Computational Statistics Week 4

Correction des exercices 6.38, 7.6, 7.27, 7.47 ,8.17 et 9.18

Ecrit par

Vincent LE MEUR

Professeur :

Christian Robert
ENSAE

2017

Exercice 6.38

Dans cet exercice on considère (a_n) une suite de réels convergeant vers a.
On considère alors $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.

Montrons alors que $lim_n b_n = a$:
On revient à la définition de la limite de la suite (a_n) :

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \epsilon$

Par ailleurs en prenant $n > n0$, en utilisant la définition de la limite précédente et l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= |\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j - a| = \frac{1}{n} |\sum_{j=1}^{n} a_j - na| \\
&= \frac{1}{n} |\sum_{j=1}^{n_0-1} (a_j - a) + \sum_{j=n_0}^{n} (aj - a)| \\
&\leq \frac{1}{n} |\sum_{j=1}^{n_0-1} (a_j - a)| + \frac{1}{n}\sum_{j=n_0}^{n} |(aj - a)| \\
&\leq \frac{1}{n} |\sum_{j=1}^{n_0-1} (a_j - a)| + \frac{(n - n_0 + 1)\epsilon}{n} \\
&\leq \frac{1}{n} |\sum_{j=1}^{n_0-1} (a_j - a)| + \epsilon
\end{aligned}$$

Or la première somme est finie donc $\forall \lambda > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, \frac{1}{n} | \sum_{j=1}^{n_0-1} (a_j - a)| \leq \lambda$

Ainsi en posant $m = max(n_0, n_1)$ et en choisissant $\lambda = \epsilon$, on obtient que $\forall \epsilon > 0$ et $\forall n \geq m$ que $| b_n - a | \leq 2\epsilon$

Par définition de la limite on a montré que $lim_n b_n = a$

Exercice 7.6

Dans cet exercice on implémente l'algorithme du problème 7.5. On calcule la distribution g à partir de la formule du 7.5,a) : $f(x) \propto \dfrac{g(x)}{1-\rho(x)} \propto \dfrac{x^{x-\alpha-1+1}}{x} = x^{\alpha-1}$

On s'intéresse ici au taux d'acceptation de l'algorithme de Metropolis Hastings associée à l'exercice 7.5 en fonction de α. On définit alors la fonction accptrate suivante :

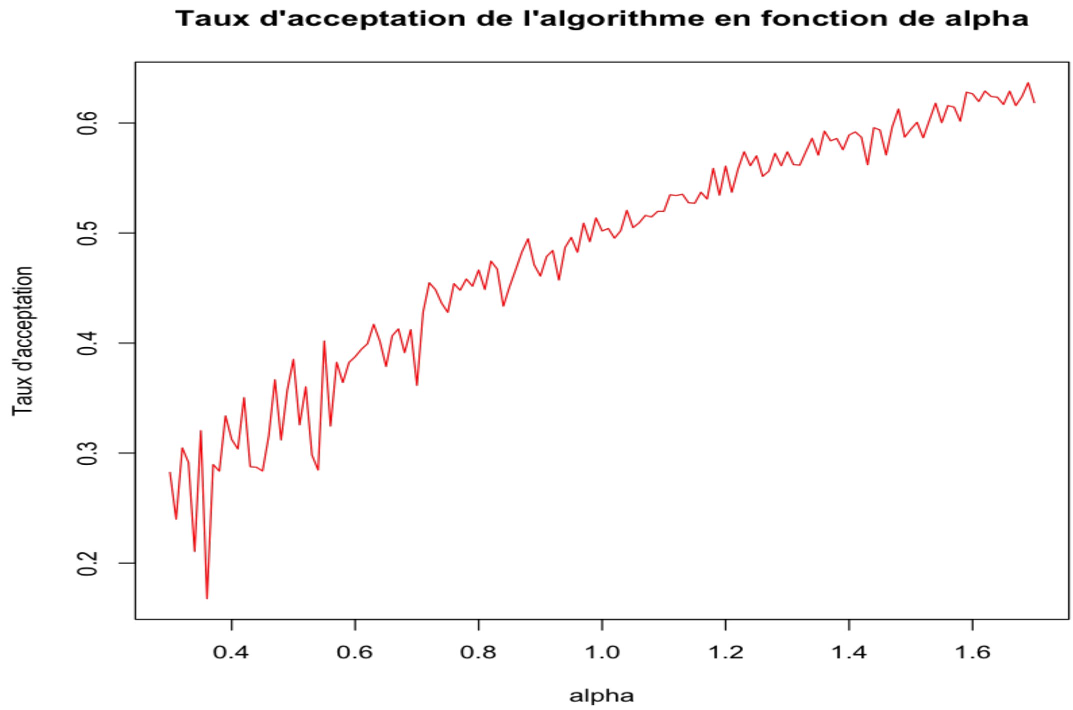
```
### Input :
accptrate= function(alpha ,N){
    X=rep(runif(1) ,N)     # initialisation de la chaine
    cpt<-0  #On initialise un compteur pour le taux d'acceptation
    for (i in 2:N){
        u <- runif(1)
        if (u> 1-X[i-1]) {  # Transition de la chaîne
            X[i]<- rbeta(1,alpha+1,1)
            cpt <-cpt+1
        }
        else{
            X[i]<- X[i-1]
        }}
    return(cpt/N) # retourne le taux d'acceptation
    }
```

