

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

В трёх томах

*Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению подготовки «Прикладные математика и физика»*

Том 2 Оптика

Под редакцией
проф. А. В. МАКСИМЫЧЕВА

МОСКВА
МФТИ
2014

УДК 53(075)

ББК 22.3я73

Л12

А в т о р ы:

А. В. Максимычев, Д. А. Александров, Н. С. Берюлёва,
С. В. Виноградов, В. П. Кириллов, Г. Р. Локшин, М. Г. Никулин,
В. А. Петухов, П. В. Попов, О. А. Судаков

Р е ц е н з е н т ы:

Кафедра общей физики

Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»

(зав. кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор *Н. П. Калашников*)

Зав. отделом оптики ФИАН
доктор физико-математических наук, профессор *A. B. Масалов*

Л12 **Лабораторный практикум по общей физике:** учеб. пособие. В трёх томах. **Т. 2. Оптика** / А. В. Максимычев, Д. А. Александров, Н. С. Берюлёва и др.; под ред. А. В. Максимычева. — М.: МФТИ, 2014. — 446 с.

ISBN 978-5-7417-0507-0

Представлены лабораторные работы по оптике для студентов II курса (4-го семестра) МФТИ. Работы распределены по ключевым разделам курса общей физики. Каждый раздел содержит теоретическое введение по рассматриваемому кругу физических явлений. Теоретические введения и описания составлены с таким расчётом, чтобы студент мог получить ясное представление о лабораторной работе и изучаемом явлении и в том случае, когда выполнение работы опережает теоретический курс.

Книга снабжена необходимым справочным материалом.

Для физических, инженерно-физических и физико-технических специальностей вузов.

Табл. 15. Ил. 219.

УДК 53(075)
ББК 22.3я73

ISBN 978-5-7417-0507-0 (Т.2)

ISBN 978-5-7417-0200-7

© А.В. Максимычев, Д.А. Александров,

Н.С. Берюлёва, С.В. Виноградов,

В.П. Кириллов, Г.Р. Локшин,

М.Г. Никулин, В.А. Петухов,

П.В. Попов, О.А. Судаков, 2014

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2014

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При изложении материала данного раздела предполагается знакомство читателей с элементарными понятиями и законами геометрической оптики. Вопрос применимости приближения геометрической оптики к реальным системам рассматривается в разделе III, посвящённом явлению дифракции. Более полные сведения о затронутых вопросах можно найти в рекомендованной к данному разделу литературе.

1. Общее рассмотрение центрированных оптических систем

Оптические приборы, предназначенные для формирования изображений, в большинстве случаев представляют собой так называемые **центрированные оптические системы** — однородные преломляющие или отражающие среды, отделённые одна от другой сферическими поверхностями, центры кривизны которых лежат на одной прямой, называемой **главной оптической осью**.

Получаемые с помощью оптических систем действительные или мнимые изображения образуются световыми пучками, которые называются **гомоцентрическими**, если выйдя из одной точки и пройдя оптическую систему, пучки или их продолжения снова сходятся в одной точке.

Идеальной оптической системой называют систему, в которой имеет место гомоцентричность пучков и изображение подобно предмету. Идеальная оптическая система может быть реализована с достаточным приближением в виде центрированной оптической системы, если при формировании изображения ограничиться параксиальными пучками, то есть пучками, идущими вблизи оси симметрии. Строгий критерий параксиальности световых пучков будет сформулирован ниже.

1.1. Элементарная оптическая ячейка

Рассмотрим ключевую для геометрической оптики задачу о формировании изображения элементарной ячейкой центрированной оптической системы — сферической границей раздела двух оптически однородных сред с различными показателями преломления, представленной на рис. 1.1.

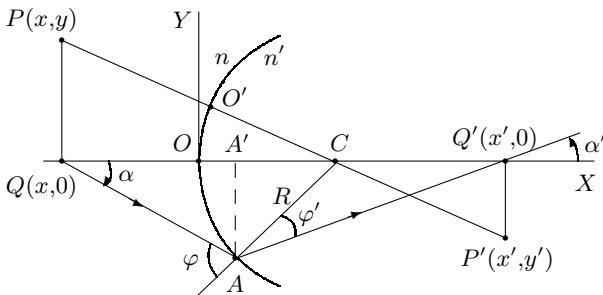


Рис. 1.1. Формирование изображения сферической преломляющей поверхностью

На этом рисунке прямая QQ' проходит через центр C кривизны сферической поверхности радиуса R , разграничающей среды с показателями преломления n и n' . Эта прямая принимается за главную оптическую ось системы. Направим вдоль QQ' координатную ось X декартовой прямоугольной системы координат (x, y, z) с началом отсчёта в точке O пересечения её со сферической поверхностью. Абсцисса x считается положительной, если направление отсчёта совпадает с направлением распространения света вдоль оптической оси; в противоположном случае она считается отрицательной. Если падающий свет распространяется слева направо, то принятые правила знаков совпадают с правилом знаков в аналитической геометрии. Радиусы кривизны сферических поверхностей отсчитываются от поверхности к центру кривизны, так что на рис. 1.1 $R > 0$.

Координатная ось Y лежит в плоскости рисунка. Ордината y считается положительной, если соответствующая точка лежит выше оптической оси, и отрицательной, если она лежит ниже. Отсчёт углов в плоскости рисунка (плоскости XY) производится в направлении от главной оптической оси к лучу, причём положительным считается угол, растущий в направлении против вращения часовой стрелки. Ввиду симметрии вращения относительно главной оптической оси достаточно ограничиться рассмотрением задачи в координатной плоскости XY .

Координаты предмета и его изображения здесь и ниже будем обозначать одинаковыми символами, отмечая штрихами символы, относящиеся к изображениям.

Пусть в точке $Q(x,0)$ находится точечный источник света. Привольный луч QA после преломления на сферической поверхности, пройдя по пути AQ , попадёт в точку $Q'(x',0)$. В принятой системе знаков $x < 0$, $x' > 0$.

Найдём связь между x и x' в предположении, что все отмеченные на рис. 1.1 углы столь малы, что можно пользоваться приближениями $\sin \xi \approx \xi$, $\cos \xi \approx 1$, где $\xi \ll 1$ — любой из рассматриваемых малых углов в нашем или аналогичном построении. В этом приближении, которое и называется **параксиальным**, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} QA \approx QA' \approx QO = -x, \\ AQ' \approx A'Q' \approx OQ' = x', \quad A'C \approx OC = R. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Теперь, используя закон преломления и формулы тригонометрии, из рис. 1.1 с учётом сформулированных выше правил знаков получаем систему уравнений

$$n\varphi = n'\varphi', \quad x\alpha = x'\alpha' = R(\varphi + \alpha) = R(\varphi' + \alpha'), \quad (1.2)$$

из которой находим связи между абсциссами точек Q и Q' и углами с главной осью привольного параксиального луча, связывающего эти точки:

$$-\frac{n}{x} + \frac{n'}{x'} = \frac{n' - n}{R}, \quad (1.3)$$

$$x\alpha = x'\alpha'. \quad (1.4)$$

Из формулы (1.3) видно, что в рассматриваемом приближении положение точки Q' не зависит от угла α . Следовательно, все параксиальные лучи, выходящие из одной точки главной оптической оси, после преломления на сферической поверхности пересекутся примерно в одной точке также на главной оптической оси.

Пусть теперь точечный источник не лежит на главной оптической оси, а находится в точке $P(x,y)$ над точкой $Q(x,0)$, см. рис. 1.1. Прямую PCP' , проходящую через центр C кривизны сферической поверхности и заканчивающуюся в точке $P'(x',y')$ под точкой $Q'(x',0)$, можно рассматривать как оптическую ось. Тогда полученные выше результаты относятся и к точкам P , P' , а также к любой другой аналогичной паре точек приосевой области системы. Из подобия треугольников PCQ и $P'CQ'$ получаем связь между ординатами точек P и P' :

$$\frac{y'}{y} = \frac{x' - R}{x - R}. \quad (1.5)$$

Подчеркнём, что сказанное выше справедливо и для мнимого источника, когда источником света служит точка схождения продолжений падающих лучей, а также и для отражающей сферической поверхности, для которой надо формально изменить знак у показателя преломления. При изменении знака кривизны сферической поверхности по отношению к падающему лучу нужно изменить знак перед R . Так, полагая в (1.3) $n = -n'$, получим формулу для выпуклого (+) или вогнутого (-) сферического зеркала:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \pm \frac{2}{R}. \quad (1.6)$$

Отметим, что при $n = n'$ система утрачивает преломляющие свойства и не представляет интереса.

Уравнения (1.3) – (1.5) описывают формирование изображения элементарной оптической ячейкой — сферической поверхностью, разделяющей среды с разными показателями преломления. Преобразуем эти уравнения к более общему виду, позволяющему установить некоторые важные свойства центрированных оптических систем в параксиальных лучах. Для этого введём в пространствах предметов и изображений *разные системы координат*, получающиеся из использованной при выводе (1.3) – (1.5) единой системы с центром в точке O параллельным переносом вдоль главной оптической оси:

$$x = \tilde{x} - \tilde{x}_0, \quad x' = \tilde{x}' - \tilde{x}'_0, \quad y = \tilde{y}, \quad y' = \tilde{y}'. \quad (1.7)$$

Здесь \tilde{x}_0 и \tilde{x}'_0 — координаты точки O (вершины преломляющей поверхности) в новых системах координат. Тильды над новыми переменными далее будем для упрощения опускать. Проведя замену переменных (1.7) в формулах (1.3) – (1.5), после несложных преобразований получим систему уравнений

$$\frac{x' - F'}{H' - F'} = \frac{H - F}{x - F} = \frac{y'}{y} = \frac{n\alpha}{n'\alpha'}, \quad (1.8)$$

$$(x - H)\alpha = (x' - H')\alpha', \quad (1.9)$$

где введены постоянные величины

$$F = x_0 - \frac{nR}{n' - n}, \quad F' = x'_0 + \frac{n'R}{n' - n}, \quad H = x_0, \quad H' = x'_0, \quad (1.10)$$

определенные свойствами преломляющей поверхности и выбором систем координат.

Первые два равенства системы (1.8) устанавливают соответствие между точками пространства предметов (в системе координат x, y) и

точками пространства изображений (в системе координат x', y'). Уравнения (1.8) определяют также связь между поперечным y'/y и угловым α'/α увеличениями рассмотренной оптической ячейки и показывают, как эти увеличения зависят от координат. Уравнение (1.9) определяет соотношение между углами, которые образует с главной оптической осью произвольный параксиальный луч, связывающий сопряжённые точки этой оси.

1.2. Центрированная оптическая система

Две или несколько элементарных оптических ячеек, рассмотренных выше, расположенные последовательно на одной оптической оси, образуют центрированную оптическую систему. Применяя преобразования координат по формулам (1.8) к каждой из преломляющих поверхностей, принимая за предмет для очередной поверхности изображение, созданное предыдущей поверхностью, можно найти положение окончательного изображения, даваемого всей системой. Более того, можно доказать¹, что несколько последовательно выполненных преобразований вида (1.8) эквивалентны одному такому преобразованию с некоторыми параметрами F, F', H, H' .

Согласно формулам (1.8) четыре параметра F, F', H и H' , имеющие размерность длины, определяют четыре особые точки на главной оптической оси системы и соответственно четыре особые плоскости, проходящие через эти точки перпендикулярно главной оси. Выясним их физический смысл.

Из первого и второго равенств системы (1.8) следует, что сопряжённые плоскости

$$x - H = 0, \quad x' - H' = 0 \quad (1.11)$$

отображаются друг в друга с поперечным увеличением $y'/y = +1$. Такие плоскости называются главными плоскостями оптической системы. Первая плоскость называется главной плоскостью пространства предметов, или передней главной плоскостью, вторая — главной плоскостью пространства изображений, или задней главной плоскостью.

Точки пересечения главных плоскостей с главной оптической осью

$$x_H = H, \quad x'_H = H' \quad (1.12)$$

называются главными точками центрированной системы.

Плоскости, определяемые уравнениями

$$x - F = 0, \quad x' - F' = 0, \quad (1.13)$$

¹ См., напр., п. 2 «Сложение центрированных оптических систем».

называются соответственно фокальной плоскостью пространства предметов (передней фокальной плоскостью) и фокальной плоскостью пространства изображений (задней фокальной плоскостью). Как видно из первого равенства системы (1.8), каждая точка первой из этих плоскостей изображается бесконечно удалённой точкой: все лучи, вышедшие из одной и той же точки этой плоскости, после прохождения через оптическую систему становятся параллельными. Видно также, что в одной из точек второй плоскости (1.13) пересекаются после прохождения через оптическую систему параллельные лучи, вышедшие из бесконечно удалённой точки пространства предметов.

Точки пересечения фокальных плоскостей с главной оптической осью

$$x_F = F, \quad x'_F = F' \quad (1.14)$$

называются **фокальными точками**, или **главными фокусами** оптической системы. Расстояния от фокальных точек до соответствующих главных точек называются **главными фокусными расстояниями** системы:

$$f \equiv H - F, \quad f' \equiv H' - F'. \quad (1.15)$$

Здесь f — фокусное расстояние в пространстве предметов, а f' — фокусное расстояние в пространстве изображений. В соответствии с принятым выше правилом знаков *фокусное расстояние считается положительным, если падающий луч идёт в направлении от главного фокуса к соответствующей главной плоскости*.

Отметим, что для исходной элементарной ячейки — сферической поверхности (рис. 1.1) — главные точки совпадают с вершиной O , а фокусные расстояния и положения главных фокусов (относительно точки O) задаются формулами

$$f = -F = \frac{nR}{n' - n}, \quad f' = -F' = -\frac{n'R}{n' - n}. \quad (1.16)$$

Из второго равенства системы (1.8) вытекает, что поперечное увеличение y'/y , называемое также просто **увеличением системы**, не зависит от y . С учётом осевой симметрии, это означает, что *изображение плоского предмета, перпендикулярного главной оптической оси, подобно самому предмету*. Если $y'/y > 0$, то изображение прямое, если же $y'/y < 0$, то изображение обратное. Аналогичные утверждения в случае осевой симметрии системы относятся и к увеличению z'/z . Для краткости ниже мы не будем упоминать о координатах z .

Из третьего равенства системы (1.8) следует соотношение, называемое **теоремой Лагранжа—Гельмгольца**:

$$ny\alpha = n'y'\alpha', \quad (1.17)$$

означающее, что величина *пути* не изменяется при прохождении параксиального луча через центрированную оптическую систему.

Используя определения (1.15), из уравнений (1.8), (1.9) нетрудно получить важную формулу

$$\frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'} \equiv \Phi, \quad (1.18)$$

устанавливающую связь между главными фокусными расстояниями центрированной оптической системы. Определяемая этой формулой величина Φ называется **оптической силой** системы.

Обратимся теперь к угловому увеличению системы, представляющему собой отношение α'/α углов, которые образуют с главной оптической осью произвольные падающий и проходящий параксиальные лучи, связывающие две сопряжённые точки на главной оси. Если $\alpha'/\alpha = +1$, то падающий и проходящий лучи параллельны. Согласно (1.8) с угловым увеличением +1 отображаются друг в друга точки главной оптической оси с координатами, которые с учётом формул (1.15), (1.18) представляются в виде

$$x_K = K \equiv H - (f + f'), \quad x'_K = K' \equiv H' - (f + f'). \quad (1.19)$$

Эти точки называются **узловыми**. Всякий луч, проходящий через узловую точку K , после прохождения через оптическую систему остаётся параллельным своему исходному направлению и проходит через вторую узловую точку системы K' . Как видно из (1.19), узловые точки смешены относительно главных точек на одинаковые отрезки, равные сумме фокусных расстояний системы. Плоскости, проходящие через узловые точки перпендикулярно главной оптической оси, называются **узловыми плоскостями**. При равенстве показателей преломления пространств предметов и изображений согласно (1.18), (1.19) узловые точки и плоскости совпадают соответственно с главными точками и плоскостями центрированной системы.

Ещё одно важное свойство узловых точек проявляется при рассмотрении осевого, или продольного, увеличения оптической системы, определяемого как отношение длины $\delta x'$ изображения бесконечно малого отрезка, параллельного главной оптической оси, к длине δx самого отрезка. Из уравнений (1.8) находим выражения для продольного увеличения

$$\frac{\delta x'}{\delta x} = \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{y'}{y} = \frac{n'}{n} \left(\frac{y'}{y} \right)^2, \quad (1.20)$$

связывающее его с угловым и поперечным увеличениями системы. Эти соотношения показывают, что в общем случае продольное увеличение

не равно поперечному увеличению, и, значит, *изображение бесконечно малого объёмного предмета в центрированной оптической системе, вообще говоря, не подобно самому предмету*. Для сохранения подобия бесконечно малого объёмного предмета и его изображения необходимо и достаточно, чтобы продольное увеличение по модулю было равно по-перечному увеличению. Как видно из формулы (1.20), это будет при условии $\alpha'/\alpha = \pm 1$. Таким образом, *если малый объёмный предмет помещён в одной из узловых ($\alpha'/\alpha = +1$) или так называемых обратных узловых ($\alpha'/\alpha = -1$) точек, то его изображение будет подобно предмету*.

Формулы (1.20) указывают на особенности центрированных оптических систем, отличающихся знаком отношения n'/n . Если $n'/n > 0$ (такая система называется **диоптрической**), то направления распространения падающего и прошедшего света одинаковы. Если же $n'/n < 0$ (такая система называется **катоптрической**), то направления распространения падающего и прошедшего света противоположны. Из формул (1.20) для продольного увеличения при этом следует общее для всех оптических систем правило: *если предмет перемещается вдоль оптической оси в направлении распространения падающего света, то его изображение перемещается в направлении распространения прошедшего света, и наоборот*.

Некоторые частные случаи

1. *Начала координатных систем помещены в главные точки*. В новых переменных $s \equiv x - H$, $s' \equiv x' - H'$. При сохранении прежних обозначений для поперечных координат уравнения (1.8) принимают вид

$$\frac{s' + f'}{f'} = \frac{f}{s + f} = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \frac{\alpha}{\alpha'}. \quad (1.21)$$

Первое уравнение этой системы можно представить в виде, подобном формуле тонкой линзы

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = -1 \quad (1.22)$$

с разными фокусными расстояниями, связанными соотношением (1.18).

2. *Начала координатных систем помещены в главные фокусы*. В новых переменных $X \equiv x - F$, $X' \equiv x' - F'$. При сохранении прежних обозначений для поперечных координат уравнения (1.8) принимают простой вид

$$\frac{X'}{f'} = \frac{f}{X} = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \frac{\alpha}{\alpha'}. \quad (1.23)$$

Первое соотношение этой системы называют **формулой Ньютона**.

3. Среда по обе стороны оптической системы одна и та же. В этом наиболее распространённом случае формулы, описывающие оптическую систему, значительно упрощаются. Возможны два варианта.

В диоптрической системе $n = n'$, и по формуле (1.18) $f = -f'$. При этом, как видно из (1.23) и (1.19), угловое увеличение есть величина, обратная поперечному увеличению, и узловые точки системы совпадают с главными точками. Вместо (1.22) и (1.23) имеем

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}, \quad XX' = -f^2. \quad (1.24)$$

В катоптрической системе $n = -n'$, $f = f'$, а формулы (1.23) и (1.22) переходят в формулу зеркала.

1.3. Построение изображения в центрированной системе

Главные, фокальные и узловые точки центрированной оптической системы называются её кардинальными точками. Иногда к ним также относят обратные главные ($y'/y = -1$) и обратные узловые ($\alpha'/\alpha = -1$) точки, координаты которых могут быть получены из уравнений (1.8). *Положение двух главных и двух фокальных кардинальных точек на главной оптической оси системы полностью характеризует центрированную оптическую систему: зная положение этих точек, можно найти положение изображения любого предмета, даваемого системой.* Пара узловых точек также может быть использована для нахождения положения изображения.

Главные точки (плоскости) могут лежать как внутри, так и вне системы и при этом могут располагаться несимметрично относительно поверхностей, ограничивающих оптическую систему. Задние кардинальные точки (плоскости) системы могут лежать впереди передних. Типичный пример — рассеивающая линза, у которой главный фокус пространства изображений (задний фокус) лежит впереди главного фокуса пространства предметов (переднего фокуса). Ясно, что часто используемые в названиях кардинальных точек прилагательные «передний» и «задний» являются не совсем удачными, в связи с чем ниже они будут применяться только в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений.

Процедуру построения изображения в центрированной оптической системе по известным положениям на главной оси главных H , H' и фокальных F , F' кардинальных точек иллюстрирует рис. 1.2. На этом рисунке оси x , x' независимых в общем случае систем координат пространств предметов и изображений проходят через точки Q , Q' , а оси y , y' лежат в плоскости рисунка. Для полноты картины показаны и узловые точки K , K' , лежащие в данном случае согласно (1.19) левее

соответствующих главных точек H, H' на величину отрезка, равного алгебраической сумме фокусных расстояний $f + f'$ ($f > 0, f' < 0$).

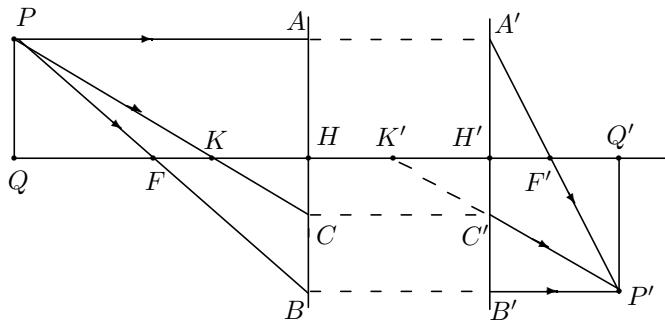


Рис. 1.2. Построение изображения в центрированной оптической системе

Построение изображения отрезка PQ , перпендикулярного главной оптической оси, начнём направив луч PA параллельно главной оси. Он (или его продолжение в обратном направлении) встретит главные плоскости в сопряжённых точках A и A' , лежащих на одинаковом расстоянии от главной оси ($y'/y = 1$). Далее этот луч пройдёт через задний фокус F' . Двумя точками A' и F' положение луча в пространстве изображений определяется полностью. Второй луч из точки P проведём через передний фокус F . Он (или его продолжение) встретится с передней главной плоскостью в точке B . Проведём прямую, параллельную главной оптической оси, через точку B и сопряжённую с ней точку B' на задней главной плоскости до пересечения с лучом $A'F'$ в точке P' , которая и будет изображением точки P . При этом проекция Q точки P на главную оптическую ось изобразится проекцией Q' точки P' на ту же ось. Отрезок PQ изображается отрезком $P'Q'$. Попутно мы получили правило построения изображения точки и в том случае, когда она лежит на главной оптической оси.

На рис. 1.2 также показаны лучи $PC, C'P'$, проходящие (сами или их продолжения) через узловые точки K и K' . Эти лучи параллельны ($\alpha'/\alpha = 1$) и встречаются с главными плоскостями в сопряжённых точках C и C' на одинаковых расстояниях от главной оптической оси. Как видим, лучи, проходящие через узловые точки, положение которых на главной оси определяется положением главных и фокальных точек, тоже могут использоваться для построения изображения в центрированной системе. Напомним, что в том случае, когда по обе стороны системы находится одна и та же среда, узловые точки и плоскости сливаются с главными точками и плоскостями.

Таким образом, построение изображения предмета в центрированной оптической системе по известным положениям главных и фокальных точек может быть выполнено с использованием двух лучей из трёх, представленных на рис. 1.2, или их продолжений в обратном направлении.

Отдельно подчеркнём, что представленная на рис. 1.2 картина фактически является эквивалентной схемой реальной оптической системы и реального хода лучей, преломляющихся на сферических поверхностях, разграничающих среды с различными оптическими свойствами.

2. Сложение центрированных оптических систем

Пусть две центрированные системы имеют общую главную оптическую ось. Если известны параметры каждой системы, а также их взаимное расположение, то аналитическим расчётом или геометрическим построением можно определить положение всех кардинальных точек сложной оптической системы, состоящей из этих двух систем.

Рассматриваемая система схематически изображена на рис. 1.3. Кардинальные точки первой и второй систем отмечены соответствующими нижними индексами. Штрихами выделены кардинальные точки пространства изображений первой системы и аналогичные точки пространства предметов второй системы. Величина $\Delta \equiv F_2 - F'_1$ представляет расстояние от заднего фокуса первой системы до переднего фокуса второй системы и называется оптическим интервалом двух систем. В соответствии с принятым правилом знаков $\Delta > 0$, если падающий свет идёт от фокуса F'_1 к фокусу F_2 , как отмечено стрелкой на рис. 1.3, в противоположном случае $\Delta < 0$. Заданием оптического интервала полностью определяется взаимное расположение складываемых систем.

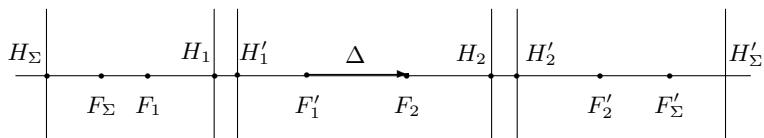


Рис. 1.3. Сложение центрированных систем

Поместим начала координат исходных систем в их фокальные точки, а фокусы F_1 и F'_2 примем соответственно за начала координат в пространстве предметов и пространстве изображений для сложной системы в целом. Координаты предмета $x = x_1$, $y = y_1$ и его изображения

x'_1, y'_1 в первой системе согласно (1.23) связаны уравнениями

$$\frac{x'_1}{f'_1} = \frac{f_1}{x} = \frac{y'_1}{y}, \quad (1.25)$$

где $f_1 = H_1 - F_1$, $f'_1 = H'_1 - F'_1$ — фокусные расстояния первой системы. Примем изображение, даваемое первой системой, за предмет для второй системы. Его координаты в системе с началом отсчета в точке F_2 будут $x_2 = x'_1 - \Delta$, $y_2 = y'_1$. При этом координаты изображения, даваемого второй системой (и, значит, всей сложной системой) относительно начала отсчета F'_2 : $x'_2 = x'$, $y'_2 = y'$, определяются уравнениями

$$\frac{x'}{f'_2} = \frac{f_2}{x'_1 - \Delta} = \frac{y'}{y'_1}, \quad (1.26)$$

где $f_2 = H_2 - F_2$, $f'_2 = H'_2 - F'_2$ — фокусные расстояния второй системы. Исключая промежуточные координаты x'_1, y'_1 из уравнений (1.25), (1.26), получаем формулы преобразования в виде, аналогичном (1.8):

$$\frac{x' + f_2 f'_2 / \Delta}{f'_1 f'_2 / \Delta} = \frac{-f_1 f_2 / \Delta}{x - f_1 f'_1 / \Delta} = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \frac{\alpha}{\alpha'}, \quad (1.27)$$

где n и n' — показатели преломления крайних сред сложной системы. Сравнивая эти уравнения с (1.8), находим фокусные расстояния и координаты фокальных и главных точек сложной системы:

$$\begin{aligned} f_\Sigma &= -\frac{f_1 f_2}{\Delta}, & H_\Sigma &= \frac{f_1(f'_1 - f_2)}{\Delta}, & F_\Sigma &= \frac{f_1 f'_1}{\Delta}, \\ f'_\Sigma &= \frac{f'_1 f'_2}{\Delta}, & H'_\Sigma &= \frac{f'_2(f'_1 - f_2)}{\Delta}, & F'_\Sigma &= -\frac{f_2 f'_2}{\Delta}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Напомним, что продольные координаты в пространствах предметов и изображений сложной системы отсчитываются в (1.27), (1.28) соответственно от фокусов F_1 и F'_2 складываемых систем.

Оптическая сила рассматриваемой сложной системы согласно (1.18), (1.28) даётся формулой

$$\Phi_\Sigma = \frac{n}{f_\Sigma} = -\frac{n\Delta}{f_1 f_2}. \quad (1.29)$$

На рис. 1.3 показаны положения главных и фокальных точек сложной системы, рассчитанные по формулам (1.28), исходя из характеристик и расположения двух заданных на рисунке центрированных систем. Отмечены также главные плоскости сложной системы. Из взаимного расположения главных и фокальных точек видно, что в результате

сложения двух собирающих систем образовалась рассеивающая сложная система.

Таким образом, последовательное применение коллинеарных преобразований в форме (1.8) снова приводит к коллинеарному соотношению того же вида между координатами предмета и его изображения в сложной системе. Полученные выше формулы могут быть использованы как для построения изображения в сложной системе, так и для её аналитического исследования. Ниже аналитический метод использован при рассмотрении в качестве примеров телескопической системы и системы из двух тонких линз, а также при изучении основных оптических приборов.

3. Примеры центрированных оптических систем

3.1. Телескопическая система

Оптическая система может не иметь фокальных плоскостей. Такая система называется *афокальной* или *телескопической*. Она является предельным случаем обычной системы, у которой фокальные плоскости сдвинуты в бесконечность. Как видно из формул (1.28), *телескопической становится система из двух обычных систем, если их оптический интервал $\Delta \rightarrow 0$* . Выполнив этот предельный переход в уравнениях (1.27), получим формулы для преобразования координат и коэффициенты увеличений телескопической системы:

$$\frac{x'}{x} = \frac{\delta x'}{\delta x} = \frac{f_2 f'_2}{f_1 f'_1}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{f_2}{f'_1}. \quad (1.30)$$

Из выражений (1.30) следует, что в *телескопической системе: 1) всякий параллельный пучок света после прохождения через систему остается параллельным; 2) продольное, поперечное и угловое увеличения постоянны, то есть не зависят от положения предмета.*

Оптическая сила телескопической системы, как видно из (1.29), равна нулю.

3.2. Толстая линза

В качестве ещё одного примера применения выражений (1.28) для аналитического определения характеристик сложной системы решим задачу о толстой линзе, которая представляет собой две сферические поверхности с радиусами кривизны R_1 и R_2 , ограничивающие объём оптического материала с показателем преломления $n_2 = n$. Обычно показатели преломления крайних сред n_1 и n_3 одинаковы. Будем считать, что $n_1 = n_3 = 1$.

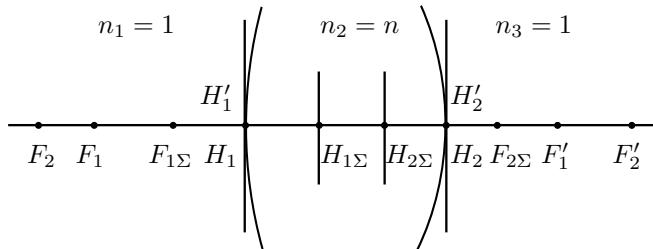


Рис. 1.4. Толстая линза как центрированная система

Рассчитаем параметры линзы, рассматривая её как сложную систему, состоящую из двух подсистем — сферических поверхностей на границах раздела сред, — представленных на рис. 1.4.

Начала координат каждой из подсистем поместим в точки $H_i = H'_i = 0$ ($i = 1, 2$) пересечения преломляющих поверхностей и главных плоскостей каждой подсистемы с главной оптической осью (т. е. в вершинах поверхностей линзы). Формулы (1.16) для фокусных расстояний f_i , f'_i и координат фокусов F_i , F'_i при преломлении на передней ($i = 1$) и задней ($i = 2$) поверхностях линзы тогда дают

$$\begin{aligned} f_1 &= -F_1 = \frac{R_1}{n-1}, & f'_1 &= -F'_1 = -\frac{nR_1}{n-1}, \\ f_2 &= -F_2 = -\frac{nR_2}{n-1}, & f'_2 &= -F'_2 = \frac{R_2}{n-1}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

Пусть d — толщина линзы, при этом оптический интервал

$$\Delta = d + f'_1 - f_2 = d - \frac{n}{n-1}(R_1 - R_2). \quad (1.32)$$

С учётом полученных выражений по формулам (1.28), (1.29) находим фокусные расстояния и оптическую силу толстой линзы как сложной системы, а также координаты её главных и фокальных точек:

$$\begin{aligned} f_{1\Sigma} &= -f_{2\Sigma} = \frac{1}{\Phi} = \frac{nR_1R_2}{(n-1)^2\Delta}, \\ H_{i\Sigma} &= -\frac{R_id}{(n-1)\Delta}, \quad F_{i\Sigma} = H_{i\Sigma} + f_{i\Sigma}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

При $i = 1$ эти формулы дают параметры системы, относящиеся к пространству предметов, а при $i = 2$ — к пространству изображений, причём в отличие от формул (1.28) отсчёт координат ведётся от вершин

соответствующих поверхностей линзы. Изменение систем координат по сравнению с общими формулами (1.28) обусловлено удобством использования реальных объектов в качестве тел отсчёта при проведении измерений.

Если радиусы R_i различны и выполняется неравенство

$$d \ll \frac{n}{n-1} |R_1 - R_2|,$$

то величиной d в (1.32) можно пренебречь. Как следует из формул (1.33), (1.22), в этом приближении «не очень толстой» линзы

$$\Phi_\Sigma = \frac{1}{f_{1\Sigma}} = -\frac{1}{f_{2\Sigma}} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s'}, \quad (1.34)$$

$$H_{i\Sigma} = \frac{R_i d}{n(R_1 - R_2)}, \quad \delta \equiv d + H_{2\Sigma} - H_{1\Sigma} = \frac{n-1}{n} d. \quad (1.35)$$

Выражения (1.34) показывают, что в этом случае для определения фокусного расстояния и преобразования координат, отсчитываемых от главных плоскостей, можно пользоваться формулами тонкой линзы. Формулы (1.35) позволяют при этом определить положения главных плоскостей, не совпадающих из-за малой, но конечной толщины линзы, и найти расстояние δ между ними.

3.3. Тонкая линза

В модели тонкой линзы принимается, что вершины сферических поверхностей линзы и её главные точки совпадают и лежат в оптическом центре линзы — середине отрезка, соединяющего вершины линзы. В общем случае разных оптических сред в пространствах предметов и изображений при этом выполняются соотношения (1.21)–(1.23). При одинаковых средах по обе стороны линзы $n = n'$, $f = -f'$, и формулы (1.21)–(1.23) для тонкой линзы принимают вид

$$\frac{f - a'}{f} = \frac{f}{a + f} = -\frac{X'}{f} = \frac{f}{X} = \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{\alpha'}. \quad (1.36)$$

Здесь и далее в модели тонкой линзы вместо координат s и s' (расстояний от главных точек оптической системы) используются продольные координаты предметов a и изображений a' , отсчитываемые от *оптического центра* линзы. Преобразования продольных координат определяются при этом известными формулами тонкой линзы:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}, \quad XX' = -f^2. \quad (1.37)$$

3.4. Система из двух тонких линз

Центрированная система из двух тонких линз, расположенных на расстоянии ℓ_{12} в среде с показателем преломления $n = 1$, описывается формулами (1.28), в которых надо положить $f'_{1,2} = -f_{1,2}$. В результате для нашей сложной системы находим положения главных и фокальных точек *относительно соответствующих линз* и фокусные расстояния в виде

$$\begin{aligned} H_{i\Sigma} &= (-1)^i f_i \ell_{12} / \Delta, \\ F_{i\Sigma} &= (-1)^i f_i (1 + f_i / \Delta), \\ f_{i\Sigma} &= (-1)^i f_1 f_2 / \Delta. \end{aligned} \quad (1.38)$$

При $i = 1$ эти формулы дают параметры системы, относящиеся к пространству предметов, а при $i = 2$ — к пространству изображений. Заметим, что согласно выбранному нами правилу знаков в этих системах отсчёта для действительного предмета $x < 0$, для действительного изображения $x' > 0$.

Оптический интервал Δ , расстояние ℓ_{12} между линзами и расстояние δ между главными плоскостями системы связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta &= \ell_{12} - f_1 - f_2, \\ \delta &= \ell_{12} + H_{2\Sigma} - H_{1\Sigma} = \ell_{12}^2 / \Delta. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Для оптической силы системы из формул (1.29), (1.38), (1.39) получаем выражения

$$\Phi_{\Sigma} = -\frac{1}{f_{2\Sigma}} = -\frac{\Delta}{f_1 f_2} = -\frac{\ell_{12}}{f_1 f_2} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (1.40)$$

Как видно, при $\Delta = 0$, когда совпадают задний фокус первой линзы и передний фокус второй линзы, система становится телескопической, и её оптическая сила обращается в нуль. При $\ell_{12} = 0$, когда тонкие линзы установлены вплотную, оптическая сила системы равна сумме оптических сил составляющих её линз.

4. Оптические приборы

4.1. Лупа

Лупа, как и микроскоп, даёт увеличенное изображение малого предмета, находящегося на небольшом расстоянии от глаза. Увеличение лупы (и микроскопа) N определяется как отношение угла φ' , под которым виден малый предмет через лупу (микроскоп), к углу φ , под которым

предмет был бы виден невооружённым глазом с расстояния наилучшего зрения $L = 25$ см. При увеличениях, не превосходящих 5, в качестве лупы обычно применяется простая собирающая линза, при больших увеличениях — система, состоящая из нескольких таких линз.

При нахождении общей для лупы и микроскопа формулы для увеличения воспользуемся уравнениями центрированной системы в форме (1.23). Предмет помещается между передним главным фокусом и передней главной плоскостью лупы, которая даёт его прямое мнимое изображение. Пусть X, y — координаты точки предмета относительно переднего главного фокуса, X', y' — координаты соответствующей точки изображения относительно заднего главного фокуса, a — координата глаза относительно того же заднего главного фокуса. Глаз через лупу видит отрезок y' под углом $\varphi' = y'/(a - X')$. Соответствующий отрезок предмета был бы виден невооружённым глазом с расстояния наилучшего зрения под углом $\varphi = y/L$. Отсюда для увеличения лупы и микроскопа с учётом (1.23) получаем формулы

$$N_L \equiv \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{y'}{y} \frac{L}{a - X'} = \frac{L}{f} \left(\frac{n'}{n} + \frac{aX}{f^2} \right)^{-1}. \quad (1.41)$$

В простейшем случае, когда $n = n' = 1$, эта формула принимает вид

$$N_L = \frac{L/f}{1 + aX/f^2}. \quad (1.42)$$

Если глаз находится в заднем главном фокусе лупы, то $a = 0$ и $N_L = L/f$. Увеличение будет тем же самым, если поместить предмет в передний главный фокус лупы, где $X = 0$. В этом случае глаз должен быть *аккомодирован на бесконечность*, куда уходит изображение предмета. Если же глаз *аккомодирован на расстояние наилучшего зрения*, то $a - X' = L$ и

$$N_L = \frac{y'}{y} = \frac{f}{X} = \frac{L - a}{f}. \quad (1.43)$$

Как видим, в этом случае увеличение лупы равно её поперечному увеличению. Если лупой служит тонкая линза, вплотную придинутая к глазу, то $a = -f$, так что $N_L = (L/f) + 1$.

Рассматриваемый предмет всегда помещается вблизи переднего главного фокуса, то есть $|X|/f \ll 1$, величина $|a|/f \leq 1$, отношение $L/f \gg 1$. Поэтому при $n = n' = 1$ увеличение лупы (и микроскопа) определяется формулой

$$N_L = \frac{L}{f}. \quad (1.44)$$

Увеличение угла зрения в $N_L = L/f$ раз фактически означает, что при $n = n' = 1$ лупа (и микроскоп) в случае аккомодации глаза на расстояние наилучшего зрения L позволяет разглядывать предмет на значительно меньшем расстоянии f от глаза.

4.2. Микроскоп

Микроскоп состоит из двух собирающих систем линз — **объектива** и **окуляра**, расположенных на расстоянии ℓ_{12} друг от друга в трубе, называемой **тубусом**. Длина тубуса у всех микроскопов, выпускаемых отечественной промышленностью, составляет 16 см, что значительно превышает фокусные расстояния объектива и окуляра. Предмет помещается на малом расстоянии перед передним фокусом объектива. Между предметом и объективом может находиться **иммерсионная жидкость** с показателем преломления n , тогда такой микроскоп называется **иммерсионным**. Ход лучей в микроскопе схематично показан на рис. 1.5.

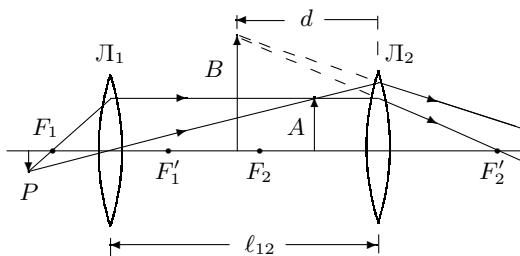


Рис. 1.5. Ход лучей в микроскопе

Объектив L_1 даёт действительное перевёрнутое увеличенное изображение A предмета P , которое рассматривается через окуляр L_2 , действующий как лупа. Мнимое изображение B , даваемое окуляром, располагается на некотором расстоянии d от окуляра. Наводя микроскоп, как и любой другой оптический прибор, на резкость, наблюдатель автоматически устанавливает такое расстояние d , которое удобно для аккомодации глаза.

Поскольку глаз обладает значительной областью аккомодации (область аккомодации нормального человеческого глаза простирается с расстояния около 10 см до бесконечности), расстояние d даже для одного и того же наблюдателя может существенно изменяться от опыта к опыту. При изменении аккомодации оптический прибор, вооружающий глаз, должен быть перефокусирован. В микроскопе это делается путём перемещения всей оптической системы относительно предмета.

Если f_1 и f'_1 — главные фокусные расстояния объектива в пространствах предметов и изображений, а f_2 и f'_2 — соответствующие характе-

ристики окуляра, то согласно (1.28) фокусные расстояния микроскопа как сложной системы даются формулами

$$f_M = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}, \quad f'_M = \frac{f'_1 f'_2}{\Delta}, \quad (1.45)$$

где Δ — оптический интервал, величина которого зависит от устройства и взаимного расположения объектива и окуляра.

Для увеличения безиммерсионного микроскопа ($n = n' = 1$), для которого $f_1 = -f'_1 > 0$, $f_2 = -f'_2 > 0$, из формул (1.44), (1.45) получаем выражения

$$N_M = \frac{L}{f_M} = -\frac{\Delta}{f_1} \frac{L}{f_2}, \quad \Delta = \ell_{12} - f_1 - f_2. \quad (1.46)$$

Величину N_M можно представить в виде

$$N_M = N_1 N_2, \quad N_1 = -\frac{\Delta}{f_1}, \quad N_2 = \frac{L}{f_2}, \quad (1.47)$$

где N_1 — увеличение объектива, а N_2 — дополнительное увеличение, даваемое окуляром как лупой. Для иммерсионного микроскопа увеличение (1.46) согласно (1.41) надо умножить на n — показатель преломления иммерсионной жидкости.

В микроскопе фокусные расстояния f_1 и f_2 , а также оптический интервал Δ — положительны. Фокусное расстояние f_M всей системы, а с ним и увеличение N_M — отрицательны, так что изображение, получаемое в микроскопе, — перевёрнутое (обратное).

4.3. Зрительные трубы

Зрительные трубы, основными элементами которых, как и в случае микроскопа, являются объектив и окуляр, предназначены для наблюдения удалённых предметов. Ход лучей в зрительных трубах схематически показан на рис. 1.6, 1.7. Уменьшенное обратное изображение A удалённого предмета, даваемое объективом, находится практически в его фокальной плоскости. Мнимое изображение B , даваемое окуляром, располагается на расстоянии d от окуляра, что отражено на рис. 1.6, 1.7. В теории зрительных труб для определённости считается, что глаз аккомодирован на бесконечность. При этом мнимое изображение B должно располагаться в бесконечности, и, следовательно, промежуточное изображение A должно находиться в фокальной плоскости окуляра, а задний фокус объектива должен быть совмещён с передним фокусом окуляра. В таком случае зрительные трубы представляют собой телескопические системы, рассмотренные выше в п. 3.1.

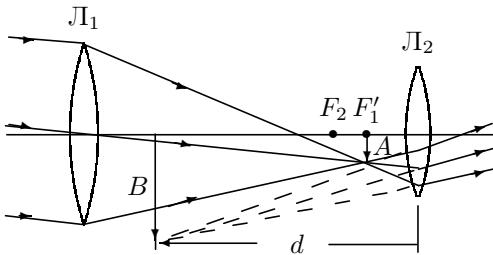


Рис. 1.6. Ход лучей в зрительной трубе Кеплера

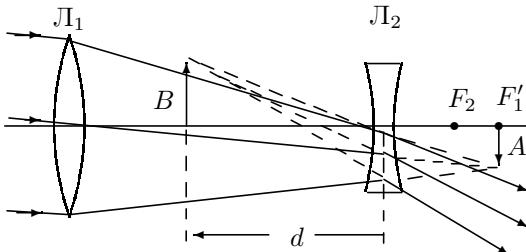


Рис. 1.7. Ход лучей в зрительной трубе Галилея

Для любых телескопических систем, у которых $n = n'$, согласно (1.30), (1.18) угловое увеличение

$$N_T \equiv \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{y}{y'} = \frac{f'_1}{f_2} = -\frac{f_1}{f_2} \quad (1.48)$$

обратно поперечному увеличению и по абсолютной величине равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра. Угловое увеличение N_T в этом случае называют просто *увеличением трубы*, опуская прилагательное «угловое». Эта величина показывает, во сколько раз угол, под которым виден бесконечно удалённый малый предмет в трубу, больше угла, под которым он был бы виден невооружённым глазом (рис. 1.8а).

Отношение фокусных расстояний в равенствах (1.48) может иметь разный знак. Объективом зрительной трубы всегда является собирающая система, для которой переднее фокусное расстояние $f_1 > 0$. Окуляром трубы Кеплера (рис. 1.6, 1.8б) является собирающая система, переднее фокусное расстояние которой $f_2 > 0$, так что труба Кеплера даёт перевёрнутое изображение предмета. Окуляром трубы Галилея (рис. 1.7), напротив, является рассеивающаяся система, переднее фокус-

ное расстояние которой $f_2 < 0$, так что труба Галилея даёт прямое изображение. Поэтому бытовые зрительные трубы, бинокли и т. д. делаются по схеме Галилея.

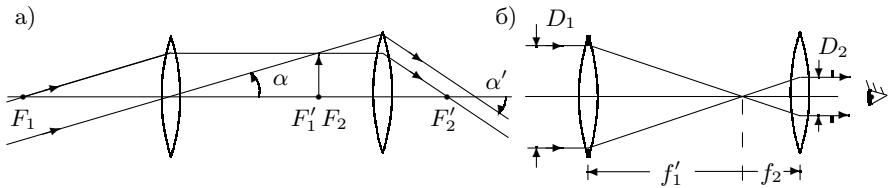


Рис. 1.8. Ход лучей в телескопе

Модуль отношения фокусов в равенствах (1.48), как видно из рис. 1.8б, на котором изображена модель телескопа Кеплера из двух тонких собирающих линз, равен отношению ширины падающего пучка лучей к ширине соответствующего выходящего пучка. Ширина пучка, прошедшего объектив, определяется диаметром D_1 его оправы; ширина пучка, выходящего из окуляра, — диаметром D_2 изображения оправы объектива, даваемого окуляром. Таким образом,

$$N_T = \mp \frac{D_1}{D_2}, \quad (1.49)$$

где верхний знак относится к трубам Кеплера, а нижний — к трубам Галилея.

В том случае, когда диаметр D_2 пучка, выходящего из окуляра, равен диаметру d_0 зрачка наблюдателя ($d_0 \approx 5$ мм), увеличение телескопа называется **нормальным**. При этом диаметре выходного пучка освещённость изображения на сетчатке глаза достигает своего максимального значения. Уменьшение D_2 ведёт к квадратичному уменьшению освещённости изображения на сетчатке глаза, тогда как с ростом D_2 уменьшается увеличение телескопа при неизменной освещённости.

5. Основные aberrации оптических систем

В идеальных оптических системах лучи, вышедшие из одной точки объекта, пересекаются в одной и той же точке изображения независимо от угла испускания и длины волны света. В реальных системах такие зависимости имеют место, из-за чего заметно ухудшается качество изображения. Основные погрешности при этом возникают из-за **сферической** и **хроматической** aberrаций линз, входящих в состав оптических систем.

5.1. Сферическая aberrация

Сферическая aberrация появляется при преломлении широких (непараксиальных) пучков света на сферических поверхностях линз. Рис. 1.9 поясняет возникновение сферической aberrации.

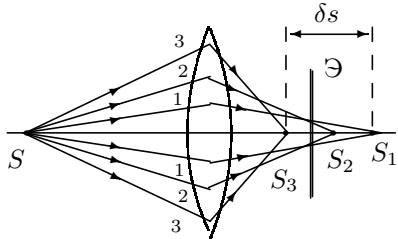


Рис. 1.9. Сферическая aberrация равной расстоянию между точками пересечения крайних и центральных лучей с главной оптической осью. Продольная aberrация зависит от материала линзы и от кривизны её поверхностей.

Лучи 1, 2, 3, преломляющиеся в линзе на различных расстояниях от центра, пересекают оптическую ось в разных точках \$S_1\$, \$S_2\$, \$S_3\$. Поэтому преломлённые пучки лучей не гомоцентричны; на экране \$\mathcal{E}\$ вместо точечного изображения получается расплывчатое пятно — кружок рассеяния. Сферическую aberrацию характеризуют с помощью так называемой продольной aberrации \$\delta s\$,

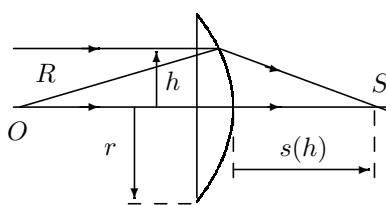


Рис. 1.10. Сферическая aberrация плосковыпуклой линзы

Опуская довольно громоздкий расчёт продольной aberrации, мы приведём приближённые формулы для плосковыпуклой (или плосковогнутой) линзы, на плоскую поверхность которой падает широкий параллельный пучок света (рис. 1.10). Для лучей, проходящих на расстоянии \$h\$ от центра линзы, расстояние \$s\$ выражается соотношением

$$s(h) = \frac{R}{n - 1} \left(1 - \frac{n^2 h^2}{2R^2}\right), \quad (1.50)$$

где \$n\$ — показатель преломления стекла, а \$R\$ — радиус кривизны поверхности линзы. Для параксиальных лучей \$h \ll R\$ и

$$s(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \frac{R}{n - 1}, \quad (1.51)$$

что согласуется с известным выражением для фокусного расстояния линзы, ограниченной сферическими поверхностями в воздухе,

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.52)$$

при радиусах $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 < 0$.

Характеристической кривой сферической aberrации называют зависимость

$$\delta s(h) = s(h) - s(0) = -\frac{1}{2} \frac{n^2 h^2}{(n - 1) R} = -\frac{1}{2} \left(\frac{n}{n - 1} \right)^2 \left(\frac{h}{f} \right)^2 f. \quad (1.53)$$

При $h = r$, где r — радиус линзы, эта формула определяет продольную сферическую aberrацию линзы. Формула (1.53) показывает, что собирающая и рассеивающая линзы имеют сферические aberrации разных знаков, что даёт возможность составлять комбинации положительных и отрицательных линз с малой сферической aberrацией. По этой причине большинство современных объективов склеено из двух или большего числа линз. Разумеется, сферическую aberrацию можно было бы устранить, делая поверхности линзы несферическими. Однако это представляет значительные технические трудности.

5.2. Хроматическая aberrация

Хроматическая aberrация — зависимость фокусного расстояния линзы от длины волны — возникает вследствие дисперсии показателя преломления стёкол, то есть из-за того, что показатель преломления зависит от длины волны света $n = n(\lambda)$. Возникновение хроматической aberrации поясняет рис. 1.11.

В результате хроматической aberrации на экране \mathcal{E} возникает окрашенный кружок. Хроматическую aberrацию принято характеризовать разностью фокусных расстояний для двух характерных спектральных линий водорода, расположенных в крайних частях видимой области спектра: $\lambda_F = 486,1$ нм (голубая линия F водорода), $\lambda_C = 656,3$ нм (красная линия C водорода):

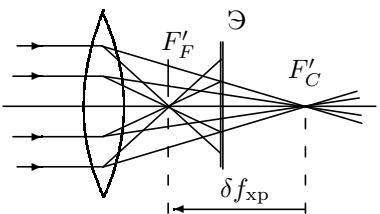


Рис. 1.11. Хроматическая aberrация

$$\delta f_{xp} = f_F - f_C. \quad (1.54)$$

Для характеристики дисперсионных свойств стёкол часто пользуются так называемым коэффициентом дисперсии, или числом Аббе:

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}, \quad (1.55)$$

где n_F и n_C — показатели преломления для линий F и C водорода, а n_D — показатель преломления для жёлтой линии D натрия $\lambda_D = 589,3$ нм (среднее значение длины волны жёлтого дублета натрия). Используя формулы (1.52), (1.54) и (1.55), для продольной хроматической aberrации получаем удобное для расчётов выражение

$$\delta f_{xp} = -\frac{(n_D - 1)(n_D - 1)}{(n_F - 1)(n_C - 1)} \frac{f_D}{\nu} \approx -\frac{f_D}{\nu}. \quad (1.56)$$

Использованное здесь приближение является довольно хорошим, поскольку согласно табличным данным для крайних частот видимого спектра $n_F - n_C \sim 10^{-2}$, так что в числителе формулы (1.56) n_D можно заменить на n_F и n_C с относительной погрешностью результата около 2%.

Согласно табличным данным для тяжёлых стёкол с большим показателем преломления число Аббе существенно меньше, чем для лёгких стёкол. Поэтому хроматическая aberrация у линз, изготовленных из тяжёлых стёкол (тяжёлый флинт), в несколько раз больше, чем у линз из лёгких стёкол (крон, лёгкий крон). Заметим также, что собирающие и рассеивающие линзы имеют хроматические aberrации разных знаков. Это обстоятельство позволяет получать ахроматические объективы ($f_F = f_C$), комбинируя короткофокусную положительную линзу из крона с длиннофокусной рассеивающей линзой из фланта. Чтобы уменьшить потери света на отражение, линзы обычно склеивают, поэтому радиусы вогнутой поверхности отрицательной линзы и выпуклой поверхности положительной линзы делают одинаковыми.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §§ 9–16, 21–24.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. 12–14.
- 3*. Дитчберн Р. Физическая оптика. — М.: Наука, 1965. Гл. 7, 14, 15.
- 4*. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. Гл. 2, § 2.3; гл. 3–5.

Работа 4.1.1

Изучение центрированных оптических систем

Цель работы: изучить методы определения фокусных расстояний линз и сложных оптических систем; определить характеристики оптической системы, составленной из тонких линз; изучить недостатки реальных линз — сферическую и хроматическую aberrации.

В работе используются: оптическая скамья с набором рейтеров, положительные и отрицательные линзы, экран, осветитель с ирисовой диафрагмой, зрительная труба, светофильтры, кольцевые диафрагмы, линейка.

I. Определение фокусного расстояния тонкой собирающей линзы и сложных оптических систем по методу Аббе

Измерение фокусного расстояния по методу Аббе основано на определении поперечного увеличения для нескольких (не менее двух) различных положений предмета, находящегося на оптической оси исследуемой оптической системы. На рис. 1 представлена соответствующая схема эксперимента.

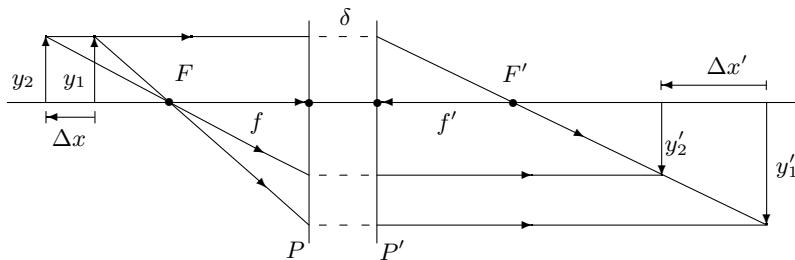


Рис. 1. Измерение фокусного расстояния оптической системы по методу Аббе

С учётом определения (1.15) и формул (1.8), (1.18) фокусное расстояние системы можно выразить через положения предмета и соответствующие увеличения следующим образом:

$$f = \frac{\Delta x}{\Delta(y/y')} = -\frac{\Delta x'}{\Delta(y'/y)}. \quad (1)$$

Здесь \$\Delta x = x_2 - x_1\$ — смещение предмета, \$\Delta x' = x'_2 - x'_1\$ — соответствующее ему перемещение изображения, \$\Delta(y'/y) = y_2/y'_2 - y_1/y'_1\$ — приращение поперечного увеличения, а \$\Delta(y/y')\$ — приращение величины,

обратной поперечному увеличению. Для повышения точности измерений следует выбирать такие смещения Δx , чтобы увеличения заметно отличались друг от друга. С целью уменьшения случайной ошибки, возникающей при фокусировке изображения, измерения следует проводить несколько раз, усредняя полученные данные.

Основное достоинство метода Аббе состоит в том, что фокусное расстояние сложной системы или линзы, как это видно из рисунка, может быть получено при неизвестном расстоянии δ между главными плоскостями P и P' .

II. Определение фокусного расстояния собирающих линз и сложных оптических систем по методу Бесселя

Схема метода Бесселя для случая, когда $n = n'$ и $f' = -f$, представлена на рис. 2. Она основана на том, что при заданном расстоянии L между предметом и экраном уравнение (1.24) представляет собой квадратное уравнение относительно расстояния s от главной плоскости пространства предметов до предмета ($s < 0$):

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{L - \delta + s} = \frac{1}{f}, \quad (2)$$

имеющее при условии $L > 4f + \delta$ решения s_1 и s_2 , показанные на рис. 2, где δ — расстояние между главными плоскостями системы (линзы).

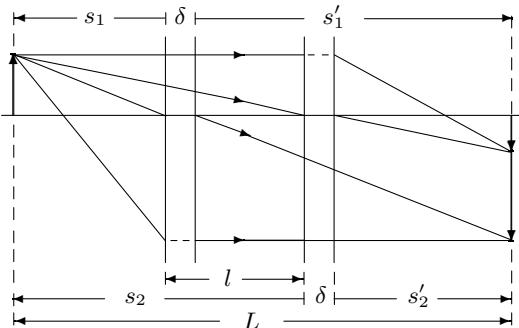


Рис. 2. Измерение фокусного расстояния оптической системы по методу Бесселя

С учётом симметрии и направлений измерения расстояний, положения предметов определяются соотношениями $s'_2 = -s_1$ и $s'_1 = -s_2$. Для расстояния L между предметом и экраном и расстояния ℓ между двумя положениями системы (линзы) получаем: $L - \delta = s'_1 - s_1$,

$\ell = -s_2 + s_1 = s_1 + s'_1$. Отсюда следует, что

$$s_1 = -\frac{1}{2}(L - \delta - \ell), \quad s'_1 = \frac{1}{2}(L - \delta + \ell). \quad (3)$$

Подставляя (3) в формулу (1.22), после несложных преобразований находим выражение

$$f = \frac{(L - \delta)^2 - \ell^2}{4(L - \delta)}. \quad (4)$$

Если выполняется условие $|\delta| \ll L$, то с относительной погрешностью

$$\varepsilon_f = \frac{L^2 + \ell^2}{L^2 - \ell^2} \frac{|\delta|}{L} \quad (5)$$

формула (4) может быть представлена в более простом виде

$$f = \frac{L^2 - \ell^2}{4L}. \quad (6)$$

Для определения фокусного расстояния f достаточно, таким образом, измерить расстояние L между предметом и экраном и расстояние ℓ между двумя положениями системы, при которых на экране видны чёткие изображения. Допускаемая при этом относительная погрешность результата измерений (без учёта случайных ошибок) даже для толстых линз и некоторых сложных оптических систем может быть мала.

Если выполнить измерения для двух пар величин L и ℓ , то из двух уравнений вида (4) можно найти обе характеристики системы: f и δ .

При выводе формул (2) – (5) по умолчанию предполагалось, что расстояние между главными плоскостями системы положительно $\delta > 0$, однако полученные результаты, очевидно, справедливы и для $\delta \leq 0$.

III. Определение фокусного расстояния тонкой собирающей линзы

Если собирающую линзу можно считать тонкой, т. е. принять, что главные плоскости линзы совпадают, то её фокусное расстояние может быть измерено, например, следующими способами (в дополнение к изложенным выше).

Способ 1. Воспользуемся формулой тонкой линзы (1.37):

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}. \quad (7)$$

Здесь a и a' – расстояния предмета и его изображения от плоскости линзы, причём $a < 0$, $a' > 0$, если предмет находится слева, а его изображение – справа от линзы; фокусное расстояние $f > 0$.

Для измерения фокусного расстояния достаточно провести измерения по стандартной схеме «предмет — линза — экран» при произвольном расстоянии между предметом и экраном с различными значениями a при увеличенном и при уменьшенном изображении. Относительная погрешность определения фокусного расстояния линзы по этому методу порядка d/f , где d — толщина линзы. Сравнение среднеквадратичного отклонения измеренных значений f от среднего d позволит сделать вывод о том, нужны ли многократные измерения.

Способ 2. Фокусное расстояние тонкой собирающей линзы можно определить с помощью зрительной трубы, настроенной на бесконечность, то есть на параллельный пучок лучей. Разместив между предметом и зрительной трубой положительную линзу и перемещая её вдоль оси системы, можно найти резкое изображение предмета в окуляре зрительной трубы. При этом расстояние от середины линзы до предмета равно фокусному расстоянию тонкой линзы. Для толстой линзы зрительная труба позволяет определить только положение главного фокуса.

IV. Определение фокусного расстояния тонкой рассеивающей линзы

Способ 1. Определение фокусного расстояния рассеивающей линзы затруднено тем, что изображение предмета получается мнимым (при действительном источнике) и поэтому не может быть получено на экране. Эту трудность легко обойти с помощью вспомогательной собирающей линзы.

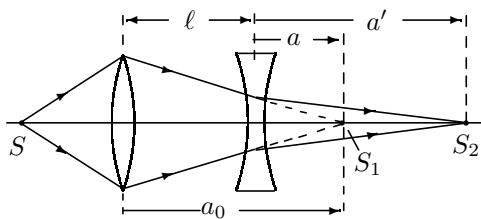


Рис. 3. Измерение фокусного расстояния
рассеивающей линзы

Сначала с помощью собирающей линзы получают на экране действительное изображение предмета S (точка S_1 на рис. 3). Затем на пути лучей, выходящих из собирающей линзы, располагают исследуемую рассеивающую линзу и, отодвигая экран, получают чёткое изображение предмета на экране, образованное двумя линзами. Точка S_1 пересечения сходящихся лучей играет по отношению к рассеивающей

линзе роль мнимого источника. Изображение источника переместится теперь в точку S_2 .

Определив расстояния $a = a_0 - \ell > 0$ и $a' > 0$, рассчитывают фокусное расстояние рассеивающей линзы по формуле (7), которое, естественно, должно получиться отрицательным.

Способ 2. Если расстояние a на рис. 3 совпадает с модулем фокусного расстояния рассеивающей линзы, то изображение S_2 перемещается в бесконечность, то есть лучи выходят из линзы параллельным пучком.

Параллельность пучка можно установить с помощью зрительной трубы, настроенной на бесконечность. Зная расстояние от первой линзы до точки S_1 и расстояние между линзами, нетрудно определить фокусное расстояние тонкой рассеивающей линзы. Для толстой отрицательной линзы этот метод позволяет определить только положение главного фокуса.

V. Определение положения главных и фокальных плоскостей сложной оптической системы

Для нахождения главных плоскостей системы недостаточно знать фокусное расстояние, нужно определить ещё положения главных фокусов. Это можно сделать при помощи зрительной трубы, настроенной на бесконечность. Отложив от главных фокусов отрезки, равные фокусному расстоянию, можно найти положения главных плоскостей системы. При этом необходимо учитывать возможность различного взаимного расположения кардинальных точек (плоскостей) сложной системы.

Все характеристики оптической системы, состоящей из двух тонких линз, можно рассчитать (см. (1.38)–(1.40)), если известны фокусные расстояния f_1 , f_2 каждой линзы и оптический интервал Δ или расстояние между центрами линз ℓ_{12} .

Экспериментальная установка. Оптическая скамья с осветителем, транспарант, набор линз, экран и зрительная труба позволяют определить параметры оптических систем всеми описанными способами. Все оптические элементы устанавливаются на скамье при помощи рейтеров.

Важную роль играет правильная центрировка элементов системы. Проходя через плохо отцентрированную систему, лучи света могут отклониться и пройти мимо экрана или глаза наблюдателя. Центрировать линзы следует как по высоте, так и в поперечном направлении, для чего линзы установлены на поперечных салазках.

ЗАДАНИЕ

А. Определение фокусных расстояний тонких линз и характеристик сложной оптической системы

В этом упражнении предлагается определить фокусные расстояния тонких собирающих и рассеивающих линз, рассчитать их оптическую силу, а также определить фокусное расстояние и положения главных и фокальных плоскостей оптической системы из двух тонких линз.

Внимание! Не следует касаться поверхности линз пальцами, потому что пылинки и жирные пятна на стекле рассеивают световые лучи и ухудшают чёткость изображения.

I. Центрировка элементов оптической системы

1. Из имеющегося комплекта отберите собирающие линзы. Для этого, держа линзу в одной руке, получите на ладони другой руки изображение любого удалённого объекта (окна, лампочки) и оцените на глаз фокусное расстояние линзы. Линза, которая не даёт действительного изображения, — рассеивающая. Запишите приближённые значения фокусных расстояний собирающих линз.
2. Соберите и отцентрируйте установку. Для этого на одном конце оптической скамьи установите осветитель, на котором в качестве предмета закреплён транспарант с изображением ориентированной вверх шкалы или другого объекта известного размера, например, стрелки (\uparrow). Отрегулируйте высоту экрана так, чтобы его центр совпадал с центром яркого круглого пятна от осветителя.
3. Проведите центрировку собирающей линзы. Для этого отодвиньте экран от осветителя и разместите в промежутке рейтер с собирающей линзой №1.

Оптические оси линз устанавливаются параллельно ребру оптической скамьи на глаз. Легко убедиться на опыте, что при небольших увеличениях, получаемых в настоящей работе, такая установка является достаточной.

Передвигая линзу и экран вдоль скамьи, добейтесь чёткого изображения предмета на экране. Закрепите рейтеры. Смешая линзу с помощью поперечных салазок и по высоте, приведите центр изображения к центру экрана.

4. Остальные линзы можно отцентрировать позднее. Для центрировки рассеивающих линз следует воспользоваться уже отцентрированной положительной линзой, расположив её перед отрицательной. Дальнейшие действия продумайте самостоятельно.

II. Определение фокусных расстояний тонких линз при помощи экрана

Измерения проводятся для одной собирающей и одной рассеивающей линзы.

5. Для проведения измерения фокусного расстояния собирающей линзы №1 по методу Аббе (рис. 1) установите её на оптической скамье между осветителем с траспарантом и экраном. Перемещая осветитель вдоль скамьи, получите на экране резкое изображение предмета при двух различных положениях осветителя и соответственно экрана. Размеры изображений для повышения точности измерений должны заметно отличаться друг от друга. Зарегистрируйте перемещения предмета Δx и изображения $\Delta x'$ и соответствующие двум положениям предмета размеры изображений y'_1 и y'_2 . Рассчитайте фокусное расстояние линзы по формулам (1), оцените точность результата.
6. Для измерения фокусного расстояния линзы №1 по методу Бесселя или по формуле тонкой линзы (по указанию преподавателя) расположите экран за линзой на расстоянии $L > 4f$ от предмета (рис. 2). Перемещая линзу вдоль скамьи, получите увеличенное и уменьшенное изображения предмета на экране.

Измерьте расстояния от средней плоскости линзы до предмета a и до изображения a' для обоих положений линзы. Средняя плоскость линзы и положение предмета отмечены на оправах проточками. Измерьте также расстояние L от предмета до экрана и перемещение ℓ линзы (рейтера).

По результатам нескольких измерений с различными расстояниями L определите среднее значение фокусного расстояния, используя формулу (6) или (7). Оцените среднеквадратичную случайную погрешность $\sigma_{\text{отд}}$ однократного измерения f и сравните её с толщиной линзы. Сделайте вывод о том, нужны ли многократные измерения в этом эксперименте.

7. Для определения фокусного расстояния тонкой рассеивающей линзы используйте вспомогательную собирающую линзу. Сначала с помощью короткофокусной собирающей линзы №3 получите на экране увеличенное изображение предмета и измерьте расстояние от линзы до экрана (a_0 на рис. 3). Затем между собирающей линзой и экраном разместите рассеивающую линзу и, отодвигая экран от линзы, найдите действительное изображение предмета, образованное системой линз. Измерьте расстояние a' от рассеивающей линзы до экрана и расстояние между линзами ℓ .

Рассчитайте величину a и определите фокусное расстояние рассеивающей линзы с помощью формулы (7). При вычислении фокусного расстояния нужно приписать величинам a и a' правильные знаки.

III. Определение фокусных расстояний тонких линз с помощью зрительной трубы

Измерения проводятся для двух собирающих и одной рассеивающей линзы.

8. Для определения фокусных расстояний линз с помощью зрительной трубы необходимо настроить трубу на бесконечность. Эту настройку проще всего осуществить, наведя трубу на удалённый объект (например, на окно в конце длинного коридора). Предварительно вращением глазной линзы окуляра трубы настройтесь на резкое видение окулярной шкалы (если окулярная шкала отсутствует — совместите штрихи на глазной линзе с точкой на тубусе). Не следует настраивать трубу на предмет, расположенный за оконным стеклом, так как оконное стекло часто оказывается недостаточно плоским.
9. Поставьте собирающую линзу №1 на расстоянии от предмета, примерно равном фокусному расстоянию. На небольшом расстоянии от линзы закрепите трубу, настроенную на бесконечность, и отцентрируйте её по высоте. Передвигая линзу вдоль скамьи и, если необходимо, перемещая линзу с помощью поперечных салазок, получите в окуляре зрительной трубы чёткое изображение предмета. При этом расстояние между предметом и серединой тонкой линзы (между проточками на оправах) равно фокусному расстоянию.

Поверните линзу другой стороной к источнику и повторите изменение её фокусного расстояния. По результатам измерений сделайте вывод, можно ли считать линзу тонкой.

10. Измерьте фокусное расстояние собирающей линзы №2 при помощи зрительной трубы.
11. Для определения фокусного расстояния тонкой рассеивающей линзы используйте схему, изображённую на рис. 3. Сначала получите на экране увеличенное изображение предмета при помощи короткофокусной положительной линзы. Измерьте расстояние a_0 между линзой и экраном.

Разместите сразу за экраном трубу, настроенную на бесконечность, и закрепите её. Уберите экран и поставьте на его место исследуемую рассеивающую линзу. Отцентрируйте световой пучок с помощью листа бумаги. Перемещая рассеивающую линзу, найдите в окуляре зрительной трубы резкое изображение предмета.

Измерив расстояние ℓ между линзами, рассчитайте фокусное расстояние рассеивающей линзы в пространстве предметов $f = \ell - a_0$.

Поверните рассеивающую линзу другой стороной к источнику и повторите измерения. Оцените, можно ли считать линзу тонкой.

12. Составьте таблицу результатов экспериментального определения фокусных расстояний линз, включив в неё дополнительно колонку значений оптической силы каждой линзы.

IV. Определение фокусного расстояния и положения главных и фокальных плоскостей сложной оптической системы

13. Соберите модель оптической системы, установив в центре оптической скамьи две тонкие собирающие линзы. Для определения фокусного расстояния системы по методу Аббе (рис. 1) расположите экран на дальнем конце скамьи. При проведении эксперимента следует учитывать, что согласно формулам (1.8), (1.14), (1.15) поперечное увеличение системы

$$\frac{y'}{y} = \frac{f_{1\Sigma}}{x - F_{1\Sigma}}$$

может принимать разный знак в зависимости от знака фокусного расстояния и взаимного расположения предмета и переднего фокуса системы. Соответственно изображение может быть как прямым, так и обратным.

Перемещая осветитель с транспарантом вдоль скамьи, получите на экране резкое изображение предмета. Измерьте расстояние от предмета до первой линзы и величину изображения y'_1 .

Отодвигая осветитель на некоторое расстояние от прежнего положения и, передвигая экран, вновь получите резкое изображение предмета. Для повышения точности измерений размеры изображений y'_1 и y'_2 должны заметно отличаться друг от друга. Зарегистрируйте перемещения предмета Δx и изображения $\Delta x'$ и соответствующие двум положениям предмета размеры изображений y'_1 и y'_2 . Рассчитайте фокусное расстояние системы по формулам (1).

14. Для нахождения положения главных фокусов системы закрепите зрительную трубу за второй линзой, подвиньте осветитель к первой линзе и отцентрируйте систему с помощью листа бумаги.

Медленно отодвигая осветитель от системы, найдите резкое изображение предмета в окуляре зрительной трубы. Если необходима более резкая фокусировка, задиафрагмируйте первую линзу и подберите подходящую яркость пучка. Определите положение главного фокуса системы $F_{1\Sigma}$ в пространстве предметов относительно первой линзы, измерив расстояние от этой линзы до предмета.

15. Поменяйте линзы местами и повторите измерения п. 3, сохранив неизменным расстояние между линзами. Определите расстояние от предмета до ближней линзы и соответственно найдите положение главного

фокуса системы $F_{2\Sigma}$ в пространстве изображений относительно второй линзы в исходном состоянии системы.

16. На миллиметровой бумаге постройте в масштабе чертёж оптической системы. Укажите на нём положения фокусов каждой из линз, а также главных фокусов $F_{1\Sigma}$ и $F_{2\Sigma}$ системы.

Постройте ход луча, вошедшего в систему слева параллельно главной оптической оси, последовательно через каждую из линз. Точка пересечения луча, вышедшего из системы (или его продолжения), с оптической осью определяет положение главного фокуса системы $F_{2\Sigma}$, а точка его пересечения с продолжением входящего луча определяет положение главной плоскости системы P_2 в пространстве изображений. Расстояние точки $H_{2\Sigma}$ пересечения задней главной плоскости с оптической осью от заднего главного фокуса $F_{2\Sigma}$ равно фокусному расстоянию системы $f_{2\Sigma}$ в пространстве изображений (рис. 1.2, рис. 1).

Аналогичное построение сделайте для луча, вошедшего в систему справа, из которого найдите положения главной плоскости P_1 , главной точки $H_{1\Sigma}$, а также фокусное расстояние $f_{1\Sigma}$ системы в пространстве предметов.

17. По экспериментальным данным и построенным чертежам определите основные характеристики исследованной оптической системы: координаты главных и фокальных точек в пространствах предметов и изображений и фокусное расстояние системы.
18. Рассчитайте те же основные характеристики системы по формулам (1.38). Сведите экспериментальные, расчётно-графические и теоретические результаты в таблицу, сравните их и предложите свои версии причин замеченных расхождений.

Б. Основные aberrации оптических систем*

В этом упражнении предлагается исследовать aberrации плосковыпуклой линзы: набор кольцевых диафрагм позволяет исследовать продольную сферическую aberrацию (зависимость фокусного расстояния от радиуса кольцевого пучка, падающего на линзу), а набор светофильтров — хроматическую aberrацию (зависимость фокусного расстояния от длины волны). Расчётные формулы и схемы экспериментов приведены в п. 5 введения к разделу.

Внимание! Не следует касаться поверхности линз пальцами, потому что пылинки и жирные пятна на стекле рассеивают световые лучи и ухудшают чёткость изображения.

* Выполняется по указанию преподавателя.

I. Сферическая aberrация

- Для качественного наблюдения сферической aberrации расположите осветитель и экран на дальних концах скамьи. Установите плосковыпуклую линзу №3, которая может перемещаться относительно рейтера в продольном направлении, на расстоянии a_1 от предмета, чуть большем фокусного расстояния. Линза должна быть обращена измерительной шкалой к наблюдателю. Наденьте на линзу диафрагму диаметром $2h = 1$ см. Перемещая линзу, получите на удалённом экране резкое изображение ирисовой диафрагмы осветителя.

Установите диафрагму максимального диаметра ($2h = 4$ см) и убедитесь, что при неизменном расстоянии a_1 расстояние a_2 от линзы до изображения заметно изменилось.

- Для измерения aberrаций поставьте вместо экрана за линзой зрительную трубу. Установите линзу строго в нулевое положение с учётом нониуса. Используя зрительную трубу, получите параллельный пучок праксиальных лучей от линзы с диафрагмой минимального диаметра и запишите отсчёт по нониусной шкале. Увеличивая диаметр диафрагмы и подстраиваясь к новому положению фокуса при помощи нониусного винта, регистрируйте соответствующие отсчёты по нониусной шкале.
- По результатам измерений постройте график функции $-s(h^2)$, который согласно (1.50) должен представлять собой прямую линию. Экстраполируя эту прямую к значениям $h = r$ и $h = 0$, рассчитайте продольную сферическую aberrацию линзы $\delta s(r) = s(r) - s(0)$, а по наклону прямой найдите показатель преломления стекла линзы n .

II. Хроматическая aberrация

- Используя зрительную трубу и три светофильтра (красный, жёлтый и синий), найдите фокусные расстояния f_F и f_C , определив по нониусной шкале положения плосковыпуклой линзы №3, соответствующие резкому изображению диафрагмы. Фильтры следует располагать в параллельном пучке (за окуляром зрительной трубы), чтобы они не изменяли хода лучей. Фокусное расстояние f_D линзы №3, измеренное с жёлтым светофильтром, указано на оправе линзы.
- Рассчитайте хроматическую aberrацию по формуле (1.54) и число Аббе по формуле (1.56). По табличным данным определите сорт стекла, из которого сделана линза №3.

Контрольные вопросы

- Покажите, что если расстояние между предметом и экраном превышает $4f$, то изображение на экране может быть получено при двух различных положениях линзы.
- Опишите методику измерения фокусных расстояний отрицательных линз.

3. Дайте определения главных фокусов, фокусных расстояний и главных плоскостей сложной центрированной оптической системы.
4. Определите графически положение главных плоскостей системы, состоящей из двух тонких линз — собирающей и рассеивающей, — с известными фокусными расстояниями и расстоянием между ними.
5. Дайте определения сферической и хроматической аберраций.
6. Объясните, почему сферическая аберрация зависит от того, какой стороной плосковыпуклая линза обращена к источнику.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §§ 9–16.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§ 71–79, 81, 82, 86.
- 3*. Дитчберн Р. Физическая оптика. — М.: Наука, 1965. Гл. 7.
- 4*. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. Гл. 3–5.

Работа 4.1.2

Моделирование оптических приборов и определение их увеличения

Цель работы: изучить модели зрительных труб (астрономической трубы Кеплера и земной трубы Галилея) и микроскопа, определить их увеличения.

В работе используются: оптическая скамья, набор линз, экран, осветитель со шкалой, зрительная труба, диафрагма, линейка.

В работе предлагается измерить фокусные расстояния линз, смоделировать трубу Кеплера, трубу Галилея, микроскоп (см. пп. 4.2, 4.3 введения к разделу) и определить их увеличения.

Экспериментальная установка. Набор линз, осветитель, экран, зрительная труба, необходимые для моделирования оптических приборов, устанавливаются при помощи рейтеров на оптической скамье. Предметом служит миллиметровая сетка, нанесённая на матовое стекло светителя.

Центрирование линз. При юстировке любых оптических приборов важно правильно центрировать входящие в систему линзы. Проходя через плохо отцентрированную систему линз, лучи света отклоняются

в сторону и могут вообще не доходить до глаза наблюдателя. Центрировать линзы следует как по высоте, так и в поперечном направлении (для чего линзы крепятся на поперечных салазках).

Юстировка коллиматора. При составлении моделей телескопических систем необходимо иметь удалённый объект. В качестве такого объекта обычно используется бесконечно удалённое изображение предмета (шкалы осветителя), установленного в фокальной плоскости положительной линзы. Лучи, выходящие из одной точки предмета, пройдя через линзу, образуют параллельный пучок. Устройство такого рода называется **коллиматором**. Для юстировки коллиматора удобно использовать вспомогательную зрительную трубу, предварительно настроенную на бесконечность. Передвигая линзу коллиматора вдоль скамьи, добиваются появления резкого изображения предмета в окуляре зрительной трубы.

Измерение фокусных расстояний линз. Для того чтобы моделировать оптические инструменты, нужно знать фокусные расстояния линз, которые могут быть использованы в качестве объектива или окуляра модели. Фокусные расстояния положительных линз проще всего найти с помощью вспомогательной зрительной трубы, установленной на бесконечность (другие методы измерения фокусных расстояний можно найти в описании работы 4.1.1). Работа выполняется так же, как при юстировке коллиматора.

При определении фокусного расстояния отрицательной линзы предметом служит изображение сетки, которое даёт вспомогательная положительная линза.

ЗАДАНИЕ

Внимание! Не следуйте касаться поверхности линз пальцами, потому что царапины, пылинки или жирные пятна на стекле рассеивают световые лучи и ухудшают чёткость изображения.

I. Центрировка элементов оптической системы

1. Из имеющегося набора отберите собирающие линзы; для этого, держа линзу в одной руке, получите на ладони другой изображение любого удалённого объекта (окна, лампочки) и оцените на глаз фокусное расстояние. Линза, которая не даёт действительного изображения, — рассеивающая. Запишите номера линз и приближённые значения фокусных расстояний.

2. Соберите и отцентрируйте установку. Для этого на одном конце оптической скамьи установите предмет — осветитель с сеткой — и вплотную к нему — экран на рейтере. При юстировке системы следует соблюдать следующие простые правила: все винты рейтеров на скамье и винты по-перечных салазок должны находиться с одной стороны оптической скамьи (со стороны экспериментатора). После всякого перемещения рейтеров вдоль скамьи они должны надёжно закрепляться винтами.

Отрегулируйте высоту экрана так, чтобы его центр совпадал с центром яркого круглого пятна от осветителя. Эта операция должна выполняться при плотно затянутом винте, закрепляющем рейтер на оптической скамье.

Для перемещения рейтера вдоль скамьи винт следует только слегка ослабить, чтобы не допустить перпендикулярного скамье смещения центра. Перемещая рейтер, прижимайте его к скамье со стороны, противоположной винту.

3. Отодвигите экран от осветителя и разместите в промежутке рейтер с одной из собирающих линз.

Передвигая линзу и экран вдоль скамьи, добейтесь чёткого изображения края диафрагмы осветителя или миллиметровой шкалы на экране. Закрепите рейтеры. Перемещая линзу поперёк оптической оси, приведите центр изображения к центру экрана.

Оптические оси линз устанавливаются параллельно ребру оптической скамьи на глаз.

4. Таким же образом центрируются остальные собирающие линзы. Для центрировки рассеивающих линз воспользуйтесь уже отцентрированной положительной линзой, расположив её впереди отрицательной. Способ центрировки рассеивающих линз продумайте самостоятельно.

II. Определение фокусных расстояний тонких линз с помощью зрительной трубы

5. Для определения фокусных расстояний линз с помощью зрительной трубы (рис. 1) необходимо настроить трубу на бесконечность. Этую настройку проще всего осуществить наведя трубу на удалённый объект (например, на окно в конце длинного коридора). Предварительно вращением глазной линзы окуляра трубы настройтесь на резкое видение окулярной шкалы. Не следует настраивать трубу на предметы, расположенные за оконным стеклом, так как оконное стекло часто оказывается недостаточно плоским.
6. Поставьте собирающую линзу на расстоянии от предмета, примерно равном фокусному. На небольшом расстоянии от линзы закрепите трубу, настроенную на бесконечность (рис. 1), и отцентрируйте её по высо-

те. Диафрагма диаметром $d = 1$ см, надетая на ближнюю к осветителю линзу, уменьшит сферические aberrации и повысит чёткость изображения.

Передвигая линзу вдоль скамьи, получите в окуляре зрительной трубы изображение предмета — миллиметровой сетки. При этом расстояние между предметом и серединой тонкой линзы (между проточками на оправах) равно её фокусному расстоянию.

Поверните линзу другой стороной к источнику и повторите измерения фокусного расстояния. По результатам измерений сделайте вывод, можно ли считать линзу тонкой.

7. Измерьте фокусные расстояния остальных положительных линз при помощи зрительной трубы.
8. Для определения фокусного расстояния тонкой рассеивающей линзы сначала получите на экране увеличенное изображение сетки при помощи одной короткофокусной собирающей линзы. Измерьте расстояние a_0 между линзой и экраном (удобно взять $a_0 \approx 30$ см).

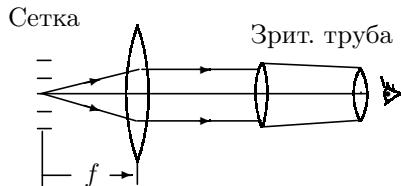


Рис. 1. Определение фокусного расстояния собирающей линзы

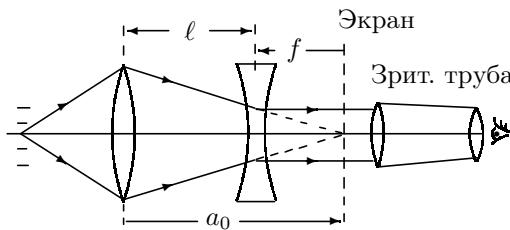


Рис. 2. Определение фокусного расстояния рассеивающей линзы

9. Разместите сразу за экраном трубу, настроенную на бесконечность, и закрепите её. Уберите экран и поставьте на его место исследуемую рассеивающую линзу (рис. 2). Отцентрируйте световой пучок с помощью листа бумаги. Перемещая рассеивающую линзу, найдите в окуляре зрительной трубы резкое изображение сетки. Если изображение недостаточно чёткое, задиафрагмируйте ближнюю к осветителю линзу и заново проведите настройку с экраном. Подберите оптимальную яркость источника.

Измерив расстояние между линзами ℓ , рассчитайте фокусное расстояние рассеивающей линзы $f = \ell - a_0$.

10. Поверните рассеивающую линзу другой стороной к источнику и повторите измерения.

III. Телескоп Кеплера

11. Из имеющегося набора отберите две собирающие линзы для создания модели зрительной трубы Кеплера с увеличением 2–3 (рис. 3). В качестве коллиматора используйте линзу с фокусным расстоянием $f \approx 15\text{--}20$ см (при этих условиях размер изображения предмета не будет превышать размера поля зрения вспомогательной зрительной трубы).
12. Настройте коллиматор при помощи вспомогательной зрительной трубы так же, как вы делали это при измерении фокусных расстояний. Чёткость изображения повысится, если надеть на коллиматор диафрагму диаметром 1 см и уменьшить яркость осветителя.

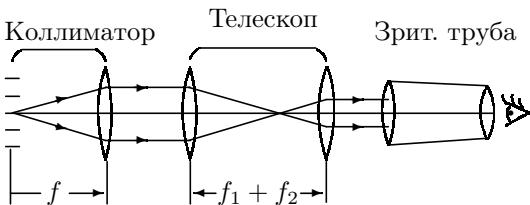


Рис. 3. Определение увеличения телескопа Кеплера

Для последующих расчётов увеличения телескопа определите размер изображения h_1 одного миллиметра шкалы осветителя в делениях окулярной шкалы зрительной трубы. Очевидно, $h_1 = k \operatorname{tg} \alpha_1 \approx k \alpha_1$, где k — некоторый коэффициент, характеризующий увеличение зрительной трубы, α_1 — угловой размер изображения миллиметрового деления шкалы осветителя, наблюдаемого через коллиматор.

13. Соберите модель телескопа: линзу с максимальным фокусным расстоянием — объектив телескопа — расположите почти вплотную к линзе коллиматора, окуляр — на расстоянии, примерно равном сумме фокусных расстояний обеих линз трубы.
14. Закрепите вспомогательную зрительную трубу за окуляром телескопа и отцентрируйте световое пятно при помощи листа бумаги. Слегка перемещая окуляр телескопа вдоль оптической скамьи, получите изображение сетки в объективе вспомогательной трубы.

Измерьте расстояние между объективом и окуляром телескопа и сравните его с суммой фокусных расстояний.

15. Рассчитайте увеличение исследуемой модели телескопа через отношение передних фокусных расстояний линз f_1, f_2 согласно формуле (1.48):

$$N_T = -\frac{f_1}{f_2}. \quad (1)$$

16. Определите увеличение телескопа через отношение углов, под которыми объект виден через телескоп и без него (рис. 1.8а и формулы (1.40) введения к разделу). Для этого найдите размер h_2 изображения миллиметрового деления шкалы осветителя в делениях окулярной шкалы вспомогательной трубы при наблюдении по схеме рис. 3. Очевидно, что $h_2 = k \operatorname{tg} \alpha_2 \approx k \alpha_2$, где α_2 — угловой размер изображения миллиметрового деления шкалы при наблюдении через телескоп. Сравнив h_2 с величиной h_1 , полученной в п. 12 без телескопа, рассчитайте искомое увеличение по формуле

$$N_T = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{h_2}{h_1}, \quad (2)$$

где учтено различие знаков углов лучей на входе и выходе из трубы Кеплера (рис. 1.8а).

17. Определите увеличение телескопа, сравнив диаметр оправы его объектива и диаметр изображения этой оправы в окуляре (см. рис. 1.8б и формулу (1.49)). Для этого отодвиньте вспомогательную трубу и расположите экран за окуляром телескопа. Снимите диафрагму с коллиматора и убедитесь, что световое пятно полностью освещает объектив телескопа и проходит через окуляр. Отодвигая экран от окуляра, получите на нём чёткое изображение оправы объектива. Поднеся к объективу какой-нибудь предмет (например, край линейки), убедитесь, что наблюдается именно изображение оправы объектива. Измерьте диаметр объектива D_1 и диаметр его изображения D_2 . Определите увеличение телескопа по формуле (1.49).
18. Сравните результаты измерения увеличения телескопа Кеплера тремя рассмотренными выше способами и объясните причины возможных расхождений.

IV. Труба Галилея

19. Соберите модель трубы Галилея, поставив в модели трубы Кеплера вместо собирающей окулярной линзы рассеивающую линзу на расстоянии от объектива, равном разности модулей фокусных расстояний объектива и окуляра. При таком расположении линз труба Галилея представляет собой телескопическую систему, которая может быть исследована на уже освоенном вами стенде.

20. Выполните настройки системы и проведите измерения, аналогичные тем, которые были проделаны для телескопа Кеплера по пп. 14–16.
21. Сравните результаты измерений увеличения трубы Галилея в телескопическом режиме, полученные разными способами, между собой и с результатом расчёта по формуле (1).

V. Модель микроскопа

22. Для создания модели микроскопа с увеличением $N_M = 5$ отберите самые короткофокусные собирающие линзы из набора. Рассчитайте необходимые оптический интервал Δ и длину тубуса ℓ_{12} по формулам (см. 1.47):

$$N_M = N_1 N_2, \quad N_1 = -\frac{\Delta}{f_1}, \quad N_2 = \frac{L}{f_2}, \quad \Delta = \ell_{12} - f_1 - f_2, \quad (3)$$

где N_1, N_2 — увеличения объектива и окуляра, f_1, f_2 — положительные передние фокусные расстояния линз, $L = 25$ см — расстояние наилучшего зрения.

23. Расположите объектив и окуляр на соответствующем расстоянии ℓ_{12} друг от друга (рис. 4) и закрепите рейтеры. Сфокусируйте модель микроскопа на сетку осветителя. Для этого перемещайте осветитель вдоль оптической скамьи до тех пор, пока в окуляре микроскопа не появится отчётливое увеличенное изображение сетки.

24. Расположите за окуляром модели микроскопа зрительную трубу, настроенную на бесконечность. Слегка перемещая осветитель, получите в поле зрения трубы изображение миллиметровой шкалы осветителя. Чёткость изображения повысится, если наладить на объектив микроскопа диафрагму диаметром 1 см и

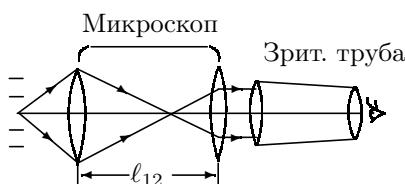


Рис. 4. Модель микроскопа

уменьшить яркость осветителя.

25. Для экспериментального определения увеличения микроскопа измерьте величину изображения h_2 миллиметрового деления предметной шкалы в делениях окулярной шкалы зрительной трубы. Используя результат аналогичных измерений (h_1 в п. 12) с коллиматорной линзой, фокус f которой известен, рассчитайте увеличение микроскопа по формуле

$$N_M = -\frac{h_2}{h_1} \frac{L}{f}. \quad (4)$$

Сравните результат с теоретическим расчётом по формулам (3).

26. Оцените погрешности в определении увеличения всех моделей оптических приборов.

Контрольные вопросы

1. С какой целью при исследовании моделей телескопов и микроскопа используется дополнительная зрительная труба?
2. Чему равны поперечное, угловое и продольное увеличения телескопа, если передние фокусные расстояния его объектива и окуляра равны соответственно $f_1 = 40$ см и $f_2 = -2$ см?
3. При каком условии угловое увеличение микроскопа равно поперечному?
4. Выведите формулу (4) и объясните соответствующий метод измерения увеличения микроскопа.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. § 24.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§ 91, 92.
- 3.* Дитчберн Р. Физическая оптика. — М.: Наука, 1965. Гл. 7.
- 4.* Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. Гл. 3–5.

Работа 4.1.3

Рефрактометр Аббе

Цель работы: измерить показатели преломления твёрдых и жидкких тел в монохроматическом свете.

В работе используются: технический рефрактометр Аббе; осветитель; набор стеклянных образцов; жидкости с неизвестными показателями преломления (глицерин, этиловый спирт);monoхлорнафталин; дистиллированная вода.

Рефрактометрия. Показатели преломления жидких и твёрдых тел могут измеряться с большой точностью. При данной температуре и для данной длины волны они являются важнейшими постоянными, характеризующими вещество. Измерение показателей преломления может быть использовано для исследования веществ — соответствующий раздел науки носит название рефрактометрии. Обычно измерения проводятся для D-линии натрия (дублет со средней длиной волны 589,3 нм).

В основе рефрактометрического метода исследования лежит формула Лоренц—Лорентца, связывающая показатель преломления n изотропного вещества с числом молекул N в единице объёма и поляризуемостью¹ α молекул вещества:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N \alpha. \quad (1)$$

Величину

$$r = \frac{1}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}, \quad (2)$$

где ρ — плотность вещества, называют *удельной рефракцией*. Согласно формуле Лоренц—Лорентца (1), удельная рефракция чистого химического вещества зависит только от молекулярных характеристиках (массы молекулы m_0 и поляризуемости α) и равна

$$r = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha}{m_0} = \text{const.}$$

Иными словами, она должна быть *константой* (для света с заданной длиной волны), не зависящей от состояния, в котором вещество находится.²

Предполагая, что оптическое поведение молекул каждого компонента смеси практически не зависит от присутствия других компонентов, можно записать удельную рефракцию *смеси веществ* через удельные рефракции компонентов r_1, r_2, \dots и их массовые доли (отношения масс компонентов к массе смеси) c_1, c_2, \dots :

$$r = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots \quad (3)$$

Опыт показывает, что данное соотношение обычно хорошо выполняется на практике.

Также, согласно опыту, во многих случаях аналогичное эмпирическое правило (*аддитивность рефракций*) может быть применено и для

¹ Напомним, что поляризуемостью частицы α называют коэффициент пропорциональности между электрическим полем E , в которое она помещена, и возникающим при этом дипольным моментом частицы $p = \alpha E$.

² Хотя формула Лоренц—Лорентца имеет ограниченную область применимости (см., например, [1, 3]), указанное свойство удельной рефракции часто хорошо выполняется на практике. Например, для воздуха при изменении давления на несколько сотен атмосфер удельная рефракция изменяется не более чем на 0,1%. Нередко удельная рефракция остаётся практически постоянной даже при изменении агрегатного состояния вещества (например, при замерзании воды).

расчёта рефракции сложного химического соединения, если известны рефракции составляющих его элементов.

Для каждого элемента удобно ввести понятие атомной рефракции R как произведение удельной рефракции r данного элемента на его атомную массу A :

$$R = Ar, \quad (4)$$

и аналогично для химического соединения — понятие молекулярной рефракции R_M :

$$R_M = Mr = \frac{M}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N_A \alpha, \quad (5)$$

где M — молекулярная масса соединения, N_A — постоянная Авогадро. Тогда, если принять, что для молекулярной рефракции выполняется свойство аддитивности, можно записать её как сумму рефракций атомов, составляющих молекулу:

$$R_M = q_1 A_1 r_1 + q_2 A_2 r_2 + \dots = q_1 R_1 + q_2 R_2 + \dots, \quad (6)$$

где q_1, q_2, \dots — числа атомов элементов, входящих в состав молекулы. Аддитивность молекулярной рефракции означает, что взаимодействие отдельных атомов с полем световой волны не зависит от присутствия других атомов, входящих в состав той же молекулы. Если взаимное влияние атомов не мало, аддитивность нарушается.

В нашей работе исследуются рефракции соединений из углерода, водорода и кислорода: воды (H_2O), глицерина ($\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_3$) и этилового спирта ($\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$). Если измерить показатели преломления этих соединений, предполагая аддитивность молекулярной рефракции, можно вычислить показатель преломления любого другого соединения из углерода, водорода и кислорода (например, метилового спирта). Для этого нужно сначала вычислить по формуле (5) молекулярные рефракции воды, глицерина и этилового спирта (по измеренным значениям показателей преломления), а затем рассчитать атомные рефракции R_C , R_H и R_O , используя соотношения

$$\begin{aligned} R_{\text{H}_2\text{O}} &= 2R_H + R_O, \\ R_{\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_3} &= 3R_C + 8R_H + 3R_O, \\ R_{\text{C}_2\text{H}_6\text{O}} &= 2R_C + 6R_H + R_O. \end{aligned} \quad (7)$$

По найденным значениям атомных рефракций R_C , R_H и R_O можно найти молекулярную рефракцию любого вещества, состоящего из этих атомов, и (зная плотность) определить ожидаемую величину его показателя преломления.

Принцип работы рефрактометра Аббе. Технический рефрактометр Аббе служит для быстрого (и сравнительно грубого) измерения показателей преломления жидких и твёрдых тел. Устройство рефрактометра Аббе основано на явлении полного внутреннего отражения.

Пусть луч света падает на границу раздела двух сред (рис. 1а) со стороны оптически более плотной среды ($n = n_2$). Для углов падения φ , меньших предельного $\varphi_{\text{пр}}$, свет частично проникает в оптически менее плотную среду ($n = n_1$), и частично отражается (луч 1 на рис. 1а). При $\varphi_{\text{пр}} < \varphi < 90^\circ$ преломлённый луч отсутствует, и наступает полное отражение (луч 3 на рис. 1а).

Предельный угол $\varphi_{\text{пр}}$ соответствует углу преломления $\psi = 90^\circ$ (луч 2 на рис. 1а); следовательно,

$$\sin \varphi_{\text{пр}} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (8)$$

Зная показатель преломления одной из сред и определяя на опыте предельный угол, можно с помощью (8) найти показатель преломления второй среды.

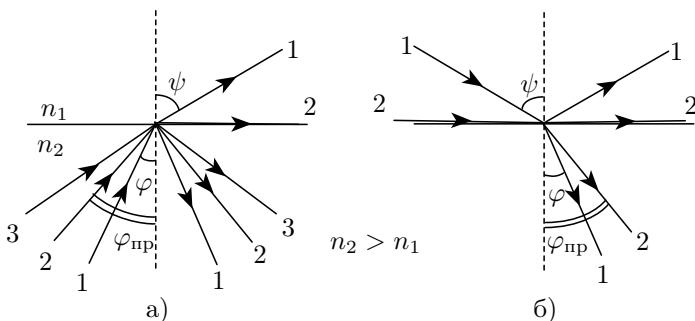


Рис. 1. Предельный угол полного внутреннего отражения (а) и предельный угол преломления (б)

Пусть свет падает на границу раздела со стороны оптически менее плотной среды (рис. 1б). В зависимости от угла падения луч во второй среде может составлять с нормалью углы, расположенные в интервале от нуля до $\varphi_{\text{пр}}$ (луч 1 на рис. 1б). Предельный угол преломления $\varphi_{\text{пр}}$ соответствует углу падения $\psi = 90^\circ$ (скользящий луч 2 на рис. 1б). Легко видеть, что величина предельного угла и в этом случае определяется формулой (8).

При измерениях показателя преломления с помощью рефрактометра Аббе можно пользоваться как методом полного внутреннего отражения, так и методом скользящего луча.

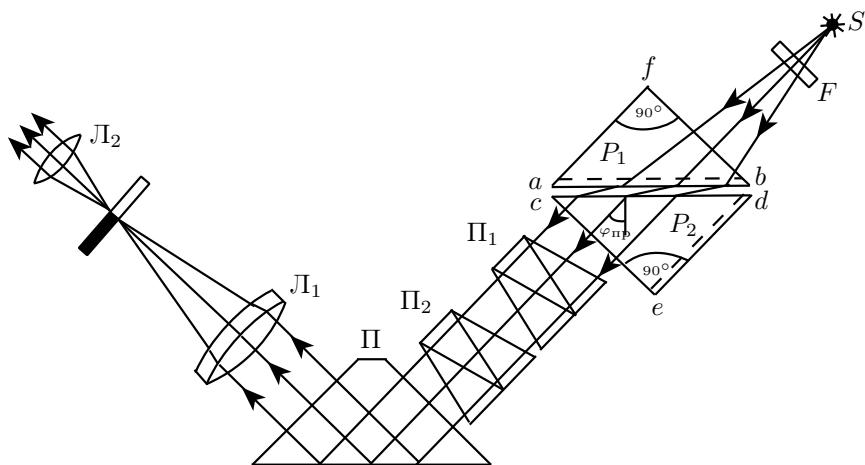


Рис. 2. Ход лучей в рефрактометре при измерении показателя преломления жидкости методом скользящего луча

Оптическая схема рефрактометра Аббе и ход лучей при измерении показателя преломления жидкости по методу скользящего луча показаны на рис. 2. Основной частью рефрактометра являются две стеклянные прямоугольные призмы P_1 и P_2 , изготовленные из стекла с большим показателем преломления. В разрезе призмы имеют вид прямоугольных треугольников, обращенных друг к другу гипотенузами; зазор между призмами составляет около 0,1 мм и служит для помещения исследуемой жидкости. Свет проникает в призму P_1 через грань bf и попадает в жидкость через матовую грань ab . Свет, рассеянный матовой поверхностью, проходит слой жидкости и под всевозможными углами падает на грань cd призмы P_2 .

Скользящему лучу в жидкости ($\psi = 90^\circ$) соответствует предельный угол преломления $\varphi_{\text{пр}}$. Преломленные лучи с углами больше $\varphi_{\text{пр}}$ не возникают. В связи с этим угол выхода лучей из грани ce может изменяться лишь в некотором интервале.

Если свет, выходящий из грани ce , пропустить через собирающую линзу L_1 , то в её фокальной плоскости наблюдается резкая граница света и темноты. Граница рассматривается с помощью линзы L_2 . Линзы L_1 и L_2 образуют зрительную трубу, установленную на бесконечность. В их общей фокальной плоскости находится изображение шкалы вели-

чин показателя преломления и указатели (нить и перекрестье). В поле зрения окуляра L_2 трубы одновременно можно увидеть только часть изображения шкалы и часть поля сфокусированных лучей, выходящих из призмы P_2 . Вращая систему призм P_1 и P_2 и, следовательно, изменения наклон предельного пучка лучей относительно оси зрительной трубы, можно добиться, чтобы граница света и тени оказалась в поле зрения окуляра L_2 и совпала с положением указателя. При вращении системы призм поворачивается и шкала показателей преломления, установленная на пластине, жёстко связанной с системой призм P_1 и P_2 (на рис. 2 шкала не показана). Значение показателя преломления жидкости отсчитывается по шкале на уровне резкой границы света и тени.

Если источник света S не является монохроматическим, то наблюдаемая в окуляре трубы граница света и темноты часто оказывается размытой и окрашенной из-за дисперсии показателя преломления исследуемого вещества (т. е. из-за зависимости n от длины волны λ). Для того чтобы получить и в этом случае резкое изображение границы, на пути лучей, выходящих из призмы P_2 , помещают компенсатор с переменной дисперсией. Компенсатор содержит две одинаковые дисперсионные призмы Амичи (призмы Π_1 и Π_2 на рис. 2), каждая из которых состоит из трёх склеенных призм, обладающих различными показателями преломления и различной дисперсией. Призмы рассчитываются так, чтобы монохроматический луч с длиной волны $\lambda_D = 589,3$ нм (среднее значение длины волны жёлтого дублета натрия) не испытывал отклонения. Лучи с другими длинами волн отклоняются в ту или иную сторону. Если положение призм соответствует рис. 2, то дисперсия двух призм равна удвоенной дисперсии каждой из них. При повороте одной из призм Амичи на 180° относительно другой (вокруг оптической оси) полная дисперсия компенсатора оказывается равной нулю, так как дисперсия одной из призм скомпенсирована дисперсией другой. В зависимости от взаимной ориентации призм дисперсия компенсатора изменяется в пределах от нуля до удвоенного значения дисперсии одной призмы.

Для поворота призм друг относительно друга служат специальная рукоятка и система конических шестерен, с помощью которых призмы одновременно поворачиваются в противоположных направлениях. Вращая ручку компенсатора, следует добиваться того, чтобы граница света и тени в поле зрения стала достаточно резкой. Положение границы при этом соответствует длине волны λ_D , для которой обычно и приводятся значения показателя преломления.

В некоторых случаях, когда дисперсия исследуемого вещества особенно велика, диапазон компенсатора оказывается недостаточным и

чёткой границы получить не удаётся. В этом случае рекомендуется устанавливать перед осветителем жёлтый светофильтр.

Применяемая в рефрактометре Аббе поворотная призма Π (призма Дове) позволяет сделать прибор более компактным.

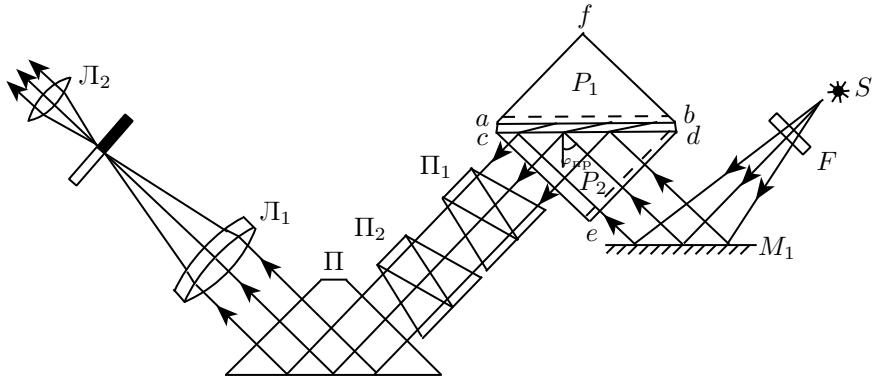


Рис. 3. Ход лучей в рефрактометре при измерении показателя преломления жидкости методом полного внутреннего отражения

На рис. 3 показан ход лучей в рефрактометре при работе по методу полного внутреннего отражения. В этом случае свет от источника S после отражения от зеркала M_1 падает на матовую грань ed призмы P_2 (в методе скользящего луча эта поверхность закрывается металлической шторкой). После рассеяния на грани ed свет падает на границу раздела стекло—жидкость под всевозможными углами. При $\varphi > \varphi_{\text{пр}}$ наступает полное внутреннее отражение, при $\varphi < \varphi_{\text{пр}}$ свет отражается частично. В поле зрения трубы наблюдается граница света и полутени.

Так как условия, определяющие величину предельного угла в методе скользящего луча и в методе полного внутреннего отражения, совпадают, положение линии раздела в обоих случаях также оказывается одинаковым.

Заметим, что, в отличие от метода скользящего луча, метод полного внутреннего отражения позволяет измерять показатели преломления непрозрачных веществ.

Рефрактометр Аббе можно использовать и для измерения показателей преломления твёрдых тел. И в этом случае применимы как метод полного внутреннего отражения, так и метод скользящего луча. Исследуемый образец должен иметь плоскую полирован-

ную поверхность; этой поверхностью он прижимается к гипотенузе cd призмы P_2 (призма P_1 при этом отклоняется в сторону).

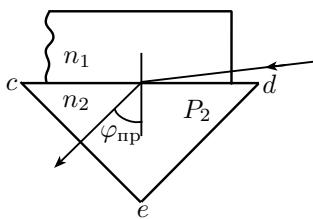


Рис. 4. Измерение показателя преломления твёрдых тел

Для обеспечения оптического контакта в зазор между соприкасающимися поверхностями вводится тонкий слой жидкости, показатель преломления n которой удовлетворяет условию: $n_1 \leq n \leq n_2$, где n_1 — показатель преломления исследуемого образца, а n_2 — показатель преломления призмы P_2 . При выполнении этого условия наличие слоя жидкости не искажает результатов измерения. (Студентам предлагается самостоятельно разобраться в этом вопросе.)

Обычно для создания оптического контакта используют монобромнафталин, показатель преломления которого для жёлтых линий натрия равен $n_0 = 1,66$.

При работе по методу скользящего луча образец должен иметь полированную боковую поверхность, сквозь которую в него проникает свет (рис. 4).

Работа с прибором. На рис. 5 представлен внешний вид рефрактометра Аббе ИРФ-22. Измерение показателя преломления проводят в следующем порядке. Откинув призму P_1 , с помощью пипетки помещают каплю исследуемой жидкости на поверхность призмы P_2 . Возвратив призму P_1 в исходное положение, направляют свет от осветителя на грань bf верхней призмы P_1 (при измерениях по методу скользящего луча) или с помощью зеркала M_1 — на грань ed нижней призмы P_2 (при измерениях по методу полного внутреннего отражения). В первом случае шторка L должна закрывать грань ed призмы P_2 , а во втором её необходимо отвести в сторону.

С помощью зеркала M_2 направляют свет от окна в лаборатории (или от осветительной лампы) на шкалу показателей преломления, находящуюся за матовым стеклом в корпусе прибора. Яркость освещения шкалы подбирают, наблюдая её изображение через окуляр Λ_2 . Вращая блок призм P_1 и P_2 с помощью ручки H_1 , приводят границу света и темноты (или света и полутени) в поле зрения окуляра; вращая ручку H_2 компенсатора, добиваются того, чтобы эта граница была резкой. После этого по шкале определяют величину показателя преломления.

Следует иметь в виду, что рабочие поверхности призм P_1 и P_2 легко повредить, поэтому при работе с ними необходима осторожность. Чтобы получать правильные значения показателей преломления, необходимо перед каждым опытом тщательно очищать рабочие поверхности

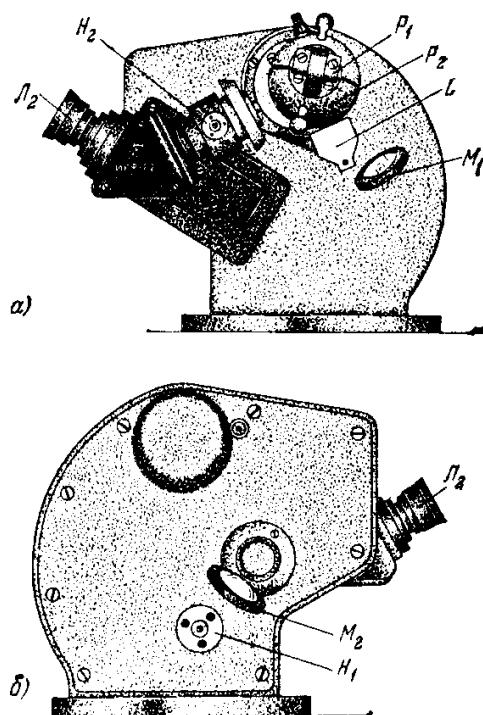


Рис. 5. Рефрактометр Аббе

призм. Приступая к измерениям, необходимо прежде всего убедиться в правильной работе прибора. Такую проверку проще всего выполнить, измерив показатель преломления вещества с известным показателем преломления. Для этого к каждому прибору придаётся эталонная стеклянная пластинка с известным n_D . В правильности работы прибора можно убедиться и в отсутствие такой пластиинки, измеряя, например, показатель преломления дистиллированной воды, для которой (при $t = 20^{\circ}\text{C}$) $n_D = 1,33291$. Если измерение даёт другой результат, следует определить поправку к шкале.

Абсолютная погрешность прибора по паспорту $\pm 2 \cdot 10^{-4}$. Область измерения в проходящем свете $1,3 \div 1,7$, в отражённом свете $1,3 \div 1,57$.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается измерить показатели преломления нескольких стёкол и жидкостей.

- Перед каждым измерением тщательно протрите рабочую поверхность призмы чистой сухой салфеткой, затем нанесите на поверхность каплю дистиллированной воды и снова протрите призму.
- Проделайте серию контрольных измерений показателя преломления дистиллированной воды (или эталонной стеклянной пластины) и убедитесь в правильной работе прибора. Определите систематическую погрешность прибора и оцените случайную погрешность, возникающую при измерении (однократном) показателя преломления.
- Измерьте показатели преломления 2–3 стеклянных образцов (по указанию преподавателя), используя как метод скользящего луча, так и метод полного внутреннего отражения. Во избежание возникновения царапин на измерительной призме стеклянный образец кладётся на ровный тонкий слой монохлорнафталина, покрывающий всю поверхность призмы. Монохлорнафталин капают из пипетки на призму прибора и придавливают стеклянным образцом до возникновения ровного по всему полю наблюдения слоя жидкости.
- Для каждого образца проведите измерения не менее 5-ти раз каждым методом и оцените погрешность каждого метода. Сравните результат с паспортной погрешностью.
- Аналогичным образом измерьте показатели преломления глицерина и этилового спирта.
- По экспериментальным значениям показателей преломления вычислите молекулярные рефракции воды $R_{\text{H}_2\text{O}}$, глицерина $R_{\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_3}$ и этилового спирта $R_{\text{C}_2\text{H}_6\text{O}}$, а также поляризуемости α молекул этих веществ.
- С помощью системы уравнений (7) вычислите атомные рефракции углерода R_{C} , водорода R_{H} и кислорода R_{O} .
- Предполагая справедливым правило аддитивности, вычислите молекулярную рефракцию метилового спирта $R_{\text{CH}_3\text{O}}$ и с помощью формулы (5) найдите его показатель преломления. Сравните вычисленное значение с табличным.
- Используя вычисленные значения рефракций для воды $R_{\text{H}_2\text{O}}$ и углерода R_{C} , рассчитайте показатели преломления льда и алмаза. Сравните полученные значения с табличными.

Контрольные вопросы

- Что называется полным внутренним отражением?
- Для чего грани ab и ed призм P_1 и P_2 делают матовыми?
- При каких условиях слой жидкости между исследуемым твёрдым образцом и призмой P_2 не влияет на измеренное значение показателя преломления?

4. Что называется атомной и молекулярной рефракцией? Сформулируйте правило аддитивности для рефракций.

Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §84.
2. *Ландсберг Г.С.* Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§137, 156.
- 3* *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973. §2.3.
- 4* *Дитчберн Р.* Физическая оптика. — М.: Наука, 1965. Гл. 14, 15.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ. КОГЕРЕНТНОСТЬ

1. Основные понятия

1.1. Волновое уравнение. Простейшие типы волн

Волновое уравнение, описывающее поведение электромагнитных волн (в том числе волн света), — важнейшее следствие уравнений Максвелла, которым подчиняются все явления электромагнетизма. В явлениях, о которых идёт речь в этой книге (кроме раздела VII, посвящённого поляризации света), векторный характер электрического и магнитного полей в волне оказывается несущественным, поэтому волновой процесс можно описывать скалярной функцией координат и времени $E(x, y, z, t)$ (или, коротко, $E(\mathbf{r}, t)$) и понимать под E какую-либо компоненту напряжённости электрического (или магнитного) поля в электромагнитной волне.

Волновое уравнение для скалярного поля E имеет вид

$$\nabla^2 E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа,

$$v = \frac{c}{n}$$

— скорость электромагнитной волны в среде, c — скорость света в вакууме, n — показатель преломления среды.

В наиболее простом случае функция E зависит лишь от одной координаты z , т. е. в любой плоскости, перпендикулярной оси z (плоскости $z = \text{const}$), величина E одна и та же, независимо от координат x , y в этой плоскости. Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (2.2)$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что произвольная функция вида $E(z \mp vt)$ является решением уравнения (2.2). Общее решение уравнения (2.2) — произвольная линейная комбинация таких функций.

Зависимость вида $E(z, t) = E(z - vt)$ соответствует интуитивному представлению о волне, как о возмущении, которое распространяется в пространстве в направлении оси z с конечной скоростью v . Действительно, значение, которое принимает величина E в точке z в момент времени t повторяется в точке $z + \Delta z$ в момент времени $t + \Delta t$, где $\Delta z = v\Delta t > 0$ (поскольку аргумент функции $z - vt$ при этом не изменится: $z - vt = (z + \Delta z) - v(t + \Delta t)$). Волна, бегущей в обратном направлении (навстречу оси z), соответствует аргумент $z + vt$.

1.1.1. Плоская монохроматическая волна

Волна, описываемая функцией координат и времени вида

$$E(z, t) = a \cos(\omega t - kz), \quad (2.3)$$

где ω и k — константы, называется **плоской монохроматической волной**. При фиксированном z мы имеем гармонический колебательный процесс частоты ω и амплитуды a .

Можно убедиться непосредственной подстановкой, что функция (2.3) удовлетворяет волновому уравнению (2.2), если

$$k = \frac{\omega}{v}. \quad (2.4)$$

Константа k называется **волновым числом**. Константа a в (2.3) — амплитуда волны, а аргумент косинуса $\omega t - kz = \varphi$ — **фаза волны**. Очевидно, в любой фиксированной плоскости $z = \text{const}$ колебания величины E происходят «в такт», синхронно (обычно говорят *синфазно*). Поверхности, на которых колебания возмущения E происходят синфазно, называются **волновыми поверхностями**. В данном случае волновые поверхности — плоскости $z = \text{const}$ (перпендикулярные оси z). Поэтому волна (2.3) называется **плоской**. Поскольку колебания происходят по гармоническому закону, волна (2.3) также называется **гармонической** (в оптике принят термин **монохроматическая**, т. е. «одноцветная»).

Величина

$$v = \frac{\omega}{k}$$

называется **фазовой скоростью**. Это скорость, с которой перемещается поверхность постоянной фазы колебаний — волновая поверхность. Действительно, поверхности равных фаз определяются соотношением

$\omega t - kz = \text{const}$, откуда в результате дифференцирования по времени получим $\omega - k \frac{dz}{dt} = 0$, и $\frac{dz}{dt} = \omega/k$.

Ещё одно важное понятие — **волновой вектор \mathbf{k}** . Это вектор, совпадающий по направлению с нормалью к волновой поверхности (и вектором скорости, с которой перемещается волновая поверхность), причём модуль вектора \mathbf{k} равен волновому числу $|\mathbf{k}| = k = \omega/v$.

Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний на двух волновых поверхностях, разделённых расстоянием Δz , равна $\Delta\varphi = k\Delta z$. Расстояние между волновыми поверхностями, колебания на которых происходят с разностью фаз $\Delta\varphi = 2\pi$ (т. е. колебания на этих поверхностях происходят синхронно, в такт), называется **длиной волны** и обозначается буквой λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (2.5)$$

Используя определение (2.4) волнового числа k , находим

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega}v = vT, \quad (2.6)$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период колебания. Из (2.6) ясно, что **длина волны есть расстояние, на которое перемещается волновая поверхность за время, равное одному периоду колебания**.

В общем случае плоская монохроматическая волна (распространяющаяся в произвольном направлении) имеет вид

$$E(\mathbf{r}, t) = a \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varphi_0), \quad (2.7)$$

где $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ — скалярное произведение волнового вектора $\mathbf{k}(k_x, k_y, k_z)$ и радиуса-вектора \mathbf{r} точки наблюдения $\mathbf{r}(x, y, z)$: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$. Направление распространения волны (направление, в котором перемещаются волновые поверхности) задаётся направлением вектора \mathbf{k} . Для общности в аргумент косинуса введена начальная фаза φ_0 (фаза колебаний в момент $t = 0$ в начале координат).

Уравнение $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ — это уравнение плоскости, нормаль к которой совпадает по направлению с вектором \mathbf{k} и, как следует из (2.7), во всех точках (x, y, z) , принадлежащих плоскости $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$, колебания происходят синфазно. Предоставляем читателю убедиться, что функция (2.7) удовлетворяет волновому уравнению (2.1), если

$$k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2, \quad (2.8)$$

причём частота волны может быть любой. Направление распространения волны также произвольно: проекции волнового вектора \mathbf{k} можно изменять как угодно, лишь бы сумма их квадратов удовлетворяла равенству (2.8). Таким образом, уравнение (2.7) описывает целую совокупность, множество решений волнового уравнения — множество плоских волн, отличающихся частотой колебаний и направлением распространения.

Плоские монохроматические волны (2.7) называют также *бегущими плоскими волнами*, подчёркивая таким образом, что волновые поверхности перемещаются в пространстве, и скорость их перемещения — это и есть фазовая скорость.

Плоская монохроматическая волна представляет собой математическую идеализацию: ведь волновые поверхности этой волны — плоскости неограниченной протяжённости, амплитуда колебаний отлична от нуля во всех точках волновых поверхностей (от минус до плюс бесконечности). Это — такая же идеализация, как бесконечно длящийся, неограниченный во времени гармонический колебательный процесс $\cos \omega t$.

1.1.2. Сферическая волна

Волна, описываемая выражением

$$E(r, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi_0), \quad (2.9)$$

называется *сферической*¹. В уравнении (2.9) r — расстояние от начала координат (где расположен источник волны) до точки наблюдения (x, y, z) :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Согласно (2.9), колебания E происходят синфазно во всех точках пространства, отстоящих от источника на фиксированное расстояние $r = \text{const}$, т. е. волновые поверхности — это сферы, центр которых (источник волны) находится в начале координат.

