Лабораторна робота №1
з Чисельних методів

Варіант №10

Петрів Владислав

Зміст

Завдання 1

1) Умова завдання

Знайти мінімальний від'ємний розв'язок $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ методом релаксації.

2)Теоретичні відомості

Якщо в методі простої ітерації вибрати $\psi(x) = \tau = const$, то ми отримаємо метод релаксації, формула якого має вигляд $x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n), n = 0,1,2 \bullet\bullet\bullet$

Цей метод збігається, якщо $-2 < \tau f'(x) < 0$.

Якщо в якомусь околі корені виконуються умови $f'(x) < 0, 0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$, то метод релаксації збігається для τ $\epsilon(0; \frac{2}{M_1})$.

Збіжність найкраща за умови:

$$\tau = \tau_{\text{опт}} = \frac{2}{m_1 + M_1}$$

З такого вибору τ для похибки $z_n = x_n - x^*$ правдива оцінка:

$$|z_n| < q^n |z_0|, n = 0,1,2, \bullet\bullet\bullet, \text{де } q = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}$$

Кількість ітерацій, які потрібно для відшукання розв'язку з точністю ε, можна визначити з нерівності:

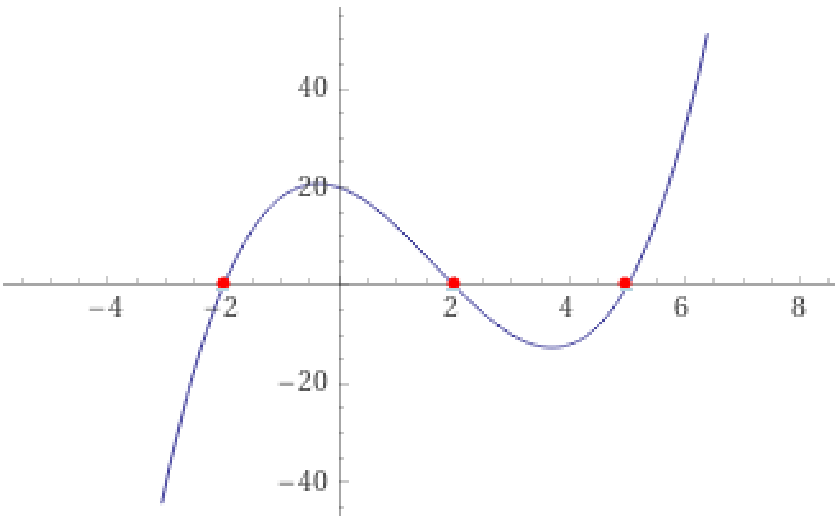
$$n \geq \left[\frac{\ln\left(\frac{|z_0|}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{q}\right)} \right] + 1$$

Якщо виконується умова $f'(x) > 0$, то формулу ітераційного методу потрібно записати у вигляді $x_{n+1} = x_n - \tau f(x_n)$.

3)Графік функції

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$$

.



4)Необхідні обчислення

$f'(x) = (x^3 - 5x^2 - 4x + 20)' = 3x^2 - 10x - 4$

З графіку бачимо три розв'язки.
Візьмемо окіл (-3;-1)
$f'(x) < 0, 0 < 9 < |f'(x)| < 53$. За формулою:

$$\tau = \tau_{\text{опт}} = \frac{2}{9+53} = \frac{1}{31} \approx\ 0{,}0322$$

Виберемо $x_0 = -3$

5)Результат роботи програми

```
1-th iteration: -3  -40
2-th iteration: -1.70968  7.22634
3-th iteration: -1.94279  1.56619
4-th iteration: -1.99331  0.186896
5-th iteration: -1.99934  0.0185742
6-th iteration: -1.99994  0.0018023
```

Завдання 2

1) Умова завдання

Знайти мінімальний від'ємний розв'язок $x^3 - 8x^2 + 9x + 18 = 0$ методом Ньютона.

2)Теоретичні відомості

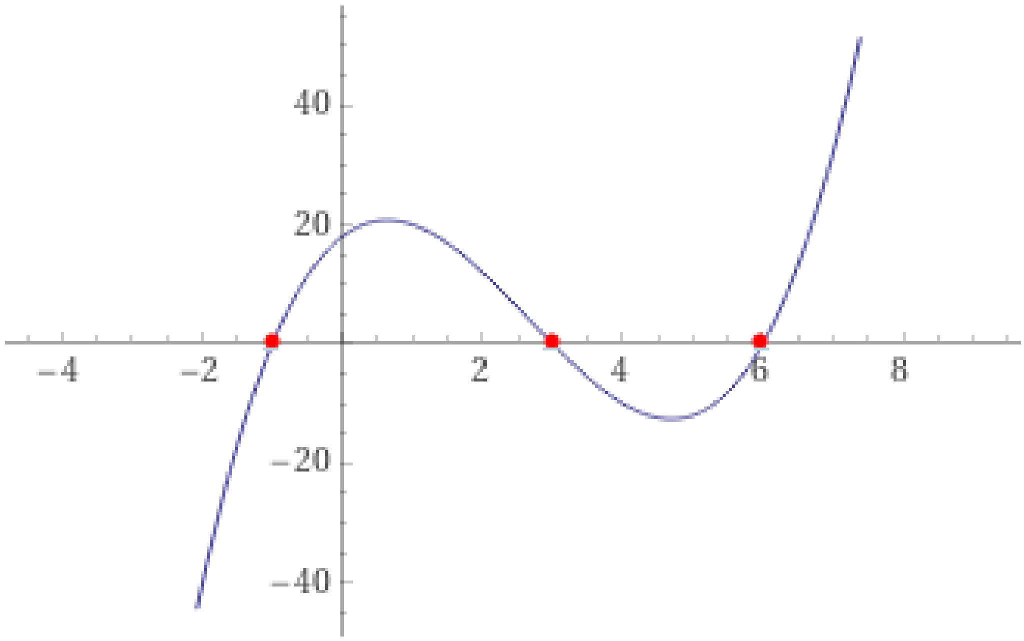
Метод Ньютона застосовують для розв'язання задачі $f(x) = 0$ із неперервно диференційованою функцією $f(x)$. Спочатку вибирають початкове наближення x_0, а наступні наближення обчислюють за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2, \bullet\bullet\bullet, f'(x_n) \neq 0$$

