Démarche scientifique

08/04/2021

Documents et calculatrice autorisés.

1 Systèmes du premier ordre

Reformuler l'équation du pendule simple amorti avec forçage sous la forme d'un système du premier ordre :

$$\forall t > 0, \quad \ddot{y}(t) + \nu \dot{y}(t) + \omega^2 \sin[y(t)] = \alpha \cos(t).$$

2 L'équation logistique

L'équation différentielle suivante régit l'évolution d'une population avec un taux de croissance $\alpha > 0$ en présence d'un mécanisme la faisant tendre vers $\kappa > 0$ dans la limite $t \to \infty$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \alpha y(t) \left[1 - \dfrac{y(t)}{\kappa}\right], \quad t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

1. Montrer que la solution du système précédent est

$$\forall t > 0, \quad y(t) = \frac{\kappa}{1 + \frac{\kappa - y_0}{y_0} \exp(-\alpha t)}.$$

Les paramètres du système prennent les valeurs suivantes : $\alpha = 1$, $\kappa = 2$ et $y_0 = 1$.

2. Appliquer le schéma explicite d'Euler à ce problème, en prenant comme pas de temps $\tau = 0.1$. On évaluera la solution numérique en $t = 0.3$.
3. Comparer la solution numérique à la solution exacte.

3 Stabilité de la méthode theta

On considère la résolution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f[t, y(t)], \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

par la famille de schémas définie par

$$y_{n+1} = y_n + \tau [(1 - \theta) f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

où $\theta \in [0, 1]$.

1. À quels schémas vus en cours correspondent les cas $\theta = 0$, $1/2$ et 1 ?

On considère le cas linéaire où $f\colon\ (t, y) \mapsto \lambda y$.

2. Montrer que la solution exacte évaluée aux instants $(t_n) \equiv (n\tau)$ est une suite géométrique de raison $\sigma\,(z)$ à déterminer (on rappele que $z \equiv \lambda\tau$).
3. De même, montrer que la solution numérique par le schéma précédent est également une suite géométrique de raison $\overline{\sigma}\,(z, \theta)$ à déterminer.
4. À partir de développements limités de σ et $\overline{\sigma}$ en z au voisinage de 0, montrer sous quelle(s) condition(s) le schéma est d'ordre 2.
5. Montrer que la région de stabilité

$$\Omega\,(\theta) \equiv \{z \in \mathbb{C}\,/|\overline{\sigma}\,(z, \theta)| < 1\}$$

contient le demi-plan complexe

$$\mathbb{C}_- \equiv \{z \in \mathbb{C}\,/\mathrm{Re}\,(z) < 0\}$$

si et seulement si $\theta \geq 1/2$.