Exercice 1

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\forall t > 0, \quad y'(t) = t + y(t)$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 1.$$

1. Trouver la solution exacte de ce problème.
2. Appliquer la méthode explicite d'Euler à ce problème, avec $\tau = 0.1$ puis évaluer la solution en $t = 0.3$. Comparer à la solution exacte.

Exercice 2

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\forall t > 0, \quad y'(t) = 2t - y(t)$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 1.$$

1. Trouver la solution exacte de ce problème.
2. Appliquer le schéma implicite d'Euler à ce problème, avec $\tau = 0.1$ puis évaluer la solution en $t = 0.3$. Comparer à la solution exacte.
3. Quelle difficulté rencontre t'on avec ce schéma pour l'équation suivante

$$\forall t > 0, \quad y'(t) = 2t - y(t)^2 \quad ?$$

Exercice 3

Soit l'équation différentielle ordinaire

$$\forall t > 0, \quad y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) - y(t) + 2 = 0$$

où la solution est soumise aux conditions initiales

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = 2. \end{cases}$$

1. Transformer cette équation en un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1.
2. Modifier la fonction `julia` suivante (qui correspond au système du pendule simple avec une pulsation unitaire) en fonction de la réponse à la question précédente :

   ```
   rhs(t, y1, y2) = (y2, -sin(y1))
   ```

Le problème de Blasius

Le problème de Blasius décrit l'écoulement stationnaire et incompressible en 2 dimensions dans la couche limite se formant sur une plaque plane semi-infinie parallèle à l'écoulement.

Il s'écrit sous la forme d'un problème aux limites :

$$u'''(x) + u(x)\,u''(x) = 0$$

où la variable dépendante u vérifie les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u'(0) = 0, \\ u'(\infty) = 1. \end{cases}$$

1. Quel est le degré de cette EDO ? La réécrire sous la forme d'un système d'EDO d'ordre 1.
2. Montrer que l'équation de Blasius et les conditions en 0 sont inchangées par la transformation ($c \neq 0$)

   $$\overline{u} \leftarrow cu,$$
   $$\overline{x} \leftarrow x/c.$$

   $\overline{u}$ est donc soumis à la même équation que u, à l'exception de la condition en ∞ qui est remplacée par :

   $$\overline{u}''(0) = 1.$$

On définit alors

$$\alpha = \overline{u}'(\infty).$$

3. Montrer que le choix de la constante $c = \sqrt{\alpha}$ mène à

   $$u'(\infty) = 1.$$