Лабораторна робота №2
з Чисельних методів

Варіант №10

Петрів Владислав

Зміст

Завдання 1

1) Умова завдання

Методом Гаусса з вибором головного елемента розв'язати систему рівнянь,

4	3	1	0		X1		29
-2	2	6	1	x	X2	=	38
0	5	2	3		X3		48
0	1	2	7		X4		56

2) Теоретичні відомості

Метод Гаусса з вибором головного елемента застосовують тоді, коли головний елемент на k-му кроці $a_{kk}^{(k-1)} = 0$. На кожному кроці виключають чергове невідоме за допомогою рівняння з найбільшим за модулем коефіцієнтом при відповідному невідомому. Головний елемент можна вибирати такими способами:

a) За рядком —
$$\left|a_{kj_0}^{(k-1)}\right| = max\left|a_{kj}^{(k-1)}\right|, j = \overline{k,n};$$
у цьому разі на кожному кроці потрібно відповідно перенумерувати змінні;

b) За стовпцем —
$$\left|a_{i_ok}^{(k-1)}\right| = max|a_{ik}|, i = \overline{k,n};$$
тоді на кожному кроці потрібно відповідно перенумерувати рівняння;

c) За всією матрицею.

У матричному вигляді k-ий крок методу Гаусса можна подати у вигляді
$$A_k = M_k A_{k-1},$$
де $A_{k-1} = M_{k-1}M_{k-2} \dots M_1 A$, а
$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & m_k & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & m_{k+1k} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & m_k & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$
де $m_{kk} = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}}, m_{ik} = -a_{i,k}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)},\ i = \overline{k+1,n}.$

Метод Гаусса можна подати в матричному вигляді:
$$MA\vec{x} = M\vec{b},$$
де $M = M_n M_{n-1} \cdots M_1$ — нижня трикутна матриця, а $MA - U$ — верхня трикутня з одиничною головною діагоналлю. Отже, метод Гаусса базується на можливості розкласти матрицю A на дві трикутні матриці.

3) Необхідні обчислення

$$\overline{A} = \overline{A_0} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & | & 29 \\ -2 & 2 & 6 & 1 & | & 38 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & | & 48 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & | & 56 \end{pmatrix}$$

Крок 1. Знайдемо максимальний за модулем елемент першого стовбця A_0:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & | & 29 \\ -2 & 2 & 6 & 1 & | & 38 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & | & 48 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & | & 56 \end{pmatrix}$$

Відповідний цьому елементові рядок вже стоїть на потрібній, k-й, позиції, тому перестановок не відбувається – матриця перестановок дорівнює одиничній: $P_1 = E$. Відповідно $P_1\overline{A_0} = E\overline{A_0} = \overline{A_0}$.

Тепер складемо матрицю переходу M_1 за правилами

$$m_{kk} = \frac{1}{a^*}, m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a^*}, i = \overline{k+1, n},$$

де k — номер кроку, a^*— максимальний елемент у матриці на даному кроці, всі відмінні від m_{kk} діагональні елементи дорівнюють 1, інші від усіх згаданих елементи матриці нульові.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тепер для переходу до наступного кроку помножимо матрицю $P_1\overline{A_0}$ на матрицю M_1 зліва:

$$\overline{A_1} = M_1 P_1 \overline{A_0} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & | & 29 \\ -2 & 2 & 6 & 1 & | & 38 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & | & 48 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & | & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,25 & 0 & | & 7,25 \\ 0 & 3,5 & 6,5 & 1 & | & 52,5 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & | & 48 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & | & 56 \end{pmatrix}$$

Крок 2. Знайдемо максимальний за модулем елемент другого стовбця A_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,25 & 0 & | & 7,25 \\ 0 & 3,5 & 6,5 & 1 & | & 52,5 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & | & 48 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & | & 56 \end{pmatrix}$$

