Sistemas de Ecuaciones Lineales

Condicionamiento de sistemas

La existencia de un sistema mal condicionado es una fuente de posibles errores y dificultades a la hora de resolver un sistema lineal mediante métodos numéricos.

Problema: definir y cuantificar el condicionamiento de un sistema lineal.

Consideremos el sistema lineal

$$Ax = b \tag{1}$$

con A una matriz $n \times n$ e invertible, b un vector de dimensión n y x la solución exacta del sistema

$$x = A^{-1}b.$$

"pequeños cambios en los datos dan lugar a pequeños cambios es las respuestas"

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Condicionamiento de sistemas

- Modifiquemos el vector b mediante una perturbación δb pequeña y nos planteamos resolver el sistema

$$A\hat{x} = b + \delta b.$$

Sea $\delta x = \hat{x} - x$

El sistema esta bien condicionado

si cuando δb es pequeña, δx también lo es. (2)

Observemos

$$A\hat{x} = b + \delta b = Ax + \delta b$$

$$\Leftrightarrow A\hat{x} - Ax = \delta b \quad \Leftrightarrow \quad A(\hat{x} - x) = \delta b \quad \Leftrightarrow \quad A(\delta x) = \delta b \qquad (3)$$

es decir, δx es solución del sistema (3), $\delta x = A^{-1}(\delta b)$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Condicionamiento de sistemas (cont.)

Usando la propiedad para las normas matriciales

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}(\delta b)\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta b\| \tag{4}$$

con $x \neq 0$ y $b \neq 0$, $\quad \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \dfrac{1}{\|b\|}$ (5)

De (4) y (5)

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \, \|A\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}} \tag{6}$$

error relativo vectorial en los resultados

error relativo vectorial en los datos

De la relación (6)

parece deducirse que el número $\kappa(A) = \|A^{-1}\| \, \|A\|$

es el factor determinante en la relación, ya que si este es pequeño tenemos el efecto deseado:

si cuando δb es pequeña, δx también lo es.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Condicionamiento de sistemas (cont.)

- Caso en que las perturbaciones se produzcan en la matriz del sistema (1).

  Sea $A + \Delta A$ la matriz perturbada y $x + \Delta x$ la solución aproximada de

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b. \tag{6}$$

$$Ax + A\Delta x + (\Delta A)(x + \Delta x) = b \quad \Leftrightarrow \quad A\Delta x + (\Delta A)(x + \Delta x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\Delta A)(x + \Delta x) = -A\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x = -A^{-1}(\Delta A)(x + \Delta x)$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| \le \left\|A^{-1}\right\| \|\Delta A\| \|x + \Delta x\| \tag{7}$$

De (7)

$$\boxed{\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \le \left\|A^{-1}\right\| \|A\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.} \tag{8}$$

error relativo vectorial en los resultados

error relativo vectorial en los datos

De nuevo el factor determinante en la relación es $\kappa(A)$ ya que si este es pequeño tenemos el efecto deseado.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Condicionamiento de sistemas (cont.)

Definimos el **número de condición** de la matriz A como

$$\kappa(A) = \left\|A^{-1}\right\| \left\|A\right\|$$

Obs. El sistema lineal $Ax = b$ estará bien condicionado si $\kappa(A)$ es pequeño.

¿cuán pequeño debe ser?

$$1 = \left\|I\right\| = \left\|A^{-1}A\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \left\|A\right\| = \kappa(A) \Leftrightarrow \kappa(A) \geq 1$$

El estará bien condicionado si $\kappa(A)$ se acerca a 1

Propiedades del número de condición de una matriz

- $\kappa(A) \geq 1,$
- $\kappa(A) = \kappa(A^{-1}),$
- $\kappa(\alpha A) = \kappa(A) \quad \text{para todo} \quad \alpha \in R - \{0\}.$

- $\kappa(A)$ es infinito si *A* es singular

Demostración: se deja como ejercicio

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Condicionamiento de sistemas (cont.)

Obs. Se tiene la siguiente regla empírica:

Si $\kappa(A) = 10^k$ se espera perder al menos *k* dígitos al resolver numéricamente el sistema lineal $Ax = b$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Condicionamiento de sistemas (cont.)

