TD2.

- Intro à la thermo
- Outils mathématiques

→ Dérivée (1 ou plusieurs variables)

→ Formes différentielles : $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

→ Différentielle d'une fonction : soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$

alors sa différentielle s'écrit : $df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$

→ Lemme de Poincaré : soit une forme différentielle

$$\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

alors si $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y$ il existe une

fonction f dont ω est la différentielle. On écrira

$$\begin{cases} P(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \\ Q(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \end{cases}$$

→ Fonctions implicites : une manière de représenter la dépendance d'une variable x en deux variables indépendantes (y,z) est la façon "classique" via une application : $\underline{x = f(y,z)}$

On a parfois besoin d'une représentation plus générale, ce qui se fait grâce à des fonctions implicites. Pour noter la dépendance de x en (y,z), on écrira : $F(x,y,z) = 0$.

Ex : $F : (x,y,z) \longmapsto x - f(y,z)$

En effet $F(x,y,z) = 0 \iff x - f(y,z) = 0$

$$\iff x = f(y,z)$$

Une fonction implicite $F(x,y,z) = 0$ permet aussi d'intervertir les rôles de x, y et z.

$$\begin{cases} x = f(y,z) \\ y = g(z,x) \\ z = h(x,y) \end{cases}$$

théorème des fonctions implicites.

En thermo

$\cancel{x}$ P

$\cancel{y}$ V

$\cancel{z}$ T

Ex 3. $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ ← variable dépendantes

⇄ variables indépendantes

$dx(y,z) =$

puis $dy(z,x) =$

---

① $x = x(y,z)$

$$dx(y,z) = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz.$$

② $y = y(z,x)$

$$dy(z,x) = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx$$

③ SUBSTITUTION

$$dy(z,x) = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz\right]$$

$= 1 \times dy$

$$\Rightarrow \left[1 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\right] dy = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] dz$$

④ Soient $(\vec{u}, \vec{v})$ deux vecteurs indépendants (famille libre). Alors si $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$ alors $\alpha = \beta = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u} \longleftrightarrow dy \\ \vec{v} \longleftrightarrow dz\end{array}\right) \quad \text{si}$$

$$\Big[\underbrace{1 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z}_{\alpha}\Big] dy = \Big[\underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}_{-\beta}\Big] dz$$

alors
$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 0 & \text{(I)} \\ \left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

ALTERNATIVE

$$0 = \underbrace{\Big(\qquad\Big)}_{=0} dy + \underbrace{\Big(\qquad\Big)}_{=0} dz .$$

différentielle de la fonction nulle

$$\text{(I)} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1} \quad \text{(III)a} \quad \text{CQFD.}$$

Avant de procéder au deuxième résultat, il convient de souligner le fait que les rôles de x, y et z sont identiques

$$\begin{array}{ccc} x & \leftarrow & y \\ y & \leftarrow & z \\ z & \leftarrow & x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} x & \leftarrow & z \\ y & \leftarrow & x \\ z & \leftarrow & y \end{array}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 1} \qquad \boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1}$$

(III) b $\qquad\qquad\qquad$ (III) c

⑤ Utilisons (III) b pour simplifier (II)

$$(\mathrm{II}) \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 0$$

$$\times \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}_{=1} + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -1}$$

$(y \leftrightarrow z)$ $\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1}$

Ex 5. COEFFICIENT THERMOELASTIQUES DU GAZ PARFAIT

Soit l'équation d'état du gaz parfait : $PV = nRT$

Calculer

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

V : variable dépendante

(T, P) : variables indépendante

Exprimer $V = V(T, P)$

On part de $PV = nRT$ et on essaie d'isoler V.

$$V = \frac{nRT}{P}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{PV}$$

Soit l'équation d'état. $PV = nRT$

$$\Leftrightarrow \frac{PV}{PV} = \boxed{1 = \frac{nR}{PV} T}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{T} = \frac{nR}{PV}$$

POUR UN GAZ PARFAIT

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{T}} \Leftarrow$$

$$\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

$P(T,V)$ à partir de l'équation d'état

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

$V(T,P)$ à partir de l'équation d'état (déjà fait)

Exo 6