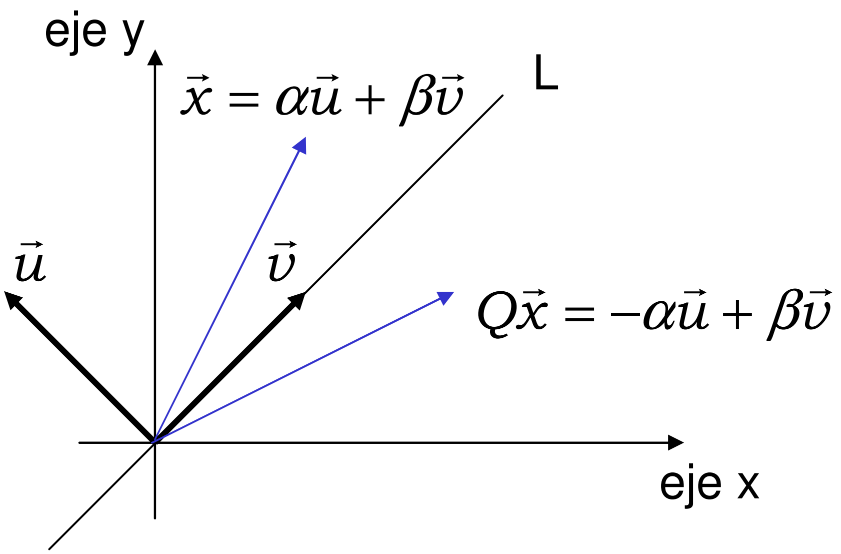
Sistemas de Ecuaciones Lineales

Descomposición QR de una matriz

Sea L una recta en *R*^{2} que pasa por el origen. El operador *Q* que refleja todo vector de *R*^{2} a través de la recta L es una transformación lineal, la cual puede ser representada por una matriz.



$\vec{u}$ y $\vec{v} \in R^2$ con $\|\vec{u}\| = 1$,

$\vec{v}$ el vector dirección de la recta *L*

y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ perpendiculares.

$\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v} \Leftrightarrow u^t v = 0$

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un base de *R*^{2}

así, si $\vec{x} \in R^2 \Rightarrow \vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

La reflexión de $\vec{x}$ a través de la recta L es $-\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

La reflexión de $\vec{u}$ a través de la recta L es $-\vec{u}$

La reflexión de $\vec{v}$ a través de la recta L es $\vec{v}$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Descomposición QR de una matriz (cont.)

Podemos construir la matriz $P = \vec{u}\,\vec{u}^t \in R^{2x2}$

Se verifica:

$$P\vec{u} = \left(\vec{u}\,\vec{u}^t\right)\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{u}^t\,\vec{u}\right) = \vec{u}\left\|\vec{u}\right\|^2 = \vec{u}$$

$$P\vec{v} = \left(\vec{u}\,\vec{u}^t\right)\vec{v} = \vec{u}\left(\vec{u}^t\,\vec{v}\right) = \vec{u}\,0 = \vec{0}$$

Construimos la matriz $Q = I - 2P = I - 2\vec{u}\,\vec{u}^t \in R^{2x2}$

Se verifica:

$$Q\vec{u} = \vec{u} - 2P\vec{u} = \vec{u} - 2\vec{u} = -\vec{u}$$

$$Q\vec{v} = \vec{v} - 2P\vec{v} = \vec{v}$$

Para $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in R^2$ se tiene

$$Q\vec{x} = Q\left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right) = \alpha Q\left(\vec{u}\right) + \beta Q\left(\vec{v}\right) = -\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Q es la matriz que refleja vectores a través de la recta *L*.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Descomposición QR de una matriz (cont.)

En resumen para

$$\vec{u} \in R^n, \|\vec{u}\| = 1, P = \vec{u}\,\vec{u}^t \in R^{nxn}, Q = I - 2P \in R^{nxn}$$

se tiene

1) $P\vec{u} = \vec{u}, \quad P\vec{v} = \vec{0} \text{ si } \vec{u}^t\,\vec{v} = 0, \quad P^2 = P, \quad P^t = P \text{ (simétrica)}$

2) $Q\vec{u} = -\vec{u}, \quad Q\vec{v} = \vec{v} \text{ si } \vec{u}^t\,\vec{v} = 0, \quad Q^2 = I,$

$Q = Q^t \text{ (simétrica)}, \quad Q^{-1} = Q^t \text{ (ortogonal)}$

Definición. Si $\vec{u} \in R^n, \|\vec{u}\| = 1, Q = I - 2\vec{u}\,\vec{u}^t$
entonces *Q* se denomina un **reflector o transformación de Householder**.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Descomposición QR de una matriz (cont.)