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \kappa(A) = \left\|A^{-1}\right\| \left\|A\right\|$$

MATLAB

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.1667 & -0.5833 & -1.1667 \\ 0.1667 & 0.5833 & 0.1667 \\ -0.1667 & -0.0833 & -0.1667 \end{pmatrix}$$

inv(A)

$$\left\|A\right\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

$$\left\|A\right\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

$$\kappa_1(A) = \left\|A^{-1}\right\|_1 \left\|A\right\|_1 = 13.5$$

cond(A,1)

$$\kappa_2(A) = \left\|A^{-1}\right\|_2 \left\|A\right\|_2 = 10.3599$$

cond(A,2)

$$\kappa_\infty(A) = \left\|A^{-1}\right\|_\infty \left\|A\right\|_\infty = 15.3333$$

cond(A,inf)

$$\kappa_F(A) = \left\|A^{-1}\right\|_F \left\|A\right\|_F = 11.4564$$

cond(A,’fro’)

Sistemas de Ecuaciones Lineales

“pequeños cambios en los datos dan lugar a pequeños cambios es las respuestas”

Condicionamiento de sistemas (cont.)

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 7 & 8 & 7\\ 7 & 5 & 6 & 5\\ 8 & 6 & 10 & 9\\ 7 & 5 & 9 & 10\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}32\\ 23\\ 33\\ 31\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}=\begin{pmatrix}32\\ 22.9\\ 32.98\\ 31.02\end{pmatrix},\quad \tilde{x}=\begin{pmatrix}7.28\\ -9.36\\ 3.54\\ -0.5\end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|}=\frac{0.4}{119}=0.0034,$$

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|}=\frac{27.4}{4}=6.85,$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}25 & -41 & 10 & -6\\ -41 & 68 & -17 & 10\\ 10 & -17 & 5 & -3\\ -6 & 10 & -3 & 2\end{pmatrix},\quad \kappa_1(A)=4488$$

¡mal condicionado!

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Condicionamiento de sistemas (cont.)

Ejemplo: Estudiar el condicionamiento del sistema lineal Ax = b con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \ \varepsilon > 0$$

La inversa $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon - 1 \\ \varepsilon - 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \left\|A\right\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$

$$\left\|A\right\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| = 2+\varepsilon \qquad \left\|A^{-1}\right\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| = \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon^2}$$

$$\kappa_\infty(A) = \left\|A^{-1}\right\|_\infty \left\|A\right\|_\infty = \frac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} > \frac{4}{\varepsilon^2}$$

Si $\quad \varepsilon \le 0.01 \quad$ entonces $\quad \kappa_\infty(A) > 40000$

Esto indica que una perturbación de los datos de 0.01 puede originar una perturbación de la solución del sistema de 40000.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos directos

Por medio de las operaciones elementales anteriores, un sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b$$

se puede transformar a un sistema lineal (equivalente) más fácil de resolver y que tiene el mismo conjunto de soluciones.

El principio de los métodos directos que vamos a estudiar reside en determinar una matriz *M* invertible, tal que la matriz *MA* sea triangular superior. Tenemos que resolver entonces el sistema lineal

$$MAx = Mb$$

Este principio es la base del **método de Gauss** para la resolución de sistemas lineales con matrices A invertibles.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss.

El método de Gauss es un método general de resolución de un sistema lineal de la forma

$$Ax = b$$

donde *A* es una matriz invertible.

Esta basado en el siguiente hecho:
si tuviésemos una matriz triangular superior, la resolución numérica del sistema es inmediata.

Este se compone de las siguientes etapas:

- Procedimiento de eliminación, que equivale a determinar una matriz invertible *M* tal que la matriz *MA* sea una matriz triangular superior
- Cálculo del vector *Mb*
- Resolución del sistema lineal *MAx = Mb*, por el método de sustitución hacia atrás.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Matrices de permutación.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ matriz de permutación

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ intercambia las filas 1 y 2

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$ intercambia las columnas 1 y 2

COMPLETAR !!!!!!

