

Лабораторная работа № 3.2.4

Свободные колебания в электрическом контуре

Рябых Владислав и Исыпов Илья, Б05-905

8 октября 2020 г.

Цель работы: исследование свободных колебаний в электрическом колебательном контуре.

В работе используются: генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, индуктивность, электронный осциллограф с разделительной панелью, измеритель LCR .

Теория

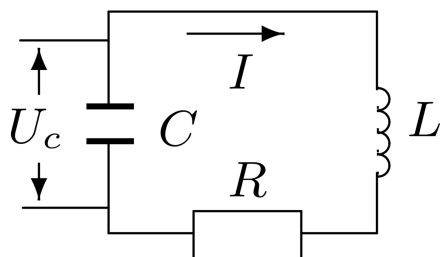


Рис. 1: Колебательный контур

Основное уравнение колебательного контура

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad (1)$$

Где $\gamma = \frac{R}{2L}$ — коэффициент затухания, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ — собственная частота контура. Решением этого уравнения являются затухающие колебания:

$$I = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta)$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Можно записать решение (1) и для напряжения:

$$U_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta)$$

В контуре со слабым затуханием ($\omega \simeq \omega_0$) верна **формула Томпсона** для периода:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \simeq \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Режим работы контура, при котором $\gamma = \omega_0$, называется **критическим**. Его сопротивление равно

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2)$$

Потери затухающих колебаний принято характеризовать через **добротность** и **логарифмический декремент затухания**:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad - \quad \text{Добротность, потери энергии} \quad (3)$$

$$\Theta = \frac{1}{n} \gamma T = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}} \quad - \quad \text{Лог. декремент, потери амплитуды} \quad (4)$$

Экспериментальная установка

На рис. 2 приведена схема для исследования свободных колебаний в контуре, содержащем постоянную индуктивность L и переменные ёмкость C и сопротивление R . Колебания наблюдаются на экране осциллографа. Для периодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор импульсов

Г5-54. С выхода генератора по коаксиальному кабелю импульсы поступают на колебательный контур через электронное реле, смонтированное в отдельном блоке (или на выходе генератора). Реле содержит диодный тиристор D и ограничительный резистор R_1 .

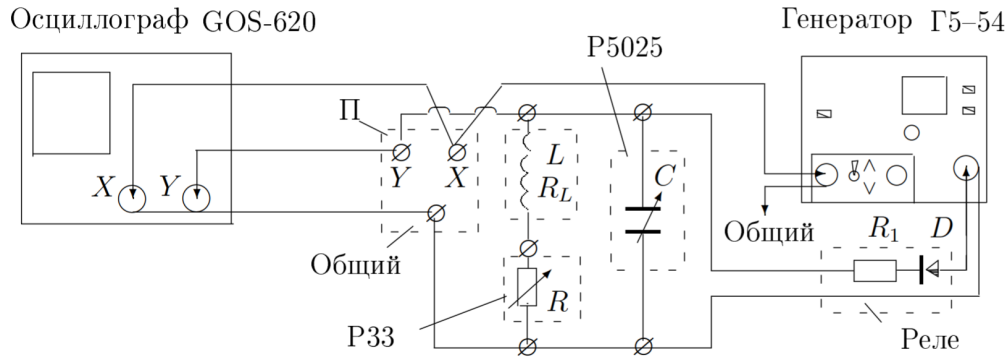


Рис. 2: Схема установки для исследования свободных колебаний

Импульсы заряжают конденсатор C . После каждого импульса генератор отключается от колебательного контура, и в контуре возникают свободные затухающие колебания. Входное сопротивление осциллографа велико ($\simeq 1$ МОм), так что его влиянием на контур можно пренебречь. Для получения устойчивой картины затухающих колебаний используется режим ждущей развёртки с синхронизацией внешними импульсами, поступающими с выхода <синхроимпульсы> генератора.