Обратим внимание на различие уравнений (2.7) и (2.9). В уравнении плоской волны аргумент косинуса содержит скалярное произведение векторов \mathbf{k} и \mathbf{r} . В уравнении сферической волны — произведение волнового числа k на расстояние r точки наблюдения от источника волны. Дифференцируя равенство $\omega t - kr = \text{const}$, получаем $\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} > 0$, т. е.

¹ Заметим, что реальная (векторная) поперечная электромагнитная волна не может быть чисто сферической (элементарным источником является диполь, а не точка). Приближение сферической волны в оптике означает, что мы можем считать некоторый участок волнового фронта имеющим сферическую форму с точностью до малых поправок.

волновые поверхности бегут *от источника*, и волну называют **расходящейся**. Напротив, выражение

$$E(r, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t + kr)$$

описывает сферическую волну, в которой волновые поверхности бегут к началу координат ($\frac{dr}{dt} = -\frac{\omega}{k} < 0$). Это — **сходящаяся сферическая волна**.

Наконец, ещё одно существенное обстоятельство: в отличие от плоской волны амплитуда колебаний в сферической волне по мере увеличения расстояния от источника убывает по закону $A(r) = \frac{a}{r}$.

1.2. Монокроматические волны. Комплексная амплитуда.

Уравнение Гельмгольца

В самом общем случае монокроматическая волна (не обязательно плоская или сферическая) имеет вид

$$E(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \varphi(\mathbf{r})), \quad (2.10)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения.

Функции координат $a(\mathbf{r})$ и $\varphi(\mathbf{r})$ определяют *пространственную структуру волны*, в том числе и форму волновых поверхностей.

При изучении монокроматических волн, так же как и при изучении гармонических колебаний, удобно использовать комплексную форму записи. Наряду с волной (2.10) рассмотрим волновой процесс вида

$$E_1(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \sin(\omega t - \varphi(\mathbf{r})). \quad (2.11)$$

Ясно, что если функция (2.10) описывает некоторый волновой процесс (т. е. удовлетворяет волновому уравнению), то функция (2.11) также описывает волну. Ясно также, что линейная комбинация функций (2.10) и (2.11) вида

$$V(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) - iE_1(\mathbf{r}, t), \quad (2.12)$$

где i — мнимая единица, также удовлетворяет волновому уравнению (линейная суперпозиция решений волнового уравнения также является решением).

Используя тождество $\cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha}$, перепишем (2.12) в виде

$$V(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) e^{-i[\omega t - \varphi(\mathbf{r})]}.$$

Функцию $V(\mathbf{r}, t)$ можно записать в виде произведения двух функций, одна из которых

$$f(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})} \quad (2.13)$$

зависит только от координат, а вторая $e^{-i\omega t}$ — только от времени:

$$V(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (2.14)$$

Комплексная функция $f(\mathbf{r})$ полностью определяет *пространственную структуру волны* (т. е. распределение в пространстве амплитуд $a(\mathbf{r})$ и фаз $\varphi(\mathbf{r})$ колебаний) и называется *комплексной амплитудой волны*. Будем для краткости называть эту функцию *волновым полем* или просто *полем*. В частности, для плоской волны (2.7) $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0$ и $a(\mathbf{r}) = a = \text{const}$, поэтому

$$f(x, y, z) = ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0)} = ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0)}.$$

Комплексная амплитуда сферической волны (2.9) есть

$$f(r) = ae^{i\varphi_0} \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Итак, комплексная функция $V(\mathbf{r}, t)$, определяемая равенством (2.14), должна быть решением волнового уравнения

$$\nabla^2 V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (2.15)$$

Подставляя (2.14) в (2.15), приходим (после сокращения на множитель $e^{-i\omega t}$) к уравнению

$$\boxed{\nabla^2 f + k^2 f = 0.} \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) для комплексных амплитуд называется *уравнением Гельмгольца*.

2. Интерференция монохроматических волн

2.1. Двухлучевая интерференция. Видность полос

Пусть в пространстве распространяются две монохроматические волны одинаковой частоты с амплитудами a_1 и a_2 , и пусть в некоторой точке наблюдения их фазы равны φ_1 и φ_2 соответственно.

Согласно принципу суперпозиции, результирующий колебательный процесс в точке наблюдения представляет собой сумму колебаний, создаваемых каждой из волн, т. е. гармоническое колебание той же частоты ω . Интенсивность результирующего колебания (квадрат амплитуды $I = a^2$) можно найти используя правило сложения векторов (рис. 2.1):

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi,} \quad (2.17)$$

где $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз, $I_1 = a_1^2$ и $I_2 = a_2^2$ — интенсивности слагаемых волн.

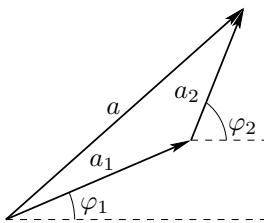


Рис. 2.1. Сложение колебаний

Напомним, что интенсивность — величина, пропорциональная плотности потока энергии в волне. Равенство (2.17) показывает, что плотность потока энергии в результирующей волне не равна в общем случае сумме потоков энергии в слагаемых волнах. В пространстве, где налагаются две волны, происходит *перераспределение потоков энергий*: в некоторых точках пространства результирующая интенсивность больше суммы интенсивностей слагаемых волн ($\cos \Delta\varphi > 0$), в других точках, наоборот, результирующий поток энергии меньше суммы потоков энергии в слагаемых волнах ($\cos \Delta\varphi < 0$). Это явление называется **интерференцией**. При наложении волн одинаковой интенсивности $I_1 = I_2 = I_0$ имеем из (2.17):

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi). \quad (2.18)$$

Чередующиеся максимумы I_{\max} и минимумы I_{\min} результирующей интенсивности образуют интерференционные полосы.

Двухлучевая интерференция. В любой двухлучевой интерференционной схеме свет от *одного источника* приходит в точку наблюдения по двум различным путям r_1 и r_2 (двум «плечам» интерференционной схемы) с разностью фаз $\Delta\varphi = k_2 r_2 - k_1 r_1$, где $k_1 = n_1 \omega / c$ и $k_2 = n_2 \omega / c$ (частота волны при переходе из одной среды в другую остаётся неизменной). Таким образом,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\omega}{c} (n_2 r_2 - n_1 r_1) = \frac{\omega}{c} \cdot \Delta, \quad (2.19)$$

где n_2 и n_1 — показатели преломления среды вдоль путей r_2 и r_1 соответственно. Произведение показателя преломления на расстояние, пройденное светом, называют **оптическим путём**, а

$$\Delta = n_2 r_2 - n_1 r_1 \quad (2.20)$$

есть разность оптических путей двух плеч интерферометра (**оптическая разностью хода**).

Если амплитуды (и интенсивности) волн в точке наблюдения одинаковы, из (2.18) получаем

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{\omega}{c} \Delta \right). \quad (2.21)$$

Эта формула справедлива при интерференции любых монохроматических волн одинаковой частоты и интенсивности.

Видность. Контраст интерференционной картины принято характеризовать величиной **видности** \mathcal{V} , определяемой равенством

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (2.22)$$

Интенсивность максимальна и равна $I_{\max} = (a_1 + a_2)^2$ при $\Delta\varphi = 2\pi m$, где m — целое число, называемое **порядком интерференции**. Геометрическое место точек, удовлетворяющих этим условиям, образует максимумы (светлые интерференционные полосы) m -го порядка. При $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$ возникают минимумы (тёмные интерференционные полосы). Видность максимальна (и равна единице) при равных амплитудах волн, при этом $I_{\max} = 4I_0$ вдвое больше суммы интенсивностей слагаемых волн, а $I_{\min} = 0$.

2.2. Интерференция различных типов волн. Ширина интерференционных полос

2.2.1. Интерференция сферических волн

Пусть волны излучаются в пустоте ($n = 1$) двумя точечными источниками S_1 и S_2 (источники излучают синфазно с одинаковыми амплитудами), r_1 и r_2 — расстояние от источников до точки наблюдения. Разность фаз колебаний в точке наблюдения $\Delta\varphi = k\Delta$, где $\Delta = r_2 - r_1$ — разность хода волн, $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число.

При $\Delta = m\lambda$ ($\Delta\varphi = 2\pi m$) получаем интерференционный максимум (светлую полосу) m -го порядка. При $\Delta = m\lambda + \frac{\lambda}{2}$ — интерференционный минимум ($\Delta\varphi = (2m+1)\pi$). Если расстояния r_1 и r_2 до точки наблюдения много больше расстояния между источниками d , то амплитуды (и интенсивности) слагаемых волн примерно одинаковы $I_1 \approx I_2 = I_0$ и тогда справедливо равенство (2.21).

Геометрическое место точек, для которых $r_2 - r_1 = \text{const}$, — это гиперболоиды вращения. Таким образом, поверхности интерференционных максимумов — это гиперболоиды $r_2 - r_1 = m\lambda$,

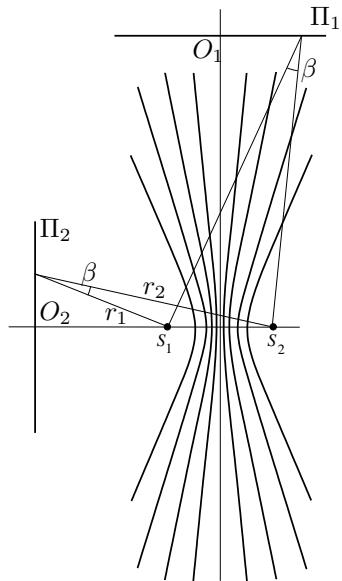


Рис. 2.2. Интерференция сферических волн

сечения которых плоскостью, в которой лежат источники S_1 и S_2 (плоскость рисунка), показаны на рис. 2.2.

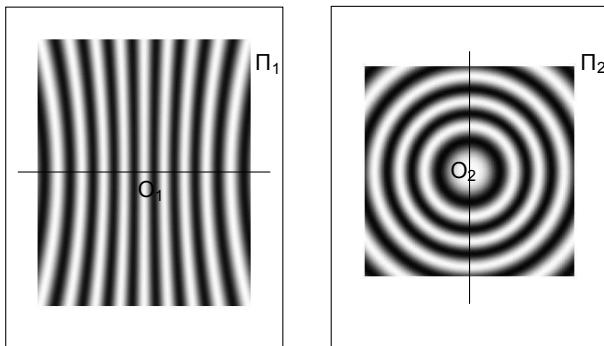


Рис. 2.3. Картина интерференции сферических волн в плоскостях Π_1 и Π_2

Форма интерференционных полос, наблюдаемых на каком-либо экране, зависит от его положения. Например, на экране Π_1 , параллельном линии S_1S_2 , соединяющей источники, полосы имеют вид почти параллельных прямых, если рассматривать малую область вблизи точки O_1 — центра экрана (рис. 2.3). На экране Π_2 , плоскость которого перпендикулярна линии S_1S_2 , полосы равной интенсивности — концентрические кольца, центры которых лежат в точке O_2 экрана Π_2 .

2.2.2. Интерференция плоских волн

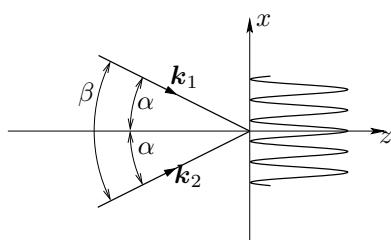


Рис. 2.4. Интерференция плоских волн

Рассмотрим результат интерференции двух плоских волн: $E_1 = a_0 \cos(\omega t - kx \sin \alpha)$ и $E_2 = a_0 \cos(\omega t + kx \sin \alpha)$ одинаковой частоты и амплитуды, падающих на экран (плоскость наблюдения $z = 0$) под углами α и $-\alpha$ (рис. 2.4). Используя (2.18), получаем

$$I = 2I_0[1 + \cos(2kx \sin \alpha)]. \quad (2.23)$$

Переход от одной светлой полосы (интерференционного максимума) к другой соответствует изменению аргумента косинуса в (2.23) на 2π :

$$2k\Delta x \sin \alpha = 2\pi,$$

откуда

$$\Delta x = l = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \quad (2.24)$$

($\beta = 2\alpha$ — угол схождения волн, рис. 2.4).

Для малых углов схождения $\sin \frac{\beta}{2} \approx \frac{\beta}{2}$ имеем простую оценку

$$l \approx \frac{\lambda}{\beta}. \quad (2.25)$$

Расстояние l между двумя соседними максимумами (или минимумами) интерференционной картины $I(x)$ называется **ширинаю интерференционной полосы**. В реальных условиях почти всегда можно использовать приближённую формулу (2.25) для ширины полосы, поскольку на малых участках плоскости наблюдения (порядка нескольких полос l) волновые поверхности интерферирующих волн можно считать плоскими. В частности, её можно использовать для оценки ширины полосы при интерференции сферических волн при условии, что r_1 и r_2 много больше расстояния между источниками (рис. 2.2).

3. Статистическая природа излучения. Когерентность

Волновые или колебательные процессы, протекающие согласованно во времени и пространстве, называют **когерентными**. Два гармонических колебания являются когерентными, если их *разность фаз постоянна во времени*. Стабильная интерференционная картина двух волн может наблюдаться, только если колебания в интерферирующих волнах остаются когерентными — то есть имеют практически неизменную разность фаз — в течение времени, достаточного для наблюдения сигнала детектором².

3.1. Статистическая модель излучения света источником

Колебания электрического поля в волне, излучаемой любым реальным источником света, не являются строго гармоническими. В противном случае мы бы сталкивались с явлением интерференции буквально на каждом шагу. Мы не видим интерференционные полосы на стене комнаты, освещённой двумя электрическими лампочками. Это означает, что при описании излучения реального источника света следует отказаться от использования «гармонической» идеализации и более внимательно рассмотреть структуру излучения.

² Иными словами, времени инерционности, в течение которого детектор производит усреднение попадающего на него излучения. Например, для человеческого глаза это величина $\sim 0,1$ с.

Опишем её в общих чертах, используя простейшую из возможных моделей процесса излучения света тепловым или газоразрядным источником, например, светящимся газом. Существуют три важных обстоятельства, определяющих структуру излучения. Во-первых, *излучает огромное число возбуждённых атомов источника*. Второе обстоятельство состоит в том, что *процесс излучения атома длится конечное время*, такое излучение принято называть «цугом» — «обрывком» (в отличие от бесконечно длившегося гармонического процесса). Третье обстоятельство связано со *случайным, статистическим характером механизма возбуждения атомов*: к возбуждению может приводить столкновение между атомами при тепловом, *хаотическом движении*, электронный удар, поглощение кванта света. Всё это приводит к тому, что моменты возникновения излучаемых цугов являются случайными, не связанными между собой величинами.

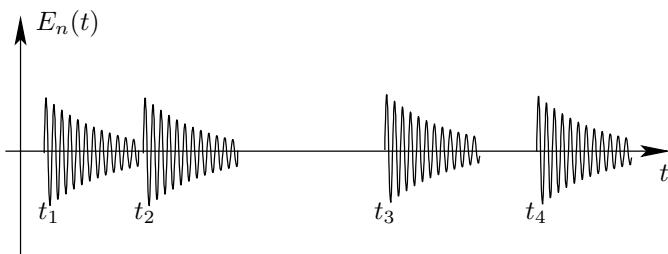


Рис. 2.5. Последовательность цугов, излучаемых атомом

На рис. 2.5 показана последовательность цугов излучения какого-либо n -го атома. Цуги возникают («зажигаются», «вспыхивают») в случайные моменты времени $t_1, t_2, t_3\dots$ Суммарное излучение источника

$$E(t) = \sum_n E_n(t) \quad (2.26)$$

содержит в *каждый момент времени* огромное число «живых» (отличных от нуля) слагаемых.

Если следовать классическим представлениям, излучающий атом — это возбуждённый случайным толчком осциллятор (электрон в атоме). Будем далее полагать, что все осцилляторы среды имеют одну и ту же собственную частоту ω_0 (период колебаний оптического диапазона излучения $T_0 = 2\pi/\omega_0 \simeq 10^{-15}$ с). Колебания возбуждённого осциллятора затухают вследствие потери энергии на излучение (т. н. радиационное затухание), поэтому цуг излучения повторяет процесс затухающих колебаний классического осциллятора (рис. 2.6).

Из анализа классической модели следует, что время затухания (длительность цуга излучения) равно по порядку величины $\tau_{\text{ц}} \approx 10^{-8}$ с. Важно обратить внимание на соотношение величин T_0 и $\tau_{\text{ц}}$: $T_0/\tau_{\text{ц}} \lesssim 10^{-7}$, т. е. цуг излучения атома содержит огромное число ($\sim 10^7$) периодов (добротность осциллятора $\sim 10^7$). Это означает, что на интервале времени $\Delta\tau$, малом по сравнению с $\tau_{\text{ц}}$ (но содержащем большое число периодов T_0): $T_0 \ll \Delta\tau \ll \tau_{\text{ц}}$), колебание поля в цуге излучения практически неотличимо от гармонического (рис. 2.6).

Представим суммарный (2.26) процесс в виде *хаотически-модулированного по амплитуде $a(t)$ и фазе $\varphi(t)$* колебания с несущей частотой ω_0 :

$$E(t) = a(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)]. \quad (2.27)$$

Легко видеть, что время, в течение которого происходит заметное изменение амплитуды $a(t)$ и фазы $\varphi(t)$, как раз и определяется длительностью цугов $\tau_{\text{ц}}$. Действительно, цуги, составляющие суммарный процесс $E(t)$ на интервале времени $\Delta\tau_1$, не «доживаются» до интервала $\Delta\tau_2$, если временной промежуток τ между ними превышает $\tau_{\text{ц}}$: $\tau \geq \tau_{\text{ц}}$ (рис. 2.7). За время $\tau_{\text{ц}}$ происходит полная смена излучающих цугов новыми цугами. Складываясь с новыми фазовыми соотношениями (ведь моменты возникновения новых цугов совершенно не зависят от того, в какие моменты возникли цуги, выбывшие из игры), они образуют суммарный процесс, амплитуда и фаза которого совершенственно не зависят от значений a и φ в процессе, образованном прежней совокупностью цугов.

Время τ_0 , за которое значения амплитуды $a(t + \tau_0)$ и фазы $\varphi(t + \tau_0)$ «забывают» прежние значения $a(t)$ и $\varphi(t)$, называют временем статистической памяти процесса (или временем когерентности).

В рассматриваемой нами модели цугов $\tau_0 = \tau_{\text{ц}}$. В частности, при $\tau > \tau_{\text{ц}}$ фаза $\varphi(t + \tau)$ может с равной вероятностью принять любое значение в интервале $[0, 2\pi]$ независимо от значения фазы $\varphi(t)$ и, следовательно, равновероятно любое значение разности фаз $\Delta\varphi(t) = \varphi(t + \tau) - \varphi(t)$. Заметим, что при этом среднее за время

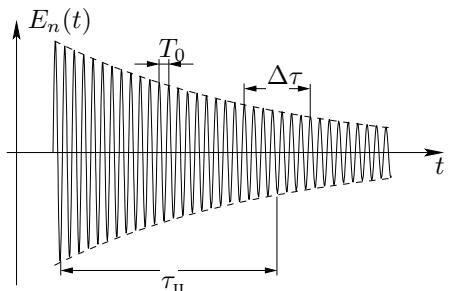


Рис. 2.6. Отдельный цуг излучения — колебание затухающего осциллятора

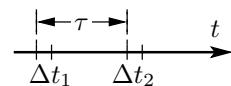


Рис. 2.7

$\Delta t \gg \tau_{\text{ц}}$ значение величины $e^{i\Delta\varphi(t)}$ равно нулю:

$$\overline{e^{i\Delta\varphi(t)}} = \overline{\cos \Delta\varphi(t)} + i\overline{\sin \Delta\varphi(t)} = 0. \quad (2.28)$$

Разумеется, «забывание» значений $a(t)$ и $\varphi(t)$ происходит постепенно: за время $\tau < \tau_{\text{ц}}$ «выбывает из игры» (заканчивается и заменяется новыми) лишь доля общего числа цугов, равная в среднем отношению $\tau/\tau_{\text{ц}}$. Часть же цугов, равная $1 - \tau/\tau_{\text{ц}}$, составляет суммарный процесс колебаний и на интервале $\Delta\tau_1$, и на интервале $\Delta\tau_2$, поэтому частично сохраняется корреляция (когерентность) колебаний $E(t)$ и $E(t+\tau)$. За промежуток времени $\tau \ll \tau_{\text{ц}}$ (сильное неравенство!) лишь ничтожная доля цугов в сумме (2.26), равная $\tau/\tau_{\text{ц}} \ll 1$, заменяется новыми. Подавляющая же доля составляет суммарный процесс колебания и на интервале $\Delta\tau_1$, и на интервале $\Delta\tau_2$; амплитуда и фаза суммарного колебания сохраняются на малом интервале $\tau \ll \tau_{\text{ц}}$ почти неизменными:

$$a(t) = a(t+\tau), \quad \varphi(t) = \varphi(t+\tau) \quad \text{при} \quad \tau \ll \tau_{\text{ц}}. \quad (2.29)$$

Резюмируя, можно сказать, что когерентность постепенно уменьшается от максимального значения при $\tau \ll \tau_0$ до почти полной некогерентности при $\tau > \tau_0$.

3.2. Ширина линии. Механизмы уширения

Конечное время излучения атомов приводит к *некогерентности*: ширина $\Delta\omega_{\text{ц}}$ спектра излучения, состоящей из хаотичного набора цугов, может быть оценена из соотношения неопределённостей:

$$\Delta\omega_{\text{ц}} \sim \frac{2\pi}{\tau_{\text{ц}}}. \quad (2.30)$$

Столкновение между атомами при тепловом хаотическом движении может приводить не только к возбуждению осцилляторов (и изучаемых ими цугов), но и к уменьшению времени излучения уже возбуждённого атома (к уменьшению «времени жизни» возбуждённого состояния), а также к «сбою» фазы излучаемой волны (что эквивалентно появлению нового цуга). В сильно разреженном газе (при малой плотности) среднее время между столкновениями $\tau_{\text{ст}}$ оказывается больше времени «естественного затухания» цугов $\tau_{\text{ц}}$ — в этом случае столкновения практически не влияют на длительность цугов. Однако при увеличении плотности газа среднее время между столкновениями уменьшается. Например, при $\tau_{\text{ст}} \approx 10^{-9}$ с длительность цугов определяется в основном временем $\tau_{\text{ст}}$. Уменьшение времени жизни возбуждённого состояния

(длительности цугов излучения) приводит к уширению спектра излучения ($\Delta\omega_{ct} \sim 2\pi/\tau_{ct}$) — так называемое ударное уширение.

Если речь идёт об излучении нагретого газа, существенную роль может играть эффект Доплера. Частота излучения цуга, регистрируемого в точке приёма, зависит от скорости движения v_n излучающего n -го атома:

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v_n}{c} \cos \theta_n\right),$$

где θ_n — угол между направлением на атом-источник и вектором его скорости. Процесс колебаний n -го цуга в точке приёма можно записать в виде

$$E_n(t) = a_n \cos [(\omega_0 + \Delta\omega_n) t],$$

где $\Delta\omega_n = \omega_0 \frac{v_n}{c} \cos \theta_n$. Результирующее колебание в точке наблюдения $E(t) = \sum E_n(t)$ будет представлять собой сумму цугов с близкими частотами, случайно распределёнными вблизи ω_0 . Две гармоники близких частот ω_0 и $\omega_0 + \Delta\omega_n$ остаются когерентными в течение времени $\tau_n \lesssim 2\pi/\Delta\omega_n$ (то есть пока разность фаз между ними $\Delta\varphi = (\omega + \Delta\omega_n)t - \omega t$ много меньше 2π). Как известно, скорости молекул газа в тепловом равновесии подчиняются распределению Максвелла, причём характерная ширина этого распределения Δv равна по порядку величины среднему значению тепловой скорости v_T . Следовательно, ширина спектра излучения газа $\Delta\omega_d$ может быть оценена как $\Delta\omega_d \sim \frac{v_T}{c}$, соответствующее время когерентности $\tau_d \sim 2\pi/\Delta\omega_d$. Это — так называемое додлеровское уширение линии. При высокой температуре (~ 1000 К) для лёгких атомов $v_T/c \simeq 10^{-5}$ и $\tau_d \simeq 10^{-10}$ с. В этом случае время когерентности в суммарном колебании определяется именно эффектом Доплера ($\tau_{\text{ц}} > \tau_{\text{ст}} > \tau_d$).

Итак, суммарное колебание (2.26) в каждый момент времени может быть представлено как суперпозиция огромного числа «живых» цугов с некоторой средней длительностью τ_0 . Именно это время будем в дальнейшем называть временем когерентности. В описанных выше случаях τ_0 определяется минимальным временем процесса: если доминируют столкновительные процессы ($\tau_{\text{ст}} \ll \tau_{\text{ц}}, \tau_d$), то $\tau_0 \simeq \tau_{\text{ст}}$, и, аналогично, если ширина линии определяется эффектом Доплера ($\tau_d \ll \tau_{\text{ст}}, \tau_{\text{ц}}$), то $\tau_0 \simeq \tau_d$. Заметим, что наша модель справедлива, если период колебаний в любом случае много меньше длительности цугов: $T_0 \ll \tau_0$.

Оценка времени затухания цугов, приведённая выше ($\tau_{\text{ц}} \approx 10^{-8}$ с), относится к процессу излучения изолированного классического осциллятора (отдельного атома, не взаимодействующего с другими атомами среды). Эта модель во многих случаях неприменима. Квантовомеханическое рассмотрение показывает возможность существования в некото-

ных ситуациях состояний с временем жизни, существенно превышающим $\tau_{\text{ц}}$, а также состояний с временем жизни, на много порядков (до 10^{-13} с) меньшим $\tau_{\text{ц}}$. Кроме того, представление, основанное на случайному характере моментов возникновения цугов излучения различных атомов среды (моментов t_n в сумме (2.26)), неприменимо, если речь идёт об **индуцированном излучении** лазеров, в которых время когерентности τ_0 результирующего излучения лазера может на много порядков (до 10^7 раз) превышать длительность цугов излучения отдельных атомов.

В дальнейшем мы будем говорить об излучении, для которого выполняется условие $T_0 \ll \Delta\tau \ll \tau_0$, в силу чего на интервале времени $\Delta\tau$ излучение практически не отличается от гармонического с частотой $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ (квазимонохроматическое излучение).

3.3. Функция временной когерентности

В оптике измеряемой величиной является средний за время регистрации Δt поток энергии

$$\overline{S} = \frac{c}{4\pi} \overline{E^2}.$$

Величину $I = \overline{E^2}$, пропорциональную среднему потоку энергии, называют интенсивностью:

$$I = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} E^2(t) dt \sim \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} a^2(t) dt = \overline{a^2(t)}. \quad (2.31)$$

При изучении статистических характеристик излучения удобно использовать комплексную форму записи: реальному колебанию (2.27) ставят в соответствие комплексную функцию

$$V(t) = a(t)e^{-i[\omega_0 t - \varphi(t)]} = A(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.32)$$

где $A(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$ — комплексная амплитуда; очевидно, что $E(t) = \text{Re } V(t)$. Интенсивность, согласно (2.31), может быть выражена через комплексную амплитуду:

$$I = \overline{A(t)A^*(t)} = \overline{a^2(t)}. \quad (2.33)$$

Введём *количественную меру временной когерентности*, которая, как мы увидим, соответствует приведённым выше качественным соображениям о степени когерентности. Функция

$$\Gamma(\tau) = \overline{V(t) \cdot V^*(t + \tau)} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} V(t) \cdot V^*(t + \tau) d\tau \quad (2.34)$$

называется функцией временной когерентности случайного процесса $V(t)$. Чертёж в (2.34) означает усреднение величины $V(t)V^*(t+\tau)$ за время Δt , определяемое инерционностью регистрирующего устройства. В большинстве используемых устройств (видеокамера, фотоэлемент, глаз человека) величина Δt на несколько порядков превышает время τ_0 (например, инерционность зрения человека $\sim 0,1$ с, у некоторых типов фотоприёмников $\Delta t = 10^{-3} - 10^{-5}$ с). Однако существуют современные детекторы и соответствующие электронные схемы с очень малым временем разрешения $\Delta t < \tau_0$, при этом в любом случае $\Delta t \gg T_0$: ни один фотодетектор не успевает следить за изменениями светового поля, происходящими с частотой $\omega_0 \approx 10^{15}$ с⁻¹. Мы будем предполагать *инерционный способ регистрации*: $\Delta t \gg \tau_0$. Используя (2.34) и (2.32), имеем

$$\Gamma(\tau) = \overline{A(t)A^*(t+\tau)}e^{i\omega_0\tau} = \overline{a(t)a(t+\tau)e^{i[\varphi(t)-\varphi(t+\tau)]}}e^{i\omega_0\tau}. \quad (2.35)$$

Исследуем функцию $\Gamma(\tau)$. При $\tau = 0$ получаем

$$\Gamma(0) = \overline{A(t)A^*(t)} = \overline{a^2(t)} = I_0$$

— значение функции когерентности при $\tau = 0$ равно интенсивности. Будем далее полагать процесс излучения *стационарным*, т. е. считать, что ни интенсивность, ни функция когерентности не зависят от t , т. е. не зависят от положения интервала усреднения Δt в (2.34) на оси времени. Легко показать, что $\Gamma(0) = I_0$ — *максимальное значение* функции когерентности. Нормированная функция

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{I_0} \quad (2.36)$$

называется *степенью временной когерентности*. При $\tau = 0$ $\gamma(0) = 1$ — это максимальное значение степени когерентности.

Из (2.29) ясно, что при $\tau \ll \tau_0$ (но $\tau \gg T_0$)

$$\Gamma(\tau) = \overline{a^2(t)}e^{i\omega_0\tau} = I_0e^{i\omega_0\tau}.$$

При этом

$$\gamma(\tau) = e^{i\omega_0\tau} \quad \text{и} \quad |\gamma(\tau)| = 1. \quad (2.37)$$

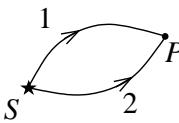
Наконец, при $\tau > \tau_0$, как следует из (2.28): $\overline{e^{i[\varphi(t)-\varphi(t+\tau)]}} \simeq 0$, поэтому $\Gamma(\tau) \simeq 0$, $\gamma(\tau) \simeq 0$.

Итак, мы видим, что поведение функции временной когерентности $\Gamma(\tau)$ (и степени когерентности $\gamma(\tau)$) соответствует нашим качественным представлениям о корреляции (когерентности) колебаний $V(t)$ и $V(t+\tau)$

при $\tau \ll \tau_0$ (при этом $\Gamma(\tau) \simeq \Gamma(0)$, $\gamma(\tau) = 1$) и об отсутствии корреляции (когерентности) при $\tau > \tau_0$ (при этом $\Gamma(\tau) \simeq 0$, $\gamma(\tau) \simeq 0$).

3.4. Интерференция и когерентность

Один из наиболее эффективных способов получения информации о статистических характеристиках излучения (в частности, о степени временной когерентности) — измерение видности (контрастности) интерференционной картины в двухлучевой интерференционной схеме: излучение маленького («точечного») источника S приходит в точку наблюдения P по двум путям (двум «плечам»)



интерференционной схемы (рис. 2.8). Разность длин плеч Δ (разность путей) приводит к относительному запаздыванию процессов колебаний $V_1 = V(t)$ и $V_2 = V(t + \tau)$ на время $\tau = \Delta/c$. Результат интерференции — интенсивность суммарного колебания — можно записать в виде

$$I(\tau) = |V(t) + V(t + \tau)|^2 = \overline{|V(t)|^2} + \overline{|V(t + \tau)|^2} + 2 \operatorname{Re} \overline{V(t)V^*(t + \tau)} \quad (2.38)$$

Если $I_0 = \overline{|V(t)|^2} = \overline{|V(t + \tau)|^2}$ — равные интенсивности интерферирующих волн, то из (2.38) получаем

$$I(\tau) = 2I_0(1 + |\gamma(\tau)| \cos \omega_0 \tau) \quad (2.39)$$

(полагаем, что фаза функции когерентности равна нулю). Используя определение видности \mathcal{V} (2.22), получаем

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma(\tau)|. \quad (2.40)$$

Измеряя видность интерференционных полос, отвечающих разным $\tau = \Delta/c$, мы измеряем степень временной когерентности $|\gamma(\tau)|$.

Если $\tau \ll \tau_0$, то $\gamma(\tau) \approx e^{i\omega_0 \tau}$ и $|\gamma(\tau)| = 1$. Мы приходим к формуле $I(\tau) = 2I_0(1 + \cos \omega_0 \tau)$, которая совпадает с формулой (2.18), определяющей результат интерференции строго монохроматических волн. Тем самым, получен ответ на вопрос о применимости синусоидальной идеализации: при сложении когерентных волн всё происходит так, как если бы волны были строго монохроматическими.

При $\tau \geq \tau_0$ волны становятся некогерентными: $|\gamma(\tau)| \simeq 0$ — интенсивность $I(\tau) = 2I_0$ равна сумме интенсивностей слагаемых волн. Отсюда следует оценка максимально допустимой для наблюдения интерференции оптической разности хода Δ_{\max} волн:

$$\Delta_{\max} \simeq c\tau_0. \quad (2.41)$$

Величину $c\tau_0$ называют **длиной когерентности** (это — длина пугов излучения источника).

3.5. Спектральный анализ

О свойствах квазимохроматического излучения можно судить по спектральным измерениям, изучая с помощью какого-либо спектрального прибора распределение энергии излучения по частоте и получая тем самым величину $J(\omega)$, называемую **спектральной интенсивностью**. То есть величина $J(\omega) d\omega$ есть интенсивность излучения на частоте ω в бесконечно узкой полосе $d\omega$.

Заметим, что если излучение содержит две спектральные компоненты с частотами ω и $\omega + \Delta\omega$, то фотоприемник зарегистрирует величину $I = |a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{i(\omega+\Delta\omega)t}|^2$ (интенсивности спектральных компонент $I_1 = a_1^2$ и $I_2 = a_2^2$). Мы получаем $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\omega t$. Если время регистрации $\Delta t \gg 2\pi/\Delta\omega$ (поскольку $\cos \Delta\omega t = 0$), то $I = I_1 + I_2$, т. е. регистрируемая интенсивность равна сумме интенсивностей спектральных компонент.

Сложение интенсивностей означает *некогерентность компонент разных частот*. Таким образом, результат интерференции при использовании квазимохроматического источника можно рассчитать следующим образом: нужно взять отдельную монохроматическую (гармоническую) компоненту частоты ω , интенсивности $J(\omega)d\omega$ и найти результат двухлучевой интерференции, создаваемый этой компонентой:

$$dI = 2J(\omega) d\omega(1 + \cos \omega\tau). \quad (2.42)$$

Результирующая интерференционная картина представляет собой (*в силу некогерентности волн разных частот!*) сумму интенсивностей картин, созданных всеми спектральными компонентами, содержащимися в излучении источника:

$$I(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} J(\omega)(1 + \cos \omega\tau) d\omega. \quad (2.43)$$

Суммарная интенсивность I_0 равна сумме интенсивностей всех спектральных компонент:

$$I_0 = \int_0^{+\infty} J(\omega) d\omega.$$

Рассмотрим два примера.

1. Спектральная интенсивность $J(\omega)$ имеет вид «столбика» шириной $\Delta\omega$ со средней частотой ω_0 (рис. 2.9):

$$J(\omega) = \begin{cases} J_0 & \text{при } |\omega - \omega_0| < \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0 & \text{при } |\omega - \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2}. \end{cases}$$

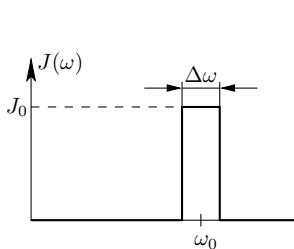


Рис. 2.9. Спектральная интенсивность

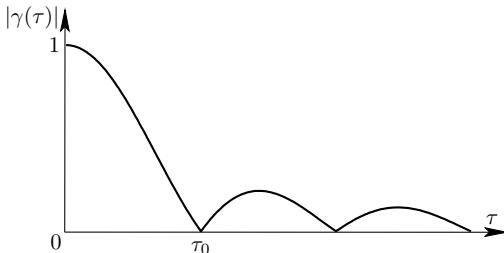


Рис. 2.10. Степень когерентности

Используя (2.43), находим

$$I(\tau) = 2 \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} J_0(1 + \cos \omega \tau) d\omega = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin \frac{\Delta\omega \tau}{2}}{\frac{\Delta\omega \tau}{2}} \cos \omega_0 \tau \right], \quad (2.44)$$

где $I_0 = J_0 \Delta\omega$ — интенсивность каждой из интерферирующих волн. Из (2.44) получаем видность картины:

$$\mathcal{V} = |\gamma(\tau)| = \left| \frac{\sin \frac{\Delta\omega \tau}{2}}{\frac{\Delta\omega \tau}{2}} \right|. \quad (2.45)$$

Функция $|\gamma(\tau)|$ показана на рис. 2.10. В качестве оценки за величину τ_0 можно принять первый ноль функции $|\gamma(\tau)|$:

$$\frac{\Delta\omega \tau_0}{2} = \pi, \quad \text{т. е.} \quad \tau_0 \Delta\omega = 2\pi. \quad (2.46)$$

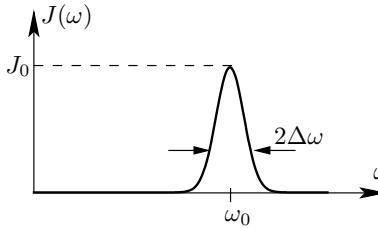


Рис. 2.11. Спектральная интенсивность

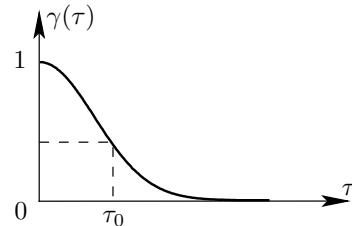


Рис. 2.12. Степень когерентности

2. Спектральная линия имеет гауссову форму (рис. 2.11):

$$J(\omega) = J_0 e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{(\Delta\omega)^2}}. \quad (2.47)$$

Используя (2.43), находим

$$I(\tau) = 2I_0 \left(1 + e^{-\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right)^2} \cos \omega_0 \tau \right). \quad (2.48)$$

Видность $\mathcal{V} = |\gamma(\tau)| = e^{-\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right)^2}$ показана на рис. 2.12. Время когерентности можно оценить из условия спадания видности в e раз:

$$\frac{\tau_0 \Delta\omega}{2} = 1. \quad (2.49)$$

Таким образом, видно, что в обоих приведённых примерах ширина спектральной линии оказывается порядка обратного времени когерентности.

3.6. Теорема Винера—Хинчина

Сравним формулы (2.38) и (2.43). В первой из них результат интерференции выражается через функцию когерентности. Перепишем её в виде

$$I(\tau) = 2I_0 + 2 \operatorname{Re} \overline{V(t)V^*(t+\tau)} = 2I_0 + 2 \operatorname{Re} \Gamma(\tau). \quad (2.50)$$

Во второй формуле тот же результат интерференции выражается через спектральную интенсивность $J(\omega)$. Перепишем её в виде

$$I(\tau) = 2I_0 + 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (2.51)$$

Сравнивая (2.50) и (2.51), приходим к фундаментальной связи между $\Gamma(\tau)$ и $J(\omega)$: *функция когерентности $\Gamma(\tau)$ является (обратным) преобразованием Фурье спектральной интенсивности $J(\omega)$:*

$$\boxed{\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.} \quad (2.52)$$

Соотношение (2.52) называется **теоремой Винера—Хинчина**.

Из этой теоремы следует, что ширина спектра излучения $\Delta\omega$ (половина частоты, в которой заметно отлична от нуля спектральная интенсивность $J(\omega)$) связана со временем когерентности τ_0 (интервалом времени $\tau \leq \tau_0$, в котором отлична от нуля функция когерентности $\Gamma(\tau)$) соотношением неопределённостей:

$$\boxed{\tau_0 \Delta\omega \simeq 2\pi.} \quad (2.53)$$

Иллюстрацией этого факта являются два рассмотренных в предыдущем параграфе примера.

Используя соотношение неопределённостей, можно выразить максимально допустимую для наблюдения интерференции разность хода $\Delta_{\max} = c\tau_0$ через ширину спектра излучения источника $\Delta\omega$: $\Delta_{\max} = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}$ или, т.к. $\omega = 2\pi c/\lambda$ и $\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda$, получить полезную оценку максимально допустимой разности хода волн и максимального наблюдаемого порядка интерференции $m_{\max} = \Delta_{\max}/\lambda$:

$$\boxed{\Delta_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \quad m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.} \quad (2.54)$$

4. Пространственная когерентность

4.1. Степень пространственной когерентности

Пусть источником светового поля $E(\mathbf{r}, t)$ в плоскости наблюдения П является *протяжённый квазимонохроматический источник* S , находящийся на расстоянии z (рис. 2.13). Колебания поля в точках P_1 и P_2 плоскости наблюдения запишем, как и ранее, в комплексной форме

$$V_1(t) = A_1(\mathbf{r}_1, t)e^{i\omega t}, \quad V_2(t) = A_2(\mathbf{r}_2, t)e^{i\omega t}$$

(\mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — координаты точек P_1 и P_2).

Рассмотрим вопрос о когерентности колебаний $V_1(t)$ и $V_2(t)$. Каждый из колебательных процессов характеризуется временем когерентности τ_0 , т. е. в течение времени $\tau \ll \tau_0$ (но много большем периода колебаний T_0) амплитуды $a_1(t)$ и $a_2(t)$, а также фазы колебаний $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ сохраняются почти

неизменными; сохраняется неизменной при этом и разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. По прошествии времени τ_0 амплитуды a_1 и a_2 , а также фазы колебаний принимают новые значения (скажем, φ'_1 и φ'_2), которые некоррелированы со своими прежними значениями φ_1 и φ_2 , т. е. φ_1 с равной вероятностью имеет любое значение в интервале $[0, 2\pi]$, независимо от значения φ'_1 спустя время τ_0 , то же самое касается и фазы φ_2 . Однако возникает вопрос: *сохраняется ли неизменной (или почти неизменной) разность фаз $\varphi'_1(t) - \varphi'_2(t) = \Delta\varphi'$, т. е. выполняется ли равенство $\Delta\varphi \simeq \Delta\varphi'$?* Другими словами, *изменяются ли фазы φ_1 и φ_2 согласованно?* Если разность фаз, а также соотношения амплитуд $a_1(t)$ и $a_2(t)$ сохраняются неизменными (или почти неизменными) в течение всего времени регистрации Δt ($\Delta t \gg \tau_0$), то тогда колебания в точках P_1 и P_2 будут когерентными (или почти когерентными). Если же через время τ_0 разность фаз $\Delta\varphi'$ может принять с равной вероятностью любое значение, не зависящее от предшествующего значения $\Delta\varphi$ (τ_0 секунд назад), то за время регистрации $\Delta t \gg \tau_0$ разность фаз множество раз изменяется, принимая с равной вероятностью любое значение в интервале $[0, 2\pi]$. В этом случае колебания в точках P_1 и P_2 окажутся некогерентными.

Рассмотрение колебаний в различных точках пространства позволяет ввести понятие пространственной когерентности. Количественной мерой пространственной когерентности является функция пространственной когерентности:

$$\Gamma_{12} = \overline{V_1(t)V_2^*(t)} = \overline{A_1(t)A_2^*(t)}, \quad (2.55)$$

которая зависит от расстояния между точками наблюдения. Нормированная функция

$$\gamma_{12} = \frac{\overline{V_1(t)V_2^*(t)}}{\sqrt{\overline{I_1}\overline{I_2}}} \quad (2.56)$$

называется степенью пространственной когерентности.

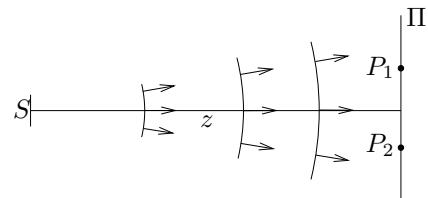


Рис. 2.13

Вопрос о пространственной когерентности возникает, если источник является *протяжённым*, и разные его участки ds излучают некогерентно. Действительно, излучение разных участков — это излучение разных совокупностей атомов, моменты возникновения излучаемых ими цугов не связаны между собой, поэтому разность фаз излучаемых ими волн изменяется за время регистрации $\Delta t \gg \tau_0$ множество раз, принимая с равной вероятностью любое значение в интервале $[0, 2\pi]$.

4.2. Теорема Ван-Циттера—Цернике

Найдём колебания поля, созданного протяжённым квазимохроматическим источником S в точках $P_1(x_1)$ и $P_2(x_2)$ плоскости наблюдения, находящейся на расстоянии z от источника — излучающего отрезка ширины b (рис. 2.14), расстояние между точками P_1 и P_2 равно $\rho = |x_1 - x_2|$. Колебания в каждой из точек P_1 и P_2 — это сумма колебаний, созданных всеми малыми отрезками $\Delta\xi$ источника. Амплитуда $a_i = a(\xi_i)$ колебаний излучающей площадки $\Delta\xi_i$, имеющей координату ξ_i , и её фаза $\varphi_i = \varphi(\xi_i)$ сохраняются неизменными в течение времени, малом по сравнению со временем когерентности τ_0 . При распространении волны от площадки $\Delta\xi_i$ до точек P_1 и P_2 возникает набег фазы kr_{1i} и kr_{2i} соответственно. Поэтому суммарное колебание в точках P_1 и P_2 можно записать в виде

$$A_1 = \sum_i a_i e^{i\varphi_i} \frac{e^{ikr_{1i}}}{r_{1i}}, \quad A_2 = \sum_j a_j e^{i\varphi_j} \frac{e^{ikr_{2j}}}{r_{2j}}.$$

A_1 и A_2 — комплексные амплитуды (малая площадка излучает сферическую волну, отсюда множители $1/r$). Мы получаем

$$A_1 A_2^* = \sum_i \sum_j a_i a_j e^{i(\varphi_i - \varphi_j)} \frac{e^{ik(r_{1i} - r_{2j})}}{r_{1i} r_{2j}}. \quad (2.57)$$

При усреднении величины $A_1 A_2^*$ за время $\Delta t \gg \tau_0$ учтём *некогерентность колебаний*, созданных разными площадками $\Delta\xi_i$ и $\Delta\xi_j$ (при $i \neq j$): $\overline{e^{i(\varphi_i - \varphi_j)}} = 0$. Т. е. отличны от нуля в (2.57) только слагаемые с $i = j$:

$$\overline{A_1 A_2^*} = \sum_i \overline{a_i^2} \frac{e^{ik(r_{1i} - r_{2i})}}{r_{1i} r_{2i}}. \quad (2.58)$$

Далее мы учтём, что среднее значение квадрата амплитуды излучающей площадки $\Delta\xi$ равно $\overline{a^2(\xi)} = J(\xi)\Delta\xi$, где $J(\xi)$ — интенсивность излучения единичной площадки, имеющей координату ξ (интенсивность

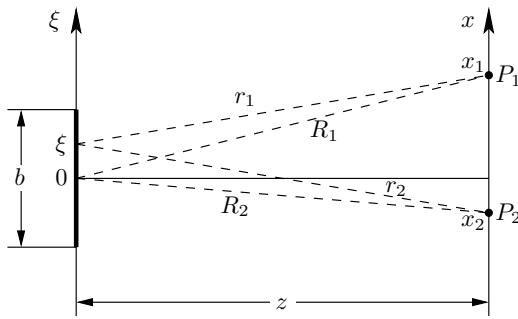


Рис. 2.14. К выводу функции пространственной когерентности

излучения площадки пропорциональна её размеру $\Delta\xi$ — она состоит из *некогерентных точечных излучателей!*). Примем также, что размеры источника b и расстояние ρ малы по сравнению с z . В этом приближении можно положить $\frac{1}{r_1 r_2} \approx \frac{1}{R_1 R_2}$ (R_1 и R_2 — расстояния от центра источника — точки O — до точек P_1 и P_2). При вычислении фазового множителя $e^{ik(r_1 - r_2)}$ необходимо учесть дополнительный член в разложении r_1 , r_2 в ряд Тейлора, поскольку ошибки при оценке r_1 и r_2 должны быть малы по сравнению с длиной волны λ . Тогда запишем

$$r_{1,2} = \sqrt{z^2 + (x_{1,2} - \xi)^2} \approx z + \frac{(x_{1,2} - \xi)^2}{2z},$$

при условии, что отброшенные члены разложения много меньше λ . Отсюда имеем

$$r_1 - r_2 \approx \frac{x_1^2 - x_2^2}{2z} - \frac{\rho\xi}{z}.$$

Тогда из (2.58) находим

$$\Gamma(\rho) = \overline{V_1(t)V_2^*(t)} = \overline{A_1(t)A_2^*(t)} = \frac{e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2 - x_2^2)}}{R_1 R_2} \sum_i J(\xi_i) e^{-i\frac{k}{z}\rho\xi_i} \Delta\xi_i.$$

Переходя к непрерывному распределению в пределе $\Delta\xi \rightarrow 0$, получаем

$$\boxed{\Gamma(\rho) = \frac{e^{i\frac{k}{z}\rho x}}{R_1 R_2} \int J(\xi) e^{-i\frac{k}{z}\rho\xi} d\xi,} \quad (2.59)$$

где $x = (x_1 + x_2)/2$. Нормированная функция (степень пространственной когерентности) имеет вид

$$\gamma(\rho) = \frac{\int J(\xi) e^{-i\frac{k}{z}\rho\xi} d\xi}{\int J(\xi) d\xi}. \quad (2.60)$$

Формула (2.59) выражает замечательный результат: *функция пространственной когерентности* $\Gamma(\rho)$ *является* (с точностью до несущественного множителя) *преобразованием Фурье распределения интенсивности излучения по источнику* $J(\xi)$ (это — так называемая теорема Ван-Циттера—Цернике). В роли частоты ω здесь выступает пространственная частота $\frac{k\rho}{z}$.

4.3. Однородный источник

Для однородного источника (все точки которого излучают с одинаковой интенсивностью J_0):

$$J(\xi) = \begin{cases} J_0 & \text{при } |\xi| \leq \frac{b}{2}, \\ 0 & \text{при } |\xi| > \frac{b}{2}. \end{cases}$$

получаем из (2.60)

$$\gamma(\rho) = \frac{\sin \frac{kb}{2z}\rho}{\frac{kb}{2z}\rho}. \quad (2.61)$$

Функция $|\gamma(\rho)|$ показана на рис. 2.15.

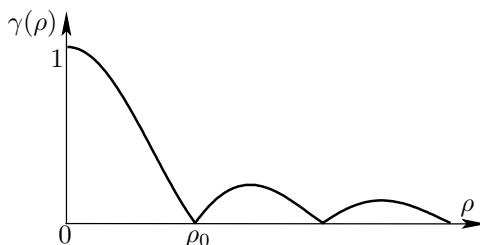


Рис. 2.15. Степень пространственной когерентности однородного источника в зависимости от расстояния между точками наблюдения

Найдём радиус пространственной когерентности ρ_0 — максимальное расстояние между точками наблюдения, при котором степень когерентности не обращается в нуль. Его можно оценить по полуширине главного максимума функции $\gamma(\rho)$: $\frac{kb}{2z}\rho_0 = \pi$, откуда

$$\rho_0 = \frac{\lambda}{b}z = \frac{\lambda}{\psi},$$

(2.62)

где $\psi = \frac{b}{z}$ — угловой размер источника.

Функция $|\gamma(\rho)|$ описывает постепенное уменьшение степени когерентности от единицы при $\rho = 0$ до нуля по мере увеличения расстояния между точками наблюдения P_1 и P_2 , при $\rho = \rho_0$ степень когерентности становится равной нулю. Отметим однако, что наличие боковых лепестков функции $\gamma(\rho)$ (рис. 2.15) означает частичное (незначительное) восстановление степени когерентности колебаний в точках, расстояние между которыми превышает ρ_0 .

4.4. Пространственная когерентность и апертура интерференции

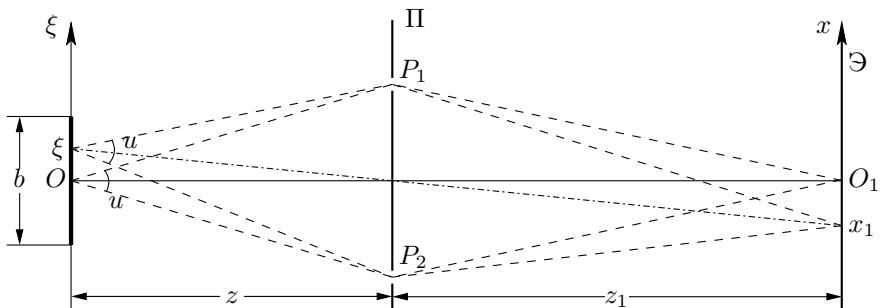


Рис. 2.16. Двухлучевая интерференционная схема с протяжённым источником

Измерить степень пространственной когерентности колебаний в точках P_1 и P_2 можно «сведя» эти колебания с помощью двухлучевой интерференционной схемы в какую-либо точку плоскости наблюдения, например, так, как показано на рис. 2.16: проделаем в точках P_1 и P_2 маленькие отверстия в непрозрачном экране Π , расстояние между точками P_1 и P_2 равно ρ . Колебания поля в этих точках являются источниками волн справа от экрана Π . Эти волны, интерферируя, создадут на экране \mathcal{E} картину интерференции, видность которой позволит нам судить о степени когерентности колебаний в точках P_1 и P_2 (мы описали схему опыта Юнга). Результирующую картину интерференции найдём сложив интерференционные картины, образованные излучением всех малых (*некогерентных!*) площадок $d\xi$ источника. Площадка $d\xi_0$, находящаяся в центре источника (в точке O), создаёт в плоскости наблюдения \mathcal{E} картину интерференции

$$dI_0 = 2J_0 d\xi \left[1 + \cos \frac{2\pi}{l} x \right],$$

где $J_0 d\xi$ — интенсивность одной из интерферирующих волн, $l = \frac{\lambda}{\rho} z_1$ — ширина интерференционной полосы. Ясно, что нулевая полоса (соответствующая нулевой разности хода) находится на оси симметрии в точке O_1 . Элемент источника, имеющий координату ξ , создаёт картину, смешённую на расстояние $x_1 = \xi \frac{z_1}{z}$. (Полагаем, что расстояния z_1 и z велики по сравнению с размером источника и расстоянием ρ между точками P_1 и P_2):

$$dI = 2J_0 d\xi \left[1 + \cos \frac{2\pi}{l} \left(x - \frac{z_1}{z} \xi \right) \right]. \quad (2.63)$$

Результирующую картину найдём суммированием (2.63) по всем площадкам $d\xi$ источника. Интегрируя (2.63), получаем

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \left(\frac{\sin \pi \frac{\rho}{\rho_0}}{\pi \frac{\rho}{\rho_0}} \right) \cos \frac{2\pi}{l} x \right]. \quad (2.64)$$

Из (2.64) находим видность интерференционной картины, которая, как ясно из сравнения с (2.61), равна модулю пространственной степени когерентности:

$$\mathcal{V} = |\gamma(\rho)| = \left| \frac{\sin \pi \frac{\rho}{\rho_0}}{\pi \frac{\rho}{\rho_0}} \right|. \quad (2.65)$$

Для оценки можно принять, что для наблюдения интерференции в опыте Юнга расстояние между отверстиями $P_1 P_2 = \rho$ не должно превышать радиуса когерентности ρ_0 . Из (2.62) находим $\frac{\rho}{z} \leq \frac{\lambda}{b}$.

Угол $u = \frac{\rho}{z}$ между лучами, выходящими из какой-либо точки источника, которые затем сходятся в точке наблюдения (на экране, где наблюдается интерференция), называется **апертурой интерференции**. Итак, необходимое условие наблюдения интерференции (для любой интерференционной схемы):

$$u \lesssim \frac{\lambda}{b}. \quad (2.66)$$

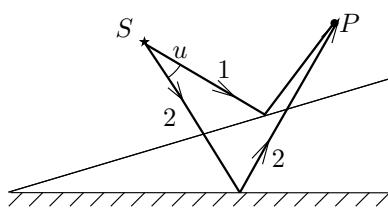
Чем меньше апертура интерференции, тем большего размера источник можно использовать в данной интерференционной схеме.

4.5. Локализация интерференционной картины

Из-за немонохроматичности и протяжённости источника света интерференционная картина имеет хорошую контрастность (видность) только в определённых областях пространства, т. е. интерференционная картина *локализована*.

В качестве примера рассмотрим интерференцию на тонком воздушном клине, пренебрегая для простоты преломлением на поверхностях, образующих клин (рис. 2.17).

а)



б)

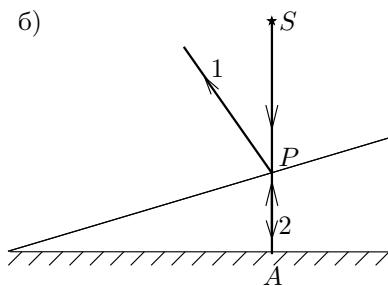


Рис. 2.17. Интерференция на клине (полосы равной толщины)

Для любых положений источника S и точки наблюдения P можно единственным образом построить два луча 1 и 2, исходящие из точки S , затем отражающиеся от верхней и нижней грани клина соответственно (рис. 2.17а) и сходящиеся в точке P (если точка наблюдения находится с противоположной стороны клина, в ней будут сходиться не сами лучи, а их продолжения). Каждому расположению точки наблюдения соответствует определённая разность хода приходящих в неё лучей 1 и 2. Следовательно, интерференционную картину от *точечного* источника можно наблюдать во всех точках пространства, а интерференционные полосы при этом будут *не локализованы*.

С другой стороны, если источник S является *протяжённым*, то, как следует из изложенного в предыдущем параграфе, интерференцию можно будет наблюдать лишь в тех областях, в которых апертура интерференции u (угол между интерферирующими лучами, исходящими из S) достаточно мала: согласно формуле (2.66), максимально допустимый размер источника равен λ/u .

Максимальная видность картины соответствует точкам наблюдения, для которых апертура интерференции равна нулю $u = 0$. Этому условию удовлетворяют точки, находящиеся на поверхности клина, как проиллюстрировано на рис. 2.17б. Интерференционные полосы, лока-

лизованные на поверхности клина (или, например, тонкой пленки), называют **полосами равной толщины**. Такое название связано с тем, что разность хода интерферирующих лучей определяется оптической толщиной клина в точке наблюдения P (на рис. 2.17б она равна $2PA$ и постоянна вдоль ребра клина).

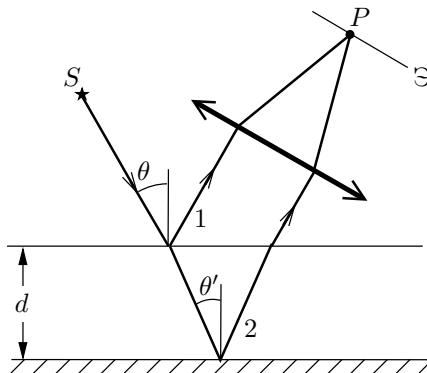


Рис. 2.18. Интерференция на пластине постоянной толщины (полосы равного наклона)

Плоскопараллельная пластина даёт возможность наблюдать интерференционные полосы, локализованные на бесконечности. На рис. 2.18 они наблюдаются в фокальной плоскости линзы. Такие полосы называют **полосами равного наклона**, поскольку каждой интерференционной полосе соответствует определённый угол наклона падающего луча θ и определённая разность хода $2d \cos \theta'$. Контраст картины для полос равного наклона не зависит от размеров источника, поскольку, как нетрудно видеть из рис. 2.18, апертура интерференции равна нулю.

5. Интерферометры

Измерительные приборы, использующие явление интерференции, называют **интерферометрами**. Оптические интерферометры применяются в физических экспериментах для измерения длин волн спектральных линий, показателей преломления прозрачных сред, абсолютных и относительных длин, для контроля качества оптических деталей и их поверхностей. По числу интерферирующих пучков интерферометры разделяются на два класса — **многолучевые** и **двухлучевые**. В данном разделе мы рассматриваем двухлучевую интерференцию. Принцип работы всех двухлучевых интерферометров одинаков: свет от источника разделяется на два пучка, идущих по двум различным путям. Затем

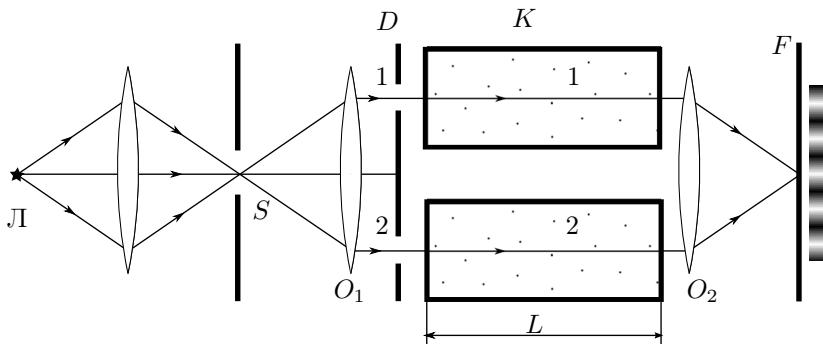


Рис. 2.19. Схема интерферометра Релая

эти пучки сводятся вместе, появляющаяся интерференционная картина исследуется с помощью регистрирующего прибора или визуально.

Вид интерференционной картины зависит от способа получения ко-герентных пучков, оптической разности хода, относительной интенсивности, размеров источника, спектрального состава света. Получают ко-герентные пучки двумя способами — делением волнового фронта и делением амплитуды.

В первом способе пучок делится, проходя через два близко расположенных отверстия (как, например, в опыте Юнга). Метод деления волнового фронта прост в реализации, его недостаток — большая апертура интерференции, и как следствие — небольшая интенсивность, поскольку источник должен иметь малые размеры.

Второй способ — деление амплитуды — реализуется, когда пучок делится на одной или нескольких частично отражающих поверхностей. Деление амплитуды может применяться при работе с протяжёнными источниками, что обеспечивает большую интенсивность картины (например, в интерферометрах Жамена и Майкельсона).

5.1. Интерферометр Релая

В интерферометре Юнга, использующем метод деления волнового фронта, на экран попадает лишь малая доля светового потока от источника. Этот недостаток можно устраниТЬ, если поставить линзу после экрана с двойной щелью и наблюдение вести в точке, сопряжённой с источником света. Дальнейшие усовершенствования данной схемы привели к созданию получившего широкое распространение *интерферометра Релая* (рис. 2.19).

В этой схеме в качестве источника используют узкую щель S (ширина b), освещаемую сколлимированным светом от лампочки L . Щель расположена в фокальной плоскости объектива O_1 . После экрана D с двойной щелью два параллельных пучка проходят через кюветы 1 и 2 и попадают на объектив O_2 , в фокальной плоскости которого рассматривается интерференционная картина. Для обеспечения когерентности пучков 1 и 2 ширина входной щели S выбирается так, чтобы радиус когерентности на экране D был больше расстояния между щелями 1 и 2. На экране F рассматривается дифракционное изображение щели S , ширина изображения определяется шириной одной щели на экране D . Если интерференция рассматривается в белом свете, ширина щелей на экране D выбирается в 2–3 раза меньше расстояния между ними, так что в центральном максимуме видно 5–7 интерференционных полос.

Для более точного измерения смещения полос из-за изменения коэффициента преломления в одном из плеч в интерферометре Релея используют две интерференционные картины. Верхняя часть пучков 1 и 2 проходит через кюветы K с газом. Нижняя часть, проходящая под кюветами, образует в фокальной плоскости объектива O_2 неподвижную интерференционную картину. Для отдельного рассмотрения каждой системы полос (пучки света 1 и 2 параллельны и системы полос в фокальной плоскости совпадают) используют окуляр с цилиндрической линзой, которая пространственно разделяет эти системы полос. При заполнении кювет газами с одинаковыми коэффициентами преломления обе системы полос (верхняя и нижняя) совпадают. Различие коэффициентов преломления газов в кювetaх приводит к смещению верхней системы полос относительно нижней из-за возникновения между лучами 1 и 2 оптической разности хода $\Delta = L(n_2 - n_1)$ (L – длина кювет). По числу полос между центрами обеих картин можно рассчитать изменение коэффициента преломления n .

Зависимость показателя преломления газа от давления и температуры. Воспользуемся известной формулой диэлектрической проницаемости ε для газа невзаимодействующих диполей:

$$\varepsilon = n^2 = 1 + 4\pi N\alpha,$$

где N — концентрация молекул, α — поляризуемость молекулы (в ед. СГС). Эта формула справедлива для разреженных газов, и коэффициент преломления их мало отличается от единицы. Учитывая зависимость давления P газа от температуры $P = Nk_{\text{Б}}T$, где $k_{\text{Б}}$ — константа Больцмана, получим соотношение

$$n - 1 \approx \frac{\alpha}{2k_{\text{Б}}T} P.$$

Тогда для разности показателей преломления $\delta n = n_2 - n_1$, измеряемой с помощью интерферометра Релея, и разности давлений δP , измеряемой с помощью манометра, имеем простое соотношение:

$$\delta n = \frac{\alpha}{2k_B T} \delta P. \quad (2.67)$$

5.2. Интерферометр Жамена

Получить два плеча интерферометра можно делением амплитуды на толстой плоскопараллельной пластине. Большую разность хода можно компенсировать использованием второй такой же пластины (рис. 2.20). Впервые такую интерференцию наблюдал Брюстер. Эти полосы обычно называют **полосами Брюстера**. В быту их можно наблюдать на многих оконных стеклопакетах.

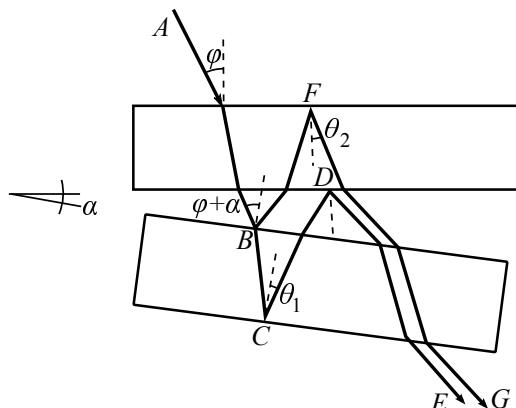


Рис. 2.20. Схема наблюдения полос Брюстера

Пластины располагаются под небольшим углом α . Свет от источника A последовательно проходит через две пластины, частично отражаясь. Интерферируют лучи E и G с минимальной разностью хода, показанные на рис. 2.20. Разность хода этих лучей (без учёта разности хода в воздухе) равна $2nd(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$, где d — толщина пластин, n — их показатель преломления. Обозначим угол падения луча на первую пластину φ , тогда на вторую луч падает под углом $\alpha + \varphi$. Для малых углов условие максимума

$$2nd(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \approx 2dn \left(\frac{\varphi^2}{2n^2} - \frac{(\varphi + \alpha)^2}{2n^2} \right) = \frac{2\alpha d}{n} \left(\varphi + \frac{\alpha}{2} \right) = m\lambda. \quad (2.68)$$

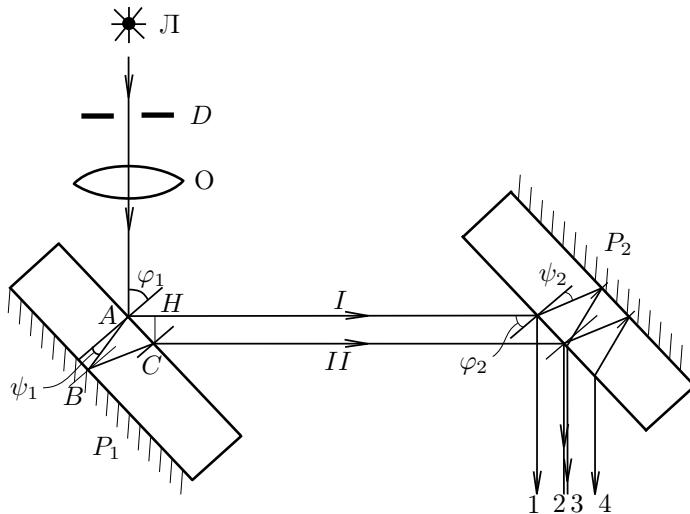


Рис. 2.21. Ход лучей в интерферометре Жамена

В данном случае мы наблюдаем полосы равного наклона. Из (2.68) можно выразить угловое расстояние между полосами:

$$\delta\varphi = \varphi_{m+1} - \varphi_m = \frac{\lambda n}{2\alpha d}.$$

Подобная схема применяется в интерферометре Жамена, где для исключения разности хода в воздухе интерферирующие пучки между пластинами идут перпендикулярно бисекторной плоскости, а сами пластины располагаются под углом 45° к падающему свету (рис. 2.21). Полосы равного наклона будут наблюдаться в этом случае как полосы, параллельные ребру двугранного клина, образованного пластинами (разности хода при прохождении в воздухе не будет). Присутствие лучей 1 и 4 ухудшает чёткость интерференционной картины, поэтому их устраняют с помощью диафрагм.

Так как наблюдаются полосы равного наклона, протяжённый источник располагают в фокусе коллиматора, а полосы наблюдают в телескоп. Для идеальных плоскопараллельных пластин в трубе будет видно геометрическое изображение источника, а на нем будут видны полосы, ширина которых будет зависеть от угла α между пластинами.

При наблюдении в белом свете центральная полоса оказывается ахроматичной; она окружена двумя глубокими минимумами. Если труба наблюдения горизонтальна, нулевая полоса оказывается в центре поля зрения при горизонтальной ориентации клина. При повороте одной из пластин вокруг горизонтальной оси, параллельной оси клина, изменяется ширина интерференционных полос, как в рассмотренной системе полос Брюстера. Если повернуть зеркало вокруг вертикальной оси, меняется ориентация клина, нулевая полоса смещается вверх или вниз.

Расстояние между двумя плечами интерферометра Жамена будет зависеть от толщины пластин, и для достаточно толстых пластин в одно из плеч интерферометра можно поставить кювету с газом, коэффициент преломления которого можно измерить по смещению интерференционных полос. Допустимая клиновидность толстых пластин определится дифракционной расходностью пучка света в каждом плече. Проверить клиновидность пластин можно, уменьшив угол между ними α до нуля. Если при этом в поле зрения будет видно не более двух полос равной толщины, пластины хорошие. При достаточно толстых пластинах (около 2–3 см) в каждое из двух плеч интерферометра можно поставить кюветы с газом (как в интерферометре Релея) для измерения малых изменений коэффициента преломления газов.

5.3. Интерферометр Майкельсона

Схема интерферометра приведена на рис. 2.22. В этом интерферометре когерентные волны получаются методом деления амплитуды при использовании полуоправданного зеркала ПП. Интерференционная картина наблюдается в плоскости экрана Э. Источником света является точка, получающаяся за счёт фокусировки лазерного излучения с помощью дополнительной линзы. В данной схеме интерференции требуется большая временная когерентность, поэтому используется лазерный источник излучения.

Картина интерференции на экране Э может быть построена следующим образом. Отражаясь в зеркалах ПП, З₁ и З₂, источник *S* даёт два изображения *S*₁ и *S*₂ (рис. 2.22). Если зеркало З₂ не перпендикулярно падающему лучу 2, *S*₂ переходит в *S*'₂. То есть *интерференцию на экране можно рассматривать как интерференцию от двух точечных источников*.

Если экран расположен перпендикулярно линии, соединяющей два источника, линиями равной разности фаз будут окружности

$$\sqrt{L^2 + r_n^2} - \sqrt{(L-a)^2 + r_n^2} \approx a + \frac{r^2 a}{2L(L-a)} = \text{const},$$

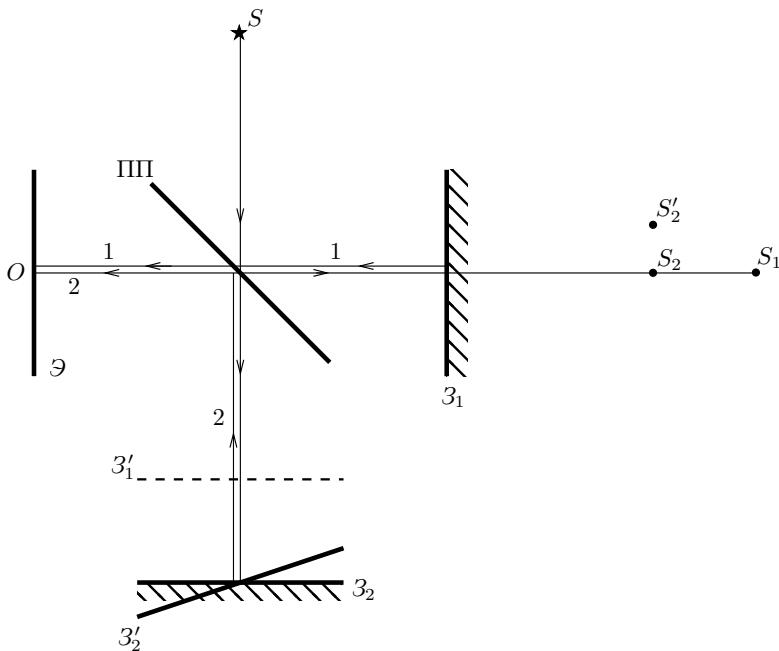


Рис. 2.22. Схема интерферометра Майкельсона

где r_n — радиус окружности, a — расстояние между изображениями источника S , а L — расстояние от S_1 до экрана.

Интенсивность в центре картины ($r = 0$) определяется величиной a , равной разности хода между лучами 1 и 2. Порядок интерференции в центре равен $m_0 = \frac{a}{\lambda}$. Если в центре имеется максимум, тогда радиус n -го интерференционного кольца, отсчитанного от центра, будет определяться формулой

$$r_n \approx \sqrt{\frac{2nL(L-a)}{m_0}}, \quad (2.69)$$

где $n = 0, 1, 2 \dots$. При больших n расстояние между полосами будет равно

$$\Delta r \approx \sqrt{\frac{L(L-a)}{2nm_0}}.$$

При малом повороте зеркала Z_2 изображение источника S_2 переходит в S'_2 . Если от центра экрана изображения источников будут видны под углом β , то в центре будут видны полосы, ширина которых согласно (2.25) приближенно равна λ/β .

По интерференционной картине можно определять длину волны источника света. При движении зеркала Z_1 к экрану (зеркало Z_2 установлено без наклона) разность хода со временем уменьшается, интерференционные кольца стягиваются к центру, как бы исчезая в нём. При смещении зеркала на расстояние l в центре исчезнет $N = 2\frac{l}{\lambda}$ колец. При равномерном перемещении зеркала, если за время T зарегистрировано исчезновение N колец, скорость перемещения зеркала равна

$$v = \frac{\lambda N}{2 T}. \quad (2.70)$$

Для более точного рассмотрения необходимо воспользоваться релятивистскими формулами для эффекта Доплера. Учтём, что в системе координат, связанной с зеркалом Z_1 , движущимся со скоростью v , частота излучения источника ω_1 отличается от исходной ω_0 , так что $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$. Эта волна отражается от неподвижного зеркала и попадает на движущийся (в системе зеркала) приёмник. Частота приёма будет равна $\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \omega_0 \frac{c+v}{c-v}$. В центре экрана колебания ω_0 и ω_2 складываются, и регистрируемая интенсивность меняется с частотой $\Delta\omega = \frac{2v}{c-v}\omega_0$. Число периодов колебаний за время t равно

$$N = \frac{\Delta\omega t}{2\pi} = 2 \frac{vt}{\lambda} \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}.$$

Для небольших скоростей эта формула совпадает с (2.70).

5.4. Кольца Ньютона

Этот классический опыт используется для определения радиуса кривизны сферических поверхностей линз. В этом опыте наблюдается интерференция волн, отражённых от границ тонкой воздушной пролежки, образованной сферической поверхностью линзы и плоской стеклянной пластиной. При нормальном падении света (рис. 2.23) интерференционные полосы локализованы на сферической поверхности и являются *полосами равной толщины*.

Геометрическая разность хода между интерферирующими лучами равна удвоенной толщине воздушного зазора $2d$ в данном месте. Для точки на сферической поверхности, находящейся на расстоянии r от оси системы, имеем $r^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd - d^2$, где R — радиус кривизны сферической поверхности (рис. 2.23).

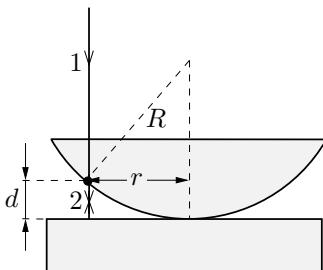


Рис. 2.23. Схема наблюдения колец Ньютона

При $R \gg d$ получим $d = r^2/2R$. С учётом изменения фазы на π при отражении волны от оптически более плотной среды (на границе воздух—стекло) получим *оптическую разность хода* интерферирующих лучей:

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

Условие интерференционного минимума $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), откуда получаем для радиусов тёмных колец

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}. \quad (2.71)$$

Аналогично для радиусов r'_m светлых колец

$$r'_m = \sqrt{(2m-1)m\lambda R/2}. \quad (2.72)$$

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. Гл. III.
2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 3, гл. 7.
3. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. IV, VI, VII.
4. Бутиков Е.И. Оптика. — М.: Высшая школа, 1986. Гл. 5.
- 5*. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. Гл. 7, 10.

Работа 4.2.1

Кольца Ньютона

Цель работы: познакомиться с явлением интерференции в тонких плёнках (полосы равной толщины) на примере колец Ньютона и с методикой интерференционных измерений кривизны стеклянной поверхности.

В работе используются: измерительный микроскоп с опак-иллюминатором; плосковыпуклая линза; пластинка из чёрного стекла; ртутная лампа ДРШ; щель; линзы; призма прямого зрения; объективная шкала.

В нашей установке кольца Ньютона образуются при интерференции световых волн, отражённых от границ тонкой воздушной прослойки, заключённой между выпуклой поверхностью линзы и плоской стеклянной пластинкой.

Линии постоянной разности хода представляют собой концентрические кольца с центром в точке соприкосновения. Радиусы тёмных и светлых колец определяются формулами (2.71) и (2.72) соответственно. Для протяжённого источника линии равной толщины локализованы на поверхности линзы, если пластинка лежит на линзе, и вблизи поверхности линзы, если линза лежит на пластинке, как в нашем случае. Наблюдение ведётся в отражённом свете.

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Опыт выполняется с помощью измерительного микроскопа. На столике микроскопа помещается держатель с пластинкой чёрного стекла. На пластинке лежит исследуемая линза.

Источником света служит ртутная лампа, находящаяся в защитном кожухе. Для получения монохроматического света применяется призменный монохроматор, состоящий из конденсора K , коллиматора (щель S и объектив O) и призмы прямого зрения Π . Эти устройства с помощью рейтеров располагаются на оптической скамье. Свет от монохроматора попадает на опак-иллюминатор (ОИ), расположенный между окуляром и объективом микроскопа — специальное устройство для освещения объекта при работе в отражённом свете. Внутри опак-иллюминатора находится полупрозрачная пластинка P , наклоненная под углом 45° к оптической оси микроскопа. Свет частично отражается от этой пластинки, проходит через объектив микроскопа и попадает на исследуемый объект. Пластинка может поворачиваться вокруг горизонтальной оси x , а опак-иллюминатор — вокруг вертикальной оси.

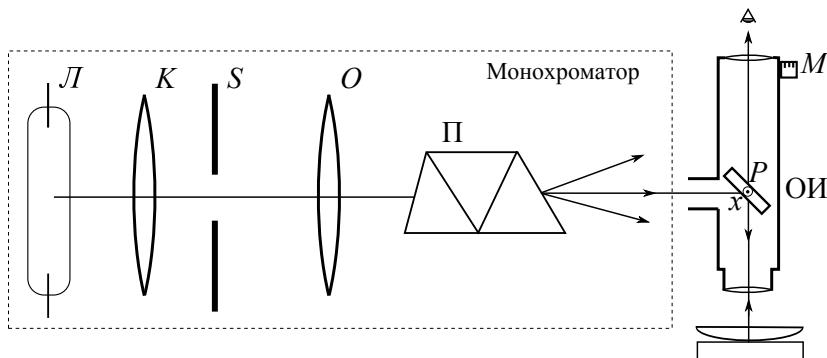


Рис. 1. Схема установки для наблюдения колец Ньютона

Столик микроскопа может перемещаться в двух взаимно перпендикулярных направлениях с помощью винтов препаратороводителя. Отсчетный крест окулярной шкалы перемещается перпендикулярно оптической оси микроскопа с помощью микрометрического винта.

Оптическая схема монохроматора позволяет получить в плоскости входного окна опак-иллюминатора достаточно хорошо разделённые линии спектра ртутной лампы. Изображение щели S фокусируется на поверхность линзы объективом микроскопа, и в том же месте находится плоскость наблюдения микроскопа, т. е. точка источника и точка наблюдения интерференции совпадают. Картина интерференции как и в случае расположения пластиинки сверху, так и в данном случае не зависит от коэффициента преломления линзы и определяется величиной зазора между нижней поверхностью линзы и стеклянной пластиинкой.

Рекомендуется сначала настроить микроскоп на кольца Ньютона в белом свете (свете ртутной лампы), а затем после выделения монохроматором зелёной линии провести измерения в монохроматическом свете.

Настройка микроскопа. Включив ртутную лампу, располагают перед окном лампы конденсор, а остальные элементы схемы временно убирают с оптической скамьи. Осветив входное окно опак-иллюминатора, располагают исследуемую линзу на столике микроскопа.

Глядя на линзу сбоку невооружённым глазом, поворачивают опак-иллюминатор вокруг вертикальной оси, а полуупрозрачную пластиинку P — вокруг горизонтальной оси (рис. 1), пока на оправе линзы (или

листе бумаги, положенном на линзу) не появится яркое световое пятно. Перемещением тубуса микроскопа вдоль вертикальной оси фокусируют пятно на оправу линзы; при помощи препаратороводителей подводят точку соприкосновения линзы к оптической оси микроскопа.

Глядя в окуляр, вращением пластинки P подводят световое пятно к центру поля зрения. Слегка перемещая тубус микроскопа по вертикали, добиваются появления чётких колец Ньютона в поле зрения микроскопа. Крест нитей должен проходить через середину тёмного пятна.

Настройка монохроматора. С помощью конденсора освещают щель S светом лампы L . Располагают объектив O на расстоянии от щели, близком к фокусному, и размещают в промежутке между объективом и микроскопом призму прямого зрения. При этом в плоскости опак-иллюминатора появляются достаточно хорошо разделённые линии спектра ртутной лампы. Переход от одной линии к другой осуществляется путём перемещения микроскопа, яркость линий меняется при перемещении конденсора поперёк оптической оси при помощи специального винта. При измерении диаметров колец удобно использовать яркую зелёную линию ртути.

Передвигая микроскоп как целое и поворачивая его вокруг вертикальной оси, добиваются наибольшей освещённости поля зрения. Перемещение объектива O вдоль оптической оси также влияет на освещённость поля зрения.

Определение радиуса кривизны линзы. Для определения радиуса кривизны линзы измеряют диаметры колец; устанавливают перекрестье на середину какого-либо достаточно удалённого от центра, но ещё отчётливо видимого тёмного кольца и снимают отсчёт по окулярной шкале: целые деления отсчитываются слева от риски, проходящей через окулярную шкалу, десятые и сотые доли деления — по окулярному микрометрическому винту M .

Перемещая перекрестье, последовательно устанавливают его на середины тёмных колец и записывают соответствующие показания окулярной шкалы и микрометра. После прохождения через центральное пятно продолжают измерения, записывая возрастающие номера колец и координаты их диаметров. Для устранения ошибок, возникающих из-за люфта в винте, перекрестье всегда следует подводить к кольцу с одной стороны. Цену одного деления окулярной шкалы определяют сравнивая её с изображением эталонной (объектной) шкалы. По разности отсчётов определяют диаметры, а затем и радиусы тёмных колец. Аналогичная серия измерений выполняется для светлых колец Ньютона.

При обработке результатов измерений удобно пользоваться графическим методом. Проще всего построить графики зависимости r_m^2 и $(r'_m)^2$ от номера m кольца. Согласно теории (формулы (2.71) и (2.72)) эти графики должны представлять собой прямые линии, первая из которых проходит через начало координат. Зная длину волны λ , по наклону прямых можно рассчитать радиус R кривизны линзы. По тому, насколько близко экспериментальные точки группируются вдоль прямой, можно судить о качестве аппаратуры и величине ошибок. Деформация линзы и стеклянной пластинки в месте их соприкосновения может приводить к отступлению от прямой зависимости при малых m .

Наблюдение «биений». При освещении системы светом, содержащим две спектральные компоненты, наблюдается характерная картина биений: чёткость интерференционных колец периодически изменяется. Это объясняется наложением двух систем интерференционных колец, возникающих для разных длин волн λ_1 и λ_2 . Чёткие кольца в результирующей картине образуются при наложении светлых колец на светлые и тёмные на тёмные. Размытые кольца получаются при наложении светлых колец одной картины на тёмные кольца другой.

Нетрудно рассчитать период возникающих биений. Пусть в промежутке между двумя центрами соседних чётких участков укладывается Δm колец для спектральной линии с длиной волны λ_1 . Тогда в этом промежутке должно располагаться $(\Delta m + 1)$ колец для спектральной линии с длиной волны λ_2 (при $\lambda_2 < \lambda_1$). Получение окончательной формулы для Δm мы предоставляем читателю.

Для освещения входного окна опак-иллюминатора сразу двумя спектральными линиями (например, жёлтой и зелёной) можно расфокусировать монохроматор, смешав объектив O и призму.

Если смешать две линии не удаётся, то, убрав призму прямого зрения, можно объективом O сфокусировать на окно опак-иллюминатора белый свет ртутной лампы. Результаты измерений не изменятся, так как остальные линии в спектре ртутной лампы заметно слабее жёлтой и зелёной.

Калибровка окулярной шкалы. Для определения цены деления окулярной шкалы сверху на линзу кладут калиброванную объективную шкалу. Плавно поднимая тубус, находят изображение миллиметровой шкалы и совмещают его с окулярной шкалой.

Объективная шкала размером 1 мм разбита на 100 делений. Используя всё поле зрения микроскопа, отмечают, какие из самых дальних штрихов объективной шкалы лучше всего совпадают со штрихами окулярной шкалы. Можно использовать для калибровки окулярный микрометр, совмещая перекрестие с началом и концом объективной шкалы.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается, измерив диаметры колец Ньютона, определить радиус кривизны линзы; исследовать картину биений и рассчитать разность длин волн между жёлтой и зелёной спектральными линиями ртути.

При выполнении работы руководствуйтесь дополнительным описанием, расположенным на установке.

I. Измерения

1. Включите ртутную лампу и настройте микроскоп на кольца Ньютона в белом свете.
2. Настройте монохроматор, фокусируя на входном окне опакиллюминатора изображение зелёной линии ртути.
3. Вращая окулярный микрометрический винт, убедитесь, что перекрестье проходит через центр тёмного пятна и что поле зрения освещено симметрично слева и справа от центра.

Определите координаты диаметров тёмных и светлых колец (удобно координаты диаметров соответствующих колец записывать друг под другом).

Оцените диаметр пятна соприкосновения линзы со стеклянной пластинкой.

4. Проведите наблюдение биений для жёлтой и зелёной линий; на месте оцените разность длин волн и сопоставьте результат с табличным.
5. Прокалибруйте окулярную шкалу, используя эталонную объективную шкалу.

II. Обработка результатов

6. Рассчитайте цену деления окулярной шкалы и оцените погрешность результата.
7. Найдите разность длин волн жёлтой и зелёной линий ртути, полученную при наблюдении биений. Сравните результат с табличным.
8. Рассчитайте радиусы тёмных и светлых колец и постройте на одном листе графики зависимости r_m^2 и $(r'_m)^2$ от номера кольца m . Укажите на графике границы тёмного пятна. Какой из графиков должен проходить через начало координат?

Деформация линзы и стеклянной пластиинки в месте их соприкосновения может приводить при малых m к отступлению от формул (2.71) и (2.72). Меньше всего искажены деформацией кольца с большими номерами. При наличии искажений прямая, проведённая через точки, соответствующие слишком малым m , не пройдёт через начало координат.

9. Зная длину волны λ , по наклону прямых (с учётом калибровки) рас-
считайте радиус R кривизны линзы и оцените погрешность результата.

Контрольные вопросы

1. Почему в центре колец Ньютона в отражённом свете расположено тёмное пятно?
2. Как расположены кольца Ньютона в проходящем свете?
3. Почему ширина кольца убывает с увеличением порядка?
4. Почему при расчёте интерференционной картины не учитывают отражение от передней (плоской) поверхности линзы?
5. Выведите формулу, связывающую период биений, выраженный в числе ко-
лец, с длинами волн спектральных линий.
6. Почему видность колец увеличивается при диафрагмировании пучка перед
опак-иллюминатором?
- 7.* Почему интерференционные кольца больших номеров кажутся размытыми?

Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. IV; VI, § 26.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005.
Гл. III.
- 3.* Дитчёрн Р. Физическая оптика. — М.: Наука, 1965. Гл. V.
- 4.* Захарьевский А.Н. Интерферометры. — М.: Оборонгиз, 1952. § 7.

Работа 4.2.2

Интерферометр Жамена

Цель работы: знакомство с техникой интерференционных измере-
ний показателей преломления газов с помощью интерферометра Жа-
мена.

В работе используются: интерферометр Жамена; газовая кювета;
осветитель; зрительная труба; сильфон; баллон с углекислым газом;
манометр; краны; светофильтр.

Принципиальная схема интерферометра Жамена описана в п. 5.2
введения к разделу.

Экспериментальная установка. В нашем интерферометре свет от
лампы накаливания проходит коллиматорный объектив и поворотную
призму, а затем падает на пластинку P_1 под углом 45° к ней (рис. 1).
Пластины P_1 и P_2 закреплены на панели, ниже которой имеются два
установочных винта, позволяющих в небольших пределах поворачивать

зеркала. При этом пластина P_1 может поворачиваться вокруг горизонтальной оси (изменение ширины полос), а пластина P_2 — вокруг вертикальной оси (изменение положения полос). Между пластинами на пути лучей I и II расположена кювета длины ℓ , состоящая из двух одинаковых камер, закрытых с торцов плоскопараллельными стеклянными пластинками.

В одну из камер вводится исследуемый газ, а вторая заполнена воздухом при атмосферном давлении. При этом разность хода Δ , вызванная разностью показателей преломления газов δn , приводит к сдвигу интерференционных полос:

$$\Delta = \delta n \cdot \ell. \quad (1)$$

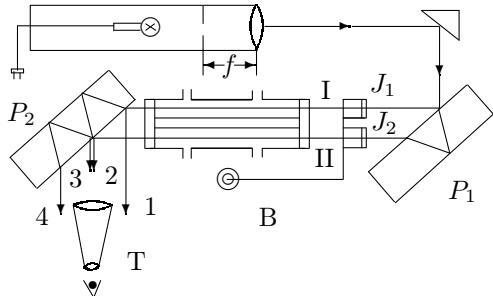


Рис. 1. Экспериментальная установка

Сдвиг на одну полосу соответствует дополнительной разности хода $\Delta = \lambda$. Определив число полос m , на которое сместилась картина, можно рассчитать

$$\delta n = \frac{\Delta}{\ell} = m \frac{\lambda}{\ell}. \quad (2)$$

На пути лучей I и II расположен *компенсатор Жамена*, состоящий из двух одинаковых плоскопараллельных стеклянных пластинок J_1 и J_2 (рис. 1). Если обе пластины установлены под одинаковым углом к лучам, то и оптическая длина пути в них для обоих лучей оказывается одинаковой. Поворот одной из пластинок вокруг горизонтальной оси вызывает увеличение или уменьшение оптической длины пути соответствующего луча. Это позволяет скомпенсировать разность хода, возникающую в камерах. Для точного отсчета угла поворота одна из пластинок снабжена рычагом, конец которого смещается при помощи микрометрического винта В. Пластины компенсатора ставятся под углом 45° к горизонту, что позволяет использовать линейную экстраполяцию при измерениях. Смещение полос можно наблюдать через зрительную трубу Т. Расчет величины смещения приведен в п. 5.2.

Интерферометр Жамена можно применять для измерения небольших изменений показателей преломления жидкостей или газов, а также для определения примесей различных газов в воздухе (например, для измерения концентрации рудничного газа в шахте).

Показатель преломления n исследуемого газа определяется путём сравнения с воздухом при атмосферном давлении:

$$n = n_{\text{возд}} + \frac{\Delta}{\ell}. \quad (3)$$

Для определения величины Δ компенсатор следует прокалибровать.

Юстировка интерферометра. Перед началом работы камеру кюветы продувают воздухом, чтобы удалить из неё остатки углекислого газа.

Включают осветитель и с помощью экрана проверяют ход лучей I и II между зеркалами P_1 и P_2 : оба луча должны проходить через камеры кюветы и пластинки компенсатора, установленные параллельно друг другу, и падать на пластину P_2 . На выходе из пластины P_2 должны быть видны три пятна (рис. 1): крайние соответствуют лучам 1 и 4, среднее — лучам 2 и 3.

Для получения интерференционных полос в поле зрения трубы необходимо, чтобы ребро двугранного угла, образованного плоскостями пластин P_1 и P_2 , было приблизительно горизонтальным. К такому расположению можно прийти путём вращения пластины P_2 относительно вертикальной оси. Следует иметь в виду, что используемые в интерферометрах в качестве зеркал стеклянные пластины не всегда оказываются достаточно хорошо изготовленными. Это приводит к некоторым особенностям в расположении интерференционных полос. В частности, полосы могут оказаться несколько наклонёнными к горизонтали, и этот наклон полос не удаётся устраниТЬ поворотом пластины P_1 вокруг горизонтальной оси.

Далее установочным винтом пластины P_1 регулируют ширину полос.

Калибровка компенсатора. Отъюстировав интерферометр, с помощью установочного винта пластиинки P_2 совмещают нулевую полосу с перекрестием нитей в окуляре зрительной трубы.

Замечают нулевое деление микрометрического винта компенсатора. Вращая винт компенсатора, последовательно совмещают с перекрестием первую, вторую и т.д. полосы и записывают отсчёты. Градуировку следует проводить выделяя узкий интервал длин волн, для чего на пути лучей из осветителя устанавливается светофильтр. Результаты изображаются на градуировочном графике $z = f(m)$, где z — отсчёт по шкале компенсатора. График позволит определять разность хода лучей в интерферометре по шкале компенсатора.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается отыюстировать интерферометр; прокалибровать компенсатор, используя светофильтр; исследовать смещение интерференционных полос а) при изменении давления воздуха в одной из камер, б) при заполнении одной из камер углекислым газом при атмосферном давлении. По результатам измерений рассчитываются показатели преломления воздуха и углекислого газа при нормальных условиях и средняя поляризуемость молекул воздуха.

I. Юстировка прибора

1. Ознакомьтесь с устройством газовой системы (см. описание экспериментальной установки). Уравняйте давление в обеих камерах кюветы: первую соедините с атмосферой, открыв краны K_1 и K_2 , а вторую (с открытым концом) продуйте с помощью груши Γ , чтобы удалить из неё остатки углекислого газа (кран K_0 в положении 3).
2. Убедитесь, что пластиинки J_1 и J_2 компенсатора установлены параллельно друг другу (на глаз).
3. Включите осветитель и с помощью экрана (листа белой бумаги) убедитесь, что оба луча I и II проходят через входные окна кюветы и попадают на пластиину P_2 . Световые пятна на второй пластиине должны быть правильной круглой формы; если пятна имеют несимметричную форму, обратитесь за помощью к лаборанту.

Рассматривая глазом лучи, отражённые от пластины P_2 , убедитесь, что видны три пятна: ближе к камере расположено пятно 1 (слабое — луч отражается от внешних поверхностей пластиин), дальше всех от камеры — пятно 4 (яркое, т.к. оба раза луч отражается от зеркальных поверхностей) и центральное пятно средней яркости, образованное наложением лучей 2 и 3.

Поочерёдно закрывая лучи I и II, убедитесь в том, что яркость среднего пятна меняется незначительно.

4. Установите зрительную трубу так, чтобы лучи 2 и 3 попали в объектив. Настройте окуляр зрительной трубы на чёткое видение измерительного креста.
5. Настройте интерференционную картину: для этого медленно поворачивая пластиину P_2 вокруг вертикальной оси с помощью установочного винта, добейтесь появления интерференционных полос в поле зрения трубы; убедитесь, что при этом наклон полос практически не изменяется. Ориентация полос в пространстве существенно зависит от качества (параллельности) пластиин.

Установочным винтом пластиинки P_1 задайте ширину полос порядка 1/10 поля зрения.

Во всех дальнейших опытах установочные винты пластинок P_1 и P_2 трогать не следует.

II. Калибровка компенсатора

6. Установите начало отсчёта, совместив перекрестье окуляра с нулевой полосой с помощью винта компенсатора. Из-за дисперсии стекла чёткой нулевой полосы нет, но за нуль можно принять один из самых сильных максимумов.

Повторите настройку нуля несколько раз, вращая винт в одну сторону, чтобы исключить люфт.

7. Прокалибруйте компенсатор в единицах λ , выделив узкий интервал длин волн с помощью светофильтра. Для этого наденьте на оправу окуляра красный светофильтр и, последовательно совмещая первую, вторую, ... m -ю подвижные полосы с перекрестием, запишите соответствующие отсчёты z_m по микрометрическому винту компенсатора. При смещении на одну полосу разность хода меняется на длину волны.

При калибровке используйте все полосы, наблюдаемые в окуляре сверху и снизу от нулевой полосы (со светофильтром их больше двадцати).

8. Запишите длину кюветы ℓ , указанную на установке, а также длину волны λ и полосу пропускания светофильтра, указанные на его оправе.

III. Зависимость δn от P для воздуха

9. Убедитесь, что давление воздуха в обеих камерах кюветы атмосферное (краны K_1 и K_2 открыты); установите шток сильфона приблизительно на середину его длины и соедините первую камеру от атмосферы, перекрыв кран K_1 .
10. Изменяя давление с помощью сильфона и совмещая нулевую полосу с перекрестием, снимите зависимость показаний компенсатора z от перепада давлений ΔP . Если давление «плывёт», фиксируйте величину ΔP сразу после совмещения перекрестия с нулевой полосой.

Давление следует изменять в обе стороны от атмосферного в пределах рабочей области манометра (± 1000 мм вод. ст.).

IV. Сравнение показателей преломления воздуха и углекислого газа при атмосферном давлении

11. Соедините первую камеру кюветы с атмосферой, открыв кран K_1 . Заполните углекислым газом камеру с открытым концом. Для этого 3–4 раза плавно, чтобы избежать резкого изменения температуры газа при расширении, переведите кран K_0 из положения 1 в положение 2.

12. Совместите нулевую полосу с перекрестием. Слишком малое смещение картины (< 25 полос для камеры длиной 10 см) означает, что камера заполнена смесью углекислого газа с воздухом. Если повторная прокачка камеры не помогает, обратитесь за помощью к лаборанту.

Снимите зависимость показаний компенсатора от времени, раз в минуту возвращая нулевую полосу к перекрестию, и оцените время установления равновесия. Повторите измерения, стараясь заполнять кювету как можно более плавно.

13. Определите температуру T и давление P по показаниям лабораторного термометра и барометра.

V. Обработка результатов

- Постройте калибровочный график $z_m = f(m)$ — зависимость отсчёта по компенсатору от номера совмещённой полосы.
- Постройте график $z = f(\Delta P)$ (от +1000 до -1000 мм H_2O). Определите угол наклона прямой; с помощью калибровочного графика и формулы (2) перейдите от делений компенсатора Δz к величине δn ; рассчитайте сначала среднюю поляризумость молекулы воздуха, а затем — показатель преломления воздуха в условиях опыта.

Пересчитайте показатель преломления к нормальным условиям и сравните результат с табличным.

- Молекулу газа можно представить как металлический шарик в однородном электрическом поле. Оцените радиус молекулы азота по результатам измерений.
- Рассчитайте показатель преломления n для углекислого газа в условиях опыта по формуле (3), взяв показатель преломления воздуха, рассчитанный по результатам эксперимента.

Пересчитайте n к нормальным условиям и сравните результат с табличным.

- Оцените экспериментальные погрешности.
- Оцените интервал δn , доступный для измерений, исходя из возможностей компенсатора: минимальная величина δn , доступная для измерений, определяется точностью компенсатора, максимальная — диапазоном его работы.

Контрольные вопросы

- Почему пластинки P_1 и P_2 интерферометра Жамена должны быть достаточно толстыми (не менее 2–3 см)?
- Могут ли эти пластинки сильно отличаться по толщине?
- Объясните, почему увеличивается число наблюдаемых интерференционных полос, если на пути лучей из осветителя установлен светофильтр.

4.* Покажите, что ширина наблюдаемых интерференционных полос пропорциональна отношению λ/β .

Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. IV, гл. VI, § 25; гл. VII, § 28.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. Гл. III.
- 3.* Захарьевский А.Н. Интерферометры. — М.: Оборонгиз, 1952. § 10.

Работа 4.2.3

Интерферометр Релея

Цель работы: ознакомление с интерференцией на двух щелях, устройством и принципом действия интерферометра Релея и с его применением для измерения показателей преломления газов.

В работе используются: технический интерферометр ИТР-1, светодиодный фильтр, баллон с углекислым газом, сильфон, манометр, краны.

Принципиальная схема устройства интерферометра Релея описана в п. 5.1 введения к разделу.

Экспериментальная установка. Интерферометр Релея — прибор для измерения разности показателей преломления — основан на явлении дифракции света на двух параллельных щелях. Схема прибора представлена на рис. 1 в вертикальной и горизонтальной проекциях. Лампа накаливания L с помощью конденсора K ярко освещает узкую входную щель S , расположенную в фокусе объектива O_1 (фокусное расстояние f). Коллиматор, состоящий из щели S и объектива O_1 , посылает параллельный пучок на диафрагму D с двумя вертикальными щелями (расстояние между щелями d). Свет после двойной щели проходит кювету L , состоящую из двух одинаковых стеклянных камер, в которые вводятся исследуемые газы (в нашей установке — CO_2 или воздух). Кювета занимает только верхнюю часть пространства между объективами O_1 и O_2 , длина кюветы ℓ . За кюветой расположены две стеклянные пластиинки J (компенсатор Жамена, см. ниже) и пластинка Π .

Интерференционная картина (картина дифракции на двух щелях), наблюдаемая в фокальной плоскости F объектива O_2 , представляет собой две системы равноотстоящих полос, параллельных щелям: верхняя

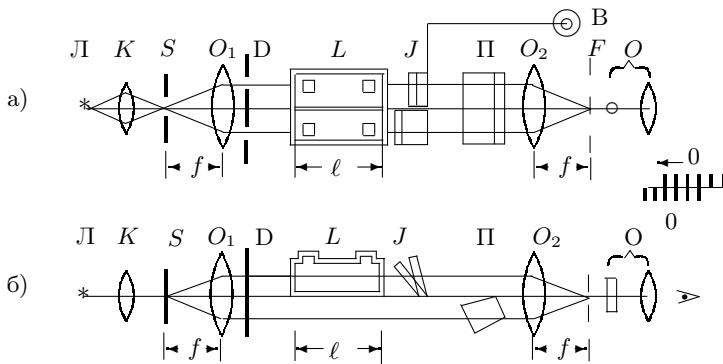


Рис. 1. Устройство интерферометра Релея:
а) вид сверху; б) вид сбоку

(подвижная) образована лучами, прошедшими через кювету, нижняя (неподвижная) — лучами, прошедшими под кюветой. Обе системы интерференционных полос разграничены при помощи пластины Π тонкой разделительной линией. Для наблюдения двух систем полос в окуляре применена цилиндрическая линза диаметром 2,2 мм, ось которой расположена вертикально. Вторая («глазная») линза окуляра — обычная сферическая. Она служит для подстройки чёткости картины под глаз наблюданеля.

При малых дифракционных углах $\varphi = \lambda/d$ расстояние между соседними светлыми (или тёмными) полосами δy зависит от длины волны λ , фокусного расстояния f объектива O_2 и расстояния между дифракционными щелями d :

$$\delta y = f \frac{\lambda}{d}. \quad (1)$$

В техническом интерферометре ИТР-1, который используется в нашей работе, $f \approx 20$ см, $d \approx 1,5$ см, и δy оказывается порядка 10^{-3} см. Для наблюдения таких мелких интерференционных полос требуется окуляр с большим увеличением ($\gamma \approx 150^\times$). Короткофокусная цилиндрическая линза окуляра O сильно растягивает интерференционную картину по горизонтали, не меняя её вертикальных размеров и тем самым мало ослабляя освещённость полос. Изображение светящейся точки в фокальной плоскости объектива O_2 при рассматривании через цилиндрическую линзу имеет вид светлой вертикальной линии, длина которой определяется диаметром объектива. Поэтому распределение освещённости в нижней части светлой линии зависит от действия нижней ча-

сти объектива, а в верхней части линии — от верхней части объектива. Таким образом, наблюдатель видит две системы полос: верхняя образована лучами, прошедшими через кюветы, нижняя — лучами, прошедшими под кюветами.

При заполнении камер газами с одинаковым показателем преломления n обе системы полос совпадают. Оптическая разность хода $\Delta = \delta n \cdot l$, возникающая при прохождении света через камеры с разными газами $\delta n = n_2 - n_1$, ведёт к поперечному смещению верхней дифракционной картины относительно неподвижной нижней. Смещение на одну полосу соответствует дополнительной разности хода $\Delta = \lambda$. Просчитав число полос m между центрами обеих картин, можно рассчитать

$$\delta n = \frac{\Delta}{l} = m \frac{\lambda}{l}. \quad (2)$$

Для точного измерения разности хода используется компенсатор Жамена (J на рис. 1) — устройство, которое позволяет вернуть подвижную систему полос к первоначальному положению, т. е. вновь совместить обе системы полос. В установке компенсатор Жамена расположен за кюветой. Он состоит из двух одинаковых плоскопараллельных стеклянных пластинок, установленных на пути лучей под углом 45° к горизонтали. Вращение одной из пластин вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной оси системы, вызывает увеличение или уменьшение оптической длины пути соответствующего луча. Ось вращения снабжена рычагом, конец которого смещается при помощи микрометрического винта B .

Интерферометр Релея можно применять для измерения небольших изменений показателей преломления жидкостей или газов, а также для определения примесей различных газов в воздухе (например, для измерения концентрации рудничного газа в шахте). Показатель преломления n исследуемого газа определяется путём сравнения с воздухом при атмосферном давлении:

$$n = n_{\text{возд}} + \frac{\Delta}{l}. \quad (3)$$

Для определения величины Δ компенсатор следует прокалибровать.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать изменение показателя преломления воздуха при изменении давления и определить разность показателей преломления воздуха и углекислоты при атмосферном давлении. По результатам измерений рассчитываются показатели преломления воздуха и углекислого газа при нормальных условиях.

I. Подготовка к работе

1. Включите осветитель интерферометра в сеть и убедитесь, что в поле зрения окуляра видны две системы интерференционных полос. Если картина недостаточно яркая — обратитесь за помощью к лаборанту.
2. Ознакомьтесь с устройством газовой системы (см. описание экспериментальной установки). Уравняйте давление в обеих камерах кюветы: первую соедините с атмосферой, открыв краны K_1 и K_2 , а вторую (с открытым концом) продуйте с помощью груши Γ , чтобы удалить из неё остатки углекислого газа (кран K_0 в положении 3).

II. Калибровка компенсатора

3. Уравняв давление в камерах, подождите 2–3 минуты, пока выровняются температуры. Установите начало отсчёта, совместив с помощью компенсатора обе системы полос. Установка нуля в белом свете — совмещение центральных полос — облегчается тем, что боковые полосы окрашены. Совместите (приблизительно) боковые полосы с симметричной окраской, а затем (как можно точнее) — центральные. Один оборот винта (100 делений) соответствует одному делению вертикальной шкалы компенсатора. Для удобства отсчёта используется лупа.

Повторите опыт несколько раз, вращая винт в одну сторону, чтобы исключить люфт.

4. Прокалибруйте компенсатор в единицах λ , выделив узкий интервал длин волн с помощью светофильтра. При калибровке используйте все полосы, наблюдаемые в окуляре слева и справа от нулевой полосы (со светофильтром их больше двадцати).
5. Запишите длину кюветы ℓ , указанную на установке, а также длину волн λ и полосу пропускания светофильтра, указанные на его оправе.

III. Зависимость Δn от P для воздуха

6. Убедитесь, что давление воздуха в обеих камерах кюветы атмосферное (см. п. 2). Установите сильфон в среднее положение и отсоедините первую камеру от атмосферы, перекрыв кран K_1 .
7. Изменяя давление с помощью сильфона и совмещая нулевые полосы, снимите зависимость показаний компенсатора z от перепада давлений ΔP . Если давление «плывёт», фиксируйте величину ΔP сразу после совмещения нулевых полос.

Давление следует изменять в обе стороны от атмосферного в пределах рабочей области манометра (± 1000 мм вод. ст.).

IV. Сравнение показателей преломления воздуха и углекислого газа при атмосферном давлении

8. Соедините первую камеру кюветы с атмосферой, открыв кран K_1 , и отключите манометр, закрыв кран K_2 . Заполните углекислым газом камеру с открытым концом. Для этого 3–4 раза плавно, чтобы избежать резкого изменения температуры газа при расширении, переведите кран K_0 из положения 1 в положение 2.
9. Совместите нулевые полосы. Небольшое смещение подвижной картины (< 25 полос для камеры длиной 10 см) означает, что камера заполнена смесью углекислого газа с воздухом. Если повторная прокачка камеры не помогает, обратитесь за помощью к лаборанту.

Снимите зависимость равновесного положения компенсатора от времени, раз в минуту совмещая нулевые полосы, и оцените время установления равновесия. Повторите измерения, стараясь заполнять кювету как можно более плавно.

10. Определите температуру T и давление P по показаниям лабораторного термометра и барометра.

V. Обработка результатов

1. Постройте калибровочный график, отложив по оси абсцисс номер совмещённой полосы m , а по оси ординат величину z (отсчёт по компенсатору). Проверьте, сохраняется ли линейность графика вдали от нулевого положения компенсатора.
2. Постройте график зависимости показателя преломления δn от разности давлений ΔP (от +1000 до –1000 мм вод. ст.). Величину δn рассчитайте по формуле (2) с помощью калибровочного графика.

По углу наклона рассчитайте среднюю поляризумость молекул воздуха, а затем — показатель преломления воздуха в условиях опыта.

Пересчитайте показатель преломления к нормальным условиям и сравните результат с табличным.

3. Рассчитайте показатель преломления для углекислого газа в условиях опыта по формуле (3), взяв показатель преломления воздуха, рассчитанный по результатам эксперимента.

Пересчитайте $n(\text{CO}_2)$ к нормальным условиям и сравните результат с табличным.

4. Оцените экспериментальные погрешности.
5. Оцените интервал δn , доступный для измерений, исходя из возможностей компенсатора: минимальная величина δn , доступная для измерений, определяется точностью компенсатора, максимальная — диапазоном его работы.

Контрольные вопросы

1. Объясните, почему при поочерёдном перекрывании щелей D наблюдаемая дифракционная картина не смещается.
2. Почему ширина щели S коллиматора должна быть достаточно малой? Оцените максимальный размер этой щели, если известны фокус коллиматора и расстояние между щелями.
- 3.* Будет ли наблюдаваться чёткая нулевая полоса, если исследуемое вещество обладает заметной дисперсией $n = n(\lambda)$? Сделайте соответствующие оценки.

Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. IX, §§ 44, 45.
2. Бутиков Е.И. Оптика. — М.: Высшая школа, 1986. §5.6.
3. Горелик Г.С. Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959. Гл. IX.
4. Кингспен А.С., Ложшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингспена. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 3, гл. 7, § 7.8.
- 5.* Захарьевский А.Н. Интерферометры. — М.: Оборонгиз, 1952. §§ 11, 12.

Работа 4.2.4

Интерферометр Майкельсона

Цель работы: Изучение двухлучевой интерференции, определение длины волны, проверка эффекта Доплера.

В работе используются: интерферометр Майкельсона с подвижным зеркалом, лазер, фотоумножитель, частотомер, линзы.

Интерферометр Майкельсона находит применение в спектрометрах с высоким разрешением, для абсолютных и относительных измерений длин с точностью 0,005 мкм. Принципиальная схема интерферометра описана в п. 5.3 введения к разделу.

Оптическая схема интерферометра приведена на рис. 1. Источником света служит лазер ЛГ. Лазер излучает узкий пучок света, который фокусируется линзой L_1 . В фокусе этой линзы возникает точечный источник света S . Сферическая световая волна от источника S падает на делительный кубик ДК и делится его диагональной гранью на две волны — отражённую 1 и проходящую 2. Волна 1 отражается от зеркала Z_1 , возвращается к кубику, частично проходит сквозь него и попадает на экран Э. Волна 2 отражается от зеркала Z_2 , частично отражается от кубика и также попадает на экран. Световые волны 1 и 2

испускаются одним источником S , и они когерентны между собой. Эти волны создают на экране Э интерференционную картину. Для увеличения масштаба интерференционной картины может быть использована линза Л_2 .

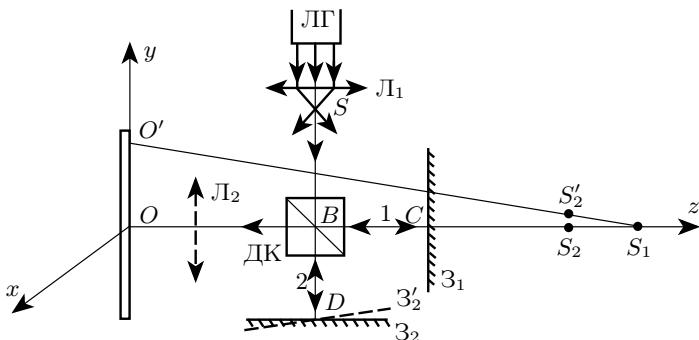


Рис. 1. Схема интерферометра

Зеркало Z_1 установлено перпендикулярно падающему лучу. Оно может перемещаться вдоль луча. Это зеркало в дальнейшем будет называться подвижным. Зеркало Z_2 вдоль направления падающего луча не перемещается. Его, однако, можно наклонять по отношению к лучу.

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 2. Источником света служит гелий-неоновый лазер ЛГН-203. Его излучение обладает большой длиной когерентности, что позволяет получать хорошо различимую глазом интерференционную картину при разности хода в десятки сантиметров. Неподвижное зеркало Z_2 , поворачивается микрометрическими винтами M_r (относительно горизонтальной) и M_v (относительно вертикальной оси). Зеркало Z_1 установлено перпендикулярно падающему лучу. Оно может передвигаться вдоль луча с помощью микрометрического винта, соединённого с двигателем Дв через муфту и редуктор РД, позволяющий менять скорость движения зеркала. Двигатель питается от сети через блок питания пульта управления. Концевые контакты K_1 и K_2 меняют направление движения зеркала на обратное. Включение лазера и двигателя производится с пульта управления. Сигнальные лампочки указывают, в какую сторону движется зеркало.

Интерференционная картина наблюдается на экране Э. Она может быть увеличена с помощью линзы Л_2 . В этом случае на экране в увеличенном масштабе воспроизводится интерференционная картина, ко-

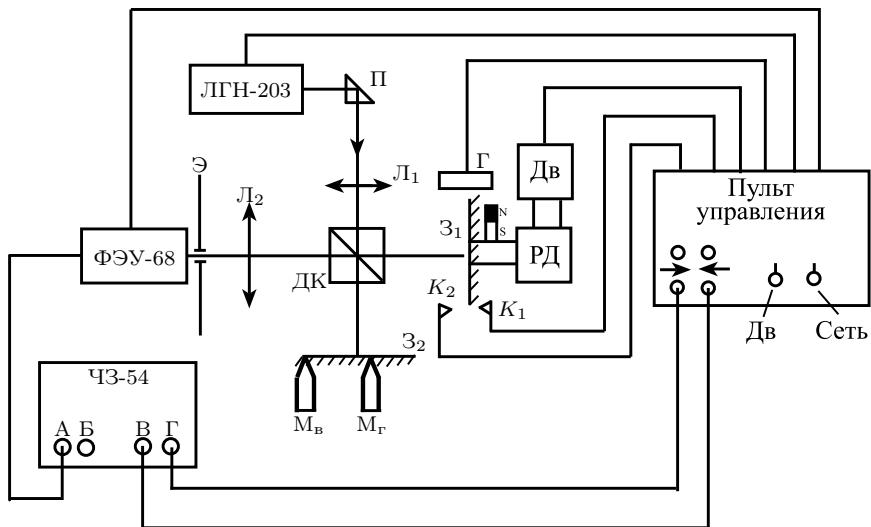


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

торая создаётся перед линзой в плоскости, сопряжённой экрану. Линза закреплена на съёмном столике, её фокусное расстояние 4,3 см.

Для регистрации изменения интенсивности света используется фотоэлектронный умножитель ФЭУ-68, установленный непосредственно за экраном. Свет на окно ФЭУ попадает через небольшое отверстие в центре экрана. Для питания ФЭУ используется высоковольтный выпрямитель. Выпрямитель включается тумблером «Сеть» на пульте управления.

Периодическое изменение интенсивности света, возникающее при движении зеркала Z_1 , приводит к такому же изменению сигнала ФЭУ. Число периодов изменения интенсивности света пересчитывается частотомером ЧЗ-54. Частотомер может работать в одном из трёх режимов.

1. Он может измерять число импульсов, поступающих на его входы (А или Б) за некоторый промежуток времени (его продолжительность определяется поступлением сигналов на управляющие входы В и Г).

2. С помощью частотомера можно измерять промежутки времени. Для таких измерений в прибор встроен кварцевый генератор. Частотомер измеряет время, прошедшее между поступлением сигналов на его

управляющие входы, подсчитывая соответствующее число импульсов кварцевого генератора.

3. Наконец, частотомер может измерять частоту сигнала, поступающего на его вход, сравнивая число периодов исследуемого сигнала с числом импульсов кварцевого генератора.

Для получения управляющих сигналов используется геркон Г (герметичный магнитоуправляемый контакт). Схема работает следующим образом. На отсчётной головке микрометрического винта зеркала З₁ закреплён небольшой магнит. Головка вращается вместе с винтом. После срабатывания концевого контакта К₁ зеркало начинает двигаться к экрану. При приближении магнита к геркону вырабатывается управляющий сигнал, который подаётся через схему пульта управления на вход В частотомера. Частотомер начинает счёт импульсов. Сигнал на окончание счёта подаётся на вход Г после того, как с помощью геркона зарегистрировано 32 оборота ходового винта. После срабатывания концевого контакта К₂ зеркало начинает движение от экрана. На этом участке движения счёт импульсов не производится. Один оборот микрометрического винта приводит к перемещению зеркала на 1 мм. Таким образом, полное перемещение зеркала З₁ составляет $L = 32$ мм.

ЗАДАНИЕ

Работа содержит несколько упражнений.

В первом упражнении исследуется интерференционная картина, возникающая при различных положениях зеркала З₂, проверяется формула (2.69).

В втором упражнении измеряется длина волны лазерного излучения путём пересчёта интерференционных колец, пропадающих в центре экрана при движении зеркала З₁. Такие измерения не очень точны, но обладают тем преимуществом, что не требуют сложных расчётов.

В третьем упражнении исследуется эффект Доплера.

Перед началом работы следует отъюстировать установку.

I. Юстировка системы

1. Включите блок питания установки (тумблер слева от частотомера).
2. Убедитесь, что луч от поворотной призмы (П на рис. 2) идёт параллельно столу на высоте 100 ± 2 мм (при этом линза Л₁ и делительный кубик сняты).
3. Установите оправу с зеркалом З₂ перпендикулярно лучу поворотом оправы в зеркале (грубо): для этого освободите фиксирующие (жёлтые) винты, микровинтами М_Г и М_в установите плоскость правильно и снова зажмите фиксирующие винты.

Поочерёдно вращая винты M_g , M_b зеркала Z_2 , заведите (точно) отражённый луч на поворотную призму.

4. Установите делительный кубик в центре системы и определите его положение относительно вертикали: луч от поворотной призмы, отразившись от полупрозрачной грани кубика, должен попасть на центр подвижного зеркала Z_1 , а прямой луч, отразившись от зеркала Z_2 , — на центр экрана. При этом пучки должны проходить через центр кубика, а яркость пятен, отражённых от подвижного и неподвижного зеркал, на экране должна быть примерно одинаковой. Если яркость пятен на экране заметно отличается, поверните кубик относительно вертикали на 90° и ещё раз проведите настройку. Центр экрана (вход в ФЭУ) должен находиться на той же высоте, что и луч от поворотной призмы до зеркала Z_2 (около 10 см).
5. Поочерёдно вращая винты столика разделительного кубика, совместите оба луча в центре экрана.

Полезно убедиться в высокой чувствительности оптической системы к механическим деформациям. Последите за тем, как «дышил» интерференционная картина на экране, если надавить пальцем на металлическую станину интерферометра: полосы равного наклона двигаются по дифракционному пятну лазера на экране.

6. Поставьте линзу L_1 между поворотной призмой и кубиком. Убедитесь, что лазерный луч проходит через центр линзы (все пятна на зеркалах и на экране должны остаться на одной высоте). При необходимости совместите центр линзы с осью пучка.

Перемещая линзу поперёк луча, совместите центр интерференционной картины с отверстием ФЭУ на экране. Прикрепите линзу к столу скобой с винтом.