Teorema 1. Si $\vec{u} \in R^n, \vec{u} \neq \vec{0}, \gamma = 2/\|\vec{u}\|_2^2, Q = I - \gamma \vec{u}\vec{u}^t$ entonces Q es un reflector o transformación de Householder.

Teorema 2. Si $\vec{x}$ e $\vec{y} \in R^n, \vec{x} \neq \vec{y}, \|\vec{x}\|_2 = \|\vec{y}\|_2,$ entonces existe un reflector o transformación de Householder *Q*, tal que $Q\vec{x} = \vec{y}.$

Teorema 3. Reflectores pueden ser usados para crear ceros en vectores y matrices, es decir, para

$$\vec{x} \in R^n, \vec{x} \neq \vec{0}, \sigma = \pm\|\vec{x}\|, \vec{y} = (-\sigma, 0, \ldots, 0)^t,$$

existe un reflector *Q* tal que $Q\vec{x} = \vec{y}.$

Teorema 4. Sea $A \in R^{n \times n},$ esta puede ser expresada como $A = QR$ donde *Q* es ortogonal y *R* triangular superior.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Descomposición QR de una matriz (cont.)

Ejemplo. Encontrar la descomposición *QR* para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$Q = \begin{pmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1.4142 & -3.5355 \\ 0 & 0.7071 \end{pmatrix}$$

$$Q * Q^T = Q^T * Q = I$$

R es triangular superior

En Matlab:
[Q,R] = qr(A)

Ejemplo. Si B=hilb(5), determinar det(B), cond(B) y las descomposiciones LU y QR de B, si esto es posible.

Obs.

- Toda matriz *n*×*n* tiene descomposición QR. Lo mismo no puede decirse para la existencia de su descomposición LU.
- Dada la descopmposición A=QR, resolver Ax=b se reduce a resolver Rx=Qb (probarlo). Esto se lleva a cabo usando sustitución hacia atrás.
- El costo de aplicar la descomposición QR es “alto” (este requiere el doble del número de operaciones elementales del método de descomposición LU).

clase 10

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos (métodos estacionarios)

Dado un sistema lineal $Ax = b$ (1)

Def. Se denomina **método iterativo de resolución** a aquel que genera una sucesión de vectores $x^{(i)}$ (i = 0,1,2,…) a partir de un vector dado $x^{(0)}$.
Forma de los métodos considerados $x^{(i+1)} = B\, x^{(i)} + c$. (2)

Def. Se dice que un método iterativo de resolución (2) es **consistente** con el sistema (1) si $x = B\, x + c$, donde x es la solución de (1).

Def. Se dice que un método iterativo de resolución del sistema (1) es **convergente** si para todo vector inicial $x^{(0)}$ se verifica:

$$\lim_{i \to \infty} x^{(i)} = x = A^{-1} b.$$

Obs. Los conceptos de consistencia y de convergencia deben distinguirse. Todo método convergente es consistente, pero no todo método consistente debe ser necesariamente convergente.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos

Ejemplo. Sea el método iterativo $x^{(i+1)} = 3x^{(i)} - 2A^{-1}b.$

Es evidente que el método es consistente con (1).

Para $x = A^{-1}b$ se tiene $x^{(i+1)} - x = 3x^{(i)} - 2A^{-1}b - x = 3(x^{(i)} - x),$

en consecuencia, el limite de la sucesión x(i), si existe, debe ser x (ya que si fuese otro vector z diferente de x, se debería verificar que

$$z - x = 3(z - x)$$

lo cual es un absurdo).

No obstante es evidente que $\lim_{i \to \infty} x^{(i)} \neq x,$ salvo para el caso $x^{(0)} = x$ (ya que para cualquier otro vector $x^{(0)}$ distinto de x, el vector diferencia entre $x^{(i+1)}$ y x es 3 veces el vector diferencia entre $x^{(i)}$ y x, lo que indica que dicho vector diferencia aumenta con i en vez de tender hacia 0 como ocurriría si convergiese la sucesión hacía el único límite posible que acabamos de indicar que es x).

Por lo tanto el método no es convergente.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos

Los métodos iterativos que vamos a considerar consisten en descomponer la matriz *A* de la forma

$$A = M - N, \tag{2}$$

donde *A*, *M*, *N* son matrices $n \times n$.

