DÉMARCHE SCIENTIFIQUE

11/02/21

Chercher le développement de sin au voisinage de $a = 0$ aux ordres 1, 3 et 5.

Deux méthodes : la première est une application de la formule de Taylor-Young.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}$$

$$+ \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(a)\frac{(x-a)^j}{j!}$$

Ici : $a = 0$

$f = \sin \Rightarrow f(a) = \sin(0) = 0$

$f' = \cos \Rightarrow f'(a) = \cos(0) = 1$

$f'' = -\sin \Rightarrow f''(a) = -\sin(0) = 0$

$f^{(3)} = -\cos \Rightarrow f^{(3)}(a) = -\cos(0) = -1$

$f^{(4)} = \sin \Rightarrow f^{(4)}(a) = \sin(0) = 0$

$f^{(5)} = \cos \Rightarrow f^{(5)}(a) = \cos(0) = 1$

$$DL(0,1) : x \longmapsto \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{f'(0)}_{=1}(x-0) \quad (\text{TY avec } n=1)$$

$$= 0 + 1 \times x$$

$$= x$$

APPROXIMATION DES PETITS ANGLES. ($\sin x \approx x$)

On écrira : $\sin(x) = x + o(x)$

$$DL(0,3) : x \longmapsto \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{f'(0)}_{=1}(x-0) + \underbrace{f''(0)}_{=0}\frac{(x-0)^2}{2} + \underbrace{f'''(0)}_{=-1}\frac{(x-0)^3}{6}$$

$$= 0 + 1 \times x + 0 + (-1) \times \frac{x^3}{6}$$

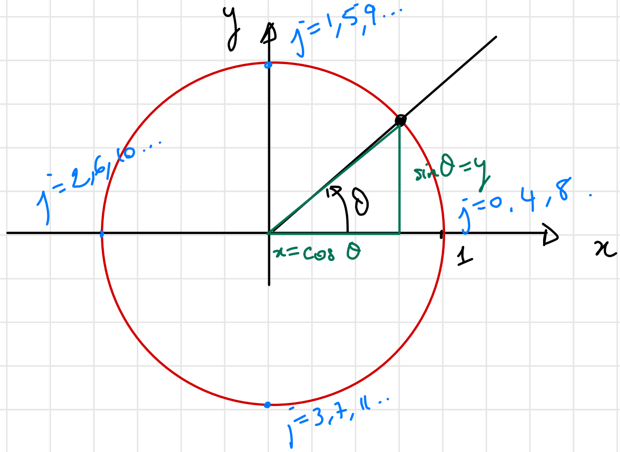
$$= x - \frac{x^3}{6}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

La deuxième méthode consiste à revisiter la définition des fonctions trigonométriques en fonction de l'exponentielle complexe.

$$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = \underbrace{\cos\theta}_{x} + i\underbrace{\sin\theta}_{y} \qquad (\mathrm{I}a)$$



$$\exp(-i\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \qquad (\mathrm{I}b)$$

$$\frac{(\mathrm{I}a)+(\mathrm{I}b)}{2} \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\frac{(\mathrm{I}a)-(\mathrm{I}b)}{2i} \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Rappel. on a montré grâce à la formule de Taylor Young que $\exp(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + o(x^n)$

le changement de variable $x = i\theta$ donne :

$$\exp(i\theta) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(i\theta)^j}{j!} + o(\theta^n)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} i^j \frac{\theta^j}{j!} + o(\theta^n)$$

$$i^j = \left(e^{i\pi/2}\right)^j = \left(e^{ij\pi/2}\right)$$

On a donc :

$$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - \frac{i\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} + i\frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^6}{720} - i\frac{\theta^7}{5040} + \dots$$

— : cos (somme)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{\theta^n}{n!}$$

$$\exp(-i\theta) = e^{-i\theta} = 1 - i\theta - \frac{\theta^2}{2} + \frac{i\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} - i\frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^6}{720} + i\frac{\theta^7}{5040} + \dots$$

— : sin

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{(-\theta)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{720} + o(\theta^6)$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{5040} + o(\theta^7)$$

De manière générale,

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{\theta^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n \frac{\theta^n}{n!}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left[i^n - (-i)^n\right] \frac{\theta^n}{n!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n - (-i)^n}{2i} \frac{\theta^n}{n!}$$

$n=0 : \dfrac{i^0-(-i)^0}{2i} = \dfrac{1-1}{2i} = \dfrac{0}{2i} = 0$

$n=1 : \dfrac{i^1-(-i)^1}{2i} = \dfrac{i+i}{2i} = \dfrac{2i}{2i} = 1$

$n=2 : \dfrac{i^2-(-i)^2}{2i} = \dfrac{-1-(-1)}{2i} = \dfrac{-1+1}{2i} = \dfrac{0}{2i} = 0$

$n=3 : \dfrac{i^3-(-i)^3}{2i} = \dfrac{-i+(-i)}{2i} = \dfrac{-i-i}{2i} = -\dfrac{2i}{2i} = -1$

$n=4 : \quad = 0$

$n=5 : \quad = 1$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$$