Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Departamento de Informática e Matemática Aplicada

Relatório da 2ª Unidade - Grafos

Alexandre Dantas, Andriel Vinicius, Gabriel Carvalho, Maria Paz e Vinicius de Lima

Professor: Matheus Menezes

14 de novembro de 2025

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Capítulo 2

Revisão teórica

Todas as definições e teoremas são retirados diretamente ou readaptados para melhor clareza de Diestel (2025), George et al. (2010), Bang-Jensen and Gutin (2007) e Gersting (1993). Como os algoritmos são implementados em inglês, apresentaremos o correspondente ao termo em inglês.

Definição 1 (Grafo)**.** Um *grafo* (*graph*) é uma estrutura $G := (V, A)$ tal que $A \subseteq V^2$ e V é um conjunto de um tipo qualquer. Os elementos de V são denominados vértices (*nodes*) e os elementos de A são denominados de arestas (*edges*). O jeito tradicional de visualizar um grafo é como uma figura composta de bolas e setas:

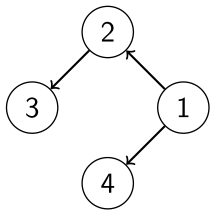

Figura 2.1: Um grafo com $V := \{1, 2, 3, 4\}$ e $A := \{(1, 2), (1, 4), (2, 3)\}$.

Definição 2 (Grafo rotulado)**.** Dizemos que um grafo $G := (V, A)$ é *rotulado* quando há informações de identificação (rótulos) nos vértices do grafo. Tais rótulos podem ser numéricos ou alfabéticos.

Definição 3 (Grafo ponderado)**.** Dizemos que um grafo $G := (V, A)$ é *ponderado* (*weighted*) quando há pesos associados a todas as arestas do grafo.

Definição 4 (Ordem e Tamanho)**.** O número de vértices de um grafo G é chamado de *ordem* (*order*) e é denotado por $|G|$ – o número de arestas é chamado de *tamanho* (*size*) e é denotado por $||G||$. Por exemplo, na Figura 2.1, $|G| = 4$ e $||G|| = 3$.

Definição 5 (Adjacência)**.** Dizemos que um vértice v é *adjacente*, ou *vizinho*, de um vértice u (*neighbor*) se somente se $(u, v) \in A$, também, denotaremos (u, v) como uv. Visualmente, enxergamos isso como:

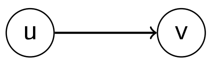

Figura 2.2: Um grafo com $V := \{u, v\}$ e $A := \{(u, v)\}$.

Definição 6 (Conjunto de adjacentes)**.** Num grafo G, o conjunto de todos os vértices adjacentes de u (*neighbors*) é denotado por $A_G(u) := \{v \in V \mid uv \in A\}$. Já o conjunto de todos os vértices que em que v é adjacente será denotado por $\bar{A}_G(u) := \{v \in V \mid vu \in A\}$.

Definição 7 (Grau de um vértice)**.** O *grau de um vértice* v (*node degree*) é o valor correspondente da soma $|A_G(v)| + |\bar{A}_G(v)|$. Também denotamos $|A_G(v)|$ como $d^+(v)$, $|\bar{A}_G(v)|$ como $d^-(v)$ e sua soma como $d(v)$.

Definição 8 (Grafo não direcionado)**.** Dizemos que um grafo G é *não direcionado* (*undirected*) se somente se A é simétrico, ou seja, se $uv \in A$ então $vu \in A$. O nome não direcionado vem da ideia de que os grafos que viemos discutindo até agora são denomidados de *direcionados*, ou simplesmente *dígrafos*. Na literatura é comum apresentar grafo não direcionado como grafo e depois o direcionado como dígrafo, resolvemos inverter a ordem pois assim se traduz melhor nas representações de grafos que vamos implementar. Um grafo não direcionado pode ser visualizado sem a ponta das setas:

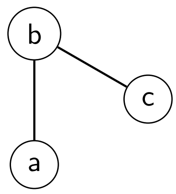

Figura 2.3: Um grafo não direcionado com $V := \{a, b, c\}$ e $A := \{ab, ba, bc, cb\}$

Também é comum omitir a simetria das arestas se pelo contexto for claro que está sendo tratado de um grafo não direcionado, na Figura 2.3, o conjunto de arestas A seria escrito como $\{ab, bc\}$.