Définition de la fonction du taux d'acceptation

On trace alors ce taux d'acceptation pour $\alpha \in [0.3, 1.7]$:

```
### Input :
x=seq(from=0.3,to=1.7,by=0.01)
itterations = 10^4
A<-c()
for (k in 1:length(x) ){
    A[k]=accptrate(x[k],itterations)
}
plot(x,A,type="l",col="red",main="Taux d'acceptation de l'algorithme en fonction de alpha",xlab=
    "alpha",ylab="Taux d'acceptation")
```

Tracé du taux d'acceptation



On constate que quand α est proche de 1, le taux d'acceptation vaut approximativement 0.5. Dans ce cas la fonction stationnaire $f(x) \propto x^0 = 1$ d'où le résultat.

Exercice 7.27

Dans cet exercice on cherche à simuler une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ à l'aide d'une loi de Cauchy $\mathscr{C}(0,\sigma)$ dans un algorithme de Metropolis-Hastings.

a) Cherchons σ qui optimise le taux d'acceptation et l'erreur quadratique moyenne pour l'estimation de la moyenne

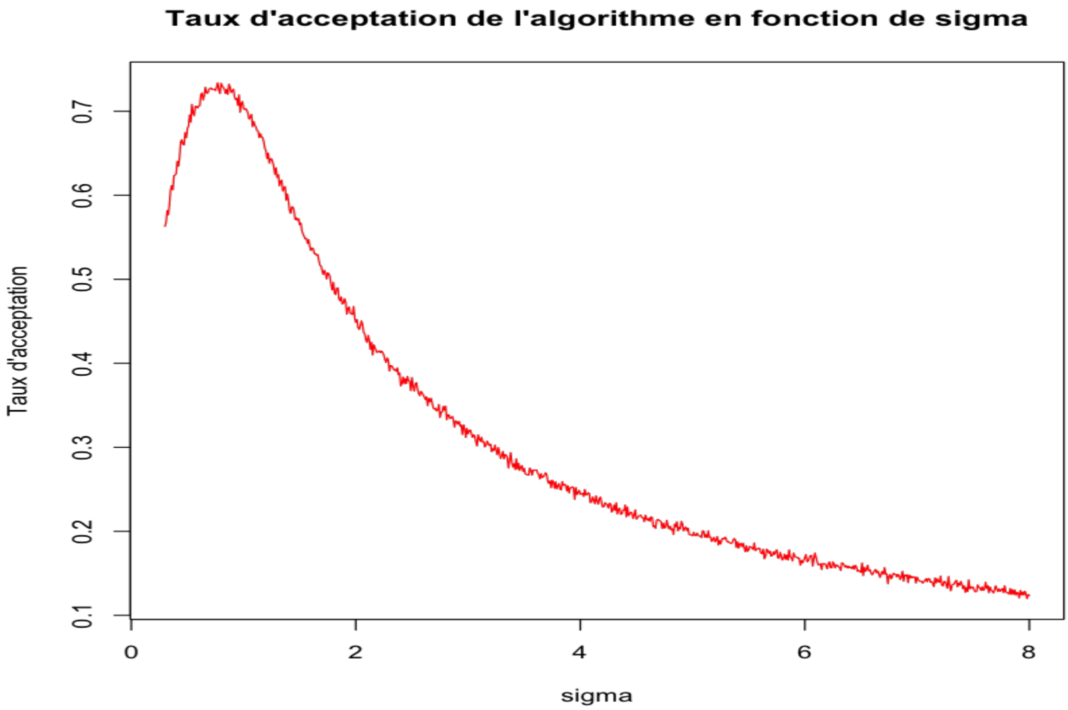
On définit ici encore notre taux d'acceptation accptrate2 et on le trace pour $\sigma \in [0.3, 8]$:

```
### Input :
accptrate2= function(sigma,N){
    X=rep(runif(1),N)    # initialisation de la chaine
    cpt=0  #On initialise un compteur pour le taux d'acceptation
    for (i in 2:N){
        Y=rcauchy(1,0,sigma)   # On utilise un candidat Cauchy C(0,sigma)
        rho=(dnorm(Y,mean=0,sd=1)*dcauchy(X[i-1],0,sigma))/(dnorm(X[i-1],mean=0,sd=1)*dcauchy(Y,0,sigma))
        X[i]=X[i-1] + (Y-X[i-1])*(runif(1)<rho) # Ici la condition de transition s'applique
        if (runif(1)<rho){cpt<-cpt+1 # Mise en place du compteur
        }}
    return(cpt/N) # retourne le taux d'acceptation
     }
```

