Démarche Scientifique
(04/03/2021)

Chap. II (Suite) – Résolution Numérique des EDO

Exercice 3 (Feuille Ex. 1)

$$\begin{cases} \forall t > 0, \quad y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) - y(t) + 2 = 0 & (I) \\ \left.\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 2 \end{aligned}\right) & (II) \end{cases}$$

On peut mettre cette équation sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{q}}{dt} = f(t, \vec{q}(t)) \\ \vec{q}(0) = q_0 \end{cases}$$

L'équation (I) est une EDO d'ordre 3, donc $\vec{q}$ est à valeur dans $\mathbb{R}^3$: $\quad \vec{q} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$

1. Trouver f.

On pose $\begin{cases} q_1 = y \\ q_2 = y' \\ q_3 = y'' \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{dy}{dt} = y' = q_2 \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{dy'}{dt} = y'' = q_3 \\ \frac{dq_3}{dt} &= \frac{dy''}{dt} = y''' = \underbrace{y''}_{=q_3} - 2\overset{=q_2}{y'} + \underbrace{y}_{=q_1} - 2 \end{aligned}$

$$f : (t, q_1, q_2, q_3) \longrightarrow (q_2,\ q_3,\ q_3 - 2q_2 + q_1 - 2)$$

Un problème tel que celui décrit par l'équation (I) est facile à résoudre analytiquement : l'EDO est linéaire, d'ordre 3 et sa solution s'obtient comme la somme de 3 termes.

$$y : t \longmapsto A\exp(\lambda_1 t) + B\exp(\lambda_2 t) + C\exp(\lambda_3 t) + 2$$

où
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont les racines de
$$P : \lambda \longmapsto \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 1,$$
- (A, B, C) sont obtenues en imposant la condition initiale (II).

Que faire lorsque l'EDO n'est pas linéaire, ou bien lorsque P n'est pas factorisable ?

Ex : oscillateur harmonique ($\sin$)

La résolution analytique n'est pas possible, et on a alors recours à la résolution numérique.

On part de la forme générale du problème de Cauchy

$$\frac{dq}{dt} = f(t, q(t)) \text{ avec la condition initiale } q(0) = q_0$$

L'idée va être d'intégrer cette équation entre deux instants :
0 et T.

$$\frac{dq}{dt} = f(t, q(t)) \xrightarrow{\int_0^T \dots dt} \underbrace{\int_0^T \frac{dq}{dt}\, dt}_{= [q(t)]_{t=0}^{T} = q(T) - q(0)} = \int_0^T f(t, q(t))\, dt$$

$$\longrightarrow q(T) - q(0) = \int_0^T f(t, q(t))\, dt$$

inconnue $= q_0$ connu

On peut isoler l'inconnue, à savoir $q(T)$:

$$q(T) = q_0 + \int_0^T f(t, q(t))\, dt \qquad (\text{III})$$

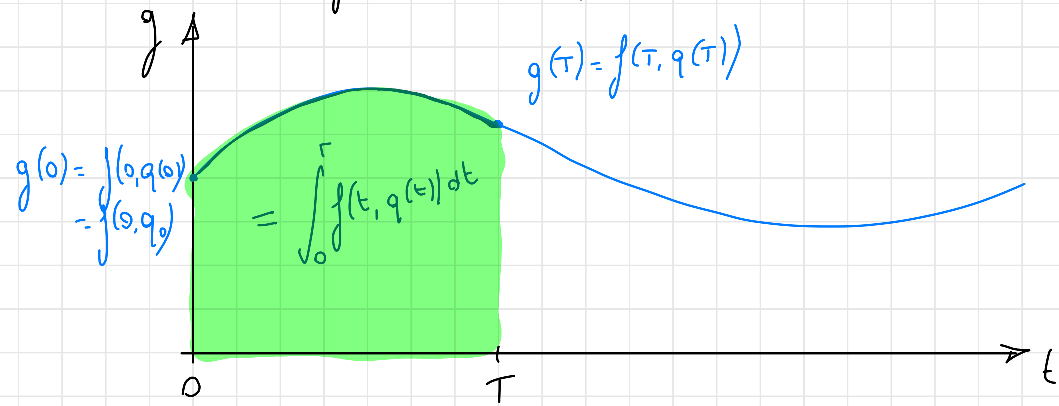
Pour "mettre à jour" ou évaluer $q(T)$, on doit évaluer

$$\boxed{\int_0^T \underbrace{f(t, q(t))}_{= g(t)}\, dt} = \int_0^T g(t)\, dt$$

Le problème est que l'évaluation de ce terme requiert la connaissance de q sur l'intervalle $[0, T]$