Ход работы

Измерение периодов

Проведем измерения при $R = 0$. Будем изменять ёмкость от 0.02 до 0.90 мкФ, проводя измерения периода по формуле $T_{\text{эксп}} = T_0 \frac{x}{nx_0}$, где $T_0 = 0.01$ с, x_0 — расстояние одного импульса, x — расстояние n импульсов. Погрешность $\sigma_x = \sigma_{x_0} = 0.1$, $\sigma_{T_0} = 0.001$ с, тогда

$$\sigma_{T_{\text{эксп}}} = T_{\text{эксп}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x_0}}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2}$$

а $T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{LC}$, где $L = 136$ мГн, $\sigma_L = 5$ мГн. $\frac{\sigma_C}{C} \approx 0$. Тогда $\sigma_{T_{\text{теор}}} = T_{\text{теор}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sigma_L}{L}$

Результаты измерений приведены в таблице 1.

Построим по данным из таблицы график зависимости $T_{\text{эксп}}$ от $T_{\text{теор}}$, см. рис 3

C , мкФ	n	$T_{\text{эксп}}$, мс	$T_{\text{теор}}$, мс	$\sigma_{T_{\text{эксп}}}$, мс	$\sigma_{T_{\text{теор}}}$, мс
0.02	32	0.31	0.33	0.03	0.01
0.13	12	0.83	0.84	0.08	0.02
0.24	8	1.25	1.13	0.13	0.03
0.35	7	1.43	1.37	0.14	0.03
0.46	6	1.67	1.57	0.17	0.04
0.57	5	2.00	1.75	0.20	0.04
0.68	5	2.00	1.91	0.20	0.05
0.79	5	2.00	2.06	0.20	0.05
0.90	4	2.50	2.20	0.25	0.05

