ENE-4102C – Examen blanc

28/10/2020

1 Schéma explicite d'Euler

1.1 Énoncé

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\forall t > 0, \quad y'(t) = t + y(t) \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 1. \tag{2}$$

1. Trouver la solution exacte de ce problème.
2. Appliquer la méthode explicite d'Euler à ce problème, avec $\tau = 0.1$ puis évaluer la solution en $t = 0.3$. Comparer à la solution exacte.

1.2 Corrigé

1. On obtient la solution par la méthode de variation de la constante. Soit la solution homogène de l'équation 1

   $$y^h(t) = A\exp(t),$$

   on cherche une solution particulière de la forme

   $$y^p(t) = \exp(t)\, z(t).$$

   Après substitution dans eq. 1, on obtient

   $$z'(t) = t\exp(-t)$$

   et enfin

   $$z(t) = -(1+t)\exp(-t) + B.$$

   La solution s'écrit donc

   $$y(t) = A\exp(t) - t - 1.$$

   On utilise enfin la condition initial (eq. 2) pour déterminer A :

   $$y(t) = 2\exp(t) - t - 1.$$

2. On initialise le premier terme de la suite à $y_0 = y(0) = 1$. Le modèle est ici

$$f\colon\ (t, y) \mapsto t + y$$

et schéma explicite d'Euler définit donc la récurrence suivante

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tau f(t_n, y_n), \\ &= y_n + \tau (t_n + y_n), \\ &= (1+\tau) y_n + \tau t_n. \end{aligned}$$

Il suffit donc d'appliquer cette formule trois fois pour trouver

$$y_1 = (1+\tau) y_0 + \tau t_0 = 1.1 \times 1 + 0 \times 0.1^2 = 1.1,$$

$$y_2 = (1+\tau) y_1 + \tau t_1 = 1.1 \times 1.1 + 1 \times 0.1^2 = 1.22,$$

$$y_3 = (1+\tau) y_2 + \tau t_2 = 1.1 \times 1.22 + 2 \times 0.1^2 = 1.362,$$

On peut enfin comparer ces valeurs à la solution exacte :

$$y(t_1) - y_1 \simeq 1.110 - 1.1 = 0.010,$$

$$y(t_2) - y_2 \simeq 1.243 - 1.22 = 0.023,$$

$$y(t_3) - y_3 \simeq 1.400 - 1.362 \simeq 0.038.$$

Bonus : ci-dessous un petit script Julia pour répondre à la dernière question.

```
using Base.Iterators

exact(t) = 2exp(t) - t - 1

T = 0.:0.1:0.3
Z = exact.(T)

Y = [first(Z)]
for t in T[1:end - 1]
    push!(Y, (1 + step(T)) * last(Y) + step(T) * t)
end

Z .- Y
```

2 L'autre méthode de Runge-Kutta (aussi classique !) d'ordre 4

2.1 Énoncé

L'article que Kutta publia en 1901 présentait la méthode classique d'ordre 4 vue en cours, ainsi qu'une seconde méthode, elle aussi d'ordre 4 mais moins fréquemment employée, pour la résolution numérique du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f[t, y(t)], \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Sur l'intervalle $]t_n, t_{n+1}]$, ce schéma s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{8}\left(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4\right)$$

où $\tau = t_{n+1} - t_n$ et

$$\begin{cases} k_1 = f\left(t_n, y_n\right), \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{\tau}{3}, y_n + \frac{\tau}{3}k_1\right), \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{2\tau}{3}, y_n - \frac{\tau}{3}k_1 + \tau k_2\right), \\ k_4 = f\left(t_n + \tau, y_n + \tau k_1 - \tau k_2 + \tau k_3\right). \end{cases}$$

On **se concentre uniquement sur le cas scalaire, linéaire et autonome**, pour lequel

$$f\colon\ (t, y) \mapsto \lambda y$$

et où $\lambda \in \mathbb{C}$ est le paramètre du modèle.