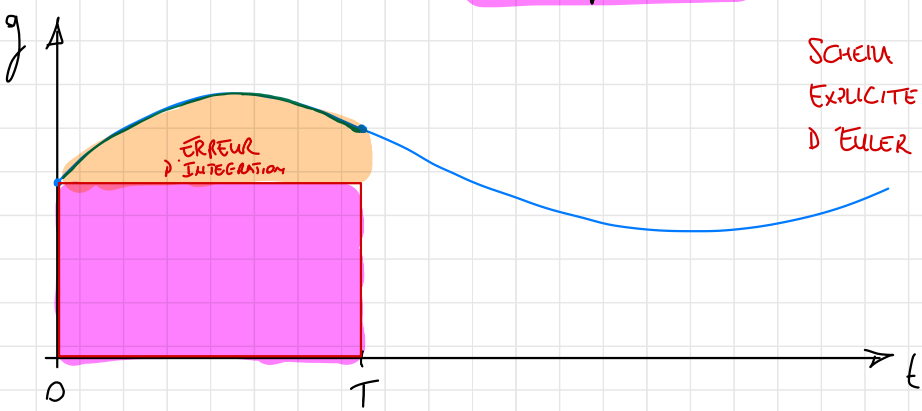
Pour obtenir une valeur (approchée) de $q(T)$, on va devoir faire une approximation

Introduisons $\quad g : t \longmapsto f(t, q(t))$

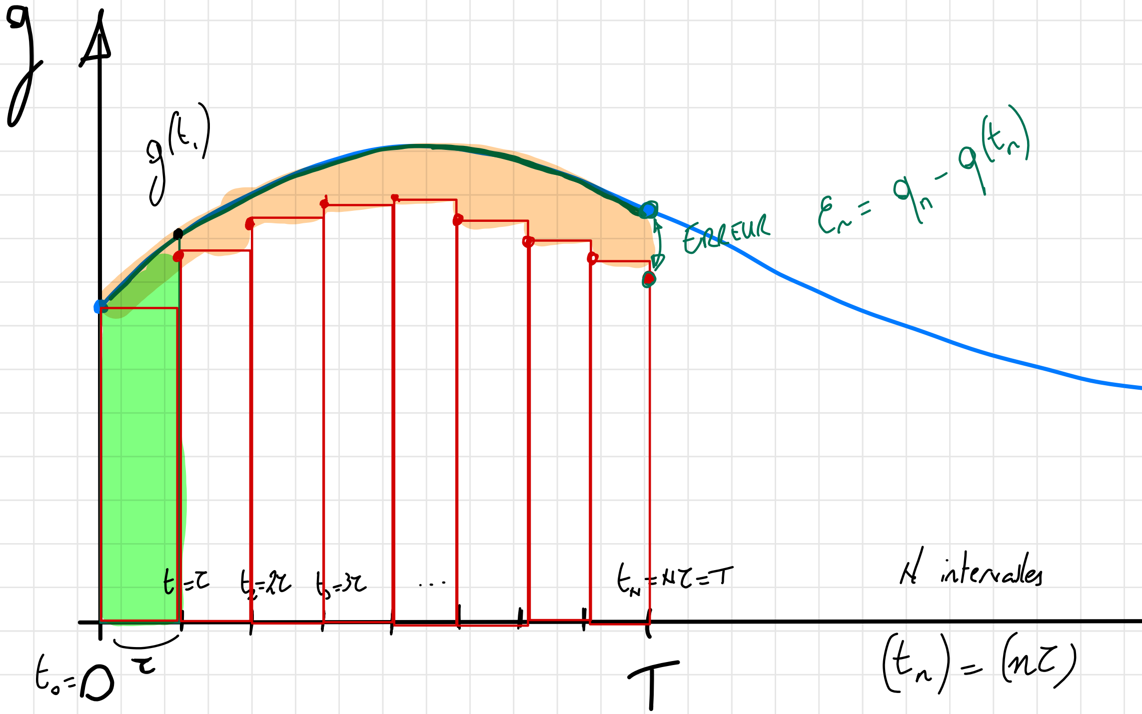


Première possibilité : on remplace l'aire est vert par l'aire du rectangle de largeur T et hauteur $g(0) = f(0, q_0)$

$$\int_0^T f(t, q(t))\,dt \simeq \boxed{T \times f(0, q_0)}$$



L'erreur (hachurée en rouge) est importante cependant, elle dépend de T : plus T sera grand plus l'erreur sera grande



$$\tau = T/N$$

PAS DE TEMPS

L'idée est d'appliquer cette approximation (règle des rectangles) sur

$$[0, \tau] \rightarrow \underbrace{q_1}_{\text{approximation par le schéma explicite d'Euler}} \simeq \underbrace{q(t_1)}_{\text{solution exacte évaluée en } t}$$