Définition du taux d'acceptation

```
### Input :
x=seq(from=0.3,to=8,by=0.01)
itterations = 10^4
A1<-c()
for (k in 1:length(x) ){
    A1[k]=accptrate2(x[k],itterations)
}
plot(x,A1,type="l",col="red",main="Taux d'acceptation de l'algorithme en fonction de sigma",xlab="sigma",ylab="Taux d'acceptation")
```

Tracé du taux d'acceptation



On obtient alors le taux d'acceptation maximal pour σ valant :

```
### Input :
x[which(A1==max(A1))]
### Output :
0.77
```

Taux d'acceptation maximal

On va à présent chercher à estimer la moyenne de la loi générée et ainsi calculer l'erreur quadratique moyenne. On génère donc une fonction squaremean qui va calculer cette erreur quadratique et on trace cette erreur pour $\sigma \in [0.3, 8]$:

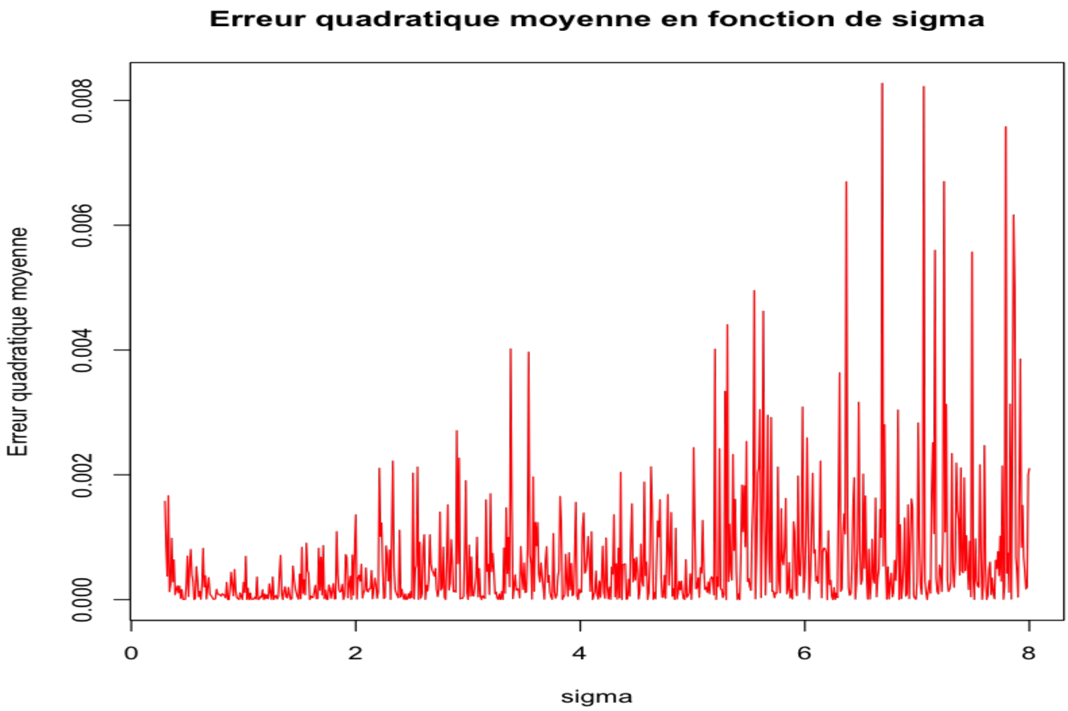
```
### Input :
squaredmean=function(sigma,N) {
    X=rep(runif(1),N)     # initialisation de la chaine
     #On initialise un compteur pour le taux d'acceptation
    for (i in 2:N){
        Y=rcauchy(1,0,sigma)    # On utilise un candidat Cauchy C(0,sigma)
        rho=(dnorm(Y,mean=0,sd=1)*dcauchy(X[i-1],0,sigma))/(dnorm(X[i-1],mean=0,sd=1)*dcauchy(Y
            ,0,sigma))
        X[i]=X[i-1] + (Y-X[i-1])*(runif(1)<rho) # On applique ici la condition de transition
        }
    mu=mean(X)

    return(mean(mu^2)) # retourne l'erreur quadratique moyenne
}
```