II. Исследование интерференционной картины

1. Чтобы увеличить интерференционную картину, установите между экраном и кубиком столик с линзой L_2 . Перемещая линзу, добейтесь того, чтобы центр колец снова совпал с отверстием в экране.
2. Слегка проворачивая вручную муфту двигателя, добейтесь того, чтобы в центре экрана оказалось тёмное пятно. Приложите к экрану лист бумаги, на котором проведён крест из взаимно перпендикулярных линий. Совместите центр креста с центром колец, наметьте положение 5–6-ти первых тёмных колец и измерьте их диаметры¹.

¹ Из-за недостаточной механической развязки измерить радиусы колец затруднительно. Упражнения 2 и 3 легко выполняются, если сфотографировать интерференционную картину и провести измерения по фотографии.

3. Убедитесь в справедливости формулы (2.69). Для этого постройте график зависимости квадрата радиуса кольца от его номера. По наклону полученной прямой найдите величину $L(L - a)/m_0$. Сравните найденное число с результатом теоретического расчёта. Согласно рис. 1, $L = OS_1 = BS_1 + OB$, $L - a = OS_2 = BS_2 + OB$, $BS_1 = 2BC + SB$, $BS_2 = 2BD + SB$. Проведите расчёт, принимая $SB = 5$ см, $BC = 26$ см (для среднего положения зеркала), $BD = 22$ см, расстояние от делильного кубика до линзы $L_2 = 16,5$ см, расстояние от линзы до экрана — 15 см, фокусное расстояние линзы $L_2 = 4,3$ см.
4. Получите на экране картину вертикальных полос. Для этого уведите центр пятна в сторону по горизонтали ($O \rightarrow O'$ на рис. 1), сместив микрометр M_b на 0,08–0,09 мм от исходного положения. Измерьте ширину полосы в центре экрана (в т. O) и расстояние $O'O$ на экране. Зная OS_1 , оцените угол поворота зеркала и смещение изображения источника света ($S_2S'_2$). Угол поворота зеркала вдвое меньше угла OO'/OS_1 .
5. Вновь получите картину колец. Снимите столик с линзой L_2 .

III. Измерение длины волны лазерного излучения

1. Совместите центр интерференционной картины с отверстием в экране (входом «ФЭУ»).
2. Включите тумблер «Сеть» на частотомере, при этом должны загореться лампы индикаторного табло.
3. Установите частотомер в режим счёта импульсов. Для этого переключатель рода работы поставьте в положение «Интервал А/В-Г», кнопка «блок» отжата, ручка «время индикации» — в среднем положении, кнопка ручной работы с изображением руки отжата (автоматический режим).

Положения ручек на блоке частотомера «измеритель интервалов времени» отмечены.

4. Переместите рычаг регулятора скорости двигателя в положение 2 (регулятор разрешается переключать ТОЛЬКО при выключенном двигателе).

Включите двигатель тумблерами «Сеть» и «Дв» на пульте управления; при этом загорится индикатор, указывающий направление движения («←» или «→») и зеркало начнёт движение от ФЭУ.

Проследите за работой схемы управления двигателем при 2–3 изменениях направления движения зеркала. Если вы обнаружите сбои² в работе аппаратуры, обратитесь к преподавателю или лаборанту.

² Возможные сбои: 1) счётчик числа колец не включается; 2) счётчик не выключается после прохождения 32-х см (не гаснет кнопка «счёт» на частотомере); в этом случае следует выключить и снова включить двигатель тумблером «Дв».

5. Определите по табло частотомера число колец N , прошедших через центр экрана (через вход «ФЭУ») за время движения зеркала. В выбранном режиме работы частотомер включается при отходе зеркала от контакта K_1 и выключается после 32-го оборота ходового винта. Перемещение зеркала $L = 32$ мм. Запуск частотомера происходит автоматически: после вспышки индикатора «←» (движение к экрану) зажигается лампочка селектора частотомера и начинается отсчёт.

Измерения числа интерференционных полос N , проходящих через центр экрана, проведите не менее 10 раз. Отключите двигатель.

По результатам этих измерений найдите длину волны лазерного излучения и оцените ошибку. Сравните полученный результат с паспортным: $\lambda = 6328 \text{ \AA}$.

IV. Исследование эффекта Доплера

Измерения сводятся к определению частоты колебаний интенсивности света на входе ФЭУ при движении зеркала и определению скорости этого движения. Для проверки результатов измерений используется формула (2.70).

При измерении частоты частотомер работает в режиме измерения частоты, при измерении скорости — в режиме измерения времени (скорость рассчитывается по времени, которое требуется для перемещения зеркала на расстояние $L = 32$ мм).

1. При измерении времени передвижения зеркала переключатель «Род работы» ставится в положение «интерв. В-Г», переключатель «Метки времени» — в положение 1 mS (т.е. время движения зеркала измеряется в миллисекундах).

Чтобы измерить доплеровское смещение частоты, переключатель «Род работы» устанавливается в положение «Частота А», переключатель «Время счёта-множитель» — в положение 10^3 , кнопка ручной работы отжата. Вращением ручки «Время индикации» подбирается удобное для наблюдения время, в течение которого измеренное значение частоты высвечивается на табло ($\sim 2\text{--}3$ с).

2. Установите максимальную скорость передвижения зеркала (рычаг регулятора скорости — в положение I). Включите двигатель.
3. При выбранном значении скорости сначала измерьте время передвижения зеркала на расстояние L , затем доплеровскую частоту — частоту изменения яркости света, падающего на ФЭУ (число полос, проходящих через ФЭУ за 1 с). Повторите измерения столько раз, сколько необходимо, чтобы погрешность измерения этих величин не превышала 2%.

4. Повторите измерения ещё для 2–3-х значений скорости передвижения зеркала (переключать регулятор ТОЛЬКО при выключенном двигателе!).
5. При остановленном двигателе измерьте частоту дрожания картины. Сравните с изменением доплеровской частоты во время движения (скорость двигателя флюктуирует).
6. Постройте график доплеровской частоты в зависимости от скорости передвижения зеркала. Используйте полученные результаты для определения длины световой волны. Совпадает ли найденное вами значение с длиной волны, определённой во втором упражнении?
7. Выключите тумблер «Сеть» частотометра. В тот момент, когда зеркало находится приблизительно посередине между контактами K_1 и K_2 , выключите двигатель (тумблеры «Дв» и «Сеть» на пульте управления). Установите рычаг переключения скорости редуктора в положение 1.

Выключите напряжение на блоке питания.

Контрольные вопросы

1. С какой скоростью движется картина интерференционных полос при перемещении подвижного зеркала?
2. Чем ограничена наибольшая и наименьшая скорости движения зеркала, которые могут быть измерены в нашей установке по доплеровскому смещению частоты?
3. Чем определяется точность в измерении длины волны лазера? Как эта точность зависит от скорости перемещения зеркала?
4. Какую форму имеют интерференционные полосы при произвольном расположении источников S_1 и S_2 ?

Литература

1. Калитеевский Н.И. Волновая оптика. М.: Высшая школа, 1978. §§ 5, 6, 7, 3.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§ 28, 133.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. § 7.5.4.

Работа 4.2.5

Когерентность света

Цель работы: оценка длины волны излучения полупроводникового лазера, определение зависимости радиуса когерентности от размера источника, оценка спектрального диапазона чувствительности зрительной системы экспериментатора.

В работе используются: лазер, лампы накаливания с блоком питания, объектив, оптические щели, микроскоп.

Источник света. Источником света в лабораторной установке является лампа накаливания с вольфрамовой спиралью, нагретой примерно до 2000 К. Это *тепловой источник*, в котором распределение мощности излучения по длинам волн зависит от температуры спирали. Излучение нагретого вольфрама может приближенно быть описано моделью равновесного излучения *абсолютно черного тела*. Спектральный состав излучения в этой модели описывается известной *формулой Планка* (вывод формулы можно найти в курсах квантовой механики):

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1},$$

где u_λ есть объемная плотность энергии излучения, отнесенная к единичному интервалу длин волн¹ и имеет размерность Дж/м⁴, h — постоянная Планка, c — скорость света, k_B — постоянная Больцмана, T — температура источника. На рис. 1 приведена зависимость спектральной плотности излучения абсолютно черного тела при температуре 2000 К. График приведен в относительных единицах и нормирован на значение u_λ в максимуме, который наблюдается на длине волны $\lambda_{\max} \approx 1,45$ мкм (инфракрасный диапазон). Следствием формулы Планка является уменьшение λ_{\max} с ростом температуры, которое описывается законом Вина:

$$\lambda_{\max} = b/T,$$

где константа $b \approx 0,2 \frac{hc}{k_B} \approx 0,2898$ см · К.

Как видно из рис. 1, характеристическая ширина² $\Delta\lambda_T$ спектра излучения вольфрамовой нити достаточно велика, так что $\Delta\lambda_T \gtrsim \lambda_{\max}$. Согласно

¹ То есть для нахождения энергии единицы объема излучения в интервале длин волн (λ_1, λ_2) необходимо вычислить интеграл $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} u_\lambda d\lambda$.

² Ширину спектра $\Delta\lambda$ обычно определяют как диапазон длин волн, в котором плотность энергии отличается от максимального значения не более чем вдвое.

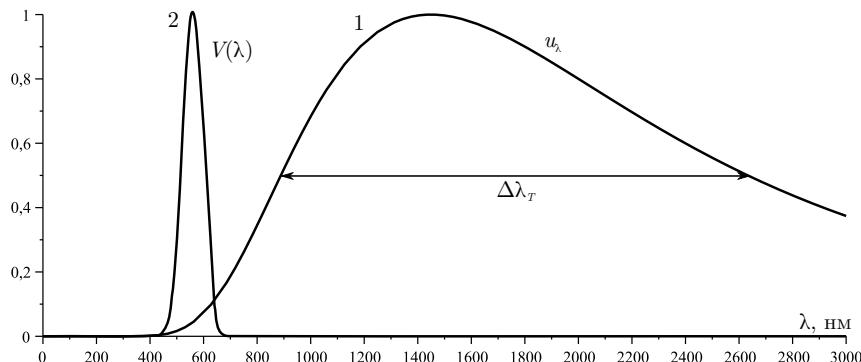


Рис. 1. Нормированная спектральная плотность равновесного теплового излучения для температуры $T = 2000 \text{ K}$ (1) и график относительной спектральной чувствительности зрительной системы человека (2)

формулам (2.54) мы не сможем получить даже одной интерференционной полосы от такого источника.

Однако если уменьшить ширину спектрального диапазона $\Delta\lambda$, в котором ведется наблюдение (например, пропустить тепловое излучение через светофильтр или регистрировать его приемником с узкой спектральной чувствительностью), то длина когерентности увеличится. В наших опытах таким приемником является глаз экспериментатора. На рис. 1 приведена зависимость от длины волны относительной спектральной чувствительности зрительной системы человека $V(\lambda)$. Эта чувствительность характеризует дневное зрение и является стандартом, принятым в 1924 г. Международной комиссией по освещению после многочисленных специальных исследований. Максимальная чувствительность, на которую нормирована кривая, приходится на длину волн 555 нм. Приведенная кривая чувствительности характеризует «в среднем» людей с нормальным зрением, индивидуальная же кривая для конкретного экспериментатора может быть иной. Тем не менее можно принять, что чувствительность зрительной системы экспериментатора превышает уровень 0,5 в диапазоне длин волн 510–610 нм и использовать этот диапазон для оценок того, что можно уверенно наблюдать глазом. Максимальный порядок интерференции и число наблюдаемых интерференционных полос для этого диапазона согласно (2.54):

$$m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx \frac{555}{610 - 510} \approx 5 \div 6,$$

длина и время когерентности

$$\ell_{\text{ког}} = \lambda \frac{\lambda}{\Delta \lambda} \approx 3 \text{ мкм}, \quad \tau_{\text{ког}} = \frac{\ell_{\text{ког}}}{c} \approx 10^{-14} \text{ с.}$$

Из сопоставления кривых 1 и 2 на рис. 1 видно, что только несколько процентов мощности излучения электрической лампочки воспринимается зрительной системой человека.

Описание интерферометра. Для решения задачи измерения радиуса когерентности электромагнитного поля в некоторой плоскости можно использовать набор экранов с разными расстояниями между двумя отверстиями. Мы считаем, что контраст интерференционной картины, возникающей в дальней зоне при дифракции света на двух отверстиях, не зависит от координат этих отверстий, а определяется только расстоянием между ними (условие однородности статистических характеристик поля). Меняя экраны в выбранной плоскости так, чтобы расстояние между отверстиями постепенно увеличивалось, следует найти минимальное расстояние ρ_0 (2.62), при котором интерференционная картина пропадает. В лабораторной работе используется интерферометр, специально сконструированный для визуального наблюдения распределения интенсивности по времени задержки (2.48) и расстоянию между отверстиями.

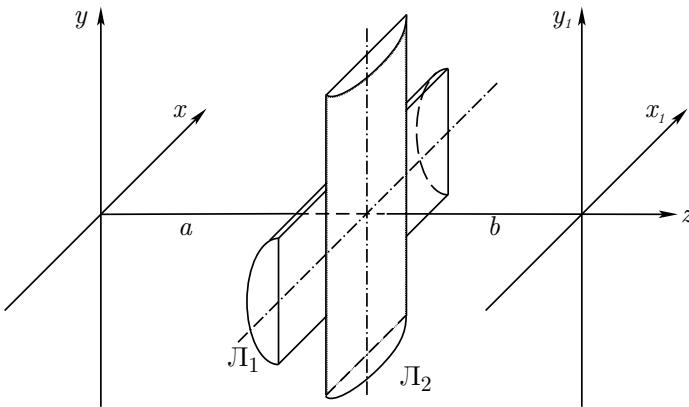


Рис. 2. Принципиальная схема интерферометра

Принципиальная оптическая схема интерферометра приведена на рис. 2. Экран с отверстиями располагается в плоскости (x, y) , (x_1, y_1) — плоскость наблюдения, z — оптическая ось системы. Изображение формируется объективом, состоящим из двух тонких вплотную приложен-

ных друг к другу цилиндрических линз L_1 (ось цилиндра горизонтальна), L_2 (ось цилиндра вертикальна). Пусть в экране имеется одно прямоугольное отверстие (щель с резкими границами), фокусные расстояния линз одинаковы $f_1 = f_2 = f$ и вдвое превосходят расстояния от экрана до объектива a и от объектива до плоскости наблюдения b , т. е. $a = b = 2f$. В этом случае при малых углах дифракции света на отверстии две цилиндрические линзы эквивалентны одной сферической с фокусным расстоянием f . В плоскости наблюдения возникает изображение щели с увеличением $b/a = 1$. Линза L_1 (ось цилиндра горизонтальна) обеспечивает резкие горизонтальные границы изображения, линза L_2 (ось цилиндра вертикальна) — резкие вертикальные границы (рис. 3а). Заменим линзу L_2 на линзу с большим фокусным расстоянием $f_2 = b$. В этом случае плоскость наблюдения является фокальной для этой линзы. Если на экран падает плоская монохроматическая световая волна, то в плоскости наблюдения возникает распределение интенсивности света, соответствующее дифракции Фраунгофера на щели (рис. 3б). Это распределение развернуто вдоль горизонтальной оси, ширина главного максимума обратно пропорциональна ширине щели, горизонтальные границы остаются резкими и на прежнем месте (действие линзы L_1). Рассмотрим еще один пример изображения. Пусть в плоскости (x, y) помечен экран с двумя парами одинаковых квадратных отверстий A_1, B_1 и A_2, B_2 . Центры отверстий лежат на биссектрисах координатных углов в нижней полуплоскости, их координаты $(\pm \frac{h}{2}, -\frac{h}{2})$ и $(\pm h, -h)$ (рис. 4а). Соответствующее изображение в плоскостях (x, y) приведено на рис. 4б.

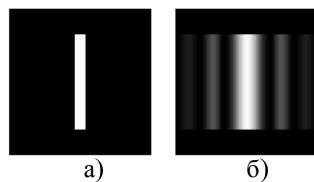


Рис. 3. Изображения прямоугольной щели: а) $a = b = 2f_1 = 2f_2$,
б) $a = b = 2f_1 = f_2$

Линза L_1 формирует две яркие полосы (изображение перевернутое). Внутри каждой полосы линза L_2 формирует картину дифракции Фраунгофера на двух отверстиях A_1, B_1 и A_2, B_2 . Вертикальные координаты полос $\frac{h}{2}b/a$ (расстояние между отверстиями $\rho = h$) и hb/a (расстояние между отверстиями $\rho = 2h$). Ширина главного дифракционного максимума вдоль горизонтальной оси одинакова для обеих

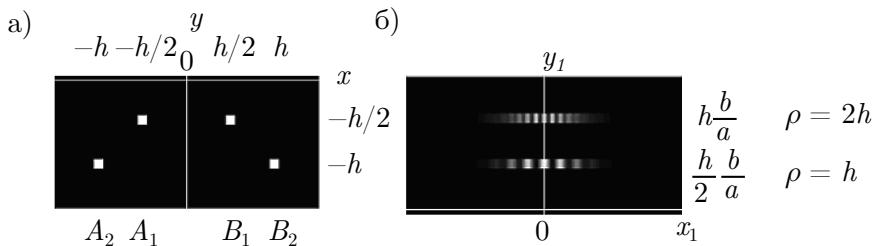


Рис. 4. Экран с двумя парами отверстий (а), изображение в плоскости наблюдения (б)

полос и определяется размером отверстий, фокусным расстоянием линзы L_2 и длиной волны света. Число полос в главном дифракционном максимуме в нашем примере ($\rho = h$ и $\rho = 2h$) отличается в два раза, так как оно прямо пропорционально расстоянию между отверстиями ρ вдоль горизонтальной оси x .

Ясно, что плавного увеличения расстояния между отверстиями ρ можно добиться, проделав большое количество пар отверстий A, B . Для этой цели во входной плоскости интерферометра размещают экран с двумя взаимно перпендикулярными щелями (рис. 5). Возникающее для креста щелей изображение приведено на рис. 6. Можно сказать, что горизонтальные яркие полоски, показанные на рис. 4б, тесно примыкают друг к другу, расстояние между интерференционными полосами уменьшается с увеличением вертикальной координаты y_1 .

В лабораторной установке объектив интерферометра собран не из двух цилиндрических линз, а из одной сферической (фокусное расстояние F) и одной цилиндрической (фокусное расстояние f , ось цилиндра горизонтальна). Для тонких линз, вплотную приложенных друг к другу, настройка объектива должна удовлетворять условиям

$$F = b, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} + \frac{1}{f}.$$

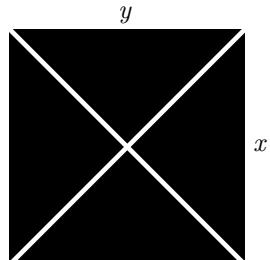


Рис. 5. Экран интерферометра

Объектив с двумя фокусными расстояниями позволяет получить изображение дифракционной картины в координатах угол дифрак-

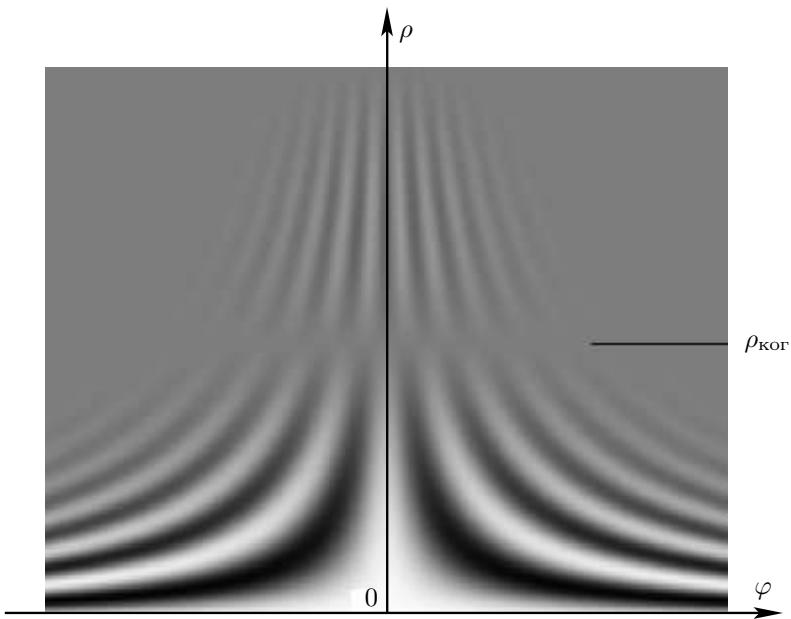


Рис. 6. Изображение в плоскости (x_1, y_1) . Переменные: угол дифракции (время задержки), расстояние между отверстиями в экране

ции φ (развертка изображения вдоль горизонтальной оси x_1) и расстояние между малыми отверстиями ρ (развертка вдоль вертикальной оси y_1). Формулы пересчета координат имеют вид

$$\varphi = \frac{x_1}{b}, \quad \rho = 2 \frac{a}{b} |y_1|. \quad (1)$$

Для длины волны λ_0 угловое расстояние между интерференционными полосами $\Delta\varphi = \lambda/\rho$, линейное расстояние

$$\Delta x_1 = b \Delta\varphi_1 = \frac{\lambda_0 b^2}{2a |y_1|},$$

т. е. в переменных y_1 , x_1 интерференционные полосы представляют собой гиперболы. Число наблюдаемых цветных полос для теплового источника определяется относительной чувствительностью зрительной системы наблюдателя. В наших опытах это число равно $5 \div 6$. Если на входную плоскость интерферометра (экран, рис. 5) падает параллельный пучок света, то распределение интенсивности излучения в плоско-

сти наблюдения вдоль горизонтальной прямой описывается выражением (2.48), так как кривая чувствительности (рис. 1, кривая 2) является практически гауссовой. Время задержки, используемое в (2.48), равно $\tau = \rho\varphi/c$.

В опытах между крестом и электрической лампочкой размещается вертикальная оптическая щель. Если считать щель квазимохроматическим источником случайного поля, то для расчета видности интерференционной картины можно использовать распределение интенсивности (2.64), где радиус когерентности ρ_0 определяется угловым размером щели (2.62). Если глаз не различает интерференционные полосы на некоторой высоте изображения y_1 , можно, используя второе равенство (1), рассчитать радиус когерентности поля во входной плоскости интерферометра.

Используя (2.48), (2.62), (2.64) и приведенные выше формулы пересчета масштабов, можно выписать относительное отклонение интенсивности света наблюдаемого изображения I от фона I_0 :

$$\frac{I - I_0}{I_0} = \exp \left[- \left(\frac{2\pi\Delta\lambda ax_1y_1}{\lambda_0^2 b^2} \right)^2 \right] \frac{\sin \left(2\pi \frac{a}{b} \frac{y_1 d}{\lambda_0 L} \right)}{2\pi \frac{a}{b} \frac{y_1 d}{\lambda_0 L}} \cos \left(4\pi \frac{ax_1y_1}{b^2 \lambda_0} \right),$$

где длина волны $\lambda_0 \approx 560$ нм соответствует максимуму, а $\Delta\lambda \approx 120$ нм — ширине по уровню $1/e$ чувствительности зрительной системы человека, b/a — увеличение объектива интерферометра, d — ширина вертикальной щели, L — расстояние от этой щели до экрана с крестом щелей. Первый сомножитель определяется кривой относительной чувствительности зрительной системы человека или спектром регистрируемого излучения. Второй сомножитель связан с пространственной когерентностью случайного поля, испытавшего дифракцию на щели. Третий сомножитель описывает интерференционные полосы-гиперболы.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается собрать и отьюстировать интерферометр, оценить длину волны излучения полупроводникового лазера, определить зависимость радиуса когерентности поля световой волны от размера источника, оценить ширину относительной чувствительности зрительной системы экспериментатора.

Элементы интерферометра располагаются на металлической плите оптического стола и крепятся к плите с помощью прижимных пластин и болтов. При фиксации на столе положения щелей, линз, микроскопа и т. д. возникает их неконтролируемое смещение и наклон относительно

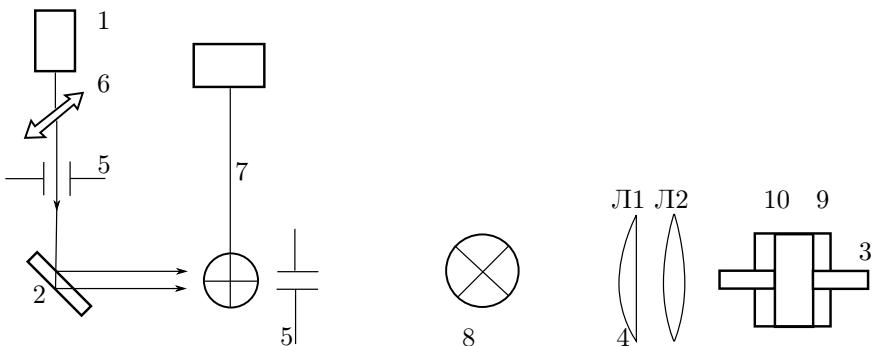


Рис. 7. Элементы лабораторной установки

первоначального выбранного положения. Крепление элементов интерферометра следует проводить в несколько этапов, каждый раз выправляя смещение элементов. Сборка интерферометра — трудоемкий процесс, требующий внимания, аккуратности и взаимопонимания. Один студент устанавливает и крепит элементы установки, другой контролирует качество сборки по возникающим изображениям и управляет этим процессом. Расположение элементов интерферометра для различных опытов приведено на рис. 7.

I. Измерения

**Прямое неослабленное лазерное излучение
опасно для зрения! Положение лазерных лучей
контролируется по экрану.**

1. *Установка оптической оси системы.* На столе устанавливается полупроводниковый лазер 1, стеклянная пластина 2, микроскоп 3. Стеклянная пластина ослабляет излучение лазера примерно в 20 раз и формирует два пучка света для наблюдения интерференционной картины. Микроскоп закреплен на двухкоординатном столике 9. Установите верхнюю пластину столика без смещения относительно нижней. Микроскоп должен быть полностью вставлен в его оправу 10. Получите резкое изображение окулярной шкалы микроскопа, саму шкалу установите в горизонтальное положение, вращая микроскоп вокруг его оптической оси. Пластина и микроскоп устанавливаются вблизи углов оптического стола. Включите лазер. Ось системы устанавливается по лазерным лучам.

Высота оси над поверхностью стола 20–25 см, положение оси по вертикали контролируется линейкой. Грубая установка оси осуществляется перемещением и поворотом рейтера пластины, тонкая — юстировочными винтами ее оправы.

Лучи лазера должны попадать в объектив микроскопа, а за окуляром на экране должны наблюдаться два ярких световых пятна. Такого положения можно добиться перемещением рейтера микроскопа в горизонтальном направлении, поднимая или опуская двухкоординатный столик и поворачивая его вокруг вертикальной оси. Закрепите на оптическом столе лазер, пластину, микроскоп.

2. Установка объектива интерферометра. Объектив 4 составлен из цилиндрической линзы L_1 (ось цилиндра горизонтальна) и сферической линзы L_2 . Линзы объектива не идеальные, а толстые и имеют значительную хроматическую aberrацию. Объектив устанавливается сферической линзой к микроскопу. Если верхняя пластина координатного столика микроскопа не смешена относительно нижней, а сам микроскоп полностью вставлен в его оправу, то расстояние между осями стержней, которыми крепятся столик и объектив, должно составлять 470 ± 3 мм. Лучи лазера должны проходить вблизи центра цилиндрической линзы перпендикулярно ее поверхности. За микроскопом на экране должна наблюдаваться яркая вертикальная полоса.
3. Оценка длины волны излучения лазера. Перекройте лазерный пучок поляроидом 6. Между поляроидом и стеклянной пластинкой установите вертикально щель 5 пластинами к лазеру. Щель должна пропускать центральную часть лазерного пучка. Установите максимальный размер щели, а поляроидом 6 максимально ослабьте излучение лазера. Теперь возникающую дифракционную картину можно наблюдать через микроскоп глазом. Изображение имеет вид огибающей, показанной на рис. 3б, внутри которой расположены интерференционные полосы. Подберите удобные для наблюдения ширину щели и ослабление поляроидом лазерного излучения. Измерьте по окулярной шкале микроскопа расстояние между интерференционными полосами. Расстояние между лазерными пучками за пластиной 2 измерьте линейкой.
4. Определение предметной плоскости объектива. Установите окулярную шкалу микроскопа вертикально. Положение плоскости на оси системы, в которую следует поместить щели в виде креста 8, определяется по изображению другого транспаранта — оптической щели 5. Если оптическая щель строго горизонтальна и расположена в предметной плоскости объектива, то в микроскопе наблюдается резкое изображение ее горизонтальных границ. Установите ширину оптической щели 1 мм, ориентация щели должна быть горизонтальной, ее пластиинки повернуты к

лазерным лучам, расстояние от щели до объектива по осям стержней крепления оправ около 45 см. Горизонтальное и вертикальное положение щели установите по лазеру. Перед щелью установите электрическую лампочку 7, включите ее питание. Перемещая щель вдоль оптической оси, определите ее положение, при котором изображение щели наиболее резкое. Уточните поворот щели относительно оптической оси интерферометра (ее горизонтальное положение). Еще раз найдите оптимальное расположение щели. Эту процедуру можно повторить несколько раз. Объектив с цилиндрической линзой лишен аксиальной симметрии и весьма чувствителен к повороту щели. При правильной настройке горизонтальные границы щели должны быть резкими без изменения их цвета. Измерьте размер изображения щели и определите увеличение объектива b/a . Измерьте расстояние между осями стержней оправ щели и объектива. По этому расстоянию вместо оптической щели установите оправу с крестом щелей. Ширина щелей около 100 мкм. Угол между щелями и вертикалью 45° . Сместите электрическую лампу и по лазерным лучам совместите центр щелей с оптической осью объектива. Проверьте расстояние между оправами щелей и объектива, закрепите рейтер щелей.

5. *Измерение радиуса когерентности и максимального порядка интерференции.* Установите перед экраном с крестом щелей 8 оптическую щель 5 (рис. 7) на расстоянии около 100 см от экрана. Оптическая щель ориентирована вертикально, пластинами к лазеру. По лазерным лучам совместите центр щели с оптической осью интерферометра. Теперь можно выключить полупроводниковый лазер. Полностью откройте оптическую щель. Перед щелью установите электрическую лампочку и включите ее на полную мощность. Перемещением лампы добейтесь симметричного освещения креста щелей интерферометра (на экране со щелями хорошо видна яркая вертикальная полоса света). Наблюдайте возникающее изображение интерференционной картины и одновременно плавно закрывайте оптическую щель. Если свет перестанет попадать на крест щелей при уменьшении ширины оптической щели, то немножко сместите лампу. В результате этого этапа настройки в микроскопе должна наблюдаться картина, похожая на приведенную на рис. 6. Закрепите на столе лампу.

Далее следует процедура тонкой настройки интерферометра. Качество возникающего изображения интерференционной картины заметно зависит от отклонения от вертикали оптической щели (ориентации источника света). Установите ширину щели около 0,3 мм. Очень плавно и медленно поворачивая щель вокруг оптической оси интерферометра (при ослабленных крепежных винтах ее оправы), зафиксируйте ее по-

ложение, при котором интерференционные полосы пропадают, затем с малым контрастом возникают при увеличении вертикальной координаты изображения (рис. 6). Вертикальная ориентация полосы нулевого порядка интерференции достигается небольшим поворотом креста щелей вокруг оптической оси интерферометра. Симметричность интерференционной картины относительно вертикальной оси — малым поворотом объектива относительно вертикальной оси (в объективе имеется небольшой перекос типа клина). Зарисуйте схему интерферометра, на схеме укажите расстояния между его элементами. Измерьте расстояние L от оптической щели 5 до креста щелей.

6. Определите максимальный порядок интерференции, который различает ваш глаз. Для 4–5 значений ширины d оптической щели 5 измерьте радиус когерентности поля световой волны во входной плоскости интерферометра. Для этого по шкале микроскопа измеряется вертикальная координата исчезновения полос и проводится расчет по формуле (1).

Замечание. Возможно, что плохое качество интерференционной картины связано с нарушением центрировки интерферометра, возникшей при установке элементов. Следует окончательно проверить прохождение лазерного луча по центру системы. Рекомендуется начинать проверку с микроскопа, затем поочередно уточнять положение остальных элементов, закончив измерительной щелью. Как правило, этого достаточно. Горизонтальные темные неубираемые линии в поле зрения микроскопа вызваны перекрытием щелей креста пылью, которая убирается тонким листом бумаги.

II. Обработка результатов

1. Оцените длину волны излучения полупроводникового лазера. Фокусное расстояние объектива можно принять равным $F \approx 33$ см.
2. Оцените спектральную ширину относительной чувствительности вашей зрительной системы. Длину волны для максимальной чувствительности λ_{\max} примите равной стандартной $\lambda_{\max} \approx 560$ нм. Сравните полученный результат со сделанной выше оценкой $\Delta\lambda \approx 100 \div 120$ нм. Оцените эквивалентную длину когерентности, время когерентности, отношение времени когерентности к периоду колебаний электромагнитного поля с длиной волны λ_{\max} .
3. Для проверки теоретической зависимости $\rho_0 = \frac{\lambda}{d} L$, связывающей между собой радиус когерентности поля с угловым размером щели d/L , постройте соответствующий график по полученным экспериментальным данным. Переменные следует выбрать так, чтобы график имел вид прямой. По графику оцените длину волны максимальной чувствительности

сти зрительной системы, сравните результат со стандартным значением $\lambda_{\max} \approx 560$ нм.

Контрольные вопросы

1. Как связаны между собой функции когерентности и контрастности изображений?
2. Как измерить длину когерентности, радиус когерентности?
3. На рис. 6 при переходе через $\rho_{\text{ког}}$ максимумы интерференционных полос меняются на минимумы. Почему?
4. Каков КПД электрической лампы накаливания, используемой для освещения?
5. Как зависит радиус когерентности от ширины оптической щели и расстояния от щели до входной плоскости интерферометра?
6. Как изменится число наблюдаемых интерференционных полос, если между глазом и микроскопом установить оптический фильтр?

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §§28, 30–32.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§17, 21, 22.

Работа 4.2.6

Дифракция когерентного излучения на шероховатой поверхности

Цель работы: получение и исследование изображений стохастических дифракционных полей (спеклов), приобретение навыков обработки двумерных цифровых сигналов.

В работе используются: гелий-неоновый лазер, матовая пластина, поляроид, цифровая камера, компьютер.

Дифракционные явления в учебных курсах оптики рассматривают, как правило, на примере регулярных структур или одинаковых элементов — отверстий, решёток и т. п. Однако дифракционные картины возникают и при когерентном освещении случайно-неоднородных объектов, таких как шероховатая поверхность. В этом случае интерференционная картина образуется при сложении взаимно когерентных волн,

имеющих случайные сдвиги фаз. На такой картине обычно наблюдаются светлые пятна (их называют спеклами от англ. speckle — крапинка, пятнышко), разделенные темными участками. В некоторых прикладных задачах, например в лазерной локации, исследуются спекл-картины, возникающие при отражении света от шероховатой поверхности. Статистический анализ случайной картины дифракции позволяет получать информацию о статистических свойствах объектов и излучения.

Принципиальная схема установки для получения спеклов приведена на рис. 1.

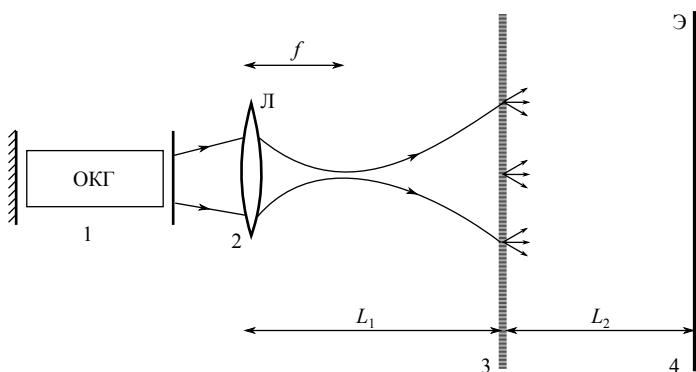


Рис. 1. Схема получения спекл-картины: 1 — гелий-неоновый лазер, 2 — линза, 3 — рассеиватель, 4 — экран или фотокамера

Источником излучения служит Не–Не-лазер с длиной волны излучения 0,63 мкм. Пучок излучения, формируемый линзой, рассеивается на матовой стеклянной пластинке, на экране наблюдается спекл-картина рассеяния. Характерный вид картины приведен на рис. 5 и 6. В простых экспериментах можно исследовать зависимость спекл-картины от поперечного размера лазерного луча на рассеивателе: чем «острее» фокусировка, тем более крупные спеклы возникают на экране, и, наоборот, увеличение диаметра луча приводит к уменьшению размеров спеклов. При увеличении расстояния L_2 между рассеивателем и экраном спеклы увеличиваются в размере.

Перемещение рассеивателя поперек лазерного луча приводит к движению спеклов на экране. Направление движения спеклов может совпадать с направлением перемещения матовой пластины или быть противоположным в зависимости от положения плоскости рассеивателя относительно точки фокусировки луча (т. е. в зависимости от соотношения между расстояниями f и L_1 на рис. 1). При фокусировке ла-

зерного луча на рассеивателе характер движения спеклов оказывается совершенно своеобразным: спеклы хаотически возникают и исчезают, наподобие пузырей в кипящей жидкости, без какого-либо заметного смещения, этот эффект называется «кипением» спеклов.

Картина спеклов возникает в результате интерференции когерентных волн, рассеянных отдельными неровностями поверхности. Фаза колебаний в волне, рассеянной отдельной неровностью, зависит как от её положения на освещенной площадке (от её координат x, y), так и от «высоты» h данной неровности относительно «подстилающей» плоскости. Форма рассеивающей поверхности $h(x, y)$ является случайной функцией координат x и y , поэтому фаза колебаний световой волны в данной точке экрана является случайной функцией координат. В некоторые точки экрана волны, рассеянные разными неровностями матовой поверхности, приходят с «благоприятными» фазовыми соотношениями и образуют интерференционный максимум — яркое пятнышко-спекл. В других точках волны, интерферируя, гасят друг друга и образуют темные области между спеклами. Если матовая пластинка неподвижна, то фазовые соотношения между рассеянными волнами, попадающими в различные точки экрана, сохраняются во времени в силу высокой когерентности лазерного излучения, и картина спеклов стационарна.

Статистические характеристики рассеивателя и спекл-картины. На рис. 2 показан рельеф поверхности рассеивателя — матовой стеклянной пластиинки (*нем. matt* — тусклый, блеклый), одна сторона которой подвергнута травлению плавиковой кислотой. Светлые и темные пятна на рис. 2 показывают отклонения шероховатой поверхности от некоторой средней плоскости в ту или другую сторону. На рис. 3 приведен график зависимости отклонения толщины пластиинки h от средней толщины вдоль некоторой прямой, принятой за ось x . Чтобы подчеркнуть неровность шероховатой поверхности, масштаб отклонения h увеличен примерно в десять раз по сравнению с масштабом по координате x .

Из качественного описания ясно, что вид спекл-картины определяется возмущениями фронта световой волны, вносимыми шероховатой рассеивающей поверхностью. Возмущения волнового фронта создаются случайной функцией $h(x, y)$, поэтому для анализа этих возмущений необходимо использовать статистические методы.

Функция корреляции. Как известно из курса теории вероятностей, для описания случайных величин используют понятия *среднего значения* и *дисперсии*. В нашем случае случайной величиной является толщина пластиинки, ее среднее значение характеризует толщину пластиин-

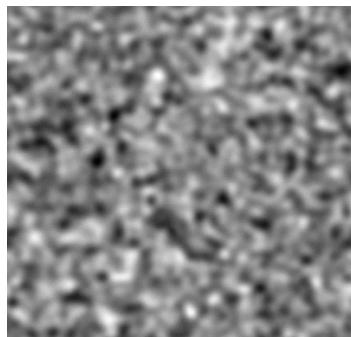


Рис. 2. Рельеф матовой поверхности. Светлые и темные области изображения отвечают выпуклостям и впадинам соответственно

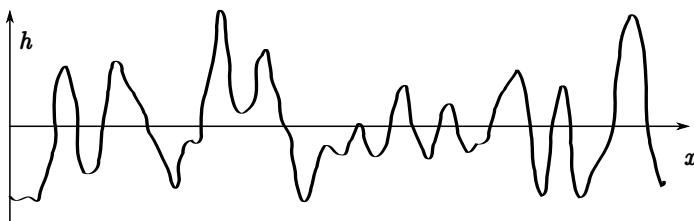


Рис. 3. Профиль поверхности рассеивателя

ки «в целом» и соответствует прямой $\langle h \rangle = 0$ на рис. 3. Дисперсия $D_h = \langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2$, а также связанная с ней величина, называемая *среднеквадратичным отклонением* $\sigma_h = \sqrt{D_h}$, характеризует отклонения случайной величины от среднего значения. Величина σ_h определяет масштаб высоты зубцов и глубины провалов на кривой, приведенной на рис. 3. Величина среднеквадратичного отклонения также описывает матовую пластинку «в целом». Однако для анализа картины спеклов нам понадобится еще информация о том, насколько быстро изменяется случайная функция $h(x, y)$ при переходе от одной точки поверхности к другой. Для характеристики этого свойства в теории вероятностей вводят функцию, которая называется *корреляционной*. В рассматриваемом случае матовой пластиинки случайной функцией является высота неровности h в точке поверхности, задаваемой радиус-вектором r_i . Согласно

определению, корреляционной функцией Ψ является функция

$$\Psi_h(\rho) = \langle h(\mathbf{r}) h(\mathbf{r} + \rho) \rangle - \langle h(\mathbf{r}) \rangle^2, \quad (1)$$

где ρ — смещение относительно точки \mathbf{r} , скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по всем точкам поверхности. Функция показывает, насколько в среднем изменяется величина h при смещении из данной точки на расстояние ρ , другими словами, насколько значения $h(\mathbf{r})$ и $h(\mathbf{r} + \rho)$ скоррелированы между собой. Для однородной пластиинки функция Ψ не зависит от выбора точки \mathbf{r} , а определяется только величиной смещения ρ , т. е. $\Psi_h = \Psi_h(\rho)$. Общие соображения позволяют представить качественно вид функции $\Psi_h(\rho)$. При $\rho = 0$ значения $h(\mathbf{r})$ и $h(\mathbf{r} + \rho)$ одинаковы, т. е. их корреляция наибольшая, и функция $\Psi_h(\rho)$ достигает максимума (в этом случае $\Psi_h(\rho) = \langle h^2(\mathbf{r}) \rangle - \langle h(\mathbf{r}) \rangle^2 \equiv \sigma_h^2$, согласно определению дисперсии). При больших значениях ρ в силу случайного характера функции h значения $h(\mathbf{r})$ и $h(\mathbf{r} + \rho)$ оказываются независимыми и функция $\Psi(\rho) \rightarrow 0$. Таким образом, функция $\Psi_h(\rho)$ должна достигать максимального значения при $\rho = 0$ и уменьшаться с ростом ρ .

Обычно хорошим приближением для корреляционной функции $\Psi_h(\rho)$ является функция Гаусса:

$$\Psi_h(\rho) = \sigma_h^2 e^{-\frac{\rho^2}{\rho_h^2}}, \quad (2)$$

где ρ_h — характерное расстояние, называемое радиусом корреляции, на котором функция корреляции уменьшается в e раз. Радиус корреляции ρ_h — это масштаб, характеризующий своего рода «пространственную память» случайной величины $h(\mathbf{r})$. По своему физическому смыслу ρ_h можно трактовать как средний размер неоднородностей матовой пластиинки. Для справки отметим, что в исследуемых образцах матовых стекол $\rho_h \approx 5 \div 10$ мкм.

Световая волна, проходя сквозь матовую поверхность, меняет амплитуду и фазу своих колебаний. Однако удовлетворительным приближением является рассмотрение матовой поверхности как чисто фазового транспаранта, т. е. случайной фазовой решетки. Случайная составляющая φ изменения фазы прошедшей световой волны определяется оптической разностью хода, пропорциональной случайному вариациям толщины пластины h :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1)h, \quad (3)$$

где $n \approx 1,5$ — показатель преломления стекла. Фронт световой волны, приобретя набег фазы (3) после прохождения матовой пластиинки,

становится случайным. Наблюдаемые спеклы представляют собой визуализацию этого случного поля, и нам необходимо установить связь статистических свойств этого поля со статистическими свойствами рассеивающей пластиинки. Отметим свойство, следующее из соотношения (3): высота h отсчитывается от среднего уровня $\langle h \rangle = 0$, поэтому и $\langle \varphi \rangle = 0$. Кроме того, функции корреляции фазы Ψ_φ и высоты Ψ_h (2) совпадают с точностью до постоянного множителя:

$$\Psi_\varphi(\rho) = \langle \varphi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) \varphi(\mathbf{r}) \rangle = \sigma_\varphi^2 e^{-\frac{\rho^2}{\rho_h^2}}.$$

Для небольших смещений ρ

$$\Psi_\varphi(\rho) \approx \sigma_\varphi^2 (1 - \rho^2 / \rho_h^2), \quad \sigma_\varphi^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (n - 1)^2 \sigma_h^2. \quad (4)$$

Рассмотрим прохождение плоской монохроматической волны, фронт которой параллелен поверхности $\langle h \rangle = 0$, через плоскую шероховатую пластиинку. Непосредственно за фазовым транспарантом комплексная амплитуда поля равна $E(\mathbf{r}) = E_0 e^{i\varphi(\mathbf{r})}$, где E_0 — амплитуда падающей волны. Напомним, что областью определения фазы φ , входящей в комплексную амплитуду $e^{i\varphi}$, является отрезок $\{-\pi, \pi\}$. В матовых стеклах характерный размер неровностей превышает длину световой волны ($\sigma_h > \lambda$), из этого на основании соотношения (3) заключаем, что случайное изменение фазы колебаний выходит за диапазон $\{-\pi, \pi\}$ (т. е. $\sigma_\varphi > \pi$). На этом основании в дальнейших расчетах комплексных амплитуд мы будем считать фазу φ случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $\{-\pi, \pi\}$ и имеющей нулевое среднее значение. В этом случае равны нулю и средние значения синуса и косинуса фазы:

$$\langle e^{i\varphi(\mathbf{r})} \rangle = \langle \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle = \langle \sin \varphi(\mathbf{r}) \rangle = 0.$$

Эксперименты подтверждают умозаключение о том, что $\langle e^{i\varphi(\mathbf{r})} \rangle = 0$. Следовательно, $\langle E(\mathbf{r}) \rangle = 0$. Если бы это предположение было неверно и $\langle e^{i\varphi} \rangle \neq 0$ (малая модуляция фазы), то на экране наблюдалось бы сечение лазерного пучка, но в наших опытах этого эффекта нет.

Получим функцию корреляции фазовых множителей $e^{i\varphi}$, необходимую для расчета картины спеклов. Для комплексных случайных величин $\xi(r)$ с нулевым средним значением $\langle \xi(r) \rangle = 0$ определение функции корреляции (1) преобразуется к виду

$$\Psi_\xi(\rho) = \langle \xi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) \xi^*(\mathbf{r}) \rangle. \quad (5)$$

В нашем случае $\xi(r) = e^{i\varphi(r)}$, поэтому с использованием (5) получаем

$$\Psi_\varphi(\rho) = \left\langle e^{i[\varphi(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})-\varphi(\mathbf{r})]} \right\rangle$$

В силу того что случайные величины $h(r)$ и $\varphi(r)$ связаны между собой соотношением (3), корреляционная функция $\Psi_\varphi(\rho)$ должна иметь гауссову форму со своим радиусом корреляции ρ_φ :

$$\left\langle e^{i[\varphi(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})-\varphi(\mathbf{r})]} \right\rangle = e^{-\frac{\rho^2}{\rho_\varphi^2}}. \quad (6)$$

Оценим радиус корреляции ρ_φ . Полагая смещение ρ малым, разложим в ряд левую и правую части равенства (6) до членов ρ^2 включительно. Используя (4), получаем

$$\begin{aligned} & \left\langle e^{i[\varphi(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})-\varphi(\mathbf{r})]} \right\rangle \approx \\ & \approx 1 + i [\langle \varphi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) \rangle - \langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle] - \frac{1}{2} \left[\langle \varphi^2(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) + \varphi^2(\mathbf{r}) \rangle - 2\sigma_\varphi^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_h^2} \right) \right] = \\ & = 1 - \frac{1}{2} \left[2\sigma_\varphi^2 - 2\sigma_\varphi^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_h^2} \right) \right] = 1 - \sigma_\varphi^2 \frac{\rho^2}{\rho_h^2} = 1 - \frac{\rho^2}{\rho_\varphi^2}. \end{aligned}$$

Искомый радиус корреляции

$$\rho_\varphi = \frac{\rho_h}{\sigma_\varphi} = \frac{\rho_h}{\sigma_h} \frac{\lambda}{2\pi(n-1)}. \quad (7)$$

Из соотношения (7) видно, что радиус корреляции для фазового множителя меньше радиуса корреляции для неровностей. Как упоминалось выше, для матового стекла $(\lambda/\sigma_h) < 1$, $n \approx 1,5$ и оценка по формуле (7) дает $\rho_\varphi < \rho_h/\pi$.

Для характеристики матовой поверхности используют так называемый **параметр шероховатости** ζ , равный отношению средней высоты неровности к ее усредненному поперечному размеру. Используя статистические характеристики, можно записать:

$$\zeta = \frac{\sigma_h}{\rho_h}. \quad (8)$$

Применяемая в работе матовая пластинка имеет параметр шероховатости $\zeta \sim 0,1$, длина волны гелий-неонового лазера $\lambda = 0,63$ мкм, оценка по формуле (7) дает $\rho_\varphi \approx \frac{10}{\pi}\lambda \approx 3\lambda \approx 2$ мкм.

Дифракция излучения лазера на шероховатой поверхности. Гелий-неоновый лазер генерирует слабо расходящийся пучок света на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм. Можно принять, что на выходе из лазера пучок имеет плоский волновой фронт, а распределение интенсивности света в пучке описывается гауссовой функцией:

$$I_L(\mathbf{r}) = |E_L(\mathbf{r})|^2 = I_0 e^{-\frac{r^2}{\rho_L^2}}, \quad (9)$$

где ρ_L — поперечное расстояние от оси лазерного луча, на котором интенсивность уменьшается в e раз по сравнению с максимальной. На выходе лазера $\rho_L \approx 100$ мкм. Как известно, при распространении гауссова пучка его поперечный размер ρ_L увеличивается, но форма (9) сохраняется. Линза, показанная на рис. 1, изменяет размер пучка, но не меняет его гауссовой формы. Матовая пластинка, стоящая на пути лазерного луча, вносит поперечную неоднородность в световое поле и значительно увеличивает угловую расходимость пучка. Когерентное лазерное излучение преобразуется матовой поверхностью в поперечно-некогерентное.

Изучая картину спектров, мы наблюдаем на экране распределение интенсивности света, рассеянного матовой пластинкой. Наша задача состоит в том, чтобы на основании анализа статистических свойств распределения интенсивности получить информацию о статистических свойствах рассеивателя.

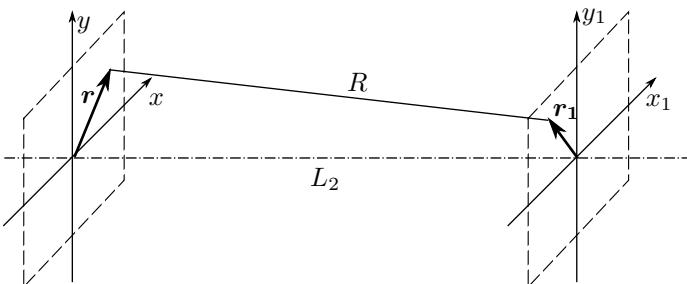


Рис. 4. К расчету разности хода: \mathbf{r} — радиус-вектор точки в плоскости рассеивателя, \mathbf{r}_1 — в плоскости экрана или фотокамеры, L_2 — расстояние вдоль оси z между матовой пластинкой и экраном

Пусть на матовую поверхность нормально падает излучение лазера с комплексной амплитудой $E_L(\mathbf{r})$. Непосредственно за этой поверхностью комплексная амплитуда равна $E_L(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ (изменением амплитуды поля мы пренебрегаем). Площадки $d\mathbf{r} = dx dy$ являются источниками вторичных сферических волн, которые распространяются к плоскости наблюдения и суммируются в интересующей нас точке с координатой \mathbf{r}_1

(рис. 4). Расстояние L_2 между матовым стеклом и плоскостью наблюдения $L_2 \gg r_1, r_2$, поэтому воспользуемся приближением Френеля:

$$R = \sqrt{L_2^2 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \approx L_2 + \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2}{L_2} = L_2 + \frac{r^2 + r_1^2}{2L_2} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1)}{L_2}.$$

С физической точки зрения использование приближения Френеля означает замену сферических волн параболическими. В этом приближении комплексная амплитуда поля $E(\mathbf{r}_1)$ в плоскости наблюдения с точностью до постоянного множителя может быть записана как

$$E(\mathbf{r}_1) \propto e^{i\frac{\pi r_1^2}{\lambda L_2}} \int_{-\infty}^{\infty} E_L(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})} e^{i\frac{\pi r^2}{\lambda L_2}} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda L_2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1)} d\mathbf{r}.$$

Для дальнейшего расчета статистических характеристик спектральных картин нам понадобится проанализировать функцию вида $|\langle E(\mathbf{r}_1)E^*(\mathbf{r}'_1) \rangle|$, $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\rho}$, где $\boldsymbol{\rho}$ — смещение, введённое в (1). Нужная нам функция имеет вид

$$\begin{aligned} & |\langle E(\mathbf{r}_1)E^*(\mathbf{r}'_1) \rangle| \propto \\ & \propto \left| \iint_{-\infty}^{\infty} E_L(\mathbf{r}) E_L(\mathbf{r}') \left\langle e^{i[\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}')]} \right\rangle e^{i\frac{\pi}{\lambda L_2}(r^2 - r'^2)} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda L_2}[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1) - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'_1)]} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \right|. \end{aligned}$$

Подынтегральная функция сильно зависит от разности аргументов $|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1| = |\boldsymbol{\rho}|$. Действительно, наиболее быстро с увеличением смещения ρ меняется функция корреляции фазового множителя (6):

$$\left\langle e^{i[\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}')]} \right\rangle = e^{-\frac{\rho^2}{\rho_\varphi^2}},$$

где $\rho_\varphi \sim 2$ мкм. При смещении на ρ_φ амплитуды и фазы полей $E_L(\mathbf{r})$ и $E_L^*(\mathbf{r}')$ практически совпадают (поскольку $\rho_L \sim 10^2$ мкм, поэтому можно считать, что (см. (9)) $E_L(\mathbf{r})E_L^*(\mathbf{r}') = |E_L(\mathbf{r})|^2 = I_0 e^{-r^2/\rho_L^2}$). Аналогично для квадратичного фазового множителя при $L_2 > 1$ см имеем оценку

$$\frac{\pi}{\lambda L_2}(r^2 - r'^2) = \frac{\pi(r + r')(r - r')}{\lambda L_2} \sim \frac{2\pi\rho_L\rho_\varphi}{\lambda L_2} \sim \frac{\pi}{30} \ll \pi,$$

и мы пренебрежём этим множителем в дальнейших выкладках. С учётом приведённых соображений модуль функции корреляции поля про-

порционален

$$|\langle E(\mathbf{r}_1)E^*(\mathbf{r}'_1)\rangle| \propto \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{\rho_L^2}} e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{\rho_\varphi^2}} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda L_2}[(\mathbf{r}\mathbf{r}_1)-(\mathbf{r}'\mathbf{r}'_1)]} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \right|. \quad (10)$$

Отметим, что в (10) площадка рассеивателя $d\mathbf{r}$ является источником плоских волн $e^{-2\pi i(\mathbf{r}_1\mathbf{r})/\lambda L_2}$, т. е. выполняются условия дифракции Фраунгофера, или, другими словами, изображения спекл-картин наблюдаются в дальней зоне. В дальней зоне дифракционная картина приобретает устойчивую структуру и угловое распределение интенсивности излучения перестаёт зависеть от координаты z . Полезно провести наблюдение спекл-структурь при изменении расстояния от рассеивателя до экрана и убедиться в том, что при увеличении координаты z расстояния между спеклами и их линейные размеры будут увеличиваться, но исчезновения и появления новых спеклов не будет. Угловые координаты спеклов $\theta_i = r_{1i}/L_2 (\theta_i \ll 1)$ при этом остаются неизменными.

Полученное выражение (10) показывает, что корреляционные свойства картины спеклов в дальней зоне определяются распределением не амплитуды, а интенсивности излучения $I_L(r)$ на рассеивателе. Соотношение (10) позволяет анализировать статистические свойства пучка излучения и статистические свойства картины спеклов.

Индикатриса рассеяния. На рис. 5 приведена фотография практически всей спекл-картины, полученной при минимальном удалении фотокамеры от матового стекла ($L_2 \approx 15$ мм). Видно, что яркость картины спеклов максимальна в центре и убывает в радиальном направлении. Распределение яркости в картине спеклов обусловлено угловой зависимостью интенсивности рассеянного матовой пластинкой излучения. Кривая, показывающая распределение относительной интенсивности рассеянного света по направлениям (углам), носит название **индикатрисы** (*фр. indicatrice — указывающая*).

Для конкретной спекл-картины (рис. 5) индикатриса представляет собой сильно изрезанную кривую, максимумы которой соответствуют ярким спеклам. Если провести усреднение по многим участкам матовой пластины, т. е. наложить друг на друга множество картин, подобных приведенной на рис. 5, то распределение интенсивности будет представляться гладкой кривой, спадающей от центра вдоль радиуса, которая будет представлять собой среднюю индикатрису. Грубую оценку для масштаба ρ_i , на котором изменяется «сглаженная» индикатриса, можно получить из угловой расходимости рассеянного излучения на основании общих представлений о дифракционных явлениях. Излуче-

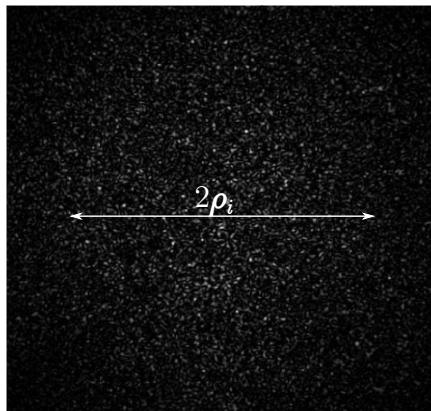


Рис. 5. Общий вид спекл-картины (мелкие спеклы)

ние лазера, падающее на матовую поверхность, имеет угловую расходимость порядка $\theta_L \sim \lambda/\rho_L \sim 0,6 \cdot 10^{-2}$. Для оценки расходимости излучения после прохождения матовой пластины воспользуемся соотношением $\theta_\varphi \sim \lambda/\rho_\varphi$. При $\rho_\varphi \sim 2$ мкм получаем $\theta_\varphi \sim 0,3$, откуда видно, что $\theta_\varphi \gg \theta_L$. Из простых геометрических соображений следует $\rho_i \sim L_2 \frac{\lambda}{\rho_\varphi}$. Более аккуратный расчет (в (10) следует положить $r_1 = r'_1$) показывает, что индикатриса представляет собой гауссову функцию вида

$$\langle |E(r_1)|^2 \rangle \propto e^{-r_1^2/\rho_i^2},$$

где

$$\rho_i = \frac{\lambda L_2}{\pi \rho_\varphi} \quad (11)$$

— радиус индикатрисы (эта величина отмечена на рис. 5).

Та же запись в угловых переменных дает

$$\theta = \frac{r_1}{L_2}, \quad \theta_i = \frac{\lambda}{\pi \rho_\varphi}, \quad \langle |E(\theta)|^2 \rangle \sim e^{-\theta^2/\theta_i^2}.$$

Анализ статистических свойств рассеянного лазерного излучения (определение величины ρ_i) позволяет найти параметр шероховатости матовой поверхности ζ . Используя соотношения (7), (8) и (11), получаем

$$\zeta = \frac{\rho_i}{2L_2(n_\lambda - 1)}. \quad (12)$$

Функции корреляции интенсивности спекл-картины. Крупные спеклы получаются при удалении фотокамеры от матовой пластиинки на расстояние $L_2 \approx 25 \div 80$ мм, фотография крупных спеклов приведена на рис. 6. «Крупными» будем называть спеклы, внутри которых заметно распределение яркости, отражающее распределение интенсивности рассеянного излучения. Изучение статистики распределения интенсивности в крупных спеклах позволяет судить о характерном поперечном размере лазерного пучка в месте установки матового стекла.

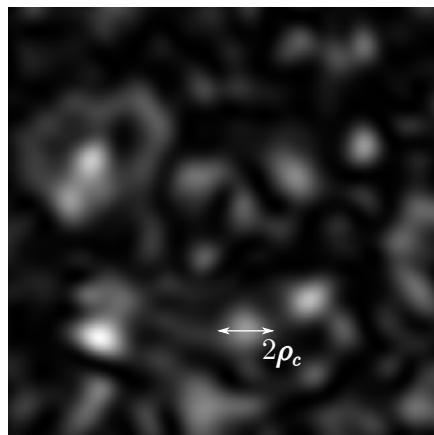


Рис. 6. Крупномасштабное изображение спеклов

Обработка фотографий спекл-картин при различном удалении L_2 матовой пластины от фотокамеры показывает, что функция корреляции интенсивности хорошо описывается гауссовой кривой:

$$\Psi_I(\rho) \propto e^{-\rho^2/\rho_c^2}, \quad (13)$$

где ρ_c — характерный радиус функции корреляции, физический смысл которого можно трактовать как средний размер спекла. Найдем зависимость радиуса корреляции ρ_c от условий проведения опытов. Для этого вначале оценим функцию корреляции поля $E(\mathbf{r})$. Заметим, что эта функция является однородной (т. е. не зависит от выбора координат точек \mathbf{r} и \mathbf{r}'), зависит только от величины смещения $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, и, положив $\mathbf{r}' = 0$ и $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$, получим из (10)

$$|\Psi_E(\rho)| \propto \left| \int_{-\infty}^{+\infty} I_L(\mathbf{r}) e^{-\frac{2\pi i}{\lambda L_2} (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r} \right|.$$

Радиус корреляции фазового множителя ρ_φ в соотношении (10) теперь определяет только нормировочную константу или среднюю интенсивность наблюдаемой спекл-картины. Используя выражение (9) для интенсивности лазерного излучения, получаем

$$|\Psi_E(\rho)| \propto e^{-\frac{\pi^2 \rho_L^2}{\lambda^2 L_2^2} \rho^2}. \quad (14)$$

Таким образом, две функции корреляции — экспериментальная (для интенсивности) и теоретическая (для поля) являются гауссовыми. В теории случайных полей доказывается, что функции корреляции интенсивности и поля связаны так же, как интенсивность и поле, т. е.

$$\Psi_I(\rho) = |\Psi_E(\rho)|^2 = e^{-\frac{2\pi^2 \rho_L^2}{\lambda^2 L_2^2} \rho^2}.$$

Отсюда следует, что искомый радиус корреляции спекл-картины равен

$$\rho_c = \frac{\lambda L_2}{\sqrt{2}\pi\rho_L}. \quad (15)$$

Сделаем важное замечание. Корректное описание случайных полей возможно только статистическими методами. Тем не менее полученные оценки радиуса индикаторы ρ_i и радиуса корреляции ρ_c хорошо согласуются с выводами классической оптики. Углы дифракции $\theta_i = \rho_i/L_2$ и $\theta_c = \rho_c/L_2$ определяются длиной волны излучения и характерными размерами объектов, в данном случае — радиусами корреляции фазового множителя и лазерного пучка. Из (11) и (15) следует:

$$\theta_i = \frac{\lambda}{\pi\rho_\varphi} \sim \frac{\lambda}{2\rho_\varphi}, \quad \theta_c = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi\rho_L} \sim \frac{\lambda}{2\rho_L}.$$

Функция распределения интенсивности спекл-картины. Интенсивность в картине спеклов представляет собой случайную величину. Одной из характеристик случайной величины является функция плотности распределения вероятности. В нашем случае знание функции распределения интенсивности в спекл-картинах необходимо для правильного выбора режима работы фотокамеры: яркости, контрастности и выдержки.

Рассмотрим формирование случайного поля световой волны в плоскости наблюдения. В каждой точке этой плоскости комплексную амплитуду поля E можно представить себе как большую сумму полей, рассеянных различными неровностями матовой пластинки. Суммирование таких полей удобно представить в форме векторной диаграммы

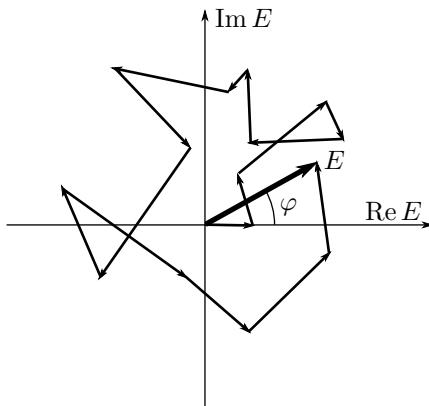


Рис. 7. Векторная диаграмма для вычисления комплексной амплитуды поля в выбранной точке спекл-картины

(рис. 7). Длина отдельного вектора E_n зависит от размера неровности, её формы и т. д. Угол поворота вектора определяется относительной фазовой задержкой, вносимой неровностью, и разностью хода от матовой пластины до плоскости наблюдения. Число таких векторов велико: для $\rho_\varphi \sim 1$ мкм и $\rho_L \sim 10^2$ мкм их количество $(\rho_L/\rho_\varphi)^2 \sim 10^4$.

Как отмечалось ранее, средние значения суммарного вектора поля, его действительной и мнимой частей равны нулю:

$$\langle \mathbf{E} \rangle = 0, \quad \langle \operatorname{Re} \mathbf{E} \rangle = \langle |E| \cos \varphi \rangle = 0, \quad \langle \operatorname{Im} \mathbf{E} \rangle = \langle |E| \sin \varphi \rangle = 0.$$

Рассмотрим действительную $E_R = |E| \cos \varphi$ и мнимую $E_I = |E| \sin \varphi$ части вектора \mathbf{E} . Величина $dE_R dE_I$ есть элемент площади на комплексной плоскости, изображенной на рис. 7.

Первоначально найдем вероятность отклонения комплексной амплитуды поля \mathbf{E} от её среднего значения, т. е. от нуля. Ответ следует из центральной предельной теоремы теории вероятностей: если некоторая случайная величина равна большой сумме других случайных величин, то искомая плотность вероятности имеет нормальный (гауссов) закон распределения. В нашем случае вероятность того, что конец вектора \mathbf{E} (рис. 8) лежит в области от E_R до $E_R + dE_R$, от E_I до $E_I + dE_I$, пропорциональна $e^{-(E_R^2 + E_I^2)/I_0} dE_R dE_I$, где I_0 — некоторая константа. Вероятность того, что амплитуда суммарного поля спекл-картины лежит в интервале от $|E|$ до $|E| + d|E|$:

$$W(|E|) d|E| \propto |E| e^{-|E|^2/I_0} d|E|$$

(это распределение называется *распределением Релея*). Поскольку интенсивность света $I = |E|^2$, то искомая функция распределения вероятности для спекл-картины имеет вид¹:

$$dP(I) = W(I)dI = \frac{1}{I_0} e^{-I/I_0} dI. \quad (16)$$

Константа I_0 в выражении (16) имеет смысл среднего значения интенсивности. Распределение (16) называется **экспоненциальным**; такого рода распределения случайных величин часто встречаются в физике: такому распределению подчиняется длина свободного пробега молекул в газе, а также энергия частиц в равновесной системе (распределение Больцмана). Особенностью экспоненциального распределения является то, что $\langle I \rangle = I_0$, а среднеквадратичное отклонение также равно I_0 :

$$\sigma_I = \sqrt{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2} = I_0. \quad (17)$$

В справедливости приведенных соотношений легко убедиться непосредственным вычислением, используя (16).

Регистрация и обработка изображений спеклов. Для регистрации картины спеклов используется цифровая фотокамера, для обработки изображений применяются компьютерные программы «Индикатрица» и «Корреляция», написанные в среде Mathcad. Фотокамера имеет светочувствительную матрицу, содержащую 480 светочувствительных элементов — *сэнселей* (от англ. sensel = sensor element) — по вертикали (нумерация 0...479) и 640 сенселям по горизонтали (нумерация 0...639). Расстояние между чувствительными элементами $d = 8,5$ мкм. Таким образом, получаемое изображение состоит из 480×640 пикселей

¹ Подобная функция распределения возникает в термодинамике при описании тепловых скоростей молекул идеального газа. Скорость молекулы газа v можно представить как сумму большого числа скачков скоростей Δv , возникающих при взаимных столкновениях молекул. Векторная диаграмма, показанная на рис. 7, соответствует этому представлению для двумерного распределения по скорости, где каждый элементарный вектор изображает скачок скорости при соударении. Для двумерного распределения средние значения проекций скоростей $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = 0$. Вероятность того, что после большого числа столкновений вектор v имеет проекции от v_x до $v_x + dv_x$, от v_y до $v_y + dv_y$, определяется распределением Максвелла $\propto \exp[-(v_x^2 + v_y^2)/2\sigma_v^2] dv_x dv_y$, т. е. имеет гауссову форму. Для газа среднеквадратическое отклонение $\sigma_v^2 = \langle v^2 \rangle$ определяется массой молекулы и температурой. Вероятность того, что модуль скорости частицы газа лежит в интервале от v до $v + dv$, пропорциональна $\propto \exp[-v^2/2\sigma_v^2] \cdot 2\pi v dv$, что аналогично (16). Формы функций распределения для комплексной амплитуды поля и скоростей газа основаны на центральной предельной теореме, поэтому совпадают и распределения по интенсивности поля (16) и по энергиям молекул идеального газа.

(англ. pixel = picture element). Интенсивность сигнала в каждом пикселе квантуется в 8-битной шкале и записывается в виде целого числа от 0 до 255 ($2^8 = 256$ уровней интенсивности). Если световой сигнал пре-восходит максимальный, то ему присваивается значение 255 (режим на-сыщения). Наиболее точные результаты обработки изображений дости-гаются в том случае, когда используется весь динамический диапазон фотокамеры, т. е. количество чувствительных элементов, находящихся в режиме насыщения (значение интенсивности 255), минимально. Для контроля режима работы фотокамеры используется режим вывода ги-стограмм интенсивности на экран монитора компьютера.

На рис. 8 показаны гистограммы сигналов фотокамеры при фото-графировании индикаторы рассеяния (рис. 5). По оси абсцисс отложе-на величина сигнала (целое число от 0 до 255), по оси ординат — ко-личество пикселей с соответствующей интенсивностью. Оптимальной яв-ляется ситуация, когда гистограмма в логарифмическом представ-лении (рис. 8б) максимально приближается к прямой (в соответствии с (16)). Приемлемые результаты получаются, когда в режиме насы-щины находится небольшое количество пикселей ($\sim 10^2$). Линейность амплитудной характеристики изображения достигается варьированием режима съемки: яркости, контраста, выдержки (значению выдержки «1» соответствует реальное время 1/30 секунды.). Кроме того, между лазером и линзой можно установить поляроид и с его помощью ре-гулировать интенсивность света. Установка параметров работы каме-ры производится при фотографировании мелких спеклов (индикатора рассеяния, рис. 5), так как количество спеклов в этом случае велико, и экспериментальное распределение интенсивности удовлетворительно со-ответствует теоретическому распределению (16). Рекомендуемые зна-чения параметров указаны на установке.

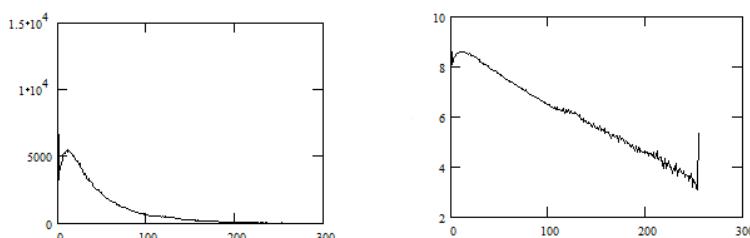


Рис. 8. Гистограмма (а) и ее логарифм (б). Среднее значение сигнала 45, среднеквадратическое отклонение 44. Сигнал превышает порог 255 в 200 пикселях (0,07% от общего числа)

Для обработки фотографий мелких спеклов и определения радиуса индикатрисы служит программа «Индикатриса». Физически установить камеру так, чтобы центр спекл-картины совпадал с центром фоточувствительной матрицы, весьма сложно. Поэтому центр изображения определяется программными средствами, подобно тому, как вычисляется центр масс пластины с переменной плотностью, если вместо распределения масс использовать распределение интенсивностей по пикселям. Затем программа выделяет из всего изображения квадрат около найденного центра. На рис. 5 приведено изображение мелких спеклов внутри выделенного квадрата, а на рис. 9 приведено сечение сигнала вдоль диагонали квадрата. Программа строит гауссовскую поверхность, которая имеет минимальное среднеквадратическое отклонение от матрицы зарегистрированных сигналов.

Вычисления проводятся с безразмерными величинами, и их результаты выдаются в безразмерных числах (пикселях). Для получения правильного значения радиуса индикатрисы ρ_i в размерных единицах необходимо учесть, что расстояние между пикселями составляет $d = 8,5 \text{ мкм}$.

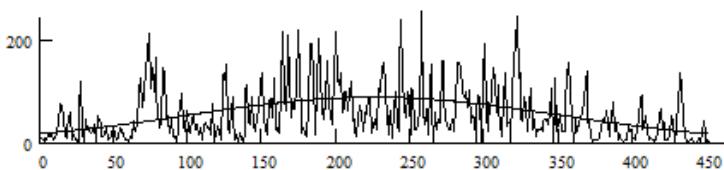


Рис. 9. Развертка сигнала фотокамеры и сечение поверхности средней интенсивности. По оси абсцисс отложен номер пикселя

Определение радиуса корреляции спекл-картины позволяет найти характерный размер лазерного пучка в месте установки матового стекла. Необходимые для этого вычисления реализует программа «Корреляция». Записанная матрица сигналов фотокамеры программно смещается относительно самой себя на малое число пикселей, и при каждом смещении проводятся вычисления корреляционной функции. Смещения проводятся для всех направлений, полученная поверхность аппроксимируется наилучшей гауссовой поверхностью. В работе предлагается определить радиус корреляции спекл-картины и соответственно характерный размер лазерного пучка на матовом стекле для четырех различных значений L_2 .

Определения и формулы, используемые в работе. Проведенный выше теоретический анализ включает в себя следующие основные моменты.

1. *Характеристики матового стекла:*

σ_h — среднеквадратическое отклонение толщины стеклянной пластины от среднего значения.

$\sigma_\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_\lambda - 1)\sigma_h$ — среднеквадратическое отклонение случайной фазы световой волны.

ρ_h — радиус корреляции случайных неровностей матовой поверхности.

$\zeta = \frac{\sigma_h}{\rho_h}$ — параметр шероховатости.

$\langle e^{i\varphi(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})} e^{-i\varphi(\mathbf{r})} \rangle = e^{-\frac{\rho^2}{\rho_\varphi^2}}$ — функция корреляции случайного фазового множителя.

$\rho_\varphi = \frac{\rho_h}{\sigma_\varphi} = \frac{\rho_h}{\sigma_h} \frac{\lambda}{2\pi(n_\lambda - 1)} = \frac{\lambda}{2\pi(n_\lambda - 1)\zeta}$ — радиус корреляции случайного фазового множителя.

2. *Индикаторы рассеяния:*

$\langle I \rangle \propto e^{-\rho^2/\rho_i^2}$ — форма индикаторы.

$\rho_i = \frac{\lambda L_2}{\pi \rho_\varphi} = 2L_2(n_\lambda - 1)\zeta$ — радиус индикаторы.

3. *Статистические характеристики интенсивности спектральных картин:*

$I(r) \sim e^{-r^2/\rho_L^2}$ — форма интенсивности лазерного луча.

$\Psi_I(\rho) = e^{-\rho^2/\rho_c^2}$ — безразмерная функция корреляции интенсивности.

$\rho_c = \frac{\lambda L_2}{\sqrt{2\pi}\rho_L}$ — радиус корреляции интенсивности спектральных картин.

$dN = \frac{N}{I_0} e^{-I/I_0} dI$ — гистограмма сигналов фотокамеры.

$I_0 = \langle I \rangle = \sqrt{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}$ — среднее значение и среднеквадратическое отклонение интенсивности (экспоненциальное распределение).

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается провести качественные наблюдения спектральных картин, получить набор их фотографий, обработать фотографии с помощью компьютера и количественно оценить статистические характеристики спектров.

I. Качественные наблюдения

1. Включите лазер. Поместите в луч лазера матовое стекло, за стеклом установите экран. Перемещая экран вдоль оптической скамьи от рассеивателя, проследите за движением спектров. Убедитесь в применимости

приближения Фраунгофера. Получите изображение индикатрисы рассеяния, см. рис. 5, измерьте необходимые расстояния и оцените параметр шероховатости матового стекла. Получите изображение крупных спеклов, см. рис. 6, оцените диаметр лазерного пучка.

2. На расстоянии 50 см от лазера установите линзу с фокусным расстоянием $f \sim 55$ мм. Контролируя положение лазерного пучка на удаленном экране, проведите центровку линзы. В некоторых прикладных задачах исследуются спекл-картины, возникающие при отражении света от шероховатой поверхности. Проведите наблюдение спекл-картины, возникающие при отражении расширенного пучка лазера от бумажного экрана. При перемещении глаза наблюдателя освещенный участок экрана начинает мерцать.
3. Установите матовое стекло между линзой и её фокальной плоскостью ($f = 55$ мм). Перемещая стекло при помощи установочного винта, отметьте связь направления движения стекла и спеклов. Проделайте такой же опыт, поместив стекло за фокальной плоскостью. Объясните различие направлений смещения стекла и спеклов. Аккуратно перемещая стекло к фокальной плоскости линзы, получите изображение «кипящих» спеклов. По размеру одиночного спекла оцените поперечный диаметр лазерного пучка вблизи фокальной плоскости линзы.

II. Фотографии спеклов

4. Установите между линзой и лазером поляроид. Матовое стекло установите на расстоянии 75 мм от линзы рассеивающей поверхностью от лазера, камеру — на расстояние 20 мм от матовой поверхности рассеивателя (последовательность операций указана в инструкции «Регистрация и обработка изображений»). Необходимо максимально ослабить поляроидом прошедший пучок.
5. Используя инструкцию, получите изображение индикатрисы рассеяния (мелких спеклов). Яркость изображения подбирается выдержкой и поляроидом.

Используя инструкцию, перейдите в режим фотографирования, сделайте фотографию и получите гистограмму оцифрованного сигнала. Форма гистограммы (см. рис. 8) характеризует правильность выбора параметров работы камеры. В режиме насыщения должны работать $\sim 10^2$ пикселей, что регулируется выдержкой и поляроидом. Сделайте и проанализируйте несколько пробных фотографий.

6. Сфотографируйте и запомните картину мелких спеклов. В названии файлов рекомендуется вводить расстояние от линзы до матового стекла и от стекла до матрицы, например, 75_20.

Получите 3 фотографии крупных спеклов, перемещая камеру от стекла шагом 20 мм (файлы 75_40, 75_60, 75_80). Форма гистограммы сигналов для крупных спектров не обязательно должна соответствовать приведенной на рис. 8 (мал объем выборки), контролируйте только количество пикселей в режиме насыщения.

7. Получите фотографию индикатрисы и 3 фотографии крупных спеклов для расстояния между линзой и матовым стеклом 85 мм.

III. Обработка фотографий

В работе используются две программы «Индикатриса» и «Корреляция», написанные в среде Mathcad.

8. Откройте программу «Индикатриса» и обработайте с её помощью полученные Вами фотографии мелких спеклов для двух расстояний линза—матовое стекло. Введите имя фотографии и расстояние линза-стекло L_1 . Зарисуйте в рабочей тетради гистограмму в логарифмическом масштабе, запишите среднее значение и среднеквадратическое отклонение, число пикселей с сигналом 255.

Программа вычисляет среднеквадратические ошибки отклонения сигнала набора гауссовых поверхностей с различными радиусами индикатрисы рассеяния. Обратите внимание на обязательное наличие минимума ошибки для некоторого радиуса индикатрисы. Запишите выбранное значение радиуса в пикселях, миллиметрах, найденный параметр шероховатости матового стекла. Для радиуса корреляции высоты шероховатой поверхности $\rho_h \sim 10$ мкм оцените дисперсию самих шероховатостей σ_h и дисперсию фазы σ_φ . Закройте программу «Индикатриса».

9. Откройте программу «Корреляция». При помощи этой программы обработайте 4 фотографии для расстояний матовое стекло—линза $L_1 = 75$ мм, затем $L_1 = 85$ мм, всего 8 фотографий. Введите имя файла. Программа позволяет развернуть сигнал матрицы по выбранному столбцу (пиксель с номером (0,0) находится в левом верхнем углу изображения). Рекомендуется посмотреть форму случайного сигнала.

Программа вычисляет функцию корреляции интенсивности спектральной картины и находит лучший радиус корреляции, аппроксимируя эту функцию гауссовой поверхностью (по минимуму ошибки аппроксимации). Обратите внимание, что используемая функция корреляции нормирована на единицу при нулевом смещении изображений. В программе приведены сводные таблицы результатов измерений и расчётов. Величина расстояния линза—стекло L_1 или стекло—камера L_2 измеряются в мм, радиус корреляции в пикселях. После обработки каждой фотографии внесите результаты в таблицу и в рабочую тетрадь. Про-

верьте линейность зависимости радиуса корреляции от расстояния матовое стекло—камера. В программе введена ошибка расчётов радиуса корреляции 0,5 пикселя. Занесите графики в рабочую тетрадь, запишите полученные значения радиусов лазерного пучка по уровню интенсивности $1/e$. Закройте программу «Корреляция».

Контрольные вопросы

1. Как возникает спектр-структура и чем она отличается от дифракции Фраунгофера на мелкой сетке?
2. При каких условиях будет наблюдаться спектр-картина при отражении от шероховатой поверхности?
3. Как зависит радиус корреляции фазового множителя от характеристик матовой поверхности, показателя преломления материала?
4. Чем определяется длина вектора $|E_n|$ и угол его поворота на рис. 7?
5. Что такое радиус индикаторы рассеяния и от чего он зависит?
6. Как использовать гистограмму камеры для её настройки?
7. Наблюдалось ли в опыте нарушение условия $\langle e^{i\varphi} \rangle = 0$?

Литература

1. Кингспер А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингспера. — М.: Физматлит, 2001. — С. 433–436.
2. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981 г. — С. 320–326.

ДИФРАКЦИЯ. ФУРЬЕ-ОПТИКА

1. Дифракция

1.1. Постановка задачи. Волновой параметр

Дифракцией, в самом широком смысле слова, называют отклонения в распространении волн от законов геометрической оптики. Частный случай дифракции — огибание волной препятствия и её проникновение в область геометрической тени.

Пусть препятствие (непрозрачный экран с отверстием, расположенный в плоскости $z = 0$) освещается волной, созданной источниками, расположенными слева от экрана. Требуется определить волновое поле справа от экрана, в области $z > 0$ (рис. 3.1), в частности в плоскости наблюдения Π , расположенной на расстоянии z от экрана.

Для решения этой задачи необходимо найти ответ на два основных вопроса. Первый вопрос ставится следующим образом: известно поле $f_s(x,y)$, созданное в плоскости $z = 0$ (в отсутствие экрана) какими-либо «сторонними» источниками, расположенными в области $z < 0$. Затем в плоскость $z = 0$ помещается непрозрачный экран с отверстием. Требуется найти поле $f_0(x,y)$, возникающее в плоскости, непосредственно примыкающей к экрану справа от него (эту плоскость далее будем называть плоскостью $z = 0_+$). Это и есть граничное условие, необходимое для решения дифракционной задачи.

Второй вопрос: каким образом, зная граничное поле $f_0(x,y)$, определить искомое поле $f(x,y,z)$ в области $z > 0$ (т. е. в пространстве справа от экрана).

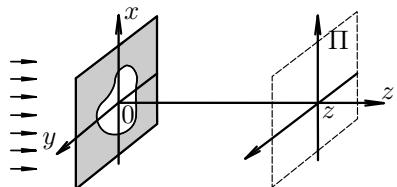


Рис. 3.1. К постановке задачи

Волновой параметр. Основными параметрами, существенно определяющими характер дифракционных явлений, являются длина волны λ , размер отверстия b и расстояние до плоскости наблюдения z . Как показывает дальнейший анализ, характер дифракционных явлений определяется значением **волнового параметра**

$$p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{b}. \quad (3.1)$$

Область значений волнового параметра $p \ll 1$ является областью применимости приближения геометрической оптики. Область значений $p \gg 1$ называется областью **дифракции Фраунгофера** (или дальней волновой зоной). Промежуточная область $p \sim 1$ — областью **дифракции Френеля** (или ближней волновой зоной).

1.2. Границные условия. Функция пропускания транспаранта

Определение граничных условий представляет собой исключительно трудную проблему. Действительно, пусть речь идёт об электромагнитной волне, падающей на проводящий экран с отверстием. Переменное электрическое поле волны порождает на проводящем экране переменные токи, которые в свою очередь индуцируют «вторичную» электромагнитную волну. Эта волна зависит как от физических свойств экрана, так и от геометрии отверстия. Суммарное волновое поле в плоскости $z = 0_+$ представляет собой суперпозицию первичной волны (поля сторонних источников) и вторичной волны, индуцированной токами проводимости, причём электрическое и магнитное поля суммарной волны должны удовлетворять известным в электродинамике граничным условиям. Имеется лишь небольшое число задач, для которых найдено точное решение (например, задача дифракции плоской волны на идеально проводящем шаре).

Мы, следуя Кирхгофу, определим *приближённые* граничные условия следующим образом: в той части плоскости $z = 0_+$, которая затенена непрозрачным экраном, граничное поле полагается равным нулю. На открытой части волнового фронта (т. е. в области отверстия) граничное поле полагается равным полу сторонних источников. Другими словами, в этой области установка экрана с отверстием совершенно не влияет на падающую волну. Итак, граничное поле определяется следующим равенством:

$$f_0(x,y) = \begin{cases} f_s(x,y) & \text{в точках, принадлежащих отверстию,} \\ 0 & \text{в точках, затенённых экраном.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Ещё раз подчеркнём, что граничные условия (3.2) являются приближёнными: наличие экрана в действительности приводит к тому, что поле на отверстии отлично от падающего поля $f_s(x,y)$, и особенно сильно оно искажено вблизи краев отверстия; да и в затенённой области поле отлично от нуля вблизи краев. Однако, как показывает сравнение теоретических выводов, основанных на приближённых граничных условиях Кирхгофа, с экспериментом, согласие оказывается удовлетворительным при условии, что, во-первых, линейные размеры отверстия b велики по сравнению с длиной волны: $b > \lambda$ и, во-вторых, плоскость наблюдения находится на расстоянии, много большем длины волны $z \gg \lambda$.

Равенству (3.2) можно придать другую форму, если ввести функцию пропускания непрозрачного экрана с отверстием $t(x,y)$ согласно формуле

$$t(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если точка } (x,y) \text{ принадлежит отверстию,} \\ 0, & \text{если точка } (x,y) \text{ лежит вне отверстия.} \end{cases}$$

Тогда

$$f_0(x,y) = f_s(x,y) \cdot t(x,y). \quad (3.3)$$

Равенство (3.3) можно обобщить на случай *произвольного тонкого экрана*. Представим себе тонкую пластинку-транспарант, амплитудная пропускаемость которой (прозрачность) меняется от точки к точке по закону $a(x,y)$, а оптическая толщина (произведение показателя преломления на толщину пластинки) — по закону $\Delta(x,y)$. Пусть такая пластинка освещается плоской нормально падающей волной. Что происходит с волной на выходе из пластинки в плоскости $z = 0_+$? Переменная поглощающая способность транспаранта приводит к тому, что амплитуда колебаний на выходе будет функцией координат $a(x,y)$. Переменная оптическая толщина $\Delta(x,y)$ приводит к различному в разных точках набегу фазы $\varphi(x,y) = k \cdot \Delta$, так что распределение фаз колебаний на выходе будет описываться функцией $\varphi(x,y)$.

Определим комплексную пропускаемость транспаранта согласно формуле

$$t(x,y) = a(x,y) e^{i\varphi(x,y)}.$$

Тогда комплексная амплитуда волны на выходе из пластинки может быть найдена по той же формуле (3.3), которая и определяет граничное поле $f_0(x,y)$ для *произвольного тонкого экрана*.

Таким образом, изменение амплитуды волны и набег фазы в любой точке (x,y) тонкой пластинки (транспаранта) рассчитывают вдоль *тонкого луча*, пронизывающего транспарант по нормали в точке (x,y) .

Другими словами, мы полагаем, что распространение волны непосредственно через тонкий экран подчиняется законам геометрической (лучевой) оптики (см. п. 2.5 — область геометрической оптики).

1.2.1. Примеры тонких экранов

Приведём несколько примеров тонких экранов (транспарантов), часто используемых в оптике в качестве дифракционных элементов.

1. Амплитудные экраны

Амплитудная синусоидальная решётка — тонкая пластинка, амплитудная прозрачность которой меняется от точки к точке по закону¹

$$t(x) = \beta(1 + m \cos \Omega x). \quad (3.4)$$

Константа m — глубина модуляции, $\Omega = \frac{2\pi}{d}$ — пространственная частота решётки с периодом d .

Дифракционная решётка, функция пропускания которой показана на рис. 3.2. Это непрозрачный экран с рядом параллельных равноотстоящих щелей, d — период решётки, b — ширина щелей.

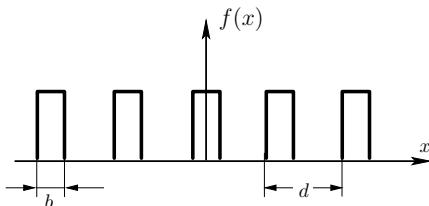


Рис. 3.2. Функция пропускания дифракционной решётки

2. Фазовые экраны

Если амплитудная прозрачность транспаранта не меняется от точки к точке, а изменяется только набег фазы $\varphi(x, y)$, то такой транспарант называется **фазовым**. Функция пропускания фазового экрана $t(x, y) = e^{i\varphi(x, y)}$.

Фазовая синусоидальная решётка

$$t(x) = e^{im \cos \Omega x}, \quad (3.5)$$

¹ Значение $t(x)$ не может превосходить единицу (амплитуда волны на выходе из экрана не может превосходить амплитуду на входе), поэтому в формулу (3.4) введён множитель $\beta < 1$, который во многих случаях, когда это не может вызвать недоразумений, полагают равным единице.

m — глубина модуляции фазы, $\Omega = \frac{2\pi}{d}$ — пространственная частота решётки. При $m \ll 1$ имеем

$$t(x) \simeq 1 + im \cos \Omega x.$$

Тонкая линза. Рассчитаем набег фазы вдоль луча, пронизывающего линзу на расстоянии x от оптической оси (от плоскости, примыкающей к линзе слева, до плоскости, примыкающей к линзе справа). Он равен (рис. 3.3) $knd + k(d_0 - d)$. Интерес представляет лишь относительный набег фазы (по отношению к лучу, пронизывающему линзу вдоль оптической оси). Он равен $knd_0 = knd + kn(d_0 - d)$. Далее, поскольку $d_0 - d = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ и $\sqrt{R^2 - x^2} \approx R - \frac{x^2}{2R}$, где R — радиус кривизны поверхности линзы (последнее означает, что сферическая форма поверхности заменяется параболической), то имеем

$$\varphi(x) = -k(n-1) \frac{x^2}{2R}.$$

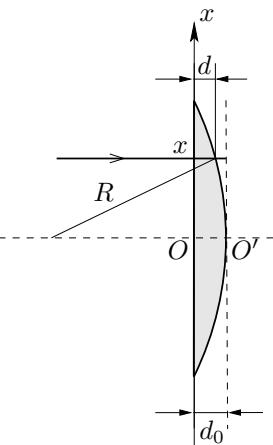


Рис. 3.3. Тонкая линза

Введя обозначение $\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}$ (f — фокусное расстояние линзы), получаем функцию пропускания тонкой линзы:

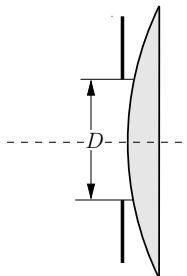
$$t(x) = e^{-i \frac{k}{2f} x^2}. \quad (3.6)$$

В двумерном случае имеем

$$t(x, y) = e^{-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)}. \quad (3.7)$$

Если обе поверхности линзы сферические с радиусами кривизны R_1 и R_2 , то для фокусного расстояния тонкой линзы f легко получить

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$



Любая реальная линза имеет конечные размеры. Можно учесть этот факт, накрыв «идеальную линзу» с функцией пропускания (3.7) непрозрачным экраном с отверстием (диафрагмой) диаметра D , центр которого совпадает с центром линзы (рис. 3.4). Очевидно, функция пропускания задиафрагмированной линзы (т. е. линзы диаметра D) имеет вид

$$t(x, y) = P_D(x, y) e^{-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)}, \quad (3.8)$$

Рис. 3.4. Линза с диафрагмой

где $P_D(x, y)$ — единично-нулевая функция:

$$P_D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x^2 + y^2| \leq (\frac{D}{2})^2, \\ 0 & \text{при } |x^2 + y^2| > (\frac{D}{2})^2. \end{cases}$$

1.3. Принцип Гюйгенса–Френеля

Принцип Гюйгенса–Френеля является одним из широко используемых рецептов для расчёта дифракционных задач².

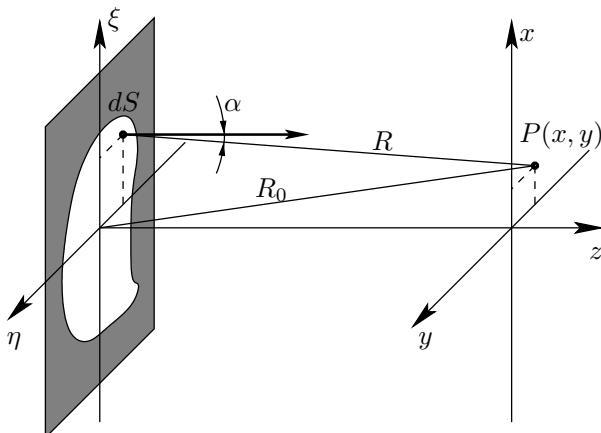


Рис. 3.5. К принципу Гюйгенса–Френеля

Пусть волна света, созданная источниками, расположенными в области $z < 0$, достигла плоскости $z = 0$ (рис. 3.5). Световое поле в этой плоскости нам известно. Пусть его комплексная амплитуда есть

² Строгое обоснование данного принципа на основе рассмотрения волнового уравнения было дано Кирхгофом (см., напр., [1, §43]).

$f_0(x,y) = a_0(x,y)e^{i\varphi_0(x,y)}$, где функции $a_0(x,y)$ и $\varphi_0(x,y)$ описывают распределение амплитуд и фаз колебаний в плоскости $z = 0$. Что происходит с волной далее, по мере её распространения в области $z > 0$, как изменяется структура волны — распределение амплитуд и фаз колебаний, что собой представляет световое колебание в некоторой точке наблюдения P ?

Согласно принципу Гюйгенса, каждую точку (ξ, η) плоскости $z = 0$, куда пришла волна (каждую малую площадку $ds = d\xi d\eta$), можно рассматривать как источник вторичной волны. То есть можно представить себе, что волна возбуждает колебания некоторого фиктивного источника (осциллятора), который и переизлучает вторичную волну. Частота ω этой переизлучённой волны совпадает с частотой исходной монохроматической волны. Френель дополнил принцип Гюйгенса, предложив рассматривать световое колебание в любой точке наблюдения в области $z > 0$ как результат интерференции этих вторичных волн.

Предполагается, что амплитуда излучения вторичного источника пропорциональна амплитуде $a_0(\xi, \eta)$ колебания, созданного реальной волной, пришедшей к площадке ds . Фаза колебания также задаётся фазой $\varphi_0(\xi, \eta)$ пришедшей к элементу ds волны. Напомним, что согласно принятым граничным условиям (3.2) на открытой части волнового фронта, т. е. в области отверстия, волна не искажается препятствием, причём работают лишь вторичные источники, находящиеся на открытой части, не затенённой непрозрачным экраном. Затенённые площадки не переизлучают.

Далее предполагается, что *маленькая площадка ds переизлучает, подобно точечному источнику, сферическую волну*, т. е. для вычисления вклада, который даёт эта площадка в суммарное колебание в точке наблюдения P , нужно учесть *ослабление амплитуды и набег фазы* (так же, как в сферической волне $\frac{1}{R}e^{ikR}$, R — расстояние от площадки ds до точки наблюдения). Наконец, предполагается, что амплитуда колебания пропорциональна видимой из точки наблюдения площади элемента ds , т. е. пропорциональна $ds \cos \alpha$. Таким образом, вклад элемента ds пропорционален величине

$$f_0(\xi, \eta) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \alpha \cdot d\xi d\eta.$$

Полное световое колебание $g(x, y)$ есть результат интерференции всех вторичных волн, посыпаемых всеми площадками ds , расположенными в области отверстия:

$$g(x, y) = K_0 \iint_S f_0(\xi, \eta) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \alpha d\xi d\eta.$$

Можно показать³, что нормировочный коэффициент пропорциональности равен $K_0 = \frac{1}{i\lambda}$.

Таким образом, количественная формулировка принципа Гюйгенса–Френеля принимает вид

$$g(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \iint_S f_0(\xi, \eta) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \alpha d\xi d\eta. \quad (3.9)$$

Приближённые формулировки. При условии, что размер препятствия (например, размер отверстия в непрозрачном экране) мал по сравнению с расстоянием R_0 до точки наблюдения, амплитудный множитель $\frac{1}{R}$, учитывающий уменьшение амплитуды в сферической волне по мере удаления от вторичного источника ds , можно заменить постоянной величиной $\frac{1}{R_0}$ (рис. 3.5). Множитель наклона $\cos \alpha$ также считаем приблизительно одинаковым (и равным единице) для всех вторичных источников, расположенных в области отверстия. Тогда в этом приближении принцип Гюйгенса–Френеля приобретает следующий вид:

$$g(x, y) = \frac{1}{i\lambda R_0} \iint f_0(\xi, \eta) e^{ikR} d\xi d\eta. \quad (3.10)$$

Точное выражение для расстояния R от вторичного источника (малой площадки, расположенной в точке (ξ, η)) до точки наблюдения $P(x, y, z)$ равно

$$R = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = z \sqrt{1 + \frac{(y - \xi)^2}{z^2} + \frac{(y - \eta)^2}{z^2}}. \quad (3.11)$$

Вычисляя величину R , входящую в фазовый множитель e^{ikR} , мы не можем довольствоваться грубой оценкой $R \approx R_0 = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2}$, поскольку ошибка при вычислении фазы колебаний kR должна быть мала по сравнению с π и, следовательно, ошибка в вычислении R мала по сравнению с $\frac{\lambda}{2}$. В противном случае результат интерференции волн, приходящих в точку наблюдения от различных вторичных источников, находящихся в области отверстия, будет найден неверно. Считая поправку к единице под знаком радикала в (3.11) малой, оставим только два члена разложения в ряд Тейлора, полагая, что отброшенные слагаемые вносят малую поправку по сравнению с λ . Это приближение называется *френелевским*:

$$R \approx z + \frac{(x - \xi)^2}{2z} + \frac{(y - \eta)^2}{2z}. \quad (3.12)$$

³ См. литературу, рекомендованную к разделу.

С помощью (3.9) и (3.12) получаем выражение, которое используют обычно для расчёта френелевских дифракционных картин:

$$g(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint f_0(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta. \quad (3.13)$$

Если отверстие освещается плоской волной амплитуды A_0 : $f_0(\xi, \eta) \equiv A_0$, а точка наблюдения лежит на оси z ($x = 0, y = 0$), то из (3.13) получаем

$$g(0, 0) = A_0 \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta. \quad (3.14)$$

1.4. Дифракция Френеля

1.4.1. Дифракционные задачи с осевой симметрией. Спираль Френеля

Дифракция Френеля на круглом отверстии. Будем интересоваться полем на оси отверстия в точке $P(0, 0, z)$, находящейся на расстоянии z от него (рис. 3.6).

Для начала воспользуемся френелевским приближением: из формулы (3.14) имеем

$$g = A_0 \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{\rho \leq r} e^{i\frac{k}{2z}\rho^2} d\xi d\eta, \quad (3.15)$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ — расстояние от площадки $d\xi d\eta$ до центра отверстия, r — радиус отверстия. Перейдём, с учётом осевой симметрии, к интегрированию по кольцам радиуса ρ толщиной $d\rho$ (площадью $2\pi\rho d\rho$). Получаемый интеграл легко берётся, и мы находим комплексную амплитуду поля в точке P :

$$g = A_0 \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_0^r e^{i\frac{k}{2z}\rho^2} 2\pi\rho d\rho = A_0 e^{ikz} \left(1 - e^{-i\frac{k}{2z}r^2} \right). \quad (3.16)$$

Отсюда интенсивность в точке P равна

$$I = |g|^2 = 2I_0 \left(1 - \cos \left(\frac{k}{2z}r^2 \right) \right), \quad (3.17)$$

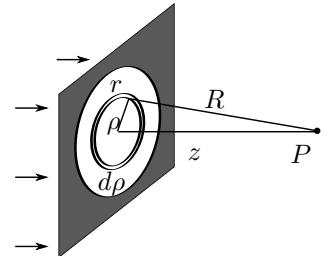


Рис. 3.6. К расчёту поля на оси круглого отверстия

где $I_0 = A_0^2$ — интенсивность исходной плоской волны. Таким образом, интенсивность I_P на оси отверстия зависит от радиуса отверстия и расстояния до него. Минимумы и максимумы I_P достигаются при значениях радиуса отверстия:

$$r_m = \sqrt{m\lambda z}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

где для нечётных m имеем максимум $I_{\max} = 4I_0$, для чётных m — минимум $I_{\min} = 0$.

Формулой (3.17) можно пользоваться, если выполняются предположения, сделанные при выводе (3.14), то есть если в точной формулировке принципа Гюйгенса—Френеля (3.9) можно пренебречь отличием $\cos \alpha / R$ от $1/R_0$. Учтём влияние этого множителя на результаты расчётов на качественном уровне (строгое рассмотрение было бы не наглядным, поскольку возникающие при этом интегралы не берутся в элементарных функциях).

Воспользуемся методом векторных диаграмм. Согласно (3.16), нахождение колебания в точке наблюдения сводится к суммированию вкладов от колец радиуса ρ толщиной $d\rho$ (площадью $dS = 2\pi\rho d\rho$). Изобразим колебание, созданное каждым таким кольцом, в виде вектора $d\mathbf{A}$, длина которого равна соответствующему вкладу в результирующую амплитуду: $dA = a(\rho) dS$, где функция $a(\rho) = A_0 \frac{\cos \alpha}{\lambda R}$ учитывает плавное убывание вклада от кольца с большим радиусом ρ согласно формуле (3.9). Угол наклона векторов к горизонтали φ соответствует фазе экспоненты в (3.15): $\varphi = \frac{k}{2z}\rho^2$. Каждый последующий вектор при этом повёрнут относительно предыдущего на один и тот же угол $d\varphi = \frac{k}{2z}2\rho d\rho = \frac{1}{\lambda z}dS$. Построенные в последовательную цепочку, эти векторы образуют медленно скручивающуюся (из-за убывания модуля dA) к центру спираль (рис. 3.7).

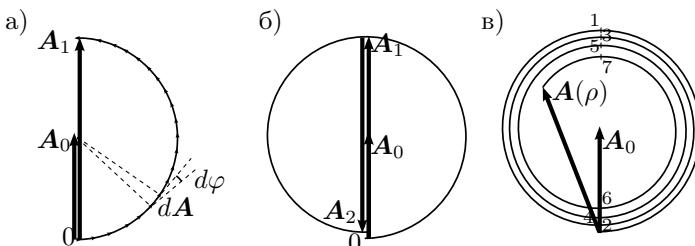


Рис. 3.7. Метод векторных диаграмм для дифракции Френеля на круглом отверстии

Значение ρ , соответствующее изменению фазы колебаний на π , называют радиусом первой зоны Френеля:

$$r_1 = \sqrt{\lambda z}.$$

Будем считать, что при интегрировании в пределах первой зоны вклад от каждого кольца не зависит от ρ , т. е. $a(\rho) \approx \frac{A_0}{i\lambda z}$. При этом складываемые векторы образуют полуокружность радиуса A_0 , а результатом сложения цепочки будет колебание, создаваемое всей первой зоной Френеля, — вектор $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{A}_0$ (см. рис. 3.7а). Этот результат, естественно, соответствует расчёту по формуле (3.17).

Интегрированию по интервалу $r_1 < \rho < r_2$, где $r_2 = \sqrt{2\lambda z}$, на векторной диаграмме соответствует ещё одна полуокружность, на которой фаза векторов меняется от π до 2π . Если учесть плавное убывание $a(\rho)$, радиус этой полуокружности немного меньше радиуса предыдущей. Интервал $r_1 < \rho < r_2$ называют *второй зоной Френеля*, вклад от неё — вектор \mathbf{A}_2 — будет по модулю чуть меньше, чем $2\mathbf{A}_0$ (см. рис. 3.7б). Суммарная амплитуда колебаний от первых двух ($\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$) зон хоть и мала, но отлична от нуля (в отличие от расчёта по (3.17)).

Дальнейшее интегрирование по всем оставшимся зонам даст на векторной диаграмме спираль, медленно скручивающуюся к центру (т. е. к концу вектора \mathbf{A}_0 , поскольку при отсутствии отверстия амплитуда в точке P , очевидно, должна быть равна амплитуде волны, падающей на отверстие), называемую *спиралью Френеля* (см. рис. 3.7в). Размеры зон Френеля определяются соотношением (3.18). Колебание, создаваемое каждой следующей зоной Френеля, находится в противофазе ($\Delta\varphi = \pi$) с предыдущим.

Если открыты зоны с 1-й по n -ю, результирующая амплитуда представляет собой сумму

$$A = \left| \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \right| = A_1 - A_2 + A_3 - \dots,$$

где $A_i \approx A_0$ и медленно убывают с ростом i . Ясно, что если радиус отверстия соответствует нечётному количеству открытых зон Френеля, то в точке P наблюдается максимум амплитуды, если чётному — минимум.

Зонная пластиинка Френеля. Поставим на пути плоской волны с амплитудой A_0 пластиинку, в которой перекрыты все чётные зоны Френеля (для некоторой фиксированной точки наблюдения P на расстоянии z) и оставлены прозрачными нечётные зоны. Амплитуда в точке P есть сумма вкладов всех нечётных зон: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_5 + \dots$. Поскольку все

векторы от нечётных зон сонаправлены (т. е. имеют одну фазу), для получения суммарного колебания нужно сложить их модули, из чего получим интенсивность в точке наблюдения $I = |A_1 + A_3 + A_5 + \dots|^2$. Видно, что пластинка обладает фокусирующими свойствами, существенно увеличивая интенсивность света в точке P .

Если размер пластинки (её радиус r) существенно меньше расстояния z до точки наблюдения, то можно считать, что вклады от всех (нечетных) зон примерно одинаковы и равны A_1 . Число зон Френеля, укладывающихся на пластинке радиуса r , равно $m = r^2/(\lambda z)$ (из них половина зон — нечетные). Положив $m = 1$, можем выразить фокусное расстояние пластинки⁴: $z_0 = r_{\text{п}}^2/\lambda$.

Тонкая линза. Попробуем сконструировать пластинку таким образом, чтобы вклады $d\mathbf{A}$ в амплитуду в точке наблюдения P от всех колец dS , по которым производится интегрирование, имели одну и ту же фазу. Для этого возьмём прозрачную пластинку с некоторым показателем преломления и подберём её толщину таким образом, чтобы за счёт прохождения пластинки волна набирала фазу $\varphi_{\text{п}} = -\frac{k}{2z}\rho^2$. Это значит, что функция пропускания должна быть равна

$$t(\rho) = e^{-i\frac{k}{2z}\rho^2}.$$

Сравнивая это выражение с (3.6), приходим к выводу, что пластинка, делающая синфазными вклады $d\mathbf{A}$ от каждого её участка, есть *тонкая линза* с фокусным расстоянием $f = z$.

Пяtno Пуассона. Рассмотрим дифракцию плоской волны на препятствии в виде круглого диска или шарика.

Относительно точки наблюдения P на оси системы препятствие закрывает некоторое количество (не обязательно целое) зон Френеля. Вклад от них изображается вектором \mathbf{A}' , амплитуда \mathbf{A} в точке P равна вкладу от всех оставшихся перефериальных зон (рис. 3.8). С учётом того, что в сумме все зоны должны давать \mathbf{A}_0 , запишем

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}'.$$

⁴ Заметим, что в отличие от линзы, у зонной пластинки имеется не один, а множество фокусов. Они находятся в точках $z_n = z_0/(2n + 1)$, где n — целое число. Например, при $n = 1$ имеем точку $z_1 = z_0/3$, в которой будет максимум интенсивности, поскольку относительно неё пластинка оставляет открытыми первые три зоны Френеля и перекрывает 4, 5 и 6 и т. д.

Из рис. 3.8 ясно, что, если пренебречь скручиванием спирали Френеля к её центру, \mathbf{A} по модулю равен $A \approx A_0$ независимо от того, сколько зон Френеля перекрывает препятствие (лишь бы их число не было слишком большим).

Таким образом, амплитуда в центре геометрической тени малого препятствия (шарика или диска) остаётся почти такой же, как если бы это препятствие отсутствовало.

1.4.2. Дифракция Френеля на щели

Рассмотрим дифракцию плоской волны амплитуды A_0 на непрозрачном экране, отверстие в котором имеет вид длинной щели, вытянутой вдоль оси η (рис. 3.9). Верхний край щели совпадает с прямой $\xi = b_1$, а нижний — с $\xi = b_2$ (ширина щели $b = b_1 - b_2$). Нас интересует световое колебание в точке P , расположенной на расстоянии z за щелью на оси z . Интегрирование (3.14) по η в бесконечных пределах даёт константу, не представляющую интерес. Тогда с точностью до несущественного постоянного множителя получаем

$$g = A_0 \int_{b_1}^{b_2} e^{\frac{ik}{2z}\xi^2} d\xi. \quad (3.19)$$

Выражение $e^{\frac{ik}{2z}\xi^2} d\xi$ представляет собой вклад в колебание в точке P узкой полоски толщиной $d\xi$ вторичных источников, параллельной оси η , а интеграл есть сумма колебаний от всех полосок от нижнего края щели $\xi = b_2$ до верхнего $\xi = b_1$.

Для расчёта светового поля воспользуемся методом векторных диаграмм. Разбив щель на узкие полоски $d\xi$, параллельные краям щели, изобразим колебание, созданное полоской в точке наблюдения P , в виде вектора, длина которого равна $d\xi$, а угол наклона (относительно горизонтальной оси) $\varphi = \frac{k}{2z}\xi^2$. В частности, вклад полоски вторичных источников, лежащих на оси η ($\xi = 0$), изображается горизонтальным вектором.

Разность фаз $d\varphi$ колебаний от полосок на расстояниях ξ и $\xi + d\xi$ зависит от ξ :

$$d\varphi = \frac{k}{z}\xi d\xi.$$

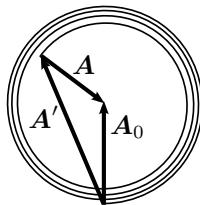


Рис. 3.8. Закрыто $7\frac{1}{3}$ зон Френеля

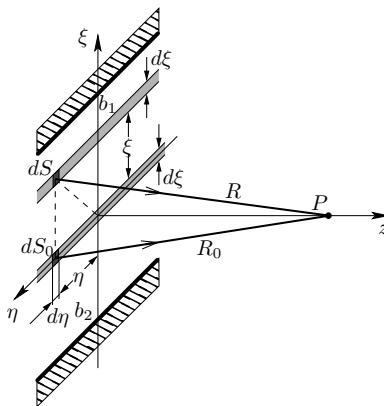


Рис. 3.9. К расчёту дифракции на щели

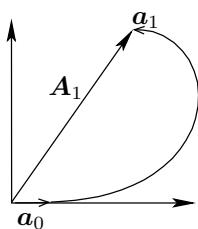


Рис. 3.10. Первая зона Шустера

Поэтому угол между двумя соседними векторами на диаграмме не сохраняется неизменным. По мере удаления от центра (с ростом ξ) угол начинает быстро нарастать — цепочка векторов быстро скручивается (рис. 3.10). Последний из изображённых на рис. 3.10 векторов a_1 антиколлинеарен первому вектору a_0 . Это означает, что вклад последней полоски (находящейся на расстоянии ξ_1 от оси η) равен $e^{i\frac{k}{2z}\xi_1^2}d\xi$ и противофазен вкладу первой полоски (находящейся на оси η). Мы получаем $\frac{k}{2z}\xi_1^2 = \pi$, откуда находим расстояние от данной полоски до оси η :

$$\xi_1 = \sqrt{2\pi z/k} = \sqrt{\lambda z}. \text{ Суммарный вклад всей полосы изображается вектором } A_1, \text{ проведённым из начала первого вектора } a_0 \text{ в конец последнего вектора } a_1.$$

Будем продолжать наше построение, пристраивая на векторной диаграмме вклады последовательно расположенных полосок, все далее отстоящих от оси η . Мы получим ещё один полувиток, причём вектор a_2 изображает вклад полоски, отстоящей от точки наблюдения на расстояние $z + \lambda$ (оно больше, чем расстояние от оси η до точки наблюдения, на длину волны λ), поэтому векторы a_0 и a_2 коллинеарны — разность фаз колебаний $\Delta\varphi = 2\pi$ (рис. 3.11): $\frac{k}{2z}\xi_2^2 = 2\pi$, откуда $\xi_2 = \sqrt{2\lambda z}$. Вектор A_2 изображает суммарный вклад полосы $\xi_1 < \xi < \xi_2$.

В данном случае вместо кольцевых зон Френеля мы имеем зоны в виде полос (их называют зонами Шустера). Вклад от каждой следующей зоны Шустера в колебание в точке наблюдения находится в противофазе (разность фаз π) с вкладом от предыдущей зоны.

Продолжая дальше построение векторной диаграммы, придём к спирали Корню, изображённой на рис. 3.12. Спираль, быстро скручиваясь (благодаря квадратичной зависимости фазы колебаний $\varphi = \frac{k}{2z}\xi^2$ от координаты ξ), приближается к точке S_1 , называемой фокусом спирали. Каждый последующий полувиток спирали изображает вклад в суммарное колебание последовательно расположенных зон Шустера, причём m -я зона Шустера — это полоса, внешний край которой отстоит от точки наблюдения на расстояние $z + m\lambda/2$ и на расстояние

$$\xi_m = \sqrt{m\lambda z}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.20)$$

от оси η . Нижняя половина спирали Корню (от нуля до точки S_2) описывает вклад вторичных источников, расположенных ниже оси η ($\xi < 0$). С ростом ширины щели ($b_1 \rightarrow \infty$, $b_2 \rightarrow -\infty$ на рис. 3.9) работают все более мелкие витки спирали Корню, которые все ближе прилегают к фокусам S_1 и S_2 . Вектор A_0 , соединяющий фокусы спирали, определяет амплитуду колебаний в точке наблюдения при отсутствии препятствия.

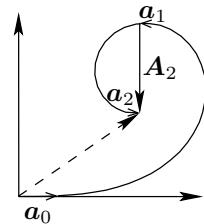


Рис. 3.11. Две зоны Шустера

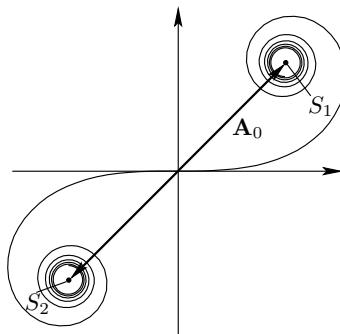


Рис. 3.12. Спираль Корню

Очевидно, амплитуда колебаний в точке P близка к максимальной, если открыты две зоны Шустера (т. е. «работает» один полувиток верх-

ней половины спирали и один полувиток нижней половины, рис. 3.13). Амплитуда колебаний (длина вектора \mathbf{A}) при этом больше, чем амплитуда колебаний A_0 при отсутствии препятствия. Соответствующая ширина щели равна при этом $b = 2\sqrt{\lambda z}$. Если размер щели увеличить таким образом, что $b/2 = \sqrt{2\lambda z}$ (так, что на верхней и нижней полуспирали начинают «работать» полувитки вторых зон Шустера, рис. 3.14), то амплитуда колебаний в точке наблюдения уменьшается: длина вектора \mathbf{A} на рис. 3.14 меньше, чем A_0 .

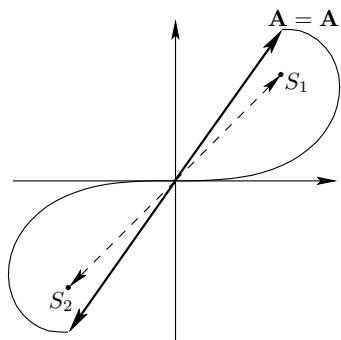


Рис. 3.13. Открыты две первые зоны Шустера

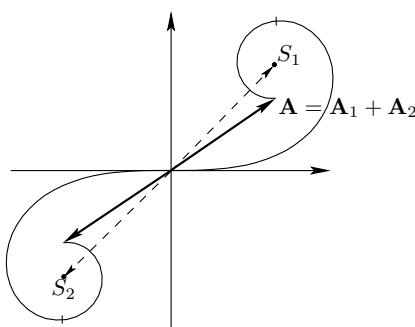


Рис. 3.14. Открыты первые и вторые зоны Шустера

1.4.3. Условия наблюдения дифракции Френеля

Выразим количество открытых зон Френеля (или Шустера) в рассмотренных выше задачах дифракции на отверстии и щели. Согласно формулам (3.18) и (3.20)

$$m = \frac{b^2}{\lambda z} \equiv \frac{1}{p^2},$$

где b — характерный размер препятствия (радиус отверстия или полуширина щели соответственно), а p — волновой параметр, определённый согласно формуле (3.1).

Из проведённого рассмотрения следует, что дифракция Френеля имеет место при небольшом количестве зон Френеля (или Шустера), т. е. при $m \sim 1$, что в терминах волнового параметра соответствует условию (см. п. 1.1)

$$p \sim 1.$$

Большое количество зон Френеля ($m \gg 1$, $p \ll 1$) соответствует предельному переходу к геометрической оптике, а в обратном пределе, когда открыта лишь небольшая доля первой зоны ($m \ll 1$, $p \gg 1$), имеет

место так называемая дифракция Фраунгофера, к рассмотрению которой мы переходим.

1.5. Дифракция Фраунгофера

1.5.1. Дифракция Фраунгофера и преобразование Фурье

Рассмотрим дифракцию на отверстии в плоском экране (см. рис. 3.5), находящемся в плоскости $z = 0$. Пусть точка наблюдения имеет координаты $P(x, y, z)$. Расстояние R от площадки ds в точке экрана (ξ, η) до точки P равно

$$R = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \sqrt{R_0^2 - (2x\xi + 2y\eta) + (\xi^2 + \eta^2)},$$

где $R_0 = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2}$ — расстояние начала координат O до точки наблюдения. Полагая поправку к R_0 под знаком радикала малой, получим приближение

$$R \approx R_0 - \frac{x\xi + y\eta}{R_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0}. \quad (3.21)$$

Используем это выражение для оценки величины kR (показателя экспоненты в (3.10)).

Интересующая нас область изменения переменных (ξ, η) ограничена размерами отверстия в непрозрачном экране (в этой области отлично от нуля граничное поле $f_0(\xi, \eta)$). Пусть максимальный размер отверстия равен b , так что $\xi^2 + \eta^2 \leq b^2$. Если точка наблюдения удалена от препятствия настолько, что выполняется условие

$$\frac{b^2}{R_0} \ll \lambda, \quad (3.22)$$

то последним слагаемым в (3.21) можно пренебречь, и тогда

$$R \approx R_0 - \frac{x\xi}{R_0} - \frac{y\eta}{R_0}.$$

В этом приближении принцип Гюйгенса—Френеля (3.10) запишется в виде

$$g(x, y) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint f_0(\xi, \eta) e^{-i\left(\frac{kx}{R_0}\xi + \frac{ky}{R_0}\eta\right)} d\xi d\eta.$$

Условие (3.22), очевидно, выполняется, если $b^2/(\lambda z) \ll 1$. Этую область мы назвали ранее областью дифракции Фраунгофера (или дальней волновой зоной). Введя переменные

$$u = \frac{kx}{R_0}, \quad v = \frac{ky}{R_0},$$

получим

$$g(u, v) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint f_0(\xi, \eta) e^{-i(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta. \quad (3.23)$$

Эта формула показывает, что поле в плоскости наблюдения $g(u, v)$ есть (с точностью до постоянного множителя) *двумерное преобразование Фурье* граничного поля $f_0(\xi, \eta)$.

Одномерный случай. Формула (3.23) становится особенно наглядной, если граничное поле $f_0(\xi, \eta)$ описывается функцией одной переменной ξ : $f_0(\xi, \eta) \equiv f_0(\xi)$. Тогда с точностью до несущественного постоянного множителя

$$g(u) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi) e^{-iu\xi} d\xi. \quad (3.24)$$

Таким образом, в данном случае картина дифракции Фраунгофера $g(u)$ представляет собой преобразование Фурье граничного поля $f_0(\xi)$ (т. е. поля в плоскости, примыкающей к препятствию).

