MFT 3 1-2 – TP – 12/01/21

- Énoncé disponible à l'adresse habituelle :

http://vlc1.github.io/mft-3-1-2/

- Aujourd'hui :

(1) retour sur le TP 1 (problèmes rencontrés ?)

(2) résolution de BVP avec application au changement de phase (sublimation)

PROBLÈME DE CAUCHY

TP 1 = systèmes homogènes (réacteurs 0D) t

= cinétique chimique à $\underbrace{\text{multiple échelle}}_{\text{système raide}}$

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, t), & \forall t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

PROBLÈME AUX LIMITES

TP 2 = systèmes hétérogènes (solide . gaz)

= stationnaire r

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, t), & \forall t \in [a, b] \\ h(u(a), u(b)) = 0 \end{cases}$$

DÉFINITION IMPLICITE DES CONDITIONS AUX LIMITES

ODE

TP1

IVP = initial value problems (pb. de Cauchy)

BVP = boundary value problem

- Dirichlet + Neumann
- Robin

TP2

DAE = Differential Algebraic equat° (NS semi discrete)

- Multipoint BVP
- DDE = delay differential equat°
- Integro differential

Jacobien d'une fonction : soit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ (x_1, x_2, \ldots, x_p) & \longmapsto & \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_p) \\ \vdots \\ f_q(x_1, \ldots, x_p) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

alors son jacobien est la fonction :

$$J(f) : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Ex :

$$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \longmapsto & h(x, y) \end{array} \right.$$

$p = 2n, \quad q = n$

$$J(h) : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{array}{c} n \text{ lignes} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & & \frac{\partial h_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} & \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\qquad}_{n} + \underbrace{\qquad}_{n} = 2n \text{ colonnes}$$

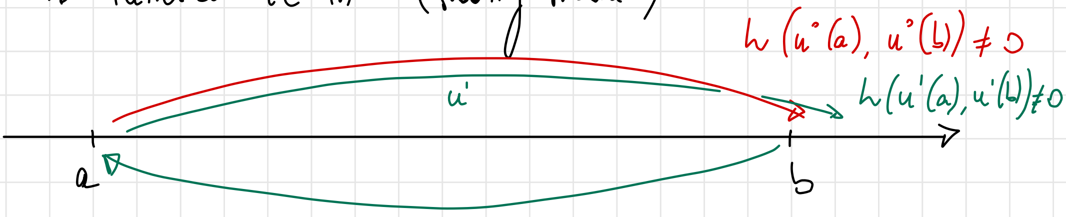
Les systèmes qui nous intéressent :

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, t), & \forall t \in [a,b] \\ h(u(a), u(b)) = 0 \end{cases}$$

où h est telle que $J(h)$ est de rang plein.

Méthodes de résolution :

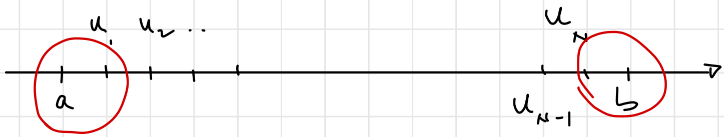
→ Méthodes de tir (shooting method)



Itération 1 : on devine les conditions manquantes : $u^0(a)$

Itération 2 : on corrige $(u^1(a))$ de telle sorte à diminuer le résidu $h(u(a), u(b))$

→ Différences finies



C.R. TP = 01 / 02 / 21

= 2 documents sous la forme de notebook Pluto

TP1 TP2

(deux fichier .jl)

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_1 = \theta \\ u_2 = \dot{\theta} \end{cases}$$

EDO d'ordre 2

$$\dot{u}_1 = \dot{\theta} = u_2$$

$$\dot{u}_2 = (\dot{\theta})^{\cdot} = \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin u_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = -\omega^2 \sin u_1 \end{cases}$$

$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta$

$$u_1(r) = T(r)$$

$$u_2(r) = \frac{dT}{dr}(r)$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \\ \boxed{\begin{array}{l} \dot{\theta}(a) = A \\ \theta(b) = B \end{array}} \end{cases}$$

$$u_1 = \theta$$

$$u_2 = \dot{\theta}$$

$$\begin{cases} u_2(a) = A \\ u_1(b) = B \end{cases} \iff \underbrace{\begin{cases} u_2(a) - A = 0 \\ u_1(b) - B = 0 \end{cases}}_{= h}$$

Dans ce cas-ci.

$$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_2 - A \\ y_1 - B \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$u(a) = \begin{pmatrix} u_1(a) \\ u_2(a) \end{pmatrix} \qquad u(b) = \begin{pmatrix} u_1(b) \\ u_2(b) \end{pmatrix}$$