Лабораторна робота №3
з Чисельних методів

Варіант №10

Петрів Владислав

Зміст

Лабораторна робота №3 1
Завдання 1 3
1) Умова завдання 3
2) Теоретичні відомості 3
3) Необхідні обчислення 3
4) Результат роботи програми 3
Завдання 2 4
1) Умова завдання 4
2) Теоретичні відомості 4
3) Необхідні обчислення 4
4) Результат роботи програми 4

Завдання 1

1) Умова завдання

Методом Якобі розв’язати систему рівнянь,

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 31 \\ 19 \\ 35 \end{pmatrix}$$

2) Теоретичні відомості

Припустімо, що діагональні коефіцієнти невиродженої матриці A ненульові $(a_{ii} \neq 0)$. Якщо деякі $a_{ii} = 0$, то цього можна досягти, переставивши деякі рядки. Розділивши $i -$ те рівняння на a_{ii} отримаємо таку СЛАР:

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}.$$

Задамо якесь початкове наближення $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Наступні наближення обчислимо за формулами

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}\,, k = 0,1, \dots\ .$$

Метод збігається, тобто $\lim\limits_{k\to\infty} \|\vec{x}^k - \vec{x}\| = 0$, якщо виконуються умови діагональної переваги матриці A $|a_{ij}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, i = \overline{1,n}$. Якщо ж виконуються нерівності $q|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, i = \overline{1,n}, q < 1$,то правдива така оцінка точності:

$$\|\vec{x}^k - \vec{x}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|\vec{x}^0 - \vec{x}^1\|.$$

Ітерації виконують, поки не буде отримано потрібну кількість цифр у компонентах розв’язку чи до виконання умови $\frac{q^k}{1-q} < \varepsilon$.

Вибір останньої умови пояснюється тим, що в разі її виконання для $\vec{x}^0 = 0$ маємо оцінку

$$\delta(\vec{x}) \leq \frac{\|\vec{x}^k - \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \frac{q^k}{1-q} < \ \varepsilon.$$

3) Необхідні обчислення

Перевіримо умову діагональної переваги:

$$|6| \geq |3| + |1|; |5| \geq |3| + |2|; |3| \geq |1| + |1|; |5| \geq |2| + |1|;$$

Отже можна застосувати метод Якобі

4) Результат роботи програми

```
---Jacobi---

System Solution:
x[0]=  1.99874
x[1]=  3.00119
x[2]=  4.00079
x[3]=  4.99937
```

Завдання 2

1) Умова завдання

Методом Зейделя розв'язати систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ 28 \\ 23 \end{pmatrix}$$

2) Теоретичні відомості

Якщо в першій сумі використати вже відомі нові значення $x_j^{k+1}, j = \overline{1, i-1}$, то отримаємо формулу:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}\,, k = 0,1, \dots\ .$$

Достатні умови збіжності методу Зейделя такі самі, як для методу Якобі. Крім того, метод Зейделя збігається якщо $A^T = A \geq 0$. Умова невід'ємності симетричної матриці A означає, що невід'ємні її головні мінори.

Змінивши порядок обчислення компонент, отримаємо ще одну формулу методу Зейделя:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}\,, k = 0,1, \dots\ .$$

Умова зупинки ітераційного процесу Зейделя при досягнені точності в спрощеній формі має вигляд

$$||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| \leq \varepsilon$$

Більш точна умова закінчення ітераційного процесу має вигляд

$$||Ax^{(k)} - b|| \leq \varepsilon$$

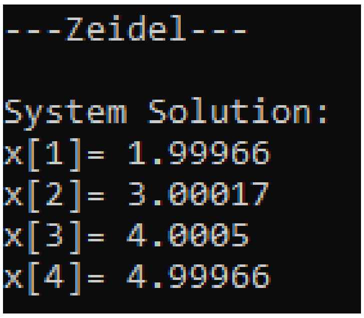
3) Необхідні обчислення

Перевіримо СЛАУ на збіжність:

$$|5| \geq |1| + |1|; |5| \geq |1|; |4| \geq |2| + |1|; |3| \geq |2|;$$

Отже можна застосувати метод Зейделя

4) Результат роботи програми



```
---Zeidel---

System Solution:
x[1]= 1.99966
x[2]= 3.00017
x[3]= 4.0005
x[4]= 4.99966
```