Задание на восьмую неделю.

1. Докажите формулу обращения: $(M_n(\omega))^{-1} = \dfrac{1}{n} M_n(\omega^{-1})$. Вычислите также матрицу $(M_n(\omega))^4$.

2. Найдите произведение многочленов $A(x) = x^3+3x+2$ и $B(x) = 3x^3+3x^2+2$ с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Для этого найдите рекурсивно дискретное преобразование Фурье двух массивов $A = (0,0,0,0,1,0,3,2)$ и $B = (0,0,0,0,3,3,0,2)$, затем вычислите ДПФ массива C и восстановите коэффициенты многочлена-произведения, используя обратное преобразование.

3. Даны числа $x_1, \dots, x_n$. Доказать, что коэффициенты многочлена $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - x_i)$, можно найти за $O(n \log_2^2 n)$ арифметических операций.

4. Используя ДПФ, найдите решение системы линейных уравнений $Cx = b$. где C — это циркулянтная матрица, порожденная вектором столбцом $(1,2,4,8)^T$, а $b^T = (16,8,4,2)$.

5. Обозначим для вектора $\vec{x}$ циркулянтную матрицу с первым столбцом $\vec{x}$ за $\mathrm{circ}(\vec{x})$. Назовём циклической свёрткой $\vec{x} * \vec{y}$ двух векторов произведение матрицы на вектор $\mathrm{circ}(\vec{x})\vec{y}$. Докажите, что $\mathrm{FFT}(\vec{x} * \vec{y})$ есть произведение векторов $\mathrm{FFT}(\vec{x})$ и $\mathrm{FFT}(\vec{y})$ по Адамару (т. е. поэлементное: i-ая компонента вектора-произведения есть произведение i-ых компонент сомножителей).

6. Рассмотрим циркулянтную матрицу порядка $n+1$, первый столбец которой равен $(c_0, c_1, \dots, c_n)^T$, т. е. матрицу вида

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_n & c_{n-1} & \dots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_n & \dots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \dots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

Докажите, что все её собственные значения, домноженные на $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, могут быть найдены умножением матрицы Фурье $F_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\omega_n^{ij}\right)_{i,j=0}^{n}$

размеров $(n+1)\times(n+1)$, где $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — корень из единицы, на вектор $(c_0, c_n, c_{n-1}, \dots, c_1)^T$. Найдите с помощью алгоритма БПФ собственные значения циркулянтной матрицы, первый столбец которой имеет вид $(1, 2, 4, 6)^T$.

7. Дано множество различных чисел $A \subseteq \{1, \dots, m\}$. Рассмотрим множество $A + A$, образованное суммами элементов A. Докажите или опровергните существование процедур построения $A + A$, имеющих субквадратичную трудоемкость $o(m^2)$.

8. Прочитайте статью:

P. Clifford, R. Clifford. Simple deterministic wildcard matching. Information Processing Letters 101 (2007) 53–54.

В этой задаче нужно обосновать некоторые утверждения из неё. Задача состоит в быстром нахождении подстроки $p_0, \dots p_{m-1}$ в строке $t_0, \dots, t_{n-1}$ (тексте). Подстрока входит с i-ой позиции, если $p_j = t_{i+j}$ для $j = 0, \dots, m-1$. Если считать буквы различными целыми числами, то вхождение подстроки с i-ой позициии эквивалентно обнулению суммы квадратов $B_i = \sum\limits_{j=0}^{m-1} (p_j - t_{i+j})^2$. Нужно вычислить весь массив $\{B_i, i = 0, \dots, n-m\}$.

(i) Покажите, как построить $O(n \log n)$-алгоритм поиска вхождения образца в текст.

(ii) Покажите, как, используя БПФ, построить $O(n \log n)$-алгоритм поиска вхождения образца в текст с «джокерами» (идея описана в том же тексте).

(iii) Покажите, как понизить сложность алгоритмов предыдущих двух пунктов до $O(n \log m)$.

9. Многочлен $A(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ задан последовательностью коэффициентов. Пусть последовательность $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$ — его ДПФ, т. е. $y_k = A\left(e^{\frac{2\pi k}{n} i}\right)$. Предложите алгоритм, вычисляющий $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (\mathrm{Re}\, y_k + \mathrm{Im}\, y_k)$ и требующий $o(n^2)$ арифметических операций.