Definição 9 (Caminho)**.** Um *caminho* (*path*) é um grafo $C := (V, A)$ que tem a forma:

$$V := \{x_0, x_1, ..., x_k\} \qquad A := \{x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{k-1}x_k\}$$

Dizemos que C é um caminho de x_0 a x_k. Normalmente nos referimos ao caminho como a sequência dos seus vértices, $x_0x_1...x_k$.

Definição 10 (Conectividade)**.** Dizemos que um grafo G é *conexo* (*connected*) se somente se para quaisquer dois vértices u e v, existe um caminho entre eles.

Definição 11 (Ciclo)**.** Dizemos que um grafo $G := (V, A)$ contém um *ciclo* (*cycle*) quando há um caminho possível do vértice v_i até ele próprio sem passar mais de uma vez por vértices intermediários. Quando não há ciclos no grafo, dizemos que ele é *acíclico*.

Definição 12 (Caminho Euleriano)**.** Um *Caminho Euleriano* (*Eulerian Path*) em um grafo $G := (V, A)$ é um caminho que usa cada uma das arestas de G exatamente 1 vez.

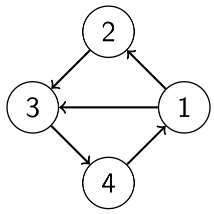

Figura 2.4: Um grafo com $V := \{1, 2, 3, 4\}$ e $A := \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (1, 3)\}$. O caminho $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to 3$ é um exemplo de caminho euleriano.

Teorema 1 (Teorema dos Caminhos Eulerianos)**.** Existe um caminho euleriano em um grafo não direcionado $G := (V, A)$ se e somente se existir exatamente 0 ou 2 vértices de grau ímpar no grafo. Existe um caminho euleriano em um grafo direcionado $G := (V_2, A_2)$ se e somente se existe no máximo 1 vértice com grau de saída maior que grau de entrada por 1 e no máximo 1 vértice com grau de entrada menor que grau de saída por 1.

Definição 13 (Ciclo Euleriano)**.** Um *Ciclo Euleriano* (*Eulerian Cycle*) em um grafo $G := (V, A)$ é um caso particular do Caminho Euleriano onde o Caminho inicia e termina no mesmo vértice v.

Definição 14 (Grafo Euleriano)**.** Dizemos que um grafo $G := (V, A)$ é um *Grafo Euleriano* (*Eulerian Graph*) se o grafo contém um Ciclo Euleriano.

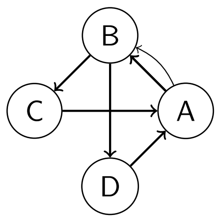

Figura 2.5: Um grafo euleriano com $V := \{A, B, C, D\}$ e $A := \{(A, B), (A, B), (B, C), (C, A), (B, D), (D, A)\}$. Exemplo de ciclo euleriano: $A \to B \to C \to A \to B \to D \to A$.

Teorema 2 (Teorema do Grafo Euleriano)**.** Um grafo conexo não orientado $G_1 := (V_1, A_1)$ é Euleriano se e somente se todos os vértices tem grau par. Um grafo conexo orientado $G_2 := (V_2, A_2)$ é Euleriano se e somente se todos os vértices tem o mesmo grau de entrada e saída.

Definição 15 (Caminho Mais Curto)**.** O *Caminho Mais Curto* (*Shortest Path*) em um grafo ponderado $G := (V, A)$ é o caminho entre dois vértices $v_i, v_j \in V$ que acumula o menor peso possível dentre todos os demais caminhos entre os dois vértices.

