DÉMARCHE SCIENTIFIQUE

Rappel Ex 1 :

$$\begin{cases} \forall t > 0, & y'(t) = t + y(t) \\ & y(0) = 1 \end{cases}$$

Le modèle s'écrit donc : $f : (t, y) \longmapsto t + y$.

Le schéma explicite d'Euler :

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_n, y_n)$$

$$= y_n + \tau \left[t_n + y_n \right]$$

$$\boxed{y_{n+1} = \tau t_n + (1+\tau) y_n}$$

SCHÉMA EXPLICITE D'EULER.

Refaire l'exercice 2 avec la règle du point milieu

$$\begin{cases} \forall t > 0, & y'(t) = 2t - y(t) \\ & y(0) = 1 \end{cases}$$

donc $f : (t, y) \longmapsto 2t - y$. $\quad$ (I)

La règle du point milieu s'exprime :

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \tau f\left(t_{n+1/2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)}$$

Ici, f est donné par (I) :

$$y_{n+1} = y_n + \tau\left(2t_{n+1/2} - \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[1 + \frac{\tau}{2}\right] y_{n+1} = \left[1 - \tau/2\right] y_n + 2\tau t_{n+1/2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y_{n+1} = \frac{\left(1 - \tau/2\right) y_n + 2\tau t_{n+1/2}}{1 + \tau/2}.}$$

On a observé deux phénomènes (voir notebook ex2 modifié) :

(1) À pas de temps donné (τ), l'erreur est plus ou moins selon le schéma employé (implicite d'Euler vs. la règle du point milieu) ;

(2) À schéma donné, l'erreur diminue plus ou moins rapidement :

$$\tau_0 \longrightarrow \varepsilon_0$$

EULER IMPLICITE

ORDRE = 1

$$\tau_1 = \tau_0/2 \longrightarrow \varepsilon_1 \simeq \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0/2^{1}$$

$$\tau_2 = \tau_1/2 \longrightarrow \varepsilon_2 \simeq \varepsilon_1/2 = \varepsilon_1/2^{1}$$

POINT MILIEU

ORDRE = 2

$$\tau_0 \longrightarrow \varepsilon_0' \quad (\ll \varepsilon_0)$$

$$\tau_1 = \tau_0/2 \longrightarrow \varepsilon_1' \simeq \varepsilon_0'/4 = \varepsilon_0'/2^{2}$$

$$\tau_2 = \tau_1/2 \longrightarrow \varepsilon_2' \simeq \varepsilon_1'/4 = \varepsilon_1'/2^{2}$$

1, 2 : ordre du schéma

Les schémas d'ordres plus élevés existent : on rencontrera bientôt un schéma d'ordre 4, celui de Runge-Kutta.

Deux notions vont nous intéresser en ce qui concerne les schémas de résolution numérique des problèmes de Cauchy :

→ l'ordre ;

→ la stabilité.

I) ORDRE D'UN SCHEMA.

On va considérer le modèle le plus simple (tout en étant non-trivial) :

$$\boxed{f : (t, y) \longmapsto \lambda y}$$

Questions :

(1) Pourquoi le temps n'apparaît ?

$$f : (t,y) \longmapsto t + y$$

$$z = (t, y) \quad \Rightarrow g : (\tau, z) \longmapsto (1, f(z))$$

(2) Pourquoi un modèle linéaire ?

C'est plus et qu'on peut linéariser la plupart des modèles :

$$f(t,y)$$

$$g_y : (t, z) \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) z$$

(3) Pour λ n'est qu'un scalaire, quand y peut

être à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

$$f : (t, \vec{y}) \longmapsto A\vec{y}$$

Si A est diagonalisable, λ correspond tout simplement à une valeur de A.

Le problème de Cauchy qui correspond à ce modèle est donné par :

$$\begin{cases} \forall t > 0, & y'(t) = \lambda y(t) \\ & y(0) = y_0. \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème :

$$y : t \longmapsto \exp(\lambda t)\, y_0.$$

Pour comparer cette solution aux solutions numériques, définissons les suites :

$$\begin{cases} t_n = n\tau, \\ u_n = y(t_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Prenons $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = y(t_{n+1}) = y((n+1)\tau)$$
$$= \exp(\lambda (n+1)\tau)\, y_0$$

$$= \exp(\lambda\tau + \lambda n\tau)\, y_0$$

$$= \exp(\lambda\tau)\exp(\lambda \underbrace{n\tau}_{=t_n})\, y_0$$

$$= \exp(\lambda\tau)\underbrace{\exp(\lambda t_n)\, y_0}_{= y(t_n) = u_n}$$

Soit enfin :

$$\boxed{u_{n+1} = \underbrace{\exp(\lambda\tau)}_{= \sigma(\lambda\tau) = \sigma(z) \text{ avec } z = \lambda\tau} u_n}$$

