значение, расположенное на последней ленте. В этом случае имеет смысл ослабить понятие симулирования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.8. *Будем говорить, что машина Тьюринга M вычисляет частичную функцию $f:A^*\to A^*$, если для любого $x\in A^*$, записанного на первую ленту машины M:*

· *если $f(x)$ определено, то M останавливается, и в момент остановки на последней ленте машины записано слово $f(x)$;*

· *если $f(x)$ не определено, то машина M не останавливается.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.9. *Будем говорить, что машины M и M′ эквивалентны, если они вычисляют одну и ту же функцию. Понятие эквивалентности «слабее», чем симулирование: если машина M′ симулирует машину M, то машина M′ эквивалентна M; обратное, вообще говоря, неверно. С другой стороны, для симулирования требуется, чтобы у M′ было как минимум столько же лент, сколько и у M, в то время как для эквивалентности это не обязательно. Именно это свойство позволяет нам сформулировать и доказать следующую теорему.*

Теорема 13.4. *Для любой k-ленточной машины M, имеющей временную сложность $T(n)$, существует эквивалентная ей одноленточная машина M′ с временной сложностью $T'(n) = O(T^2(n))$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим идею, лежащую в основе алгоритма моделирования. В отличие от задачи симулирования k-ленточной машины с помощью (k+1)-ленточной (Теорема 3), у машины M′ имеется только одна лента, с помощью которой необходимо отслеживать состояние k лент моделируемой машины M. Для этого «упакуем» все k лент машины M в одну ленту машины M′. Под «упаковкой» будем понимать взаимно однозначное отображение ячеек всех лент машины M в ячейки ленты машины M′ по следующему правилу: i-й ячейке j-й ленты M соответствует ячейка с номером $2(ki+j-1)$ на ленте M′. Таким образом, для хранения входных и промежуточных данных будут использоваться ячейки с четными номерами. В ячейках с нечетными номерами будем запоминать положение головок на лентах моделируемой машины: если у машины M головка на ленте j находится в ячейке i, то на ленте машины M′ в ячейке $2(ki+j-1)$ стоит символ '1', иначе — пробел. При таком способе упаковки возникает одна чисто техническая проблема: на ленте машины M′ внутри записанного слова окажутся

пробелы, а это противоречит определению машины Тьюринга. Для того чтобы преодолеть эту проблему, введем дополнительный символ '' (отсутствующий в алфавите машины M) и будем использовать его вместо пробела внутри слова (в том числе и в ячейках с нечетными номерами — в качестве признака того, что соответствующая ячейка машины M не является текущей).*

Таким образом, работа машины M′ состоит из трех фаз:

1. Начальное преобразование входного слова x.

2. Моделирование работы машины M.

3. Завершающее преобразование результата.

Первую фазу мы уже рассмотрели.

Во время второй фазы машина M′ моделирует каждый шаг машины M. При этом на каждом шаге M′ за счет своих состояний помнит текущее состояние машины M и номер обрабатываемой ленты. За один проход по своей ленте машина M′ выясняет, какие символы считываются каждой головкой машины M и определяет, что необходимо сделать — в какое состояние нужно перейти, что записать на каждую из лент и как сместить головки на лентах. Все это M′ «запоминает» с помощью своего состояния. Затем M′ еще раз проходит по своей ленте и выполняет необходимые преобразования. Третья фаза алгоритма представляет собой преобразование «сжатия», обратное первой фазе, с той разницей, что теперь мы оставляем только символы, записанные на последней (k-й) ленте машины M.

Очевидно, что работающая по такому алгоритму машина M′ действительно эквивалентна машине M. Для завершения доказательства нам осталось оценить временную сложность M′. Фазы 1 и 3 требуют O(S(n)) шагов, где S(n) — емкостная сложность машины M. Во время фазы 2 машина M′ должна промоделировать T(n) шагов машины M, сложность моделирования каждого шага равна O(S(n)), потому что на каждом шаге M′ дважды сканирует все слово, записанное на ее ленте. Получаем, что временная сложность машины M′ равна O(T(n)S(n)), что с учетом теоремы 2 равно O(T2(n))

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.10. DTIME($f(n)$) — *это класс задач, для каждой из которых существует детерминированная МТ, решающая эту задачу с временной сложностью* $O(f(n))$.

Напомним, что в строгой формулировке под решением задачи мы понимаем вычисление некоторой функции. Доказанные теоремы (об универсальной МТ и о моделировании произвольной машины с помощью одноленточной) обеспечивают универсальность данного определения (каждая алгоритмически разрешимая задача принадлежит некоторому классу DTIME($f(n)$)).

Определение 13.11. Определим также классы:

P = PTIME = ∪*k*>0DTIME(*nk*) — *класс задач, разрешимых за* полиномиальное *время*.

EXPTIME = ∪*k*>0DTIME(2^(*nk*)) — *класс задач, решаемых за* экспоненциальное *время*. *Здесь выражение* 2^*x означает «2 в степени x».*

В силу теоремы 4 определение классов PTIME и EXPTIME не зависит от количества лент в машине. Класс P — это класс эффективно решаемых задач. Алгоритм, имеющий полиномиальную временную сложность, называется *эффективным*. Задача, для которой в настоящее время не известен эффективный алгоритм или для которой доказано отсутствие такого алгоритма, называется *труднорешаемой*.

Тема 14. Сложность программного обеспечения

Оценка сложности программного обеспечения в области Web-программирования Оскаленко Д.А. Тамбовский филиал ОРАГС, г. Тамбов

Доля программного обеспечения связанного с работой в сети Интернет постоянно возрастает с ростом числа Web- приложений. Оценка сложности программного обеспечения напрямую связана с нормирование трудовых затрат на разработку ПО и, соответственною, с ценой разрабатываемого ПО.

Методы нормирования затрат на программную продукцию отличаются от затрат, сложившихся в традиционных отраслях. Метод – анализ статистических данных о фактически завершенных разработках, выявление факторов, определяющих разнообразие затрат, классификация этих факторов и предоставление пользователю нормативных материалов, возможности выбора наиболее близкого ему аналога и корректировки затрат, которые произошли при разработке аналога с помощью набора коэффициентов, учитывающих факторы разнообразия.

Стадии жизненного цикла ПО	**Стоимостные затраты, %**	**Временные затраты**
Разработка требований	10	2
Проектирование	10	5
Программирование	10	5
Отладка и внедрение	20	8
Эксплуатация и сопровождение	50	80

Разработка программного обеспечения в области Web-программирования связана с определенными коммерческими рисками. Проблемы рисков присутствуют в жизненном цикле информационных систем. Компьютеризация привела к возрастанию былой сложности создаваемых систем в тысячи раз.

Понятно, что нынешняя сложность измеряется не столько количеством комплектующих элементов, сколько множеством вариантов функционального поведения системы в зависимости от внешней обстановки.

Системы становятся не просто технически сложными, но и "умными", в которой функции "мозгов" реализуются программным обеспечением (ПО). А за "мозги" принято платить. Непрерывно возрастает сложность Web-приложений. Появляются геоинформационные сервисы, платежные системы, системы «дополненной реальности». Возникает проблема оценки сложности и соответственно коммерческой цены создаваемых Web-приложений.

Нами предложена модель для оценки сложности программного ПО. На первом этапе определяется степень сложности разработки-3–4 группы сложности, по каждой из групп сложности заданы характеристики, которые позволяют отнести разработку к той или иной группе:

1 группа: (высшая) интеллект и языковой интерфейс, работа в режиме реального времени (процесс обработки сопоставим по времени с требованиями), режим работы телекоммуникационный, машинная графика (разработка элементов), реализация комплекса разработок.

2 группа: поисковые алгоритмы, оптимизационные расчеты, применение сложных математических методов, настройка на изменяющиеся внешние условия.

3 группа: не встречается ничего из вышеперечисленного.

Численность исполнителей, необходимая для выполнения работ по стадиям проектирования и по комплексам задач (задаче) в целом, определяется по формуле:

$$Ч = \frac{Тот}{Фп}$$

где Ч - численность специалистов;

Тот– общая трудоемкость разработки проекта;

Фп - плановый фонд рабочего времени одного специалиста.

Расчет общей трудоемкости , разработки проекта (Тот) производится по формуле:

$$T_{от} = \sum_{1}^{n} H_{вр}$$

где Нвр - трудоемкость работ по стадиям проектирования (от 1 до n).

В случае применения нескольких коэффициентов общий поправочный коэффициент (Коб); определяется как произведение всех применяемых коэффициентов по следующей формуле:

$Коб = К^1 * К^2 * … * К^n$,

где $К^1$, $К^2$,…,$К^n$ - поправочные, коэффициенты, учитывающие влияние качественных факторов на изменение затрат времени при выполнении конкретных стадии проектирования;

Коб - общий поправочный коэффициент. (i-го вида работы).

Трудоемкость работ (Нвр) с учетом общего поправочного - коэффициента определяется по следующей формуле:

$$\text{Нвр} = \sum_{1}^{n} Нвр\,i * \text{Коб}$$

где Нврі - базисная норма времени, определенная по нормативной таблице;

Для расчетов коэффициентов предлагаем пользоваться следующими таблицами

Кэ	**Степень новизны**			**Стадии**
	1	**2**	**3**	
Ктз	0,11	0,10	0,09	техническое задание
Кэп	0,09	0,08	0,07	эскизное проектирование
Ктп	0,11	0,09	0,07	технического проектир.
Крп	0,55	0,58	0,61	рабочего проектирования
Квн	0,14	0,15	0,16	внедрения

По степени новизны классификация по трем группам.

Кн – коэффициент новизны.

А – принципиально новые разработки.

Б – развитие параметрического ряда ПО (в известной предметной области использовалась либо новая техника, либо новые программные средства).

В – Использование знакомых средств разработки в известной предметной области.

	А	**Б**	**В**
Кн	1÷1,7	1÷0,8	0,7

Использование типовых элементов в разработке.

Кт – коэффициент типовости.

Кт	**Степень применения типовых практических решений**
0,6	>60%
0,7	40–60%
0,8	20–40%
0,9	<20%
1,0	не использовались

Коэффициент сложности Ксл.

	Ксл
1. Связь с другими программными изделиями	0,08
2. Интерактивный режим	0,06
3. Ведение сложной структуры данных	0,07
4. Наличие нескольких характеристик сложности :	
– двух	0,12
– трех	0,18
– более трех	0,26

Разнесение трудоемкости по отдельным этапам разработки:

Используются коэффициенты Тэ=То Кэ

Таким образом, предложенный расчет сложности разрабатываемого ПО состоит из нескольких этапов:

1. Сложность комплекса программ проводится классификация программ по группам сложности (3 группы) и определяются признаки, позволяющие отнести разработку к конкретной группе сложности. (увеличение затрат труда в несколько раз, по сравнению с простейшей).

2. Необходимость использования компонент создаваемого ПО для других разработок, то есть ведется разработка типового ПО.

3. Использование типовых проектных решений (ТПР) при разработке ПО.

4. Использование передовых методов организации разработки. (Структурное программирование, использование формализованных методов при распределении ресурсов, нисходящее проектирование).

5. Уровень автоматизации разработки (использование достаточно современных инструментальных средств, например систем программирования, проблемно–ориентированных систем программирования, генераторы программ, использование удачного текстового редактора для подготовки текстов и документации, средства автоматизации для отладки программ).

6. Тематическая квалификация разработчика.

7. Технологическая квалификация разработчика (опыт использования технических и технологических средств, которые применяются в данной разработке, например: язык программирования, ОС).

8. Квалификация заказчика (опыт заказчика в формулировании технического задания на аналогичные программные продукты и опыт в эксплуатации).

Предложенная методика позволяет с оценки сложности ПО перейти к стоимостным оценкам, что позволяет разработчикам и заказчикам ПО бесконфликтно разрабатывать и внедрять Web-приложения.

Тема 15. Преобразование алгоритмов

С.Ю.Петрик Запутывающее преобразование программного обеспечения с целью его защиты. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Минск, БГУИР. – 2008г.

Из-за того, что нет разработанной модели запутывающего преобразования, нет и универсальных методов, которые имели бы доказанную секретность и могли бы применяться для алгоритмов, реализованных на любом языке программирования. Поэтому на сегодняшний день ведется разработка методов для конкретных представлений программы.

Арсенал методов запутывающего преобразования достаточно широк. По традиции, методы делятся на четыре группы в зависимости от объекта преобразования (Рисунок 15.1)

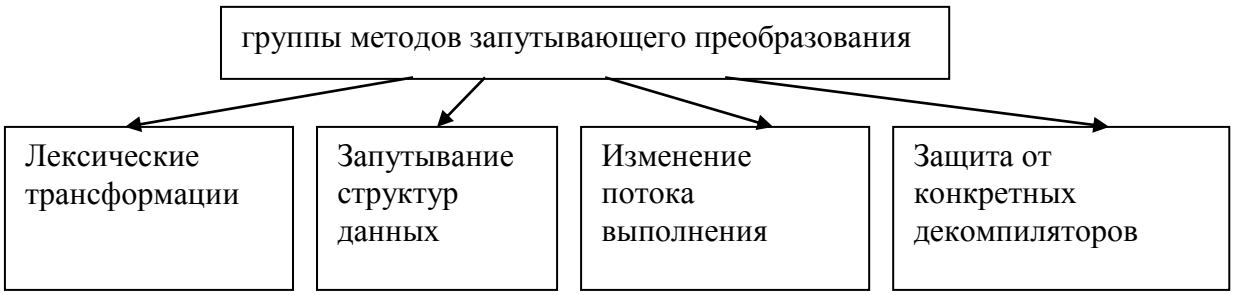


Рис. 15.1 – Группы методов запутывающего преобразования программ

Достаточно подробно методы запутывающего преобразования рассматриваются в ряде работ. Следует отметить, что хорошие результаты дает гибридное использование методов защиты программного обеспечения. И действительно запутывающее преобразование может достаточно надежно «спрятать» водяной знак или алгоритм взаимных проверок на целостность частей программы.

Рассмотрим представленные группы методов подробнее.

Лексические трансформации

Суть этого метода запутывания заключается в изменении словаря программы – использованных в ней идентификаторов.

Листинг 15.1– Исходный код до проведения запутывающего преобразования

```
private Hashtable getFrequency(string fileName)
{
    int readByte;
    FileStream fs = new
```

```
        FileStream(fileName,FileMode.Open,
                                FileAccess.Read,
                                FileShare.None);
    Hashtable frequency = new Hashtable();
    while ((readByte = fs.ReadByte()) != -1)
    {
        if (frequency[readByte] != null)
            frequency[readByte] =
                (int)(frequency[readByte]) + 1;
        else
            frequency.Add(readByte, 1);
    }
    fs.Close();
    return frequency;
}
```

В листинге 15.1 приведен один из методов класса, реализующего функции криптографического кодирования. Этот метод анализирует файл с именем fileName и на выходе возвращает хэш-таблицу frequency, содержащую коды всех символов, встреченных в файле, и их количество.

С.Ю.Петриком был разработан запутывающий кодер Obfuscation Studio. После его использования текст приведенной выше программы принял следующий вид:

Листинг 15.2 – Исходный код после проведения запутывающего преобразования

```
private Hashtable llllllll(string llllllll)
{
    int llllllll;
    FileStream llllllll =
        new FileStream(llllllll,FileMode.Open,
                                FileAccess.Read,
                                FileShare.None);
    Hashtable llllllll = new Hashtable();
    while ((llllllll = llllllll.ReadByte()) != -1)
    {
        if (llllllll[llllllll] != null)
            llllllll[llllllll] =
                (int)(llllllll[llllllll]) + 1;
        else
            llllllll.Add(llllllll, 1);
    }
    llllllll.Close();
    return llllllll;
```

```
}
```

Видно, что код стал значительно более сложным для восприятия человеком (но не компьютером, подпрограмма так же компилируется и выполняется без видимых задержек. Для подтверждения этого приведенный участок программы в обоих представлениях был выполнен 10^7 раз, разницы во времени выполнения обнаружено не было).

У данного метода преобразования есть недостаток – можно выполнить автоматическое обратное преобразование. Для этого также существуют специальные средства. Однако, они только частично делают код понятней, так как очевидно, что первоначальные осмысленные имена вернуть уже невозможно.

Запутывание структур данных

Этот метод производит операции с данными: объединение нескольких скалярных переменных в одну, объединение массивов, разделение одного цельного массива на несколько отдельных и прочее.

Пример такого преобразования, также реализованного с помощью Obfuscation Studio, приведен ниже:

Листинг 15.3 – Исходный код до проведения запутывающего преобразования

```
class Source
{
    public Source()
    { }
    Random r = new Random();
    public void GetEquation()
    {
        int a, b, c;
        int D;
        double x1, x2;
        a = r.Next(10);
        b = r.Next(10) + 10;
        c = r.Next(10);
        D = ResolveX1X2(a, b, c, out x1, out x2);
        if (D >= 0)
            Console.WriteLine("x1=" + x1 +
                "; x2=" + x2);
        else
            Console.WriteLine("No real X found");
    }
    public int ResolveX1X2(int a, int b, int c,
        out double x1, out double x2)
```

```
    { //a*x*x + b*x + c = 0
        x1 = x2 = 0;
        int D;
        D = b * b - 4 * a * c;
        if (D >= 0)
        {
            x1 = (-b + Math.Sqrt(D)) / (2 * a);
            x2 = (-b - Math.Sqrt(D)) / (2 * a);
        }
        return D;
    }
}
```

Приведенная программа вычисляет значения корней квадратного уравнения, коэффициенты для которого сама же генерирует при помощи датчика псевдослучайных чисел. Преобразованный код ниже:

Листинг 15.4 – Исходный код после проведения запутывающего преобразования

```
class Test4
{
    public Test4()
    {
        FillVarArray();
    }
    object[] _1;
    private void FillVarArray()
    {
        _1 = new object[14];
        _1[0] = new Random();
    }

    public void GetEquation()
    {
        _1[1] = ((Random)(_1[0])).Next(10);
        _1[2] = ((Random)(_1[0])).Next(10) + 10;
        _1[3] = ((Random)(_1[0])).Next(10);
        _1[7] = _1[1];
        _1[8] = _1[2];
        _1[9] = _1[3];
        ResolveX1X2();
        _1[4] = _1[13];
        if ((int)_1[4] >= 0)
```

```
            Console.WriteLine("x1=" + _1[5] + "; x2=" +
_1[6]);
        else
            Console.WriteLine("No real X found");
    }

    public void ResolveX1X2()
    { //a*x*x + b*x + c = 0
        _1[10] = _1[11] = 0.0;
        _1[12] = (int)_1[8] * (int)_1[8] - 4 * (int)_1[7]
* (int)_1[9];
        if ((int)_1[12] >= 0)
        {
            _1[10] = (-(int)_1[8] +
Math.Sqrt((int)_1[12])) / (2 * (int)_1[7]);
            _1[11] = (-(int)_1[8] -
Math.Sqrt((int)_1[12])) / (2 * (int)_1[7]);
        }
        _1[5] = _1[10];
        _1[6] = _1[11];
        _1[13] = _1[12];
    }
}
```

Данный метод собирает все поля класса и локальные переменные методов в один массив класса `object`, что позволяет хранить в нем данные любого типа.

Запутывание потока выполнения программы

Методы этого класса основаны на изменении программы таким образом, чтобы злоумышленнику было не очевидно, по какому алгоритму функционирует программа. Один из наиболее часто используемых методов – встраивание в код т.н. «темных» предикатов – ветвящихся конструкций. Пример такого внедрения:

Листинг 15.5 – Исходный код до проведения запутывающего преобразования

```
int method()
{ //a*x*x + b*x + c = 0
 D = b*b - 4*a*c;
 if (D > 0)
 {
   x1 = (-b + Math.Sqrt(D))/(2*a);
   x2 = (-b - Math.Sqrt(D))/(2*a);
 }
```

```
}
```

Метод решает квадратное уравнение при условии, что все используемые переменные объявлены как поля (или свойства) класса.

```
int method1()
{
 for (int i=1; i<4; i++)
 {
  if (i==3)
  {
   if (D > 0)
   {
    for (int j=1; j<8; j++)
    {
     if (j==6) x2 = x2 - D;
     if (j==4) x1 = x1 / (2*a);
     if (j==1) D = Math.Sqrt(D);
     if (j==7) x2 = x2 / (2*a);
     if (j==2) x1 = (-b);
     if (j==5) x2 = (-b);
     if (j==3) x1 = x1 + D;
    }
   }
  }
  if (i==2) D = D - 4*a*c;
  if (i==1) D = b*b;
 }
}
```

Запутывающее преобразование разбило математическую операцию на несколько более мелких и изменило порядок операций, встроив в код специальные предикат (переменную `j`), который определяет последовательность выполнения операторов.

Анализ методов запутывающего преобразования

Дальнейшие исследования понятия запутывающего преобразования привели к пониманию необходимости создания четкой теоретической основы этой науки.

Одной из основных проблем остается сложность оценки эффективности запутывающего преобразования и оценки возможности запутывания определенной программы.

Вводятся следующие понятия:

Действенность (potency) трансформации. Пусть трансформация T такова, что она при применении переводит программу P в представление P'.