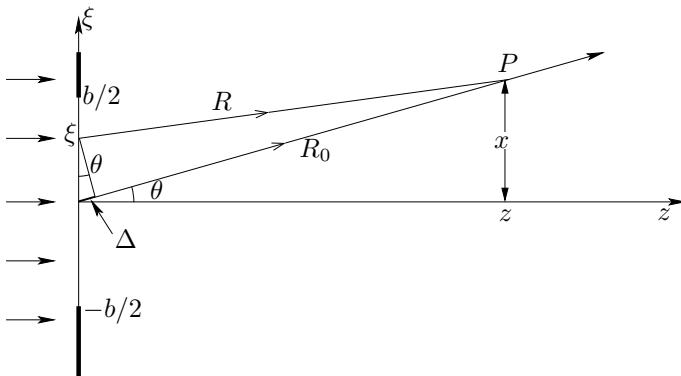


Рис. 3.15. Одномерный случай дифракции Фраунгофера

Определим разность хода волн Δ , приходящих к удалённой точке наблюдения от двух вторичных источников, один из которых находится в точке с координатой ξ , а второй — в точке $\xi = 0$ (рис. 3.15). Удалённость точки P позволяет считать направления волн, идущих из этих точек практически параллельными (рис. 3.16), следовательно, разность их хода равна

$$\Delta = \xi \sin \theta.$$

Соответственно разность фаз колебаний равна $\varphi = -k\xi \sin \theta$, где θ — направление на удалённую точку наблюдения, имеющую координату x :

$$k \sin \theta = \frac{kx}{R_0} = u.$$

Таким образом формула (3.24) представляет собой сумму колебаний, приходящих к точке наблюдения, положение которой на экране определяется *направлением* $\sin \theta = \frac{x}{R_0}$:

$$g(u) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi) e^{-ik \sin \theta \cdot \xi} d\xi. \quad (3.25)$$

Итак, формулы (3.24) или (3.25) означают, что волны, приходящие к точке наблюдения от всех вторичных источников, заполняющих отверстие, можно считать параллельными, если эта точка удалена в зону Фраунгофера.

Формула (3.25) — полный аналог соотношения

$$C(\omega) = \int f_0(t) e^{-i\omega t} dt,$$

где $C(\omega)$ — спектр (преобразование Фурье) процесса $f_0(t)$. Эта аналогия позволяет назвать величину $u = k \sin \theta$ пространственной частотой — аналог частоты ω в спектре колебательного процесса $f_0(t)$.

Ещё раз подчеркнём, что положение точки наблюдения P при условии $b \ll \sqrt{\lambda z}$ определяется углом θ . Если точка наблюдения смещается вдоль фиксированного направления, приближаясь или удаляясь, так что угол θ остаётся неизменным: $\sin \theta = x/R_0 = \text{const}$ (рис. 3.15) (и при этом остаётся справедливо неравенство $b \ll \sqrt{\lambda z}$), то значение интеграла остаётся неизменным. В этом случае картину дифракции можно характеризовать распределением интенсивности света (потока энергии) по углам $I(\theta)$:

$$I(\theta) \propto \left| \int f_0(\xi) e^{-ik \sin \theta \cdot \xi} d\xi \right|^2. \quad (3.26)$$

Распределение (3.26), изображённое в полярных координатах, называют *диаграммой направленности дифракционной картины*.

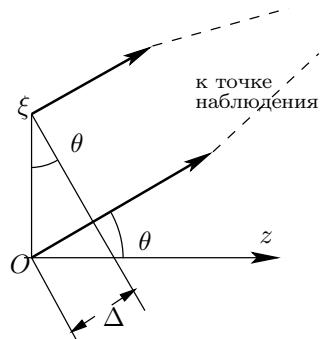


Рис. 3.16. Разность хода

Отсюда следует важное замечание. Для наблюдения дифракционной картины Фраунгофера нет необходимости удаляться от препятствия на большое расстояние (для выполнения условия (3.22)). Достаточно установить за препятствием линзу (причём неважно на каком расстоянии — можно и непосредственно вблизи него) и наблюдать картину в фокальной плоскости линзы. Действительно, волны, идущие от всех вторичных источников в направлении θ , фокусируются линзой с фокусным расстоянием f в точке фокальной плоскости $x = f \operatorname{tg} \theta \approx f \sin \theta$, т. е. каждому направлению соответствует своя точка фокальной плоскости и соответствующее значение $I(\theta)$. Таким образом, картина в фокальной плоскости подобна картине на большом расстоянии $z \gg b^2/\lambda$, отличаясь от неё лишь масштабом (уменьшена в отношении z/f раз).

1.5.2. Дифракция Фраунгофера на щели

Пусть щель шириной b освещается слева плоской нормально падающей волной. Границное поле $f_0(x)$, возникающее в плоскости $z = 0$, примыкающей к непрозрачному экрану со щелью справа, имеет вид, изображённый на рис. 3.17. Согласно (3.25), для нахождения картины Фраунгоферовой дифракции, необходимо найти преобразование Фурье этой функции (эта задача полностью аналогична нахождению спектра прямоугольного импульса — роль длительности импульса здесь играет ширина щели b , а роль частоты — пространственная частота $u = k \sin \theta$). Мы получаем

$$g(\theta) \propto \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ikx \sin \theta} dx \propto \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \theta\right)}{\frac{kb}{2} \sin \theta}. \quad (3.27)$$

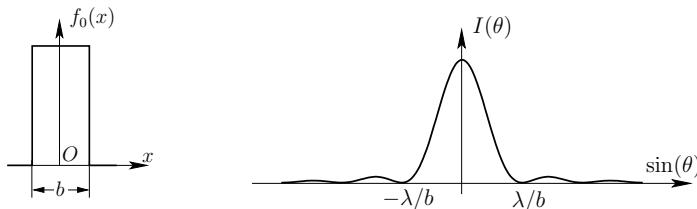


Рис. 3.17.
Поле на
щели

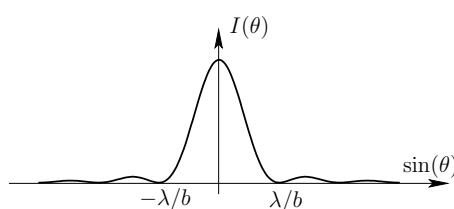


Рис. 3.18. Угловое распределение
интенсивности при дифракции на щели

Распределение интенсивности $I(\theta) = |g(\theta)|^2$ показано на рис. 3.18. Ближайшие к направлению $\theta = 0$ направления, в которых $I(\theta)$ обращает-

ется в нуль, определяются условием $\frac{kb}{2} \sin \theta = \pm \pi$, откуда находим

$$\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{b}. \quad (3.28)$$

Как показывает анализ функции $|g(\theta)|^2$, в угловом конусе

$$|\sin \theta| \leq \frac{\lambda}{b}$$

сосредоточена подавляющая величина потока энергии. Этот угловой конус (интервал углов от $-\frac{\lambda}{b}$ до $\frac{\lambda}{b}$) называют **главным максимумом дифракционной картины**. С помощью (3.27) легко найти, что максимальная интенсивность в ближайшем боковом максимуме, в направлении $\sin \theta = \frac{3\lambda}{2b}$, составляет примерно 0,05 от интенсивности в направлении $\sin \theta = 0$). Мы видим, что сужение щели (уменьшение b) приводит к уширению угла θ : свет расходится от щели во всё более широком интервале углов. Можно сказать и по-другому: с уменьшением ширины щели уширяется пространственный спектр — спектр плоских волн, бегущих от щели.

1.5.3. Дифракция Фраунгофера на двух щелях

Рядом со щелью, дифракцию на которой мы рассмотрели выше (эта картина дифракции описывается функцией $g(\theta)$ в формуле (3.27)), расположим параллельно ещё одну щель на расстоянии d от первой (рис. 3.19).

Расстояние от второй щели до точки наблюдения на величину $\Delta = d \sin \theta$ меньше расстояния между первой щелью и точкой наблюдения. Соответствующая фаза колебания отличается на величину

$$\alpha = -k\Delta = -kd \sin \theta.$$

Поэтому колебательный процесс, созданный второй щелью в точке наблюдения, описывается функцией $g(\theta)e^{i\alpha}$. Волны, посыпаемые в точку наблюдения двумя щелями, интерферируют. Амплитуда суммарного колебательного процесса в точке наблюдения есть $g(\theta) + g(\theta)e^{i\alpha}$.

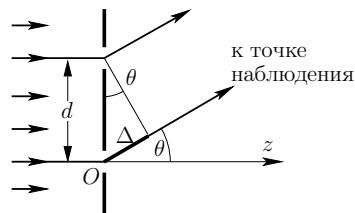


Рис. 3.19. Разность хода

Картина интенсивности⁵

$$I(\theta) = |g(\theta)|^2 \cdot [1 + \cos(kd \sin \theta)]^2 \quad (3.29)$$

показана на рис. 3.20. Первый сомножитель $|g(\theta)|^2$ (домноженный на 4) показан на рисунке пунктирной огибающей — он описывает дифракцию на отдельной щели. Второй сомножитель связан с интерференцией волн, приходящих от двух щелей к точке наблюдения. Расстояние между максимумами (угловую ширину полосы $\Delta(\sin \theta)$) находим из условия $kd \sin \theta = 2\pi$, откуда $\Delta(\sin \theta) = \frac{\lambda}{d}$.

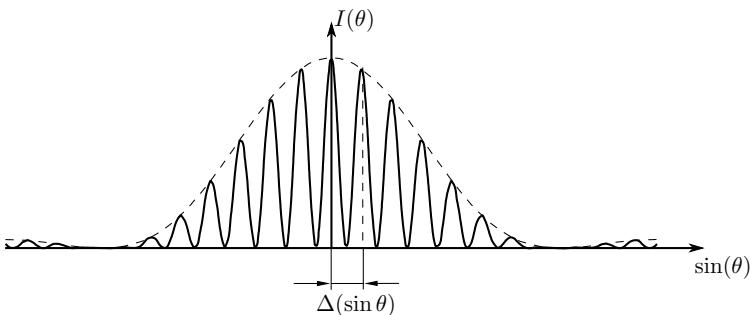


Рис. 3.20. Дифракция Фраунгофера на двух щелях

1.5.4. Дифракция Фраунгофера на решётке

Рассмотрим периодическую структуру одинаковых щелей с периодом d . По аналогии с дифракцией на двух щелях (см. выше) запишем суммарный колебательный процесс в точке наблюдений как сумму колебаний от каждой щели с учётом сдвига фазы. Фаза колебаний от щели номер m (находящейся на расстоянии md от начала отсчёта) на $\alpha_m = m\alpha = -mkd \sin \theta$ отличается от фазы колебаний начальной щели. Если всего решётка имеет N щелей, суммарное колебание в точке наблюдения есть

$$g_N(\theta) = g(\theta) \sum_{m=0}^{N-1} e^{im\alpha}. \quad (3.30)$$

Найдём сумму (3.30), построив векторную диаграмму. Каждое

⁵ Формулу (3.29) можно получить и как преобразование Фурье (3.25) функции пропускания, которая в данном случае представляет собой два «столбика» шириной b , разнесённые на расстояние d .

слагаемое $e^{im\alpha}$ изобразим вектором единичной длины, угол поворота которого относительно горизонтальной оси равен $m\alpha$. Получим цепочку вектором, показанную на рис. 3.21. Суммарное колебание изображается вектором, соединяющим начало и конец цепочки. Радиус окружности, в которую вписана цепочка векторов, равен $R = \frac{1}{2|\sin \alpha/2|}$, длина результирующего вектора равна $2R|\sin(N\alpha/2)|$. Отсюда получаем амплитуду колебания в точке наблюдения⁶:

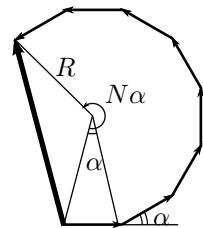


Рис. 3.21

$$|g_N(\theta)| = |g(\theta)| \cdot \left| \frac{\sin \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin \frac{kd \sin \theta}{2}} \right|. \quad (3.31)$$

Распределение интенсивности $I(\theta) = |g_N(\theta)|^2$ по углам описывается формулой

$$I(\theta) = |g(\theta)|^2 \left| \frac{\sin \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin \frac{kd \sin \theta}{2}} \right|^2. \quad (3.32)$$

Здесь первый сомножитель $|g(\theta)|^2$ описывает картину дифракции на отдельной щели (3.27), а второй связан с интерференцией волн от разных щелей. График интенсивности $I(\theta)$ представлен на рис. 3.22.

Характерной особенностью решётки является наличие узких максимумов, в которые идёт подавляющая доля общего потока энергии. Их положения определяются условием

$$d \sin \theta_m = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.33)$$

означающим, что идущие в направлении θ_m волны от всех щелей складываются в одной фазе, так как при этом $-\alpha_m = kd \sin \theta_m = 2\pi m$. Поскольку фазы вкладов от всех щелей одинаковы, амплитуда колебаний

⁶ Сумму (3.30) можно также вычислить, пользуясь известной формулой для суммы геометрической прогрессии N членов с множителем $e^{i\alpha}$:

$$g_N(\theta) = g(\theta) \frac{e^{iN\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1}.$$

Вынося из числителя $e^{iN\alpha}/2$, а из знаменателя $e^{i\alpha}/2$, упрощаем полученное выражение:

$$g_N(\theta) = g(\theta) e^{i(N-1)\alpha/2} \frac{\sin \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin \frac{kd \sin \theta}{2}},$$

из чего, взяв модуль обеих частей, получим (3.31).

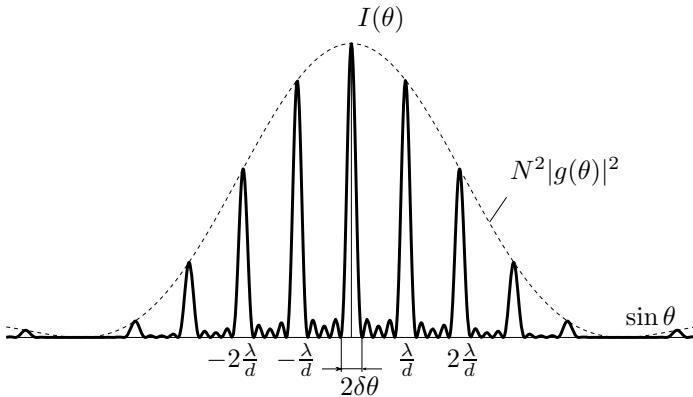


Рис. 3.22. Дифракция Фраунгофера на решётке. Здесь $N = 5$, $d/b = 5$.

в максимумах в N раз большие амплитуды от одной щели, а интенсивность — в N^2 раз больше: $I(\theta) = N^2|g(\theta)|^2$. Этот же результат можно получить непосредственно из (3.32) с учётом того, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi m} \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} = N.$$

Угловую полуширину максимумов $\delta\theta$ оценим, найдя ближайшую к какому-либо θ_m точку $\theta = \theta_m + \delta\theta$, в которой функция (3.32) обращается в нуль. Такая точка соответствует приращению аргумента синуса в числителе (3.32) на π , то есть

$$\delta(kd \sin \theta) = \frac{2\pi}{N}, \quad \text{или} \quad \delta(\sin \theta) = \frac{\lambda}{Nd}. \quad (3.34)$$

Для небольших углов оценка угловой полуширины главных дифракционных максимумов есть

$$\delta\theta \approx \frac{\lambda}{Nd}. \quad (3.35)$$

Целое число m в (3.33) называется порядком главного максимума. Максимальное значение m , как ясно из (3.33), ограничено величиной $m_{\max} = \frac{d}{\lambda}$. Реально же заметными являются максимумы, лежащие в пределах углов $|\sin \theta| \leq \frac{\lambda}{b}$, поскольку в этих пределах распространяется в основном поток энергии от каждой отдельной щели согласно (3.28). Значит, при $b > \lambda$ имеем

$$m_{\max} \leq \frac{d}{b}. \quad (3.36)$$

1.5.5. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии

При дифракции плоской волны на круглом отверстии в непрозрачном экране (рис. 3.23), на удалённой плоскости наблюдения (т. е. при условии $\frac{\sqrt{\lambda}z}{D} \gg 1$, D — диаметр отверстия) образуется картина дифракции⁷, показанная на рис. 3.23: центральное яркое дифракционное пятно (которое называется пятном Эйри) окружено чередующимися светлыми и тёмными кольцами. Соответствующий график $I(\theta)$ представлен на рис. 3.24. Как показывает расчёт, угловая полуширина пятна Эйри (главного максимума в картине $I(\theta)$) определяется условием

$$\boxed{\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}} \quad (3.37)$$

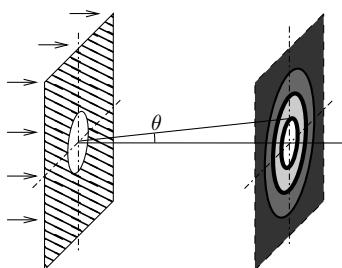


Рис. 3.23. Картина дифракции на круглом отверстии

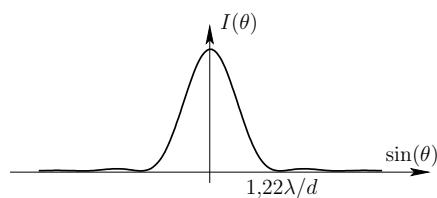


Рис. 3.24. Зависимость интенсивности от угла при дифракции на отверстии

⁷ Эта картина может быть получена как результат двумерного преобразования Фурье согласно (3.23). Соответствующий интеграл не выражается в элементарных функциях, но может быть найден численно или выражен через специальные функции (т. н. функции Бесселя), см. [5].

2. Принципы фурье-оптики

2.1. Спектральный метод решения задачи дифракции

Спектральные методы являются основой при изучении колебаний различной физической природы (электрический колебательный контур, механический осциллятор, электрон в атоме и т.д.). Суть спектрального метода состоит в *представлении внешнего воздействия, возбуждающего колебания в линейной системе, в виде суммы некоторых элементарных воздействий*. Свойство линейности системы (принцип суперпозиции) позволяет найти решение задачи в виде соответствующей суммы откликов — вынужденных колебаний, возбуждаемых в системе отдельным элементарным воздействием. Важнейшей проблемой при использовании спектрального метода является проблема поиска «базиса» — элементарных слагаемых. При изучении стационарных колебательных линейных систем широко используется представление внешнего воздействия $f(t)$ в виде суммы гармонических колебаний различных частот ω_n : $f(t) = \sum c_n e^{i\omega_n t}$. Особая роль гармонических слагаемых $e^{i\omega t}$ обусловлена тем, что гармоническое внешнее воздействие $e^{i\omega t}$ возбуждает в линейной стационарной системе процесс вынужденных колебаний, которые также являются гармоническими и частота которых совпадает с частотой внешнего воздействия.

Применим спектральный метод к исследованию законов распространения волн в задаче дифракции (метод Рэлея), основанный на представлении пространственной структуры дифрагированной волны в виде *суперпозиции плоских волн разных направлений*.

Распространение плоской волны. Рассмотрим плоскую волну, волновой вектор которой \mathbf{k} составляет угол α с осью z (рис. 3.25). Комплексная амплитуда такой волны имеет вид

$$f(x, z) = a e^{i(k_x x + k_z z + \varphi)}, \quad (3.38)$$

где a — амплитуда волны, φ — начальная фаза, $k_x = k \sin \alpha$ и $k_z = k \cos \alpha$ — проекции вектора \mathbf{k} ($k = |\mathbf{k}|$) на оси x и z соответственно (мы рассматриваем для простоты случай $k_y = 0$).

Введём комплексный коэффициент $c = a e^{i\varphi}$ (определяющий и амплитуду, и начальную фазу) и обозначение $k_x = u$. Тогда, имея в виду, что $k_x^2 + k_z^2 = k^2$, т. е. $k_z = \sqrt{k^2 - u^2}$, перепишем комплексную амплитуду волны (3.38) в виде

$$f(x, z) = c e^{i(ux + \sqrt{k^2 - u^2} \cdot z)}. \quad (3.39)$$

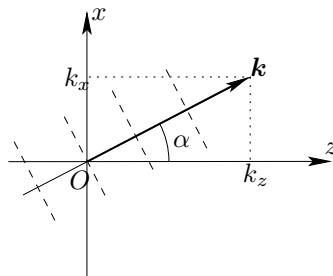


Рис. 3.25. Наклонная плоская волна. Пунктирами показаны волновые поверхности

Волновое поле плоской волны в любой плоскости $z > 0$ можно найти, если известно поле плоской волны в плоскости $z = 0$:

$$f(x, 0) = ce^{iux}, \quad (3.40)$$

откуда

$$f(x, z) = f(x, 0) \cdot e^{i\sqrt{k^2 - u^2}z}, \quad (3.41)$$

т. е. комплексные амплитуды $f(x, 0)$ и $f(x, z)$ отличаются множителем $H(u) = e^{i\sqrt{k^2 - u^2}z}$, определяющим набег фазы плоской волны при распространении между двумя плоскостями, разделенными промежутком z .

Обратим внимание на аналогию (3.40) с выражением $f(t) = ce^{i\omega t}$, которое, как мы знаем, есть не что иное, как комплексная форма записи гармонического колебания частоты ω , причём комплексный множитель c определяет амплитуду колебания и его начальную фазу. На основании этой аналогии величина $u = k \sin \alpha$ может быть названа пространственной частотой. Можно сказать, что *волны разных направлений α — это волны разных пространственных частот*.

Спектр плоских волн. Итак, представим граничное поле $f_0(x)$ в виде суммы плоских волн:

$$f_0(x) = \sum c_n e^{i u_n x}. \quad (3.42)$$

Набор чисел c_n представляет собой пространственный спектр волнового поля $f_0(x)$ в (3.42). Каждое слагаемое в сумме (3.42) есть поле плоской волны (в плоскости $z = 0$), направление α_n которой определяется пространственной частотой $u_n = k \sin \alpha_n$. Подчеркнём, что частота волн ω предполагается заданной и, следовательно, волновое число

$k = |\mathbf{k}| = \omega/v$ всех плоских волн в пространственном разложении (3.42) одинаково.

Напомним, что в общем случае произвольное граничное поле $f_0(x)$ представляется в виде интеграла Фурье:

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int C_0(u) e^{iux} du, \quad (3.43)$$

т. е. в виде непрерывной суммы плоских волн различных пространственных частот. Функция $C_0(u)$ в (3.43) есть преобразование Фурье функции $f_0(x)$. Пространственный спектр $C_0(u)$ (его можно назвать спектром плоских волн) определяется соотношением

$$C_0(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x) e^{-iux} dx. \quad (3.44)$$

Напомним также, что если функция $f_0(x)$ периодична по координате x , то она представляется рядом Фурье:

$$f_0(x) = \sum_n c_n e^{inu_0 x}, \quad (3.45)$$

причём коэффициенты c_n можно найти с помощью формулы

$$c_n = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} f_0(x) e^{-inu_0 x} dx, \quad (3.46)$$

где $d = \frac{2\pi}{u_0}$ — пространственный период функции $f_0(x)$.

Распространение волн. Важно подчеркнуть, что речь идёт о линейной задаче: распространение волны от плоскости $z = 0_+$ до плоскости наблюдения $z = \text{const} > 0$ описывается линейным волновым уравнением (2.1) или, поскольку мы пользуемся комплексным представлением, линейным уравнением Гельмгольца (2.16). Основное свойство линейного уравнения: сумма решений является решением.

Вспомним теперь, что плоская волна

$$f_n(x, z) = c_n e^{i(u_n x + \sqrt{k^2 - u_n^2} z)}$$

есть решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее на плоскости $z = 0_+$ граничному условию

$$f_n(x, 0) = c_n e^{iu_n x},$$

поэтому сумма плоских волн

$$f(x,z) = \sum_n c_n e^{i(u_n x + \sqrt{k^2 - u_n^2} z)} \quad (3.47)$$

есть решение, удовлетворяющее граничному условию (3.42).

В общем случае, если граничное поле $f_0(x)$ представляется непрерывной суперпозицией плоских волн (3.43), искомое решение имеет вид

$$f(x,z) = \int C_0(u) e^{i(ux + \sqrt{k^2 - u^2} z)} du, \quad (3.48)$$

где $C_0(u)$ — преобразование Фурье граничного поля $f_0(x)$ (т. е. спектр плоских волн граничного поля).

В выражениях (3.47) или (3.48) существенным является следующее обстоятельство: каждая слагаемая плоская волна при распространении до плоскости наблюдения $z = \text{const} > 0$ приобретает свой фазовый на-бег $\varphi_n = \sqrt{k^2 - u_n^2} \cdot z$, зависящий от её пространственной частоты u_n . Поэтому фазовые соотношения между слагаемыми плоскими волнами на границе $z = 0$ и в плоскости наблюдения, отстоящей на расстоянии z , различны. Изменение фазовых соотношений между слагаемыми плоскими волнами приводит к тому, что изменяется результат интерференции этих волн. Поэтому результирующее поле $f(x,z)$ в плоскости наблюдения может кардинально отличаться от граничного поля $f_0(x)$ (хотя и то, и другое составлено из суперпозиции тех же бегущих плоских волн).

Передаточная функция. Переписав выражение (3.48) в виде

$$f(x,z) = \int C_0(u) e^{i\sqrt{k^2 - u^2} z} e^{iux} du = \int C(u,z) e^{iux} du,$$

мы видим, что функция

$$C(u,z) = C_0(u) e^{i\sqrt{k^2 - u^2} z} \quad (3.49)$$

представляет собой преобразование Фурье (пространственный спектр) монохроматического волнового поля $f(x,z)$ в плоскости наблюдения (это поле рассматривается как функция координаты x в плоскости наблюдения при фиксированном z).

Множитель

$$H(u) = e^{i\sqrt{k^2 - u^2} z}, \quad (3.50)$$

связывающий пространственные спектры $C_0(u)$ и $C(u,z)$ волнового поля в двух плоскостях, разделённых промежутком свободного пространства z , называют передаточной функцией (или частотной характеристикой) свободного пространства (точно так же частотная характеристика

$H(\omega)$ связывает между собой спектры входного и выходного сигнала линейного временного фильтра). Поэтому участок свободного пространства можно рассматривать как простейший линейный пространственный фильтр, входным сигналом которого является поле $f_0(x)$ во входной плоскости $z = 0_+$, а выходным сигналом — поле $f(x, z)$ в выходной плоскости $z = \text{const} > 0$.

Во многих задачах речь идёт о волновых полях, имеющих достаточнно узкий спектр плоских волн $|u| \ll k$. При этом используют приближённое выражение для частотной характеристики (3.50):

$$H(u) \approx e^{ikz} e^{-i\frac{z}{2k}u^2},$$

которое получается разложением радикала $\sqrt{k^2 - u^2}$ в ряд по степеням малого параметра $(\frac{u}{k})^2$, причём удерживаются лишь два члена разложения:

$$\sqrt{k^2 - u^2}z \approx kz - \frac{z}{2k}u^2. \quad (3.51)$$

При этом точное равенство (3.49) заменяется приближённым:

$$C(u, z) \approx C_0(u) e^{-i\frac{z}{2k}u^2} \quad (3.52)$$

(постоянный фазовый множитель e^{ikz} отброшен).

Итак, метод Рэлея предлагает следующую последовательность решения задач дифракции.

1. Зная поле сторонних источников $f_s(x)$ и функцию пропускания транспаранта $t(x)$, находим с помощью граничных условий (3.2) граничное поле $f_0(x)$.

2. Используя соотношение (3.46) либо (3.44), определяем пространственный спектр граничного поля: набор коэффициентов c_n ряда Фурье либо фурье-образ $C_0(u)$ функции $f_0(x)$.

3. Наконец, с помощью формул (3.47) либо (3.48) определяем искомое поле $f(x, z)$ на расстоянии z от препятствия — тонкого экрана.

2.2. Примеры расчёта дифракции спектральным методом

2.2.1. Дифракция Френеля на амплитудной синусоидальной решётке

Функция пропускания решётки с периодом $d = 2\pi/\Omega$ (см. (3.4)):

$$t(x) = 1 + m \cos \Omega x \quad (m < 1).$$

Пусть решётка освещается плоской нормально падающей волной амплитуды a , т. е. $f_s(x) = ae^{ikx}$. Решётка установлена в плоскости $z = 0$,

поэтому $f_s = a$. Тогда, согласно граничным условиям (3.2),

$$f_0(x) = a(1 + m \cos \Omega x).$$

Здесь для нахождения пространственного спектра поля $f_0(x)$ нет необходимости использовать общее соотношение (3.46). С помощью тождества

$$\cos \Omega x = \frac{1}{2}e^{i\Omega x} + \frac{1}{2}e^{-i\Omega x}$$

находим

$$f_0(x) = a + \frac{am}{2}e^{i\Omega x} + \frac{am}{2}e^{-i\Omega x}. \quad (3.53)$$

Комплексная амплитуда волны в плоскости z , то есть решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющего граничному условию (3.53), имеет (как ясно из соотношений (3.42) и (3.47)) вид

$$f(x, z) = ae^{ikz} + \frac{am}{2}e^{i(\Omega x + \sqrt{k^2 - \Omega^2}z)} + \frac{am}{2}e^{i(-\Omega x + \sqrt{k^2 - \Omega^2}z)}, \quad (3.54)$$

т. е. каждое слагаемое в граничном поле $f_0(x)$ «ответственно» за «свою» волну в области $z > 0$. Первое слагаемое — волна с амплитудой a , бегущая вдоль оси z . Два других слагаемых — волны с амплитудами $\frac{am}{2}$ и пространственными частотами $\pm\Omega$. Эти волны бегут в направлениях $\sin \alpha = \pm\Omega/k = \pm\lambda/d$. Отметим, что в начале координат $x = 0$ в плоскости $z = 0_+$ все три волны создают синфазные колебания.

Полагаем, что период решётки $d = \frac{2\pi}{\Omega}$ существенно больше длины волны λ и, следовательно, частота решётки много меньше k : $\Omega \ll k$. Тогда, используя приближение (3.51), находим

$$f(x, z) = ae^{ikz} + \frac{am}{2}e^{ikz} \cdot e^{i(\Omega x - \frac{z}{2k}\Omega^2)} + \frac{am}{2}e^{ikz} \cdot e^{i(-\Omega x - \frac{z}{2k}\Omega^2)}.$$

После простых преобразований получаем

$$f(x, z) = ae^{ikz} \left[1 + me^{-i\frac{z}{2k}\Omega^2} \cdot \cos \Omega x \right].$$

Последнюю формулу можно использовать для анализа картины дифракции на различных расстояниях z от решётки.

1. На расстояниях z_n , для которых $\frac{z_n}{2k}\Omega^2 = 2\pi n$, т. е. $z_n = \frac{2d^2}{\lambda}n$, имеем $e^{-i\frac{z_n}{2k}\Omega^2} = 1$, поэтому $f(x, z) = ae^{ikz_n}(1 + m \cos \Omega x) = e^{ikz_n} f_0(x)$, т. е. с точностью до фазового множителя воспроизводится граничное поле $f_0(x)$. Воспроизводится, разумеется, наблюдаемая картина интенсивности $I(x, z_n) = I_0(x)$. Найдём её видность $\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$, полагая

глубину модуляции m малой и пренебрегая членами порядка m^2 . Тогда $I(x, z_n) = |f(x, z_n)|^2 \approx a^2(1 + 2m \cos \Omega x)$ и $\mathcal{V} \approx 2m$.

2. На расстояниях z_n , для которых $e^{-i\frac{z_n}{2k}\Omega^2} = i$, т.е. $\frac{z_n}{2k}\Omega^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, имеем $f(x, z) = a(1 + im \cos \Omega x)$. Картина интенсивности $I(x, z_n) \approx a^2 = \text{const}$. Пренебрегая членами порядка m^2 , получаем равномерную, не зависящую от x засветку плоскости наблюдения $\mathcal{V} \approx 0$.

Таким образом, *периодически по z изменяется видность наблюдаемой дифракционной картины*. Причина этих изменений — в различии фазовых набегов трёх плоских волн, бегущих в области $z > 0$ от решётки: осевой волны, бегущей вдоль оси z , и двух боковых волн, бегущих в направлениях $\sin \alpha = \pm \Omega/k = \pm \lambda/d$.

2.2.2. Дифракция на фазовой синусоидальной решётке

Функция пропускания (см. (3.5)):

$$t(x) = e^{im \cos \Omega x}.$$

Будем полагать, что глубина модуляции фазы мала, т.е. $m \ll 1$. Тогда

$$t(x) \approx 1 + im \cos \Omega x = 1 + \frac{im}{2} e^{i\Omega x} + \frac{im}{2} e^{-i\Omega x}.$$

При освещении этой решётки плоской нормально падающей волной амплитуды a имеем за решёткой (при $z > 0$)

$$f(x, z) = ae^{ikz} + \frac{iam}{2} e^{i(\Omega x + \sqrt{k^2 - \Omega^2} z)} + \frac{iam}{2} e^{i(-\Omega x + \sqrt{k^2 - \Omega^2} z)}.$$

Сравнивая с (3.54), видим, что три волны имеют те же амплитуды и направление распространения, что и в случае амплитудной решётки. Отличие лишь в начальных фазах: множитель $i = e^{i\pi/2}$ во втором и третьем слагаемых показывает, что колебания, созданные наклонными волнами (в начале координат $x = 0$ граничной плоскости $z = 0_+$), отстают по фазе на $\pi/2$ от колебания осевой волны (бегущей в направлении оси z).

2.3. Дифракция Френеля на периодических структурах.

Эффект Талбота (саморепродукция)

Примером периодической структуры является экран с периодически расположенными одинаковыми элементами, например, параллельными щелями одинаковой ширины b , расположенными на одинаковом расстоянии d друг от друга. Пусть такой экран (решётка) освещается слева плоской нормально падающей волной (длина волны λ).

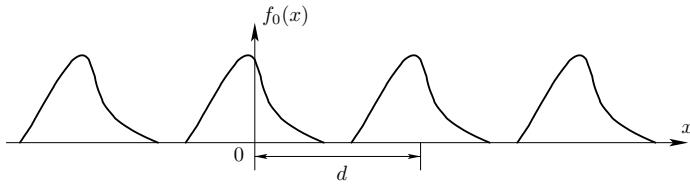


Рис. 3.26. Периодическая структура

Согласно граничным условиям Кирхгофа (3.2) на выходе из экрана (в плоскости, примыкающей к нему справа) получаем световое поле, комплексная амплитуда которого $f_0(x)$ является периодической функцией с периодом d (рис. 3.26), которую можно представить в виде ряда Фурье:

$$f_0(x) = \sum c_n e^{in\frac{2\pi}{d}x}. \quad (3.55)$$

Каждое слагаемое ряда (3.55) представляет собой поле плоской волны, пространственная частота которой $u_n = n\frac{2\pi}{d}$ определяет направление волнового вектора \mathbf{k}_n ($u_n = k \sin \alpha_n$) этой волны, т. е. $\sin \alpha_n = n\frac{\lambda}{d}$. Согласно (3.47), комплексная амплитуда волны в плоскости наблюдения, отстоящей на расстоянии z от решётки, имеет вид

$$f(x, z) = \sum c_n e^{i(u_n x + \sqrt{k^2 - u_n^2} z)}.$$

Фаза n -й плоской волны в плоскости $z = \text{const}$ равна $\varphi_n = \sqrt{k^2 - u_n^2} z \approx kz - \frac{zu_n^2}{2k}$ (здесь использовано приближение (3.51)). Сравним набег фазы n -й плоской волны с набегом фазы φ_0 плоской волны, бегущей вдоль оси z : $\varphi_0 = kz$. Мы получаем

$$\Delta\varphi_n = \varphi_0 - \varphi_n = \frac{z}{2k} \left(\frac{2\pi}{d} \right)^2 n^2 = \pi \frac{\lambda z}{d^2} n^2. \quad (3.56)$$

Рассмотрим плоскость наблюдения, отстоящую от плоскости решётки на расстояние

$$z_1 = \frac{2d^2}{\lambda}. \quad (3.57)$$

(Отметим, что параметр $p = \frac{\sqrt{\lambda z_1}}{d}$ оказывается при этом порядка единицы, т. е. мы имеем дело с областью френелевской дифракции.) В этой плоскости имеем $\Delta\varphi_n = 2\pi n^2$, т. е. относительный набег фазы всех плоских волн кратен величине 2π . Очевидно, что и разность фазовых набегов любых двух волн (с пространственными частотами $n_1 2\pi/d$ и

$n_2 2\pi/d$), равная $2\pi(n_1^2 - n_2^2)$, также кратна 2π . Но изменение разности фаз колебаний на величину, кратную 2π , ничего не меняет в суммарном колебании. Мы пришли к замечательному результату: фазовые соотношения между слагаемыми плоскими волнами оказались одинаковыми как в плоскости, примыкающей к решётке (где сумма плоских волн (3.55) образовала граничное периодическое поле $f_0(x)$), так и в плоскости (3.57). Однократность (с точностью до величины, кратной 2π) фазовых соотношений слагаемых плоских волн приводит к тому, что одинаков и результат интерференции этих плоских волн, т. е. световое поле в плоскости z_1 отличается от граничного поля $f_0(x)$ лишь постоянным фазовым множителем e^{ikz} :

$$f(x, z_1) = e^{ikz_1} f_0(x).$$

Мы наблюдаем в плоскости z_1 периодическую структуру, тождественно повторяющую граничное поле $f_0(x)$. Очевидно также, что такое восстановление изображения периодической структуры повторяется на расстояниях, кратных z_1 :

$$z_m = m \frac{2d^2}{\lambda} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (3.58)$$

Описанный эффект называют **эффектом самовоспроизведения**, или (по имени первооткрывателя) **эффектом Талбота**.

2.4. Спектр плоских волн при дифракции на щели. Соотношение неопределённостей

Пусть щель в непрозрачном экране (ширина щели b) освещается нормально падающей плоской волной единичной амплитуды (рис. 3.27). Тогда согласно (3.3) в плоскости $z = 0_+$, примыкающей к щели справа от неё, имеем

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq b, \\ 0, & |x| > b. \end{cases}$$

Пространственный спектр граничного поля находим с помощью (3.44)

$$C_0(u) = b \frac{\sin \frac{b}{2}u}{\frac{b}{2}u}. \quad (3.59)$$

Последняя формула совпадает с (3.27) при $u = k \sin \theta$ — картиной дифракции Фраунгофера на щели.

Спектр $C_0(u)$ показан на рис. 3.28. Область значений Δu , в которой функция заметно отлична от нуля, называют обычно **шириной спектра**.

Как видно из графика, её можно оценить по ширине главного максимума функции $C_0(u)$

$$|\Delta u| \lesssim \frac{2\pi}{b}. \quad (3.60)$$

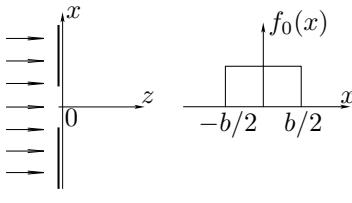


Рис. 3.27. Функция пропускания щели

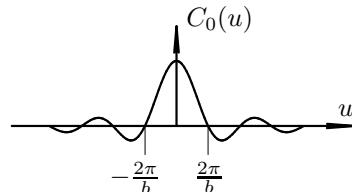


Рис. 3.28. Спектр плоских волн

В общем случае справедливо соотношение неопределённостей, связывающее протяжённость Δx граничного поля с шириной Δu его пространственного спектра⁸:

$$\Delta x \cdot \Delta u \sim 2\pi. \quad (3.61)$$

Пространственная протяжённость граничного поля определяется характерным размером препятствия, в нашем примере — размером b отверстия в непрозрачном экране. Разброс пространственных частот определяет разброс направлений слагаемых плоских волн за отверстием:

$$\Delta u = k \Delta(\sin \alpha),$$

откуда $\Delta(\sin \alpha) \approx \lambda/b$ или, для малых углов,

$$\Delta \alpha \approx \frac{\lambda}{b}.$$

Это и есть дифракционная расходимость пучка света за отверстием размера b .

⁸ Математически задача не отличается от нахождения спектра прямоугольного импульса. Здесь роль длительности импульса τ играет ширина щели b , а роль частоты ω — пространственная частота u . Напомним о соотношении, связывающем длительность сигнала Δt с шириной его спектра $\Delta \omega$ (соотношении неопределённостей): $\Delta t \Delta \omega \sim 2\pi$.

2.5. Область геометрической оптики

2.5.1. Условие применимости геометрической оптики

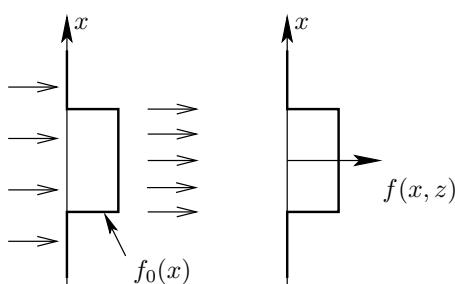


Рис. 3.29. Преобразование поля волны в условиях геометрической оптики

Хорошо известно, что в некоторых случаях (когда плоскость наблюдения отстоит недалеко от препятствия или когда размеры препятствия, например отверстия в непрозрачном экране, достаточно велики) никакой дифракции не наблюдается: картина в плоскости, недалеко отстоящей от препятствия, оказывается подобной картине в плоскости, примыкающей к препятствию,

то есть поле $f(x, z)$ получается как бы геометрическим проецированием (с помощью лучей) граничного поля $f_0(x)$ — ситуация, показанная на рис. 3.29. Итак, выясним условия, когда выводы, основанные на представлениях геометрической (лучевой) оптики, справедливы.

Пусть щель в непрозрачном экране (ширина щели b) освещается плоской нормально падающей волной с амплитудой a . Тогда граничное поле $f_0(x)$ имеет вид, показанный на рис. 3.27, а его пространственный спектр $C(u)$ (фурье-преобразование функции $f_0(x)$) показан на рис. 3.28.

Как мы уже отмечали, интервал Δu пространственных частот плоских волн, имеющих заметную амплитуду, ограничен величиной $|\Delta u| < \frac{2\pi}{b}$. Эта оценка справедлива по порядку величины и в общем случае, как следует из соотношения неопределённостей.

Для плоской волны, бегущей вдоль оси z ($u = 0$), набег фазы при распространении до плоскости наблюдения равен kz . Для волны с пространственной частотой u он равен $\varphi(u) = \sqrt{k^2 - u^2} \cdot z$, или приближённо (см. (3.51)) $\varphi(u) \approx kz - \frac{z}{2k}u^2$. Разность фазовых набегов не превышает величины

$$\Delta\varphi < \frac{z}{2k} \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 = \pi \frac{\lambda z}{b^2}. \quad (3.62)$$

Если эта разность много меньше величины π , то можно считать, что все плоские волны из интересующего нас интервала $|u| < \frac{2\pi}{b}$ приобретают один и тот же фазовый набег, равный kz . Следовательно, фазовые соотношения между плоскими волнами, образующими гранич-

ное поле $f_0(x)$, и теми же плоскими волнами в плоскости наблюдения $z = \text{const} > 0$ практически одинаковы. Значит, интерференция этих плоских волн даёт в плоскости наблюдения суммарное поле, которое (с точностью до фазового множителя e^{ikz}) тождественно повторяет граничное поле $f_0(x)$:

$$f(x,z) = e^{ikz} f_0(x).$$

При этом картина интенсивности $I(x,z)$ тождественно повторяет картину на границе $I(x,z) = I_0(x) = |f_0(x)|^2$, т. е. получается как бы геометрическим проецированием изображения щели на плоскость наблюдения.

Как следует из (3.62), условие $\Delta\varphi \ll \pi$ выполнено, если

$$p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{b} \ll 1. \quad (3.63)$$

Это и есть *условие применимости геометрической оптики*. При любых фиксированных z и b это условие выполняется, если $\lambda \rightarrow 0$, а при любом фиксированном λ законы геометрической оптики работают, как следует из неравенства (3.63), при достаточно малых z и (или) при достаточно больших b .

2.5.2. Тонкий транспарант

Найдём условия, при которых транспарант можно считать тонким, то есть поля на входе и выходе транспаранта можно считать связанными граничным условием (3.3). Пусть толщина транспаранта (расстояние между плоскостью, примыкающей к транспаранту слева $z = 0$, и плоскостью $z = 0_+$, примыкающей к нему справа) равна L . Рассмотрим тонкий луч света диаметром b , пронизывающий транспарант по нормали (рис. 3.30).

Для того чтобы прохождение луча могло быть описано законами геометрической оптики (как того требует граничное условие (3.3)), необходимо выполнение двух условий.

Во-первых, должна быть мала дифракционная расходимость луча при прохождении транспаранта — условие геометрической оптики (3.63):

$$b \ll \sqrt{\lambda L}. \quad (3.64)$$

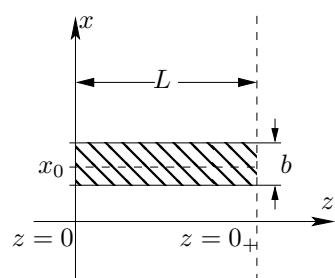


Рис. 3.30. Луч, проходящий через тонкий транспарант

И, во-вторых, луч должен быть «тонким»: амплитуда и фаза волны в сечении луча должны слабо меняться при прохождении транспаранта. Выразим это условие количественно. Пусть $t(x) = a(x)e^{i\varphi(x)}$ — комплексная пропускаемость транспаранта, где $a(x)$ — амплитудная прозрачность, $\varphi(x) = kLn(x)$ — набег фазы. Разность амплитуд и фаз в сечении луча после прохождения транспаранта (между точками $x = x_0 - b/2$ и $x = x_0 + b/2$ в плоскости $z = 0_+$ на рис. 3.30) составит $\Delta a \approx \frac{da}{dx}b$ и $\Delta\varphi \approx \frac{d\varphi}{dx}b = kLb\frac{dn}{dx}$ соответственно. Условие их малости можно записать в виде

$$\Delta a \approx \frac{da}{dx}b \ll a, \quad \Delta\varphi \approx kLb\frac{dn}{dx} \ll \pi. \quad (3.65)$$

Условие (3.64) совместно со вторым неравенством (3.65) даёт

$$\sqrt{\lambda L} \ll b \ll \frac{\lambda}{2L\frac{dn}{dx}}.$$

Следовательно, достаточно требовать, чтобы толщина транспаранта L и неоднородность показателя преломления $\frac{dn}{dx}$ удовлетворяли условию

$$\frac{dn}{dx} \ll \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\lambda}{L}}. \quad (3.66)$$

2.5.3. Что такое параллельный пучок света

Расположим на пути наклонной плоской волны $f_s(x) = ae^{ik \sin \alpha \cdot x}$ с пространственной частотой $u_0 = k \sin \alpha$ диафрагму-щель ширины b (рис. 3.31). В плоскости $z = 0_+$, примыкающей к щели справа, получаем

$$f_0(x) = \begin{cases} ae^{ik \sin \alpha \cdot x} & \text{при } |x| \leq \frac{b}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{b}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, за щелью в области $z > 0$ вместо идеализированной плоской волны, амплитуда колебаний которой во всех точках волновой поверхности (а следовательно, при всех $-\infty < x < \infty$ отлична от нуля), мы получаем *параллельный пучок света*, направление которого (угол α) совпадает с направлением плоской волны, падающей на щель-диафрагму, поперечное сечение пучка есть $|x| \leq \frac{b}{2}$. Ясно, что пучок света ограниченной протяжённости — это уже не плоская волна с пространственной частотой u_0 , это — *пакет плоских волн*, который образован плоскими волнами с пространственными частотами

$$C_0(u) = \frac{\sin \left[\frac{b}{2}(u - u_0) \right]}{\frac{b}{2}(u - u_0)} \quad (3.67)$$

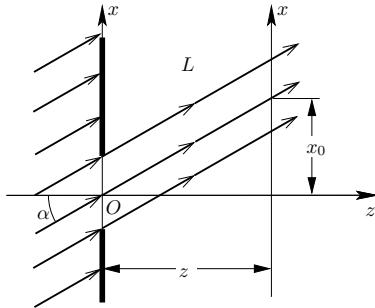


Рис. 3.31. Наклонный параллельный пучок

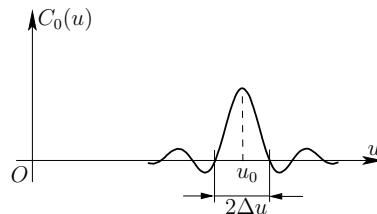


Рис. 3.32. Пространственный спектр параллельного пучка

($C_0(u)$ — фурье-образ поля $f_0(x)$, рис. 3.32). Итак, пропустив плоскую волну через диафрагму шириной b , мы получаем пакет плоских волн с несущей частотой u_0 (центральной частотой пакета) и разбросом частот $|\Delta u| \leq \frac{2\pi}{b}$. Заметим, что при смещении щелевой диафрагмы в плоскости $z = 0$ вверх на расстояние x_0 мы получим спектр

$$C_1(u) = C_0(u)e^{-i(u-u_0)x_0}. \quad (3.68)$$

(Смещение функции $f_0(x)$ по координате x на величину x_0 приводит к умножению её спектра на линейный фазовый множитель $e^{-i(u-u_0)x_0}$.)

Что происходит с волновым пакетом, имеющим пространственный спектр $C_0(u)$ при распространении в области $z > 0$? На расстоянии z набег фазы для несущей частоты пакета u_0 равен $\varphi_0 \approx kz - \frac{z}{2k}u_0^2$. Для волны с пространственной частотой $u_0 + \Delta u$ (напоминаем, нас интересует область частот $|\Delta u| < \frac{2\pi}{b}$) набег фазы равен

$$\varphi = kz - \frac{z}{2k}(u_0 + \Delta u)^2 = kz - \frac{z}{2k}u_0^2 - \frac{z}{k}u_0 \cdot \Delta u - \frac{z}{2k}(\Delta u)^2.$$

Разность фазовых набегов

$$\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi = \frac{z}{k}u_0 \cdot \Delta u + \frac{z}{2k}(\Delta u)^2$$

не превышает величины

$$\Delta\varphi = z \sin \alpha \cdot \Delta u + \pi \frac{\lambda z}{b^2}.$$

Если условие (3.63) геометрической оптики выполнено, то, отбросив второе слагаемое, получим

$$\Delta\varphi = z \cdot \sin \alpha (u - u_0).$$

Таким образом, спектр пакета на расстоянии z от диафрагмы есть

$$C(u) \sim C_0(u) e^{-i\frac{z}{2k} u_0^2} e^{-iz \sin \alpha (u - u_0)}.$$

Последнее равенство означает, что форма волнового пакета остаётся неизменной, т. е. параллельный пучок света, распространяясь до плоскости z , остаётся параллельным пучком с неизменным поперечным сечением и направлением α , лишь приобретает набег фазы (такой же, как у плоской волны с пространственной частотой u_0) и смещаюсь в поперечном направлении (вдоль оси x) на величину $x_0 = z \sin \alpha$ (сравните с (3.68)).

Если условие (3.63) не выполнено, то имеет место пространственная дисперсия: фазовые набеги разных плоских волн (разных пространственных частот), образующих волновой пакет, оказываются различными — волновой пакет «расплывается». В частности, на расстояниях $z \gg \frac{b^2}{\lambda}$ (область дифракции Фраунгофера) область значений Δx , где амплитуда колебаний отлична от нуля, определяется шириной главного максимума дифракционной картины $|\Delta x| = \frac{\lambda}{b} z \gg b$. Таким образом, термин «параллельный пучок света» становится бессмысленным, если речь идёт о распространении волны конечного поперечного сечения $|x| < b$ на расстояния, не удовлетворяющие условию $z \ll \frac{b^2}{\lambda}$.

2.6. Поле в фокальной плоскости линзы. Пространственное преобразование Фурье

Как известно, линза фокусирует параллельный пучок света: плоская волна, бегущая в направлении α (рис. 3.33), т. е. имеющая пространственную частоту $u = k \sin \alpha$, фокусируется линзой в точку фокальной плоскости с координатой

$$x = f \operatorname{tg} \alpha \approx f \sin \alpha = \frac{f u}{k}. \quad (3.69)$$

Имеется, как мы видим, взаимно однозначное соответствие между точками фокальной плоскости и пространственными частотами плоских волн, которые в эти точки фокусируются. Оказывается, взаимно однозначное соответствие имеет место также и между *амплитудами* и *фазами* колебаний в точках фокальной плоскости и соответствующих им плоских волн.

Пусть на линзу падает произвольная волна. Во входной плоскости Π_1 , отстоящей от линзы на расстоянии z , волна имеет комплексную амплитуду $f_0(x)$. Представим эту волну в виде суперпозиции плоских волн разных направлений α_n , т. е. комплексную амплитуду этой волны

представим в виде (3.42). Плоская волна $c_n e^{i u_n x}$, соответствующая одному из слагаемых, показана на рис. 3.33: её волновой вектор составляет угол $\alpha = \alpha_n$ ($\sin \alpha_n = \frac{u_n}{k}$) с оптической осью. Коэффициент $c_n = a_n e^{i \varphi_n}$ определяет амплитуду плоской волны a_n и начальную фазу φ_n (фазу колебаний в точке $\xi = 0$ плоскости Π_1 ; такая же и фаза колебаний в точке P_1 , лежащей на той же волновой поверхности AA').

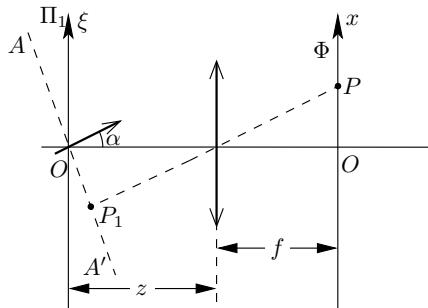


Рис. 3.33. Плоская волна фокусируется в точку фокальной плоскости

Очевидно, что амплитуда колебаний в точке P фокальной плоскости пропорциональна амплитуде a_n плоской волны, которая в эту точку сфокусировалась. Найдём, каковы *фазовые* соотношения между колебаниями в разных точках фокальной плоскости. Ясно, что колебание в точке P отстает по фазе от колебания в точке P_1 (а значит, и в точке $\xi = 0$ входной плоскости), причём разность фаз определяется длиной оптического пути $P_1 P$: прямая $P_1 P$ перпендикулярна в каждой точке волновым поверхностям — плоским поверхностям в волне, падающей на линзу, и сферическим в волне, прошедшей через линзу. (Оптический путь $P_1 P$ включает в себя и часть пути, проходящего непосредственно в линзе.) Пусть соответствующая пути $P_1 P$ задержка по фазе равна ψ_n . Тогда фаза колебания в точке P фокальной плоскости равна $\varphi_n + \psi_n$, а комплексную амплитуду колебаний в этой точке можно записать в виде $f(x_n) \sim a_n e^{i(\varphi_n + \psi_n)} = c_n e^{i\psi_n}$.

Слагаемому $c_0 e^{i u_0 x}$ (при $u_0 = 0$) соответствует плоская волна, бегущая вдоль оптической оси ($\alpha = 0$). Она фокусируется в начало координат $x = 0$ фокальной плоскости Φ . Коэффициент $c_0 = a_0 e^{i \varphi_0}$ определяет амплитуду a_0 этой волны и её начальную фазу φ_0 , т. е. фазу колебаний в точке O входной плоскости Π_1 . Задержка по фазе ψ_0 в точке $x = 0$ фокальной плоскости Φ , куда эта волна сфокусировалась, определяется длиной оптического пути OO . Комплексная амплитуда колебаний в этой точке есть $f(0) \sim a_0 e^{i(\varphi_0 + \psi_0)} = c_0 e^{i\psi_0}$.

Пусть $z = f$, т. е. плоскость Π_1 — это передняя фокальная плоскость линзы. Легко видеть, что в приближении малых углов ($\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$) оптические пути $P_1P = z \cos \alpha + \frac{f}{\cos \alpha} + \Delta_0$ и $OO = z + f + \Delta_0$ (где Δ_0 — оптический путь, проходящий непосредственно через линзу на главной оптической оси) равны при $z = f$, т. е. $\psi_n = \psi_0$ (для любой n -й плоской волны в сумме (3.42)).

Однаковость для всех плоских волн фазовых задержек ψ_n означает, что *фазовые соотношения между колебаниями в разных точках задней фокальной плоскости, куда эти волны сфокусировались, таковы же, как и фазовые соотношения между колебаниями, которые создают эти волны в начале координат передней фокальной плоскости*. Таким образом, волновое поле в задней фокальной плоскости линзы правильно воспроизводит не только амплитудные соотношения между плоскими волнами разных пространственных частот, но и фазовые соотношения без искажений, т. е. *картина поля в фокальной плоскости воспроизводит пространственный спектр (пространственное преобразование Фурье) падающей на линзу волны*.

Опуская несущественный постоянный фазовый множитель $e^{i\psi_0}$ (одинаковый для всех слагаемых плоских волн разных пространственных частот u_n), получаем $f(x_n) = c_n = C(\frac{kx_n}{f})$. Последнее равенство справедливо для любой точки x_n фокальной плоскости. Если спектр плоских волн непрерывен, т. е. волна, падающая на линзу, состоит из плоских волн любых направлений, то, опуская индекс n , находим

$$f(x) = C\left(\frac{kx}{f}\right) = \int f_0(\xi) e^{-i\frac{kx}{f}\xi} d\xi, \quad (3.70)$$

где $C(u)$ — преобразование Фурье поля $f_0(x)$. Итак, световое поле в задней фокальной плоскости линзы $f(x)$ связано с полем волны, падающей на линзу $f_0(\xi)$, преобразованием Фурье.

Если комплексная амплитуда волны, падающей на линзу, задаётся в произвольной плоскости на расстоянии $z \neq f$ от линзы, то легко получить (упражнение для читателя)

$$f(x) = e^{i\frac{k}{2f}(1-\frac{z}{f})x^2} \cdot C\left(\frac{kx}{f}\right),$$

т. е. возникают фазовые искажения, обусловленные дополнительным набегом фазы $\varphi(u) = \sqrt{k^2 - u^2} \Delta z$, который приобретает плоская волна, пробегая промежуток свободного пространства, равный $\Delta z = z - f$. Важно обратить внимание, что наблюдаемая картина интенсивности

$$I(x) = \left| C\left(\frac{kx}{f}\right) \right|^2$$

не зависит от z (т. е. не зависит от того, на каком расстоянии от линзы задана комплексная амплитуда падающей волны).

2.7. Принцип двойной дифракции и формирование оптического изображения (теория Аббе)

Формирование изображения с помощью линзы можно рассматривать, основываясь на идее пространственного спектрального разложения. Монохроматическую волну, идущую от предмета, представим в виде суперпозиции плоских волн разных направлений α , т. е. разных пространственных частот $u = k \sin \alpha$. Каждая гармоника — плоская волна определённого направления — фокусируется линзой в «свою» точку фокальной плоскости, в которой возникает, таким образом, картина пространственного спектра: амплитуда и фаза колебаний в точке ξ фокальной плоскости однозначно определяются амплитудой и фазой колебаний той плоской волны, которая в эту точку фокусируется.

По этой причине фокальную плоскость линзы называют **фурье-плоскостью**. По терминологии Аббе, впервые предложившего такой подход, поле в фокальной плоскости называют **первичным изображением**. На рис. 3.34 показана ситуация, когда предметом является решётка, освещаемая плоской нормально падающей волной. При этом в фурье-плоскости, как мы знаем, возникает картина фраунгоферовой дифракции (см. п. 1.5.1): набор ярких точек — дифракционных максимумов. Итак, в процессе распространения света от предмета до фурье-плоскости осуществляется преобразование Фурье светового поля (по терминологии Аббе — **первая дифракция**).

Далее каждая точка фурье-плоскости (каждый дифракционный максимум) рассматривается как источник сферической волны. Все сферические волны, исходящие из разных точек фурье-плоскости, интерферируя, образуют в плоскости, находящейся на расстоянии z_2 за линзой, собственно изображение объекта. Это изображение Аббе назвал **вторичным**, а процесс распространения света от фурье-плоскости до плоскости изображения — **второй дифракцией**.

Особенно наглядно принцип двойной дифракции проявляется в оптической схеме, показанной на рис. 3.35. Схема состоит из двух линз

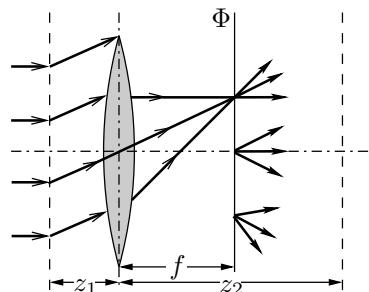


Рис. 3.34. Дифракционная картина в фурье-плоскости

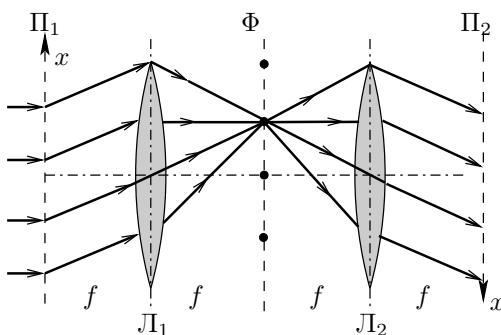


Рис. 3.35. Двойная дифракция Аббе

с общей фокальной плоскостью Φ . Задняя фокальная плоскость линзы L_1 совпадает с передней фокальной плоскостью линзы L_2 . В этом случае первая дифракция — это распространение света от передней фокальной плоскости линзы L_1 , где расположен предмет, к плоскости Φ , где возникает картина пространственного спектра — первичное изображение. Далее, сферическая волна, идущая из любой точки фурье-плоскости, преобразуется линзой L_2 в плоскую волну. Таким образом, каждая плоская волна, идущая от предмета, преобразуется системой двух линз в плоскую волну, приходящую к плоскости изображения (задней фокальной плоскости линзы L_2). Причём, как видно из рис. 3.35, если фокусные расстояния линз одинаковы, то волна с пространственной частотой $u = k \sin \alpha$ преобразуется в волну с пространственной частотой $-u$ (x -компоненту вектора k изменяет знак). Это приводит к инверсии — изображение оказывается перевёрнутым. Можно сказать, что в процессе образования изображения происходит два последовательных преобразования Фурье: от входной плоскости Π_1 к фурье-плоскости — первая дифракция, и затем от фурье-плоскости с помощью линзы L_2 к выходной плоскости Π_2 — вторая дифракция.

2.8. Пространственная фильтрация

Особая роль фурье-плоскости обусловлена тем, что именно в этой плоскости возможно избирательное воздействие на разные пространственные гармоники: установив в любой точке x фурье-плоскости маленькую пластинку, вносящую определённое поглощение и (или) фазовую задержку, мы изменим амплитуду и (или) фазу плоской волны с пространственной частотой $u = \frac{kx}{f}$, не изменяя амплитуд и

фаз других плоских волн. Устанавливая в фурье-плоскости различные амплитудно-фазовые маски, можно направленно изменять пространственный спектр изображения, влияя таким образом на его характеристики. Этим путём можно решать самые разнообразные задачи: улучшение качества изображений, разрешающей способности оптических систем, визуализация фазовых объектов, выполнение самых разнообразных преобразований пространственной структуры световых полей и т.д., т. е. решать широкий круг задач оптической обработки информации.

2.8.1. Мультипликация (размножение) изображения

Расположим в фурье-плоскости Φ оптической системы (рис. 3.35) фильтрующий транспарант-решётку с узкими щелями и периодом d . Во входной плоскости Π_1 находится объект-транспарант с функцией пропускания $f_0(x)$, освещённый слева плоской нормально падающей волной. В плоскости, примыкающей к объекту справа, возникает световое поле, комплексная амплитуда которого $f_0(x)$ представляется в общем случае непрерывной суммой плоских волн — интегралом Фурье:

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int C_0(u) e^{iux} dx.$$

Спектр объекта $C_0(u)$ находится с помощью (3.44). На щелях фильтрующей решётки, расположенных в точках фурье-плоскости $x_n = nd$, фокусируются плоские волны с пространственными частотами

$$u_n = k \sin \alpha_n = k \frac{x_n}{f} = \frac{knd}{f} = 2\pi n \frac{d}{\lambda f}$$

(см. (3.69)), т. е. волны с кратными частотами $u_n = nu_0$, где $u_0 = 2\pi \frac{d}{\lambda f}$, и спектральными амплитудами $C_0(nu_0)$.

Только эти волны, отфильтрованные (т. е. пропущенные) решёткой, формируют изображение $f(x)$, возникающее в выходной плоскости Π_2 оптической системы:

$$f(x) \sim \sum C_0(nu_0) e^{inu_0 x}.$$

Таким образом, из непрерывного спектра $C_0(u)$ объекта, показанного на рис. 3.36 пунктиром, фильтрующая решётка пропускает дискретный спектр компонент, показанный стрелками. Спектральные амплитуды $C_0(nu_0)$ компонент, формирующих изображение, очевидно, пропорцио-

нальны (см. (3.44)) величинам

$$C_0(nu_0) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f_0(x) e^{-inu_0 x} dx \quad (3.71)$$

(a — размер объекта: $f_0(x) \equiv 0$ при $|x| > \frac{a}{2}$).

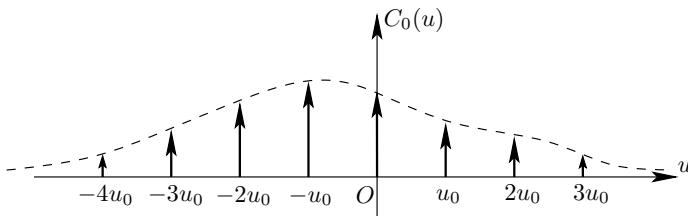


Рис. 3.36. Дискретный спектр, полученный в результате фильтрации

Из сравнения (3.71) с формулой (3.46), определяющей коэффициенты c_n ряда Фурье периодической функции, можно сделать вывод: изображение, возникающее в плоскости Π_2 , представляет собой периодически повторяющееся с периодом $d_0 = \frac{\lambda f}{d}$ изображение объекта $f_0(x)$. Соседние элементы периодической структуры $f(x) = \sum f_0(x - nd_0)$ не налагаются друг на друга при условии $d_0 > a$. Число элементов N размноженного изображения определяется шириной главного максимума картины дифракции Фраунгофера на отдельной щели решётки $|x| < \frac{\lambda f}{b}$ (b — ширина щели): $N \approx \frac{2b}{d_0}$.

2.8.2. Визуализация фазовых объектов. Метод фазового контраста и метод тёмного поля

Рассмотрим проблему визуализации фазовых объектов, которую можно решить, используя метод фазового контраста, предложенный Цернике. Пусть фазовый объект — тонкая прозрачная пластиинка, имеющая разный в разных точках показатель преломления (или толщину), но не изменяющую амплитуду прошедшей волны, находится во входной плоскости Π_1 оптической системы, показанной на рис. 3.35. Функция пропускания такой пластиинки $t(x) = e^{i\varphi(x)}$, где $\varphi(x) = kn(x)d$ (d — толщина, $n(x)$ — распределение показателя преломления). При освещении пластиинки (фазового объекта) плоской нормально падающей волной комплексная амплитуда волны в плоскости, примыкающей к пластиинке справа, согласно (3.3), есть $f_0(x) = e^{i\varphi(x)}$. Если оптическая система

идеальна, то комплексная амплитуда в выходной плоскости Π_2 тождественно повторяет (с точностью до инверсии) входное поле $f_0(x)$, а наблюдаемая картина интенсивности $I_0(x) = |f_0(x)|^2 \equiv 1$, т. е. в плоскости Π_2 мы наблюдаем равномерную засветку: информация о фазовой структуре предмета потеряна, фазовый объект невидим.

Для визуализации фазового объекта Цернике предложил установить в фурье-плоскости, на оптической оси, маленькую фильтрующую пластинку, которая, не изменяя амплитуды прошёлшей волны, вносит фазовую задержку, равную $\pi/2$. Проанализируем структуру светового поля в выходной плоскости Π_2 , рассмотрев в качестве примера объект — фазовую синусоидальную решётку с малой глубиной модуляции ($m \ll 1$). В этом случае

$$f_0(x) = e^{im \cos \Omega x} \approx 1 + im \cos \Omega x = 1 + \frac{im}{2} e^{i\Omega x} + \frac{im}{2} e^{-i\Omega x}. \quad (3.72)$$

Итак, входное поле представляется в виде суммы трёх слагаемых, в соответствии с этим от входной плоскости Π_1 вправо распространяются три плоские волны. Первое слагаемое ответственно за появление плоской волны единичной амплитуды $f_1(x, z) = e^{ikz}$, бегущей вдоль оси оптической системы (оси z). Второе и третье слагаемые — плоские волны с амплитудой $m/2$, направления распространения которых составляют углы $\pm\alpha$ с оптической осью, где $\sin \alpha = \pm\Omega/k$ (т. е. Ω и $-\Omega$ — пространственные частоты этих волн). Обратим внимание, что в точке $x = 0$ входной плоскости колебание первой волны отличается по фазе на $\pi/2$ от колебаний двух наклонных волн (т. к. $i = e^{i\pi/2}$).

Три слагаемых в (3.72) можно изобразить в виде векторов. На рис. 3.37а показано положение этих векторов в начале координат ($x = 0$). Горизонтальный вектор единичной длины изображает колебание, созданное осевой волной, два вектора длины $m/2$, повернутые на угол $\pi/2$, — колебания боковых волн. При смещении из точки $x = 0$ перпендикулярно оси z (вдоль оси x) фаза колебания осевой волны не меняется, поэтому соответствующий вектор остаётся горизонтальным. Фазы боковых (наклонных) волн изменяются: $\varphi = \pm\Omega x$, поэтому изображающие векторы поворачиваются (по и против часовой стрелки). На рис. 3.37б показано положение векторов в точке, где $\Omega x = \pi/2$: векторы повернулись (из начального положения) на угол $\pm\pi/2$, а на рис. 3.37в в точке x , где $\Omega x = \pi$, векторы повернулись на угол $\pm\pi$. При смещении на расстояние, равное периоду решётки ($\Omega x = 2\pi$), восстанавливается исходное расположение векторов (рис. 3.37г). Легко видеть, что суммарный вектор, не меняя своей длины (с точностью до величины порядка m^2), изменяет угол наклона φ от $-m$ до $+m$, что и соответствует фазовой структуре волнового поля.

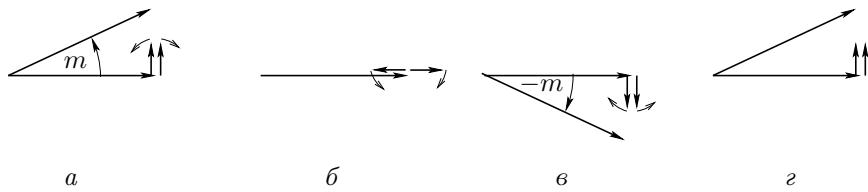


Рис. 3.37. Векторные диаграммы для фазовой решётки

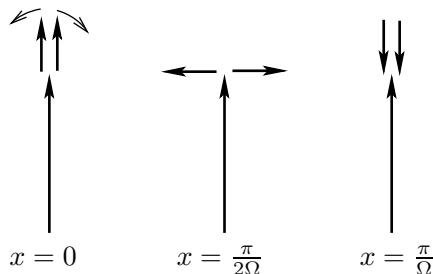


Рис. 3.38. Векторные диаграммы метода фазового контраста

Осьвая плоская волна, фокусируясь линзой в начало координат фурье-плоскости ($\xi = 0$), проходит через фазовую фильтрующую пластинку, а две наклонные волны, фокусируясь в точки $\xi_{1,2} = \pm f\alpha = \pm f\frac{\Omega}{k}$, не «задевают» пластинку. Далее линза L_2 преобразует сферические волны, исходящие из точек $\xi = 0$ и $\xi_{1,2} = f\frac{\Omega}{k}$, в плоские волны, которые, интерферируя, образуют изображение.

Наличие маленькой фазовой пластиинки в фурье-плоскости на оптической оси приводит к относительной фазовой задержке в $\pi/2$ осевой волны (относительно боковых наклонных волн), поэтому поле в выходной плоскости можно записать в виде

$$f(x) = e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{im}{2}e^{i\Omega x} + \frac{im}{2}e^{-i\Omega x},$$

или

$$f(x) = i \left(1 + \frac{m}{2} e^{i\Omega x} + \frac{m}{2} e^{-i\Omega x} \right) = i(1 + m \cos \Omega x).$$

Изменение фазовых соотношений между осевой и наклонными волнами иллюстрируют векторные диаграммы, показанные на рис. 3.38.

Поворот вектора единичной длины (изображающего колебания осевой волны) на $\pi/2$ приводит к тому, что в точке $x = 0$ плоскости изображения все три изображающих вектора оказываются коллинеарными. При смещении из начала координат изменяется фаза боковых волн.

Как видно из векторных диаграмм, направление суммарного вектора остаётся неизменным, а его длина при смещении по координате x изменяется, что и соответствует чисто амплитудной структуре, т. е. полю с плоским волновым фронтом и меняющейся от точки к точке амплитудой. Таким образом, метод фазового контраста позволяет преобразовать исходную фазовую решётку в амплитудную решётку в плоскости изображения.

Наблюдаемая картина интенсивности имеет вид

$$I(x) = |f(x)|^2 \approx (1 + m \cos \Omega x)^2 \approx 1 + 2m \cos \Omega x$$

(так как $m \ll 1$, членами порядка m^2 и выше мы пренебрегаем). Итак, фазовые изменения входного поля $f_0(x)$ оказались визуализированы: мы наблюдаем изменения интенсивности, повторяющие изменения фазы входного поля. Обратите внимание на аналогию описанного здесь метода фазового контраста с методом преобразования колебания, модулированного по фазе, в амплитудно-модулированное колебание (т. н. приём с изменением фазы несущей).

Читатель может самостоятельно проанализировать «метод тёмного поля». В методе тёмного поля вместо фазовой пластиинки в $\pi/2$ в фурье-плоскости на оптической оси устанавливается непрозрачный маленький экран. Осевая плоская волна, фокусируясь линзой в начало координат фурье-плоскости, поглощается непрозрачным экраном и не участвует в формировании изображения. Боковые же волны остаются без изменения. Поле в выходной плоскости в этом случае имеет вид

$$f(x) = \frac{im}{2} e^{i\Omega x} + \frac{im}{2} e^{-i\Omega x} = im \cos \Omega x,$$

а картина интенсивности —

$$I(x) = m^2 \cos^2 \Omega x.$$

Метод тёмного поля аналогичен методу, который в радиотехнике используется для преобразования фазовой модуляции в амплитудную и называется «приёмом без несущей».

2.9. Разрешающая способность оптических систем

Во всякой реальной оптической системе линзы имеют конечные размеры. Учёт конечных размеров используемых объективов чрезвычайно

важен для оценки предельных возможностей оптических систем. Если диаметр линзы D , то её функция пропускания определяется формулой (3.8). То есть всё происходит так, как если бы идеальная бесконечная линза (функция пропускания которой описывается формулой (3.7)) была задиафрагмирована непрозрачным экраном с отверстием диаметра D , оставляющим открытой центральную часть линзы.

2.9.1. Дифракционное изображение удалённого источника

Итак, пусть на линзу падает плоская волна, распространяющаяся вдоль оптической оси. Волна излучается удалённым источником, настолько удалённым, что в пределах площади зрачка, т. е. в пределах диафрагмы диаметра D (рис. 3.39), волновой фронт неотличим от плоского.

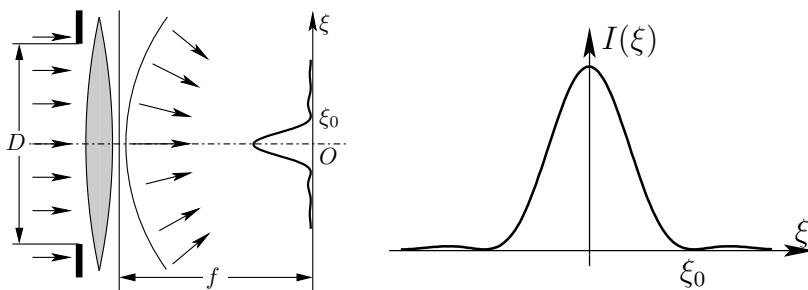


Рис. 3.39. Дифракционное изображение удалённого источника

Рис. 3.40. Распределение интенсивности изображения удалённого источника

Пройдя через диафрагму, волна падает на идеальную (бесконечную) линзу. Изображённая на рис. 3.39 оптическая схема есть не что иное, как схема наблюдения дифракции Фраунгофера плоской волны на круглом отверстии диаметра D . Волна, пройдя через отверстие-диафрагму, уже не является плоской волной: за отверстием мы имеем «пакет плоских волн» (т. е. набор плоских волн разных направлений). Каждая плоская волна из этого пакета фокусируется идеальной линзой в свою точку фокальной плоскости, а результирующее распределение интенсивности, показанное на рис. 3.40, — дифракционное пятно Эйри (в котором концентрируется подавляющая доля светового потока), окружённое чередующимися светлыми (очень слабыми) и тёмными кольцами. Полуширина пятна Эйри (см. (3.37)):

$$\xi_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D} f. \quad (3.73)$$

Это и есть изображение бесконечно удалённого точечного источника.

2.9.2. Дифракционное изображение точечного источника

Если точечный источник света находится на конечном расстоянии z_1 от линзы, то дифракционное пятно Эйри возникает не в фокальной плоскости, а на расстоянии z_2 за линзой, где z_1 и z_2 связаны формулой линзы: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f}$. При этом полуширина пятна в дифракционном изображении точечного источника определяется формулой

$$\xi_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D} z_2. \quad (3.74)$$

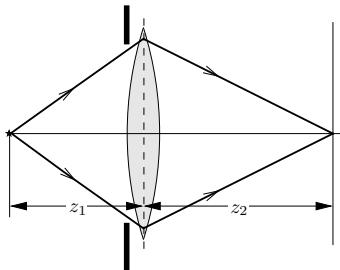


Рис. 3.41. Изображение точечного источника

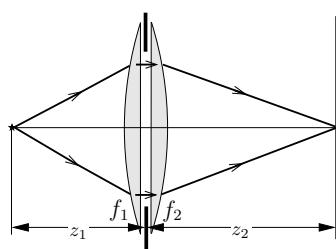


Рис. 3.42. Вспомогательная модель

Это утверждение можно пояснить, если в качестве модели реальной оптической схемы на рис. 3.41 рассмотреть оптическую систему, показанную на рис. 3.42: линзу с фокусным расстоянием f заменим системой двух линз L_1 и L_2 с фокусными расстояниями $f_1 = z_1$ и $f_2 = z_2$. Поскольку оптические силы двух вплотную расположенных линз складываются (см. раздел I), то должно выполняться равенство $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$, а это есть не иное, как формула линзы, формирующей изображение на рис. 3.41, то есть модель рис. 3.42 действительно эквивалентна системе рис. 3.41. Первая линза L_1 преобразует сферическую волну от источника, расположенного в её фокусе, в плоскую волну. Эта волна затем испытывает дифракцию на диафрагме диаметром D , после чего падает на вторую линзу L_2 . Тогда, как следует из приведённого ранее анализа, в фокусе второй линзы (на расстоянии z_2) образуется изображение — дифракционное пятно, размер которого определяется формулой (3.74).

2.9.3. Разрешающая способность. Критерий Рэлея

Если источник сместить на малое расстояние ℓ перпендикулярно оптической оси, то изображение пятна Эйри также сместится. Центр пятна окажется в точке, расположенной на

$$\text{расстоянии } \Delta x = -\frac{z_2}{z_1} \ell \text{ от оптической оси.}$$

Пусть во входной плоскости (на расстоянии z_1 от линзы) находятся два близко расположенных некогерентных источника света S_1 и S_2 . В плоскости изображения (на расстоянии z_2) возникают два пятна Эйри. В силу некогерентности источников картина интенсивности в плоскости изображения представляет собой сумму интенсивностей, созданных каждым из источников. Если расстояние между центрами пятен Эйри мало (меньше их размера), то пятна накладываются друг на друга.

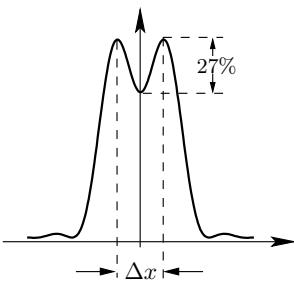


Рис. 3.43. Разрешение двух пятен Эйри

Согласно качественному критерию, предложенному Рэлеем, два источника света различимы, если дифракционный максимум одного источника приходится на минимум другого. Иными словами, расстояние между центрами пятен Δx равно полуширине пятна Эйри (см. рис. 3.43):

$$\Delta x = \xi_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D} z_2.$$

При этом, как показывает расчёт, в суммарной картине интенсивности между двумя максимумами возникает небольшой $\sim 27\%$ ($\sim 20\%$ при дифракции на щели) провал, по наличию которого можно визуально разрешить два источника⁹.

Смещению пятен Δx в плоскости изображения соответствует расстояние между точечными источниками во входной плоскости (на расстоянии z_1 от линзы), равное $l = \frac{z_1}{z_2} \Delta x$. Мы получаем оценку минимального разрешимого расстояния между точечными источниками:

$$\ell_{\min} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D} z_1. \quad (3.75)$$

⁹ При оценке возможностей любой оптической системы следует принимать во внимание характеристики непосредственно регистрирующей среды: фотоэмulsionии, матрицы цифровых устройств или чувствительных к свету элементов сенсоров человеческого глаза (палочки и колбочки). Любая регистрирующая среда обладает определённой дискретностью, и свет, фокусируясь оптической системой в малое пятнышко, меньшее размера «зерна» системы, засвечивает зерно целиком. Так что минимальный размер площадки в фоточувствительной среде, реагирующей на свет, не может быть меньше размера зерна регистрирующей среды.

Если рассматриваются удалённые объекты, то обычно говорят об угловом разрешении $\alpha = \frac{\ell}{z_1}$. Изображение оказывается при этом в фокальной плоскости линзы (при $z_1 \rightarrow \infty, z_2 \rightarrow f$). Согласно (3.74), имеем

$$\boxed{\alpha_{\min} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}} \quad (3.76)$$

Разрешающая способность глаза. Если рассматривать с расстояния наилучшего зрения $z_1 \approx 25$ см две светящиеся точки, то, принимая диаметр зрачка равным $D \approx 3$ мм и $\lambda = 500$ нм (наиболее чувствительная для глаза область спектра), получим оценку минимально разрешимого расстояния для человека с нормальным зрением: $\ell_{\min} \approx 0,5 \cdot 10^{-2}$ мм.

2.10. Формирование изображения. Передаточная функция.

Разрешающая способность микроскопа

Исследуя в § 2.7 формирование изображения, основанное на теории Аббе (принцип двойной дифракции), мы рассматривали идеальную оптическую систему (рис. 3.35). При этом первичное изображение — поле в фурье-плоскости — представляет собой неискажённое преобразование Фурье предметного поля $f_0(x)$. Здесь мы обсудим дифракционные искажения, обусловленные *конечными размерами объектива* Λ_1 . Согласно теории Рэлея, волну, дифрагированную на предмете, представляем суперпозицией плоских волн разных направлений α (разных пространственных частот $u = k \sin \alpha$):

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int C_0(u) e^{iux} du, \quad (3.77)$$

где $C_0(u)$ — преобразование Фурье функции $f_0(x)$ (формула (3.44)).

Одна из таких плоских волн, с пространственной частотой $u = k \sin \alpha$, бегущая от предметной плоскости Π_0 , показана на рис. 3.44 параллельными стрелками. Волна, бегущая под углом α , сфокусировалась бы в точку $x_0 = f \operatorname{tg} \alpha \approx f \sin \alpha = f \frac{u}{k}$ фокальной плоскости Φ . Рисунок подчёркивает важнейшее обстоятельство: каждая слагаемая плоская волна, возникающая при дифракции на предмете конечного размера l ($f_0(x) \equiv 0$ при $x \geq \frac{l}{2}$), имеет волновые поверхности *неограниченной протяжённости* по координате x : колебания поля этой идеализированной волны имеют одинаковую амплитуду во всех точках x предметной плоскости Π_0 от $-\infty$ до $+\infty$. Однако в результате интерференции всех плоских волн образуется световое поле $f_0(x)$, так что интеграл (3.77) обращается в нуль при $|x| \geq \frac{l}{2}$ (подобно тому,

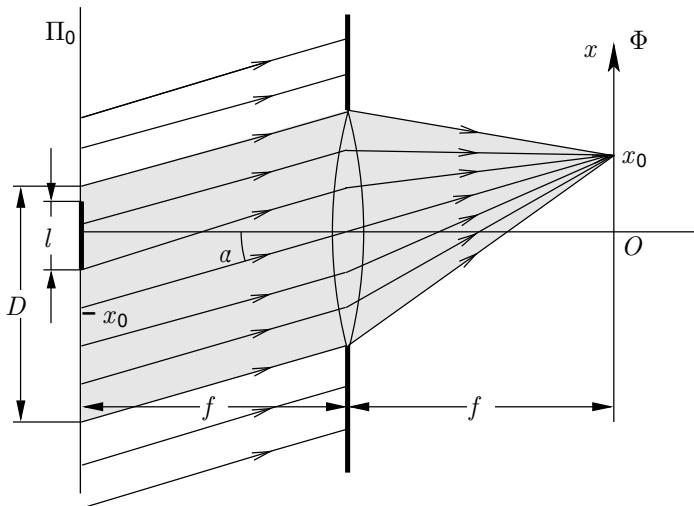


Рис. 3.44. Плоская волна и формирование изображения

как бесконечно длящиеся гармонические колебания образуют в сумме импульс конечной длительности).

Заметим, однако, что поле на объективе диаметра D обусловлено лишь участком волновой поверхности в предметной плоскости

$$-x_0 - \frac{D}{2} \leq x \leq -x_0 + \frac{D}{2}, \quad \text{т. е.} \quad |x + x_0| \leq \frac{D}{2}.$$

Действительно, если диафрагму диаметра D , с помощью которой мы моделируем конечные размеры объектива, перенести из плоскости, прилегающей к объективу, в предметную плоскость Π_0 , расположив центр диафрагмы в точке $x = -x_0$ (см. рис. 3.44), то поле на объективе, т. е. в области $|x| \leq \frac{D}{2}$, при этом не изменяется: плоская волна неограниченной по x протяжённости, пройдя через диафрагму, превращается в «пакет плоских волн» с несущей частотой $u_0 = k \sin \alpha \approx k \tan \alpha = \frac{kx_0}{f}$ и полушириной пространственного спектра $\Delta u = \frac{2\pi}{D}$ (см. рис. 3.32). Этот пакет плоских волн образует пучок света диаметра D , бегущий в направлении α (заптрихован на рисунке), и, что существенно, распространяясь от предметной плоскости Π_1 до плоскости, где расположен объектив, этот пучок остаётся параллельным пучком неизменногооперечного сечения с той же плоской волновой поверхностью и той же амплитудой, поскольку условие геометрической оптики $\frac{\Delta f}{D^2} \ll 1$ выполнено.

няется для любого реального объектива с огромным запасом (например, для объектива микроскопа при $D = 1$ см и $f = 2$ см $\frac{\lambda f}{D^2} \simeq 10^{-4}$).

Таким образом, для расчёта поля в фурье-плоскости Φ можно объектив считать идеальным (неограниченного размера), а каждую слагаемую плоскую волну $C_0(u)e^{iux}$, входящую в состав предметного поля, заменить пучком ограниченного сечения $C_0(u)P_D(x + x_0)e^{iux}$, где $x_0 = \frac{fu}{k}$, $P_D(\xi)$ — единичная нулевая функция:

$$P_D(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\xi| \leq \frac{D}{2}, \\ 0 & \text{при } |\xi| \geq \frac{D}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, предметное поле $f_0(x)$ (формула 3.77) следует заменить полем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int C_0(u)P_D\left(x + \frac{fu}{k}\right) e^{iux} du. \quad (3.78)$$

В этом выражении интерес представляют лишь значения $|x| \leq \frac{l}{2}$, поскольку интерференция плоских волн в формуле (3.77) так же, как и интерференция пучков в формуле (3.78), даёт в сумме поле, тождественно равное нулю при $|x| > \frac{l}{2}$.

Пространственный спектр этого поля, наблюдаемый в фурье-плоскости идеальной линзы, есть $C(u) = C_0(u)P_D(x + \frac{fu}{k})$. Если речь идёт об объектах малого размера $l \ll D$ (в микроскоп обычно рассматривают объекты, размеры которых существенно меньше диаметра объектива), то единично нулевую функцию, рассматриваемую как функцию частоты u , можно с хорошей точностью заменить функцией $P_D(\frac{fu}{k})$. При этом ошибка в полосе частот Δu (в которой функция $P_D(\frac{fu}{k}) = 1$) окажется незначительной. Следовательно,

$$C(u) = C_0(u)P_D\left(\frac{fu}{k}\right) \quad (3.79)$$

и

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int C_0(u)P_D\left(\frac{fu}{k}\right) e^{iux} du, \quad (3.80)$$

где

$$P_D\left(\frac{fu}{k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } |u| \leq \frac{kD}{2f}, \\ 0 & \text{при } |u| > \frac{kD}{2f}. \end{cases} \quad (3.81)$$

Итак, спектр изображения, получаемого в оптической системе с объективом конечного размера D , ограничен полосой частот $|u| \leq \frac{kD}{2f}$. Только плоские волны с пространственными частотами $u = k \sin \alpha$, удовлетворяющими последнему условию, формируют изображение (в частности, изображение, наблюдаемое в микроскоп).

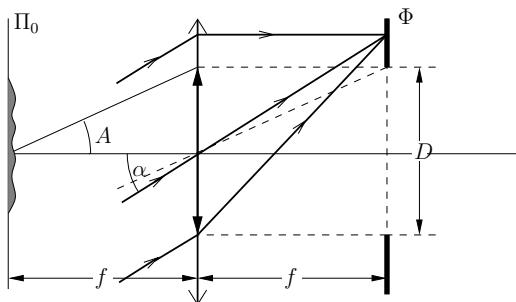


Рис. 3.45. Перенос диафрагмы в фурье-плоскость

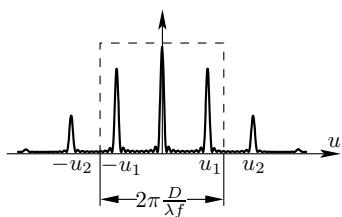


Рис. 3.46. Спектр решётки и функция пропускания диафрагмы

Равенство (3.81) означает, что при расчёте дифракционных искажений, обусловленных конечными размерами объектива, можно диафрагму размером D перенести в фурье-плоскость, а объектив считать идеальным. При этом волны, направления которых $|\sin \alpha| > \frac{D}{2f}$, фокусируются идеальной линзой на непрозрачную часть диафрагмы и не участвуют в формировании изображения (рис. 3.45).

Пусть объект, рассматриваемый в микроскоп, — решётка периода d . Спектр такой решётки — картина дифракции Фраунгофера, наблюдаемая в фурье-плоскости идеальной линзы, имеет вид, показанный на рис. 3.46. Положение дифракционных максимумов определяется условием $\sin \alpha_m = m \frac{\lambda}{d}$. Изображение, наблюдаемое в микроскоп, формируется лишь теми из них, которые сфокусировались в точки фурье-плоскости, оказавшиеся внутри диафрагмы: $m \frac{\lambda}{d} f \leq \frac{D}{2}$ (или $|u_m| \leq \pi \frac{D}{\lambda f}$). Пунктиром показана передаточная функция $P_D(\frac{fu}{k})$, определяющая «полосу пропускания» пространственных частот $|u| < \pi \frac{D}{\lambda f}$.

В частности, для получения информации о периоде решётки необходимо, чтобы в полосу пропускания попали ± 1 максимумы ($m = \pm 1$):

$$d_{\min} \geq \frac{2\lambda f}{D} \approx \frac{\lambda}{\sin A}, \quad (3.82)$$

где $\sin A$ — апертура микроскопа (рис. 3.45). В этом случае три дифракционных максимума $m = 0$ и $m = \pm 1$ формируют, как известно,

изображение синусоидальной решётки периода d . Формула (3.82) определяет минимальную апертуру микроскопа A , необходимую для получения информации о периоде решётки.

3. Принципы голограммии

Приёмники света (глаз человека, фотопластинка, фотоэлемент) реагируют на поток энергии световой волны, т. е. величину, пропорциональную квадрату амплитуды. Информация о фазовой структуре волны (т. е. о форме волнового фронта) оказывается при этом утраченной.

В этом разделе мы рассмотрим способ записи изображения, который позволяет по картине интенсивности восстановить полную информацию о волновом поле.

Пусть некоторый предмет (пешка, изображённая на рис. 3.47) освещается когерентным светом лазера и пусть волна, отражённая предметом (будем называть её далее **предметной волной**), создаёт в плоскости $z = 0$ световое поле:

$$f_{\text{п}}(x,y) = a(x,y)e^{i\varphi(x,y)}.$$

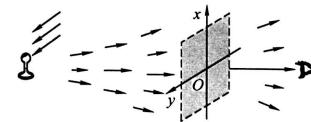


Рис. 3.47. Световое поле предмета

Установим в плоскости $z = 0$ фотопластинку. Предположим, что функция пропускания фотопластинки после необходимой обработки (проявление, закрепление) пропорциональна интенсивности волны, освещавшей пластину во время экспозиции, т. е. пропорциональна величине $I(x,y) = |a(x,y)|^2$. Информация о фазовой структуре волны $\varphi(x,y)$ будет при этом потеряна.

Следуя идее Габора (1948 г.), изменим схему эксперимента: пусть на фотопластинку кроме предметной волны, создающей на фотопластинке поле $f_{\text{п}}(x,y)$, падает ещё некоторая волна с известным распределением амплитуд и фаз колебаний $f_o(x,y) = a_o(x,y)e^{i\varphi_o(x,y)}$, называемая **опорной волной** (см. рис. 3.48). При этом необходимо обеспечить когерентность предметной и опорной волны — волны должны интерферировать. Например, как показано на рис. 3.48: излучение лазера частично проходит через полупрозрачную пластиинку Π , освещая предмет, а частично отражается от неё, создавая

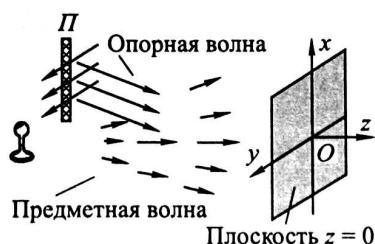


Рис. 3.48. Запись голограммы

опорный пучок. Когерентность предметной и опорной волн обеспечивается высокой степенью монохроматичности лазерного излучения (разность хода между предметной и опорной волнами меньше длины когерентности для любой точки фотопластиинки).

Суммарное поле на голограмме

$$f(x,y) = f_{\text{п}}(x,y) + f_{\text{o}}(x,y),$$

а интенсивность (а следовательно, и функция пропускания фотопластиинки после необходимой обработки) есть

$$t(x,y) \propto I(x,y) = |f_{\text{п}}(x,y) + f_{\text{o}}(x,y)|^2.$$

Раскрывая квадрат модуля в полученном выражении

$$t \propto |f_{\text{п}}|^2 + |f_{\text{o}}|^2 + f_{\text{п}} f_{\text{o}}^* + f_{\text{п}}^* f_{\text{o}} = a^2 + a_{\text{o}}^2 + 2aa_{\text{o}} \cos(\varphi - \varphi_{\text{o}}),$$

убеждаемся, что в функции пропускания (а именно, в слагаемом, связанном с интерференцией опорной и предметной волн) сохранилась информация о фазе предметной волны $\varphi(x,y)$.

Фотопластиинка с зарегистрированным на ней результатом интерференции предметной и опорной волны называются **голограммой**.

3.1. Голограмма точечного источника (голограмма Габора)

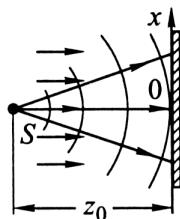


Рис. 3.49. Запись голограммы точечного источника

Для уяснения сути метода рассмотрим в качестве предмета точечный источник света S , т. е. создадим сферическую предметную волну:

$$f_{\text{п}} = \frac{a_{\text{п}}}{r} e^{ikr},$$

где $r = \sqrt{z_0^2 + x^2 + y^2}$ — расстояние от источника S до точки (x,y) фотопластиинки.

В качестве опорной волны возьмём плоскую волну, бегущую вдоль оси z и падающую нормально на фотопластиинку, расположенную в плоскости $z = 0$ (рис. 3.49):

$$f_{\text{o}} = a e^{ikz},$$

т. е. опорная волна создаёт во всех точках фотопластиинки поле одинаковой амплитуды и фазы.

Принимая фазу колебаний в плоскости $z = 0$ равной нулю, запишем $f_o = a$. Кроме того, для упрощения формул будем далее полагать, что амплитуда сферической волны во всех точках фотопластиинки равна амплитуде плоской волны, т. е. $f_p \approx ae^{ikr}$. Суммарное поле в таком случае имеет вид

$$f = ae^{ikr} + a.$$

После необходимой фотообработки получаем голограмму с функцией пропускания:

$$t(x,y) \sim I(x,y) = |a + ae^{ikr}|^2. \quad (3.83)$$

Мы описали первую стадию голограммического процесса — процесс записи голограммы. Теперь необходимо использовать полученную голограмму для восстановления (реконструкции) изображения.

Устанавливаем голограмму в плоскости $z = 0$ и освещаем её плоской нормально падающей волной (рис. 3.50). Для упрощения формул будем считать амплитуду волны равной единице, а фазу без ограничения общности равной нулю, т. е. комплексная амплитуда этой волны (её называют **восстанавливающей волной**) есть $f_-(x,y) = 1$.

Тогда на выходе голограммы, в плоскости, примыкающей к ней справа, получим

$$f_+(x,y) = f_-(x,y)t(x,y) = |a + ae^{ikr}|^2. \quad (3.84)$$

Итак, суммарное поле за голограммой описывается действительной положительной функцией. Исследуем его более детально.

Из (3.84) находим

$$f_+(x,y) = 2a^2 + a^2e^{ikr} + a^2e^{-ikr} = 2a^2(1 + \cos(kr)). \quad (3.85)$$

Поле в плоскости $z = 0_+$ представляется в виде суммы трёх слагаемых. Соответственно волна в области $z > 0$ есть сумма трёх волн: каждое слагаемое на границе $z = 0_+$ ответственно за появление «своей» волны в области $z > 0$.

Первое слагаемое $2a^2$ «отвечает» за появление волны $f_1 = 2a^2e^{ikz}$ — плоской волны, бегущей в области $z > 0$ вдоль оси z . Второе слагаемое $f_2 = a^2e^{ikr}$ — волновое поле со сферическим волновым фронтом: именно такое поле создавал в каждой точке плоскости $z = 0$ точечный

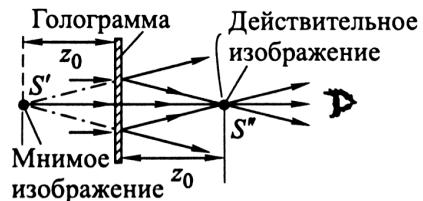


Рис. 3.50. Восстановление голограммы точечного источника

источник света, который находился на расстоянии z_0 слева от голограммы в процессе записи. Ясно, что и в области $z > 0$ поле f_2 порождает расходящуюся сферическую волну, неотличимую от предметной волны (сферической волны, исходящей из точки S в процессе записи голограммы). Поэтому наблюдатель, который находится справа (в области $z > 0$) и смотрит на голограмму как в окошко, «увидит в окне» на расстоянии z_0 слева от голограммы светящуюся точку S' , т. е. расходящаяся сферически волна кажется наблюдателю исходящей из точки S' , хотя никакой светящейся точки на стадии реконструкции изображения нет, — есть только фотопластинка-голограмма, освещаемая плоской волной. Это — мнимое изображение предмета.

Рассмотрим теперь последнее, третье, слагаемое в (3.85): $f_3 = a^2 e^{-ikr}$. Волновой фронт в этой волне «вывернут наизнанку» по отношению к волне f_2 : если в волне f_2 колебание в точке (x,y) плоскости $z = 0$ отстает по фазе от колебаний в начале координат, то в волне f_3 колебание в точке (x,y) опережает по фазе колебание в начале координат на ту же величину. Это слагаемое описывает поле, которое создавала бы в плоскости $z = 0$ сферическая волна, сходящаяся в точку S'' на расстоянии z_0 справа (рис. 3.50). Ясно поэтому, что граничное поле f_3 , возникающее в процессе реконструкции, порождает сферическую волну, сходящуюся в точку S'' . Это — действительное изображение предмета. Его можно наблюдать, расположив на расстоянии z_0 за голограммой экран наблюдения, — мы увидим яркую точку, в которую сфокусирована волна.

Описанные закономерности сохраняются в общих чертах при голографировании произвольного предмета: в процессе реконструкции возникают три волны: волна, создающая мнимое изображение, которое находится слева от голограммы, там же, где находился предмет при записи; волна, создающая действительное изображение, которое располагается симметрично справа от голограммы; а также волна, бегущая вдоль оси z и не несущая информации о форме волнового фронта предметной волны.

Зонная решётка Габора. Вернёмся к интерференционной картине (3.85), которая записана на голограмме точечного источника. Используем приближённое выражение

$$r \approx \sqrt{z_0^2 + x^2 + y^2} \approx z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0} = z_0 + \frac{\rho^2}{2z_0},$$

где $\rho^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от начала координат до точки (x,y) в плоскости фотопластинки. Соответственно фаза колебаний в сфериче-

ской волне в точке (x, y) есть

$$\varphi = kr \approx kz_0 + \frac{k}{2z_0}\rho^2. \quad (3.86)$$

Принимая начальную фазу на оси z в плоскости $z = 0$ нулевой, запишем: $\varphi = \frac{k}{2z_0}\rho^2$. Мы полагаем, таким образом, что колебания опорной (плоской) волны и сферической волны в точке $(x = 0, y = 0)$ синфазны. Тогда получим

$$I(\rho) = 2a^2 \left(1 + \cos \frac{k\rho^2}{2z_0} \right). \quad (3.87)$$

Мы видим, что интерференционная картина имеет вид колец, центр которых находится в начале координат. Функция $I(\rho)$ показана на рис. 3.51. Радиус первого (тёмного) кольца ρ_1 находим из условия $k\frac{\rho_1^2}{2z_0} = \pi$ (при этом $\cos k\frac{\rho_1^2}{2z_0} = -1$ и $I(\rho_1) = 0$), откуда получаем: $\rho_1 = \sqrt{\lambda z_0}$. Вообще радиусы светлых и тёмных колец находятся по формуле

$$\rho_m = \sqrt{m\lambda z_0} \quad (3.88)$$

(при m нечётном — тёмные кольца, при m чётном — светлые), которая совпадает с выражением, определяющим радиусы тёмных и светлых колец в зонной пластинке Френеля.

Отличие состоит в том, что в нашем случае переход от светлых колец к тёмным происходит плавно. Интерференционная картина (3.85) (голограмма точечного источника) показана на рис. 3.52 и называется зонной решёткой Габора. Как следует из проведённого выше анализа, зонная решётка Габора работает одновременно и как собирающая линза (фокусируя параллельный пучок света в точку S'' — действительный фокус зонной пластинки), и как рассеивающая линза, которая преобразует параллельный пучок, падающий на пластинку, в расходящуюся сферическую волну, исходящую из минимого фокуса S' , и как плоскопараллельная пластинка, поскольку часть света за пластинкой сохраняет структуру освещавшего параллельного пучка.

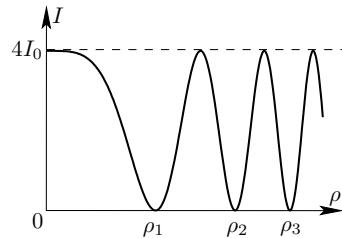


Рис. 3.51. Зависимость $I(\rho)$



Рис. 3.52. Зонная решётка Габора

Сферическая восстанавливающая волна. Рассмотрим ещё одно свойство голограммы точки. Пусть восстанавливающая волна является не плоской, а сферической, расходящейся от точки, расположенной на расстоянии $z_1 > z_0$ от голограммы. Используя параболическое приближение (3.86), запишем комплексную амплитуду падающей волны в плоскости голограммы:

$$f_-(\rho) = e^{-i \frac{k}{2z_1} \rho^2}. \quad (3.89)$$

Восстановленное поле в плоскости $z = 0$:

$$f_+(\rho) = f_-(\rho)t(\rho).$$

Используя (3.89) и (3.83), получим (с точностью до несущественных констант)

$$f_+(\rho) = e^{-i \frac{k}{2z_1} \rho^2} + e^{-i \frac{k}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_0} \right) \rho^2} + e^{-i \frac{k}{2} \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_1} \right) \rho^2}.$$

Из этого выражения видно, что расстояние b_2 от голограммы до мнимого изображения источника уменьшается, так как

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1},$$

т. е. это изображение приближается к голограмме. В то же время расстояние b_3 от голограммы до действительного изображения увеличивается:

$$\frac{1}{b_3} = \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_1}.$$

Это свойство голограммы следует иметь в виду при объяснении изменения масштабов изображений трёхмерного предмета при освещении голограммы сферической волной.

В случае произвольного предмета на голограмме записывается сложный интерференционный узор, который можно рассматривать как совокупность зонных колцевых решёток Габора, причём каждая из них ответственна за восстановление «своей» точки предмета на стадии реконструкции изображения.

3.2. Разрешающая способность голограммы

Рассмотрим более детально волну, ответственную за создание действительного изображения. Конечно, сходящаяся сферическая волна не фокусируется строго в точку S'' : изображением является не точка, а маленькое дифракционное пятнышко. Действительно, плоская

восстанавливающая волна, пройдя сквозь голограмму, преобразуется в сферическую волну (мы говорим сейчас о той части волны, которая ответственна за создание действительного изображения), причём сферический волновой фронт ограничен размерами голограммы. Эта сходящаяся сферическая волна (третье слагаемое в (3.85)) не отличается от сферической волны, возникающей за собирающейся линзой, размер D которой равен размеру голограммы. При фокусировке света линзой возникает дифракционное пятно Эйри, размер которого определяется формулой (3.74). Ясно, что и голограмма создаёт изображение — дифракционное пятно, размер которого определяется аналогичной формулой:

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{D} z_0, \quad (3.90)$$

где z_0 — расстояние от точечного источника до голограммы в процессе записи, D — размер голограммы. Если записывать на голограмму изображения двух точек, расстояние между которыми меньше Δx , то при восстановлении изображений возникают два пятна, налагающиеся друг на друга так, что, согласно критерию Рэлея, они оказываются неразрешимыми. Сказанное касается, разумеется, и мнимого изображения точечного источника: наблюдателю оно кажется маленьkim пятнышком размера Δx , находящимся на расстоянии z_0 за голограммой.

Важнейшее свойство голограммы состоит в том, что любой её малый участок содержит информацию обо всем объекте: ведь поле в каждой точке голограммы является суперпозицией полей, посыпаемых всеми точками предмета (и опорной волной). Другими словами, интерференционная картина на каждом небольшом участке голограммы содержит информацию об амплитуде и фазе колебаний всех точек предмета, поэтому изображение может быть восстановлено с помощью небольшого осколка голограммы, полученной при записи. Разумеется, разрешающая способность определяется размером осколка.¹⁰

3.3. Схема с наклонным опорным пучком

При наблюдении голографических изображений, полученных по схеме Габора, действительное и мнимое изображения создают взаимные помехи: изображения S' и S'' находятся на одной прямой с точкой, в которой расположен глаз наблюдателя (рис. 3.50). Помехи создаются также возникающей при восстановлении плоской волной, бегущей вдоль оси z и не несущей информации об объекте. В 1962 году Лейт и

¹⁰ В реальной голограмме разрешающая способность дополнительно ограничивается такими факторами, как разрешающая способность фотоматрицы (зернистость), засветка голограммы сторонними источниками (пятна) и пр.

Упатниекс предложили использовать для записи голограммы наклонный опорный пучок.

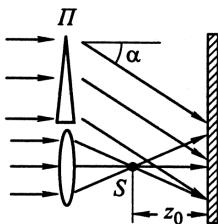


Рис. 3.53.

Наклонный опорный пучок

Проследим, каким образом введение опорного наклонного пучка обеспечивает возможность независимого (без взаимных помех) наблюдения действительного и мнимого изображений. На рис. 3.53 «предметом» является «точечный источник» S . Наклон опорного пучка обеспечивается призмой P . Поле предметной волны на голограмме есть

$$f_{\text{п}}(x,y) = ae^{i\frac{k}{2z_0}(x^2+y^2)}$$

(мы вновь используем параболическое приближение). Наклонная опорная волна имеет вид $f_0 = ae^{iu_0 x}$, где $u_0 = k \sin \alpha$ — пространственная частота опорной волны. Мы полагаем, что волны

имеют равные амплитуды и создают в начале координат плоскости xy (плоскость голограммы) синфазные колебания. Функция пропускания проявленной голограммы, пропорциональная интенсивности суммарной волны при записи, имеет вид

$$t(x,y) \sim \left| ae^{iu_0 x} + ae^{i\frac{k}{2z_0}(x^2+y^2)} \right|^2.$$

Представляем читателю убедиться, что слагаемые, ответственные за появление действительного и мнимого изображения при восстановлении, можно записать в виде:

$$f_3(x,y) \sim be^{i\frac{k}{2z_0}((x+z_0 \sin \alpha)^2+y^2)}, \quad f_4(x,y) \sim be^{-i\frac{k}{2z_0}((x+z_0 \sin \alpha)^2+y^2)},$$

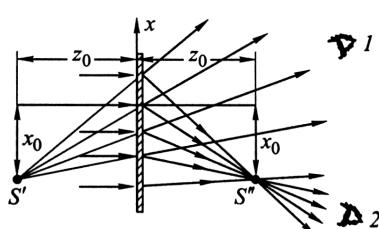


Рис. 3.54. Мнимые и действительные изображения в схеме с наклонным пучком

где b — комплексная константа. Выражение $f_3(x,y)$ представляет собой поле, которое создавал бы в плоскости $z = 0$ точечный источник, находящийся в точке с координатами $x_0 = -z_0 \sin \alpha$, $y = 0$, на расстоянии z_0 слева от голограммы. Это мнимое изображение предмета S' (рис. 3.54). Соответственно $f_4(x,y)$ описывает поле сходящейся в точку S'' сферической волны. Эта точка находится справа от голограммы на расстоянии

z_0 и смещена относительно оси z на расстояние $x_0 = -z_0 \sin \alpha$. Это — действительное изображение. Мы видим, что введение наклонного опорного пучка приводит к сдвигу мнимого и действительного изображений таким образом, что наблюдатель может рассматривать их из разных положений (1 и 2 на рис. 3.54), в которых они не создают взаимных помех. Разумеется, угол наклона опорного пучка α (т. е. его пространственная частота) должен быть выбран правильно: чем шире пространственный спектр предметной волны, тем больше должен быть угол наклона опорного пучка, при котором волны, ответственные за создание действительного и мнимого изображений, не создают взаимных помех.

Литература

1. Кингспен А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингспена. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 3, гл. 8.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. Гл. IV.
3. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. VIII–XI.
4. Бутиков Е.И. Оптика. — М.: Высшая школа, 1986. Гл. 7.
- 5* Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. Гл. 8.

Работа 4.3.1

Изучение дифракции света

Цель работы: исследовать явления дифракции Френеля и Фраунгофера на щели, изучить влияние дифракции на разрешающую способность оптических инструментов.

В работе используются: оптическая скамья, ртутная лампа, монохроматор, щели с регулируемой шириной, рамка с вертикальной нитью, двойная щель, микроскоп на поперечных салазках с микрометрическим винтом, зрительная труба.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теорией дифракции (см. п. 1 введения к разделу).

A. Дифракция Френеля на щели

Схема установки для наблюдения дифракции Френеля на щели представлена на рис. 1. Световые лучи освещают щель S_2 и испытывают на ней дифракцию. Дифракционная картина рассматривается с помощью микроскопа M , сфокусированного на некоторую плоскость наблюдения Π .

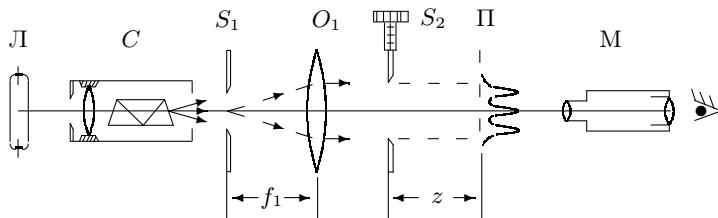


Рис. 1. Схема установки для наблюдения дифракции Френеля

Щель S_2 освещается параллельным пучком монохроматического света с помощью коллиматора, образованного объективом O_1 , и щелью S_1 , находящейся в его фокусе. На щель S_2 сфокусировано изображение спектральной линии, выделенной из спектра ртутной лампы L при помощи простого монохроматора C , в котором используется призма прямого зрения.

Распределение интенсивности света в плоскости наблюдения Π проще всего рассчитывать с помощью зон Френеля (для щели их иногда называют зонами Шустера). При освещении щели S_2 параллельным

пучком лучей (плоская волна) зоны Френеля представляют собой полоски, параллельные краям щели (рис. 2). Результирующая амплитуда в точке наблюдения определяется суперпозицией колебаний от тех зон Френеля, которые не перекрыты створками щели. Графическое определение результирующей амплитуды производится с помощью векторной диаграммы — спирали Корнио. Суммарная ширина n зон Френеля (Шустера) определяется соотношением (3.20):

$$\xi_n = \sqrt{zn\lambda}, \quad (1)$$

где z — расстояние от щели до плоскости наблюдения (рис. 1), а λ — длина волны.

Вид наблюдаемой дифракционной картины на щели шириной b определяется *волновым параметром* (3.1):

$$p = \frac{\sqrt{z\lambda}}{b}.$$

Также используют так называемое *число Френеля*:

$$C = \frac{b^2}{z\lambda} = \frac{1}{p^2}$$

— это, как ясно из (1), полное число открытых зон Френеля на всей ширине щели.

Дифракционная картина отсутствует вблизи щели при $p \ll 1$ ($C \gg 1$, т. е. на щели укладываются огромное число зон), а распределение интенсивности света за щелью можно приближённо получить с помощью законов геометрической оптики. Дифракционная картина в этом случае наблюдается только в узкой области на границе света и тени у краёв экрана.

При небольшом удалении от щели (или изменении ширины щели S_2) эти две группы дифракционных полос перемещаются практически независимо друг от друга. Каждая из этих групп образует картину дифракции Френеля на краю экрана. Распределение интенсивности при дифракции света на краю экрана может быть найдено с помощью спирали Корнио (см. п. 1.4.2 введения к разделу).

При дальнейшем увеличении расстояния z (или уменьшении ширины щели S_2) обе системы дифракционных полос постепенно сближаются и, наконец, при $C \gtrsim 1$ накладываются друг на друга. Распределение интенсивности в плоскости наблюдения в этом случае определяется числом зон Френеля, укладывающихся на полуширине щели $b/2$. Если

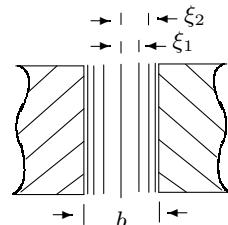


Рис. 2. Зоны Френеля
в плоскости щели

это число равно n , то в поле зрения наблюдается $m = n - 1$ тёмных полос. Таким образом, по виду дифракционной картины можно оценить число зон Френеля на полуширине щели.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении предлагается исследовать дифракцию Френеля на узкой щели, на краю экрана, на тонкой нити.

I. Подготовка приборов к работе

- Соберите схему согласно рис. 1. Для этого включите ртутную лампу, поставьте входную щель S_1 за монохроматором и сфокусируйте на неё зелёную линию спектра. Откройте щель пошире и с помощью экрана или листа белой бумаги проверьте, что луч идёт вдоль оптической скамьи.
- Для освещения параллельным пучком щели S_2 (щель с микрометрическим винтом!) установите линзу O_1 на расстоянии от щели S_1 , близком к фокусному (оно указано на оправе линзы). Точная настройка пучка на параллельность осуществляется с помощью зрительной трубы, настроенной на бесконечность.
- Для настройки зрительной трубы на бесконечность сначала настройте её окуляр: поворотом глазной линзы добейтесь появления в поле зрения чёткого изображения окулярной шкалы или креста; затем вращением винта кремальеры найдите чёткое изображение удалённого объекта (окно в конце коридора). Запомните показания винта кремальеры, чтобы исключить случайный сбой настройки.
- Поставьте зрительную трубу за линзой O_1 . Убедитесь, что пучок света проходит через центр линзы и попадает на центр объектива зрительной трубы.

Слегка перемещая линзу O_1 вдоль оси системы, найдите в окуляре зрительной трубы резкое изображение входной щели S_1 . Закрепите входную щель и линзу на оптической скамье.

- Определите нуль микрометрического винта щели S_2 : глядя сквозь щель на окно или лампу накаливания, определите момент её открытия. Повторите эту процедуру несколько раз, вращая винт всё медленнее, и зафиксируйте новое значение нуля. Максимальная ширина щели — 0,4 мм, один оборот винта — 100 дел — соответствует 0,1 мм (цена деления — 0,001 мм). Установите ширину щели 0,2–0,3 мм.

Поставьте щель S_2 за линзой O_1 и закрепите.

- Сфокусируйте микроскоп на щель S_2 . Для этого сначала, глядя в окуляр микроскопа, убедитесь, что окулярная шкала видна чётко. Если

нет — подстройте окуляр под свой глаз: вытащив окуляр из тубуса, направьте его на любой яркий объект (лампу, окно) и поворотом глазной линзы (перемещением её вдоль оси окуляра) добейтесь чёткого видения окулярной шкалы. Настроив окуляр, поставьте его на место.

Предметная плоскость микроскопа расположена практически в фокусе его объектива (обычно это 2–4 см). Поставьте микроскоп за щелью S_2 так, чтобы указатель продольного перемещения салазок микроскопа был расположен со стороны окуляра. Убедитесь с помощью экрана, что световой пучок попадает на объектив.

Перемещая микроскоп вдоль оптической оси, найдите в окуляре резкое изображение щели S_2 . Проверьте, что при небольшом удалении микроскопа от щели *на ярком фоне изображения щели* (сначала около краёв) появляются узкие тёмные полосы, количество которых уменьшается по мере удаления микроскопа (дифракция в ближней волновой зоне).

7. Методом последовательных приближений попытайтесь увеличить контрастность картины. Она зависит от ширины щели S_1 (при уменьшении щели растёт контрастность, но падает яркость), от центрировки линзы O_1 , от равномерности освещения щелей и их параллельности.

II. Измерения

8. Добившись наибольшей чёткости дифракционной картины, снова найдите резкое изображение щели (чёткие края без дифракционных полос). Запишите начальное положение микроскопа — координату по шкале продольной линейки, расположенной на оптической скамье.

Если тубус микроскопа закреплён на подставке с продольной шкалой, зафиксируйте начальное положение микроскопа по этой шкале.

9. Постепенно отодвигая микроскоп от щели S_2 , заметьте по шкале положение микроскопа, при котором на фоне щели видна одна тёмная полоса. Смещение микроскопа от первоначального положения (от резкого изображения щели) даёт величину z — расстояние от щели до плоскости наблюдения [см. рис. 1 и формулу (1)]. Если это расстояние меньше двух см, следует увеличить ширину щели S_2 и снова поработать над контрастностью картины (см. п. 7).

Приближая микроскоп к щели, снимите зависимость координаты микроскопа от числа n наблюдаемых тёмных полос. При хорошей настройке можно увидеть 4–5 полос.

10. Измерьте ширину b щели S_2 , используя микрометрический винт попечевых салазок микроскопа (один оборот винта — 100 дел. — 1 мм). Освещённость изображения увеличится, если осветить щель настольной лампой.

Сравните результат с показаниями микрометрического винта щели S_2 . В случае заметного расхождения (причиной может быть люфт) откройте щель пошире и снова сравните результаты измерения ширины. Влияние люфта можно исключить, если при измерениях вращать винт в одну сторону.

III. Качественные наблюдения

Вновь сфокусируйте микроскоп на щель. При небольшом удалении микроскопа от щели у её краёв появляются узкие частые полосы. Это *дифракция на краю экрана*. Обратите внимание, что возле границы щели расположена самая яркая светлая полоса.

11. Закрепите микроскоп на оптической скамье и проследите за изменением дифракционной картины при уменьшении ширины щели S_2 . Опишите результат.
12. Для исследования *дифракции Френеля на препятствии* поставьте вместо щели S_2 рамку с тонкой вертикальной нитью. Настройте микроскоп на резкое изображение нити. Убедитесь, что при удалении микроскопа от нити на её фоне всегда наблюдается чётное число тёмных дифракционных полос (светлый центр).

IV. Обработка результатов

13. Сравните размер зон Френеля с измеренной шириной b щели S_2 . Для этого свяжите число тёмных полос m в поле зрения с числом зон Френеля n на полуширине щели, рассчитайте величину $2\xi_n$ по формуле (1) и постройте график $2\xi_n = f(n)$. Отложите на графике величину b . Длина волны зелёной линии ртути $\lambda = 5461 \text{ \AA}$.
14. Нарисуйте качественный график распределения интенсивности на границе света и тени при дифракции на краю экрана. С помощью спирали Корни сравнимте интенсивности на краю экрана и вдали от него.
15. Объясните с помощью зон Френеля, как связано видимое число тёмных полос с шириной щели.

Б. Дифракция Фраунгофера на щели

На значительном удалении от щели, когда выполнено условие $C \ll 1$ (то есть ширина щели становится значительно меньше ширины первой зоны Френеля, $b \ll \sqrt{\lambda z}$), изображение щели размывается и возникает дифракционная картина, называемая дифракцией Фраунгофера (см. п. 1.5.2 введения).

