Рябых Владислав, Б05-905

Алгоритмы и модели вычислений.
Домашнее задание № 8

Задача 1. Подбрасываем «честную» монету 10 раз. Подсчитайте вероятности следующих событий:

1. (1/6 балла) число выпавших «орлов» равно числу «решек»;
2. (1/6 балла) выпало больше «орлов» чем «решек»;
3. (1/6 балла) при $i = 1,\ldots,5$ одинаковы результаты i-го и $11 - i$-го бросаний;
4. (1/2 балла) «орел» выпал не менее четырех раз подряд.

Решение. Будем задавать последовательности бросков последовательностями из 0 и 1, причём число 1 на i-м месте будет означать, что на i-м броске монетки выпал «орёл» (соответственно, 0 — что «решка»).

1. Количество таких последовательностей из 10 элементов, в которых ровно 5 единиц, равняется C_{10}^5, всего же последовательностей из 10 элементов 2^{10}. Таким образом, вероятность того, что число выпавших «орлов» равно числу «решек», равняется $\dfrac{C_{10}^5}{2^{10}}$
2. Аналогично предыдущему пункту, только вместо ситуации с 5 единицами смотрим на количество последовательностей с 6, 7, 8, 9, 10: таких $C_{10}^6, C_{10}^7, C_{10}^8, C_{10}^9, C_{10}^{10}$ соответственно. Таким образом, вероятность того, что число выпавших «орлов» больше числа «решек», равняется $\dfrac{C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}}{2^{10}}$.
3. Количество таких последовательностей из 10 элементов, в которых при $i = 1,\ldots,5$ элементы i и $11 - i$ совпадают, равняется 2^5 — для каждой из пар выбирается 0 или 1. Таким образом, вероятность того, что при $i = 1,\ldots,5$ одинаковы результаты i-го и $11 - i$-го бросаний равняется $\dfrac{2^5}{2^{10}} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$
4. Рассмотрим последовательности, в которых есть не менее 4х единиц подряд: будем искать ряд 1111 и смотреть на его вхождение: если последовательность начинается с этого ряда, то оставшиеся элементы выбираются 2^6 способами. Если последовательность не начинается с этого ряда, то имеем 6 позиций его поставить и 2^5 способов выбрать остальные элементы. То есть итого получаем $2^6 + 6 \cdot 2^5$ таких последовательностей. Однако надо заметить, что они пересекаются: последовательности 1111011110, 1111011111 и 1111001111, 1111101111 учитываются как в первом, так и во втором слагаемом нашей суммы; последовательность 0111101111 учитывается дважды во втором слагаемом. Таким образом всего искомых последовательностей $2^6+6\cdot 2^5-5 = 64+6\cdot 32-5 = 251$. И тогда вероятность того, что «орел» выпал не менее четырех раз подряд равняется $\dfrac{251}{2^{10}} = \dfrac{251}{1024}$.

Задача *2.* 1. Вычислите условную вероятность, что при бросаний двух игральных костей на первой выпало шесть, если сумма равна семи.

2. При двух бросках игральной кости выпало X_1 и X_2, соответственно. Вычислите $\mathbb{E}\{\max\{X_1,X_2\}\}+\mathbb{E}\{\min\{X_1,X_2\}\}$.

3. Покажите, что из попарной независимости случайных величин не следует независимость в совокупности. Приведите контрпример.

4. Независимы ли события: «при броске кубика выпало четное число» и «при броске кубика выпало число, кратное трём»?

5. Найти вероятность, что случайно выбранный граф на n вершинах является простым циклом; найти её предел при $n \to \infty$.

Решение. 1. $\mathbb{P}\{A|B\} = \dfrac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \dfrac{\mathbb{P}\{\text{на 1й кости выпало 6, сумма равна 7}\}}{\mathbb{P}\{\text{сумма равна 7}\}}$;

$\dfrac{\mathbb{P}\{\text{на 1й кости выпало 6, сумма равна 7}\}}{\mathbb{P}\{\text{сумма равна 7}\}} = \dfrac{\#\{\text{на 1й кости выпало 6, сумма равна 7}\}}{\#\{\text{сумма равна 7}\}}$.

$\#\{\text{на 1й кости выпало 6, сумма равна 7}\} = 1$ (на 1й выпадает 6, на 2й 1);

$\#\{\text{сумма равна 7}\} = 6$ (возможны варианты 1-6, 2-5, 3-4, 4-3, 5-2, 6-1).