Величина *E(P)* определяет сложность программы *P* по какой-либо метрике. Тогда мера возрастания сложности программы *P* после применения трансформации *T* будет определяться как

$$T_{potency} = E(P') / E(P) - 1 \qquad (15.1)$$

и трансформация считается действенной, если $T_{potency} > 0$

Другими словами, действенность трансформации определяет, насколько сложнее стало понять программу взломщику.

Устойчивость (resilience) трансформации. Пусть трансформация *T* такова, что она при применении переводит программу *P* в представление *P'*.

Под устойчивостью понимается комбинация двух мер:

а) затраты программиста – время, необходимое для создания автоматического обратного преобразователя (deobfuscator), который мог бы эффективно снизить действенность трансформации T;

б) затраты обратного преобразователя – время работы обратного преобразователя и затраченная при этом память для эффективного снижения действенности трансформации T.

Вводятся следующие уровни устойчивости в порядке возрастания: тривиальная, слабая, сильная, полная, однонаправленная.

Устойчивость трансформации обозначается $T_{resilience}$ и выражается следующим образом:

$T_{resilience}$ *(P) = однонаправленная,* если по P' невозможно восстановить P (обычно при удалении информации из P), иначе

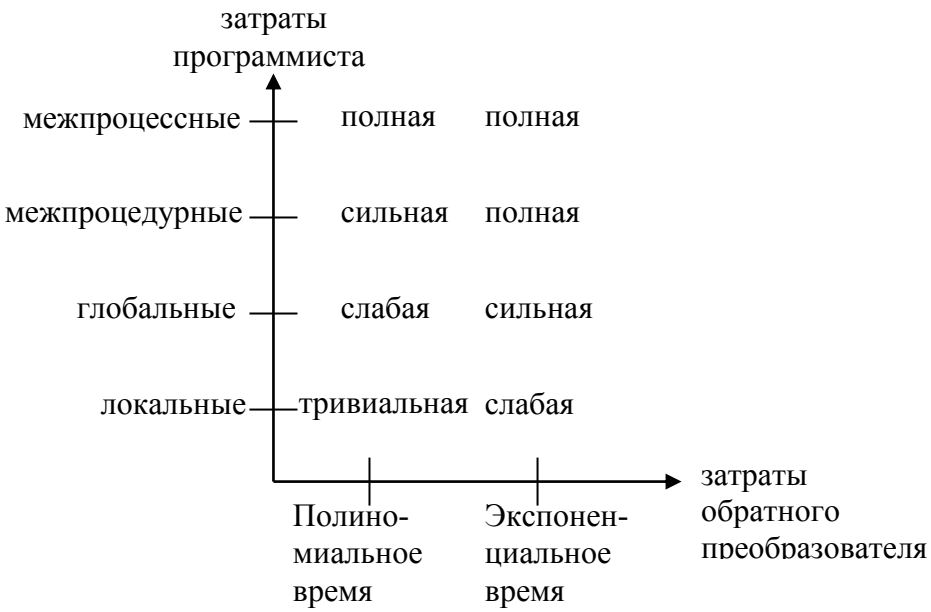


Рисунок 15.2 – Устойчивость трансформации

$T_{resilience}$ *(P) = Resilience (*$T_{затраты\ программиста}$*,* $T_{затраты\ обратного\ преобразователя}$*),* где функция Resilience определяется матрицей, рисунок 15.2. Трансформация называет межпроцессной, если она затрагивает взаимодействие между процессами, межпроцедурной – при влиянии на взаимодействие между

отдельными процедурами, глобальной – если изменяет граф выполнения программы, локальной – если влияет на отдельные блоки программы.

Стоимость (cost) трансформации. Пусть трансформация T такова, что она при применении переводит программу P в представление P'. Тогда T_{cost} – увеличение времени выполнения и затраченного места программой P' относительно P. Стоимость может принимать следующие значения:

$$T_{cost} = \begin{cases} \textit{очень дорогая.}\ \text{Если выполнение P' требует экспоненциально больше ресурсов, чем P.} \\ \textit{дорогая.}\ \text{Если выполнение P' требует } O(n^p),\ p > 1 \text{ ресурсов} \\ \textit{дешевая.}\ \text{Если требуется } O(n) \text{ ресурсов} \\ \textit{бесплатная.}\ \text{Если требуется } O(1) \text{ ресурсов} \end{cases}$$

Для определения действенности трансформации необходимо использование метрик. Некоторое их количество предложено ранее, однако недостаточное для комплексного описания сложности программы. Поиск адекватных метрик – одно из направлений в исследовании запутывающего преобразования.

Еще одним открытым вопросом остается предсказание возможности запутывания программы до непосредственно преобразования. В работе проводится исследование оценки потенциальной возможности преобразования для одного из лексических методов – замены имен идентификаторов, для других групп методов запутывания исследования также ведутся.

Уместным видится сравнение запутывающего преобразования с другими методами защиты интеллектуальной собственности, например шифрованием. Делается вывод о том, что в отличие от шифрования, которое базируется на математической модели и имеет доказанные уровни защищенности (proven security), запутывающее преобразование представляет собой набор методов, относящихся к категории «условной защиты» (fuzzy security). Так алгоритм шифрования RSA силен настолько, насколько слабы, на сегодняшний день, способы факторизации чисел. Методы же запутывания не дают никаких гарантий защиты, и знание алгоритма их действия приводит обычно к разработке противодействия (естественно, что это не относится к однонаправленным методам).

В дальнейшем было проведено исследование и доказано, что наряду с классом потенциально незапутываемых программ существует множество программ для которых запутывающее преобразование возможно.

В результате исследований получен результат, который отвергает возможность идеально спрятать в коде программы хотя бы один байт информации. Это важно для понимания того, что даже если программа не относится к классу незапутываемых программ, описанных в известных источниках, все равно разбор программы – вопрос времени и знания методов, которые использовались для преобразования.

Кроме того, ведутся исследования в области сокрытия факта преобразования программы. Суть состоит в том, чтобы запутывание проходило аналогично применению стеганографических методов: программа должна выглядеть естественно и факт применение автоматического преобразователя не должен бросаться в глаза. Примером такой техники является использование метода замены имен идентификаторов, когда имена заменяются не на бессмысленные последовательности символов, а на слова, имеющие определенный смысл и семантически связанные между собой, но контекст использования этих понятий должен скрывать контекст работы реальной программы.

Тема 16. Обфускация

С.Ю.Петрик Запутывающее преобразование программного обеспечения с целью его защиты. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Минск, БГУИР. – 2008г.

Для оценки сложности программы можно использовать два основных метода. Первый заключается в математическом описании запутанного представления программы и незапутанного. Усилия, которые должны быть затрачены на то, чтобы перевести программу из одного математического представления в другое, и есть сложность программы. Как было сказано выше, модели, которая бы позволила описать такие преобразования, и такие представления еще не создано, поэтому чаще используется оценка сложности по метрикам.

Метрика представляет собой функцию, характеризующую единицу изучения программы. Для процедурного дизайна такой единицей является процедура или их совокупность, для объектно-ориентированного – класс. Для оценки метрик существуют так называемые мета-метрики, описанные в Таблице 16.1.

Таблица 16.1. Мета-метрики

Мета-метрика	Описание
Измерительная шкала (Measurment scale)	Существуют различные шкалы измерения, такие как: • именная • порядковая • интервальная • относительная • абсолютная Обычно значительно проще оперировать метриками, значения которых можно представить в виде конкретных числовых значений (по абсолютной шкале).
Независимость измерений (Measurements independence)	Метрики, которые зависят только от единицы измерения, но не от способа измерения, являются предпочтительными. Пример метрики, не удовлетворяющий этому условию – количество строк программы: строки комментария можно считать или не считать и т.д.
Автоматизация (Automation)	Определяет, поддается ли метрика автоматическому подсчету, полуавтоматическому или может быть измерена только экспертным путем
Цена реализации (Value of implementation)	Определяет, является ли метрика независимой от реализации, т.е. можно ли ее определить до реализации в конкретном языке и стиле программирования
Простота (Simplicity)	Эта мета-метрика определяет, насколько проста метрика с точки зрения ее определения и понимания.
Точность (Accuracy)	Определяет, действительно ли метрика измеряет заявленную характеристику и как полно она это делает.

Составлены таблицы, показывающие, какое значение мета-метрик соответствует большинству существующих метрик.

Задача отображения сложности понимания исходного кода программы в одной единственной метрике была оставлена как не имеющая решения с точки зрения здравого смысла. Можно провести простую аналогию: чтобы описать пустую картонную коробку, необходимы такие величины как ширина, длина, высота и масса; первые три можно представить в виде интегральной оценки объема, однако объем не может дать никакого представления о массе коробки. Очевидно, что в некоторых случаях необходимы знания о геометрии коробки, однако для многих задач вполне хватит двух характеристик: объема и массы.

Была поставлена задача: из существующего множества метрик отобрать только те, которые отличаются репрезентативностью и описывают сложность

программы максимально полно. Фактически, для программы необходимо отобрать такие метрики, которые скажут о ней не меньше, чем объем и масса говорят о картонной коробке. Решение этой задачи – еще одно направление, которое связано с запутывающим преобразованием.

Характеристика существующих запутывающих преобразователей

За последние годы появилось достаточно много запутывающих преобразователей для программ, написанных для платформы .NET (Aspose Obfuscator, Decompiler.NET Obfuscator, Demeanor Obfuscator, Deploy.NET, Desaware QND Obfuscator, Dotfuscator, DotNet Protector, Dynu .NET Obfuscator, Goliath .NET Obfuscator, Lesser Software LSW IL-Obfuscator, Obfuscating .NET, Salamander .NET Obfuscator, Skater .NET Obfuscator, Spices .NET Obfuscator, Xenocode Obfuscator), однако многие из них выполняют только символьное запутывание – изменение имен идентификаторов, их относят к преобразователям первого типа. Более функциональные – преобразователи второго типа – выполняющие запутывание потока выполнения и данных. Опишем самые популярные из преобразователей: Dotfuscator Professional Edition (разработка компании PreEmptive Solution), Salamander .NET obfuscator (Remotesoft) и Spices.Net (9Rays.Net).

Dotfuscator Professional Edition

Этот запутывающий преобразователь достаточно хорошо знаком разработчикам для платформы .NET, т. к. его упрощенная версия (Community Edition) встроена в студию разработки Visual Studio .NET. Кроме встроенной версии этого запутывающего преобразователя существует и отдельная версия, не привязанная к Visual Studio (Рисунок 16.1).

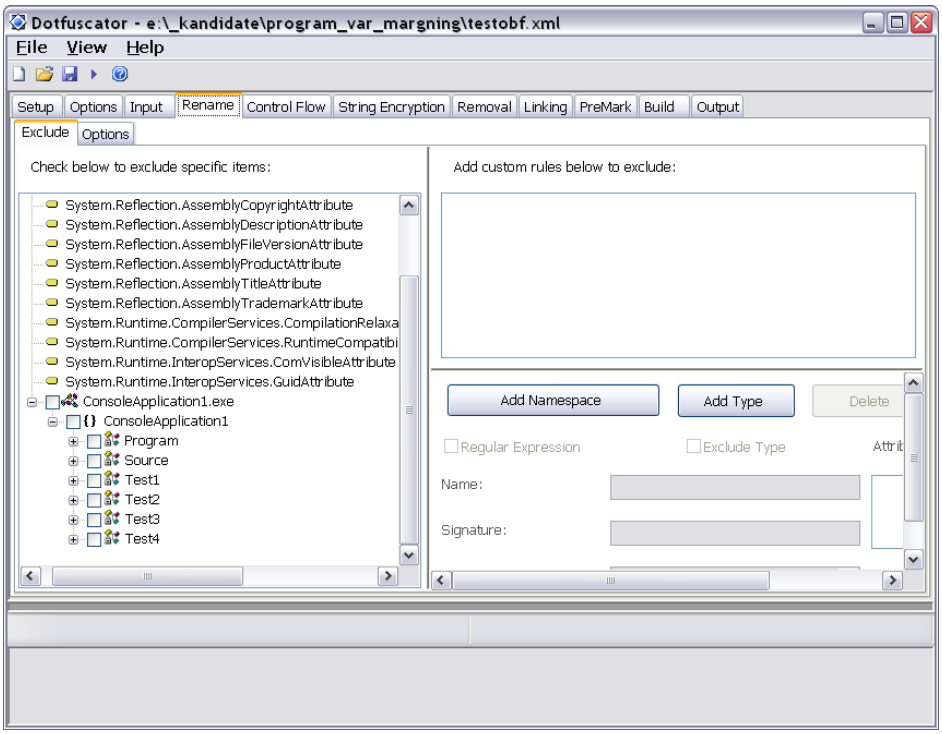


Рисунок 16.1 – Dotfuscator Professional Edition

Обе версии (встроенная и отдельная) предоставляют эквивалентные возможности.

Детализированная документация к продукту позволяет пользователю получить исчерпывающую информацию по работе с запутывающим преобразователем.

Dotfuscator – полнофункциональный запутывающий преобразователь, он поддерживает как лексический метод запутывания программ, так и различные методики изменения потока выполнения. Одной из отличительных черт этого преобразователя является использование им так называемого «overload induction engine» метода переименования. Его суть заключается в том, что одно и то же имя имеют как можно больше сущностей в программе.

Например, структура программы имеет следующий вид:

Листинг 16.1 – Исходный код до проведения запутывающего преобразования

```
namespace program_simple_test
{
	internal class Program
	{
		// Methods
		public Program();
		private static void Main(string[] args);
	}

	internal class Source
	{
		// Methods
		public Source();
		public void GetEquation();
		public int ResolveX1X2(int a, int b, int c,
out double x1, out double x2);

		// Fields
		private Random r;
	}
}
```

После использования метода «overload induction» структура примет следующий вид:

Листинг 16.2 – Исходный код после проведения запутывающего преобразования

```
internal class a
```

```
{
        // Methods
        public a();
        private static void a(string[] A_0);
}

internal class b
{
        // Methods
        public b();
        public void a();
        public int a(int A_0, int A_1, int A_2, out double
A_3, out double A_4);

        // Fields
        private Random a;
}
```

Как видно, практически все сущности получили название «a», что усложняет для человека (но не для компьютера) понимание программы.

Другой важной особенностью Dotfuscator является его способность шифровать строки таким образом, чтобы в программе нигде не было текста, который смог бы прочитать и понять человек. Ниже приведен пример шифрования:

Листинг 16.3 – Исходный код до проведения запутывающего преобразования

```
public static void a()
{
    a a1 = new a();
    Console.WriteLine("Enter password: ");
    string text1 = Console.ReadLine();
    if (!text1.Equals(a1.a))
    {
        Console.WriteLine("Incorrect password.");
    }
    else
    {
        Console.WriteLine("Correct password.");
    }
    Console.ReadLine();
}
```

Листинг 16.4 – Исходный код после проведения запутывающего преобразования

```
public static void a()
{
    int num1 = 13;
    a a1 = new a();
    Console.WriteLine(a("\uf3b5\ud6b7\uceb9\uccbd\ue0bf\u
b2c1\ua5c3\ub5c5\ubbc7\ubdc9\ua3cb\ubccd\ub4cf\ue8d1\uf4d
3", num1));
    string text1 = Console.ReadLine();
    if (!text1.Equals(a1.a))
    {
    Console.WriteLine(a("\uffb5\ud6b7\ud3bb\uccbd\ub2bf\u
a7c1\ua7c3\ub2c5\ue8c7\ubac9\uadcb\ubdcd\ua3cf\ua5d1\ubbd
3\ua4d5\ubcd7\uf4d9", num1));
    }
    else
    {
    Console.WriteLine(a("\uf5b5\ud7b7\uc8b9\ucebb\ua3bf\u
b6c1\ue4c3\ub6c5\ua9c7\ub9c9\ubfcb\ub9cd\ubfcf\ua0d1\ub0d
3\uf8d5", num1));
    }
    Console.ReadLine();
}
```

Дешифрование строк осуществляется методом «a». При кажущейся стойкости такого подхода необходимо отметить его относительную слабость: для дешифрования строк нужно всего лишь декомпилировать и применить метод «a» для всех строк в программе, что вернет ее к исходному виду.

Кроме возможностей по запутыванию кода Dotfuscator предоставляет возможность внесения в программу водяного знака при помощи отдельной вспомогательной программы Premark.

По желанию пользователя Dotfuscator может сгенерировать специальный файл в формате XML, в котором будут описаны запутывающие преобразования, одной из основных частей такого файла является карта переименований, в которой каждому новому (запутанному) имени сопоставляется исходное имя.

Salamander .NET obfuscator

Другой чрезвычайно популярный запутывающий преобразователь – Salamander .NET obfuscator – предоставляет не только функцию запутывания, но и возможность декомпиляции сборок, что позволяет просмотреть результат преобразования программы (Рисунок 16.2)

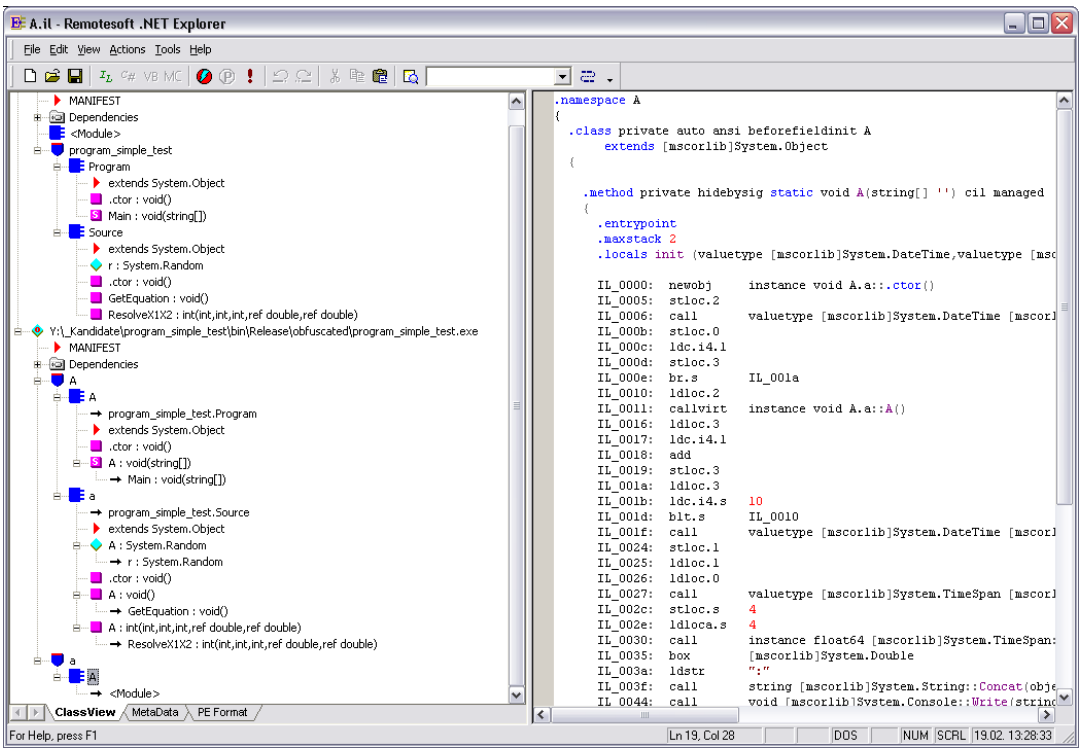


Рисунок 16.2 – Salamander .NET obfuscator

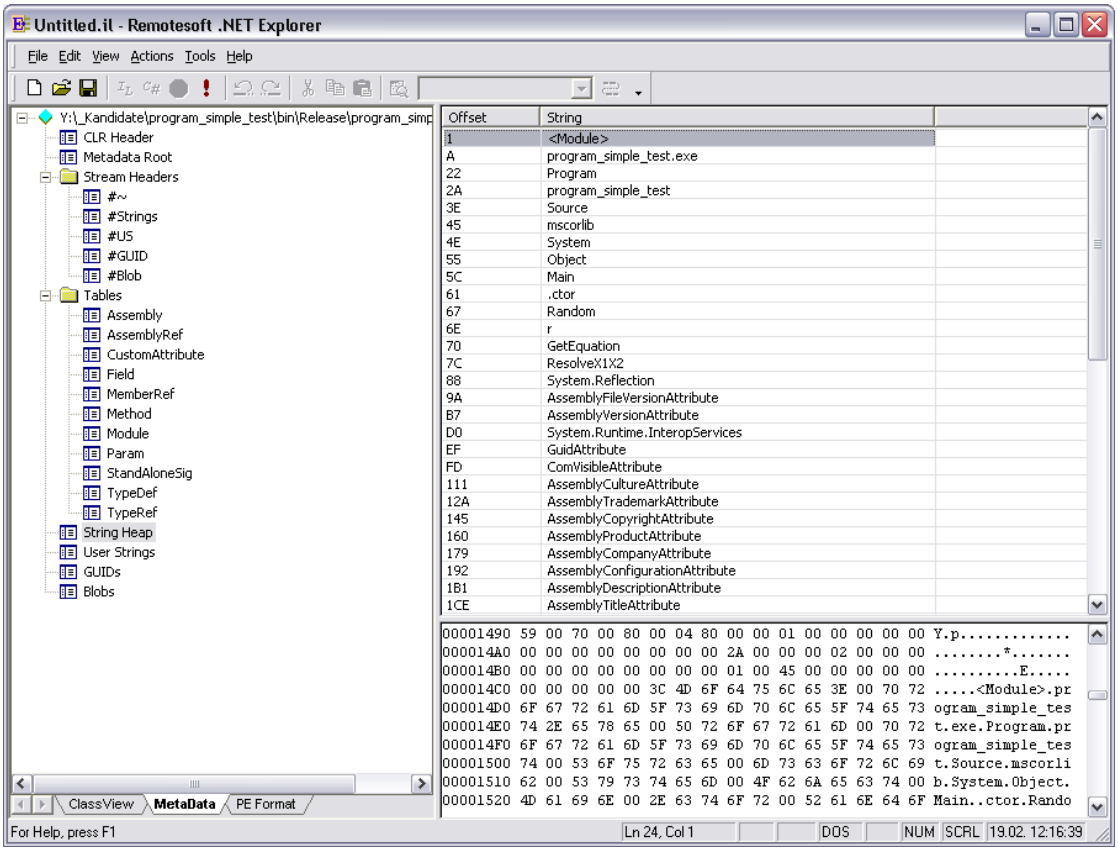


Рисунок 16.3 – Salamander .NET obfuscator

Кроме непосредственно запутанного и исходного кода Salamander .NET obfuscator позволяет исследовать метаданные и структуру PE-файла (Рисунок 16.3)

Запутывающий преобразователь предоставляет довольно широкие возможности по настройке и реализует практически все популярные методы запутывания программ, в том числе и перегрузка имен, о которой сказано выше. Метод, который не реализован – шифрование строк, что является существенным недостатком.

