Sistemas de Ecuaciones Lineales

Factorización LU general (otra manera)

$A = L\,U$ donde

$$l_{is} = 0 \quad \text{para} \quad s > i \qquad\qquad u_{sj} = 0 \quad \text{para} \quad s > j$$

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & j & & & \phantom{a_{nn}} \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots & & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & a_{kk} & & \vdots \\ & a_{ij} & & \ddots & \\ a_{n1} & & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} i \quad U = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \phantom{u_{11}} & \phantom{u_{12}} & \phantom{u_{13}} & j & \phantom{u_{nn}} \end{array} \end{array}$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} l_{i1} & l_{i2} & l_{i3} & \underbrace{\cdots \quad l_{in}}_{\substack{\text{ceros} \\ s > i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ u_{3j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} \vdots \\ u_{nj} \end{matrix}}\right\} \substack{\text{ceros} \\ s > j} = \sum_{s=1}^{n} l_{is} u_{sj} = \sum_{s=1}^{\min(i,j)} l_{is} u_{sj} \qquad (14)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Factorización LU general (otra manera) (cont.)

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} l_{is} u_{sj} = \sum_{s=1}^{\min(i,j)} l_{is} u_{sj} \qquad (14)$$

Fijamos *i=j=k* en la ecuación (14) (elemento en la diagonal)

$$a_{kk} = \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sk} + l_{kk} u_{kk} \qquad (15)$$

Supongamos que se han calculado los elementos de *U* hasta la fila *k-1* y los elementos de *L* hasta la columna *k-1*, de (15) se tiene la relación

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

caso k=3

$$l_{kk} u_{kk} = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sk} \qquad (16)$$

La relación (16) permite calcular u_{kk} o l_{kk} a partir del otro.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Factorización LU general (otra manera) (cont.)

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \boxed{\cdots \quad u_{3n}} & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

caso k=3

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

A continuación con l_{kk} y u_{kk} calculados, procedemos a ubicar

- la fila k de U ($i=k$)
- la columna k de L ($j=k$)

Usando la ecuación (14) se tiene

$$\left.\begin{aligned} a_{kj} &= \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj} + l_{kk} u_{kj} \quad \text{para } k+1 \le j \le n \\ a_{ik} &= \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk} + l_{ik} u_{kk} \quad \text{para } k+1 \le i \le n \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

es decir, si $l_{kk} \neq 0$ y $u_{kk} \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} u_{kj} &= \left(a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj} \right) / l_{kk} \quad \text{para } k+1 \le j \le n \\ l_{ik} &= \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk} \right) / u_{kk} \quad \text{para } k+1 \le i \le n \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Factorización LU general (otra manera) (cont.)

Obs. Es importante notar que los cálculos en (18) pueden realizarse en paralelo, lo cual puede representar un gran ahorro en tiempo de CPU.

Obs. El algoritmo basado en las fórmulas precedentes (16) y (18)

$$\left.\begin{aligned} l_{kk}u_{kk} &= a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk} \\ u_{kj} &= \left(a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj} + l_{kk} \right) / l_{kk} \quad \text{para } k+1 \le j \le n \\ l_{ik} &= \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk} + l_{kk} \right) / u_{kk} \quad \text{para } k+1 \le i \le n \end{aligned}\right\} \quad 1 \le k \le n$$

se conoce como

- factorización LU de Doolittle cuando *L* es una matriz triangular inferior con 1 en la diagonal principal
- factorización LU de Crout cuando *U* es una matriz triangular superior con 1 en la diagonal principal
- factorización LU de Cholesky cuando $u_{kk} = l_{kk}$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Factorización LU general (otra manera) (cont.)

Algoritmo

Leer $A=(a_{ij}), n$

Para $k = 1$ hasta n

Especificar un valor no cero para l_{kk} o u_{kk} y calcular el otro de

$$l_{kk}u_{kk} = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk}$$

Para $j = k+1$ hasta n

$$u_{kj} = \left(a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj} \right) / l_{kk}$$

Fin para

Para $i = k+1$ hasta n

$$l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk} \right) / u_{kk}$$

Fin para

Fin para

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Factorización LU general (otra manera) (cont.)

Para resolver el sistema lineal $Ax = b$ usando la descomposición *LU* general de la matriz *A*, debemos resolver $LUx = b$, el cual lo operamos en 2 pasos (realizando el cambio $y = Ux$)

* $Ly = b$

* $Ux = y$

Algoritmo para resolver

$$LUx = b$$

Resolver *Ly=b*:

$y_1 = b_1 / l_{11}$

Para *i = 2* hasta *n*

$$y_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right) / l_{ii}$$

Fin para

Resolver *Ux=y*:

$x_n = y_n / u_{nn}$

Para i = n-1 hasta 1

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right) / u_{ii}$$

Fin para

Ejercicio: Calcular el número de operaciones básicas para resolver un sistema lineal de ecuaciones usando el método de descomposición *LU* general.