

Задание на восьмую неделю.

1. Подбрасываем «честную» монету 10 раз. Подсчитайте вероятности следующих событий:

- (i) (1/6 балла) число выпавших «орлов» равно числу «решек»;
- (ii) (1/6 балла) выпало больше «орлов» чем «решек»;
- (iii) (1/6 балла) при $i = 1, \dots, 5$ одинаковы результаты i -го и $11-i$ -го бросаний;
- (iv) (1/2 балла) «орел» выпал не менее четырех раз подряд.

2. (i) Вычислите условную вероятность, что при бросаний двух игральных костей на первой выпало шесть, если сумма равна семи.

(ii) При двух бросках игральной кости выпало X_1 и X_2 , соответственно. Вычислите $\mathbb{E}\{\max\{X_1, X_2\}\} + \mathbb{E}\{\min\{X_1, X_2\}\}$.

(iii) Покажите, что из попарной независимости случайных величин не следует независимость в совокупности. Приведите контрпример.

(iv) Независимы ли события: «при броске кубика выпало четное число» и «при броске кубика выпало число, кратное трём»?

(v) Найти вероятность, что случайно выбранный граф на n вершинах является простым циклом; найти её предел при $n \rightarrow \infty$.

3 (ВТФ). Две урны содержат одинаковое количество шаров. Шары окрашены в белый и черный цвета. Из каждой урны вынимают по n шаров с возвращением, где $n \geq 3$. Найдите n и «состав» каждой урны, если вероятность того, что все шары, взятые из первой урны, белые, равна вероятности того, что все шары, взятые из второй урны, либо белые, либо черные.

4. Симметричную монетку бросают неограниченное число раз. Какая из последовательностей встретится раньше с большей вероятностью: РОР или РРО?

5. (i) Найти мат. ожидание числа простых циклов длины r в случайном графе на n вершинах. Любое из C_n^2 рёбер генерируется независимо от других с вероятностью p .

(ii) Найти мат. ожидание числа простых циклов длины r в случайной перестановке n элементов в предположении, что все перестановки

$\pi \in S_n$ равновероятны.

6. (i) Имеется генератор случайных битов, выдающий 0 и 1 с вероятностью $1/2$. Предложите алгоритм, использующий этот генератор и выдающий 0 с вероятностью $1/3$ и 1 с вероятностью $2/3$. Оцените его время работы в лучшем и в худшем случае.

(ii) Обратно: из генератора $(1/3; 2/3)$ получите $(1/2)$.

7. (i) Найти мат. ожидание количества неподвижных элементов в случайно выбранной из S_n перестановке.

(ii) Найти математическое ожидание числа бросаний кости до первого выпадения двух шестерок подряд.

8. В экзаменационной программе обычного экзамена 25 билетов, из которых 5 простые, а вытянув любой из остальных, всякий студент точно завалит экзамен. Подряд заходят два студента. Какой из них с большей вероятностью вытянет простой билет?

9. Рассмотрим следующую вероятностную процедуру, на вход которой поступает массив из n различных чисел $A[1..n]$. Внутри процедуры используется генератор случайных чисел $RAND(1, 2, \dots, n)$, который возвращает случайно и равновероятно число j из множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

```
1: procedure RANDPROCEDURE( $A[1..n]$ ,  $n$ )
2:   Задать массив  $C[1..n] := A[1..n]$ 
3:   Задать массив  $B[1..n] := \{FALSE, FALSE, \dots, FALSE\}$ 
4:   Задать  $i := 1$ 
5:   while  $i < n + 1$  do
6:      $j := RAND(1, 2, \dots, n)$ 
7:     if  $B[j] = FALSE$  then
8:       Задать  $C[i] := A[j]$ 
9:       Задать  $i := i + 1$ 
10:      Задать  $B[j] := TRUE$ 
11:    end if
12:  end while
13:  return  $C[1..n]$ 
14: end procedure
```

(i) Чему равен супремум чисел k , для которых вероятность события, что алгоритм сделает хотя бы k итераций цикла **while** положитель-

на?

(ii) Докажите, что представленный алгоритм выдаёт некоторую перестановку массива A , и вычислите вероятность получения каждой конкретной перестановки.

(iii) Сколько в среднем раз будет выполнена строка 6 в описанной выше процедуре?

10 (Доп). На окружности случайным образом выбираются две точки. Найдите среднее расстояние между ними.