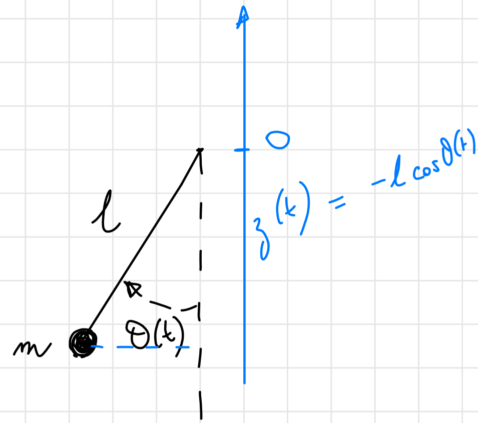
DÉMARCHE SCIENTIFIQUE

4/2/21

Retour sur le pendule simple

- $E_c = m\dfrac{(\ell\dot{\theta})^2}{2}$ Energie cinétique
- $E_p = -mg\ell\cos[\theta(t)]$



- $E_t = E_c + E_p$ est une quantité conservée au cours du temps (si on néglige la friction).

$$\dot{E}_t \left(= \frac{dE_t}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\frac{\ell^2(\dot{\theta})^2}{2} - mg\ell\cos[\theta(t)]\right)$$

$$= m\frac{\ell^2}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\theta})^2 - mg\ell\frac{d}{dt}\cos[\theta(t)]$$

Rappel : dérivée d'une composée de fonctions :

$$\boxed{\forall x, \quad (f\circ g)'(x) = g'(x)\, f'\circ g(x)}$$

Application : composition de $u(x)$ avec la fonction inverse

$$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$$

Démonstration : posons $\begin{cases} f : y \longmapsto 1/y \\ g = u \end{cases}$

On a : $f' : y \longmapsto -1/y^2$

$g' = u$

Donc

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)\, f' \circ g(x) \quad = y$$

$$= u'(x)\left(-\frac{1}{u(x)^2}\right)$$

$$= -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$$

Autre exemple : $\left(u(x)^2\right)' = 2u'(x)\,u(x)$

$$\begin{matrix} f : y \longmapsto y^2 \\ g = u \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f' \; y \longmapsto 2y \\ g' = u' \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = u'(x)\left(2\,u(x)\right)$$

$$= 2u'(x)\,u(x)$$

Retournons au problème du pendule simple :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{m\ell^2}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\theta})^2 - mg\ell\,\frac{d}{dt}\cos[\theta(t)]$$

(1) $\frac{d}{dt}(\dot{\theta})^2$:

$$x = t$$

$$f : y \longmapsto y^2$$

$$g : x \longmapsto \dot{\theta}(x)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta})^2 = \frac{d}{dx} f\circ g(x) = g'(x)\, f'\circ g(x)$$

$$= (\ddot{\theta})(t)\,\left(2\,\dot{\theta}(t)\right)$$

$$= \ddot{\theta}(t) \times 2\,\dot{\theta}(t)$$

$$= 2\,\dot{\theta}(t)\,\ddot{\theta}(t)$$

(2) $\frac{d}{dt}\left\{\cos[\theta(t)]\right\}$.

$$\begin{cases} f = \cos \\ g = \theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f' = -\sin \\ g' = \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\cos\left[\theta(t)\right]\right) = \underbrace{\dot\theta(t)}_{= g'(x)} \times \underbrace{\left(-\sin\left(\theta(t)\right)\right)}_{= f' \circ g(x)}$$

$$= -\dot\theta(t)\sin\left(\theta(t)\right)$$

On obtient enfin :

$$\frac{dE_t}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{ml^2}{2} \times \left(2\dot\theta(t)\ddot\theta(t)\right) - mgl\left(-\dot\theta(t)\sin\left(\theta(t)\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow ml\,\dot\theta(t)\left[l\ddot\theta(t) + g\sin\left(\theta(t)\right)\right] = 0$$

$\Rightarrow$ $m \neq 0$, $l^2 \neq 0$

$$\dot\theta(t)\left[\ddot\theta(t) + \frac{g}{l}\sin\left(\theta(t)\right)\right] = 0$$

$$\frac{g}{l} \propto \frac{[m]}{[s]^2} \times \frac{1}{[m]} = \frac{1}{[s]^2}$$

homogène à ω^2

On pose : $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ (pulsation)

On a :

$$\dot\theta(t)\left[\ddot\theta(t) + \omega^2\sin\left(\theta(t)\right)\right] = 0$$

La solution $\dot{\theta}(t) = 0$ est triviale (et ne nous intéresse. On a donc :

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \omega^2 \sin(\theta(t)) = 0}$$

EDO d'ordre 2 non-linéaire

(En effet $\sin(a+b) \neq \sin(a) + \sin(b)$ ce qui signifie que la fonction sinus est non linéaire)

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

La solution de cette équation ne s'exprime pas en terme de fonctions usuelles

Même pour un problème aussi simple, on a besoin de méthodes de résolution numérique

On peut quand même approcher la solution dans la limite des "petits angles" $\theta \ll 1$

$$\Rightarrow \sin\theta \approx \theta$$

Voir notebook Pluto pour une visualisation des graphes de la fonction sinus ($\sin : x \longmapsto \sin(x)$) et identité ($id : x \longmapsto x$)

Cette approximation est en fait un développement limité.

