

---

---

---

---

---



## T.D.2.

. Intro à la thermo

. Outils mathématiques

→ Dérivée (1 ou plusieurs variables,

→ Formes différentielles :  $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

→ Différentielle d'une fonction : soit  $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$

alors sa différentielle s'écrit :  $df(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$

→ Lemme de Poincaré : soit une forme différentielle

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

alors si  $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y$  il existe une

fonction  $f$  dont  $\omega$  est la différentielle. On écrit

$$\begin{cases} P(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \\ Q(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \end{cases}$$

→ Fonctions implicites : une manière de représenter la dépendance d'une variable  $x$  en deux variables indépendantes  $(y, z)$  est la façon "classique" via une application :  $x = f(y, z)$

On a parfois besoin d'une représentation plus  
généraliste, ce qui se fait grace à des  
fonctions implicites. Pour noter la dépendance de  
 $x$  en  $(y, z)$ , on écrit :  $F(x, y, z) = 0$ .

Ex:  $F: (x, y, z) \mapsto x - f(y, z)$

En effet  $F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x - f(y, z) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = f(y, z)$

Une fonction implicite  $F(x, y, z) = 0$  permet  
aussi d'inverser les rôles de  $x, y$  et  $z$ .

$$\begin{cases} x = f(y, z) \\ y = g(z, x) \\ z = h(x, y) \end{cases}$$

théorème des  
fonctions  
implicites.

En thm

~~x~~ p

~~y~~ ✓

~~z~~ T

Ex 3.

$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$  ← variable dependantes  
 $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$  → variables indépendantes

$$dx(y, z) =$$

puis  $dy(z, x) =$

①  $x = x(y, z)$

$$dx(y, z) = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz$$

②  $y = y(z, x)$

$$dy(z, x) = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx$$

③ SUBSTITUTION

$$dy(z, x) = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz \right]$$

1x dy

$$\Rightarrow \left[ 1 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \right] dy = \left[ \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \right] dz$$

④ Soient  $(\vec{u}, \vec{v})$  deux vecteurs indépendants (famille libe)  
 Alors si  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$  alors  
 $\alpha = \beta = 0$

$$\vec{u} \leftrightarrow dy$$

$$\vec{v} \leftrightarrow dz$$

$$\left[ 1 - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \right] dy = \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \right] dz$$

alors

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 1 - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = 0 \quad (I) \\ \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y = 0 \quad (II) \end{cases}$$

ALTERNATIVE

$$\Theta = \left( \underbrace{\quad}_{=0} \right) dy + \left( \underbrace{\quad}_{=0} \right) dz$$

différentielle in  
la fonction nulle

$$(I) \Rightarrow \boxed{\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z = 1} \quad (III) \text{ a CQFD.}$$

Avant de procéder au deuxième résultat, il convient de souligner le fait que les roles de  $x, y$  et  $z$

sources identiques

$$x \leftarrow y$$

$$y \leftarrow z$$

$$z \leftarrow x$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 1$$

(III) b

$$x \leftarrow z$$

$$y \leftarrow x$$

$$z \leftarrow y$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1$$

(III) c

⑤ Utilisons (III) b pour simplifier (II)

$$(II) \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 0$$

$$\times \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 0$$

$= 1$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -1$$

$$(y \leftrightarrow z) \quad \boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1}$$

Ex 5. COEFFICIENT THERMODYNAMIQUE DU GAZ PARFAIT

Soit l'équation d'état du gaz parfait :  $(PV = nRT)$

Calculer

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$V$ : variable dépendante  
 $(T, P)$ : variables indépendantes

Exprimer  $V = V(T, P)$

On part de  $PV = nRT$  et on essaie d'isoler  $V$ .

$$V = \frac{nRT}{P}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{nR}{P}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P =$$

$$\frac{nR}{PV}$$

Soit l'équation d'état.

$$PV = nRT$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{PV}{PV} = 1 = \frac{nRT}{PV}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{T} = \frac{nR}{PV}$$

$\Leftarrow$

Pour un  
 GAZ  
 PARFAIT

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{T}}$$

$$\beta = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

$$\chi_T = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Exo 6

$P(T, N)$  à partir de.  
l'équation d'état

$V(T, P)$  à partir de  
l'équation d'état  
(déjà fait)