При исследовании квазиклассической локализации спектра несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля (см. [1]) с потенциалом $Q_\kappa(z) = z^3 + \kappa z$, $\kappa \in (-3,-1]$, возникает следующая проблема: Известно, что часть спектра внутри полуполосы $\Pi = \{\lambda = a + ib\colon a \in [0, Q_\kappa(-\sqrt{|\kappa/3|})], b \leqslant 0\}$, концентрируется вблизи участков кривых, заданных уравнениями

$$\operatorname{Re}\xi(\lambda,\kappa) = \operatorname{Re}\left(\int_{\alpha(\lambda,\kappa)}^{-1} e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(w)-\lambda}\,dw\right) = 0, \qquad \text{где} \quad Q_\kappa(\alpha(\lambda,\kappa)) = \lambda,\ \alpha(Q_\kappa(-1),\kappa) = -1,$$

$$\operatorname{Re}\eta(\lambda,\kappa) = \operatorname{Re}\left(\int_{\alpha(\lambda,\kappa)}^{\beta(\lambda,\kappa)} e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(w)-\lambda}\,dw\right) = 0, \qquad \text{где} \quad Q_\kappa(\beta(\lambda,\kappa)) = \lambda,\ \beta(0,\kappa) = 0$$

а также вблизи кривой $\operatorname{Re}(\xi(\lambda,\kappa) - \eta(\lambda,\kappa)) = 0$. Известно, что у указанных кривых существует единственная точка пересечения $\Lambda(\kappa)$, **в приближенном поиске которой состоит решаемая здесь задача**. Ниже представлена процедура решения, **реализованная на языке** R, использование которой позволило уточнить гипотезу

$$\frac{\operatorname{Re}\Lambda(\kappa) - Q_\kappa(-1)}{Q_\kappa(-\sqrt{|\kappa/3|}) - \operatorname{Re}\Lambda(\kappa)} \approx 2.$$

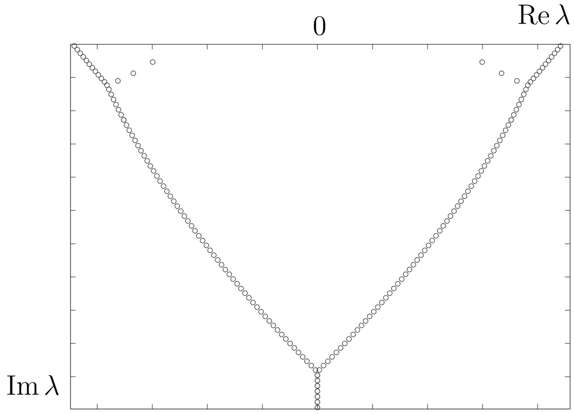

рис.1. Типичное расположение спектра при $\kappa \in (-3,-1]$

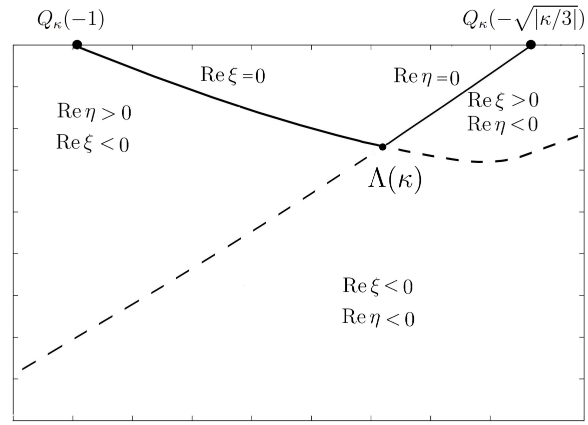

рис.2. Типичное расположение исследуемых линий уровня

§1. Предварительные сведения

По аналогии с [2], здесь $\alpha(\lambda,\kappa)$ и $\beta(\lambda,\kappa)$ – корни уравнения $Q_\kappa(z) = \lambda$, определенные таким образом, что при $\lambda \in \Pi$ имеем $\operatorname{Re}\alpha(\lambda,\kappa) < -\sqrt{|\kappa/3|} < \operatorname{Re}\beta(\lambda,\kappa) < 0$, $\operatorname{Im}\alpha(\lambda,\kappa) < 0$, $\operatorname{Im}\beta(\lambda,\kappa) > 0$. Заметим, что в точках $\pm\sqrt{|\kappa/3|}$ достигаются локальные экстремумы функции $Q_\kappa(z)$. Кроме того, корни $\alpha(\lambda,\kappa)$, $\beta(\lambda,\kappa)$ лежат на линиях уровня $\operatorname{Re}Q_\kappa(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + \kappa x = a$. Для λ, лежащих вблизи участков кривых $\operatorname{Re}\xi = 0$, $\operatorname{Re}\eta = 0$, вдоль которых концентрируется спектр, имеем $\alpha(a;\kappa) > -1$.

