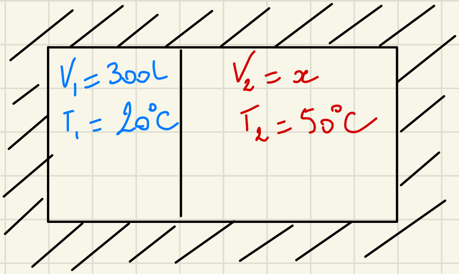
THERMODYNAMIQUE - SEANCE TD 10

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_z = 1$$

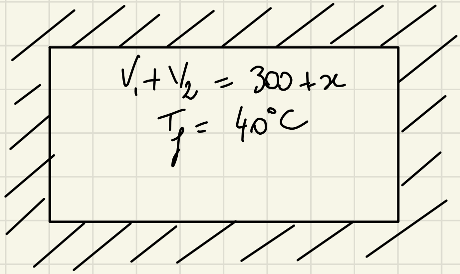
TD 2	TD3
Ex. 2 ✓, 3 ✓ et 5 ✓	Ex. 1.3
	Ex 2

Révision TD 2

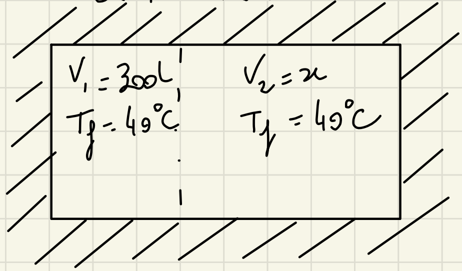
Exercice 2



Etat Initial



État Final



Échanges de chaleur

Q_1 = quantité de chaleur reçue pour réchauffer V_1

Q_2 = " " reçue pour refroidir V_2

2 formules à disposition :

$\delta Q = C_v \, dT$ transformation isochore

$\delta Q = C_p \, dT$ " isobare

Pour les phases condensées (incompressibles). $C_p \approx C_v = C$.

solides liquides

Donc ici : $\delta Q = C \, dT = m c \, dT = \rho V c \, dT$

$$C_V = n\, c_V^{(m)} = m\, c_v$$

extensive (J/K)

molaire (intensive) $(J/K/mol)$

massique (intensive) $(J/K/kg)$

$$Q = \int_{E.I.}^{E.F} \delta Q$$

1

$$Q_1 = \int_{T_1}^{T_f} (\rho V_1)\, c\, dT$$

$$= \rho V_1 c \int_{T_1}^{T_f} 1 \times dT$$

$$= \rho V_1 c\, [T]_{T_1}^{T_f}$$

$$\boxed{Q_1 = \rho \underbrace{V_1 c\, (T_f - T_1)}}$$

$c =$ constant

2

$$Q_2 = \int_{T_2}^{T_f} (\rho V_2)\, c\, dT$$

$$= \rho V_2 c \int_{T_2}^{T_f} dT$$

$$= \rho V_2 c\, [T]_{T_2}^{T_f}$$

$$\boxed{Q_2 = \rho \underbrace{V_2 c\, (T_f - T_2)}}$$

$V_2 = x$

Les échanges de chaleur se compensent puisque l'enceinte est calorifugée :

$$Q_1 + Q_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (Q_1 = -Q_2)$$

"chaleur reçue par l'eau froide" — "chaleur cédée par l'eau chaude"

$$\rho \underbrace{V_1 c\, (T_f - T_1)}_{= Q_1} + \rho \underbrace{x\, c\, (T_f - T_2)}_{= Q_2} = 0$$

$$\div \rho c \qquad \frac{\cancel{\rho c}\, V_1 (T_f - T_1)}{\cancel{\rho c}} + \frac{\cancel{\rho c}\, x (T_f - T_2)}{\cancel{\rho c}} = \frac{0}{\rho c}$$

