Лабораторная работа №2. Нечеткая арифметика.

Цель работы: Изучить правила выполнения основных арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, деление) с нечеткими числами, с применением α-уровневого принципа обобщения Заде.

Задание к работе: Перегрузить операции сложения, вычитания, умножения, деления, в соответствии с α-уровневым принципом обобщения Заде, для класса представления нечетких чисел (разработанного в лабораторной работе №2), функция принадлежности которых строится на основе прямых методов для одного эксперта, и хранится в объекте как динамическая структура, каждый элемент которой включает в себя тройку чисел $\{\alpha_i, \underline{A}_i, \overline{A}_i\}$, где α_i – значение α-уровня разложения, $\underline{A}_i$ – нижняя граница обычного множества разложения, $\overline{A}_i$ – верхняя граница обычного множества разложения, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{N-1} < \alpha_N = 1,\ i = \overline{1,N}$.

Теоретическая часть

В данной работе рассматриваются способы расчета значений четких алгебраических функций от нечетких аргументов. Материал основывается на понятиях нечеткого числа и принципа нечеткого обобщения, также приводятся правила выполнения арифметических операций над нечеткими числами.

Определение: Нечеткое число A *нормальное*, если $\max\limits_x \mu_A(x)=1$.

Определение: Нечеткое число A *выпуклое*, если для любых $x \le y \le z$ выполняется $\mu_A(x) \ge \mu_A(y) \wedge \mu_A(z)$.

Определение: *Нечетким числом* называется выпуклое нормальное нечеткое множество с кусочно-непрерывной функцией принадлежности $\mu_A(x) \in [0,1]$, заданное на множестве действительных чисел.

Определение: Подмножество $S_A \subset R$ называется *носителем* нечеткого числа A, если $S = \{x/\mu_A(x)>0\}$.

Определение: Нечеткое число A *положительно*, если $\forall x \in S_A$, $x>0$ и *отрицательно*, если $\forall x \in S_A$, $x<0$.

Определение: Множество *α-уровня* нечеткого числа A определяется как $A_\alpha = \{x/\mu_A(x) \ge \alpha\}$.

Правило выполнения арифметических операций над нечеткими числами

В общем случае операции над нечеткими числами определяются согласно принципу обобщения Заде.

Определение: *Принцип обобщения Заде.* Если $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ - функция от n независимых переменных и аргументы $x_1,x_2,\ldots,x_n$ заданы нечеткими числами $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$, соответственно, то значением функции $\tilde{y} = f\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\right)$ называется нечеткое число y с функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{y}}\left(y^*\right) = \sup_{\substack{y^* = f\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) \\ x_i^* \in \sup p\left(\tilde{x}_i\right), i=\overline{1,n}}} \min_{i=\overline{1,n}} \left(\mu_x\left(x_i^*\right)\right).$$

Принцип обобщения позволяет найти функцию принадлежности нечеткого числа, соответствующего значению четкой функции от нечетких аргументов.

Применение принципа обобщения Заде сопряжено с двумя трудностями:

1. большой объем вычислений - количество элементов результирующего нечеткого множества, которые необходимо обработать, равно $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n$, где p_i - количество точек, на которых задан i-й нечеткий аргумент, $i = \overline{1, n}$;
2. необходимость построения верхней огибающей элементов результирующего нечеткого множества.

Более практичным является применение α-уровневого принципа обобщения. В этом случае нечеткие числа представляются в виде разложений по α-уровневым множествам: $x = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} (\underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha)$, где $\underline{x}_\alpha \left(\overline{x}_\alpha\right)$ - минимальное (максимальное) значение x на α -уровне.

Определение: *α-уровневый принцип обобщения.* Если $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - функция от n независимых переменных и аргументы x_i заданы нечеткими числами $x = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} (\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha})$, $i = \overline{1, n}$, то значением функции $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ называется нечеткое число $y = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} (\underline{y}_\alpha, \overline{y}_\alpha)$, где:

$$\underline{y}_\alpha = \inf_{\substack{x_{i,a} \in [\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha}] \\ i = \overline{1,n}}} (f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, ..., x_{n,\alpha}))$$

и

$$\overline{y}_\alpha = \sup_{\substack{x_{i,a} \in [\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha}] \\ i = \overline{1,n}}} (f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, ..., x_{n,\alpha})).$$

Применение α-уровневого принципа обобщения сводится к решению для каждого α-уровня следующей задачи оптимизации: найти максимальное и минимальное значения функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условии, что аргументы могут принимать значения из соответствующих α-уровневых множеств. Количество α-уровней выбирают так, чтобы обеспечить необходимую точность вычислений.

Пример. Нечеткие числа $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ заданы следующими трапециевидными функциями принадлежности:

$$\mu_{\tilde{x}_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \text{ или } x > 4 \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 2] \\ 1, & \text{если } x \in (2, 3) \\ 4 - x, & \text{если } x \in [3, 4] \end{cases} \quad \text{и} \quad \mu_{\tilde{x}_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2 \text{ или } x > 8 \\ x - 2, & \text{если } x \in [2, 3] \\ 1, & \text{если } x \in (3, 4) \\ 2 - 0,25x, & \text{если } x \in [4, 8] \end{cases}.$$

Необходимо найти нечеткое число $y = x_1 \cdot x_2$ с использованием α-уровневого принципа обобщения.

