Лабораторная работа №1. Построение функций принадлежности.

Цель работы: 1. Изучить прямые методы построения функций принадлежности для одного эксперта.

2. Изучить и реализовать способ представления нечетких множеств в памяти компьютера (посредством связи между нечетким множеством универсального множества U и определенным образом устроенным семейством обычных его множеств).

Задание к работе: Разработать объект (класс) на любом объектно-ориентированном языке программирования для представления нечетких множеств (нечетких чисел), функция принадлежности которых строится на основе прямых методов для одного эксперта приведенных в табл. 1 теоретической части. Реализовать методы:

- разложение нечеткого множества (нечеткого числа), с видом функции принадлежности в соответствии с номером в табл. 1 на семейство обычных множеств, где число $\boldsymbol{N}$ уровней разложения указывается пользователем, с сохранением этого разложения внутри объекта, как динамической структуры, каждый элемент которой включает в себя тройку чисел $\{\alpha_i, \underline{A}_i, \overline{A_i}\}$, где α_i – значение α-уровня разложения, $\underline{A}_i$ – нижняя граница обычного множества разложения, $\overline{A_i}$ – верхняя граница обычного множества разложения, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{N-1} < \alpha_N = 1$, $i = \overline{1, N}$. (С точки зрения программирования этот метод будет являться конструктором разрабатываемого класса.)
- графическое отображение функции принадлежности.

Теоретическая часть

Основные группы методов построения функций принадлежности

В основании теории из любой области естествознания лежит очень важное, основополагающее для ее построения понятие элементарного объекта. Например, для механики – это материальная точка, для электродинамики – это вектор напряженности поля, для квантовой теории – понятие состояния. Для теории нечетких множеств основополагающим понятием является понятие нечеткого множества, которое характеризуется функцией принадлежности. Л. Заде предложил оценивать степень принадлежности числами из интервала [0,1].

Существует ряд методов построения по экспертным оценкам функции принадлежности нечеткого множества. Можно выделить две группы методов: прямые и косвенные методы.

Прямые методы определяются тем, что эксперт непосредственно задает правила определения значений функции принадлежности. В косвенных методах значения функции принадлежности выбираются таким образом, чтобы удовлетворить заранее сформулированным условиям. Экспертная информация является только исходной информацией для дальнейшей обработки. Дополнительные условия могут налагаться как на вид получаемой информации, так и на процедуру обработки.

Итак, нами выделены две основные группы методов построения функции принадлежности: прямые и косвенные. Однако функция принадлежности может отражать, как мнение группы экспертов, так и мнение одного (уникального) эксперта, следовательно, возможны, по крайней мере, четыре группы методов: прямые и косвенные для одного эксперта, прямые и косвенные для группы экспертов.

Требования к функциям принадлежности

Относительно функции принадлежности можно выдвинуть следующие условия:

1. Функция принадлежности должна быть положительной, т.е.
$$\mu_A(x) \geq 0, \forall x \in U.$$
2. Если это не оговаривается дополнительно, функция принадлежности должна быть нормальной
$$\sup \mu_A(x) = 1, x \in U$$
Если условие нормальности принято, то запрещается использование функций принадлежности, не удовлетворяющих условию нормальности.
3. Функция принадлежности может задаваться как на непрерывном, так и на дискретном носителе.

Рассмотрим некоторые из наиболее простых методов построения функций принадлежности прямых методов для одного эксперта.

Прямые методы для одного эксперта

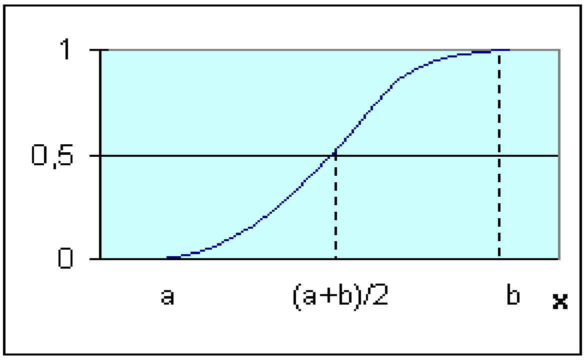
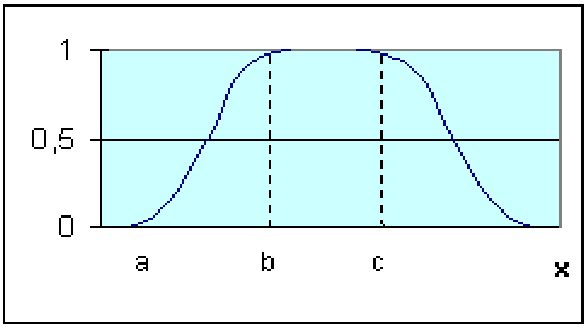
Прямые методы для одного (уникального) эксперта состоят в непосредственном назначении степени принадлежности для исследуемых объектов или непосредственном назначении функции (правила), позволяющей вычислять значения.

При непосредственном назначении функции (правила), позволяющей вычислять значения используют типовые функции принадлежности. К настоящему времени накоплен достаточно широкий набор различных вариантов функций принадлежности для самых разнообразных нечетких утверждений (см. методичку).

