

Задание на четвертую неделю.

1. Решите последнюю задачу предыдущего задания про NP-сертификат простоты.

2. Найдите Θ -асимптотику суммы $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$, оценив её с помощью интеграла $\int_1^n \sqrt{x} dx$ сверху и снизу. Выведите аналогичную формулу для асимптотики $\sum_{k=1}^n k^\alpha$ для $\alpha > 0$.

3 (0.5+0.5+1 балла). а) Верно ли что язык 5-ДНФ-Л является полиномиально полным в $co-NP$?

Язык 5-ДНФ-Л состоит из всех формул в дизъюнктивной нормальной форме, принимающих истинное значение при каких-то значениях переменных, в каждый конъюнкт которых входит не более пяти переменных.

б) Верно ли что язык 5-КНФ-Л является полиномиально полным в NP ?

Язык 5-КНФ-Л состоит из всех формул в конъюнктивной нормальной форме, принимающих ложное значение при каких-то значениях переменных, в каждый дизъюнкт которых входит не более пяти переменных.

Можно использовать гипотезы $P \neq NP$ и $NP \neq co-NP$.

в) Расставьте и обоснуйте P , NP – complete, $co-NP$ – complete:

	Выполнимость	Тавтологичность
КНФ		
ДНФ		

Под выполнимостью понимается задача проверки наличия набора значений переменных, на котором формула равна 1. Под тавтологичностью понимается задача проверки свойства формулы принимать значение 1 на всех наборах.

4 (2 балла). Рассматривается язык L выполнимых формул от n

переменных вида $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$, где каждый C_k имеет один из трех видов: $(x_i \equiv x_j)$, $(\bar{x}_i \equiv x_j)$, $(x_i \equiv \bar{x}_j)$, $(\bar{x}_i \equiv \bar{x}_j)$.

(i) Верно ли, что этот язык \mathcal{NP} -полон?

(ii) Верно ли, что если каждый C_k будет иметь вид $(x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \equiv x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \equiv \dots \equiv x_{i_l}^{\alpha_{i_l}})$, то язык будет \mathcal{NP} -полон? (Под $x_i^{\alpha_i}$ понимается либо x_i , либо \bar{x}_i)

5. Останется ли 3 – SAT полной, если ограничиться формулами, в которых каждая переменная входит не более 3 раз, а каждый литерал — не более 2 раз?

а) Под 3 – SAT понимается НЕ-БОЛЕЕ-3 – SAT.

б) (Бонусная задача) Покажите, что если имеется в виду РОВНО-3 – SAT, то не бывает невыполнимых формул указанного вида.

6. Постройте сводимость по Карпу языка (G, k) графов, в которых есть k -клика к языку графов, в которых есть клика хотя бы на половине вершин.

7 (Доп). Пусть язык $L \in \mathcal{NP}$. Покажите, что он полиномиально сводится (по Карпу) к языку STOP описаний пар (M, ω) машин Тьюринга и входов таких, что M останавливается на входе ω .