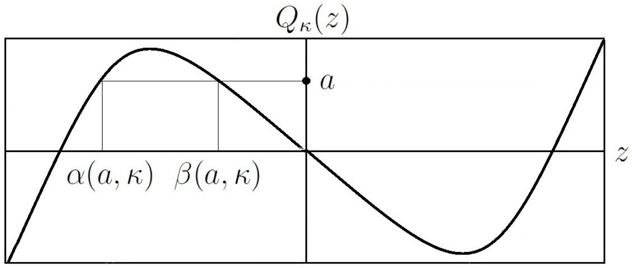

рис.3. Корни вещественного уравнения $Q_\kappa(z) = a$

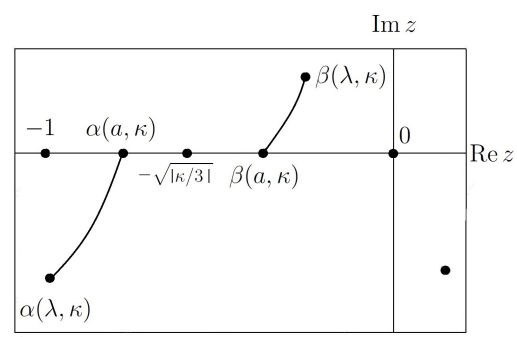

рис.4. Корни комплексного уравнения $Q_\kappa(z) = \lambda = a + ib$

Отметим, что третий корень уравнения $Q_\kappa(z)=\lambda$ лежит в правой полуплоскости $\{\operatorname{Re} z>0\}$. Ветвь корня $\sqrt{Q_\kappa(w)-\lambda}$ выделяется таким образом, что $\operatorname{Re}\sqrt{Q_\kappa(w)-\lambda}>0$, $w\in(\alpha(a,\kappa),\beta(a,\kappa))$, затем продолжается по непрерывности так, что $\operatorname{Re} e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(w)-\lambda}<0$ при $w\in(-1,\alpha(a,\kappa))$, и, кроме того, $\arg\sqrt{Q_\kappa(w)-\lambda}=\pi/4$ при w, лежащих на участках линий уровня $\operatorname{Re} Q_\kappa(z)=a$ между точками $\alpha(\lambda,\kappa)$ и $\alpha(a,\kappa)$, между $\beta(\lambda,\kappa)$ и $\beta(a,\kappa)$. При таком выборе ветви корня, функции $\operatorname{Re}\xi(a+ib,\kappa)$ и $\operatorname{Re}\eta(a+ib,\kappa)$ возрастают по b для фиксированного a. Также отметим, что величина $\operatorname{Im} Q_\kappa(z)$ монотонна вдоль линии уровня $\operatorname{Re} Q_\kappa(z)=a$.

Таким образом, ввиду монотонности $\operatorname{Re}\xi(a+ib,\kappa)$ и $\operatorname{Re}\eta(a+ib,\kappa)$ и единственности $\Lambda(\kappa)$, для локализации $\operatorname{Re}\Lambda(\kappa)$ достаточно найти точки $\lambda_{1,2}$, такие что $\operatorname{Re}\eta(\lambda_1)>0>\operatorname{Re}\xi(\lambda_1)$ и $\operatorname{Re}\eta(\lambda_2)<0<\operatorname{Re}\xi(\lambda_2)$. Тогда $\operatorname{Re}\lambda_1<\operatorname{Re}\Lambda(\kappa)<\operatorname{Re}\lambda_2$.