Salamander .NET obfuscator позволяет создавать карты соответствий между исходными и запутанными именами переменных.

Spices.NET

Многофункциональный запутывающий кодер с возможностью декомпиляции и внедрения водяных знаков – Spices.NET – предоставляет очень широкие возможности по настройке методов запутывания и шифрования (Рисунок 16.4)

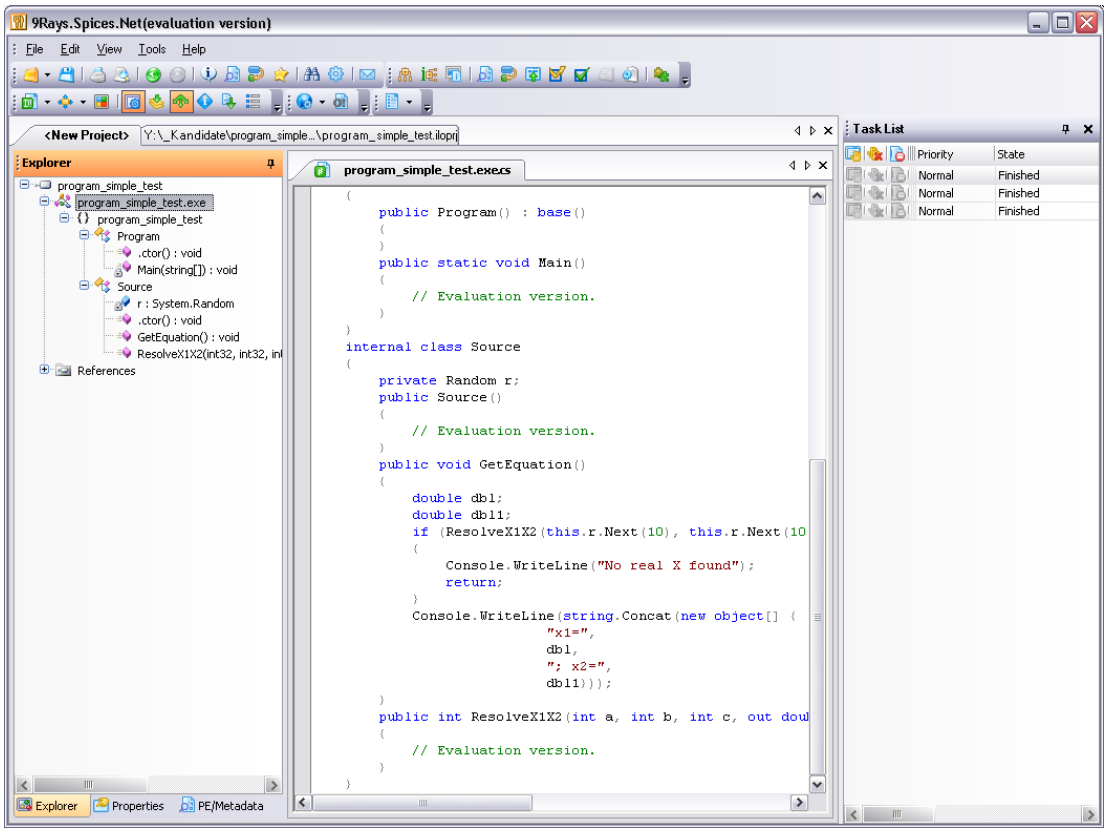


Рисунок 16.4 – Spices.NET

С точки зрения процесса запутывания Spices .Net предоставляет следующие возможности:

- Защита от дизассемблеров ILDASM, Anakrino, Reflector, Remotesoft Salamander Decompiler

- Два режима обработки строк: скрытие строк в "обертках" и шифрование строк.
- Несколько режимов переименования классов, методов, и пространств имен.
- Использование технологии генерации наиболее коротких имен для замены.
- Реализация cross-obfuscation - работа с набором сборок.

Надо сказать, что Spices .Net - это один из немногих преобразователей, проверяющих сборку после запутывания. Однако, к сожалению, это не гарантирует работоспособность запутанного приложения, так, во время изучения этого запутывающего преобразователя при определенной настройке запутывающих методов была получена неработоспособная сборка, что говорит о недостаточной надежности запутывающего преобразователя.

Сравнение существующих запутывающих преобразователей.

Как правило, запутывающие преобразователи оцениваются с точки зрения их функциональности. Так, для приведенных выше преобразователей составлена таблица, позволяющая сделать некоторые выводы о возможностях этих запутывающих преобразователей:

Таблица 16.2 Сравнение различных запутывающих преобразователей

Продукты / Возможности	Dotfuscator for .NET Professional Edition v3.0	Salamander .NET Obfuscator v2.0.1	Spices.Obfuscator v5.1.2.4
Entity renaming	X	X	X
Control of Naming Conventions	X	X	X
Overloaded Renaming	X	X	X
Control Flow Obfuscation	X	X	X
Removal of Unused Members	X	X	–
String Encryption	X	–	X
Include/Exclude Members	X	X	X
Rules-based Configuration	X	–	X
Declarative Obfuscation	X	X	X
Strong Name Re-signing	X	X	X
Incremental Obfuscation	X	X	X
Breaks ILDASM	–	X	X
Software Watermarking	X	–	X

В приведенной таблице приведен список основных функций, поддерживаемых современными запутывающими преобразователями, рассмотрим их подробнее.

Entity renaming – лексический метод запутывания, рассмотренный выше.

Control of Naming Conventions – управление переименованием, выбор конкретной стратегии переименования (использование для этого непечатных символов или длинных строк).

Overloaded Renaming – перегрузка имен, т.е. стратегия переименования, при использовании которой максимальное количество сущностей программы получают одно и то же имя.

Control Flow Obfuscation – изменение потока выполнения. Каждый из запутывающих кодеров реализует свои методы (чаще всего запатентованные) для этой цели. Например, в Spices.Obfuscator используется технология Spices.Anonymizer, которая в данный момент находится в состоянии патентования.

Removal of Unused Members – удаление неиспользуемых методов, действительно, запутывающие преобразователи часто стремятся скрыть свое негативное влияние на объем программы за счет некоторых простых оптимизационных преобразований.

String Encryption – шифрование строк, пример использования этого метода показан выше в описании запутывающего преобразователя Dotfuscator.

Include/Exclude Members – возможность включать и исключать сущности из списка подлежащих запутыванию.

Rules-based Configuration – конфигурация, основанная на правилах, указывающих, например, какой метод использовать раньше другого.

Declarative Obfuscation – начиная с версии .NET 2.0 компания Microsoft встроила в библиотеку классов специальные атрибуты, при помощи которых можно указать, какие сущности и в каком объеме подвергать запутыванию. Эти атрибуты должны интерптерироваться запутывающими преобразователями.

Strong Name Re-signing – возможность подписать сборку сильным именем.

Incremental Obfuscation – подразумевает возможность создания специальных карт переименований сущностей, которые впоследствии могут быть применены для повторного запутывания некоторых частей приложения во избежание конфликтов с ранее запутанными частями.

Breaks ILDASM – означает изменение сборки таким образом, чтобы ее невозможно было дизассемблировать при помощи стандартной программы ILDASM.

Software Watermarking – внедрение запутывающим преобразователем водяных знаков.

Как видно, все три рассматриваемые запутывающие преобразователи поддерживают практически все основные возможности запутывания и некоторые дополнительные свойства. Однако качество преобразования оценить только из количества функций не представляется возможным.

С другой стороны, разработчики в документации к своим продуктам и на своих сайтах не приводят теоретического обоснования использования тех или иных методов, а их алгоритмы являются закрытыми и защищенными патентами. Это приводит к тому, что пользователи запутывающих преобразователей не только не могут оценить, насколько эффективно они защитили свое программное обеспечение, но не могут быть окончательно уверенными, что эта защита не нарушила функциональности их продуктов. Как уже было упомянуто выше, в процессе изучения преобразователя Spices.Obfuscator довольно простая сборка была запутана таким образом, что потеряла возможности выполнения.

Кроме того, декларируемая возможность внедрения в программу водяных знаков, например, в Spices.Obfuscator, является примитивным добавлением атрибута сборки с говорящим именем `SoftwareWatermark`, который никак не защищен и распознается при помощи декомпилятора .NET Reflector.

Еще одним важным недостатком существующих запутывающих преобразователей заключается в том, что они не оценивают потери во времени выполнения программы и в ее объеме, что может быть весьма существенным для использующего запутывание своих продуктов разработчика.

Тема 17. Доказательство с нулевым знанием

Поводом для данной темы может послужить давняя криптографическая проблема обмена сведениями взаимно недоверяющих друг другу объектов с помощью средств обмена сообщениями, где каждый объект хочет раскрыть другому как можно меньше своих секретов. Например, предположим, что объект ***A*** хочет убедить объект ***B*** в том, что он знает разложение на множители (факторизацию) RSA модуля $n=p*q$. Конечно, ***A*** может просто показать p и q (это называется *доказательством с максимальным раскрытием*). Однако ***A*** по «криптографической» причине не хочет так поступать. Так как же ***A*** продолжить убеждать ***B*** без непосредственного раскрытия факторизации? Другими словами, является ли возможным для ***A*** доказать ***B***, что он знает факторизацию n, но не раскрывая чего-либо вне этого утверждения?

Доказательства с нулевым знанием идеально подходят для идентификации владельца ***A*** кредитной карточки (удостоверения личности (*ID* card), электронного счета), у которого имеется номер *PIN* или пароль *S*, позволяя, таким образом, ***A*** доказать продавцу ***B*** знание *S*, не раскрыв при этом ни одного бита *S*.

Протокол идентификации Feige-Fiat-Shamir

В данном протоколе доказывающий ***A*** хочет доказать проверяющему (верификатору) ***B*** знание некоторого секрета S_A. Аббревиатура *TTP* будет означать третье доверенное лицо.

Подготовка:

1. *TTP* выбирает RSA модуль $n=p*q$ и делает его открытым для всех, но p и q хранятся в секрете. Также выбирается параметр $\alpha \in \boldsymbol{N}$.
2. ***A*** и ***B*** выбирают, соответственно, секретные значения S_A, $S_B \leq n-1$. На их основе вычисляются $T_A=S_A^2 \pmod n$ и $T_B=S_B^2 \pmod n$. Затем *TTP* регистрирует S_A и S_B как закрытые ключи, где T_A и T_B открытые ключи соответственно ***A*** и ***B***.

Протокол доказательства с нулевым знанием:

1. ***A*** выбирает число $m \in \boldsymbol{N}$, называемое вручением (*commitment)*, причем $m \leq n-1$, и отправляет *B* число $w=m^2 \bmod n$, называемое свидетельством (*witness)*.
2. ***B*** выбирает бит $c \in \{0,1\}$, называемый вызовом *(challenge)*, и отправляет его ***A***.
3. ***A*** вычисляет значение $r=m\ S_A^c \pmod n$, называемое ответом *(response)*, и отправляет его ***B***.
4. ***B*** вычисляет $r^2 \pmod n$ и выполняет проверку равенства

$$r^2=w\ T_A^c \pmod n.$$

Если оно выполняется, то параметр α принимает значение $\alpha-1$ и протокол выполняется снова с шага 1 при условии, что $\alpha>0$. Если $\alpha=0$, тогда выполнение протокола заканчивается и ***B*** считает доказательство правильным **(**принимает доказательство). Если же неравенство не выполняется, т.е. $r^2 \neq w\ T_A^c \pmod n$, то протокол завершается и ***B*** считает доказательство неверным (отклоняет доказательство).

Предположим, что мошенник ***E*** пытается сыграть роль ***A***. Тогда ***E*** мог бы обмануть, выбрав любое значение $m \leq n-1$ и отправив ***B*** свидетельство $w=m^2 \bmod n$. Если ***B*** затем отправляет вызов $c=0$, то ***E*** отправил бы правильный ответ $r=m$ и этап 4 будет пройден. Но если в качестве вызова будет послан $c=1$, тогда ***E***, который не знает корень квадратный S_A от T_A , не сможет ответить правильно. Следовательно, вероятность, что мошенничество ***E*** не будет обнаружено после первой итерации, равна ½, после второй – ¼, т.д. Чтобы уменьшить вероятность подобного обмана к допустимой вероятности $2^{-\alpha}$, выполняются повторения протокола достаточно большое число раз α. Таким образом, протокол Feige-Fiat-Shamir является доказательством с нулевым знанием значения корня квадратного из T_A, т.е. секретного значения S_A.

Пример 17.1.

Подготовка:

1. RSA модуль $n=p*q=5\times7=35$ выбран *TTP* и открыт для всех, но $p=5$ и $q=7$ секретны. Выбран параметр $\alpha=2$.
2. ***A*** выбрал секретное значение $S_A=11$.

$T_A=S_A^2 \pmod n=11^2 \bmod 35=16$. *TTP* зарегистрировал $S_A=11$ как закрытый ключ, а $T_A=16$ как открытый ключ.

Протокол доказательства с нулевым знанием:

1. ***A*** выбирает вручение m=3, причем m=3≤ n-1=34, и отправляет ***B*** свидетельство $w=m^2 \bmod n=3^2 \bmod 35= 9$**.**
2. ***B*** выбирает вызов c=0 и отправляет его ***A***.
3. ***A*** вычисляет ответ $r=m\ S_A^c(\bmod n)=3\times11^0 \bmod 35 = 3$ и отправляет его ***B***.
4. ***B*** вычисляет $r^2(\bmod n)=3^2 \bmod 35=9$. Так как результат $wT_A^c(\bmod n)=9\times16^0 \bmod 35=r^2=9$, то α принимает значение α-1=2-1=1 и если $\alpha=1>0$, то протокол выполняется с шага 1.
5. ***A*** выбирает вручение m=23, причем m=23≤ n-1=34, и отправляет ***B*** свидетельство $w=m^2 \bmod n=23^2 \bmod 35= 4$.
6. ***B*** выбирает вызов c=1 и отправляет его ***A***.
7. ***A*** вычисляет ответ $r=m\ S_A^c(\bmod n)=23\times11^1 \bmod 35 = 8$ и отправляет его ***B***.
8. **B** вычисляет $r^2(\bmod n)=8^2 \bmod 35=29$. Так как результат $wT_A^c(\bmod n)=4\times16^1 \bmod 35=29=r^2=29$, то α принимает значение α-1=1-1=0. Так как $\alpha=0$, то выполнение протокола завершается и ***B*** считает доказательство верным.

Этот протокол является представителем большого класса *трехшаговых протоколов доказательства с нулевым знанием* (***Three-move, Zero-knowledge Protocols)***. В таких протоколах ***A*** отправляет свидетельство, ***B*** отвечает вызовом, ***A*** отправляет ответ. Одно повторение этих «шагов» называется *раундом*. В данном протоколе существует скрытый фактор случайности, когда ***A*** выбирает закрытый параметр вручение *m* из некоторого предопределенного набора. Затем ***A*** вычисляет связанное с ним (открытое) свидетельство *w*. Эта начальная случайность гарантирует, что итерации протокола последовательны и независимы, именно это отличает один раунд протокола от другого. Также это устанавливает набор «вопросов», на которые ***A*** сможет ответить, поэтому последующие ответы ***A*** ограничены. Данный вариант протокола означает, что только доказывающий ***A,*** зная секрет *S*, способен отреагировать на все вызовы правильными ответами, из которых ни один не дает информации об *S*.

Процесс, в котором ***A*** определяет набор вопросов, а ***B*** выбирает вопросы, например (1)-(2) в протоколе Feige-Fiat-Shamir, является случаем так называемого протокола ***разрезать и выбрать***. Эта терминология происходит из классического протокола честного деления чего-либо между двумя людьми. Таким образом, ***A*** делит объект пополам, а ***B*** выбирает одну из половин себе, оставляя другую половину для ***A.*** Также процедура (2)-(3) шагов протокола Feige-Fiat-Shamir, учитывающая свидетельство из шага (1), является случаем ***протокола вызова-ответа***. В подобных протоколах из соображений безопасности необходимо, чтобы ***A*** отвечал на один вызов для данного свидетельства, а свидетельства не повторялись.

Главное ограничение предыдущего алгоритма заключается в выполнении двух требований при выборе значений открытых ключей T_A и T_B.

1. значения T_A и T_B должны удовлетворять равенству $x^2=Tj \bmod n$.

2. для Tj должно существовать инверсное значение $Tj^{-1} \bmod m$.

Рассмотрим случай для $n=35$.

Все возможные значения $Tj \in \{1,4,9,11,14,15,16,21,25,29,30\}$; необходимо упомянуть, что значения $Tj \in \{14,15,21,25,30\}$ не имеют инверсных значений.

Расширением алгоритма является применение пользователем ***A*** нескольких как открытых, так и закрытых ключей. Тогда пользователь ***A*** вычисляет *ответ*:

$r=m \times (S_{A1}^{c1} \times S_{A2}^{c2} \times S_{A3}^{c3} \times \ldots \times S_{Ak}^{ck}) (mod\ n)$, учитывая как k секретных ключей, так и случайную строку бит $c1,c2,c3,\ldots,ck$, и отправляет его ***B***.

Пользователь ***B*** в этом случае вычисляет:

$r^2 (mod\ n)$ и $w \times (T_{A1}^{c1} \times T_{A2}^{c2} \times T_{A3}^{c3} \times \ldots \times T_{Ak}^{ck}) (mod\ n)$, а затем выполняет сравнение

$r^2 (mod\ n) = w \times (T_{A1}^{c1} \times T_{A2}^{c2} \times T_{A3}^{c3} \times \ldots \times T_{Ak}^{ck}) (mod\ n)$.

Протокол идентификации Guillou-Quisquater

Пусть ***A*** – это электронная пластиковая карта (***smart card***), которая хочет доказать свою законность (***validity***) устройству контроля (верификатору) ***B.*** Идентификация ***A*** представляет собой длинную строку I – открытый ключ для данной карты. Открытые параметры протокола: $n=p*q$, где p и q – секретные; значение V и I. Закрытым является параметр G, значение которого удовлетворяет равенству:

$$I \times G^V = 1 \bmod n$$

Smart-карта ***A*** должна доказать, что она знает значение G.

Выполняется протокол:

1. ***A*** генерирует целое число r, где $1 < r \le n-1$, вычисляет значение $T=r^V \bmod n$ и отправляет его ***B***.
2. ***B*** генерирует целое число d, где $1 < d \le n-1$, и отправляет его ***A***.
3. ***A*** вычисляет $D=r \times G^d \bmod n$ и отправляет ***B***.
4. ***B*** вычисляет $T'=D^V \times I^d \bmod n$

В силу следующих соотношений:

$$T'=D^V \times I^d \bmod n=(rG^d)^V \times I^d \bmod n=r^V (I \times G^V)^d \bmod n=r^V \bmod n=T$$

это равенство истинно для случая $I \times G^V = 1 \bmod n$.

ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Контрольные работы

Контрольная работа №1

Указания по выбору варианта

Рабочей программой дисциплины «Теория информации» предусмотрено выполнение одной контрольной работы. Контрольная работа состоит из теоретической и практической части. В теоретической части студент должен обстоятельно представить теорию, касающуюся темы контрольной работы. Вторая часть работы практическая. В этой части необходимо выполнить программную реализацию рассматриваемого алгоритма (метода, схемы) согласно заданной темы контрольной работы, используя любую программную среду (Delphi, Visual Studio, eclipse и др.).

Контрольная работа должна быть оформлена в соответствии с общеустановленными нормами и правилами, предъявляемыми к выполнению контрольных работ.