Définition de l'erreur quadratique moyenne

```
### Input :
x=seq(from=0.3,to=8,by=0.01)
itterations = 10^4
A2<-c()
for (k in 1:length(x) ){
    A2[k]=squaredmean(x[k],itterations)
}
plot(x,A2,type="l",col="red",main="Erreur quadratique moyenne en fonction de sigma",xlab="sigma"
    ,ylab="Erreur quadratique moyenne")
```

Tracé de l'erreur quadratique moyenne



On constate que l'erreur quadratique moyenne est très volatile. L'amplitude de ces variations augmente quand σ augmente. On trouve le minimum pour σ valant :

```
### Input :
v=which(A2==min(A2))
x[v]
min(A2)
### Output :
4.37
1.63564296260336e-09
```

Minimum de l'erreur quadratique moyenne

Par ailleurs la valeur précédente de σ de 0.71 permet également d'avoir une erreur quadratique moyenne réduite :

```
### Input :
a=which(x==0.71)
A2[a]
### Output :
6.41438165961765e-05
```

Valeur de l'erreur quadratique moyenne pour la valeur précédente de sigma

Il semble alors plus naturel de sélectionner $\sigma = 0.71$ dans un soucis de compromis.

b) On réalise la même étude en considérant une loi de Cauchy $\mathscr{C}(x(t), sigma)$ comme loi candidate