Таким образом, искомая вероятность $\mathbb{P}\{A|B\} = \dfrac{1}{6}$

2. Так как матожидание линейно, то

$\mathbb{E}\{\max\{X_1,X_2\}\} + \mathbb{E}\{\min\{X_1,X_2\}\} = \mathbb{E}\{\max\{X_1, X_2\} + \min\{X_1, X_2\}\} = \mathbb{E}\{X_1 + X_2\} = 2\mathbb{E}\{X_1\} = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)\right) = 2 \cdot 3.5 = 7$

3. Возьмём монетку, на которой выпадает либо 0, либо 1 (причём с одинаковой вероятностью), бросим её 2 раза. Тогда пространство исходов $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \{00, 01, 10, 11\}, \mathbb{P}\{w_i\} = \dfrac{1}{4}\ \ \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Случайные величины ξ, η определим как $\xi(w_i) = w_i[0]; \eta(w_i) = w_i[1]$ (такая запись тут подразумевает, что ξ равняется первой цифре исхода, а η — второй).
А случайную величину ζ как $\zeta(w_i) = (\xi(w_i) \equiv \eta(w_i))$, то есть ζ показывает, выпали ла ли монетка дважды одной и той же стороной.

Тогда эти случайные величины попарно независимы: рассматриваем события

$A = \xi^{-1}(0) = \{w_1, w_2\}; B = \xi^{-1}(1) = \{w_3, w_4\}; C = \eta^{-1}(0) = \{w_1, w_3\}; D = \eta^{-1}(1) = \{w_2, w_4\}; E = \zeta^{-1}(0) = \{w_2, w_3\}; F = \zeta^{-1}(1) = \{w_1, w_4\}$

$\dfrac{1}{2} = \mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{C\} = \mathbb{P}\{D\} = \mathbb{P}\{E\} = \mathbb{P}\{F\}$

$\dfrac{1}{4} = \mathbb{P}\{A \cap C\} = \mathbb{P}\{A \cap D\} = \mathbb{P}\{A \cap E\} = \mathbb{P}\{A \cap F\} = \mathbb{P}\{B \cap C\} = \mathbb{P}\{B \cap D\} = \mathbb{P}\{B \cap E\} = \mathbb{P}\{B \cap F\} = \mathbb{P}\{C \cap E\} = \mathbb{P}\{C \cap F\} = \mathbb{P}\{D \cap E\} = \mathbb{P}\{D \cap F\}$

$\dfrac{1}{4} = \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{C\} = \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{D\} = \ldots = \mathbb{P}\{D\} \cdot \mathbb{P}\{F\}$

Таким образом случайные величины ξ, η, ζ действительно являются попарно независимыми. Покажем, что, однако, они не являются независимыми в совокупности:

$\mathbb{P}\{A \cap C \cap E\} = \mathbb{P}\{\varnothing\} = 0 \neq \dfrac{1}{8} = \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{C\} \cdot \mathbb{P}\{E\}$

4. Пусть A = «при броске кубика выпало четное число», B = «при броске кубика выпало число, кратное трём». Тогда $A = \{w_2, w_4, w_6\}, B = \{w_3, w_6\}$.

   $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{\{w_6\}\} = \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} \cdot \dfrac{2}{6} = \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\} \Rightarrow$ события A, B действительно независимы.

5. Всего последовательностей из n вершин $n!$, но при этом есть n циклических сдвигов (и соответствующие им простые циклы совпадают) и также при реверсе последовательности простой цикл тоже не меняется. Таким образом мы должны разделить $n!$ на $2n$ и, итого получим, что есть всего $\dfrac{(n-1)!}{2}$ простых циклов на n вершинах.

   Всего различных рёбер в графе на n вершинах $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} \Rightarrow$ всего различных графов на n вершинах $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (для каждой пары вершин мы выбираем, проводить ребро или нет).

   Таким образом, вероятность того, что случайно выбранный граф на n вершинах является простым циклом есть $\dfrac{(n-1)!}{2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}} \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$.

Задача 3. (ВТФ) Две урны содержат одинаковое количество шаров. Шары окрашены в белый и черный цвета. Из каждой урны вынимают по n шаров с возвращением, где $n \geqslant 3$. Найдите n и «состав» каждой урны, если вероятность того, что все шары, взятые из первой урны, белые, равна вероятности того, что все шары, взятые из второй урны, либо белые, либо черные.

Решение. Пусть b_1, b_2 — количество белых шаров в 1й и 2й урнах соответственно, m — количество шаров в каждой из урн (одинаково по условию). Тогда $p_1 = \dfrac{b_1}{m}, p_2 = \dfrac{b_2}{m}$ — вероятности вытащить белый шар из 1й и 2й урн соответственно.

