TD4 – Exercice 3

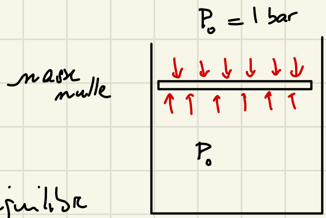
Compression d'un G.P.

① $m = 1g$ d He.
$\mathcal{M} = 4 g/mol$

$$n = \frac{m}{\mathcal{M}} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,mol$$

$T_0 = 300K$

$P_0 = 10^5 Pa$ (P.F.S.)

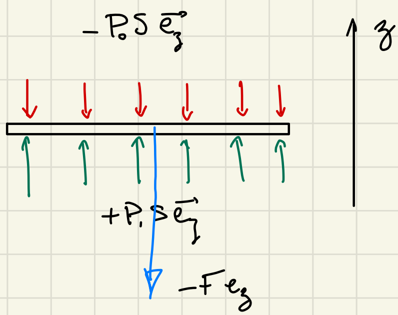


S'agissant d'un gaz parfait à l'équilibre

on peut écrire : $P_0 V_0 = nRT_0$ où $R = 8{,}314\ J/K/mol$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{nRT_0}{P_0} = 6{,}24\,L$$

② On applique le P.F.S (Principe Fondamental de la Statique) au piston le long de l'axe vertical :



$$-P_0 S + P_1 S - F = 0$$

$$\Leftrightarrow P_1 S = P_0 S + F$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_1 \cancel{S}}{P_0 \cancel{S}} = \frac{\cancel{P_0 S}}{\cancel{P_0 S}} + \frac{F}{P_0 S}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{P_1}{P_0} = 1 + \frac{F}{P_0 S}$$

③ Il s'agit d'une transformation brutale : on va donc pouvoir calculer le travail échangé à partir de la formule

$$W = -\int_{E.I}^{EF} P_{ext}\, dV \qquad \text{avec} \quad P_{ext} = P_1 \quad (\text{constante}).$$

Pour déterminer T_1 et V_1, il nous faut utiliser le premier principe :

$$\Delta U = W + Q \; / \; dU = \delta W + \delta Q$$

On calcule $W = -\int_{EI}^{EF} P_1\, dV = -P_1 \int_{V_0}^{V_1} dV = -P_1 [V]_{V_0}^{V_1}$

soit enfin $W = -P_1(V_1 - V_0)$
(inconnu pour l'instant)

Les parois du piston et de l'enceinte sont calorifugée : il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur $Q = 0$

Que faire du ΔU ? Il s'agit d'un gaz parfait la première loi de Joule est applicable et nous permet d'écrire :

$$\Delta U = \int_{EI}^{EF} C_v\, dT \qquad (dU = C_v dT$$
$$= m c_v\, dT)$$

En supposant c_v constant, on trouve :

$$\Delta U = m c_v \int_{T_0}^{T_1} dT = m c_v [T]_{T_0}^{T_1}$$

$$\Delta U = m c_v (T_1 - T_0)$$

On peut maintenant substituer ces expressions dans le premier principe :

$$\Delta U = W + Q$$

$$m c_v (T_1 - T_0) = -P_1 (V_1 - V_0) + 0 \qquad (I)$$

Rappel. P_1 connu (fonction de F)

Relation (I)

V_1 ? T_1 ?

Relation manquante : $\begin{cases} P_1 V_1 = nRT_1 & (II) \\ P_0 V_0 = nRT_0 \end{cases}$

Repartons de (I) : $m c_v (T_1 - T_0) = -P_1 V_1 + P_1 V_0$

$$\Leftrightarrow \quad m c_v (T_1 - T_0) = -P_1 V_1 + P_1 \times \frac{P_0}{P_0} \times V_0$$

$$\Leftrightarrow \quad m c_v (T_1 - T_0) = -\underbrace{P_1 V_1}_{= nRT_1} + \underbrace{\frac{P_1}{P_0}}_{= x} \underbrace{P_0 V_0}_{= nRT_0}$$

