Séance 10 - TD Thermodynamique - Groupe 2

Premier Principe

Feuille TD 1 ⟹ méthodes mathématiques / définitions

TD 2 ⟹ calorimétrie (chaleur)

TD 3 ⟹ travail

TD4 Premier principe

Énoncé Il existe une fonction d'état U, appelée énergie interne, dont la variation est égale à la somme des quantités de chaleur et de travail échangée avec l'extérieur :

$$dU = \delta Q + \delta W$$

Première loi de Joule

Pour un gaz parfait, l'énergie interne U n'est fonction que de la température : $U = U(T)$.

Conséquence : $U = U(T,V)$

$$\Rightarrow dU = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}_{= C_V} dT + \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T}_{=0} dV$$

$= 0$ pour un GP (1ère loi de Joule)

d'où on déduit : $\boxed{dU = C_v \, dT}$ pour un G.P.

EXERCICE 1 — CYCLE DÉCRIT PAR UN GAZ PARFAIT.

$n = 1$ mol de gaz parfait ($PV = nRT$ à l'équilibre)

$P_A = 2$ bar

$V_A = 14 L = 14 \times 10^{-3} \, m^3$

Transformation 1 : $A \longrightarrow B$

Détente isobare ($P_B = P_A$) qui double son volume ($V_B = 2V_A$)

Transformation 2 : $B \longrightarrow C$

Compression isotherme ($T_C = T_B$) qui le ramène à son volume initial ($V_C = V_A$)

Transformation 3 . $C \longrightarrow A$

Refroidissement isochore ($V_C = V_A$) qui le ramène à son état initial (cycle)

Question 1 — Calcul de T_B et P_C

On relie ces quantités aux données initiales : P_A, V_A et T_A

À l'état A, $P_A V_A = n R T_A$

$\Rightarrow \boxed{T_A = \frac{P_A V_A}{n R}}$

On fait la même chose en B.

$$\underbrace{P_B}_{P_A =} \underbrace{V_B}_{= 2V_A} = nRT_B \Rightarrow 2P_AV_A = nRT_B$$

En utilisant $P_AV_A = nRT_A$, on trouve :

$$2\,nRT_A = nRT_B$$

$$\Rightarrow \boxed{T_B = 2T_A}$$

Pour trouver la pression en C, on applique la même méthode.

$$P_C \underbrace{V_C}_{= V_A} = nR\underbrace{T_C}_{= T_B = 2T_A}$$

soit encore $P_C V_A = 2nRT_A$

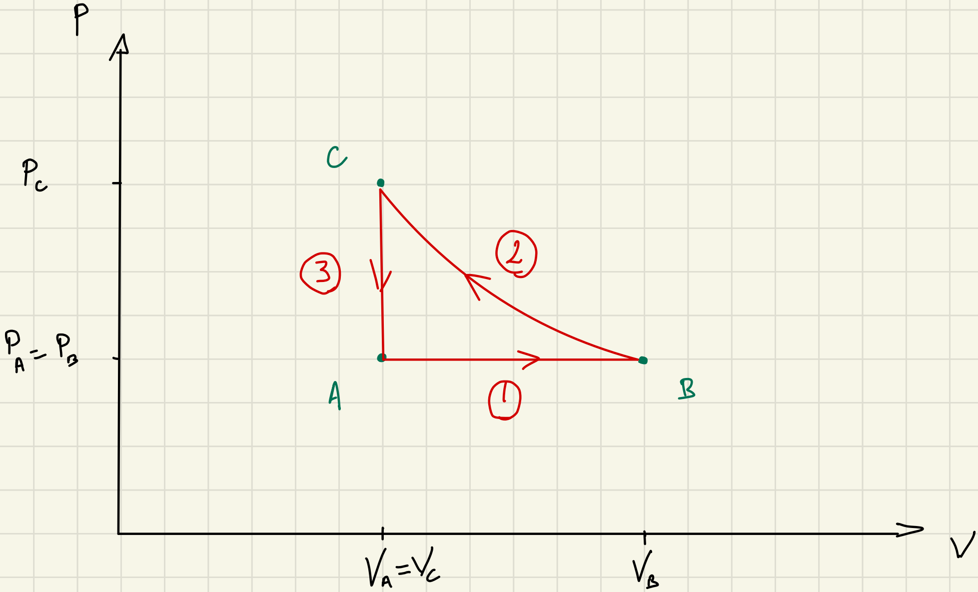
En utilisant : $P_AV_A = nRT_A$, on trouve

$$P_C \cancel{V_A} = 2P_A \cancel{V_A}$$

soit enfin.

$$\boxed{P_C = 2P_A}$$

Question 2



	Q_i	W_i
$i = 1$	$\dfrac{\gamma n R T_A}{\gamma - 1}$	$-P_A V_A$
$i = 2$	$-2 n R T_A \ln 2$	$2 n R T_A \ln 2$
$i = 3$	$-\dfrac{n R T_A}{\gamma - 1}$	0

