Самый известный NP-полный язык — это, конечно, ВЫПОЛНИМОСТЬ, который состоит из кодировок всех выполнимых булевых формул. Иначе говоря, для каждой формулы [1] из языка ВЫПОЛНИМОСТЬ существуют такие значения переменных, при которых эта формула истинна. Можно считать формулы не произвольными, а, например, КНФ или даже 3-КНФ, у которых в каждый дизъюнкт входит не более 3 переменных. В последнем случае получаем язык 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ. Можно дополнительно предполагать, как это делается в **[Кормен 1]** или **[Кормен 2]**, что *в каждый дизъюнкт входит ровно три литерала* и что *все литералы в каждом дизъюнкте 3-КНФ различны*. Но от этого требования можно и отказаться, если окажется проще строить какие-то сводимости, т. е. рассмотреть более широкий полный язык, в котором литералы в дизъюнктах могут повторяться и в каждый дизъюнкт входит не более трех литералов. **Такой трактовки языка** 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ **мы и будем придерживаться в этом задании**. Тогда при часто используемом преобразовании 3-КНФ в РОВНО-3-КНФ можно просто дополнить дизъюнкт нужным числом литералов. Например, дизъюнкт $\neg x_2 \vee x_3$ переписывается в эквивалентном виде $\neg x_2 \vee x_3 \vee x_3$ или $\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_2$. Другое дело, что некоторые сводимости при таком понимании 3-КНФ, возможно, перестанут выполняться, и тогда нужно уточнить и/или изменить сами сводимости.

Приведем несколько примеров NP-полных языков.

ПРОТЫКАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО Дано семейство конечных множеств $\{A_1, \ldots, A_m\}$ и натуральное число k. Существует множество мощности k, пересекающее *каждое* A_i. Язык остается NP-полным, *даже если предположиить, что мощности всех* A_i *равны* 2.

КЛИКА. Даны неориентированый граф G и натуральное число k. В G есть клика (полный подграф) на k вершинах.

ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ

ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО. Даны неориентированый граф G и натуральное число k. Вершины G можно раскрасить в k цветов так, чтобы смежные вершины были окрашены в разные цвета. При $k = 3$ получаем язык 3-COLOR и он также NP-полный.

ГАМИЛЬТОНОВ ГРАФ. Дан неориентированый граф G, в котором есть *гамильтонов цикл*. Иными словами, существует циклический обход всех вершин графа, не попадающий ни в какую вершину дважды.

РАЗБИЕНИЕ или ЗАДАЧА О КАМНЯХ Дано конечное множество (куча) камней A, причем вес каждого камня $a \in A$ является целым положительным числом $s(a)$. Можно разбить A на две кучи одинакового веса. Иными словами, существует такое подмножество $A' \in A$, что $\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)$.

3-СОЧЕТАНИЕ. Дано множество $M \subseteq W \times X \times Y$, где W, X и Y — непересекающиеся множества, содержащие одинаковое число элементов q. В M есть *трехмерное сочетание*, т. е. такое подмножество $M' \subseteq M$ мощности q, никакие два элемента которого не имеют ни одной одинаковой координаты.

РЮКЗАК. Дана натуральные числа $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и натуральное число b, такие что сумма некоторых a_i равна b.

$\max -2$-ВЫПОЛНИМОСТЬ. Дана 2-КНФ (т. е. КНФ, в каждую дизъюнкцию которой входит не более двух логических переменных) и двоичное число k. Существует такой набор значений логических переменных, что выполняются k или более дизъюнкций.

МАКСИМАЛЬНЫЙ РАЗРЕЗ. Дан граф G и натуральное число k. Множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества, между которыми можно провести не менее k ребер.

Иногда говорят о взвешенном варианте задачи. Дан граф $G(V, E)$ с неотрицательной весовой функцией на ребрах $w : E \to \mathbb{Z}_+$ и натуральное число k. Можно найти дизъюнктное разбиение множества $V = V_1 \sqcup V_2$, такое что сумма весов ребер, соединяющих V_1 и V_2, не менее k.

N[OT]A[LL]E[QUAL]-SAT. Дана КНФ-формула, для которой существует набор, такой что в каждом дизъюнкте есть истинный и ложный литералы.