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss. Construcción de *MA* y *Mb*

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\1&2&1&3\\1&1&-1&1\\0&1&8&12\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\2\end{pmatrix}$$

matriz ampliada $\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&2&1&1\\1&2&1&3&0\\1&1&-1&1&5\\0&1&8&12&2\end{array}\right)$

$F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&3&0\\0&1&2&1&1\\1&1&-1&1&5\\0&1&8&12&2\end{array}\right)$$

$F_3 \leftarrow -1\cdot F_1 + F_3$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&3&0\\0&1&2&1&1\\0&-1&-2&-2&5\\0&1&8&12&2\end{array}\right)$$

$F_3 \leftarrow 1\cdot F_2 + F_3$
$F_4 \leftarrow -1\cdot F_2 + F_4$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&3&0\\0&1&2&1&1\\0&0&0&-1&6\\0&0&6&11&1\end{array}\right)$$

$F_3 \leftrightarrow F_4$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&3&0\\0&1&2&1&1\\0&0&6&11&1\\0&0&0&-1&6\end{array}\right)$$

matriz triangular superior

$$MA=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&2&1\\0&0&6&11\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad Mb=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\6\end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss. Construcción de *MA* y *Mb*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_1 \leftrightarrow F_2$ $\qquad$ $F_3 \leftarrow -1 \cdot F_1 + F_3$ $\qquad$ $F_3 \leftarrow 1 \cdot F_2 + F_3$, $F_4 \leftarrow -1 \cdot F_2 + F_4$ $\qquad$ $F_3 \leftrightarrow F_4$

$$M = P_3 E_2 E_1 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En la práctica la matriz *M* no se calcula, sino que se obtiene directamente *MA* y *Mb*.

$$\det(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Lambda \text{ es par} \\ -1 & \text{si } \Lambda \text{ es inpar} \end{cases}$$

Λ Es el número de matrices de permutación P distintas a la matriz identidad

$$Ax = b \iff MAx = Mb$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss. Construcción de *MA* y *Mb* (otro ejemplo)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{pmatrix}$$

operaciones elementales sucesivas:

$$\left.\begin{array}{l} F_2 \leftarrow -2.F_1 + F_2 \\ F_3 \leftarrow -\frac{1}{2}.F_1 + F_3 \\ F_4 \leftarrow -(-1).F_1 + F_4 \end{array}\right\} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \\ -27 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss. Construcción de *MA* y *Mb* (otro ejemplo) (cont.)

$$\left.\begin{array}{l} F_3 \leftarrow -3.F_2 + F_3 \\ F_4 \leftarrow -\left(-\frac{1}{2}\right).F_2 + F_4 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$\left.F_4 \leftarrow -2.F_3 + F_4 \right\} \longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

sistema triangular superior: $MA = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad Mb = \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss. Construcción de *MA* y *Mb* (otro ejemplo) (cont.)

M es el producto de matrices elementales:

$$\left.\begin{array}{l} F_2 \leftarrow -2.F_1 + F_2 \\ F_3 \leftarrow -\frac{1}{2}.F_1 + F_3 \\ F_4 \leftarrow -(-1).F_1 + F_4 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E1 = [1 0 0 0; -2 1 0 0; -1/2 0 1 0; 1 0 0 1]

$$\left.\begin{array}{l} F_3 \leftarrow -3.F_2 + F_3 \\ F_4 \leftarrow -\left(-\frac{1}{2}\right).F_2 + F_4 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E2 = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 -3 1 0; 0 1/2 0 1]

$$\left.F_4 \leftarrow -2.F_3 + F_4 \right\} \longrightarrow \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

E3 = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 -2 1]

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss. Construcción de *MA* y *Mb* (otro ejemplo) (cont.)

M es el producto de matrices elementales:

$$M = E_3\,E_2\,E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 11/2 & -3 & 1 & 0 \\ -11 & 13/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

y se cumple que:

$$MA = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad y \quad Mb = \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Obs. Notar que la inversa de una matriz elemental E_1 y el producto de las matrices elementales E_1^{-1}, E_2^{-1} y E_3^{-1} es muy sencillo de construir

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E_1^{-1}\,E_2^{-1}\,E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Algoritmo de eliminación en el método de Gauss.