Таблица 1: результаты измерений периодов

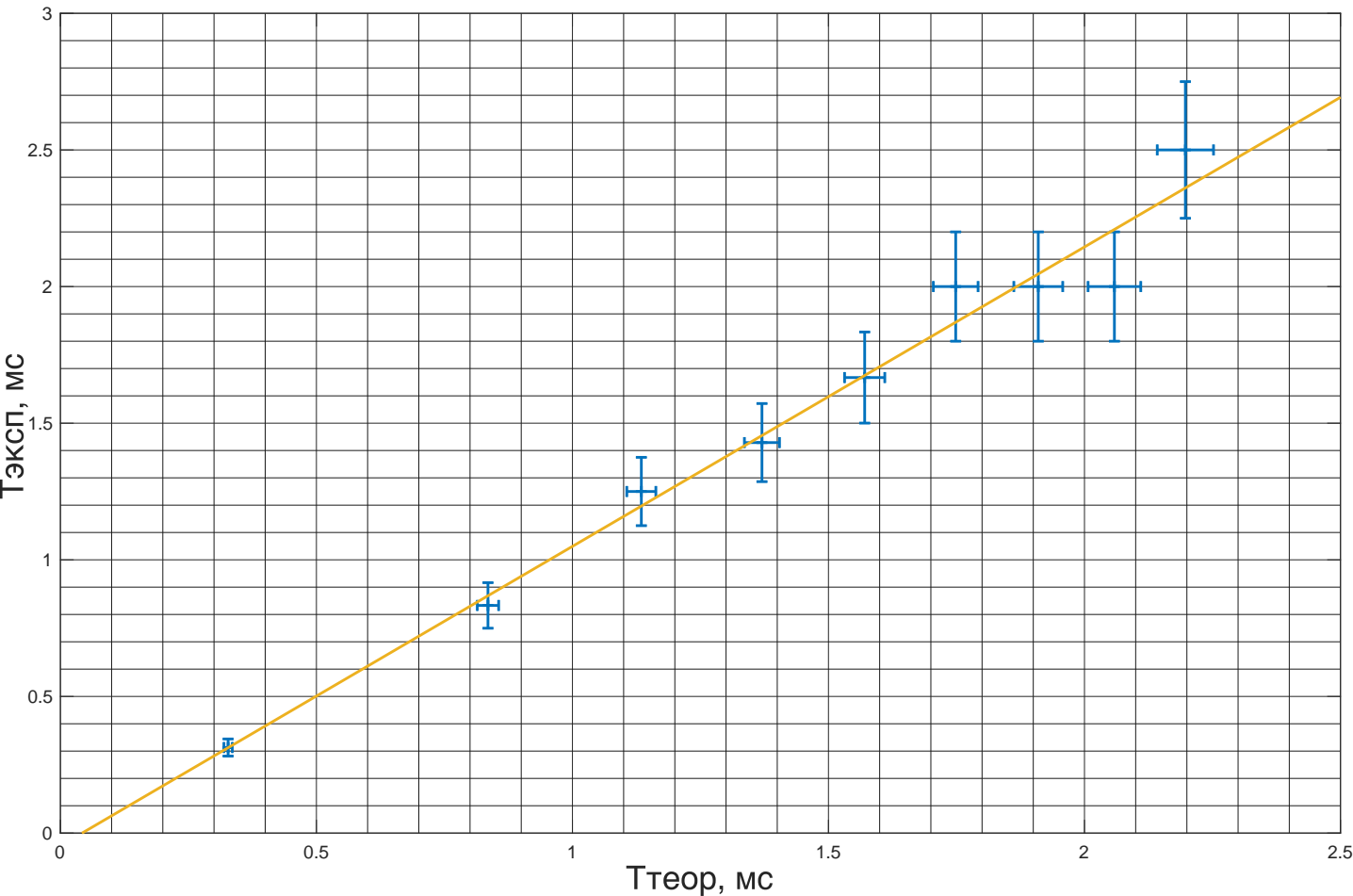


Рис. 3: график зависимости $T_{\text{эксп}}$ от $T_{\text{теор}}$

Критическое сопротивление и декремент затухания

Теперь, считая $L = 200$ мГн, вычислим ёмкость. $\nu_0 = 5$ кГц $\Rightarrow C = \frac{1}{(2\pi\nu_0)^2 L} = 5$ нФ. Тогда по формуле (2) $R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 12.6$ кОм. Установим $C = 5$ нФ на магазине

ёмкостей, будем наблюдать картину затухающих колебаний, изменяя R от $0.1R_{кр}$ до $R_{кр}$. При этом сопротивление магазина, при котором колебания становятся апериодическими, примерно равняется $R_{эксп} = 6900 \text{ Ом} \approx 0.55R_{кр}$.

Теперь, изменяя сопротивление от $0.1R_{эксп}$ до $0.3R_{эксп}$, будем измерять амплитуды колебаний, разделенных на n частей, для вычисления декремента по формуле (4). Погрешности амплитуд $\sigma_{U_k} = \sigma_{U_{k+n}} = 0.1$, таким образом $\sigma_{\Theta} = \Theta \sqrt{\left(\frac{\sigma_{U_k}}{U_k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{U_{k+n}}}{U_{k+n}}\right)^2}$

$R, R_{кр}$	$R, \text{Ом}$	$U_k, \text{дел}$	$U_{k+n}, \text{дел}$	n	Θ	$\frac{1}{\Theta^2}$	$R_{\text{конт}}, \text{Ом}$	$\frac{1}{R_{\text{конт}}^2}, 10^{-6} \text{Ом}^{-2}$	σ_{θ}	$\sigma_{\frac{1}{\theta^2}}$
0.10	690	3.1	0.6	4	0.41	5.93	711	1.98	0.07	2.01
0.13	897	6.2	0.6	4	0.58	2.93	918	1.19	0.10	0.98
0.16	1104	5.0	0.6	3	0.71	2.00	1125	0.79	0.12	0.67
0.19	1311	3.8	0.7	2	0.85	1.40	1332	0.56	0.12	0.41
0.22	1518	6.8	0.9	2	1.01	0.98	1539	0.42	0.11	0.22
0.25	1725	6.4	0.6	2	1.18	0.71	1746	0.33	0.20	0.24
0.28	1932	6.2	0.4	2	1.37	0.53	1953	0.26	0.34	0.27
0.30	2070	6.2	1.5	1	1.42	0.50	2091	0.23	0.10	0.07

Таблица 2: результаты измерений амплитуд

По данным из таблицы 2 построим график зависимости $\frac{1}{\Theta^2}$ от $\frac{1}{R_{\text{конт}}^2}$. См. рис. 4

Если заменить $\frac{1}{\Theta^2} = Y$, $\frac{1}{R_{\text{конт}}^2} = X$, то получаем, что $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 3.051 \cdot 10^6 \text{ Ом}^2$. Тогда $R_{кр} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta Y}{\Delta X}} \approx 10.97 \text{ кОм}$. Погрешность равна $\sigma_{R_{кр}} = R_{кр} \frac{1}{2} \frac{\sigma_a}{a} \approx 0.37 \text{ кОм}$.