Зафиксируем выполнимую КНФ $\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$ [зависящую от трех переменных и имеющую 1 дизъюнкт] и НЕвыполнимую КНФ $\chi(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge \neg x_1$ [зависящую от двух переменных и имеющую 3 дизъюнкта].

Везде ниже мы будем иллюстрировать сводимости, используя именно эти КНФ.

33. (0.01) В **[Кормен 1]** или **[Кормен 2]** предполагается, что в языке 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ (по Кормену) в каждый дизъюнкт входит ровно три литерала и все литералы в каждом дизъюнкте различны. Укажите, как за полиномиальное время преобразовать произвольную 3-КНФ ϕ, в которой в каждом дизъюнкте содержится не более трех литералов, причем литералы могут повторяться, в РОВНО-3-КНФ $\tilde{\phi}$, в которой в каждый дизъюнкт входит РОВНО три неповторяющихся литерала. При этом ϕ должна быть выполнима тогда и только тогда, когда выполнима $\tilde{\phi}$. Иными словами, постройте полиномиальную сводимость языка 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ к языку 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ (по Кормену).

34. (2×0.01) Постройте сводимость языка ВЫПОЛНИМОСТЬ к языку ПРОТЫКАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО.

Конструкция такова. Пусть $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ КНФ. Построим по КНФ семейство подмножеств $\mathcal{A}_\phi$ базового множества $\{x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$. Во-первых, включим в $\mathcal{A}_\phi$ n подмножеств вида $A_i = \{x_i, \neg x_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Во-вторых, для каждого дизъюнкта C, входящего в $\phi(\cdot)$, добавим к $\mathcal{A}_\phi$ подмножество A_C, состоящее из всех входящих в C логических переменных (если в C входит логическая переменная x_i, то включаем в A_C элемент x_i, а если в C входит переменная $\neg x_i$,то включаем в A_C элемент $\neg x_i$).

Для обоснования сводимости нужно доказать, что **исходная КНФ $\phi(\cdot)$ выполнима тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_\phi$ имеет протыкающее множество мощности n.** Обоснование легко получить, если решить две следующие задачи.

(i) Укажите для семейства $\mathcal{A}_\psi$ соответствующее **трехэлементное** протыкающее множество.

(ii) Докажите, что мощность любого протыкающего множества для семейства $\mathcal{A}_\chi$ больше двух.

Если использовать полный язык 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ, то из построенной сводимости следует, что язык остается NP-полным, даже если все A_i имеют не более 3 элементов. Но оказывается, что язык остается NP-полным, даже если все A_i двухэлементные. Если отождествить эти пары элементов с ребрами некоторого графа, то соответствующий язык известен как ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ: даны неориентированый граф $G = (V, E)$ и натуральное число k. о В G есть *вершинное покрытие* мощности k, т. е. такое подмножество вершин $V' \subseteq V$ мощности k, что хотя бы *один конец каждого ребра* входит в V'. Покажем, что этот язык также NP-полон. Для этого сведем к нему язык 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ[2]. Во-первых, будем считать, что исходная КНФ дополнена до РОВНО-3-КНФ и в каждый ее дизъюнкт входит ровно три литерала. Построим по КНФ $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ граф G_ϕ, вершины которого помечены и делятся на *литеральные* и *дизъюнктные*. Для каждой логической переменной x_i образуем пару **смежных** литеральных вершин, помеченных, соответственно, x_i и $\neg x_i$. Для каждого 3-дизъюнкта C образуем три **смежных** дизъюнктных вершины, помеченных переменными этого дизъюнкта. Каждую дизъюнктную вершину соединим с соответствующей литеральной вершиной, имеющей ту же метку. Если ϕ имела m дизъюктов, то, по построению, G_ϕ имеет $2n + 3m$ вершин.

Для обоснования сводимости нужно доказать, что ϕ **выполнима, если и только если G имеет вершинное покрытие мощности $\mathbf{n} + 2m$.** Обоснование может быть построено, если решить

[1] Проверьте себя: приведите формальное определение **булевой формулы**. Чем отличается **булева схема** от **булевой формулы**?

[2] В книге **[Кормен 1, §36.5.2]** строится другая сводимость, использующая NP-полный язык КЛИКА.

следующую задачу.

35. (2×0.01) (i) Укажите для графа G_ψ соответствующее $(n_{new}(\psi) + 2m_{new}(\psi))$-вершинное покрытие.
(ii) Докажите, что мощность любого вершинного покрытия для графа G_χ больше $(n_{new}(\chi) + 2m_{new}(\chi))$.