Поміняємо відповідний рядок місцями з першим – тобто домножимо $\overline{A_1}$ на відповідну матрицю перестановок P_2:

$$P_2\overline{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,25 & 0 & | & 7,25 \\ 0 & 3,5 & 6,5 & 1 & | & 52,5 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & | & 48 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & | & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,25 & 0 & | & 7,25 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & | & 48 \\ 0 & 3,5 & 6,5 & 1 & | & 52,5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & | & 56 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A_2} = M_2 P_2 \overline{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7 & 1 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,25 & 0 & | & 7,25 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & | & 48 \\ 0 & 3,5 & 6,5 & 1 & | & 52,5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & | & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,25 & 0 & | & 7,25 \\ 0 & 1 & 0,4 & 0,6 & | & 9,6 \\ 0 & 0 & 5,1 & -1.1 & | & 18,9 \\ 0 & 0 & 1,6 & 6,4 & | & 46,4 \end{pmatrix}$$

Крок 3. Знайдемо максимальний за модулем елемент третього стовбця A_2:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,25 & 0 & | & 7,25 \\ 0 & 1 & 0,4 & 0,6 & | & 9,6 \\ 0 & 0 & 5,1 & -1.1 & | & 18,9 \\ 0 & 0 & 1,6 & 6,4 & | & 46,4 \end{pmatrix}$$

Відповідний цьому елементові рядок вже стоїть на потрібній, k-й, позиції, тому перестановок не відбувається – матриця перестановок дорівнює одиничній: $P_3 = E$. Відповідно $P_3\overline{A_2} = E\overline{A_2} = \overline{A_2}$.

$$\overline{A_3} = M_3 P_3 \overline{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{1}/_{5,1} & 0 \\ 0 & 0 & -{}^{1,6}/_{5,1} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,25 & 0 & | & 7,25 \\ 0 & 1 & 0,4 & 0,6 & | & 9,6 \\ 0 & 0 & 5,1 & -1.1 & | & 18,9 \\ 0 & 0 & 1,6 & 6,4 & | & 46,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,25 & 0 & | & 7,25 \\ 0 & 1 & 0,4 & 0,6 & | & 9,6 \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{11}/_{51} & | & {}^{63}/_{17} \\ 0 & 0 & 0 & {}^{344}/_{51} & | & {}^{688}/_{17} \end{pmatrix}$$

Крок 4. Знайдемо максимальний за модулем елемент:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & | & 7{,}25 \\ 0 & 1 & 0{,}4 & 0{,}6 & | & 9{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & -11/_{51} & | & 63/_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 344/_{51} & | & 688/_{17} \end{pmatrix}$$

Відповідний цьому елементові рядок вже стоїть на потрібній, k-й, позиції, тому перестановок не відбувається – матриця перестановок дорівнює одиничній: $P_4 = E$. Відповідно $P_4\overline{A_3} = E\overline{A_3} = \overline{A_3}$.

$$\overline{A_4} = M_4P_4\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 51/_{344} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & | & 7{,}25 \\ 0 & 1 & 0{,}4 & 0{,}6 & | & 9{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & -11/_{51} & | & 63/_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 344/_{51} & | & 688/_{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & | & 7{,}25 \\ 0 & 1 & 0{,}4 & 0{,}6 & | & 9{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & -11/_{51} & | & 63/_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

Тепер розв'язуємо отриману систему:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}25x_3 + 0x_4 = 7{,}25; \\ x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}6x_4 = 9{,}6; \\ x_3 - \dfrac{11}{51}x_4 = \dfrac{63}{17}; \\ x_4 = 6; \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{63}{17} + 6 * \frac{11}{51} = 5;\ x_2 = 9{,}6 - 0{,}4 * 5 + 0{,}6 * 6 = 4;\ x_1 = 7{,}25 - 0{,}75 * 4 - 0{,}25 * 5 = 3.$$

Відповідь: $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5,\ x_4 = 6.$

4) Результат роботи програми

```
---ModifiedGauss---

System Solution:
x[1]=3
x[2]=4
x[3]=5
x[4]=6
```

Завдання 2

1) Умова завдання

Методом квадратного кореня розв'язати систему рівнянь

1	2	0		X1		5
2	2	4	x	X2	=	22
0	4	3		X3		20

2) Теоретичні відомості

Метод квадратного кореня застосовують для розв'язання СЛАР із неособливою симетричною матрицею $A = A^T$. Цей метод базується на тому, що симетричну матрицю A можна подати у вигляді

$$A = S^T DS,$$

де S — права трикутна матриця

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

а D — діагональна матриця з елементами $d_n = \pm 1, \ i = \overline{1, n}$.