Вычислим теоретическое значение $R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, где $C = 5 \text{ нФ}$, $L = 136 \text{ мГн}$. Получаем $R_{кр} \approx 10.43 \text{ кОм}$, погрешность $\sigma_{R_{кр}} = R_{кр} \frac{1}{2} \frac{\sigma_L}{L} \approx 0.29 \text{ кОм}$.

Добротность

По формуле (3) посчитаем добротность через параметры контура $C = 5 \text{ нФ}$, $L = 136 \text{ мГн}$. Погрешность $\sigma_Q = Q \frac{1}{2} \frac{\sigma_L}{L}$

Таким образом получаем:

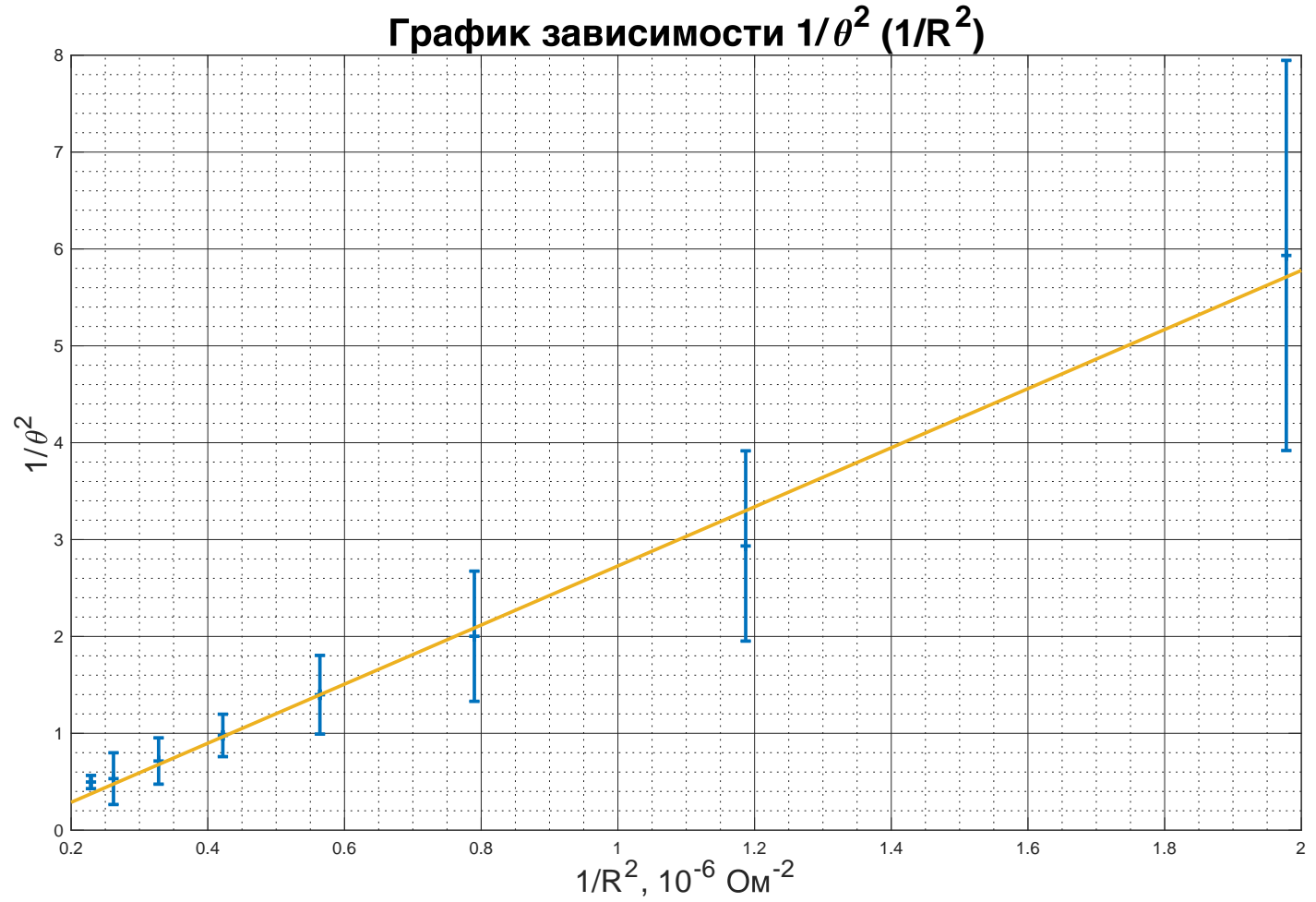


Рис. 4: график зависимости $\frac{1}{\Theta^2}$ от $\frac{1}{R_{\text{конт}}^2}$

$$R = 2070 \text{ Ом}, \quad Q = 2.49 \pm 0.03$$

$$R = 1725 \text{ Ом}, \quad Q = 2.99 \pm 0.04$$

$$R = 897 \text{ Ом}, \quad Q = 5.75 \pm 0.07$$

$$R = 690 \text{ Ом}, \quad Q = 7.48 \pm 0.09$$

Теперь сделаем это по формуле $Q = \frac{\pi}{\Theta}$. Данные берём из таблицы 2. Погрешность равна $\sigma_Q = Q \frac{\sigma_\Theta}{\Theta}$.

$$\Theta = 1.42, \quad Q = 2.21 \pm 0.38$$

$$\Theta = 1.18, \quad Q = 2.66 \pm 0.45$$

$$\Theta = 0.58, \quad Q = 5.41 \pm 0.91$$

$$\Theta = 0.41, \quad Q = 7.66 \pm 1.11$$

Теперь возьмём логарифмический декремент затухания, полученный через отношения радиусов спиралей, т.е. $\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{r_k}{r_{k+n}}$. Радиус мы будем измерять, наблюдая

картину фазовых колебаний.

При $R = 2070 \text{ Ом}$ $r_k = 0.6$, $r_{k+1} = 2.4 \Rightarrow \Theta \approx 1.39$

При $R = 1725 \text{ Ом}$ $r_k = 0.8$, $r_{k+1} = 2.6 \Rightarrow \Theta \approx 1.18$

