Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Сложность вычислений, осень 2017
Пространственная сложность

Для определения пространственной сложности используются машины с двумя лентами: входной (с которой можно только читать) и рабочей, на которой можно производить операции и чтения, и записи. Если рассматривается не задача разрешения, а задача поиска или задача вычисления функции, то добавляется также третья лента для записи ответа, чтение с которой не разрешается. *Пространственной сложностью* машины Тьюринга $M$ называется максимальное число ячеек, использованных на рабочей ленте, среди всех входов фиксированной длины $n$.

**1.** Как меняется пространственная сложность при изменении вычислительной модели в рамках детерминированной машины Тьюринга? Например, докажите, что при добавлении нескольких рабочих лент сложность изменится не более, чем в константное число раз.

Классом $\mathbf{DSPACE}(f(n))$ (соотв., $\mathbf{NSPACE}(f(n))$) называется класс задач разрешения, пространственная сложность которых на (не-)детерминированной машине Тьюринга равна $O(f(n))$. Классом **PSPACE** (соотв., **NPSPACE**) называется $\bigcup_{c=1}^{\infty} \mathbf{DSPACE}(n^c)$ (соотв., $\bigcup_{c=1}^{\infty} \mathbf{NSPACE}(n^c)$).

**2.** Докажите, что $\mathbf{NP} \subset \mathbf{PSPACE} \subset \mathbf{NPSPACE} \subset \mathbf{EXP}$.

**3.** Докажите теорему о пространственной иерархии: если $f(n) = o(g(n))$, то $\mathbf{DSPACE}(f(n)) \neq \mathbf{DSPACE}(g(n))$.

*Теорема Сэвича* утверждает, что $\mathbf{NSPACE}(f(n)) \subset \mathbf{DSPACE}(f(n)^2)$.

**4.** Докажите, что $\mathbf{PSPACE} = \mathbf{NPSPACE}$.

**5.** Докажите, что следующие языки лежат в **PSPACE**:

а) $\mathsf{TQBF} = \{\varphi \mid \exists x_1 \forall x_2 \ldots \mathbf{Q} x_n \varphi\}$ (Здесь $\varphi$ — булева формула, кванторы стоят по всем переменным, в неё входящим, и чередуются, $\mathbf{Q}$ обозначает $\forall$, если $n$ чётно, и $\exists$, если нечётно).

б) $\mathsf{XO} = \{$Выигрышные позиции в крестиках-ноликах на доске $n \times n\}$.

в) $\mathsf{GEOGRAPHY} = \{$Выигрышные позиции в обобщённой игре в города$\}$. (Правила обобщённой игры в города: дан некоторый ориентированный граф $G$ с выделенной точкой. Нужно двигать фишку по рёбрам графа, начиная с выделенной точки, при этом второй раз посещать ту же вершину нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход).

Язык называется **PSPACE**-трудным, если любой язык из **PSPACE** к нему полиномиально сводится, и **PSPACE**-полным, если при этом он сам лежит в **PSPACE**. Классическим примером **PSPACE**-полного языка является $\mathsf{TQBF}$.

**6.** Докажите, что:

а) Если $B \in \mathbf{PSPACE}$ и $A \leqslant_p B$, то $A \in \mathbf{PSPACE}$;

б) Если $A$ является **PSPACE**-трудным и $A \leqslant_p B$, то $B$ также **PSPACE**-трудный;

в) Если $A$ является **PSPACE**-полным, $A \leqslant_p B$ и $B \in \mathbf{PSPACE}$, то $A$ также **PSPACE**-полный;

г) Если $A$ является **PSPACE**-полным и $A \in \mathbf{P}$, то $\mathbf{P} = \mathbf{PSPACE}$;

**7.** Докажите **PSPACE**-полноту следующих языков:

а) $\mathsf{SPACETMSAT} = \{(M, w, 1^n) \mid$ машина $M$ принимает $w$ на памяти не больше $n\}$;

б) $\mathsf{TMLOOP} = \{(M, w, 1^n) \mid$ машина $M$ на входе $w$ зацикливается, использовав не больше $n$ ячеек памяти$\}$;

в) $\mathsf{SUCCINCTPATH} = \{(M, s, t) \mid$ в ориентированном графе, описанном машиной $M$, есть путь из $s$ в $t\}$ (описание графа понимается так: машина получает на вход два номера вершин и говорит, есть ли между ними ребро);

г) $\mathsf{GEOGRAPHY}$;

д) $\mathsf{EDGEGEOGRAPHY} = \{$Выигрышные позиции в обобщённой игре в города, где можно повторять вершины, но нельзя повторять рёбра$\}$.

Поскольку пространственная сложность измеряется как количество занятых ячеек только на рабочей ленте, обретают смысл классы **DSPACE** и **NSPACE** для сублинейных ограничений. Выделяют классы $\mathbf{L} = \mathbf{DSPACE}(\log n)$ и $\mathbf{NL} = \mathbf{NSPACE}(\log n)$.

**8.** Докажите, что $\mathbf{L} \subset \mathbf{NL} \subset \mathbf{P}$. (Указание: используйте динамическое программирование).