Grâce à (II) et $P_0 V_0 = nRT_0$, on trouve

$$m c_v (T_1 - T_0) = -nRT_1 + x\, nRT_0$$

$$\Leftrightarrow \quad (m c_v + nR) T_1 = (x nR + m c_v) T_0$$

$$\Leftrightarrow \quad T_1 = \frac{x nR + \overbrace{m c_v}^{= C_v}}{nR + \underbrace{m c_v}_{= C_v}} T_0$$

Rappel : définition du coefficient adiabatique $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

et la relation de Mayer $C_p - C_v = nR$ (MAYER)

On montre :
$$\begin{cases} C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} \\ C_p = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} \end{cases}$$

On rappelle l'expression de $T_1 = \frac{xnR + C_v}{\underbrace{nR + C_v}_{= C_p}} T_0$

$$T_1 = \Bigg(\underbrace{\frac{xnR}{C_p}}_{= x\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \underbrace{\frac{C_v}{C_p}}_{= 1/\gamma} \Bigg) T_0$$

On trouve enfin : $T_1 = \frac{(\gamma - 1)x + 1}{\gamma} T_0$

(4) Cette fois-ci, $W = -\int P_{ext}\, dV$ où cette fois-ci P_{ext} varie entre P_0 et P_2. (puisqu'il s'agit d'une transformation quasi-statique).

À l'état final, l'application du PFS mène au même résultat qu'à la question précédente :

$$P_2 S = P_0 S + F = P_1 S$$

$$\Rightarrow P_2 S = P_1 S$$

$$\Rightarrow P_2 = P_1$$

$$W = -\int_{\text{Etat } 0}^{\text{Etat}} P\,dV \qquad \text{où} \qquad \underbrace{PV^{\gamma} = P_0V_0^{\gamma}} = P_2V_2^{\gamma}$$

$$P = P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}$$

$$W = -\int_{V_0}^{V_2} P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma} dV = -P_0V_0^{\gamma}\int_{V_0}^{V_2} \frac{1}{V^{\gamma}}\,dV$$

$$\frac{1}{V^{\gamma}} = V^{n} \quad \text{avec} \quad n = -\gamma \neq -1$$

$$= -P_0V_0^{\gamma}\left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]_{V_0}^{V_2}$$

$$= -\frac{P_0V_0^{\gamma}}{1-\gamma}\left(V_2^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma-1}\left(\underbrace{P_0V_0^{\gamma}}_{=P_2V_2^{\gamma}}V_2^{1-\gamma} - P_0\underbrace{V_0^{\cancel{\gamma}}V_0^{1-\cancel{\gamma}}}_{=V_0}\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma-1}\left(P_2\underbrace{V_2^{\cancel{\gamma}}V_2^{1-\cancel{\gamma}}}_{=V_2} - P_0V_0\right)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{\gamma-1}\left(\underbrace{P_2V_2}_{=nRT_2} - \underbrace{P_0V_0}_{=nRT_0}\right)$$

$$\Rightarrow W = \frac{nR}{\gamma-1}\left(T_2 - T_0\right)$$

La première loi de Joule : $dU = C_v\,dT$

$$\Delta U = C_v\left(T_2 - T_0\right)$$

Le premier principe nous dit : $\Delta U = W + \underbrace{Q}_{=0}$ (adiabatique)

$$\Rightarrow \Delta U = Q$$

$$\Rightarrow \quad C_v(T_2 - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_0)$$

$$PV^\gamma = P_2 V_2^\gamma = P_0 V_0^\gamma \quad \Rightarrow \quad V_2^\gamma = \frac{P_0}{P_2} V_0^\gamma = \frac{P_0}{P_1} V_0^\gamma = \frac{1}{x} V_0^\gamma$$

$$\Rightarrow \quad V_2 = \frac{1}{x^\gamma} V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_0} = \frac{1}{x^\gamma}$$

$$\begin{cases} P_2 V_2 = nRT_2 \\ P_0 V_0 = nRT_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_2 V_2}{P_0 V_0} = \frac{\cancel{nR}T_2}{\cancel{nR}T_0}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{P_1}{P_0}}_{= x} \times \underbrace{\frac{V_2}{V_0}}_{\frac{1}{x^\gamma}} = \frac{T_2}{T_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_0} = x^{1-\gamma}$$