Приблизительный объем контрольной работы – 15-25 страниц печатного текста. При разработке теоретических вопросов необходимо пользоваться несколькими литературными источниками. Списывание текста вопроса из учебников и других источников не допускается.

Тема контрольной работы выдается каждому студенту индивидуально. Если по теме контрольной возникнут вопросы, то обращаться к тьютору. Список тем контрольных работ приведен в таблице 1.

Таблица 1

Варианты контрольных заданий

1	Алгоритм сжатия данных. Алгоритм Алгоритм Зива-Лемпеля.
2	Алгоритм сжатия данных. Алгоритм сжатия данных с использованием преобразования Барроуза-Вилера.
3	Алгоритм сжатия данных. Статический алгоритм Хафмана.
4	Алгоритм сжатия данных. Метод Шеннона-Фано.
5	Блочные системы шифрования. Стандарт шифрования DES.
6	Блочные системы шифрования. Стандарт шифрования AES.
7	Блочные системы шифрования. Алгоритм шифрования IDEA.
8	Блочные системы шифрования. Алгоритм шифрования RC6.
9	Блочные системы шифрования. Алгоритм Шифрования BLOWFISH.
10	Блочные системы шифрования. Алгоритм шифрования ГОСТ 28147-89.
11	Потоковые системы шифрования. Алгоритм A5.
12	Потоковые системы шифрования. Алгоритм RC4.
13	Потоковые системы шифрования. Алгоритм SEAL.
14	Открытая система распределения ключей Деффи и Хэллмана.

15	Асимметричные системы шифрования. Криптосистема Эль-Гамаля.
16	Асимметричные системы шифрования. Криптосистема Рабина.
17	Асимметричные системы шифрования. Криптосистема RSA.
18	Асимметричные системы шифрования. Криптосистемы типа рюкзак.
	Асимметричные системы шифрования. Криптосистемы на основе эллиптических кривых.
19	Эллиптическая открытая система распределения ключей.
20	Эллиптическая криптосистема Менезеса и Ванстоуна
21	Электронная цифровая подпись на базе симметричных криптографических алгоритов.
22	Электронная цифровая подпись. Схема быстрой цифровой сигнатуры Шамира.
23	Электронная цифровая подпись. Схема электронной цифровой подписи RSA.
24	Электронная цифровая подпись. Схема электронной цифровой подписи DSS.
25	Электронная цифровая подпись. Схема электронной цифровой подписи на основе эллиптических кривых ECDSA.
26	Электронная цифровая подпись. Отечественный стандарт цифровой подписи ГОСТ 3410.
27	Слепая электронная цифровая подпись.
28	Групповая электронная цифровая подпись.
29	Алгоритмы доверенной электронной цифровой подписи (прокси).
30	Хеширование с использованием алгоритма DES.
31	Функция хеширования SHA-1.
32	Функция хеширования SHA-2.
33	Функции хеширования ГОСТ Р34.11-94.
34	Функции хеширования MD5.
35	Алгоритмы доказательств с нулевым знанием. Алгоритм Фиата-Шамира.
36	Алгоритмы доказательств с нулевым знанием. Алгоритм Шнорра.
37	Алгоритмы доказательств с нулевым знанием. Алгоритм Гиллу-Кискатра.
38	Алгоритмы распределения ключей. Протокол Нидхейма-Шредера.
39	Алгоритмы распределения ключей. Протокол Отвэй-Риса.
40	Схемы совместного использования секрета. Схема Лагранжа.
41	Схемы совместного использования секрета. Схема Блекли.

Теоретическая часть

1. Теоретический раздел, в котором представлены теоретические и алгоритмические основы конкретного алгоритма, метода или схемы защиты или преобразования информации, история его появления и развития и основные

способы применения. А именно данный раздел должен включать следующие разделы:

1.1. Введение (1-2 стр.). Во введении дается общее описание алгоритма, метода или схемы, описывается цели его использования и области его применения.

1.2. История появления и развития данного алгоритма (метода, схемы) (1-2 стр.). В данной части дается даты его появления, также можно привести интересные моменты из истории применения алгоритма (метода, схемы).

1.3. Описание самого алгоритма (метода, схемы) составляет основную часть (4-5 стр.) контрольной работы. В этой части дается описание алгоритма (метода, схемы), математические модели алгоритма (метода, схемы), блок-схемы выполнения, процедуры на псевдокоде и другие необходимые данные.

1.4. Основные достоинства и недостатки описываемого в контрольной работе алгоритма (метода, схемы). Дается сравнение с похожими алгоритмами (методами, схемами), его преимущества по сравнению с аналогами (2-3 стр.). Также рассматриваются его слабые места.

1.5. Применение на практике данного алгоритма (метода, схемы) (1-2 стр.). Написать про реальные приложения, компании и организации, в которых применяется данный алгоритм (метод, схема). Особенности применения.

Практическая часть

Практический раздел, в котором представлена практическая реализация (4-5 стр.) на любом языке программирования. Код написанной программы дается в приложении, а в самом разделе приводятся примеры работы программы, возможны скриншоты и другой материал.

Типовое содержание контрольной работы:

- титульный лист. На титульном листе необходимо указать фамилию, имя и отчество студента, номер выбранной темы и название темы, номер группы.
- содержание;
- основная часть (структура основной части приведена выше);
- список использованных источников (включая электронные источники);
- приложение.

Объем контрольной работы не менее 15(!) страниц без приложения.

Методические указания по порядку выполнения контрольной работы

Перед выполнением контрольной работы студенты должны изучить соответствующий раздел курса по рекомендованному списку литературы. Разрешается использовать электронные источники (www.wikipedia.org, www.intuit.ru и др). Важно отметить, что вся информация должна быть

актуальной на сегодняшний день. Студентам необходимо изучить не только ту часть раздела, где описывается выбранный алгоритм, но и те части, которые посвящены схожим алгоритмам и методам.

На основе изученного материал представить программную реализацию рассматриваемого алгоритма (метода, схемы), используя любую программную среду (Delphi, Visual Studio, eclipse и др.).

Литература для выполнения контрольной работы

1. Блейхут Р. Теория и практика кодов, кодирующих ошибки. – М.: Мир, 1986.
2. Брассар Ж. Современная криптология. – М.: издательско-полиграфическая фирма ПОЛИМЕД, 1999.
3. Виноградов В.В. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981.
4. Венбо М. Современная критпография. Теория и практика. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005.
5. Гинзбург А.И. Пластиковые карты. Изд. "Питер", 2004.
6. Грибунин В.Г., Цифровая стеганография, СОЛОН-Пресс, 2002.
7. Деднев М.А., Дыльнов Д.В. Защита информации в банковском деле и электронном бизнесе. – М.: Кудиц-Образ, 2004.
8. Каган И. М. Прикладная теория информации. – М.: Радио и связь, 1981.
9. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ: В 3–х томах. Получисленные методы. Перевод с английского. – М.: Мир. Т.2.
10. Колесник В. Д., Полтырцев Г.Ш. Курс теории информации. – М.: Наука, 1982.
11. Кричевский Р. Е. Сжатие и поиск информации. – М.: Радио и связь, 1989.
12. Лидл Р., Нидеррайтер Т. Конечные поля. – М.: Мир, 1988.
13. Молдовян Н.А., Молдовян А.А. Введение в криптосистемы с открытым ключом: Проблематика криптографии; элементы теории чисел; двухключевые криптосистемы и др.: Учебное пособие для вузов. – СПб.: Издательство БВХ–Петербург, 2005.
14. Романец Ю.В., Тимофеев П.А., Шаньгин В.Ф. Защита информации в компьютерных системах и сетях. – М.: Радио и связь, 1999.
15. Свирид Ю. В. Основы теории информации. – Мн: БГУ, 2003.
16. Стратонович Р. Л. Теория информации. – М.: Сов. радио, 1975.
17. Смарт Н. Криптография. – М.: Техносфера, 2005.
18. Харин Ю.С., Агиевич С.В. Компьютерный практикум по математическим методам защиты информации. – Минск: БГУ, 2001.
19. Харин Ю.С., Берник В.И., Матвеев Г.В. Математические основы криптологии. – Минск: БГУ, 1999.
20. Харин Ю.С., Берник В.И., Матвеев Г.В., Агиевич С.В. Математические и компьютерные основы криптологии. – Минск: Новое Знание, 2003.

21. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Издательство иностранной литературы. – М.: 1963.
22. Шнайер Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си. – М.: ТРИУМФ, 2002.
23. Шнайер Б., Фергюссон Н., Практическая криптография. – М.: компьютерное издательство «Диалектика», 2005.
24. Ярмолик В.Н., Занкович А.П., Портянко С.С. Элементы теории информации. Практикум для студентов специальности “Программное обеспечение информационных технологий”. – Минск: БГУИР, 2007.
25. Ярмолик В.Н., Портянко С.С., Ярмолик С.В. Криптография, стеганография и охрана авторского права. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007.

Индивидуальные практические работы

Индивидуальная практическая работа №1

Указания по выбору варианта

Рабочей программой дисциплины «Теория информации» предусмотрено выполнение двух индивидуальных практических работ. Индивидуальная практическа работа посвящена закренлению материала по темам 1-3.

Темы индивидуальных практических работ №1 приведены в Таблице 1

Таблица 1

Варианты тем индивидуальных практических работ №1

1	Криптоанализ методов простой подстановки Криптоанализ методов простой подстановки
2	Потоковые криптосистемы
3	Роторные криптосистемы
4	Симметричные криптосистемы. Алгоритм IDEA

Тема индивидуальной практической работы каждому студенту задается преподавателем, также как и вариант согласно методическому пособию по выполнению индивидуальных практических работ. В качестве методического пособия по выполнению индивидуальных практических работ используется методическое пособие по выполнению лабораторных работ ео курсу «Элементы теория информации».

Форма отчетности и порядок выполнения индивидуальных практических работ определен в указанном методическом пособии.

Индивидуальная практическая работа №2

Указания по выбору варианта

Рабочей программой дисциплины «Теория информации» предусмотрено выполнение двух индивидуальных практических работ. Индивидуальная практическая работа посвящена закренлению материала по темам 4-14.

Темы индивидуальных практических работ №2 приведены в Таблице 2

Таблица 2

Варианты тем индивидуальных практических работ №1

1	Арифметика чисел большой разрядности
2	Асимметричные криптосистемы. Алгоритм RSA
3	Электронная цифровая подпись
4	Криптосистемы на основе эллиптических кривых

Тема индивидуальной практической работы каждому студенту задается преподавателем, также как и вариант согласно методическому пособию по выполнению индивидуальных практических работ. В качестве методического пособия по выполнению индивидуальных практических работ используется методическое пособие по выполнению лабораторных работ ео курсу «Элементы теория информации».

Форма отчетности и порядок выполнения индивидуальных практических работ определен в указанном методическом пособии.

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра программного обеспечения информационных технологий

В. Н. Ярмолик, А. П. Занкович, С. С. Портянко

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Практикум
для студентов специальности
«Программное обеспечение информационных технологий»
дневной и дистанционной форм обучения

Минск 2007

УДК 621.391.1(075)
ББК 32.811 я 7
Я 75

Р е ц е н з е н т:
доцент кафедры ЭВМ БГУИР,
кандидат технических наук В. В. Ракуш

Ярмолик, В. Н.

Я 75 Элементы теории информации : практикум для студ. спец. «Программное обеспечение информационных технологий» дневн. и дист. форм обуч. / В. Н. Ярмолик, А. П. Занкович, С. С. Портянко. – Минск : БГУИР, 2007. – 39 с. : ил.

ISBN 978-985-488-108-9

В практикуме рассматриваются практические вопросы криптографического преобразования информации в компьютерных системах. Рассмотрены наиболее актуальные вопросы предметной области – симметричные и ассиметричные алгоритмы; блочные, роторные и потоковые шифры, алгоритмы электронной цифровой подписи и хеширования. По каждой теме приводятся теоретические сведения, практические способы реализации алгоритмов и набор заданий разной степени сложности по вариантам.

УДК621.391.1(075)
ББК 32.811 я 7

ISBN 978-985-488-108-9

СОДЕРЖАНИЕ

1. КРИПТОАНАЛИЗ МЕТОДОВ ПРОСТОЙ ПОДСТАНОВКИ

Простейшие шифры подстановки (substitution) реализуют замену каждого символа исходного текста на один из символов алфавита шифротекста. В общем случае, подстановочный шифр описывается таблицей подстановки, состоящей из двух строк и *n* столбцов. Количество столбцов таблицы подстановки соответствует количеству различных символов в алфавите исходного текста. Верхняя строка таблицы подстановки содержит все возможные символы исходного текста, а нижняя – соответствующие им символы шифротекста.

Моноалфавитные шифры характеризуются однозначным соответствием символов исходного текста и символов шифротекста. В случае, когда алфавиты исходного текста и шифротекста состоят из одного и того же множества символов, алфавит шифротекста представляет собой простую перестановку лексикографического порядка символов в алфавите исходного текста. При выполнении шифрования каждый символ исходного текста заменяется соответствующим ему символом шифротекста.

Таблица подстановки, описывающая моноалфавитный шифр, преобразующий строчные буквы русского алфавита, будет состоять из 33 столбцов, что соответствует количеству букв в алфавите. Рассмотрим такую таблицу на следующем примере:

а	**б**	**в**	**г**	**д**	**е**	**ё**	**ж**	**з**	**и**	**й**	**к**	**л**	**м**	**н**	**о**	**п**	**р**	**с**	**т**	**у**	**ф**	**х**	**ц**	**ч**	**ш**	**щ**	**ъ**	**ы**	**ь**	**э**	**ю**	**я**
е	л	ц	н	й	и	в	а	ш	у	ь	т	с	я	ф	ы	э	ж	о	р	к	ч	м	ъ	х	п	м	б	г	ё	з	щ	д

В соответствии с приведённой таблицей шифрование строки «знание – сила» будет выполнено следующим образом:

«з»→ «ш»;

«н»→ «ф»;

…

«а»→ «е».

В результате шифрования будет получен шифротекст «шфефуи – оусе».

Таблица подстановки, описывающая ключ моноалфавитного шифра, преобразующего ASCII-коды (однобайтовые значения), будет состоять из 256 столбцов. Таблица подстановки для шифра, осуществляющего подстановку 32-битных значений, будет состоять из 2^{32} столбцов, что уже вызовет сложности её хранения и передачи. По этой причине на практике вместо таблиц подстановок используются функции подстановки, аналитически описывающие соответствие между порядковыми номерами символов исходного текста в алфавите исходного текста и порядковыми номерами символов шифротекста в алфавите шифротекста.

Предположим, алфавит исходного текста M состоит из n символов $M=\{a_0, a_1, ..., a_n\}$, тогда алфавит шифротекста C будет представлять собой n-символьный алфавит $C=\{f(a_0), f(a_1), ..., f(a_n)\}$, где функция f, выполняющая отображение $M \rightarrow C$, и будет являться функцией подстановки. В общем случае функция подстановки любого моноалфавитного шифра может быть задана в виде полинома степени t:

$$E_k(a) = (k_0 + k_1 \cdot a + k_2 \cdot a^2 + ... + k_{t-1} \cdot a^{t-1} + k_t \cdot a^t) \bmod n.$$

Примером простейшего моноалфавитного шифра является шифр *Цезаря*. Строки таблицы подстановки для шифра Цезаря представляют собой сдвинутые друг относительно друга на l позиций алфавиты исходного текста. Сам Цезарь использовал для шифрования величину сдвига $l = 3$. Функция подстановки для шифра Цезаря будет задаваться полиномом нулевой степени:

$$E_k(a) = (a + k) \bmod n.$$

Поскольку для моноалфавитных шифров каждый символ исходного текста при шифровании может заменяться одним единственным символом шифротекста, для криптоанализа данных шифров возможно применение анализа частот встречаемости символов в шифротексте. Данная атака основана на том факте, что в естественных языках частоты встречаемости различных букв могут существенно отличаться. Так, в английском языке наиболее часто встречаемой является буква «e», а наименее встречаемой – буква «z». Зная типичную частоту встречаемости каждого из символов алфавита исходного текста, можно воссоздать использованную при шифровании таблицу постановки, ставя каждому из символов исходного текста в соответствие символ шифротекста, частота встречаемости которого в зашифрованном тексте является наиболее близкой к типичной частоте встречаемости символа алфавита исходного текста.

Подстановочные шифры, называемые *полиалфавитными*, используют более чем одну таблицу подстановки. Использование нескольких таблиц (алфавитов) обеспечивает возможность нескольких вариантов подстановки символов исходного сообщения, что повышает криптостойкость шифра.

Классическим полиалфавитным шифром является шифр *Виженера* (Vigenere Cipher). Так же как и в случае шифра Цезаря, данный шифр может быть задан таблицами подстановки, состоящими из n столбцов, где n – размер алфавита исходного текста. Количество таблиц подстановки для случая шифра Виженера будет равняться m, где m – длина ключевого слова (период ключа). Ключевое слово задаёт количество символов, на которое смещены относительно исходного алфавиты шифротекста в каждой из m таблиц подстановок.

Рассмотрим работу шифра Виженера на простом примере. Пусть дано ключевое слово «MOUSE». Тогда правила подстановки будут задаваться 5-ю таблицами, которые для компактности можно объединить в одну.

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D

Пусть необходимо зашифровать текст «CRYPTOGRAPHY AND DATA SECURITY». Сперва запишем символы ключевого слова под символами исходного текста. Поскольку ключ в методе Виженера – периодический, повторим ключевое слово столько раз, сколько нам потребуется чтобы закрыть весь исходный текст.

CRYPTOGRAPHY AND DATA SECURITY
MOUSEMOUSEMOUSEMOUSEMOUSEMOUSE

Каждый из символов ключа указывает, которую из таблиц подстановки нам необходимо использовать для подстановки рассматриваемого символа исходного текста. Символ ключа «M» указывает, что соответствующий символ шифротекста необходимо выбирать из таблицы подстановки, алфавит шифротекста в которой сдвинут относительно алфавита исходного текста на Pos(«M») – Pos(«A») = 12 позиций. Таким образом, первому символу исходного текста будет соответствовать символ шифротекста «C». Проведя аналогичную процедуру для всех символов исходного текста, мы получим искомый шифротекст:

«OFSHXAULSTTM SRP XSXM MWGGFCLC».

Как видно из примера, в результате шифрования по методу Виженера символы исходного текста «P» и «H» были преобразованы в один и тот же подстановочный элемент «T». Таким образом, отсутствует однозначное соответствие между символами исходного и зашифрованного текстов, что делает применение атаки на шифротекст путём частотного анализа «в лоб» невозможным.

Поскольку ключ шифратора Виженера является периодическим, зашифрованный текст можно представить как m текстов, зашифрованных по методу Цезаря. В рассмотренном примере для текста «CRYPTOGRAPHY AND DATA SECURITY» символы с позициями 1, 6, ..., 26 шифровались по методу Цезаря с ключом $k = 12$; символы с позициями 2, 7, ..., 27 – ключом $k = 14$; с позициями 3, 8, ..., 28 – ключом $k = 20$; с позициями 4, 9, ..., 29 – ключом $k = 18$;

с позициями 5, 10, ..., 30 – ключом $k = 4$.

CRYPT**O**GRAP**H**Y AN**D** DAT**A** SEC**U**RITY

$k = 12$ («M»):	C	O	H	D	A	U
$k = 14$ («O»):	R	G	Y	-	-	R
$k = 20$ («U»):	Y	R	-	D	S	I
$k = 18$ («S»):	P	A	A	A	E	T
$k = 4$ («E»):	T	P	N	T	C	Y

Таким образом, зная длину ключевого слова шифра Виженера (период ключа), можно произвести взлом шифротекста, выполнив анализ частот встречаемости символов в отдельности для каждого из m компонентов шифротекста.

Одним из методов определения длины ключевого слова, использованного при шифровании текста по методу Виженера, является метод *Касиски* (Kasiski). Данный метод основан на предположении, что наличие повторяющихся l-грамм (l-символьных последовательностей) в зашифрованном тексте будет в большинстве случаев обусловлено наличием соответствующих повторяющихся l-грамм в исходном тексте. Предполагается, что случайное появление в шифротексте повторяющихся l-грамм маловероятно.

Одинаковым l-граммам, присутствующим в исходном тексте, будут соответствовать одинаковые l-граммы, расположенные на тех же позициях в шифротексте, только в том случае, если при шифровании они будут преобразованы с использованием тех же l символов ключа. Это условие будет выполняться для всех повторяющихся l-грамм, расположенных друг от друга на расстояниях, кратных длине ключевого слова шифра.

Тест Касиски состоит из следующих шагов:

1. Анализируется шифротекст на предмет присутствия в нём повторяющихся l-грамм.
2. Для каждой из встретившихся в шифротексте более одного раза l-граммы вычисляются расстояния между её соседними вхождениями.
3. Вычисляется наибольший общий делитель полученного на предыдущем шаге множества расстояний с учётом того, что среди найденных повторений l-грамм могут в незначительном количестве присутствовать случайные повторения. Полученное значение и будет являться длиной ключевого слова.

Эксперименты показывают, что данный метод является достаточно эффективным при анализе зашифрованных текстов на русском и английском языках в случае, если в тексте присутствуют повторяющиеся l-граммы длиной в 3 и более символов.

