CHAPITRE II — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

= 1 seule variable indépendante $(x, t, \dots)$

① LE PROBLÈME DE CAUCHY

(IVP en anglais = INITIAL VALUE PROBLEM)

Deux exemples :

- Désintégration radioactive :

$$\begin{cases} \dot{N}(t) + \lambda N(t) = 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

- Pendule simple :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) + \omega^2 \sin[\theta(t)] = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \Omega_0 \end{cases}$$

Quel que soit l'ordre de l'EDO (1 ou 2 dans les exemples ci-dessus), les conditions de bord doivent être spécifiées au même instant (si la variable indépendante est le temps) ou au même endroit (si la variable indépendante est une coordonnée spatiale).

- Conduction stationnaire dans une barre

$$\forall x \in [0, L], \quad 0 = T''(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T(0) = T_0 \\ T(L) = T_L \end{cases}$$

PROBLÈME AUX LIMITES

$$\forall x \in [0, L], \quad 0 = T''(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T(0) = T_0 \\ T'(0) = \dot{Q}_0 \end{cases}$$

PROBLÈME DE CAUCHY

$$\forall x \in [0, L], \quad 0 = T''(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T(0) = T_0 \\ T'(L) = \dot{Q}_L \end{cases}$$

PROBLÈME AUX LIMITES

Dans le contexte des EDO d'ordre 2, on distingue traditionnellement 3 types de conditions aux limites.

- Dirichlet : on fixe la valeur de la variable dépendante en un point

  Ex : $T(0) = T_0$

- Neumann : on fixe la valeur de la dérivée de la variable dépendante en un point.

  Ex : $T'(L) = \dot{Q}_L$

- Robin : on fixe une combinaison linéaire de la variable dépendante et de sa dérivée en un point

  Ex : $\alpha T(0) + \beta T'(0) = \gamma$

Une manière générique d'écrire un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = f(t, q(t)) \\ q(0) = q_0 \end{cases}$$

t : la variable indépendante

q : la variable dépendante

f : le modèle

q_0 : la condition initiale

La variable indépendante peut désigner une coordonnée temporelle (un instant) mais aussi une coordonnée spatiale (comme pour la conduction stationnaire)

Il s'agit d'un système d'EDO au 1er ordre couplées entre elles.

Comment réécrire le système :

$$\ddot{\theta}(t) + \omega^2 \sin[\theta(t)] = 0$$

sous la forme générique ?

Il suffit de poser :

$$\boxed{\begin{aligned} q_1 &= \theta \\ q_2 &= \dot{\theta} \end{aligned}}$$

c'est-à-dire que q n'est plus un scalaire dans $\mathbb{R}$ $(q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R})$ mais dans $\mathbb{R}^n$ (où $n = 2$ ici)

Pour exprimer f le modèle du pendule simple.

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = q_2 \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\right) = \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin[\theta(t)] = -\omega^2 \sin[q_1(t)] \end{cases}$$

Soit

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}}_{=\vec{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_2(t) \\ -\omega^2 \sin(q_1(t)) \end{pmatrix}}_{f(t, \vec{q}(t))}$$

Ici, le modèle vaut simplement.

$$f : (t, q_1, q_2) \longmapsto \begin{pmatrix} q_2 \\ -\omega^2 \sin(q_1) \end{pmatrix}$$

Dériver f (le modèle) pour l'équation suivante.

$$0 = T''(x) + T^4(x)$$

$t \leftrightarrow x$

$q_1 = T$

$q_2 = T'$

$\dot{q}_1 = \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{dT}{dx} = T' = q_2$

$\dot{q}_2 = \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{dq_2}{dx} = \dfrac{d}{dx}(T') = T''(x)$

$= q_1^4(x)$

$$f : (t, q_1, q_2) \longmapsto \begin{pmatrix} q_2 \\ -q_1^4 \end{pmatrix}$$

Lorsque la variable indépendante n'apparaît explicitement dans le modèle, on parlera de modèle (ou système) autonome.