

Seminar 4

1 Breviar

Pentru orice e și orice Γ , notăm cu $e \models \Gamma$ (și spunem că e **satisface** Γ sau e este **model** pentru Γ) dacă, pentru orice $\varphi \in \Gamma$, $e \models \varphi$. Pentru orice Γ , notăm cu $Mod(\Gamma)$ mulțimea modelelor lui Γ .

Spunem că Γ este **satisfiabilă** dacă există $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \Gamma$ și **nesatisfiabilă** în caz contrar, când nu există $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \Gamma$, i.e. pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem că $e \not\models \Gamma$.

Pentru orice mulțime Γ de formule și orice formulă φ , notăm $\Gamma \models \varphi$ (și spunem că **din** Γ **se deduce semantic** φ sau că φ **este consecință semantică a lui** Γ) dacă pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \Gamma$ avem $e \models \varphi$.

Pentru orice $v \in V$ și $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, vom defini

$$v^e := \begin{cases} v, & \text{dacă } e(v) = 1, \\ \neg v, & \text{dacă } e(v) = 0, \end{cases}$$

și, clar, $e^+(v^e) = 1$.

2 Exerciții

(S4.1) Să se găsească toate modelele fiecăreia dintre mulțimile de formule:

- (i) $\Gamma = \{v_n \rightarrow v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- (ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \rightarrow v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Demonstrație:

- (i) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ și $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \models v_n \rightarrow v_{n+1}$ dacă și numai dacă $e^+(v_n \rightarrow v_{n+1}) = 1$ dacă și numai dacă $e^+(v_n) \rightarrow e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă și numai dacă $e(v_n) \rightarrow e(v_{n+1}) = 1$ dacă și numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$$\begin{aligned} e \models \Gamma & \text{ dacă și numai dacă } \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, e \models v_n \rightarrow v_{n+1} \\ & \text{ dacă și numai dacă } \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \\ & \text{ dacă și numai dacă } e(v_0) \leq e(v_1) \leq \dots \leq e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \leq \dots \\ & \text{ dacă și numai dacă } (\text{pentru orice } v \in V, e(v) = 0) \\ & \text{ sau (există } k \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } i < k, e(v_i) = 0 \text{ și,} \\ & \text{ pentru orice } i \geq k, e(v_i) = 1). \end{aligned}$$

Definim $e^\infty : V \rightarrow \{0, 1\}$ astfel încât, pentru orice $v \in V$, $e^\infty(v) = 0$ și, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $e_k : V \rightarrow \{0, 1\}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{e^\infty\}.$$

- (ii) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Atunci

$$\begin{aligned} e \models \Gamma & \text{ dacă și numai dacă } e \models v_0 \text{ și, pentru orice } 0 \leq n \leq 7, e \models v_n \rightarrow v_{n+1} \\ & \text{ dacă și numai dacă } e(v_0) = 1 \text{ și } e(v_0) \leq e(v_1) \leq \dots \leq e(v_7) \leq e(v_8) \\ & \text{ dacă și numai dacă pentru orice } n \in \{0, 1, \dots, 8\}, e(v_n) = 1. \end{aligned}$$

Așadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \rightarrow \{0, 1\} \mid e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 8\}.$$

□

(S4.2) Fie $f : V \rightarrow \{0, 1\}$. Găsiți Γ astfel încât $Mod(\Gamma) = \{f\}$.

Demonstrație: Luăm $\Gamma := V^f = \{v^f \mid v \in V\}$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Avem $e \in Mod(\Gamma)$ dacă și numai dacă pentru orice $v \in V$, $e \models v^f$ dacă și numai dacă pentru orice $v \in V$, $e^+(v^f) = 1$. Vom arăta că ultima afirmație este echivalentă cu $e = f$.

Presupunem că pentru orice $v \in V$, $e^+(v^f) = 1$. Fie $v \in V$. Vrem $e(v) = f(v)$. Dacă $f(v) = 1$, atunci $v^f = v$ și deci $e(v) = e^+(v) = e^+(v^f) = 1 = f(v)$. Dacă $f(v) = 0$, atunci $v^f = \neg v$ și deci

$$e(v) = e^+(v) = \neg \neg e^+(v) = \neg e^+(\neg v) = \neg e^+(v^f) = \neg 1 = 0 = f(v).$$

Invers, presupunem că $e = f$ și vrem să arătăm că pentru orice $v \in V$, $e^+(v^f) = 1$. Fie $v \in V$. Atunci $e^+(v^f) = f^+(v^f) = 1$. □

(S4.3)

- (i) Să se arate că mulțimea modelelor unei mulțimi satisfiabile și finite de formule este infinită.
- (ii) Găsiți o mulțime (infinită) de formule cu proprietatea că nu există o mulțime finită de formule care să aibă exact aceleași modele.

Demonstrație:

- (i) Fie Γ o mulțime de formule ca în enunț. Dat fiind că Γ este satisfiabilă, admite un model și fie acesta e . Pe de altă parte, dat fiind că Γ este finită, există un $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} \text{Var}(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$.

Fie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, câte o funcție $e_k : V \rightarrow \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e_k(x) := \begin{cases} e(x), & \text{dacă } x \in \{v_0, \dots, v_n\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \{v_{n+1}, \dots, v_{n+k}\} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru $k \neq l$ avem $e_k \neq e_l$. Prin urmare, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este o mulțime numărabilă, deci infinită. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ și $\varphi \in \Gamma$, aplicând Propoziția 1.12 pentru φ , e și e_k , avem că $e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $e_k \models \varphi$.

Am obținut astfel că $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Mod}(\Gamma)$. Așadar, $\text{Mod}(\Gamma)$ este infinită.

- (ii) Considerăm $\Gamma := V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o mulțime infinită de formule. Demonstrăm că Γ nu este echivalentă cu nicio mulțime finită de formule. Observăm că o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă și numai dacă $e(v_n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă e este funcția constant egală cu 1, funcție pe care o notăm cu $\mathbf{1}$. Prin urmare, $\text{Mod}(\Gamma) = \{\mathbf{1}\}$.

Fie acum Δ o mulțime finită de formule. Avem două cazuri:

- (a) Δ nu este satisfiabilă. Atunci $\text{Mod}(\Delta) = \emptyset$.
- (b) Δ este satisfiabilă. Atunci aplicăm (i) pentru a concluziona că $\text{Mod}(\Delta)$ este infinită.

În ambele cazuri, obținem că $\text{Mod}(\Delta) \neq \text{Mod}(\Gamma)$, deci Γ nu este echivalentă cu Δ .

□