TD Thermo - 16/11

Travail (suite)

Notion de travail déjà rencontrée au lycée :

$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{dL} = \|\vec{F}\| \, L \cos\theta \qquad \Bigg| \qquad \delta W = \vec{F} \cdot \vec{dL} = \|\vec{F}\| \cos\theta \, dL$$

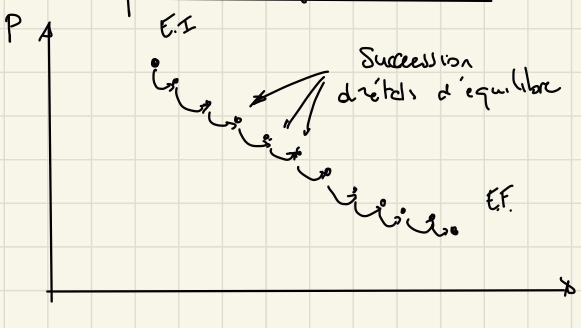
Traduit pour des systèmes simples (les seules forces en présence sont les forces de pression) unidimensionnels :

$$\boxed{\delta W = - P_{ext} \, dV}$$

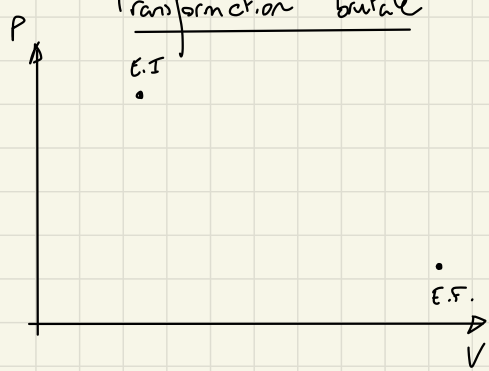
La difficulté repose dans la détermination de P_{ext} :

$$P_{ext} = \begin{cases} P & \text{pour une transformation quasi-statique} \\ P_0 & \text{une constante à déterminer en fonction du problème (ex : la pression du système à l'état final) pour une transformation brutale} \end{cases}$$

Transformation quasi-statique

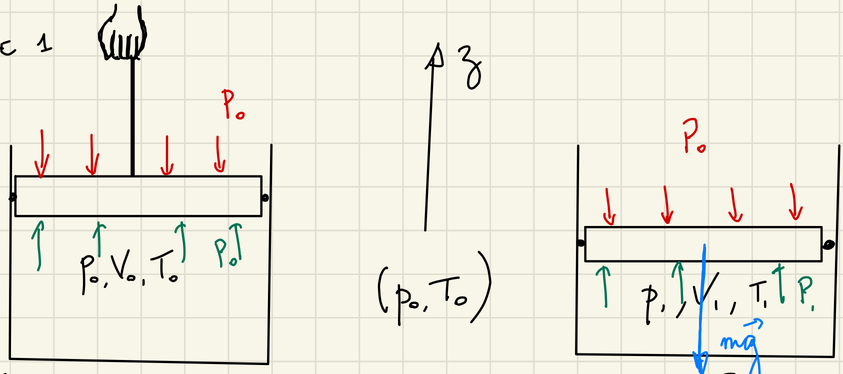


Transformation brutale



EXERCICE 1

③



ETAT INITIAL   ETAT FINAL

PAROI DIATHERME $\Rightarrow$ Qui laisse passer la chaleur $\Rightarrow$ À l'équilibre thermique $T_{système} = T_{extérieur}$

(E.I.) $T_0 = T_0$

(E.F.) $T_1 = T_0$

On effectue un bilan de force (application du PFS)

À l'état initial

Forces exercée sur le piston

- → Pression extérieure (P_0)
- → Pression système (P_0)

$$-P_0 S + P_0 S = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_0 = P_0}$$

S = section du piston

À l'état final

- → Pression extérieure (P_0)
- → " système (P_1)
- → Poids du piston

$$-P_0 S + P_1 S - mg = 0$$

$$P_1 S = P_0 S + mg$$

$$\boxed{P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}}$$

On a donc déterminé : P_1 et T_1. Il ne reste plus qu'à déterminer V_1. On utilise l'équation d'état.

À l'équilibre, on a pour un gaz parfait : $PV = nRT$

Or les états initial et final sont des états d'équilibre.

E.I $\quad P_0 V_0 = nRT_0$ $\qquad$ EF $\quad P_1 V_1 = nR\underbrace{T_1}_{= T_0}$

$$\Downarrow$$

$$P_1 V_1 = nRT_0$$

$$P_1 V_1 = P_0 V_0$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \frac{P_0}{P_1} V_0 = \frac{P_0}{P_0 + \frac{mg}{S}} V_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_1 = \frac{1}{1 + \frac{mg}{SP_0}} V_0}$$

Calculons W, le travail reçu par le gaz

$$\delta W = -P_{ext}\, dV$$

où $P_{ext} = P$ car la transformation est quasi-statique

(l'opérateur relâche le piston infiniment lentement)

On a donc $\delta W = -PdV$ avec P variant entre

P_0 à l'instant initial et P_1 à l'instant final

$$W = -\int_{EI}^{EF} P\,dV$$

On cherche à déterminer $P(V)$

La loi d'état du gaz parfait est applicable puisque la transformation est QS : $\boxed{PV = nRT}$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

Or, les parois étant diathermes et la transformation lente

à tout instant équilibre thermique : $T = T_0$.