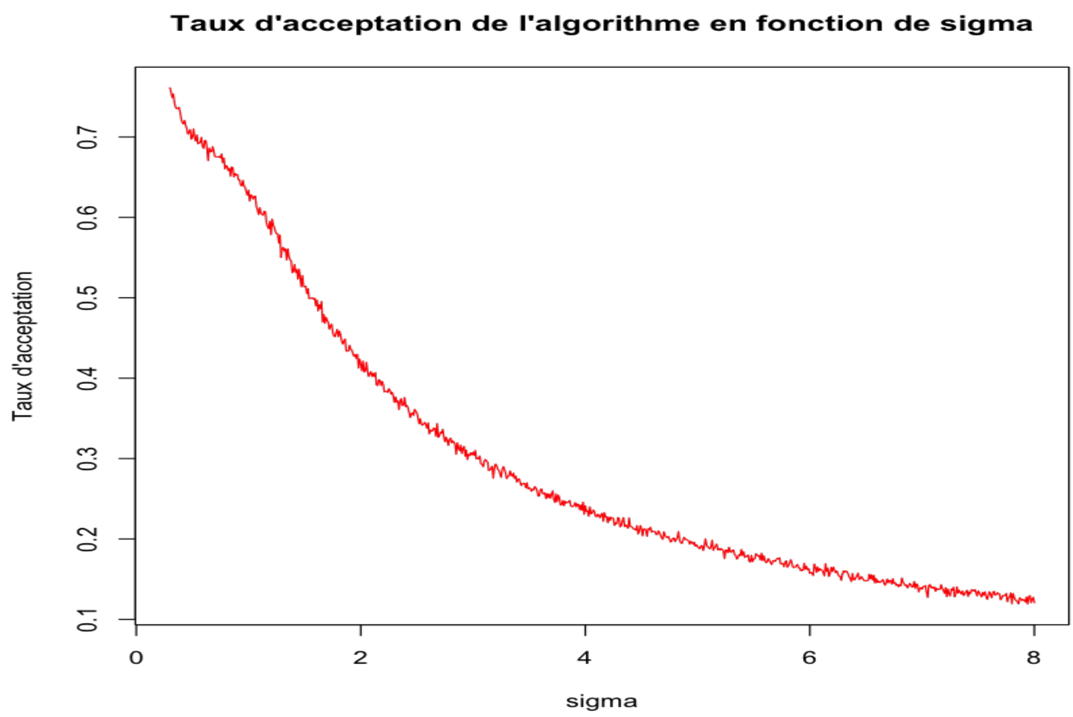
On définit donc d'abord le taux d'acceptation qu'on trace ensuite pour enfin en chercher le minimum :

```
### Input :
accptrate3= function(sigma ,N){
    X=rep(runif(1) ,N)    # initialisation de la chaine
    cpt=0  #On initialise un compteur pour le taux d'acceptation
    for (i in 2:N){
        Y=rcauchy(1 ,X[i-1],sigma)    # On utilise un candidat Cauchy C(x(t),sigma)
        rho=(dnorm(Y,mean=0,sd=1)*dcauchy(X[i-1],0,sigma))/(dnorm(X[i-1],mean=0,sd=1)*dcauchy(Y
            ,0,sigma))
        X[i]=X[i-1] + (Y-X[i-1])*(runif(1)<rho) # Ici la condition de transition s'applique
        if (runif(1)<rho){cpt<-cpt+1 # Mise en place du compteur
        }}
    return(cpt/N) # retourne le taux d'acceptation
    }
```

Définition du taux d'acceptation

```
### Input :
x=seq(from=0.3,to=8,by=0.01)
itterations = 10^4
A3<-c()
for (k in 1:length(x) ){
    A3[k]=accptrate3(x[k],itterations)
}
plot(x,A3,type="l",col="red",main="Taux d'acceptation de l'algorithme en fonction de sigma",xlab
    ="sigma",ylab="Taux d'acceptation")
```

Tracé du taux d'acceptation




```
### Input :
x[which(A3==max(A3))]
### Output :
0.3
```

Taux d'acceptation maximal

On réalise alors la même chose pour l'erreur quadratique moyenne :

