Cálculo Numérico - CO3211

Ejercicios

1. Decida cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Si una proposición es verdadera, demuéstrela, y si es falsa dé un contraejemplo:

   a) En los métodos iterativos que resuelven $Ax = b$ donde $x, b \in R^n$, $A \in R^{n\times n}$, $A = M - N$ y se genera una sucesión mediante la fórmula iterativa $x^{i+1} = M^{-1}Nx^i + M^{-1}b$, basta con que $\{x^i\}_{i=0}^{\infty} \to y$ para asegurar que la sucesión converge a la solución del problema.

   b) Un criterio de parada para los algoritmos iterativos estudiados es:
   $$0 < \left\|x^0 - x^i\right\|_2 < \epsilon.$$

   c) Si λ es un autovalor de la matriz A entonces λ^2 es un autovalor de A^2.

   d) Si $B = PAP^{-1}$ entonces las matrices A y B tienen los mismos autovalores.

   e) Sean U y V matrices ortogonales, entonces $T = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ también es ortogonal.

   f) El método de la potencia permite hallar el menor autovalor en valor absoluto de la matriz A, para el caso de que los autovalores de A son diferentes.

   g) Si λ es un autovalor de la matriz A, entonces $\lambda - \mu$ es un autovalor de $A - \mu I$.

   h) El método de la Potencia puede ser aplicado para determinar el módulo del máximo valor absoluto de la matriz
   $$T = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 \\ 4 & 6 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   i) Si λ es un autovalor de la matriz A, entonces $\lambda - \mu$ es un autovalor de $A - \mu I$.

   j) Si $P(x)$ es un polinomio de grado tres y $P(x_i) = 0$ para x_1, x_2, x_3, x_4 nodos diferentes, entonces $P(x) = 0$ para todo $x \in \Re$.

   k) Son idénticos los polinomios de Lagrange y Newton que interpolan 3 puntos diferentes. Asuma que ambos polinomios existen.

   l) ¿Es el vector $(29/21, -2/3)^T$ solución del problema siguiente?,
   $$\min \left\|(x, y)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} - (3, 0, 1)\right\|_2^2.$$

   m) La recta de ajuste por mínimos cuadrados para la tabla de datos

x	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0

   es $y + x = 4$.

2. Enumere al menos dos criterios de parada para los algoritmo iterativos que resuelven $Ax = b$.

3. Describa como funciona el método iterativo de Gauss-Seidel para resolver $Ax = b$, incluyendo las ecuaciones que se deben utilizar para hallar x^{i+1} en cada iteración.

4. Sea la sucesión $\{x_k\}$ definida por
   $$x^{k+1} = T\, x^k + c$$
   para $k \geq 0$ y c diferente del vector nulo, con
   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   ¿$\{x_k\}$ converge a la solución de $x = T\, x + c$?. Justifique la respuesta.

5. Para resolver el sistema lineal $Ax = b$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, considere el siguiente método iterativo
$$x^{k+1} = B(\theta)x^k + f(\theta)$$
donde x^0 es dado, θ es un parámetro real y
$$B(\theta) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\theta^2 + 2\theta + 1 & -2\theta^2 + 2\theta + 1 \\ -2\theta^2 + 2\theta + 1 & 2\theta^2 + 2\theta + 1 \end{pmatrix}, \quad f(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{pmatrix}.$$
   a) Verifique que el método es consistente (para el sistema dado) para cualquier $\theta \in R$.
   b) Determine los valores de θ para los cuales el método es convergente.
   c) Considere $\theta = -1/2$ y resuelva el sistema lineal.

6. Para una matriz A su espectro es el conjunto de todos sus autovalores. El espectro de una matriz está contenido en la unión de los discos D_i en el plano complejo, donde
$$D_i = \{z \in C \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\}.$$
Probar que los autovalores de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
satisfacen la desigualdad $1 \leq |\lambda| \leq 9$, sin calcularlos.

7. Pruebe que el espectro de la matriz A ($\sigma(A)$) satisface que $\sigma(A) \subseteq \{z \in C \mid |z| < 8\}$ donde
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Demuestre que $tan(x) \leq x$ para todo $x \in [-\pi/4, 0]$ usando el teorema de Taylor.

9. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$
determine cotas inferior y superior para su radio espectral (sin calcular los autovalres de A). Justifique su respuesta.

10. Pruebe que las partes imaginarias de los autovalores de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -4 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$
están en el intervalo $[-1, 1]$.

11. Sean
$$L_k(x) = \prod_{i=0,\, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}, \quad \text{para } k = 0, \ldots, n$$
los polinomios de Lagrange de grado n. Demostrar que
$$\sum_{k=0}^{n} L_k(x) = 1 \quad \text{para todo } x \in [x_0, x_n].$$

12. El polinomio $p(x) = 2 - (x+1) + x(x+1) - 2x(x+1)(x-1)$ interpola los primeros cuatro puntos de la siguiente tabla,

x	-1	0	1	2	3
y	2	1	2	-7	10

   a) ¿Qué interpolante permite hallar el polinomio que interpola toda la tabla haciendo uso sólo de $p(x)$?. Encuentrelo.

   b) Calcular el número de operaciones elementales en la construcción de este polinomio.

13. Sea $P(x)$ el único polinomio de grado a lo sumo 2 que interpola a $f(x) = sin(x)$ en los puntos $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$ y $(1, f(1))$. Dé una cota superior del error absoluto cometido al aproximar $f(x)$ mediante $P(x)$ para cualquier $x \in [-1, 1]$.

14. Si interpolamos la función $f(x) = e^{x-1}$ con un polinomio de grado 12 usando 13 nodos en $[-1, 1]$, determine una cota superior del error absoluto cometido en la interpolación.

15. Determine el polinomio interpolante de Lagrange para la tabla de datos

x	-2	0	1
y	0	1	-1

16. Sea

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Demostrar que el polinomio interpolante de grado n en x_0, ..., x_n para ω puede escribirse como

$$p(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x_k)}{(x - x_k)\ \omega'(x_k)}.$$

17. Calcule la tabla de diferencias divididas para la funcón $f(x) = 3\sin^2(\pi x/6)$, tabulada como sigue

k	0	1	2	3	4
x	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
$f(x_k)$	0.00	0.75	2.25	3.00	2.25

Calcular el número de operaciones elementales en la construcción de esta tabla.

Construya los polinomios de Newton de grados 1, 2, 3 y 4, y evalúe cada polinomio en $x = 1{,}5$ utilizando el método de Horner (evaluación anidada).

18. Si se interpola la función $f(x) = e^{x-1}$ mediante un polinomio $P(x)$ de grado ≤ 12, usando 13 puntos en el intervalo $[-1, 1]$, dé una cota superior para $|f(x) - P(x)|$ para cualquier $x \in [-1, 1]$.

19. Determine si la siguiente función f es un spline cúbico (interpolante cúbico) para una determinada función dada, donde

$$f(x) = \begin{cases} 13 - 31x + 23x^2 - 5x^3 & \text{si } x \in [1, 2] \\ -35 + 51x - 22x^2 + 3x^3 & \text{si } x \in [2, 3] \end{cases}$$

20. Dada la función

$$S(x) = \begin{cases} 2(x+1) + (x+1)^3, & x \in [-1, 0] \\ 3 + 5x + 3x^2, & x \in [0, 1] \\ 11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases},$$

determine si la misma es un spline cúbico en [-1,2]. ¿Es natural? Justifique sus respuestas.