

7/12/2020 - TD Séance 10

PREMIER PRINCIPLE

Énoncé : Il existe une fonction d'état U , appelée énergie interne, dont la variation s'écrit :

$$dU = \delta Q + \delta W$$

Cas particulier du gaz parfait :

Première loi de Joule :

$$dU = C_v dT$$

(U ne dépend que de T)

(Deuxième loi de Joule : $dH = C_p dT$)

enthalpie
 $H = U + PV$

Soit $U(T, V)$, alors sa différentielle s'écrit :

$$dU = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V}_{\equiv C_v} dT + \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T}_{\text{1ère loi de Joule}} dV$$

$$\Rightarrow dU = C_v dT$$

($\overset{=0}{\text{pour un G.P., } U \text{ ne dépend que de } T}$)

Exercice I - Cycle décrit par un gaz parfait

$n = 1 \text{ mol}$ d'un gaz parfait ($PV = nRT$)

État initial : $P_A = 2 \text{ bar}$

$$V_A = 14 \text{ L} = 14 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Trois transformations

(1) $A \rightarrow B$: détente isobare qui double son volume

$$P_B = P_A (=P)$$

$$V_B = 2V_A$$

(2) $B \rightarrow C$: compression isotherme jusqu'au volume V_A

$$T_B = T_C (=T)$$

$$V_C = V_A$$

(3) $C \rightarrow A$: refroidissement isochore jusqu'à l'état A.

$$V_A = V_C (=V)$$

Question 1 : Valeur de $T_B = T_C = ?$

- Exprimer T_A en fonction de n , P_A et V_A
- Exprimer T_B en fonction de T_A .

L'état A est un état d'équilibre : la loi d'état s'applique :

$$P_A V_A = n R T_A$$

\Rightarrow

$$T_A = \frac{P_A V_A}{n R}$$

L'état B est lui aussi un état d'équilibre :

$$\begin{array}{l} P_B V_B = n R T_B \\ \swarrow \quad \downarrow \\ = P_A \quad = 2 V_A \end{array}$$

d'où

$$2 P_A V_A = n R T_B$$
$$= n R T_A$$

On trouve enfin :

$$2 n R T_A = n R T_B$$

\Rightarrow

$$T_B = 2 T_A$$

La compression isotherme s'effectue donc à la température

$$T = T_B = T_C = 2 T_A$$

On peut aussi calculer :

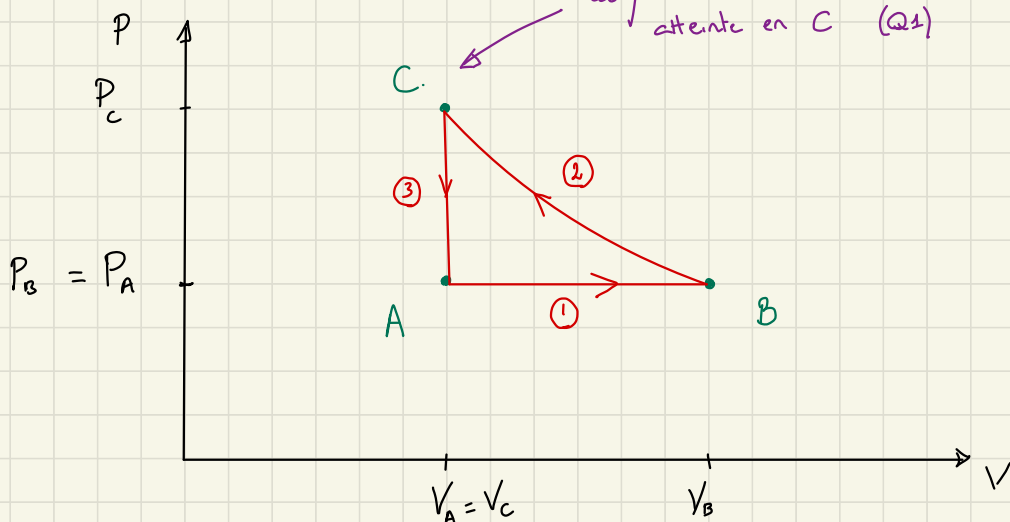
$$P_C = \frac{n R T_C}{V_C} = \frac{2 n R T_A}{V_A} = 2 \frac{n R T_A}{V_A} = 2 P_A$$

d'où

$$P_C = 2 P_A$$

Question 2

diagramme le Clapeyron



les isothermes d'un gaz parfait sont représentées par des hyperboles (= graphes de la fonction $y \mapsto \frac{k}{x}$)

Pourquoi ?

$$PV = nRT = k \text{ constante}$$

parce que T est constant

$$\Rightarrow \textcircled{P} = \frac{k}{\textcircled{V} = x}$$

de la forme

$$y = \frac{k}{x}$$

Question 3

la transformation 3 est isochore. $dV = 0$

$$\Rightarrow W_3 = - \int_C^A P dV = 0$$

$$\text{Considérons } W_1 = - \int_A^B P dV = - P_A \int_A^B dV = - P_A [V]_A^B \quad V_B = 2V_A$$

$$\text{d'où } W_1 = - P_A (2V_A - V_A) = - P_A V_A$$

	W_i	Q_i
①	$-P_A V_A = -nRT_A$	$\frac{\gamma nRT_A}{\gamma-1}$
②	$2nRT_A \ln 2$	$-2nRT_A \ln 2$
③	0	$-\frac{nRT_A}{\gamma-1}$

le calcul de W_2 se fait de la même manière.

