Рябых Владислав, Б05-905

Алгоритмы и модели вычислений. Домашнее задание № 10

***Задача* 1.** Докажите формулу обращения: $(M_n(\omega))^{-1} = \frac{1}{n}M_n(\omega^{-1})$. Вычислите также матрицу $(M_n(\omega))^4$.

Решение. Домножим обе части слева на $M_n(\omega)$, теперь имеем равенство

$$E = \frac{1}{n}M_n(\omega)M_n(\omega^{-1})$$

Нам надо доказать, что справа действительно получается единичная матрица. Для этого раскроем по определению произведения матриц, какой элемент стоит на i-й строчке в j-м столбце:

$$a_{ij} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}(w_n^i)^s(w_n^s)^{-j} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}(w_n^{i-j})^s$$

- $i \neq j$: $a_{ij} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}(w_n^{i-j})^s = \frac{(w_n^{i-j})^n - 1}{w_n^{i-j} - 1} = 0$, так как w — корень из единицы
- $i = j$: $a_{ij} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}\exp\left(\frac{2\pi s(i-j)}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}\exp(0) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}1 = 1$

Таким образом матрица $A = (a_{ij}) = \frac{1}{n}M_n(\omega)M_n(\omega^{-1})$ действительно является единичной, что доказывает формулу обращения $(M_n(\omega))^{-1} = \frac{1}{n}M_n(\omega^{-1})$.
Вычислим теперь матрицу $(M_n(\omega))^4$. Так как $(M_n(\omega))^4 = (M_n(\omega))^2\cdot(M_n(\omega))^2$, то вычислим сначала $(M_n(\omega))^2$, для этого раскроем по определению произведения матриц, какой элемент стоит на i-й строчке в j-м столбце:

$$a_{ij} = \sum_{s=0}^{n-1}(w_n^i)^s(w_n^s)^j = \sum_{s=0}^{n-1}(w_n^{i+j})^s$$

Аналогично предыдущему пункту:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & (i+j) \text{ не кратно } n \\ n, & (i+j) \quad\ \text{кратно } n \end{cases}$$

Таким образом, матрица $(M_n(\omega))^2 = (a_{ij})$ имеет вид

$$(M_n(\omega))^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

И теперь легко видеть, что $(M_n(\omega))^4 = (M_n(\omega))^2\cdot(M_n(\omega))^2 = n^2\cdot E$

Задача 2. Найдите произведение многочленов $A(x) = x^3 + 3x + 2$ и $B(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2$ с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Для этого найдите рекурсивно дискретное преобразование Фурье двух массивов $A = (0{,}0{,}0{,}0{,}1{,}0{,}3{,}2)$ и $B = (0{,}0{,}0{,}0{,}3{,}3{,}0{,}2)$, затем вычислите ДПФ массива C и восстановите коэффициенты многочлена-произведения, используя обратное преобразование.

Решение. $reversed(A) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2{,}3{,}0{,}1{,}0{,}0{,}0{,}0) \to (2{,}0{,}0{,}0); (3{,}1{,}0{,}0) \to (2{,}0), (0, 0), (3{,}0), (1{,}0) = (a_0, a_4), (a_2, a_6), (a_1, a_5), (a_3, a_7)$
На каждом шаге мы делим массив на 2 части, помещая в один все элементы, стоящие на нечётных местах, а в другой — все, стоящие на чётных.
Умножим каждый из получившихся массивов (рассматриваем их как столбцы) на матрицу M_2.

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Получим:

$$\begin{aligned} M_2 \cdot (a_0,a_4)^T &= (2{,}2) \\ M_2 \cdot (a_2,a_6)^T &= (0{,}0) \\ M_2 \cdot (a_1,a_5)^T &= (3{,}3) \\ M_2 \cdot (a_3,a_7)^T &= (1{,}1) \end{aligned}$$

По рекурсии:

$$M_4 \cdot (a_0,a_2,a_4,a_6)^T = \begin{pmatrix} M_2 \cdot (a_0,a_4)^T \\ M_2 \cdot (a_0,a_4)^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \cdot M_2 \cdot (a_2,a_6)^T \\ -D \cdot M_2 \cdot (a_2,a_6)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$M_4 \cdot (a_1,a_3,a_5,a_7)^T = \begin{pmatrix} M_2 \cdot (a_1,a_5)^T \\ M_2 \cdot (a_1,a_5)^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \cdot M_2 \cdot (a_3,a_7)^T \\ -D \cdot M_2 \cdot (a_3,a_7)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$$