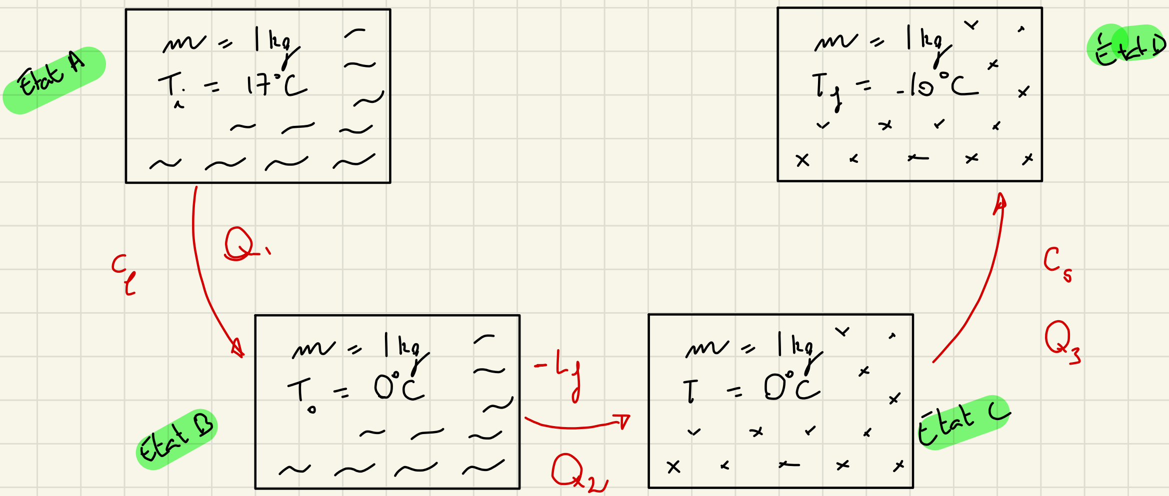
$$\Rightarrow \quad V_1 (T_f - T_1) + x (T_f - T_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x (T_f - T_2) = - V_1 (T_f - T_1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = - \frac{T_f - T_1}{T_f - T_2} V_1}$$

A.N. : $x = - \dfrac{(40 - 20)}{(40 - 50)} 300 = - \dfrac{20}{(-10)} 300 = 600 \text{ L}$

EXERCICE 3



$$Q_1 = \int_A^B \delta Q = \int_A^B C_\ell \, dT = \int_A^B m c_\ell \, dT$$

$$\Rightarrow Q_1 = \int_{T_i}^{T_0} m c_\ell \, dT = m c_\ell [T]_{T_i}^{T_0} = m c_\ell (T_0 - T_i)$$

$$Q_2 = - m L_f$$

$$Q_3 = \int_C^D \delta Q = \int_C^D C_s \, dT = \int_C^D m \, c_s \, dT$$

$$\Rightarrow Q_3 = \int_{T_0}^{T_f} m c_s \, dT = m c_s [T]_{T_0}^{T_f} = m c_s (T_f - T_0)$$

La quantité de chaleur prélevée à la masse d'eau :

$$Q = -Q_1 - Q_2 - Q_3$$

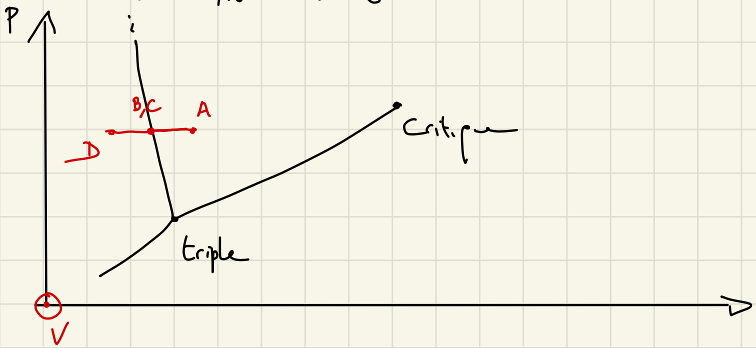
$$= m c_\ell (T_i - T_0) + m L_f + m c_s (T_0 - T_f)$$

