Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Dado el sistema lineal $Ax = b,$ se propone el método iterativo

$$Mx^{(i+1)} = (M - A)x^{(i)} + b \tag{8}$$

donde M es una matriz invertible.

Teorema 1. Si $\delta = \left\| I - M^{-1}A \right\| < 1,$ entonces la sucesión producida por el método (8) converge a la solución de $Ax = b,$ para cualquier vector inicial $x^{(0)}$.

Prueba:

Sea *x* solución de $Ax = b.$ Entonces *x* también es solución de

$$x = (I - M^{-1}A)\,x + M^{-1}b. \tag{9}$$

Ahora la iteración (8) es equivalente

$$x^{(k)} = (I - M^{-1}A)\,x^{(k-1)} + M^{-1}b. \tag{10}$$

Restando (9) de (10) obtenemos

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Prueba (cont.):

$$x^{(k)} - x = (I - M^{-1}A)(x^{(k-1)} - x).$$

de donde se tiene

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \leq \left\| (I - M^{-1}A) \right\| \left\| (x^{(k-1)} - x) \right\| = \delta \left\| (x^{(k-1)} - x) \right\| \tag{11}$$

Aplicando esta desigualdad en forma recursiva, resulta

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \leq \delta \left\| (x^{(k-1)} - x) \right\| \leq \delta^2 \left\| (x^{(k-2)} - x) \right\| \leq \cdots \leq \delta^k \left\| (x^{(0)} - x) \right\| \tag{12}$$

para cualquier índice natural *k*. Tomando límite cuando $k \to \infty$ nos queda

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \left\| x^{(k)} - x \right\| \leq \lim_{k\to\infty} \delta^k \left\| (x^{(0)} - x) \right\| = 0$$

ya que $0 < \delta < 1$

Así, la sucesión del método iterativo converge a la solución *x* del sistema lineal $Ax = b$.

☑

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Lema 1. Si $\delta = \left\| I - M^{-1}A \right\| < 1$, entonces la sucesión producida por el método (8) cumple:

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \leq \frac{\delta}{1-\delta} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|$$

Prueba: Como *x* es solución de $Ax = b$, también es solución de

$$x = (I - M^{-1}A)x + M^{-1}b.$$

Ahora la iteración (8) es equivalente

$$x^{(k)} = (I - M^{-1}A)x^{(k-1)} + M^{-1}b.$$

Restando las ultimas ecuaciones se obtiene

$$x^{(k)} - x = (I - M^{-1}A)(x^{(k-1)} - x).$$

Así, tomando norma sigue

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \leq \left\| (I - M^{-1}A) \right\| \left\| (x^{(k-1)} - x) \right\| = \delta \left\| (x^{(k-1)} - x) \right\| \qquad (13)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Prueba (cont.)

Pero

$$\left\|x^{(k-1)} - x\right\| = \left\|x^{(k-1)} - x^{(k)} + x^{(k)} - x\right\| \leq \left\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\right\| + \left\|x^{(k)} - x\right\|,$$

usando (13)

$$\left\|x^{(k-1)} - x\right\| \leq \left\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\right\| + \delta\left\|x^{(k-1)} - x\right\|$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\delta)\left\|x^{(k-1)} - x\right\| \leq \left\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\right\|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\|x^{(k-1)} - x\right\| \leq \frac{1}{(1-\delta)}\left\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\right\|. \tag{14}$$

De (13) y (14)

$$\left\|x^{(k)} - x\right\| \leq \frac{\delta}{1-\delta}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$$

☑

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Teorema 2.

- Si A es diagonal dominante, entonces la sucesión producida por la iteración de Jacobi

$$x^{(i+1)} = D^{-1}(E+F)x^{(i)} + D^{-1}b$$

converge a la solución de $Ax = b$ para cualquier vector inicial $x^{(0)}$.

- Si A es diagonal dominante, entonces la sucesión producida por la iteración de Gauss-Seidel

$$x^{(i+1)} = (D-E)^{-1}F\,x^{(i)} + (D-E)^{-1}b$$

converge a la solución de $Ax = b$ para cualquier vector inicial $x^{(0)}$.

Obs. Para una matriz arbitraria *A*, la convergencia de uno de estos métodos no implica la convergencia del otro.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Prueba. Caso iteración de Jacobi.