Здесь $n_{new}(\cdot)$, $m_{new}(\cdot)$ обозначают, соответственно, число переменных и число дизъюнктов КНФ после ее преобразования в РОВНО-3-КНФ.

В **[Кормен 1, §36.5.1]** или **[Кормен 2, §34.5.1]** описано построение по любой РОВНО-3-КНФ $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ с m дизъюнктами графа $\tilde{G}_\phi$ на $3m$ вершинах, в котором имеется клика размера m тогда и только тогда, когда $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ выполнима. Следующая задача посвящена этой сводимости. Конструкция такова. Каждому дизъюнкту отвечает тройка вершин-переменных, а ребро соединяет вершины u и v тогда и только тогда, когда они приписаны разным дизъюнктам, а отвечающие им переменные не являются отрицанием друг друга. Следующая задача посвящена этой сводимости. Сначала ψ и χ нужно преобразовать в РОВНО-3-КНФ, которые содержат m и n 3-дизъюнктов, соответственно.

36. (2×0.01) (i) Укажите для графа $\tilde{G}_\psi$ соответствующую m-клику.
(ii) Докажите, что мощность любой клики в графе $\tilde{G}_\chi$ меньше n.

О NP-полноте языков ГАМИЛЬТОНОВ ГРАФ и РАЗБИЕНИЕ см.: **[Кормен 1, §36.5.4]** и **[Кормен 1, задача 36.5-4]** (соответственно, **[Кормен 2, §34.5.3]** и **[Кормен 1, задача 34.5-5]**).

Опишем полиномиальную сводимость NP-полного языка 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ к языку $\max-2$-ВЫПОЛНИМОСТЬ (этим будет доказана полнота языка $\max-2$-ВЫПОЛНИМОСТЬ в $\mathcal{NP}$, поскольку его принадлежность $\mathcal{NP}$ очевидна).

Сначала преобразуем 3-КНФ в эквивалентную 3-КНФ, в которой каждая дизъюнкция содержит в точности 3 переменные. Для любой 3-КНФ $\alpha = \bigwedge_1^n (a_i \vee b_i \vee c_i)$, где a_i, b_i, c_i — это либо некоторая логическая переменная, либо ее отрицание, построим 2-КНФ y следующим образом: для i-й дизъюнкции $(a_i \vee b_i \vee c_i)$ включим в y 10 следующих дизъюнкций: $L_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i, a_i \vee \neg b_i, \neg a_i \vee \neg c_i, \neg b_i \vee \neg c_i, \neg a_i \vee \neg d_i, b_i \vee \neg d_i, c_i \vee \neg d_i\}$, где d_i, $i = 1, \ldots, n$ — это новые логические переменные. Таким образом, осталось проверить, что если i-я дизъюнкция выполнима [в 3-КНФ], то можно так подобрать значение переменной d_i, что не менее q дизъюнкций из L_i будут выполнимы. А если i-я дизъюнкция невыполнима [в 3-КНФ], то при любом значении переменной d_i, меньше q дизъюнкций из L_i будут выполнимы. (q — это параметр, который вы должны найти самостоятельно.) Таким образом, если исходная 3-КНФ α выполнима, то в 2-КНФ $\bigwedge_1^n L_i$ будет выполнено не менее qn 2-дизъюнктов. И наоборот, для любой невыполнимой 3-КНФ α в 2-КНФ $\bigwedge_1^n L_i$ менее qn дизъюнктов будет выполнено.

37. (2×0.02) (i) Преобразуйте ψ в РОВНО-3-КНФ [в которой образовалось k 3-дизъюнктов] и вычислите результирующую 2-КНФ $\tilde{\psi}$ при указанной полиномиальной сводимости, указав пороговое значение kq.

(ii) Укажите какой-нибудь набор значений логических переменных, при которых в $\tilde{\psi}$ выполнено $\geq kq$ дизъюнктов.

38. (0.02) Покажите, что если язык 3-COLOR$\in \mathcal{P}$, то за полиномиальное время можно не только определить, что граф допускает раскраску вершин в три цвета, но и найти какую-то 3-раскраску (если она существует). *Обратите внимание, что на вход процедуры, проверяющей 3-раскрашиваемость, нельзя подавать частично окрашенные графы.*