§2. Локализация α и β

Для приближенного поиска вещественных частей корней с точностью до ϵ_1 воспользуемся следующей процедурой:

1) Уравнение $Q_\kappa(z)=a$. Поскольку $\operatorname{Re} Q_\kappa(-\sqrt{|\kappa/3|})\geq a$, то после нахождения точки на луче $z<-\sqrt{-\kappa/3}$ и точки на промежутке $z\in(-\sqrt{|\kappa/3|},0)$, в которых $\operatorname{Re} Q_\kappa(z)<a$, методом деления отрезка пополам получаем оценки $\alpha(a,\kappa)\in[al_1,al_2]$, $\beta(a,\kappa)\in[be_1,be_2]$.

2) Уравнение $Q_\kappa(z)=\lambda=a+ib$. Поскольку корни рассматриваемого уравнения лежат на линиях уровня $\operatorname{Re} Q_\kappa(z)=a$, оно сводится к уравнению $\operatorname{Im} Q_\kappa(z)=b$. Ввиду монотонности функции $\operatorname{Im} Q_\kappa(z)$ вдоль указанной линии уровня, при необходимости увеличивая al_1, или уменьшая be_2, получаем, что $\operatorname{Im} Q_\kappa(z)>b$ для $z=al_1-i\sqrt{(al_1^3+\kappa\, al_1-al_1)/3al_1}$ и $z=be_2+i\sqrt{(be_2^3+\kappa\, be_2-a)/3be_2}$. После нахождения двух точек, в которых $\operatorname{Im} Q_\kappa(z)<b$, принадлежащих линии уровня $\operatorname{Re} Q_\kappa(z)=a$, для одной из которых $\operatorname{Re} z<al_1$, а для другой $\operatorname{Re} z\in(be_2,0)$, методом деления отрезка пополам получаем оценки $\operatorname{Re}\alpha(\lambda,\kappa)\in[alp_1,alp_2]$, $\operatorname{Re}\beta(\lambda,\kappa)\in[bet_1,bet_2]$.

§3. Оценки интегралов

Для вычисления значений $\operatorname{Re}\xi(\lambda,\kappa),\operatorname{Re}\eta(\lambda,\kappa)$ с точностью до ϵ_2 интегрирование $e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(w)-\lambda}$ ведется вдоль участков вещественной оси, а также вдоль линий уровня $\operatorname{Re} Q_\kappa(z)=x^3-3xy^2+\kappa x=a$. При этом в пп. 3.1-3.5 получены оценки сверху и снизу для соответствующих интегралов.

3.1. Получим оценки интеграла вдоль участка от $\alpha(\lambda,\kappa)$ до $\alpha(a,\kappa)$, выбрав в качестве пути интегрирования кривую $z(s)=s+iy(s)=s-i\sqrt{(s^3+\kappa s-a)/3s}$, $s\in(\operatorname{Re}\alpha(\lambda,\kappa),\alpha(a,\kappa))$.

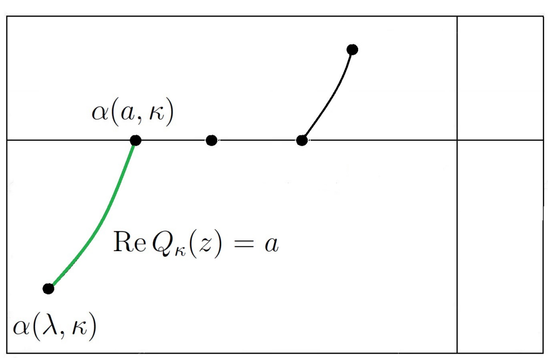

рис.5. Путь интегрирования в п. 3.1

Тогда $\operatorname{Re} Q_\kappa(z(s)) = a$, $\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s)) = y(s)(3s^2+\kappa-y^2(s)) \in (b,0)$ и

$$\operatorname{Re}\left(\int_{\alpha(\lambda,\kappa)}^{\alpha(a,\kappa)} e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(w)-a-ib}\,dw\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\int_{\operatorname{Re}\alpha(\lambda,\kappa)}^{\alpha(a,\kappa)} e^{i\pi/4}\sqrt{iy(s)(3s^2+\kappa-y^2(s))-ib}\Big(s-i\sqrt{(s^3+\kappa s-a)/3s}\Big)'\,ds\right) =$$

$$= \int_{\operatorname{Re}\alpha(\lambda,\kappa)}^{\alpha(a,\kappa)} \sqrt{\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s))-b}\Big(\sqrt{(s^3+\kappa s-a)/3s}\Big)'\,ds.$$

