ENE-4102C – Examen blanc

28/10/2020

1 Schéma explicite d'Euler

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\forall t > 0, \quad y'(t) = t + y(t)$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 1.$$

1. Trouver la solution exacte de ce problème.
2. Appliquer la méthode explicite d'Euler à ce problème, avec $\tau = 0.1$ puis évaluer la solution en $t = 0.3$. Comparer à la solution exacte.

2 L'autre méthode de Runge-Kutta (aussi classique !) d'ordre 4

L'article que Kutta publia en 1901 présentait la méthode classique d'ordre 4 vue en cours, ainsi qu'une seconde méthode, elle aussi d'ordre 4 mais moins fréquemment employée, pour la résolution numérique du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f\left[t, y(t)\right], \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Sur l'intervalle $]t_n, t_{n+1}]$, ce schéma s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{8}\left(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4\right)$$

où $\tau = t_{n+1} - t_n$ et

$$\begin{cases} k_1 = f\left(t_n, y_n\right), \\ k_2 = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{3}, y_n + \dfrac{\tau}{3}k_1\right), \\ k_3 = f\left(t_n + \dfrac{2\tau}{3}, y_n - \dfrac{\tau}{3}k_1 + \tau k_2\right), \\ k_4 = f\left(t_n + \tau, y_n + \tau k_1 - \tau k_2 + \tau k_3\right). \end{cases}$$

On **se concentre uniquement sur le cas scalaire, linéaire et autonome**, pour lequel

$$f\colon\ (t, y) \mapsto \lambda y$$

et où $\lambda \in \mathbb{C}$ est le paramètre du modèle.

1. Rappeler la solution exacte de ce problème de Cauchy, et le facteur
$$\sigma_{\text{exact}}\left(z\right) \equiv \frac{y\left(t_{n+1}\right)}{y\left(t_n\right)}$$
exprimé en fonction de $z = \tau\lambda$.
2. Rappeler la condition sous laquelle la solution exacte est stable. Représenter la région de stabilité de la solution exacte dans le plan complexe ($z = x + \imath y$).
3. Effectuer un développement limité de σ_{exact} à l'ordre 5 au voisinage de 0.
4. Montrer que k_1, k_2, k_3 et k_4 s'écrivent sous la forme
$$\tau k_i = P_i\left(z\right) y_n$$
où P_1, P_2, P_3 et P_4 sont des polynômes de degrés 1, 2, 3 et 4, respectivement.
5. Comme en cours, on définit
$$\sigma_{\text{num}}\left(z\right) = \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$
Exprimer σ_{num} en fonction de P_1, P_2, P_3 et P_4, puis expliciter l'expression obtenue en utilisant les expressions obtenues à la question précédente.
6. En comparant cette expression au développement limité de σ_{exact}, déterminer l'ordre du schéma.

3 Programmation en `julia`

L'équation de Blasius décrit l'évolution de la couche limite sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression. Elle s'écrit
$$\dddot{y} + \ddot{y}y = 0.$$

1. Quel est l'ordre de cette équation ?
2. La réécrire sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1.

   Indication : introduire $\vec{q}\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^3$ tel que $q_1 = y$, $q_2 = \dot{y}$, $q_3 = \ddot{y}$ puis exprimer $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ et $\dot{q}_3$ en fonction de q_1, q_2 et q_3.
3. Écrire la fonction `julia` correspondant à ce système.

   Indication : on pourra s'inspirer du cas du système de Lorenz
$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma\left(y - x\right), \\ \dot{y} = x\left(\rho - z\right) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$
   avec $\sigma = 10$, $\beta = {}^8/_3$ et $\rho = 28$, pour lequel la fonction s'écrira

```
lorenz(x, y, z) = 10 * (y - x), x * (28 - z) - y, x * y - 8 * z / 3
```