DÉMARCHE SCIENTIFIQUE

9/3/21

RAPPEL : La méthode explicite d'Euler

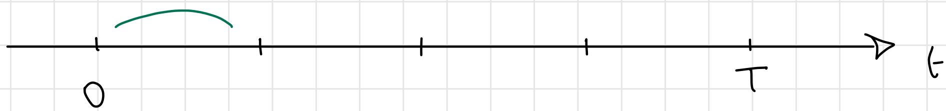
Le problème de Cauchy : $\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = f(t, q(t)) \\ q(0) = q_0 \end{cases}$

La méthode de résolution numérique la plus simple est la méthode explicite d'Euler

$q(T)$?

$N = 4$

$\tau = T/N$



$t_0 = 0$	$t_1 = \tau$	$t_2 = 2\tau$	$t_3 = 3\tau$	$t_4 = 4\tau$
q_0	$q_1 \approx q(t_1)$	$q_2 \approx q(t_2)$	$q_3 \approx q(t_3)$	$q_4 \approx q(t_4 = T)$

Le schéma (méthode) explicite d'Euler s'exprime par une formule de récurrence à 2 termes :

$$\boxed{\forall n \in [\![1, N]\!], \quad q_{n+1} = q_n + \tau f(t_n, q_n)}$$

SCHÉMA EXPLICITE D'EULER

RAPPEL : Les suites

Ex : la suite de Fibonacci

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Application : $u_2 = 1$

$$u_3 = u_1 + u_2 = 1+1 = 2$$

$$u_4 = u_2 + u_3 = 1+2 = 3$$

$$u_5 = u_3 + u_4 = 2+3 = 5$$

Suites géométriques

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = r\, u_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_n = a r^n}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} a r^i = a \sum_{i=0}^{n} r^i = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Il existe d'autres schémas le second que nous allons découvrir est le schéma implicite d'Euler

Sa formule de récurrence est donnée par :

$$\boxed{\forall n \in [\![1, N]\!], \quad q_{n+1} = q_n + \tau f(t_{n+1}, q_{n+1})}$$

SCHEMA IMPLICITE D'EULER

$$\boxed{\forall n \in [\![1,N]\!], \qquad q_{n+1} = q_n + \tau f(t_n, q_n)}$$

Schéma explicite d'Euler

Rappel (Thermo) Fonction d'état : $h(P,V,T) = 0$

Fonctions implicites

Ex G.P. $h : (x,y,z) \longmapsto xy - nRz$

$h : (P,V,T) \longmapsto PV - nRT$

Schéma implicite d'Euler :

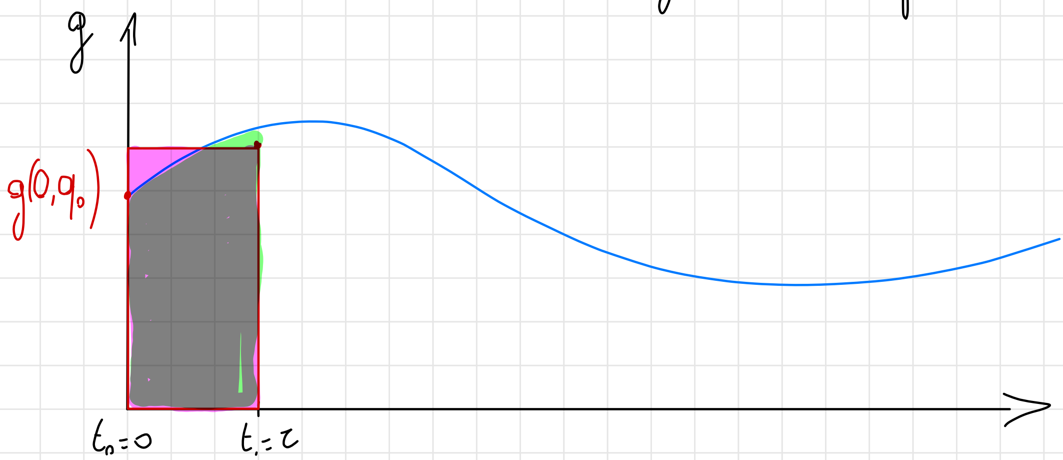
$$h : (x,y) \longmapsto x - y - \tau f(t_{n+1}, x)$$

$$h : (q_{n+1}, q_n) \longmapsto q_{n+1} - q_n - \tau f(t_{n+1}, q_{n+1})$$

$$q_{n+1} = q_n + \tau f(t_{n+1}, q_{n+1}) \iff h(q_{n+1}, q_n) = 0$$

Construction graphique

$g : t \longmapsto f(t, q(t))$



$$\frac{dq}{dt} = f(t, q(t)) \longrightarrow \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dq}{dt}\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, q(t))\,dt$$

$$\rightarrow q(t_{n+1}) - q(t_n) = \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, q(t))\,dt}_{(t_{n+1} - t_n)\, f(t_{n+1}, q_{n+1})}$$

APPROXIMATION "IMPLICITE D'EULER"

$$q_{n+1} - q_n = \tau f(t_{n+1}, q_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow q_{n+1} = q_n + \tau f(t_{n+1}, q_{n+1})$$

EXERCICE 2.

$$\begin{cases} y'(t) = 2t - y(t) & (\mathrm{I}) \\ y(0) = 1 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

1. Solution analytique :

(a) Partie homogène $y^H : t \longmapsto A \exp(-t)$

(b) Solution particulière : méthode de la variation de la constante.