В частности, поскольку $\Big(\sqrt{(s^3+\kappa s-a)/3s}\Big)' < 0$, то вещественная часть указанного интеграла отрицательна. Интеграл сводится к вещественному, который может быть вычислен с помощью функций из стандартных математических пакетов. Этот интеграл также можно оценить следующим образом:

Обозначим $\widetilde{y}(s) = -y(s)$. Ввиду однолистности функции $Q_\kappa(z)$, величина $\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s))$ **возрастает** по s. Разбивая отрезок $[\operatorname{Re}\alpha(\lambda,\kappa), \alpha(a,\kappa)]$ точками $s_0, ..., s_{n+1}$, такими что $s_0 = \operatorname{Re}\alpha(\lambda,\kappa)$, $s_1 = alp_2$, $s_n = al_1$, $s_{n+1} = \alpha(a,\kappa)$, получаем оценки $\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_j)) < \operatorname{Im} Q_\kappa(z(s)) < \operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_{j+1})) < 0$, $s \in (s_j, s_{j+1})$, и

$$(\widetilde{y}(s_{j+1})-\widetilde{y}(s_j))\sqrt{\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_{j+1}))-b} < \operatorname{Re}\left(\int_{s_j}^{s_{j+1}} e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(z(s))-a-ib}\,z'(s)ds\right) < (\widetilde{y}(s_{j+1})-\widetilde{y}(s_j))\sqrt{\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_j))-b}.$$

При $j=0$ имеем $\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_0)) = b$, $\widetilde{y}(s_1)-\widetilde{y}(s_0) = \widetilde{y}(alp_2)-\widetilde{y}(\operatorname{Re}\alpha(\lambda,\kappa)) > \widetilde{y}(alp_2)-\widetilde{y}(alp_1)$ и

$$(\widetilde{y}(alp_2)-\widetilde{y}(alp_1))\sqrt{\operatorname{Im} Q_\kappa(z(alp_2))-b} < \operatorname{Re}\left(\int_{s_0}^{s_1} e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(z(s))-a-ib}\,z'(s)ds\right) < 0.$$

При $j=n$ имеем $\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_{n+1})) = 0$ и $y(s_{n+1}) = 0$

$$(-\widetilde{y}(al_1))\sqrt{-b} < \operatorname{Re}\left(\int_{s_n}^{s_{n+1}} e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(z(s))-a-ib}\,z'(s)ds\right) < (-\widetilde{y}(al_1))\sqrt{\operatorname{Im} Q_\kappa(z(al_1))-b}.$$

Число n увеличивается до тех пор, пока разность между оценками больше $\epsilon_2/4$.

3.2. Аналогично получаются оценки для интеграла вдоль участка от $\beta(a,\kappa)$ до $\beta(\lambda,\kappa)$, выбрав в качестве пути интегрирования кривую $z(s) = s+i\widetilde{y}(s) = s+i\sqrt{s^2/3+\kappa/3-a/3s}$, $s \in (\beta(a,\kappa), \operatorname{Re}\beta(\lambda,\kappa))$.

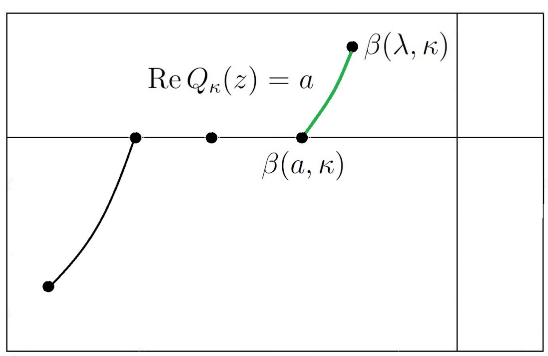

рис.6. Путь интегрирования в п. 3.2

Тогда $\operatorname{Re} Q_\kappa(z(s)) = a$, $\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s)) = y(s)(3s^2+\kappa-y^2(s)) \in (b,0)$ и

$$\operatorname{Re}\left(\int_{\beta(a,\kappa)}^{\beta(\lambda,\kappa)} e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(w)-a-ib}\,dw\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\int_{\beta(a,\kappa)}^{\operatorname{Re}\beta(\lambda,\kappa)} e^{i\pi/4}\sqrt{iy(s)(3s^2+\kappa-y^2(s))-ib}\Big(s+i\sqrt{s^2/3+\kappa/3-a/3s}\Big)'\,ds\right) =$$

$$= -\int_{\beta(a,\kappa)}^{\operatorname{Re}\beta(\lambda,\kappa)} \sqrt{y(s)(3s^2+\kappa-y^2(s))-b}\left(\sqrt{s^2/3+\kappa/3-a/3s}\right)' ds.$$