Vamos a suponer que los elementos de la diagonal (pivotes) de las matrices sucesivas que surgen durante este método, son no nulos.

Leer *A* y *b*

Para *k* = 2 hasta *n* → k-1 fila pivote

Para *i* = *k* hasta *n* → modifica filas *k* a la *n*

$$\alpha = a_{i,k-1} / a_{k-1,k-1}$$

Para *j* = *k* hasta *n* → modifica columnas *k* a la *n*

$$a_{i,j} = a_{i,j} - \alpha\, a_{k-1,j}$$

Fin para

$$b_i = b_i - \alpha\, b_{k-1}$$ → modifica el lado derecho

Fin para

Fin para

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Obs. Al finalizar sabemos que U (matriz triangular superior *MA*) va a estar almacenada en la parte triangular superior de la matriz A, incluyendo la diagonal, y que el término de la derecha (es decir, *Mb*) está almacenado en el mismo vector *b*

Ejemplo: egs_sp.m

clase 5

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Algoritmo de eliminación en el método de Gauss.

En general algunos de los elementos de la diagonal de las matrices sucesivas, pueden ser cero. Esto se solventa permutando la filas en la matriz *A*, lo cual corresponde a multiplicar *A* por una matriz elemental de permutación *P*.

Leer *A* y *b*

Para $k = 2$ hasta *n*

Buscar un índice i_0 tal que $(k-1 \leq i_0 \leq n)$ **y** $(a_{i_0,k-1} \neq 0)$

Permutar la fila *k-1* con la fila i_0

estrategia de pivoteo

Para $i = k$ hasta *n*

$$\alpha = a_{i,k-1} / a_{k-1,k-1}$$

Para $j = k$ hasta *n*

$$a_{i,j} = a_{i,j} - \alpha\, a_{k-1,j}$$

Fin para

$$b_i = b_i - \alpha\, b_{k-1}$$

Fin para

Fin para

Obs. La mejor manera de escoger i_0 es tal que

$$\left|a_{i_0,k-1}\right| \geq \left|a_{i,k-1}\right| \quad \text{para } \; k-1 \leq i \leq n$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Algoritmo de eliminación en el método de Gauss con pivoteo

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & c_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & c_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

Leer *A* y *b* en una matriz *C* = (*A* | *b*)

Para *k* = 2 hasta *n*

    i_0 = k-1
    Para i=k hasta n
        Si $\left|c_{i_0,k-1}\right| < \left|c_{i,k-1}\right|$
            i_0 = i
        Fin si
    Fin para

escoger el mejor i_0

    Para j=1 hasta n+1
        $s = c_{i_0,j};\ \ c_{i_0,j} = c_{k-1,j};\ \ c_{k-1,j} = s$
    Fin para

permutar la fila *k-1* con i_0

    Para *i* = *k* hasta *n*
        $\alpha = c_{i,k-1} / c_{k-1,k-1}$
        Para *j* = *k* hasta *n+1*
            $c_{i,j} = c_{i,j} - \alpha c_{k-1,j}$
        Fin para
    Fin para

modificar elementos de las filas *k* a la *n* y columnas *k* a la *n*+1

Fin para

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de sustitución hacia atrás.

$$MAx = Mb \qquad \text{donde} \qquad MA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Mb = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(MA) = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-1) = -6 \neq 0$$

En forma de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 6x_3 + 11x_4 = 1 \\ -x_4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 - 3x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - x_4 \\ x_3 = (1 - 11x_4)/6 \\ x_4 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 37.5 \\ -15.3333 \\ 11.1667 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Algoritmo general para resolver el sistema $U\,x = d$

$$x_n = d_n / u_{nn}$$

$$x_i = (d_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j) / u_{ii}$$

$$\text{para } i = n-1 \text{ hasta } 1$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de sustitución hacia atrás.

