

## Seminar 2

(S2.1) Confirmați sau infirmați:

- (i) pentru orice  $\varphi, \psi \in Form$ ,  $\models \varphi \wedge \psi$  dacă și numai dacă  $\models \varphi$  și  $\models \psi$ ;
- (ii) pentru orice  $\varphi, \psi \in Form$ ,  $\models \varphi \vee \psi$  dacă și numai dacă  $\models \varphi$  sau  $\models \psi$ .

**Demonstrație:**

(i) Este adevărat. Fie  $\varphi, \psi \in Form$ . Avem:

$$\begin{aligned}
 \models \varphi \wedge \psi &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ și } e^+(\psi) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ și} \\
 &\quad \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\psi) = 1 \\
 &\iff \models \varphi \text{ și } \models \psi.
 \end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Vom lua  $\varphi := v_0$  și  $\psi := \neg v_0$ .

Luăm  $e_0 : V \rightarrow \{0, 1\}$  ca fiind funcția constantă 0. Atunci  $e_0^+(\varphi) = e_0^+(v_0) = e_0(v_0) = 0$ . Deci  $e_0 \not\models \varphi$ . Prin urmare,  $\not\models \varphi$ .

Luăm  $e_1 : V \rightarrow \{0, 1\}$  ca fiind funcția constantă 1. Atunci  $e_1^+(\psi) = e_1^+(\neg v_0) = \neg e_1^+(v_0) = \neg e_1(v_0) = \neg 1 = 0$ . Deci  $e_1 \not\models \psi$ . Prin urmare,  $\not\models \psi$ .

Fie acum  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  arbitrară. Atunci

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(v_0 \vee \neg v_0) = e^+(v_0) \vee e^+(\neg v_0) = e^+(v_0) \vee \neg e^+(v_0) = e(v_0) \vee \neg e(v_0) = 1,$$

deci  $e \models \varphi \vee \psi$ . Prin urmare, avem că  $\models \varphi \vee \psi$ .

□

**(S2.2)** Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

(i)  $((v_0 \rightarrow v_1) \wedge v_1) \rightarrow v_0;$

(ii)  $(v_1 \vee \neg v_4) \rightarrow (\neg v_2 \rightarrow v_3).$

**Demonstrație:**

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
 ((v_0 \rightarrow v_1) \wedge v_1) \rightarrow v_0 &\sim \neg((\neg v_0 \vee v_1) \wedge v_1) \vee v_0 && \text{(înlocuirea implicației)} \\
 &\sim \neg(\neg v_0 \vee v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)} \\
 &\sim (\neg \neg v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)} \\
 &\sim (v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0, && \text{(reducerea dublei negații)}
 \end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obținem:

$$\begin{aligned}
 (v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 &\sim ((v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1)) \vee v_0 && \text{(distributivitate)} \\
 &\sim (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_0) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1 \vee v_0) && \text{(distributivitate)} \\
 &\sim (v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_0), && \text{(idempotență)}
 \end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă și cu:

$$v_0 \vee \neg v_1,$$

care este și în FND, și în FNC.

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
 (v_1 \vee \neg v_4) \rightarrow (\neg v_2 \rightarrow v_3) &\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee (\neg \neg v_2 \vee v_3) && \text{(înlocuirea implicațiilor)} \\
 &\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(reducerea dublei negații)} \\
 &\sim (\neg v_1 \wedge \neg \neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(de Morgan)} \\
 &\sim (\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3, && \text{(reducerea dublei negații)}
 \end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obținem:

$$\begin{aligned} (\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3 &\sim ((\neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_4 \vee v_2)) \vee v_3 && \text{(distributivitate)} \\ &\sim (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_4 \vee v_2 \vee v_3), && \text{(distributivitate)} \end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC.

□

**(S2.3)** Să se aducă formula  $\varphi = (v_0 \rightarrow v_1) \rightarrow v_2$  la cele două forme normale trecându-se prin funcția booleană asociată (i.e. metoda tabelului).

**Demonstrație:** Alcătuim tabelul de valori al funcției asociate  $F_\varphi : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ , precum și pe cel al funcției  $\neg \circ F_\varphi$ .