Primero $$\left\| D^{-1}(E+F) \right\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \left| a_{ij} / a_{ii} \right|$$

porque para la matriz de $D^{-1}(E+F)$ se tiene

- elementos no diagonal $-a_{ij}/a_{ii}$
- elementos diagonal 0

$$D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -\frac{a_{n-1\,n}}{a_{n-1\,n-1}} \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{n\,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

Del hecho de que A es diagonal dominante se tiene

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{para } 1 \le i \le n \iff \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}/a_{ii}| < 1 \quad \text{para } 1 \le i \le n.$$

Entonces $$\left\| D^{-1}(E+F) \right\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \left| a_{ij} / a_{ii} \right| < 1$$

$$\iff \left\| I - M^{-1}A \right\|_\infty = \left\| M^{-1}N \right\|_\infty < 1$$

y usando el teorema 1, se tiene que la iteración de Jacobi usando cualquier vector inicial $x^{(0)}$ converge a la solución del sistema $Ax = b.$ ☑

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Teorema 3. Consideremos el método iterativo

$$x^{(i+1)} = Hx^{(i)} + c \qquad \text{con} \quad H = M^{-1}N \quad \text{y} \quad c = M^{-1}b.$$

el cual salió de descomponer *A = M-N*.

Para cualquier $x^{(0)} \in R^n$ el método iterativo converge si y sólo si $\rho(H) < 1$, (radio espectral de *H* es menor que 1).

Corolario. Si $\|H\| < 1$ entonces $x^{(i)}$ converge a *x* solución de *Ax=b*.

Prueba. Se deja como ejercicio.

Cotas de Error.

a) $\|x^{(i)} - x\| \leq \|H\|^i \|x^{(0)} - x\|,$

b) $\|x^{(i)} - x\| \leq \dfrac{\|H\|^i}{1 - \|H\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \quad \text{si} \ \|H\| < 1$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Obs.

La desigualdad en a) coincide con la ecuación (12) de la prueba del Teorema 1. Por lo tanto, la demostración de dicha desigualdad es exactamente igual a la deducción de la ecuación (12).

Obs.

En la desigualdad a), si se parte del vector inicial nulo, se obtiene una cota superior del error relativo de aproximar *x* por $x^{(i)}$:

$$\frac{\left\| x^{(i)} - x \right\|}{\left\| x \right\|} \leq \left\| H \right\|^{i}$$

Esto permite calcular aproximadamente el número de iteraciones necesarias para alcanzar una tolerancia dada.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Prueba de b) $\|x^{(i)} - x\| \le \dfrac{\|H\|^i}{1 - \|H\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \quad \text{si } \|H\| < 1$

Como $\|H\| < 1$

$$\|x^{(0)} - x\| = \|x^{(0)} - x^{(1)} + x^{(1)} - x\| \le \|x^{(0)} - x^{(1)}\| + \|x^{(1)} - x\|$$

Usando la desigualdad (a)

$$\|x^{(0)} - x\| \le \|x^{(0)} - x^{(1)}\| + \|H\| \|x^{(0)} - x\|$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \|H\|) \|x^{(0)} - x\| \le \|x^{(0)} - x^{(1)}\|$$

$$\Rightarrow \quad \|x^{(0)} - x\| \le \frac{1}{(1 - \|H\|)} \|x^{(0)} - x^{(1)}\|$$

Combinando con la desigualdad (a)

$$\|x^{(i)} - x\| \le \|H\|^i \|x^{(0)} - x\| \le \frac{\|H\|^i}{(1 - \|H\|)} \|x^{(0)} - x^{(1)}\| \quad ☑$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Obs.

En la desigualdad b) se obtiene una cota superior del error absoluto de aproximar *x* por $x^{(i)}$:

$$\left\| x^{(i)} - x \right\| \leq \frac{\left\| H \right\|^{i}}{1 - \left\| H \right\|} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|$$

Esto permite calcular aproximadamente el número de iteraciones necesarias para alcanzar una tolerancia dada, para lo cual se debe calcular el iterado $x^{(1)}$.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Comparación de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

Teorema 4. Si A es diagonal dominante, entonces para cualquier vector inicial $x^{(0)} \in R^n$, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen a la solución de $Ax = b,$ y además se tiene

$$\| H_{GS} \|_{\infty} \leq \| H_J \|_{\infty} < 1$$

donde $H_{GS} = (D - E)^{-1} F$ y $H_J = D^{-1}(E + F)$ para $A = D - E - F$.

