Démarche scientifique – Examen

06/11/2020

Documents et calculatrice autorisés.

1 EDO et transformation

Soit l'équation différentielle ordinaire

$$\forall t > 0, \quad y''(t) - t^2 y'(t) + (t+1)\, y(t) + 2t - 1 = 0$$

où la solution est soumise aux conditions initiales

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

1. Transformer cette équation en un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1.
2. Modifier la fonction `julia` suivante (qui correspond au système du pendule simple avec une pulsation unitaire) en fonction de la réponse à la question précédente :

```
rhs(t, y1, y2) = (y2, -sin(y1))
```

2 Schéma explicite d'Euler

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\forall t > 0, \quad y'(t) = 2y(t) + \sin(t)$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 1.$$

1. Montrer (en intégrant par parties **deux fois**) que

$$\int_a^b \sin(t) \exp(2t)\, \mathrm{d}t = \left[\frac{2\sin(t) - \cos(t)}{5} \exp(2t) \right]_a^b .$$

2. Trouver la solution exacte de ce problème. On utilisera le résultat précédent pour obtenir la solution particulière.
3. Appliquer le schéma explicite d'Euler à ce problème, avec $\tau = 0.1$ puis évaluer la solution en $t = 0.3$. Comparer à la solution exacte.

3 L'autre méthode de Runge-Kutta (aussi classique !) d'ordre 4

L'article que Kutta publia en 1901 présentait la méthode classique d'ordre 4 vue en cours, ainsi qu'une seconde méthode, elle aussi d'ordre 4 mais moins fréquemment employée, pour la résolution numérique du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f\left[t, y\left(t\right)\right], \\ y\left(0\right) = y_0. \end{cases}$$

Sur l'intervalle $]t_n, t_{n+1}]$, ce schéma s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{8}\left(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4\right)$$

où $\tau = t_{n+1} - t_n$ et

$$\begin{cases} k_1 = f\left(t_n, y_n\right), \\ k_2 = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{3}, y_n + \dfrac{\tau}{3}k_1\right), \\ k_3 = f\left(t_n + \dfrac{2\tau}{3}, y_n - \dfrac{\tau}{3}k_1 + \tau k_2\right), \\ k_4 = f\left(t_n + \tau, y_n + \tau k_1 - \tau k_2 + \tau k_3\right). \end{cases}$$

On **se concentre uniquement sur le cas scalaire, linéaire et autonome**, pour lequel

$$f:\ (t, y) \mapsto \lambda y$$

et où $\lambda \in \mathbb{C}$ est le paramètre du modèle.

1. Rappeler la solution exacte de ce problème de Cauchy, et le facteur
$$\sigma_{\text{exact}}\left(z\right) \equiv \frac{y\left(t_{n+1}\right)}{y\left(t_n\right)}$$
exprimé en fonction de $z = \tau\lambda$.
2. Rappeler la condition sous laquelle la solution exacte est stable. Représenter la région de stabilité de la solution exacte dans le plan complexe $(z = x + \imath y)$.
3. Effectuer un développement limité de σ_{exact} à l'ordre 5 au voisinage de 0.
4. Montrer que k_1, k_2, k_3 et k_4 s'écrivent sous la forme
$$\tau k_i = P_i\left(z\right) y_n$$
où P_1, P_2, P_3 et P_4 sont des polynômes de degrés 1, 2, 3 et 4, respectivement.
5. Comme en cours, on définit
$$\sigma_{\text{num}}\left(z\right) = \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$
Exprimer σ_{num} en fonction de P_1, P_2, P_3 et P_4, puis expliciter l'expression obtenue en utilisant les expressions obtenues à la question précédente.
6. En comparant cette expression au développement limité de σ_{exact}, déterminer l'ordre du schéma.