Итого получаем

$$A = M_8 \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2\sqrt{2}i + \sqrt{2} \\ 2i \\ 2\sqrt{2}i - \sqrt{2} \\ -4 \\ -2\sqrt{2}i - \sqrt{2} \\ -2i \\ -2\sqrt{2}i + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2\sqrt{2}i + 2 + \sqrt{2} \\ 2i + 2 \\ 2\sqrt{2}i + 2 - \sqrt{2} \\ -2 \\ -2\sqrt{2}i + 2 - \sqrt{2} \\ -2i + 2 \\ -2\sqrt{2}i + 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Для многочлена B аналогично получаем:

$$B = M_8 \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ \left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) i \\ -1 - 3i \\ \left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) i \\ 2 \\ \left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) i \\ -1 + 3i \\ \left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) i \end{pmatrix}$$

Умножим поэлементно A на B:

$$C = A^T \underset{\text{элем}}{\cdot} B = \begin{pmatrix} 48 \\ (-5 - 7\sqrt{2}) + (3 + 10\sqrt{2})i \\ 4 - 8i \\ (-5 + 7\sqrt{2}) + (-3 + 10\sqrt{2})i \\ -4 \\ (-5 + 7\sqrt{2}) + (3 - 10\sqrt{2})i \\ 4 + 8i \\ (-5 - 7\sqrt{2}) + (-3 - 10\sqrt{2})i \end{pmatrix}$$

Так как $M_n^{-1}(w) = M_n(w^{-1})$, то посчитаем произведение $M_8^{-1} \cdot C$, итого получим

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 17 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Даны числа $x_1, \ldots, x_n$. Доказать, что коэффициенты многочлена $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - x_i)$, можно найти за $O(n \log_2^2 n)$ арифметических операций.

Решение. На первом уровне проводим $\frac{n}{2}$ перемножений: перемножаются многочлены $(x - x_1)$ с $(x - x_2)$; $(x - x_3)$ с $(x - x_4)$; .... Затем также перемножаем полученные многочлены между собой, пока не останется только один многочлен.
Всего мы получим $\log_2 n$ уровней, также необходимо заметить, что степень многочленов возрастает вдвое на каждом уровне (а многочлены степени k перемножаются за $O(k \log k)$ с помощью преобразования Фурье). Таким образом, итоговая сложность

$$T(n) \leqslant C \cdot \sum_{i=1}^{\log_2 n} \frac{n}{2} i = C \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{\log_2 n \cdot (\log_2 n + 1)}{2} \Rightarrow T(n) = O(n \log_2^2 n)$$

Задача 4. Используя ДПФ, найдите решение системы линейных уравнений $Cx = b$. где C — это циркулянтная матрица, порожденная вектором столбцом $(1{,}2{,}4{,}8)^T$, а $b^T = (16{,}8{,}4{,}2)$.

Решение. Циркулянтная матрица C есть

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица C имеет размерность 4×4, так что в $w = i$. Обозначим λ_j — собственные значения C, тогда $\lambda_i = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_{n-k} \cdot (i)^{jk}$ (считаем, что $c_0 = c_n$; формула из задачи 6). Тогда получаем

$$\lambda_0 = 1 + 8 + 4 + 2 = 15$$
$$\lambda_1 = 1 + 8i - 4 - 2i = -3 + 6i$$
$$\lambda_2 = 1 - 8 + 4 - 2 = -5$$
$$\lambda_3 = 1 - 8i - 4 + 2i = -3 - 6i$$

Таким образом матрицы Λ и Λ^{-1} имеют вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3+6i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3-6i \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-3+6i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3+6i} \end{pmatrix}$$

В нашей задаче матрица Фурье принимает вид:

$$F=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{pmatrix}\Rightarrow F^*=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-i&-1&i\\1&-1&1&-1\\1&i&-1&-i\end{pmatrix}$$

$Cx=b\Rightarrow x=C^{-1}b; C=F\Lambda F^{-1}\Rightarrow C^{-1}=F\Lambda^{-1}F^{-1}=\dfrac{1}{4}F\Lambda^{-1}F^*\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}\cdot F\Lambda^{-1}F^*\cdot b$

$$x=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{15}&0&0&0\\0&\frac{1}{-3+6i}&0&0\\0&0&-\frac{1}{5}&0\\0&0&0&-\frac{1}{3+6i}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-i&-1&i\\1&-1&1&-1\\1&i&-1&-i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}16\\8\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.8\\1.6\\0.8\\0.4\end{pmatrix}$$

Задача 5. Обозначим для вектора $\vec{x}$ циркулянтную матрицу с первым столбцом $\vec{x}$ за $\mathrm{circ}(\vec{x})$. Назовём циклической свёрткой $\vec{x}*\vec{y}$ двух векторов произведение матрицы на вектор $\mathrm{circ}(\vec{x})\vec{y}$. Докажите, что $FFT(\vec{x}*\vec{y})$ есть произведение векторов $FFT(\vec{x})$ и $FFT(\vec{y})$ по Адамару (т. е. поэлементное: i-ая компонента вектора-произведения есть произведение i-ых компонент сомножителей).