Reemplazando (2) en (1) se obtiene

$$(M - N)x = b \quad \Rightarrow \quad Mx = Nx + b.$$

Ahora, supongamos que M es invertible, entonces

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$$

Se propone el método iterativo siguiente

$$\boxed{\begin{array}{c} x^{(i+1)} = Hx^{(i)} + c \\ \text{con} \quad H = M^{-1}N \quad \text{y} \quad c = M^{-1}b. \end{array}} \tag{3}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos iterativos

Obs. Si la sucesión $\{x^{(i)}\}$ definida en (3) converge a un vector *y*, entonces *y* es la solución de (1) (el método es consistente con (1)). Prueba.

Dado que (3) es cierto para todos los índices *i*, se puede tomar límite a ambos lados de dicha ecuación, lo cual nos dice que:

$$\lim_{i\to\infty} x^{(i+1)} = \lim_{i\to\infty} (Hx^{(i)} + c)$$

Como $\lim_{i\to\infty} x^{(i+1)} = \lim_{i\to\infty} x^{(i)}$ (es la misma sucesión) se tiene que:

$$\lim_{i\to\infty} x^{(i+1)} = H\left(\lim_{i\to\infty} x^{(i)}\right) + c \quad \Rightarrow \quad y = Hy + c$$

$$\Rightarrow \quad y = M^{-1}Ny + M^{-1}b \quad \Rightarrow \quad My = Ny + b$$

$$\Rightarrow \quad (M - N)y = b \quad \Rightarrow \quad Ay = b$$

☑

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Richardson

Sea A es una matriz invertible, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ resolver $Ax = b.$

Sea $M = I, \quad N = M - A = I - A$

Así, la iteración (3) se escribe como

$$x^{(i+1)} = (I - A)x^{(i)} + b = x^{(i)} + b - Ax^{(i)}$$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + r^{(i)} \tag{4}$$

donde $r^{(i)} = b - Ax^{(i)}$ es el vector residual.

Obs. Para detener el proceso iterativo se pueden utilizar los siguientes criterios:

a) cuando el número de iteraciones alcanza un número máximo

b) dado ε, cuando $\left\| x^{(i+1)} - x^{(i)} \right\| < \varepsilon$ o $\left\| b - Ax^{(i)} \right\| < \varepsilon$

(ε es la tolerancia)

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Richardson (cont.)

Algoritmo de Richardson

```
Leer $A=(a_{ij})$, $b$, $n$, $x$, $\varepsilon$, $maxit$
Para k = 1 hasta $maxit$
    Para i = 1 hasta n
        $r_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$
    Fin para
    $norma\_r = abs(r_1)$
    Para $i = 2$ hasta $n$
        $s = abs(r_i)$
        Si $s > norma\_r$ entonces
            $norma\_r = s$
        Fin si
    Fin para
    Si $norma\_r < \varepsilon$
        break
    Fin si
    Para $i = 1$ hasta $n$
        $x_i = x_i + r_i$
    Fin para
Fin para
```

construcción del vector residual

cálculo de la norma inf del vector residual

detener si la norma del vector residual es menor que ε

nueva aproximación

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo: Iteración de Richardson $x^{(i+1)} = (I - A)x^{(i)} + b$

Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{18} \\ \frac{11}{18} \\ \frac{11}{18} \end{pmatrix}$$

A = [1,1/2,1/3; 1/3,1,1/2; 1/2,1/3,1]
b = [11/18; 11/18; 11/18]

usando $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇒

$$\begin{cases} x^1 = (0.611 \quad 0.611 \quad 0.611)^T \\ \dots \\ x^{10} = (0.279 \quad 0.279 \quad 0.279)^T \\ \dots \\ x^{40} = (0.333 \quad 0.333 \quad 0.333)^T \end{cases}$$

Notar que $I - A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|I - A\|_\infty = \frac{5}{6} < 1$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Jacobi

Sea A es una matriz invertible, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ se quiere resolver $Ax = b$.

Sea $A = D - E - F$

$$E = (e_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad \text{con} \qquad e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \le j \\ -a_{ij} & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

- triángulo inferior de A
(sin la diagonal principal)

$$F = (f_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad \text{con} \qquad f_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \ge j \\ -a_{ij} & \text{si} \quad i < j \end{cases}$$

- triángulo superior de A
(sin la diagonal principal)

$$D = (d_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad \text{con} \qquad d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \ne j \\ a_{ij} & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

diagonal principal de A

Supongamos que los elementos de a_{ii}, $i=1,\dots,n$ son no nulos.

Definimos $M=D$ y $N=E+F$.

