Sistemas de Ecuaciones Lineales

Matrices, vectores y escalares:

- Una **matriz** *A* de dimensión $m \times n$ es un arreglo rectangular de números de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

  Se escribe $A \in R^{m \times n}$. Si $m = n$, tal que *A* es cuadrada, se dice que *A* es de orden *n*.

- Los números a_{ij} se denominan los elementos de la matriz *A*. Por convención el índice *i*, denominado índice de filas, indica la fila en la cual el elemento está. El otro índice, *j*, llamado índice de columnas, indica la columna en la cual el elemento está.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Matrices, vectores y escalares (cont.):

- Un **vector** *x* de dimensión *n* es un arreglo de la forma

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_j)$$

  Se escribe $x \in R^n$. Los números x_j se denominan las componentes de *x*.

- Por convención todos los vectores son vectores columnas, sus componentes forman una columna. Objetos como $(x_1 \;\; x_2 \cdots \;\; x_n)$ cuyos componentes forman una fila, se denominan vectores filas. Escribiremos los vectores filas como x^T, la transpuesta de *x*.
- No haremos distinción alguna entre $R^{n \times 1}$ y R^n, una matriz de dimensión $n \times 1$ y un vector de dimensión *n*. De igual manera será lo mismo el conjunto de todos los números reales *R*, también denominados **escalares** y el conjunto de los vectores de dimensión 1 y las matrices de dimensión 1×1.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones con matrices:

- Multiplicación de una matriz *A* por un escalar μ

$$\mu A = \mu (a_{ij}) = (\mu a_{ij})$$

- Suma de matrices *A* y *B* de igual dimensión

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

- Matriz nula es la que cuyos elementos son todos ceros, se denota por *0*

$$A + 0 = 0 + A = A$$

- Producto de matrices: sea *A* una matriz $l \times m$ y *B* una matriz $m \times n$, el producto de *A* y *B* es

$$AB = (a_{ik})(b_{kj}) = (\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj})$$

  Notar que para que el producto de *A* y *B* este definido, el número de columnas de *A* debe ser igual al número de filas de *B*.

  Un caso particular es el producto matriz-vector

$$Ax = (a_{ik})(b_k) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_k)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones con matrices (cont.):

- **Matriz identidad** I_n de orden *n*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Si A es una matriz *mxn*, es fácil verificar que $I_m\, A = A\, I_n$. Cuando en el contexto es claro el orden de la matriz identidad, se omite el índice de esta.

- **Matriz diagonal**: Una matriz *D* es diagonal si todos sus elementos que están fuera de la diagonal son nulos, es decir

$$d_{ij} = 0 \quad \text{siempre y cuando} \quad i \neq j$$

  Escribiremos $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, donde los $d_1, d_2, \cdots, d_n$ son los elementos de la diagonal de D.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones con matrices (cont.):

- En muchas ocasiones es útil escribir el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
b_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
b_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}
$$

  en forma abreviada como $b = Ax$, donde *A* es una matriz cuadrada de orden *n*, y *b* y *x* son vectores de dimensión *n*.

- Además, se tiene que la suma y producto de matrices son asociativos

$$(A+B)+C = A+(B+C) \quad \text{y} \quad (A\,B)\,C = A\,(B\,C),$$

  el producto es distributivo respecto a la suma

$$A\,(B+C) = A\,B + A\,C,$$

  la suma de matrices es conmutativa

$$A+B = B+A,$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones con matrices (cont.):

El producto de matrices no es conmutativo, en general se tiene

$$A\,B \neq B\,A,$$

cuando estos producto están bien definidos.

- **Transpuesta de una matriz**: si A es una matriz de dimensión $m \times n$, se define la matriz transpuesta de A como

$$\text{si}\ \ A = (a_{ij}),\ \ \text{entonces}\ \ A^t = (a_{ji})$$

La transpuesta es la matriz que se obtiene reflejando la matriz a través de la diagonal principal.