Безусловно, выбор функции принадлежности и их параметров определяется в большей степени опытом, интуицией и другими субъективными факторами, лица принимающего решения.

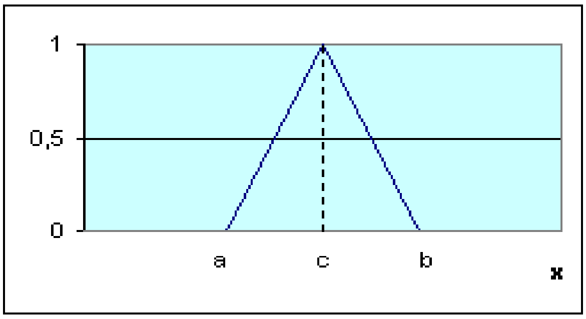
Для вычисления параметров функции принадлежности при известном аналитическом представлении можно предложить простую методику, которая вытекает из рассмотрения функций принадлежности, приведенных в методичке В.Г. Чернова «Нечеткие множества в задачах управления и принятия решений». В табл. 1 приведены некоторые виды функций принадлежности прямых методов для одного эксперта.

Табл. 1. Примеры различных способов построения функций принадлежности.

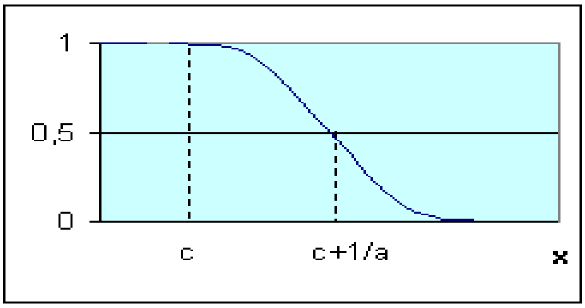
№	Аналитический вид функции принадлежности	График функции принадлежности
1	$\mu_1(x,a,b) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a; \\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & \text{если } a \leq x \leq \dfrac{a+b}{2}; \\ 1 - \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & \text{если } \dfrac{a+b}{2} \leq x \leq b; \\ 1, & \text{если } x \geq b. \end{cases}$	
2	$\mu_2(x,a,b,c) = \begin{cases} \mu_1(x,a,b), & \text{если } a < x < b; \\ 1, & \text{если } b \leq x \leq bc; \\ 1-\mu_1(x,c,c+b-a), & \text{если } c < x < c+a; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$	

<table>
<tr><th>№</th><th>Аналитический вид функции принадлежности</th><th>График функции принадлежности</th></tr>
<tr><td>3</td><td>

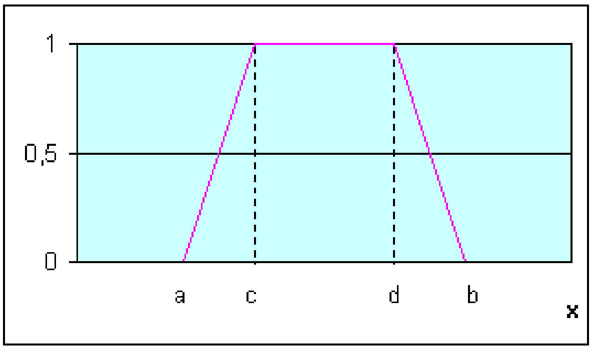
$$\mu_3(x,a,b,c)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le a;\\ \dfrac{x-a}{c-a}, & \text{если } a\le x\le c;\\ \dfrac{b-x}{b-c}, & \text{если } c\le x\le b;\\ 0, & \text{если } x\ge b.\end{cases}$$

</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>

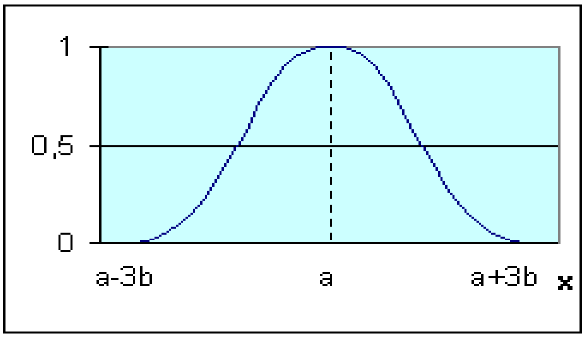
$$\mu_4(x,a,b,c)=\begin{cases}1, & \text{если } x<c,\\ \left\{1+\left[a\left(x-c\right)^b\right]\right\}^{-1}, & \text{если } x>c.\end{cases}$$

