Рассмотрим возникающую в задаче квазиклассической локализации спектра (см. [1], [2], а также [3]) кривую G, выходящую в $\mathbb{C}_z$ из -1, заданную уравнением

$$\operatorname{Re}\xi(z) = \operatorname{Re}\left(e^{i\pi/4}\int_{-1}^{z}\sqrt{Q(w)-Q(z)}\,dw\right) = 0$$

для $z \in G$, где $Q(z) = \sum_{k=1}^{M}\frac{q_{k-1}}{k!}z^k$ – многочлен степени M, такой что $q_0 \neq 0$. Предположим, что она допускает параметризацию $z(s) = -1 + c_0 z - \sum_{k=2}^{\infty} ic_{k-1}s^k$, где $c_k \in \mathbb{R}$ при $k \geqslant 1$. Задача состоит в поиске коэффициентов c_k при известных $q_0, ..., q_{M-1}$.

Если $z \in G$, то существует p, такое что $z = z(p)$. Выберем кривую $z(s)$, $s \in (0, p)$, в качестве пути интегрирования и обозначим $\Phi(s) := Q(z(s))$

$$\operatorname{Re}\xi(z) = \operatorname{Re}\left(e^{i\pi/4}\int_{0}^{p}\sqrt{\Phi(s)-\Phi(p)}\,z'(s)\,ds\right) = 0.$$

Сделаем замену $s = pt$ и разложим функцию $\sqrt{\Phi(pt)-\Phi(p)/p(t-1)q_0c_0}$ в ряд Тейлора по p.

Мотивация к вынесению такого множителя и один из способов разложения: рассмотрим ряд по s в точке p функции

$$\Phi(s)-\Phi(p) = \Phi'(p)(s-p) + \frac{\Phi''(p)}{2}(s-p)^2 + \frac{\Phi'''(p)}{3!}(s-p)^3 + ...$$

и далее сделаем замену $s = pt$

$$\operatorname{Re}\xi(z) = \operatorname{Re}\left(e^{i\pi/4}\int_{0}^{1}\sqrt{p\Phi'(p)(t-1) + \frac{p^2\Phi''(p)}{2}(t-1)^2 + ...}\cdot\Big(c_0 - 2ic_1pt + ...\Big)\,pdt\right).$$

Разложим функции $\Phi^{(k)}(p)$ в ряд Тейлора

$$p\Phi'(p)(t-1) + \frac{p^2\Phi''(p)}{2}(t-1)^2 + ... = p(t-1)\big(\Phi'(0) + \Phi''(0)p + ...\big) + \frac{p^2(t-1)^2}{2}\big(\Phi''(0) + ...\big) + ... =$$

$$= p(t-1)\left[\Phi'(0) + p\Phi''(0)\frac{(t+1)}{2} + ...\right] + ...$$

Заметим, что

$$\Phi'(0) = Q_z(-1)z'(0) = q_0c_0$$

$$\Phi''(0) = Q_{zz}(-1)(z'(0))^2 + Q_z(-1)z''(0) = q_1c_0^2 + q_0c_1.$$

Вынесем выражение $\sqrt{p(t-1)\Phi'(0)}$ и разложим полученный корень в ряд Тейлора.

$$\sqrt{1 + p\frac{\Phi''(0)}{\Phi'(0)}\frac{(t+1)}{2} + ...} = 1 + p\frac{\Phi''(0)}{\Phi'(0)}\frac{(t+1)}{4} + ...$$

Имеем

$$\operatorname{Re}\xi(z) = \operatorname{Re}\left(e^{i\pi/4}\int_{0}^{1}\sqrt{p\Phi'(0)(t-1)}\left(1 + p\frac{\Phi''(0)}{\Phi'(0)}\frac{(t+1)}{4} + ...\right)\cdot\Big(c_0 - 2ic_1pt + ...\Big)\,pdt\right).$$

Будем приравнивать к нулю коэффициенты при степенях p. Для коэффициента при $p^{3/2}$ имеем

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\pi/4}c_0^{3/2}\int_{0}^{1}\sqrt{t-1}\,dt\right) = 0,$$

откуда следует, что c_0 пропорционален $e^{-i\pi/6}$.

Далее, при $p^{5/2}$, положив $c_0 = 1 - i/\sqrt{3}$, будем иметь

$$\mathrm{Re}\int_0^1 \left(e^{i\pi/4}\sqrt{\Phi'(0)(t-1)}\left(\frac{\Phi''(0)}{\Phi'(0)}\frac{(t+1)}{4}\left(1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)-2ic_1 t\right)\right) dt = 0,$$

или, учитывая предыдущее равенство

$$\mathrm{Re}\int_0^1 \sqrt{t-1}\left(\frac{\Phi''(0)}{\Phi'(0)}\frac{(t+1)}{4}-\frac{2ic_1 t}{(1-i/\sqrt{3})}\right) dt = 0.$$

Заметим, что

$$\int_0^1 (t+1)\sqrt{t-1}\,dt = \frac{14i}{15}, \quad \int_0^1 t\sqrt{t-1}\,dt = \frac{4i}{15}, \quad \mathrm{Re}\,\frac{1}{1-i/\sqrt{3}} = \frac{3}{4},$$

таким образом, получаем уравнение

$$\frac{7}{30}\,\mathrm{Re}\left(i\frac{q_1}{q_0}\left(1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\right)+\frac{7c_1}{20}+\frac{2c_1}{5} = 0.$$

Стало быть,

$$c_1 = -\frac{14Q_{zz}(-1)}{45Q_z(-1)\sqrt{3}}.$$

Для упрощения интегралов сделаем замену $t = 1 - u^2$. Уравнение примет вид

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\pi/4}\int_0^1 \sqrt{-pq_0c_0u^2}\left(1+p\frac{\Phi''(0)}{\Phi'(0)}\frac{(2-u^2)}{4}+...\right)\cdot\left(c_0-2ic_1p(1-u^2)+...\right)2pudu\right) = 0.$$

Учитывая, что $e^{i\pi/4}c_0^{3/2} \in \mathbb{R}$ и сокращая на $2q_0^{1/2}p^{3/2}$:

$$\mathrm{Re}\left(i\int_0^1 \left(1+p\frac{\Phi''(0)}{\Phi'(0)}\frac{(2-u^2)}{4}+...\right)\cdot\left(1-2i\frac{c_1p(1-u^2)}{c_0}+...\right)u^2du\right) = 0.$$

Полученное выражение приводится к системе: k-е уравнение получается кратным дифференцированием по p и подстановкой $p = 0$; за счет того, что оба ряда в подынтегральном выражении начинаются с единицы, полученная система разрешается по c_k и дает зависимость c_k от $q_0, ..., q_{M-1}$ и $c_0, ..., c_{k-1}$. Отметим, что искомые коэффициенты входят как в $z'(p(1-u^2))/c_0$, так и в $\Phi^{(k)}(0)$.

С точки зрения выявления закономерностей, полезным является замена явного разложения корня на разложение с неопределенными коэффициентами, а также замена определенного интеграла на неопределенный.

Список литературы

[1] Степин С. А., Фуфаев В. В. Метод фазовых интегралов в задаче квазиклассической локализации спектра // Докл. РАН, 2015. – Т.462, №3. – С. 283-287.

[2] Фуфаев В. В. О линиях уровня гармонических функций, связанных с некоторыми абелевыми интегралами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2017. – №1. – С. 16-25.

[3] Степин С. А., Фуфаев В. В. Метод фазовых интегралов в одной задаче сингулярной теории возмущений // Изв. РАН. Сер. матем., 2017. – Т.81, №2. – С. 129-160.