В частности, отсюда может быть получено, что вещественная часть указанного интеграла отрицательна. Ввиду однолистности функции $Q_\kappa(z)$, величина $\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s))$ **убывает** по s. Разбивая отрезок $[\beta(a,\kappa), \operatorname{Re}\beta(\lambda,\kappa)]$ точками $s_0, ..., s_{n+1}$, такими что $s_0 = \beta(a,\kappa)$, $s_1 = be_2$, $s_n = bet_1$, $s_{n+1} = \operatorname{Re}\beta(\lambda,\kappa)$, получаем оценки $0 > \operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_j)) > \operatorname{Im} Q_\kappa(z(s)) > \operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_{j+1}))$, $s \in (s_j, s_{j+1})$, и

$$-(\widetilde{y}(s_{j+1})-\widetilde{y}(s_j))\sqrt{\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_j))-b} < \operatorname{Re}\left(\int_{s_j}^{s_{j+1}} e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(z(s))-a-ib}\, z'(s)ds\right) < -(\widetilde{y}(s_{j+1})-\widetilde{y}(s_j))\sqrt{\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_{j+1}))-b}.$$

При $j = 0$ имеем $\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_0)) = 0$ и $y(s_0) = 0$

$$(-\widetilde{y}(s_1))\sqrt{-b} < \operatorname{Re}\left(\int_{s_0}^{s_1} e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(z(s))-a-ib}\, z'(s)ds\right) < (-\widetilde{y}(s_1))\sqrt{\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_1))-b}.$$

При $j = n$ имеем $\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_{n+1})) = b$, $\widetilde{y}(s_{n+1}) - \widetilde{y}(s_n) < \widetilde{y}(bet_2) - \widetilde{y}(bet_1)$ и

$$-(\widetilde{y}(bet_2)-\widetilde{y}(bet_1))\sqrt{\operatorname{Im} Q_\kappa(z(s_n))-b} < \operatorname{Re}\left(\int_{s_n}^{s_{n+1}} e^{i\pi/4}\sqrt{Q_\kappa(z(s))-a-ib}\, z'(s)ds\right) < 0.$$

3.3. Получим оценки интеграла вдоль отрезка $[-1, \alpha(a,\kappa)]$

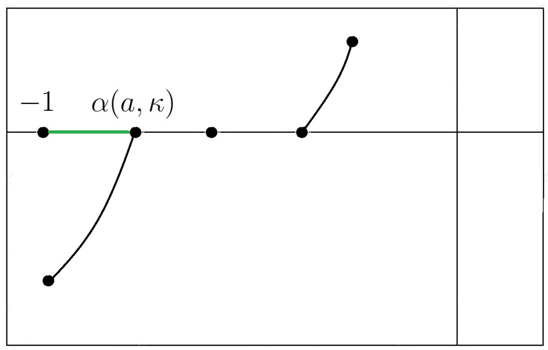

рис.7. Путь интегрирования в п. 3.3

Для этого воспользуемся формулой вещественной части корня (следствие косинуса двойного угла)

$$\operatorname{Re}\left(\int_{-1}^{\alpha(a,\kappa)} \sqrt{i(Q_\kappa(w)-a)+b}\, dw\right) = -\int_{-1}^{\alpha(a,\kappa)} \frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(w)-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}\, dw.$$

Разбивая $[-1, \alpha(a,\kappa)]$ точками $s_0, ..., s_{n+1}$, такими что $s_0 = -1$, $s_n = al_1$, $s_{n+1} = \alpha(a,\kappa)$, получаем оценки $(Q_\kappa(s_{j+1})-a)^2 < (Q_\kappa(s)-a)^2 < (Q_\kappa(s_j)-a)^2$, $s \in (s_j, s_{j+1})$,

$$-\frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(s_j)-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}(s_{j+1}-s_j) < \operatorname{Re}\left(\int_{s_j}^{s_{j+1}} \sqrt{i(Q_\kappa(w)-a)+b}\, dw\right) <$$

$$< -\frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(s_{j+1})-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}(s_{j+1}-s_j).$$

