DEMARCHE SCIENTIFIQUE

http://vlc1.github.io/os08/

MNE :
- définition assez vague.
- découverte des métiers de vos enseignants et vos enseignants - chercheurs.
- Méthodes numériques pour l'énergétique et la thermique

Organisation :
- 36 H de face à face ($\frac{1}{3}$ CM, $\frac{1}{3}$ TD, $\frac{1}{3}$ TP)
- Évaluation : 50% CR TP
  50% Devoir surveillé
- Démarche scientifique ($\frac{2}{3}$) + Vibration ($\frac{1}{3}$)

Plan de cours

(I) RAPPELS ET COMPLÉMENTS

(a) Thermique et mécanique des fluides

Convection, conduction, rayonnement

- lois de conservation (masse, q.d.m, énergie)

(2) Mathématiques

- Algèbre linéaire
- Suites
- Développements limités
- Equations différentielles $\left(N'(t) = -\lambda N(t) \right)$

II) RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES (EDO)

1. Problème de Cauchy
2. Problèmes aux limites

III) RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES (EDP)

1. ELLIPTIQUE (Ex : chaleur stationnaire)
2. PARABOLIQUE (Ex : chaleur instationnaire)
3. HYPERBOLIQUE (Ex : propagation des ondes)

I) Rappels et compléments

a) Thermique et mécanique des fluides

Lorsqu'on étudie les transferts de chaleur dans un milieu continu, l'évolution du profil de température est régie par une équation : celle de la chaleur

T : champs de température ($T : (t, \vec{x}) \to T(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^+$ (en K))

masse volumique (kg/m^3)

Convection

Conduction

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T}_{\text{Convection}} \right] = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T)}_{\text{Conduction}} + S$$

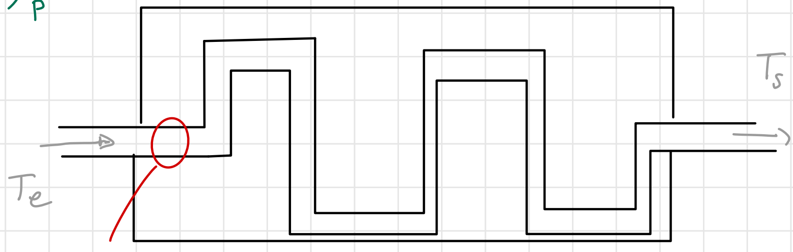
Rayonnement et source

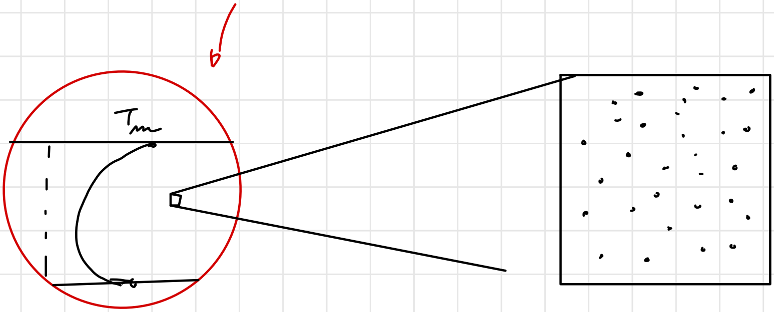
vitesse d'écoulement ($\vec{u} = \vec{0}$ dans un solide)

Conductivité thermique (en W/m/K)

c_p : Capacité calorifique massique à pression constante (en J/K/kg)

$$c_p = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$





EQUILIBRE THERMODYNAMIQUE LOCAL

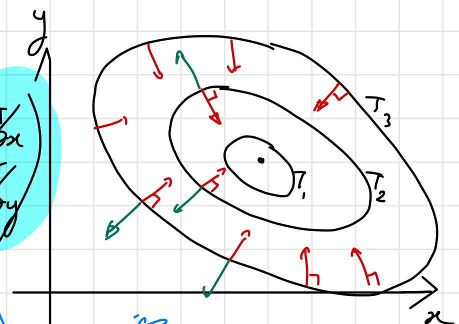
Si les collisions entre les particules du fluide sont suffisamment fréquentes, alors on peut définir une température en tout point $\vec{x}$ et à tout instant

$\vec{\nabla}$: "nabla"