Решение.

$$X=\mathrm{circ}(\vec{x})=\begin{pmatrix}x_0&x_{n-1}&x_{n-2}&\dots&x_1\\x_1&x_0&x_{n-1}&\dots&x_2\\x_2&x_1&x_0&\dots&x_3\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\\x_{n-1}&x_{n-2}&x_{n-3}&\dots&x_0\end{pmatrix}$$

Обозначим $A=\mathrm{circ}(\vec{x})\vec{y}$.

Тогда a_j можно записать в виде $a_j=\sum\limits_{m=0}^{j}x_my_{j-m}+\sum\limits_{m=j+1}^{n-1}x_my_{n+j-m}$

Обозначим $B=FFT(\vec{x}*\vec{y})$.

Так как $B=FA$, запишем b_i в виде $b_i=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(w^i)^k\left(\sum\limits_{m=0}^{k}x_my_{k-m}+\sum\limits_{m=k+1}^{n-1}x_my_{n+k-m}\right)$

Обозначим $C=FFT(\vec{x})\underset{\text{элем}}{\cdot}FFT(\vec{y})=(F\vec{x})\cdot(F\vec{y})$ (умножение поэлементное).

Тогда $c_i=\sum\limits_{j=0}^{n-1}(w^i)^jx_j\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}(w^i)^ky_k$

Так как $(w^i)^n=1$, то коэффициент при $(w^i)^k$ имеет вид $\sum\limits_{j=0}^{k}x_jy_{k-j}+\sum\limits_{j=k+1}^{n-1}x_jy_{n+k-j}$

Коэффициенты при $(w^i)^k$ в выражении b_i абсолютно такие же, из чего и следует утверждение задачи: $FFT(\vec{x}*\vec{y})=FFT(\vec{x})\underset{\text{элем}}{\cdot}FFT(\vec{y})$

Задача 6. Рассмотрим циркулянтную матрицу порядка $n+1$, первый столбец которой равен

$(c_0, c_1, \ldots, c_n)^T$, т. е. матрицу вида

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_n & c_{n-1} & \ldots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_n & \ldots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \ldots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 \end{bmatrix}$$

Докажите, что все её собственные значения, домноженные на $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, могут быть найдены умножением матрицы Фурье $F_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} (\omega_n^{ij})_{i,j=0}^n$ размеров $(n+1) \times (n+1)$, где $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — корень из единицы, на вектор $(c_0, c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1)^T$. Найдите с помощью алгоритма БПФ собственные значения циркулянтной матрицы, первый столбец которой имеет вид $(1, 2, 4, 6)^T$.

Решение. $\Lambda F_n = F_n C^T$. Посмотрим на первые столбцы обеих получающихся матриц:

- Первый столбец левой матрицы есть $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)^T$
- Первый столбец правой матрицы есть $F_n(c_0, c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1)^T$

Таким образом

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sqrt{n+1} \cdot F_n \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Как в задаче номер 4, считаем собственные значения циркулянтной матрицы:

$$\lambda_0 = 1 + 6 + 4 + 2 = 13$$
$$\lambda_1 = 1 + 2i - 4 - 6i = -3 - 4i$$
$$\lambda_2 = 1 - 2 + 4 - 6 = -3$$
$$\lambda_3 = 1 - 2i - 4 + 6i = -3 + 4i$$

Задача 7. Дано множество различных чисел $A \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Рассмотрим множество $A + A$, образованное суммами элементов A. Докажите или опровергните существование процедур построения $A + A$, имеющих субквадратичную трудоемкость $o(m^2)$.

Решение. Заведём массив B из m элементов, определённых следующим образом

$$b_i = \begin{cases} 0, & i \notin A \\ 1, & i \in A \end{cases}$$

Определим $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i x^i$, возведём массив во вторую степень за $O(m \log m)$ с помощью преобразования Фурье, получим $f^2(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} b_k b_l x^{k+l}$

Теперь можно сказать, что $b_k b_l \neq 0 \Leftrightarrow k, l \in A \Rightarrow k + l \in A + A$.

Сложность алгоритма есть $O(m \log m)$, так как всё, помимо возведения многочлена f в квадрат, выполняется за не более, чем линейное время. А так как алгоритм имеет сложность $O(m \log m)$, то также можно сказать, что он имеет сложность $o(m^2)$