Definição 16 (Subgrafo)**.** Dizemos que $G' := (V', A')$ é *subgrafo* (*subgraph*) de um grafo $G := (V, A)$ quando G' consiste em um subconjunto de vértices e arestas do grafo original, mas preservando a adjacência entre os vértices.

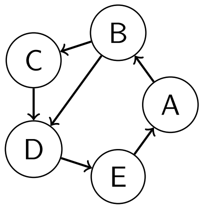

Figura 2.6: Grafo G com $V = \{A, B, C, D, E\}$ e $A = \{(A, B), (B, C), (C, D), (D, E), (E, A), (B, D)\}$.

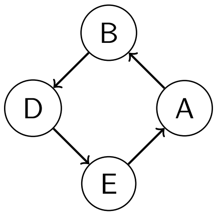

Figura 2.7: Subgrafo G', com $V' = \{A, B, D, E\}$ e $A' = \{(A, B), (B, D), (D, E), (E, A)\}$, preservando as adjacências de G.

Definição 17 (Árvore)**.** Dizemos que um grafo $G := (V, A)$ é uma *árvore* (*tree*) quando G é acíclico e conexo. Além disso, dizemos que a árvore é enraizada quando fixamos um vértice como *raiz* (*root*) ou não-enraizada quando não há raiz.

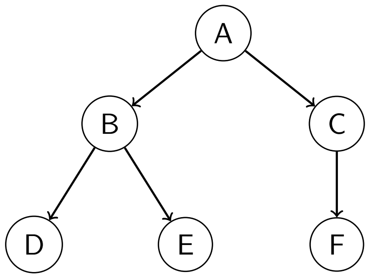

Figura 2.8: Árvore enraizada em A.

Definição 18 (Árvore Geradora)**.** Dizemos que $T := (V, A')$ é uma *árvore geradora* de $G := (V, A)$ quando T é um subgrafo de G conexo e acíclico. É uma forma de conectar todos os vértices de um grafo sem ciclos.

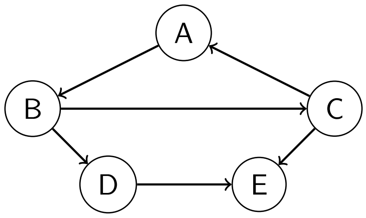

Figura 2.9: Grafo G, note a existência do ciclo $A \to B \to C \to A$

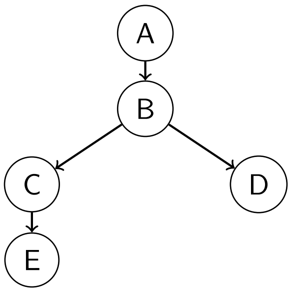

Figura 2.10: Árvore geradora T de G. Note que não há mais ciclos.

Definição 19 (Árvore Geradora Mínima)**.** Dizemos que $T := (V, A')$ é a árvore geradora mínima (ou AGM) de um grafo ponderado $G := (V, A)$ quando é a árvore geradora de menor custo dentre todas as geradoras de G.

Capítulo 3

Descrição em Pseudocódigo dos Algoritmos da API

Capítulo 4

Implementação

Referências Bibliográficas

Bang-Jensen, J. and Gutin, G. (2007), *Digraps: Theory, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag.

Diestel, R. (2025), *Graph theory*, Vol. 173, Springer Nature.

George, P., Tarjan, R. E. and Woods, D. R. (2010), *Hamiltonian and Eulerian Paths*, Birkhäuser Boston, pp. 157–168.

Gersting, J. L. (1993), *Mathematical Structures for Computer Science*, W. H. Freeman and Company.

Apêndice A

Atividades desenvolvidas por cada integrante

- **Alexandre Dantas**:
- **Andriel Vinicius**:
- **Gabriel Carvalho:**
- **Maria Paz:**
- **Vinicius de Lima:**