→ gradient

$$\vec{\nabla}T = \begin{pmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \end{pmatrix}$$

en coordonnées cartésiennes



avec $T_3 < T_2 < T_1$

Flux diffusif de chaleur

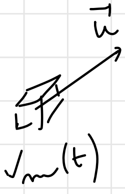
$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$$

la chaleur diffuse depuis les régions chaudes vers les régions froides

→ divergence

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \quad \text{dans un écoulement incompressible}$$

$$= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \left(+ \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$



$$\boxed{\lim_{V_m \to 0} \frac{1}{V_m} \underbrace{\frac{dV_m}{dt}}_{\text{taux de variation du volume d'un volume matériel}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u}}$$

↘ rotationnel ($\underline{Ex}$. $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$)
vorticité

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T = u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z}.$$

en coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

"la divergence du gradient de T"

En mécanique des fluides, on modélise l'évolution du champ du vitesse $\vec{u}(t, \vec{x})$ dans un écoulement incompressible d'un fluide newtonien par :

EQUATION DE NAVIER - STOKES

Terme quadratique ⟹ TURBULENCE

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \left(\mu \vec{\nabla} \vec{u}\right) + \vec{g}$$ QDM

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$ CONTINUITE

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T \right] = \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + S$$

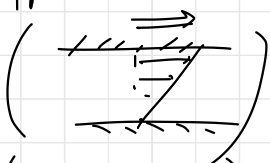
linéaire

L'équation (ou les équations puisque on a une équation pour la quantité de mouvement et une pour la continuité) de Navier-Stokes présente(nt) une différence fondamentale avec celle de la chaleur : elle(s) est (sont) non-linéaire(s) : $\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}$

C'est ce terme qui rend la résolution des équations de Navier-Stokes très difficile (cf. MILLENIUM PRIZE)

L'obtention de solutions analytiques est difficile voire impossible

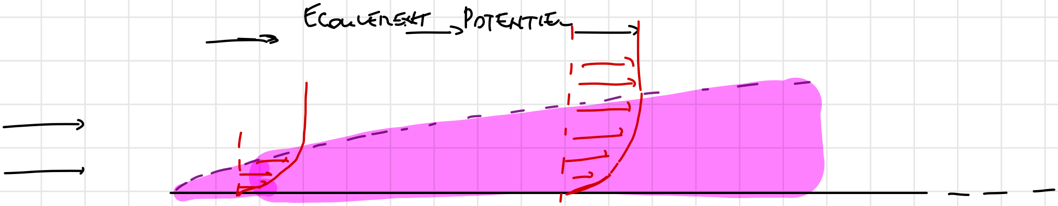
COUETTE



POISEUILLE

On compte actuellement entre 100 et 200 solutions analytiques, dont certaines font appel à des notions mathématiques très poussées

Ex : COUCHES LIMITES.



PRANDTL (1908)

Ex : méthode de variation de la constante

Que faire lorsqu'il n'existe pas de solution analytique ?

$\Rightarrow$ RESOLUTION NUMERIQUE

(2) Mathématiques

. Equations différentielles

Exemple 1 : décroissance radioactive

PROBLÈME DE CONDITION INITIAL
Aussi appelé un problème de CAUCHY

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = -\lambda N(t) \\ N(t=0) = N_0 \end{cases}$$

où N : quantité de particules radioactives

$(\lambda > 0)$

$$\Rightarrow \quad N(t) = \exp(-\lambda t)\, N_0$$

Demi-vie $T_{1/2}$: $\quad N(T_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$

$$\exp(-\lambda T_{1/2})\, N_0 = \frac{N_0}{2}$$

$$-\lambda T_{1/2} = \ln(1/2) = -\ln 2$$

soit : $\boxed{T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}}$

Exemple 2 : le pendule simple linéarisé

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

On peut conjecturer : $\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Vérification :
$$\dot{\theta}(t) = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t)$$
$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t) - \omega^2 B \sin(\omega t)$$
$$= -\omega^2 \big(\underbrace{A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}_{= \theta(t)} \big)$$
$$= -\omega^2 \theta(t)$$

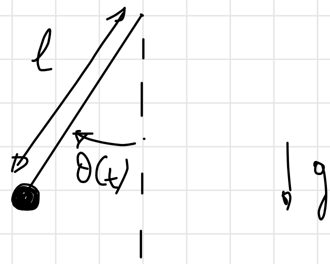
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

approximation des petits angles

" $\sin\theta \simeq \theta$ "

UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

Exemple 3 : le pendule simple



$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$$