14/12/2020

Récapitulatif

- MATHEMATIQUES $(\alpha, X_f \dots$

  $df(x,y) \dots$

  Lemme de Poincaré.

- CALORIMÉTRIE échanges de chaleur

  δQ : transformation infinitésimale

  $Q = \int_A^B \delta Q$: transformation intégrale

  C_v, C_p : chaleurs sensibles

  L_{vap}, L_{fusion} : chaleurs latentes

- TRAVAIL

$$W = \begin{cases} \int \vec{F} \cdot d\vec{L} & (S) \\ \|\vec{F}\| \, \|\vec{L}\| \cos\theta & (STI\text{-}2D) \end{cases}$$

1D : $W = -\int P_{ext} \, dV$

+ P.F.S.

$$P_{ext} = \begin{cases} P & (\text{transformation Q.S}) \\ P_f & (\text{transformation brutale}) \end{cases}$$

→ Isochore $(dV = 0 \Rightarrow W = 0)$

→ Isobare $(W = P(V_i - V_f))$

$\rightarrow$ GP $\rightarrow$ isotherme $PV =$ constant

$\rightarrow$ adiabatique réversible $PV^{\gamma} =$ constante.

où $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ (coefficient adiabatique)

- **PREMIER PRINCIPE**

$$\boxed{dU = \delta W + \delta Q}$$

$$\int_{EI}^{EF} dU = U(EF) - U(EI) = \Delta U = \underbrace{\int \delta W}_{= W} + \underbrace{\int \delta Q}_{= Q}$$

$$\boxed{\Delta U = W + Q}$$

Spécialisation au cas du gaz parfait = première loi de Joule :

$$dU = C_v \, dT$$

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad \left(\begin{array}{l} \gamma = \frac{C_p}{C_v} \\ C_p - C_v = nR \quad \text{MAYER} \end{array} \right)$$

Ex, Transformation isotherme d'un gaz parfait

$$\underset{\uparrow \atop \text{1ère loi de Joule}}{dU =} C_v \, d\overset{= 0}{T} \underset{\uparrow \atop \text{1er principe}}{=} \delta W + \delta Q \Rightarrow \delta Q = - \delta W$$

$$\Rightarrow Q = - W$$

EXERCICE 6 - DETENTE POLYTROPIQUE D'UN G.P.

Définition : transformation polytropique $PV^k = $ constante

Exemples :

- $\underline{k = 0}$ ISOBARE

  $P \times V^0 = $ constant $\Rightarrow P = $ constant

- $\underline{k \to +\infty}$ $\lim_{k \to +\infty} PV^k = $ constant

  $\Rightarrow V = $ constant ISOCHORE

- $\underline{k = 1}$ ISOTHERME

  $PV = $ constante $\Rightarrow nRT = $ constante

  $\Rightarrow T = $ constante

- $\underline{k = \gamma}$ (coefficient adiabatique)

  $PV^\gamma = $ constante $\Rightarrow$ ADIABATIQUE REVERSIBLE

Terminologie de l'énoncé :

ABSORPTION DE CHALEUR : $\delta Q \geq 0$ (système reçoit de la chaleur)

DEGAGEMENT DE CHALEUR : $\delta Q \leq 0$ (il en cède)

ECHAUFFEMENT DU GAZ : $dT \geq 0$

REFROIDISSEMENT DU GAZ : $dT \leq 0$

Objectif : relier dT et δQ à partir du premier principe, de la loi d'état des gaz parfaits, de $PV^k = \text{constante}$ et la première loi de Joule

---

PREMIER PRINCIPE : $\boxed{dU = \delta W + \delta Q}$ GÉNÉRAL

PREMIÈRE LOI DE JOULE : $dU = C_v \, dT$

LOI D'ÉTAT DES GAZ PARFAIT : $PV = nRT$

TRANSFORMATION POLYTROPIQUE : $PV^k = \text{constante}$

GAZ PARFAITS UNIQUEMENT

Soit $PV = nRT$, on peut différencier cette égalité :

$$d(PV) = d(nRT) \Rightarrow PdV + VdP = nR\,dT$$

On peut diviser par PV dans le premier membre et nRT dans le second :

$$\frac{PdV + VdP}{PV} = \frac{nR\,dT}{nRT}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T}} \quad (\Leftarrow PV = nRT)$$

On effectue la même transformation sur : $PV^k = \text{constante}$

$$d(PV^k) = d(\text{constante}) = 0$$

$$P\, \underbrace{d(V^k)}_{k V^{k-1} dV} + V^k\, dP = 0$$

$$\Rightarrow \quad k P V^{k-1} dV + V^k dP = 0$$

Factoriser V^k

$$V^k\left(k \frac{P}{V} dV + dP\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad k \frac{P}{V} dV + dP = 0$$

$$\Rightarrow \quad k \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \qquad (\Leftarrow \quad PV^k = \text{constante})$$