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales triangular superior

D:\DATA_DISCO_D\saul\USB\Matlab\programas\triang_sup.m*

File Edit Text Window Help

```
%Resuelve el sistema triangular superior Ux=b usando sustitucion hacia atras
%Entradas:  U = matriz cuadrada triangular superior,
%           b = vector de la misma dimension
%Salida:    x = vector (solucion)

U = input('matriz  ');
%disp(U);
b = input('vector  ');
%disp(b);
[n m]=size(U);
l = length(b);

if (n == m & n == l)
   for i = n:-1:1
      sum =0.;
      for j = i+1:n
         sum = sum + U(i,j)*x(j);
      end
      x(i) = (b(i) - sum)/U(i,i);
   end
   disp('vector solucion')
   disp(x);
else
   disp('matriz no es cuadrada o');
   disp('las dimensiones de la matriz y el vector columna no son compatibles');
end
```

Ready

U una matriz n×n triangular superior,

b vector de longitud n.

Resolver el sistema

$$U\,x = b$$

U = [1,2,1,3; 0,1,2,1; 0,0,6,11; 0,0,0,-1]
b = [0,1,1,6]

Algoritmo

$$x_n = b_n / u_{nn}$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j) / u_{ii}$$

para $i = n$-1 hasta 1

Ejemplo: sust_atras.m

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Estrategias de pivoteo - Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 \\ 5.291 & -6.13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{pmatrix} \qquad \text{solución} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de Gauss usando aritmética de 4 dígitos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right) \qquad \alpha = -\frac{5.291}{0.003} = -1763.66 \quad \rightarrow \quad \alpha = -1764$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right)$$

usando sustitución hacia atrás

$$x_1 = \frac{59.17 - 59.14 \cdot 1.001}{0.003} = -10.0 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

El error es grande en x_1, aunque es pequeño de 0.001 en x_2.

Este ejemplo ilustra las dificultades que pueden surgir en algunos casos cuando el elemento pivote, es pequeño en relación a los elementos de columna en la matriz.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Estrategias de pivoteo – Ejemplo (cont.)

$$\begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 \\ 5.291 & -6.13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{pmatrix} \qquad \text{solución} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La idea es seleccionar el elemento en la misma columna que está debajo de la diagonal y que tiene el mayor valor absoluto.

Permutamos las filas F_1 y F_2, ya que el pivote (0.003) es pequeño respecto a los otros elementos en la columna

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & 59.17 \end{array}\right) \qquad \alpha = -\frac{0.003}{5.291} = -0.000567$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0 & 59.14 & 59.14 \end{array}\right)$$

usando sustitución hacia atrás

$$x_1 = \frac{46.78 + 6.13 \cdot 1}{5.291} = 10.0 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Conteo de operaciones de punto flotante (+ , - , * , /) para el método de Gauss

- Triangularización del sistema

Número de sumas y restas: nop1

para k=2, n·(n-1)
para k=3, (n-1)·(n-2)
…
para k=n, 2·1

$$\sum_{k=2}^{n}(n-k+2)(n-k+1)$$

Obs.

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$nop1 = \sum_{k=2}^{n}(n-k+2)(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k+1)(n-k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^2 + (-2k+1)n + k^2 - k$$

$$= n^2(n-1) - 2\frac{(n-1)n}{2}n + n(n-1) + \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= n(n-1)[1 + \frac{1}{3}n - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}] = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$$

$$nop1 = \frac{n^3 - n}{3} \qquad (9)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Conteo de operaciones de punto flotante para el método de Gauss (cont.)

Número de multiplicaciones y divisiones: nop2
Número de multiplicaciones = nop1
Número de divisiones

$$\left.\begin{array}{l}\text{para k=2, (n-1)}\\ \text{para k=3, (n-2)}\\ \dots\\ \text{para k=n, 1}\end{array}\right\}\quad \sum_{k=2}^{n}(n-k+1)$$

$$nop2 = nop1 + \sum_{k=2}^{n}(n-k+1) = nop1 + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)$$

$$= nop1 + n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3-n}{3} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$$

$$nop2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \qquad (10)$$

De (9) y (10) el número total de operaciones: nop

$$nop = nop1 + nop2 = \frac{n^3-n}{3} + \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} = \boxed{\frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6}} \qquad (11)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Conteo de operaciones de punto flotante para el método de Gauss (cont.)