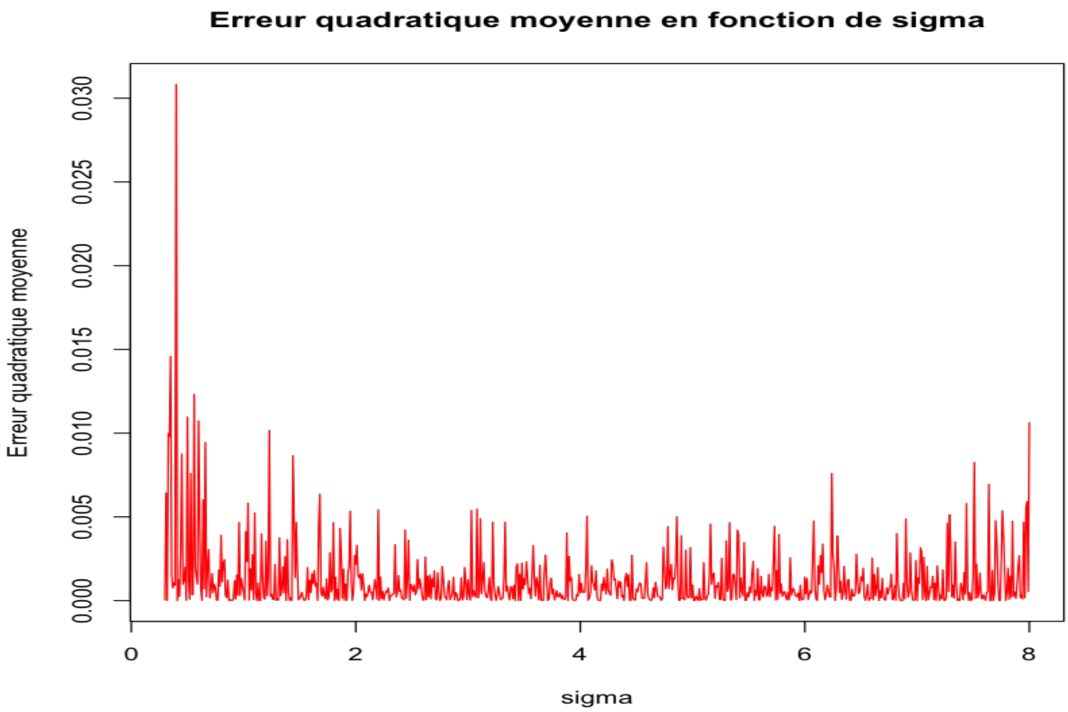
```
### Input :
squaredmean2=function(sigma ,N) {
    X=rep(runif(1),N)     # initialisation de la chaine
     #On initialise un compteur pour le taux d'acceptation
    for (i in 2:N){
        Y=rcauchy(1,X[i-1],sigma)    # On utilise un candidat Cauchy C(0,sigma)
        rho=(dnorm(Y,mean=0,sd=1)*dcauchy(X[i-1],0,sigma))/(dnorm(X[i-1],mean=0,sd=1)*dcauchy(Y
            ,0,sigma))
        X[i]=X[i-1] + (Y-X[i-1])*(runif(1)<rho) # On applique ici la condition de transition
        }
    mu=mean(X)

    return(mean(mu^2)) # retourne l'erreur quadratique
    }
```

Définition de l'erreur quadratique moyenne

```
### Input :
x=seq(from=0.3,to=8,by=0.01)
itterations = 10^4
A4<-c()
for (k in 1:length(x) ){
    A4[k]=squaredmean2(x[k],itterations)
}
plot(x,A4,type="l",col="red",main="Erreur quadratique moyenne en fonction de sigma",xlab="sigma"
    ,ylab="Erreur quadratique moyenne")
```

Tracé de l'erreur quadratique moyenne




```
### Input :
w=which(A4==min(A4))
x[w]
min(A2)
### Output :
5.34
```

Minimum de l'erreur quadratique moyenne

Avec cette nouvelle implémentation il semble que le taux d'acceptation soit maximale pour σ proche de 0, seulement pour ces valeurs l'erreur quadratique moyenne apparaît comme très volatile et prends donc des valeurs importantes. Un compromis est alors nécessaire.

Exercice 7.47

On se place ici dans les conditions de l'exercice 7.27 précédent.
Calculons la distribution jointe $\Pi(\theta_1, \theta_2|y)$ à partir des distributions initiales :

$$\begin{aligned}
\Pi(\theta_1,\theta_2|y) &\propto exp[\frac{-1}{2}(\theta_1^2\frac{5}{4}+\theta_2^2\frac{5}{4}+\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-(\theta_1+\theta_2)y)] \\
&\propto exp[\frac{5}{8}(\frac{2y-\theta_2}{5})^2-\frac{5}{8}\theta_2^2+\frac{1}{2}\theta_2 y]exp[-\frac{5}{8}(\theta_1-\frac{2y-\theta_2}{5})^2] \\
&\propto exp[\frac{1}{10}y^2+\frac{1}{40}\theta_2^2-\frac{1}{10}y\theta_2-\frac{5}{8}\theta_2^2+\frac{1}{2}\theta_2 y]exp[-\frac{5}{8}(\theta_1-\frac{2y-\theta_2}{5})^2] \\
&\propto exp[-\frac{3}{5}\theta_2^2+\frac{2}{5}y\theta_2+\frac{1}{10}y^2]exp[-\frac{5}{8}(\theta_1-\frac{2y-\theta_2}{5})^2] \\
&\propto exp[-\frac{3}{5}(\theta_2-\frac{y}{3})^2]exp[\frac{1}{6}y^2]exp[-\frac{5}{8}(\theta_1-\frac{2y-\theta_2}{5})^2]
\end{aligned}$$