Задания

1. Реализовать программное средство, осуществляющее шифрование и расшифрование текстового файла, содержащего текст на заданном языке.
1. Реализовать программное средство, осуществляющее криптоанализ зашифрованного по методу Виженера текста. Для криптоанализа использовать тест Касиски.
2. Провести экспериментальное исследование зависимости вероятности успешного проведения атаки по методу Касиски от длины шифротекста.
3. Провести экспериментальное исследование зависимости вероятности успешного проведения атаки по методу Касиски от длины использованного при шифровании ключевого слова.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Частотность букв английского языка.

A 0.08167	H 0.06094	O 0.07507	V 0.00978
B 0.01492	I 0.06966	P 0.01929	W 0.0236
C 0.02782	J 0.00153	Q 0.00095	X 0.0015
D 0.04253	K 0.00772	R 0.05987	Y 0.01974
E 0.12702	L 0.04025	S 0.06327	Z 0.00074
F 0.0228	M 0.02406	T 0.09056	
G 0.02015	N 0.06749	U 0.02758	

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Частотность букв русского языка.

А 0.07821	Ж 0.01082	Н 0.0685	Ф 0.00132	Ы 0.01854
Б 0.01732	З 0.01647	О 0.11394	Х 0.00833	Ь 0.02106
В 0.04491	И 0.06777	П 0.02754	Ц 0.00333	Э 0.0031
Г 0.01698	Й 0.01041	Р 0.04234	Ч 0.01645	Ю 0.00544
Д 0.03103	К 0.03215	С 0.05382	Ш 0.00775	Я 0.01979
Е 0.08567	Л 0.04813	Т 0.06443	Щ 0.00331	
Ё 0.0007	М 0.03139	У 0.02882	Ъ 0.00023	

2. ПОТОКОВЫЕ КРИПТОСИСТЕМЫ

Основная идея потоковых криптосистем заключается в шифровании исходного текста M с помощью криптографического ключа K, длина которого равна длине текста. Каждый бит шифротекста C_i является функцией соответствующих битов исходного текста и ключевого потока:

$$C_i = E_{Ki}(M_i) = M_i \ K_i, \qquad M_i, K_i, C_i \in \{0,1\}.$$

При дешифровании выполняется обратное преобразование D_{Ki}:

$$D_{Ki}(C_i) = C_i \oplus K_i = (M_i \oplus K_i) \oplus K_i = M_i.$$

Символом «⊕» обозначена операция сложения «ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ-ИЛИ». Благодаря линейным свойствам этой операции при шифровании и дешифровании используется одинаковый ключевой поток K. Очевидно, что в этом случае длина K должна быть равна длине передаваемого сообщения. Однако обмен ключами большого размера зачастую невозможен. Поэтому на практике для формирования ключевого потока используют генераторы псевдослучайной последовательности (рис. 1). Начальные параметры I генераторов на стороне отправителя и получателя должны совпадать, они являются секретным ключом алгоритма. Псевдослучайная последовательность каждого генератора обладает определенным периодом, после которого значения повторяются. Поэтому необходимо выбирать такие генераторы ключа, чтобы этот период превышал длину шифруемой информации.

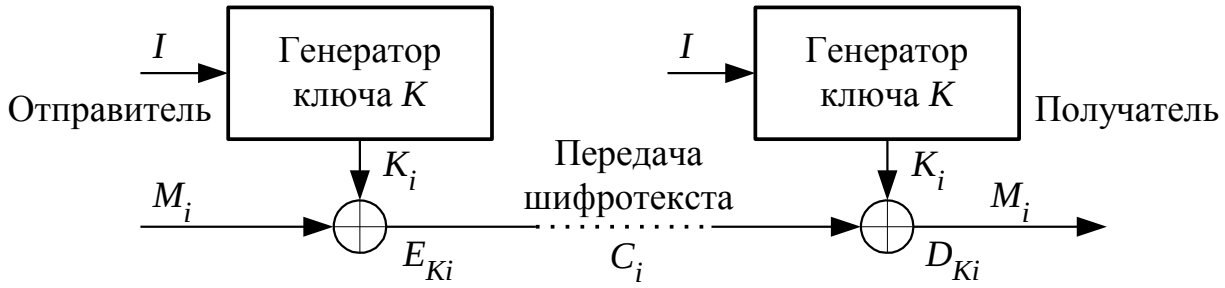


Рис. 1. Схема потоковой криптосистемы

Для корректной работы потоковых криптосистем необходимо, чтобы передающая и принимающая сторона имели синхронизированные генераторы ключа K. Искажение отдельных символов не влияет на расшифровку остальных символов шифротекста. Добавление, удаление или дублирование символов шифротекста нарушает синхронизацию ключевой и текстовой последовательностей, и все последующие символы расшифровываются некорректно.

Рассмотрим генераторы ключей на основе сдвиговых регистров с линейной обратной связью LFSR (Linear Feedback Shift Register). Они достаточно просто реализуются в программном и аппаратном виде, обладают высокой скоростью генерации и большим периодом ключа. Регистр LFSR состоит из двух частей: сдвигового регистра, выполняющего сдвиг своих разрядов влево на один разряд, и функции обратной связи, вычисляющей

вдвигаемое в первый разряд значение. В обобщенном виде структура LFSR представлена на рис. 2.

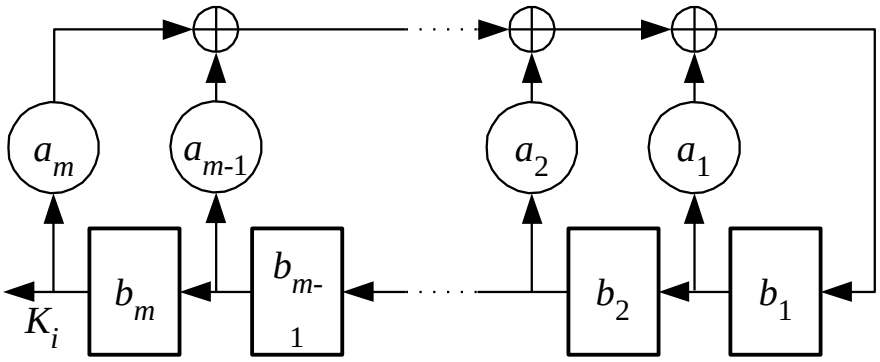


Рис. 2. Обобщенная схема LFSR

Структуру конкретного регистра LFSR принято задавать с помощью характеристического (задающего) многочлена:

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + 1, \qquad a_k \in \{0,1\},\ k = 1 \ldots m.$$

Степень многочлена m задает длину сдвигового регистра. Ненулевые коэффициенты a_k определяют разряды регистра, которые будут участвовать в формировании вдвигаемого в первый разряд значения. Через b_k ($b_k \in \{0,1\}$) обозначены текущие значения разрядов LFSR ($k = 1, \ldots, m$). Новые значения разрядов b^*_k ($b^*_k \in \{0,1\}$) вычисляются по следующему закону:

$$b^*_k = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j b_j, & k = 1 \\ b_{k-1}, & k = 2, \ldots, m \end{cases}$$

– функция обратной связи

– сдвиг.

Таким образом, новое значение для всех разрядов, кроме первого, берется из ближайшего младшего разряда. Символом $\sum^{\oplus}$ обозначена многоместная операция сложения «ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ-ИЛИ». Она используется для сложения значений из разрядов, которые отмечены ненулевыми коэффициентами a_k характеристического многочлена. Полученная сумма вдвигается в первый разряд LFSR. Очередной бит ключа K_i для потоковой криптосистемы равен значению старшего разряда LFSR b_m.

Пример 1. Построим сдвиговый регистр с линейными обратными связями, задаваемый характеристическим многочленом $P(x) = x^4 + x + 1$.

Схема регистра приведена на рис. 3. Если начальное состояние регистра $I = 1111$, то последовательность генерируемых состояний имеет вид:

1111→1110→1101→1010→0101→1011→0110→1100→
1001→0010→0100→1000→0001→0011→0111→1111

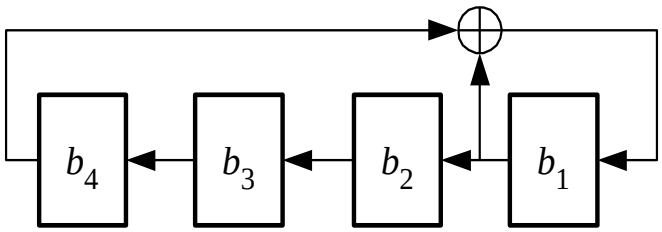


Рис. 3. LFSR на основе многочлена $P(x) = x^4 + x + 1$

Последнее состояние совпадает с начальным, после этого указанная последовательность повторяется. Последовательность сгенерированных битов ключа: `111101011001000`1.

Свойства генерируемой последовательности определяются постоянными коэффициентами характеристического многочлена a_i. При их соответствующем выборе генерируемая последовательность K будет иметь максимально возможный период, равный $2^m - 1$. Последовательность максимально возможного для данного генератора периода называется М-последовательностью. Основная задача синтеза генератора на основе LFSR – нахождение характеристического многочлена, позволяющего сформировать М-последовательность. Для того чтобы конкретный LFSR имел максимальный период, соответствующий многочлен должен быть примитивным. В общем случае не существует простого способа нахождения примитивных многочленов данной степени, проще выбирать многочлен случайным образом и проверять, является ли он примитивным. Эта задача аналогична задаче проверки на простоту случайно выбранного целого числа и легко решается с помощью вычислительной техники. Табл. 1 содержит некоторые примитивные многочлены.

Таблица 1

Примитивные многочлены

m	$P(x)$	m	$P(x)$	m	$P(x)$
23	$x^{23} + x^5 + 1$	29	$x^{29} + x^2 + 1$	35	$x^{35} + x^2 + 1$
24	$x^{24} + x^4 + x^3 + x + 1$	30	$x^{30} + x^{16} + x^{15} + x + 1$	36	$x^{36} + x^{11} + 1$
25	$x^{25} + x^3 + 1$	31	$x^{31} + x^3 + 1$	37	$x^{37} + x^{12} + x^{10} + x^2 + 1$
26	$x^{26} + x^8 + x^7 + x + 1$	32	$x^{32} + x^{28} + x^{27} + x + 1$	38	$x^{38} + x^6 + x^5 + x + 1$
27	$x^{27} + x^8 + x^7 + x + 1$	33	$x^{33} + x^{13} + 1$	39	$x^{39} + x^4 + 1$
28	$x^{28} + x^3 + 1$	34	$x^{34} + x^{15} + x^{14} + x + 1$	40	$x^{40} + x^{21} + x^{19} + x^2 + 1$

Использование LFSR для создания потоковых криптосистем предполагает уязвимость, связанную с линейным характером генерируемой последовательности. Обладая парой «исходный текст – шифротекст» длиной всего $2m$ бит, взломщик может восстановить характеристический многочлен и расшифровать все сообщение. Для защиты от этой атаки следует увеличивать размер используемого LFSR или использовать более сложные схемы генерации ключа. Рассмотрим, для примера, генератор Геффе (Geffe), представленный на рис. 4.

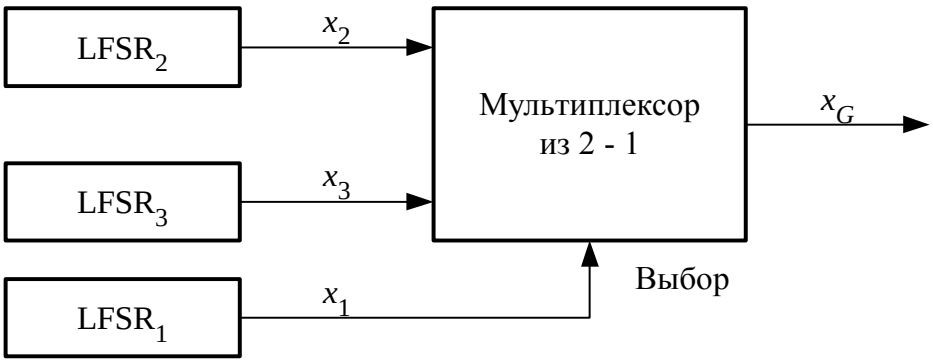


Рис. 4. Генератор Геффе

В нем используется три регистра с линейной обратной связью, объединённые нелинейным образом. Два регистра LFSR являются входами мультиплексора, а третий – управляет его выходом. Через x_1, x_2 и x_3 обозначены выходы трёх LFSR, выход генератора Геффе x_G описывается так: $x_G = (x_1 \ and \ x_2) \ or \ (not \ x_1 \ and \ x_3)$. Период данного генератора равен $(2^{m1}-1)2^{m2}2^{m3}$, где $m1$, $m2$ и $m3$ – длины первого, второго и третьего LFSR соответственно.

Благодаря простоте реализации, высокой скорости работы и сравнительно высокой криптостойкости, потоковые шифраторы получили широкое распространение для шифрования информации средней степени секретности. Например, алгоритм A5, построенный на основе трех LFSR с прореженными обратными связями, входит в состав стандарта мобильной связи GSM.

Возможны и другие способы генерации ключевой последовательности. Например, генератор ключевого потока *K* в алгоритме RC4 работает на основе подстановочной таблицы *S* (S-бокса) из 256 символов. На первом шаге S-бокс заполняется линейно: *S*[0] = 0, *S*[1] = 1, …, *S*[255] = 255. Затем начальное значение S-бокса меняется на основе пользовательского секретного ключа *U* по следующему алгоритму:

```
j := 0;
for i := 0 to 255
        j := (j + S[i] + U[i mod length(U)]) mod 256;
        swap(S[i], S[j]);
```

Эта подстановка является функцией от ключа изменяемой длины. Процедура swap меняет местами значения таблицы *S* с заданными индексами.
Полученное значение S-бокса используется для побайтной генерации ключевого потока *K*. Генератор потока имеет два счетчика *i* и *j*, инициализируемых нулевым значением. На каждом шаге генерации выполняются следующие операции:

```
i = (i + 1) mod 256
j = (j + S[i]) mod 256
swap(S[i], S[j])
K = S[(S[i] + S[j]) mod 256]
```

Байт *K* складывается операцией «ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ-ИЛИ» с байтом открытого текста для получения байта шифротекста либо с байтом шифротекста для получения байта исходного текста. Шифрование происходит весьма быстро – примерно в 10 раз быстрее DES-алгоритма. Типичная реализация выполняет 19 машинных команд на каждый байт текста. Алгоритм RC4 может принимать примерно $256! \cdot 2562 = 21700$ возможных состояний. S-бокс медленно изменяется в процессе работы: параметр *i* обеспечивает изменение каждого элемента, а *j* отвечает за то, чтобы эти элементы изменялись случайным образом. Шифр обладает иммунитетом к методам линейного и дифференциального криптоанализа и до сих пор у него не обнаружены короткие циклы.

Алгоритм RC4, в отличие от алгоритмов на основе сдвиговых регистров LSFR, больше ориентирован на программную реализацию, поскольку работает не с битами, а с целыми байтами исходного текста. Благодаря своей скорости и защищенности, он нашел широкое применение в криптографических системах. Например, он является частью протокола безопасного обмена информацией SSL.

Задания

1. Реализуйте систему потокового шифрования файлов с помощью генератора ключевой последовательности на основе линейного сдвигового регистра с обратной связью $LFSR_1$.
2. Модифицируйте программу из задания 1 путем реализации схемы Геффе с тремя регистрами $LFSR_1$, $LFSR_2$ и $LFSR_3$ (размерность регистров приведена в табл. 2).
3. Реализуйте алгоритм потокового шифрования RC4.

Таблица 2

Варианты заданий

Степень многочлена	Номер варианта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$LFSR_1$	23	24	25	26	27	28	29	30
$LFSR_2$	31	32	33	34	35	36	37	38
$LFSR_3$	39	40	23	24	25	26	27	28

3. РОТОРНЫЕ КРИПТОСИСТЕМЫ

Наиболее известная роторная криптосистема называлась «Энигма» и использовалась для защиты связи между командованием и подводными лодками немецкой армии в годы второй мировой войны. Конструкция «Энигмы» была основана на системе из трех роторов, осуществлявших замену 26 букв латинского алфавита. Каждый ротор имел 26 входных контактов на одной стороне и столько же выходных контактов – на другой. Внутри каждого ротора проходили провода, связывавшие входные и выходные контакты между собой. Выходные контакты первого ротора соединялись с входными контактами второго ротора. Когда оператор нажимал на какую-либо букву на клавиатуре машины, электрический ток подавался на входной контакт первого ротора, соответствующий этой букве. Ток проходил через первый ротор и поступал на выходной контакт, соответствующий какой-либо другой букве. Затем ток проходил последовательно через второй и третий роторы и подавался на неподвижный рефлектор (от лат. reflecto – обращаю назад, отражаю). В конструкции рефлектора 26 контактов разбивались на пары, контакты внутри каждой пары были соединены между собой. Таким образом, рефлектор заменял каждую букву на парную ей. Ток, прошедший через рефлектор, подавался назад, на систему роторов. Он вновь проходил через три ротора, но в обратном порядке. В конце концов на световом табло «Энигмы» загоралась одна из 26 лампочек, соответствовавшая зашифрованной букве (рис.). Самым важным свойством «Энигмы» являлось вращение роторов. Первый ротор после каждого преобразования буквы поворачивался на одну позицию. Второй ротор поворачивался на одну позицию после того, как первый ротор совершал полный оборот, т.е. после 26-ти преобразованных букв. Наконец, третий ротор поворачивался на одну позицию после того, как второй ротор совершал полный оборот, т.е. после 676-ти зашифрованных букв.

Благодаря рефлектору, «Энигма» на каждом шаге осуществляла перестановку букв внутри пар, и если, к примеру, буква «N» заменялась на «S», то при том же положении роторов буква «S» менялась на «N» (ток тек по тем же проводам, но в другую сторону). Поэтому для расшифровки сообщения достаточно было вновь пропустить его через машину, восстановив предварительно изначальное положение роторов. Таким образом, начальное положение роторов играло роль ключа шифрования. Каждый оператор имел специальную книгу, задававшую положение роторов для каждого дня. В этом заключалась очевидная слабость данной системы шифрования: достаточно было завладеть книгой и машиной, чтобы раскрыть все секреты. Что и произошло осенью 1942 года, когда войсками союзников была захвачена немецкая подводная лодка U-571.

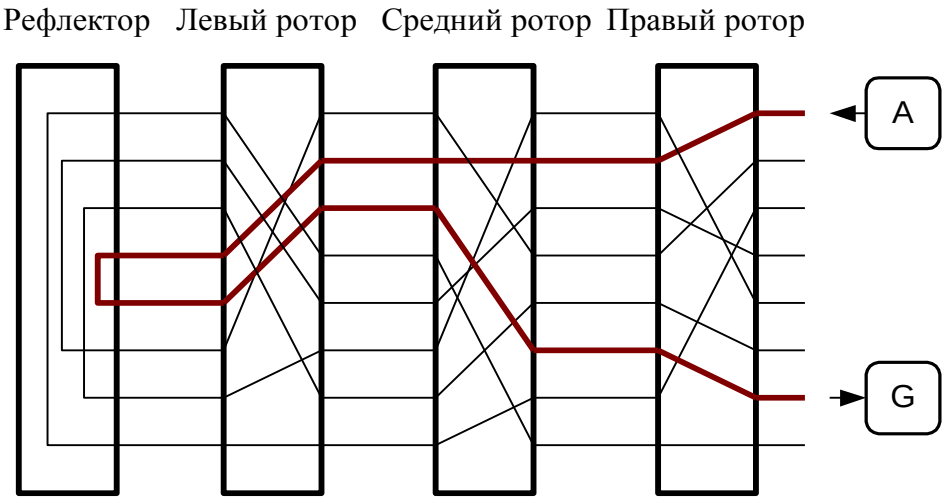


Рис. 5. Устройство шифровальной машины «Энигма»

В общем случае, криптосистема на основе роторной машины осуществляет полиалфавитную подстановку с длинным периодом. Пусть роторная машина состоит из банка t роторов (дисков) R_1, R_2, …, R_t. Каждый ротор R_i задает функцию подстановки f_i символов открытого текста символами зашифрованного текста. После каждого шага шифрования любой ротор может быть смещен (повернут) на одну из N позиций, и каждая позиция изменяет функцию соответствия между символами исходного и зашифрованного текста. Если диск R_i находится в позиции j_i, то выполняемая им эффективная подстановка символа m_i описывается выражением

$$F_i(a) = ((f_i(m_i - j_i) \textbf{ mod } N) + j_i) \textbf{ mod } N.$$

Машина, состоящая из t роторов, осуществляет эффективную подстановку символов шифротекста по закону

$$E_{k_i}(m_i) = F_t(F_{t-1}(\ldots(F_1(m_i)\ldots)).$$

Ключ шифрования k_i состоит из исходных функций подстановки f_1, …, f_t и текущих позиций роторов j_1, …, j_t. Как только шифруется очередной символ, один или более роторов изменяют свою позицию, изменяя этим и сам ключ. Машина, состоящая из t роторов, не сможет вернуться в начальное состояние, пока не произведет N^t успешных операций шифрования. Закон изменения позиций роторов не обязательно должен быть линейным. В общем случае для получения новой позиции ротора может использоваться генератор псевдослучайных чисел, что практически исключает возможность узнать о перемещениях роторов, что защищает от корреляционных атак. Главным требованием является совпадение закона генерации последовательности поворотов у отправителя и получателя шифрсообщения.