Récapitulatif :

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$dU = C_v\, dT$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

$$k \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

On sait aussi que pour une transformation réversible (donc QS)

$$\delta W = -P dV$$

On élimine δW et dU pour obtenir :

$$C_v\, dT = \delta Q - P dV \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \qquad (\mathrm{II})$$

$$k\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \qquad (\text{III}).$$

La relation (III) donne :

$$\frac{dP}{P} = -k\frac{dV}{V} \qquad (\text{III}')$$

En substituant (III') dans (II) :

$$-k\frac{dV}{V} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

$$(1-k)\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \qquad (\text{II}')$$

On a réussi à éliminer dP :

$$C_v\,dT = \delta Q - P\,dV \qquad (\text{I})$$

$$(1-k)\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \qquad (\text{II}')$$

Or en isolant dV dans (II') :

$$dV = \frac{V}{T}\,\frac{dT}{(1-k)}$$

S'agissant d'un gaz parfait : $PV = nRT$

$$\Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{nR}{P}$$

soit enfin : $$dV = \frac{nR\,dT}{P(1-k)} \qquad (\text{II}'')$$

On a maintenant :

$$C_v\, dT = \delta Q - P\, dV \qquad (I)$$

$$dV = \frac{nR\, dT}{p(1-k)} \qquad (II'')$$

En substituant (II'') dans (I) :

$$\boxed{C_v\, dT = \delta Q - \frac{nR\, dT}{1-k}}$$

On regroupe les termes en dT à gauche.

$$\left(C_v + \frac{nR}{1-k}\right) dT = \delta Q \qquad (I')$$

On utilise la relation de Mayer et le résultat.

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} \qquad (IV).$$

(conséquence de la résolution du système $\begin{cases} \frac{C_p}{C_v} = \gamma \\ C_p - C_v = nR \end{cases}$)

En substituant (IV) dans (I'), on trouve :

$$\left(\frac{nR}{\gamma-1} + \frac{nR}{1-k}\right) dT = \delta Q$$

$$nR\left(\frac{1}{\gamma-1}+\frac{1}{1-k}\right)dT = \delta Q$$

$$nR\left[\frac{\cancel{1}-k+\gamma-\cancel{1}}{(\gamma-1)(1-k)}\right]dT = \delta Q$$

$$\boxed{nR\left[\frac{\gamma-k}{(\gamma-1)(1-k)}\right]dT = \delta Q}$$

Il s'agit donc d'étudier le signe de

$$nR\,\frac{\gamma-k}{(\gamma-1)(1-k)}$$

Or $\begin{cases} nR \geq 0 \\ \gamma-1 \geq 0 \end{cases}$ ($\gamma > 1$ c.à.d. $C_p > C_v$)

donc il suffit d'étudier le signe de

$$\frac{\gamma-k}{1-k}$$

k	0 (ISOBARE)		1 (ISOTHERME)		γ (ADIABATIQUE REVERSIBLE)		$+\infty$ (ISOCHORE)
$\gamma-k$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-k$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{\gamma-k}{1-k}$		$+$		$-$		$+$	

: δQ et dT ont des signes opposés

: δQ et dT ont le même signe

(a) Absorption de chaleur ($\delta Q > 0$) et échauffement du gaz ($dT > 0$)

$$0 < k < 1 \quad \text{et} \quad \gamma < k$$

(b) Absorption de chaleur ($\delta Q > 0$) et refroidissement du gaz ($dT < 0$)

$$1 < k < \gamma$$

Retour sur : $d(PV) = PdV + VdP$

$$d(PV^k) = P\,dV^k + V^k\,dP$$
$$= k\,PV^{k-1}\,dV + V\,dP$$

Tout simplement la définition des différentielles :

$$f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$$
$$df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

Cas particulier : (1) $f : (x,y) \longmapsto xy$

$$df(x,y) = y\,dx + x\,dy$$
$$\Leftrightarrow \quad d(xy) = y\,dx + x\,dy$$

$x = V$

$y = P$

$$d(PV) = PdV + VdP$$

$$(2)\quad f : (x,y) \longmapsto y x^k$$

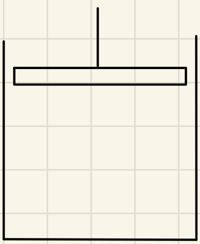
$$df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

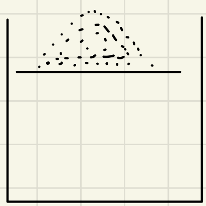
$$= k x^{k-1} y\, dx + x^k dy$$

$$d(PV^k) = kPV^{k-1} dV + V^k dP$$

---

m





QS.

PFS

sur le piston