Дифракцию Френеля и Фраунгофера можно наблюдать на одной и той же установке (рис. 1). Однако при обычных размерах установки дифракция Фраунгофера возникает только при очень узких щелях.

Например, при $z \approx 20\text{--}40$ см и $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см получаем $b \ll 0,3$ мм. Поскольку работать с такими тонкими щелями неудобно, для наблюдения дифракции Фраунгофера к схеме, изображённой на рис. 1, добавляется объектив O_2 (рис. 3).

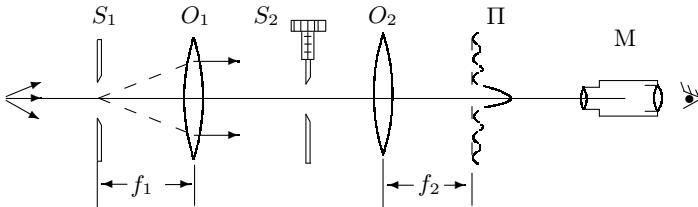


Рис. 3. Схема установки для наблюдения дифракции Фраунгофера на щели

Дифракционная картина наблюдается здесь в фокальной плоскости объектива O_2 . Каждому значению угла θ соответствует в этой плоскости точка, отстоящая от оптической оси на расстоянии

$$x = f_2 \operatorname{tg} \theta \approx f_2 \theta. \quad (2)$$

Поскольку объектив не вносит дополнительной разности хода между интерферирующими лучами (*таутохронизм*), в его фокальной плоскости наблюдается неискажённая дифракционная картина Фраунгофера. Эта картина соответствует бесконечно удалённой плоскости наблюдения.

В центре поля зрения наблюдается дифракционный максимум (светлая полоса). При малых углах θ положение минимумов (тёмных полос) определяется, согласно формуле (3.27), соотношением

$$\theta_m = m \frac{\lambda}{b}. \quad (3)$$

Расстояние x_m от тёмной полосы до оптической оси объектива O_2 пропорционально фокусному расстоянию f_2 . Из (2) и (3) следует

$$x_m = m \frac{\lambda}{b} f_2. \quad (4)$$

Из (4) видно, что при малых углах минимумы эквидистанты, а расстояния δx между минимумами обратно пропорциональны ширине b щели S_2 .

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении предлагается исследовать дифракцию Фраунгофера на щели и проследить, как влияют изменение ширины щели и её смещение на характер дифракционной картины.

V. Настройка установки

- Для перехода из ближней волновой зоны (дифракция Френеля) в дальнюю (дифракция Фраунгофера) к установке, собранной по рис. 1, достаточно добавить линзу O_2 (рис. 3). Если параллельность пучка за линзой O_1 нарушилась, воспользуйтесь рекомендациями, изложенными в пп. А2–А4.
- Поставьте линзу O_2 между щелью S_2 и микроскопом (чем короче установка, тем ярче будет картина).

Настройте микроскоп на фокальную плоскость Π линзы (фокус линзы указан на её оправе). Для этого временно снимите со скамьи щель S_2 и убедитесь, что свет проходит через центры линз и попадает на объектив микроскопа. Перемещая микроскоп вдоль скамьи, найдите резкое изображение щели S_1 .

Уменьшая ширину щели S_1 , проверьте, что микроскоп настроен на края щели, а не на цветную полосу, которую даёт монохроматор. Закрепите микроскоп и линзы на скамье.

- Поместите щель S_2 между линзами и подберите её ширину так, чтобы в поле зрения микроскопа появилась дифракционная картина.

В отличие от френелевой дифракционной картины фраунгофера занимает всё поле зрения микроскопа. Добейтесь наибольшей контрастности картины (см. п. А7).

VI. Измерения

- Измерьте с помощью винта поперечного перемещения микроскопа координаты X_m нескольких дифракционных минимумов (от $-m$ до $+m$). Запишите ширину b щели S_2 и фокусное расстояние линзы O_2 .

VII. Качественные наблюдения

- Убедитесь, что смещение щели S_2 в боковом направлении не приводит к сдвигу дифракционной картины. Объясните явление.
- Проследите, как изменяется масштаб дифракционной картины при уменьшении ширины щели S_2 .

VIII. Обработка результатов

- Постройте график, откладывая по горизонтали номер минимума m , а по вертикали — его координату X_m (от $-m$ до $+m$). По углу наклона прямой определите среднее расстояние ΔX между соседними минимумами; рассчитайте ширину щели b по формуле (4) и сравните с изменившейся. Оцените расхождение результатов.

В. Дифракция Фраунгофера на двух щелях

Для наблюдения дифракции Фраунгофера на двух щелях в установке (рис. 3) следует заменить щель S_2 экраном \mathcal{E} с двумя щелями (рис. 4). При этом для оценки влияния ширины входной щели на чёткость дифракционной картины вместо входной щели S_1 следует поставить щель с микрометрическим винтом. Два дифракционных изображения входной щели, одно из которых образовано лучами, прошедшими через левую, а другое — через правую щели, накладываются друг на друга.

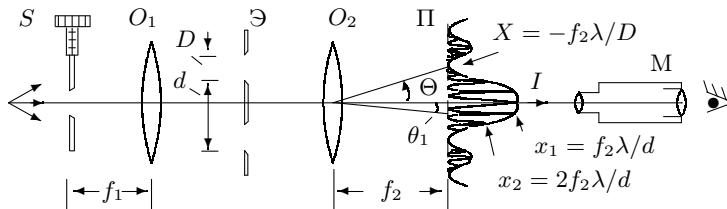


Рис. 4. Схема установки для наблюдения дифракции Фраунгофера на двух щелях

Если входная щель достаточно узка, то дифракционная картина в плоскости Π (рис. 4) подобна той, что получалась при дифракции на одной щели (рис. 3), однако теперь вся картина испещрена рядом дополнительных узких полос (см. п. 1.5.3 введения к разделу).

Как ясно из формулы (3.29), угловая координата θ_m интерференционного максимума m -го порядка определяется соотношением

$$\theta_m = m \frac{\lambda}{d}, \quad (5)$$

где d — расстояние между щелями. Линейное расстояние δx между соседними интерференционными полосами в плоскости Π равно, поэтому

$$\delta x = f_2 \frac{\lambda}{d}. \quad (6)$$

На рис. 4 показано распределение интенсивности в фокальной плоскости объектива O_2 . Штриховой линией (в увеличенном масштабе) изображено распределение интенсивности при дифракции света на одиночной щели. Нетрудно оценить число n интерференционных полос, укладывающихся в области центрального дифракционного максимума. Согласно (4) полная ширина главного максимума равна $2f_2\lambda/b$, где b — ширина щели, отсюда

$$n = \frac{2\lambda f_2}{b} \frac{1}{\delta x} = \frac{2d}{b}. \quad (7)$$

При дифракции света на двух щелях чёткая система интерференционных полос наблюдается только при достаточно узкой ширине входной щели S , которую можно рассматривать как протяжённый источник света размером b . Для наблюдения интерференции необходимо, чтобы расстояние d между щелями не превышало радиуса когерентности (см. раздел II, п. 4.3):

$$d \leq \frac{\lambda}{b} f_1. \quad (8)$$

Здесь b — ширина входной щели S и, следовательно, b/f_1 — её угловая ширина. Таким образом, по размытию интерференционной картины можно оценить размер источника. Этот метод используется в звёздном интерферометре при измерении угловых размеров звёзд.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении предлагается исследовать картину дифракции на двух щелях и оценить влияние размеров источника на чёткость картины.

IX. Настройка и измерения

1. Не перемещая (!) линз и микроскопа, замените в установке (рис. 3) входную щель S_1 щелью с микрометрическим винтом и, слегка передвигая её вдоль скамьи, найдите в микроскопе резкое изображение новой входной щели. Закрепите щель.

Поставьте между линзами экран Э с двойной щелью. В области главного дифракционного максимума должна появиться система равноотстоящих тёмных и светлых полос (рис. 4). Центрировкой системы и подбором ширины щели S добейтесь наибольшей чёткости дифракционной картины.

2. Определите с помощью микрометрического винта поперечных салазок микроскопа координаты самых удалённых друг от друга тёмных полос внутри центрального максимума и просчитайте число светлых промежутков между ними. Измерьте ширину центрального максимума.
3. Исследуйте влияние пространственной когерентности на видность интерференционной картины. Для этого, расширяя входную щель S , подберите такую ширину щели b_0 , при которой наступает первое исчезновение интерференционных полос, и запишите эту величину.

Убедитесь, что при дальнейшем увеличении входной щели картина вновь появляется, но она заметно менее контрастна. Определите соответствующую ширину входной щели и ширину, при которой картина наиболее контрастна.

4. Запишите фокусные расстояния обеих линз.

5. Метод измерения параметров двойной щели, необходимых для расчётов, изложен в п. Г3.

X. Обработка результатов

6. Определите расстояние δx между минимумами по результатам измерений, рассчитайте величину d по формуле (6) и сравните с измеренной. Рассчитайте число полос внутри главного максимума по формуле (7) и сравните с экспериментальным.
 7. Сравните измеренную ширину b_0 щели S с расчётом по формуле (10).

Г. Влияние дифракции на разрешающую способность оптического инструмента

Установка, представленная на рис. 3, позволяет исследовать влияние дифракции на разрешающую способность оптических инструментов.

Как уже было выяснено, линзы O_1 и O_2 в отсутствие щели S_2 создают в плоскости Π изображение щели S_1 , и это изображение рассматривается в микроскоп M . Таким образом, нашу установку можно рассматривать как оптический инструмент, предназначенный для получения изображения предмета. При этом коллиматор (щель S_1 и объектив O_1) является моделью далёкого предмета, а объектив O_2 и микроскоп M составляют зрительную трубу, наведённую на этот предмет.

Щель S_2 , установленная непосредственно перед объективом O_2 , позволяет изменять эффективный размер объектива и, следовательно, разрешающую способность оптической системы.

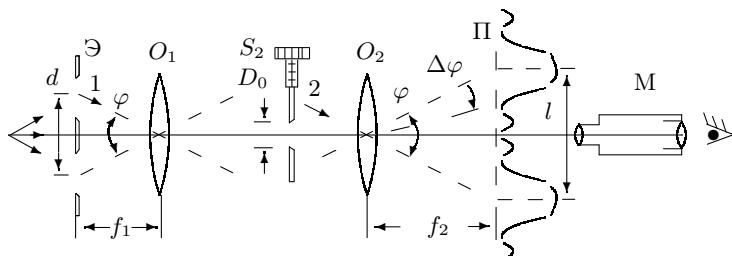


Рис. 5. Схема установки для исследования разрешающей способности оптического инструмента

Поместим вместо щели S_1 экран \mathcal{E} с двумя узкими щелями, расстояние между которыми равно d (рис. 5). Тогда расстояние ℓ между изображениями щелей в плоскости Π равно

$$\ell = \varphi f_2 = d \cdot \frac{f_2}{f_1}, \quad (9)$$

а ширина каждого изображения

$$\delta x \approx \frac{\lambda}{b} f_2$$

определяется дифракцией света на щели S_2 . Когда полуширина дифракционного изображения превышает расстояние между изображениями, то по виду дифракционной картины трудно определить, представляет собой источник двойную или одиночную щель.

Условия, при которых ещё можно различить, имеем мы дело с одной или двумя щелями, для разных наблюдателей различны. Для того чтобы исключить связанный с этим произвол, пользуются обычно критерием Рэлея (см. п. 2.9.3 введения к разделу), который приблизительно соответствует возможностям визуального наблюдения: изображения считаются различимыми, когда максимум одного дифракционного пятна совпадает с минимумом другого, а в условиях нашей задачи — когда полуширина дифракционного изображения δx совпадает с расстоянием ℓ между изображениями отдельных щелей:

$$\delta x \sim \ell \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda}{b} \sim \frac{d}{f_1}. \quad (10)$$

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении предлагается исследовать влияние размера диафрагмы, ограничивающей поперечный размер пучка света, на чёткость изображения объекта.

XI. Настройка и измерения

- Соберите схему согласно рис. 5. Для этого в предыдущей схеме (рис. 4), не меняя (!) положения линз и микроскопа, вместо щели S поставьте двойную щель i , перемещая её вдоль оси, получите в поле зрения микроскопа чёткое, симметричное изображение двойного источника.
- Поставьте между линзами щель S_2 и, уменьшая её ширину, наблюдайте за ухудшением качества изображения. Подберите ширину щели S_2 так, чтобы изображения обеих щелей почти сливались, но всё-таки ещё воспринимались раздельно. Запишите показания микрометрического винта щели S_2 (ширину b_0).
- Поставьте двойную щель перед микроскопом и измерьте с помощью микрометрического винта поперечных салазок микроскопа расстояние d между щелями и ширину каждой щели b (сделайте чертёж щели и запишите координату каждой из 4-х вертикалей). Используйте подсветку лампой.

XII. Обработка результатов

4. Для проверки справедливости критерия Рэлея сравните измеренную ширину b_0 щели S_2 с расчётом по формуле (10): $b_0 = \lambda f_1 / d$.

Контрольные вопросы

1. Объясните, почему при дифракции Френеля на круглом отверстии в центре картины может быть как тёмное, так и светлое пятно, а при дифракции на препятствии — круглом экране — пятно всегда светлое (пятно Пуассона).
2. Объясните, почему смещение щели S_2 в боковом направлении в установке на рис. 3 не приводит к сдвигу дифракционной картины. Будет ли смещаться картина дифракции при смещении щели S_2 вдоль оси установки?
3. Получите формулу для распределения интенсивности при дифракции Фраунгофера на двух щелях.
4. Выведите формулу (8). На примере размытия интерференционной картины при широком источнике объясните, что такое пространственная когерентность.
- 5.* Как связана видность интерференционной картины с пространственной когерентностью источника? Чем отличаются графики видности при дискретном и непрерывном изменении параметров источника? То же для временной когерентности.
- 6.* Сформулируйте теорему Бабинé.

Литература

1. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 3, гл. 8.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. VIII, §§ 33, 36–38; гл. IX, §§ 39–41, 44, 45.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. Гл. III, § 28; гл. IV, §§ 39–46.

Работа 4.3.2

Дифракция света на ультразвуковой волне в жидкости

Цель работы: изучение дифракции света на синусоидальной акустической решётке и наблюдение фазовой решётки методом тёмного поля.

В работе используются: оптическая скамья, осветитель, два длиннофокусных объектива, кювета с жидкостью, кварцевый излучатель с микрометрическим винтом, генератор ультразвуковой частоты, линза, вертикальная нить на рейтере, микроскоп.

В работе изучается дифракция света на фазовой решётке. Фазовая решётка создаётся в жидкости ультразвуковыми волнами и наблюдается методом тёмного поля. Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теорией дифракции на фазовых структурах (см. п. 2.2, 2.8.2 введения к разделу).

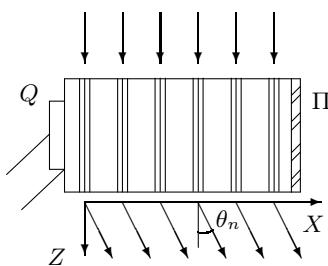


Рис. 1. Дифракция световых волн на акустической решётке

При прохождении ультразвуковой (УЗ) волны через жидкость в ней возникают периодические оптические неоднородности, обусловленные разницей значений коэффициента преломления в областях сжатия и разрежения. Эти периодические неоднородности играют роль своеобразной дифракционной решётки для проходящего сквозь жидкость света.

Пусть УЗ-волна распространяется вдоль оси X (рис. 1) в жидкости, налитой в стеклянную кювету. В направлении оси Z сквозь жидкость проходит световая волна, испытывающая дифракцию на акустической решётке. Поскольку скорость света значительно больше скорости звука, акустическую решётку можно считать неподвижной. Вызванное ультразвуком возмущение показателя преломления жидкости в нашем случае очень малоб. При этом естественно сделать предположение (справедливость которого мы потом исследуем теоретически и экспериментально), что акустическую решётку можно рассматривать как тонкий фазовый экран.

При небольших амплитудах звуковой волны показатель преломления жидкости n меняется по закону

$$n = n_0(1 + m \cos \Omega x), \quad (1)$$

где Ω — волновое число для УЗ-волны ($\Omega = 2\pi/\Lambda$), Λ — длина УЗ-волны, m — глубина модуляции показателя преломления, определяемая интенсивностью ультразвуковой волны ($m \ll 1$).

Пусть фаза световых колебаний на передней поверхности жидкости равна нулю. Тогда на задней поверхности (т.е. в плоскости $z = 0$) она равна

$$\varphi = knL = \varphi_0(1 + m \cos \Omega x), \quad (2)$$

где L — толщина слоя жидкости в кювете, k — волновое число для света ($k = 2\pi/\lambda$), λ — длина световой волны, $\varphi_0 = kn_0L$. Таким образом, в плоскости $z = 0$ фаза световых колебаний является периодической функцией координаты x , иными словами — УЗ-волна в жидкости создаёт фазовую дифракционную решётку.

Можно сформулировать качественный критерий, при выполнении которого можно считать акустическую решётку чисто фазовой, т.е. рассматривать её как тонкий фазовый экран. Для нашей задачи условие тонкого транспаранта (3.66) можно записать в виде

$$m \ll \frac{\Lambda}{L} \sqrt{\frac{\lambda}{L}}. \quad (3)$$

Таким образом, чисто фазовая акустическая решётка реализуется лишь на достаточно слабой УЗ-волне. При повышении мощности ультразвука акустическая волна начинает работать как сложная амплитудно-фазовая решётка.

Проведённое в п. 2.2.2 рассмотрение дифракции на фазовой решётке справедливо только в случае слабой фазовой модуляции. В общем случае после прохождения через кювету световое поле представляет совокупность не трёх, а большого числа плоских волн, распространяющихся под углами, определяемыми условием

$$\Lambda \sin \theta_m = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4)$$

Каждая из этих волн соответствует одному из максимумов в дифракционной картине Фраунгофера.

Определяя на опыте положение дифракционных максимумов различного порядка, можно по формуле (4) найти длину Λ УЗ-волны и вычислить скорость v распространения ультразвуковых волн в жидкости, если известна частота ν колебаний кварцевого излучателя:

$$v = \Lambda\nu. \quad (5)$$

Рассматриваемая теория применима как для бегущих, так и для стоячих ультразвуковых волн. Сточные УЗ-волны образуются при наложении волны, идущей от излучателя, и волны, отражённой от задней

стенки кюветы. Если же заднюю стенку кюветы покрыть слоем пористой резины (слой П на рис. 1), то волна от неё не отражается, и в кювете образуется практически чистая бегущая волна. Следует иметь в виду, что в стоячей волне амплитуда изменения давления (а следовательно, и коэффициента преломления) больше, чем в бегущей волне, создаваемой тем же излучателем. В связи с этим дифракционная картина в первом случае содержит большее число максимумов.

Экспериментальная установка. Для наблюдения дифракции света на УЗ-волнах на оптической скамье собирается установка, изображённая на рис. 2.

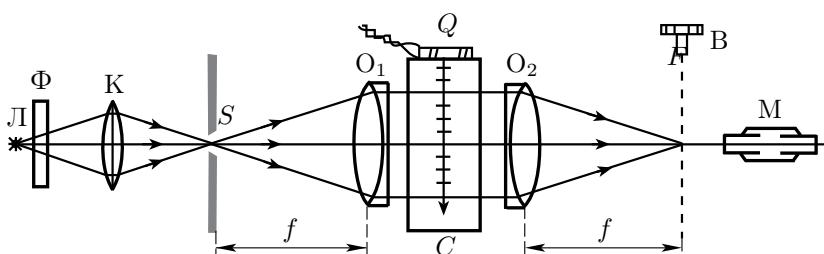


Рис. 2. Схема наблюдения дифракции на акустической решётке

Источник света Л через светофильтр Ф и конденсор К освещает щель S, которая расположена в фокусе объектива О₁. Выходящий из объектива параллельный пучок света проходит через кювету C перпендикулярно направлению распространения УЗ-волн. Эти волны возбуждаются в жидкости пьезокварцевой пластинкой Q, прикреплённой к стенке кюветы. На кварцевую пластинку подаётся напряжение ультразвуковой частоты от генератора (на рис. 2 не показан). В фокальной плоскости второго объектива О₂ образуется дифракционная картина, наблюдаемая при помощи микроскопа М. При этом обязательно применяют монохроматическое излучение (красный светофильтр).

Чёткость дифракционных полос зависит от ряда факторов, например, от ширины щели S, от её наклона по отношению к вертикали, от угла наклона кюветы к падающему лучу и т.д.

Длина Λ ультразвуковой волны определяется с помощью (4); в силу малости углов θ_m окончательное выражение может быть представлено в виде

$$l_m = mf \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad (6)$$

где l_m — измеренное на опыте линейное расстояние между m -м и нулевым максимумами, а f — фокусное расстояние объектива O_2 .

Наблюдение оптических неоднородностей, создаваемых ультразвуковыми волнами в жидкости, методом тёмного поля. Попробуем теперь получить видимое изображение фазовой акустической решётки. Для этого, прежде всего, необходимо получить в поле зрения микроскопа изображение задней плоскости (считая по ходу световых лучей) кюветы. Это достигается с помощью вспомогательной положительной линзы O , которую располагают на оптической скамье за фокальной плоскостью объектива O_2 (рис. 3).

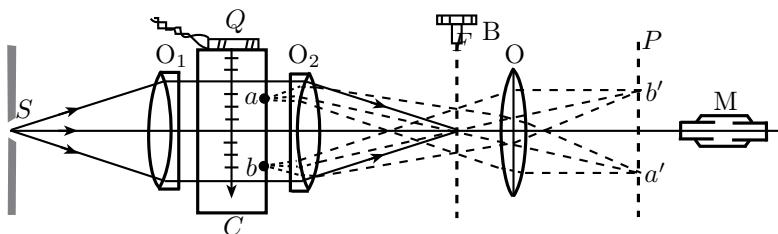


Рис. 3. Наблюдение акустической решётки методом тёмного поля

Перемещая микроскоп вдоль оптической скамьи, фокусируют его на плоскость P , где расположено чёткое изображение $a'b'$ какого-либо предмета ab , вплотную прижатого к стенке кюветы. Можно ли теперь увидеть в микроскоп УЗ-волну? Ясно, что чисто фазовая акустическая решётка является невидимой (если, конечно, выполнено условие (3)).

Для наблюдения пространственной структуры фазовой решётки можно использовать методы *фазового контраста* или *тёмного поля* (см. п. 2.8.2). Фазовую структуру можно сделать видимой при изменении фазы колебаний в центральном дифракционном максимуме на $\pm\pi/2$. Такой метод наблюдения носит название *метода фазового контраста*. В настоящей работе используется другой способ получения видимого изображения решётки — *метод тёмного поля*, основанный на устраниении центрального дифракционного максимума с помощью специального экрана. Как нетрудно показать, в поле зрения микроскопа будут наблюдаться чередующиеся светлые и тёмные полосы, причём расстояние между тёмными полосами соответствует смещению в плоскости кюветы на $\Lambda/2$. Таким образом, должно наблюдаться характерное для метода тёмного поля удвоение числа деталей рассматриваемой структуры.

Этот опыт можно проводить только со стоячими волнами, т.к. в случае бегущей волны визуальное наблюдение оказывается невозможным: глаз не успевает следить за быстро перемещающейся волной.

А. Установка с вертикальной щелью

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается измерить координаты дифракционных полос, образующихся при дифракции света на акустической решётке, а также определить период этой решётки методом тёмного поля. По результатам измерений рассчитывается скорость ультразвука в воде. Все измерения ведутся на стоячей волне.

I. Определение скорости ультразвука по дифракционной картине

- Соберите схему согласно рис. 2. Для получения параллельного пучка установите щель S на фокусном расстоянии от главной плоскости объектива O_1 (положение главной плоскости и фокусное расстояние объектива указаны на установке).
- Ярко осветите щель с помощью конденсора. Предварительную настройку можно вести с зелёным фильтром.

С помощью листа бумаги найдите резкое изображение щели S в фокальной плоскости F объектива O_2 . Перемещая микроскоп вдоль оптической скамьи, сфокусируйте его на резкое изображение щели. Предметная плоскость микроскопа расположена на расстоянии 2–4 см от его объектива.

Если окулярная шкала видна нерезко, следует вынуть окуляр из тубуса и, направив на любой освещённый объект, вращением глазной линзы подстроить его под свой глаз. Вернув окуляр на место, снова найдите резкое изображение щели.

- Включите генератор УЗ-частоты и частотомер. Плавно изменения частоту генератора в диапазоне 1–1,5 МГц, получите в поле зрения микроскопа систему дифракционных полос.
- Замените широкополосный зелёный фильтр красным. Изменяя ширину щели S , её наклон и положение конденсора, добейтесь оптимальных условий наблюдения дифракционных полос.
- Проследите, как изменяется число дифракционных полос при изменении мощности ультразвука.
- Найдите чёткую дифракционную картину и, перемещая излучатель с помощью микрометрического винта, оцените по порядку величины длину УЗ-волны как удвоенное расстояние между наиболее чёткими дифракционными картинами.

7. Измерьте положения x_m шести-восьми дифракционных максимумов с помощью поперечного микрометрического винта микроскопа. Один оборот винта (100 дел.) соответствует перемещению в 1 мм.

Не рекомендуется использовать для этих измерений окулярную шкалу, т.к. цена деления её неизвестна, а калибровка шкалы с помощью винта поперечного смещения микроскопа даёт большую погрешность.

Определите рабочую частоту по показаниям частотомера.

8. Повторите измерения п. 7 для 3–4-х частот в одном из диапазонов: вблизи одного, 4-х или 6-ти МГц. Отключите сигнал генератора, не выключая его из сети.
9. Запишите фокусное расстояние объектива O_2 и полосу пропускания светофильтра, указанные на установке.
10. Для каждой частоты постройте график зависимости координаты x_m от порядка m и по наклону прямой определите расстояние между соседними полосами $l_m/m = \Delta x_m/\Delta m$. Рассчитайте длину Λ УЗ-волны по формуле (6).
11. Рассчитайте скорость ультразвука в воде по формуле (5). Оцените погрешность эксперимента и сравните результат с табличным.

II. Определение скорости ультразвука методом тёмного поля

12. Для перехода к методу тёмного поля (рис. 3), не смешая микроскоп, поставьте рейтер с вертикальной нитью в фокальной плоскости F объектива O_2 и, перемещая рейтер вдоль оптической скамьи, найдите резкое изображение нити. Оно должно совпадать с резким изображением щели.

Не смешая рейтер с нитью, отодвиньте микроскоп и поставьте дополнительную линзу между нитью и микроскопом.

13. К задней (по ходу луча) стенке кюветы прижмите стеклянную пластинку с миллиметровыми делениями. Откройте пошире входную щель. С помощью листа бумаги найдите плоскость, в которой располагается резкое изображение линейки, созданное двумя линзами. Передвигая микроскоп, сфокусируйте его на изображение пластинки.
14. Определите цену деления окулярной шкалы в условиях опыта. Для этого совместите самые дальние из хорошо видимых в поле зрения миллиметровых делений пластиинки с делениями окулярной шкалы и запишите количество тех и других делений.

Вместо калибровки окулярной шкалы можно найти соответствие между делениями поперечного микрометрического винта и линейки в кювете.

Проведённая калибровка соответствует определённому положению микроскопа, поэтому не следует перемещать микроскоп вдоль скамьи до конца эксперимента.

15. Уберите пластинку из кюветы и уменьшите ширину входной щели. Включите генератор и попытайтесь увидеть звуковую решётку. Если решётка видна без применения метода тёмного поля (при открытом нулевом максимуме), значит, она не чисто фазовая, а сложная амплитудно-фазовая. В этом случае приведённая выше теория плохо применима. Уменьшая мощность излучателя, добейтесь исчезновения видимого изображения решётки в поле зрения микроскопа.
16. Закройте центральный дифракционный максимум вертикальной нитью. Удобно устанавливать нить в отсутствие УЗ-сигнала. В этом случае нет никаких максимумов, кроме нулевого (изображения щели), так что правильно установленная нить должна полностью затемнять поле зрения (отсюда название *метод тёмного поля*).
17. Включите генератор и найдите изображение акустической решётки.
18. Измерьте длину УЗ-волны в воде. Для этого с помощью окулярной шкалы (или микрометрического винта) измерьте расстояние между самыми дальними из хорошо видимых в поле зрения тёмных (или светлых) полос и просчитайте число промежутков между ними.
19. В заключение работы проделайте качественные эксперименты. Перемещая нить, закрывайте последовательно максимумы первого, второго и т.д. порядков и наблюдайте за изменениями картины звукового поля.

Убрав нить, постепенно закрывайте дифракционные максимумы с помощью края экрана (лезвия бритвы).

Объясните изменения в картине звукового поля.

20. Рассчитайте длину УЗ-волны Λ с учётом удвоения числа деталей, наблюдаемых методом тёмного поля. Определите скорость ультразвука в воде и оцените погрешность эксперимента.

Б. Установка с горизонтальной щелью

Источник света L (рис. 4) с помощью конденсора K проецируется на входную (коллиматорную) щель S . Входная щель ориентирована горизонтально и прикрыта красным светофильтром Φ . Коллиматорный объектив O_1 посыпает параллельный пучок на кювету с водой C .

Излучатель Q , погружённый в кювету, создаёт УЗ-волну. Вертикальное перемещение излучателя осуществляется винтом I (рис. 5), тонкая подача — лимбом II. При определённых положениях излучателя волна становится стоячей.

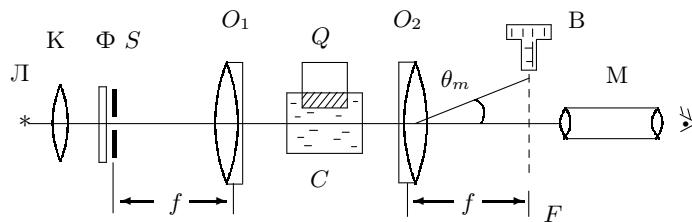


Рис. 4. Схема для наблюдения дифракции на акустической решётке

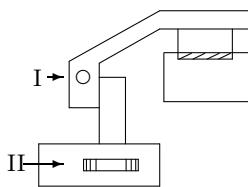


Рис. 5. Устройство для вертикального перемещения излучателя

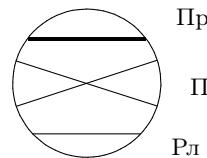


Рис. 6. Проволока Пр,
перекрестье П и реперная
линия Рл в фокальной
плоскости объектива O_2

Параллельный пучок света, дифрагируя на стоячей звуковой волне, образует дифракционную картину в фокальной плоскости F (рис. 4) камерного объектива O_2 . Картину можно наблюдать в микроскоп M .

Дифракционные полосы ориентированы горизонтально. Расстояние между ними можно измерить с помощью микрометрического винта B . Винт передвигает размещённые на стекле (рис. 6) в плоскости F перекрестье Π , тонкую реперную линию Rl и толстую проволоку Pr , которая используется в методе тёмного поля.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается измерить координаты полос, образующихся при дифракции света на акустической решётке, а также определить период этой решётки методом тёмного поля. По результатам измерений рассчитывается скорость ультразвука в воде. Все измерения ведутся на стоячей волне.

III. Определение скорости ультразвука по дифракционной картине

1. а) Соберите схему согласно рис. 4. Включите осветитель. Максимально откройте входную щель.

б) Поместив лист бумаги между коллиматором и кюветой, убедитесь, что световое пятно равномерно освещено; затем проверьте освещённость пятна на выходе из прибора. В случае необходимости отцентрируйте источник света и конденсор (см. Техническое описание – ТО, «Юстировка», пп. 1 и 2).

в) Настройте микроскоп и отсчётное устройство (см. ТО, пп. 3 и 4).

Установите рабочую ширину щели 20–30 мкм.

2. Получите дифракционную картину (см. ТО, п. 5). Картина видна наиболее чётко, когда в кювете образуется стоячая УЗ-волна.

Перемещая излучатель с помощью лимба (рис. 5), оцените по порядку величины длину УЗ-волны как удвоенное расстояние между наиболее чёткими дифракционными картинами. Цена деления лимба – 10 мкм, один оборот – 50 делений. Максимальное перемещение излучателя – 2 мм.

3. Определите положения дифракционных полос. Это удобно делать в следующем порядке:

а) увидев дифракционную картину, установите частоту генератора на ближайшее фиксированное значение (например, 1,2; 1,3 МГц и т. д. – для удобства отсчёта);

б) вращением лимба II (рис. 5) добейтесь наилучшей картины: в поле зрения должно быть 8–10 дифракционных полос;

в) с помощью перекрестия II и микрометрического винта, установленного на выходе из прибора, определите координату Y (в делениях винта) каждой светлой полосы (окулярная шкала микроскопа в этом упражнении не используется). Запишите соответствующую частоту.

4. Повторите измерения п. 3 для трёх–четырёх фиксированных частот, лежащих в одном из диапазонов (см. рис. 2–ТО).

5. Для подготовки установки к следующему упражнению, глядя в окуляр, закройте проволочкой (Пр на рис. 6) центральный максимум (изображение щели) и запишите показания винта, перемещающего проволочку. Это облегчит Вам настройку методом тёмного поля.

6. Постройте на одном листе графики $Y = Y(m)$ (от $-m$ до $+m$). Для каждой частоты определите по наклону прямой расстояние между соседними полосами (цена деления микрометрического винта – 4 мкм). Зная фокусное расстояние объектива O_2 ($f = 28$ см) и полосу пропускания красного фильтра ($\lambda = 6400 \pm 200$ Å), рассчитайте длину УЗ-волны Λ по формуле (6). Рассчитайте скорость звука для каждой частоты по формуле (5) и среднюю скорость.

7. Оцените погрешность эксперимента. Сравните результат с табличным.

IV. Определение скорости ультразвука методом тёмного поля

8. Для перехода к методу тёмного поля отодвиньте микроскоп от щели и разместите в промежутке между ними дополнительную линзу (рис. 3).

Поднимите излучатель над кюветой, опустите в воду квадратную сетку (сторона квадрата — 1 мм) и прижмите её к задней по ходу луча стенке кюветы.

Расширьте входную щель, чтобы увеличить освещённость поля зрения микроскопа. Найдите изображение сетки на листе бумаги (в плоскости P) и убедитесь, что свет попадает на объектив микроскопа. Передвигая микроскоп вдоль оптической оси, настройтесь на резкое изображение сетки в плоскости P . Центрируя линзу О по высоте и вокруг горизонтальной и вертикальной осей, добейтесь того, чтобы чётко были видны как горизонтальные, так и вертикальные штрихи сетки. Закрепите микроскоп.

Окулярная шкала микроскопа ориентирована вертикально. Используя как можно большую часть поля зрения микроскопа, зафиксируйте координаты совпадающих штрихов окулярной шкалы и сетки.

Проведённая калибровка соответствует определённому положению микроскопа, поэтому не следует перемещать микроскоп вдоль скамьи до конца эксперимента.

Рассчитайте цену малого деления окулярной шкалы в этом эксперименте.

9. Для наблюдения акустической решётки установите рабочую ширину щели (20–30 мкм). Уберите калибровочную сетку из кюветы, опустите туда излучатель и, варьируя частоту, постарайтесь увидеть звуковую решётку в микроскоп. Если решётка видна при открытом центральном максимуме, значит, она сложная амплитудно-фазовая. Уменьшая мощность ультразвука, добейтесь исчезновения видимого изображения решётки.
10. Закройте нулевой дифракционный максимум проволочкой (см. упр. I, п. 5). Это можно сделать, глядя мимо микроскопа на стекло в фокальной плоскости объектива О₂ (рис. 3). При этом проволочка закрывает изображение щели, и поле зрения микроскопа затемняется.
11. Меняя частоту, наблюдайте акустическую решётку. Убедитесь, что при удалении проволочки с главного максимума решётка не видна.
12. Определение периода звуковой решётки удобно вести при фиксированных частотах, настраивая чёткую картину перемещением излучателя (см. упр. I, п. 3).

Зафиксируйте с помощью окулярной шкалы микроскопа координаты первой и последней из хорошо видимых в поле зрения тёмных полос и количество светлых промежутков между ними.

13. Повторите измерения п. 12 для 6–8-ми частот внутри одной из рабочих полос УЗ-излучателя (рис. 2-ТО).
14. Закрывая проволочкой последовательно 1-й, 2-й, –1-й, –2-й максимумы, наблюдайте за изменением картины. Объясните явление.
15. Для каждой частоты рассчитайте длину УЗ-волны Λ с учётом удвоения числа наблюдаемых полос.
16. Постройте график $\Lambda = F(1/\nu)$ и определите по наклону прямой скорость ультразвука в воде.

Оцените погрешность эксперимента, сравните результаты с теоретическими.

Контрольные вопросы

1. Покажите, что период акустической решётки совпадает с длиной бегущей ультразвуковой волны как в случае бегущих, так и в случае стоячих волн. Покажите, что формула (4) справедлива для любой периодической решётки, независимо от того, является ли она амплитудной или фазовой.
- 2*. Как изменяется во времени интенсивность света в дифракционных максимумах разного порядка при дифракции света на бегущих и на стоячих ультразвуковых волнах?
- 3*. В чём отличие метода тёмного поля от метода фазового контраста?
- 4*. Сформулируйте экспериментальный критерий того, что акустическая решётка является чисто фазовой.

Литература

1. *Ландсберг Г.С. Оптика.* — М.: Физматлит, 2003. Гл. X, § 56.
2. *Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика.* — М.: Физматлит, 2005. Гл. IV, § 59.
3. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа.* — М.: Физматлит, 2001. § 8.8.

Работа 4.3.3

Исследование разрешающей способности микроскопа методом Аббе

Цель работы: определение дифракционного предела разрешения объектива микроскопа методом Аббе.

В работе используются: лазер; кассета с набором сеток разного периода; линзы; щель с микрометрическим винтом; оптический стол с набором рейтеров и крепёжных винтов; экран; линейка.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться со спектральным методом задачи дифракции (см. п. 2 введения к разделу).

Всякая оптическая система, предназначенная для получения изображений, имеет конечный предел разрешения, т. е. ограниченную возможность раздельного наблюдения близко расположенных предметов. Принципиальной причиной, ограничивающей предел разрешения, является дифракция световых волн. *Разрешающей способностью оптического прибора* называют минимальное расстояние ℓ_{\min} между двумя точками в пространстве предметов, которое прибор может разрешить. При визуальном наблюдении изображения в качестве критерия разрешения применяют так называемый *критерий Рэлея* (см. п. 2.9 введения).

Для иммерсионного микроскопа (объект находится в иммерсионной среде — жидкости с показателем преломления n) разрешающая способность объектива при *некогерентном* освещении

$$\ell_{\min} \approx \frac{0,61\lambda}{n \sin A},$$

где A — апертурный угол объектива микроскопа (см. рис. 1), т. е. угол между оптической осью и лучом, направленным из центра объекта в край линзы (напомним, что при наблюдении в микроскоп объект занимает небольшой участок, располагающийся вблизи оптической оси объектива). Вывод этой формулы предоставляем читателю.

Рассмотрим теперь *когерентно* освещённый объект, наблюдаемый в микроскоп. Схема образования изображения в объективе микроскопа представлена на рис. 1. Для простоты рассмотрим случай, когда предметом является периодическая структура (дифракционная решётка), освещаемая параллельным пучком лучей. При наблюдении в микроскоп предмет располагается вблизи переднего фокуса объектива. При освещении решётки волнами, наклонными к оси, с углом наклона чуть

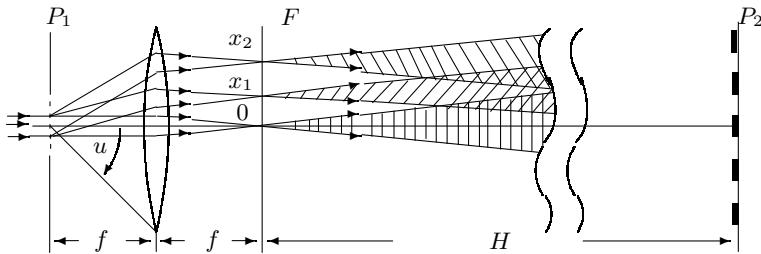


Рис. 1. Образование изображения в объективе микроскопа. P_1 — плоскость предмета, F — задняя фокальная плоскость объектива, P_2 — плоскость, сопряжённая с предметной плоскостью. В плоскости P_2 световые пучки сильно перекрываются

меньшим апертуры A волны нулевого порядка сфокусируются на край диафрагмы. Для получения изображения достаточно, чтобы на противоположные края сфокусировались волны 1-го порядка, т. е. угол между волнами 0 и 1 порядка должен быть равен $2A$ (см. п. 2.10). Согласно формуле (3.82), минимальное разрешаемое объективом расстояние определяется условием

$$\ell_{\min} \approx \frac{\lambda}{\sin A} \approx \frac{\lambda}{D/2f}, \quad (1)$$

где D — диаметр диафрагмы. При этом диафрагма, расположенная симметрично, пропускает нулевой и ± 1 дифракционные максимумы.

В нашей работе применяется двумерная решётка — сетка. Её можно рассматривать как две скрещенные (перпендикулярные друг к другу) решётки. Узкий пучок монохроматического света, пройдя через решётку с вертикальными штрихами, даёт совокупность максимумов, расположенных вдоль горизонтальной линии. Световой пучок, соответствующий каждому максимуму, проходя через вторую решётку, распадается на новую совокупность световых пучков, дающих максимумы вдоль вертикальной линии. Главные максимумы возникают тогда, когда одновременно выполняются условия:

$$d \sin \theta_x = m_x \lambda, \quad d \sin \theta_y = m_y \lambda, \quad (2)$$

где m_x и m_y — целые числа, характеризующие порядки дифракционных максимумов, θ_x и θ_y — направления на главные дифракционные максимумы в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно.

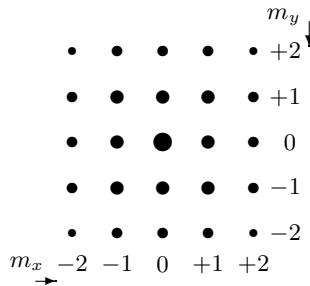


Рис. 2. Дифракция Фраунгофера на двумерной решётке (сетке). Максимумы изображены кружками, размеры которых характеризуют интенсивности

Максимумы, удовлетворяющие условию $\theta_x, \theta_y < u$, создают в задней фокальной плоскости F объектива картину дифракции Фраунгофера (рис. 2) — первичное изображение.

Если теперь поместить в фокальной плоскости вертикальную щель так, чтобы через неё проходили дифракционные максимумы с $m_x = 0$ и $m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то в плоскости P_2 получится изображение решётки с горизонтально расположенными штрихами. Если, наоборот, пропустить максимумы с $m_y = 0$ и $m_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то в P_2 получится изображение решётки с вертикальными штрихами. Таким образом можно продемонстрировать явление *пространственной фильтрации* — выделение различных структур в изображении (см. п. 2.8 введения к разделу).

Экспериментальная установка. Схема модели проекционного микроскопа приведена на рис. 3. Предметом служат сетки, расположенные в кассете. Смена сеток осуществляется поворотом внешнего кольца кассеты.

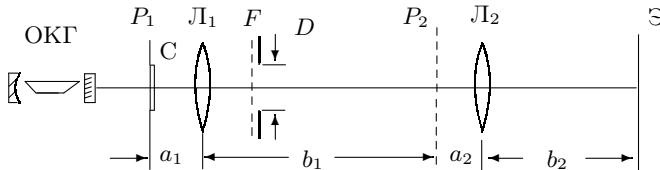


Рис. 3. Схема экспериментальной установки — модель проекционного микроскопа

Излучение лазера (ОКГ) почти перпендикулярно падает на сетку С, установленную вблизи фокальной плоскости линзы L_1 — объектива

микроскопа. Обычно и объектив, и окуляр микроскопа — короткофокусные линзы (1–3 см). В нашей модели линза L_1 выбирается достаточно длиннофокусной ($f \approx 10$ см), т. к. размер первичного изображения в фокальной плоскости F должен быть не слишком малым, чтобы дополнительными диафрагмами можно было влиять на вторичное изображение в плоскости P_2 . Вторичное изображение из плоскости P_2 проецируется на экран Э линзой L_2 (короткофокусной, чтобы изображение на экране было крупнее). Во избежание микротравм глаза от излучения лазера не следует использовать эту линзу традиционным образом как окуляр микроскопа.

Изображение сетки периодически повторяется — *репродуцируется* — в пространстве между сеткой и первой линзой, поэтому для того, чтобы среди множества репродуцированных изображений сетки можно было выделить её геометрическое изображение, на одну из сеток наложена тонкая проволочка, т. е. непериодический объект, изображение которого не репродуцируется.

В фокальной плоскости F могут быть установлены диафрагмы — щелевая или ирисовая (отверстие с переменным диаметром) и различного рода маски (препятствия).

Как видно из соотношения (1), минимально разрешимый шаг решётки или сетки определяется апертурным углом A объектива. Обычно апертура микроскопа меняется при помощи ирисовой диафрагмы на объективе (на линзе L_1 такая диафрагма есть), но в наших условиях удобнее располагать щелевую диафрагму в плоскости F . Имея набор сеток с различными периодами d и изменения апертурный угол объектива с помощью щелевой диафрагмы, можно экспериментально проверить соотношение (1).

В нашей работе период сеток рассчитывается двумя способами: в первом способе (по дифракции Фраунгофера) расстояние между дифракционными максимумами на экране измеряется при помощи линейки, а затем по формулам (2) определяется её период; во втором способе период определяется по увеличенному (с помощью модели микроскопа) изображению сетки на экране.

С помощью откалиброванных таким образом сеток определяется разрешающая способность микроскопа. Для этого в задней фокальной плоскости F объектива устанавливается щелевая диафрагма с микрометрическим винтом и подбирается её минимальный размер, при котором ещё видно изображение сетки на экране (щель пропускает максимумы с $m = 0, \pm 1$). По размеру диафрагмы и фокусному расстоянию объектива рассчитывается апертурный угол u и проверяется соотношение (1).

Для выполнения последней части работы ширина вспомогательной щели и угол наклона к оси системы подбираются так, чтобы на экране вместо изображения сетки получалось изображение решётки, расположенной наклонно, т. е. осуществлялась *пространственная фильтрация*. Если сетку и щель поменять местами, то соответствующим подбором сетки можно «рассечь» первичное изображение так, что изображение щели на экране будет многократно повторяться — *мультилицироваться*.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается определить периоды сеток сначала по их спектру на удалённом экране, затем по увеличенному с помощью модели микроскопа изображению сеток на экране и, наконец, по результатам измерения разрешающей способности микроскопа; наблюдать явления саморепродукции, пространственной фильтрации и мультилицирования.

Внимание! Попадание прямого лазерного луча на сетчатку глаза крайне опасно!

I. Определение периода решёток по их пространственному спектру

1. Включите в сеть блок питания лазера. Из-за переотражения в выходных стеклах лазера на его выходе может быть несколько лучей. Следите за лучом с максимальной яркостью. Яркость зелёного лазера можно ослабить с помощью светофильтра.
2. Закрепите кассету с двумерными решётками (сетками) вблизи выходного окна лазера. В каждой кассете 6 различных решёток.

Вращая наружное кольцо кассеты, пронаблюдайте на удалённом экране дифракционные картины для разных сеток.

Для определения расстояния между соседними дифракционными максимумами измерьте расстояние между удалёнными друг от друга максимумами (горизонтальными или вертикальными) и число промежутков между ними.

Проведите измерения для шести разных сеток и укажите их номера.

3. Измерьте расстояние H от сетки до экрана.

Запишите длину волны лазера, указанную на установке.

II. Определение периода решёток по изображению, увеличенному с помощью модели микроскопа

4. Соберите модель проекционного микроскопа (рис. 3). При настройке добивайтесь центрировки системы: световой пучок, прошедший одну

линзу, и пучок, прошедший обе линзы, должны попадать в то же место экрана, куда падал луч от лазера в отсутствие линз.

Длиннофокусная линза L_1 ($f \approx 10$ см) должна отстоять от сетки на расстоянии, чуть большем фокусного, при этом изображение сетки в плоскости P_2 получится на расстоянии, в несколько раз превышающем фокусное. Найдите это изображение на листе бумаги, затем с помощью короткофокусной линзы L_2 получите резкое изображение сетки на экране.

Для того чтобы выделить изображение сетки, соответствующее законам геометрической оптики (для устранения влияния саморепродукции), найдите резкое изображение проволочки, расположенной на одной из сеток.

5. Определите расстояния a_1, b_1, a_2, b_2 (рис. 3), учитывая следующие факторы: положение центров линз указаны на оправах проточками; расстояние $a_2 \simeq f_2$, поэтому положение промежуточного изображения можно не искать, а измерять сразу ($b_1 + a_2$) — «длину тубуса» микроскопа.

Так как для одной линзы увеличение равно b/a , то для всей системы оно составляет $b_1 b_2 / (a_1 a_2)$.

Измерьте периоды изображений сеток на экране.

III. Определение периодов решёток по оценке разрешающей способности микроскопа

6. Поместите щелевую диафрагму с микрометрическим винтом в фокальную плоскость F линзы L_1 . Определите для каждой решётки минимальный размер диафрагмы D , при котором на экране ещё видно изображение сетки (при меньших размерах щели изображение выглядит как одномерная решётка).

IV. Пространственная фильтрация и мультиплексирование

7. Проделайте качественный опыт по пространственной фильтрации. Подберите сетку средних размеров с достаточно крупным вторичным изображением. Ширину щели подберите так, чтобы она свободно пропускала максимум нулевого порядка и не пропускала максимумы первого порядка, расположенные в поперечном направлении. Поворачивая щель относительно оси системы, получите изображения решёток при различных ориентациях щели: для вертикального положения щели, когда она пропускает только дифракционные максимумы $(0, m_x)$, для горизонтального положения, когда проходят только дифракционные максимумы $(m_y, 0)$, и для наклонного положения под углом 45° , когда пропускаются максимумы с $m_x = m_y$. В этом случае на экране видна наклонная решётка — периодическая структура, которой нет в исходном объекте. Объясните наблюдаемые явления.

8. Для наблюдения явления мультилиплицирования поменяйте местами сетку С и щель D (рис. 3): сначала, не трогая линз, получите на экране резкое изображение щели, а затем в фокальной плоскости F объектива поставьте кассету с сетками, которые будут «рассекать» фурье-образ щели.

Подберите такую ширину входной щели D, чтобы на экране можно было наблюдать мультилиплицированное изображение для всех сеток. Чем уже щель, тем шире её фурье-образ и тем легче «рассечь» его сетками.

Проследите, как влияет на изображение уменьшение ширины щели при неизменной сетке и что происходит при смене сеток при постоянной ширине щели. Объясните явления.

V. Обработка результатов

1. По измерениям спектров определите дифракционные углы θ_x , θ_y и рассчитайте периоды решёток.
2. По измерениям увеличенных с помощью микроскопа изображений сеток рассчитайте их периоды и сравните с результатами, полученными по дифракционной картине.
3. По измерениям со щелью рассчитайте по формуле (1) минимальное расстояние (период решётки d), разрешаемое микроскопом, и сравните с результатами предыдущих измерений.
4. Для проверки теории Аббе постройте график зависимости $d = f(1/D)$, взяв периоды сеток, определённые по спектру. Проверьте справедливость формулы (1).
5. Зарисуйте и опишите результаты качественных опытов по пространственной фильтрации и мультилиплицированию.

Контрольные вопросы

1. Какому условию должно удовлетворять расстояние между сеткой и экраном, чтобы на экране наблюдалась дифракционная картина Фраунгофера?
2. Почему при наблюдении дифракции на удалённом экране дифракционные максимумы в случае крупных сеток перекрываются?
3. Почему предмет располагается вблизи передней фокальной плоскости объектива микроскопа?
4. Почему при смещении сетки в поперечном направлении первичное изображение не меняется, а вторичное смещается?
- 5.* Какой пространственный фильтр следует расположить в задней фокальной плоскости объектива, чтобы получить в плоскости P_2 изображение сетки с уменьшенными в два раза линейными размерами ячеек?

Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. XIV, § 92; гл. XV, §§ 96, 97.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. Гл. IV, §§ 56, 57.
3. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 3, гл. 8, § 8.10.
- 4*. Дитчберн Р. Физическая оптика. — М.: Наука, 1965. Гл. 8, §§ 8.19–8.29.

Работа 4.3.4

Метод преобразования Фурье в оптике

Цель работы: исследование особенностей применения пространственного преобразования Фурье для анализа дифракционных явлений.

В работе используются: гелий-неоновый лазер, кассета с набором сеток разного периода, щель с микрометрическим винтом, линзы, экран, линейка.

Анализ сложного волнового поля во многих случаях целесообразно проводить, разлагая его на простейшие составляющие, например, представляя его в виде разложения по плоским волнам. При этом оказывается, что если мы рассматриваем поле, полученное после прохождения плоской монохроматической волны через предмет или транспарант (изображение предмета на фотопленке или стеклянной пластинке) с функцией пропускания $t(x)$, то разложение по плоским волнам соответствует преобразованию Фурье от этой функции. Если за предметом поставить линзу, то каждая плоская волна сфокусируется в свою точку в задней фокальной плоскости линзы. Таким образом, картина, наблюдаемая в фокальной плоскости линзы, даёт нам представление о спектре плоских волн падающего на линзу волнового поля. Поэтому можно утверждать, что с помощью линзы в оптике осуществляется пространственное преобразование Фурье (подробнее см. п. 2 введения к разделу).

Экспериментальная установка. Схема установки представлена на рис. 1. Щель переменной ширины D , снабжённая микрометрическим винтом В, освещается параллельным пучком света, излучаемым лазером (радиус кривизны фронта волны велик по сравнению с фокусными расстояниями используемых в схеме линз).

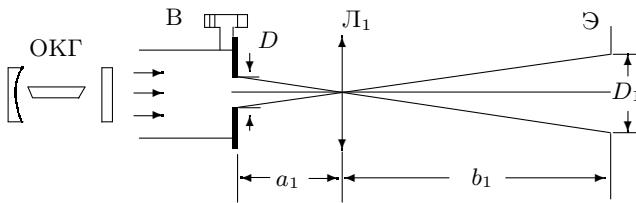


Рис. 1. Схема для определения ширины щели с помощью линзы

Увеличенное изображение щели с помощью линзы L_1 проецируется на экран \mathcal{E} . Величина изображения D_1 зависит от расстояний от линзы до предмета — a_1 и до изображения — b_1 , т. е. от увеличения Γ системы:

$$\Gamma = \frac{D_1}{D} = \frac{b_1}{a_1}. \quad (1)$$

Изображение спектра щели образуется в задней фокальной плоскости Φ линзы L_1 . Размещая в плоскости Φ двумерные решётки-сетки, можно влиять на первичное изображение и получать мультилинированное изображение щели.

Убрав линзу, можно наблюдать на экране спектр щели (рис. 2), а если заменить щель решёткой — спектр решётки. Крупные решётки дают на экране очень мелкую картину спектра, которую трудно промерить. В этом случае используют две линзы (рис. 3): первая (длиннофокусная) формирует первичное изображение — спектр, вторая (короткофокусная) — проецирует на экран увеличенное изображение спектра.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается: А) определить размеры щели сначала по увеличенному с помощью линзы изображению, затем — по спектру на экране; Б) определить периоды сеток сначала по спектру, затем по увеличенному изображению спектра; В) исследовать изображение щели, мультилинированное с помощью сеток; Г) проследить влияние щелевой диафрагмы, расположенной в фурье-плоскости, на изображение сетки.

Внимание! Попадание прямого лазерного луча на сетчатку глаза крайне опасно!

A. Определение ширины щели

I. Определение ширины щели по увеличенному изображению

- Включите в сеть блок питания лазера. Обратите внимание на распределение интенсивности излучения лазера на экране: на его сложную структуру, обусловленную возбуждением различных типов колебаний в резонаторе лазера.
- Установите тубус со щелью вплотную к выходному окну лазера (рис. 1). Настройку системы следует вести, наблюдая за пятном света на листе бумаги.
- С помощью короткофокусной линзы L_1 ($F_1 \simeq 3\text{--}4$ см) получите на экране Э увеличенное изображение щели. Фокусы линз указаны на оправах.
- Определите начало отсчёта ширины щели по её открытию, т. к. ноль может быть сбит. Цена деления винта — 10 мкм.
- Меняя ширину щели от 50 до 500 мкм (5–50 делений от нового нуля), снимите зависимость размера изображения D_1 от ширины щели b . Изменение ширины щели следует вести в сторону увеличения, чтобы исключить влияние люфта (свободного хода винта).
- Измерьте расстояния a_1 и b_1 для определения увеличения Γ системы. Погрешность этих измерений велика (особенно для малого расстояния a_1), поэтому, измерив дополнительно $L = a_1 + b_1$ и зная F_1 , можно по формуле линзы рассчитать a_1 и b_1 и сравнить с измеренными. Для удалённого экрана расчёт даёт обычно $a_1 \simeq F_1$.
- Зная увеличение линзы и размер изображения, рассчитайте по формуле (1) ширину входной щели $D_{\text{л}}$ («л» — с применением линзы).

II. Определение ширины щели по её спектру

- Получите на удалённом экране спектр щели (рис. 2). Меняя ширину щели, проследите за изменением спектра на экране и оцените интервал, для которого можно наблюдать и измерять спектр.
- Измерьте ширину спектра для самой маленькой щели. Для большей точности следует измерять расстояние X между удалёнными от центра минимумами, расположенными симметрично относительно центра картины, и отмечать порядок минимума m (например, 1-й, 2-й, 3-й, ..., начиная от центра).

Проведите серию измерений $X(m)$, меняя ширину щели в тех же пределах, что и в п. 5.

Измерьте расстояние L от щели до экрана.

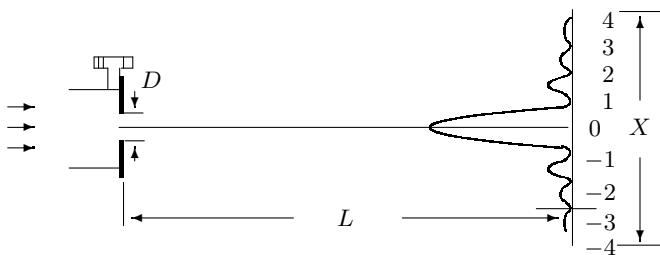


Рис. 2. Схема для определения ширины щели по спектру

10. По результатам измерений спектра рассчитайте ширину щели b_c («с» — по спектру), используя соотношения

$$\Delta X = \frac{X}{2m} = \frac{\lambda}{b_c} L. \quad (2)$$

Длина волны Не–Не-лазера $\lambda = 6328 \text{ \AA}$.

Постройте на одном листе графики $b_{\text{л}} = f(b)$ и $b_c = f(b)$.

Обратите внимание, что по спектру можно определить размер малой щели, который не может быть достаточно точно определён с помощью линзы, т. к. размер изображения щели на экране 2–3 мм.

11. Если поднести волос с выходному окну лазера, то по дифракционной картине на экране можно определить его диаметр. Проведите измерения и расчёт так же, как для щели.

Б. Определение периода решёток

III. Определение периода по спектру на удалённом экране

12. Поставьте кассету с двумерными решётками (сетками) вплотную к выходному окну лазера. В окошке под отверстием с сеткой виден № сетки. Вращением наружного кольца кассеты можно менять сетки.
13. Для каждой сетки измерьте расстояние X между m -ми максимумами и отметьте m — порядок максимума.

Измерьте расстояние L от кассеты до экрана.

14. Рассчитайте расстояния ΔX между соседними максимумами и определите период каждой решётки $d_c = f(\text{№})$, используя соотношения

$$\Delta X = \frac{X}{2m} = \frac{\lambda}{d_c} L. \quad (3)$$

Для крупных решёток спектры промерить не удаётся — они слишком узки. Их можно увеличить с помощью системы линз.

IV. Определение периода решёток по увеличенному изображению спектра

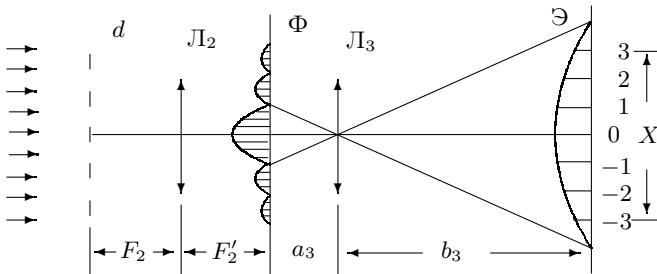


Рис. 3. Схема определения периода решётки по увеличенному изображению спектра

15. Линзу L_2 с максимальным фокусом ($F_2 \approx 10$ см) поставьте на расстоянии $\approx F_2$ от кассеты. В плоскости Φ линза L_2 даёт фурье-образ сетки — её спектр, а короткофокусная линза L_3 ($F_3 \approx 2,5$ см) создаёт на экране увеличенное изображение этого спектра.

Так как экран достаточно удалён ($b_3 \gg a_3$), то практически $a_3 = F_3$, и расстояние между линзами $\approx F_2 + F_3$.

16. Измерьте X и m для всех сеток, где это возможно.
17. Зная увеличение линзы L_3 ($\Gamma_3 = b_3/a_3$), можно рассчитать расстояние между максимумами Δx в плоскости Φ , а затем период сетки $d_\text{л}$:

$$\Delta x = \frac{\Delta X}{\Gamma_3} = \frac{\lambda}{d_\text{л}} F_2. \quad (4)$$

B. Пространственное преобразование спектров

V. Мультилицирование

18. Снова поставьте тубус со щелью к окну лазера (рис. 4) и найдите на экране резкое изображение щели с помощью линзы L_2 ($F_2 \approx 10$ см).

В фокальной плоскости Φ линзы L_2 поставьте кассету с сетками, которые будут «рассекать» фурье-образ щели — осуществлять пространственную фильтрацию.

19. Подберите такую ширину входной щели D , чтобы на экране можно было наблюдать мультилицированное изображение для всех сеток. Чем уже щель, тем шире её фурье-образ и тем легче рассечь его сетками.

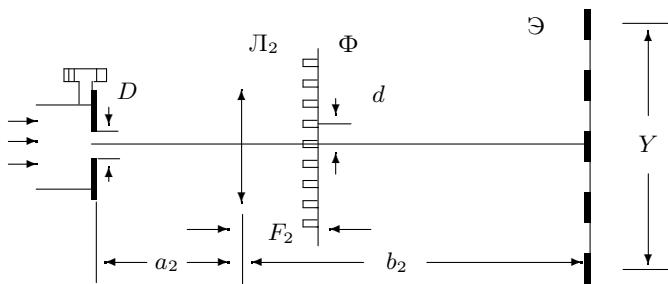


Рис. 4. Схема для наблюдения мультиплицирования

20. Снимите зависимость Y (расстояние между удалёнными изображениями щели) и K (число промежутков между изображениями) от № (номер сетки) для фиксированной ширины входной щели.

Запишите величины D и F_2 . Измерьте расстояния a_2 и b_2 для расчёта увеличения Γ_2 .

21. Рассчитайте периоды Δy «фиктивных» решёток, которые дали бы такую же периодичность на экране: $\Delta y = \Delta Y / \Gamma_2$, где $\Delta Y = Y / K$.

Постройте график $\Delta y = f(1/d_c)$, где d_c — периоды решёток, определённые по спектру. Зависимость должна быть линейной, поскольку

$$\frac{\lambda}{\Delta y} F_2 = d_c. \quad (5)$$

22. Зная размер щели D , постройте в масштабе первичное изображение (спектр щели) и отложите на нём величины d (№) — периоды самой плотной и самой редкой из использованных решёток.

VI. Влияние щелевой диафрагмы на изображение сетки (пространственная фильтрация)

23. Поставьте на место щели (рис. 4) кассету с сетками и сфокусируйте на экран изображение сетки. Убедитесь, что изображение остаётся резким при смене сеток. Если нет — добейтесь этого (устраните саморепродукцию), слегка перемещая линзу L_2 .

Поставьте в плоскости Φ вертикальную щель и проследите за изменением изображения на экране при сужении щели. Проделайте то же для щели, ориентированной горизонтально и под углом 45° к вертикали. Объясните явление.

Контрольные вопросы

1. Как связаны между собой изображения, наблюдаемые в плоскостях P_1 , Φ , P_2 ?
2. Что общего между спектром одиночной щели и спектром периодической последовательности щелей такой же ширины?
3. Как связаны между собой ширина щели и ширина её спектра?
4. В работе наблюдается картина дифракции Фраунгофера на сетке. Какие параметры сетки можно определить по этой картине?
5. Что общего и чем отличаются спектры, образующиеся при дифракции Фраунгофера на щели и на волосе?

Литература

1. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. — М.: Физматлит, 2001. Гл. 1, Гл. 8.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. Гл. IV, § 52.

Работа 4.3.5

Изучение голограммы

Цель работы: изучить свойства голограмм точечного источника и объёмного предмета.

В работе используются: гелий-неоновый лазер, голограммы, набор линз, предметная шкала, экран, линейка.

В настоящей работе определяются характеристики голограммы точечного источника и исследуется голограмма трёхмерного объекта. Получение и исследование голограмм возможно при наличии источников с большой длиной когерентности, поэтому в работе применяется лазерное излучение. Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теoriей голографического изображения (см. п. 3 введения к разделу). С более подробной теорией голографического изображения, учитывающей конечную толщину голограммы, можно познакомиться в приложении к данной работе (с. 256).

Экспериментальная установка. В работе исследуются голограммы точечного источника и трёхмерного объекта. Эти голограммы записаны на фотопластинках типа ЛОИ-2, имеющих высокое разрешение: ≈ 5000 линий/мм. При записи был использован Не–Не-лазер с длиной

волны излучения $\lambda = 632,8$ нм. Такой же лазер используется при восстановлении изображения.

В работе требуется определить расстояние d между голограммой и точечным источником света. Это расстояние можно рассчитать по формуле (3.88), если измерить радиусы ρ нескольких колец. Но размеры колец в нашей голограмме слишком малы для непосредственных измерений ($d \approx 1$ см, $\lambda \approx 0,6$ нм, $\rho \approx 0,1$ мм), поэтому требуется получить увеличенное изображение голограммы. Это изображение получается при помощи короткофокусной линзы на экране (рис. 1).

Согласно формуле (3.85) при просвечивании голограммы Γ (рис. 1) точечного источника плоской волной с амплитудой $f_0 = \text{const}$ на выходе имеется три волны: плоская с амплитудой $f_1 = \text{const}$, расходящаяся сферическая волна $f_2 \propto e^{ikr}$, отвечающая мнимому изображению O_2 , и сходящаяся сферическая волна $f_3 \propto e^{-ikr}$, отвечающая действительному изображению O_3 . После прохождения линзы L волна f_1 собирается в фокусе линзы в точке O'_1 , волны f_2 и f_3 фокусируются соответственно в точках O'_2 и O'_3 . Изображение, возникающее на экране \mathcal{E} , можно рассматривать как результат интерференции сферических волн от трёх точечных источников: O'_1 , O'_2 и O'_3 . Поэтому картина концентрических колец возникает на экране не только тогда, когда на нём образуется изображение Γ' голограммы, но и при многих других положениях линзы. Это легко проверить экспериментально.

Таким образом, чтобы определить радиусы колец, следует убедиться, что на экране действительно возникло изображение голограммы, то есть что плоскости Γ и Γ' сопряжены. Для этого в плоскость Γ вместо голограммы помещают прозрачную предметную шкалу, на которую нанесён тонкий крест с делениями. В этом случае увеличенное изображение креста получается при единственном положении линзы для определённого расстояния между предметом и экраном.

Предметная шкала и голограмма точечного источника смонтированы на платформе в единую плоскую кассету транспарантов (шкала — в отверстии № 1, голограмма — в отверстии № 2). Такая же предметная шкала, закреплённая в отдельной оправе, используется в качестве предмета при определении фокусного расстояния голографической линзы.

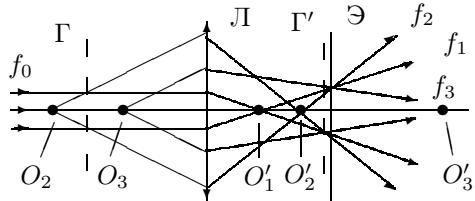


Рис. 1. Схема установки: Γ — голограмма точечного источника

Кроме голограммы точечного источника в работе исследуется голограмма объёмного предмета. Предмет представляет собой горизонтально расположенную миллиметровую линейку, за которой расположен вертикальный металлический стержень. При записи голограммы предмет располагался на расстоянии 10 см от пластинки. Фотопластинка была обращена к предмету той стороной, на которую нанесена эмульсия. Голограмма установлена в оправе вертикально и может поворачиваться вокруг вертикальной оси. Для измерения угла поворота служит транспортир, закреплённый под голограммой в горизонтальной плоскости.

Источником света служит Не–Не-лазер с диаметром луча < 1 мм. В опытах с объёмной голограммой требуются более широкие световые пучки. Для расширения пучка используются две линзы: короткофокусная — с фокусным расстоянием < 2 мм и длиннофокусная — с фокусным расстоянием ≈ 8 см. Собранный из этих линз расширитель создаёт пучок диаметром 4–5 см.

При проведении опытов оптические элементы размещаются на массивном оптическом столе и могут перемещаться вдоль оптической оси и в перпендикулярной ей плоскости. Расстояния измеряются линейкой. Фокусные расстояния линз указаны на их оправах.

ЗАДАНИЕ

A. Изучение характеристик голограммы точечного источника

В работе предлагается рассчитать расстояние от голограммы до точечного источника, который использовался при её создании:

- а) по результатам измерения радиусов голографических колец, спроектированных на экран при помощи короткофокусной линзы;
- б) по результатам измерения параметров проекционной установки, в которой голограмма используется как фокусирующая линза, а объектом служит предметная шкала.

**Избегайте прямого попадания лазерного луча в глаз.
Это крайне опасно для вашего зрения!**

I. Настройка установки. Определение цены деления предметной шкалы

1. Включите лазер. Для определения цены деления предметной шкалы установите кассету с транспарантами вблизи лазера. Осветите лучом лазера шкалу (отверстие № 1 в кассете транспаранта) и получите на удалённом экране дифракционную картину, созданную крестообразной шкалой.

Определив расстояние Δx между дифракционными максимумами на экране и расстояние L от шкалы до экрана, рассчитайте цену деления D по известной формуле для дифракции Фраунгофера: $\lambda/D = \Delta x/L$.

2. Определите цену деления той же шкалы, используя линзу с фокусным расстоянием $F \approx 4$ см: получите в центре экрана увеличенное изображение предметной шкалы с чёткими делениями.

Измерьте расстояния от линзы до предметной шкалы a и до экрана b и рассчитайте увеличение системы. Определите расстояние D' между изображениями штрихов и рассчитайте цену деления D предметной шкалы. Сравните результаты, полученные разными методами. Какой из методов точнее в наших условиях?

II. Определение расстояния d от голограммы до точечного источника

3. Получите на экране изображение голограммы точечного источника: для этого, перемещая кассету перпендикулярно лучу с помощью винта поперечной подачи (или плавно перемещая рейтер вдоль упора), осветите окно № 2 с голограммой. Перемещая голограмму по высоте, добейтесь того, чтобы три световых пятна на экране были расположены на одной высоте. Затем, совместив все три пятна, получите на экране изображение голограммы (набор концентрических колец правильной формы). Сместя линзу вдоль луча на несколько миллиметров (при необходимости), получите наиболее контрастное изображение колец. Приложите к экрану лист бумаги, отметьте на нём радиусы нескольких тёмных колец и измерьте эти радиусы линейкой. Зная увеличение системы, рассчитайте размеры колец на голограмме, а затем определите расстояние d от голограммы до точечного источника, который был использован при её создании.
4. Перемещая линзу вдоль луча, получите на экране изображение сначала мнимого O_2 , а затем действительного O_3 точечного источника. Для каждого изображения измерьте необходимые геометрические размеры установки и, зная фокусное расстояние линзы, рассчитайте расстояния от точечных источников до голограммы.
5. Снова получите на экране изображение голограммы (совместите три световых пятна). Перемещая кассету перпендикулярно оптической оси, сместите голограмму ближе к границе светового пятна. Опять получите изображения действительного и мнимого источников и определите их расстояния до голограммы. Объясните, почему изображение источника смещено относительно оси системы.

III. Изучение фокусирующих свойств голограммы

В этом опыте сама голограмма выполняет роль короткофокусной линзы. В качестве транспаранта, увеличенное изображение которого требуется получить с помощью голографической линзы, используется предметная шкала, закреплённая в отдельной оправе (цёны деления этой шкалы и шкалы, закреплённой в кассете, одинаковы).

6. Сначала небольшим перемещением голограммы по вертикали добейтесь полного разделения пучков света на удалённом экране. По размерам световых пятен определите, какой из пучков соответствует действительному O_3 , а какой — мнимому O_2 изображению точки (для этого можно приблизить *переносной* экран ближе к голограмме).
7. Установите переносной экран на расстоянии ≈ 50 см за голограммой (отсчёт всегда ведётся от источника света). Перед голограммой (вплотную к ней) поставьте предметную шкалу, закреплённую в отдельной оправе. Отодвигая рейтер со шкалой от голограммы, получите в одном из пятен резкое изображение делений крестообразной шкалы

Измерьте расстояние между штрихами D' на экране и расстояние b от экрана до голограммы. Используя эти данные, а также найденную ранее цену деления шкалы D , рассчитайте фокусное расстояние голографической линзы.

Сравните между собой найденные во всех опытах расстояния от точечного источника до голограммы.

Б. Изучение характеристик голограммы объёмного предмета

В работе предлагается, рассматривая сквозь голограмму мнимое изображение предмета,

- а) оценить угол падения опорной волны, который был выбран при создании голограммы;
- б) убедиться, что изображение предмета восстанавливается по небольшой части голограммы;
- в) оценить расстояние между линейкой и стержнем.

Кроме того, предлагается провести наблюдение действительного изображения предмета, чтобы

- г) определить, чем отличаются изображения при повороте голограммы на 180° вокруг вертикальной оси;
- д) проследить за изменением масштабов изображений при освещении голограммы сферической волной.

IV. Юстировка системы

8. Соберите на оптическом столе расширитель пучка. Для этого определите положение лазерного пятна на удалённом экране; установите линзу

с фокусным расстоянием 8–9 см на расстоянии ≈ 50 см от экрана и, перемещая линзу в плоскости, перпендикулярной оптической оси, совместите центр светового пятна с точкой, где располагалось пятно в отсутствие линзы.

9. На расстоянии ≈ 10 см перед длиннофокусной линзой установите короткофокусную линзу с $f \approx 2$ мм. Перемещая короткофокусную линзу в плоскости, перпендикулярной лучу, вновь совместите центр светового пятна с его первоначальным положением.
10. Перемещением короткофокусной линзы вдоль луча добейтесь того, чтобы из собранного расширителя выходил параллельный пучок: при полном заполнении светом длиннофокусной линзы диаметр светового пятна на удалённом экране равен диаметру линзы, при неполном — можно контролировать размер пятна, перемещая вдоль луча переносной экран.

V. Изучение мнимого изображения

11. Поместите голограмму в расширенный пучок лазера фотоэмulsionей к лазеру и найдите мнимое изображение предмета. Для этого расположитесь за экраном с правой стороны. Медленно поворачивая голограмму вокруг вертикальной оси и перемещая глаз в горизонтальной плоскости на высоте луча, найдите изображение линейки в окне голограммы. Проследите за тем, как меняется ориентация мнимого изображения при перемещении глаза наблюдателя (убедитесь, что изображение объёмное).
12. По углу поворота голограммы оцените угол падения опорной волны, который был выбран при получении голограммы.
13. Постепенно закрывая голограмму листом бумаги, убедитесь в том, что изображение предмета восстанавливается даже по небольшой части голограммы. Объясните это явление.
14. Подумайте, как оценить расстояние от линейки до вертикального стержня, расположенного за ней, фиксируя по транспортиру угол, под которым наблюдается изображение. Оцените это расстояние.
15. Проведите наблюдение мнимого изображения предмета, используя в качестве лупы линзу с фокусным расстоянием 20 см.

VI. Изучение действительного изображения

16. Найдите действительное изображение предмета: голограмма должна при этом располагаться перпендикулярно падающему пучку света, глаз наблюдателя — с левой стороны от экрана на расстоянии от пластинки 50–80 см. Поскольку это изображение расположено между пластинкой и глазом, удобно рассматривать его через лупу.

Обратите внимание, что по мере удаления лупы от глаза вы сначала видите резкое изображение стержня и только потом — линейки. Объясните это явление.

17. Поверните голограмму на 180° вокруг вертикальной оси (фотоэмulsionью от лазера). Найдите действительное и мнимое изображения. При каких углах падения восстанавливающей волны они возникают? Чем и почему отличаются эти изображения от наблюдаемых ранее?
18. Снова разверните голограмму эмульсией к лазеру. Перемещая короткофокусную линзу расширителя вдоль луча, определите, как изменяются масштабы действительного и мнимого изображений. Объясните эти изменения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Если голограмма записана на фотопластинке с толстым слоем эмульсии и при большом угле падения опорной волны, то она регистрирует объёмную картину интерференции предметной и опорной волн. Будем считать, что предметная волна с комплексной амплитудой $f_{\text{пр}}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, распространяется в плоскопараллельном слое эмульсии толщины h ($0 \leq z \leq h$). При записи голограммы опорная волна была плоской, её волновой вектор $\mathbf{k}_{\text{оп}}$ лежал в плоскости x, z и составлял угол α с осью z . Запишем комплексную амплитуду этой волны в виде

$$f_{\text{оп}}(\mathbf{r}) = a_{\text{оп}} e^{-i(\mathbf{k}_{\text{оп}} \cdot \mathbf{r})} = a_{\text{оп}} e^{-ik(x \sin \alpha + z \cos \alpha)}, \quad (1)$$

где k — волновое число.

После экспонирования фотопластинки и её химической обработки в фотоэмulsionии образуются кристаллы металлического серебра, локальная концентрация которых пропорциональна интенсивности интерференционной картины:

$$|f_{\text{пр}}(\mathbf{r}) + f_{\text{оп}}(\mathbf{r})|^2.$$

Рассмотрим структуру эмульсии в случае, когда предметная волна является плоской волной с волновым вектором, перпендикулярным плоскости фотопластинки:

$$f_{\text{пр}}(\mathbf{r}) = a_{\text{пр}} e^{-ikz}.$$

Интенсивность интерференционной картины

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) = & |a_{\text{пр}}|^2 + |a_{\text{оп}}|^2 + \\ & + 2|a_{\text{пр}}||a_{\text{оп}}| \cos(k[(1 - \cos \alpha)z - x \sin \alpha] + \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

где φ — постоянная разность фаз между предметной и опорной волнами. Отсюда видно, что в рассматриваемом случае линиями постоянной интенсивности являются прямые. В частности, интенсивность максимальна, если

$$z = \frac{x}{\operatorname{tg}(\alpha/2)} + \frac{2\pi n - \varphi}{k(1 - \cos \alpha)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(здесь использовано $\operatorname{tg} \alpha/2 = (1 - \cos \alpha)/\sin \alpha$). Кроме того, при постоянной координате z интенсивность периодически меняется вдоль координаты x с периодом

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \alpha},$$

где λ — длина волны света. На рис. 2а показано семейство прямых, вдоль которых интенсивность интерференционной картины постоянна. Эти прямые параллельны биссектрисе угла между волновыми векторами предметной и опорной волн.

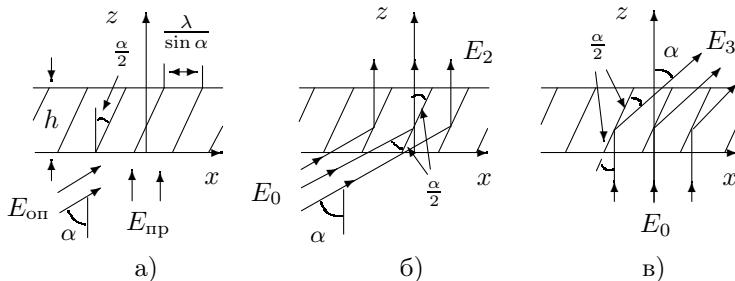


Рис. 2. Запись и восстановление фронта плоской волны

Пропорционально интенсивности $I(\mathbf{r})$ меняется локальная концентрация металлического серебра. Можно сказать, что в рассматриваемом случае эмульсия голограммы представляет собой периодическую последовательность наклонно расположенных зеркал, причём коэффициент пропускания и отражения зеркал меняется вдоль координат x, z . Эмульсию можно считать тонкой, если проекция $h \operatorname{tg}(\alpha/2)$ (h — толщина эмульсии) линейного размера отдельного зеркала на ось x много меньше периода следования зеркал Δx , т. е.

$$h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \ll \frac{\lambda}{\sin \alpha} \quad \text{или} \quad 2 \frac{h}{\lambda} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \ll 1.$$

Толщина эмульсии на фотопластинках ЛОИ-2, используемых в работе,

$$h \simeq (7 \div 10)\lambda \simeq 5 \text{ мкм} \quad (\lambda \simeq 0,6 \text{ мкм}).$$

При регистрации голограммы точечного источника опорная волна падает на фотопластинку нормально, а угол падения предметной волны на периферии голограммы (в районе десятого интерференционного кольца) $\alpha \simeq 10^{-2}$. Поэтому

$$\frac{2h}{\lambda} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \simeq 10^{-3},$$

и эту голограмму можно считать тонкой. Для голограммы предмета угол падения опорной волны $\alpha \simeq 40^\circ$, и тот же параметр достигает значения $\simeq 2$. В этом случае эмульсию следует считать толстой.

Рассмотрим условия восстановления действительного и мнимого изображений для толстослойной голограммы. Пусть на голограмму падает плоская волна, волновой вектор \mathbf{k}_0 которой лежит в плоскости x, z и составляет угол β с осью z . Комплексная амплитуда этой волны

$$f_0(\mathbf{r}) = a_0 e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} = a_0 e^{-ik(x \sin \beta + z \cos \beta)}. \quad (3)$$

Падающая волна, проходя через эмульсию голограммы, будет частично рассеиваться на центрах восстановленного серебра. Можно считать, что небольшая область эмульсии вблизи точки $\mathbf{r} = (x, y, z)$ является источником вторичной (рассеянной) волны. Амплитуда вторичной волны пропорциональна концентрации металлического серебра, которая в свою очередь пропорциональна интенсивности интерференционной картины предметной и опорной волн при записи голограммы, а фаза определяется фазой падающей волны. Исходя из этого, запишем комплексную амплитуду волны f , рассеянной в точке \mathbf{r} в виде

$$f(\mathbf{r}) \sim |f_{\text{пр}} + f_{\text{оп}}|^2 f_0 = f_1(\mathbf{r}) + f_2(\mathbf{r}) + f_3(\mathbf{r}),$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r}) &= a_0 (|a_{\text{оп}}|^2 + |f_{\text{пр}}(\mathbf{r})|^2) e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}, \\ f_2(\mathbf{r}) &= a_0 a_{\text{оп}}^* f_{\text{пр}}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{\text{оп}}) \cdot \mathbf{r}}, \\ f_3(\mathbf{r}) &= a_0 a_{\text{оп}} f_{\text{пр}}^*(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_{\text{оп}}) \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Обычно $|a_{\text{оп}}|^2 \gg |f_{\text{пр}}(x, y)|^2$, поэтому f_1 , как и в случае тонкой голограммы, описывает комплексную амплитуду пропущенной волны. Эта волна распространяется под тем же углом β , что и падающая. Слагаемое $f_2(\mathbf{r})$ пропорционально комплексной амплитуде предметной волны, причём соотношение между фазами предметной волны в разных точках сохраняется, если $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_{\text{оп}}$. В этом случае $f_2(\mathbf{r})$ описывает мнимое изображение предмета. Таким образом, при наблюдении мнимого изображения восстанавливющая волна должна падать под тем же углом, что и опорная, т. е. $\alpha = \beta$. Отметим, что условие возникновения мнимого изображения в толстой и тонкой голограммах одно и то же. На рис. 2б показаны падающая и восстановленная плоские волны. Происходит как бы отражение падающей волны от системы наклонно расположенных зеркал.

При описании рассеянного поля удобно представить поле предметной волны в виде суперпозиции плоских волн:

$$f_{\text{пр}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}_{\text{пр}}} a(\mathbf{k}_{\text{пр}}) e^{-i\mathbf{k}_{\text{пр}} \cdot \mathbf{r}}, \quad (5)$$

где $a(\mathbf{k}_{\text{пр}})$ имеет смысл амплитуды волны с волновым вектором $\mathbf{k}_{\text{пр}}$ в дальней (фраунгоферовой) зоне. Используя определение (5), можно представить поле f_2 в виде

$$f_2(\mathbf{r}) = a_0 a_{\text{оп}}^* \sum_{\mathbf{k}_{\text{пр}}} a(\mathbf{k}_{\text{пр}}) e^{-i(\mathbf{k}_{\text{пр}} + \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{\text{оп}}) \cdot \mathbf{r}}.$$

При выполнении условия $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_{\text{оп}}$ поле $f_2(\mathbf{r})$ с точностью до константы совпадает с полем предметной волны (5). В нашем случае предмет находился перед фотопластинкой, и рассеянное им излучение падало на фотопластинку под небольшими углами, т. е. волновые векторы $\mathbf{k}_{\text{пр}}$ расположены вблизи $\mathbf{k}_0 = (0, 0, k)$. Поэтому мнимое изображение возникает непосредственно за голограммой на месте голографируемого предмета. Аналогично можно записать поле f_3 :

$$f_3(\mathbf{r}) = a_0 a_{\text{оп}} \sum_{\mathbf{k}_{\text{пр}}} a^*(\mathbf{k}_{\text{пр}}) e^{-i(\mathbf{k}_{\text{оп}} + \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{\text{пр}})\mathbf{r}}. \quad (6)$$

Поле f_3 в форме (6) представлено в виде суперпозиции плоских волн, волновой вектор которых определяется из условия

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_{\text{оп}} + \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{\text{пр}} \quad (7)$$

при естественном ограничении:

$$|\mathbf{k}_3| = |\mathbf{k}_{\text{оп}}| = |\mathbf{k}_0| = |\mathbf{k}_{\text{пр}}| = k. \quad (8)$$

В рассмотренном примере поле предметной волны представляет собой плоскую волну, фазовый фронт которой параллелен фотопластинке, т. е. $\mathbf{k}_{\text{пр}} \approx (0, 0, -k)$. Взаимная ориентация волновых векторов показана на рис. 3. Как ясно из рисунка, условия (7)–(8) выполняются, если и $\mathbf{k}_0 = (0, 0, k)$, т. е. восстанавливающая волна падает на голограмму нормально. При этом волновой вектор восстановленной волны $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_{\text{оп}}$, и эта волна распространяется под углом α к оси z . На рис. 2в показана падающая и восстановленная волна для этого случая.

Если предмет рассеивает падающую на него волну под небольшими углами, а волновые векторы $\mathbf{k}_{\text{пр}}$ мало отличаются от $(0, 0, k)$, то поле $f_3(\mathbf{r})$ связано с действительным изображением предмета. Для наблюдения этого изображения нужно расположить голограмму перпендикулярно лазерному лучу и рассматривать её под углом α , т. е. под тем же углом, под которым падала опорная волна. Изображение возникает между голограммой и глазом наблюдателя. Если набор волновых векторов \mathbf{k}_0 значительно отличается от $(0, 0, k)$, то удовлетворить условиям (7)–(8) одновременно для всех $\mathbf{k}_{\text{пр}}$ не представляется возможным, поэтому качество действительного изображения заметно хуже, чем качество мнимого изображения.

Контрольные вопросы

1. В чем сходство и различие голограммы точечного источника и зонной пластиинки Френеля, фотографии колец Ньютона?

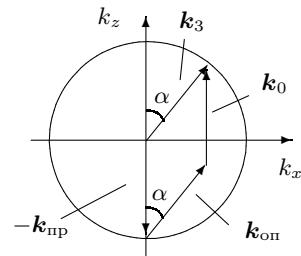


Рис. 3. Ориентация волновых векторов при восстановлении действительного изображения

2. Что изменится в изображении голограммы точечного источника, наблюдаемого по схеме, изображённой на рис. 1, если устраниТЬ точечный источник O'_1 , поместив в фокус линзы Л небольшой непрозрачный экран-фильтр?
3. Как изменится фокусное расстояние голограммы точечного источника, если она была получена при одной длине волны, а освещается светом с другой длиной волны?
4. Чем определяется минимальный размер голограммы, при котором можно восстановить изображение предмета?
5. Как изменятся масштабы действительного и мнимого изображений предмета, если голограмму освещать расходящейся или сходящейся волной?
6. Как зависит диапазон углов, под которым можно рассматривать мнимое изображение предмета, от разрешающей способности фотоэмульсии, от ширины спектра источника света?

Литература

1. Кингsep A.C., Локшин Г.Р., Ольхов O.A. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. — М.: Физматлит, 2001. §§ 8.11–8.15.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. Гл. IV, §§ 44, 54.
3. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. XI, §§ 59, 60.
- 4*. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. Гл. 8, §§ 1, 2.

Работа 4.3.6

Дифракция света на периодических структурах (саморепродукция)

Цель работы: Изучение явления саморепродукции и применение его к измерению параметров периодических структур.

В работе используются: лазер, кассета с сетками, мира, короткофокусная линза с микрометрическим винтом, экран, линейка.

При дифракции на предмете с периодической структурой наблюдается интересное явление: на некотором расстоянии от предмета вдоль направления распространения волны появляется изображение, которое потом периодически повторяется — *репродуцируется* (эффект Талбота, см. п. 2.3 введения к разделу).

Экспериментальная установка. Хорошим приближением к плоской волне в нашем эксперименте является излучение лазера. Луч лазера

падает перпендикулярно на периодический объект O , установленный в плоскости P_0 (рис. 1).

За плоскостью P_0 (в плоскостях P_1-P_N) периодически по z возникают изображения объекта, которые с помощью линзы L можно поочерёдно проецировать на экран, установленный в плоскости \mathcal{E} . Если убрать линзу, то на экране наблюдается картина дифракции луча лазера на периодическом объекте.

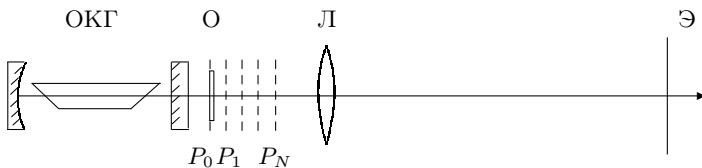


Рис. 1. Схема установки: ОКГ — оптический квантовый генератор (гелий-неоновый лазер), O — двумерная решётка, P_N — плоскости, где наблюдаются репродуцированные изображения, L — короткофокусная линза, \mathcal{E} — экран для наблюдения изображения объекта

Экран устанавливается достаточно далеко от объекта, так что проdifрагировавшие лучи, соответствующие различным порядкам дифракции ($\sin \theta_n = n\lambda/d$), разделяются.

Измерив расстояние между дифракционными максимумами и расстояние от объекта до экрана, мы определим $\sin \theta_n$ и d .

В нашей работе в качестве периодических объектов применяется «мира» — набор различным образом ориентированных одномерных решёток разного периода, а также двумерная решётка-сетка. Сетку можно рассматривать как две взаимно перпендикулярные решётки. Узкий пучок монохроматического света, пройдя через первую решётку с вертикальными штрихами, должен дать совокупность максимумов, расположенных вдоль горизонтальной линии.

Световой пучок, соответствующий каждому максимуму, проходя через вторую решётку, распадается на новую совокупность пучков, дающих максимумы вдоль вертикальной линии. В результате главные максимумы возникают тогда, когда одновременно выполняются условия

$$d \sin \theta_x = m_x \lambda, \quad d \sin \theta_y = m_y \lambda, \quad (1)$$

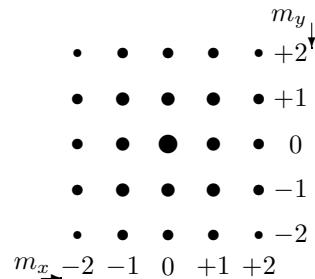


Рис. 2. Спектр решётки-сетки

где m_x и m_y — два целых числа, характеризующих порядки дифракционных максимумов, φ_x и φ_y — направления на главные дифракционные максимумы в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно (рис. 2). Максимумы показаны кружками, размеры которых характеризуют интенсивность.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается:

А) определить периоды сеток сначала по их спектру на удалённом экране; затем по увеличенному с помощью линзы изображению сеток и, наконец, по результатам измерения расстояний между репродуцированными изображениями сеток;

Б) повторить измерения для нескольких элементов миры.

А. Исследование двумерных решёток

I. Определение периода решёток по их пространственному спектру

1. Включите в сеть блок питания лазера. Пронаблюдайте на экране расположение интенсивности в излучении лазера. Из-за переотражения в выходных стёклах лазера на его выходе может быть несколько лучей. Следите за лучом с максимальной яркостью.

Настройку системы следует вести, наблюдая за пятном света на листве бумаги. Яркость излучения зелёного лазера можно ослабить с помощью светофильтра.

Внимание! Попадание прямого лазерного луча на сетчатку глаза крайне опасно!

2. Закрепите кассету с двумерными решётками (сетками) вблизи выходного окна лазера так, чтобы в окошке под отверстием с сеткой был виден её номер (в каждой кассете 6 разных решёток). Вращением барабана (наружного кольца кассеты) решётки можно менять.
3. Для каждой сетки определите расстояние x между соседними дифракционными максимумами на экране: измерьте расстояние X между двумя достаточно удалёнными друг от друга максимумами и поделите на число промежутков m между ними ($x = X/m = f(\text{№})$).
4. Измерьте расстояние L от кассеты до экрана. Длина волны лазера указана на установке.

II. Определение периода решёток по изображению, увеличенному с помощью линзы

5. Закрепите короткофокусную линзу на небольшом расстоянии от лазера. Временно удалите кассету с сетками из луча и центрировкой линзы

совместите световое пятно, сформированное линзой, с положением луча на экране в отсутствие линзы. Передвигая линзу с помощью микрометрического винта, сначала убедитесь, что световое пятно на экране неподвижно, затем переместите линзу как можно ближе к кассете.

6. Установите кассету с сетками между лазером и линзой и, перемещая её вдоль оси системы, получите на экране увеличенное изображение одной из сеток.

Изображение сетки периодически повторяется в пространстве, поэтому для того, чтобы среди множества репродуцированных изображений сетки можно было выделить её геометрическое изображение, на одну из сеток наложена тонкая проволочка, т. е. непериодический объект, изображение которого не репродуцируется. Найдите резкое изображение проволочки; убедитесь, что при смене сеток резкость изображений не нарушается.

7. Определите размеры D клеток на экране. Для мелких сеток удобно прижать к экрану дополнительный листок бумаги и отметить на нём необходимые расстояния. Проведите измерения для всех сеток, для которых это возможно.

Обратите внимание, что по спектру можно определять размер мелкой сетки, который не может быть достаточно точно определён с помощью линзы, т. к. размер изображения на экране слишком мал.

8. Измерьте расстояния от линзы до сетки (a) и до экрана (b).

III. Исследование эффекта саморепродукции с помощью сеток

9. Получите на экране геометрическое изображение сетки. Перемещая линзу с помощью микровинта, определите по нониусной шкале координаты z_N плоскостей саморепродукции, соответствующих чёткому изображению сетки на экране.

Повторите измерения для других сеток. Для крупных сеток полезно при измерениях строить графики $z_N = f(N)$, чтобы рассчитать периоды сеток $d_{\text{реп}} = f(\aleph)$.

Б. Исследование решёток миры

Ввиду сложности настройки на определённый элемент миры предлагается следующий порядок измерения периодов: для одного элемента сначала по саморепродукции, затем по увеличенному изображению и, наконец, по спектру.

10. Рассмотрите миру в отражённом свете. Убедитесь, что самые мелкие решётки расположены внизу. Найдите элемент миры с номером 25.
11. Установите миру на место кассеты (стекло миры обращено к линзе) таким образом, чтобы на экране было видно резкое увеличенное изображение цифры 25. Перемещая рейтер с мирай перпендикулярно лучу,

- осветите одну из ближайших сеток (горизонтальную или вертикальную). Перемещением миры подведите пятно лазера к центру выбранной решётки и уточните настройку на геометрическое изображение с помощью микровинта.
12. Перемещая линзу с помощью микрометрического винта, определите по нониусной шкале координату плоскости, соответствующей изображению миры на экране по законам геометрической оптики, и координаты плоскостей саморепродукции.
 13. Верните линзу в положение, соответствующее изображению по законам геометрической оптики. Определите параметры изображения миры на экране; измерьте расстояния от линзы до экрана и до миры.
 14. Поворотом линзы на рейтете вокруг вертикальной оси выведите линзу из луча и проведите измерения спектра миры.
 15. Повторите всю серию измерений для миры с номером 20.

IV. Обработка результатов

16. По результатам измерений спектра рассчитайте период каждой решётки $d_{\text{сп}} = f(N)$, полагая $\sin \theta \approx \theta \approx x/L$.
17. По измерениям с линзой рассчитайте периоды всех сеток $d_{\text{л}} = Da/b = f(N)$.
18. Постройте графики $z_N = f(N)$; по наклону прямых рассчитайте периоды сеток $d_{\text{реп}} = f(N)$.
19. Сведите результаты измерений d разными методами в единую таблицу и оцените, какой из методов точнее.
20. Определите периоды решёток миры тремя способами и рассчитайте число штрихов на мм в выбранных элементах.

Контрольные вопросы

1. Оцените, на каком расстоянии от экрана до решётки выполняется условие дифракции Фраунгофера.
2. Почему в эксперименте получается лишь несколько чётких репродуцированных изображений решёток?
3. Объясните, как получается выражение для направления на дифракционные максимумы.
4. Объясните, почему изображение проволочной сетки репродуцируется, а изображение одиночной проволочки не репродуцируется.

Литература

1. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. — М.: Физматлит, 2001. Ч. III, гл. 8, §§ 8.1, 8.2, 8.7.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ

1. Принцип работы спектральных приборов

Оптические приборы, в которых осуществляется физическое разложение электромагнитного излучения на монохроматические составляющие, называются спектральными. Спектральный состав электромагнитного излучения может много рассказать о своём источнике и о среде, в которой излучение распространялось. Существуют сотни приборов, анализирующих спектры — от радиодиапазона до высокоэнергетических γ -квантов. По характеру распределения интенсивности в спектральном разложении спектры могут быть разделены на линейчатые (например, спектры излучения атомов), непрерывные или сплошные (например, спектр излучения абсолютно чёрного тела), а также смешанные, представляющие собой наложение линейчатых и непрерывных спектров (например, спектр излучения Солнца). В данном лабораторном практикуме наблюдение спектров проводится на установках, основными элементами которых являются дифракционная решётка, интерферометр Фабри–Перо и призма. Эти установки позволяют проводить визуальное наблюдение линейчатых спектров, состоящих из набора узких спектральных линий в оптическом диапазоне длин волн, и на них можно довольно точно определить значение длины волны, но интенсивность спектральной линии определяется грубо, «на глаз».

Принципиальная схема установки для изучения спектров приведена на рис. 4.1. Свет от источника S попадает на экран, в котором имеется отверстие в виде щели. Экран располагают в фокальной плоскости линзы или системы линз. Коллиматор формирует пучок света, близкий к параллельному. После коллиматора пучок лучей попадает на диспергирующий элемент (ДЭ): амплитудную или фазовую дифракционную решётку, интерферометр Фабри–Перо или призму. Наблюдаются изображения с помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность.

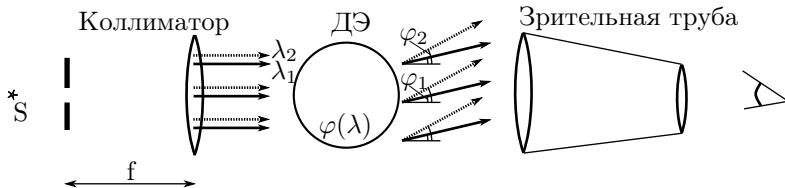


Рис. 4.1. Схема прибора: источник-коллиматор — диспергирующий элемент — зрительная труба

Если удалить из схемы диспергирующий элемент, а коллиматор и зрительную трубу расположить на одной оси, то можно увидеть чёткое изображение входной щели коллиматора.

Диспергирующий элемент перераспределяет интенсивность падающего на него излучения по углам в зависимости от длины волны: каждой монохроматической компоненте излучения с длиной волны λ соответствует один или несколько углов $\varphi(\lambda)$ на выходе прибора, в направлении которых интенсивность прошедшей волны максимальна. Иными словами, диспергирующий элемент пространственно разделяет монохроматические составляющие падающего на него излучения, осуществляя тем самым его физическое разложение по спектру. При известной зависимости $\varphi(\lambda)$ по измеряемому углу поворота φ зрительной трубы можно определить длину волны спектральной линии.

Каждый спектральный прибор предназначен для решения конкретной задачи спектроскопии. Выбор прибора для исследования спектра какого-либо источника должен заключаться в сравнении его характеристик с требуемыми. Наиболее важными характеристиками являются угловая дисперсия, разрешающая способность и дисперсионная область.

Разрешающая способность $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ характеризует возможность прибора различать две близкие спектральные линии с длинами волн λ и $\lambda + \delta\lambda$.

Угловая дисперсия $D = \frac{d\varphi}{d\lambda}$ — производная зависимость угла отклонения $\varphi(\lambda)$ волны диспергирующим элементом по λ . По величине угловой дисперсии можно определить угловое расстояние между двумя близкими спектральными линиями: $d\varphi \approx D\delta\lambda$.

Дисперсионная область (или область дисперсии) — предельная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$ прибора, для которой дифракционные максимумы соседних порядков не перекрываются. Она определяет

диапазон длин волн, при которых прибор может быть использован для анализа спектра.

2. Описание спектральных приборов

2.1. Амплитудная дифракционная решётка

Амплитудную решётку (см. также раздел III, п. 1.5.4) можно представить в виде непрозрачного экрана, в котором прорезано большое число N параллельных щелей — штрихов (рис. 4.2). Постоянство расстояний между штрихами d (период решётки, или шаг решётки) и шириной штриха b должно выдерживаться с большой точностью.

Наблюдение изображения спектра проводится с помощью зрительной трубы, настроенной на бесконечность (дифракции Фраунгофера на штрихах решётки). В этом случае амплитуда и интенсивность поля световой волны определяются углом φ между нормалью к решётке и направлением дифрагировавших лучей. Будем считать, что амплитуды всех интерферирующих волн одинаковы, т. е. фиксирована амплитуда падающей волны и постоянна площадь всех штрихов. Интенсивность дифрагированного света максимальна для углов φ_m , при которых волны, приходящие в точку наблюдения от всех щелей, оказываются в фазе:

$$d \sin \varphi_m = m\lambda. \quad (4.1)$$

Величина $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ называется порядком спектра.

Рассмотрим качественный пример. Пусть падающее на решётку излучение содержит две спектральные линии одинаковой интенсивности. Одну линию условно назовем «красной», а другую «фиолетовой». Длина волны «красной» линии больше, чем длина волны «фиолетовой». Изображение спектра приведено на рис. 4.3. Для угла дифракции $\varphi_0 = 0$ ($m = 0$), когда ось зрительной трубы параллельна оси коллиматора, наблюдается наложение изображений входной щели коллиматора в «красном» и «фиолетовом» цвете друг на друга. При повороте зрительной трубы вокруг решётки в поле зрения возникает «фиолетовая» щель коллиматора, затем «красная» и т. д. Для малых углов дифракции φ_m угловое расстояние между порядками $\varphi_{m+1} - \varphi_m \approx \lambda/d$ пропорционально длине волны, поэтому «фиолетовые» линии следуют чуть чаще, чем «красные», и возможна ситуация, когда они вновь налагаются друг

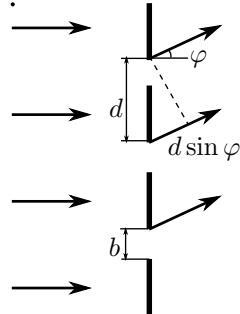


Рис. 4.2. Дифракция световой волны на амплитудной решётке

на друга (на рис. 4.3 это происходит при $m = 5$ для «красной» линии и $m = 6$ для «фиолетовой»).

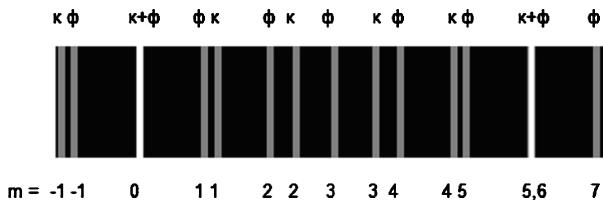


Рис. 4.3. Изображение спектра двух линий

Уточним форму распределения интенсивности света наблюдаемой спектральной линии. Для очень узкой входной щели коллиматора эта форма зависит от числа штрихов решётки N , шага решётки d и ширины её штриха b (рис. 4.2). Пусть интенсивность квазимонохроматического света (длина волны λ) равна I_0 [Вт/см²]. Учёт дифракции Фраунгофера на отдельной щели решётки и когерентного сложения полей от всех штрихов решётки даёт следующее выражение для мощности света на единицу высоты изображения спектральной линии в малом интервале углов дифракции $d\varphi$:

$$dW = I_0 \frac{b^2}{\lambda} \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi)}{\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi} \right]^2 \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin \varphi)}{\sin(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi)} \right]^2 d\varphi. \quad (4.2)$$

Здесь величина W имеет размерность [Вт/см].

В выражении (4.2) множитель

$$\left[\frac{\sin(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi)}{\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi} \right]^2$$

описывает дифракцию света на отдельной щели решётки (рис. 4.4а). Для ширины щели $b \gg \lambda$ область углов центрального, или главного максимума ограничена отрезками $|\varphi| \leq \lambda/b$ (координаты нулей распределения). В этой области сосредоточено около 90% мощности света. Множитель

$$\left[\frac{\sin(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin \varphi)}{\sin(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi)} \right]^2$$

описывает когерентное сложение полей от N штрихов (рис. 4.4б). Максимумы этого распределения возникают при обращении знаменателя в ноль, что имеет место при выполнении условия (4.1). Область локализации мощности отдельного максимума $|\delta\varphi| \leq \lambda/Nd$ много меньше

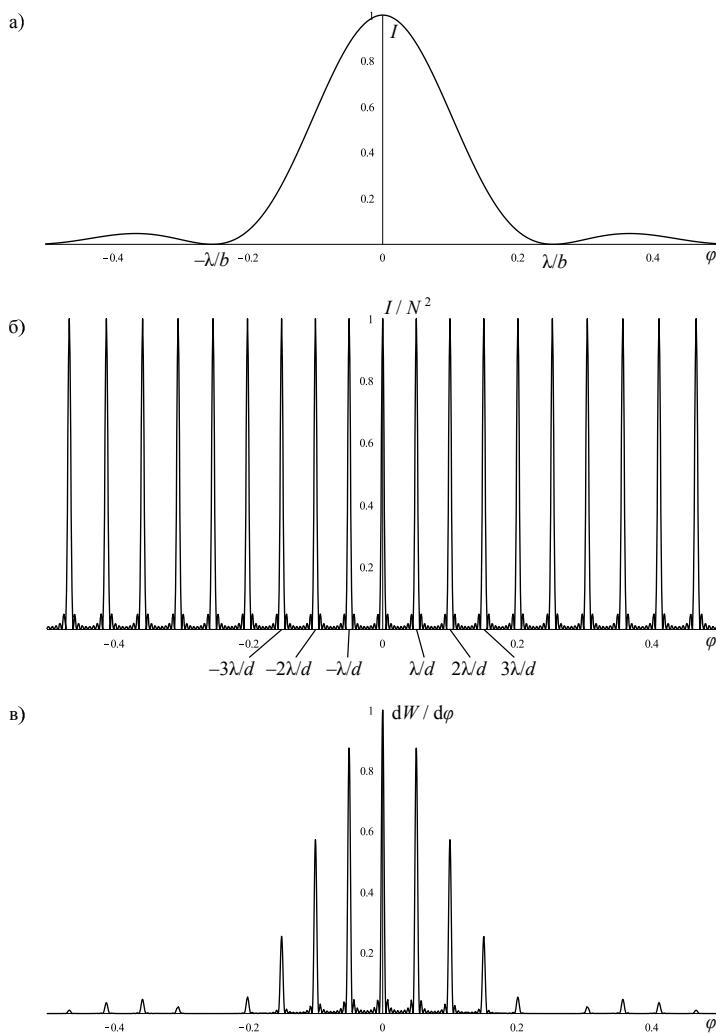


Рис. 4.4. Дифракция света на решётке ($\lambda/b \approx 0,25$, $\lambda/d \approx 0,05$). Зависимость интенсивности света от угла: а) дифракция на отдельной щели; б) дифракция на решётке в пределе бесконечно узких щелей; в) распределение мощности света на единицу высоты изображения, отнесённое к малому диапазону углов

ширины главного дифракционного максимума $2\lambda/b$. На рис. 4.4в приведена форма спектра квазимохроматического света.

Мощность света на единицу высоты изображения спектральной линии в порядке m :¹

$$\begin{aligned} W_m &= I_0 \frac{b^2}{\lambda} \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi_m)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi_m \right)} \right]^2 \int_{\varphi_m - \frac{\lambda}{2d}}^{\varphi_m + \frac{\lambda}{2d}} \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{\lambda} Nd \sin \varphi)}{\sin(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi)} \right]^2 d\varphi \approx \\ &\approx I_0 \frac{b^2}{\lambda} N \left[\frac{\sin \pi \frac{b}{d} m}{\pi \frac{b}{d} m} \right]^2. \end{aligned}$$

Суммарная мощность всех порядков

$$I_0 \frac{b^2}{d} N \sum_{-d/\lambda}^{d/\lambda} \left[\frac{\sin \pi \frac{b}{d} m}{\pi \frac{b}{d} m} \right]^2 \approx I_0 \frac{b^2}{d} N \int_{-d/\lambda}^{d/\lambda} \left(\frac{\sin \pi \frac{b}{d} x}{\pi \frac{b}{d} x} \right)^2 dx \approx I_0 N b$$

равна мощности света за решёткой. Разумное ограничение на рабочий порядок спектра m_p : $0 < |m_p| < d/b$, т. е. порядок не нулевой и лежит в области главного дифракционного максимума отдельной щели. Если на единицу высоты решётки падает мощность света $I_0 Nd$, то в рабочий порядок попадает только её часть:

$$\frac{I_0 b^2 N/d}{I_0 Nd} \left[\frac{\sin \pi \frac{b}{d} m_p}{\pi \frac{b}{d} m_p} \right]^2 = \left(\frac{b}{d} \right)^2 \left[\frac{\sin \pi \frac{b}{d} m_p}{\pi \frac{b}{d} m_p} \right]^2.$$

Пусть, для примера, $d/b = 4$ и рабочий порядок $m_p = 2$, в этом случае только 3% падающей на решётку мощности света попадает в нужный порядок. Ограничено использование в спектроскопии амплитудных дифракционных решёток связано с большими потерями света. Этот недостаток отсутствует у фазовых решёток.

Отметим, что наблюдение в опытах идеальных линий, приведённых на рис. 4.4в, весьма затруднительно, так как угловой размер щели коллиматора l/f (l — ширина щели, f — фокусное расстояние коллиматора) должен быть заметно меньше ширины линии λ/Nd . Как уменьшение ширины щели l , так и уменьшение размера решётки Nd приводят

¹ После замены переменных и с учётом малого соотношения ширины главного максимума функций к размеру области интегрирования интегралы сводятся к известному: $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 dx = 1$.

к большим потерям света. Практически при измерениях наблюдается слегка размытое изображение щели коллиматора.

2.2. Фазовая дифракционная решётка

В современных спектральных приборах широко используются отражательные решётки с треугольным профилем штриха, они способны концентрировать до 70–80% падающего излучения в рабочий порядок спектра. Отражательная решётка (рис. 4.5), в которой угол Ω между рабочей гранью и плоскостью решётки (угол скоса) не превышает 20° , называется эшелеттом (от французского *echelle* — лестница). Для эшелетта, варьируя угол скоса и шаг решётки, получают рабочий порядок $m_p \leq 10$. Если угол скоса лежит в пределах $20\text{--}60^\circ$, то решётка называется эшелле, её рабочий порядок $m_p = 5\text{--}500$.

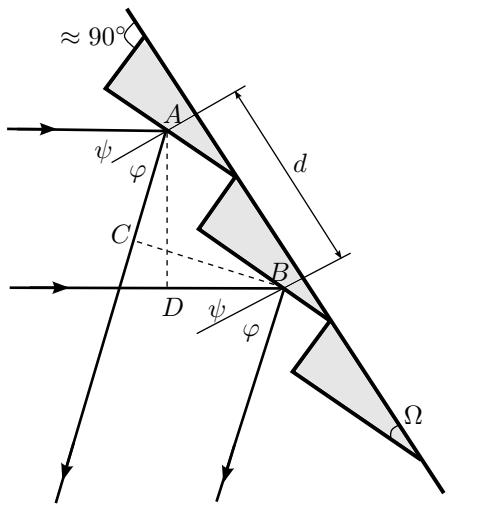


Рис. 4.5. Дифракция световой волны на эшелете

Эшелетт можно представить как зеркало в форме лестницы. Найдём разность хода между лучами (рис. 4.5). Пусть на эшелетт падает плоская монохроматическая волна с длиной волны λ , угол падения, отсчитанный от нормали к решётке, равен ψ , угол дифракции — φ . Условие возникновения спектра порядка m :

$$AC - BD = d(\sin \varphi_m - \sin \psi) = m\lambda. \quad (4.3)$$

Для нулевого порядка $\varphi_0 = \psi$. В отличие от амплитудной решётки, нулевой порядок не будет самым ярким. Угол φ_6 , под которым наблю-

дается максимум интенсивности света, соответствует зеркальному отражению падающей волны от одной ступеньки, он называется углом блеска и определяется формулой

$$\varphi_6 = \psi + 2\Omega. \quad (4.4)$$

Для эшелетта рабочим порядком спектра m_p будет то целое число, которое соответствует минимальной ошибке решения уравнения

$$d(\sin \varphi_6 - \sin \psi) - \lambda m_p = 0.$$

В паспорте эшелетта указаны рабочий порядок спектра m_p и рабочая длина волны λ_p . Чтобы устранил произвол в выборе угла падения света при расчёте угла блеска (4.4), считаем, что эшелетт работает в автоколлимационном режиме. В этом режиме свет падает перпендикулярно рабочей грани решётки ($\psi = -\Omega$) и отражается в обратном направлении ($\varphi = \varphi_m = \varphi_p = \Omega$), условие (4.3) возникновения рабочего спектра даёт

$$2d \sin \Omega = m_p \lambda_p. \quad (4.5)$$

В автоколлимационном режиме дифракция на одной ступеньке-зеркальце описывается так же, как и дифракция на отдельной щели амплитудной решётки, рис. 4.4а, с максимумом вблизи $\varphi \approx 0$. В отличие от амплитудной решётки, при углах $\varphi \approx 0$ располагается не нулевой порядок спектра (так называемая ахроматическая полоса), а порядок, определяемый соотношением (4.5), т. е. нумерацию порядков, приведённую на рис. 4.4б для амплитудной решётки, следует сместить на величину m_p . Доля мощности, попадающей в рабочий порядок, составляет $(b/d)^2$ от мощности светового потока, падающего на эшелетт (b — ширина отдельной ступеньки, чуть меньшая шага решётки d).

2.3. Интерферометр Фабри–Перо

Как спектральный прибор высокой разрешающей способности интерферометр Фабри–Перо широко используется в физических экспериментах. Он применяется для исследования тонкой структуры спектральных линий, является неотъемлемым элементом лазера, выполняя роль оптического резонатора, и т. д. Интерферометр Фабри–Перо состоит из двух стеклянных или кварцевых пластин с хорошо отполированными поверхностями (с шероховатостью до $10^{-2}\lambda$), которые установлены параллельно друг другу на некотором расстоянии. На одну поверхность каждой пластины нанесены хорошо отражающие свет покрытия. Для получения коэффициента отражения $r \approx 0,9$ используют

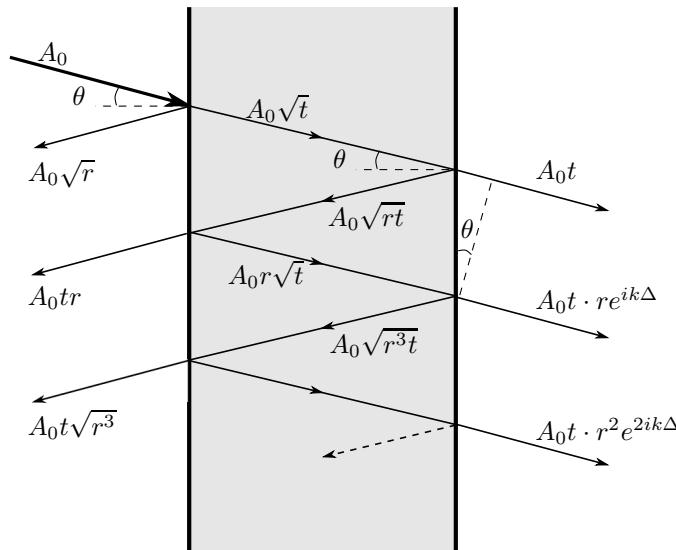


Рис. 4.6. Амплитуды волн в интерферометре Фабри–Перо. Для прошедших волн также указаны набеги фаз

металлические покрытия (Ag , Al), для достижения $r \approx 0,99$ наносятся многослойные диэлектрические интерференционные покрытия.

Интерферометр Фабри–Перо можно рассматривать как плоскопараллельную пластину, в которой происходят многократные отражения и интерференция световых волн. На рис. 4.6 приведена схема интерферирующих волн. Коэффициенты пропускания и отражения по интенсивности отдельного зеркала интерферометра равны t и r соответственно (из закона сохранения энергии следует, что $t + r = 1$). Пусть A_0 — амплитуда падающей на интерферометр волны, тогда амплитуда отражённой от первого зеркала волны равна $A_0\sqrt{r}$, амплитуда прошедшей внутрь интерферометра волны — $A_0\sqrt{t}$, амплитуда волны, отражённой от второго зеркала, — $A_0\sqrt{rt}$, амплитуда первой прошедшей волны равна A_0t и т. д. В результате многократных переотражений на выходе интерферометра будем иметь набор волн, амплитуды которых равны A_0t , A_0tr , A_0tr^2 , ... Фазовая задержка между двумя «соседними» волнами равна $k\Delta$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; Δ — разность хода для угла падения θ . Интерференционная картина, наблюдаемая с помощью зрительной трубы, настроенной на бесконечность, состоит из концентрических колец равного наклона (см. раздел II, п. 4.5). Най-

дём условие возникновения интерференционной картины для световой длины волны λ . Выразим разность хода двух интерферирующих волн, падающих на интерферометр под углом θ :

$$\Delta = 2L \left(\frac{1}{\cos \theta} - \operatorname{tg} \theta \sin \theta \right) = 2L \cos \theta, \quad (4.6)$$

где L — расстояние между зеркалами, или база интерферометра. Интерференционные максимумы будут наблюдаться для волн, падающих под углами θ_m , удовлетворяющими условию

$$2L \cos \theta_m = m\lambda. \quad (4.7)$$

Отметим отличия условий возникновения спектров для дифракционных решёток и интерферометра Фабри–Перо. Для решёток с увеличением угла дифракции порядок спектра растёт начиная с $m = 0$. Для интерферометра Фабри–Перо углу падения $\theta = 0$ соответствует максимальный порядок спектра $M = 2L/\lambda$ и с увеличением угла порядок спектра уменьшается. Если зрительную трубу вращать вокруг дифракционной решётки, то в поле зрения трубы возникает сначала «фиолетовая», затем «красная» линия (рис. 4.3). Для интерферометра Фабри–Перо первоначально возникнет кольцо для длинноволновой («красной») линии, затем коротковолновой («фиолетовой»).

Просуммируем комплексные амплитуды световых волн, прошедших интерферометр. Можно видеть (см. рис. 4.6), что амплитуды прошедших волн образуют геометрическую прогрессию. Считая её бесконечной, получим комплексную амплитуду суммарной прошедшей волны:

$$A = \frac{A_0 t}{1 - r e^{ik\Delta}}$$

и её интенсивность:

$$I = |A|^2 = \frac{|A_0|^2 t^2}{1 + r^2 - 2r \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} L \cos \theta \right]} = \frac{I_0}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} L \cos \theta \right)}. \quad (4.8)$$

Интерферометр Фабри–Перо становится почти прозрачным (просветляется) для световой волны, удовлетворяющей условию резонанса (4.7).

В качестве примера вида спектра рассмотрим интерференционные кольца для двух близких спектральных линий одинаковой интенсивности (рис. 4.7). Пусть длина волны первой линии $\lambda = 5890\text{\AA}$ (близкая к жёлтой линии натрия), а другая длина волны отличается на $0,5\text{\AA}$. База интерферометра $L = 1$ мм (максимальный порядок спектра $2L/\lambda = 3,4 \cdot 10^3$), коэффициент отражения зеркал $r = 0,85$. Видно,

что каждый порядок спектра (здесь их 5) представлен парой колец. Угловое расстояние между парами уменьшается при увеличении угла наблюдения или уменьшении порядка спектра. Кроме того, уменьшается расстояние между кольцами в одном порядке и их ширина. Отметим, что приведённому изображению соответствует диапазон углов $\pm 0,06$ рад, или всего $\pm 3,4^\circ$.