Рассмотрим пример генератора на основе одного сдвигового регистра с линейной обратной связью LFSR длиной 80 бит (примитивный многочлен $P(x) = x^{80} + x^{79} + x^{43} + x^{42} + 1$) (рис. 6). Три байта RCB (Rotor Control Byte) с позициями (I, J, K) выбираются из регистра LFSR случайно и определяют

перемещение каждого из трех роторов на текущем шаге шифрования. Причем значения (*I*, *J*, *K*) также являются частью ключа.

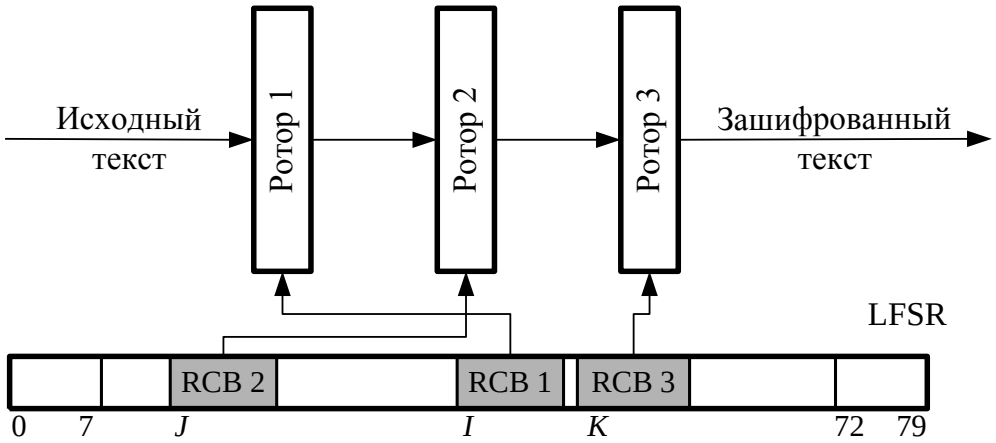


Рис. 6. Управление положением трех роторов с помощью одного линейного сдвигового регистра с обратной связью

Функция подстановки каждого ротора задается с помощью соответствующей таблицы. Для шифрования сообщения байтами она должна задавать 256 однозначных правил замены входных символов символами шифротекста. При отсутствии рефлектора таблицы подстановки отправителя и получателя должны задавать взаимообратные правила – отправитель ищет символ шифротекста по его индексу в первой таблице, а получатель по пришедшему символу находит соответствующий ему индекс с помощью второй таблицы.

Для увеличения периода ключа в каждом роторе может быть организовано шифрование с обратной связью по шифротексту, когда символ, полученный в результате шифрования на предыдущем шаге, используется для шифрования следующего символа (рис.). Значение байта открытого текста складывается по модулю 256 с байтом текущего состояния ротора RS (Rotor State). Значение RS меняется после каждого шага шифрования на основе значения RCB из генератора поворотов ротора, предыдущего зашифрованного байта c и предыдущего состояния ротора RS. Результат сложения i используется как индекс элемента r из таблицы подстановки $R = \{r_0, r_1, \ldots, r_{255}\}$. Элемент r_i используется в качестве результата шифрования c (если ротор R – последний) или в качестве входного байта p для следующего ротора.

Длина ключа для представленного алгоритма составляет $3 \cdot 256 + 10 + 3 + 3 = 784$ байтов. Пользователь не способен запомнить такое количество данных, поэтому необходимо предусмотреть возможность генерации ключевых данных на основе пользовательского пароля.

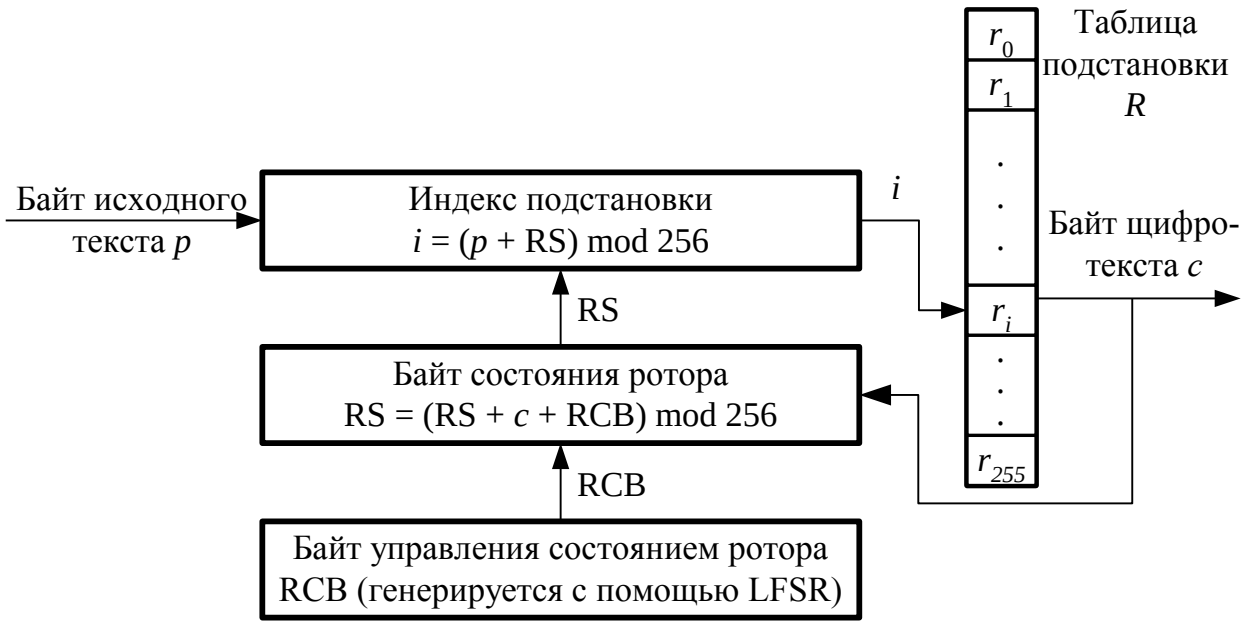


Рис. 7. Реализация ротора с обратной связью по шифротексту

Главными достоинствами рассмотренной криптосистемы являются простота программной и аппаратной реализации, а также высокие криптостойкость и скорость шифрования. Для кодирования одного байта необходимо трижды выполнить три операции сложения и одну операцию адресации по индексу, а также один такт работы регистра LFSR (десять сдвигов). Всего $(3 + 1) \cdot 3 + 10 = 22$ элементарных операций с 8-битными операндами.

Задания

1. Реализовать криптографический алгоритм, использованный в электронно-механической роторной криптосистеме «Энигма».
2. Реализовать криптографический алгоритм с использованием усовершенствованной роторной машины, использующей регистр LFSR в качестве генератора поворотов роторов по псевдослучайному закону и обратную связь по шифротексту в роторах.
3. Разработать криптосистему, основанную на криптографическом алгоритме из задания 1 или 2. Криптосистема должна обеспечивать выполнение трех функций: генерацию ключа, шифрование текста, дешифрование текста. Проверить статистические свойства криптосистемы с помощью диаграммы распределения символов (частоты встречаемости в тексте) для открытого и зашифрованного текста.

4. СИММЕТРИЧНЫЕ КРИПТОСИСТЕМЫ. АЛГОРИТМ IDEA

Алгоритм IDEA (International Data Encryption Algorithm) относится к классу симметричных шифраторов. Данный алгоритм был разработан в 1990 г. в качестве альтернативы алгоритму DES (Data Encryption Standard). В основе алгоритма лежит идея смешанного преобразования, которое случайным образом равномерно распределяет исходный текст по всему пространству шифротекста.

Смешанные преобразования реализуются при помощи перемежающихся последовательностей замен и простых операций перестановок.

Преобразование данных производится по блокам, размер которых равен 64 битам. Длина ключа в алгоритме IDEA составляет 128 бит.

Каждый 64-битный блок рассматривается как четыре 16-битных подблока, которые преобразуются с использованием следующих целочисленных операций.

1.Побитное сложение по модулю 2 (XOR) двух 16-битных операндов, которое будем обозначать как $\oplus$.

2.Сложение двух целых 16-битных операндов по модулю 2^{16}, обозначенное как $\boxtimes$.

3.Умножение двух чисел без знака по модулю $2^{16}+1$. Результат операции умножения усекается до длины в 16 бит. При вычислении данной операции существует исключение для кода со всеми нулями, который при умножении рассматривается как число 2^{16}. Данную операцию будем обозначать как $\odot$.

Процедура шифрования состоит из 8-ми одинаковых раундов и дополнительного 9-го выходного раунда (рис. 8, *а*).

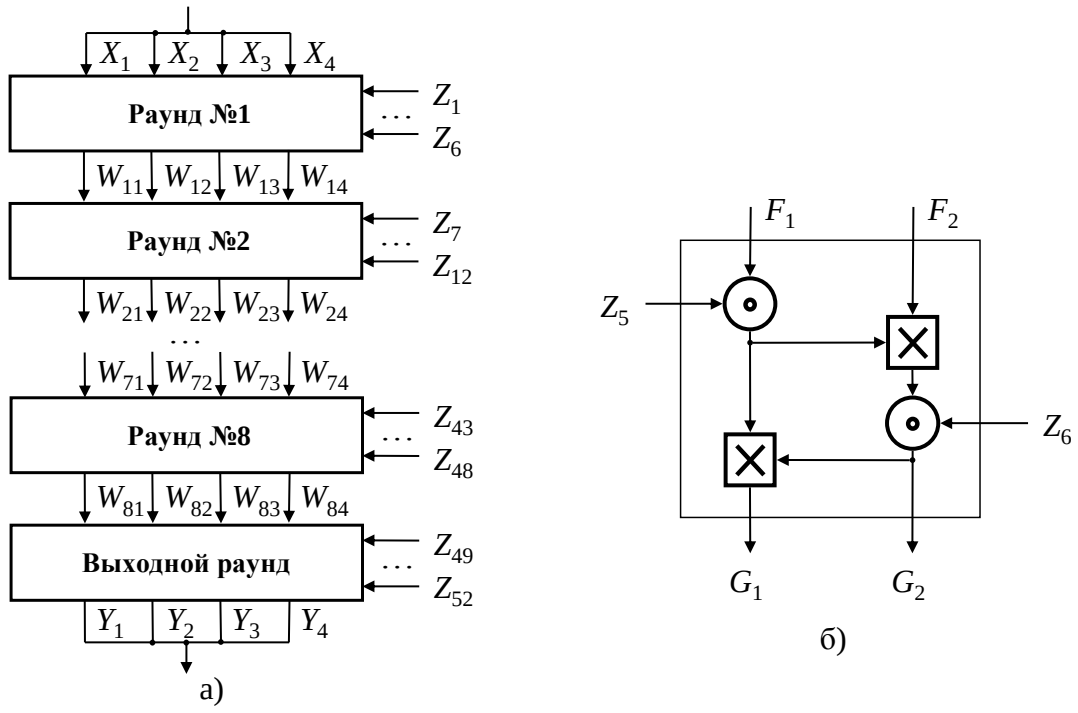


Рис. 8. Алгоритм IDEA: а) схема процедуры шифрования;
б) мультипликативно-аддитивная структура

На выходе 9-го раунда формируется содержимое четырёх 16-битных подблоков, образующих блок шифротекста.

Основной частью каждого раунда является мультипликативно-аддитивная структура (рис. 8, *б*).

Здесь F_1 и F_2 – 16-битные значения, полученные из открытого текста, Z_5 и Z_6 – 16-битные подключи.

Все операнды, участвующие в выполнении процедуры шифрования, имеют размерность 16 бит.

На рис. 9 приведена схема выполнения первого раунда алгоритма IDEA.

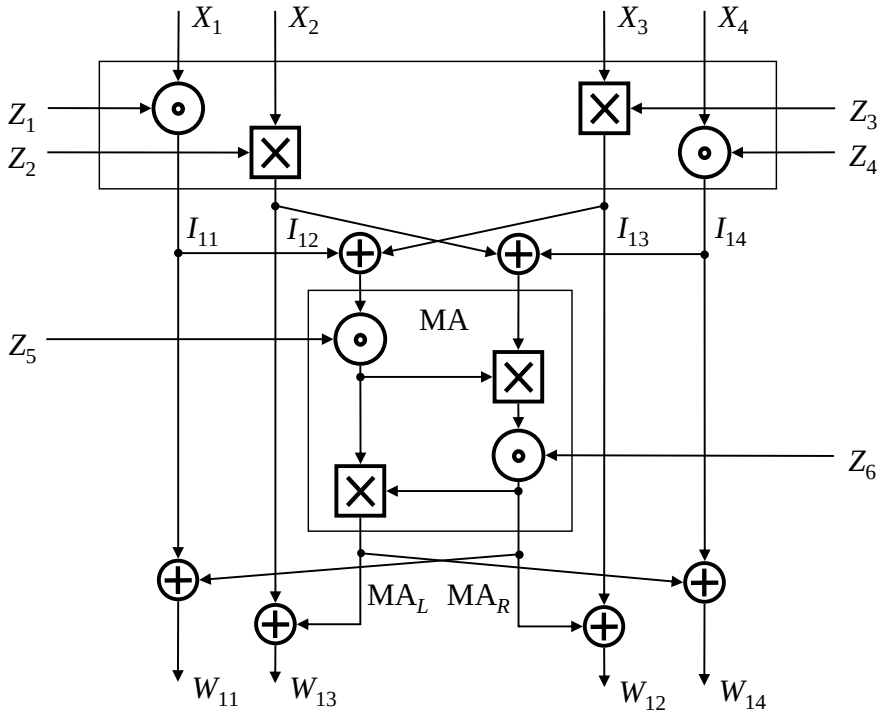


Рис. 9. Первый раунд шифрования алгоритма IDEA

Данные, получаемые на выходе *i*-го раунда шифрования, подаются на вход (*i*+1)-го раунда. Входными данными 1-го раунда являются четыре 16-битных подблока (X_1, X_2, X_3, X_4) 64-битного блока исходного текста.

Схема выполнения 9-го раунда шифрования приведена на рис. 10.

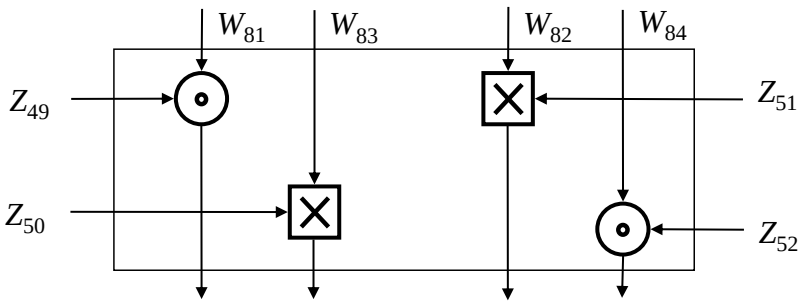


Рис. 10. Девятый раунд шифрования алгоритма IDEA

Следует обратить внимание на то, что 2-й и 3-й подблоки промежуточного значения *W* меняются местами после выполнения всех раундов кроме восьмого.

На каждом из девяти раундов используются значения 16-битных итерационных ключей Z_i, которые получаются путём преобразования исходного 128-битного ключа *K*.

Первые 8 итерационных ключей $Z_1 \ldots Z_8$ берутся как 8 последовательных частей 128-битного ключа. Для получения следующих 8-ми итерационных ключей 128-битное значение ключа *K* циклически сдвигается на 25 бит влево и ключи $Z_9 \ldots Z_{16}$ вновь берутся как его 8 последовательных частей. Данный процесс повторяется до тех пор, пока не будут получены все 52 итерационных ключа.

Процедура расшифрования состоит из тех же девяти раундов, но только выполняемых с использованием иных значений итерационных ключей. Итерационные ключи расшифрования получают из итерационных ключей шифрования на основе таблицы соответствия (табл. 3).

Таблица 3

Значения ключей, используемых в алгоритме IDEA для расшифрования

Итерация (раунд)	Обозначение	Эквивалентное обозначение
1	$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$	$Z_{49}^{-1}, -Z_{50}, -Z_{51}, Z_{52}^{-1}, Z_{47}, Z_{48}$
2	$U_7, U_8, U_9, U_{10}, U_{11}, U_{12}$	$Z_{43}^{-1}, -Z_{45}, -Z_{44}, Z_{46}^{-1}, Z_{41}, Z_{42}$
3	$U_{13}, U_{14}, U_{15}, U_{16}, U_{17}, U_{18}$	$Z_{37}^{-1}, -Z_{39}, -Z_{38}, Z_{40}^{-1}, Z_{35}, Z_{36}$
4	$U_{19}, U_{20}, U_{21}, U_{22}, U_{23}, U_{24}$	$Z_{31}^{-1}, -Z_{33}, -Z_{32}, Z_{34}^{-1}, Z_{29}, Z_{30}$
5	$U_{25}, U_{26}, U_{27}, U_{28}, U_{29}, U_{30}$	$Z_{25}^{-1}, -Z_{27}, -Z_{26}, Z_{28}^{-1}, Z_{23}, Z_{24}$
6	$U_{31}, U_{32}, U_{33}, U_{34}, U_{35}, U_{36}$	$Z_{19}^{-1}, -Z_{21}, -Z_{20}, Z_{22}^{-1}, Z_{17}, Z_{18}$
7	$U_{37}, U_{38}, U_{39}, U_{40}, U_{41}, U_{42}$	$Z_{13}^{-1}, -Z_{15}, -Z_{14}, Z_{16}^{-1}, Z_{11}, Z_{12}$
8	$U_{43}, U_{44}, U_{45}, U_{46}, U_{47}, U_{48}$	$Z_7^{-1}, -Z_9, -Z_8, Z_{10}^{-1}, Z_5, Z_6$
9	$U_{49}, U_{50}, U_{51}, U_{52}$	$Z_1^{-1}, -Z_2, -Z_3, Z_4^{-1}$

При этом выполняются следующие соотношения:

$Z_j^{-1} \odot Z_j = 1 \bmod (2^{16}+1)$;

$-Z_j \boxtimes Z_j = 0 \bmod 2^{16}$.

Таким образом, для ключа Z_j значение, обозначаемое как $-Z_j$, является аддитивным инверсным по модулю 2^{16}, а значение, обозначаемое как Z_j^{-1} – мультипликативным инверсным по модулю $2^{16}+1$.

Порядок использования итерационных ключей при шифровании показан на рис. 11.

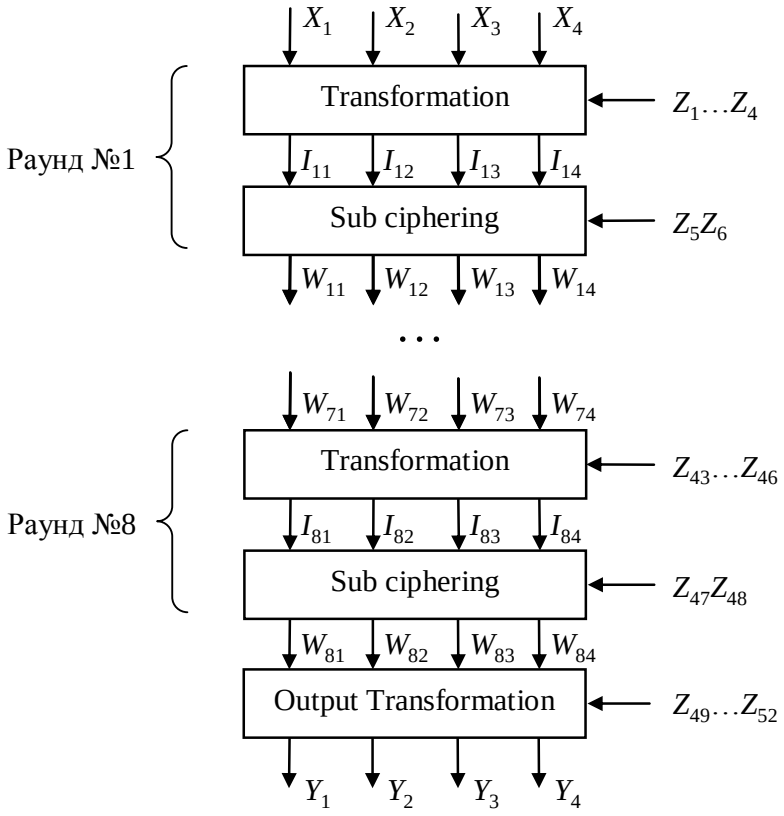


Рис. 11. Порядок использования итерационных ключей алгоритма IDEA

При выполнении расшифрования раунды алгоритма выполняются в таком же порядке. На вход первого раунда подаётся четыре 16-битных подблока 64-битного блока шифротекста. Значения, полученные после выполнения выходного раунда, являются подблоками 64-битного блока исходного текста. Отличие от процедуры шифрования заключается в том, что вместо ключей $Z_1 ... Z_{52}$ используются ключи $U_1 ... U_{52}$.

Задания

1. Разработать программное средство, выполняющее шифрование по алгоритму IDEA заданного файла с произвольным содержимым. Ключ шифрования подаётся в виде бинарного файла длиной 16 байт.

