1 Deux méthodes explicites de Runge-Kutta

On a introduit en cours la famille de schéma de Runge-Kutta, qui s'écrivent sous la forme ($s \in \mathbb{N}^*$) :

$$y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i k_i,$$

où

$$\forall i \in [\![1, s]\!], \quad k_i = f\left(t_n + c_i\tau, y_n + \tau \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right).$$

1. Expliciter la formule de mise à jour (et les variables intermédiaires k_1 et k_2) correspondant aux coefficients suivants
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$
2. Expliciter la formule de mise à jour (et les variables intermédiaires k_1, k_2, k_3 et k_4) correspondant aux coefficients suivants
$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2 Le problème de Blasius

Le problème de Blasius décrit l'écoulement stationnaire et incompressible en 2 dimensions dans la couche limite se formant sur une plaque plane semi-infinie parallèle à l'écoulement.

Il s'écrit sous la forme d'un problème aux limites :

$$u'''(x) + u(x)\, u''(x) = 0$$

où la variable dépendante u vérifie les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u'(0) = 0, \\ u'(\infty) = 1. \end{cases}$$

1. Quel est le degré de cette EDO ? La réécrire sous la forme d'un système d'EDO d'ordre 1.
2. Montrer que l'équation de Blasius et les conditions en 0 sont inchangées par la transformation ($c \in \mathbb{R}$)
$$\overline{u} \leftarrow cu,$$
$$\overline{x} \leftarrow x/c.$$
3. $\overline{u}$ est donc soumis à la même équation que u, à l'exception de la condition en ∞ qui est remplacée par :
$$\overline{u}''(0) = 1.$$
On définit alors
$$\alpha = \overline{u}'(\infty).$$
Montrer que le choix de la constante
$$c = \sqrt{\alpha}$$
mène à
$$u'(\infty) = 1.$$