La solution analytique évaluée en $t_0, t_1 \ldots$ forme une suite géométrique de raison :

$$\exp(\lambda\tau) = \sigma(z)$$

en posant $z = \lambda\tau$.

L'objectif est de montrer que les solutions numériques (celles des schémas d'Euler, du point milieu...) sont également des suites géométriques dont on identifiera les raisons.

Le schéma explicite d'Euler.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = y_n + \tau \underbrace{f(t_n, y_n)}_{= \lambda y_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + \tau\lambda y_n$$
$$= \underbrace{(1+\lambda\tau)}_{\sigma^{EE}(\lambda\tau)} y_n$$

Pour le schéma EE : $\sigma^{EE} : z \longmapsto 1+z$.

$\boxed{\text{Comment comparer } \sigma(z) = \exp(z) \text{ avec } \sigma^{EE}(z) = 1+z \text{ ?}}$

On va utiliser les développements limités : σ^{EE} étant déjà un polynôme, il est déjà égal à son D.L. (pourvu que l'ordre du D.L. soit $\geqslant$ à celui du polynôme, ici 1).

Écrivons donc le D.L. de σ :

$$\sigma(z) = \exp(z)$$
$$= \underbrace{\boxed{1+z}}_{\sigma^{EE}(z)} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \cdots$$

σ^{EE} capture les deux premiers termes de D.L. de σ en 0 : on identifie l'ordre du schéma à la puissance la plus élevée de la partie commune aux deux D.L. : $\boxed{p = 1}$

Le schéma d'Euler explicite est un schéma d'ordre 1.

Le schéma implicite d'Euler

$$\forall n \geq 0, \quad y_{n+1} = y_n + \tau \underbrace{f(t_{n+1}, y_{n+1})}_{= \lambda y_{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \lambda \tau y_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - \lambda\tau) y_{n+1} = y_n$$

$$\Leftrightarrow \quad y_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1-\lambda\tau}}_{\equiv \sigma^{EI}(\lambda\tau)} y_n$$

En posant $z = \lambda\tau$, on met en évidence la suite géométrique associée au schéma implicite d'Euler :

$$\sigma^{EI} : z \longmapsto \frac{1}{1-z}.$$

Question : comparer cette expression à $\sigma : z \longmapsto \exp(z)$ afin de déterminer l'ordre du schéma.

(1) $\sigma(z) = \exp(z) = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + \ldots$

(2) $\sigma^{EI}(z) = \dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$

$p = 1$

L'ordre du schéma E.I. est donc égal à 1.

Règle du point milieu

$$= \lambda\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_{n+1} = y_n + \tau f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$

① Identifier $\sigma^{PM} : z \longmapsto \ldots$

② Trouver l'ordre du schéma.

$$y_{n+1} = y_n + \tau\left[\lambda\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)\right]$$

$$\left[1 - \frac{\lambda\tau}{2}\right] y_{n+1} = \left[1 + \frac{\lambda\tau}{2}\right] y_n$$

$$\boxed{y_{n+1} = \frac{1 + \frac{\lambda\tau}{2}}{1 - \frac{\lambda\tau}{2}} y_n}$$

On identifie la raison géométrique :

$$\sigma^{PM} : z \longmapsto \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$$

$$\forall z : \quad \frac{1 + z/2}{1 - z/2} = \left(1 + \frac{z}{2}\right)\left(\frac{1}{1 - \underbrace{z/2}_{= x}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{z}{2}\right)\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + \frac{3^2}{4} + \frac{3^3}{8}$$

$$+ \frac{3}{2} + \frac{3^2}{4} + \frac{3^3}{8} + \cdots$$

$$\boxed{\tau^{DD}(3) = 1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{4} + \cdots}$$

À comparer à :

$$\tau(3) = \exp(3) = 1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6} + \cdots$$

On trouve donc l'ordre de la méthode :

$$\boxed{p = 2.}$$