При $j = n$ имеем $Q_\kappa(s_{n+1}) = a$ и $s_{n+1} - s_n < al_2 - al_1$

$$-\frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(al_1)-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}(al_2-al_1) < \operatorname{Re}\left(\int_{s_{n-1}}^{s_n} \sqrt{i(Q_\kappa(w)-a)+b}\, dw\right) < 0.$$

3.4. Получим оценки интеграла вдоль отрезка $[\alpha(a,\kappa), -\sqrt{|\kappa/3|}]$

$$\operatorname{Re}\left(\int_{\alpha(a,\kappa)}^{-\sqrt{|\kappa/3|}} \sqrt{i(Q_\kappa(w)-a)+b}\, dw\right) = \int_{\alpha(a,\kappa)}^{-\sqrt{|\kappa/3|}} \frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(w)-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}\, dw.$$

Разбивая $[\alpha(a,\kappa), -\sqrt{-\kappa/3}]$ точками $s_0, ..., s_{n+1}$, такими что $s_0 = \alpha(a,\kappa)$, $s_1 = al_2$, $s_{n+1} = -\sqrt{|\kappa/3|}$, получаем оценки $(Q_\kappa(s_{j+1}) - a)^2 > (Q_\kappa(s) - a)^2 > (Q_\kappa(s_j) - a)^2$, $s \in (s_j, s_{j+1})$,

$$\frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(s_j)-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}(s_{j+1}-s_j) < \mathrm{Re}\left(\int_{s_j}^{s_{j+1}} \sqrt{i(Q_\kappa(w)-a)+b}\,dw\right) < \frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(s_{j+1})-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}(s_{j+1}-s_j).$$

При $j = 0$ имеем $Q_\kappa(s_0) = a$ и $s_1 - s_0 < al_2 - al_1$

$$0 < \mathrm{Re}\left(\int_{s_0}^{s_1} \sqrt{i(Q_\kappa(w)-a)+b}\,dw\right) < \frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(a_2)-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}(al_2-al_1).$$

3.5. Получим оценки интеграла вдоль отрезка $[-\sqrt{|\kappa/3|}, \beta(a,\kappa)]$

$$\mathrm{Re}\left(\int_{-\sqrt{|\kappa/3|}}^{\beta(a,\kappa)} \sqrt{i(Q_\kappa(w)-a)+b}\,dw\right) = \int_{-\sqrt{|\kappa/3|}}^{\beta(a,\kappa)} \frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(w)-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}\,dw.$$

Разбивая $[-\sqrt{|\kappa/3|}, \beta(a,\kappa)]$ точками $s_0, ..., s_{n+1}$, такими что $s_0 = -\sqrt{|\kappa/3|}$, $s_n = be_1$, $s_{n+1} = \beta(a,\kappa)$, получаем оценки $(Q_\kappa(s_{j+1}) - a)^2 < (Q_\kappa(s) - a)^2 < (Q_\kappa(s_j) - a)^2$, $s \in (s_j, s_{j+1})$,

$$\frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(s_{j+1})-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}(s_{j+1}-s_j) < \mathrm{Re}\left(\int_{s_j}^{s_{j+1}} \sqrt{i(Q_\kappa(w)-a)+b}\,dw\right) < \frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(s_j)-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}(s_{j+1}-s_j).$$

При $j = n$ имеем $Q_\kappa(s_{n+1}) = a$ и $s_{n+1} - s_n < be_2 - be_1$

$$0 < \mathrm{Re}\left(\int_{s_n}^{s_{n+1}} \sqrt{i(Q_\kappa(w)-a)+b}\,dw\right) < \frac{\sqrt{\sqrt{(Q_\kappa(be_1)-a)^2+b^2}+b}}{\sqrt{2}}(be_2-be_1).$$

Список литературы

[1] Степин С. А., Фуфаев В. В. Метод фазовых интегралов в задаче квазиклассической локализации спектра // Докл. РАН, 2015. – Т.462, №3. – С. 283-287.

[2] Фуфаев В. В. О линиях уровня гармонических функций, связанных с некоторыми абелевыми интегралами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2017. – №1. – С. 16-25.