Teorema 5. Si $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$ y $a_{ii} > 0$ si $1 \leq i \leq n,$ entonces se satisface una y solamente una de las condiciones siguientes

a) $0 < \rho(\mathrm{H_{GS}}) < \rho(H_J) < 1$

b) $1 < \rho(\mathrm{H_J}) < \rho(H_{GS})$

c) $\rho(\mathrm{H_{GS}}) = \rho(H_J) = 1$

d) $\rho(\mathrm{H_{GS}}) = \rho(H_J) = 0$

Obs. O ambos métodos convergen o ambos divergen, y cuando convergen, Gauss-Seidel es más rápido de Jacobi, para este tipo de matrices.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Teorema 6. Para $0 < \omega < 2,$ si A es simétrica y definida positiva entonces el método de Relajación Sucesiva converge para cualquier $x^{(0)} \in R^n$

Obs. El teorema 6 incluye al método de Gauss-Seidel ya que el método de Relajación Sucesiva coincide con Gauss-Seidel cuando $\omega = 1$

Obs. El reciproco del teorema 6 no es cierto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rho(H_{SOR}) = 0.8 < 1$ para $\omega = 0.2$

el método de relajación sucesiva converge.

Se puede demostrar que A es definida positiva.

A no es simétrica.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Obs. Si se agregan las condiciones A simétrica y $a_{ii} > 0$ para cada $i = 1,2,\ldots,n$ manteniendo $0 < \omega < 2,$ entonces el reciproco del teorema 6 es cierto.

Es decir, bajo las hipótesis anteriores, partiendo de la convergencia del SOR para cualquier x_0, se demuestra que A es definida positiva.

Obs. Aunque *A* sea simétrica y definida positiva, el método de Jacobi puede ser divergente.

Teorema 7. Si $a_{ii} \neq 0$ para cada $i = 1,2,\ldots,n$ entonces $\rho(H_{SOR}) \geq |\omega - 1|$

Así, la única manera de que $\rho(H_{SOR}) < 1$ es que $0 < \omega < 2$.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos - Resultados de convergencia

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 2 & -20 \end{pmatrix}$$

diagonal dominante (uso teorema 2)
Jacobi converge

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 100 \\ 2 & -20 \end{pmatrix} \qquad \rho(H_J) > 1$$

no diagonal dominante
Jacobi diverge
(teorema 3)

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 100 \\ 1 & -20 \end{pmatrix} \qquad \rho(H_J) < 1$$

no diagonal dominante
Jacobi converge
(teorema 3)

$$H_J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos – Ejemplo de comparación

Para $s \in R$, considere la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s & s \\ s & 1 & s \\ s & s & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculos con MATLAB:

```
M = sym('[1 s s; s 1 s; s s 1]')
determ = det(M)
pc = poly(M)
factores = factor(pc)
```

Los valores propios de *A* son: 1 - *s* (con multiplicidad 2) y 1 + 2*s*.

La matriz *A* es definida positiva cuando $s \in [-0.5, 1]$ y diagonal dominante estricta para $s \in [-0.5, 0.5]$

Resolviendo el sistema $Ax = b$ para diferentes valores de *s*, usando los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel con $b = (1,1,1)^t$, $x^{(0)} = (0.5,0.5,0.5)^t$, y $n = 500$

Para ambos métodos se implementó el criterio de detención visto en clase, con una tolerancia de 10^{-8},

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| < tol$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos – Ejemplo de comparación

- Para s = 0.3, la matriz A es positiva definida y diagonal dominante.

  Jacobi itera 35 veces y Gauss-Seidel 11 veces.

  Ambos métodos entregan como solución $x = (0.6250, 0.6250, 0.6250)^t$ que es la solución exacta. El radio espectral de H_J es 0.60 y H_{GS} es 0.1643 (ambos menores que 1).

- Para s = 0.6, la matriz A es positiva definida, pero no es diagonal dominante.

  Jacobi no converge después de 500 iteraciones y Gauss-Seidel si converge en 22 iteraciones.

  Gauss-Seidel entrega como solución $x = (0.45455, 0.45455, 0.45455)^t$ que es la solución exacta. El radio espectral de H_J es 1.20 y H_{GS} es 0.4648.

- Para s = 1.01, la matriz A no es positiva definida ni diagonal dominante.

  Jacobi y Gauss-Seidel no convergen después de 500 iteraciones.

  La solución exacta es $x = (0.3125, 0.3125, 0.3125)$. El radio espectral de H_J es 2.20 y H_{GS} es 1.1537 (ambos mayores que 1).