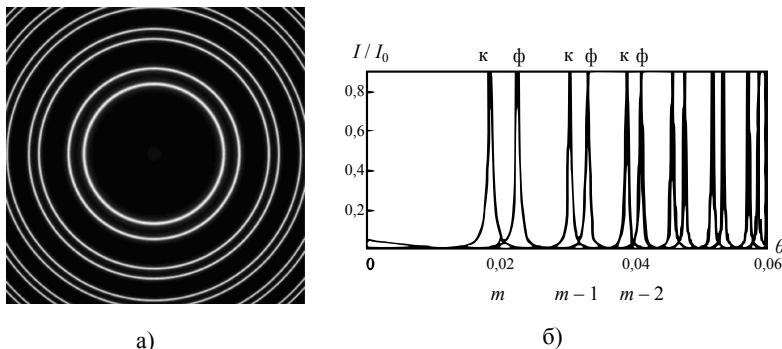


Рис. 4.7. Интерференционные кольца для двух линий: а) изображение спектра, б) зависимость интенсивности света от угла

2.4. Призма

Принцип действия этого спектрального прибора основан на зависимости коэффициента преломления стекла от длины световой волны. Комбинируя различные виды стекла, количество элементов, их форму, можно сконструировать множество призм для решения задач спектроскопии. Мы рассмотрим простую призму из тяжёлого флинта (марка стекла ТФ-1) с углом между гранями 60° . Для стекла ТФ-1 показатель преломления на длине волны $\lambda_1 = 4880\text{\AA}$ (голубая линия) $n_1 = 1,661$, на длине волны $\lambda_2 = 6327\text{\AA}$ (красная линия) $n_2 = 1,644$.

По этим данным можно оценить важную характеристику стекла — дисперсию показателя преломления:

$$\frac{dn}{d\lambda} \approx \frac{n_1 - n_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = -1,17 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}.$$

Оценим угол $\delta\varphi$ между волновыми фронтами двух близких линий λ и $\lambda + \delta\lambda$. Пусть на призму с основанием a падает параллельный пучок света шириной h , и этот пучок целиком заполняет призму. Показанный на рис. 4.8 симметричный ход лучей (внутри призмы лучи распространяются параллельно основанию) соответствует углу наименьшего

отклонения падающего пучка θ , который в свою очередь зависит от преломляющего угла призмы α и показателя преломления $n(\lambda)$.

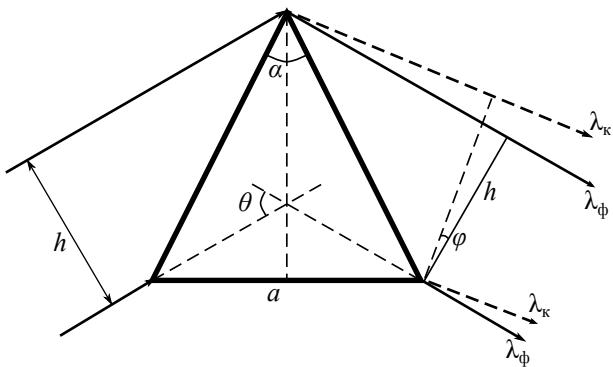


Рис. 4.8. Ход лучей в призме для угла наименьшего отклонения

Максимальная разность хода двух лучей с длиной волны λ и $\lambda + \delta\lambda$ возникает вблизи основания призмы:

$$\Delta = a[n(\lambda + \delta\lambda) - n(\lambda)] \approx a \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda = h \delta\varphi. \quad (4.9)$$

После прохождения призмы «фиолетовые» лучи отклоняются больше, чем «красные». В этом полезно убедиться практически, рассматривая резкую границу белого света и тени (освещённый подоконник или крышку стола). Если граница горизонтальна и основание призмы ниже её вершины, то граница тени будет казаться красной, если призму перевернуть на 180° , — фиолетовой.

Типичная зависимость $n(\lambda)$, или закон дисперсии показателя преломления, приведена на рис. 4.9. В области, закрашенной серым, показатель преломления растёт с длиной волны $dn/d\lambda > 0$ — это так называемая область аномальной дисперсии. Аномальная дисперсия имеет место на частотах, близких к резонансным, и соответственно в этой области велико поглощение света. В области, далёкой от резонансов, вещества прозрачно, а показатель преломления убывает с ростом длины волны, $dn/d\lambda < 0$, — это область нормальной дисперсии. Стекло в оптическом диапазоне длин волн имеет нормальную дисперсию (аномальная дисперсия в стекле имеет место в ультрафиолетовой области спектра).

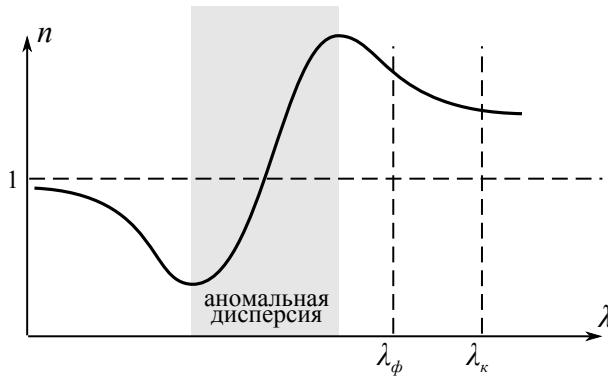


Рис. 4.9. Зависимость показателя преломления стекла от длины волны

3. Угловая дисперсия спектральных приборов

Угловая дисперсия $D(\lambda)$ характеризует угловое расстояние между близкими спектральными линиями:

$$D(\lambda) = \frac{d\varphi}{d\lambda}. \quad (4.10)$$

В современных приборах спектроскопии регистрация изображения спектров проводится не глазом, а линейкой или матрицей чувствительных к свету элементов. Угловая дисперсия позволяет определить минимальное расстояние между ячейками приемного устройства: если требуется разрешить две спектральные линии с разностью длин волн $\delta\lambda$, то расстояние между элементами приемного устройства должно быть заметно меньше $D \delta\lambda f$, где f — фокусное расстояние объектива зрительной трубы.

Амплитудная решётка. Выражение для угловой дисперсии дифракционной решётки следует из (4.1):

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi} = \frac{m}{\sqrt{d^2 - m^2 \lambda^2}}. \quad (4.11)$$

Дисперсия возрастает с увеличением порядка спектра. Для малых углов дифракции $\varphi \ll 1$ дисперсия пропорциональна порядку спектра: $D \approx m/d$.

Эшелетт. Выражение угловой дисперсии эшелетта получается так же, как для амплитудной решётки, но с учётом углов падения; см (4.3):

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi} = \frac{m}{\sqrt{d^2 - (m\lambda + d \sin \psi)^2}}. \quad (4.12)$$

В отличие от амплитудной решётки углы дифракции нельзя считать малыми. В опытах углы падения $\psi \approx 30\text{--}60^\circ$.

Интерферометр Фабри–Перо. Выражение для угловой дисперсии следует из (4.6). Для малых углов $\theta_m \ll 1$ и больших порядков спектров имеем $m \approx M = 2L/\lambda$,

$$-2L \sin \theta_m d\theta = -2L \theta_m d\theta = md\lambda \approx \frac{2L}{\lambda} d\lambda,$$

и угловая дисперсия

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{m}{2L \sin \theta_m} \approx -\frac{1}{\lambda \theta_m}. \quad (4.13)$$

Призма. Для разности хода (4.9) получаем угловую дисперсию:

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{a}{h} \frac{dn}{d\lambda}. \quad (4.14)$$

Проведём сравнительную оценку значений угловой дисперсии для рассматриваемых спектральных приборов: амплитудной и фазовой дифракционной решёток, интерферометра Фабри–Перо, призмы. Вычисления выполним для длины волны $\lambda = 578$ нм (средняя длина волны для двух близких жёлтых линий ртути).

Амплитудная дифракционная решётка с плотностью штрихов $n = 500$ 1/мм для порядков спектра $m = 1, 2, 3$ имеет в соответствии с (4.11) угловую дисперсию $5,2 \cdot 10^3; 1,2 \cdot 10^4; 3 \cdot 10^4$ см $^{-1}$. Эшелетт для угла падения $\psi = 30^\circ$ имеет только один порядок спектра $m = 1$, в котором угловая дисперсия (4.12) равна $8,1 \cdot 10^3$ см $^{-1}$. Интерферометр Фабри–Перо с базой $L = 1$ мм для системы колец максимального порядка спектра и меньшего на 1 и 2 имеет угловую дисперсию (4.13), равную $-1 \cdot 10^6, -5,9 \cdot 10^5, -4,6 \cdot 10^5$ 1/см. Призма вблизи выбранной длины волны имеет показатель преломления $n = 1,64$, и его дисперсия $\frac{dn}{d\lambda} \approx -920$ см $^{-1}$. Расчёты по законам геометрической оптики дают отношение стороны равносторонней призмы к ширине пучка $a/h \approx 1,7$. Угловая дисперсия призмы (4.14) при этом равна $-1,6 \cdot 10^3$ см $^{-1}$.

Для решёток угловая дисперсия положительна, с увеличением длины волны спектральных линий угол, под которым они наблюдаются,

растёт. Для интерферометра Фабри–Перо и призмы угол наблюдения увеличивается с уменьшением длины волны линии. Для рассмотренных примеров минимальной угловой дисперсией обладает призма, дифракционные решётки превосходят её по этому параметру в несколько раз, а интерферометр Фабри–Перо — на порядки.

4. Разрешающая способность

Рассмотрим изображения спектра для двух узких спектральных линий с длинами волн λ и $\lambda + \delta\lambda$. Для минимального значения $\delta\lambda$, которое может быть определено по результатам измерений, вводят важнейшую характеристику спектрального прибора — разрешающую способность:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}. \quad (4.15)$$

Если спектральным прибором является интерферометр Фабри–Перо, то пары колец в каждом порядке спектра (рис. 4.7) для минимальных значений $\delta\lambda$ должны заметно накладываться друг на друга. Минимальное значение $\delta\lambda$ определяется не только качеством коллиматора и зрительной трубы (рис. 4.1), но главным образом точностью изготовления интерферометра. Точность полировки поверхностей до $\lambda/100$, строгая параллельность плоскостей (малейший клин заметно искажает изображение спектра), малые температурные деформации конструкции — лишь небольшая часть требований к интерферометру. Высокие технические требования и к дифракционным решёткам. Решётку изготавливают с помощью делительной машины или методами литографии, далее её размножают или распечатывают. Копия эталонной решётки называется репликой. В учебных лабораториях используются именно реплики. На большие решётки делительная машина наносит $10^4 - 10^5$ штрихов, шаг решётки составляет величину порядка микрометра. Если на одном участке решётки шаг чуть больше, а на других чуть меньше среднего, то в изображении спектра могут возникать ложные линии спектра. Они называются «духами». Естественной причиной уменьшения разрешающей способности спектральных приборов является их старение и нарушение правил обращения с ними.

4.1. Амплитудная решётка, эшелетт, призма

Приведённые выше соображения относятся к техническим требованиям изготовления спектрального прибора. Рассмотрим физические ограничения разрешающей способности. На рис. 4.3 изображения спектральных линий являются изображениями входной щели коллиматор-

ра. Начнём уменьшать размер щели. В начале этого процесса будет уменьшаться интенсивность линий и их ширина. Начиная с некоторого момента будет уменьшаться только интенсивность, а ширина линий изменяться не будет. Достигнут физический предел ширины линии, и он определяется дифракцией света на апертуре решётки. Определим угловое расстояние между максимумом линии и её первым нулем — полуширину линии $\delta\varphi$. Пусть на решётку, состоящую из N штрихов, падает параллельный пучок света перпендикулярно её поверхности. Если $N = 2$, то две волны погасят друг друга, если между ними возникнет разность хода $\lambda/2$, если $N = 3$, то $\lambda/3$. В общем случае N штрихов для полуширины линии $\delta\varphi$ получаем уравнение, решение которого совместно с уравнением (4.1) при $\delta\varphi \ll 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} d \sin(\varphi_m + \delta\varphi) &= m\lambda + \frac{\lambda}{N}, \\ \delta\varphi &= \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi_m}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

здесь $Nd \cos \varphi_m$ — видимый под углом φ_m размер решётки. Тем же выражением описывается полуширина линии для эшелетта. Угловое расстояние между двумя линиями определяется дисперсией (4.11), (4.12):

$$\Delta\varphi \approx D \delta\lambda = \frac{m}{d \cos \varphi_m} \delta\lambda. \quad (4.17)$$

Для сравнения между собой различных спектральных приборов Релея предложил приравнять полуширину $\delta\varphi$ и расстояние между линиями $\Delta\varphi$. Критерий Релея удобен для различных оценок. Согласно ему для дифракционных решёток разрешающая способность определяется порядком спектра и числом штрихов:

$$R = Nm. \quad (4.18)$$

Здесь под N следует понимать число одновременно работающих штрихов решётки, которое, вообще говоря, не равно суммарному числу штрихов освещённого участка решётки. Число штрихов N определяется качеством реплики, размером источника света и т. д. Например, если источник является однородной линией шириной b на расстоянии z от решётки, то размер области решётки, засвеченной когерентно, определяется формулой $\rho \sim \lambda/\psi$, где $\psi = b/z$ — угловой размер источника (см. раздел II, п. 4.3).

На рис. 4.10а показана зависимость от угла интенсивности двух линий. Форма линий определяется дифракцией Фраунгофера на апертуре

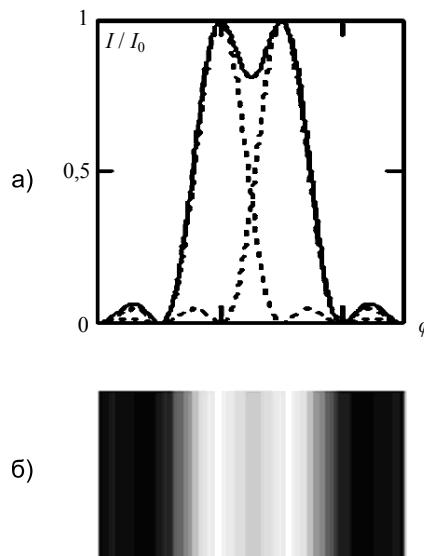


Рис. 4.10. Условие Релея для дифракционной решётки: а) интенсивности двух близких линий и их сумма, б) изображение спектра

решётки, угловая координата максимума одной линии совпадает с первым минимумом для другой (условие Релея). Там же приведена форма суммарной интенсивности. Основная числовая характеристика условия Релея — отношение интенсивности света в провале между линиями к максимальному значению. Численное значение этой характеристики для решётки равно $2 \left(\frac{\sin \pi/2}{\pi/2} \right)^2 \approx 0,81$. На рис. 4.8б приведено изображение спектра этих линий. Можно отметить, что глаз легко различает две линии. В экспериментальной спектроскопии разрешающая способность спектрального прибора превосходит разрешение по критерию Релея при использовании вместо глаза малошумящих приемников света. Измеряется отношение ширины суммарной к ширине отдельной линии на уровне половинной мощности: для критерия Релея это отношение равно 2 (рис. 4.10а).

Аналогичная процедура для призмы с учётом (4.14) даёт

$$\delta\varphi = \frac{a}{h} \left| \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right| \delta\lambda = \frac{\lambda}{h}$$

и разрешающая способность

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = a \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|. \quad (4.19)$$

При полном заполнении призмы светом разрешающая способность пропорциональна размеру её основания.

4.2. Интерферометр Фабри–Перо

Дифракция Фраунгофера на апертуре интерферометра также влияет на ширину интерференционного кольца и разрешающую способность. Строго говоря, имеет значение не размер освещённой области зеркала, а размер её однородно обработанного участка. Напомним, что погрешность обработки и настройки базы интерферометра L должна быть много меньше λ .

Мы ограничимся рассмотрением зависимости разрешающей способности интерферометра Фабри–Перо от величины базы L (порядка спектра) и коэффициента отражения зеркал r , определим угловое расстояние между двумя близкими линиями, соответствующее условию Релея. Пусть, как и в случае дифракционной решётки, две линии пересекаются на уровне половинной мощности каждой линии. Запишем это условие для угла $\theta_m + \delta\theta/2$ (угол θ_m соответствует максимуму для длины волны λ порядка m). Используя равенство (4.8), имеем

$$\frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} 2L \cos(\theta_m + \delta\theta/2) \right] = 1.$$

Учитывая условие резонанса (4.6) и малость углов θ_m и $\delta\theta$, ($|\frac{\pi}{\lambda} \theta_m \delta\theta| \ll 1$), получаем

$$\begin{aligned} \sin^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} 2L \cos(\theta_m + \delta\theta/2) \right] &= \\ &= \sin^2 \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \cos \theta_m - \frac{\pi L}{\lambda} \sin \theta_m \cdot \delta\theta \right) \approx \left[\frac{\pi L}{\lambda} \theta_m \delta\theta \right]^2. \end{aligned}$$

Пусть угловому радиусу $\theta_m + \delta\theta$ соответствует максимум интерференционного кольца с тем же порядком спектра m и длиной волны $\lambda + \delta\lambda$ (при пересечении двух линий на уровне половинной мощности угловое расстояние между максимумами линий в два раза больше полуширины отдельной линии, см. рис. 4.10а). Величину $\delta\lambda$ можно определить используя выражение для угловой дисперсии (4.13): связь величин $\delta\theta$ и $\delta\lambda$ имеет вид

$$\delta\theta = \frac{1-r}{2\pi\sqrt{r}} \frac{\lambda}{2L} \frac{1}{\theta_m} \approx D\delta\lambda/2 = \frac{m}{4L\theta_m} \delta\lambda.$$

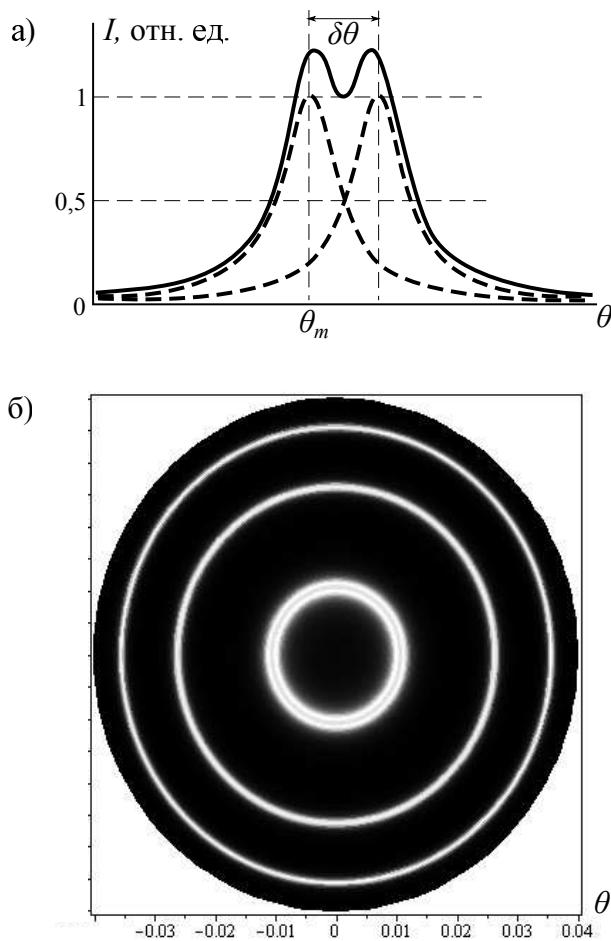


Рис. 4.11. Условие Релея для интерферометра Фабри–Перо:
а) интенсивности близких линий и их сумма (схематично); б) расчётное изображение спектра двух близких линий (здесь $r = 0,85$, $\lambda = 5760,0 \text{ \AA}$, $\delta\lambda = 0,09 \text{ \AA}$, $L = 1 \text{ мм}$)

Разрешающая способность для порядка спектра $m \approx 2L/\lambda$ равна

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}m. \quad (4.20)$$

Разрешающая способность пропорциональна порядку спектра, который

велик и практически постоянен, и эффективному числу волн $\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}$, аналогу числа штрихов дифракционной решётки N .

На рис. 4.11а показана зависимость от угла интенсивности пары колец для линий равной мощности. Напомним, что для решётки максимум интенсивности второй линии попадал на минимум интенсивности первой линии. Отношение величины провала интенсивности между кольцами к максимальному значению интенсивности составляет $\approx 0,83$, что близко к числовой характеристике критерия Релея 0,81. На рис. 4.11б приведено изображение колец. По первой паре колец глаз легко разрешает линии.

Рассчитаем разрешающую способность спектральных приборов по условию Релея. Дифракционная решётка с плотностью штрихов 500 мм^{-1} и размером однородной области 1 см , $N \approx 5 \cdot 10^3$ в первом порядке спектра имеет $R = 5 \cdot 10^3$ и $\delta\lambda = 1,1 \text{ \AA}$ для $\lambda = 5760 \text{ \AA}$, во втором $R = 10^4$; $\delta\lambda = 0,5 \text{ \AA}$. Призма с $|\frac{dn}{d\lambda}| \approx 10^3 \text{ см}^{-1}$ и размером основания $a = 3 \text{ см}$: $R \approx 3 \cdot 10^3$, $\delta\lambda \approx 2 \text{ \AA}$. Интерферометр Фабри–Перо: $L = 1 \text{ мм}$, $r \approx 0,85$; $R \approx 6,6 \cdot 10^4$, $\delta\lambda \approx 0,09 \text{ \AA}$, порядок спектра $2L/\lambda \approx 3,5 \cdot 10^3$, эффективное число волн $\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r} \approx 19$.

5. Дисперсионная область

При большой ширине спектра спектры различных порядков могут накладываться друг на друга. На рис. 4.3 отмечено наложение «красной» границы спектра 5-го порядка на «фиолетовую» границу спектра 6-го порядка. Предельная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$, при которой спектры соседних порядков перекрываются своими границами, называется **дисперсионной областью**. При этом $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$ и дисперсионная область

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}. \quad (4.21)$$

Ограничений на оптические спектры не возникает при использовании призмы и дифракционных решёток, работающих в первом порядке спектра, для них $\Delta\lambda \approx \lambda$.

Возможная для исследования ширина спектра источника уменьшается при увеличении рабочего порядка спектра дифракционной решётки. Особые требования к источнику возникают при использовании интерферометра Фабри–Перо, так как его рабочий порядок спектра весьма высок ($2L/\lambda$) и дисперсионная область

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L} \quad (4.22)$$

очень мала. Для порядка спектра $2L/\lambda \approx 5 \cdot 10^3$ дисперсионная область $\Delta\lambda \approx 1\text{\AA}$. Интерферометр Фабри–Перо обладает очень высокой разрешающей способностью, но при этом может использоваться только для анализа узкополосных спектров. Обычно перед интерферометром располагают светофильтры или другие спектральные приборы, вырезающие вблизи λ полосу шириной менее $\Delta\lambda$.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §§ 36, 46, 47, 49.
2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. — М.: Физматлит, 2001. §8.9.

Работа 4.4.1

Амплитудная дифракционная решётка

Цель работы: Знакомство с работой и настройкой гониометра Г5, определение спектральных характеристик амплитудной решётки.

В работе используются: гониометр, дифракционная решётка, ртутная лампа.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается отьюстировать гониометр, исследовать спектр ртутной лампы, определить период и спектральные характеристики решётки.

I. Настройка гониометра

Проведите юстировку гониометра, руководствуясь правилами, изложенными в Приложении. Ознакомьтесь с устройством гониометра и назначением элементов настройки. Нумерация, написанная на элементах лабораторного экземпляра прибора, и нумерация, приведённая на рис. П4.1 Приложения, совпадают. Установите зрительную трубу на бесконечность. Из пункта «Установка поверхности столика перпендикулярно оси вращения прибора» выполните операции по предварительной настройке. Настройте коллиматор. Установите начало отсчёта углов, после чего винт 26 следует закрепить и не освобождать его до конца измерений.

II. Установка решётки

Основание оправы решётки и её штрихи могут быть не перпендикулярны друг другу, поэтому плоскость столика следует немного наклонить. Установите решётку на столик так, чтобы её плоскость была перпендикулярна оси зрительной трубы и параллельна одному из установочных винтов 8. В центре поля зрения расположена белая ахроматическая полоса (спектр нулевого порядка). Высота полос должна быть менее четверти поля зрения трубы. Поворачивая алидаду, найдите изображение линий максимального порядка, и винтом 8, параллельным плоскости решётки, верните центр изображения щели к горизонтальной оси отсчётного креста зрительной трубы.

III. Исследование спектра ртутной лампы

- Подберите ширину входной щели коллиматора так, чтобы ширина линий жёлтого дублета была чуть больше промежутка между линиями двойного штриха окуляра зрительной трубы. Установите высоту щели, удобную для измерений (при короткой щели плохо виден двойной штрих, при слишком высокой — мешает кривизна изображения).
- Измерьте угловые координаты спектральных линий ртути в ± 1 порядке. Примерное расположение и относительная яркость основных линий приведена в Приложении (рис. П4.4, табл. 1).
- Для оценки угловой дисперсии решётки измерьте угловые координаты линий жёлтого дублета для всех видимых порядков спектра, положительных и отрицательных.
- Для оценки разрешающей способности спектрального прибора измерьте угловую ширину одной из линий жёлтого дублета по нулям интенсивности в нескольких порядках. Ширина входной щели коллиматора должна быть минимальной, позволяющей провести измерения.

IV. Обработка результатов измерений

- Для ± 1 порядка постройте график зависимости $\sin \varphi_m$ от длины волны. Используя (4.1), определите шаг решётки.
- Рассчитайте по линиям жёлтого дублета угловую дисперсию в спектрах разного порядка (формула (4.10)). Постройте график зависимости угловой дисперсии от порядка спектра, сравните эту зависимость с расчётной по формуле (4.11) для средней длины волны жёлтого дублета.
- Оцените разрешимый спектральный интервал $\delta\lambda$. Согласно (4.17), для этого надо по имеющимся измерениям вычислить угловую полуширину жёлтой линии и знать угловую дисперсию. По формуле (4.15) оцените разрешающую способность для средней длины волны жёлтого дублета. Используя (4.18), оцените число эффективно работающих штрихов решётки и её эффективный размер.
- Рассчитайте порядок спектра, при котором фиолетовая линия наложится на жёлтую.

Контрольные вопросы

- Дайте определение спектральных характеристик дифракционной решётки.
- Сформулируйте критерий Релея.
- Как меняются угловые характеристики спектров при изменении периода решётки, размера штриха, размера всей решётки?
- Можно ли по спектру ртутной лампы определить в ваших опытах дисперсионную область?
- Какие физические и технические причины определяют число эффективно работающих штрихов дифракционной решётки большого размера?

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §§ 46, 47.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§ 46, 50.

Работа 4.4.2

Фазовая дифракционная решётка

Цель работы: Знакомство с работой и настройкой гoniометра Г5, определение спектральных характеристик фазовой решётки (эшелетта).

В работе используются: гoniометр, эшелетт, ртутная лампа.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается отююстировать гoniометр, исследовать спектр ртутной лампы для нескольких углов падения, определить технические и спектральные характеристики эшелетта.

I. Настройка гoniометра

Проведите настройку гoniометра, руководствуясь правилами, изложенными в Приложении. Ознакомьтесь с устройством гoniометра и назначением элементов настройки. Нумерация, написанная на элементах лабораторного экземпляра прибора, и нумерация, приведённая на рис. П4.1 приложения, совпадают. Установите зрительную трубу на бесконечность. Из пункта «Установка поверхности столика перпендикулярно оси вращения прибора» выполните операции по предварительной настройке. Настройте коллиматор. Установите начало отсчёта углов, после чего винт 26 следует закрепить и не освобождать его до конца измерений.

Во избежание необратимых повреждений эшелетта не прикасайтесь к его рабочей поверхности, не дышите на неё.

II. Качественные наблюдения

Удерживая эшелетт в вытянутой руке, найдите отражённое изображение нити лампы накаливания, расположенной за вашей спиной. Вращая эшелетт, наблюдайте спектры различных положительных и отрицательных порядков. Определите рабочий порядок, в котором спектр наиболее интенсивен. Отметьте ориентацию направлений: источник

света—эшелетт, эшелетт—направление на рабочий спектр. При проведении опытов это будут направления: коллиматор—эшелетт, эшелетт—зрительная труба.

Отметьте, в каких порядках спектры начинают перекрываться. Оцените для этих порядков дисперсионную область и сравните её с (4.21) для средней длины волн 500 нм и полуширины 200 нм, что соответствует наблюдению глазом излучения лампы накаливания. Запишите паспортные данные эшелетта: рабочий порядок m_p , рабочую длину волны λ_p .

III. Установка эшелетта

Основание оправы эшелетта и его ступеньки могут быть не перпендикулярны друг другу, поэтому плоскость столика следует немного наклонить.

1. Настройте зрительную трубу на наблюдение входной щели коллиматора, вертикальный размер изображения щели должен быть менее половины поля зрения, рекомендуемый начальный отсчёт угла 180° . Вам известны направления: ось коллиматора—эшелетт—рабочий порядок, поверните алидаду на 120° от начального положения, направление вращения, вправо или влево, должно позволить наблюдать рабочий порядок.
2. Поставьте эшелетт на столик рабочей поверхностью к коллиматору так, чтобы эшелетт был параллелен одному из винтов 8 и перпендикулярен другому. Вращая только верхнюю часть столика, освободив винт 27 (винт 26 закреплён, чтобы не сбился начальный отсчёт угла), найдите ахроматическое (белое) изображение щели коллиматора, отражённое от эшелетта (спектр нулевого порядка). При этом угол падения света на плоскость эшелетта $\psi = (180^\circ - 120^\circ)/2 = 30^\circ$.
3. Винтом 8, перпендикулярным плоскости эшелетта, совместите центр изображения щели с горизонтальным штрихом отсчётного креста окуляра зрительной трубы. Отводя алидаду от коллиматора, найдите изображение линии в дальнем порядке и вторым винтом 8, параллельным плоскости эшелетта, устраните вертикальное расхождение. Вернитесь к ахроматическому изображению и уточните положение винтов 8 по приведённой процедуре. Допустимое вертикальное смещение линий — менее трети радиуса поля зрения.

IV. Исследование спектра ртутной лампы

4. Подберите ширину входной щели коллиматора, при которой ширина линий жёлтого дублета чуть больше промежутка между линиями двойного штриха зрительной трубы. Установите высоту щели, удобную для измерений (при короткой щели плохо виден двойной штрих, при слишком высокой — мешает кривизна изображения).

5. Для угла падения $\psi = 30^\circ$ измерьте угловые координаты спектральных линий ртути в рабочем порядке. Примерное расположение и относительная яркость основных линий приведены в Приложении (рис. П4.4, табл. 1).
6. Для оценки разрешающей способности спектрального прибора измерьте угловую ширину одной из линий жёлтого дублета (по нулям интенсивности). Ширина щели коллиматора должна быть минимальной, позволяющей провести измерения.
7. Для установленного угла падения $\psi = 30^\circ$ измерьте угловые координаты жёлтого дублета во всех наблюдаемых порядках, положительных и отрицательных. Эти данные позволяют оценить дисперсию в различных порядках спектра для фиксированного угла падения.
8. Измерьте угловые координаты линий жёлтого дублета в рабочем порядке для углов падения 45° и 60° . Для больших углов падения есть возможность найти изображение автоколлимационного креста, отражённого от эшелетта. В этом положении ось зрительной трубы перпендикулярна плоскости эшелетта, и можно ввести ещё одно удобное начало отсчёта углов. Например, угол падения света равен углу наблюдения ахроматической полосы, отсчитанному от нового начала.

Обратите внимание на появление спектров больших отрицательных порядков при увеличении угла падения света.

9. Эшелетт, ширина штриха которого сравнима с длиной волны, поляризует отражённый свет. Проведите следующий эксперимент. Используя отдельный эшелетт с плотностью штрихов 1200 штрихов/мм (полное число штрихов 180 000, ширина отдельного штриха меньше 1 мкм), а в качестве источника излучения — свет настольной лампы (излучение имеет случайную поляризацию), определите с помощью поляроида преимущественное направление колебания электрического вектора в первом порядке спектра. Как связаны между собой это направление и ориентация штрихов? Объясните этот эффект.

V. Обработка результатов

1. Для угла падения 30° постройте график зависимости $\sin \varphi_m - \sin \psi$ от длины волны в рабочем порядке. Используя (4.3), определите шаг решётки.
2. Используя (4.5), рассчитайте угол скоса рабочей грани эшелетта.
3. Рассчитайте по формуле (4.12) угловую дисперсию, используя все измерения для жёлтого дублета.

Для угла падения 30° постройте график зависимости угловой дисперсии от порядка спектра. Отдельно выпишите значения угловой дисперсии в рабочем порядке для углов падения 30° , 45° , 60° . Сравните

полученные экспериментальные данные с рассчитанными по формуле (4.12).

4. Оцените разрешимый спектральный интервал $\delta\lambda$ в рабочем порядке для угла падения 30° . Согласно (4.17), для этого надо вычислить угловую полуширину жёлтой линии и знать величину угловой дисперсии. По формуле (4.15) оцените разрешающую способность спектрального прибора, который включает эшелетт, гониометр, глаз экспериментатора. Используя (4.18), оцените число эффективно работающих штрихов эшелетта и его эффективный размер.
5. Из опытов с лампой накаливания определите дисперсионную область и сравните её с соответствующим порядком спектра.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения спектральных характеристик эшелетта.
2. В чём заключается преимущество эшелетта по сравнению с амплитудной дифракционной решёткой?
3. Какой элемент спектрального прибора: эшелетт, гониометр, Ваш глаз (чувствительность, острота зрения) — оказал наибольшее влияние на точность оценки разрешающей способности?
4. Нарисуйте принципиальную оптическую схему установки для определения рабочего порядка эшелетта и его рабочей длины волны.
5. Нарисуйте качественную зависимость интенсивности от угла излучения в дальней зоне для рабочей длины волны. Эшелетт работает в автоколлимационном режиме.

Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§ 46–50.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §§ 46, 47.

Работа 4.4.3

Изучение призмы с помощью гoniометра

Цель работы: знакомство с работой и настройкой гониометра Г5, определение зависимости показателя преломления стекла призмы от длины волны, определение марки стекла и спектральных характеристик призмы.

В работе используются: гониометр, ртутная лампа, призма.

Показатель преломления материала призмы $n(\lambda)$ удобно определять по углу наименьшего отклонения $\delta(\lambda)$ (рис. 4.8). Минимальное отклонение луча, преломлённого призмой, от направления луча, падающего на призму, получается при симметричном ходе луча (в призме луч идёт параллельно основанию). Угол минимального отклонения δ , преломляющий угол α (угол при вершине призмы) и показатель преломления связаны соотношением

$$n(\lambda) = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta(\lambda)}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Вывести это соотношение студентам предлагается самостоятельно.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается отююстировать гониометр, определить преломляющий угол призмы, оценить спектральные характеристики призмы.

I. Настройка гониометра

Ознакомьтесь с устройством гониометра и назначением элементов настройки. Нумерация, написанная на элементах лабораторного экземпляра прибора, и нумерация, приведённая на рис. П4.1 Приложения, совпадают. Установите зрительную трубу на бесконечность. Из пункта «Установка поверхности столика перпендикулярно оси прибора» выполните операции по предварительной и точной настройке. Настройте коллиматор. Установите начало отсчёта углов, после чего винт 26 следует закрепить и до конца измерений не освобождать.

II. Качественные наблюдения

- Найдите резкую границу белого света и тени (подоконник, крышка освещённого лампой стола и т. д.). Рассмотрите эту границу через призму. Для горизонтальной границы преломляющее ребро призмы должно

быть горизонтальным. Объясните появление цвета границы тени для двух положений призмы (ребро призмы выше и ниже основания). Отметьте взаимную ориентацию направлений: источник света (граница) — призма — спектр.

III. Установка призмы и измерение преломляющего угла

Качество обработки граней призмы значительно хуже обработки пластины, использованной при точной настройке столика гoniометра. Поэтому требуется подстройка столика под имеющуюся призму.

2. Поставьте призму так, чтобы её преломляющее ребро было вертикально, а одна из рабочих граней перпендикулярна одному из винтов 8.
3. Вращая либо алидаду при свободном винте 24, либо столик при свободном винте 27 (винт 26 после установки начала отсчёта угла освобождать нельзя), найдите отражение светящегося креста от рабочей грани и приведите его к центру винтом 8, перпендикулярным отражающей грани. Трубу наклонять не следует. Найдите отражение автоколлимационного креста от второй рабочей грани призмы и вторым винтом 8 скорректируйте его положение по вертикалам.

Вертикальное смещение креста не должно превышать трети радиуса поля зрения.

4. Снимите отсчёт двух углов, при которых наблюдается изображение автоколлимационного креста, отражённого от рабочих граней призмы. Вначале алидада вращается от руки, затем точно винтом 25 при отжатом фиксаторе 24. Рассчитайте преломляющий угол призмы и ошибку его определения.

IV. Исследование спектра ртутной лампы

5. Освободите фиксаторы верхней части столика 27 и алидады 24. Вращая столик и алидаду, восстановите примерную ориентацию осей коллиматор — призма — зрительная труба, которая была при наблюдении границы света и тени. Найдите в спектре ртути длинноволновую жёлтую линию. Вращая столик рукой, а затем винтом тонкой подачи 29 при зажатом винте 27, установите столик в такое положение, при котором отклонение линии от оси коллиматора оказывается наименьшим. Измерьте угол наименьшего отклонения δ . Не меняя положение столика, измерьте координаты обеих жёлтых линий. Примерное расположение основных линий спектра ртути, их относительная яркость и длина волны приведены в Приложении (рис. П4.4, табл. 1). Измерьте угол наименьшего отклонения для всех приведённых линий.
6. Для оценки разрешающей способности призмы измерьте угловую ширину одной из жёлтых линий жёлтого дублета (по нулям интенсивно-

сти). Ширина щели коллиматора должна быть минимальной, позволяющей провести измерения. Измерьте линейкой длину основания призмы.

V. Обработка результатов

7. Для измеренных углов наименьшего отклонения 6-ти ярких линий спектра ртути вычислите значение показателя преломления и постройте график $n(\lambda)$.
8. Проведите на графике $n(\lambda)$ наилучшую прямую и определите среднее значение дисперсии показателя преломления $\frac{dn}{d\lambda}$. Определите марку стекла призмы. Для стекла марки ТФ1, ТФ3, ТФ5 среднее значение дисперсии показателя преломления в спектральной области излучения ртути равно соответственно $-1,9 \cdot 10^3$, $-2,4 \cdot 10^3$, $-2,7 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$.
9. По измеренным угловым координатам линий жёлтого дублета в опыте с неподвижным столиком рассчитайте значение угловой дисперсии (4.14) и величину $\frac{a}{h}$, приравнивая для указанных двух линий $\Delta\varphi = \frac{a}{h}\Delta n$. Рассчитайте значение $\frac{a}{h}$ из соображения геометрической оптики, считая известным показатель преломления для жёлтой линии и полагая преломляющий угол призмы равным 60° .
10. Оцените разрешимый спектральный интервал $\delta\lambda$. Согласно (4.17), для этого надо по измеренным данным вычислить угловую полуширину жёлтой линии и знать угловую дисперсию призмы вблизи этой линии. По формуле (4.19) оцените разрешающую способность спектрального прибора, включающего призму, гониометр, глаз экспериментатора. Используя найденное усреднённое значение дисперсии показателя преломления, оцените размер основания призмы, сравните его с измеренным. Оцените максимальную разрешающую способность призмы по формуле (4.19).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение спектральных характеристик призмы. Чему равна её дисперсионная область?
2. Выведите соотношение, связывающее угол наименьшего отклонения и значение показателя преломления.
3. Дайте качественное объяснение зависимости показателя преломления стекла от длины волны в оптическом диапазоне.
4. Оцените максимальный шаг амплитудной решётки, при котором её угловая дисперсия в 1-м порядке сравнима с угловой дисперсией вашей призмы. Для этого шага оцените размер решётки, при которой её разрешающая способность в 1-м порядке спектра сравнима с разрешающей способностью призмы.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. § 49.

Работа 4.4.4

Интерферометр Фабри—Перо

Цель работы: измерение длины волны жёлтых линий ртути, жёлтого дублета натрия, определение спектральных характеристик интерферометра Фабри—Перо.

В работе используются: интерферометр Фабри—Перо, линзы, светофильтры, ртутная и натриевая лампы, катетометр КН-6.

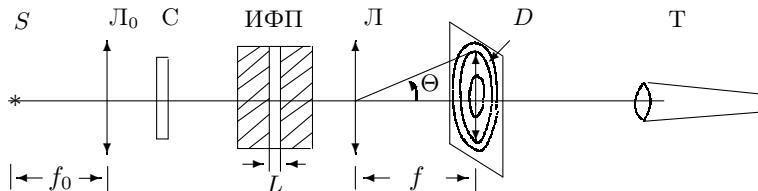


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Свет от лампы S , пройдя через линзу L_0 и светофильтр C , попадает на интерферометр Фабри—Перо (ИФП). Линза L_0 служит для формирования пучка лучей (слегка сходящегося или слегка расходящегося). Интерференционные кольца наблюдаются в фокальной плоскости линзы L . Картина рассматривается через зрительную трубу T , сфокусированную на эту плоскость. Диаметры колец измеряются с помощью микроскопа катетометра. Зрительная труба T , отсчётный микроскоп — элементы катетометра — прибора, предназначенного для измерения расстояний в вертикальной плоскости вдоль вертикальной оси. Подробное описание катетометра и инструкция к пользованию прилагаются к работе.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается по результатам измерения диаметров интерференционных колец определить длины волн жёлтых линий ртути, жёлтого дублета натрия, расстояния между зеркалами интерферометра (по известной длине волны зелёной линии ртути), спектральные характеристики интерферометра.

I. Юстировка системы

1. Включите лампу в сеть. Для ртутной лампы, кроме тумблера на блоке питания, следует нажать кнопку «ПОДЖИГ». Натриевую лампу следует включать только на время измерений из-за небольшого срока её службы.
2. На интерферометр должен падать слегка расходящийся пучок света, поэтому источник света S располагается вблизи фокуса линзы L_0 . С помощью листа бумаги проследите за пучком света, падающим на интерферометр. Чем ближе интерферометр к линзе L_0 , тем большая часть пучка проходит через него.
3. Отодвиньте линзу L и, приблизив глаз к интерферометру, рассмотрите систему колец невооружённым глазом. Если интерферометр отьюстирован правильно (зеркала параллельны), то при смещении глаза вправо-влево или вверх-вниз видимые размеры колец не изменяются. В том случае, когда при смещении глаза кольца сбегаются к центру или выплывают из него, обратитесь за помощью к лаборанту. Снова поставьте за интерферометром линзу L . На фокальную плоскость этой линзы должна быть сфокусирована зрительная труба катетометра, на объективе которого указаны допустимые расстояния до плоскости наблюдения. Система колец должна быть резкой и равномерно освещена по вертикали (одинаковое число колец, расположенных выше и ниже их центра).
4. Пользуясь описанием катетометра, ознакомьтесь с устройством прибора, правилами его настройки и техникой измерений.

II. Измерения

5. В спектре ртутной лампы лабораторная установка позволяет наблюдать интерференционные кольца от зелёной линии, двух жёлтых и одной фиолетовой, в спектре натриевой лампы — жёлтый дублет. С помощью катетометра измерьте вертикальные координаты 5–6 диаметров для каждой спектральной линии. Рекомендуется, монотонно перемещая зрительную трубу катетометра снизу вверх, фиксировать координаты колец начиная с самого дальнего от центра. Пройдя центр, последовательно фиксируйте вторые координаты тех же колец. Если в центре системы колец наблюдается интерференционный максимум (относительно яркое пятно), то его при измерениях следует исключить. Удобно, пронумеровав предварительно кольца для каждой линии $i = 1, \dots, 5, 6$ ($i = 1$ для кольца минимального диаметра), записывать соответствующие одному кольцу координаты друг под другом. Для спектра ртутной лампы измеряются диаметры зелёной и двух жёлтых линий (всего 30–36 отсчётов вертикальной координаты). Не забудьте отметить цвет

спектральной линии для спектра натриевой лампы — двух жёлтых линий (20–24 отсчётов).

6. Для оценки разрешающей способности установки измерьте ширину (не полуширину) δr , ближайшего к центру кольца для зелёной и жёлтой линий в спектре ртути одной жёлтой линии в спектре натрия. Уровень половинной мощности при регистрации δr оценивается на глаз.

Запишите фокусное расстояние f линзы Л.

III. Обработка результатов

Диаметр интерференционного кольца d и угол падения световой волны θ для малых θ связаны соотношением $\theta = \frac{d}{2f}$, где f — фокусное расстояние линзы Л. Обе величины θ или d можно использовать при обработке результатов измерений.

Для малых углов θ условие возникновения интерференционного кольца (4.6) приводится к виду

$$\theta_m^2 = 2 - \frac{\lambda}{L}m.$$

При переходе от любого кольца к соседнему с большим диаметром порядок интерференции уменьшается на 1. Т.к. кольца пронумерованы $i = 1, \dots, 5, 6$, возникает зависимость угла на максимум интерференции от его номера или диаметра кольца:

$$\frac{d^2(i)}{4f^2} = \theta^2(i) = \text{const} + \frac{i\lambda}{L}.$$

Если отложить по оси абсцисс номер кольца i , а по оси ординат величины $\theta^2(i)$ или $d^2(i)$, то по тангенсу угла наклона получившейся прямой можно определить базу интерферометра при известной длине волны или длину волны при известной базе. Для пары жёлтых линий можно вычислить среднюю длину волны $\bar{\lambda}$, используя квадраты угловых радиусов $\theta_1^2(i)$ и $\theta_2^2(i)$:

$$\frac{d_1^2(i) + d_2^2(i)}{8f^2} = \frac{\theta_1^2(i) + \theta_2^2(i)}{2} = \text{const} + i\frac{\bar{\lambda}}{L}$$

и разность $\delta\lambda$ их длин волн

$$\frac{[d_1(i) - d_2(i)][d_1(i) + d_2(i)]}{4f^2} = \theta_1^2(i) - \theta_2^2(i) = \text{const} + i\frac{\delta\lambda}{L}.$$

Отметим, что наблюдаемая пара жёлтых колец имеет один порядок интерференции m , если разность длин волн $\delta\lambda$ меньше дисперсионной

области интерферометра $\Delta\lambda$, как в случае жёлтого дублета натрия, и порядок спектра внутри пары отличается на 1 для жёлтых линий ртути.

- Используя значение средней длины волны зелёной линии ртути $\lambda_3 = 5461 \text{ \AA}$, определите базу интерферометра L .
- Определите среднюю длину волны и разность длин волн для пары жёлтых линий ртути. Сравните полученные значения с приведёнными в приложении, табл. 1. Определите среднюю длину волны и разность длин волн для жёлтого дублета натрия.
- Оцените максимальный порядок интерференции и дисперсионную область интерферометра (см. (4.22)).
- Используя известное значение разности длин волн жёлтого дублета натрия $\delta\lambda = 6 \text{ \AA}$, рассчитайте по результатам измерений спектра натрия угловую дисперсию интерферометра и проверьте полученную ранее зависимость (4.13).
- Используя связь углового радиуса первого интерференционного кольца θ_1 , его ширины по уровню половинной мощности $\delta\theta_1$ и разрешающей способности $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx \frac{1}{\theta_1\delta\theta_1}$, оцените аппаратную разрешающую способность установки в целом по зелёной линии ртути и двум жёлтым (ртути и натрия). Оцените число интерферирующих волн и коэффициент отражения поверхности интерферометра.

Контрольные вопросы

- Дайте определения и приведите формулы расчёта спектральных характеристик интерферометра Фабри–Перо.
- Если бы жёлтые линии ртути были не узкими, а перекрывали друг друга, т.е. имели ширину 21 \AA , то можно ли исследовать такой спектр вашим интерферометром?
- Оцените минимальный диаметр зеркал интерферометра, при котором разрешается жёлтый дублет натрия.
- Оцените длительность импульса излучения натриевой лампы, при которой интерферометр не разрешает жёлтый дублет. Для этого случая оцените путь, который проходит свет внутри интерферометра, сравните его с базой интерферометра.

Литература

- Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. Гл. III. § 36.
- Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. — М.: Физматлит, 2001. §8.9.
- Ландсберг Г.С.* Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. VII. § 30.

ПРИЛОЖЕНИЕ

A. Устройство гониометра Г5

Внешний вид гониометра представлен на рис. П4.1. Коллиматор 3, столик 7 и алидада 17 со зрительной трубой 12 крепится на массивном основании 23. На столике 7 размещаются исследуемые объекты. Коллиматор закреплён неподвижно, а столик и алидада с трубой могут вращаться вокруг вертикальной оси.

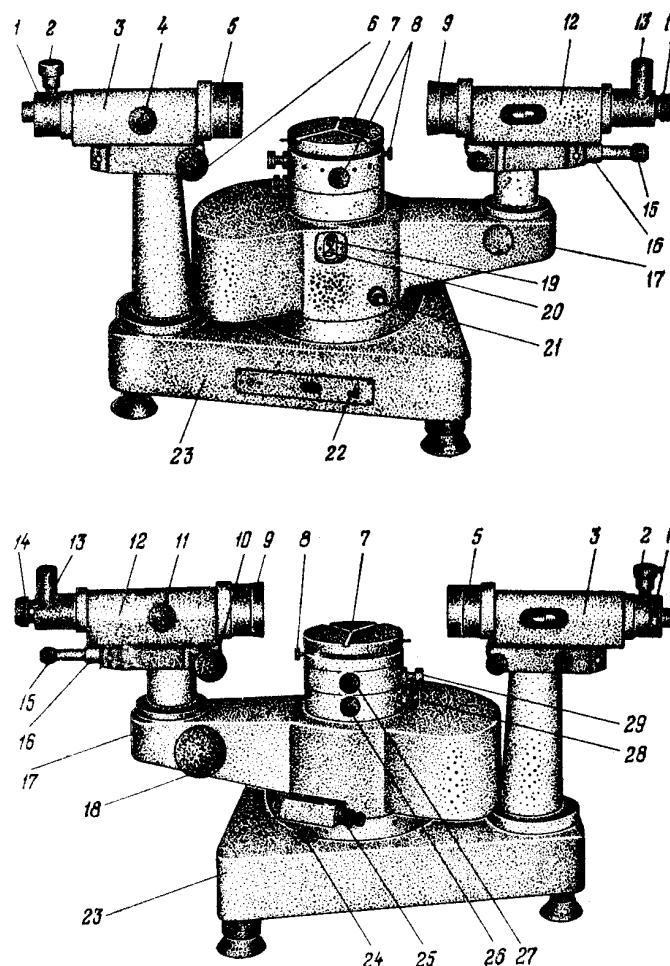


Рис. П4.1. Внешний вид гониометра Г5

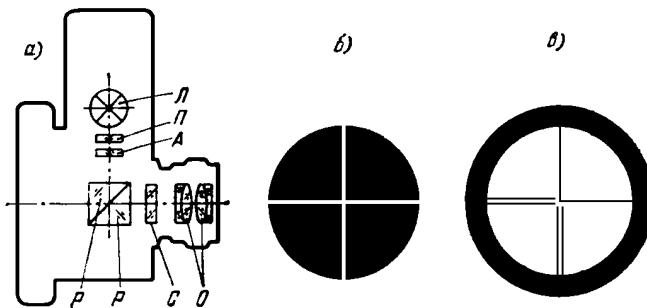


Рис. П4.2. Автоколлимационное устройство

Ширину коллиматорной щели можно менять от 0 до 2-х мм при помощи микрометрического винта 2, высоту — от 0 до 20 мм — при помощи диафрагмы с треугольным вырезом («ласточкин хвост»), надетой на щель. Винт 4 служит для настройки коллиматора на параллельный пучок. Зрительная труба 12 состоит из объектива 9 и окуляра 14 с автоколлимационным устройством 13. объективы коллиматора и зрительной трубы одинаковы. Фокусировка трубы производится винтом 11. Наклон коллиматора и зрительной трубы к горизонтальной оси изменяется винтами 6 и 10 соответственно.

Схема окуляра зрительной трубы с автоколлимационным устройством приведена на рис. П4.2а.

Свет от лампы Л проходит через защитную стеклянную пластинку П и попадает на автоколлимационную сетку А, содержащую две взаимно перпендикулярные щели (рис. П4.2б). Свет, прошедший через сетку А, попадает на две прямоугольные призмы Р и отражается от гипотенузной грани, на которую нанесён полупрозрачный слой с коэффициентом отражения 50%. Для юстировки гониометра на столик ставится предмет с плоской отражающей поверхностью. После отражения от неё параллельный пучок лучей возвращается назад в зрительную трубу и собирается в фокальной плоскости объектива. В этом случае светящийся крест можно увидеть через окуляр зрительной трубы. Кроме того, в окуляре имеется ещё одна сетка С, на которой изображён чёрный отсчётный крест (рис. П4.2в). Совмещённые изображения обоих крестов рассматриваются через окулярные линзы О. Резкость видимого изображения отсчётного креста регулируется вращением оправы окуляра 14.

Обе сетки окуляра, А и С (рис. П4.2а), расположены на строго одинаковых расстояниях от гипотенузных граней призмы Р, поэтому их одновременное наблюдение в окуляре возможно только при совпадении фокальных плоскостей объектива и окуляра (труба настроена на бесконечность).

Важнейшим узлом гониометра является устройство, служащее для отсчёта угла поворота зрительной трубы вокруг вертикальной оси, проходящей через центр столика. На этой оси крепится прозрачное кольцо (лимб), расположенное в корпусе прибора. На поверхности лимба нанесена шкала с делени-

ями. Лимб разделён на $3 \times 360 = 1080$ делений. Цена деления $20'$, оцифровка делений произведена через 1° . Шкалу лимба можно наблюдать через окуляр отсчётного устройства 16 при включённой подсветке (тумблер 22). Резкость изображения шкалы регулируется вращением оправы окуляра 15.

Оптическая система отсчётного устройства собрана так, что через окуляр можно наблюдать изображения штрихов двух диаметрально противоположных участков лимба, причём одно изображение прямое, а другое обратное (рис. П4.3). Кроме того, оптическая система позволяет перемещать эти изображения друг относительно друга, оставляя в покое как лимб, так и алидаду со зрителной трубой. Это перемещение штрихов измеряется при помощи оптического микрометра. Шкала микрометра рассчитана таким образом, что при перемещении её на 600 делений верхнее изображение штрихов лимба смещается относительно нижнего на $10'$. Следовательно, цена деления шкалы микрометра $1''$.

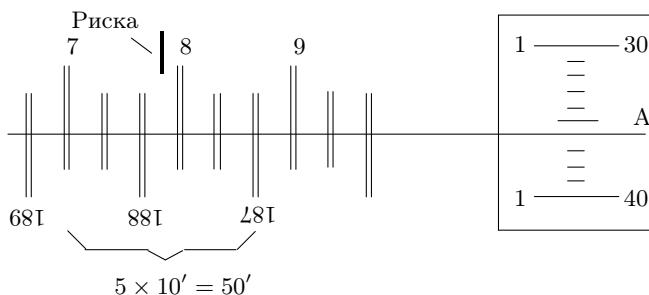


Рис. П4.3. Поле зрения отсчетного микроскопа ($7^\circ 51' 36''$)

Поле зрения отсчётного микроскопа приведено на рис. П4.3. В левом окне наблюдаются изображения диаметрально противоположных участков лимба и вертикальный штрих для отсчёта градусов и десятков угловых минут, в правом — деления шкалы оптического микрометра и горизонтальная риска А для отсчёта минут и секунд.

Б. Юстировка гoniометра

Гониометр требует тщательной юстировки, которая заключается в настройке: а) зрительной трубы на бесконечность; б) поверхности столика и оптической оси трубы — перпендикулярно оси вращения прибора; в) коллиматора — на параллельный пучок лучей; г) оптической оси коллиматора — перпендикулярно оси вращения прибора.

Любой вращающийся элемент системы должен свободно поворачиваться рукой, если освобождён соответствующий закрепляющий винт.

Вращение от руки с усилием недопустимо!

I. Установка зрительной трубы на бесконечность

- Вращением оправы 14 настройте окуляр зрительной трубы на резкое изображение чёрного отсчётного креста (крест можно подсветить рассеянным светом настольной лампы).
- Включите тумблер 22 — подсветка — и убедитесь, что светящийся крест автоколлимационной сетки виден, если посмотреть в трубу со стороны объектива.

Прислоните к оправе объектива плоскопараллельную пластину и, перестраивая объектив винтом 11, найдите резкое изображение светящегося креста, отражённого от стеклянной поверхности.

II. Установка поверхности столика перпендикулярно оси вращения прибора

Поле зрения зрителной трубы гониометра составляет менее 2° , поэтому этот этап настройки требует повышенного терпения и внимания.

- Предварительная настройка. Установив зрителную трубу напротив коллиматора, зафиксируйте её положение винтом 24. Убедитесь, что рычажок 20 в верхнем положении (рычажок 19 нажат). Закрепите винт 26 и освободите винт 27. В таком положении верхняя часть столика может свободно вращаться от руки при неподвижной алидаде и лимбе. Поверните верхнюю часть столика так, чтобы один из винтов 8 был направлен вдоль оси трубы. Наклоняя столик двумя ориентированными взаимно перпендикулярно винтами 8, установите на глаз его плоскость горизонтально. При этом удобно следить за величиной щели между крышкой столика и торцом его основания-цилиндра.
- Поставьте на столик уголковый отражатель (призму с углом при вершине 90°). Установите призму так, чтобы её гипотенузная грань была перпендикулярна оси зрителной трубы и оси одного из винтов 8. Вращая этот винт и слегка поворачивая рукой столик вправо и влево, добейтесь того, чтобы в поле зрения окуляра попал светящийся крест, отражённый от призмы. Совместите центр отражённого креста с горизонтальным штрихом отсчётного креста (смещение по горизонтали роли не играет). Если отражённых крестов несколько, работайте с самым ярким.
- Поднимите отражатель, поверните столик на 180° и поставьте отражатель на столик. Снова совместите центр автоколлимационного креста с горизонтальным штрихом отсчётного, на этот раз половину расстройки устраните винтом 8, а вторую половину — винтом 10 наклона трубы.

Снова поверните столик и призму на 180° и теми же действиями уточните настройку. Допустимо смещение креста на треть радиуса поля зрения. Теперь можно считать, что ось вращения столика лежит в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси трубы.

Поверните столик на 90° , установите на него отражатель и вторым винтом 8 совместите изображение автоколлимационного креста с отсчётным. Теперь можно считать, что оси трубы и вращения столика находятся в одной вертикальной плоскости и они взаимно перпендикулярны.

- Точная настройка. На этом этапе настройки вместо уголкового отражателя используется плоскопараллельная пластина. Плоскости этой пластины перпендикулярны её узкой полированной грани. На эту грань следует поставить

пластину на столик так, чтобы её рабочие грани были примерно перпендикулярны осям трубы и одного из винтов 8. Вращая винт 8 и слегка поворачивая столик рукой, добейтесь того, чтобы в поле зрения окуляра попал отражённый светящийся крест. Совместите автоколлимационный и отсчётный кrestы винтом 8 и винтом 10 наклона трубы, как в пункте 5. Не трогая пластины, поверните столик на 180° и уточните настройку винтами 8 и 10.

Поверните столик на 90° , поставьте на него пластину, вторым винтом 8 совместите изображения крестов. Проверьте настройку при повороте столика на 180° , допустимое расхождение изображений по вертикали не более трети радиуса поля зрения трубы.

III. Настройка коллиматора

- Включите блок питания ртутной лампы и нажмите кнопку «ПОДЖИГ». Расширьте входную щель коллиматора и поставьте ртутную лампу вплотную к щели. Расположите лист бумаги за объективом коллиматора и перемещением источника света перпендикулярно оси коллиматора добейтесь максимальной освещённости центральной части светового пятна. Освободите алидаду (винт 24) и установите настроенную на бесконечность зрительную трубу напротив коллиматора. Уточните центровку изображения щели винтом 25 при зажатом винте 24. Наблюдая за изображением щели в зрительную трубу, вращением винта 4 (перемещением объектива коллиматора) настройтесь на резкое изображение щели. Ограничьте до нескольких миллиметров видимую высоту щели, перемещая вдоль неё диафрагму «ласточкин хвост».

Изменяя наклон коллиматора винтом 6, выведите резкое изображение щели на середину поля зрения окуляра.

Подберите рабочую ширину входной щели так, чтобы её видимая ширина составляла 1,5–2 расстояния между полосами двойного отсчётного штриха.

B. Отсчёт углов

Глядя в окуляр 15 и вращая оправу окуляра, настройтесь на резкое изображение лимба (круговой шкалы) и вертикальной шкалы, расположенной справа от лимба. Вращением маховичка оптического микрометра 18 (без усилий!) совместите ближайший к отсчётной риске левый двойной оцифрованный штрих с ближайшим двойным штрихом нижней шкалы (если совместить штрихи без усилия не удаётся, вращайте маховичок 18 в другую сторону и совмещайте соседний нижний штрих); снимите отсчёт угла в градусах (7° на рис. П4.3). Для определения десятков минут просчитайте число интервалов между двойными штрихами от выбранного верхнего до нижнего, отличающегося на 180° (на рис. П4.3 от 7 до 187 между двойными штрихами 5 интервалов, каждый по $10'$, т.е. $50''$).

Число минут — это левая цифра вертикальной шкалы над отсчётной горизонтальной риской А (на рис. П4.3 — $1'$). Число секунд — это отсчёт по правой части вертикальной шкалы (на рис. П4.3 положение горизонтальной риски А даёт $36''$). Положение, показанное на рис. П4.3, соответствует отсчёту $7^\circ 51' 36''$. Отсчётное устройство гониометра обеспечивает точность измерений угла не хуже $5''$, или $2,4 \cdot 10^{-5}$ рад (по паспорту Г5).

IV. Установка отсчёта углов

1. Расположите трубу против коллиматора. Вращением микрометрического винта 25 при закреплённом винте 24 совместите двойной отсчётный штрих с изображением входной щели.
2. Для удобства отсчёта можно выставить начальный угол $\approx 180^\circ$. Для этого вращением маховичка 18 установите горизонтальную отсчётную риску А на отсчёт $1'00''$. Дополнительная минута рекомендуется потому, что при настройке точно на $0'00''$ (на край шкалы) часто выходит из строя маховик 18.

Поворачивая нижнюю часть столика сначала от руки при свободном винте 26, а затем микрометрическим винтом подачи 28 при зажатом винте 26 совместите верхний штрих — 180° и нижний 0° . При такой настройке углы, под которыми видны спектральные линии, будут отсчитываться от $0'1'00''$.

Если настройка на 180° затруднена, запишите такое начало отсчёта, которое вы установили. Чтобы не сбить начало отсчёта, винт 26 не следует освобождать до конца измерений. Поворачивать столик можно, освобождая только винт 27 (вращается верхняя часть столика, но не шкала).

Полезно в процессе работы уточнять начало отсчёта.

Г. Спектр ртутной лампы

Каждая линия спектра имеет свою ширину и тонкую структуру. Ниже приведены некоторые интегральные характеристики спектральных линий для лампы ДРШ-250.

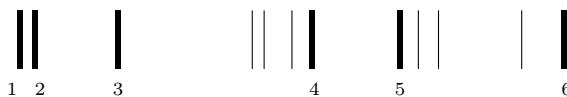


Рис. П4.4. Спектр ртутной лампы ДРШ-250

Таблица 1
Характеристики спектра ртутной лампы ДРШ-250

№	1	2	3	4	5	6
λ нм.	579,1	577,0	546,1	491,6	435,8	404,7
Цвет	желт.	желт.	зелен.	голуб.	синий	фиолет.
Яркость	10	8	10	4	4	3

ЛАЗЕРНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

1. Общие принципы работы лазера

Лазер, или оптический квантовый генератор, — источник квазимонохроматического и узконаправленного высококогерентного потока излучения, работающий за счёт квантово-механического эффекта вынужденного (индуцированного) излучения (LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation — «усиление света посредством вынужденного излучения»).

Главными элементами лазера являются оптический резонатор и расположенная в нём активная среда, способная усиливать проходящее через неё излучение.

Простейший резонатор представляет собой *интерферометр Фабри-Перо* (см. раздел IV), состоящий из двух плоских зеркал с высокими коэффициентами отражения, размещённых параллельно друг другу на фиксированном расстоянии. Благодаря наличию активной среды, в резонаторе многократно усиливаются волны, распространяющиеся вдоль оси системы и набирающие за один полный проход резонатора фазу, кратную 2π (т. е. на оптической длине резонатора укладывается целое число полуволн, в системе при этом образуются *стоячие волны*). Таким образом, резонатор обеспечивает создание *положительной обратной связи* в лазере и превращает его в *генератор излучения*. Также в резонаторе происходит накопление энергии излучения и отбор узких резонансных линий из спектра излучения, рождающегося в среде. Одно из зеркал резонатора обычно имеет несколько меньший коэффициент отражения, что позволяет выпускать через него часть излучения в виде узконаправленного высокомонохроматического пучка (см. рис. 5.1).

Принцип усиления в активной среде основан на использовании эффекта вынужденного (индуцированного) излучения. Вынужденное излу-

чение — процесс, обратный поглощению фотона атомом. В нём атом, находящийся в возбуждённом состоянии, под действием налетающего на него фотона переходит в состояние с меньшей энергией, испуская при этом ещё один фотон, частота, поляризация и фаза которого совпадают с таковыми у исходного фотона. Иными словами, падающий и рождённый в результате индуцированного излучения фотоны являются полностью когерентными.

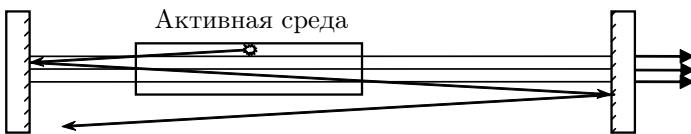


Рис. 5.1. Схема лазера

Вероятность поглощения фотона при взаимодействии с атомом в невозбуждённом состоянии равна вероятности индуцированного испускания при взаимодействии фотона с возбуждённым атомом. Поэтому для того, чтобы среда в целом усиливала излучение, количество возбуждённых атомов должно быть больше, чем количество невозбуждённых. Такое состояние среды не является термодинамически равновесным и называется состоянием с **инверсной заселённостью** уровней. Для создания инверсной заселённости используют различные методы **накачки**. Источником первичных фотонов служит процесс спонтанного (т. е. самопроизвольного) излучения возбуждённых атомов.

Рассмотрим подробнее различные аспекты работы лазеров.

1.1. Элементарные процессы

Как известно из квантовой механики, энергия электронов в атомах способна принимать лишь некоторый дискретный набор значений — энергетических уровней E_i . Если энергия электронов атома минимальна (и равна E_0), то говорят, что атом находится в *основном состоянии*. Если атом находится на любом другом энергетическом уровне $E_i > E_0$ (т. е. его электроны имеют энергию E_i), то говорят, что атом находится в *возбуждённом состоянии*. Рассмотрим, для определённости, переходы электрона между основным E_0 и первым возбуждённым E_1 уровнями энергии (всё сказанное в этом параграфе справедливо и для любого другого перехода между атомными уровнями).

Изменение энергии электрона в атоме может сопровождаться испусканием или поглощением энергии в виде кванта электромагнитного излучения — фотона. Энергия фотона равна $\hbar\omega$, где ω — частота коле-

баний электромагнитного поля, $\hbar = h/2\pi$ ($h \approx 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка). Согласно принципам квантовой механики, электрон в атоме, находящийся в состоянии E_0 или E_1 , может взаимодействовать с фотоном энергии $\hbar\omega$, если выполняется равенство $E_1 - E_0 = \hbar\omega$.

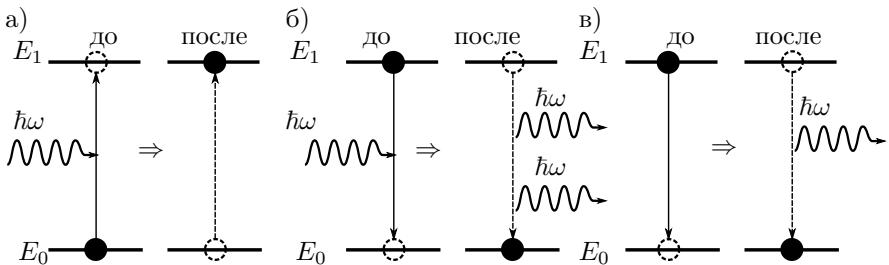


Рис. 5.2. Переходы между уровнями E_1 и E_0

Можно выделить три главных элементарных процесса, определяющих взаимодействие излучения с активной средой лазера.

1. Поглощение фотона невозбуждённым атомом $\hbar\omega + A \rightarrow A^*$. Атом при взаимодействии с внешним электромагнитным полем поглощает квант энергии $\hbar\omega$ и переходит из состояния E_0 в состояние $E_1 = E_0 + \hbar\omega$ (рис. 5.2а).

2. Вынужденное (индуцированное) излучение при взаимодействии атома с падающим на него электромагнитным полем $\hbar\omega + A^* \rightarrow A + 2\hbar\omega$ (рис. 5.2б). При этом взаимодействии атом переходит в основное состояние, испуская ещё один фотон той же частоты ω . Кроме того, кванты электромагнитного поля, излучённые при индуцированных переходах, полностью тождественны кванту поля, вызвавшего переход. Иными словами, вновь родившийся фотон имеет ту же фазу, поляризацию и направление распространения (волновой вектор), что и исходный фотон, то есть является полностью когерентным с ним.

Согласно законам квантовой механики, вероятности того, что атом поглотит (переход $0 \rightarrow 1$) или вынужденно испустит (переход $1 \rightarrow 0$) фотон (квант энергии электромагнитного поля $\hbar\omega$), отличны от нуля только для поля резонансной частоты $\hbar\omega = E_1 - E_0$. Кроме того, вероятности переходов $0 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 0$ равны между собой (в силу принципа детального равновесия) и пропорциональны спектральной плотности энергии внешнего поля ρ_ω (которая пропорциональна количеству фотонов, имеющих данную частоту). Это можно записать как

$$W_{0 \rightarrow 1} = W_{1 \rightarrow 0} = B\rho_\omega, \quad (5.1)$$

где $W_{0\leftrightarrow 1}$ — вероятности в единицу времени¹ для соответствующих переходов, B — коэффициент, характеризующий переходы между рассматриваемыми уровнями энергии, не зависящий от величины поля (так называемый коэффициент Эйнштейна для вынужденных переходов).

3. Спонтанное излучение фотона возбуждённым атомом $A^* \rightarrow A + \hbar\omega$ (рис. 5.2в). Время жизни возбуждённых состояний — конечная величина, поэтому по прошествии некоторого времени возбуждённый атом испустит фотон частоты $\omega = (E_1 - E_0)/\hbar$. Скорость этого процесса является константой, не зависящей от наличия внешнего поля. Фаза и направление распространения испущенного фотона будут случайны, так что данный процесс препятствует сохранению когерентности излучения лазера. Кроме того, он мешает поддержанию инверсной заселённости (см. п. 1.5) уровней энергии атомов. С другой стороны, спонтанное излучение выполняет важную функцию источника первичных фотонов, являясь «затравкой» для формирования направленного пучка лазерного излучения.

1.2. Коэффициент усиления

Изменение интенсивности электромагнитной волны dI , пропущшей участок поглащающей (или усиливающей) среды толщиной dx , пропорционально интенсивности волны на этом участке $I(x)$: $dI = -\alpha I dx$, где α — коэффициент поглощения на единицу длины среды. Если $\alpha = \text{const}$, то в результате интегрирования получаем, что интенсивность волны в среде изменяется по закону

$$I(x) = I_0 \exp(-\alpha x)$$

(закон Бугера–Ламберта–Бера). Если $\alpha < 0$, то говорят о коэффициенте усиления среды $\gamma = -\alpha$, интенсивность при этом экспоненциально нарастает:

$$I(x) = I_0 \exp(\gamma x). \quad (5.2)$$

Рассмотрим прохождение через среду плоской электромагнитной волны, частота ω которой удовлетворяет резонансному условию $\hbar\omega = E_1 - E_0$, где E_1 и E_0 — некоторые уровни энергии атомов среды.

Пусть N_1 и N_0 — концентрации атомов с энергиями E_1 и E_0 соответственно. Согласно формуле (5.1), доля «невозбуждённых» атомов

¹ Под «вероятностью в единицу времени» имеется в виду доля атомов dN/N , совершающих соответствующий переход за время dt , или, иными словами, скорость процесса, нормированная на полное число атомов: $W \equiv \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$.

(находящихся на нижнем энергетическом уровне), поглощающих квант излучения в единицу времени, равна

$$\frac{dN_0}{N_0} = W_{0 \rightarrow 1} dt = B\rho_\omega dt.$$

Убыль фотонов в единице объёма при этом равна

$$dN_\Phi^- = -dN_0 = -B\rho_\omega N_0 dt.$$

Аналогично, количество фотонов dN_Φ^+ , рождённых за счёт вынужденного излучения², равно

$$dN_\Phi^+ = B\rho_\omega N_1 dt.$$

При прохождении волны сквозь среду изменение интенсивности волны пропорционально суммарному количеству рождённых и поглощённых квантов (в расчёте на единицу длины в направлении движения волны). Тогда для волны, прошёдшей участок длиной dx за время $dt = dx/v$, где $v = c/n$ — скорость волны, относительное изменение интенсивности равно

$$\frac{dI}{I} = \frac{dN_\Phi^+ + dN_\Phi^-}{\rho_\omega/\hbar\omega} = B\frac{\hbar\omega}{v}(N_1 - N_0) dx.$$

Таким образом, коэффициент усиления волны с частотой ω в активной среде лазера равен

$$\gamma = B\frac{\hbar\omega}{v}\Delta N, \quad (5.3)$$

где $\Delta N = N_1 - N_0$. Отсюда видно, что *среда является усиливающей* ($\gamma > 0$), если концентрация атомов на верхнем уровне больше, чем на нижнем: $N_1 > N_0$.

1.3. Спектр генерации. Доплеровское уширение

Всё сказанное в предыдущем параграфе относилось к монохроматической волне и бесконечно узкой линии поглощения/излучения $\omega = (E_1 - E_0)/\hbar$. В реальности эта линия имеет конечную ширину $\Delta\omega_\gamma$, и коэффициент усиления (5.3) должен быть домножен на функцию, пропорциональную форме контура этой спектральной линии. Иными

² Заметим, что вероятность спонтанного излучения пропорциональна концентрации возбуждённых атомов и не зависит от плотности энергии излучения ρ_ω , поэтому при больших ρ_ω её можно пренебречь по сравнению с вероятностью вынужденного излучения.

словами, коэффициент усиления $\gamma(\omega)$ есть функция частоты с острым максимумом вблизи резонансной частоты $\omega = (E_1 - E_0)/\hbar$, обладающая некоторой конечной шириной $\Delta\omega_\gamma$.

Ширина спектра усиления активной среды лазера $\Delta\omega_\gamma$ (спектра генерации) определяется *естественной шириной* резонансной линии лазерного перехода и различными *механизмами уширения*.

Естественная ширина линии — внутренняя характеристика атома, определяемая строением его энергетических уровней. Если известно время жизни возбуждённого состояния τ_e , естественная ширина $\Delta\omega_e$ может быть оценена из соотношения неопределённостей $\Delta\omega_e \sim 2\pi/\tau_e$. В модели цугов (см. раздел II, п. 3) время τ_e может быть отождествлено с длительностью цуга, излучаемого отдельным атомом.

Основным механизмом уширения в газовых лазерах, определяющим ширину спектральной линии излучения среды, является *эффект Доплера*, действие которого схематически изображено на рис. 5.3.

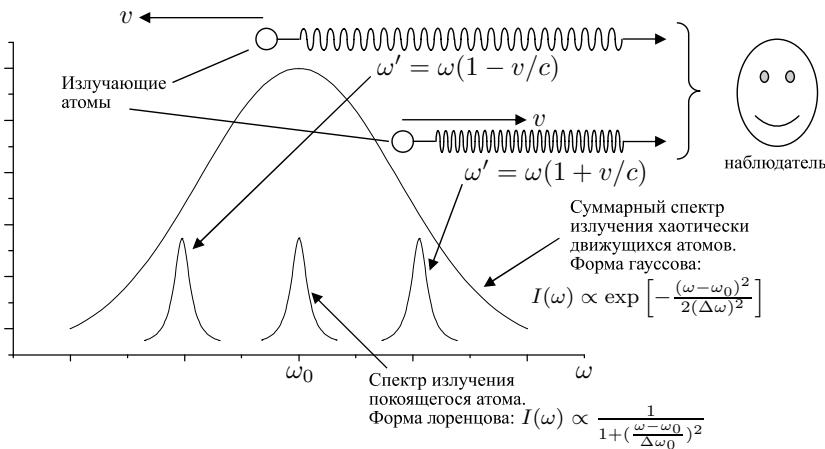


Рис. 5.3. Доплеровское уширение спектра излучения атомов вследствие теплового движения

В лазерной трубке атомы среды участвуют в хаотическом тепловом движении. Частота излучения движущегося источника сдвинута относительно неподвижного источника; в нерелятивистском случае

$$\frac{\Delta\omega_d}{\omega} \sim \frac{v}{c} \cos\alpha,$$

где α — угол между вектором скорости и направлением на наблюдателя. Результирующий спектр излучения есть сумма вкладов от большого количества атомов среды (движущихся с различными скоростями и

в разных направлениях). Поскольку при хаотическом движении $\cos \alpha$ принимает значения от 1 до -1 , то полуширина линии приблизительно составляет

$$\Delta\omega_d \sim \omega \frac{v_T}{c} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}, \quad (5.4)$$

где v_T — средняя тепловая скорость движения атомов³.

1.4. Условие достижения порога генерации

Предположим, что активная среда с коэффициентом усиления γ находится между двумя зеркалами с коэффициентами отражения по энергии r_1 и r_2 (рис. 5.1). Пусть световой пучок распространяется из некоторой точки внутри резонатора и после отражения от двух зеркал возвращается в эту же точку. При длине промежутка L усиление за один полный проход резонатора с учётом формул (5.2) и (5.3) равно

$$G = e^{2\gamma L}.$$

Учтём, что в лазере имеются дополнительные потери энергии, так что за один проход интенсивность из-за них составит долю T от исходной⁴. Для самовозбуждения лазера необходимо, чтобы усиление было достаточным для компенсации всех потерь при полном обходе резонатора: $r_1 r_2 T G \geq 1$, откуда

$$e^{\gamma L} \geq \frac{1}{\sqrt{T r_1 r_2}} \quad (5.5)$$

или

$$2\gamma L \geq -\ln T - \ln r_1 r_2.$$

³ Строгий вывод на основе распределения Максвелла позволяет найти формулу спектра излучения, представляющую собой гауссову функцию

$$I \propto \exp \left[\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta\omega^2} \right]$$

со стандартным отклонением

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

⁴ Потери могут быть связаны с рассеянием и поглощением на дефектах и примесях среды, а также на дополнительных элементах лазера, таких как стеклянные окна лазерной трубки. Возможны и другие виды потерь, приводящие к уменьшению пропускания, например, за счёт дифракционного расплывания пучка. Дифракционные потери становятся существенными при малых поперечных размерах зеркал или активного элемента D , сравнимых с размером одной зоны Френеля для расстояния, равного длине резонатора, то есть $D \sim \sqrt{\lambda L}$.

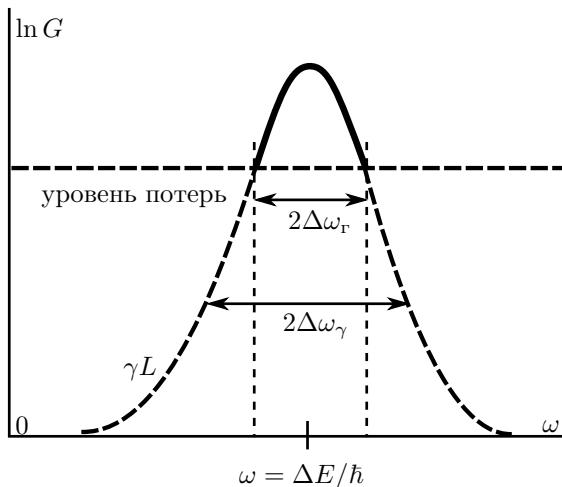


Рис. 5.4. Контур усиления и уровень потерь

Заметим, что коэффициент усиления $\gamma(\omega)$ зависит от частоты и генерация может происходить в диапазоне частот $\omega \pm \Delta\omega_\Gamma$, в котором справедливо условие (5.5) (см. рис. 5.4).

В лазерах с непрерывной генерацией в установившемся режиме потери излучения в точности компенсируются усилением, то есть усиление активного элемента за один проход равно $G = 1/(Tr_1r_2)$. При этом следует иметь в виду, что для того, чтобы лазер имел ненулевую мощность выходного излучения, активный элемент лазера должен иметь запас по усилению, то есть при отключении положительной обратной связи (удалении зеркал резонатора) усиление должно превышать порог, задаваемый правой частью неравенства (5.5). При подключении обратной связи и выходе на стационарный режим генерации усиление автоматически падает до величины $1/(Tr_1r_2)$ за счет сброса возбужденных атомов с верхнего лазерного уровня на нижний лазерным излучением.

1.5. Инверсная заселённость. Накачка

Как показано в п. 1.2, для создания среды, которая способна усиливать проходящее через неё излучение, необходимо, чтобы концентрация атомов на верхнем лазерном уровне была больше, чем на нижнем: $N_1 > N_0$. В таком случае говорят, что уровни энергий атомов в активной среде имеют **инверсную заселённость**.

Напомним, что в равновесии при температуре T отношение заселённостей энергетических уровней E_1 и E_0 , согласно распределению

Больцмана, равно $\frac{N_1}{N_0} = \exp\left(-\frac{E_1 - E_0}{k_B T}\right)$. Если $N_1 > N_0$, то формально $T < 0$ и такое состояние не может быть равновесным. Система в состоянии инверсной заселённости, приведённая в контакт с окружающей средой, быстро отдаст ей избыток энергии и вернётся к нормальной заселённости. Однако если имеется постоянная подкачка энергии извне (система незамкнута), то неравновесное состояние может быть *стационарным*.

Для создания инверсной заселённости уровней используют различные методы **накачки**: атомы «перекачиваются» из основного состояния в возбуждённое с помощью внешних источников энергии. В качестве таких источников часто используются источники электромагнитного излучения нужной частоты (**оптическая накачка**).

Ввиду того, что вероятность поглощения равна вероятности вынужденного испускания ($B_{10} = B_{01}$), *инверсную заселённость в двухуровневой системе невозможно создать оптической накачкой*. Поэтому для создания инверсной заселённости чаще всего используют трёх- и четырёхуровневые системы. На рис. 5.5 изображена трехуровневая система, используемая в оптическом диапазоне (например, в рубиновом лазере). Излучение накачки переводит атомы из состояния 0 в состояние 2. Из состояния 2 атомы могут вернуться либо в состояние 0, либо перейти в 1. На уровне 1 атомы будут накапливаться в том случае, если время жизни на нём велико (метастабильный уровень). При этом условии на этом уровне можно накопить достаточное количество атомов, превосходящее числом количество атомов в основном состоянии. Время жизни τ связано с шириной уровня соотношением неопределённостей $\Delta E \tau \sim \hbar$, поэтому желательно, чтобы уровень 1 был узким. Легко видеть, что уровень 2, наоборот, должен быть широким — в этом случае удаётся полезно использовать заметную часть спектра оптического излучения накачки. Чаще всего роль уровня 2 играет широкая полоса. Переход 2 → 1 нередко является безызлучательным; в таких переходах излишняя энергия атома передаётся не кванту излучения, а кристаллической решётке (твёрдые тела) или сталкивающимся атомам (газы).

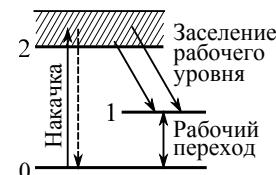


Рис. 5.5. Схема получения инверсной заселённости в трёхуровневой системе

2. Модовый состав лазерного излучения

Модами (англ. mode — состояние, режим) называют стационарные типы колебаний электромагнитного поля в резонаторе, различающиеся частотой и пространственным распределением амплитуды поля.

Рассмотрим моды в открытом резонаторе Фабри–Перо с плоскими зеркалами, расстояние между которыми равно L . Будем считать, для простоты, что активная среда заполняет весь резонатор и имеет показатель преломления⁵ $n = 1$.

2.1. Продольные моды

Зеркала обеспечивают возможность многократного прохода плоской волны, если её волновой вектор направлен *по оси* интерферометра $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ (продольные моды). Если же он имеет наклон к оси, то после нескольких проходов волна покинет область пространства между зеркалами и не будет в достаточной мере усиlena.

Большая часть энергии поля в резонаторе накапливается в виде *стоячих волн*, образованных встречными волнами, бегущими вдоль оси системы x : $E \propto \sin(\omega t) \sin(kx)$ (вектор \mathbf{E} лежит в плоскости зеркал и перпендикулярен оси x). Если зеркала проводящие (металлические), то минимальные потери будут испытывать моды, у которых напряжённость поля на поверхности зеркал ($x = 0, x = L$) равна нулю, т. е. выполняется условие $k_q L = \pi q$, где $q = 1, 2, 3, \dots$, и $k_q = \omega_q / c$ — волновое число внутри резонатора. Отсюда имеем

$$L = q \frac{\lambda}{2}, \quad \text{где } q = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.6)$$

то есть на длине резонатора укладывается целое число полуволн⁶. Набор резонансных частот (собственных частот резонатора):

$$\omega_q = q \frac{\pi c}{L}, \quad \left(\nu_q = q \frac{c}{2L} \right) \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (5.7)$$

Таким образом, резонатор выделяет из спектра генерации активной среды лазера ряд узких спектральных линий центры которых соответствуют собственным частотам ω_q резонатора (5.7).

⁵ Если $n \neq 1$, необходимо учитывать, что длина волны λ в резонаторе, заполненном активной средой, отличается от излучаемой λ_0 : $\lambda = \lambda_0/n$.

⁶ В общем случае (например, для диэлектрических зеркал) максимальным усилением в резонаторе обладают волны, для которых набег фазы при полном обходе резонатора кратен 2π . Отсюда нетрудно получить, что формулы (5.6) и (5.7) остаются справедливыми, если под L понимать *optическую* длину резонатора, учитывающую показатель преломления среды и возможный набег фазы при отражении от зеркала.

2.2. Спектр излучения лазера

Моды колебаний в резонаторе не являются строго монохроматическими и каждая содержит узкий спектр частот в некотором интервале $\omega_q \pm \Delta\Omega$. Как известно из теории колебаний, полуширина резонансного пика $\Delta\Omega$ связана с добротностью системы Q : $\Delta\Omega \sim \omega_q/Q$.

Рассчитаем сначала добротность резонатора Фабри–Перо $Q_{\text{рез}}$ и ширину его линий пропускания $\Delta\Omega_{\text{рез}}$ без учёта усиления в активной среде и потерь, не связанных с отражением от зеркал. Воспользуемся энергетическим смыслом добротности: $Q_{\text{рез}} = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T}$, где W – запасённая энергия в резонаторе, ΔW_T – её потери за период колебаний. Пользуясь обозначениями, введёнными в п. 1.4, запишем относительную потерю энергии волны за один проход пустого резонатора: $\Delta W/W = 1 - r_1 r_2$, откуда с учётом того, что за время одного прохода совершается L/λ колебаний, получим

$$Q_{\text{рез}} \sim \frac{2\pi L}{\lambda} \frac{1}{1 - r_1 r_2}, \quad \Delta\Omega_{\text{рез}} \sim \frac{\omega_q}{Q_{\text{рез}}}$$

(ср. с формулой разрешающей способности интерферометра Фабри–Перо (4.20)). Для типичных параметров лазерного резонатора $r = 0,99$, $L = 0,5$ м, $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Гц получим $Q_{\text{рез}} \sim 5 \cdot 10^8$, $\Delta\nu_{\text{рез}} = \Delta\Omega_{\text{рез}}/2\pi \sim 10^6$ Гц. Функция пропускания резонатора Фабри–Перо для продольных мод (см. формулу (4.8) при $\theta = 0$) представлена на рис. 5.6.

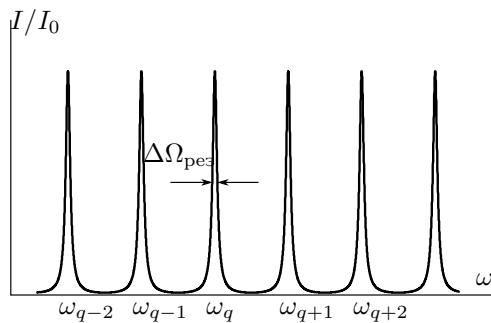


Рис. 5.6. Спектр пропускания резонатора Фабри–Перо

Резюмируя сказанное выше, мы теперь можем описать процесс формирования спектра излучения лазера. Накладывая на спектр генерации активной среды (рис. 5.4) спектр пропускания резонатора Фабри–Перо (рис. 5.6), получим набор мод, которые *могут* генерироваться лазером. Заметим, что ввиду наличия *усиления* в активной среде, реальная

ширина $\Delta\Omega$ генерируемых лазером спектральных линий может быть и значительно меньше ширины линии пропускания резонатора $\Delta\Omega_{\text{рез}}$ (см. далее п. 2.3).

Рассмотрим в качестве примера типичный спектр излучения газовых лазеров. Ширина спектра генерации определяется эффектом Доплера $\Delta\omega_\gamma \sim \Delta\omega_d$ (см. (5.4)) и обычно больше межмодового расстояния $\omega_{q+1} - \omega_q = \frac{\pi c}{L}$. В таком случае формируется спектр излучения лазера, представленный на рис. 5.7: из додлеровского контура (полужириной ω_d) «вырезается» ряд узких спектральных линий, причём «выживают» только те линии, усиление которых выше уровня потерь. Такой режим работы лазера называют многомодовым. Количество генерируемых мод зависит от соотношения усиления и потерь. Если усиление лишь немногого выше уровня потерь, то возможна ситуация, когда будет возбуждена только центральная линия и режим работы лазера будет одномодовым.

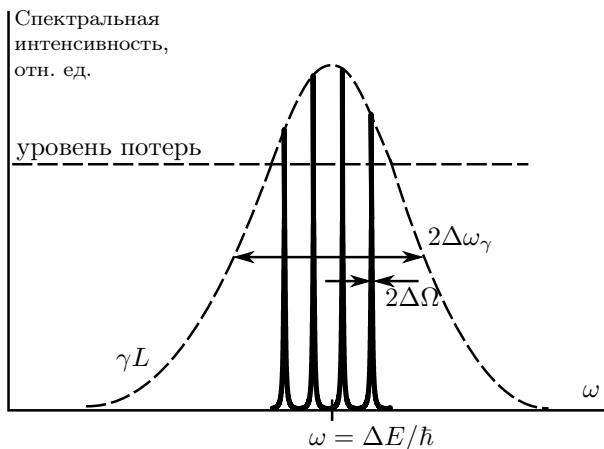


Рис. 5.7. Схематическое изображение генерируемых лазером мод

В реальности амплитуды и фазы генерируемых лазером мод могут испытывать сильные флуктуации ввиду влияния процессов спонтанного излучения и конкуренции мод за использование инверсной заселённости (излучение любой моды сбрасывает часть возбуждённых атомов в основное состояние, уменьшая разность заселённостей ΔN , а значит, и усиление для себя и для других мод согласно формуле (5.3)). Тепловые флуктуации длины L резонатора приводят к смещению положений всех мод (межмодовое расстояние при этом практически не меняется) по спектру и, следовательно, к изменению их количества и средней амплитуды.

2.3. Когерентность лазерного излучения

Как было указано в предыдущем параграфе, ширина спектра $\Delta\Omega$ излучения лазера может быть во много раз меньше ширины линии пропускания резонатора $\Delta\Omega_{\text{рез}}$. Дело в том, что поскольку при вынужденном излучении активной среде рождаются фотоны, тождественные исходным, эффективное время жизни фотона в лазере многократно возрастает (по сравнению с временем его жизни в пустом резонаторе), из чего, ввиду соотношения неопределённостей, следует сужение результирующего спектра излучения. С другой стороны, с точки зрения теории колебаний наличие усиления в резонаторе повышает результирующую добротность системы, что опять-таки означает сужение резонансной линии.

Опишем, как происходит процесс сужения спектра линий излучения во времени. Прежде всего заметим, что усиление в центре контура усиления $\gamma(\omega)$ больше, чем на любой частоте, отличной от центральной. В начальный момент после возбуждения активной среды из имеющейся в среде спонтанного излучения выделяются те фотоны, для которых усиление максимально. Они будут размножаться, опустошая верхний лазерный уровень и не оставляя возможности размножаться другим фотонам. С каждым проходом резонатора фотоны, частоте которых соответствует максимальное усиление, размножаются, а фотоны с меньшим усилием «выбывают из игры», что и приводит к постепенному сужению спектра⁷.

Фундаментальным фактором, препятствующим уменьшению ширины спектра излучения до нуля (и росту времени когерентности лазера до бесконечности) является спонтанное излучение. С каждым обходом резонатора такие характеристики излучения, как спектральный состав, форма огибающей и фаза, слегка изменяются, поскольку часть излучения постоянно покидает резонатор через выходное зеркало и на его место приходит та часть усиленного спонтанного излучения, которая попадает в полосу усиления лазерной среды и совпадает по частотному и пространственному спектру со спектром мод резонатора. При этом фаза «подмешанного» спонтанного излучения имеет случайное значение. Ясно, что ширина линии и степень когерентности будут зависеть от

⁷ Ввиду того, что среди возможных мод одна всегда имеет наибольшее усиление по сравнению с остальными, со временем эта мода должна, казалось бы, оставаться единственной, «перехватив» на себя всю инверсионную заселённость активной среды. Однако этого не происходит и многие лазеры излучают стационарно в многомодовом режиме. Это объясняется тем, что моды различаются не только частотой, но и имеют разные пространственные распределения электромагнитного поля: узлы и пучности стоячих волн соседних мод не совпадают, что и позволяет одновременное существование разных мод.

дели спонтанного излучения в выходном излучении лазера. Вклад спонтанного излучения определяется в основном выходной мощностью лазера (мощность спонтанного излучения определяется концентрацией возбуждённых атомов) и, конечно, шириной линии пропускания используемого резонатора $\Delta\Omega_{\text{рез}}$. Чем выше выходная мощность, тем меньше вклад спонтанного излучения и уже линия. Шавлов и Таунс получили формулу для вычисления ширины линии в зависимости от этих факторов. Приведём её в упрощённом виде:

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega} \sim \frac{(\Delta\Omega_{\text{рез}})^2}{P} \cdot \frac{N_2}{\Delta N},$$

где P — выходная мощность лазера. Расчёты, выполненные по формуле Шавлова—Таунса, дают для типичного гелий-неонового лазера с выходной мощностью 1 мВт относительную ширину линии одной моды $\Delta\Omega/\omega \sim 10^{-15}$, и $\Delta\nu = \Delta\Omega/2\pi \sim 1$ Гц. Это чрезвычайно малая величина: оценки показывают, что для того, чтобы уход частоты лазерного излучения вследствие тепловых нестабильностей длины резонатора не превышал этой ширины, необходимо поддерживать длину резонатора постоянной с точностью 10^{-13} см. Это требует стабилизации температуры $\Delta T \leq 10^{-8}$ К, что обеспечить крайне трудно. Поэтому в обычном лазере ширина линии и связанное с ней время когерентности определяются *техническими* нестабильностями резонатора. Типичная ширина спектра одной моды гелий-неонового лазера составляет $\sim 10^6$ Гц, соответственно время когерентности $\sim 10^{-6}$ с, а длина когерентности несколько сотен метров. Для сравнения: полупроводниковый лазер, например, лазерная указка, без принятия специальных мер по сужению спектра и стабилизации частоты имеет длину когерентности менее одного сантиметра.

Интерференция от разных источников. При использовании специальных методов стабилизации частоты в гелий-неоновых лазерах удалось достичь ширины линии порядка нескольких Гц и ещё недавно казавшейся фантастической относительной стабильности частоты 10^{-14} . Наличие источников света с такими параметрами позволило наблюдать эффекты, считавшиеся ранее невозможными, например, интерференцию между пучками от двух разных лазеров. Длительное время среди физиков бытовало мнение, что интерферировать могут только пучки, полученные от одного источника. Дираку принадлежит ещё более сильное утверждение: «... каждый фотон интерфе-рирует только с самим собой. Интерференция между различными фотонами невозможна». Считалось, что вследствие случайных уходов фазы излучения, происходящих независимо у разных источников света, интерференционная картина от двух источников столь быстро «дёргается», что её невозможно наблюдать. И это было фактически верно в долазерную эпоху, поскольку

не было методов получения излучения достаточной мощности с временем сбоя фазы (фактически временем когерентности) более $10^{-8} \div 10^{-7}$ с и не существовало методов регистрации изображений с временным разрешением лучше 10^{-6} с. Поэтому интерференционная картина смазывалась быстрее, чем её можно было зарегистрировать. Развитие лазерной техники позволило создать источники света с временем когерентности порядка секунды, что позволило провести успешные эксперименты по наблюдению интерференции пучков от разных лазеров.

2.4. Поперечные моды*

Излучение, распространяющееся под небольшим углом к оси резонатора, может испытать достаточное число проходов, чтобы заметно усилиться и присутствовать в выходном излучении. При этом допустимые углы должны удовлетворять определённым соотношениям, вытекающим из свойств резонаторов. Анализ углового распределения лазерного излучения удобнее проводить для случая квадратных зеркал резонатора, считая, что поперечный размер активной среды превышает ширину D зеркал, т. е. лазерный пучок ограничивается зеркалами.

Простейшая теория лазерных резонаторов, предложенная Шавловым и Таунсом, основана на сходстве открытых (без боковых стенок) резонаторов с квадратными зеркалами с закрытыми. В процессе усиления излучения от спонтанных шумов до стационарного уровня «выживают» только моды, имеющие минимальные потери на дифракцию. Для этого интенсивность излучения на краях зеркал должна быть минимальной, в идеале равной нулю. Если какая-либо мода содержит две волны, распространяющиеся под малыми углами $\pm\theta$ к оси резонатора, то при сложении этих волн на зеркале создаётся интерференционная картина с периодом $\lambda/2\theta$. Для обращения интенсивности в ноль на краях зеркала необходимо, чтобы на ширине зеркала D укладывалось целое число периодов, поэтому $\theta = \pm m\lambda/2D$. Такое же условие должно выполняться по второй координате в плоскости зеркала: $\theta = \pm p\lambda/2D$. Здесь m и p — целые числа. Результирующий угол равен

$$\theta = \pm \frac{\lambda}{2D} \sqrt{m^2 + p^2} = \frac{\theta_d}{2} \sqrt{m^2 + p^2}, \quad (5.8)$$

где $\theta_d \approx \lambda/D$ — дифракционная расходимость лазерного пучка с поперечным размером D .

Для классификации лазерных мод применяют обозначение TEM_{mpq} ($\text{TEM} = \text{transverse electromagnetic mode}$), имея в виду, что и электрическое и магнитное поля E и H перпендикулярны направлению распространения волны. Типы колебаний с различающимися значениями

поперечных индексов m или p называются поперечными модами, с различными q — продольными. Фактически значение поперечного индекса даёт число нулей в распределении интенсивности излучения по соответствующей координате на поверхности зеркала, не считая нулей на краях. Значение продольного индекса q равно числу полуволн, укладывающихся на длине резонатора.

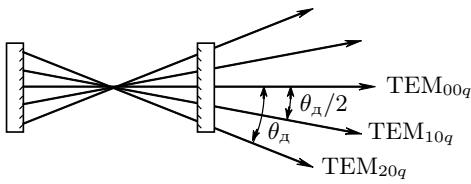


Рис. 5.8. Направления распространения поперечных мод с разными поперечными индексами относительно чисто продольных. Для моды TEM_{mpq} , распространяющейся под углом θ к оси резонатора, составляющая волнового вектора по оси резонатора равна $k_z = q\pi/L$, где L — длина резонатора. Составляющая в плоскости зеркал равна $k_{x,y} = k \sin \theta \approx k_z \theta$. Учитывая, что $m,p \ll q$, $\theta \ll 1$, $\omega = kc$ и используя выражение (5.8) для θ , нетрудно получить частоту поперечной моды с поперечными индексами m, p и продольным q :

$$\omega_{mpq} \simeq \omega_{00q} \left[1 + \frac{(m^2 + p^2)\lambda^2}{8D^2} \right]. \quad (5.9)$$

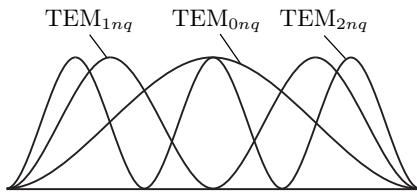


Рис. 5.9. Распределение интенсивности лазерного излучения на зеркале резонатора по одной из поперечных координат для трёх низших поперечных мод

$\frac{\omega_{10q} - \omega_{00q}}{\omega_{00,q+1} - \omega_{00q}} \approx 10^{-2}$. Это означает, что спектр мод с ненулевыми поперечными индексами лишь незначительно сдвинут относительно спектра чисто продольных мод, этот сдвиг составляет единицы процентов от межмодового расстояния и не разрешается большинством спектральных приборов.

На рис. 5.8 и 5.9 схематически показаны направления распространения разных поперечных мод и распределение интенсивности излучения на зеркале по одной из поперечных координат.

Найдём сдвиг частоты поперечных мод относительно чисто продольных мод с межмодовым расстоянием для продольных мод:

$$\frac{\omega_{mpq} - \omega_{00q}}{\omega_{00q+1} - \omega_{00q}} \simeq \frac{\lambda L(m^2 + p^2)}{4D^2}. \quad (5.10)$$

При длине резонатора лазера $L \approx 0,5$ м и длине волны $\lambda \approx 0,6$ мкм для низшей поперечной моды ($m = 1, p = 0$) имеем

Типичный спектр излучения лазера с плоскими зеркалами схематически изображён на рис. 5.10. Для наглядности пропорции искажены: в действительности поперечные моды ближе к соответствующей чисто продольной моде, а ширина спектра отдельных мод меньше, чем изображено на рисунке. Соотношение между амплитудами различных мод носит случайный характер и меняется со временем.

Если резонатор составлен не из плоских, а из сферических воогнутых зеркал, то спектр мод с ненулевыми поперечными индексами сдвинут относительно чисто продольных мод гораздо сильнее. Например, в случае конфокального резонатора (радиус кривизны зеркал равен расстоянию между ними) изменение суммы поперечных индексов на 2 приводит точно к такому же спектральному сдвигу, как и изменение продольного индекса на единицу, в результате имеет место вырождение, т. е. совпадение частот разных мод. В реальных гелий-неоновых лазерах, как правило, используется резонатор, составленный из сферических зеркал, но с меньшей кривизной, чем в конфокальном резонаторе, что приводит к меньшему сдвигу частот при изменении поперечного индекса.

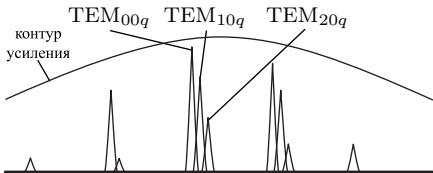


Рис. 5.10. Примерный вид спектра излучения гелий-неонового лазера

2.5. Провал Лэмба и конкуренция мод*

Как было отмечено выше, полная ширина спектра излучения гелий-неонового лазера определяется доплеровским уширением (рис. 5.3). В диапазоне времён порядка времени обхода резонатора это уширение неоднородно. Неоднородным называют уширение, вызванное различным смещением спектров индивидуальных атомов или молекул относительно среднего положения. При этом спектр коллектива атомов шире спектра индивидуальных атомов. Противоположный случай, когда уширен спектр каждого атома относительно естественной ширины линии, но смещения спектров атомов друг относительно друга не происходит, называется однородным уширением, при этом спектр коллектива совпадает со спектром отдельных атомов. Следует отметить, что отнесение к определённому типу уширения зависит от времени наблюдения. Например, в случае гелий-неонового лазера характерное время столкновения между атомами составляет 10^{-6} с, а время обхода резонатора 10^{-8} с. За 10^{-8} с атомы не успевают изменить направление и скорость движения и каждый атом имеет своё положение спектра излучения, смесящее относительно центра полосы, что приводит к неоднородному уширению, как изображено на рис. 5.3. Если же наблюдать за атомами существенно дольше, чем время столкновения между ними, то за время наблюдения каждый атом успеет неод-

нократно изменить направление движения и скорость, спектр каждого атома будет совпадать со спектром коллектива и уширение будет однородным.

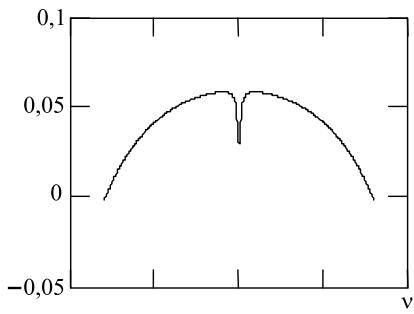


Рис. 5.11. Расчётный спектр коэффициента усиления гелий-неонового лазера при одной продольной моде в центре контура усиления

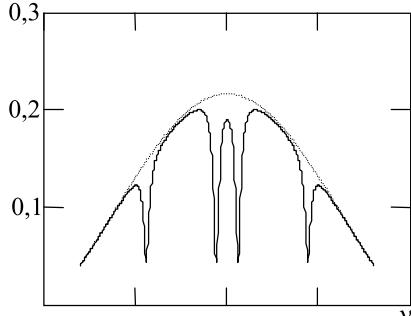


Рис. 5.12. Расчётный спектр коэффициента усиления гелий-неонового лазера при двух продольных модах

Рассмотрим световую волну с частотой, не совпадающей с центром спектра усиления лазерной среды, например, её частота больше центральной частоты. Такая волна при перемещении от одного зеркала к другому взаимодействует только с атомами, летящими ей навстречу с определённой скоростью, сбрасывая их на нижний лазерный уровень и уменьшая усиление на данной частоте. После одного отражения от зеркала эта волна распространяется в противоположном направлении и взаимодействует уже с другими атомами, летящими с той же скоростью также в противоположном направлении, поскольку за время обхода резонатора атомы не успевают изменить направление движения. В результате в спектре усиления «выедается» два провала, расположенные симметрично относительно максимума спектра усиления (провалы Беннетта). Ширина этих провалов определяется шириной спектра генерирующей моды. При этом усиление в других участках спектра, где нет провалов, оказывается больше, что создаёт условия для генерации других мод. Поэтому если не приняты специальные меры, например, не выбран очень короткий резонатор с большим межмодовым расстоянием, в лазере обычно генерируется одновременно несколько продольных мод. Если в лазере генерируется одна мода, расположенная в центре спектра усиления, то два провала сливаются в один. В центре контура усиления образуется так называемый лэмбовский провал, что приводит к уменьшению выходной мощности лазера при точной настройке частоты генерирующей моды на максимум спектра усиления. На рис. 5.11 представлен расчётный спектр коэффициента усиления типичного гелий-неонового лазера при наличии только одной генерирующей продольной моды в центре спектра усиления, а на рис. 5.12 — для двух мод.

Лэмбовский провал используется практически для точной стабилизации

частоты излучения лазеров путём минимизации выходной мощности за счёт точной подстройки длины резонатора. Если в лазере генерируются две продольные моды, частоты которых расположены симметрично относительно максимума спектра усиления, то они попеременно взаимодействуют с одними и теми же атомами и «конкурируют за усиление» друг с другом. В результате возникают неустойчивости этих мод, они «переползают» к частотам с большим усилением и их интенсивности начинают сильно флюктуировать.

3. Распространённые типы лазеров*

Инжекционный полупроводниковый лазер. Это самый распространённый тип лазеров, во всем мире их выпускается порядка 10^9 штук в год. Такие лазеры используются во всех CD, DVD и Blue-Ray приводах, а также в спектроскопии, лазерных дальномерах, нивелирах, лазерных указках, для накачки других лазеров и т.д.

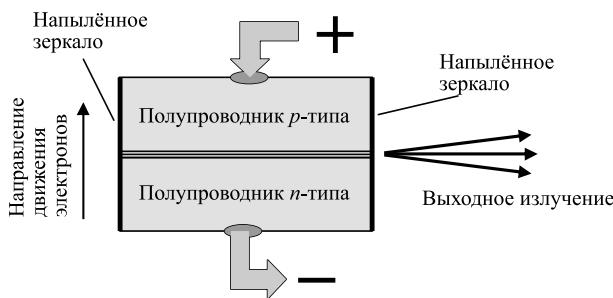


Рис. 5.13. Устройство инжекционного полупроводникового лазера

Схематически устройство инжекционного полупроводникового лазера изображено на рис. 5.13.

В полупроводнике *n*-типа есть некоторое количество электронов в зоне проводимости, которые переносят заряд при протекании электрического тока. Перейти вниз, в валентную зону они не могут, потому что в валентной зоне все состояния заняты электронами. В полупроводнике *p*-типа есть свободные состояния на самом верху валентной зоны, а находящаяся выше зона проводимости практически пуста. В области *p-n*-перехода, т.е. на границе раздела полупроводников, электроны из области *n*-типа впрыскиваются (инжектируются) в область *p*-типа и «сваливаются» из зоны проводимости на свободные уровни валентной зоны с излучением фотонов как за счёт спонтанного, так и за счёт вынужденного излучений. Усиливающая область представляет собой слой микронной толщины. Длина кристалла обычно составляет порядка миллиметра, таким образом, инжекционные полупроводниковые лазеры являются самыми миниатюрными из всех типов лазеров. Устройство современных полупроводниковых лазеров несколько сложнее, в частности,

p-n-переход представляет собой многослойную структуру (гетероструктуру), усиливающая область делается предельно тонкой (заметно меньше длины волны), а чтобы излучение не уходило в стороны за счёт дифракции, формируется канал с повышенным показателем преломления, таким образом, образуется волновод, в котором канализируется излучение. Поскольку размер выходного пятна порядка длины волны, дифракционная расходимость излучения очень велика, обычно десятки градусов, поэтому сразу на выходе излучения из лазера всегда ставится короткофокусная линза или объектив для коллимирования пучка.

К настоящему времени изготавливаются полупроводниковые лазеры, излучающие в области от 0,63 мкм до \sim 10 мкм и в области 0,40–0,52 мкм. Разработаны также лабораторные образцы ультрафиолетовых полупроводниковых лазеров с длиной волны излучения до 0,34 мкм. Красные, фиолетовые (404–404 нм) и синие (450 нм) лазерные указки устроены чрезвычайно просто: они представляют собой полупроводниковый лазер с источником тока на батарейках и короткофокусную линзу, собирающую лазерное излучение в параллельный пучок. На желтую и оранжевую область инжекционные полупроводниковые лазеры пока не созданы, а лазерные указки зеленого цвета с длиной волны 532 нм чаще всего представляют собой неодимовые лазеры с удвоением частоты.

Твердотельные лазеры на ионах неодима Nd³⁺. Неодим в виде соли вносится в какую-либо матрицу: либо в кристалл в процессе его роста, либо в расплавленное стекло в относительной концентрации порядка 10⁻². Схема энергетических уровней ионов неодима изображена на рис. 5.14 (на рис. 5.14 использованы применяемые в спектроскопии обозначения уровней, смысл которых здесь не существенен).

Накачка среды обычно осуществляется импульсными лампами. Под действием накачки ионы Nd³⁺ переходят из основного состояния $^4I_{9/2}$ на несколько сравнительно узких уровней, образованных возбуждёнными состояниями. Из этих уровней энергия возбуждения быстро передаётся в результате безызлучательных процессов на метастабильный уровень $^4F_{3/2}$, время жизни которого составляет 0,2 мс в кристалле иттрий-алюминиевого граната (Y₂Al₅O₁₂ или ИАГ) и 0,1–1 мс в стеклах. Этот уровень является верхним уровнем рабочего лазерного перехода. Наибольшей вероятностью обладает лазерный переход $^4F_{3/2} \rightarrow ^4I_{11/2}$ ($\lambda = 1,05 - 1,08$ мкм в зависимости от матрицы). Такое излучение находится в ближней инфракрасной области и невидимо человеческим глазом. Время жизни на уровне $^4I_{11/2}$, то есть на нижнем лазерном уровне данного перехода, составляет всего 10⁻⁹ с, поэтому данный уровень всегда практически пуст. Это облегчает достижение инверсной населённости и позволяет считать, что разность заселённостей равна $\Delta N = N_2$. Таким образом, генерация лазерного излучения в неодимовом лазере описывается четырёхуровневой схемой (основной уровень, уровень, на который производится накачка, верхний рабочий уровень и нижний рабочий уровень). Созданы твердотельные лазеры и на других элементах: Yb, Cr, Er, Ho, Ce, Ti и

т. д. Но самыми распространёнными являются лазеры на ионах неодима в кристалле иттрий-алюминиевого граната.

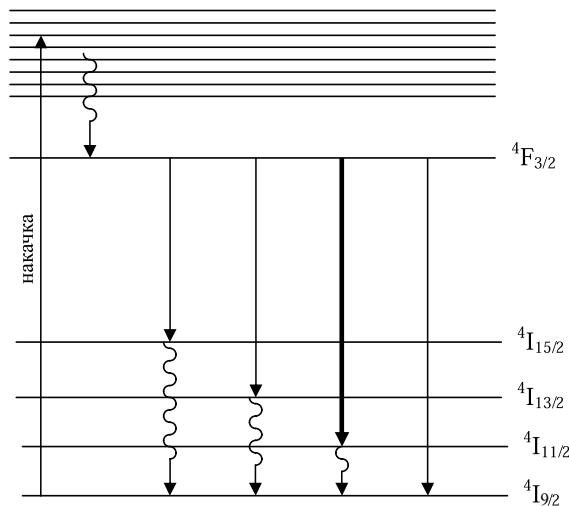


Рис. 5.14. Схема энергетических уровней иона неодима. Волнистыми линиями показаны безызлучательные переходы. Выделен наиболее интенсивный лазерный переход

В последнее время становятся весьма популярными неодимовые и иттербийевые лазеры, накачиваемые не лампами, а полупроводниковыми инжекционными лазерами с длиной волны излучения, попадающей в полосу поглощения активной среды (808 нм для Nd и ~ 980 нм для Yb). Полупроводниковая накачка позволяет более чем на порядок уменьшить габариты лазера по сравнению с ламповой накачкой. Появились даже указки зелёного и голубого света размером с авторучку и менее. Типичное устройство зелёного лазера показано на рис. 5.15.

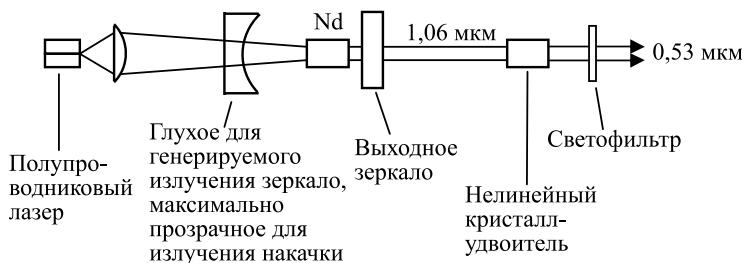


Рис. 5.15. Устройство зелёного лазера на Nd с полупроводниковой накачкой

Излучение такого миниатюрного неодимового лазера удваивается по частоте при прохождении через нелинейный кристалл. В таком кристалле отклик среды, т. е. наведённая полем поляризация P , зависит нелинейно от напряжённости поля световой волны, в результате отклик становится несинусоидальным во времени, а это означает появление дополнительных гармоник в спектре распространяющейся волны. Набор гармоник зависит от симметрии кристаллической решетки, в частности, в кристаллах без центра инверсии появляется вторая гармоника (*удвоение частоты*). Путём подбора направления распространения света в некоторых кристаллах удается обеспечить сложение рождающихся в разных местах кристалла волн второй гармоники синфазно и достичь коэффициента преобразования энергии во вторую гармонику на уровне десятков процентов. Оставшаяся непреобразованная часть инфракрасного излучения поглощается цветным светофильтром. Голубые указки с $\lambda = 473$ нм устроены аналогично, только для удвоения используется другой лазерный переход иона неодима с длиной волны $\sim 0,9$ мкм. Часто кристаллы-удвоитель размещают внутри резонатора неодимового лазера, что позволяет увеличить эффективность удвоения частоты. В последнее время появились зеленые лазеры-указки без неодимового лазера, в них излучение инфракрасного полупроводникового лазера сразу подается на кристалл-удвоитель.

Литература

1. Звелто О. Принципы лазеров. — М.: Лань, 2008.
2. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия. — М.: Сов. Энциклопедия, 1969.

Работа 4.5.1

Гелий-неоновый лазер

Цель работы: Изучение основных принципов работы гелий-неонового лазера, свойств лазерного излучения и измерение усиления лазерной трубки.

В работе используются: объект исследования — активный элемент от гелий-неонового лазера ЛГ-75 с блоком питания, дополнительный Не–Не-лазер для юстировки и измерений, модулятор излучения (объекторатор), фотодиоды, зеркала, поляроид, компьютер со звуковой картой.

Перед проведением работы необходимо познакомиться с устройством и общими принципами работы лазеров в теоретическом введении к разделу.

Существенное отличие гелий-неонового лазера от большинства других — малое усиление активного элемента, обычно интенсивность света увеличивается на 1–3% на один проход. Чтобы измерить такое усиление, необходимо регистрировать интенсивность входного и выходного излучения с точностью доли процента или лучше. Это требует применения прецизионных приборов, которые обычно дороги. В данной работе точные измерения осуществляются с помощью простого и дешевого оборудования.

В лазере ЛГ-75 окошки лазерной трубки приклеены к торцам под углом Брюстера, что позволяет для одной из поляризаций исключить потери на отражение от этих окошек. В лазере генерируется излучение именно с этой поляризацией, для другой поляризации потери превышают усиление и лазерная генерация невозможна. Поэтому излучение лазера на исследуемой трубке линейно-поляризовано. В более современных лазерах зеркала резонатора приклеиваются непосредственно к торцам трубы и излучение таких лазеров неполяризовано.

Гелий-неоновый лазер. Рассмотрим механизм возникновения усиления в рабочей среде гелий-неонового лазера. Лазерная трубка заполняется смесью гелия и неона в соотношении от 5:1 до 10:1 с общим давлением порядка 10^2 Па, при котором довольно легко возбудить постоянный электрический разряд. Рабочим лазерным веществом является неон. Гелий используется для избирательного заселения верхнего рабочего уровня неона. Атомы гелия возбуждаются при столкновениях с разогнанными в электрическом поле разряда электронами. Передача энергии от возбуждённых атомов гелия к атомам неона осуществляется

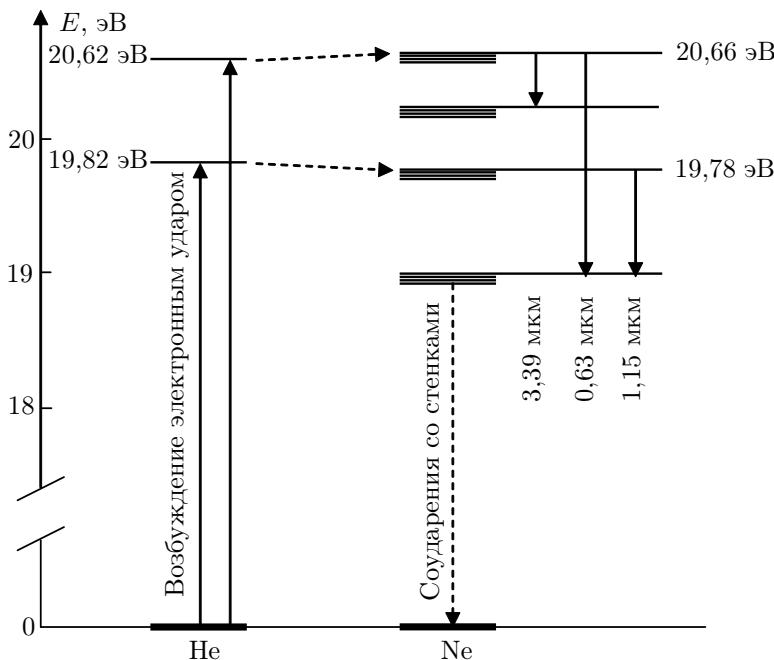


Рис. 1. Энергетическая схема работы гелий-неонового лазера

при столкновениях между ними. Известно, что наиболее эффективно передача энергии от атома к атому происходит в резонансном случае, то есть когда энергии уровней, между которыми происходит переход, близки. Упрощённая схема энергетических уровней атомов гелия и неона изображена на рис. 4. Из него видно, что энергии двух уровней атома гелия действительно близки к двум уровням неона, что приводит к эффективной передаче энергии от гелия к неону. На этом рисунке изображена лишь малая часть энергетических уровней неона, в действительности их гораздо больше, и все они в той или иной степени заселяются в электрическом разряде даже без добавки гелия, что может приводить к созданию инверсной населённости между некоторыми уровнями. И действительно, генерация лазерного излучения атомами неона получена в лабораторных условиях на более чем 200 переходах. Однако во всех промышленных лазерах на неоне для увеличения эффективности накачки используют селективное заселение верхних лазерных уровней

атомами гелия, поэтому такие лазеры называются гелий-неоновыми. На рисунке изображены три основных лазерных перехода с длинами волн 0,63 мкм (красное излучение), а также 1,15 и 3,39 мкм (невидимое инфракрасное). Кроме обычных лазеров с длиной волны 0,63 мкм выпускаются гелий-неоновые лазеры со сменными наборами зеркал, селективно отражающими излучение на одной из этих трёх длин волн, что позволяет выбирать длину волны генерируемого излучения. При этом для других длин волн из-за малого отражения пороговое условие генерации не выполняется.