2. Разработать программное средство, выполняющее расшифрование заданного файла, зашифрованного по алгоритму IDEA. Ключ шифрования подаётся в виде бинарного файла длиной 16 байт.

5. АРИФМЕТИКА ЧИСЕЛ БОЛЬШОЙ РАЗРЯДНОСТИ

Размерность обрабатываемых в вычислительных машинах чисел обычно ограничивается размерностью машинного слова. Типичная переменная целочисленного типа занимает в памяти машины 8, 16, 32 или 64 бит. Для многих криптографических алгоритмов требуются числа намного большего размера. Например, рекомендуемый размер открытого ключа для алгоритма RSA составляет 4 Кбит. Рассмотрим реализацию базовых арифметических операций над целыми числами большого размера. Для представления цифр больших чисел удобно использовать систему счисления с основанием b, равным 2^m, где m – размер машинного слова. Это наиболее компактный способ представления больших чисел, позволяющий хранить все цифры в массиве слов-переменных.

Алгоритм сложения

Алгоритм сложения неотрицательных чисел достаточно прост: цифры числа складываются, начиная с младших разрядов к старшим. Если зафиксировано переполнение (т. е. при сложении получена цифра, большая максимально возможной в данной системе счисления), то происходит перенос значения в следующий разряд. Рассмотрим реализацию сложения неотрицательных n-разрядных целых чисел $(u_{n-1}, \ldots, u_0)_b$ и $(v_{n-1}, \ldots, v_0)_b$ по основанию b. Следующий алгоритм формирует их сумму $(w_n, w_{n-1}, \ldots, w_0)_b$, причем $w_n \in \{0, 1\}$:

```
      ADD(u, v, n)
j := 0; k := 0;
while j < n
          do w_j := u_j + v_j + k
               if w_j ≥ b
                  then w_j := w_j – b
                       k := 1
                  else k := 0
               j := j + 1
   w_n := k
return (w_n, …, w_0)
```

Заметим, что при работе этого алгоритма всегда выполняются соотношения $u_j + v_j + k \le (b - 1) + (b - 1) + 1 < 2b$, так что размер результата суммирования не превышает $\log_2 2b = b + 1$ разрядов. Приведенный алгоритм может использоваться и для сложения отрицательных чисел. Для этого следует использовать их представление в дополнительном коде.

Алгоритм умножения

Умножение больших чисел может быть выполнено традиционным школьным способом «в столбик». Однако вместо использования массива промежуточных результатов гораздо эффективнее добавлять к произведению каждую новую строку немедленно после ее вычисления.

Если множимое состоит из m слов, множитель – из n слов, то произведение занимает не более $m + n$ слов, независимо от того, выполняется знаковое или беззнаковое умножение. Рассмотрим реализацию умножения неотрицательных целых чисел $(u_{m-1}, \ldots, u_0)_b$ и $(v_{n-1}, \ldots, v_0)_b$ по основанию b. Следующий алгоритм формирует их произведение $(w_{m+n-1}, \ldots, w_0)_b$:

```
MULTIPLY (w, v, m, n)
    for j = 0, …, m – 1 do w_j := 0;
    j := 0;
    while j < n
      do if v_j > 0
            then i := 0; k := 0;
                 while i < m
                   do t := u_i · v_j + w_{i+j} + k:
                      w_{i+j} := t mod b;
                      k := ⌊t / b⌋;
                      i := i + l;
                 w_{j+m} := k;
            else w_{j+m} := 0;
      j := j + l;
    return (w_{m+n-1}, …, w_0)
```

На каждом шаге алгоритма умножения выполняются неравенства

$$0 \le t < b^2,\ 0 \le k < b.$$

Умножение больших чисел выполняется проще для беззнаковых операндов. Знак произведения получается как результат операции «ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ-ИЛИ» над разрядами знака множителей.

Умножение целых чисел может быть существенно ускорено. Например, пусть $u = b^n U_1 + U_0$, $v = b^n V_1 + V_0$. Тогда (алгоритм Карацубы)

$$uv = b^{2n} U_1 V_1 + b^n (U_1 V_0 + U_0 V_1) + U_0 V_0 =$$
$$= b^{2n} U_1 V_1 + b^n ((U_0 + V_0)(U_1 + V_1) - U_0 V_0 - U_1 V_1) + U_0 V_0 =$$
$$= b^{2n} C_0 + b^n (C_2 - C_1 - C_0) + C_1,$$

где $C_0 = U_1 V_1$, $C_1 = U_0 V_0$, $C_2 = (U_0 + V_0)(U_1 + V_1)$.

Алгоритм Карацубы сводит задачу умножения двух чисел к нескольким задачам умножения чисел меньшей разрядности. Разбиение может осуществляться рекурсивно до тех пор, пока разрядность не уменьшится до поддерживаемой аппаратно (т.е. пока n не достигнет размера машинного слова). В этом случае число элементарных умножений для алгоритма Карацубы асимптотически сходится к $O(n^{\log_2 3})$.

Пример: $13 \cdot 27 = 100 \cdot 1 \cdot 2 + 10 \cdot (3 \cdot 7 + 1 \cdot 2) + 3 \cdot 7 = 100 \cdot 2 + 10 \cdot (36 - 21 - 2) + 21 = 200 + 130 + 21 = 351$

Обобщением алгоритма Карацубы является алгоритм Тома–Кука, в котором множители могут разбиваться более, чем на две части. Максимальной скоростью на сегодняшний день обладает алгоритм умножения на основе

быстрого преобразования Фурье. В этом случае цифры произведения получаются как коэффициенты свертки цифр множителей, посчитанные с учетом переносов значений между коэффициентами.

Деление

Основная сложность при реализации классического метода деления «в столбик» состоит в необходимости угадывать разряды частного. Этот процесс должен быть формализован. Прежде всего заметим, что деление m-разрядного числа на n-разрядное ($m > n$) сводится к последовательности делений ($n + 1$)-разрядных чисел u на n-разрядное число v, причем $0 \le u/v < b$, где b – основание системы счисления. Таким образом, необходимо построить алгоритм для нахождения

$$q = \lfloor u/v \rfloor,\ u = (u_n, u_{n-1}, \ldots, u_0)_b \text{ и } v = (v_n, v_{n-1}, \ldots, v_0)_b.$$

Условие $u/v < b$ может быть переформулировано как $u/b < v$, т.е. $(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1)_b < v = (v_n, v_{n-1}, \ldots, v_0)_b$. Частное q должно быть единственным целым числом, таким, что $0 \le u - qv < v$. Попытаемся угадать q как

$$q = \min\left(\left\lfloor \frac{u_{j+n}b + u_{j+n-1}}{v_{n-1}} \right\rfloor, b-1\right) \qquad (1)$$

В этом случае $q^* > q$, при этом если q^* превышает q, то превышение незначительно. Кроме того, если $v_{n-1} \ge \lfloor b/2 \rfloor$, то $q^* - 2 < q < q^*$. Это условие носит название условия нормализации. Его можно обеспечить, помножив делимое и делитель на $\lfloor b/(v_{n-1}+1) \rfloor$. Дополнительно можно показать, что если $q^* v_{n-2} > b r^* + u_{j+n-2}$, то $q^* < q$, где $r^* = u_n b + u_{n-1} + q^* v_{n-1}$. В противном случае $q \in \{ q^*, q^* - 1\}$. Исходя из этих соображений, алгоритм вычисления частного m и остатка n от деления $(u_{m+n-1}, \ldots, u_0)_b$ на $(v_{n-1}, \ldots, v_0)_b$ имеет вид:

DIVIDE(u, v, m, n)
$d := \lfloor b/(v_{n-1}+1) \rfloor$;
$(u_{m+n}, u_{m+n-1}, \ldots, u_0)_b := d \cdot (u_{m+n-1}, \ldots, u_0)_b$
$(v_{n-1}, \ldots, v_0)_b := d \cdot (v_{n-1}, \ldots, v_0)_b$
$j := m$
while $j \ge 0$
  do $q^* := \lfloor (u_{j+n}b + u_{j+n-1})/v_{n-1} \rfloor$
    $r^* := (u_{j+n}b + u_{j+n-1}) \bmod v_{n-1}$
    if $(q^* = b) \vee (q^* v_{n-2} > b r^* + u_{j+n-2})$
      then $q^* := q^* - 1$
        $r^* := r^* + v_{n-1}$
    if $(r^* < b) \wedge (q^* v_{n-2} > b r^* + u_{j+n-2})$
      then $q^* := q^* - 1$
        $r^* := r^* + v_{n-1}$

```
        (u_{j+n}, …, u_j)_b := (u_{j+n}, …, u_j)_b – q*(v_{n-1}, …, v_0)_b
        if (u_{j+n}, …, u_j)_b < 0
            then NegFlag := true
                 (u_{j+n}, …, u_j)_b := (u_{j+n}, …, u_j)_b + b^{n+1}
            else  NegFlag := false
                 q_j = q*
        if NegFlag = true
            then q_j := q_j – 1
                 (u_{j+n}, …, u_j)_b := (u_{j+n}, …, u_j)_b + (0, v_{n-1}, …, v_0)_b
        j := j – 1
return ((q_m, …, q_1 q_0)_b, (u_{n-1}, …, u_0)_b /d)
```

Некоторые фрагменты этого алгоритма выполняются очень редко, что затрудняет отладку.

Задания

1. Реализуйте алгоритмы «в столбик» для вычисления суммы, произведения и частного двух целых чисел большой разрядности.
2. Реализуйте алгоритмы Карацубы для умножения целых чисел большой разрядности.
3. Сравните скорость работы и затраты памяти для реализованных в заданиях 1 и 2 алгоритмов умножения целых чисел большой разрядности.

6. АСИММЕТРИЧНЫЕ КРИПТОСИСТЕМЫ. АЛГОРИТМ RSA

Криптосистема RSA была предложена в 1977 году тремя учёными: Роном Ривестом, Ади Шамиром и Леонардом Адлеманом. Алгоритм шифрования данных RSA является асимметричным, поскольку для шифрования и расшифрования данных используются два различных ключа, называемых открытым и закрытым. Принципиальное отличие криптосистемы RSA от симметричных криптосистем заключается в том, что раскрытие ключа, которым было произведено шифрование, не влечёт за собой раскрытия исходного текста. Данный факт допускает пересылку ключа шифрования без использования каких-либо защищённых каналов связи. Это обеспечивается свойством криптосистемы RSA, в соответствии с которым использованный для шифрования данных открытый ключ не подходит для их расшифрования. Для расшифрования используется закрытый ключ, который не может быть получен из открытого.

Шифрование в системе RSA производится путём возведения исходного текста X ($0 \le X < r$) в степень открытого ключа K_O по модулю большого числа r:

$$Y = E_{KO}(X) = X^{KO} \bmod r.$$

Расшифрование производится путём возведения шифротекста Y в степень закрытого ключа K_C по модулю r :

$$Y^{KC} \bmod r = (X^{KO} \bmod r)^{KC} \bmod r = X^{KO \cdot KC} \bmod r = X \bmod r.$$

Возможность получения исходного текста из зашифрованного обеспечивается свойством открытого и закрытого ключей, для которых должно выполняться равенство

$$(K_O \cdot K_C) \bmod \varphi(r) = 1,$$

где $\varphi(r)$ – функция Эйлера от r. Закрытый ключ является мультипликативным инверсным по модулю $\varphi(r)$ для открытого. По теореме Эйлера

$$a^{\varphi(r)} = 1 \bmod r,$$

где $(a, r) = 1$.

Известно, что если

$$a = b \bmod r,$$

то

$$a^n = b^n \bmod r.$$

Из этого следует, что

$$X^{n \cdot \varphi(r)} = 1 \bmod r. \qquad (2)$$

Поскольку для модулярной арифметики справедливо

$m \cdot a = m \cdot b \bmod r$,

то мы можем умножить левую и правую части равенства (2) на X:

$$X^{n \cdot \varphi(r)+1} = X \bmod r.$$

Если представить показатель степени $n \cdot \varphi(r)+1$ как произведение значений K_O и K_C, то получим:

$K_O \cdot K_C = 1 \bmod \varphi(r)$.

Процедура формирования параметров алгоритма RSA выглядит следующим образом:

1) генерируются два больших простых числа: p и q, $p \neq q$;

2) вычисляется произведение данных чисел: $r = p \cdot q$;

3) находится функция Эйлера от r: $\varphi(r) = (p-1) \cdot (q-1)$;

4) генерируется значение открытого ключа K_O, исходя из следующих условий: $K_O < \varphi(r)$, $(K_O, \varphi(r)) = 1$;

5) вычисляется мультипликативное инверсное по модулю $\varphi(r)$ для K_O. Полученное значение будет являться закрытым ключом K_C.

Для вычисления мультипликативного инверсного можно использовать расширение алгоритма Евклида. Расширенный алгоритм Евклида позволяет найти значения x_1 и y_1, при которых выполняется равенство $x_1 \cdot a + y_1 \cdot b = d_1$, где $d_1 = \text{НОД}(a, b)$. Если $a > b$ и числа a, b – взаимно простые, то есть $d_1 = 1$, то y_1 является мультипликативным инверсным для b по модулю a.

```
EUCLIDEX(a; b)
1     d0:=a; d1:=b;
2     x0:=1; x1:=0;
3     y0:=0; y1:=1;
4     while d1>1 do
      begin
5           q:=d0 div d1;
6           d2:=d0 mod d1;
7           x2:=x0–q*x1;
8           y2:=y0–q*y1;
9           d0:=d1; d1:=d2;
10          x0:=x1; x1:=x2;
11          y0:=y1; y1:=y2;
      end
12    return (x1; y1; d1)
```

Если расширенный алгоритм Евклида используется для вычисления мультипликативного инверсного и в результате выполнения алгоритма получено отрицательное значение, то к нему необходимо прибавить величину a.

Для выполнения процедур шифрования и расшифрования можно использовать алгоритм быстрого возведения в степень по модулю, позволяющий для положительных целых a, z и n вычислить $x = a^z \bmod n$.

```
FASTEXP(a; z; n)
1    a1:=a; z1:=z; x:=1;
2    while z1≠0 do
     begin
3        while (z1 mod 2)=0 do
         begin
4            z1:=z1 div 2;
5            a1:=(a1*a1) mod n;
         end
6        z1:=z1–1;
7        x:=(x*a1) mod n;
     end
8    return (x)
```

Рассмотрим пример использования алгоритма RSA:

1) выберем два простых числа: $p = 41$ и $q = 59$;

2) вычислим их произведение $q = p \cdot q = 2419$;

3) вычислим функцию Эйлера: $\varphi(r) = (p–1)\cdot(q–1) = 40 \cdot 58 = 2320$;

4) выберем $K_O = 157$; (2320, 157) = (157, 122) = (122, 35) = (35, 17) = 1;

5) найдем значение K_C, для которого выполняется: $157 \cdot K_C = 1 \bmod \varphi(r) = 1 \bmod 2320$. Положив a равным $\varphi(r)$ и b равным K_O, по расширенному алгоритму Евклида вычислим $K_C = y_1 = 133$.

В качестве примера зашифруем строку «BSUIR». Символам исходного текста соответствуют следующие десятичные ASCII-коды:

«B» : 66;
«S» : 83;
«U» : 85;
«I» : 73;
«R» : 82.

Таким образом, исходный текст M будет представлять собой последовательность чисел: M={66, 83, 85, 73, 82}. Тогда компоненты шифротекста C будут получены следующим образом:

$C[1] = M[1]^{KO} \bmod r = 66^{157} \bmod 2419 = 1425$;

$C[2] = M[2]^{KO} \bmod r = 83^{157} \bmod 2419 = 575$;

$C[3] = 85^{157} \bmod 2419 = 1473$;

$C[4] = 73^{157} \bmod 2419 = 483$;

$C[5] = 82^{157} \bmod 2419 = 2296$.

Для расшифрования шифротекста C={1425, 575, 1473, 483, 2296} воспользуемся закрытым ключом K_C:

$M[1] = C[1]^{KC} \bmod r = 1425^{133} \bmod 2419 = 66$;

$M[2] = 575^{133} \bmod 2419 = 83$;
$M[3] = 1473^{133} \bmod 2419 = 85$;
$M[4] = 483^{133} \bmod 2419 = 73$;
$M[5] = 2296^{133} \bmod 2419 = 82$.

Таким образом, мы вновь получили исходный текст {66, 83, 85, 73, 82}, который соответствует строке «BSUIR».

Субъект, желающий получать зашифрованные по алгоритму RSA сообщения, публикует сгенерированную им пару значений (K_O, r) в общедоступном месте. Значение закрытого ключа K_C, а также значения p и q хранятся в секрете.

Для того чтобы организовать секретный канал связи, абоненты A и B посылают друг другу свои открытые ключи, не заботясь о том, что их значения узнает кто-то посторонний. При обмене сообщениями абонент A шифрует отправляемые данные открытым ключом абонента B, а абонент B шифрует отправляемые данные открытым ключом абонента A. Для расшифрования полученных сообщений участники переписки используют свои секретные ключи.

Криптостойкость системы RSA основывается на сложности определения закрытого ключа по открытому, поскольку для этого потребуется вычислить функцию Эйлера от значения параметра r, для чего необходимо разложить r на множители. На сегодняшний день данная задача не имеет эффективного решения, а использование традиционных методов поиска множителей для чисел размерностью порядка 2^{2048} (именно такие числа рекомендуется использовать в алгоритме RSA) не позволяет осуществить взлом криптосистемы за разумное время.

Задания

1. Разработать программное средство, выполняющее вычисление открытого ключа (K_O) алгоритма RSA и побайтовое шифрование данным ключом по алгоритму RSA произвольного файла. Значения параметров p, q и K_C, а также имя входного файла задаются пользователем. Программа должна осуществлять проверку ограничений на вводимые пользователем значения параметров алгоритма.
2. Разработать программное средство, выполняющее расшифрование файла, каждый 16-битный блок которого представляет собой зашифрованное по алгоритму RSA 8-битное значение. Значения модуля r и *закрытого* ключа K_C задаются пользователем.
3. Разработать программное средство, выполняющее дешифрование (взлом) файла, каждый 16-битный блок которого представляет собой зашифрованное по алгоритму RSA 8-битное значение. Значения модуля r и *открытого* ключа K_O, которым был *зашифрован* файл, задаются пользователем.

7. ЭЛЕКТРОННАЯ ЦИФРОВАЯ ПОДПИСЬ

При электронном документообороте традиционные методы подтверждения подлинности документа при помощи оттиска печати или поставленной от руки подписи являются непригодными. Вместо этого используется электронная цифровая подпись (ЭЦП) под электронным документом, представляющая собой небольшой объём данных, передаваемых вместе с документом при его пересылке. Любая система электронной цифровой подписи включает в себя процедуру подписания электронного документа и процедуру проверки данной подписи.

Наибольшим удобством использования обладают схемы цифровой подписи на основе криптосистем с открытым ключом. Для таких схем при постановке подписи используется закрытый ключ автора электронного документа, а при проверке подписи – открытый ключ.

Важной составляющей любой системы электронной цифровой подписи является процедура вычисления дайджеста сообщения, необходимого для защиты передаваемой информации от случайного либо преднамеренного искажения. Для вычисления дайджеста используется криптографическая хеш-функция, формирующая хеш-образ отправляемого сообщения.

Алгоритм безопасного хеширования SHA-1

Алгоритм безопасного хеширования SHA-1 был опубликован в 1995 году в качестве замены использовавшегося до этого алгоритма хеширования SHA-0, в котором была обнаружена уязвимость.

Для сообщения произвольной длины l, не превышающей 2^{64} бит, алгоритм SHA-1 формирует 160-битовый хеш-образ.

Процедура формирования хеш-образа состоит из следующих шагов.

1. Весь исходный текст разбивается на блоки по 512 бит. В случае если длина исходного текста не кратна 512 битам, производится его выравнивание за счёт добавления в конец бита со значением 1, m нулевых битов и 64-битного представления значения длины исходного сообщения (рис. 12).

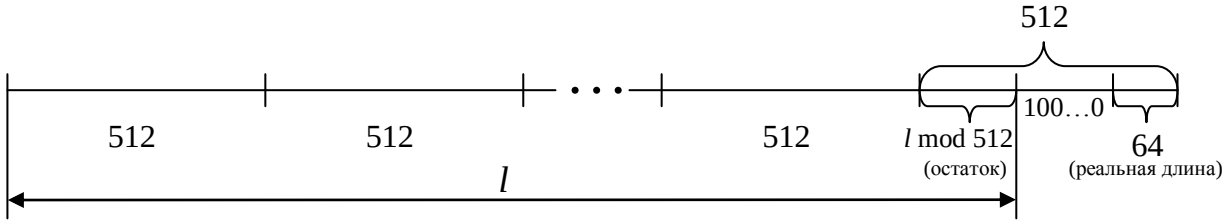


Рис. 12. Выравнивание исходного сообщения

2. Инициализируется пять 32-битных рабочих переменных A, B, C, D, E:

$A \leftarrow 67452301_{16}$

$B \leftarrow EFCDAB89_{16}$

$C \leftarrow 98BADCFE_{16}$

$D \leftarrow 10325476_{16}$

$E \leftarrow C3D2E1F0_{16}$

3. Выполняется обработка очередных 512 бит исходного текста. Для этого значения переменных *A*, *B*, *C*, *D*, *E* копируются в переменные *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и далее для *t* от 1 до 80 выполняется преобразование значений данных переменных по схеме, изображенной на рис. 13.