Así, se tiene el método iterativo

$$x^{(i+1)} = \underbrace{\boxed{D^{-1}(E+F)}}_{H} x^{(i)} + \underbrace{\boxed{D^{-1}b}}_{c} \qquad (5)$$

Obs. Para detener el proceso iterativo se procede igual que en el método de Richardson.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Jacobi (cont.)

construcción de c

construcción de H

```
Leer $A=( a_{ij} ), b, n, xi, \varepsilon$
Para $i = 1$ hasta $n$
    $b_i = b_i / a_{ii}$
Fin para
Para $i = 2$ hasta $n-1$
    Para $j = 1$ hasta $i-1$
        $a_{ij} = -a_{ij} / a_{ii}$
    Fin para
    Para $j = i+1$ hasta $n$
        $a_{ij} = -a_{ij} / a_{ii}$
    Fin para
Fin para
Para $j = 2$ hasta $n$
    $a_{1j} = -a_{1j} / a_{11}$
    $a_{n,j-1} = -a_{n,j-1} / a_{nn}$
Fin para
$vecdif = 5$
```

cálculo de $x^{(i+1)}$ a partir de $x^{(i)}$

```
Mientras $vecdif > \varepsilon$
    Para $i = 2$ hasta $n-1$
        $s = 0$
        Para $j = 1$ hasta $i-1$
            $s = s + a_{ij} * xi_j$
        Fin para
        Para $j = i+1$ hasta $n$
            $s = s + a_{ij} * xi_i$
        Fin para
        $x_i = s + b_i$
    Fin para
    $s = 0$; $ss = 0$
    Para $j = 2$ hasta $n$
        $s = s + a_{1j} * xi_j$
        $ss = ss + a_{n,j-1} * xi_{j-1}$
    Fin para
```

cálculo de la norma inf de $x^{(i+1)} - x^{(i)}$

```
    $x_1 = s + b_1$
    $x_n = ss + b_n$
    $vecdif = abs(x_1 - xi_1)$
    Para $i = 2$ hasta $n$
        $s = abs(x_i - xi_i)$
        Si $s > vecdif$
            $vecdif = s$
        Fin si
    Fin para
Fin mientras
```

Obs.

- No se detiene el algoritmo por número máximo de iteraciones.
- No se cuenta el número de iteraciones realizadas

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Jacobi (cont.)

El algoritmo del método de Jacobi, mostrado en la lámina anterior, se puede simplificar de la siguiente manera:

Partiendo de la ecuación (5) $x^{(i+1)} = D^{-1}(E+F)x^{(i)} + D^{-1}b$ se tiene que:

$$D\,x^{(i+1)} = (E+F)x^{(i)} + b$$

La fila *j*-ésima de este sistema es:

$$a_{jj}\,x_j^{(i+1)} = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} a_{jk}\,x_k^{(i)} + b_j \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

de donde

$$x_j^{(i+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left[b_j - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} a_{jk}\,x_k^{(i)} \right] \quad , \quad (j=1,2,\ldots,n).$$

siempre que $a_{jj} \neq 0, \text{ para } j=1,2,\ldots,n.$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Jacobi (cont.)

Con esta última ecuación se puede escribir el algoritmo del método de Jacobi como se muestra a continuación:

```
Leer $A=( a_{ij} ), b, n, x, \varepsilon, maxit$
Para k = 1 hasta maxit
    Para j = 1 hasta n
        suma = 0
        Para k = 1 hasta n
            Si  $k \neq j$ entonces
                suma = suma + a(j,k) $*$ x(k)
            Fin si
        Fin para
        z(j) = (b(j) – suma) / a(j,j)
    Fin para
    Si  abs (z - x) < $\varepsilon$
        return
    Fin si
    x = z
Fin para
```

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss-Seidel

Sea A es una matriz invertible, $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ se quiere resolver $Ax = b.$

Sea $A = D - E - F,$ con *D*, *E*, *F* como en el método de Jacobi, para el método iterativo(3) se toma

M = D - E y *N = F*

y se tiene el método de Gauss-Seidel

$$(D-E)x^{(i+1)} = Fx^{(i)} + b \;\;\Leftrightarrow\;\; x^{(i+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(i)} + (D-E)^{-1}b \qquad (6)$$

el cual, representado en forma matricial es

$$\underset{D\text{-}E}{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1^{(i+1)} \\ \vdots \\ \\ x_n^{(i+1)} \end{pmatrix} = \underset{F}{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ \vdots \\ \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss-Seidel

