UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DEPARTAMENTO DE CÓMPUTO
CIENTÍFICO Y ESTADÍSTICA
Cálculo Numérico CO-3211

LABORATORIO 3

Condicionamiento. Eliminación Gaussiana.

1. Se tiene un sistema lineal $Ax = b$ donde la matriz de coeficientes $A = (a_{ij}), \quad i, j = 1,2,\ldots,n$, está definida como

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \text{ para } i, j = 1,2,\ldots,n \tag{1}$$

y el vector del lado derecho $b = (b_i)$, para $i = 1,2,\ldots,n$, se obtiene multiplicando la matriz de coeficientes por A por un vector de n componentes todas iguales a 1. A la matriz A definida en (1) se le conoce como *matriz de Hilbert.*

a) Suponga que n = 25 y verifique si la matriz A es invertible.

b) Calcule A x A $^{-1}$ y compare con la matriz identidad. (Calcule $\|A \times A^{-1}\text{-}I\|_\infty$).

c) Calcule det(A) x det(A $^{-1}$), ¿Qué obtuvo? ¿Era lo esperado?.

d) Calcule el número de condición de la matriz *A* usando norma infinito.

e) Calcule la solución del sistema $Ax = b$ usando el método de eliminación Gaussiana sin pivoteo programado por Ud en Matlab.

f) Calcule la solución del sistema $Ax = b$ (en Matlab x=A\b).

g) Genere un vector w de unos de tamaño 25 y calcule $\|b - Aw\|_\infty$ y $\|x - w\|_\infty$ para las soluciones encontradas en los incisos e) y f). De esto y todo lo anterior ¿Qué puede concluir?.

2. Considere el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} \varepsilon x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned} \qquad (4)$$

donde $\varepsilon = 10^{-k}$ y k un parámetro que toma los valores
$k = 5.01, 5.02, 5.03, \ldots, 14.99, 15$.

Dada la solución exacta $x = (x_1, x_2)^T$ del sistema lineal (4) en términos de ε.

(a) Escriba un *script* en Matlab en el cual se resuelva este sistema lineal para los valores de ε indicados, usando el método de eliminación Gaussiana sin pivoteo programado por Ud. en Matlab.

(b) Se define la función error como $error(k) = \| x_{spiv} - x \|_2$ donde x_{spiv} es la solución del sistema lineal (4) obtenida mediante eliminación Gaussiana sin pivoteo y x es la solución exacta de dicho sistema. Observe que esta función le asocia a cada valor del parámetro k, el valor del error $\| x_{spiv} - x \|_2$ en la norma euclidiana de $\mathbb{R}^2$, esto es, para cada valor del parámetro k se obtiene el correspondiente valor de ε según la fórmula $\varepsilon = 10^{-k}$, se forma el sistema lineal (4) usando este valor de ε y se resuelve el mismo numéricamente mediante el método de eliminación Gaussiana sin pivoteo, lo cual nos da un vector x_{spiv} con el cual se calcula el error en norma 2. La solución exacta, necesaria para calcular el error, se obtuvo en la parte (a) de este ejercicio. Escriba un *script* en Matlab que grafique la función $error(k)$ que se acaba de definir. Use la opción de marcar los puntos de la gráfica con un símbolo y un color (use asterisco y rojo). Describa y analice lo que se observa en el gráfico.