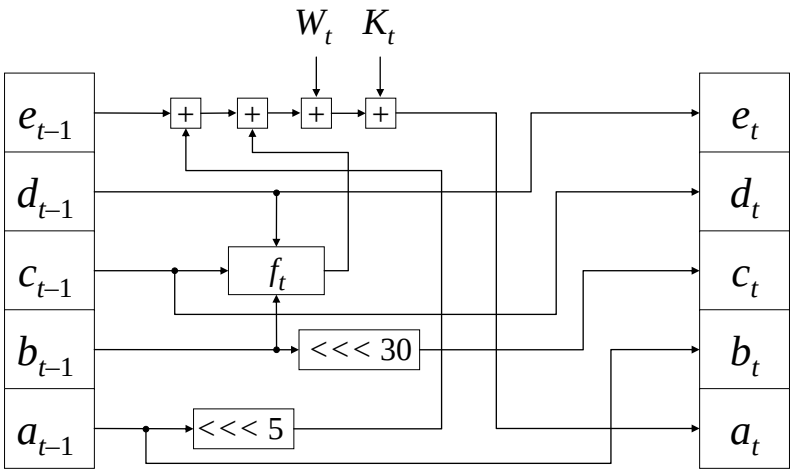


Рис. 13. Схема итерации алгоритма SHA-1

Каждая из 80 итераций может быть записана следующим образом:

$TMP \leftarrow (a \lll 5) + f_t(b, c, d) + e + W_t + K_t;$
$e \leftarrow d;$
$d \leftarrow c;$
$c \leftarrow (b \lll 30);$
$b \leftarrow a;$
$a \leftarrow TMP,$

где «+» – операция сложения по модулю 2^{32}, $f_t(X, Y, Z)$ – нелинейная функция, имеющая следующий вид:

$$f_t(X,Y,Z) = \begin{cases} (X \,\&\, Y) \mid (\,!X \,\&\, Z), & t = 1..20 \\ X \oplus Y \oplus Z, & t = 21..40 \\ (X \,\&\, Y) \mid (X \,\&\, Z) \mid (Y \,\&\, Z), & t = 41..60 \\ X \oplus Y \oplus Z, & t = 61..80 \end{cases}$$

где «&» – побитовая операция «И», «|» – побитовая операция «ИЛИ», «!» – операция побитового инвертирования, «⊕» – операция побитового сложения по модулю 2. Параметр K_t принимает четыре различных значения в зависимости от номера текущей итерации:

K_t = 5A827999$_{16}$, $t = \overline{1,20}$;

K_t = 6ED9EBA1$_{16}$, $t = \overline{21,40}$;

K_t = 8F1BBCDC$_{16}$, $t = \overline{41,60}$;

K_t = CA62C1D6$_{16}$, $t = \overline{61,80}$.

«<<<» – операция циклического сдвига на 30 либо 5 бит влево, W_t – одно из шестнадцати 32-битных слов 512-битного блока сообщения при $t = \overline{1,16}$ либо значение, определяемое в соответствии со следующим выражением при $t = \overline{17,80}$:

$W_t = (W_{t-3} \oplus W_{t-8} \oplus W_{t-14} \oplus W_{t-16}) <<< 1$.

4. Значения переменных *a*, *b*, *c*, *d*, *e* независимо друг от друга складываются по модулю 2^{32} со значениями переменных *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, в которые затем и помещаются полученные результаты.

5. Шаги 3–4 выполняются до тех пор, пока не будет обработан весь текст.

После обработки последнего блока текста значение хеш-образа формируется как *ABCDE*.

Алгоритм цифровой подписи RSA

Математическая схема электронной цифровой подписи по алгоритму RSA была предложена в 1977 году сотрудниками Массачусетского технологического института США. Данная система цифровой подписи стала первым практическим решением задачи подписи электронных документов при помощи криптосистем с открытым ключом. Процедура вычисления цифровой подписи в данной системе использует криптографическое преобразование по алгоритму RSA.

В соответствии с данной системой цифровой подписи, субъект, желающий пересылать подписанные им документы, должен сформировать два ключа алгоритма RSA: открытый и закрытый.

Пару значений (K_O, r), которая является открытым ключом подписи, отправитель передаёт всем возможный получателям его сообщений. Именно эти значения будут использоваться для проверки подлинности и принадлежности отправителю полученных от него сообщений.

Значение K_C сохраняется отправителем в секрете. Данное значение вместе с модулем r является секретным ключом, который будет использоваться отправителем для постановки подписей под своими сообщениями.

Схема использования алгоритма цифровой подписи на базе RSA для обмена двух абонентов подписанными сообщениями показана на рис. 14.

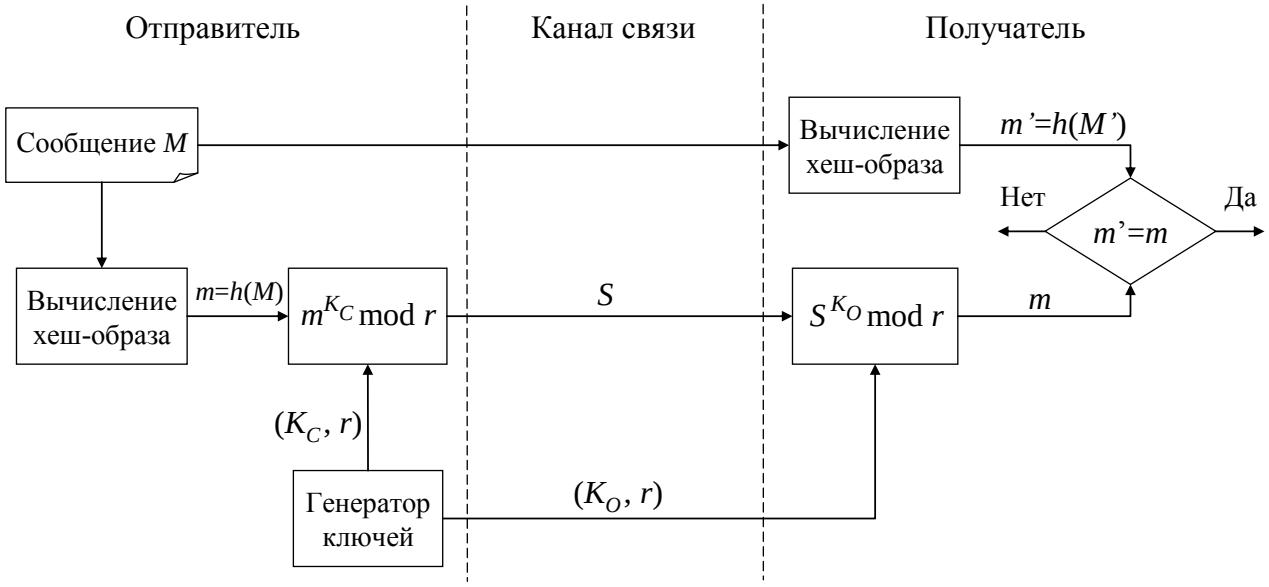


Рис. 14. Схема использования цифровой подписи на базе RSA

Допустим, что получатель уже располагает открытым ключом подписи отправителя.

Процедура подписи отправителем сообщения M будет состоять из следующих шагов.

1. Отправитель сжимает сообщение M при помощи криптографической хеш-функции h в целое число $m = h(M)$.

2. Отправитель вычисляет значение цифровой подписи S для сообщения M на основе ранее полученного значения хеш-образа m и значения своего закрытого (секретного) ключа подписи K_C. Для этого используется преобразование, аналогичное преобразованию, выполняемому при шифровании по алгоритму RSA:

$S = m^{KC} \bmod r$.

Пара (M, S), представляющая собой подписанное отправителем сообщение, передаётся получателю. Сформировать подпись S мог только обладатель закрытого ключа K_C.

Процедура проверки получателем подлинности сообщения и принадлежности его отправителю состоит из следующих шагов.

1. Получатель сжимает полученное сообщение M' при помощи криптографической хеш-функции h, идентичной той, которая была использована отправителем, в целое число m'.

2. Получатель выполняет расшифрование открытым ключом K_O отправителя дайджеста m оригинального сообщения, преобразуя значение подписи S по алгоритму RSA:

$m = S^{KO} \bmod r$.

3. Получатель сравнивает полученные значения m' и m. Если данные значения совпадают, то есть

$S^{KO} \bmod r = h(M')$

то получатель признает полученное сообщение подлинным и принадлежащим отправителю.

Фальсификация сообщения при его передаче по каналу связи возможна только при получении злоумышленником секретного ключа K_C либо за счет проведения успешной атаки против использованной для вычисления дайджеста сообщения хеш-функции. При использовании достаточно больших значений p и q определение секретного значения K_C по открытому ключу (K_O, r) является чрезвычайно трудной задачей, соответствующей по сложности разложению модуля r на множители. Используемые в реальных приложениях хеш-функции обладают характеристиками, делающими атаку против цифровой подписи практически не осуществимой.

Задания

1. Реализовать алгоритм вычисления хеш-функции SHA-1 для файла с произвольным размером и содержимым.
2. Реализовать программное средство, выполняющее генерацию и проверку ЭЦП файла с произвольным содержимым на базе алгоритма RSA с использованием для вычисления хеш-функции ранее реализованного алгоритма SHA-1.

8. КРИПТОСИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Эллиптическая кривая над множеством действительных чисел может быть определена как набор точек (x, y), удовлетворяющих уравнению эллиптической кривой вида $y^2 = x^3 + ax + b$ (x, y, a и b – действительные числа), а также некоторый элемент O, называемый неопределенным (нулевым) элементом (рис. 15).

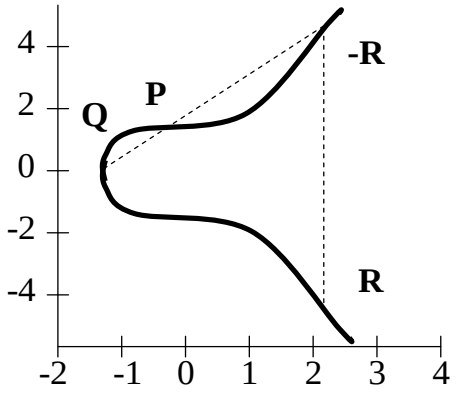


Рис. 15. Эллиптическая кривая $y^2 = x^3 + x + 1$

По определению, эллиптическая кривая обладает следующим свойством: если три ее точки лежат на одной прямой, то их сумма равна O. Это свойство позволяет описать правила сложения и умножения точек эллиптической кривой.

1. Если O – нулевой элемент, то справедливо равенство $O = -O$, а для любой точки P эллиптической кривой имеем $P + O = P$.
2. Прямая, проходящая через точки P и $-P$, является вертикальной прямой, которая не пересекает эллиптическую кривую ни в какой третьей точке. По определению, $P + (-P) = O$.
3. Пусть P и Q – две различные точки эллиптической кривой, и $P \neq -Q$. Проведем через P и Q прямую. Она пересечет эллиптическую кривую только еще в одной точке, называемой $-R$. Точка $-R$ отображается относительно оси X в точку R. Закон сложения: $P + Q = R$.
4. Чтобы сложить точку P с ней самой, нужно провести касательную к кривой в точке P. Если $y_P \neq 0$, то касательная пересечет эллиптическую кривую ровно в одной точке R. Закон удвоения точки P: $P + P = 2P = R$.
5. Умножение точки P на целое положительное k определяется как сумма k точек P: $kP = P + P + P + \ldots + P$.

Эллиптическая кривая может быть использована для построения эллиптической группы, если ее параметры a и b удовлетворяют соотношению $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \pmod M$, где M – простое число, $a < \boldsymbol{M}$ и $b < \boldsymbol{M}$.

Эллиптическая группа $E_M(a,b)$ представляет собой набор точек (x, y) с целыми положительными координатами, $x < M$ и $y < M$, которые удовлетворяют соотношению $y^2 = x^3 + ax + b \pmod M$.

Алгоритм формирования элементов эллиптической группы:

1. Для всех значений x ($0 < x < M$) вычисляется значение $x^3 + ax + b \ (mod\ M)$.

2. Для каждого значения из шага 1 определяется квадратный корень по модулю ***M*** и элемент включается в группу $E_M(a,b)$, если результат положительный.

Пример. Пусть $a = 1$, $b = 0$ и $M = 23$, тогда $y^2 = x^3 + x$. Так как $4 \cdot 1^3 + 27 \cdot 1^2 = 8 \neq 0 \pmod{23}$, то можно построить группу $E_{23}(1,1)$. Существуют 23 точки, которые удовлетворяют уравнению группы, а именно (0,0) (1,5) (1,18) (9,5) (9,18) (11,10) (11,13) (13,5) (13,18) (15,3) (15,20) (16,8) (16,15) (17,10) (17,13) (18,10) (18,13) (19,1) (19,22) (20,4) (20,19) (21,6) (21,17). Заметим, что для каждого значения x существует по две точки с симметрией относительно $y = 11{,}5$. В случае эллиптических кривых над действительными числами для каждой точки имеется отрицательная, отображаемая относительно оси x. В случае использования конечной эллиптической группы отрицательные значения координаты y берутся по модулю, в результате чего получаются положительные координаты: $-P = (xP, (-yP \bmod M))$. Например, если $P = (1,5)$, то $-P = (1, (-5 \bmod 23)) = (1,18)$.

Рассмотрим алгоритм сложения точек эллиптической группы. Пусть $P = (x_1, y_1)$ и $Q = (x_2, y_2)$. Тогда $P + Q = (x_3, y_3)$, где $x^3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 \pmod{M}$ и $y_3 = \lambda \times (x_1 - x_3 - y_1) \pmod{M}$, а

если $P \neq Q$,

если $P = Q$.

Число λ – угловой коэффициент секущей, проведенной через точки $P = (x_1,y_1)$ и $Q = (x_2, y_2)$. При $P = Q$ секущая превращается в касательную, чем и объясняется наличие двух формул для вычисления λ.

Пример. Пусть эллиптической группа задана уравнением $y^2 = x^3 + 9x + 17 \bmod 23$. Найдем в ней значение произведение $2P=P+P$ для точки $P = (16, 5)$.

$\lambda = (3x_P^2 + a)/(2y_P) \bmod M = (3 \cdot 16^2+9)/(2 \cdot 5) \bmod 23$;

тогда $10\lambda = 18 \bmod 23$, отсюда:

$\lambda = 18 \cdot 10^{\varphi(23)-1} \bmod 23 = 18 \cdot 10^{21} \bmod 23 = 11$;

$x_R = \lambda^2 - 2x_P \bmod M = (11^2 - 2 \cdot 16) \bmod 23 = 20$;

$y_R = -y_P + \lambda(x_P - x_P) \bmod M = -5 + 11 \cdot (16 - 20) \bmod 23 = -49 \bmod 23 = 20$.

В результате получаем $2P = (20,20)$.

Умножение точек эллиптической группы на число определяется аналогично умножению для эллиптических кривых как многократное сложение точки с собой. Если вычислять $P + P + P + \ldots$ достаточно долго, то, т.к. число точек конечно, в конце концов, должен быть получен результат O. Всегда можно найти такие a и b $(b > a)$, что $aP = bP$. Это означает, что $cP = O$, где $c = b - a$. Наименьшее c, для которого это справедливо, называется ***порядком*** точки.

Использование эллиптических групп в криптографических целях основано на сложности решения задачи дискретного логарифмирования в эллиптической группе, которая может быть сформулирована так: для заданных точек P и Q найти такое k, чтобы $kP = Q$. Значение k называется логарифмом от

Q по основанию P. Если взять значение k достаточно большим, то задача нахождения k становится практически неосуществимой.

Алгоритм обмена ключами в эллиптической группе

Прежде всего, задается большое простое число M, а также параметры a и b для определения эллиптической группы $E_M(a,b)$. Затем выбирается генерирующая точка G такая, чтобы c, для которого $cG = O$, было большим простым числом с «хорошими алгебраическими свойствами». Размер числа c на практике довольно велик ($2^{254} < c < 2^{256}$). Параметры $E_M(a,b)$ и G открыты для всех.

Процедура обмена ключами между пользователями ***A*** и ***B***:

1. Пользователь ***A*** выбирает целое число n_A такое, что $n_A < M$. n_A – секретный ключ пользователя ***A***. Затем пользователь ***A*** генерирует открытый ключ $P_A = n_A G$. Заметим, что P_A – точка из группы $E_M(a,b)$.
2. Пользователь ***B*** выполняет те же действия для получения своего секретного ключа n_B и открытого ключа P_B.
3. Пользователь ***A*** генерирует общий секретный ключ $K = n_A P_B$, а пользователь ***B*** генерирует тот же секретный ключ $K = n_B P_A$.
4. Легко показать, что $n_A P_B = n_A(n_B G) = n_B(n_A G) = n_B P_A$.

Для взлома третья сторона должна вычислить k (n_A или n_B) на основании G и kG, т.е. решить задачу дискретного логарифмирования в эллиптической группе.

Пример. Пусть $M = 211$, $E_{211}(0,-4)$ и $G = (2,2)$. Легко проверить, что $241G = O$, а 241 является простым числом.

1. Секретный ключ $n_A = 121$, тогда открытый ключ $P_A = n_A G = 121 \cdot (2,2) = (115,48)$.
2. Секретный ключ $n_B = 203$, открытый ключ $P_B = n_B G = 203 \cdot (2,2) = (130,203)$.
3. Общий секретный ключ $K = n_A P_B = n_B P_A = 121 \cdot (130,203) = 203 \cdot (115,48) = (161,69)$.

Алгоритм ЭЦП на основе эллиптических кривых (ECDSA)

Алгоритм ECDSA (Elliptic Curve DSA) является аналогом алгоритма цифровой подписи DSA (Digital Signature Algorithm), реализованным с помощью эллиптических групп. Рассмотрим эллиптическую группу $E_M(a,b)$ и генерирующую точка G с порядком q, причем q простое число.

Пользователи ***A*** генерируют свои ключи: секретный n_A и открытый P_A, где $P_A = n_A G$. Для постановки цифровой подписи под сообщением m пользователь ***A***:

1. На основе хэш-функции $h()$ находит хеш-код $h(m)$ от m. В качестве хеш-функции должна использоваться криптографически стойкая функция, например SHA-1.
2. Генерирует случайное число k, $1 < k < q - 1$.
3. Вычисляет значение $kG = (x_1,y_1)$ и $r = x_1 \bmod q$. Если $r = 0$, возвращается на шаг 2.

4. Вычисляет $s = k^{-1}(h(m) + n_A r) \pmod q$. Если $s = 0$, то возвращается на шаг 2.

5. Подпись сообщения m – это пара целых чисел (r,s).

Для проверки цифровой подписи пользователь ***B*** использует ту же эллиптическую группу $E_M(a,b)$, генерирующую точку G, открытый ключ P_A и хэш-функцию h.

1. На основе хэш-функции h определяем хэш-код $h(m)$ от m.
2. Проверяем, принадлежат ли числа ***r*** и ***s*** интервалу от 1 до $q - 1$.
3. Вычисляем $w = s^{-1} \bmod q$.
4. Вычисляем $u_1 = h(m)w \bmod q$ и $u_2 = rw \bmod q$.
5. Вычисляем $u_1G + u_2P_A = (x_1^*, y_1^*)$ и $r^* = x_1^* \bmod q$.
6. Равенство $r^* = r$ удостоверяет подпись пользователя ***A***.

Особое достоинство криптосистем на эллиптических кривых состоит в том, что по сравнению с системами на основе алгоритма RSA они обеспечивают существенно более высокую стойкость при равной трудоемкости или, наоборот, существенно меньшую трудоемкость при равной стойкости. В результате тот уровень стойкости, который достигается в RSA при использовании 1024-битовых модулей, в системах на эллиптических кривых реализуется при размере модуля 160 бит, что обеспечивает более простую как программную, так и аппаратную реализацию.

Задания

1. Для заданного ***M*** (табл. 4) определить значения a и b, которые позволяют построить эллиптическую группу $E_M(a, b)$.

2. Для найденных в задании 1 параметров сгенерировать все элементы эллиптической группы $E_M(a, b)$.

3. Реализовать алгоритм обмена ключами для эллиптической группы $E_M(a,b)$.

4. Разработать алгоритм цифровой подписи на основе эллиптической группы $E_M(a, b)$.

Таблица 4

Варианты заданий

Параметр	Номер варианта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Модуль M	47	53	59	61	67	71	73	79

Св. план 2007 г., поз. 60

Учебное издание

Ярмолик Вячеслав Николаевич
Занкович Артем Петрович
Портянко Сергей Сергеевич

Элементы теории информации

Практикум
для студентов специальности
«Программное обеспечение информационных технологий»
дневной и дистанционной формы обучения

Редактор М. В. Тезина
Корректор

Подписано в печать	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Печать ризографическая.	Гарнитура «Таймс».	Усл. печ.л.
Уч.-изд.л.	Тираж	Заказ