1. Rappeler la solution exacte de ce problème de Cauchy, et le facteur

   $$\sigma_{\text{exact}}\left(z\right) \equiv \frac{y\left(t_{n+1}\right)}{y\left(t_n\right)}$$

   exprimé en fonction de $z = \tau\lambda$.
2. Rappeler la condition sous laquelle la solution exacte est stable. Représenter la région de stabilité de la solution exacte dans le plan complexe ($z = x + \imath y$).
3. Effectuer un développement limité de σ_{exact} à l'ordre 5 au voisinage de 0.
4. Montrer que k_1, k_2, k_3 et k_4 s'écrivent sous la forme

   $$\tau k_i = P_i\left(z\right) y_n$$

   où P_1, P_2, P_3 et P_4 sont des polynômes de degrés 1, 2, 3 et 4, respectivement.
5. Comme en cours, on définit

   $$\sigma_{\text{num}}\left(z\right) = \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

   Exprimer σ_{num} en fonction de P_1, P_2, P_3 et P_4, puis expliciter l'expression obtenue en utilisant les expressions obtenues à la question précédente.
6. En comparant cette expression au développement limité de σ_{exact}, déterminer l'ordre du schéma.

2.2 Corrigé

1. La solution exacte s'écrit

   $$y\colon t \mapsto \exp\left(\lambda t\right) y_0.$$

   On en déduit

   $$\sigma_{\text{exact}}\left(z\right) = \frac{\exp\left(\lambda t_{n+1}\right) y_0}{\exp\left(\lambda t_n\right) y_0} = \exp\left[\lambda\left(t_{n+1} - t_n\right)\right] = \exp\left(\lambda\tau\right) = \exp\left(z\right).$$

2. La solution exacte est stable lorsque

   $$\mathrm{Re}\left(z\right) \leq 0.$$

3. Le développement limité en 0 s'écrit

$$D_5 \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.$$

4. On trouve

   a.
   $$\tau k_1 = \lambda \tau y_n = z y_n$$

   d'où
   $$P_1 \colon z \mapsto z,$$

   b.
   $$\begin{aligned}\tau k_2 &= \lambda \tau \left[1 + \frac{P_1(z)}{3}\right] y_n, \\ &= z\left(1 + \frac{z}{3}\right),\end{aligned}$$

   d'où
   $$P_2 \colon z \mapsto z + \frac{z^2}{3},$$

   c.
   $$\begin{aligned}\tau k_3 &= \lambda \tau \left[1 - \frac{P_1(z)}{3} + P_2(z)\right] y_n, \\ &= \left(z + \frac{2z^2}{3} + \frac{z^3}{3}\right) y_n,\end{aligned}$$

   d'où
   $$P_3 \colon z \mapsto z + \frac{2z^2}{3} + \frac{z^3}{3},$$

   d.
   $$\begin{aligned}\tau k_4 &= \lambda \tau \left[1 + P_1(z) - P_2(z) + P_3(z)\right] y_n, \\ &= \left(z + z^2 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{3}\right) y_n,\end{aligned}$$

   d'où
   $$P_4 \colon z \mapsto z + z^2 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{3}.$$

5. Enfin,
   $$y_{n+1} = y_n + \frac{P_1(z) + 3P_2(z) + 3P_3(z) + P_4(z)}{8} y_n.$$

   De cette expression et de la question précédente on déduit :
   $$y_{n+1} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}\right) y_n$$

   soit encore
   $$\sigma_{\text{num}}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}.$$

6. Les cinq premiers termes de σ_{num} sont identiques à ceux de σ_{exact} : on en déduit que le schéma est d'ordre 4.

3 Programmation en julia

3.1 Énoncé

L'équation de Blasius décrit l'évolution de la couche limite sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression. Elle s'écrit

$$\dddot{y} + \ddot{y}y = 0.$$

1. Quel est l'ordre de cette équation ?
2. La réécrire sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1.

   Indication : introduire $\vec{q}\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^3$ tel que $q_1 = y$, $q_2 = \dot{y}$, $q_3 = \ddot{y}$ puis exprimer $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ et $\dot{q}_3$ en fonction de q_1, q_2 et q_3.
3. Écrire la fonction `julia` correspondant à ce système.

   Indication : on pourra s'inspirer du cas du système de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma\left(y - x\right), \\ \dot{y} = x\left(\rho - z\right) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

   avec $\sigma = 10$, $\beta = {}^8\!/\!_3$ et $\rho = 28$, pour lequel la fonction s'écrira

```
lorenz(x, y, z) = 10 * (y - x), x * (28 - z) - y, x * y - 8 * z / 3
```

3.2 Corrigé

1. Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 3.
2. En posant $q_1 = y$, $q_2 = \dot{y}$ et $q_3 = \ddot{y}$, on trouve

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ \dot{q}_2 = q_3, \\ \dot{q}_3 = -q_1 q_3. \end{cases}$$

3. On en déduit le code suivant.

```
blasius(x, y, z) = y, z, -x * z
```