- Resolución del sistema triangular

Número de sumas y restas: nop3

$$nop3 = \sum_{i=n-1}^{1}(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n-1}(i+1) = \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1 \qquad (12)$$

Número de multiplicaciones y divisiones: nop4

$$nop4 = [\sum_{i=n-1}^{1}(n-i+1)] + 1 = [\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)] + 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \qquad (13)$$

De (12) y (13) el número total de operaciones: nop

$$nop = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \boxed{n^2 + n - 1} \qquad (14)$$

Finalmente, de (11) y (14), el método de Gauss involucra el número total de operaciones

$$\frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6} + n^2 + n - 1 = \boxed{\frac{2n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{6} - 1} \quad \rightarrow \text{O}(n^3)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Conteo de operaciones de punto flotante (+ , - , * , /)

Observaciones:

A manera de ilustración, supongamos que el sistema lineal a ser resuelto tiene dimensión 5 mil, es decir $n = 5000$. Entonces, la cantidad de operaciones de punto flotante que se requerirán para obtener una aproximación numérica de la solución de dicho sistema, es aproximadamente $n^3 = 125 \times 10^9$. Si se dispone de un computador con una capacidad de procesamiento de 200 mega flops (200 millones de operaciones de punto flotante por segundo), entonces se requerirán

$125 \times 10^9 / 200 \times 10^6 = 625$ segundos aprox. para obtener la solución. Esto equivale a un poco más de 10 minutos, lo cual es un tiempo considerable, sobre todo si se deben resolver varios sistemas de tamaño similar. Cabe destacar que este valor de *n* no es demasiado grande; de hecho, los problemas reales clásicos manejan sistemas lineales del orden de cientos de miles

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición LU.

Este consiste en encontrar una descomposición de la matriz cuadrada A invertible de la forma

$$A = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior.

Supondremos que no es necesario realizar permutaciones de las filas de A, y procedemos como en el método de Gauss cuando pasamos del sistema lineal *Ax=b* al sistema triangular superior *Ux=d*, con

$$U = E_{n-1} \cdots E_1 A$$

donde E_i es una matriz elemental, para $i=1,\ldots,n-1$.

$$E_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & e_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & e_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} E_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -e_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -e_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición LU (cont.)

Producto de matrices elementales

$$E_i^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -e_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -e_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix} \\ \text{columna i} \end{array}$$

I≠J

$$E_j^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -e_{j+1,j} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -e_{n,j} & & & 1 \end{pmatrix} \\ \text{columna j} \end{array}$$

$$\underset{i<j}{E_i^{-1}E_j^{-1}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & -e_{i+1,i} & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & \vdots & & -e_{j+1,j} & 1 & \\ & & & & \vdots & & \ddots \\ & & -e_{n,i} & & -e_{n,j} & & & 1 \end{pmatrix} \\ \text{columna i} \quad \text{columna j} \end{array}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición LU (cont.)

Se tiene entonces $E_1^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1} U = A$

Luego el producto de estas matrices elementales nos da la matriz *L* triangular inferior con 1 en la diagonal principal

$$L = E_1^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1}$$

$$L = E_1^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ -e_{2,1} & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & -e_{i+1,i} & \ddots & & & & & \\ \vdots & & & & 1 & & & & \\ & & \vdots & & -e_{j+1,j} & \ddots & & & \\ & & & & \vdots & & 1 & & \\ -e_{n,1} & & -e_{n,i} & & -e_{n,j} & & -e_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición LU (cont.)

Algoritmo para calcular *L* y *U* simultáneamente.

Al final del proceso *U* está almacenada en la parte triangular superior de *A* y *L* en la parte triangular inferior estricta de *A* (no se incluye la diagonal)

Leer *A*

Para $k = 2$ hasta n

  Para $i = k$ hasta n

    $a_{i,k-1} = a_{i,k-1} / a_{k-1,k-1}$

    Para $j = k$ hasta n

      $a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k-1} a_{k-1,j}$

    Fin para

  Fin para

Fin para

cálculo de *L*

cálculo de *U*

Ejemplo: egs_LU.m

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición LU (cont.)

