Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición Cholesky

Obs. Cuando una matriz A es simétrica, sería razonable esperar que en la factorización LU (cuando esta existe) de A, se tenga $U = L^T$.

En general esto no es cierto.

Obs. Supongamos A es no singular, $A = LL^T$ y $x \neq 0$, entonces L es no singular, y si definimos $y = L^T x \neq 0$, entonces

$$x^T A x = x^T L L^T x = (L^T x)^T (L^T x) = y^T y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 > 0.$$

Entonces, una matriz A no singular que puede ser factorizada como LL^T tiene que ser definida positiva.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición Cholesky (cont.)

Obs. Sea *A* una matriz definida positiva entonces *A* es no singular.

Para ver esto, es suficiente demostrar que

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

Supongamos lo contrario, es decir $Ax = 0$ pero $x \neq 0.$

Entonces, multiplicando por x^T por la izquierda

$$x^T A x = 0$$

lo cual contradice el hecho que A es definida positiva.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición Cholesky (cont.)

Obs. Sea A una matriz $n\times n$ definida positiva de la forma $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & A_* \end{pmatrix}$,
donde a es un vector de longitud n-1,
entonces $\alpha > 0$ y A_* es definida positiva.

Veamos que $\alpha > 0$. Sea x^T=(1,0,…,0), entonces

$$0 < x^T A x = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & A_* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha > 0.$$

vector nulo de longitud n-1

Veamos que A_* es definida positiva.
Sea $y \neq 0$ vector de dimensión n-1 y $x^T = (0 \;\; y^T)$, entonces

$$0 < x^T A x = (0 \quad y^T)\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & A_* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = y^T A_* y \quad \Rightarrow \quad y^T A_* y > 0.$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición Cholesky (cont.)

Hemos visto que una matriz A no singular, la cual puede ser factorizada como LL^T, cumple que A es definida positiva.

El inverso es también verdad. Esto se enuncia a continuación.

Teorema:

Si A es una matriz simétrica y definida positiva, entonces

$$A = L\,L^T\,,$$

donde L es una matriz triangular inferior con los elementos de la diagonal positivos. Además esta descomposición es única.

Obs. La descomposición $A = L\,L^T$ recibe el nombre de **descomposición de Cholesky**.

Obs. Si $A = L\,L^T$ se tiene que $A = (-L)\,(-L^T)$ lo cual indica que A tiene otra descomposición de Cholesky. Esto no contradice el teorema anterior. ¿Por qué?

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición Cholesky (cont.)

Para obtener el algoritmo de la descomposición de Cholesky, basta observar, en el algoritmo de la descomposición *LU* general, que: lamina121

$$U = L^T$$

de donde, para cualquier índice *k* entre 1 y *n*, se cumple que:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$u_{kk} = l_{kk}$$

$$u_{kj} = l_{jk} \ , \ \text{para} \ \ k+1 \le j \le n$$

$$u_{ik} = l_{ki} \ , \ \text{para} \ \ k+1 \le i \le n$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición Cholesky (cont.)

Algoritmo

Leer $A=(a_{ij}), n$

Para k = 1 hasta n

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}^2}$$

Para $i = k+1$ hasta n

$$l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} l_{ks} \right) / \, l_{kk}$$

Fin para

Fin para

Ejercicio: Calcular el número de operaciones básicas para resolver un sistema lineal de ecuaciones usando el método de descomposición de Cholesky.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Cálculo de la matriz inversa

Sea A es una matriz invertible, $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$

Sean e_1, e_2,…, e_n la base canónica de R^n. Para el cálculo de la matriz inversa procedemos así

Calcular B tal que $AB = I \quad \text{con} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

Planteamos la secuencia de problemas siguientes

$$Ax_i = e_i \quad \text{con} \quad x_i = \begin{pmatrix} b_{i1} & \cdots & b_{in} \end{pmatrix}^T \quad \text{para} \quad 1 \le i \le n$$

(x_i es la columna i de la matriz B) por alguno de los procedimientos vistos.

Ejercicio: Calcular el número de operaciones básicas involucradas en la construcción de la inversa de A usando el método de descomposición LU.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Algoritmos de factorización para matrices especiales

Una matriz $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ se denomina matriz banda si existen enteros *p* y *q*, con la propiedad siguiente

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{i} + p \le j \\ 0 & \text{si } j + q \le i \end{cases} \quad \text{para} \quad 1 < p, q < n$$

El ancho de banda es *w =p+q-1*

$i+p \le j$

Caso $p = q < n$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & & a_{pp} & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & & a_{pn} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$j+p \le i$

Un caso especial de estas matrices es cuando *p=q=2*, la cual da un ancho de banda *w=3*, y se denominan tridiagonales

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Algoritmos de factorización para matrices especiales

p=3

q=5

$$A = \begin{pmatrix}
* & * & * & & & & & & & \\
* & * & * & * & & & & & & \\
* & * & * & * & * & & & & & \\
* & * & * & * & * & * & & & & \\
* & * & * & * & * & * & * & & & \\
 & * & * & * & * & * & * & * & & \\
 & & * & * & * & * & * & * & * & \\
 & & & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & & * & * & * & * & *
\end{pmatrix}$$

A es una matriz banda con ancho de banda $w = 3+5-1 = 7$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \; i + p \le j \\ 0 & \text{si } \; j + q \le i \end{cases} \qquad \text{para } \; 1 < p, q < n$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Algoritmos de factorización para matrices especiales (cont.)

Los algoritmos de factorización se pueden simplificar considerablemente en el caso de matrices banda, debido al gran número de ceros que aparecen en patrones regulares en estas matrices.