Тогда: $\mathbb{P}\{\text{Все шары, вынутые из 1й урны белые}\} = \mathbb{P}\{A\} = p_1^n$

$\mathbb{P}\{\text{Либо все шары, вынутые из 2й урны белые, либо все чёрные}\} = \mathbb{P}\{B\} = p_2^n + (1-p_2)^n$

По условию $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{B\} \Rightarrow \left(\dfrac{b_1}{m}\right)^n = \left(\dfrac{b_2}{m}\right)^n + \left(\dfrac{m-b_2}{m}\right)^n$

Таким образом получаем уравнение $b_1^n = b_2^n + (m-b_2)^n, n \geqslant 3$ — неразрешимо в ненулевых целых числах по Великой теореме Ферма $\Rightarrow$ по крайней мере одно из чисел обращается в 0. Заметим, что $b_2^n + (m-b_2)^n > 0$, так как $m \geqslant b_2^n, m \neq 0$, то есть $b_1 \neq 0$ и остаются лишь 2 возможных варианта:

- $b_2 = 0 \Rightarrow b_1 = m$, при этом n — любое (то есть первая урна состоит полностью из белых шаров, а вторая полностью из чёрных).

- $(m - b_2) = 0 \Rightarrow b_2 = m, b_1 = m$, при этом n — любое (то есть первая урна состоит полностью из белых шаров, равно как и вторая; чёрных шаров в урнах нет в принципе).

Задача 4. Симметричную монетку бросают неограниченное число раз. Какая из последовательностей встретится раньше с большей вероятностью: РОР или РРО?

Решение. Рассмотрим последовательность в алфавите $\Sigma = \{P, O\}$ и найдём, какая из подпоследовательностей u = РОР или v = РРО встречается первой с большей вероятностью.
$u[1] = v[1] = P$, обе подпоследовательности начинаются с Р, поэтому не будем обращать внимание на ведущие О и обратимся к первому вхождению Р: после него в u осталось добрать ОР, в v — РО, рассмотрим следующий символ последовательности.
С вероятностью $\frac{1}{2}$ это Р. Заметим, что в этом случае уже можно сказать, что v встретится раньше: в u осталось добрать ОР, в v — О, то есть если следующим входит О, то v уже встретилась раньше, а иначе мы остаёмся в ровно этой же позиции. Таким образом, выход из этого случая ровно один — v = РРО встретится раньше.
Таким образом мы уже поняли, что v встречается раньше с вероятностью $\geqslant \frac{1}{2}$, а тогда u встречается раньше с вероятностью $\leqslant \frac{1}{2}$. Предъявим последовательность, которая не удовлетворяет предыдущему пункту, но после которой всё равно v снова встретится раньше и таким образом докажем, что вероятность v встретиться раньше строго больше, нежели у u.
Выпадает О (чтобы не попасть под условия первого пункта), после чего в u осталось добрать Р, в v — РРО, но тогда возьмём ещё О (тем самым в u и v снова надо добрать начальные РОР и РРО), после чего просто берём РРО и получаем, что v снова встретилось раньше.
Таким образом мы получили, что v встречается раньше u с вероятностью $> \frac{1}{2}$, то есть последовательность РОР встречается раньше с большей вероятностью, нежели РРО.

Задача 5.
1. Найти мат. ожидание числа простых циклов длины r в случайном графе на n вершинах. Любое из C_n^2 рёбер генерируется независимо от других с вероятностью p.
2. Найти мат. ожидание числа простых циклов длины r в случайной перестановке n элементов в предположении, что все перестановки $\pi \in S_n$ равновероятны.

Решение.
1. Пусть ξ — искомое матожидание, $\xi = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$, где $\xi_i = 1 \Leftrightarrow i$-й простой цикл присутствует в графе (иначе $\xi_i = 0$).

   Так как количество способов выбрать r вершин из n есть C_n^r, а количество простых циклов на r вершинах было посчитано в задаче номер 2, оно равняется $\frac{(r-1)!}{2}$, то $N = C_n^r \cdot \frac{(r-1)!}{2}$.

   Тогда в силу линейности матожидания $\mathbb{E}\{\xi\} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\{\xi_i\} = N \cdot \mathbb{P}\{\text{простой цикл был сгенерирован}\} = N \cdot p^r = C_n^r \cdot p^r \cdot \frac{(r-1)!}{2}$.

2. Пусть ξ — искомое матожидание, $\xi = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$, где $\xi_i = 1 \Leftrightarrow i$-й простой цикл присутствует в перестановке (иначе $\xi_i = 0$).