En (6) no hay porque invertir la matriz *D-E*, se procede como en el método de sustitución hacia delante, es decir

$$x_1^{(i+1)} = (-\sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(i)} + b_1) / a_{11}$$

$$x_2^{(i+1)} = (-a_{21} x_1^{(i+1)} - \sum_{j=3}^{n} a_{2j} x_j^{(i)} + b_2) / a_{22}$$

$$\ldots$$

$$x_{n-1}^{(i+1)} = (-\sum_{j=1}^{n-2} a_{n-1,j} x_j^{(i+1)} - a_{n-1,n} x_n^{(i)} + b_{n-1}) / a_{n-1,n-1}$$

$$x_n^{(i+1)} = (-\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(i+1)} + b_n) / a_{nn}$$

Obs. Notemos que esto corresponde a aprovechar en el paso *k*, los valores $x_j^{(i+1)}, j = 1, \ldots, k-1$ ya calculados.

Ejercicio. Escribir el algoritmo de Gauss-Seidel utilizando el criterio de parada (b) ($\left\| x^{(i+1)} - x^{(i)} \right\| < \varepsilon$) y usando la iteración $(D - E)x^{(i+1)} = Fx^{(i)} + b.$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos de Relajación Sucesiva (SOR: successive over relaxation)

Se quiere resolver el sistema $Ax = b,$ con A invertible, *A = D-E-F*, siendo *D* la diagonal de *A*, *-E* el triángulo inferior y *-F* el triángulo superior.

Si ω > 0, se tiene

$$\omega Ax = \omega b \quad \Leftrightarrow \quad \{-\omega E + \omega D - \omega F\}x = \omega b$$

sumando y restando *D*

$$\Leftrightarrow \quad \{D - \omega E - (1-\omega)D - \omega F\}x = \omega b$$

$$\Leftrightarrow \quad \{D - \omega E\}x = \{\omega F + (1-\omega)D\}x + \omega b.$$

Se propone la iteración

$$\underbrace{\{D - \omega E\}}_{\text{M}}x^{(i+1)} = \underbrace{\{\omega F + (1-\omega)D\}}_{\text{N}}x^{(i)} + \omega b \tag{7}$$

$$Mx^{(i+1)} = Nx^{(i)} + \omega b \tag{7a}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos de Relajación Sucesiva (cont.)

Debemos tener *M* invertible y no se impone ninguna condición sobre *N*.

$$\boxed{Mx^{(i+1)} = Nx^{(i)} + \omega b}$$

$$M = D - \omega E = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \omega a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \omega a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

D

-ωE

$$N = \omega F + (1-\omega)D = \begin{pmatrix} (1-\omega)a_{11} & -\omega a_{12} & \cdots & -\omega a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & (1-\omega)a_{nn} \end{pmatrix}$$

ωF

(1-ω)D

El nuevo vector iterado se calcula como en el método de Gauss-Seidel, usando (7A), donde no hace falta calcular la inversa de *M=D-ωE*.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos de Relajación Sucesiva (cont.)

Obs. Según la escogencia de ω el método recibe los nombres de:

- Si $0 < \omega < 1$ se denomina de sub-relajación
- Si $\omega > 1$ se denomina de sobre-relajación

Obs.

- La iteración (7) se conoce como SOR hacia delante: se tomó

$$M = D - \omega E \quad \text{y} \quad N = \omega F + (1-\omega)D.$$

- Si tomamos en (7a)

$$M = D - \omega F \quad \text{y} \quad N = \omega E + (1-\omega)D$$

  el método se denomina SOR hacia atrás.

Ejercicio. Escribir el algoritmo SOR hacia delante utilizando el criterio de parada (b) ($\left\| x^{(i+1)} - x^{(i)} \right\| < \varepsilon$).

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Comparación de métodos iterativos

$$Ax = b$$

$$A = D - E - F = M - N,$$

$$x^{(i+1)} = Hx^{(i)} + c$$

$$\text{con} \quad H = M^{-1}N \quad \text{y} \quad c = M^{-1}b.$$

$$Mx^{(i+1)} = Nx^{(i)} + b$$

Nombre del método	Jacobi	Gauss-Seidel	SOR
Descomposición *A=M-N*	$A = D - (E + F)$	$A = (D - E) - F$	$A = \left(\frac{D}{\omega} - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right)$
Matriz *H=M⁻¹N=I-M⁻¹A* método iterativo	$D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$	$(D - E)^{-1} F$	$\left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right)$
Descripción de una iteración	$Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$	$(D - E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$	$(D - \omega E)x^{(k+1)}$ $= ((1 - \omega)D + \omega F)x^{(k)} + \omega b$