

Задание на четвертую неделю.

1. (i) Докажите, что в Σ_2 лежит язык булевых формул от двух наборов переменных $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1 \dots y_n) = \varphi(\vec{x}, \vec{y})$ таких, что при некоторых значениях \vec{x} они справедливы вне зависимости от значений y_1, \dots, y_n .

(ii) Придумайте какую-нибудь свою задачу из класса Σ_3 (или Π_3 , на ваш вкус).

(iii) Докажите, что $\Sigma_k \subset \Sigma_{k+1} \cap \Pi_{k+1}$.

(iv) Докажите, что $\mathcal{NP} \subset \mathcal{PSPACE} \subset \mathcal{EXPTIME}$.

2. Покажите, как свести следующую задачу к вычислению некоторого перманента: найти количество перестановок n элементов, в которых части элементов (с номерами i_1, i_2, \dots, i_k) запрещено занимать позиции j_1, \dots, j_k соответственно.

3. Докажите, что если всякий \mathcal{NP} -трудный язык является \mathcal{PSPACE} -трудным, то $\mathcal{PSPACE} = \mathcal{NP}$.

4. Докажите, что следующие языки лежат в \mathcal{L} :

(i) $\{a\#b\#c \mid c = a + b\}$ (a, b, c — числа в двоичной записи).

(ii) $\{a\#b\#c \mid c = a \cdot b\}$ (a, b, c — числа в двоичной записи).

(iii) $\text{UCYCLE} = \{G \mid \text{В неориентированном графе } G \text{ есть цикл}\}$

5. Сертификатное определение \mathcal{NL} : $A \in \mathcal{NL}$ тогда и только тогда, когда для некоторой детерминированной машины M выполнена эквивалентность: $x \in A \Leftrightarrow \exists s : M(x, s) = 1$. При этом длина s должна быть полиномиальна от длины x , машина получает s на отдельной ленте, по которой может двигаться только слева направо, а количество ячеек, занятых на рабочей ленте, должно быть логарифмическим.

Вопрос задачи: а какой класс получится, если в предыдущем определении разрешить машине двигаться по сертификатной ленте в обе стороны?

6. Докажите, что логарифмическая сводимость транзитивна, причем если $B \in \mathcal{L}$ и $A \leq_L B$, то $A \in \mathcal{L}$, а если $B \in \mathcal{NL}$ и $A \leq_L B$, то $A \in \mathcal{NL}$.

7 (Бонусная). Верно ли, что класс $\text{co-}\mathcal{NP}$ замкнут относительно операции чётной итерации $L^{\text{even-}*} = \{\varepsilon\} \cup L^2 \cup L^4 \cup \dots$?

8 (Бонусная). Докажите, что $C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - \dots = \frac{\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$.