$$\begin{aligned}
 W_2 &= - \int_B^C P dV \quad \text{avec} \quad PV = nRT_B \Leftrightarrow P = \frac{nRT_B}{V} \\
 &= - \int_B^C \frac{nRT_B}{V} dV \\
 &= -nRT_B \int_{V_B}^{V_C} \frac{1}{V} dV \\
 &= -nRT_B \left[\ln V \right]_{V_B=2V_A}^{V_C=V_A} \\
 &= -2nRT_A \left(\ln V_A - \ln(2V_A) \right) \\
 &= -2nRT_A \ln \left(\frac{V_A}{2V_A} \right) \\
 &= -2nRT_A \ln \left(\frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$W_2 = 2nRT_A \ln 2$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \int_A^B C_p dT = C_p \int_{T_A}^{T_B} dT = C_p [T]_{T_A}^{T_B} \\
 &= C_p (\underbrace{T_B}_{=2T_A} - T_A) \\
 &= 2C_p T_A
 \end{aligned}$$

$$Q_1 = C_p T_A$$

Il reste à exprimer ce résultat en fonction de γ

Définition de $\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{C_p}{C_v}$ (I)

Relation de MAYER $\Rightarrow C_p - C_v = nR$ (II)
du G.P.

$$(I) \Rightarrow C_p = \gamma C_v \quad (I')$$

$$(I) + (II) \Rightarrow C_p - C_v = \gamma C_v - C_v = (\gamma - 1) C_v = nR \quad (II')$$

On isole C_v dans (II') :

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

On substitue le résultat dans (I') :

$$C_p = \gamma C_v = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

On substitue ce résultat dans l'expression de Q_1 :

$$Q_1 = C_p T_A = \frac{\gamma nR T_A}{\gamma - 1}$$

Passons au calcul de Q_3 : il s'agit d'une transformation

isochore .

$$\begin{aligned} Q_3 &= \int_c^A C_v dT = C_v \int_c^A dT \\ &= C_v [T]_{T_c = 2T_A}^{T_A} \\ &= C_v (T_A - 2T_A) \\ &= -C_v T_A \end{aligned}$$

En trouvant à partir de $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$ que :

$$Q_3 = - \frac{nRT_A}{\gamma-1}$$

le calcul de Q_2 se fait à partir du premier principe et de la première loi de Joule (= NOTRE PREMIERE APPLICATION DU PREMIER PRINCIPE)

On écrit : $dU = \delta Q + \delta W$ (III) (1^{er} principe)

Or pour un G.P. : $dU = C_v dT$ (IV) (1^{er} loi de Joule)

En substituant (IV) dans le premier membre de (III)

$$C_v dT = \delta Q + \delta W$$

soit $\delta Q = C_v dT - \delta W$

Or pour une transformation réversible (donc Q.S.), on a

$$\delta W = - PdV$$

On a enfin :

$$\delta Q = C_v dT + PdV$$

On peut maintenant intégrer entre les états B et C

$$(T_B = T_C = T \Rightarrow \underline{dT=0})$$

$$Q_2 = \int_B^C \delta Q = \int_B^C \underbrace{C_v dT}_{\substack{\text{isotherme} \\ = 0}} + \int_B^C \underbrace{P dV}_{= -W_2}$$

soit encore

$$Q_2 = -W_2$$

	W_i	Q_i
①	$-P_A V_A = -nRT_A$	$\frac{\gamma nRT_A}{\gamma-1}$
②	$2 nRT_A \ln 2$	$-2 nRT_A \ln 2$
③	0	$-\frac{nRT_A}{\gamma-1}$

Question 4

Vérifier $\Delta U = 0$ par un cycle
(valable pour tous les cycles)

Premier principe :

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$\int_{E.I}^{E.F} dU = \int_{E.I}^{E.F} \delta Q + \int_{E.I}^{E.F} \delta W$$

$$U(E.F) - U(E.I) = \Delta U = Q + W$$

sat $\Delta U = Q + W$

On nous demande donc de montrer que :

$$\Delta U = U(A) - U(A) = 0$$

$$= Q_1 + W_1$$

$$+ Q_2 + W_2 = 0 \text{ puisque } Q_2 = -W_2$$

$$+ Q_3 + W_3$$

Il suffit donc de démontrer :

$$Q_1 + W_1 + Q_3 + W_3 = 0 \quad \text{\AA VÉRIFIER}$$

$$\begin{aligned} \gamma \frac{nRT_A}{\gamma-1} - nRT_A - \frac{nRT_A}{\gamma-1} + 0 &= \gamma \frac{nRT_A}{\gamma-1} - \frac{nRT_A}{\gamma-1} - nRT_A \\ &= \frac{nRT_A}{\gamma-1} (\gamma - 1) - nRT_A \\ &= nRT_A - nRT_A \\ &= 0 \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Comme attendu, on a pu pour un cycle, $\Delta U = 0$