Luego para resolver el sistema $Ax = b$ debemos resolver $LUx = b$ el cual lo operamos en 2 pasos (realizando el cambio $y = Ux$)

* $Ly = b$
* $Ux = y$

Algoritmo para resolver

$LUx = b$

$x_1 = b_1$

Para $i = 2$ hasta n

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j$$

Fin para

Resolver *Ly=b*

$x_n = x_n / a_{nn}$

Para i = n-1 hasta 1

$$x_i = \left(x_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right) / a_{ii}$$

Fin para

Resolver *Ux=y*

Obs. En este algoritmo se esta usando la matriz $A = (a_{ij})$ que sale del método de descomposición *LU* basado en Gauss, mostrado en la lamina anterior.

Ejercicio: Calcular el número de operaciones elementales para resolver un sistema lineal de ecuaciones usando el método de descomposición *LU*.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición LU (cont.)

Condición necesaria y suficiente para que una matriz admita una descomposición *LU*.

Teorema:

Sea $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ una matriz invertible. Denotemos por A_{pp} la submatriz de A siguiente

$$A_{pp} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le p}, \;\; 1 \le p \le n$$

El $\det(A_{pp}) \ne 0, \;\; 1 \le p \le n$ si y sólo si la matriz A admite una descomposición *LU*.

Ejercicio. Usando el teorema anterior, ¿qué puede decir de las matrices siguientes?

$$A = \begin{pmatrix} 0. & 2. \\ 3. & 1. \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0. & 1. \\ 0. & 2. \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de descomposición LU (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 0. & 2. \\ 3. & 1. \end{pmatrix}$$

A es invertible, det(*A*) = -6.

$$\det(A_{11}) = 0, \quad \det(A_{22}) = -6$$

descomposición LU para A

$$L = \begin{pmatrix} 1. & 0. \\ 0. & 1. \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3. & 1. \\ 0. & 2. \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0. & 1. \\ 1. & 0. \end{pmatrix}$$

$$A = PLU$$

$$A = \begin{pmatrix} 0. & 1. \\ 0. & 2. \end{pmatrix}$$

A no es invertible, det(*A*) = 0.

$$\det(A_{11}) = 0, \quad \det(A_{22}) = 0$$

descomposición LU para A

$$L = \begin{pmatrix} 1. & 0. \\ 0. & 1. \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0. & 1. \\ 0. & 2. \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición:

Una matriz A de orden $n \times n$ es **diagonal dominante estricta** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n$$

Consecuencia:

1. Si A es diagonal dominante estricta entonces todas la matrices equivalentes obtenidas en el método de Gauss, también son diagonal dominante estrictas. En este caso no se requiere pivoteo para el método de Gauss.
2. Si A es diagonal dominante estricta entonces A es invertible
3. Si A es diagonal dominante estricta entonces A admite una descomposición LU.

Definición:

Una matriz A de orden $n \times n$ es **definida positiva** si

$$x^T A x > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in R^n - \{0\}$$

Consecuencia:

- Si A es simétrica, entonces A es definida positiva si y sólo si existe una matriz L invertible triangular inferior tal que $A = L\,L^T$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo:

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

es diagonal dominante estricta, ya que $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad 1 \le i \le n$

$$|7| > |2| + |0|$$

$$|5| > |3| + |-1|$$

$$|-6| > |0| + |5|$$

Es interesante notar sin embargo que A^T no es diagonal dominante estricta

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|7| > |3| + |0|$$

$$\boxed{|5| < |2| + |5|}$$

$$|-6| > |0| + |-1|$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo:

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

es positiva definida, ya que $x^T Ax > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in R^n - \{0\}$

$$x^T Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2$$

Finalmente $\quad x^T Ax = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$

a menos que $\quad x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Escalamiento de una matriz

Supongamos que se quiere resolver el sistema lineal con matriz ampliada (usando aritmética de 4 dígitos)

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 2\cdot 10^{-5} & 1 & 1 \\ 1\cdot 10^{-5} & 1\cdot 10^{-5} & 2\cdot 10^{-5} \end{array}\right) \quad \text{con solución} \quad x = \begin{pmatrix} 1.00002 \\ 0.99998 \end{pmatrix}$$

- Aplicando el método de Gauss sin y con pivoteo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2\cdot 10^{-5} & 1 & 1 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{error del 100\%}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Escalamiento de una matriz (cont.)