Якщо $f(x)\epsilon C^2[a;b], f(a)f(b) < 0$, а $f''(x)$ не змінює знак на $[a;b]$, то для $x_0\epsilon[a;b]$, що задовільняє умові $f(x_0)f''(x_0) > 0$, можна методом Ньютона обчислити єдиний корінь рівняння із будь-яким степенем точності.

3)Графік функції

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + 18$$



.

4) Необхідні обчислення

Знайдемо першу і другу похідні:

$f'(x) = (x^3 - 8x^2 + 9x + 18)' = 3x^2 - 16x + 9;$

$f''(x) = (3x^2 - 16x + 9)' = 6x - 16$

На графіку бачимо три розв'язки, розглянемо той, який лежить на проміжку [-2;0].

$[a; b] = [-2; 0], f(x)\epsilon C^2[-2; 0], f(-2)f(0) < 0$ та $f''(x)$ не змінює знак на $[-2; 0]$.
Виберемо $x_0 = -3{,}5, x_0\epsilon[-2; 0]$ та $f(x_0)f''(x_0) > 0$, отже методом Ньютона можна обчислити єдиний корінь рівняння.

5) Результат роботи програми

```
1-th iteration: -2  -40
2-th iteration: -1.24528  -7.54448
3-th iteration: -1.02059  -0.581168
4-th iteration: -1.00016  -0.00460607
5-th iteration: -1  -2.97604e-07
```

Завдання 3

1) Умова завдання

Знайти мінімальний від'ємний розв'язок $x^3 - 4x^2 - 15x + 18 = 0$ методом січних.

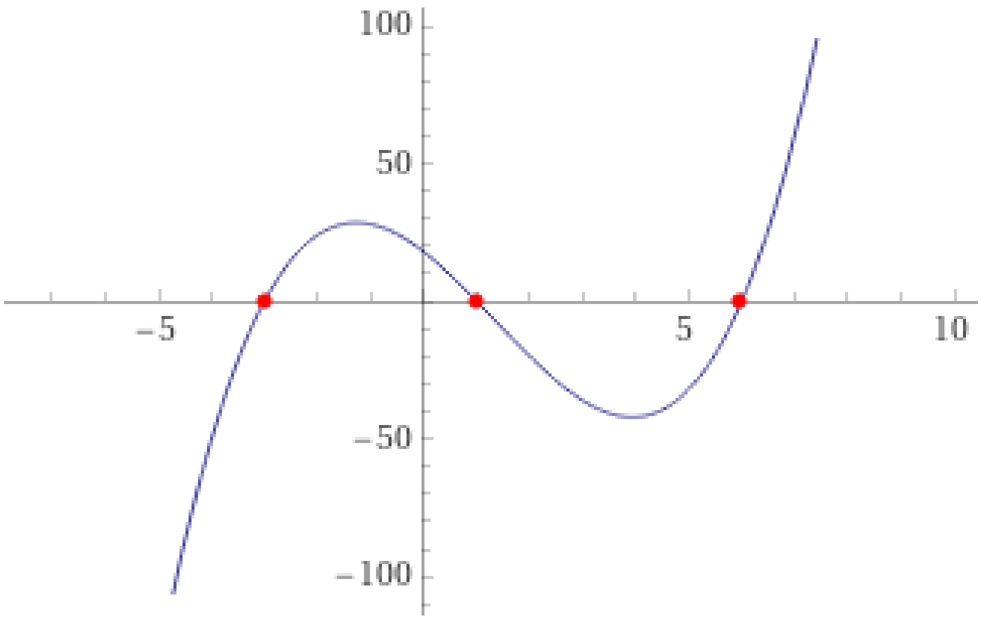
2)Теоретичні відомості

У методі Ньютона основна обчислювальна робота полягає у відшуканні значень $f(x)$ та $f'(x)$. Замінивши похідну $f'(x)$, використовувану в методі Ньютона, різницею послідовних значень функції, віднесеною до різниці значень аргументу (тобто замінивши дотичну січною), отримаємо таку ітераційну формулу для розв'язання рівняння $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, n = 0,1,2, \cdots$$

3)Графік функції

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 15x + 18$$



4) Необхідні обчислення

На графіку бачимо три розв'язки, розглянемо той, який лежить на проміжку [-5;-2].
Виберемо $x_0 = -5, x_{1=} - 4{,}5$.

5) Результат роботи програми

```
1-th iteration: -5  -132
2-th iteration: -3.54545  -23.6664
3-th iteration: -0.774194  26.7514
4-th iteration: -1.53165  27.9978
5-th iteration: -2.24461  20.2071
6-th iteration: 15.4827  2538.33
7-th iteration: -4.09387  -56.2431
8-th iteration: -2.38686  17.4162
9-th iteration: -3.6695  -30.2291
10-th iteration: -2.79047  6.98146
11-th iteration: -2.85572  4.92654
12-th iteration: -2.9554  1.57996
13-th iteration: -3.01214  -0.438904
14-th iteration: -3.00246  -0.0884829
15-th iteration: -2.9998  0.00710339
16-th iteration: -3.00001  -0.000385909
```