Время жизни верхнего лазерного уровня для перехода 0,63 мкм составляет 10^{-8} с. Из принципа неопределенности $\Delta\nu \cdot \tau \geq 1$ можно получить оценку ширины линии $\Delta\nu \geq 10^8$ Гц. Реальная ширина спектра генерации обычного гелий-неонового лазера на порядок больше. Основной механизм уширения — эффект Доплера. При температуре 400 К полуширина спектра излучения газообразного неона равна $1,5 \cdot 10^9$ Гц. Полуширина линии лазерного излучения в 2–3 раза меньше этой величины, поскольку генерация происходит только на тех частотах, где усиление не только больше единицы, но и превышает потери.

Следует отметить, что для поддержания инверсной населённости при работе непрерывного лазера необходимо не только заселение верхнего лазерного уровня, но и быстрое опустошение нижнего. В гелий-неоновом лазере это происходит при соударении атомов неона, находящихся на нижнем лазерном уровне, со стенками лазерной трубки, при этом атомы передают энергию стенкам и сбрасываются ещё ниже, в основное состояние. Поэтому в современных лазерах трубы делаются с маленьким внутренним диаметром порядка 1–2 мм при длине 20–60 см. Дальнейшее уменьшение диаметра нецелесообразно из-за возрастания дифракционных потерь. Недостаточно быстрое опустошение нижнего лазерного уровня в гелий-неоновых лазерах ограничивает и предельный коэффициент усиления, достигаемый при некотором оптимальном разрядном токе. При дальнейшем увеличении тока нижний уровень не успевает опустошаться и эффективность генерации падает. Обычно достигается усиление всего $1 \div 3\%$ за один проход, т.е. $G = 1,01 \div 1,03$. При таком малом усиении генерация вынужденного излучения может быть получена, только если окна лазерной трубы либо очень хорошо просветлены, либо расположены под углом Брюстера к оси резонатора, при этом для одной из поляризаций потери на отражение от окошек исчезают. Отражение зеркал резонатора должно быть очень высоким, обычно $r_1 \geq 0,998$, $r_2 \approx 0,99$ (выходное зеркало). Такие отражения недостижимы с металлическими зеркалами (коэффициент отражения свеженапылённого алюминия $\approx 0,90$, серебра $\approx 0,98$). Поэтому используются

специальные зеркала, в которых на стеклянную подложку нанесены (обычно напылением) чередующиеся слои диэлектриков с сильно различающимися показателями преломления, например, SiO_2 с $n = 1,45$ и TiO_2 с $n = 2,5$. Толщины слоёв подобраны таким образом, чтобы все волны, отражённые от границ разделов слоёв, на выходе складывались в фазе, тогда при количестве слоёв $N \geq 10$ удается достичь отражения $r \geq 0,998 \div 0,999$. Сообщалось даже о получении коэффициента отражения более 0,9999 при числе слоёв несколько десятков.

Предупреждение: напылённые зеркала, особенно старых лет выпуска, очень непрочные. Ни в коем случае не прикасайтесь к ним руками и другими предметами. Нежелательно даже дышать на них.

Типичная конструкция гелий-неонового лазера изображена на рис. 2.

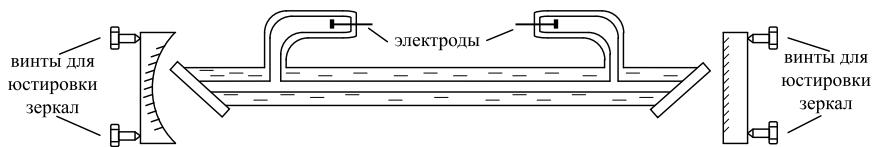


Рис. 2. Устройство гелий-неонового лазера

Обычно используется сферический или полусферический резонатор, предъявляющий более мягкие требования к точности юстировки зеркал и менее чувствительный к их угловым отклонениям по сравнению с плоским резонатором.

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. На одном оптической рельсе расположены: головка промышленного Не-Не-лазера ЛГ-75 с исследуемой газоразрядной трубкой (11), заключённой в кожух (10), рейтер с полупрозрачным зеркалом (4), фотодиоды (5 и 6), а также 3 съёмных рейтера с выходным зеркалом (9), отрицательной линзой для наблюдения модовой структуры излучения исследуемого лазера или поляроидом для исследования поляризации выходного излучения лазера (8) и с белым экраном (7).

Юстировочный лазер (1) с белым экранчиком (2) и модулятор (3) закреплены на втором оптическом рельсе. Модулятор может быть повернут в разные положения: при измерении коэффициента усиления он модулирует пучок, идущий от юстировочного лазера, при измерении поляризации излучения исследуемого лазера он модулирует выходящее из

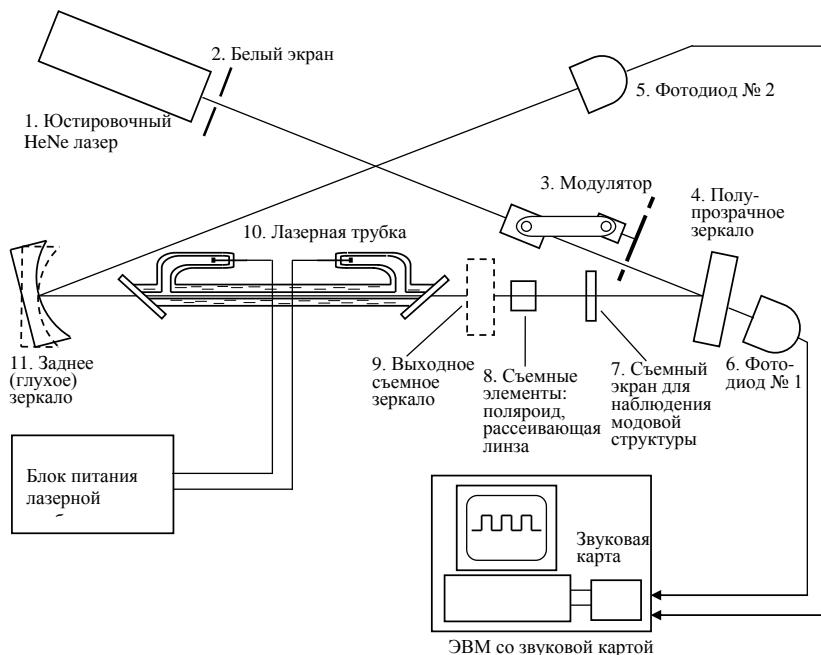


Рис. 3. Схема экспериментальной установки. Штриховыми линиями показано положение зеркал при получении лазерной генерации на исследуемой трубке

него излучение. В остальных случаях модулятор отводится в сторону, чтобы не перекрывать пучки.

Юстировочный лазер предназначен для настройки положения всех элементов установки и является источником зондирующего излучения для измерения усиления активной среды исследуемого лазера.

Зондирующий пучок сначала попадает на полупрозрачное зеркало (4). Часть излучения проходит сквозь зеркало и попадает на фотодиод № 1 (6), с которого снимается сигнал, пропорциональный интенсивности зондирующего пучка. Отражённая часть направляется в исследуемую трубку.

Такая методика позволяет исключить влияние нестабильности интенсивности зондирующего лазера во времени, которое составляет обычно несколько процентов. Сигналы с обоих фотодиодов подаются на звуковую карту компьютера и с помощью программы PhysLab

измеряются с высокой точностью. Однако, хотя сигналы с фотодиодов пропорциональны интенсивностям входного и выходного излучений, коэффициенты пропорциональности неизвестны. Они зависят не только от чувствительности фотодиодов и коэффициентов отражения полупрозрачного и глухого зеркал, но и от возможных потерь при прохождении через трубку, если края пучка «задевают» за стенки трубки вследствие неточной юстировки. Поэтому вычислить усиление трубы по отношению сигналов с фотодиодов невозможно. Для преодоления такой трудности используется следующий приём: вычисляется отношение сигналов с фотодиодов два раза. Один раз — при выключенном питании трубы, когда усиления нет, второй раз — при включённом питании, когда появляется усиление. Затем делится второе значение на первое и получается усиление. Таким образом, вычисляется «отношение отношений». Для увеличения точности и удобства измерений чувствительности фотодиодов подбираются таким образом, чтобы сигналы с них были приблизительно одной величины. Для этого пучок, попадающий на фотодиод № 1, ослабляется с помощью матовых пластинок, помещённых внутри кожуха фотодиода.

Сигналы с фотодиодов можно измерять достаточно точным цифровым амперметром или вольтметром постоянного тока. Однако при этом нужно вычитать из показаний темновой ток фотодиода, который сильно зависит от температуры и поэтому плавает во времени, что усложняет измерения. Самый простой путь устранения влияния темнового тока — промодулировать интенсивность излучения, например, вращающимся обтюратором и перейти к измерениям на переменном токе. При этом также устраняется влияние внешних засветок и так называемых фликер-шумов, амплитуда которых растёт по закону $1/f$, где f — частота.

Для получения генерации вынужденного излучения лазера на исследуемой трубке используется съемное выходное зеркало (9), закреплённое в юстируемой оправе. Наблюдение модовой структуры излучения исследуемого лазера производится с помощью короткофокусной отрицательной линзы (8), позволяющей на коротком расстоянии увеличить размер выходного пучка, и съемного белого экрана (7). Изучение поляризации исследуемого лазера производится с помощью вращающегося поляроида, устанавливаемого вместо отрицательной линзы, модулятора и фотодиода № 2.

Проведение измерений. Измерение усиления трубы гелий-неонового лазера в данной работе производится с помощью компьютера со звуковой картой и программы *PhysLab*¹. Эта программа

¹ Разработчик *PhysLab* — С.П. Палто, Институт кристаллографии РАН.

превращает компьютер в измерительный центр, включающий в себя такие виртуальные приборы, как цифровой осциллограф с возможностью измерения пиковых значений и эффективных напряжений сигналов, анализатор спектра, синхронный детектор, позволяющий измерять сигналы, амплитуда которых в десятки и сотни раз меньше шумов, генератор и некоторые другие приборы. Основой всех этих виртуальных приборов является звуковая карта, в которой имеются аналогово-цифровые преобразователи (АЦП). Они могут периодически измерять амплитуду любых электрических сигналов по двум (иногда более) каналам и переводить амплитуду в цифровой код. Частота измерений может выбираться из ряда 11, 22, 44 и иногда 48 кГц (в некоторых современных звуковых картах до 192 кГц). Измеренные значения могут накапливаться в памяти компьютера и затем с ними можно производить различные преобразования. Например, используя процедуру «быстрого преобразования Фурье» (FFT), можно вычислить спектр измеряемых сигналов, не производя собственно измерений спектра. В звуковой карте имеются также ЦАПы — цифро-аналоговые преобразователи, которые позволяют использовать звуковую карту как генератор сигналов различной формы. Если звуковая карта имеет разрядность 16 бит, теоретический динамический диапазон составляет $2^{16} \approx 6,6 \cdot 10^4$ (96 дБ) и можно ожидать относительной точности измерений порядка $2 \cdot 10^{-5}$. Реальные звуковые карты имеют значительные собственные шумы, которые «съедают» несколько младших разрядов. Типичный динамический диапазон дешевых звуковых карт по входу 70–80 дБ, у самых качественных 16-битных карт до 85–90 дБ². Современные звуковые карты обеспечивают динамический диапазон до ~ 120 дБ. В нашей установке может использоваться простая дискретная двухканальная звуковая карта либо встроенная в материнскую плату звуковая карта, которая, тем не менее, позволяет обеспечить относительную точность измерений $\sim 10^{-3}$.

В данной работе из всех виртуальных приборов используется только цифровой осциллограф. Для его запуска нужно дважды щёлкнуть мышкой по иконке *PhysLab* на экране монитора. Сначала появится сообщение: **Calibration file is absent one default factor is used.** Щёлкните по кнопке **Ok**, поскольку для данной работы нужны лишь относительные измерения, и абсолютная калибровка чувствительности не обязательна. Раскроется цифровой осциллограф (он по умолчанию запускается первым) и меню с перечнем других приборов.

² Напомним, что децибел (дБ) — это логарифмическая единица измерения отношения величин двух сигналов. По определению, для двух сигналов амплитуды A и B отношение их мощности в дБ равно $20 \lg(A/B)$ или $10 \lg(A^2/B^2)$.

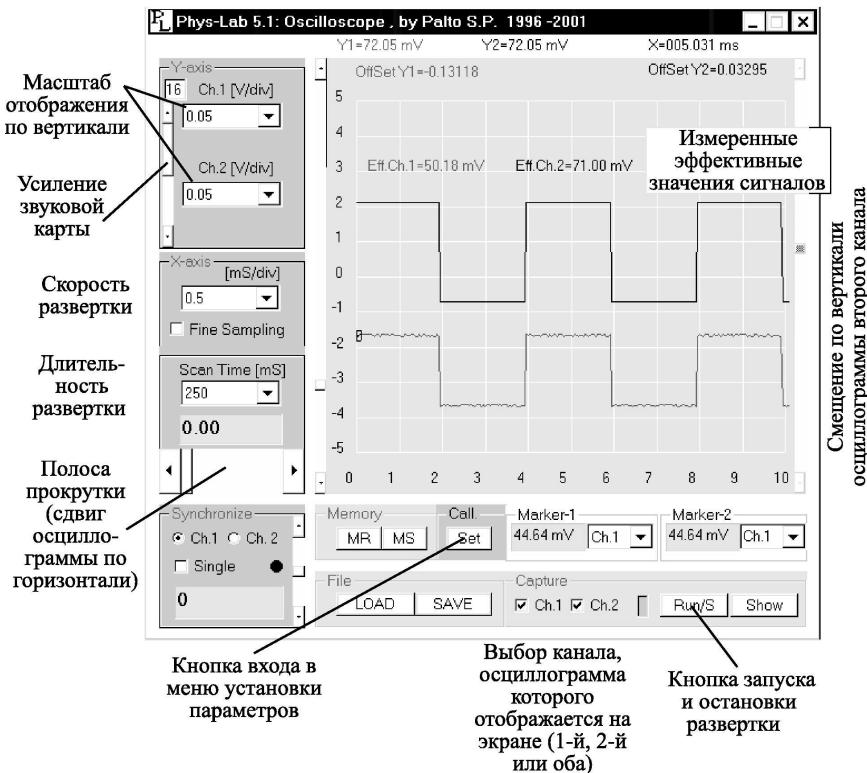


Рис. 4

Слева от экрана осциллографа расположены окошки, в которых можно выбрать скорость развёртки, длительность развёртки (она может быть много больше отрезка времени, умещающегося на экране, тогда осциллограмму можно передвигать по экрану с помощью бегунка слева внизу от экрана), масштаб отображения по вертикали (чувствительность) и регулировка усиления звуковой карты. В самом низу левой колонки расположены окошки выбора способа и уровня синхронизации запуска: по сигналу на первом или втором канале, по внутренним часам. В данной работе практически неважно, какой способ синхронизации выбран, немного удобнее синхронизоваться по сигналу на каком-либо канале.

Под экраном слева расположена кнопка **Set** (установка), по которой обязательно надо щёлкнуть, чтобы зайти в меню установок и про-контролировать их. Должен быть выбран линейный вход, частоту дискретизации звуковой карты лучше выбрать побольше (44 кГц), чтобы увеличить число измеряемых точек на длине выбранной развёртки и за счёт этого увеличить точность. Под экраном справа имеется кнопка **Run/S** (запуск/остановка). Щелчок по ней запускает развёртку осциллографа, повторный щелчок – останавливает, при этом на экране остаётся последняя оставшаяся в памяти осцилограмма. Слева от этой кнопки находится индикатор. Когда развёртка запущена, индикатор периодически мигает или светится красным цветом, показывая, что про-исходят измерения.

Важно: все изменения временных параметров развёртки (скорость и длительность развёртки, частоту дискретизации) можно производить только при выключенном запуске, иначе программа может зависнуть, и её придётся перезапускать.

Величину сигналов с фотодиодов в PhysLab можно измерять разными способами: например, определять размах осцилограммы с помощью маркеров (при перемещении маркера по экрану осциллографа всё время отображаются значения абсциссы и ординаты); можно выбрать режим вывода на экран пиковых значений сигнала относительно нулевой линии или эффективного значения напряжения в осцилограмме первого и второго каналов. В данной работе предлагается использовать последний способ, как наименее подверженный влиянию шумов. Для его реализации нужно щёлкнуть правой кнопкой мыши в любом ме-сте экрана осциллографа, появится меню, из которого следует выбрать пункт *View*, затем *EffCh1*. Теперь эффективное значение напряжения в первом канале будет отображаться на экране осциллографа для каждой осцилограммы. Затем нужно повторить процедуру для второго канала. Можно таким же образом включить вывод на экран остальных величин: пикового и среднего значений в каждом канале, тогда будут одновременно выводиться 6 величин, из которых нам нужны только эффективные значения напряжения. Они вычисляются компьютером по формуле

$$U_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum U_i^2},$$

где i — номер отсчёта, n — полное число отсчётов. Может оказаться, что на экране высвечиваются ненулевые значения $U_{\text{эфф}}$, даже когда сигнал с фотодиода заведомо равен нулю, например, пучок света полно-стью перекрыт. Это вызвано сдвигом нуля в звуковых картах, особенно

старых. Легко показать, что связанная с этим сдвигом относительная ошибка квадратична по величине сдвига, она равна $k(U_{\text{сдв}}/U_{\text{эфф}})^2$, где k — коэффициент, зависящий от формы импульсов. Для последовательности прямоугольных импульсов со скважностью 2 (меандр) $k = 0,5$, при скважности 5 этот коэффициент увеличивается до 1,5. Поэтому, если отношение измеряемой величины при наличии и отсутствии сигнала превышает 30, наличие сдвига для сигналов с небольшой скважностью даёт относительную ошибку порядка 10^{-3} или менее, и ею можно пре-небречь.

ЗАДАНИЕ

1. Включите питание юстировочного лазера и убедитесь в наличии лазерного излучения. С помощью листочка белой бумаги ознакомьтесь с ходом лазерного пучка по установке.
2. Проведите юстировку оптической схемы установки, целью которой является хорошее прохождение пучка юстировочного лазера сквозь трубку. При этом выходное зеркало исследуемого лазера должно быть снято (удобнее его снимать вместе с рейтером), а модулятор отведен в сторону, чтобы не перегораживать излучение юстировочного лазера. Глухое зеркало также лучше снять вместе с рейтером, чтобы наблюдать прошедшее излучение на стене. Лазерный пучок должен проходить строго по центру трубы. Для этого сначала нужно добиться, чтобы пучок юстировочного лазера входил в трубку точно по центру (он хорошо виден на поверхности брюстеровского окошка трубы), затем обеспечить соосность пучка и лазерной трубы. Это делается качанием полупрозрачного зеркала №4 и, если этого недостаточно, качанием юстировочного лазера. Возможно, эту операцию придется повторить несколько раз. Если пучок какой-либо стороной касается стенки трубы, на экране на стене появляется кольцевой ореол. При правильной настройке пятно на экране должно быть равномерно освещенным, с ровными краями без ореолов и при малой расстройке хода пучка вверх-вниз и влево-вправо при качании полупрозрачного зеркала №4 практически не менять свою форму.
3. Измерьте усиление трубы.

Для этого нужно поставить глухое зеркало и развернуть его так, чтобы прошедший сквозь трубку пучок попадал на центр фотодиода №2. Фотодиод №1 за полупрозрачным зеркалом следует выставить таким образом, чтобы прошедший через зеркало пучок также попадал на центр.

Включите мотор модулятора и расположите диск модулятора таким образом, чтобы он прерывал пучок юстировочного лазера до попадания

на полуупрозрачное зеркало. Выберите подходящие параметры осциллографа в PhysLab и проанаблюдайте сигналы с обоих фотодиодов. Они должны иметь одинаковую временную форму, не превышать 100 мВ и различаться по амплитуде не более чем в два раза. Если это не выполняется, убедитесь в том, что выходное зеркало снято и проверьте юстировку. Добейтесь нормальных сигналов амплитудой 60–90 мВ на экране осциллографа. Проведите по несколько раз измерения с включенным и выключенным питанием трубы для трёх значений тока через трубку.

Важно: Если амплитуды сигналов не попадают в нужный интервал, например, хотя бы один превышает 100 мВ, отрегулируйте усиление звуковой карты с помощью вертикального ползунка, расположенного на левом краю экрана программы PhysLab. При сигнале, большем, чем 100 мВ, программа выдает только три значащие цифры величины сигнала, что не обеспечивает нужной точности.

Вычислите усиление при использованных значениях тока через трубку. Полезно вычислить усиление прямо на месте хотя бы для одного значения тока, чтобы убедиться в правильности измерений.

4. Добейтесь лазерной генерации на исследуемой трубке. Для этого разверните глухое зеркало так, чтобы пучок юстировочного лазера возвращался строго назад сквозь трубку. Поймайте отраженный пучок на экранчике №2 на юстировочном лазере. Добейтесь того, чтобы этот пучок попадал точно в центр экранчика. Затем поставьте выходное зеркало и также направьте отраженный от него пучок строго назад на центр экранчика. Должна появиться лазерная генерация. Если этого не произошло, повторите настройку более тщательно. Имейте в виду, что лазерные зеркала должны быть настроены параллельно друг другу с точностью $\approx 10^{-4}$ рад.
5. Исследуйте состояние поляризации излучения лазера на исследуемой трубке.

Закрепите в рейтере (8) поляроид. Поверните модулятор таким образом, чтобы пучок исследуемого лазера хорошо проходил сквозь отверстия модулятора и попадал на фотодиод № 2. Юстировочный лазер на время проведения этих измерений лучше выключить или перекрыть его излучение. Измерьте зависимость интенсивности излучения исследуемого лазера от угла поворота поляроида. Постройте зависимость относительной интенсивности от угла поворота поляроида, сравните с теоретической зависимостью для линейной поляризации.

6. Проведите наблюдение модовой структуры лазерного излучения. Поставьте на рельс вплотную к выходному зеркалу рейтер с короткофокусной линзой, а в рейтер (7) вставьте белый экран. Наблюдая за пят-

ном излучения лазера, с помощью малого поворота выходного зеркала попытайтесь получить одномодовый режим, трёхмодовый и многомодовый режимы.

Контрольные вопросы

- Почему не удаётся получить большего усиления в трубке Не–Не-лазера путём увеличения разрядного тока?
- Зачем окошки в лазерной трубке приклеены под углом и почему наружные поверхности окошек смотрят вниз, а не вверх или вбок?
- Зачем в лазерной трубке к рабочему веществу – неону добавляется гелий?
- Зачем осуществляется модуляция пучка измеряемого излучения и можно ли обойтись без модуляции в данной установке?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Устройство, принцип работы и схема включения фотодиода

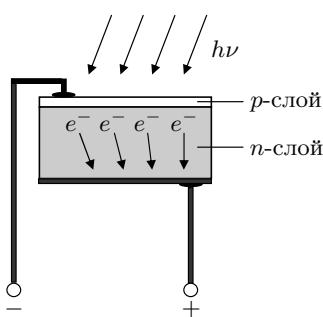


Рис. 5. Устройство фотодиода

Фотодиод представляет собой полупроводниковый диод на основе $p-n$ -перехода между слоями полупроводников p - и n -типа. В отличие от обычных диодов (например, выпрямительных) p -слой делается очень тонким (десятки микрон). Сквозь этот слой и происходит освещение фотодиода светом, интенсивность которого нужно измерить. Поглощаясь в этом тонком слое, фотоны вызывают переходы электронов из валентной зоны наверх в зону проводимости, в результате чего появляются подвижные носители заряда. (Электроны, находящиеся в полностью заполненной энергетической зоне, не могут переносить заряд и обеспечивать прохождение тока, поскольку

не могут изменить своего состояния вследствие отсутствия свободных состояний). К $p-n$ -переходу приложено постоянное обратное напряжение, так что без света ток через фотодиод практически не идёт. Если же под действием света появляются свободные носители заряда, электрическое поле «расстаскивает» эти заряды к электродам и появляется фототок. При этом один поглощённый фотон перебрасывает наверх один электрон, поэтому энергетическую чувствительность фотодиода легко рассчитать. Например, на длине волны 620 нм энергия фотона равна $3,20 \cdot 10^{-19}$ Дж, в то время как заряд электрона равен $1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл, поэтому чувствительность равна $0,5$ Кл/Дж или $0,5$ А/Вт. Чувствительность реальных фотодиодов ниже, потому что часть падающего излучения отражается от поверхности фотодиода и не участвует в создании носителей заряда. Замечательным свойством фотодиодов является их высокая линейность в широком диапазоне интенсивностей света. Известны примеры построения измерителей интенсивности света на фотодиодах с

диапазоном линейности 11 порядков. Для сравнения: фотоэлектронные умножители в зависимости от конструкции имеют диапазон линейности всего 2–3 порядка, хотя и обладают большей чувствительностью. Поэтому с помощью фотодиодов легко проводить довольно точные измерения в широком диапазоне интенсивностей.

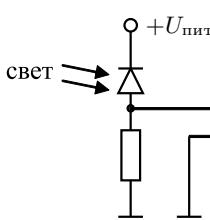


Рис. 6

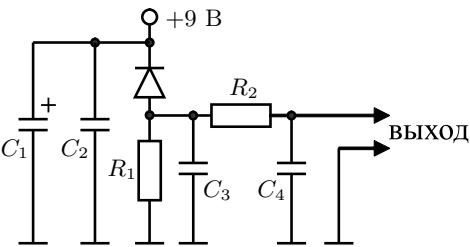


Рис. 7

Стандартная схема включения фотодиода показана на рис. 6.

В нашей установке для уменьшения влияния шумов и наводок в схему добавлены буферные конденсаторы в цепи питания, накопительный конденсатор C_3 и интегрирующая цепочка r_2C_4 на выходе (рис. 7).

C_1 — электролитический конденсатор большой ёмкости $C \approx 100 \text{ мкФ}$,

C_2 — быстрый керамический $0,1 \text{ мкФ}$,

C_3, C_4 — керамические по 100 пФ ,

$R_1 = 8 \text{ кОм}$,

$R_2 = 5,6 \text{ кОм}$.

Использован фотодиод типа ФД24К с большой фоточувствительной площадкой диаметром $\sim 1 \text{ см}$.

Работа 4.5.2

Интерференция лазерного излучения

Цель работы: исследование видности интерференционной картины излучения гелий-неонового лазера и определение длины когерентности излучения.

В работе используются: Не–Не–лазер, интерферометр Майкельсона с подвижным зеркалом, фотодиод с усилителем, осциллограф, поляризатор, линейка.

Перед выполнением эксперимента следует ознакомиться с принципами работы лазеров в теоретическом введении к разделу.

Напомним коротко особенности конструкции и свойств излучения гелий–неонового лазера. Лазер состоит из двух зеркал, составляющих лазерный резонатор, и расположенной между ними газообразной усиливающей среды, состоящей из смеси гелия и неона. Типичное расстояние между зеркалами — $0,2 \div 1$ м. Смесь гелия и неона может находиться в отдельной трубке, закрытой с торцов стеклянными окошками, приклёпанными под углом Брюстера с целью устранения потерь на отражение для одной из поляризаций. Лазер такой конструкции излучает свет с линейной поляризацией. Зеркала резонатора должны быть с высокой точностью настроены параллельно друг другу. В современных моделях лазеров, как правило, зеркала приклеиваются непосредственно на торцы трубы, одновременно играя роль окошек и образуя резонатор. Этим достигается жёсткость резонатора и отпадает необходимость периодической подстройки зеркал. Такой лазер излучает неполяризованный свет (точнее, свет с хаотической поляризацией).

В лазере излучение распространяется по резонатору «туда и обратно». При этом максимальным усилием обладают волны, для которых набег фазы при полном обходе резонатора кратен 2π . Это приводит к условию на разрешённые частоты и длины волн:

$$\frac{2\pi}{\lambda}2L = 2\pi m, \quad L = m\lambda, \quad \nu_m = \frac{mc}{2L}, \quad \Delta\nu_m = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2L}, \quad (1)$$

где L — длина резонатора, m — целое число. Поэтому лазер генерирует отдельные типы колебаний, называемые модами, которые удовлетворяют условию (1). Отметим, что условие (1) в точности совпадает с условием максимума пропускания интерферометра Фабри–Пеरо, что не является удивительным, поскольку лазерный резонатор действительно представляет собой интерферометр Фабри–Пеरо.

Спектральная ширина отдельной моды определяется добротностью резонатора лазера и мощностью излучения (подробнее см. п. 2.3 введения к разделу). В гелий-неоновом лазере из-за малого усиления активной среды используются зеркала с высоким отражением, добротность резонатора большая и спектральная ширина моды может быть очень узкой, вплоть до единиц Гц. Реально из-за тепловых нестабильностей длины резонатора типичная ширина моды составляет 10^5 Гц, что всё равно много меньше расстояния между модами (10^8 Гц). Количество генерируемых мод определяется шириной спектра усиления активной среды. Эта ширина складывается из естественной ширины линии излучения атомов неона и доплеровского уширения, вызванного тепловым движением атомов. Время когерентности и ширина спектра связаны соотношением неопределенности $\tau \cdot \Delta\nu \sim 1$. Для лазерного перехода атома неона с длиной волны 632,8 нм время затухания $\tau \approx 10^{-8}$ с, длина цуга в пространстве $L_{\text{цуга}} \approx 3$ м, ширина спектра $\Delta\nu \approx 10^8$ Гц. Доплеровское уширение на порядок больше, поэтому общая ширина спектра определяется именно доплеровским уширением. При температуре 400 К ширина по полувысоте спектра излучения газообразного неона равна $1,5 \cdot 10^9$ Гц. На такой ширине укладывается несколько мод при типичном расстоянии между модами $200 \div 300$ МГц, поэтому гелий-неоновый лазер с длиной резонатора 0,5–0,7 м обычно одновременно излучает 3–7 мод. Амплитуды и фазы этих мод флюктуируют во времени, но в среднем амплитуда мод вблизи максимума кривой усиления больше, чем на краях.

Вследствие тепловых нестабильностей длина резонатора все время меняется, в результате чего моды «переползают» с одного края контура усиления на другой, там исчезают, а на другом краю рождаются новые. Поэтому количество одновременно генерируемых мод и их положение нестабильно. При типичном коэффициенте теплового расширения твёрдых тел 10^{-5} достаточно изменения температуры на $0,05^\circ$, чтобы длина резонатора изменилась на $\lambda/2$ и моды переместились на величину межмодового расстояния. Таким образом, температурная нестабильность резонатора приводит к медленным изменениям амплитуд колебаний в лазерных модах и числа самих мод. После примерно часа работы лазера характерное время перестройки резонатора составляет около 1 мин.

Время когерентности гелий-неонового лазера. С одной стороны, спектральная ширина каждой моды порядка 10^5 Гц, поэтому из соотношения неопределённостей можно ожидать времени когерентности 10^{-5} с, соответственно длины когерентности $L_{\text{ког}} \approx tc = 3 \cdot 10^5$ см = 3 км. С другой стороны, общая ширина спектра

порядка 10^9 Гц и ожидаемое время когерентности 10^{-9} с, а длина когерентности 30 см. Рассмотрим этот вопрос более детально.

Напомним, что временем когерентности называется такое время, на которое можно задержать один пучок относительно другого, чтобы ещё сохранялась способность к интерференции между ними при условии, что эти пучки получены из одного исходного пучка разделением на две части, например, полупрозрачным зеркалом. Длина когерентности — это время когерентности, умноженное на скорость света, то есть это геометрическая разность хода пучков, при которой ещё сохраняется способность к интерференции. Излучение многомодового лазера — это не монохроматическая волна, это набор волн с разными частотами, удовлетворяющими условию (1). Между этими волнами происходят биения с частотой, равной разнице частот между модами, максимальная частота биений — это разность частот между крайними модами, то есть фактически полная ширина спектра излучения лазера. Характерное время, за которое существенно меняются амплитуда и другие параметры волны, — это период биений, равный обратной ширине спектра. Поэтому интерференция должна смазываться при задержке одного пучка относительно другого на время $t \approx 1/\Delta\nu_{\text{полн}} \approx 10^{-9}$ с, или на длину ≈ 30 см.

С другой стороны, поскольку излучение в лазере последовательно распространяется по резонатору от зеркала к зеркалу, его характеристики (амплитуда и соотношение фаз между модами) должны в точности повторяться с периодом, равным времени полного обхода резонатора. Поэтому мы должны ожидать, что при геометрических задержках, кратных удвоенной длине резонатора, интерференция пучков должна восстанавливаться. Этот вывод, основанный на общих соображениях, можно получить более строго. Если один пучок волны с частотой ν_m задержать относительно другого на расстояние ℓ , то между ними возникнет разность фаз $\Delta\varphi = kl = (2\pi\nu_m/c)\ell$ или с учётом (1) $\Delta\varphi = \pi m\ell/L$, где k — волновое число, а m — номер моды. То есть для разных мод с разными m разность фаз будет разная, поэтому максимумы интерференционной картины будут располагаться в разных местах и картина смазывается. Если же задержка кратна удвоенной длине резонатора, то для всех мод разность фаз будет хотя и разной, но кратной 2π .

Видность интерференционной картины. При сложении двух когерентных световых волн возникает интерференционная картина (см. раздел II). Если в плоскости наблюдения сходятся под малым углом α две плоские волны с длиной волны λ_0 , то наблюдается интерференционная картина в виде последовательности тёмных и светлых полос с

расстоянием между полосами (2.25):

$$\Delta x = \frac{\lambda_0}{\alpha}. \quad (2)$$

Для оценки чёткости интерференционной картины в окрестности некоторой точки используют параметр видности (2.22):

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (3)$$

где I_{\max} и I_{\min} — максимальная и минимальная интенсивности света интерференционной картины вблизи выбранной точки. Параметр \mathcal{V} меняется в пределах от 0 (полное исчезновение интерференционной картины) до 1 (наиболее чёткая картина). Человеческий глаз может уверенно различать чередование светлых и тёмных интерференционных полос, если $\mathcal{V} > 0,1$.

Видность зависит от спектрального состава света, отношения амплитуд интерферирующих волн, разности хода между ними, поляризации интерферирующих пучков. Рассмотрим эту зависимость. Найдём выражение для интенсивности света в интерференционной картине. При этом можно не учитывать так называемые межмодовые биения, приводящие к быстрым (с частотой $\Delta\nu \approx 200$ МГц) пульсациям интенсивности света в точке наблюдения. При визуальном наблюдении интерференционной картины или при использовании достаточно инерционного фотоприёмника эти пульсации усредняются.

Найдём видность интерференционной картины для одной моды лазерного излучения с частотой ν_m . Пусть в плоскости наблюдения интерферируют под небольшим углом две волны с амплитудами A_m и B_m . Если в точке наблюдения разность фаз между волнами равна $k_m \ell$, где $k_m = 2\pi/\lambda_m = 2\pi\nu_m/c$ — волновое число, ℓ — разность хода, то интенсивность света в этой точке

$$I_m = A_m^2 + B_m^2 + 2A_m B_m \cos(k_m \ell). \quad (4)$$

При перемещении поперёк интерференционной картины разность фаз изменяется, и мы переходим от одного максимума к другому. При этом интенсивность света в максимуме интерференционной картины $I_{\max} = (A_m + B_m)^2$, а в минимуме $I_{\min} = (A_m - B_m)^2$. Поэтому видность

$$\mathcal{V}_1 = \frac{2\sqrt{\delta}}{1 + \delta}, \quad (5)$$

где введён параметр $\delta = B_m^2/A_m^2$. Видность $\mathcal{V}_1 = 1$ только тогда, когда интерферирующие волны имеют равную интенсивность. В установке

разделение пучка на два производится специальным делительным кубиком, при этом $\delta \approx 1$.

Найдём видность в случае, когда лазер генерирует одновременно несколько мод, но амплитуды разделяемых пучков одинаковы, т. е. $\delta = 1$ для всех мод. Для этого следует сложить мгновенные амплитуды всех интерферирующих волн, возвести в квадрат и усреднить по времени в течение 10^{-5} с (время отклика используемого в данной работе фотодиода), так как более быстрые изменения интенсивности фотодиод не воспринимает. Пусть генерируется одновременно n мод с индексом m от m_0 до $m_0 + n - 1$ и один из пучков проходит путь на величину ℓ больший, чем второй пучок, до места, где наблюдается интерференция. Интенсивность находится по формуле

$$I(\ell) = \overline{\left(\sum_{m=m_0}^{m_0+n-1} A_m \cos(\omega_m t + \varphi_m + k_m \ell) + A_m \cos(\omega_m t + \varphi_m) \right)^2}, \quad (6)$$

где A_m — амплитуда m -й моды, $\omega_m = 2\pi\nu_m = \pi c m / L$ — круговая частота, а φ_m — фаза этой моды, черта означает усреднение по времени.

После возведения в квадрат этой суммы выражение будет содержать члены двух сортов: квадраты каждого члена суммы вида

$$A_m \cos^2(\omega_m t + \dots)$$

и перекрёстные члены вида

$$2A_m A_i \cos(\omega_m t + \dots) \cos(\omega_i t + \dots).$$

Среднее значение $\overline{\cos^2(\omega_m t + \varphi)}$ равно $1/2$, перекрёстные члены, содержащие частоты разных мод с $m \neq i$, осцилируют с частотой межмодовых биений порядка сотен МГц и поэтому при усреднении по времени занулятся. Останутся только квадраты и перекрёстные члены с одинаковой частотой. Получим

$$I = \sum_{m=m_0}^{m_0+n-1} A_m^2 + \overline{A_m^2 \cos(\omega_m t + \varphi_m + k_m \ell) \cos(\omega_m t + \varphi_m)}. \quad (7)$$

После преобразования произведения косинусов в сумму и усреднения по времени один из членов суммы также занулятся и окончательно получим

$$I = \sum_{m_0}^{m_0+n-1} A_m^2 (1 + \cos k_m \ell) = \sum_{m_0}^{m_0+n-1} A_m^2 \left(1 + \cos \frac{\pi m}{L} \ell \right). \quad (8)$$

Из этого выражения видно, что разные моды не интерферируют друг с другом, а суммарный результат интерференции равен сумме интерференционных картин разных мод. Кроме того, фазы мод не влияют на картину интерференции, а соотношения амплитуд разных мод, напротив, имеют большое значение. Дальнейший анализ затрудняется тем, что амплитуды мод флуктуируют. Легко рассмотреть простейший случай, когда амплитуды всех мод одинаковы, $A_m = A = \text{const}$. Тогда, заменив косинусы комплексными экспонентами, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, и проведя суммирование получающейся геометрической прогрессии $\sum e^{imx} = e^{im_0 x} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}$, находим

$$I = A^2 \left(n + \frac{\sin \frac{\pi \ell}{2L} n}{\sin \frac{\pi \ell}{2L}} \cos \left[\frac{\pi \ell}{L} \left(m_0 + \frac{n-1}{2} \right) \right] \right). \quad (9)$$

В этой формуле последний множитель периодически меняет свой знак при небольших изменениях ℓ , обеспечивая появление максимумов и минимумов при смещении поперёк интерференционной картины, а дробь с синусами определяет амплитуду изменения интенсивности. Поэтому видность получается равной

$$\mathcal{V}_2 = \left| \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{\pi \ell}{2L} n}{\sin \frac{\pi \ell}{2L}} \right|. \quad (10)$$

Мы ввели обозначение \mathcal{V}_2 для видности, обусловленной немонохроматичностью, в отличие от рассмотренной ранее \mathcal{V}_1 , обусловленной разницей амплитуд интерферирующих пучков. Из формулы (10) видно, что при разности хода $\ell = 2L \cdot j$, где j — целое число, видность $\mathcal{V}_2 = 1$, а число минимумов при изменении ℓ от 0 до $2L$ равно $n - 1$, где n — число мод. На рис. 1 изображена зависимость видности от задержки ℓ для 3 мод (кривая а). По числу минимумов в принципе можно было бы определить число генерируемых лазером мод, но только если амплитуды мод равны, что в действительности не выполняется. В общем случае зависимость \mathcal{V}_2 от ℓ будет похожей на кривую (а) на рис. 1, но промежуточные максимумы и минимумы могут размыться или даже совсем исчезнуть. Например, для случая трёх мод, когда квадрат амплитуды центральной моды в два раза больше, чем у крайних мод, получается кривая (б) на рис. 1, у которой вместо двух минимумов остался один. Поэтому число мод лучше оценивать по ширине главного максимума в окрестности нулевой задержки. На рис. 1 приведено ещё несколько расчётных кривых для разного числа мод, интенсивность (квадрат амплитуды) которых плавно спадает от центра линии усиления к краям.

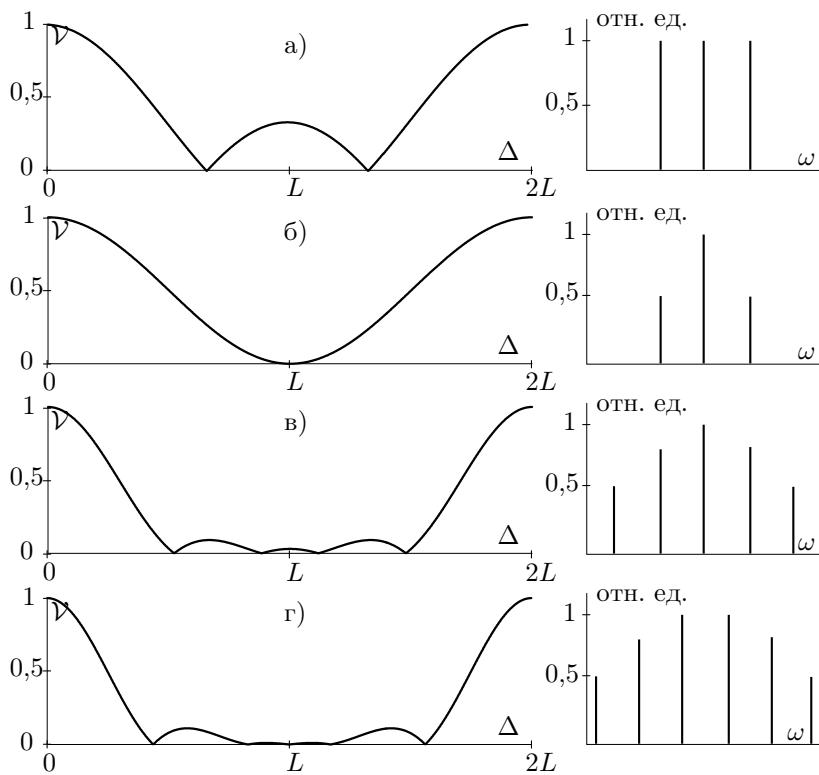


Рис. 1. Зависимость видности от задержки для разного количества генерируемых мод: а) и б) 3 моды, в) 5 мод, г) 6 мод.
Справа приведены соотношения интенсивностей мод

При анализе видности мы предполагали, что световые волны поляризованы одинаково. Если же поляризация в волнах различна, то интерферируют компоненты только с одинаковой поляризацией, присутствие в одном из пучков излучения с поляризацией, перпендикулярной поляризации другого пучка, только даёт фон, уменьшающий видность. В частности, если обе волны линейно поляризованы, их амплитуды не флуктуируют, а угол между плоскостями их поляризаций равен β , то в формуле (8) и в последующих выражениях для видности появится сомножитель $V_3 = \cos \beta$. При равных амплитудах интерферирующих волн этот сомножитель имеет смысл видности, обусловленной разной поляризацией волн. Если световые волны поляризованы во взаимно

перпендикулярных плоскостях ($\beta = \pi/2$), то видность \mathcal{V}_3 обращается в ноль.

Несколько сложнее случай, когда источник света генерирует излучение с линейной поляризацией, но направление поляризации хаотически меняется в пределах от 0 до π . Если такое излучение разделить на два пучка и на пути каждого поставить по поляроиду с углом между направлениями разрешённой поляризации этих поляроидов β , то опять получим две волны с углом между плоскостями их поляризаций β , но амплитуды этих волн будут флукутировать. Можно показать, что в этом случае $\mathcal{V}_3 = \cos^2 \beta$.

Если имеют место все три фактора уменьшения видности: неравенство амплитуд, несовпадение поляризаций и разная оптическая задержка между интерферирующими пучками, то можно доказать, что результирующая видность является произведением

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cdot \mathcal{V}_2 \cdot \mathcal{V}_3. \quad (11)$$

Мы разобрали главные причины уменьшения видности, но есть и другие. Например, лазерные пучки, проходя через большое количество оптических элементов, могут портиться из-за дефектов этих элементов и дифракции на осевших пылинках, в результате чего интенсивность света становится неоднородной по поперечному сечению. При наложении таких пучков друг на друга происходит интерференция излучения разной амплитуды, даже при изначально равной интенсивности пучков. Поэтому в эксперименте практически невозможно достичь видности, строго равной 1.

Определение ширины спектра лазерного излучения и числа генерируемых мод. Геометрическая задержка ℓ , при которой кривая видности заметно спадает, фактически является длиной когерентности. Разделив её на скорость света, получим время когерентности $\tau_{\text{ког}} = \ell/c$. Из принципа неопределенности $\tau_{\text{ког}} \Delta\nu_{\text{полн}} \sim 1$, где $\Delta\nu_{\text{полн}}$ — полная ширина спектра излучения лазера (с учётом всех имеющихся мод). Это соотношение выполняется только по порядку величины, точное значение произведения $\tau_{\text{ког}} \Delta\nu$ зависит от формы спектра, а также от того уровня, по которому измеряется ширина. В нашем случае для определения ширины спектра рациональнее исходить из расчётных кривых, представленных на рис. 1. Их анализ показывает, что полная ширина спектра связана с геометрической задержкой $\ell_{1/2}$, при которой видность падает вдвое, приблизительным соотношением

$$\Delta\nu_{\text{полн}} \approx 0,6 \frac{c}{\ell_{1/2}}, \quad (12)$$

а число мод равно

$$n \approx 1 + 1,2 \frac{L}{\ell_{1/2}}. \quad (13)$$

Экспериментальная установка. Для получения интерференционной картины используется интерферометр Майкельсона, смонтированный на вертикально стоящей массивной металлической плате. Схема установки приведена на рис. 2.

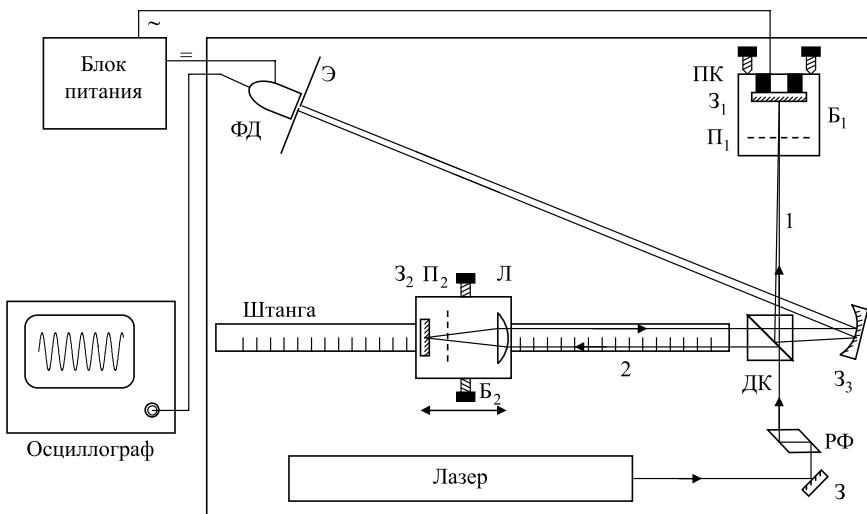


Рис. 2. Схема установки. З, З₁, З₂, З₃ — зеркала. П₁ и П₂ — поляроиды. Б₁ и Б₂ — блоки № 1 и 2. ДК — делительный кубик, РФ — ромб Френеля.

ФД — фотодиод, Э — экран, ПК — пьезокерамика, Л — линза

Источником света служит гелий-неоновый лазер (средняя длина волны $\lambda_0 = 632,8$ нм). Пучок лазерного излучения отражается от зеркала З и проходит призму полного внутреннего отражения РФ (ромб Френеля), которая превращает линейную поляризацию излучения в круговую. Если в установке используется лазер, излучающий неполяризованный свет, то ромб Френеля не нужен, но он и не мешает выполнению работы. Далее лазерное излучение делится диагональной плоскостью делительного кубика ДК на два пучка.

Пучок 1 проходит поляроид П₁, отражается под небольшим углом от зеркала З₁, снова проходит поляроид П₁ и, частично отражаясь от диагональной плоскости делительного кубика, выходит из интерферометра, попадает на зеркало З₃ и далее на фотодиод ФД. Зеркало З₁

наклеено на пьезокерамику ПК, которая может осуществлять малые колебания зеркала вдоль направления распространения падающего пучка. Поляроид и зеркало с пьезокерамикой собраны в единый блок Б₁, который крепится к вертикально стоящей плите. В блоке Б₁ имеются юстировочные винты, которые позволяют регулировать угол наклона зеркала З₁. В установке предусмотрена возможность вращения поляроида П₁. Угол поворота отсчитывается по шкале, нанесённой на оправу поляроида.

Пучок 2 проходит линзу Л, поляроид П₂, отражается от зеркала З₂, снова проходит поляроид П₂, линзу Л и делительный кубик, выходит из интерферометра, попадает на зеркало З₃ и далее на фотодиод ФД. Таким образом, от зеркала З₃ под небольшим углом друг к другу идут на фотодиод два пучка, прошедшие разные плечи интерферометра. Между ними происходит интерференция и образуются интерференционные полосы. Линза Л, поляроид П₂ и зеркало З₂ собраны в единый блок Б₂. Зеркало З₂ установлено в фокальной плоскости линзы Л. Это сделано для того, чтобы падающий и выходящий из блока Б₂ пучки всегда были параллельны друг другу. Блок Б₂ может перемещаться вдоль пучка 2 по штанге, жёстко связанной с плитой интерферометра. Длина штанги 90 см. В установке предусмотрена возможность небольшого поперечного перемещения блока Б₂, что позволяет регулировать расстояние между падающим и выходящим из блока пучками. При измерениях блок Б₂ крепится к штанге при помощи двух винтов. Вдоль штанги нанесены деления через один сантиметр. При перемещении блока Б₂ вдоль штанги на величину x_1 геометрическая разность хода между пучками 1 и 2 изменяется на величину $\ell = 2x_1$.

Сферическое зеркало З₃ с небольшим фокусным расстоянием увеличивает картину интерференционных полос и позволяет наблюдать её на экране Э, расположенном в плоскости входного окна фотодиода.

Свет попадает на фотодиод ФД через узкую щель в центре экрана. Щель ориентируется параллельно интерференционным полосам. Ширина щели меньше расстояния между полосами. Сигнал фотодиода усиливается и подаётся на вход осциллографа. Для питания усилителя сигнала фотодиода и управления пьезокерамикой используется блок питания БП.

На пьезокерамику подаётся напряжение с частотой 50 Гц. При этом её длина изменяется с частотой 100 Гц. Величина удлинения зависит от приложенного напряжения и регулируется ручкой «Качание» на блоке питания. Обычно удлинение составляет несколько длин волн света. На эту величину перемещается вдоль пучка 1 зеркало З₁. Интерференционная картина смещается на ширину полосы (одно колебание на экране

осциллографа), если зеркало Z_1 смещается на $\lambda_0/2 \sim 0,3$ мкм. При измерениях через входную щель фотодиода последовательно проходит несколько полос интерференционной картины, а на экране осциллографа наблюдаются колебания с изменяющимся периодом.

Настройка интерферометра. Пучок 1, падающий на блок B_1 , должен идти строго вертикально и проходить сквозь делительный кубик ДК. Расстояние от вертикальной плиты до центра пучка проверяют специальным шаблоном и при необходимости изменяют перемещением поворотного зеркала З (выполняется лаборантом).

Пучок 2, идущий к блоку B_2 , должен идти параллельно вертикальной плите и попадать на центр линзы Л. Перекрывают пучок 1 листом бумаги. Расположив блок B_2 почти вплотную к делительному кубику, поворотным зеркалом подводят световое пятно к центру линзы (выполняется лаборантом). Переместив подвижный блок на дальний край штанги, совмещают пятно с центром линзы вращением кубика вокруг вертикальной оси и горизонтальной оси, перпендикулярной плите.

Перемещая блок B_2 , следует убедиться, что выходящий из него пучок проходит делительный кубик, а размер сечения пятна не увеличивается. Наблюдать пучок удобно на листе бумаги, размещённом между делительным кубиком и зеркалом Z_3 . Допустимое смещение пучка для дальнего и ближнего положений блока на штанге $\approx 2\div 3$ мм.

Установив блок B_2 в положение, соответствующее нулевой разности хода и поворачивая его вокруг штанги, разводят световые пятна падающего и отражённого пучков на линзе Л на расстояние менее 2 мм. От этого расстояния зависит ширина интерференционных полос.

Сферическим зеркалом Z_3 направляют пучок от блока B_2 на центр экрана, расположенного на входе фотодиода. Экран должен быть перпендикулярен направлению падающего пучка. Открыв пучок 1 и используя юстировочные винты на блоке B_1 , подводят к центру экрана пучок 1. Совместив оба пятна, вращением поляроида Π_1 добиваются наибольшей чёткости интерференционной картины. Сняв экран, устанавливают входную щель фотоприёмника параллельно интерференционным полосам и возвращают экран на место.

Измерение видности. Типичная осциллограмма сигнала фотодиода приведена на рис. 3. По осциллограмме можно найти следующие величины: фоновую засветку (линия 0 — перекрыты оба пучка 1 и 2); интенсивность света каждого из пучков (линии 1 или 2 — перекрыт пучок 2 или 1); максимума и минимума интенсивности интерференционной картины (открыты оба пучка). При этом параметр δ , необходимый для

расчёта \mathcal{V}_1 в формуле (5), определяется отношением

$$\delta = \frac{h_1}{h_2}. \quad (14)$$

Видность интерференционной картины рассчитывается по формуле

$$\mathcal{V} = \frac{h_4 - h_3}{h_4 + h_3}. \quad (15)$$

Измерив величины h_1 , h_2 , h_3 и h_4 , можно рассчитать \mathcal{V} и \mathcal{V}_1 , а затем определить видность при данной разности хода ℓ для угла между плоскостями поляризации пучков $\beta = 0$ ($\mathcal{V}_3 = 1$):

$$\mathcal{V}_2(\ell) = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}_1} \quad (16)$$

или при $\ell = 0$, ($\mathcal{V}_2 = 1$) для известного угла β :

$$\mathcal{V}_3 = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}_1}. \quad (17)$$

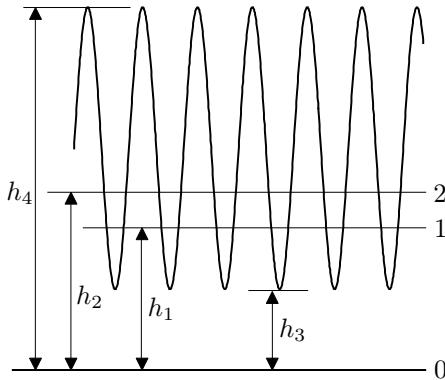


Рис. 3. Осциллограмма сигналов с фотодиода

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать: а) зависимость видности интерференционной картины от угла β между плоскостями поляризации интерферирующих волн при нулевой разности хода; б) зависимость видности интерференционной картины от разности хода интерферирующих пучков для угла $\beta = 0$. По результатам измерений следует оценить спектральные характеристики лазерного излучения: ширину спектра генерации и число генерируемых мод.

Внимание! Прямое попадание лазерного луча на сетчатку глаза крайне опасно для зрения!

I. Настройка системы

1. Включите лазер.
2. Убедитесь, что пучок лазера после поворотного зеркала З идёт вертикально.
3. Проверьте параллельность пучка 2 плите интерферометра, сравнив расстояния от центра пучка до плиты при двух положениях блока Б₂ — сначала вблизи, а затем вдали от кубика. Установите блок Б₂ в положение, соответствующее нулевой разности хода, и настройте блок Б₁ так, чтобы оба отражённых пучка совместились на сферическом зеркале З₃.
4. Настройте сферическое зеркало так, чтобы отражённый от него пучок 2 попал на центр экрана, расположенного на выходе фотодиода.
5. Получите на экране интерференционную картину, совместив оба световых пучка. Установите щель фотодиода параллельно интерференционным полосам.
6. Включите осциллограф и блок питания фотодиода и пьезокерамики. Получите на экране осциллографа устойчивую картину колебаний.

II. Изучение влияния поляризации

7. Настройте поляроид П₁ в блоке Б₁ на максимальную видность (чёткость) интерференционной картины на экране фотодиода.
8. Поворотом поляроида П₁ установите минимальную чёткость интерференционной картины на экране ($\beta \approx 90^\circ$). Введите дополнительный поляроид в пучок, идущий на экран, и объясните происходящие изменения.

III. Измерение видности

9. Исследуйте зависимость видности интерференционной картины от угла β поворота поляроида П₁ при нулевой разности хода ($V_2 = 1$). Для этого

измеряйте величины h_1, h_2, h_3 и h_4 на экране осциллографа. Измерения рекомендуется начинать с угла $\beta \approx 90^\circ$.

10. Рассчитайте коэффициент \mathcal{V}_3 , используя формулы (5), (14), (15) и (17). Постройте график \mathcal{V}_3 и сравните его с теоретическими зависимостями $\mathcal{V}_3 = \cos \beta$ и $\mathcal{V}_3 = \cos^2 \beta$. Что можно сказать на основании этого сравнения о характере поляризации излучения используемого в установке лазера?
11. Исследуйте зависимость видности от разности хода между пучками. Для этого установите поляроид Π_1 в положение, в котором интерференционная картина видна наиболее чётко ($\beta = 0^\circ, \mathcal{V}_3 = 1$). Передвигая по штанге блок B_2 , найдите положение, где видность максимальна (нулевая задержка) и подстройте ещё раз угол поворота поляроида. Снимите зависимость величин h_1, h_2, h_3 и h_4 от координаты x блока B_2 , начиная с минимального расстояния до максимально возможного. В области максимумов видности измерения следует проводить через 1–2 см, в промежутке между максимумами — через 5 см. При перемещении блока B_2 можно подстраивать интерференционную картину, уменьшив предварительно амплитуду качания пьезокерамики до минимума. Это полезно сделать дважды: при среднем и дальнем положении подвижного блока на штанге.

В промежуточной области могут наблюдаться медленные колебания видности с характерным временем колебаний ≈ 1 мин. Эти колебания могут быть связаны с тепловым расширением резонатора, о котором мы говорили ранее. Если временные колебания видности заметны, следует проводить измерения в тот момент, когда размах колебаний ($h_4 - h_3$) минимален (при этом число мод в доплеровском контуре максимально).

12. Рассчитайте коэффициент \mathcal{V}_2 , используя формулы (5), (14) и (16). Постройте график зависимости видности $\mathcal{V}_2(x)$ от координаты блока B_2 . Определив по графику расстояние между максимумами, вычислите расстояние L между зеркалами оптического резонатора лазера и межмодовое расстояние $\Delta\nu_m$ по формуле (1).

Определите задержку $\ell_{1/2}$ на половине высоты главного максимума и рассчитайте по формуле (12) диапазон частот ΔF , в котором происходит генерация продольных мод. Оцените число генерируемых лазером продольных мод по формуле (13).

Контрольные вопросы

1. Объясните принцип действия ромба Френеля.
2. Чему равна видность интерференционной картины интерферирующих волн одинаковой интенсивности, если одна волна имеет плоскую поляризацию, а другая круговую?

3. Как изменяется кривая $\mathcal{V}_2(\ell)$ при уменьшении и при увеличении расстояния между зеркалами оптического резонатора лазера?
4. Из каких соображений следует выбирать ширину входной щели фотоприёмного устройства?
5. Как выглядит зависимость $\mathcal{V}(\ell)$ для одной моды; для двух мод?

Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§22, 158, 227, 228.
2. Калитеевский Н.И. Волновая оптика. — М.: Высшая школа, 1978. §§5.8, 7.3.
3. Кингспен А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингспена. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 3, гл. 7.

Работа 4.5.3

Сканирующий интерферометр

Цель работы: знакомство с устройством и работой газового лазера непрерывного действия, со спектральными характеристиками лазерного излучения, а также с устройством и принципом действия сканирующего интерферометра Фабри–Перо.

В работе используются: Не–Не-лазер с блоком питания; сканирующий интерферометр Фабри–Перо; поляроид; пластиинка $\lambda/4$; линза; фотодиод; электронный осциллограф.

Перед выполнением эксперимента необходимо ознакомиться с принципом работы лазеров в теоретическом введении к данному разделу и с теорией интерферометра Фабри–Перо (см. раздел IV).

В Не–Не-лазерах используются резонаторы, фактически представляющие собой интерферометр Фабри–Перо. Излучение распространяется вдоль оси интерферометра. При этом генерируются моды (типы колебаний), для которых на длине резонатора укладывается целое число полуволн:

$$2L = m\lambda \quad (m \text{ — целое число}). \quad (1)$$

Из формулы (1) легко получить, что разность частот соседних мод (межмодовое расстояние) равна

$$\nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2L}. \quad (2)$$

Для интерферометра с базой $L = 0,6$ м межмодовое расстояние равно 250 МГц. В то же время спектральная линия рабочего перехода неона имеет ширину порядка 1500 МГц, поэтому возможна одновременная генерация нескольких мод. Рис. 1 иллюстрирует увеличение числа мод генерации лазера с ростом усиления активной среды.

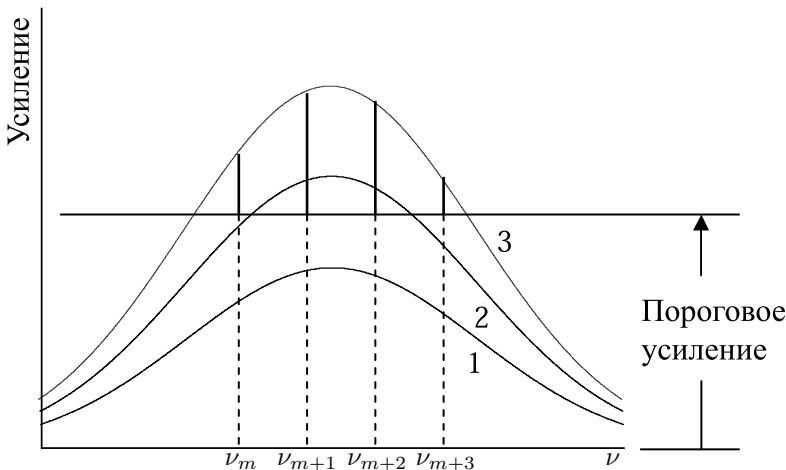


Рис. 1. Увеличение числа генерирующих мод при увеличении усиления

При небольшом усилии (кривая 1) генерации нет. В случае 2 генерация происходит только на 2 частотах ν_{m+1} и ν_{m+2} , расположенных вблизи центра спектральной линии. Если усиление определяется кривой 3, генерация возникает на четырёх частотах от ν_m до ν_{m+3} . Говорят, что в этом случае лазер одновременно работает на четырёх модах.

Для гелий-неонового лазера с достаточно длинной трубкой на переходе 632,8 нм многомодовая генерация является обычным режимом работы.

Сканирующий интерферометр. Для исследования межмодового состава излучения Не–Не-лазера в работе используется сканирующий интерферометр, представляющий собой высокодобротный интерферометр Фабри–Перо с периодически изменяемой базой. Его устройство схематически показано на рис. 2.

На жёстком массивном основании расположены две юстировочные головки Γ_1 и Γ_2 , на которых укреплены зеркала Z_1 и Z_2 . Зеркало Z_1 установлено непосредственно на головке Γ_1 , зеркало Z_2 связано с головкой Γ_2 через пьезокерамический элемент П. Юстировочные головки снабжены винтами, не показанными на рис. 2, которые позволяют в

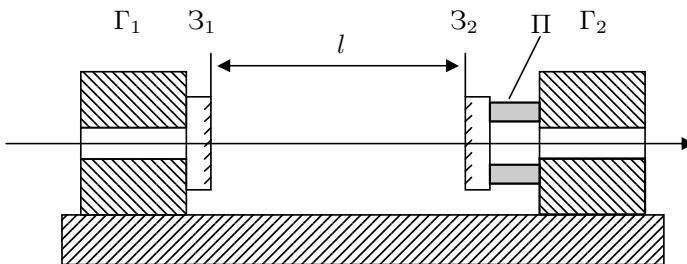


Рис. 2. Устройство сканирующего интерферометра

небольших пределах поворачивать зеркала относительно вертикальной и горизонтальной осей. С помощью головок Γ_1 и Γ_2 зеркала выставляются на параллельность.

Пьезокерамический элемент Π позволяет периодически изменять базу интерферометра ($l \sim 10$ см) на величину порядка длины световой волны. Элемент имеет форму полого цилиндра. Его внутренняя и наружная поверхности металлизированы и образуют цилиндрический конденсатор. Необходимое изменение длины цилиндра возникает при подаче напряжения в несколько сотен вольт.

Если вдоль оси интерферометра распространяется световое излучение с длиной волны λ , то при выполнении условия

$$2l = m\lambda \quad (m \text{ — целое число}), \quad (3)$$

аналогичного условию (1) для лазера, возникает резонанс. Внешнее излучение с длиной волны, удовлетворяющей условию (3), полностью проходит через интерферометр. Если на интерферометр падает излучение с различными длинами волн, то одновременно может возникнуть несколько резонансов. Собственные моды интерферометра отличаются по частоте на величину

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L}.$$

Величина $\Delta\nu$ называется дисперсионной областью спектрального прибора. В единицах λ дисперсионная область сканирующего интерферометра равна

$$\Delta\lambda_{\text{си}} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{2l}. \quad (4)$$

В нашей работе интерферометр Фабри—Перо используется как спектральный прибор высокой разрешающей силы. Разрешающая способность R спектрального прибора определяется отношением

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \quad (5)$$

где $\delta\lambda$ — минимальная разность длин волн, разрешаемая прибором вблизи длины волны λ . В случае интерферометра Фабри—Перо две линии считаются разрешимыми, если расстояние между максимумами их контуров равно или превышает ширину контура по уровню 0,5. Разрешающая способность интерферометра Фабри—Перо зависит от длины интерферометра l и коэффициента отражения зеркал r :

$$R = \frac{2\pi l}{\lambda(1-r)} \quad (6)$$

(см. введение к разделу IV). В лазерной технике принято выражать разрешение интерферометра в единицах частоты:

$$\delta\nu = f \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{c(1-r)}{2\pi l}. \quad (7)$$

Как видно из (7), величина $(1-r)/\pi$ показывает, во сколько раз разрешаемая интерферометром разность частот меньше его дисперсионной области. Сканирующий интерферометр, применяемый в настоящей работе, имеет зеркала с коэффициентом отражения $r \approx 98,5\%$. Поэтому с его помощью можно разрешить две узкие спектральные линии, отличающиеся по частоте на величину порядка $0,005\Delta\nu$, т.е. (при $l = 10$ см) приблизительно на 7,5 МГц. Напомним, что межмодовое расстояние лазера при $L = 0,6$ м равно $\Delta\nu = 250$ МГц. Таким образом, наш сканирующий интерферометр вполне подходит для исследования модового состава лазерного излучения.

Рис. 3 даёт представление о соотношении между спектром генерации лазера и спектральной характеристикой сканирующего интерферометра (т.е. его спектром пропускания). Изменение расстояния между зеркалами сканирующего интерферометра приводит к сдвигу нижней «гребёнки» по оси частот. При этом интерферометр последовательно настраивается на разные моды лазера.

Если одно из зеркал сканирующего интерферометра периодически перемещать вдоль оси, мощность прошедшего через интерферометр излучения периодически изменяется (рис. 4).

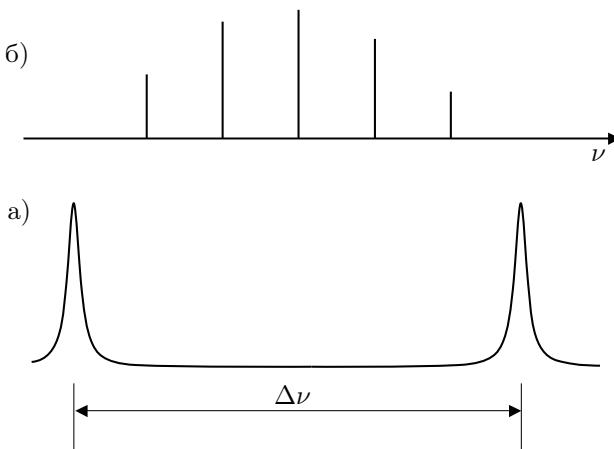


Рис. 3. Спектр генерации лазера (а) и спектр пропускания сканирующего интерферометра (б)

Динамика спектра генерации гелий-неонового лазера. На ширине контура усиления гелий неонового лазера обычно укладывается порядка десятка продольных мод. Поскольку генерация вынужденного излучения происходит обычно только на тех частотах, где усиление пре-вышает потери, реально генерируется от 1 до 5–8 мод в зависимости от длины резонатора. Излучение в разных модах возникает из усиленного спонтанного шума, поэтому амплитуда моды — случайная величина, которая медленно меняется случайным образом вследствие непрерывного «подмешивания» спонтанного излучения. Но амплитуды разных мод зависят друг от друга, поскольку излучение любой моды сбрасывает вниз возбуждённые атомы, уменьшая усиление для себя и для других мод. На этот процесс накладываются неизбежные флуктуации длины резонатора, связанные с изменением температуры и с механическими нестабильностями. При плавном изменении длины резонатора моды «ползут» по спектру в пределах контура усиления. Дойдя до края контура, мода исчезает, а на другой стороне контура усиления может родиться другая мода. Межмодовое расстояние при этом практически не меняется. Если частоты каких-либо двух мод оказались симметричны относительно центра контура усиления, то, как было отмечено в п. 2.5 введения к разделу, возникает неустойчивость и эти моды либо быстро сдвигаются по спектру, либо одна подавляет другую.

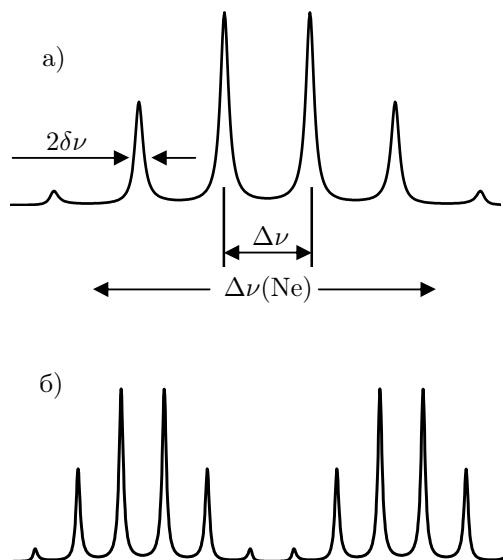


Рис. 4. Характерные осциллограммы: а) при небольшой амплитуде колебаний зеркала ($\leq \lambda/2$), б) при амплитуде колебаний, превышающей $\lambda/2$

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 5.

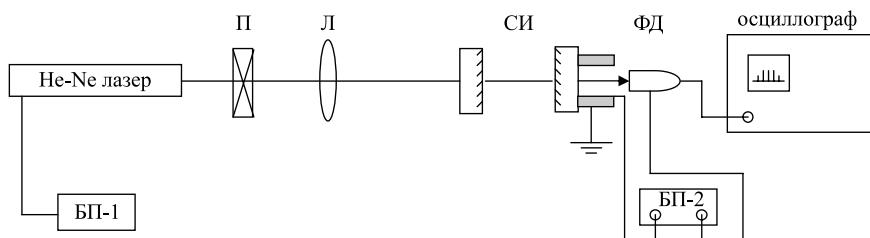


Рис. 5. Схема установки для исследования спектрального состава излучения лазера

Излучение Не–Не-лазера проходит через поляризационную развязку Р и линзу Л и поступает на вход сканирующего интерферометра (СИ). Поляризационная развязка предотвращает попадание в лазер излучения, отразившегося от элементов оптического тракта. Это излучение может существенно повлиять на работу лазера и даже привести к сры-

ву генерации. Развязка состоит из поляроида и пластинки $\lambda/4$, главные направления которой установлены под углом 45° по отношению к разрешённому направлению поляроида. После развязки П свет приобретает циркулярную поляризацию (например, по правому кругу). При отражении от передней поверхности линзы, от зеркала сканирующего интерферометра и т.п. свет распространяется в обратном направлении в виде левополяризованной волны. Такая волна, пройдя через пластинку $\lambda/4$, вновь приобретает линейную поляризацию. Однако направление колебаний в этой волне оказывается перпендикулярным направлению разрешённых колебаний поляроида, поэтому до лазера отражённая волна не доходит.

Линза Л служит для уменьшения расходимости пучка, поступающего на вход сканирующего интерферометра. Линза снабжена поперечными и продольными салазками для юстировки прибора на максимум сигнала.

Излучение, прошедшее сквозь сканирующий интерферометр, поступает на фотодиод ФД. Напряжение с фотодиода через усилитель подаётся на вертикальный вход электронного осциллографа ЭО.

Лазер питается от блока питания БП-1, фотодиод и усилитель — от БП-2. Напряжение на пьезоэлемент сканирующего интерферометра подаётся с блока питания БП-2 и регулируется ручкой 1.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать доплеровский контур спектральной линии излучения лазера: определить межмодовое расстояние и приборную ширину отдельной моды излучения лазера; оценить газокинетическую температуру в разряде; рассчитать дисперсионную область, разрешающую способность и коэффициент отражения зеркал сканирующего интерферометра.

Внимание! Попадание прямого лазерного луча на сетчатку глаза крайне опасно для зрения!

1. Включите в сеть осциллограф и блоки питания фотодиода и лазера.
2. Поставьте линзу посередине между лазером и сканирующим интерферометром. Временно выведите линзу из луча с помощью поперечных салазок.
3. Совместите прямой и отражённый пучки, осторожно вращая винты 1 и 2 на первом (по ходу луча) зеркале интерферометра: два пятна на пластинке $\lambda/4$ должны совпадать. Затем винтами 1 и 2 второго зеркала совместите пятна на первом зеркале.

4. Настройте поляризационную развязку. Для этого сначала вращением поляроида добейтесь максимальной яркости луча. Можно наблюдать за пятном на пластинке $\lambda/4$ или на листе бумаги.

Вращая пластинку $\lambda/4$, погасите отражённый луч: рассеянный свет на оправе лазерного окна не меняет яркости, если перекрывать луч между интерферометром и пластинкой $\lambda/4$. При этом яркие пятнышки (отражение от любой стеклянной поверхности) могут появляться и пропадать.

5. Слегка перемещая фотодиод вверх-вниз и в сторону, получите на экране осциллограмму типа показанной на рис. 4а. Добейтесь максимального сигнала.
6. Для уменьшения расходимости пучка (усилению сигнала) введите линзу в пучок. Чуть смешая линзу, добейтесь стабильности и симметрии картины. Это важнее получения максимума сигнала, т.к. при максимальном сигнале в лазер всё-таки идёт обратный луч, и лазер работает нестабильно.

Снова подстройте второе зеркало винтами 1 и 2, чтобы добиться совмещения пятен на первом зеркале. Убедитесь, что луч попадает на фотодиод, и добейтесь максимального сигнала на осциллографе.

7. Изменяя напряжение на пьезокристалле (амплитуду смещения зеркала СИ), проследите, как изменяется количество доплеровских контуров за один проход зеркала интерферометра. Подберите напряжение, при котором на экране укладывается 1–2 контура.
8. Рассчитайте межмодовое расстояние резонатора в единицах ν и λ , используя формулу (2). Длина резонатора лазера L указана на установке; $\lambda = 6328 \text{ \AA}$.

Сосчитав число промежутков между модами на экране, оцените видимую ширину спектральной линии неона $\Delta\lambda$ (Ne) (т. е. ширину спектра генерации лазера).

Полагая, что ширина спектральной линии обусловлена эффектом Доплера (см. п. 1.3 введения к разделу) и что видимая ширина линии неона порядка полуширины доплеровского контура ($\Delta\lambda(\text{Ne}) \sim \Delta\lambda_D$), оцените среднюю скорость атомов неона v_x и газокинетическую температуру T в разряде:

$$\frac{\Delta\lambda_D}{\lambda} \approx \frac{v_x}{c}; \quad \frac{mv_x^2}{2} \approx \frac{kT}{2}. \quad (8)$$

Здесь v_x — скорость молекул неона вдоль оси лазера; $m_{\text{Ne}} = 20,2 \text{ а.е.м.}$; $1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}$.

9. Рассчитайте дисперсионную область $\Delta\lambda_{\text{си}}$ сканирующего интерферометра по формуле (4) для $l = 9 \text{ см}$ и сравните её с видимой шириной линии неона $\Delta\lambda$ (Ne).

10. Сравнив ширину отдельной моды на полувысоте с межмодовым расстоянием, оцените разрешение $\delta\lambda$ сканирующего интерферометра и разрешающую способность R по формуле (5).
Оцените коэффициент отражения зеркал интерферометра r по формуле (6).
11. Зарисуйте в тетради вид осциллограммы спектральной линии (качественно); укажите измеренные параметры.
12. Отключите осциллограф и оба блока питания.

Контрольные вопросы

1. Объясните основные процессы, приводящие к появлению инверсной заселённости уровней неона.
2. Почему плоскопараллельные пластинки, закрывающие с торцов рабочую трубку с гелий-неоновой смесью, устанавливают под углом Брюстера?
3. Что такое моды? Получите формулу (2) для межмодового расстояния.
4. В чём состоит условие возбуждения лазера?
5. Выведите формулу (6) для разрешающей способности интерферометра Фабри–Перо.
6. Как работает поляризационная развязка?
- 7*. При какой длине резонатора Не–Не-лазера, независимо от уровня накачки, генерация возможна не более чем на одной моде (одномодовый лазер)?

Литература

1. *Ландсберг Г.С. Оптика.* — М.: Физматлит, 2003. Гл. XI, §§225, 227, 228.
2. *Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика.* — М.: Физматлит, 2005. Гл. XI, §122.
3. *Кингспен А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингспена.* — М.: Физматлит, 2001. Ч. 3, гл. 8, §8.9.
- 4*. *Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия.* — М.: Сов. энциклопедия, 1969. С. 110–115, 165–177, 325–329, 414–415.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ТУННЕЛИРОВАНИЕ РАДИОВОЛН

1. Введение

В предыдущих разделах были представлены лабораторные работы, в которых изучались физические явления в *видимом диапазоне* электромагнитных (ЭМ) волн. К этому диапазону относится узкий интервал длин волн $\Delta\lambda \approx (4 \div 8) \cdot 10^{-5}$ см, в котором свет воспринимается глазом человека. Под светом, однако, понимают не только *видимый свет*, но и примыкающие к нему относительно широкие области ЭМ-излучения: *инфракрасную* и *ультрафиолетовую*. Весь электромагнитный спектр принято делить на *радиоволны*, *инфракрасное*, *видимое*, *ультрафиолетовое*, *рентгеновское* и *гамма-излучения*. Подчеркнём, что эти участки спектра различаются не по своей физической природе, а по способам генерации и приёма излучения. Границы между участками условны и сами участки частично перекрываются. Различными, но, естественно, пересекающимися оказываются и области практического применения ЭМ-излучения.

В данном разделе предложены лабораторные работы, в которых такие общие для волн различной физической природы явления, как интерференция, отражение и преломление на границе раздела сред, наблюдаются в *радиоволновом* участке спектра электромагнитных волн. Переход к значительно более длинным, чем в *видимом диапазоне*, волнам упрощает реализацию заимствованных из оптики интерференционных схем, а также даёт возможность наблюдать важный эффект *туннелирования* волн при полном внутреннем отражении на границе раздела двух сред.

Для возникновения стационарной картины интерференции волн любой физической природы должно выполняться условие когерентности. На практике во всех интерференционных схемах когерентные волны получаются путём расщепления (деления) одной волны. Две из большого

числа интерференционных схем, применяемых в оптике, показаны на рис. 6.1. На рис. 6.1а изображена схема, в которой когерентные волны получаются при отражении исходной волны от двух поверхностей плоскопараллельной пластиинки. На рис. 6.1б изображён ход лучей в интерферометре Майкельсона, в котором расщепление лучей достигается при помощи полупрозрачной пластиинки.

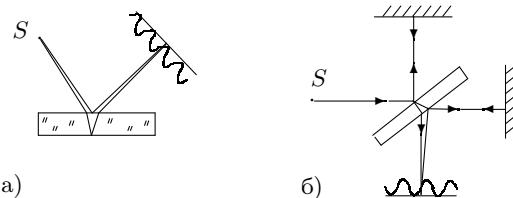


Рис. 6.1. Примеры интерференционных схем, применяемых в оптике

Получаемые при делении «дочерние» волны сохраняют частоту и поляризацию, однако для их когерентности должны выполняться ещё ограничения на ширину спектра излучения и угловой размер источника. Всякая волна занимает конечный спектральный интервал $\Delta\nu$, связанный с длительностью пуга (временем когерентности) τ соотношением неопределённости

$$\tau \cdot \Delta\nu \sim 1. \quad (6.1)$$

В оптическом диапазоне даже у хороших источников света, использующих излучение узкой спектральной линии, величина τ оказывается порядка 10^{-10} с, поэтому интерференция может наблюдаться только при разностях хода порядка сантиметра и менее. В большинстве практических случаев условия наблюдения интерференции в оптике оказываются ещё значительно более жёсткими. Так, например, при использовании источников белого света (лампа накаливания, дуга и т. п.) интерференция может наблюдаться только при разности хода в несколько микрометров. Именно поэтому интерференцию в оптике, как правило, легко наблюдать на тонких пленках и трудно на толстых (несколько миллиметров) стеклянных пластиинках. По той же причине в оптическом интерферометре Майкельсона для компенсации большой разности хода приходится использовать специальную пластиинку — компенсатор (эта пластиинка на рис. 6.1б не показана). Единственное исключение представляет излучение лазера, у которого время когерентности τ может быть на несколько порядков больше, чем у самых хороших нелазерных источников.

При переходе от оптики к радиоволнам миллиметрового или сантиметрового диапазонов длина электромагнитной волны λ увеличивается примерно в $10^4 \div 10^5$ раз. Поэтому существенно изменяются масштабы явления, экспериментальные методы и условия наблюдения интерференции. В частности, в указанных диапазонах длин волн легко достижимо время когерентности τ порядка $10^{-5} \div 10^{-3}$ с, определяемое в данном случае стабильностью источника радиоизлучения, так что длина цуга $c\tau$ может достигать сотен километров. К тому же ослабляется ограничение на угловой размер источника $\gamma < \lambda/\rho$, где ρ — поперечный размер области различимости интерференционной картины (радиус когерентности). Таким образом, в диапазонах миллиметровых и сантиметровых радиоволн существенно облегчаются условия наблюдения интерференции.

Миллиметровый диапазон радиоволн ($0,1 \text{ см} < \lambda \leq 1 \text{ см}$), которому в частотном спектре соответствует полоса *крайне высоких* частот $30 \text{ ГГц} \leq \nu < 300 \text{ ГГц}$ (КВЧ), широко используется в радиоастрономии, радиоголографии, радиорелайной связи, метеорологии, медицине и т. д. В свою очередь сантиметровый диапазон ($1 \text{ см} < \lambda \leq 10 \text{ см}$), которому в частотном спектре отвечает полоса *сверхвысоких* частот $3 \text{ ГГц} \leq \nu < 30 \text{ ГГц}$ (СВЧ), используется в радиолокации, радиоголографии, спутниковом телевидении, навигации и т. п. Отметим, что выделенные здесь участки спектра радиоволн соответствуют международному регламенту радиосвязи. В отечественной литературе к СВЧ-радиоволнам часто относят полосу частот от 0,3 ГГц до 300 ГГц, отвечающую диапазону длин волн от 1 м до 1 мм, который при этом называют микроволновым. В некоторых случаях для упрощения мы будем поступать так же, надеясь, что эта неточность не отразится на понимании вопроса.

2. Генерация СВЧ-радиоволн

В качестве источников ЭМ-излучения малой мощности (от 5 мВт до 5 Вт) в диапазонах дециметровых, сантиметровых и миллиметровых волн обычно используются генераторы на *отражательных кристаллах*. Отражательный кристаллон, схематически изображённый на рис. 6.2, представляет собой электровакуумный прибор, имеющий один тороидальный резонатор 1, дважды пронизываемый электронным потоком 2. Возвращение электронов осуществляется с помощью отражателя 3, находящегося под отрицательным постоянным потенциалом $U_{\text{отр}}$ по отношению к катоду.

Процесс генерации протекает следующим образом. Электроны, эмитируемые катодом 4, ускоряются постоянным анодным напряжением U_a

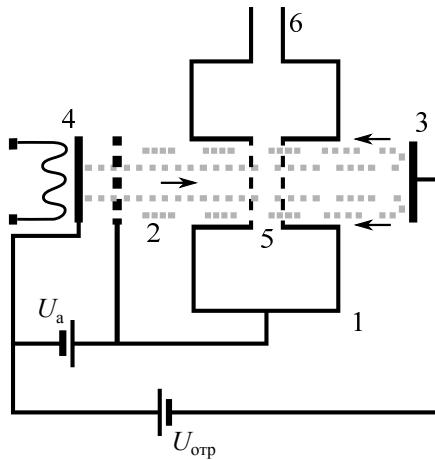


Рис. 6.2. Схема отражательного кластрона

и попадают в узкий сеточный зазор резонатора 5, в котором имеется продольное высокочастотное электрическое поле. Это поле периодически ускоряет и замедляет электроны, модулируя электронный поток по скорости. Двигаясь далее в пространстве дрейфа до отражателя и обратно, электроны постепенно образуют сгустки за счёт того, что быстрые электроны догоняют медленные. Геометрия прибора и распределение потенциалов на электродах подобраны так, чтобы при обратном пролёте сгустки электронов проходили через резонатор в те моменты, когда в нём имеется тормозящее высокочастотное поле. При этом часть кинетической энергии электронов преобразуется в энергию поля резонатора, компенсируя затраты на полезное излучение.

Частота генерации отражательного кластрона допускает практические безынерционную электронную перестройку в пределах $\approx 1\%$ от своего среднего значения за счёт изменения напряжения на отражателе, а также механическую перестройку в пределах $\approx 20\%$ путём изменения конфигурации резонатора.

Энергия СВЧ-колебаний из кластрона поступает в радиоволновод 6, по которому распространяется в виде бегущей ЭМ-волны к нагрузке, в роли которой при излучении в открытое пространство выступает антenna. В рассматриваемом диапазоне длин волн особенно эффективна антenna в форме рупора, который улучшает согласование антennы с открытым пространством, благодаря чему увеличивается излучаемая

мощность. Кроме того, рупор делает излучение более направленным за счёт увеличения площади излучающего отверстия по сравнению с волноводом.

Чем шире раскрыв рупорной антенны, тем уже направленным будет излучение.

3. Распространение ЭМ-волн в радиоволноводах

Остановимся немного подробнее на распространении ЭМ-волн в радиоволноводах — важных элементах высокочастотной радиотехники, служащих для транспортировки электромагнитной энергии в интервале длин волн от 1 м до 1 мм. Волноводы (далее будем использовать этот термин) делаются из металлических труб и могут иметь любой профиль, но из технологических соображений их сечения делаются круглыми или прямоугольными. В миллиметровом диапазоне волноводы могут быть сделаны и из диэлектрика, чаще всего — в виде стержней.

Чтобы найти структуру ЭМ-поля в прямоугольном металлическом волноводе, надо решить уравнения Максвелла с соответствующими граничными условиями. Решение этой задачи приведено во многих учебниках. Мы построим ЭМ-поле в волноводе, воспользовавшись методом Бриллюэна, складывая падающую и отражённые от стенок плоские волны.

Плоские электромагнитные волны, распространяющиеся в однородной изотропной среде, обычно представляют выражениями

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (6.2)$$

Здесь \mathbf{E}_0 — амплитуда напряжённости электрического поля \mathbf{E} , $\mathbf{r}(x, y, z)$ — радиус-вектор точки наблюдения, t — время, $\omega = 2\pi\nu$ — круговая частота, $\mathbf{k}(k_x, k_y, k_z)$ — волновой вектор. Направление вектора \mathbf{k} совпадает с направлением распространения волны, а модуль этого вектора равен

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}, \quad (6.3)$$

где v — фазовая скорость волны, которая в пустом пространстве совпадает со скоростью света c . Векторная величина

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (6.4)$$

называется комплексной амплитудой волны. Комплексная запись (6.2), (6.4) позволяет использовать удобную для выкладок экспоненциальную функцию. При этом надо помнить, что физический смысл имеет только действительная часть комплексного выражения.

Рассмотрим отражение плоской ЭМ-волны от идеально проводящей, бесконечно протяжённой плоской поверхности $x = 0$ (рис. 6.3). Пусть вектор напряжённости электрического поля падающей волны \mathbf{E} параллелен этой плоскости. В наших обозначениях вектор \mathbf{E} направлен по оси y (на нас). Оба вектора напряжённости поля \mathbf{E} и \mathbf{H} лежат в плоскости одинаковой фазы волны, им перпендикулярен волновой вектор \mathbf{k} , составляющий с векторами поля правовинтовую тройку.

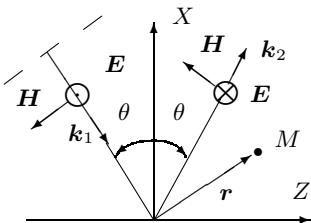


Рис. 6.3. Отражение плоской волны от проводящей плоскости

частоты, волновые числа и модули амплитуд. Таким образом,

$$\mathbf{E}_{\text{пад}} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{E}_{\text{отр}} = -\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

где $k_1 = k_2 = k = \omega/c$. Знак «минус» в отражённой волне связан со сдвигом фаз на 180° , возникающим при отражении волны от проводящей поверхности. Суммарное электрическое поле в точке M при этом равно

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 (e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} - e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}) e^{-i\omega t}. \quad (6.5)$$

Результат вычисления скалярных произведений $\mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{r}$ в (6.5) удобно представить формулой

$$\mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{r} = k(\mp x \cos \theta + z \sin \theta). \quad (6.6)$$

Подставив (6.6) в (6.5), найдём

$$\mathbf{E} = -2i\mathbf{E}_0 \sin(kx \cos \theta) e^{i(kz \sin \theta - \omega t)}. \quad (6.7)$$

Реальная часть комплексного выражения (6.7) равна

$$\mathbf{E}_{\text{Re}} = 2\mathbf{E}_0 \sin(kx \cos \theta) \sin(kz \sin \theta - \omega t). \quad (6.8)$$

Видно, что формулы (6.7), (6.8) описывают волну с амплитудой $2\mathbf{E}_0 \sin(kx \cos \theta)$, продольным волновым числом

$$k_z = k \sin \theta, \quad (6.9)$$

бегущую в направлении z с фазовой скоростью

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sin \theta}. \quad (6.10)$$

Отметим две важные особенности этой волны: 1) её фазовая скорость больше скорости света; 2) при фиксированном угле θ амплитуда поля гармонически зависит от x и не меняется со временем. Иначе говоря, в результате интерференции падающей и отражённой волн в пространстве над проводящей поверхностью в направлении оси x образуется система стоячих волн с *поперечным* волновым числом

$$k_\perp = k_x = k \cos \theta. \quad (6.11)$$

Электрическое поле стоячей волны равно нулю в точках

$$x_n = \frac{m\pi}{k \cos \theta}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.12)$$

Таким образом, поверхности нулевого электрического поля представляют собой плоскости, параллельные отражающей поверхности (для которой $x = 0$, $m = 0$). Расположим в первой из них, то есть на расстоянии $x_1 = \pi/k \cos \theta = a$, вторую проводящую поверхность. Эта поверхность не исказит полученного распределения поля, так как на ней автоматически удовлетворяется граничное условие $\mathbf{E}_\tau(t) = 0$. Точно такие же плоскости можно поставить, например, при $y = 0$ и произвольном $y = b$. Эти плоскости нормальны электрическим силовым линиям, и на них выполняется граничное условие $\mathbf{E}_\tau(t) = 0$.

Итак, мы показали, что в волноводе прямоугольного сечения может распространяться ЭМ-волну, которую в пределах волновода можно рассматривать как результат суперпозиции двух плоских волн. Каждая плоская волна является чисто поперечной, так что электрическое и магнитное поля перпендикулярны направлению их распространения. В суммарной волне электрическое поле имеет только составляющую E_y , и, следовательно, перпендикулярно оси волновода, а магнитное поле имеет составляющие H_x и H_z .

Электромагнитное поле в волноводе не является чисто поперечным, а имеет продольные составляющие.

В рассмотренном случае отлична от нуля продольная составляющая магнитного поля, и поэтому такую волну называют **магнитной** (H -волной). Мы могли бы взять другую поляризацию исходной падающей волны (вектор \mathbf{H} направлен по оси y), и тогда возникла бы **электрическая** волна с $E_z \neq 0$ (E -волну).

Посмотрим на соотношение (6.12) с другой стороны. Если даны две параллельные проводящие плоскости, расположенные на расстоянии a друг от друга, то между ними могут распространяться волны с углом падения θ из дискретного набора, определяемого равенствами

$$\cos \theta_m = \frac{m\pi}{ka} = \frac{m\lambda}{2a} = \frac{m\pi c}{a\omega}, \quad (6.13)$$

в которых учтены соотношения (6.3) для свободного пространства. Так как

$$\cos \theta_m \leq 1, \quad (6.14)$$

то для каждого m существуют наименьшие критические волновое число и частота, а также наибольшая критическая длина волны, соответствующие $m = 1$, при которых волна ещё может проходить через волновод:

$$k_{kp} = \frac{\pi}{a}, \quad \omega_{kp} = \frac{c}{a}, \quad \lambda_{kp} = 2a. \quad (6.15)$$

Выражения (6.9) и (6.10) для продольного волнового числа и фазовой скорости ЭМ-волны, распространяющейся в волноводе, теперь можно записать так:

$$k_z = k \sin \theta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - (\omega_{kp}/\omega)^2}, \quad (6.16)$$

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{kp}/\omega)^2}}. \quad (6.17)$$

Из выражений (6.16), (6.17) получаются дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k_z)$ для бегущей волны в волноводе и формулы для групповой скорости $v_g = d\omega/dk_z$ этой волны:

$$\omega = \sqrt{\omega_{kp}^2 + (ck_z)^2}, \quad (6.18)$$

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{kp}}{\omega}\right)^2} = \frac{c^2}{v_\Phi}. \quad (6.19)$$

Как видно из (6.17), (6.19), фазовая скорость — скорость перемещения поверхности постоянной фазы — в волноводе всегда больше скорости света в пустоте, а групповая — скорость распространения сигнала — всегда меньше. Важно отметить, что фазовая скорость зависит от частоты. В таких случаях говорят, что среда (в данном случае — волновод) обладает **дисперсией**.

Полученные выше результаты относятся к волне в прямоугольном волноводе с синусоидальным распределением поля по координате x и однородным распределением по y , как это следовало из формул (6.7),

(6.8). Ясно, однако, что никакой выделенности оси x нет, и поэтому точно так же может образоваться синусоидальное распределение поля вдоль оси y . Для каждого вида E - и H -волн получается бесчисленное множество решений, каждое из которых имеет свои критические частоту и длину волны. В случае прямоугольного волновода с поперечными размерами a и b все возможные поперечные и продольные волновые числа определяются по формулам

$$k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2, \quad m, n \text{ — целые числа,} \quad (6.20)$$

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}, \quad (6.21)$$

где знаки « \pm » показывают возможные направления распространения волны. Величина m представляет собой полное число полупериодов изменения той или иной составляющей поля вдоль линии, параллельной широкой стенке волновода (a), а n — то же для узкой стенки (b). Эти же символы употребляются и в обозначениях волн: соответственно E_{mn} или H_{mn} .

Из формулы (6.21) видно, что если в свободном пространстве у волны $k^2 < k_{\perp}^2$, то в волноводе для неё $k_z = \pm i \sqrt{k_{\perp}^2 - k^2}$, и волна затухает, не распространяясь. Это затухание не связано с каким либо потерями. Так как для E -волн $m, n \neq 0$, а для H -волн $m^2 + n^2 \neq 0$ (в этом студентам предлагается убедиться самостоятельно!), то из формулы (6.20) мы получаем, что минимальным $k_{\text{кр}} = \pi/a$ и, соответственно, минимальной критической частотой $\omega_{\text{кр}} = \pi c/a$ и максимальной критической длиной $\lambda_{\text{кр}} = 2a$ в прямоугольном волноводе обладает волна H_{10} . Поэтому эту волну называют основной и обычно используют для передачи электромагнитной энергии по прямоугольным волноводам. Очевидно, что для волновода заданного сечения существует полоса частот, ограниченная снизу критической частотой волны H_{10} ($\lambda_{\text{кр}} = 2a$), а сверху — критической частотой следующей распространяющейся волны (например, H_{10} с $\lambda_{\text{кр}} = 2b$ или H_{20} с $\lambda_{\text{кр}} = a$). В этой полосе частот электромагнитная энергия переносится только одним типом волн, что существенно облегчает её дальнейшее использование.

4. Туннелирование СВЧ-радиоволн

Как отмечалось в предыдущем пункте, плоскую электромагнитную волну в однородной изотропной среде обычно представляют выражениями (6.2). В максвелловской теории электромагнитного поля они возникают как решение волнового уравнения при действительных значениях k_x , k_y и k_z . Однако волновое уравнение формально допускает решения

вида (6.2) и с мнимыми значениями k_x , k_y или k_z . Такие волны также имеют реальный физический смысл и называются **неоднородными** в отличие от однородных плоских волн с действительными компонентами волнового вектора (см., например, [1]). В качестве примера приведём волну вида (6.2) с мнимым значением $k_z = \pm i\kappa$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a} e^{\mp i\kappa z} e^{i(k_x x + k_y y)} e^{-i\omega t}. \quad (6.22)$$

Выражение (6.22) описывает бегущую волну, амплитуда которой экспоненциально затухает (или нарастает) по оси z на характерной длине κ^{-1} . Волна распространяется вдоль плоскости xy , направление распространения определяется компонентами k_x , k_y .

Неоднородные волны появляются во многих физических задачах, например, при дифракции света на решётке. Неоднородные волны возникают и вблизи границы раздела двух сред при полном внутреннем отражении света.

Рассмотрим отражение и преломление электромагнитной волны на границе раздела двух однородных диэлектрических сред. Формулы, определяющие интенсивность, направление распространения и поляризацию отражённых и преломлённых волн, могут быть получены из граничных условий для векторов \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} и \mathbf{B} :

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}. \quad (6.23)$$

Здесь индексами « τ » отмечены тангенциальные, а « n » — нормальные составляющие векторов, цифра 1 относится к первой, а 2 — ко второй среде. Поскольку в электромагнитной волне электрическое и магнитное поля связаны между собой, из четырёх соотношений (6.23) независимыми остаются только два. Обычно используют условия для тангенциальных компонент полей.

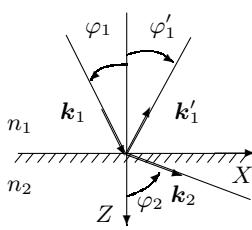


Рис. 6.4. Отражение и преломление волны на границе раздела двух сред

Выберем координатную систему так, как это изображено на рис. 6.4. Ось z совпадает с нормалью к поверхности раздела сред. Ось x лежит в плоскости падения светового луча.

Пусть \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}'_1 и \mathbf{E}_2 — электрические поля в падающей, отражённой и преломлённой волнах соответственно:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_1 e^{ik_1(x \sin \varphi_1 + z \sin \varphi_1)} e^{-i\omega t},$$

$$\mathbf{E}'_1 = \mathbf{a}'_1 e^{ik'_1(x \sin \varphi'_1 + z \sin \varphi'_1)} e^{-i\omega'_1 t}, \quad (6.24)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{a}_2 e^{i(k_{2x}x + k_{2z}z)} e^{-i\omega_2 t}.$$

Здесь φ_1 — угол падения, φ'_1 — угол отражения и φ_2 — угол преломления (рис. 6.4). Компоненты k_x , k_z в падающей и отражённой волнах выражены через k_1 , k'_1 и синусы углов падения и отражения, а k_{2x} , k_{2z} — не преобразованы, чтобы можно было описывать как однородные, так и неоднородные волны во второй среде. Предполагается, что все три вектора \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}'_1 и \mathbf{k}_2 лежат в плоскости xz .

На границе раздела (при $z = 0$) должны выполняться граничные условия (6.23). Первое из них даёт: $\mathbf{E}_{1\tau} + \mathbf{E}'_{1\tau} = \mathbf{E}_{2\tau}$, или, с учётом формул (6.24),

$$\mathbf{a}_{1\tau} e^{ik_1 x \sin \varphi_1} e^{-i\omega t} + \mathbf{a}'_{1\tau} e^{ik'_1 x \sin \varphi'_1} e^{-i\omega' t} = \mathbf{a}_{2\tau} e^{ik_{2x} x} e^{-i\omega_2 t}.$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях x и t . Поэтому

$$\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2; \quad (6.25)$$

$$k_1 \sin \varphi_1 = k'_1 \sin \varphi'_1 = k_{2x}. \quad (6.26)$$

Равенство (6.25) показывает, что частоты отражённой и преломлённой волн равны частоте падающей волны. Падающая и отражённая волны распространяются в одной и той же среде, а значит, $k_1 = k'_1$. Из первого равенства (6.26) при этом следует:

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi'_1,$$

то есть угол падения равен углу отражения.

Если предположить, что волна во второй среде однородна, то $k_{2x} = k_2 \sin \varphi_2$ и, следовательно, на основании (6.3), (6.25) и (6.26) можно записать:

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} = n. \quad (6.27)$$

Здесь n_1 , n_2 — показатели преломления первой и второй сред соответственно, а $n = n_1/n_2$ — относительный показатель преломления этих сред. Мы получили, таким образом, обычные законы отражения и преломления, известные из оптики.

Из безусловного неравенства $\sin \varphi_2 \leq 1$ вытекает, что формула (6.27) теряет смысл при падении ЭМ-волны на границу раздела со стороны «оптически» более плотной среды ($n_1 > n_2$), когда угол падения φ_1 превышает критическое значение $\varphi_{\text{пр}}$, называемое предельным углом полного внутреннего отражения:

$$\sin \varphi_{\text{пр}} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n}. \quad (6.28)$$

Это означает, что при φ_1 наше предположение об однородности волны во второй среде в случае полного внутреннего отражения оказывается несправедливым.

Попытаемся теперь удовлетворить граничным условиям и вытекающему из них соотношению (6.26), предположив, что волна во второй среде является неоднородной. При $\varphi_1 > \varphi_{\text{пр}}$ получим

$$k_1 \sin \varphi_1 > k_1 \sin \varphi_{\text{пр}} = k_1 \frac{k_2}{k_1} = k_2.$$

Сравнивая это соотношение с (6.25), находим

$$k_{2x} > k_2. \quad (6.29)$$

Но

$$k_2^2 = k_{2x}^2 + k_{2z}^2, \quad (6.30)$$

где мы учли, что в нашем случае $k_{1y} = k_{2y} = 0$. Разрешая уравнение (6.30) относительно k_{2x} с учётом неравенства (6.29), получаем

$$k_{2z} = \pm \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \pm i \sqrt{k_{2x}^2 - k_2^2} = \pm i \sqrt{k_1^2 \sin^2 \varphi_1 - k_2^2}. \quad (6.31)$$

Величина k_{2z} оказывается мнимой. Следовательно, волна во второй среде является неоднородной и описывается выражением вида (6.22), где $k_y = k_{2y} = 0$, $k_x = k_{2x} = k_1 \sin \varphi_1$, а величина \varkappa даётся формулой

$$\varkappa = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \varphi_1 - k_2^2}. \quad (6.32)$$

Таким образом, при $\varphi_1 > \varphi_{\text{пр}}$ электромагнитное поле во второй среде (например, при переходе световой волны из стекла в воздух) экспоненциально затухает (или нарастает) с удалением от поверхности раздела. На основании закона сохранения энергии в выражении вида (6.22) перед положительной величиной \varkappa следует брать знак « $-$ », соответствующий затухающей волне.

Экспоненциальную функцию, описывающую затухание волны с удалением от поверхности раздела, удобно записать в виде $\exp(-z/2\Lambda)$, где $\Lambda = 1/2\varkappa$. Тогда интенсивность волны, пропорциональная квадрату амплитуды, изменяется с расстоянием по закону

$$I \propto e^{-z/\Lambda}. \quad (6.33)$$

Длина затухания Λ с учётом (6.32) и (6.28) может быть представлена выражениями

$$\Lambda = \frac{1}{2\sqrt{k_1^2 \sin^2 \varphi_1 - k_2^2}} = \frac{1}{2k_2 \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}} = \frac{\lambda_2}{4\pi \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}}. \quad (6.34)$$

То обстоятельство, что при полном внутреннем отражении колебания присутствуют не только в первой, но и во второй среде, является необходимым следствием граничных условий (6.23). Формулы (6.33) и (6.34) позволяют количественно исследовать затухание электромагнитных колебаний во второй среде.

Из курса электродинамики известно, что последовательное применение граничных условий (6.23) позволяет найти соотношения между амплитудами (и интенсивностями) отражённого, преломлённого и падающего лучей при любых углах падения — так называемые формулы Френеля. Из этих соотношений вытекает, что при полном внутреннем отражении интенсивность отражённого луча равна интенсивности падающего. Этот вывод является очевидным, поскольку мы рассматриваем среды, не поглощающие электромагнитные волны. Вектор Умова—Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ в неоднородной волне параллелен границе раздела сред, так что поток энергии вглубь второй среды равен нулю.

Отметим, что при полном внутреннем отражении сдвиг фаз между отражённой и падающей ЭМ-волнами не равен нулю и зависит от поляризации падающей волны. Вследствие этого изменяется поляризация волны: линейно поляризованная волна после отражения оказывается поляризованной по эллипсу.

Рассмотрим теперь случай, когда вторая среда представляет собой тонкую воздушную прослойку между двумя диэлектрическими пластинками. При полном внутреннем отражении на границе пластиинки и воздуха часть электромагнитной энергии всё же достигает второй пластиинки с интенсивностью, которая экспоненциально уменьшается с шириной воздушной прослойки по формуле (6.33). Волна проникает в эту пластиинку и далее распространяется в ней как обычная однородная плоская волна. При ширине прослойки, стремящейся к нулю, прозрачность воздушного промежутка $T \rightarrow 1$, а коэффициент отражения $R \rightarrow 0$. При значительном увеличении ширины прослойки $R \rightarrow 1$, а $T \rightarrow 0$. Это и есть обычный случай полного внутреннего отражения. В общем случае $R + T = 1$, если поглощение ЭМ-волны отсутствует.

Проникновение электромагнитных волн через менее плотную среду (например, воздушный зазор) при полном внутреннем отражении — явление той же природы, что и прохождение частиц через область, где их полная энергия оказывается меньше потенциальной энергии. Это явление изучается в квантовой физике и носит название **туннельного эффекта**. Классическим примером туннельного эффекта является α -распад радиоактивных ядер. По аналогии с этим эффектом прохождение электромагнитных волн через узкий зазор при углах падения, превосходящих угол полного внутреннего отражения, часто называют **туннелированием**.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §§ 1, 26, 27, 33, 35, 63–66.
2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. — М.: Физматлит, 2001. Ч. III, Гл. 6, § 6.7; Гл. 7.
3. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§ 13, 16, 135, 137, 139.
- 4*. Лебедев И.В. Техника и приборы СВЧ. Т. 2. — М.: Высшая школа, 1972. §§ 5.7, 5.8.
- 5*. Калитеевский Н.И. Волновая оптика. — М.: Высшая школа, 1978. Гл. II.

Работа 4.6.1

Интерференция электромагнитных волн миллиметрового диапазона

Цель работы: изучение интерференции электромагнитных волн миллиметрового диапазона с применением двух оптических интерференционных схем, экспериментальное определение длины волны излучения и показателя преломления диэлектрика.

В работе используются: приёмно-передающая система радиоволн миллиметрового диапазона; металлические зеркала; микрометрический винт; проволочная решётка; пластина из диэлектрика.

Когерентные волны, необходимые для наблюдения интерференционной картины, в данной работе получаются путём расщепления волны из источника миллиметрового излучения по схемам, аналогичным представленным на рис. 6.1 оптическим схемам с плоскопараллельной пластинкой (а) и с полупрозрачной пластинкой в интерферометре Майкельсона (б).

Если в некоторой точке пространства происходит суперпозиция двух когерентных одинаково поляризованных волн с интенсивностями I_1 и I_2 и с разностью фаз φ , то интенсивность I результирующего колебания определяется соотношением

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi. \quad (1)$$

Разность фаз φ определяется разностью хода Δ между интерферирующими волнами:

$$\varphi = k\Delta, \quad (2)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Интенсивность (1) максимальна при

$$\varphi = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

(интерференционный максимум) и минимальна при

$$\varphi = (2m + 1)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

(интерференционный минимум). Число m называется порядком интерференции или номером интерференционной полосы.

Экспериментальная установка. Источником радиоволн в работе является высокочастотный генератор Г4–115 на трёх отражательных клистронах, перекрывающих вместе полосу частот от 25,80 ГГц до

37,50 ГГц, разделённую на три поддиапазона, соответствующие отдельным клистронам. Генерирующий при выбранной настройке клистрон возбуждает в прямоугольном металлическом волноводе сечением $7,2 \times 3,4$ мм² электромагнитную волну, которая распространяется вдоль волновода и с помощью рупорной антенны излучается в пространство. Задача антенны заключается в том, чтобы сделать излучение более направленным.



Рис. 1. Приёмно-передающая система СВЧ-диапазона

Отражённое от препятствия электромагнитное излучение, попадая в рупорную антенну приёмника, распространяется по волноводу, в котором имеется детектор высокочастотных колебаний, работающий в квадратичном режиме. Поэтому ток детектора пропорционален интенсивности I волны, попадающей в приёмную антенну. Сигнал с выхода детектора усиливается и измеряется микровольтметром. Принципиальная схема приёмно-передающего тракта представлена на рис. 1.

Применяемый в настоящей работе передатчик излучает линейно поляризованную волну, электрический вектор \mathbf{E} которой перпендикулярен широкой стенке волновода. Приёмник также может принимать только линейно поляризованную волну. Для установления связи в системе, изображённой на рис. 1, необходимо, чтобы широкие стенки волноводов передатчика и приёмника были параллельны друг другу.

Если одну из антенн повернуть относительно луча на некоторый угол α , то интенсивность принимаемого сигнала будет изменяться по закону

$$I = I_0 \cos^2 \alpha. \quad (5)$$

Формула (5) выражает закон Малюса. Выполнение на опыте этого закона свидетельствует о том, что передатчик излучает, а приёмная система принимает линейно поляризованную волну.

Эксперимент с разворотом приёмной и передающей антенн аналогичен оптическому эксперименту с двумя поляроидами, расположеннымими на пути светового луча. В качестве отражающих зеркал в работе используются металлические листы; роль полупрозрачной пластиинки выполняет решётка из медной проволоки. При установке решётки

необходимо проследить, чтобы направление проволок было параллельно вектору \mathbf{E} падающей волны, так как электромагнитная волна, у которой вектор \mathbf{E} перпендикулярен проводам, слабо отражается от решётки.

Интерференция радиоволн, отражённых от зеркала и решётки. Схема установки, используемой для этого опыта, приведена на рис. 2.

Металлическое зеркало З и проволочная решётка Р устанавливаются на некотором расстоянии d друг от друга с помощью специальных фиксаторов. Приёмная и передающая антенны располагаются симметрично, так чтобы в приёмник попадала отражённая волна. Волна, излучаемая передающей антенной, частично отражается от решётки, а частично проходит через неё и отражается от зеркала. Зеркало может перемещаться при помощи микрометрического винта М.

Между волнами, отражёнными от решётки и зеркала, возникает разность хода, равная

$$\Delta = 2d \cos \theta, \quad (6)$$

где θ — углы падения и отражения волны, падающей на зеркало. При изменении разности хода (при изменении d) интенсивность волны в точке приёма, находящейся в области интерференции, изменяется в соответствии с формулой (2).

Интерферометр Майкельсона. В этом опыте используется установка, моделирующая оптический интерферометр Майкельсона (рис. 3). Зеркала Z_1 и Z_2 располагаются перпендикулярно осям передающей и приёмной антенн, которые в свою очередь должны быть взаимно перпендикулярны. Решётка Р располагается на пересечении осей под углом 45° к ним. Волна от передающей антенны расщепляется решёткой на две волны, распространяющиеся в направлении зеркал Z_1 и Z_2 . После отражения от зеркал обе волны возвращаются к решётке. Каждая из этих волн после вторичного расщепления на решётке Р частично попадает в приёмную антенну.

Разность хода Δ возникает вследствие различия в расстояниях l_1 и l_2 между решёткой Р и зеркалами Z_1 и Z_2 :

$$\Delta = 2(l_1 - l_2). \quad (7)$$

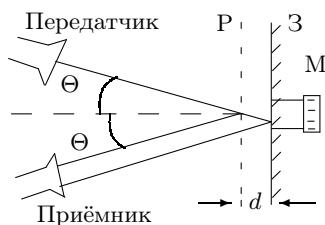


Рис. 2. Схема с зеркалом и решёткой для наблюдения интерференции радиоволн

При изменении длины одного из плеч интерферометра (при перемещении соответствующего зеркала) интенсивность в точке приёма изменяется в соответствии с формулой (1).

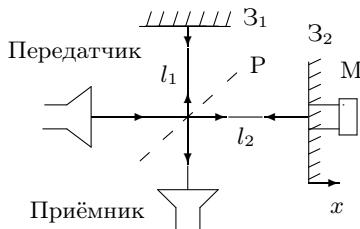


Рис. 3. Интерферометр Майкельсона на СВЧ-радиоволнах

Если на пути одного из лучей поставить пластинку толщиной h с диэлектрической проницаемостью ϵ , то разность хода (7) изменится на величину $2h(n - 1)$, где n — показатель преломления вещества, из которого сделана пластинка. Это приводит к изменению интенсивности в точке приёма. Пусть в точке приёма до внесения пластинки наблюдался интерференционный максимум. Для того чтобы получить тот же максимум при наличии пластинки, нужно зеркало свободного плеча интерферометра (плеча, в котором нет пластинки) отодвинуть на расстояние δx , определяемое выражением

$$\delta x = h(n - 1). \quad (8)$$

Зная δx , можно определить показатель преломления. Для этого, однако, мы должны быть уверены, что добавочная разность хода, внесённая пластинкой, не превышает длины волны λ , иначе возникает неопределённость в расчёте показателя преломления. Действительно, изменение разности хода на целое число длин волн смешает интерференционную картину на целое число полос. Такое смещение не может быть обнаружено в эксперименте, так как все интерференционные полосы идентичны. Применяемая в нашей работе диэлектрическая пластинка имеет достаточно малую толщину, так что вносимая ею дополнительная разность хода не превышает λ .

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается, настроив схему и проверив справедливость закона Малюса, исследовать интерференцию миллиметровых радиоволн. В схеме с зеркалами и решёткой — определить длину волны излучения по экспериментальной зависимости от смещения зеркала интен-

сивности волны в зоне интерференции, а в схеме интерферометра Майкельсона — экспериментально проверить выполнение закона сложения интенсивностей при интерференции и определить показатель преломления материала диэлектрической пластиинки.

I. Подготовка приборов к работе и проверка закона Малюса

Мощность сигнала, получаемая от генератора Г4-115, невелика, поэтому излучение не представляет опасности для здоровья человека. Тем не менее *заглядывать в открытый волновод при включённом генераторе не рекомендуется*.

1. На дальнем от генератора конце стола закрепите с помощью фиксаторов металлическое зеркало с продольной подачей (если в оправу зеркала вставлена диэлектрическая пластина, её следует убрать). Рядом с рупором излучателя, вмонтированным в боковую стенку генератора, поставьте рупор приёмной антенны симметрично относительно разделятельной линии так, чтобы оба рупора были направлены в сторону зеркала. При такой установке формула (5) для расчёта разности хода упрощается (на рис. $2 \cos \theta \approx 1$). Проверьте, что длинные стороны рупоров горизонтальны.
2. Соедините коаксиальным кабелем выход приёмной антенны с входом 1 усилителя и подготовьте приборы к работе (см. «Техническое описание» на рабочем столе).
3. Проведите предварительную настройку установки. Для этого при любом заметном отклонении стрелки микровольтметра усилителя, перемещая отражающее зеркало при помощи подвижки и слегка поворачивая подвижку вручную вокруг вертикальной оси, настройтесь на максимум отражённого сигнала. Подстройте сигнал, передвигая приёмную антенну и слегка поворачивая её вокруг горизонтальной оси.

Методом последовательных приближений ещё раз отрегулируйте положение зеркала и антенн, чтобы настроиться на максимум сигнала. Следите, чтобы при выполнении всех упражнений отклонение стрелки выходного прибора не превышало $80\div90\%$ шкалы.

4. Пронаблюдайте за ослаблением сигнала, располагая перед зеркалом различные препятствия (стопку бумажных листов, диэлектрическую пластиинку, металлический лист). Поставьте металлическую решётку перед приёмной антенной и проследите за изменением сигнала при повороте решётки на 90° вокруг луча. Опишите наблюдаемые результаты и объясните их.
5. Снимите зависимость уровня сигнала I от угла поворота α приёмной антенны относительно луча. Убедитесь, что излучаемая электромагнитная волна линейно поляризована.

Постройте график зависимости уровня сигнала I от $\cos^2 \alpha$ и убедитесь в справедливости закона Малюса.

II. Интерференция волн, отражённых от зеркала и решётки

6. Закрепите на фиксаторах перед зеркалом металлическую решётку и по-воротом решётки вокруг вертикальной оси настройте систему на максимум отражённого сигнала (рис. 2). Убедитесь, что при перемещении зеркала уровень сигнала в точке приёма изменяется. Перемещение зеркала осуществляется с помощью микрометрического винта. Один оборот винта — 100 делений — соответствует одному миллиметру.
7. Снимите зависимость интенсивности I от координаты x подвижного зеркала. Постройте график зависимости $I(x)$, определите по графику длину волны излучения λ и сравните с аналогичной величиной, рассчитанной по частоте генератора.

III. Интерферометр Майкельсона

8. Соберите схему согласно рис. 3. Для этого оба металлических зеркала и решётку закрепите на фиксаторах так, чтобы плечи l_1 и l_2 были примерно одинаковы. Настройте установку на максимум сигнала (см. п. 3).
9. Перемещая подвижное зеркало Z_2 , снимите зависимость координаты x_m зеркала в точке интерференционного максимума от номера максимума m . По графику $x_m = f(m)$ определите длину волны излучения λ и сравните с аналогичной величиной, найденной в предыдущем опыте.
10. Снимите зависимость интенсивности сигнала $I(x)$ подвижного зеркала Z_2 в пределах одной длины волны.

Убирая поочерёдно зеркала Z_1 и Z_2 , измерьте интенсивности I_1 и I_2 каждого из интерферирующих лучей.

Рассчитайте интенсивность сигнала, используя формулы (1) и (2) и принимая $\lambda = c/\nu$, а $\Delta = 2\delta x$, где δx — смещение зеркала от начального положения (1-го максимума).

Постройте на одном графике и сравните экспериментальную и теоретическую зависимости $I = I(\Delta)$ в диапазоне изменения Δ от 0 до λ . Объясните результаты сравнения.

11. Настройте интерферометр на максимальную интенсивность. Поставьте в пазы подвижного зеркала Z_2 тонкую пластину из тефлона и, изменяя положение зеркала Z_2 , определите величину δx — смещение интерференционного максимума от прежнего положения. Зная толщину пластины h , рассчитайте показатель преломления тефлона n по формуле (8) и сравните результат с табличным значением.

Контрольные вопросы

1. Выведите соотношение (1).
2. Как убедиться на опыте, что электромагнитная волна, излучаемая передающей антенной, линейно поляризована?
3. Как экспериментально определить направление колебаний вектора электрического поля в электромагнитной волне?
4. В чём заключается закон Малюса и как его экспериментально проверить?
5. При каких условиях можно наблюдать интерференцию ЭМ-волн?
6. Оцените длину и радиус когерентности для опыта с зеркалом и решёткой.
7. Укажите возможные причины расхождения измеренных в работе величин друг с другом и с известными значениями этих величин.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §§ 26, 27, 33, 35.
- 2*. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§ 11–16, 29, 135, 137, 139.
- 3*. Горелик Г.С. Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959. Гл. VII–IX.

Работа 4.6.2

Туннелирование миллиметровых радиоволн

Цель работы: экспериментальное исследование эффекта проникновения электромагнитных волн — туннелирования — через воздушный зазор между диэлектрическими призмами при полном внутреннем отражении на границе диэлектрик-воздух, а также моделирование интерферометра Майкельсона с использованием этого эффекта и измерение длины волны излучения и показателя преломления фторопласта для радиоволн миллиметрового диапазона.

В работе используются: генератор СВЧ-колебаний с рупорной антенной; приемная рупорная антenna и волновод; детектор; микроамперметр; металлические зеркала; две призмы и плоскопараллельная пластина из фторопласта; микрометрические винты.

Теоретические основы эффекта проникновения электромагнитных волн — туннелирования — через воздушный зазор между диэлектрическими средами при полном внутреннем отражении на границе диэлектрик-воздух изложены в вводной части раздела.

Экспериментальная установка. Туннелирование миллиметровых радиоволн через тонкий воздушный зазор переменной толщины изучается на установке, схема которой приведена на рис. 1. Источником радиоволн является высокочастотный генератор Г4-115 на трёх отражательных кристаллах, перекрывающих полосу частот от 25,80 ГГц до 37,50 ГГц, разделённую на три поддиапазона. Генерирующий при выбранной настройке кристаллон возбуждает в прямоугольном металлическом волноводе сечением $7,2 \times 3,4$ мм² электромагнитную волну, которая распространяется вдоль волновода и с помощью рупорной антенны А₁ излучается в пространство. Задача антенны заключается в том, чтобы сделать излучение более направленным. Электрический вектор волны, бегущей вдоль волновода и излучаемый антенной, перпендикулярен широкой стенке волновода.