On en déduit alors la distribution marginale $\Pi(\theta_2|y)$ par intégration :

$$\begin{aligned}
\Pi(\theta_2|y) &\propto \int_{\Omega_1} exp[-\frac{3}{5}(\theta_2-\frac{y}{3})^2]*exp[\frac{1}{6}y^2]*exp[-\frac{5}{8}(\theta_1-\frac{2y-\theta_2}{5})^2]d\theta 1 \\
&\propto exp[-\frac{3}{5}(\theta_2-\frac{y}{3})^2]*exp[\frac{1}{6}y^2]\int_{\Omega_1} exp[-\frac{5}{8}(\theta_1-\frac{2y-\theta_2}{5})^2]d\theta_1 \\
&\propto exp[-\frac{3}{5}(\theta_2-\frac{y}{3})^2]
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien que $\theta_2 \sim \mathcal{N}(\frac{y}{3},\frac{5}{6})$

Par ailleurs, puisque $\Pi(\theta_1,\theta_2|y) \propto exp[-\frac{3}{5}(\theta_2-\frac{y}{3})^2]*exp[\frac{1}{6}y^2]*exp[-\frac{5}{8}(\theta_1-\frac{2y-\theta_2}{5})^2]$
alors $\Pi(\theta_1|\theta_2,y) \propto exp[-\frac{5}{8}(\theta_1-\frac{2y-\theta_2}{5})^2]$

D'où, le résultat :

$$\theta_1|\theta_2,y \sim \mathcal{N}(\frac{2y-\theta_2}{5},\frac{4}{5})$$

Ainsi à partir des distributions $\theta_2 \sim \mathcal{N}(\frac{y}{3},\frac{5}{6})$ et $\theta_1|\theta_2,y \sim \mathcal{N}(\frac{2y-\theta_2}{5},\frac{4}{5})$, on peut simuler notre distribution cible $\Pi(\theta_1,\theta_2|y)$.

Exercice 8.17

Dans cet exercice, on considère la densité suivante $f(u) \propto exp[-u^{\frac{1}{d}}]$

Soit $h(u) = log(f(u))$, on calcule : $\dfrac{\partial h(u)}{\partial u} = \dfrac{-1}{d} u^{\frac{1}{d}-1} = \dfrac{-1}{d} u^{\frac{1-d}{d}}$ puis $\dfrac{\partial^2 h(u)}{\partial u} = \dfrac{d-1}{d^2} u^{\frac{1}{d}-1}$

Ainsi $\dfrac{\partial^2 g(u)}{\partial u} \leq 0$ si $d \geq 1$. Donc $\forall d \geq 1$, f est donc log-concave sur $\mathbb{R}^+$

A présent on considère $f(u) \propto exp[-||x||]$ et on pose alors $h(u) = log(f(u)) = -||x|| + K$ avec K constante réelle.

On revient alors à la définition de la concavité. Soit $t \in [0,1]$ et x et y deux réels :
$h(tx + (1-t)y) = -||tx + (1-t)y|| + C \geq ||tx|| + ||(1-t)y|| + K$ d'après l'inégalité triangulaire associé à la norme $||.||$

Donc $h(tx + (1-t)y) \geq th(x) + (1-t)h(y)$

Ainsi $h(u)$ est concave et $\forall d$, f est log-concave.

Exercice 9.18

Dans cet exercice, on considère l'échantillonneur de Gibbs associé à l'exemple 9.1 vérifiant :

$X|y \sim \mathcal{N}(\rho y, 1-\rho^2)$
$Y|x \sim \mathcal{N}(\rho x, 1-\rho^2)$

a) Calculons le noyau de transition associé à la chaîne des X

D'après les distributions précédentes on a :

$$K(x^*,x) = \int_{\Omega_Y} f_{X|Y}(x,y) f_{Y|X}(x^*,y) dy = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \int_{\Omega_Y} e^{-\dfrac{(x-\rho y)^2+(y-\rho x^*)^2}{2(1-\rho^2)}} dy = f_{X|X^*}(x|x^*)$$