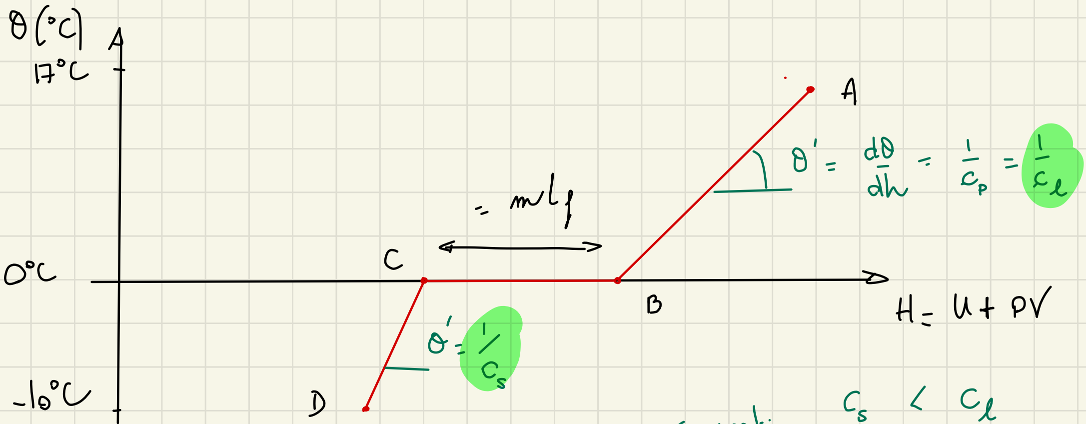
A.N. : $Q = 1 \times 4{,}185 \times 10^3 \times (17-0) + 1 \times 335 \times 10^3$

J ⟷ kJ

$+ \; 1 \times 2{,}09 \times 10^3 \left(0 - (-10)\right)$

$Q = 427\,045 \text{ J} = 427 \text{ kJ}$



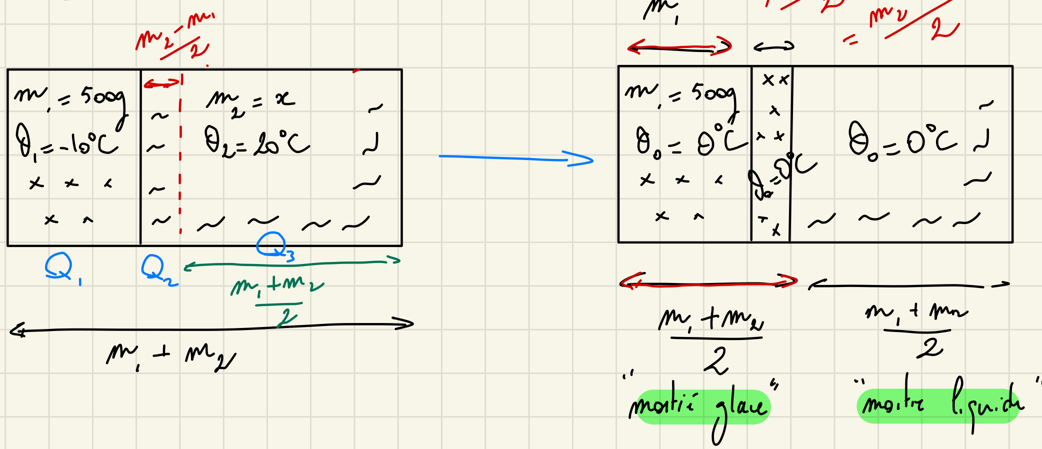


$c_s < c_\ell$

composition par la f^n inverse (s^t décroissante)

$\frac{1}{c_s} > \frac{1}{c_\ell}$

EXERCICE 5



$$Q_1 = m_1 c_s (\theta_0 - \theta_1)$$

$$Q_2 = \frac{m_2 - m_1}{2} \left[c_e (\theta_0 - \theta_2) - L_f \right]$$

$$Q_3 = \frac{m_1 + m_2}{2} c_e (\theta_0 - \theta_2)$$

Tous les échanges de chaleur ayant lieu entre l'eau et la glace :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 c_s (\theta_0 - \theta_1) + \frac{m_2 - m_1}{2} c_e (\theta_0 - \theta_2) - \frac{m_2 - m_1}{2} L_f + \frac{m_1 + m_2}{2} c_e (\theta_0 - \theta_2) = 0$$

$$\Rightarrow m_1 c_s (\theta_0 - \theta_1) + \left[\frac{m_2 \cancel{- m_1}}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{m_1} + m_2}{\cancel{2}} \right] c_e (\theta_0 - \theta_2) - \frac{m_2 - m_1}{2} L_f = 0$$

$$\Rightarrow m_1 c_s (\theta_0 - \theta_1) + m_2 c_e (\theta_0 - \theta_2) - \frac{m_2 - m_1}{2} L_f = 0$$

$$\Rightarrow m_2\left[c_e(\vartheta_0-\vartheta_2) - \frac{L_f}{2}\right] = -m_1\left[c_s(\vartheta_0-\vartheta_1) + \frac{L_f}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{m_2 = -\frac{c_s(\vartheta_0-\vartheta_1) + \frac{L_f}{2}}{c_e(\vartheta_0-\vartheta_2) - \frac{L_f}{2}}\, m_1}$$