На пути радиоволн устанавливаются две одинаковые прямые призмы П₁ и П₂ с почти прямоугольным (рис. 1) равнобедренным треугольником в основании. Уменьшение угла при вершине треугольника на 16° сделано для устранения обратных отражений. Призмы изготовлены из фторопласта (более точное название этого диэлектрика — фторопласт-4), обладающего малыми потерями на высоких радиочастотах. Узкие грани призм ограничивают воздушную прослойку, ширина которой может изменяться с помощью микрометрических винтов М₁ и М₂.

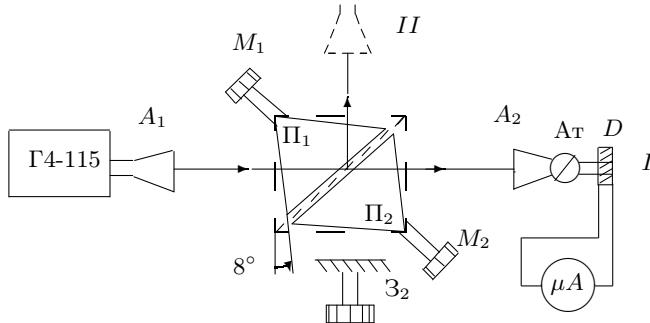


Рис. 1. Схема установки для исследования туннелирования миллиметровых радиоволн

Вторая рупорная антenna A₂ служит приёмником радиоволн. Попадая в антенну A₂, электромагнитная волна распространяется далее по волноводу, аналогичному волноводу генератора. Детектор D, расположенный в волноводе, подсоединен к микроамперметру. Ток детектора пропорционален интенсивности принимаемого антенной электромагнитного излучения. Аттенюатор At позволяет ослаблять сигнал. В положении I антenna A₂ принимает сигнал, прошедший воздушный промежуток, в положении II — сигнал, отражённый от воздушного промежутка.

Небольшая реконструкция схемы рис. 1 позволяет смоделировать интерферометр Майкельсона (рис. 2). Воздушный зазор между призмами здесь используется в качестве делителя волны; зеркало Z₁ установлено неподвижно, зеркало Z₂ может перемещаться с помощью микрометрического винта M.

Для измерения показателя преломления материала призм интерференционным методом перед неподвижным зеркалом устанавливается пластина известной толщины *h* из того же материала, что и призмы — фторопластика. В этом плече интерферометра возникает приращение длины «оптического» пути:

$$\Delta = 2h(n - 1). \quad (1)$$

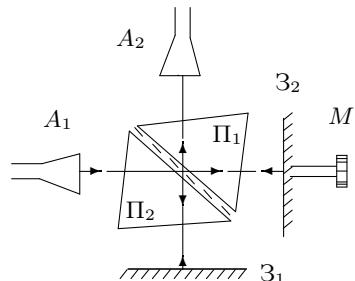


Рис. 2. Схема, моделирующая интерферометр Майкельсона

Это приращение можно скомпенсировать, передвинув подвижное зеркало на необходимое расстояние δx . Показатель преломления определяется из условия

$$\delta x = h(n - 1). \quad (2)$$

Для толстых пластин, когда $\Lambda > \lambda$, необходимо учесть изменение порядка интерференции. Это можно сделать, зная приближённое значение показателя преломления фторопласта ($n \approx 1,5$).

Формулу, учитывающую изменение порядка интерференции, студентам предлагается вывести самостоятельно.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается: провести исследование эффекта туннелирования радиоволн миллиметрового диапазона (снять зависимость интенсивностей прошедшей и отражённой волн от величины воздушного промежутка между призмами из фторопласта; убедиться, что энергия сохраняется, а интенсивность прошедшей волны убывает по экспоненциальному закону; рассчитать длину затухания и показатель преломления материала призм) и выполнить интерферометрические измерения в схеме Майкельсона, построенной с использованием этого эффекта (по зависимости сигнала от смещения подвижного зеркала определить длину волны излучения; по дополнительному перемещению зеркала определить показатель преломления фторопласта пластины, добавленной на пути луча).

I. Подготовка приборов к работе

Мощность сигнала, получаемая от генератора Г4–115, невелика, поэтому излучение не представляет опасности для здоровья человека. Тем не менее *заглядывать в открытый волновод при включённом генераторе не рекомендуется*.

- Настройте генератор, руководствуясь Техническим описанием, расположенным на установке.
- Установите столик с призмами (рис. 2) так, чтобы воздушный зазор был ориентирован под углом 45° к падающему лучу (на глаз). Для увеличения диапазона изменения воздушного промежутка установите винт левого микрометра M_1 в соответствующее положение. Вращением винта правого микрометра M_2 уберите воздушный промежуток.
- Расположите приёмную антенну на одной прямой с передатчиком. Снимите металлическое зеркало, стоящее на пути луча.

Слегка поворачивая столик и приёмную антенну вокруг вертикальной оси, методом последовательных приближений добейтесь максимального отклика микроамперметра и закрепите оба рейтера.

4. Вращением ручек генератора (12 — установка частоты и 7 — установка генерации плавно) настройтесь на максимальную выходную мощность клистрона, наблюдая за показаниями микроамперметра.

Если ток слишком велик, уменьшите его, вращая ручку аттенюатора Ат, расположенную на приёмной антенне. В отсутствие зазора прошёдший сигнал должен составлять $80 \div 90\%$ шкалы микроамперметра.

5. Вращением ручки 8 добейтесь загорания контрольной лампочки 10 и определите рабочую частоту клистрона по шкале 9. Рассчитайте соответствующую длину волны.

II. Исследование туннелирования радиоволн

6. Снимите зависимость интенсивности прошёдшей волны от величины зазора ℓ (используйте только правый микрометр и устраняйте люфт!). Если с увеличением зазора интенсивность падает монотонно, значит, призмы ориентированы правильно и можно продолжать измерения; если нет — попытайтесь небольшим поворотом столика избавиться от интерференции и добиться монотонного хода кривой.
7. Переставьте приёмник для измерения отражённого сигнала. Слегка поворачивая столик и приёмник, добейтесь, чтобы отклик микроамперметра на отражённый сигнал при максимальном зазоре был равен отклику на прошёдший сигнал при нулевом зазоре.

Снимите зависимость интенсивности отражённой волны от величины зазора.

8. Для выполнения следующего упражнения установите такую величину зазора, при которой ток равен половине максимального. Переставляя приёмник, убедитесь, что $T \approx R \approx 0,5$.
9. Постройте на одном листе графики зависимости коэффициентов T и R от величины зазора ℓ , отнормировав токи на величину I_{\max} . Проверьте, выполняется ли соотношение $T + R = 1$.
10. Постройте график $\ln T = f(z)$, где z — показания микрометра. Проверьте, лежат ли полученные точки на одной прямой, как этого требует формула (6.33). По наклону прямой рассчитайте длину затухания Δ , а затем по формуле (6.34) — величину $n \sin \varphi_1$ (n — показатель преломления материала призм, φ_1 — угол падения волны на воздушный промежуток, λ_2 — длина ЭМ-волны в воздухе). Рассчитайте величину показателя преломления фторопласта n ; при этом в условиях нашего опыта можно не учитывать, что входная плоскость призмы Π_1 наклонена на угол 8° по отношению к фронту падающей волны.

III. Интерферометр Майкельсона

11. Соберите схему интерферометра Майкельсона (рис. 2), используя в качестве делителя воздушный зазор между призмами. Оптимальный раз-

мер зазора соответствует равенству $T \approx R \approx 0,5$. Установите на место неподвижное металлическое зеркало.

12. Снимите зависимость тока от координаты x подвижного зеркала. По графику $I = f(x)$ определите экспериментальное значение длины волны ЭМ-излучения. Обычно максимумы размыты, поэтому определение длины волны будет более точным, если взять координаты, соответствующие максимальным производным dI/dx . Сравните экспериментальную длину волны с величиной, рассчитанной по рабочей частоте генератора.
13. Для измерения показателя преломления фторопласта интерференционным методом настройте интерферометр на максимальную интенсивность и поместите пластину известной толщины d перед неподвижным зеркалом. Скомпенсируйте возникшее увеличение «оптической» длины пути, отодвинув от призм подвижное зеркало на необходимое расстояние δx . Рассчитайте показатель преломления фторопласта по формуле (2).
14. Сравните результаты измерения показателя преломления фторопласта n интерференционным методом и методом туннелирования.

Контрольные вопросы

1. Какой угол называется предельным углом полного внутреннего отражения? Чему он равен?
2. Что такое неоднородная волна? Как направлен вектор Умова–Пойнтинга в такой волне и почему?
3. В чем заключается явление туннелирования волн? Чем отличается это явление от обычного прохождения волн через тонкие прозрачные пластинки?
4. Каковы возможные причины расхождения измеренных в работе величин друг с другом и с табличными значениями этих величин?

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §§ 35, 63–66.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§ 29, 135, 137, 139.
- 3*. Калитинский Н.И. Волновая оптика. — М.: Высшая школа, 1978. Гл. II.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ. КРИСТАЛЛООПТИКА

1. Типы поляризации, основные понятия

Плоские электромагнитные волны являются поперечными, т. е. проекции осциллирующих электрического и магнитного полей на направление распространения такой волны равны нулю. Это непосредственно следует из теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции магнитного поля. Пусть, для определённости, плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме вдоль оси z . Тогда по теореме Гаусса

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,$$

но поскольку в рассматриваемой волне все производные по x и по y равны нулю, то и $\partial E_z / \partial z = 0$, т. е. для E_z равны нулю все пространственные производные. С другой стороны, из уравнения циркуляции магнитного поля следует, что

$$(\operatorname{rot} \mathbf{H})_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t},$$

т. е. и $\partial E_z / \partial t = 0$ по той же причине, и, таким образом, E_z является константой. Но поскольку мы рассматриваем осциллирующее поле с нулевым средним значением, эта константа равна нулю. Аналогично из теоремы Гаусса для магнитного поля и закона электромагнитной индукции получим $H_z = 0$.

Теперь, выписав из уравнения циркуляции магнитного поля и уравнения электромагнитной индукции выражения для оставшихся x - и y -компонент роторов \mathbf{E} и \mathbf{H} и воспользовавшись условием $E_z = H_z = 0$, мы увидим, что уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей разделились на две независимые системы уравнений, одна из

которых связывает E_x и H_y , а другая — E_y и H_x :

$$\begin{cases} (\text{rot } \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ (\text{rot } \mathbf{H})_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (\text{rot } \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ (\text{rot } \mathbf{H})_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}. \end{cases}$$

Решениями этих систем являются две независимые плоские волны вида $E_x = \mp H_y = f_x(ct \pm z)$ и $E_y = \pm H_x = f_y(ct \pm z)$, где f_x и f_y — произвольные функции. Важным частным случаем являются монохроматические волны:

$$E_x = H_y = A_x \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \quad (7.1)$$

или

$$E_y = -H_x = A_y \cos(\omega t - kz + \varphi_y). \quad (7.2)$$

В любой точке пространства концы векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в каждой из этих волн движутся по отрезкам прямых линий в плоскости (E_x, E_y) , поэтому они называются линейно поляризованными (или плоскополяризованными). По историческим причинам плоскость, параллельно которой направлены вектора \mathbf{H} , обычно называется плоскостью поляризации, а плоскость, параллельно которой направлены вектора \mathbf{E} — плоскостью колебаний.

Сам термин «поляризация» исторически возник из предположения о корпускулярной природе света. Его ввёл в 1808 г. французский физик Этьен Луи Малюс, он представлял световые частицы чем-то вроде маленьких магнитиков и полагал, что процесс поляризации света при различных его взаимодействиях с веществом связан с отбором частиц с определённой ориентацией полюсов.

Если обе описанные выше монохроматические волны (7.1) и (7.2) распространяются одновременно, то концы векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} движутся по эллипсам в плоскости (E_x, E_y) . Это наиболее общий тип поляризации — эллиптическая поляризация, все другие типы поляризации могут рассматриваться как его частные случаи. Если полуоси эллипса равны, то такую поляризацию называют круговой. Различают правую и левую эллиптические (и круговые) поляризации. Свет называют право-поляризованным, если для наблюдателя, смотрящего *навстречу* лучу, вектор \mathbf{E} вращается по часовой стрелке.

Монохроматические волны, таким образом, всегда являются так или иначе поляризованными. Если же свет квазимонохроматический, т. е. обладает ненулевой шириной спектра и, значит, конечными временем и длиной когерентности (т. е. может рассматриваться как последовательность независимых монохроматических цугов, между которыми происходит случайный сбой фазы), то возможны три случая. В первом поляризация не меняется от цуга к цугу, несмотря на сбой фазы между ними. Такой свет считается поляризованным наравне с монохроматическим. Во втором поляризации цугов меняются случайным и независимым образом. Такой свет считают неполяризованным. И в третьем случае поляризации цугов отличаются, но некоторые поляризации появляются с большей вероятностью, чем другие. Такой свет считается поляризованным частично, его можно рассматривать как смесь поляризованного и неполяризованного света.

Такая классификация справедлива и для немонохроматического (естественного) света, длина когерентности которого сравнима с длиной волны, однако практическое значение для такого света имеет лишь линейная поляризация.

2. Получение поляризованного света

В основном поляризованный свет получают, преобразуя при помощи различных устройств естественный свет, хотя существуют явления, при которых его можно получить непосредственно от источника. К таким явлениям относятся излучение анизотропных материалов (люминисценция и тепловое излучение при высоких температурах), излучение веществ во внешних магнитных и электрических полях (эффекты Земмана и Штарка), излучение частицы, движущейся быстрее скорости света в веществе (излучение Вавилова—Черенкова), тормозное излучение релятивистских электронов и, при некоторых условиях, излучение лазеров.

Устройства, с помощью которых из естественного света получают поляризованный, называются поляризаторами. Они разделяют исходный пучок на две компоненты, ортогональные по типу поляризации, одну из них пропускают, а другую поглощают или отклоняют. Действие их может быть основано на одном из четырёх явлений: дихроизме, двойном лучепреломлении в кристаллах, отражении и преломлении на границе изотропных диэлектриков и поляризации при рассеянии света.

Дихроизм, или анизотропия поглощения, — это способность вещества поглощать свет по-разному в зависимости от его поляризации. Ис-

торически этот термин¹ (от греч. *dichroos* — двухцветный), возник из-за различной окраски одноосных кристаллов в проходящем свете при взаимно перпендикулярных направлениях наблюдения — вдоль оптической оси и перпендикулярно к ней. На этом явлении основано действие поляроидных плёнок, используемых в лабораторных поляроидах. Это прозрачная полимерная плёнка, в которую внедрено множество игольчатых кристаллов, причём в процессе производства путём растяжения плёнки в одном направлении или применением сильных электрических или магнитных полей добиваются того, что эти кристаллы ориентированы преимущественно в одном направлении. Такая плёнка сильно поглощает свет, плоскость поляризации которого перпендикулярна направлению выравнивания кристаллов, но слабо поглощает свет, плоскость поляризации которого параллельна направлению выравнивания.

Двойное лучепреломление в анизотропных кристаллах — результат зависимости в этих кристаллах коэффициента преломления (и соответственно угла преломления, а также угла полного внутреннего отражения) от поляризации световой волны. На этом явлении основано действие широко применяемых в лабораториях призм Николя, Глана и других схожих по конструкции приборов, где свет пропускается через границу раздела двух сред под углом, который обеспечивает полное внутреннее отражение только для одной из двух ортогональных поляризаций.

Поляризация света при отражении и преломлении на границе изотропного диэлектрика следует из формул Френеля. Так, для энергетических коэффициентов отражения плоских волн с направлениями электрических колебаний, одно из которых перпендикулярно плоскости падения (\perp), а другое параллельно ей (\parallel), получаем соответственно

$$\rho_{\perp} = \frac{\sin^2(\varphi - r)}{\sin^2(\varphi + r)}, \quad \rho_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - r)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + r)},$$

здесь φ — угол падения, а r — угол преломления волны. Отсюда следует, что, если $\varphi + r = 90^\circ$, т. е. угол между направлениями распространения отражённой и преломлённой волн является прямым, коэффициент отражения ρ_{\parallel} обращается в ноль и отражённый свет оказывается полностью поляризованным. Соответствующий угол падения

$$\varphi_B = \operatorname{arctg}(n), \tag{7.3}$$

¹ Помимо используемого в применении к поляроидам термин «дихроичный» имеет ещё два разных смысла, которые не следует путать. Это способность красителей сильно менять цвет при изменении концентрации и наличие двух полос пропускания в разных областях видимого спектра у некоторых фильтров.

где n — коэффициент преломления среды, называется углом Брюстера или углом полной поляризации. Физически обращение ρ_{\parallel} в ноль связано с тем, что отражённый свет является суперпозицией излучения молекул среды, дипольные моменты которых колеблются под действием преломлённой волны. Однако если направление колебаний дипольных моментов совпадает с направлением распространения отражённой волны, то это излучение отсутствует, так как мощность излучения электрических диполей в направлении колебаний равна, как известно, нулю.

Преломлённый свет также оказывается поляризован, однако лишь частично при любом угле падения. Соответствующие коэффициенты преломления равны $(1 - \rho_{\perp})$ и $(1 - \rho_{\parallel})$. Но степень поляризации можно увеличить, если использовать не одну пластинку диэлектрика, а стопку последовательно расположенных пластинок.

При рассеянии света на частицах пыли, молекулах газа и даже на атомах в кристаллах рассеянная волна также оказывается поляризованной, причём преимущественное направление электрических колебаний перпендикулярно падающему лучу. Это связано с разным значением проекций дипольных моментов рассеивающих частиц, колеблющихся под действием падающей волны, на различные направления, перпендикулярные распространению рассеянного света. Степень поляризации при рассеянии на углы 90° может быть близка к 100%. Интенсивность рассеянного света в газах, конечно, невелика, причём согласно закону Релея она пропорциональна $1/\lambda^4$. Этот метод поляризации имеет особое значение для рентгеновской области спектра, где все другие методы неприменимы.

3. Наблюдение и анализ поляризованного света. Закон Малюса

Для анализа поляризованного света его пропускают через поляризатор, который в этом случае принято называть анализатором. При прохождении через анализатор линейно поляризованного света интенсивность прошедшей волны, очевидно, пропорциональна квадрату проекции амплитуды исходной волны на разрешённое направление поляризатора, т. е.

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (7.4)$$

где φ — угол между направлением электрических колебаний анализируемой волны и разрешённым направлением поляризатора. Этот закон был открыт Э. Малюсом и носит его имя, хотя сам Малюс, как уже упоминалось, выводил его исходя из представлений о корпскулярной природе света.

Для частично линейно поляризованного света (т. е. для смеси линейно поляризованного и естественного света) вводят понятие степени поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (7.5)$$

где I_{\max} и I_{\min} — соответственно максимальное и минимальное значения интенсивности света, прошедшего через анализатор при различных углах φ .

С помощью одного анализатора, однако, невозможно отличить неполяризованный свет от поляризованного по кругу, так как в обоих случаях интенсивность прошедшего света не будет меняться при вращении анализатора. Чтобы различать эти варианты, необходимо дополнитель но пользоваться устройствами, изменяющими сдвиг фаз между ортогональными поляризациями и, таким образом, способными преобразовать эллиптическую поляризацию в линейную. Таким устройством может быть набор двояколучепреломляющих пластинок, вырезанных параллельно главной оптической оси кристалла, которые помещают перед анализатором. У таких пластинок различаются коэффициенты преломления (и соответственно оптические длины путей при прохождении по ним света) для волн, поляризованных параллельно и перпендикулярно главной оси, что и приводит к изменению сдвига фаз между ними. Степень поляризации теперь можно определить для общего случая произвольно поляризованной волны:

$$P = \frac{I_{\max}(\varphi, \delta) - I_{\min}(\varphi, \delta)}{I_{\max}(\varphi, \delta) + I_{\min}(\varphi, \delta)},$$

где максимальное и минимальное значения интенсивности берутся уже не только при изменении угла поворота анализатора φ от 0 до π , но и при изменении разницы оптических длин путей δ в пластинке перед анализатором от 0 до λ . На практике достаточно всего одной пластиинки, в простейшем случае $\lambda/4$ (т. е. вносящей разницу оптических длин путей для указанных поляризаций, равную $\lambda/4$). Значения интенсивностей, входящие в формулу для определения степени поляризации, можно рассчитать, измерив максимальные и минимальные по φ интенсивности при отсутствии такой пластиинки и при её наличии перед анализатором.

4. Двойное лучепреломление

В некоторых кристаллах потенциальные ямы, в которых находятся электроны вблизи узлов решётки, не являются сферически-симметричными. При этом систему координат, оказывается, всегда возможно выбрать так, что для малых отклонений от положения равновесия потенциальная энергия электрона будет иметь вид

$$U = a_x x^2 + a_y y^2 + a_z z^2.$$

Если все три коэффициента a_x , a_y и a_z различны, то кристалл называется двуосным, если два коэффициента равны — одноосным, если равны все три коэффициента, то яма является сферически-симметричной, а вещества соответственно оптически изотропным. Наибольшее практическое значение имеют одноосные кристаллы. Положим $a_y = a_z = a_{\perp}$, $a_x = a_{\parallel}$. Ось x при этом называется **оптической осью кристалла**.

Поскольку отклонения от положения равновесия под действием внешнего поля у электронов вдоль разных осей координат обратно пропорциональны соответствующим коэффициентам в выражении для потенциальной энергии, то вектор удельного дипольного момента \mathbf{P} и, как следствие, вектор электрической индукции \mathbf{D} окажутся в общем случае неколлинеарны вектору напряжённости электрического поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \varepsilon_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}. \quad (7.6)$$

Здесь α_{\parallel} , α_{\perp} — поляризуемости, $\varepsilon_{\parallel} = 1 + 4\pi\alpha_{\parallel}$, $\varepsilon_{\perp} = 1 + 4\pi\alpha_{\perp}$ — диэлектрические проницаемости кристалла вдоль и поперёк его оптической оси соответственно.

Распространение электромагнитных волн описывается уравнениями Максвелла, которые в отсутствие электрических зарядов и токов имеют вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Определим, при каких условиях в одноосных кристаллах могут распространяться плоские монохроматические электромагнитные волны. Такие волны в общем случае можно записать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})},$$

откуда следует $\text{rot } \mathbf{H} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{H}$, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = i\omega \mathbf{D}$ и аналогичные выражения для других векторов². Подставив эти выражения в выписанные выше

² Нетрудно убедиться, что производная по времени заменяется всюду на $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$, а оператор градиента ∇ во всех векторных операциях заменяется на выражение $\nabla \rightarrow -i\mathbf{k}$ ($\text{rot } \mathbf{E} \equiv \nabla \times \mathbf{E} \rightarrow -i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$, $\text{div } \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} \rightarrow -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$).

уравнения Максвелла, получим, что D , H , и E должны быть связаны соотношениями

$$\mathbf{D} = -\frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (7.7)$$

Отсюда видно, что векторы D , H , и k взаимно перпендикулярны, т. е. плоские волны поперечны в отношении D

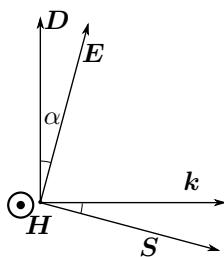


Рис. 7.1.

Расположение векторов D , E , k , S в анизотропной среде

и H , но в общем случае не поперечны в отношении E . Кроме того, вектор E должен лежать в одной плоскости с векторами D и k , т. к. все они перпендикулярны вектору H .

Взаимное расположение векторов D , E , k , а также вектора плотности потока энергии (вектора Пойнтинга) $S = \frac{4\pi}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ показано на рис. 7.1.

Несложный геометрический анализ показывает, что одновременное выполнение условий (7.7) и материального уравнения (7.6) $\mathbf{D} = \epsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \epsilon_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}$ возможно только в двух случаях (рис. 7.2).

1. Если вектор D перпендикулярен плоскости, в которой лежат оптическая ось кристалла и волновой вектор k (эта плоскость называется *главным сечением*).

2. Если вектор D лежит в главном сечении.

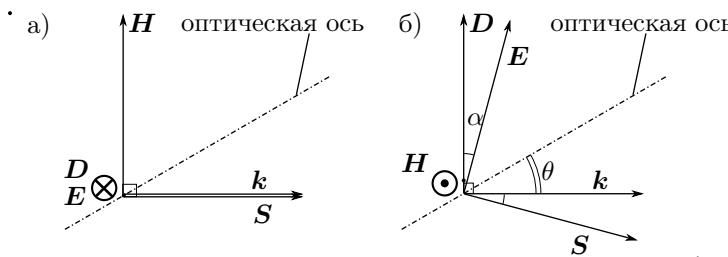


Рис. 7.2. Обыкновенная (а) и необыкновенная (б) волны и положение основных векторов в них. Плоскость рисунка — главное сечение

В первом случае плоская волна называется *обыкновенной*, а во втором — *необыкновенной* волной. Во всех остальных случаях электромагнитное поле неизбежно имеет более сложный вид, чем простая плоская монохроматическая волна. Поскольку уравнения Максвелла линейны, в общем случае любое монохроматическое поле в кристалле можно представить в виде суперпозиции обыкновенной и необыкновенной волн.

Обыкновенная и необыкновенная волны распространяются в кристалле с разной скоростью. У обыкновенной волны $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp}$, значит, векторы индукции и напряжённости электрического поля коллинеарны: $\mathbf{D} = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}$, поэтому вид уравнений Максвелла для неё ничем не отличается от уравнений для плоских волн в изотропных средах. Следовательно, фазовая скорость $v = \omega/k$ этой волны не зависит от направления \mathbf{k} и равна

$$v_o = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} = \frac{c}{n_o}, \quad (7.8)$$

где $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ — коэффициент преломления для обыкновенной волны³.

У необыкновенной волны векторы индукции и напряжённости электрического поля в общем случае неколлинеарны, а фазовая скорость такой волны зависит от угла θ между оптической осью и волновым вектором \mathbf{k} . Квадрат коэффициента преломления есть уже не отношение модулей D/E , а отношение модуля $D = |\mathbf{D}|$ и проекции $E_D = E \cos \alpha$ вектора \mathbf{E} на направление вектора \mathbf{D} (строгий вывод см. ниже):

$$D = \varepsilon E_D, \quad v_e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n(\theta)}, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}}}, \quad (7.9)$$

$n(\theta) = \sqrt{\varepsilon}$ — коэффициент преломления необыкновенной волны, зависящий от угла θ между оптической осью и волновым вектором. Кроме того, у необыкновенной волны вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ и соответственно групповая скорость не коллинеарны в общем случае волновому вектору \mathbf{k} , то есть направление переноса энергии и направление смещения поверхностей равных фаз не совпадают.

Плоская монохроматическая волна, попадающая из изотропной среды в анизотропный одноосный кристалл, распадается в общем случае на две взаимно ортогонально поляризованные плоские волны, распространяющихся в общем случае в разных направлениях и с разными скоростями.

Вывод формулы (7.9). Выразим фазовую скорость необыкновенной волны $v = \omega/k$ из соотношений (7.7). С учётом геометрии рис. 7.1 из первого уравнения имеем $v = \omega/k = cH/D$, а из второго $v = cE \cos \alpha/H$, где α — угол между векторами D и E . Отсюда, исключая H и выражая угол α через скалярное произведение, находим

$$v = c \sqrt{\frac{E \cos \alpha}{D}} = c \sqrt{\frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})}{D^2}}. \quad (7.10)$$

³ Индексы «о» и «е» происходят от английских слов *ordinary* (обыкновенная) и *extraordinary* (необыкновенная).

Это общее соотношение для фазовой скорости электромагнитной волны в анизотропной среде (если $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, то (7.10) переходит в стандартное $v = c/\sqrt{\epsilon}$).

Проекции вектора \mathbf{D} на оптическую ось D_{\parallel} и нормаль к ней в главном сечении D_{\perp} запишем как $D_{\parallel} = \epsilon_{\parallel} E_{\parallel}$ и $D_{\perp} = \epsilon_{\perp} E_{\perp}$. Тогда

$$(\mathbf{ED}) = \epsilon_{\parallel} E_{\parallel}^2 + \epsilon_{\perp} E_{\perp}^2 = \frac{D_{\parallel}^2}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{D_{\perp}^2}{\epsilon_{\perp}}.$$

С другой стороны, из геометрии (рис. 7.2б) имеем $D_{\parallel} = D \sin \theta$ и $D_{\perp} = D \cos \theta$, из чего, подставляя полученное выражение для (\mathbf{ED}) в (7.10), получаем зависимость фазовой скорости необыкновенной волны v_e от угла θ :

$$v_e = c \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}}} \equiv \frac{c}{n(\theta)}. \quad (7.11)$$

Положив $\epsilon \equiv n^2(\theta)$, убеждаемся, что формулы (7.10) и (7.11) находятся в полном согласии с (7.9).

5. Кристаллические пластинки

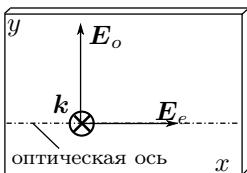


Рис. 7.3

Важным частным случаем является распространение волн в одноосном кристалле перпендикулярно оптической оси. При этом у обыкновенной волны вектор \mathbf{E} колеблется в плоскости, перпендикулярной оптической оси, а у необыкновенной — вдоль оптической оси (ось x на рис. 7.3). Показатель преломления для обыкновенной волны равен $n_o = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$, а для необыкновенной — $n_e = \sqrt{\epsilon_{\parallel}}$ (согласно (7.9) при $\theta = 90^\circ$).

Рассмотрим волну, падающую нормально на кристаллическую пластинку, вырезанную так, что оптическая ось лежит в плоскости пластинки. Компоненты электрического поля E_x и E_y падающей волны в кристалле будут распространяться независимо: в качестве обыкновенной и необыкновенной волны в кристалле пространственно не разделятся. Таким образом, результатом прохождения пластинки толщиной h будет поле, компоненты которого E_x и E_y наберут дополнительную разность фаз

$$\Delta\varphi = kh(n_e - n_o), \quad (7.12)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число в пустоте.

Такая пластина может быть использована для управления типом поляризации плоских волн за счёт внесения разницы между оптическими длинами пути для двух ортогональных поляризаций (а значит, и внесения разности фаз между колебаниями соответствующих проекций E_x и E_y). В зависимости от соотношения величины вносимой разницы с длиной волны такие пластины из кристаллов, вырезанные параллельно оптической оси, называются пластинками $\lambda/4$, $\lambda/2$, λ и т. д. (разность фаз $\Delta\varphi = \pi/2, \pi, 2\pi$ соответственно). Важно помнить, что у одной пластины это соотношение является разным для разных длин волн, поскольку сама разность фаз (7.12) зависит от длины волны.

6. Электрооптические эффекты

Изотропное вещество можно превратить в анизотропное, поместив его в достаточно сильное внешнее электрическое поле. В этом случае электроны в потенциальных ямах под действием поля смещаются к новому положению равновесия. И если зависимость потенциальной энергии от смещения электрона в направлении поля имеет не только чисто квадратичную зависимость $U = ax^2$, но и слагаемые более высоких порядков: $U = ax^2 + \beta x^3 + \gamma x^4$, то в новом положении равновесия $x_0 \neq 0$ значение второй производной $\partial^2 U / \partial x^2 = 2a + 6\beta x_0 + 12\gamma x_0^2$ и соответственно поляризуемость по оси x изменяется и вещество приобретёт свойства, аналогичные свойствам одноосных кристаллов, включая двойное лучепреломление.

Если $\beta \neq 0$, то эффект оказывается линейным по x_0 и соответственно по полю, такое явление называется **эффектом Поккельса**. Оно возможно только в кристаллах, не обладающих центром симметрии, поскольку отличие β от нуля означает, что потенциальная яма несимметрична. Вследствие этой асимметричности поляризуемость по разным осям меняется по-разному и оптическая ось в общем случае не совпадает с направлением внешнего поля.

Если $\beta = 0$, а $\gamma \neq 0$, то изменение $\varepsilon_{||}$ оказывается квадратичным по полю, в этом случае описываемое явление называется **эффектом Керра**. Но у эффекта Керра может быть и иная природа, отличная от рассмотренной выше нелинейной поляризации. В жидкостях и газах эффект Керра обусловлен анизотропией самих молекул, т. е. их разной поляризуемостью в разных направлениях. В отсутствие внешнего поля эта анизотропия не проявляется, т.к. молекулы ориентированы хаотически и изотропно, но внешнее поле ориентирует дипольные моменты молекул по полю, и эта анизотропия начинает проявляться. Оптическая ось при этом будет направлена по направлению поля.

7. Оптическая активность. Эффект Фарадея

Некоторые вещества обладают так называемой оптической активностью. **Оптическая активность** — это способность среды (кристаллов, растворов, паров вещества) вызывать вращение плоскости поляризации проходящего через неё оптического излучения. Природа этого явления связана с определённым типом диссимметрии молекул этих веществ, а именно с их спиральностью. Такие молекулы можно условно представить в виде небольших право- или левозакрученных спиралек. При прохождении через такое вещество электромагнитной волны с круговой поляризацией дипольные моменты его молекул и, как следствие, удельный дипольный момент вещества, диэлектрическая проницаемость и коэффициент преломления зависят от того, совпадают или противоположны направления закрученности спиралей молекул и спирали, которую описывает в пространстве конец вектора напряжённости электрического поля. Если же через оптически активное вещество пропустить линейно поляризованную волну, то её можно представить в виде суперпозиции двух поляризованных по кругу волн с противоположным по направлению вращением вектора E , при этом у этих волн будет разный коэффициент преломления и, следовательно, разная оптическая длина пути. В результате на выходе из образца у этих волн появится разница фаз, что при суперпозиции даст линейно поляризованную волну с отличным от входного направлением поляризации. Относительная разница коэффициентов преломления волн с противоположной круговой поляризацией при этом очень мала, порядка отношения размеров молекул к длине волны излучения, но при достаточно больших оптических длинах пути в веществе эффект может быть заметен.

Эффект Фарадея. Вращение плоскости поляризации можно также наблюдать, если поместить вещество во внешнее магнитное поле, направленное вдоль направления распространения волны.

Для объяснения этого эффекта рассмотрим сначала, как и в случае с оптической активностью, взаимодействие с веществом волны с круговой поляризацией. Под действием электрического поля такой волны электроны движутся по окружностям, при этом со стороны магнитного поля на них действует дополнительная сила, которая, в зависимости от направления вращения, может быть либо центробежной, либо центростремительной. Сила со стороны электрического поля, в зависимости от отношения ω/ω_e частоты волны и частоты собственных колебаний электронов в потенциальных ямах, также может быть либо центробежной (при $\omega < \omega_e$), либо центростремительной (при $\omega > \omega_e$), т. е. действие постоянного магнитного поля можно свести к изменению модуля силы

со стороны высокочастотного электрического поля волны, причём величина и знак этого изменения зависят от направления поляризации и частоты волны. При этом меняется радиус траектории, т. е. либо увеличивается, либо уменьшается величина удельного дипольного момента и соответственно величины диэлектрической проницаемости и коэффициента преломления. А разница коэффициентов преломления волн с противоположной круговой поляризацией приводит, как и в оптически активных веществах, к вращению плоскости поляризации линейно поляризованной волны.

Работа 4.7.1

Двойное лучепреломление

Цель работы: изучение зависимости показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякпреломляющем кристалле; определение главных показателей преломления в кристалле.

В работе используются: гелий-неоновый лазер, вращающийся столик с неподвижным лимбом, призма из исландского шпата, поляроид.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теорией двойного лучепреломления (см. п. 4 введения к разделу).

Величины $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ и $n_e = \sqrt{\varepsilon_{||}}$ называют *главными показателями преломления* кристалла. Выразим, исходя из формулы (7.9), показатель преломления необыкновенной волны $n = \sqrt{\varepsilon}$ через главные показатели преломления n_o , n_e и угол между оптической осью и волновым вектором θ :

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}. \quad (1)$$

Заметим, что при $\theta = \pi/2$ показатель преломления необыкновенной волны равен $n = n_e$, а при $\theta = 0$ он равен $n = n_o$. Для обыкновенной волны показатель преломления равен n_o независимо от направления её распространения.

Если $n_o - n_e \ll n_o, n_e$ (для исландского шпата $n_o = 1,655$, $n_e = 1,485$ для $\lambda = 0,63$ мкм), формулу (1) можно упростить:

$$n(\theta) \approx n_e + (n_o - n_e) \cos^2 \theta. \quad (2)$$

Двойное лучепреломление в призме из исландского шпата. Рассмотрим, как по преломлению лучей в кристаллической призме можно определить показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волн. В работе исследуется одна из двух призм, составляющих поляризатор (рис. 1).

В исследуемой призме ось кристалла лежит в плоскости, параллельной верхней грани призмы, причём она параллельна входной грани призмы (длинному катету). При этом в обыкновенной волне вектор D_o перпендикулярен верхней грани призмы, а в необыкновенной волне вектор D_e параллелен верхней грани.

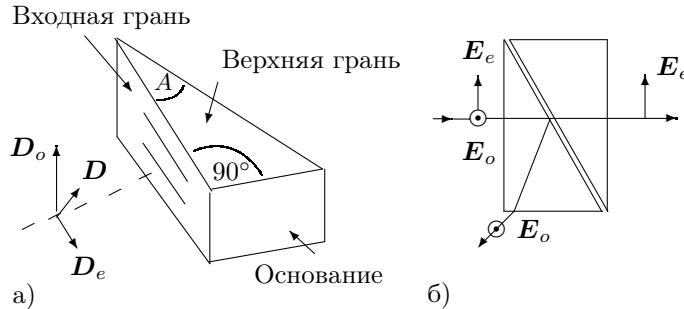


Рис. 1. а) Исследуемая призма из исландского шпата. Штриховкой указано направление оптической оси кристалла. б) Ход лучей в поляризационной призме

Волну, падающую на входную грань призмы, можно представить в виде суммы двух ортогональных линейно поляризованных волн. Преломление этих двух волн на грани призмы можно рассматривать независимо. Волна, в которой вектор \mathbf{D} направлен вертикально (перпендикулярно верхней грани и оси кристалла), внутри кристалла будет распространяться как обыкновенная. Для этой волны выполняется закон Снеллиуса, а показатель преломления призмы для неё равен $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$. Волна, в которой вектор \mathbf{D} направлен горизонтально, в кристалле будет распространяться как необыкновенная. Для этой волны также будет выполняться закон Снеллиуса¹, но с тем отличием, что показатель преломления призмы для неё будет зависеть от угла между осью кристалла и волновой нормалью.

Значение показателя преломления и угол, под которым преломилась волна в призме, можно найти, измерив угол падения на входную грань призмы φ_1 и угол φ_2 на выходе призмы (рис. 2). Запишем закон Снеллиуса для одной из волн применительно к первой и второй граням призмы:

$$\sin \varphi_1 = n \sin \beta_1;$$

$$\sin \varphi_2 = n \sin \beta_2 = n \sin(A - \beta_1).$$

При этом мы выразили угол падения на вторую грань призмы β_2 через угол преломления на первой грани призмы β_1 и угол при вершине призмы A . Как видно из рис. 2, эти углы связаны простым соотношением:

¹ При этом следует помнить, что под направлением распространения волны в законе Снеллиуса подразумевается направление волнового вектора \mathbf{k} , а не вектора Пойнтинга \mathbf{S} .

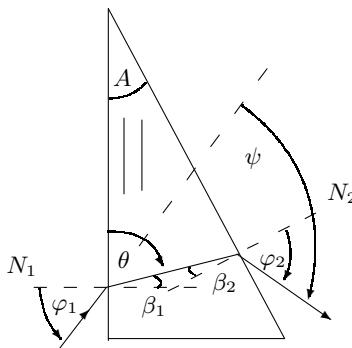


Рис. 2. Ход лучей в призме

$A = \beta_1 + \beta_2$. Учитывая, что угол преломления β_1 связан с углом θ между осью кристалла и волновой нормалью N соотношением $\theta + \beta_1 = \pi/2$, находим n и θ :

$$n = \frac{1}{\sin A} \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos A}; \quad (3)$$

$$\cos \theta = \frac{\sin \varphi_1}{n}.$$

Для обыкновенной волны n не будет зависеть от угла θ , а для необыкновенной волны зависимость n от θ должна описываться выражением (1).

Показатель преломления призмы из изотропного материала удобно находить по углу наименьшего отклонения луча от первоначального направления. Угол отклонения луча призмой (ψ на рис. 2) минимален для симметричного хода лучей, т.е. когда $\varphi_1 = \varphi_2$. Тогда показатель преломления можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{\sin(\frac{\psi_m+A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}, \quad (4)$$

где ψ_m — угол наименьшего отклонения.

Если призма неизотропна, то этой формулой, строго говоря, можно воспользоваться только для обыкновенной волны, которая, как это было показано ранее, распространяется так же, как и в изотропной среде. Но если учесть, что угол при вершине призмы мал и при угле наименьшего отклонения преломлённый луч в призме распространяется под

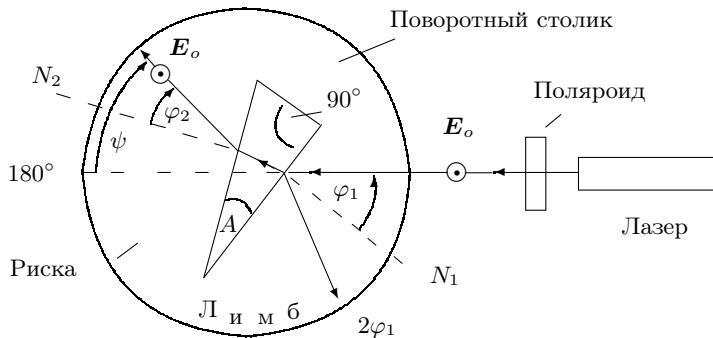


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

углом к оси кристалла, близким к $\pi/2$, то в качестве оценки формулу (4) можно использовать для определения n_e .

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки изображена на рис. 3. Источником излучения служит Не—Не-лазер ($\lambda = 0,63$ мкм). Излучение лазера поляризовано линейно за счёт наличия брюстовских окон в кювете лазера. Направление вектора E в луче можно изменять с помощью поляроида, установленного на выходе лазера. Исследуемая призма из исландского шпата закреплена в центре поворотного столика с неподвижным лимбом для отсчёта углов.

Преломляющий угол A призмы (рис. 2) можно рассчитать, если известны угловые координаты нормалей N_1 и N_2 к преломляющим (рабочим) граням призмы, прилежащим преломляющему углу. Грань, противолежащая преломляющему углу, называется **основанием** призмы. Штриховкой указано направление оптической оси.

Обычно ход лучей в призме таков, что и падающий, и преломлённый лучи отклоняются от нормалей в сторону основания призмы, при этом углы φ_1 и φ_2 считаются положительными.

Угол падения φ_1 определяется по положению луча, отражённого от передней (входной) грани призмы (рис. 3). Из рис. 2 можно получить связь углов φ_1 и φ_2 :

$$\varphi_2 = A + \psi - \varphi_1, \quad (5)$$

а угол ψ — отклонение преломлённого луча от первоначального направления — определяется по разности отсчётов на лимбе между точками, куда попадает луч в отсутствие призмы, и точкой, куда попадает преломлённый луч.

При монотонном увеличении угла падения угол ψ сначала уменьшается, а затем снова начинает увеличиваться. Минимальное отклонение соответствует симметричному ходу луча: внутри призмы луч идёт перпендикулярно биссектрисе угла A , а $\varphi_1 = \varphi_2$. Углы наименьшего отклонения ψ_m различны для обыкновенного и необыкновенного лучей.

Угол A подобран так, что призма может выполнять роль поляризатора: при нормальном падении луча на первую преломляющую грань из призмы выходит только один луч, а другой испытывает полное внутреннее отражение на второй грани. При повороте призмы на небольшой угол на экране появляются оба преломлённых луча. Можно подобрать такой угол падения, при котором исчезнет второй преломлённый луч. Область углов поворота призмы, в которой обеспечивается пространственное разделение лучей с взаимно ортогональной поляризацией, определяется относительной разницей главных показателей преломления n_o и n_e .

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается измерить преломляющий угол призмы A и определить главные показатели преломления n_o и n_e исландского шпата тремя способами: сняв зависимость $\psi = f(\varphi_1)$ для обыкновенной и необыкновенной волны; определив углы наименьшего отклонения ψ_m для обыкновенной и необыкновенной волны; измерив для каждого из лучей угол падения φ_1 в условиях полного внутреннего отражения. Во время занятий необходимые расчёты могут быть выполнены на компьютере с помощью программы SIGMA PLOT.

1. Особенностью этой работы является то, что собственно измерения выполняются относительно быстро, но результат расчётов зависит от точности юстировки системы.

Чтобы отьюстировать установку, отцентрируйте экран по лучу лазера, т.е. убедитесь в том, что луч проходит под отметками «0» и «180», если его направить вдоль грани призмы (или над призмой). Настроив установку, закрепите оба винта на рейтере столика.

2. Определите угол A при вершине призмы; для этого вначале нужно добиться, чтобы луч, отражённый от входной грани (длинного катета), шёл точно назад, заметить положение отсчётной риски на лимбе, а затем повторить эту операцию для второй рабочей грани (гипотенузы). По разнице этих двух отсчётов найдите угол A и оцените точность измерения. Формулу для расчёта студентам предлагается вывести самостоятельно.
3. Определите разрешённое направление поляризатора: глядя через него на отражённый от горизонтальной поверхности (стола или подоконника

ка) дневной свет, установите его в положение минимального пропускания. Так как отражённый свет преимущественно поляризован так, что вектор \mathbf{E} направлен параллельно отражающей поверхности, у настроенного на минимум пропускания поляризатора разрешённое направление \mathbf{E} вертикально.

4. Получите на лимбе изображения преломлённых лучей так, как показано на рис. 3 (падающий и преломлённый лучи отклоняются от нормалей к преломляющим граням в сторону основания призмы). Установите поляризатор в луче лазера перед призмой. Вращая поляризатор, определите, какой луч соответствует вертикально поляризованному свету, а какой — горизонтально поляризованному; определите, какой из лучей представляет обыкновенную волну, а какой — необыкновенную.
5. Вращая столик с призмой, снимите зависимость углов отклонения на выходе из призмы для обыкновенной и необыкновенной волн от угла падения луча на призму; удобно определять координату $2\varphi_1$ луча, отражённого от входной грани призмы — длинного катета, и координаты каждого из преломлённых лучей ($180^\circ + \psi$) (или $180^\circ - \psi$).

Для проверки качества юстировки сначала проведите предварительную серию измерений, меняя угол падения φ_1 в диапазоне $10\text{--}70^\circ$ через 10° ($2\varphi_1$ — через 20° до 140°).

Для расчёта показателей преломления на компьютере с установленной программой SIGMA PLOT (для работы 406) подготовьте таблицу: (φ_1) , (ψ_o) , (ψ_e) . Обсчитайте результаты на компьютере.

6. Если рассчитанное значение n_o зависит от угла падения, следует повторить юстировку, если нет — проведите основную серию измерений в том же диапазоне, меняя угол φ_1 через 5° , а вблизи минимального угла ψ_m — через $2,5^\circ$.

Снова проведите расчёт на компьютере; покажите преподавателю, как выглядят графики, и запишите рассчитанные значения $\cos^2 \theta$, $n_o(\theta)$ и $n_e(\theta)$ и окончательный результат — n_o и n_e .

Распечатайте график на принтере. Если это невозможно, запишите рассчитанные на компьютере значения $\cos^2 \theta$, $n_o(\theta)$, $n_e(\theta)$ и постройте график самостоятельно.

7. Если работа с программой SIGMA PLOT невозможна, рассчитайте на калькуляторе 2–3 значения n_o по формуле (3), а основную серию измерений обработайте дома: с помощью (5) и (3) вычислите n_o и $n_e(\theta)$.

Постройте графики n_o и $n_e(\theta)$ от $\cos^2 \theta$ и определите главные показатели преломления n_o и n_e . Сравните рассчитанные значения с табличными, приведёнными в описании работы, и оцените погрешности.

8. Из основной серии измерений определите средние значения углов наименьшего отклонения ψ_m ; по формуле (4) рассчитайте показатели преломления n_o и n_e и оцените погрешности.
9. Для определения углов падения, соответствующих полному внутреннему отражению, сначала установите призму так, чтобы были видны оба преломлённых луча; затем, уменьшая угол падения, добейтесь для каждого из лучей выполнения условий полного отражения от второй грани призмы ($\varphi_2 = 90^\circ$); определите соответствующие углы φ_{1e} и φ_{1o} с учётом знака.

Рассчитайте значения n_o и n_e по формуле (3) (с учётом знака угла падения) и сравните с результатами предыдущих измерений.

Контрольные вопросы

1. Как связаны между собой векторы D и E в анизотропной среде?
2. Как направлена оптическая ось в одноосном кристалле относительно главных осей эллипсоида диэлектрических проницаемостей?
3. Дайте определение главных показателей преломления.
4. Приведите пример, когда волна, распространяющаяся в кристалле, является обыкновенной и когда необыкновенной.
5. Получите из (1) приближённое выражение (2).
6. Как электромагнитная теория объясняет появление двух преломлённых волн при падении плоской волны на поверхность одноосного кристалла?
7. Как зависит показатель преломления обыкновенной и необыкновенной волны от угла между осью кристалла и волновой нормалью?
8. Как будет зависеть показатель преломления для обыкновенной и необыкновенной волн от угла преломления, если ось кристалла будет параллельна оси вращения призмы?
9. Как направлены векторы E в выходящих из призмы лучах?

Литература

1. Кингспен А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингспена. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 3. Гл. 10.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. Гл. 7, §§ 75, 76, 77.
3. Бутиков Е.И. Оптика. М.: Высшая школа, 1986. Гл. 4, §§ 4.1–4.4.
4. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. 17, § 107.
- 5.* Яриев А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1987. Гл. 4, §§ 4.1–4.7.

Работа 4.7.2

Эффект Поккельса

Цель работы: исследовать интерференцию рассеянного света, прошедшего кристалл; наблюдать изменение характера поляризации света при наложении на кристалл электрического поля.

В работе используются: гелий-неоновый лазер, поляризатор, кристалл ниобата лития, матовая пластинка, экран, источник высоковольтного переменного и постоянного напряжения, фотодиод, осциллограф, линейка.

Перед выполнением данной работы необходимо ознакомиться с теоретическим введением к разделу.

Эффектом Поккельса называется изменение показателя преломления света в кристалле под действием электрического поля, причём это изменение пропорционально напряжённости электрического поля. Вследствие эффекта Поккельса в кристалле либо появляется двойное лучепреломление, либо меняется его величина (если кристалл был двухлучепреломляющим в отсутствие поля), либо, как в данной работе, однносный кристалл становится двуосным.

Изменение показателя преломления кристаллов под действием внешнего электрического поля происходит за счёт анизотропных свойств кристаллов. Под действием постоянного электрического поля электроны смещаются в сторону того или иного иона (в случае кристалла ниобата лития LiNbO_3 — это ион Li или Nb), при этом меняется поляризуемость среды и связанный с ней показатель преломления. В первом приближении это изменение линейно относительно внешнего электрического поля. Эффект Поккельса может наблюдаться только в кристаллах, не обладающих центром симметрии. Вследствие линейности эффекта относительно внешнего поля $E_{\text{эл}}$ при изменении направления поля на противоположное должен меняться на противоположный и знак изменения показателя преломления Δn . Но в кристаллах с центром симметрии это невозможно, так как оба взаимно противоположных направления внешнего поля физически эквивалентны. Кристалл можно поместить между двумя скрещенными поляроидами таким образом, что в отсутствие внешнего электрического поля пропускание света системой будет равно нулю. При подаче на кристалл внешнего поля появится наведённое двухлучепреломление, которое изменит поляризацию прошедшего через кристалл света, и такая система начнёт пропускать свет. На этом принципе основаны многочисленные применения эффекта Поккельса в лазерной технике

для оптических модуляторов, затворов и других устройств, управляющих лазерным излучением. Поскольку эффект Поккельса связан с изменением электронной поляризуемости под действием электрического поля, то он практически безынерционен — быстродействие устройств на его основе меньше 10^{-9} с.

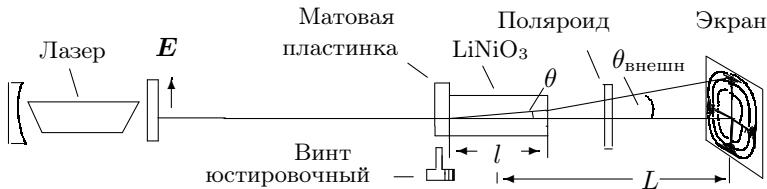


Рис. 1. Схема для наблюдения интерференционной картины

Рассмотрим сначала кристалл в отсутствие внешнего электрического поля. Кристалл ниобата лития является одноосным кристаллом, то есть кристаллом, оптические свойства которого обладают симметрией вращения относительно некоторого одного направления, называемого *оптической осью* z кристалла. Для световой волны, вектор электрического поля \mathbf{E} которой перпендикулярен оси z , показатель преломления равен $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$, а для волны, вектор \mathbf{E} которой располагается вдоль оси z , он равен $n_e = \sqrt{\varepsilon_{||}}$, причём $n_e < n_o$, т. е. LiNbO₃ — «отрицательный кристалл».

В общем случае, когда луч света распространяется под углом θ к оптической оси z (рис. 1), существуют два собственных значения показателя преломления n_1 и n_2 : в обыкновенной волне (если световой вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{e}_z)$, где \mathbf{k} — волновой вектор луча, \mathbf{e}_z — орт по оси z) показатель $n_1 = n_o$, а в необыкновенной (когда световой вектор \mathbf{E} лежит в плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{e}_z)$) показатель преломления n_2 зависит от угла θ : согласно формуле (7.9), можем записать

$$\frac{1}{n_2^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}. \quad (1)$$

Если перед кристаллом, помещённым между скрещенными поляроидами (рис. 1), расположить линзу или матовую пластинку, после которых лучи будут рассеиваться под различными углами, то на экране, расположеннном за поляроидом, мы увидим тёмные концентрические окружности (конокопическую картину) — результат интерференции обыкновенной и необыкновенной волн, точнее, проекцию их электрических полей на разрешённое направление выходного поляроида. В на-

шем эксперименте используется лазер, излучение которого поляризовано, поэтому входной поляроид можно не ставить.

Разность фаз между обычновенной и необыкновенной волнами, приобретаемая при прохождении через кристалл длиной ℓ , равна

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \ell \cdot (n_1 - n_2).$$

Для обыкновенного луча $n_1 = n_o$ и не зависит от угла θ между направлением луча и осью z . Для необыкновенного луча n_2 зависит от угла θ и определяется уравнением (1). Считая, что n_e и n_o отличаются незначительно, для малых углов ($\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$) получаем

$$n_2 \approx n_o - (n_o - n_e)\theta^2.$$

Таким образом,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \ell (n_o - n_e) \theta^2.$$

Направлениями постоянной разности фаз служат конусы $\theta = \text{const}$, поэтому интерференционная картина представляет собой концентрические окружности. Интерференционные кольца перерезаны тёмным «мальтийским крестом», который выделяет области, где интерференция отсутствует. В этих направлениях распространяется только одна поляризованная волна (обыкновенная или необыкновенная). При повороте выходного поляроида (анализатора) на 90° картина меняется с позитива на негатив: везде, где были светлые места, появляются тёмные и наоборот.

Для случая, когда разрешённое направление анализатора перпендикулярно поляризации лазерного излучения (скрещенные поляризации), найдём радиус тёмного кольца с номером m . Для луча, идущего вдоль оси z ($m = 0$), показатели преломления для двух волн совпадают, сдвиг фаз между ними равен нулю, поляризация излучения на выходе остаётся такой же, как на входе, и луч не проходит через анализатор. Картина не изменится при сдвиге фаз между обычновенной и необыкновенной волной, кратном 2π . Поэтому для m -го тёмного кольца $\Delta\varphi = 2\pi m$ или $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \ell (n_o - n_e) \theta^2 = 2\pi m$. Если L — расстояние от центра кристалла до экрана, то, учитывая закон преломления (закон Снеллиуса) на границе кристалла, при малых углах $\theta_{\text{внешн}} = n_o \theta$ (рис. 1) получаем выражение для радиуса кольца:

$$r_m^2 = \frac{\lambda}{\ell} \frac{(n_o L)^2}{(n_o - n_e)} m. \quad (2)$$

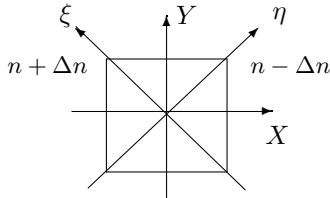


Рис. 2. Эффект Поккельса — появление новых главных направлений при наложении электрического поля

ния равен n_o . Свойства симметрии кристалла и его электрооптический тензор таковы, что в результате линейного электрооптического эффекта (эффекта Поккельса) в плоскости (xy) возникают два главных направления ξ и η под углами 45° к осям x и y (рис. 2) с показателями преломления $(n_o - \Delta n)$ и $(n_o + \Delta n)$, то есть появляются «медленная» и «быстрая» оси, причём $\Delta n = A \cdot E_{\text{эл}}$ (A — некая константа, зависящая только от типа кристалла).

Пусть свет на входе в кристалл поляризован вертикально, а на выходе стоит анализатор, пропускающий горизонтальную поляризацию. Разложим исходный световой вектор $E = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ по осям ξ и η : $E_\xi = E_\eta = E_0 / \sqrt{2}$. После прохождения кристалла между векторами E_ξ и E_η появится разность фаз:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\ell}{\lambda} 2\Delta n = \frac{4\pi\ell}{\lambda} A E_{\text{эл}} = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{\ell}{d} A U,$$

где $U = E_{\text{эл}} d$ — напряжение на кристалле, d — размер кристалла в поперечном направлении. Результирующее поле после анализатора — это сумма проекций E_ξ и E_η на направление x , т. е.

$$E_{\text{вых}} = \frac{E_0}{2} e^{i(\omega t - k\ell)} (e^{i\Delta\varphi/2} - e^{-i\Delta\varphi/2}) = E_0 e^{i(\omega t - k\ell)} \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right).$$

Интенсивность света пропорциональна квадрату модуля вектора электрического поля в волне:

$$I_{\text{вых}} \sim EE^* = E_0^2 \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right),$$

поэтому

$$I_{\text{вых}} = I_0 \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{U}{U_{\lambda/2}}\right). \quad (3)$$

Измеряя радиусы колец, можно найти разность $(n_o - n_e)$ — двулучепреломление кристалла.

Представим теперь, что мы поместили кристалл в постоянное электрическое поле $E_{\text{эл}}$, направленное вдоль оси x , перпендикулярной оптической оси кристалла z . Луч света распространяется вдоль оси z , при этом для любой поляризации в отсутствие внешнего поля показатель преломле-

Здесь

$$U_{\lambda/2} = \frac{\lambda}{4A} \frac{d}{\ell} \quad (4)$$

— так называемое *половинковое напряжение* — имеет тот смысл, что при $U = U_{\lambda/2}$ сдвиг фаз между двумя волнами, соответствующими двум собственным поляризациям, $\Delta\varphi = \pi$ (разность хода равна $\lambda/2$), и интенсивность света на выходе анализатора, как следует из (3), достигает максимума.

Студенту предлагается показать, что при параллельных поляризациях лазера и анализатора

$$I_{\text{вых}} = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{U}{U_{\lambda/2}} \right). \quad (5)$$

Напряжение $U_{\lambda/2}$ называют также *управляющим напряжением*. Оно уменьшается, как это видно из (4), с уменьшением длины волны света λ и с увеличением отношения λ/d кристалла (это справедливо для попречного электрооптического эффекта, который используется в нашем опыте). Характерная величина полуволнового напряжения в ниобате лития для видимого света составляет несколько сотен вольт.

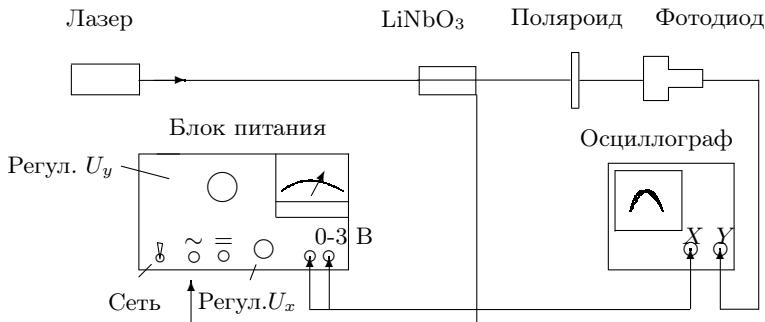


Рис. 3. Схема для изучения двойного лучепреломления в электрическом поле

Экспериментальная установка. Оптическая часть установки представлена на рис. 1. Свет гелий-неонового лазера, поляризованный в вертикальной плоскости, проходя сквозь матовую пластинку, рассеивается и падает на двоякопереломляющий кристалл под различными углами. Кристалл ниобата лития с размерами $3 \times 3 \times 26$ мм вырезан вдоль оптической оси z . На экране, расположенному за скрещенным поляроидом, видна интерференционная картина.

Для $\lambda = 0,63$ мкм (длина волны гелий-неонового лазера) в ниобате лития $n_o = 2,29$.

Убрав рассеивающую пластинку и подавая на кристалл постоянное напряжение, можно величиной напряжения влиять на поляризацию луча, вышедшего из кристалла.

Заменив экран фотодиодом (рис. 3) и подав на кристалл переменное напряжение, можно исследовать поляризацию луча с помощью осциллографа.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается: 1) измерив радиусы интерференционных колец, определить разность показателей преломления $n_o - n_e$; 2) подав на кристалл постоянное напряжение, получить свет, поляризованный по кругу; 3) определить полуволновое напряжение по фигурам Лиссажу на экране осциллографа.

I. Юстировка системы

- Соберите оптическую схему согласно рис. 1. Включите лазер и установите анализатор (без кристалла в схеме) так, чтобы лазерное излучение через него не проходило (скрещенные поляризации).

Чтобы убедиться, что лазерный луч поляризован вертикально, определите разрешённое направление анализатора: посмотрите сквозь поляроид на дневной свет от окна, отражённый от светлой поверхности (от стола, подоконника); вращая поляроид, найдите минимум освещённости и заметьте отсчёт угла на лимбе. Вблизи угла Брюстера в отражённом свете преобладает компонента светового вектора, параллельная плоскости стола («правило иголки»), следовательно, минимум отражённого света соответствует вертикальному разрешённому направлению поляроида.

- Поставьте кристалл и установите перед ним вплотную к кювете матовую пластинку. Расстояние от кристалла до экрана определяет размер интерференционной картины и её контрастность: 70–80 см — оптимальное расстояние для тёмной комнаты, в светлое время дня — около 30 см.
- Получите на экране интерференционную картину. Отклоняя кристалл с помощью юстировочного винта (рис. 1) и поворачивая рейтер с кюветой вокруг вертикальной оси, добейтесь совмещения центра коноскопической картины с положением луча на экране в отсутствие матовой пластиинки.

Поверните анализатор на 90° и убедитесь, что коноскопическая картина изменилась на негативную. Верните анализатор в прежнее положение (горизонтальное разрешённое направление).

II. Измерения

4. Измерьте радиусы тёмных колец $r(m)$ и расстояние L от середины кристалла до экрана.

Постройте график $r^2 = f(m)$. По углу наклона прямой определите двулучепреломление $(n_o - n_e)$ ниобата лития, пользуясь формулой (2). Величины n_o , ℓ и λ указаны на установке.

5. Ещё раз убедитесь, что направление лазерного луча совпадает с направлением на центр интерференционной картины и уберите матовую пластинку. Можно немного подъюстировать кристалл до получения минимальной интенсивности луча после прохождения анализатора.

Подключите разъём блока питания на постоянное напряжение ($=$), установите регулятор напряжения на минимальное напряжение и включите блок питания в сеть.

С увеличением напряжения на кристалле яркость пятна на экране увеличивается и достигает максимума при $U = U_{\lambda/2}$. При $U = 2U_{\lambda/2} = U_\lambda$ яркость снова будет минимальной и т. д. Проделайте то же для параллельных поляризаций лазера и анализатора. Определите полуволновое напряжение ниобата лития.

6. Подайте на кристалл напряжение $U = \frac{1}{2}U_{\lambda/2} = U_{\lambda/4}$ (четвертьволновое напряжение). Поляризация на выходе кристалла должна быть круговой. Убедитесь в этом, вращая анализатор и наблюдая за яркостью пятна на экране.

7. Установите вместо экрана фотодиод (рис. 3) и подключите его к y -входу осциллографа. Убрав напряжение до нуля, переключите разъём с постоянного ($=$) на переменное напряжение (\sim). С трёхвольтового выхода блока питания подайте сигнал на вход x осциллографа. Отклонение луча осциллографа по оси x , таким образом, будет пропорционально напряжению U на кристалле, а по оси y — интенсивности прошедшего через анализатор сигнала $I_{\text{вых}}$.

8. Постепенно повышая напряжение на кристалле, наблюдайте на экране осциллографа фигуры Лиссажу, соответствующие зависимостям $I_{\text{вых}}(U)$ для скрещенных поляризаций лазера и анализатора.

Слегка поворачивая кристалл, сделайте фигуру Лиссажу симметричной. Определите по фигурам Лиссажу полуволновое напряжение $U_{\lambda/2}$ как ΔU , соответствующее переходу от максимума к минимуму сигнала на осциллограмме. Сравните значения полу волнового напряжения, полученные при постоянном и переменном напряжениях.

9. Зарисуйте фигуры Лиссажу для напряжений $U_{\lambda/2}$, U_λ , $U_{3\lambda/2}$ при скрещенных поляризациях лазера и анализатора. Проследите, как меняется картина при переходе к параллельным поляризациям.

Контрольные вопросы

1. Можно ли наблюдать эффект Поккельса в жидкости?
2. Почему при повороте анализатора на 90° интерференционная картина на экране меняется с позитива на негатив?
3. Что такое полуволновое напряжение $U_{\lambda/2}$? Как оно зависит от длины волны λ ?
4. Почему при $U = \frac{1}{2}U_{\lambda/2}$ поляризация на выходе из кристалла круговая?
5. Оцените относительное изменение показателя преломления данного кристалла при подаче напряжения $U = U_{\lambda/2}$.
6. Выведите формулу (5).

Литература

1. *Ландсберг Г.С.* Оптика. — М.: Физматлит, 2003. §§ 148, 150–153.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §§ 76, 91.
- 3*. *Борн М., Вольф З.* Основы оптики. — М.: Наука, 1970. §§ 14.3, 14.4.
- 4*. *Яриев А.О.* Квантовая электроника. — М.: Советское радио, 1980. §§ 14.1–14.5.

Работа 4.7.3

Поляризация

Цель работы: ознакомление с методами получения и анализа поляризованного света.

В работе используются: оптическая скамья с осветителем; зелёный светофильтр; два поляроида; чёрное зеркало; полированная эбонитовая пластинка; стопа стеклянных пластинок; слюдянные пластиинки разной толщины; пластиинки в $1/4$ и $1/2$ длины волны; пластиинка в одну длину волны для зелёного света (пластиинка чувствительного оттенка).

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теоретическим введением к разделу.

Определение направления разрешённой плоскости колебаний поляроида. Определить направление разрешённых колебаний поляроида проще всего с помощью чёрного зеркала.

При падении света на отражающую поверхность под углом Брюстера, свет в отражённом луче почти полностью поляризован, а вектор E параллелен отражающей поверхности («правило иголки»). Луч света,

прошедший поляроид и отразившийся от чёрного зеркала, имеет минимальную интенсивность при выполнении двух условий: во-первых, свет падает на отражающую поверхность под углом Брюстера и, во-вторых, в падающем пучке вектор \mathbf{E} лежит в плоскости падения.

Вращая поляроид вокруг направления луча и чёрное зеркало вокруг оси, перпендикулярной лучу, методом последовательных приближений можно добиться минимальной яркости луча, отражённого от зеркала, и таким образом определить разрешённое направление поляроида.

Измеряя угол поворота зеркала (угол Брюстера), нетрудно определить коэффициент преломления материала, из которого изготовлено зеркало. Описанный метод часто используется для измерения коэффициента преломления непрозрачных диэлектриков.

Получение эллиптически поляризованного света. Эллиптически поляризованный свет можно получить из линейно поляризованного с помощью двоякопреломляющих кристаллических пластинок.

Двоякопреломляющая пластинка имеет два взаимно перпендикулярных главных направления, совпадающих с осями эллипсоида диэлектрической проницаемости. Волны, поляризованные вдоль главных направлений, распространяются в пластинке с разными скоростями, не изменяя характера своей поляризации. Эти волны называются *главными*. Мы будем обозначать показатели преломления для главных волн через n_x и n_y , где x и y — главные направления кристаллической пластинки (рис. 1).

Пусть на пластинку падает линейно поляризованный волна, электрический вектор которой ориентирован под некоторым углом α к оси x . Разложим вектор \mathbf{E} на составляющие E_x и E_y . На входе пластинки E_x и E_y находятся в фазе. На выходе из-за разности скоростей между ними появляется разность хода $d(n_x - n_y)$, при этом сдвиг фаз определяется соотношением (см. (7.12)):

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{m} = kd(n_x - n_y), \quad (1)$$

где k — волновое число (в пустоте), d — толщина кристаллической пластиинки. Как уже отмечалось, при сложении двух взаимно перпенди-

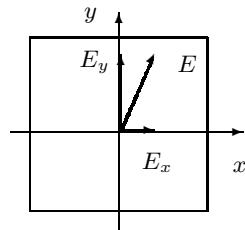


Рис. 1. Разложение линейно поляризованного света по главным направлениям двоякопреломляющей пластинки

кулярных колебаний, обладающих некоторым сдвигом фаз, образуется колебание, поляризованное по эллипсу.

Рассмотрим практически важные частные случаи.

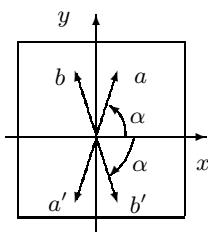


Рис. 2. Поворот направления колебаний с помощью пластинки в $\lambda/2$ (рис. 2). Как нетрудно сообразить, направление bb' является зеркальным отображением направления aa' относительно одного из главных направлений пластиинки. Такую пластиинку используют для поворота направления колебаний линейно поляризованного света.

в) Пластиинка создаёт между колебаниями сдвиг фаз $\pi/2$ (пластиинка в четверть длины волны). При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний, имеющих разность фаз $\pi/2$, образуется эллипс, главные оси которого совпадают с координатными осями x и y . При равенстве амплитуд $E_x^{\max} = E_y^{\max}$ возникает круговая поляризация.

Следует отметить, что, говоря о пластиинках λ , $\lambda/2$, $\lambda/4$ и т. д., всегда подразумевают какую-либо вполне определённую монохроматическую компоненту (например, пластиинка $\lambda/2$ для зелёного света). Если на двоякпреломляющую пластиинку падает не монохроматический свет, то на выходе из неё для разных спектральных компонент эллипсы поляризации будут различными.

Анализ эллиптически поляризованного света. Анализ эллиптически поляризованного света сводится к нахождению главных осей эллипса поляризации и к определению направления вращения электрического вектора.

Главные оси эллипса поляризации определяются с помощью анализатора по максимуму и минимуму интенсивности проходящего света. Направление вращения электрического вектора может быть найдено с помощью пластиинки в четверть длины волны, для которой известно, какая из главных волн, E_x или E_y , имеет большую скорость распространения (и соответственно меньшее значение показателя преломления).

а) Пластиинка даёт сдвиг фаз 2π (пластиинка в длину волны λ). В результате сложения волн на выходе пластиинки образуется линейно поляризованная волна с тем же направлением колебаний, что и в падающей волне.

б) Пластиинка даёт сдвиг фаз π (пластиинка в полдлины волны $\lambda/2$). На выходе пластиинки снова образуется линейно поляризованная волна. Направление bb' колебаний этой волны повёрнуто относительно направления aa' колебаний падающей волны

Выберем для определённости координатные оси x и y на пластинке так, чтобы $n_x < n_y$. В этом случае главная волна E_x имеет большую скорость распространения. Поместим такую пластинку на пути эллиптически поляризованного света и совместим главные направления пластиинки $\lambda/4$ с главными осями эллипса поляризации. На выходе из этой пластиинки сдвиг фаз между E_x и E_y вместо $\pi/2$ станет равным нулю или π . Свет окажется линейно поляризованным. Из двух возможных значений сдвига фаз, 0 или π , реализуется одно: то, которое соответствует имеющемуся в волне направлению вращения электрического вектора.

Рассмотрим, например, случай, когда электрический вектор в эллиптически поляризованной волне вращается против часовой стрелки, если смотреть навстречу лучу. В этом случае, очевидно, в волне, падающей на пластиинку в $\lambda/4$, колебание E_y отстает по фазе на $\pi/2$ от колебания E_x . При прохождении через пластиинку разность фаз увеличивается до π . Таким образом на выходе из пластиинки возникают линейно поляризованные волны со сдвигом фаз π . Сложение этих волн даёт плоскополяризованную волну, электрический вектор которой располагается во втором и четвёртом квадрантах координатной системы x, y .

Рассуждая аналогичным образом, найдём, что при вращении электрического вектора по часовой стрелке направление колебаний в линейно поляризованной волне, выходящей из пластиинки, располагается в первом и третьем квадрантах. Определяя направление колебаний на выходе из пластиинки с помощью поляроида, можно, таким образом, определить характер эллиптической поляризации (вращение против или по часовой стрелке).

Пластиинка чувствительного оттенка. Выше предполагалось известным, какому из двух главных направлений пластиинки в четверть длины волны соответствует большая скорость распространения света. Установить это можно различными способами, например с помощью пластиинки *чувствительного оттенка* (так называют пластиинку в λ для зелёной спектральной компоненты, $\lambda = 560$ нм).

Пластиинка имеет форму стрелы (рис. 3), вдоль оси которой расположено главное направление, соответствующее большей скорости распространения.

Если пластиинка чувствительного оттенка помещена между скрещенными поляроидами и главные направления пластиинки не параллельны направлениям разрешённых колебаний поляроидов, то при освещении белым светом пластиинка кажется окрашенной в лилово-красный цвет. Это объясняется тем, что зелёная компонента линейно поляризованно-

го света при прохождении пластиинки не меняет поляризации и задерживается вторым полароидом. Для красной и фиолетовой компонент пластиинка создаёт сдвиг фаз, несколько отличный от 2π . На выходе из пластиинки красная и фиолетовая компоненты оказываются поэтому эллиптически поляризованными и частично проходят через второй полароид. Таким образом, в известном смысле наблюдаемый в указанном опыте цвет пластиинки дополнителен к зелёному.

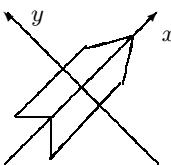


Рис. 3. Пластиинка чувствительного оттенка

Если между скрещенными полароидами поместить пластиинку чувствительного оттенка (λ) и пластиинку в $\lambda/4$ так, чтобы их главные направления совпадали, цвет пластиинки изменится. Если у пластиинки чувствительного оттенка и пластиинки в $\lambda/4$ совпадут главные направления, соответствующие большей скорости распространения, то разность хода между E_x и E_y для зелёного света составит уже $5\lambda/4$. Это соответствует разности хода в λ для света с большей длиной волны, т. е. для «более красного» света. При освещении этих пластиинок (напомним, что они расположены между скрещенными полароидами) белым светом теперь погасится не зелёная, а красная часть спектра, и проходящий свет будет казаться зеленовато-голубым. Если же главные направления, соответствующие большей скорости распространения, у пластиинки чувствительного оттенка и у пластиинки в $\lambda/4$ окажутся перпендикулярными, то проходящий свет приобретёт оранжево-желтую окраску (погасится фиолетово-голубая часть спектра).

Изменение цвета позволяет, таким образом, определить, какое из главных направлений пластиинки в $\lambda/4$ соответствует большей скорости распространения.

Интерференция поляризованных лучей. Тонкие двоякотрепломляющие пластиинки, помещённые между полароидами, кажутся окрашенными. Эта окраска может быть истолкована как результат интерференции поляризованных лучей. На рис. 4 представлена схема для случая скрещенных полароидов.

Здесь $r_1 p'_1$ — разрешённое направление колебаний поляризатора (первого полароида); x, y — координатная система, связанная с главными направлениями двоякотрепломляющей пластиинки; $r_2 p'_2$ — разрешённое направление колебаний анализатора (второго полароида). Волны E_x и E_y на выходе из пластиинки когерентны, но не могут интерферировать, так как $E_x \perp E_y$. Волны E_1 и E_2 на выходе второго полароида также являются когерентными и к тому же поляризованы в одной плос-

кости. Эти волны интерферируют между собой. Результат интерференции определяется зависящим от длины волны сдвигом фаз между E_1 и E_2 . В результате интерференции поляризованных лучей пластиинка, освещаемая белым светом, кажется окрашенной.

Если поворачивать двоякпреломляющую пластиинку, расположенную между скрещенными поляроидами, то соотношение амплитуд волн E_1 и E_2 и разность фаз между ними не изменяются. Это означает, что цвет пластиинки при её поворотах не меняется, а меняется только интенсивность света. За один оборот пластиинки интенсивность четыре раза обращается в нуль — это происходит при совпадении главных направлений x и y с разрешёнными направлениями колебаний поляроидов.

Если же двоякпреломляющую пластиинку оставить неподвижной, а второй поляроид повернуть так, чтобы разрешённые направления $p_1p'_1$ и $p_2p'_2$ совпали, то волны E_1 и E_2 приобретают дополнительный фазовый сдвиг на π для всех спектральных компонент; при этом их амплитуды изменятся так, что цвет пластиинки изменится на дополнительный. Студентам предлагается самостоятельно это доказать.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается с помощью чёрного зеркала определить разрешённые направления поляроидов; определить характер поляризации света, прошедшего стопу и отражённого от неё под углом Брюстера; оценить угол Брюстера для эбонита; выделить пластиинки $\lambda/2$ и $\lambda/4$; определить направления большей и меньшей скоростей для пластиинки $\lambda/4$; исследовать интерференцию поляризованных лучей.

1. Определите разрешённые направления поляроидов. Для этого

а) разместите на оптической скамье осветитель S , поляроид P_1 и чёрное зеркало (рис. 5);

б) поворачивая поляроид вокруг направления луча, а чёрное зеркало вокруг вертикальной оси, методом последовательных приближений добейтесь наименьшей яркости отражённого пятна. Определите разрешённое направление поляроида. Зарисуйте схему и опишите результат.

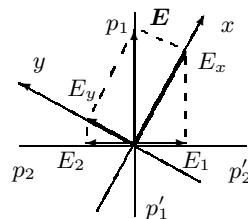


Рис. 4. К объяснению
интерференции
поляризованных лучей

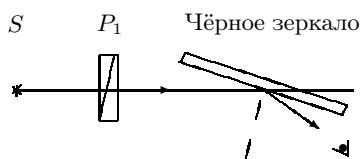


Рис. 5. Определение
разрешённого направления
поляроида

в) Поставьте вместо чёрного зеркала второй поляроид и определите его разрешённое направление, скрестив поляроиды.

2. Определите показатель преломления эбонита. Для этого

а) поставьте на скамью вместо чёрного зеркала (рис. 5) эбонитовую пластину и определите по лимбу угол Брюстера для эбонита, оцените неточность установки угла;

б) повторите измерения, добавив светофильтр Φ , и сравните результаты;

в) по углу Брюстера рассчитайте показатель преломления эбонита и сравните с табличным.

3. Исследуйте характер поляризации света в преломлённом и отражённом от стопы лучах.

Для этого поставьте вместо эбонитового зеркала (рис. 5) стопу стеклянных пластинок под углом Брюстера.

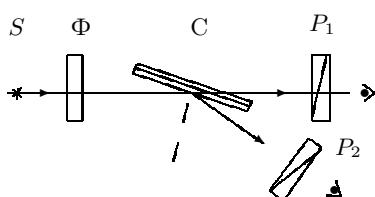


Рис. 6. Исследование стопы

а) поставьте кристаллическую пластинку между скрещенными поляроидами (рис. 7);

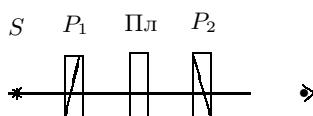


Рис. 7. Определение главных направлений в пластинках

Осветите стопу неполяризованным светом и, рассматривая через поляроиды (рис. 6) отражённый от стопы и преломлённый лучи, определите в них ориентацию вектора E . Опишите результат.

4. Определите главные направления двоякопереломляющих пластин:

б) вращая пластинку вокруг направления луча и наблюдая за интенсивностью света, проходящего сквозь второй поляроид, определите, при каком условии главные направления пластины совпадают с разрешёнными направлениями поляроидов;

в) повторите опыт для второй пла-

стинки.

5. Для выделения пластин $\lambda/2$ и $\lambda/4$

а) добавьте к схеме, изображённой на рис. 7, зелёный фильтр;

б) установите разрешённое направление первого поляроида горизонтально, а главные направления исследуемой пластины — под углом 45° к горизонтали;

в) с помощью второго поляроида установите, какую поляризацию имеет свет, прошедший пластинку: круговую или линейную с переходом в другой квадрант. Опишите результат.

6. Определите «быструю» и «медленную» оси в пластинке $\lambda/4$:

а) поставьте между скрещенными поляроидами пластинку чувствительного оттенка, имеющую вид стрелки, и убедитесь, что эта пластина не меняет поляризацию зелёного света;

б) уберите зелёный фильтр и убедитесь, что стрелка имеет пурпурный цвет; объясните это явление;

в) добавьте к схеме пластинку $\lambda/4$ (рис. 8), главные направления которой совпадают с главными направлениями пластины λ и ориентированы под углом 45° к разрешённым направлениям скрещенных поляроидов.

При повороте рейтера со стрелкой на 180° вокруг вертикальной оси цвет стрелки меняется от зелено-голубого до оранжево-жёлтого. В каком случае «быстрые» оси обеих пластин совпадают? Объясните явление и опишите результат.

г) Для последнего упражнения установите направление «быстрой» оси пластины $\lambda/4$ горизонтально.

7. Исследуйте интерференцию поляризованных лучей. Для этого расположите между скрещенными поляроидами мозаичную слюдяную пластинку. Она собрана из 4-х узких полосок слюды, лежащих по сторонам квадрата (две полоски «толщиной» $\lambda/4$ и по одной — $\lambda/2$ и $3\lambda/4$). В центральном квадратике слюды нет. Главные направления всех пластинок ориентированы параллельно сторонам квадрата.

а) Вращая пластинку, наблюдайте за изменениями (цвета или интенсивности) в отдельном квадратике.

б) Не трогая пластиинки, вращайте второй поляроид. Чем отличается эффект? Опишите и объясните результат.

8. Определите направление вращения светового вектора в эллиптически поляризованной волне.

а) Нарисуйте эллипс поляризации для вектора E , вышедшего из пластиинки $\lambda/4$, и укажите, какая из его осей соответствует большей скорости. Рядом нарисуйте две вышедших из пластиинки синусоиды: $x(t)$ и $y(t)$ со сдвигом фаз в четверть периода. Проанализируйте графики и определите направление вращения электрического вектора в эллиптически поляризованной волне.

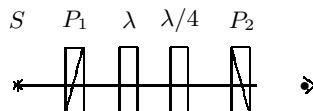


Рис. 8. Определение направлений большей и меньшей скорости

б) Поставьте зелёный фильтр, а за ним между скрещенными поляроидами — пластинку произвольной толщины (это может быть пластина $\lambda/4$ с соседней установки).

в) Получите эллиптически-поляризованный свет. Для этого установите разрешённое направление первого поляроида под углом $10\text{--}20^\circ$ к горизонтали так, чтобы вектор E падающего на пластинку света был расположен в первом квадранте. Установите разрешённое направление второго поляроида вертикально и, вращая пластинку, найдите минимальную интенсивность света, прошедшего второй поляроид. Так будет получен эллипс поляризации с вертикально ориентированной малой осью.

г) Для определения направления вращения светового вектора установите между поляроидами дополнительную пластинку $\lambda/4$ с горизонтально ориентированной «быстрой» осью. В этом случае свет на выходе из второй пластины будет линейно поляризован. Если пластины поодиночке дают эллипсы, вращающиеся в разные стороны, то поставленные друг за другом, они скомпенсируют разность фаз, и вектор E на выходе останется в первом и третьем квадрантах. Если же световой вектор перешёл в смежные квадранты, значит, эллипсы вращаются в одну сторону. А как вращается вектор E после пластины $\lambda/4$, было определено в п. 8а.

Контрольные вопросы

- Покажите, что при выполнении условия Брюстера отражённый и преломлённый лучи взаимно перпендикулярны.
- Как отличить свет с правой и с левой круговой поляризацией?
- Неполяризованный свет проходит через двоякопереломляющую пластинку $\lambda/4$. Что можно сказать о поляризации света на выходе из пластины?
- Как отличить естественный свет от света, поляризованного по кругу, и от смеси естественного света со светом, поляризованным по кругу?
- Объясните изменения интенсивности и цвета, наблюдаемые в опытах по интерференции поляризованных лучей.
- Почему свет от вечернего неба поляризован?

Литература

- Ландсберг Г.С.* Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. XVI–XVIII, XXIII, XXVI, §§ 142–146.
- Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. Гл. VII, §§ 75–79.
- Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. — М.: Физматлит, 2001. Ч. II, гл. 11; ч. III, гл. 10.

4*. Горелик Г.С. Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959. Гл. X.

5*. Поль Р.В. Оптика и атомная физика. — М.: Наука, 1966. Гл. X.

6*. Дитчберн Р. Физическая оптика. — М.: Наука, 1965. Гл. XII.

Работа 4.7.4

Вращение плоскости поляризации

Цель работы: исследовать вращение плоскости поляризации света в оптически активных растворах и в магнитном поле.

В работе используются: сахариметр; магнитный поляриметр; автотрансформатор (ЛАТР); амперметр; милливеберметр; стеклянные трубы с раствором сахара и дистиллированной водой; образцы из стекла.

Оптически активные вещества. При прохождении плоскополяризованного света сквозь некоторые вещества обнаруживается, что плоскость, в которой колеблется электрический вектор, постепенно поворачивается. Такие вещества получили название оптически активных. К их числу принадлежат как твёрдые (например, кварц), так и жидккие тела (например, скрипидар, раствор сахара).

Направление вращения плоскости поляризации принято устанавливать для наблюдателя, смотрящего навстречу световому пучку. Если плоскость поляризации поворачивается по часовой стрелке, то вещество называют правовращающим, или положительным, а в противном случае — левовращающим, или отрицательным.

Основы теории вращения плоскости поляризации были заложены Френелем (1817 г.). Он показал, что оптическая активность является особым типом двойного лучепреломления. В оптически активных веществах скорость распространения света различна для лучей, поляризованных по правому и левому кругу. Для правовращающих веществ

$$v_{\text{пп}} > v_{\text{лл}}, \quad n_{\text{пп}} < n_{\text{лл}},$$

а для левовращающих веществ

$$v_{\text{пп}} < v_{\text{лл}}, \quad n_{\text{пп}} > n_{\text{лл}},$$

где $v_{\text{пп}}$ и $v_{\text{лл}}$ — скорости распространения света с правой и левой циркулярной поляризацией, а $n_{\text{пп}}$ и $n_{\text{лл}}$ — соответствующие показатели преломления.

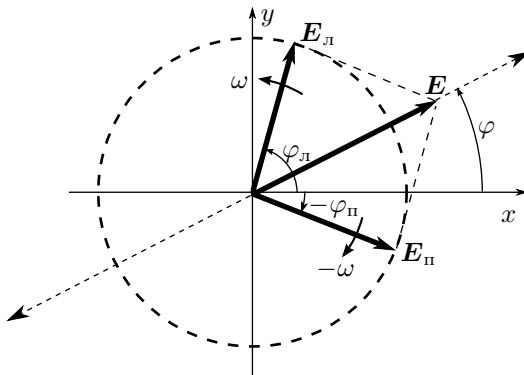


Рис. 1. Две циркулярно поляризованные волны (правая и левая) и их сумма — линейно поляризованная волна

Рассмотрим две монохроматические плоские волны одинаковой амплитуды, имеющие круговую поляризацию, и распространяющиеся в активной среде вдоль оси z . Пусть одна волна является левополяризованной, другая — правополяризованной. Векторы электрического поля этих волн лежат в плоскости xy (см. рис. 1), а их угол поворота относительно оси x совпадает с фазой волны в момент времени t в данной точке оси z : в левополяризованной волне вектор \mathbf{E}_L вращается против часовой стрелки (если смотреть навстречу волне), и угол поворота равен $\varphi_L = \omega t - k_L z$; и наоборот, в правополяризованной волне вектор \mathbf{E}_π вращается по часовой стрелке, а угол поворота равен $\varphi_\pi = -(\omega t - k_\pi z)$ (k_L и k_π — волновые числа лево- и правополяризованной волн в среде). Поскольку $|\mathbf{E}_\pi| = |\mathbf{E}_L|$, суммарный вектор $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\pi + \mathbf{E}_L$ направлен по биссектрисе, то есть под углом $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_\pi + \varphi_L) = \frac{1}{2}(k_\pi - k_L)z$ к оси x . Иными словами, фаза суммарной волны равна

$$\varphi = \frac{1}{2}(k_\pi - k_L)z, \quad (1)$$

и не зависит от времени. Таким образом, при фиксированном z суммарный вектор \mathbf{E} не вращается — он, как нетрудно видеть, колеблется по гармоническому закону с циклической частотой ω . Значит, сумма двух циркулярно поляризованных волн есть не что иное, как волна, поляризованная линейно. При этом формула (1) даёт зависимость угла поворота φ плоскости её поляризации от координаты z .

Угол поворота плоскости поляризации в результате прохождения активной пластинки толщиной ℓ можно выразить через длину волны

света в пустоте λ_0 и показатели преломления среды $n_{\text{п}}$ и $n_{\text{л}}$. Из формулы (1) найдём

$$\varphi = \pi(n_{\text{п}} - n_{\text{л}}) \frac{\ell}{\lambda_0}. \quad (2)$$

Если для данной среды $v_{\text{п}} > v_{\text{л}}$ и соответственно $n_{\text{п}} < n_{\text{л}}$, то угол φ поворота плоскости поляризации отрицателен, т. е. вращение плоскости поляризации происходит вправо (по часовой стрелке), а для веществ, для которых $n_{\text{п}} > n_{\text{л}}$ ($v_{\text{п}} < v_{\text{л}}$), поворот происходит влево (против часовой стрелки).

Молекулярная оптика объясняет различие $n_{\text{п}}$ и $n_{\text{л}}$ асимметричным строением молекул (для активных жидкостей) или асимметричным строением кристаллов (в случае активных кристаллических тел). Такие молекулы (кристаллы) не имеют ни центра, ни плоскости симметрии. Все оптически активные вещества существуют в виде двух модификаций, обладающих соответственно правым и левым вращением. Эти две модификации являются зеркальными изображениями друг друга.

Угол φ поворота плоскости поляризации прямо пропорционален толщине ℓ слоя раствора и концентрации активного вещества C :

$$\varphi = \alpha \ell C. \quad (3)$$

Коэффициент пропорциональности α зависит от природы вещества и носит название **постоянной вращения**. Постоянная вращения очень слабо зависит от температуры и приблизительно обратно пропорциональна квадрату длины волны света.

Принято выражать α в градусах, ℓ — в дециметрах и C — в $\text{г}/\text{см}^3$. В этом случае постоянная α называется **удельным вращением** и обозначается через $[\alpha]$.

Магнитное вращение плоскости поляризации. В 1846 г. Фарaday обнаружил, что плоскость поляризации света, проходящего сквозь вещества, не обладающие оптической активностью, испытывает вращение, если поместить эти вещества в магнитное поле, направленное вдоль светового луча. Угол φ поворота плоскости поляризации пропорционален длине пути ℓ света в веществе и индукции магнитного поля B :

$$\varphi = \beta \ell B. \quad (4)$$

Коэффициент пропорциональности β носит название **постоянной Верде**. В таблицах значение β обычно приводится в угловых минутах на сантиметр и гаусс.

Знак вращения определяется для наблюдателя, смотрящего по направлению магнитного поля. У большинства веществ плоскость поляризации поворачивается вправо, — такие вещества называются положительными. В противном случае вещество называют отрицательным.

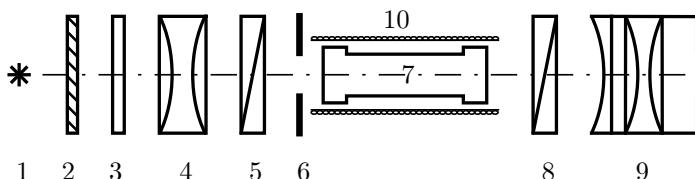


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

Экспериментальная установка. Вращение плоскости поляризации света в предлагаемой работе изучается с помощью модифицированного технического прибора — сахариметра, оптическая схема которого изображена на рис. 2. Монохроматический свет от натриевой лампы 1 падает на матовое стекло 2, проходит через дополнительный светофильтр 3, который убирает все спектральные линии, кроме двойной жёлтой, проходит конденсорную систему 4, создающую параллельный пучок и поляризатор 5 (поляроидная пленка). За поляризатором находится круглая диафрагма 6, наполовину перекрытая кварцевой пластинкой, являющейся пластинкой $\lambda/2$ для жёлтой линии натрия, поворачивающей плоскость поляризации света, прошедшего через неё, примерно на 50 градусов. Затем свет проходит через исследуемый образец (трубку с раствором) 7, которая находится внутри соленоида 10, по которому может течь постоянный ток, затем через анализатор 8 (поляроидная пленка) и попадает в зрительную трубу, через которую ведётся визуальное наблюдение.

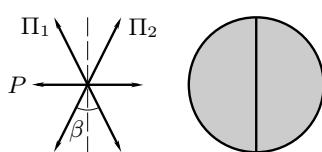


Рис. 3

При наблюдении в зрительную трубу видны два соприкасающихся поля зрения, разделённых чёткой границей. Если направление разрешённых колебаний анализатора расположено симметрично относительно плоскостей поляризации обеих половин пучка, то оба поля зрения имеют одинаковую освещённость.

Если при прохождении света через исследуемое вещество его плоскость поляризации повернётся, то фотометрическое равенство нарушится — одно поле окажется ярче другого. Равенство освещённостей

можно восстановить, поворачивая анализатор. Угол поворота анализатора определяется по лимбу с нониусом.

ЗАДАНИЕ

Внимание! Угол поворота плоскости поляризации в установке невелик, поэтому важно проводить измерения с максимальной возможной точностью. Для этого необходимо правильно подобрать условия измерения и добиться хорошей адаптации глаза к ним. Следует проводить измерения в затемнённой комнате, чтобы чувствительность глаза к изменению освещённости поля зрения (контрастная чувствительность) была максимальной. Следует избегать засветки глаз яркими источниками света — это снижает контрастную чувствительность. Также необходимо выбрать режим измерения, не приводящий к чрезмерному утомлению глаз, что тоже снижает чувствительность и приводит к ухудшению воспроизводимости измерений. Время измерения ограничено также тем, что при протекании значительного тока в соленоиде выделяется тепло, что может привести к его перегреву и выходу из строя. Поэтому при измерении постоянной Верде измерения необходимо проводить быстро, а ток должен протекать через соленоид только во время измерения.

I. Исследование вращения плоскости поляризации в оптически активных растворах

1. Включите натриевую лампу и дайте ей прогреться в течение 3–5 минут.
2. Не помещая образец в соленоид, настройте зрительную трубу так чтобы увидеть резкое изображение входной диафрагмы сахариметра. Поворачивая анализатор, убедитесь, что поле зрения разделено на две половины, освещённость которых по-разному меняется при повороте анализатора, убедитесь, что изображение границы раздела полей зрения резкое. Добейтесь равенства освещённостей обеих половин поля зрения и снимите отсчёт по лимбу с нониусом с помощью отсчётной лупы. Проведите опыт несколько раз и убедитесь, что результаты измерения воспроизводятся с точностью не хуже примерно 0,1 градуса. (Точность будет наибольшей, если вы добьётесь исчезновения границы при минимальной освещённости обоих полей зрения.)
3. Поместите в соленоид исследуемый образец и измерьте угол поворота плоскости поляризации не менее 5-и раз. Убедитесь в хорошей воспроизводимости результатов измерений. За измеренное значение примите среднюю величину.
4. Повторите измерения для нескольких растворов глюкозы и фруктозы с известной концентрацией и определите концентрацию неизвестных растворов.

II. Исследование магнитного вращения плоскости поляризации

5. Поместите исследуемое вещество в поляриметр. Получите резкое изображение границы раздела полей зрения. Определите нулевую точку прибора, добившись исчезновения границы раздела полей зрения. Проредите не менее пяти независимых измерений и усредните результаты.
6. Отградуируйте соленоид. Меняя ток в катушке, снимите зависимость показаний милливеберметра от величины тока. Постройте график зависимости $B(I)$. На тех установках, где милливеберметр отсутствует, указан коэффициент пропорциональности между I и B .
7. Измерьте угол φ поворота плоскости поляризации при 5–6 значениях тока в катушке. Постройте график $\varphi(B)$. Измерьте длину трубки. По графику, зная длину трубки, определите постоянную Верде. Сравните результат с табличным.

Контрольные вопросы

1. В чём заключается отличие оптической активности от двойного лучепреломления?
2. Как объясняет теория Френеля поворот плоскости поляризации в оптически активных веществах?
3. Что называют удельным вращением?
4. Как работает поляризационная призма Николя?
5. Опишите принцип устройства и работы поляриметра.
- 6.* При исследовании магнитного вращения плоскости поляризации иногда применяют устройства с многократным прохождением света в образце в направлении по и против магнитного поля. Объясните, почему в этом случае эффект поворота плоскости поляризации накапливается.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. §§ 94, 95.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. XXX.

ТАБЛИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Т а б л и ц а 1
Основные физические постоянные

Название	Формула или обозначение	Значение и размерность		
Скорость света в вакууме	c	299 792 458 (точно)	$\times 10^{-27}$	м/с
Постоянная Планка	h	6,626 069 57(29)	$\times 10^{-34}$	Дж · с
	$\hbar = h/2\pi$	1,054 571 726(47)	$\times 10^{-34}$	эрг · с
Постоянная Больцмана	k_B	1,380 6488(13)	$\times 10^{-23}$	Дж/К
Постоянная Авогадро	N_A	6,022 141 29(27)	$\times 10^{23}$	моль $^{-1}$
Газовая постоянная	$R = k_B N_A$	8,314 4621(75)		Дж/(моль · К)
Число Лошмидта ($T = 273,15$ К, $P = 101,325$ кПа)	$n_{\text{Л}} = \frac{N_A}{V}$	2,6867805(24)	$\times 10^{25}$	$\frac{\text{м}^{-3}}{\text{см}^{-3}}$
Атомная единица массы	1 а.е.м.	1,660 538 921(73)	$\times 10^{-27}$	кг
Гравитационная постоянная	G	6,67384(80)	$\times 10^{-11}$	$\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2}{\text{дин} \cdot \text{см}^2/\text{г}^2}$
Магнитная постоянная	μ_0	4π (точно)	$\times 10^{-7}$	Н/А 2
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	8,854 187 817...	$\times 10^{-12}$	Ф/м
Элементарный заряд	e	1,602 176 565(35)	$\times 10^{-19}$	Кл
		4,803 204 25(10)	$\times 10^{-10}$	ед. СГС
Удельный заряд электрона	e/m_e	1,758 820,088(39)	$\times 10^{11}$	Кл/кг

Т а б л и ц а 1
Основные физические постоянные (продолжение)

Постоянная тонкой структуры	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ $1/\alpha$	7,297 352 5698(24) $\times 10^{-3}$ 137,035 999 074(44)
Боровский радиус	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$	5,291 772 0859(36) $\times 10^{-11}$ м
Постоянная Ридберга	$R_\infty = \frac{m_e e^4}{4\pi c\hbar^3}$	1,097 373 156 8539(55) $\times 10^7$ м $^{-1}$
«Ридберг»	$R_y = \frac{e^2}{2a_0}$	13,605 692 53(30) эВ 2,179 872 171(96) $\times 10^{-18}$ Дж
Постоянная Стефана—Больцмана	$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2}$	5,670 373(21) $\times 10^{-8}$ Вт/(м $^2 \cdot$ К 4) 10 $^{-5}$ эрг/(см $^2 \cdot$ К 4)
Масса и энергия покоя электрона	m_e $m_e c^2$	9,109 382 91(40) $\times 10^{-31}$ кг 0,510 998 928(11) $\times 10^6$ эВ
Масса и энергия покоя протона	m_p $m_p c^2$	1,672 621 777(74) $\times 10^{-27}$ кг 0,938 272 046(21) $\times 10^9$ эВ
Масса и энергия покоя нейтрона	m_n $m_n c^2$	1,674 927 351(74) $\times 10^{-27}$ кг 0,939 565 379(21) $\times 10^9$ эВ

Т а б л и ц а 2
Плотности некоторых веществ при 20 °C

Вещество	Алмаз	Вода	Глицерин	Лёд	Спирт метиловый	Спирт этиловый
Формула	C	H ₂ O	C ₃ H ₈ O ₃	H ₂ O	CH ₄ O	C ₂ H ₆ O
ρ , г/см 3	3,01-3,52	0,998	1,26	0,913	0,793	0,789

Т а б л и ц а 3
Скорость звука в воде при различных температурах

t , °C	0	10	20	25	30	40	50	60	70	80
v , м/с	1407	1445	1484	1497	1510	1528	1544	1556	1561	1557

Т а б л и ц а 4
Длины волн и обозначения главных фраунгоферовых линий
и показателей преломления для них

Длина волны, нм	Цвет линии	Линия (по Фраунгоферу)	Элемент, излучающий линию	Показатель преломления
766,5	Темно-красная	A	K	n_A
706,5	Красная	b	He	n_b
656,3	Красная	C	H	n_C
589,3	Жёлтая	D	Na	n_D
587,6	Жёлтая	d	He	n_d
546,1	Зелёная	e	Hg	n_e
486,1	Голубая	F	H	n_F
435,8	Синяя	g	Hg	n_g
434,0	Синяя	G	H	n_G
404,7	Фиолетовая	h	Hg	n_h

Т а б л и ц а 5
Показатели преломления газов при нормальных условиях
для линии D

Газ	Ф-ла	n_D	Газ	Ф-ла	n_D
Азот	N ₂	1,000297	Метан	CH ₄	1,000441
Аммиак	NH ₃	1,000375	Неон	Ne	1,000067
Аргон	Ar	1,000284	Ртуть (пар)	Hg	1,000933
Ацетилен	C ₂ H ₂	1,000606	Сернистый газ	SO ₂	1,000660
Бензол	C ₆ H ₆	1,000788	Серный ангидрид	SO ₃	1,000737
Водяной пар	H ₂ O	1,000252	Сероводород	H ₂ S	1,000619
Водород	H ₂	1,000139	Сероуглерод	CS ₂	1,001476
Воздух		1,000292	Углекислота	CO ₂	1,000450
Гелий	He	1,000035	Углерод 4-х хлористый	CCl ₄	1,001768
Кислород	O ₂	1,000272	Углерода окись	CO	1,000334
Криптон	Kr	1,000427	Фтор	F ₂	1,000195
Ксенон	Xe	1,000702	Хлор	Cl ₂	1,000768

Т а б л и ц а 6
Показатели преломления жидкостей и твёрдых тел при 20 °C
для линии D

Жидкость	n_D	Жидкость	n_D	Твёрдое тело	n_D
Анилин	1,588	Раствор сахара 20%	1,364	Алмаз	2,42
Ацетон	1,359	Раствор сахара 80%	1,490	Каменная соль	1,54
Бензол	1,501	Сероводород	1,885	Лёд ¹⁾	1,31
Глицерин	1,470	Сероуглерод	1,630	Полистирол	1,60
Канадский бальзам	1,53	Скипидар	1,470	Рубин	1,76
Ксиол (мета-)	1,497	Спирт метиловый	1,331	Стекло	1,46–2,04
Ксиол (орт-)	1,505	Спирт этиловый	1,362	Слюдя	1,56–1,60
Ксиол (пара-)	1,496	Толуол	1,497	Топаз	1,63
Метилен (хлористый)	1,424	Углерод четырех-хлористый	1,460	Эбонит	1,6–1,7
α -монобромнафталин	1,660	Хлороформ	1,446	Янтарь	1,53
Нитробензол	1,553	Этил бромистый	1,424		
Нитротолуол (орт-)	1,547	Эфир этиловый	1,354		

¹⁾ При температуре от 0 до –4 °C.

Т а б л и ц а 7
Показатели преломления воды при 20°C

Длина волны, нм	n	Длина волны, нм	n
1256,0	1,3210	508,6	1,3360
678,0	1,3308	486,1 (F)	1,3371
656,3 (C)	1,3311	480,0	1,3374
643,8	1,3314	434,0 (G)	1,3403
589,3 (D)	1,3330	303,4	1,3581
546,1	1,3345	214,4	1,4032

Температурный коэффициент для линии D $\beta_D = -8,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Т а б л и ц а 8
Показатели преломления кристаллов при 18°C

Длина волны, нм	Элемент	Полевой (исландский) шпат		Флюорит ¹⁾	Кристаллический кварц		Плавленый кварц	Каменная соль	Сильвин
		n_o	n_e		n_o	n_e			
670,8	Li	1,6537	1,4843	1,4323	1,5415	1,5505	1,4561	1,5400	1,4866
656,3(C)	H	1,6544	1,4846	1,4325	1,5419	1,5509	1,4564	1,5407	1,4872
643,8	Ca	1,6550	1,4847	1,4327	1,5423	1,5514	1,4568	1,5412	1,4877
589,3(D)	Na	1,6584	1,4864	1,4339	1,5443	1,5534	1,4585	1,5443	1,4904
546,1	Hg	1,6616	1,4879	1,4350	1,5462	1,5553	1,4602	1,5475	1,4931
508,6	Cd	1,6653	1,4895	1,4362	1,5482	1,5575	1,4619	1,5509	1,4961
486,1(F)	H	1,6678	1,4907	1,4369	1,5497	1,5590	1,4632	1,5534	1,4983
480,0	Cd	1,6686	1,4911	1,4371	1,5501	1,5594	1,4636	1,5541	1,4990
404,7	Hg	1,6813	1,4969	1,4415	1,5572	1,5667	1,4697	1,5665	1,5097
Температурный коэффициент $\beta_D, 10^{-5} \text{ K}^{-1}$		+0,5	+1,4	-1,0	-0,5	-0,6	-0,3	-3,6	-3,3

¹⁾ плавиковый шпат

Т а б л и ц а 9
Характеристики оптических стёкол

Название	Марка стекла	n_D	$n_F - n_C$	$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$
Легкий крон	ЛК-3	1,4874	0,00696	70,0
	ЛК-4	1,4903	0,00753	65,1
Крон	К-1	1,4982	0,00765	65,1
	К-3	1,5100	0,00805	63,4
	К-8	1,5163	0,00806	64,1
Баритовый крон	БК-4	1,5302	0,00877	60,5
	БК-6	1,5399	0,00905	59,7
	БК-10	1,5688	0,01015	56,0
Тяжелый крон	ТК-7	1,6137	0,01090	56,3
	ТК-21	1,6568	0,01285	51,1
Легкий флинт	ЛФ-1	1,5406	0,01145	47,2
	ЛФ-7	1,5783	0,01407	41,1
Флинт	Ф-6	1,6031	0,01590	37,9
	Ф-8	1,6248	0,01757	35,6
Баритовый флинт	БФ-12	1,6259	0,01601	39,1
	БФ-28	1,6641	0,01874	35,4
Тяжелый флинт	ТФ-1	1,6475	0,01912	33,9
	ТФ-2	1,6725	0,02087	32,2
	ТФ-4	1,7398	0,02628	28,2
	ТФ-5	1,7550	0,02743	27,5
	ТФ-10	1,8060	0,03178	25,4

Т а б л и ц а 10
Длины волн спектральных линий некоторых элементов
в видимой части спектра

Эл.	λ , нм								
Ag	405,53	Cd	467,82	H	410,174	K	404,41	Ra	434,06
	421,09		479,99		434,043		533,97		566,08
	421,27		508,58		434,050		535,95		620,03
	466,85		609,92		486,128		578,26		644,62
	520,91		643,85		486,133		580,20		648,73
	546,55		455,53		656,271		691,13		698,02
	547,15		459,32		656,285		693,90		711,85
Ba	455,40	Cs	584,47	He	402,62	Li	766,49	Rb	420,18
	493,41		621,29		447,15		769,90		421,57
	553,55		658,65		471,31		413,23		572,45
	577,77		672,33		492,19		460,29		607,07
	614,17		687,04		501,57		497,20		620,63
	649,69		697,33		587,56		610,36		629,83
	659,53		722,85		667,81		624,01		722,52
	705,99	Cu		Hg	706,57	Na	670,78	Sn	714,12
	712,03				728,13		748,13		722,52
Ca	728,03		402,27		404,66		516,73		451,13
	422,67		406,27		407,78		517,27		452,47
	445,48		453,08		434,75		518,36		563,17
	458,59		458,69		435,83		552,85		597,03
	643,91		465,11		491,60		466,86		603,77
	714,81		470,47		546,07		498,28		614,97
	720,32		510,55		567,59		514,91		646,24
	732,01		515,33		576,96		515,36		405,77
			521,82		578,97		568,82		468,02
			570,02		579,07		589,00		472,22
			578,22		612,35		589,59		481,06
			692,01		690,72		615,42		518,20
			757,01				616,68		636,23

Т а б л и ц а 11
Длины волн ярких линий в спектре ртутной лампы ДРШ-250

Окраска линии	Относительная яркость (визуальная оценка)	Длина волны, нм	
Красная	4	690,72	
Красная	4	623,40	
Желтая	10	579,07	
Желтая	(дублет)	8	576,96
Зеленая	10	546,07	
Голубая	4	491,60	
Синяя	4	435,83	
Фиолетовая	2	404,66	

Т а б л и ц а 12
Длины волн некоторых ярких линий в спектре неона¹⁾

Окраска линии	Относительная яркость ²⁾	Длина волны, нм	Окраска линии	Относительная яркость ²⁾	Длина волны, нм
Красная	1	671,70	Красно-оранжевая	3	609,62
	3	667,83		4	607,43
	5	659,89		2	603,00
	5	653,29	Оранжевая	2	597,55
	5	650,65		3	594,48
Ярко-красная	10	640,22	Жёлтая	4	588,19
	10	638,30		10	585,25
	5	633,44		3	576,44
	2	630,48	Зелёная	8	540,06
	8	626,65		5	534,11
	3	621,73		5	533,08
	5	616,36		3	503,13
Красно-оранжевая	6	614,31	Голубая	5	482,73

¹⁾ В таблице подробно даны линии красно-оранжевой области спектра, обычно используемые для градуировки спектральных приборов. В области длин волн, меньших 580 нм, градуировку удобнее проводить по спектру ртути.

²⁾ Визуальная оценка.

Т а б л и ц а 13
Вращение плоскости поляризации в кварце
(при 18 °C; на 1 мм толщины)

Длина волны, нм	766,5 (A)	687,0	656,3 (C)	589,3 (D)	527,6	486,1 (F)	434,0 (G)	430,8	396,9
Угол поворота, град	12,77	15,7	17,3	21,71	27,5	32,7	42,0	42,6	51,2

Т а б л и ц а 14
Магнитное вращение плоскости поляризации в некоторых веществах при 20 °C

Вещество	Угол поворота плоскости поляризации			
	$\lambda = 656,3$ нм (C)	$\lambda = 589,3$ нм (D)	$\lambda = 486,1$ нм (F)	
Вода	0,0102'	0,0131'	0,0197'	На 1 см длины луча в магнитном поле 10^{-4} Тл
Сероуглерод	0,0319'	0,0419'	0,0668'	
Кварц \perp оси	0,0137'	0,0166'	0,0250'	
Кислород	0,484'	0,559'	0,721'	При давлении 1 атм на 100 см длины луча в магнитном поле 0,1 Тл
Водород	0,430'	0,537'	0,805'	
Углекислота	0,691'	0,862'	0,286'	
Железо	217°	195°	145°	На 10^{-3} см в магнитном поле 1,5 Тл
Никель	92°	75°	64°	

ОГЛАВЛЕНИЕ

Р а з д е л I. Геометрическая теория и моделирование оптических систем.....	3
1. Общее рассмотрение центрированных оптических систем	3
1.1. Элементарная оптическая ячейка	4
1.2. Центрированная оптическая система	7
1.3. Построение изображения в центрированной системе	11
2. Сложение центрированных оптических систем	13
3. Примеры центрированных оптических систем	15
3.2. Телескопическая система	15
3.2. Толстая линза	15
3.4. Тонкая линза	17
4.1. Система из двух тонких линз	18
4. Оптические приборы	18
4.1. Лупа	18
4.2. Микроскоп	20
4.3. Зрительные трубы	21
5. Основные aberrации оптических систем	23
5.1. Сферическая aberrация	24
5.2. Хроматическая aberrация	25
Работа 4.1.1. Изучение центрированных оптических систем.....	27
Работа 4.1.2. Моделирование оптических приборов и определение их увеличения.....	38
Работа 4.1.3. Рефрактометр Аббе	45

Р а з д е л II. Интерференция. Когерентность	56
1. Основные понятия	56
1.1. Волновое уравнение. Простейшие типы волн	56
Плоская монохроматическая волна	57
Сферическая волна	59
1.2. Монохроматические волны. Комплексная амплитуда. Уравнение Гельмгольца	60
2. Интерференция монохроматических волн	61
2.1. Двухлучевая интерференция. Видность полос	61
2.2. Интерференция различных типов волн. Ширина интерференционных полос	63
Интерференция сферических волн	63
Интерференция плоских волн	64
3. Статистическая природа излучения. Когерентность	65
3.1. Статистическая модель излучения света источником	65
3.2. Ширина линии. Механизмы уширения	68
3.3. Функция временной когерентности	70
3.5. Интерференция и когерентность	72
3.5. Спектральный анализ	73
3.6. Теорема Винера—Хинчина	75
4. Пространственная когерентность	76
4.1. Степень пространственной когерентности	76
4.2. Теорема Ван-Циттера—Цернике	78
4.3. Однородный источник	80
4.4. Пространственная когерентность и апертура интерференции	81
4.5. Локализация интерференционной картины	83
5. Интерферометры	84
5.1. Интерферометр Релея	85
5.2. Интерферометр Жамена	87
5.3. Интерферометр Майкельсона	89
5.4. Кольца Ньютона	91
Работа 4.2.1. Кольца Ньютона	93
Работа 4.2.2. Интерферометр Жамена	98

Работа 4.2.3. Интерферометр Релея.....	104
Работа 4.2.4. Интерферометр Майкельсона.....	109
Работа 4.2.5. Когерентность света	117
Работа 4.2.6. Дифракция когерентного излучения на шероховатой поверхности	128
 Р а з д е л III. Дифракция. Фурье-оптика	149
1. Дифракция	149
1.1. Постановка задачи. Волновой параметр	149
1.2. Граничные условия. Функция пропускания транспаранта ..	150
Примеры тонких экранов	152
1.3. Принцип Гюйгенса–Френеля	154
1.4. Дифракция Френеля	157
Дифракционные задачи с осевой симметрией. Спираль Френеля ..	157
Дифракция Френеля на щели	161
Условия наблюдения дифракции Френеля	164
1.5. Дифракция Фраунгофера	165
Дифракция Фраунгофера и преобразование Фурье	165
Дифракция Фраунгофера на щели	168
Дифракция Фраунгофера на двух щелях	169
Дифракция Фраунгофера на решётке	170
Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии	173
2. Принципы фурье-оптики	174
2.1. Спектральный метод решения задачи дифракции	174
2.2. Примеры расчёта дифракции спектральным методом	178
Дифракция Френеля на амплитудной синусоидальной решётке ..	178
Дифракция на фазовой синусоидальной решётке	180
2.3. Дифракция Френеля на периодических структурах.	
Эффект Талбота (саморепродукция)	180
2.4. Спектр плоских волн при дифракции на щели. Соотношение неопределённостей	182
2.5. Область геометрической оптики	184
Условие применимости геометрической оптики	184
Тонкий транспарант	185
Что такое параллельный пучок света	186
2.6. Поле в фокальной плоскости линзы. Пространственное преобразование Фурье	188

2.7. Принцип двойной дифракции и формирование оптического изображения (теория Аббе)	191
2.8. Пространственная фильтрация	192
Мультиплексия (размножение) изображения	193
Визуализация фазовых объектов. Метод фазового контраста и метод тёмного поля	194
2.9. Разрешающая способность оптических систем	197
Дифракционное изображение удалённого источника	198
Дифракционное изображение точечного источника	199
Разрешающая способность. Критерий Рэлея	200
2.10. Формирование изображения. Передаточная функция.	
Разрешающая способность микроскопа	201
3. Принципы голограмии	205
3.1. Голограмма точечного источника (голограмма Габора)	206
3.2. Разрешающая способность голограммы	210
3.3. Схема с наклонным опорным пучком	211
Работа 4.3.1. Изучение дифракции света	214
Работа 4.3.2. Дифракция света на ультразвуковой волне в жидкости.....	226
Работа 4.3.3. Исследование разрешающей способности микроскопа методом Аббе	237
Работа 4.3.4. Метод преобразования Фурье в оптике	244
Работа 4.3.5. Изучение голограммы.....	250
Работа 4.3.6. Дифракция света на периодических структурах (саморепродукция)	260
 Р а з д е л IV. Спектральные приборы	265
1. Принцип работы спектральных приборов	265
2. Описание спектральных приборов	267
2.1. Амплитудная дифракционная решётка	267
2.2. Фазовая дифракционная решётка	271
2.3. Интерферометр Фабри–Перо	272
2.4. Призма	275
3. Угловая дисперсия спектральных приборов	277
4. Разрешающая способность	279
4.1. Амплитудная решётка, эшелон, призма	279

4.2. Интерферометр Фабри–Перо	282
5. Дисперсионная область	284
Работа 4.4.1. Амплитудная дифракционная решётка	286
Работа 4.4.2. Фазовая дифракционная решётка.....	288
Работа 4.4.3. Изучение призмы с помощью гoniометра	292
Работа 4.4.4. Интерферометр Фабри—Перо.....	295
Приложение	299
А. Устройство гoniометра Г5	299
Б. Юстировка гoniометра	301
В. Отсчёт углов	303
Г. Спектр ртутной лампы	304
 Р а з д е л V. Лазерное излучение	305
1. Общие принципы работы лазера	305
1.1. Элементарные процессы	306
1.2. Коэффициент усиления	308
1.3. Спектр генерации. Доплеровское уширение	309
1.4. Условие достижения порога генерации	311
1.5. Инверсная заселённость. Накачка	312
2. Модовый состав лазерного излучения	314
2.2. Продольные моды	314
2.2. Спектр излучения лазера	315
2.3. Когерентность лазерного излучения	317
2.4. Поперечные моды*	319
2.5. Провал Лэмба и конкуренция мод*	321
3. Распространённые типы лазеров*	323
Работа 4.5.1. Гелий–неоновый лазер.....	327
Приложение	338
Работа 4.5.2. Интерференция лазерного излучения.....	340
Работа 4.5.3. Сканирующий интерферометр	354
 Р а з д е л VI. Интерференция и туннелирование радиоволн	363
1. Введение	363
2. Генерация СВЧ-радиоволн	365

3. Распространение ЭМ-волн в радиоволноводах	367
4. Туннелирование СВЧ-радиоволн	371
Работа 4.6.1. Интерференция электромагнитных волн миллиметрового диапазона	377
Работа 4.6.2. Туннелирование миллиметровых радиоволн	384
 Р а з д е л VII. Поляризация. Кристаллооптика	389
1. Типы поляризации, основные понятия	389
2. Получение поляризованного света	391
3. Наблюдение и анализ поляризованного света. Закон Малюса ..	393
4. Двойное лучепреломление	395
5. Кристаллические пластиинки	398
7. Электрооптические эффекты	399
7. Оптическая активность. Эффект Фарадея	400
Работа 4.7.1. Двойное лучепреломление	402
Работа 4.7.2. Эффект Поккельса.....	409
Работа 4.7.3. Поляризация	416
Работа 4.7.4. Вращение плоскости поляризации	425
 Р а з д е л VIII. Таблицы физических величин	431

Учебное издание

*Максимычев Александр Витальевич
Александров Дмитрий Анатольевич
Берюлёва Нина Степановна
Виноградов Станислав Владиленович
Кириллов Вячеслав Петрович
Локшин Геннадий Рафаилович
Никулин Михаил Григорьевич
Петухов Владимир Андреевич
Попов Павел Владимирович
Судаков Олег Александрович*

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

Т. 2. Оптика

Компьютерная вёрстка: *Д. А. Александров, П. В. Попов*

Рисунки: *Н. С. Берюлёва, П. В. Попов*

Редакторы: *В. А. Дружинина, И. А. Волкова*

Корректоры: *О. П. Котова, Л. В. Себова*

Подписано в печать 03.02.2014. Формат 60 × 88¹/16.

Усл. печ. л. 27,9. Уч.-изд. л. 26,5. Тираж 2000 экз. Заказ № 86.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495)408–5822. E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отпечатано в полном соответствии с предоставленным оригиналом-макетом
ООО Печатный салон «Шанс»
125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2