Rapel : $W = -\int P dV$ donc le long d'une isochore, $dV = 0$ donc pas de travail échangé lors de la transformation ; $W_3 = 0$

$$W_1 = -\int_A^B P\,dV = -\int_A^B P_A\,dV$$

$$= -P_A \int_A^B dV = -P_A \left[V\right]_{V_A}^{V_B = 2V_A}$$

$$= -P_A\left(2V_A - V_A\right) = -P_A V_A$$

$$\boxed{W_A = -P_A V_A}$$

$$W_2 = -\int_B^C P\,dV \quad \text{où} \quad PV = nRT_B = 2nRT_A$$

$$\text{soit} \quad P = \frac{2nRT_A}{V}$$

$$\text{soit} \quad W_2 = -\int_B^C \frac{2nRT_A}{V}\,dV$$

$$= -2nRT_A \int_B^C \frac{1}{V}\,dV$$

$$W_2 = -2nRT_A \left[\ln V\right]_{V_B = 2V_A}^{V_C = V_A}$$

$$= -2nRT_A\left(\ln V_A - \ln 2V_A\right)$$

$$= -2nRT_A \ln\left(\frac{\cancel{V_A}}{2\cancel{V_A}}\right)$$

soit encore $W_2 = -2nRT_A \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

ou $\boxed{W_2 = 2nRT_A \ln 2}$

La transformation 1 est une transformation isobare :

$$Q_1 = \int_A^B C_p \, dT = C_p \int_A^B dT = C_p \left[T\right]_{T_A}^{T_B = 2T_A}$$

soit $Q_1 = C_p \left(2T_A - T_A\right)$

et $\boxed{Q_1 = C_p T_A}$

Il reste à exprimer le résultat en fonction de γ :

Définition de γ. $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ (I)

Relation de Mayer (pour un gaz parfait) : $C_p - C_v = nR$ (II)

(I) $\Rightarrow$ $C_p = \gamma C_v$

(II) $\Rightarrow$ $\gamma C_v - C_v = nR \Leftrightarrow (\gamma - 1) C_v = nR$

soit aussi :

$$\begin{cases} C_v = \dfrac{nR}{\gamma - 1} & (\mathrm{I}\ \text{bis}) \\ C_p = \dfrac{\gamma n R}{\gamma - 1} & (\mathrm{II}\ \text{bis}) \end{cases}$$

En substituant (II bis) dans Q_1 :

$$\boxed{Q_1 = \frac{\gamma n R T_A}{\gamma - 1}}$$

Pour la transformation 3, on utilise le fait qu'elle est isochore :

$$Q_3 = \int_C^A C_v \, dT = C_v \int_C^A dT$$

$$= C_v \left[T \right]_{T_C = T_B = 2T_A}^{T_A}$$

$$Q_3 = C_v (T_A - 2T_A) = -C_v T_A$$

Avec (I bis) on trouve $\boxed{Q_3 = -\dfrac{nRT_A}{\gamma - 1}}$

Le calcul de Q_2 requiert le premier principe et la première loi de Joule :

$$\begin{cases} dU = \delta Q + \delta W & \text{1er principe} \\ dU = C_V \, dT & \text{1ère loi de Joule} \end{cases}$$

soit en les combinant :

$$C_V \, dT = \delta Q + \delta W$$

Or la transformation 2 est isotherme : $(dT)_2 = 0$

On en déduit :

$$\int_B^C \quad 0 = (\delta Q)_2 + (\delta W)_2$$

$$0 = Q_2 + W_2$$

Soit encore $\quad Q_2 = -W_2$

	Q_i	W_i
$i=1$	$\dfrac{\gamma nRT_A}{\gamma-1}$	$-P_AV_A$
$i=2$	$\boxed{-2nRT_A\ln 2}$	$2nRT_A\ln 2$
$i=3$	$-\dfrac{nRT_A}{\gamma-1}$	0

<u>Question</u> 4 Vérifier $\Delta U = 0$ pour ce cycle.

Un cycle = une courbe fermée.

$$\Delta U = U(EF) - U(EI)$$
$$= U(A) - U(A)$$
$$= 0$$

Le premier principe s'écrit aussi :

$$\Delta U = W + Q$$

$$\begin{aligned} & W_1 + Q_1 \\ = & +W_2 + Q_2 \\ & +W_3 + Q_3 \end{aligned}$$

À vérifier

$= 0$?

On vient de démontrer que $W_2 + Q_2 = 0$.

Il reste donc à démontrer que :

$$W_1 + W_3 + Q_1 + Q_3 = 0$$

$$W_1 + W_3 + Q_1 + Q_3 = -P_A V_A + 0 + \frac{\gamma n R T_A}{\gamma - 1} - \frac{n R T_A}{\gamma - 1}$$

$$= -P_A V_A + \frac{n R T_A}{\cancel{\gamma - 1}} (\cancel{\gamma - 1})$$

$$= -P_A V_A + n R T_A$$

$= P_A V_A$

$$= -P_A V_A + P_A V_A$$

$$= 0 \qquad \text{CQFD}$$

On a bien : $\Delta U = 0$