② Mathématiques

- Equations différentielles
- Développements limités

Déf : Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ avec I un intervalle et un point $a \in I$. On dit que la fonction f admet un développement limité en a à l'ordre n (que l'on notera $DL(a, n)$) si $\forall x \in I$, $f(x)$ peut s'écrire au voisinage de a sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \dots + a_n (x-a)^n + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{RESTE}}$$

Que signifie :

$$R(x) = f(x) - a_0 - a_1(x-a) - a_2(x-a)^2 \dots - a_n(x-a)^n$$

$$R(x) = o((x-a)^n) \underset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$$

" R tend vers 0 plus vite que $(x-a)^n$ quand x tend vers a "

Les développements limités vont nous servir de langage universel qui nous permettre de développer des méthodes numériques sur des polynômes qui sera applicables à d'autres fonctions beaucoup plus générale (pourvu qu'elles admettent des D.L, ce qui représente la grande majorité des fonctions)

<u>Contre-exemple</u> : $x \longmapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

Méthodes de recherche de développements limités

Ex. D.L. de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$

Cette fonction nous a été présentée dans le contexte des suites géométriques : soit la suite

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = x u_n \end{cases} \iff u_n = a x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison x et de premier terme a

On définit $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$

$$= u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= a + ax + \dots + ax^n$$

$$= a\left(1 + x + x^2 + \dots + x^n\right)$$

$$= a \, \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Démonstration

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n)$$
$$= 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \dots + \cancel{x^n}$$
$$- \cancel{x} - \cancel{x^2} - x^3 - \dots - \cancel{x^n} - x^{n+1}$$

On a donc montrer que :

$$1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Soit $R(x) = \frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - \dots - x^n$

$$= \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$= o(x^n)$ au voisinage de 0

En manipulant les termes :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)}$$

c'est à dire que on a trouvé un développement

Limite de $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ au voisinage de $a=0$ à l'ordre n

Voir le notebook Pluto pour une illustration graphique

On peut aussi effectuer des changements de variables :

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n$$

$x \leftrightarrow x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-x^2} \simeq 1+x^2+x^4+\dots x^{2n}$

$x \leftrightarrow -x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\dots+(-x)^n$

On peut aussi obtenir des développements limités par primitivation

THEORÈME.

Soit un intervalle I contenant 0 et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^0$ sur I. On suppose que f admet un $DL(0, n)$ de la forme.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors toute primitive F de f sur un voisinage de 0 admet un $DL(0, n+1)$ obtenu en primitivant la partie régulière (polynôme) et en ajoutant $F(0)$.

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Exemple.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Trouvons une primitive de $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x}$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^x$$

soit $F(x) = \ln(1+x)$

En appliquant la formule du théorème on trouve :

$$\ln(1+x) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} + x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$$

$$= x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$$

Autre exemple :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$F(X) = \int_0^X \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan(x)]_0^X$$

$$= \arctan(X)$$

$$\arctan(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$$

PROG.

$$\boxed{\text{EXERCICE : représenter le graphe de arctan et celui de } DL(0,1),\ DL(0,3),\ \text{et } DL(0,5)}$$

Opérations sur les D.L.

Combinaisons linéaires

Soient 2 fonctions f et g qui admettent des $DL(0,n)$ de parties régulières respectives F et G, et soient deux scalaires $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ alors la fonction $\lambda f+\mu g$ admet un $DL(0,n)$ qui s'écrit $\lambda F+\mu G$

Produits de DL

Si deux fonctions f et g admettent des $DL(0,n)$ de parties régulières F et G, alors le produit fg admet un $DL(0,n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme FG

Composition des DL

Si la fonction f admet un DL $(0,n)$ de partie régulière F,
et la fonction g admet un DL $(0,n)$ de partie régulière G avec $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$
alors $f \circ g$ admet un DL $(0,n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme $F \circ G(x)$

Si la primitivisation des DL marche toujours, ça n'est pas le cas de la dérivation

Théorème.

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0,
si f admet un D.L $(0,n)$
f' admet un D.L. $(0,n-1)$
alors le D.L. de f' s'obtient en dérivant celui de f.

THÉORÈME DE TAYLOR - YOUNG

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a ($a \in I$), alors f possède un $DL(a, n)$ donné par la formule de Taylor - Young :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}\frac{(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n)$$

Application. $f = \exp$ en $a = 0$

$f' = f$ et par récurrence $f^{(n)} = f = \exp$

$f(0) = \exp(0) = 1$

$$\exp(x) = 1 + 1 \times x + 1 \times \frac{x^2}{2} + 1 \times \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

PROG :

Représenter le graphe de exp et ses D.L. à l'ordre 0, 1, 2, 4, 8 en 0

ANALYTIQUE

Calculer le D.L. de sin à l'ordre 1, 3 puis 5.