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_0 \rightarrow x_1$	$F_\varphi(x_0, x_1, x_2) := (x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2$	$\neg F_\varphi(x_0, x_1, x_2)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Obținem, așadar, uitându-ne pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui  $F_\varphi$  și aplicând raționamentul din demonstrațiile Teoremelor 1.30 și 1.32, că o formă normală disjunctivă a lui  $\varphi$  este:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2),$$

iar uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui  $F_\varphi$  și aplicând raționamentul din demonstrațiile Teoremelor 1.31 și 1.32, obținem că o formă normală conjunctivă a lui  $\varphi$  este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

Alternativ, ne putem uita pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui  $\neg \circ F_\varphi = F_{\neg \varphi}$  pentru a obține (ca mai sus) următoarea formă normală disjunctivă a lui  $\neg \varphi$ :

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2),$$

iar, pe urmă, aplicând Propoziția 1.26.(ii), obținem că o formă normală conjunctivă a lui  $\neg \neg \varphi$ , și deci a lui  $\varphi$ , este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

□

**(S2.4)** Să se testeze dacă următoarele mulțimi de clauze sunt satisfiabile:

- (i)  $\{\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_2, \neg v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}\};$
- (ii)  $\{\{v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_2, v_3\}\}.$

**Demonstrație:**

- (i) Presupunem că am avea un model  $e$  al mulțimii de clauze. Atunci  $e(v_0) = e(v_2) = e(v_3) = 1$ . Cum  $e$  satisface clauza  $\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}$ , avem că  $e(v_1) = 1$ . Dar atunci  $e$  nu satisface clauza  $\{\neg v_2, \neg v_1\}$ . Am obținut o contradicție. Rămâne că mulțimea de clauze din enunț este nesatisfiabilă.
- (ii) Fie evaluarea  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  astfel încât  $e(v_0) = 1$ ,  $e(v_1) = 0$ , și  $e(v_i) = 1$  pentru orice  $i \geq 2$ . Atunci  $e$  satisface fiecare clauză din mulțime, deci este model pentru mulțimea de clauze. Așadar, mulțimea de clauze din enunț este satisfiabilă.

□

**(S2.5)** Să se determine mulțimea  $Res(C_1, C_2)$  în fiecare dintre următoarele cazuri:

- (i)  $C_1 := \{v_1, \neg v_4, v_5\}; C_2 := \{v_4, v_5, v_6\};$
- (ii)  $C_1 := \{v_3, \neg v_4, v_5\}; C_2 := \{\neg v_3, v_1, v_6, v_4\};$
- (iii)  $C_1 := \{v_1, \neg v_3\}; C_2 := \{v_1, \neg v_2\}.$

**Demonstrație:**

- (i) Putem alege doar  $L := \neg v_4$ , deci există un singur rezolvent, anume  $\{v_1, v_5, v_6\}$ .
- (ii) Putem rezolva clauzele, pe rând, după  $L := v_3$  și  $L := \neg v_4$ , obținând așadar

$$Res(C_1, C_2) = \{\{\neg v_4, v_5, v_1, v_6, v_4\}, \{v_3, v_5, \neg v_3, v_1, v_6\}\}.$$

- (iii) Nu există  $L$  astfel încât  $L \in C_1$  și  $L^c \in C_2$ , deci  $Res(C_1, C_2) = \emptyset$ .

□

(S2.6) Derivați prin rezoluție clauza  $C := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$  din mulțimea

$$\mathcal{S} := \{\{v_0, v_4\}, \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}, \{\neg v_4, v_0, v_1\}, \{\neg v_0, v_3\}\}.$$

**Demonstrație:** Notăm:

$$C_1 := \{v_0, v_4\}$$

$$C_2 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}$$

$$C_3 := \{\neg v_4, v_0, v_1\}$$

$$C_4 := \{\neg v_0, v_3\}$$

$$C_5 := \{v_0, v_1\} \quad (\text{rezolvent al } C_1, C_3)$$

$$C_6 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_3\} \quad (\text{rezolvent al } C_2, C_4)$$

$$C_7 := \{v_0, \neg v_2, v_3\} \quad (\text{rezolvent al } C_5, C_6)$$

Avem, așadar, că secvența  $(C_1, C_2, \dots, C_6, C_7 = C)$  este o derivare prin rezoluție a lui  $C$  din  $\mathcal{S}$ . □