La transformation est isotherme.

$$PV = nRT_0 \Rightarrow \boxed{P = \frac{nRT_0}{V}}$$

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} \frac{nRT_0}{V}\,dV = -nRT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V}\,dV$$

$$= -nRT_0\,[\ln V]_{V_0}^{V_1}$$

$$= -nRT_0\,(\ln V_1 - \ln V_0)$$

$$\boxed{W = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)}$$

En utilisant l'expression

$$V_1 = \frac{1}{1 + \frac{mg}{SP_0}} V_0 \qquad (I)$$

on trouve :

$$W = - nRT_0 \ln\left(\frac{1}{1+\frac{mg}{SP_0}}\right)$$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = - \ln(a)$ avec $a = 1 + \frac{mg}{SP_0}$

$$\Rightarrow \boxed{W = + nRT_0 \ln\left(1 + \frac{mg}{SP_0}\right)}$$

On a donc calculé le travail reçu par le gaz : W.

Le travail reçu par le piston du gaz est $-W$.

On trouve également :

(1) le travail de la gravité sur le piston.

$$W_{grav} = mgL = mg\,\frac{V_0 - V_1}{S}$$

En substituant (I) :

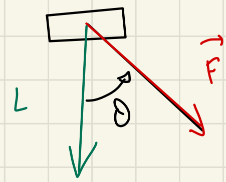
$$W_{grav} = \frac{mg}{S}\left(V_0 - \frac{1}{1+\frac{mg}{P_0 S}} V_0\right)$$

$$= \frac{mg}{S}\left(\frac{\left(1+\frac{mg}{P_0 S}\right)V_0 - V_0}{1+\frac{mg}{P_0 S}}\right)$$

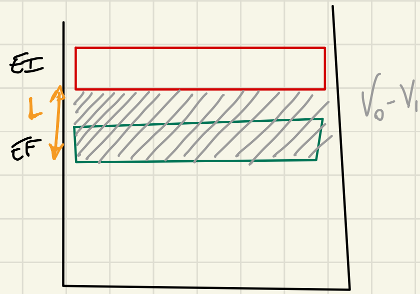
$$\boxed{W_{gaz} = \frac{V_0}{P_0}\left(\frac{mg}{S}\right)^2 \frac{1}{1+\frac{mg}{P_0 S}}}$$

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{L}$$

$$= \|\vec{F}\|\, L \cos\theta$$



Ici : $\vec{F} = -mg\,\vec{k}$



Or $V_0 - V_1 = S L$

donc $L = \dfrac{V_0 - V_1}{S}$

Le travail de la pression extérieure :

$$W_{ext} = P_0 S L = P_0 S \left(\frac{V_0 - V_1}{S}\right)$$

$$W_{ext} = P_0 (V_0 - V_1) = P_0 \frac{mg}{P_0 S}\left(\frac{1}{1+\frac{mg}{P_0 S}}\right) V_0$$

$$\boxed{W_{ext} = P_0 V_0 \frac{\frac{mg}{P_0 S}}{1+\frac{mg}{P_0 S}}}$$

Posons $x = \dfrac{mg}{P_0 S}$ (sans dimension)

Alors
$$-W = -nRT_0 \ln(1+x)$$
$$W_{grav} = P_0V_0 \frac{x^2}{1+x}$$
$$W_{ext} = P_0V_0 \frac{x}{1+x}$$

Enfin, la somme des travaux des forces exercés sur le piston est nulle :
$$-W + W_{grav} + W_{ext} + W_{op} = 0$$
$$\Rightarrow W_{op} = W - W_{grav} - W_{ext}$$
$$= \underbrace{nRT_0}_{=P_0V_0} \ln(1+x) - P_0V_0 \frac{x^2}{1+x} - P_0V_0 \frac{x}{1+x}$$
$$\Rightarrow W_{op} = P_0V_0 \left[\ln(1+x) - \frac{x^2+x}{1+x} \right]$$
$$= P_0V_0 \left[\ln(1+x) - \frac{x(1+x)}{1+x} \right]$$
$$\Rightarrow \boxed{W_{op} = P_0V_0 \left(\ln(1+x) - x \right) \quad \text{avec } x = \frac{mg}{\delta P_0}.}$$

Prochaine fois :

(1) Refaire I③

(2) Commencer II