При $R = 897 \text{ Ом}$ $r_k = 1.1$, $r_{k+2} = 3.4 \Rightarrow \Theta \approx 0.56$

При $R = 690 \text{ Ом}$ $r_k = 1.4$, $r_{k+2} = 3.6 \Rightarrow \Theta \approx 0.47$

Погрешность считается аналогично формулам выше. Итого получаем для спирали:

$$\Theta = 1.39, \quad Q = 2.27 \pm 0.43$$

$$\Theta = 1.18, \quad Q = 2.66 \pm 0.56$$

$$\Theta = 0.56, \quad Q = 5.57 \pm 0.71$$

$$\Theta = 0.47, \quad Q = 6.65 \pm 0.88$$

Выводы

В этой работе мы изучили свободные колебания в электрическом контуре: сначала измеряли периоды при $\gamma \approx 0$, затем находили критическое сопротивление и изучали колебательный контур при сопротивлениях порядка $(0.1 - 0.3) R_{\text{кр}}$. Мы исследовали зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления контура, а также добротности от параметров контура и от декремента.

Таблица 3: Расчет критического сопротивления

L	$R_{\text{кр}}$		
	Теор.	Подбор	Граф.
$136 \pm 5 \text{ мГн}$	$(10.43 \pm 0.29) \text{ кОм}$	12.6 кОм	$(10.97 \pm 0.37) \text{ кОм}$

Таблица 4: Расчет добротности

R	Q		
	Теор.	$f(\Theta)$	Спираль
2070 Ом	2.49 ± 0.03	2.21 ± 0.38	2.27 ± 0.43
1725 Ом	2.99 ± 0.04	2.66 ± 0.45	2.66 ± 0.56
897 Ом	5.75 ± 0.07	5.41 ± 0.91	5.57 ± 0.71
690 Ом	7.48 ± 0.09	7.66 ± 1.11	6.65 ± 0.88

Как можно видеть, полученные результаты совпадают в пределах погрешности. Значение критического сопротивления, полученное подбором, достаточно сильно отклонилось от двух других, потому что в нём мы брали примерное значение L .