</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>

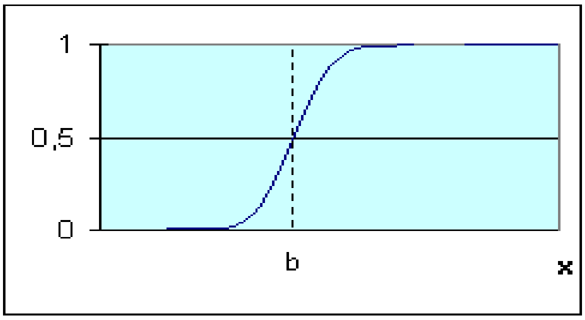
$$\mu_5(x,a,b,c,d)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le a;\\ \dfrac{x-a}{c-a}, & \text{если } a\le x\le c;\\ 1, & \text{если } a\le x\le c;\\ \dfrac{b-x}{b-d}, & \text{если } d\le x\le b;\\ 0, & \text{если } x\ge b.\end{cases}$$

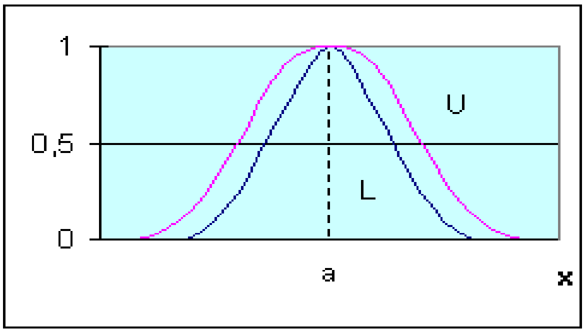
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>

$$\mu_6(x,a,b)=\begin{cases}0, & \text{если } x<a-3b,\\ \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2b^2}\right], & \text{если } a-3b<x<a-3b,\\ 0, & \text{если } x<a+3b.\end{cases}$$

</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>

$$\mu_7(x,a,b)=\left\{1+\exp\left[-a\left(x-b\right)\right]\right\}^{-1}$$

</td><td>
</td></tr>
</table>

№	Аналитический вид функции принадлежности	График функции принадлежности
8	$\mu_8\left(x, a, \left[\underline{b}, \overline{b}\right]\right) = \left[\mu_6^L(x, a, \underline{b}), \mu_6^U(x, a, \overline{b})\right]$	

Как видно из указанной таблицы для вычисления значений функции принадлежности при известном аналитическом представлении необходимо минимум два параметра – *a, b* (μ_1, μ_6, μ_7) и максимум четыре – *a, b, c ,d* (μ_5). В связи с этим для инициализации нечеткого числа конструктору класса будет необходимо либо три, либо пять параметров. Для преодоления данной ситуации, и создания «универсального» конструктора способного задать любой вид функции принадлежности из вышеперечисленных, два параметра, которые не всегда требуются для вычисления значений функций принадлежности, будем инициализировать нулями (присваивать значение нуль параметру по умолчанию), т.е. следующим образом:

```
class  TFuzzy
     {
     …
     TFuzzy(<№ вида функции принадлежности>,<Параметр 1>,<Параметр 2>,<Параметр 3> = 0, <Параметр 4> = 0);
     …
     }
```

Представление нечетких множеств в памяти компьютера

Установим связь между нечетким подмножеством универсального множества U и определенным образом устроенным семейством обычных его подмножеств. Эта связь вводится при помощи понятия подмножества α-уровня нечеткого множества.

Опр: Пусть $\alpha \in [0,1]$. Подмножеством α-уровня нечеткого множества A называется множество $A_\alpha = \{u \in U : \mu_A(u) > a\}$.

Декомпозиция нечетких множеств (теорема): Любое нечеткое подмножество A можно следующим образом разложить на произведения обычных подмножеств по коэффициентам α_i:

$$A = \max_{\alpha_i}\left[\alpha_1 \cdot A_1, ..., \alpha_n \cdot A_n\right], \text{ где } 0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le ... \le \alpha_n \le 1, \qquad i = 1,2,3,..,n.$$

Синтез нечеткого подмножества посредством объединения обычных подмножеств

Теорему о декомпозиции можно применить и для синтеза нечеткого множества. Если рассмотреть последовательность обычных подмножеств

$$A_1 \subset\subset A_2 \subset\subset ... \subset\subset A_n,$$

и присвоить значения α_1 для A_1, α_2 для A_2, ..., α_n для A_n причем такие, что:

$$1 \ge \alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_n > 0,$$

то по теореме о декомпозиции получим нечеткое множество. Причем функция принадлежности данного множества будет иметь следующий вид:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } h_{A_i}(u) = 1 \text{ и } h_{A_{i-1}}(u) = 0, \\ 0, & \text{если } h_{A_n}(u) = 0. \end{cases}$$

где $h_A(u)$ - характеристическая функция множества A.

По-другому это утверждение можно записать следующим образом:

$$A = \bigcup_\alpha \alpha \cdot A_\alpha.$$

Это очень важное свойство, поскольку оно позволяет наряду с определением нечеткого множества как отображения $\mu_A(u)$: $U \rightarrow [0,1]$ ввести понятие нечеткого множества как отображения $\mu_A(u)$: $2^U \rightarrow [0,1]$. В некоторых случаях последнее определение оказывается более удобным.

Литература

1. В.Г. Чернов Нечеткие множества в задачах управления и принятия решений: текст лекций. Владимир.: ВлГУ, 1999. 88 с.
2. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение для принятия приближенных решений. М.: Мир, 1976. -165с.
3. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. 352 с.