Елементи матриці S та D обчислюють за формулами

$$d_{ii} = sign\left(a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} \left|s_{pi}\right|^2 d_{pp}\right), s_{ii} = \sqrt{\left|a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} \left|s_{pi}\right|^2 d_{pp}\right|}, i = \overline{1, n},$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi} d_{pp} s_{pj}}{d_{ii} s_{ii}}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{i+1, n}.$$

Тоді розв'язання СЛАР зводиться до розв'язання наступних двох СЛАР:

$$S^T D\vec{y} = \overrightarrow{b};$$

$$S\vec{x} = \vec{y}.$$

Матриця D — ліва трикутна. Це дає змогу знайти розв'язок системи, виконавши зворотний хід методу Гаусса зверху вниз, а після цього розв'язати систему, виконавши як в методі Гаусса зворотний хід знизу вгору (тобто починаючи з останнього рівняння).

Отже, алгоритм методу квадратного кореня можна подати так:

1) Перевірити чи симетрична матриця A;
2) Обчислити елементи матриць S і D за формулами;
3) Розв'язати СЛАР і знайти вектор y;
4) Розв'язати СЛАР і знайти шуканий розв'язок $\vec{x}$ системи;

Загальна кількість арифметичних операцій, які потрібно для реалізації методу квадратного кореня, має порядок $Q = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$.

3) Необхідні обчислення

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 22 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Знайдемо розклад матриці $A = S^T DS$, де S – права трикутна матриця, а D – діагональна матриця з елементами ± 1 на діагоналі. Згідно з формулами методу квадратних коренів отримаємо:

$$d_{11} = sign(1) = 1,\ s_{11} = \sqrt{1} = 1,\ s_{12} = \frac{2}{1 * 1} = 2,\ s_{13} = \frac{0}{1 * 1} = 0;$$
$$d_{22} = sign(2 - (4 * 1)) = -1,\ s_{22} = \sqrt{|2 - (4 * 1)|} = \sqrt{2},\ s_{23} = \frac{4 - (2 * 1 * 0)}{-1 * \sqrt{2}} = -2\sqrt{2};$$
$$d_{33} = sign(3 - ((0 * 1) + (8 * -1))) = 1,\ s_{33} = \sqrt{|3 - ((0 * 1) + (8 * -1))|} = \sqrt{11};$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{11} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Розв'яжемо систему $S^T D\vec{y} = \vec{b}$, де

$$S^T D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & \sqrt{11} \end{pmatrix} -$$

Нижня трикутна матриця. Виконавши зворотній хід методу Гаусса згори вниз, отримаємо:

$$\begin{cases} y_1 = 5; \\ y_2 = \dfrac{22 - 2y_1}{-\sqrt{2}} = -6\sqrt{2}; \\ y_3 = \dfrac{20 - 2\sqrt{2}y_2}{\sqrt{11}} = 4\sqrt{11}; \end{cases}$$

Розв'яжемо систему з верхньою трикутною матрицею $S\vec{x} = \vec{y}$. Виконавши зворотний хід методу Гаусса знизу вгору, отримаємо:

$$\begin{cases} x_3 = 4; \\ x_2 = \dfrac{-6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}x_3}{\sqrt{2}} = 2; \\ x_1 = 5 - 2x_2 = 1; \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4.$

4) Результат роботи програми

```
---SquareRootMethod---

System Solutions
x[1]=1
x[2]=2
x[3]=4
```