Démarche scientifique – Examen blanc

05/11/2020

Documents et calculatrice autorisés.

1 EDO et transformation

Soit l'équation différentielle ordinaire

$$\forall t > 0, \quad y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) - y(t) + 2$$

où la solution est soumise aux conditions initiales

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = 2. \end{cases}$$

1. Transformer cette équation en un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1.
2. Modifier la fonction `julia` suivante (qui correspond au système du pendule simple avec une pulsation unitaire) en fonction de la réponse à la question précédente :

```
rhs(t, y1, y2) = (y2, -sin(y1))
```

2 Schéma explicite d'Euler

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\forall t > 0, \quad y'(t) = 2t - y(t)$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 1.$$

1. Trouver la solution exacte de ce problème.
2. Appliquer le schéma explicite d'Euler à ce problème, avec $\tau = 0.1$ puis évaluer la solution en $t = 0.3$. Comparer à la solution exacte.

3 Étude de stabilité

On considère la résolution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f[t, y(t)], \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

par la famille de schémas définie par

$$y_{n+1} = y_n + \tau \left[(1-\omega) f(t_n, y_n) + \omega f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right]$$

où $\omega \in [0, 1]$.

1. À quels schémas vus en cours correspondent les cas $\omega = 0$, $1/2$ et 1 ?

On considère le cas linéaire où $f\colon\ (t, y) \mapsto \lambda y$.

2. Montrer que la solution exacte évaluée aux instants $(t_n) \equiv (n\tau)$ est une suite géométrique de raison $\sigma(z)$ à déterminer (on rappele que $z \equiv \lambda\tau$).
3. De même, montrer que la solution numérique par le schéma précédent est également une suite géométrique de raison $\overline{\sigma}(z, \omega)$ à déterminer.
4. À partir de développements limités de σ et $\overline{\sigma}$ en z au voisinage de 0, montrer sous quelle(s) condition(s) le schéma est d'ordre 2.
5. Montrer que la région de stabilité

   $$\Omega(\omega) \equiv \{ z \in \mathbb{C} \,/ |\overline{\sigma}(z, \omega)| < 1 \}$$

   contient le demi-plan complexe

   $$\mathbb{C}_- \equiv \{ z \in \mathbb{C} \,/ \mathrm{Re}(z) < 0 \}$$

   si et seulement si $\omega \geq 1/2$.

4 Méthode des différences finies

Soit le maillage représenté à la figure 1. On souhaite établir une formule approchée de la dérivée seconde de y au point $x_{1/2} = h/2$ par la méthode des différences finies étant données

- y'_0 la valeur de la dérivée en $x_0 = 0$,
- (y_1, y_2) les valeurs aux points $(x_1, x_2) = (h, 2h)$.

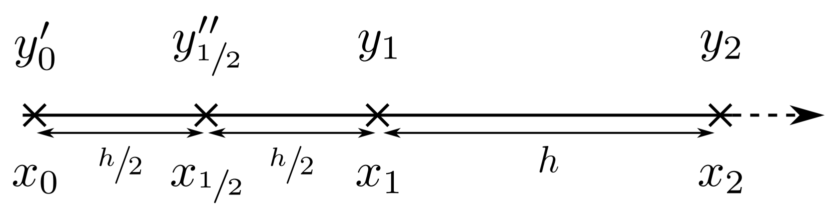

Figure 1: Maillage de l'exercice 4.

Il s'agit donc de trouver α, β et γ de telle sorte que la formule

$$y''_{1/2} \simeq \alpha y'_0 + \beta y_1 + \gamma y_2 \tag{1}$$

soit d'ordre le plus élevé possible.

1. Établir les développements limités au voisinage de $x_{1/2}$ de y'_0 à l'ordre 3, et y_1 et y_2 à l'ordre 4.
2. Les substituer dans l'équation 1 et en déduire un système de 3 équations à 3 inconnues.
3. Résoudre ce système.
4. Exprimer l'erreur de troncature et en déduire l'ordre du schéma.