Caso *A* matriz tridiagonal

Supongamos que es posible encontrar matrices *L* y *U*, tal que *A* = *LU*.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La multiplicación *A* = *LU* da, sin contar los elementos cero, las ecuaciones

$$a_{11} = l_{11}$$
$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1} \quad \text{para } i = 2,\ldots n$$

$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii} \quad \text{para } i = 2,\ldots n$$
$$a_{i,i+1} = l_{ii}u_{i,i+1} \quad \text{para } i = 1,\ldots n-1$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Algoritmos de factorización para matrices especiales (cont.)

Algoritmo para matrices tridiagonales

Leer $A=(a_{ij}), n$

$$l_{11} = a_{11}; \quad u_{12} = a_{12} / l_{11}$$

Para $i = 2$ hasta $n-1$

$$\left.\begin{aligned} l_{i,i-1} &= a_{i,i-1} \\ l_{ii} &= a_{ii} - l_{i,i-1} u_{i-1,i} \end{aligned}\right\} \quad \text{i-ésima fila de } L$$

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1} / l_{ii} \qquad \text{(i+1) columna de } U$$

Fin para

$$\left.\begin{aligned} l_{n,n-1} &= a_{n,n-1} \\ l_{nn} &= a_{nn} - l_{n,n-1} u_{n-1,n} \end{aligned}\right\} \quad \text{n-ésima fila de } L$$

Ejercicio:

- Calcular el número de operaciones elementales involucradas en el algoritmo.
- Modificar el algoritmo anterior usando un conjunto de vectores para las matrices A , L y U (no almacenar los ceros).

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Algoritmos de factorización para matrices especiales (cont.)

Una matriz $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ se denomina de Hessenberg superior si para todo $i > j + 1$ se tiene $a_{ij} = 0$

Para el caso que la dimensión de *A* sea 5×5

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Apliquemos Eliminación Gaussiana a esta matriz.

En el primer paso, sólo el elemento (2,1) requiere ser eliminado, el resto en la primera columna ya son ceros.

Para esto tenemos que restar un múltiplo de la primera fila de la segunda para obtener la matriz

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Algoritmos de factorización para matrices especiales (cont.)

En el segundo paso, restamos un múltiplo de la segunda fila de la tercera

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Dos pasos más del proceso llevan a las matrices

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

siendo la última triangular superior.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Algoritmos de factorización para matrices especiales (cont.)

El seudo-código para reducir este tipo de matrices a triangular superior, dejando de lado el pivoteo por simplicidad, es el siguiente:

Algoritmo de triangularización para matrices Hessenberg superior

```
Leer A=( a_ij ), n
Para k = 1 hasta n-1
    a(k+1,k) = a(k+1,k)/a(k,k)
    Para j = k+1 hasta n
        a(k+1,j) = a(k+1,j)-a(k+1,k)*a(k,j)
    Fin para
Fin para
```

Comparar con el método de eliminación gaussiana, p.90

Los factores de multiplicación sobrescriben los elementos debajo de la diagonal principal de A, y la matriz triangular final sobrescribe el triángulo superior de A.

Ejercicio: Calcular el número de operaciones elementales involucradas en este algoritmo y comparar con Gauss. Incluir pivoteo.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Técnicas de mejoramiento de la solución. Refinamiento Iterativo.

Sea *proc(A,b)* un procedimiento que calcula el vector $\overline{x}$ a partir de una matriz *A* y un vector *b*, es decir el vector $\overline{x}$ es solución para *Ax=b*,

$$\overline{x} \leftarrow proc(A,b).$$

Luego si *x* es la solución exacta de *Ax=b*, entonces podemos definir *Δb*

$$\Delta b = A\overline{x} - b = A\overline{x} - Ax = A\Delta x \quad \text{con} \quad \Delta x = \overline{x} - x.$$

Podemos aplicar el procedimiento anterior para resolver $A\Delta x = \Delta b$

$$\overline{\Delta x} \leftarrow proc(A,\Delta b),$$

así, $\overline{\Delta x}$ es una aproximación del verdadero error Δx.

Podemos decir que la nueva solución será $\overline{\overline{x}} = \overline{x} + \overline{\Delta x}$,
que es una mejora de la solución $\overline{x}$.

Este procedimiento lo podemos repetir varias veces!

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Técnicas de mejoramiento de la solución. Refinamiento Iterativo (cont.)

Cuantas veces debemos repetir este procedimiento?

Para detenerlo procedemos así, dado ε muy pequeño

a) ver si $\left\| A\bar{\bar{x}} - b \right\| < \varepsilon$

b) ver si $\left\| \overline{\Delta x} \right\| < \varepsilon$

c) o una combinación de (a) y (b) al mismo tiempo

Ejercicio: Escribir un programa que lleve a cabo el mejoramiento iterativo de la solución aproximada *x* del sistema lineal de ecuaciones *Ax = b*.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

De respuestas a las siguientes interrogantes:

(1) ¿Toda matriz tiene al menos una descomposición *LU*?

(2) ¿Toda matriz invertible tiene al menos una descomposición *LU*?

(3) ¿Una matriz que tiene uno o más ceros en su diagonal principal puede tener descomposición *LU*?

(4) Si una matriz *A* tiene descomposición de Cholesky, $A=LL^T$, donde *L* es una matriz triangular inferior, ¿se puede asegurar que A es definida positiva?

(5) ¿Toda matriz diagonal dominante estricta es definida positiva?

(6) ¿Toda matriz definida positiva es diagonal dominante estricta?