Так как количество способов выбрать r элементов из n есть C_n^r, а количество простых циклов на r элементах равняется $(r-1)!$ (аналогично прошлой задаче, только теперь порядок важен, поэтому мы не делим на 2), тогда $N = C_n^r \cdot (r-1)! = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \cdot (r-1)! = \dfrac{n!}{r \cdot (n-r)!}$.

Так как всего перестановок $n!$, r элементов в цикле фиксируются, то матожидание каждого цикла находится как $\mathbb{E}\left\{\xi_i\right\} = \dfrac{(n-r)!}{n!}$

Тогда в силу линейности матожидания $\mathbb{E}\left\{\xi\right\} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left\{\xi_i\right\} = N \cdot \mathbb{E}\left\{\xi_i\right\} = \dfrac{n!}{r \cdot (n-r)!} \cdot \dfrac{(n-r)!}{n!} = \dfrac{1}{r}$.

Задача *6.* 1. Имеется генератор случайных битов, выдающий 0 и 1 с вероятностью 1/2. Предложите алгоритм, использующий этот генератор и выдающий 0 с вероятностью 1/3 и 1 с вероятностью 2/3. Оцените его время работы в лучшем и в худшем случае.

2. Обратно: из генератора $(1/3; 2/3)$ получите $(1/2)$.

Решение. 1. Прогоним исходный генератор 2 раза, будем интерпретировать его результаты следующим образом: $00 \longrightarrow 0, 10 \longrightarrow 1, 11 \longrightarrow 1$, причём значению 01 не будем сопоставлять ничего — в таком случае наш алгоритм просто не завершит свою работу (так что время работы неограниченно, в худшем случае алгоритм не останавливается вообще)

Исходный генератор выдавал биты равновероятно, так что значения 00, 10 и 11 также равновероятны, а поэтому наш алгоритм выдаёт 0 с вероятностью 1/3 и 1 с вероятностью 2/3.

В лучшем случае алгоритм работает за 2 прогона нашего исходного генератора.

2. Прогоним исходный генератор 2 раза, будем интерпретировать его результаты следующим образом: $01 \longrightarrow 0, 10 \longrightarrow 1$, причём значениям 00 и 11 не будем сопоставлять ничего — в таком случае наш алгоритм просто не завершит свою работу (так что время работы неограниченно, в худшем случае алгоритм не останавливается вообще)

Исходный генератор выдавал бит 0 с вероятностью 1/3, 1 с вероятностью 2/3. Таким образом $\mathbb{P}\left\{01\right\} = \mathbb{P}\left\{0\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{1\right\} = \mathbb{P}\left\{1\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{0\right\} = \mathbb{P}\left\{10\right\}$, так что наш алгоритм выдаёт 0 и 1 с одинаковой вероятностью.

В лучшем случае алгоритм работает за 2 прогона нашего исходного генератора.

Задача *7.* 1. Найти мат. ожидание количества неподвижных элементов в случайно выбранной из S_n перестановке.

2. Найти математическое ожидание числа бросаний кости до первого выпадения двух шестерок подряд.

Решение. 1. Пусть ξ — искомое матожидание, $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, где $\xi_i = 1 \Leftrightarrow n$-й элемент является неподвижным (иначе $\xi_i = 0$).

Так как всего перестановок $n!$, 1 неподвижный элемент фиксируются, то матожидание того, что i-й элемент неподвижен находится как $\mathbb{E}\left\{\xi_i\right\} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

Тогда в силу линейности матожидания $\mathbb{E}\left\{\xi\right\} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left\{\xi_i\right\} = n \cdot \mathbb{E}\left\{\xi_i\right\} = n \cdot \dfrac{1}{n} = 1$.

Задача 8. В экзаменационной программе обычного экзамена 25 билетов, из которых 5 простые, а вытянув любой из остальных, всякий студент точно завалит экзамен. Подряд заходят два студента. Какой из них с большей вероятностью вытянет простой билет?

Решение. Первый студент вытягивает простой билет с вероятностью $\mathbb{P}\left\{easy1\right\} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$.
Посчитаем по формуле полной вероятности для второго студента:
$\mathbb{P}\left\{easy2\right\} = \mathbb{P}\left\{easy2|hard1\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{hard1\right\} + \mathbb{P}\left\{easy2|easy1\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{easy1\right\} = \dfrac{5}{24} \cdot \dfrac{20}{25} + \dfrac{4}{24} \cdot \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} =$
$= \mathbb{P}\left\{easy1\right\}$
Таким образом оба студента вытягивают простой билет с равной вероятностью.