Будем использовать 2 следующих α-уровня:*{0, 1}*. Тогда нечеткие аргументы задаются так: $x_1 = (1,4)_0 \bigcup (2,3)_1$ и $x_2 = (2,8)_0 \bigcup (3,4)_1$. По α-уровневому принципу обобщения получаем: $y = (2,32)_0 \bigcup (6,32)_1$. На рис. 1 показан результат умножения двух нечетких чисел $y = x_1 \cdot x_2$: красными горизонтальными линиями изображены α-сечения, а тонкой красной линией - кусочно-линейная аппроксимация функции принадлежности нечеткого числа y.

Исследуем, как измениться результат нечеткого обобщения при увеличении числа α-уровней. Нечеткое число y при задании аргументов x_1 и x_2 на 41 α-уровне показано на рис. 1. Синими горизонтальными линиями изображены α-сечения нечеткого множества, а жирной синей линией – кусочно-линейная аппроксимация функции принадлежности нечеткого числа y для 41 α-уровня.

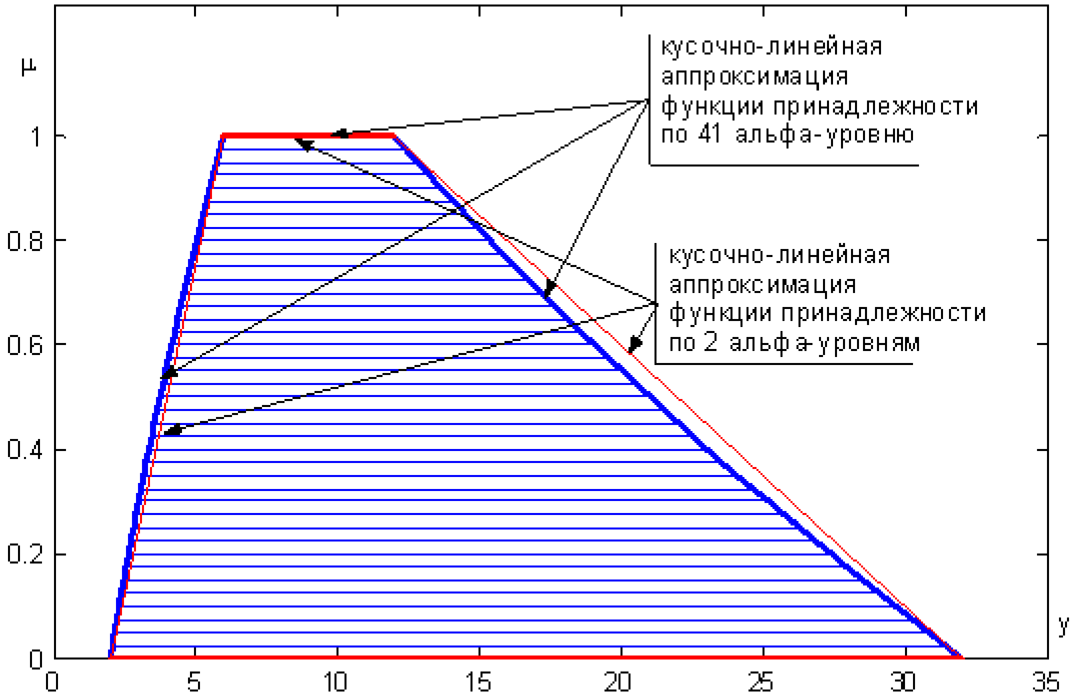

Рис. 1. К примеру.

Применение α-уровневого принципа обобщения позволяет получить правила выполнения арифметических операций над нечеткими числами. Правила выполнения арифметических операций для положительных нечетких чисел приведены в табл. 1. Эти правила необходимо применять для каждого α-уровня.

Табл. 1.
Правила выполнения арифметических операций
для положительных нечетких чисел
(для каждого α-уровня)

Арифметическая операция	$\underline{y}$	$\overline{y}$
$y = x_1 + x_2$	$\underline{x}_1 + \underline{x}_2$	$\overline{x}_1 + \overline{x}_2$
$y = x_1 - x_2$	$\underline{x}_1 - \overline{x}_2$	$\overline{x}_1 - \underline{x}_2$
$y = x_1 \cdot x_2$	$\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2$	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$
$y = x_1 / x_2$	$\underline{x}_1 / \overline{x}_2$	$\overline{x}_1 / \underline{x}_2$

Литература

1. С.Д. Штовба Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику // http://support.sibsiu.ru/MATLAB_RU/fuzzylogic/book1/1.asp.htm
2. В.Я. Пивкин, Е.П. Бакулин, Д.И. Кореньков Нечеткие множества в системах управления // http://idisys.iae.nsk.su/fuzzy_book/content.htm