

1 Deux méthodes explicites de Runge-Kutta

On a introduit en cours la famille de schéma de Runge-Kutta, qui s'écrivent sous la forme ($s \in \mathbb{N}^*$) :

$$y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

où

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \quad k_i = f \left(t_n + c_i \tau, y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right).$$

1. Expliciter la formule de mise à jour (et les variables intermédiaires k_1 et k_2) correspondant aux coefficients suivants

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

2. Expliciter la formule de mise à jour (et les variables intermédiaires k_1, k_2, k_3 et k_4) correspondant aux coefficients suivants

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2 Le problème de Blasius

Le problème de Blasius décrit l'écoulement stationnaire et incompressible en 2 dimensions dans la couche limite se formant sur une plaque plane semi-infinie parallèle à l'écoulement.

Il s'écrit sous la forme d'un problème aux limites :

$$u'''(x) + u(x) u''(x) = 0$$

où la variable dépendante u vérifie les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u'(0) = 0, \\ u'(\infty) = 1. \end{cases}$$

1. Quel est le degré de cette EDO ? La réécrire sous la forme d'un système d'EDO d'ordre 1.
2. Montrer que l'équation de Blasius et les conditions en 0 sont inchangées par la transformation ($c \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \bar{u} &\leftarrow cu, \\ \bar{x} &\leftarrow x/c. \end{aligned}$$

3. \bar{u} est donc soumis à la même équation que u , à l'exception de la condition en ∞ qui est remplacée par :

$$\bar{u}''(0) = 1.$$

On définit alors

$$\alpha = \bar{u}'(\infty).$$

Montrer que le choix de la constante

$$c = \sqrt{\alpha}$$

mène à

$$u'(\infty) = 1.$$