Supposons $y^P : t \longmapsto h(t) \exp(-t)$

$$\forall t>0,\ (y^p)'(t) = \left[h'(t) - h(t)\right]\exp(-t)$$

En substituant dans (I), on obtient :

$$\left[h'(t) - \cancel{h(t)}\right]\exp(-t) = 2t - \cancel{h(t)\exp(-t)}$$

$$\Rightarrow \quad h'(t)\exp(-t) = 2t$$

$$\Rightarrow \quad h'(t) = 2t\exp(t)$$

$$\left((t-1)\exp(t)\right)' = \cancel{\exp(t)} + (t \cancel{-1})\exp(t)$$
$$= t\exp(t)$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = 2(t-1)\exp(t) + A$$

On obtient enfin :

$$\forall t,\quad y^p(t) = h(t)\exp(-t)$$
$$= 2(t-1) + A\exp(-t)$$

On utilise la condition initiale (II) pour déterminer A :

$$y^p(0) = -2 + A = 1$$

$$\Rightarrow \quad A = 3$$

On obtient enfin $\boxed{y^D : t \mapsto 2(t-1) + 3\exp(-t)}$

② donner l'expression du modèle f sous-jacent

$\left(dq/dt = f(t, q(t))\right)$

$$f : (t, y) \longmapsto 2t - y \qquad (\mathrm{III})$$

Rappeler le schéma implicite d'Euler

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Remplaçons f par son expression (III) :

$$y_{n+1} = y_n + \tau\left(2t_{n+1} - y_{n+1}\right)$$

$$y_{n+1} + \tau y_{n+1} = y_n + 2\tau t_{n+1}$$

$$(1+\tau)\, y_{n+1} = y_n + 2\tau t_{n+1}$$

$$\boxed{y_{n+1} = \frac{y_n + 2\tau t_{n+1}}{1+\tau}} \qquad (\mathrm{IV})$$

Pour obtenir une solution numérique en $T = 0{,}3$ avec le pas de temps $\tau = 0{,}3$, on applique la formule $\frac{T}{\tau} = \frac{0.3}{0,1} = 3$ fois $\left(\tau = \frac{T}{N} \Leftrightarrow N = \frac{T}{\tau} \right)$

Initialisation : $y_0 = 1$

$n = 0$: $y_1 = \frac{y_0 + 2\tau^2}{1+\tau} = \frac{1 + 0,02}{1 + 0,1} \simeq 0,93$

$n = 1$: $y_2 = \frac{y_1 + 4\tau^2}{1+\tau} = \ldots$

$n = 2$: $y_3 = \frac{y_2 + 6\tau^2}{1+\tau}$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{INTERLUDE JULIA}}$

③ Que se passe t'il lorsque le modèle est modifié :

$$y'(t) = 2t - y^2(t) \Rightarrow f : (t,y) \mapsto 2t - y^2$$

(a) Analytiquement : solution ?

(b) Numériquement :

$\rightarrow$ EXPLICIT

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_n, y_n) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \tau(2t_n - y_n^2)$$
$$= 2\tau t_n + y_n - y_n^2$$

Aucun Soucis

→ IMPLICIT

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_{n+1}, y_{n+1}) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \tau(2t_{n+1} - y_{n+1}^2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tau y_{n+1}^2 - y_{n+1}}_{\text{INCONNU}} - \underbrace{(2\tau t_{n+1} + y_n)}_{\text{CONNU}} = 0 \quad (\text{VI})$$

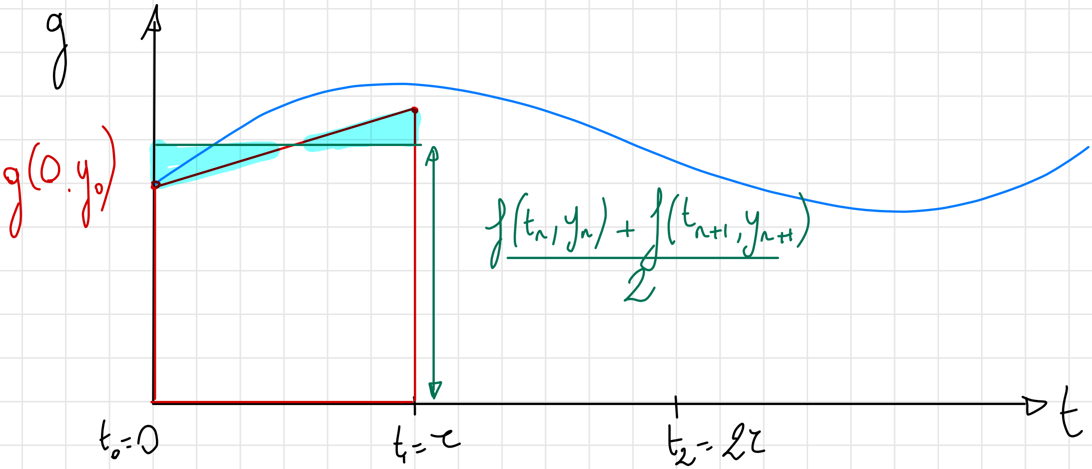
Posons $a = \tau$ et $x = y_{n+1}^2$

$b = -1$

$c = -2\tau t_{n+1} - y_n$

Alors (VI) s'écrit : $\boxed{a x^2 + b x + c = 0}$ EQN du 2nd DEGRÉ

Deux autres schémas peuvent être construits facilement de façon graphique : la méthode des trapèzes et la méthode du point milieu



Règle des trapèzes :

$$y_{n+1} = y_n + \tau \, \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2}$$

Règle du point milieu

$$y_{n+1} = y_n + \tau \, f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$

Pour la prochaine fois :

(1) Création d'un notebook pour visualiser l'ex 1 (s'inspirer de l'exercice 2)

(2) Essayer de refaire l'exercice 2 avec la règle du point milieu (question 1 et 2)

(+ modification du notebook)
FACULTATIF