TD 3

Exercice 4

$$\delta W = - \underbrace{P_{ext}}_{\text{Difficulté}} dV$$

2 cas de figure : (1) transformation quasi statique $\Rightarrow P_{ext} = P$
succession d'états d'équilibre

(2) transformation brutale $\Rightarrow P_{ext}$ = constante à déterminer
($P_f = P_{ext}$)

Transformation quasi-statique

$P(V, T)$ à l'équilibre

Pour déterminer $W = \int \delta W \underset{QS}{=} - \int_{EI}^{EF} P \, dV$

→ Isotherme : $T = T_0$ constante

Dans le cas du gaz parfait : $PV = nRT_0$

$\Rightarrow P = \dfrac{nRT_0}{V}$ = constante

→ Adiabatique réversible ; pour un gaz parfait PV^γ = constante
($\delta Q = 0$) (QS)

où $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ est le coefficient adiabatique
($\gamma > 1$)

→ Isobare : $W = -\int_{V_0}^{V_i} P \, dV = -P(V_i - V_0)$

EI : P_0, V_0, T_0

EF P_1, V_1, T_1

$$\underbrace{P_1 V_1^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma} = P V^{\gamma}}_{P V^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = P_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}} \quad (I)$$

S'agissant d'une transformation adiabatique réversible, elle est aussi quasi-statique.

$$W = \int \delta W = -\int_{EI}^{EF} P dV \quad (II)$$

En substituant (I) dans (II), on obtient :

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} P_0 \frac{V_0^{\gamma}}{V^{\gamma}} dV$$

$$W = -P_0 V_0^{\gamma} \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V^{\gamma}} dV$$

RAPPEL

$$I = \int_a^b x^n dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b & \text{si } n \neq -1 \\ \left[\ln(x)\right]_a^b & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

Ici, on intègre $\frac{1}{V^{\gamma}} = V^{-\gamma} \Rightarrow n = -\gamma$

Or $\gamma \neq 1 \Rightarrow n = -\gamma \neq -1$

On en déduit :

$$W = -P_0V_0^{\gamma}\int_{V_0}^{V_1}\frac{1}{V^{\gamma}}\,dV$$

$$= -P_0V_0^{\gamma}\left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{V_0}^{V_1}$$

$$= -P_0V_0^{\gamma}\left(\frac{V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}-\frac{V_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

$$= P_0V_0^{\gamma}\left(\frac{V_1^{1-\gamma}}{\gamma-1}-\frac{V_0^{1-\gamma}}{\gamma-1}\right)$$

$$= \underbrace{P_0V_0^{\gamma}}_{=P_1V_1^{\gamma}}\times\frac{V_1^{1-\gamma}}{\gamma-1} - P_0V_0^{\gamma}\times\frac{V_0^{1-\gamma}}{\gamma-1}$$

$$= P_1V_1^{\gamma}\times\frac{V_1^{1-\gamma}}{\gamma-1} - P_0V_0^{\gamma}\times\frac{V_0^{1-\gamma}}{\gamma-1}$$

$$= \frac{P_1V_1^{\cancel{\gamma}+1\cancel{-\gamma}}}{\gamma-1} - \frac{P_0V_0^{\cancel{\gamma}+1\cancel{-\gamma}}}{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow W = \frac{P_1V_1}{\gamma-1} - \frac{P_0V_0}{\gamma-1}$$

Or $PV = nRT \rightarrow P_0V_0 = nRT_0$

$ \searrow P_1V_1 = nRT_1$

On en déduit :

$$W = \frac{nRT_1}{\gamma - 1} - \frac{nRT_0}{\gamma - 1}$$

$$\boxed{W = \frac{nR}{\gamma - 1}\left(T_1 - T_0\right)}$$