d'où le résultat

b) Cherchons la distribution invariante pour la chaîne des X

On calcule la densité $f(x)$ associé à la chaîne X à partir de la densité précédente et sachant que $X^* \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int f_{X^*}(x^*) f_{X|X^*}(x|x^*) dx^* \\
&= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\dfrac{(x-\rho y)^2+(y-\rho x^*)^2}{2(1-\rho^2)}} dy \int e^{-\dfrac{x^*}{2}} dx^* \\
&= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\dfrac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} \int e^{-\dfrac{-y^2-2\rho x^* y+\rho^2 x^{*2}+x^{*2}-\rho^2 x^{*2}}{2(1-\rho^2)}} dy dx^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\dfrac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} e^{-\dfrac{y^2}{2}} \int \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} e^{-\dfrac{(x^*-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} dx^* dy
\end{aligned}$$

On reconnaît pour la seconde intégrale la densité d'une loi $\mathcal{N}(\rho y, 1-\rho^2)$ dont l'intégralle vaut 1. Par ailleurs, la première intégrale ne dépend pas de y.
On obtient ainsi :

$$f(x) \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$$

Donc $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\mathcal{N}(0,1)$ est bien la distribution invariante pour la chaîne de Markov en X

c) Montrons que $X|x^* \sim \mathcal{N}(\rho^2 x^{*2}, 1-\rho^4)$

On reprends l'expression de $K(x^*,x)$:

$$K(x^*,x) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \int e^{-\dfrac{(x-\rho y)^2 + (y-\rho x^*)^2}{2(1-\rho^2)}} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \int e^{-\dfrac{x^2 - 2\rho x y + \rho^2 y^2 + y^2 - 2\rho x^* y + \rho^2 x^{*2}}{2(1-\rho^2)}} dy$$

$$K(x^*,x) \propto e^{-\dfrac{x^2+\rho^2 x^{*2}}{2(1-\rho^2)}} \int e^{-\dfrac{(1+\rho^2)(y^2 - \frac{2\rho}{1+\rho^2}(x^*+x))}{2(1-\rho^2)}} dy$$

$$\propto e^{-\dfrac{x^2+\rho^2 x^{*2}}{2(1-\rho^2)}} \int e^{-\dfrac{(1+\rho^2)[(y - \frac{\rho(x+x^*)}{1+\rho^2})^2 - (\frac{\rho(x+x^*)}{1+\rho^2})^2]}{2(1-\rho^2)}} dy$$

$$\propto e^{-\dfrac{x^2+\rho^2 x^{*2}}{2(1-\rho^2)} - \dfrac{\rho^2(x^*+x)^2}{2(1-\rho^2)(1+\rho^2)}} \int e^{-\dfrac{(1+\rho^2)(y - \frac{\rho(x+x^*)}{1+\rho^2})^2}{2(1-\rho^2)}} dy$$

Ici le terme sous l'intégrale correspond à la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\frac{\rho(x+x^*)}{1+\rho^2}, \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2})$ donc son intégralle vaut 1. On en déduit :

$$K(x^*,x) \propto e^{-\dfrac{x^2+\rho^2 x^{*2}}{2(1-\rho^2)} - \dfrac{\rho^2(x^*+x)^2}{2(1-\rho^2)(1+\rho^2)}}$$

$$\propto e^{-\dfrac{\rho^2(x^*+x)^2 + (1+\rho^2)(x^2+\rho^2 x^{*2})}{2(1-\rho^4)}}$$

$$\propto e^{-\dfrac{x-\rho^2 x^*}{2(1-\rho^4)}}$$

On en déduit donc que $X|x^* \sim \mathcal{N}(\rho^2 x^{*2}, 1-\rho^4)$

d) Etudions la covariance de la chaîne

D'après les deux questions précedentes, on établit que $X_k = \rho^2 X_{k-1} + U_k$ avec $U_k \sim \mathcal{N}(0, 1-\rho^4)$

En raisonnant par une récurence simple on montre alors que : $X_k = \rho^{2k} X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} U_{k-1}\rho^{2j}$

Ainsi : $cov(X_k, X_0) = cov(\rho^{2k} X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} U_{k-1}\rho^{2j}, X_0) = cov(\rho^{2k} X_0, X_0) = \rho^{2k}$

Or par hyppothèse $\rho < 1$ donc on obtient que la covariance tends vers 0 quand k tends vers l'infini.