On sait que :

$$q(t_1) = q_0 + \int_0^{t_1} f(t, q(t))\, dt \qquad (\text{III avec } T = t_1)$$

$$q_1 = q_0 + \tau f(t_0, q_0) \qquad (\text{IV})$$

On répète cette opération sur l'intervalle

$$[\tau, 2\tau] \rightarrow q_2 \simeq q(t_2)$$

$$q(t_2) = q(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(t, q(t))\,dt$$

$$q_2 = q_1 + \underbrace{(t_2 - t_1)}_{=\tau} \times f(t_1, q_1)$$

$$= q_1 + \tau f(t_1, q_1)$$

$$q(t_3) = q(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} f(t, q(t))\,dt$$

$$q_3 = q_2 + \tau f(t_2, q_2)$$

ÉXERCICE 1.

$$y'(t) = \overbrace{t + y(t)}^{f(t, y(t))}.$$

① Solution homogène :

$$y^H : t \longmapsto A \exp(t)$$

Solution particulière : on suppose

$$y^P : t \longmapsto at + b$$

$$(y^P)' : t \longmapsto a$$

On substitue

$$\underbrace{a}_{=(y^p)'} = t + \underbrace{(at+b)}_{=y^p}$$

$$\Leftrightarrow 0 + 0 \times t = \underbrace{(1+a)}_{=0} t + \underbrace{(b-a)}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=a=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y^p : t \longmapsto -t-1$$

La solution complète s'écrit donc :

$$y = y^p + y^H : t \longmapsto -t-1 + A\exp(t)$$

On utilise la condition initiale pour calculer A : $y(0) = 1 \Rightarrow -0-1+A\times 1 = 1$

$$\Rightarrow A = 2$$

$$y : t \longmapsto -t-1+2\exp(t)$$

(2)

$$t_0 = 0 \xrightarrow[\tau]{1} t_1 = \tau = 0{,}1 \xrightarrow[\tau]{2} t_2 = 2\tau = 0{,}2 \xrightarrow[\tau]{3} t_3 = 3\tau = 0{,}3$$

$$y_0 = y(t_0) = 1 \qquad y_1 \simeq y(t_1) \qquad y_2 \simeq y(t_2) \qquad y_3 \simeq y(t_3)$$

1

$$f : (t,y) \longmapsto t + y$$

$$(\mathrm{IV}) \Rightarrow y_1 = y_0 + \tau f(t_0, y_0)$$

$$= y_0 + \tau (t_0 + y_0)$$

$$= 1 + 0{,}1(0 + 1)$$

$$= 1{,}1.$$

×

$$y(t_1) = -t_1 - 1 + 2\exp(t_1)$$

$$= -\tau - 1 + 2\exp(\tau)$$

$$\simeq 1{,}110$$

×

$$\varepsilon_1 = y_1 - y(t_1) = -0{,}01$$

2

$$y_2 = y_1 + \tau f(t_1, y_1)$$
$$= y_1 + \tau(t_1 + y_1)$$
$$= 1{,}1 + 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1)$$
$$= 1{,}1 + 0{,}12$$
$$= 1{,}22$$

$$y(t_2) = -t_2 - 1 + 2\exp(t_2)$$
$$= -2\tau - 1 + 2\exp(2\tau)$$
$$= 1{,}243$$

$$\varepsilon_2 = y_2 - y(t_2) = 1{,}22 - 1{,}243 = -0{,}023$$

3

$$y_3 = y_2 + \underset{\text{"tau"}}{\tau} f(t_2, y_2)$$

$$= y_2 + \tau(t_2 + y_2)$$

$$= 1{,}22 + 0{,}1 \times (0{,}2 + 1{,}22)$$

$$= 1{,}3\cancel{6}2$$

$$y(t_3) = 1{,}400$$

$$\varepsilon_3 = y_3 - y(t_3)$$

$$= 0{,}03\cancel{8}$$

On a donc appliquer la formule de récurrence suivante :

SCHEMA EXPLICITE D'EULER

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_n, y_n)$$

$$q_{n+1} = q_n + \tau f(t_n, q_n)$$

Un autre schéma très important est le schéma implicite d'Euler :

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Ce schéma consiste à approcher l'aire sous le graphe de g par un rectangle (comme pour la règle explicite) mais dont la hauteur est prise à droite (en t_{n+1}) plutôt qu'à gauche (en t_n)

EXERCICE 2 de la feuille 1