**9.** Докажите, что следующие языки лежат в $\mathbf{L}$:

а) $\mathsf{LE} = \{a\#b \mid a \leqslant b\}$ (числа записаны в двоичной записи);

б) $\mathsf{ADD} = \{a\#b\#c \mid c = a + b\}$;

в) $\mathsf{MULT} = \{a\#b\#c \mid c = a \cdot b\}$;

г) $\mathsf{PAL} = \{a \mid a = a^R\}$ ($a^R$ — слово $a$, записанное в обратном порядке);

д) $\mathsf{PAR}$ — множество правильных скобочных последовательностей;

е) $\mathsf{PARBRA}$ — множество правильных последовательностей из круглых и квадратных скобок (например, $(([])[]) \in \mathsf{PARBRA}$, а $([)] \notin \mathsf{PARBRA}$);

ж) $\mathsf{UCYCLE} = \{G \mid$ в неориентированном графе $G$ есть цикл$\}$;

з) $\mathsf{TREE} = \{G \mid G$ — дерево$\}$.

**10.** *Теорема Рейнгольда* утверждает, что язык $\mathsf{UPATH} = \{(G, s, t) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неориентированный путь из $s$ в $t\}$ лежит в $\mathbf{L}$. Опираясь на этот факт, докажите, что следующие языки лежат в $\mathbf{L}$:

а) $\mathsf{UCONNECTED} = \{G \mid$ неориентированный граф $G$ связен$\}$;

б) $\mathsf{BIPARTITE} = \{G \mid$ граф $G$ двудолен$\}$;

в) $\mathsf{EVENCONN} = \{G \mid$ неориентированный граф $G$ имеет чётное число компонент связности$\}$;

г) $\mathsf{EDGEUCYCLE} = \{(G, e) \mid$ в неориентированном графе $G$ существует цикл, содержащий ребро $e\}$;

д) XOR2SAT $= \{\varphi \mid \varphi$ — конъюнкция выражений вида $x_i \oplus x_j$, для которой есть выполняющий набор$\}$.

**11.** (Сертификатное определение **NL**) Докажите, что $A \in \mathbf{NL}$ тогда и только тогда, когда для некоторой детерминированной машины $M$ выполнена эквивалентность $x \in A \Leftrightarrow \exists s M(x, s) = 1$. При этом длина $s$ должна быть полиномиальна от длины $x$, машина получает $s$ на отдельной ленте, по которой может двигаться только слева направо, а количество ячеек, занятых на рабочей ленте, должно быть логарифмическим.

**12.** Какой класс получится, если в предыдущем определении разрешить машине двигаться по сертификатной ленте в обе стороны?

Классом **coNL** называется $\{A \mid \overline{A} \in \mathbf{NL}\}$. *Теорема Иммермана-Селепченьи* утверждает, что $\mathbf{NL} = \mathbf{coNL}$.

**13.** Докажите, что следующие языки лежат в **NL**:

а) PATH $= \{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть путь из $s$ в $t\}$;
б) SCONNECTED $= \{G \mid$ ориентированный граф $G$ сильно связен$\}$;
в) 2SAT;
г) BIPARTITE (без использования теоремы Рейнгольда).

**14.** Докажите, что $\mathbf{NL} \neq \mathbf{PSPACE}$.

Говорят, что язык $A$ логарифмически сводится к языку $B$ (обозначается $A \leqslant_l B$), если для некоторой функции $f$, вычислимой на логарифмической памяти, выполнена эквивалентность $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. Вычислимость на логарифмической памяти понимается в следующем смысле: длина $f(x)$ ограничена некоторым полиномом от длины $x$, а на логарифмической памяти можно распознать множества $\{(x, i) \mid i \leqslant |f(x)|\}$ и $\{(x, i) \mid f(x)\big|_i = 1\}$.

**15.** Докажите, что:

а) $A \leqslant_l A$;
б) Если $A \leqslant_l B$ и $B \leqslant_l C$, то $A \leqslant_l C$;
в) Если $A \leqslant_l B$ и $B \in \mathbf{L}$, то $A \in \mathbf{L}$;
г) Если $A \leqslant_l B$ и $B \in \mathbf{NL}$, то $A \in \mathbf{NL}$.

**16.** Докажите, что понятие логарифмической сводимости не изменится, если вычислимость на логарифмической памяти понимать в другом смысле: машина, вычисляющая $f$, имеет специальную ленту для ответа, по которой можно двигаться только слева направо. (Таким образом, ответом будет слово, написанное на этой ленте после окончания работы машины. Разумеется, использованная память измеряется только на рабочей ленте).

**17.** Докажите, что если $A$ и $B$ лежат в $\mathbf{NL} \setminus \{\varnothing, \{0,1\}^*\}$, то $A \leqslant_p B$. (Поэтому в следующем определении нельзя использовать полиномиальную сводимость вместо логарифмической).

Язык $B$ называется **NL**-трудным, если $A \leqslant_l B$ для любого $A \in \mathbf{NL}$, и **NL**-полным, если при этом также $B \in \mathbf{NL}$. Классическим примером **NL**-трудного языка является PATH $= \{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть путь из $s$ в $t\}$.

**18.** Докажите, что:

а) Если $B \in \mathbf{L}$ и $A \leqslant_l B$, то $A \in \mathbf{L}$;
б) Если $A$ является $\mathbf{NL}$-трудным и $A \leqslant_l B$, то $B$ также $\mathbf{NL}$-трудный;
в) Если $A$ является $\mathbf{NL}$-полным, $A \leqslant_l B$ и $B \in \mathbf{NL}$, то $A$ также $\mathbf{NL}$-полный;
г) Если $A$ является $\mathbf{NL}$-полным и $A \in \mathbf{L}$, то $\mathbf{L} = \mathbf{NL}$.

**19.** Докажите $\mathbf{NL}$-полноту следующих языков:

а) $\mathsf{2SAT}$;
б) $\mathsf{SCONNECTED}$;
в) $\mathsf{CYCLE} = \{G \mid \text{в ориентированном графе } G \text{ есть цикл}\}$.