- Multiplicando la F_2 de A_1 por 10^5

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 2\cdot10^{-5} & 1 & 1 \\ 1\cdot10^{-5} & 1\cdot10^{-5} & 2\cdot10^{-5} \end{array}\right)$$

$$A_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 2\cdot10^{-5} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

aplicando el método de Gauss con y sin pivoteo

Gauss sin pivoteo $\left(\begin{array}{cc|c} 2\cdot10^{-5} & 1 & 1 \\ 0 & -0.5\cdot10^{5} & -0.5\cdot10^{5} \end{array}\right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ error del 100%

Gauss con pivoteo $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ solución aceptable

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Escalamiento de una matriz (cont.)

- Multiplicando todo el sistema por 10^5 se obtiene

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 2\cdot 10^{-5} & 1 & 1 \\ 1\cdot 10^{-5} & 1\cdot 10^{-5} & 2\cdot 10^{-5} \end{array}\right)$$

$$A_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1\cdot 10^{5} & 1\cdot 10^{5} \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

aplicando el método de Gauss con y sin pivoteo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 10^{5} & 10^{5} \\ 0 & -0.5\cdot 10^{5} & -0.5\cdot 10^{5} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

error del 100%

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Escalamiento de una matriz (cont.)

Obs. La diferencia esencial entre A_1, A_2 y A_3 es que

$$|\det(A_1)| \approx 10^{-5} \qquad A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 2\cdot 10^{-5} & 1 & 1 \\ 1\cdot 10^{-5} & 1\cdot 10^{-5} & 2\cdot 10^{-5} \end{array}\right)$$

$$|\det(A_2)| \approx 1 \qquad \text{donde} \qquad A_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 2\cdot 10^{-5} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|\det(A_3)| \approx 10^{5} \qquad A_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1\cdot 10^{5} & 1\cdot 10^{5} \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Para resolver el sistema $Ax = b$, el **método de escalamiento** consiste en reemplazar la matriz A por la matriz D_1AD_2, con D_1 y D_2 matrices diagonales invertibles para obtener el sistema equivalente

$$D_1AD_2(D_2^{-1}x) = D_1b \qquad (*)$$

con $|\det(D_1AD_2)| \approx 1$

El sistema (*) es equivalente al sistema
$$\begin{cases} D_1AD_2y = D_1b \\ x = (D_2y) \end{cases}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Escalamiento de una matriz (cont.)

Obs.

- La escogencia de D_1 y D_2 matrices diagonales corresponde únicamente a una razón de facilidad en los cálculos
- Usualmente se utilizan las cantidades

$$d_{1_i} = (\max_{1\le j\le n} |a_{ij}|)^{-1}$$ i-ésimo elemento de la diagonal de la matriz D_1

(máximo sobre la fila i)

$$d_{2_i} = (\max_{1\le j\le n} |a_{ji}|)^{-1}$$ i-ésimo elemento de la diagonal de la matriz D_2

(máximo sobre la columna i)

- Normalmente se utiliza escalamiento por filas, es decir se toma D_2 igual a la matriz identidad

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Escalamiento de una matriz (cont.)

Ejemplo. Queremos resolver el sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2\cdot 10^{-5} & 1 \\ 1\cdot 10^{-5} & 1\cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^5 \end{pmatrix}$ Calculada usando $d_{1_i} = (\max_{1\le j\le n} |a_{ij}|)^{-1}$

$D_1 A = \begin{pmatrix} 2\cdot 10^{-5} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Corresponde con la matriz A_2 anterior donde $|\det(D_1 A)| \approx 1$

Finalmente resolvemos usando eliminación gausiana con pivote $D_1 A x = D_1 b \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Obs. Esta estrategia de escalamiento puede ser incorporada al algoritmo de Gauss con pivoteo, lo cual lo hace más robusto. En ese caso, se escala cada fila de la matriz de coeficientes usando los elementos de la diagonal de D_1.