Obs. Sean las matrices A $m \times p$ y B $p \times n$, entonces $(AB)^t = B^t A^t$.

- Si x e y son vectores de dimensión n, entonces

$$y^t x = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

es un escalar denominado el **producto interno** de x e y.

Como resultado inmediato se tiene que $x^t x = x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n \geq 0$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones con matrices (cont.):

- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**

Si x e y son vectores de dimensión n, entonces se verifica que

$$\left|y^t x\right|^2 \leq \left(x^t x\right)\left(y^t y\right)$$

Prueba.

Sean x e y son vectores de dimensión n y λ un escalar cualquiera.
La desigualdad es trivial en el caso $y = 0$. Así suponemos que $y \neq 0$, entonces

$$0 \leq (x - \lambda y)^t (x - \lambda y) = x^t x - \lambda y^t x - \lambda x^t y + \lambda^2 y^t y$$

$$0 \leq x^t x - 2\lambda y^t x + \lambda^2 y^t y$$

Tomando $\lambda = \left(y^t x\right)\left(y^t y\right)^{-1}$ se obtiene

$$0 \leq x^t x - 2\lambda y^t x + \lambda^2 y^t y = x^t x - \left(y^t x\right)^2 \left(y^t y\right)^{-1}$$

De donde

$$\left|y^t x\right|^2 \leq \left(x^t x\right)\left(y^t y\right)$$

☑

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones con matrices (cont.):

- **Matrices triangular superior e inferior**:

  si A es una matriz cuadrada de dimensión n,

  $A = (a_{ij})$ se denomina triangular superior si $a_{ij} = 0$ para los $i > j$.

  $A = (a_{ij})$ se denomina triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para los $i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

triangular superior — triangular inferior

Sean A y B matrices cuadradas de dimensión n.
Si A y B son matrices triangular superior, ¿qué se puede decir del producto de A y B?

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones con matrices (cont.):

- **Matrices por bloque**:

  Usualmente es útil particionar matrices como una colección de submatrices. Por ejemplo

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ \hdashline 6 & 5 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ \hdashline -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Para el producto de las matrices podemos proceder como

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

siempre y cuando los productos con las submatrices tengan sentido.

Si ahora particionamos B como

$$B = \left(\begin{array}{c:ccc} 2 & -1 & 7 & 0 \\ \hdashline 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

¿el resultado anterior para *AB* sigue siendo válido?

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones con matrices (cont.):

- **Matrices por bloque**:

  Para la traspuesta de una matriz por bloques podemos proceder como

$$A=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ \hdashline 6 & 5 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & 5 \\ \hdashline -1 & -3 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11}{}^t & A_{21}{}^t \\ A_{12}{}^t & A_{22}{}^t \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} U^t & 0 \\ 0 & V^t \end{pmatrix}$$

matrices nula

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones con matrices (cont.):

- **Radio espectral de una matriz**:

  si A es una matriz real de dimensión $n \times n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de A, se define el radio espectral de A como

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} \{|\lambda_i|\}.$$

El espectro de A es el conjunto $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ de los autovalores de A.

Sea λ un escalar (real o complejo), si la ecuación $A\,x = \lambda x$, tiene una solución no trivial (esto es, $x \neq 0$), entonces λ es un autovalor de A.

Un vector no cero x que satisfaga la ecuación anterior, es el autovector de A correspondiente al autovalor λ.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

-2 es un autovalor de la matriz 3×3 dada, y el vector $(1,3,-4)^T$ es el autovector correspondiente.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones con matrices (cont.):

- **Rango de una matriz.**

  si *A* es una matriz real de dimensión *nxn*, el rango de A es la dimensión del espacio generado por los vectores columnas de *A*.

  Este se denota como rank(*A*).

  La matriz A se denomina de rango completo cuando rank(*A*) = n

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Norma de vectores y matrices:

- Sobre los elementos de R^n, el espacio de los vectores de dimensión *n*, definimos una norma como una función || . || de R^n en R^+ que cumple

$$\|x\| \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in R^n$$

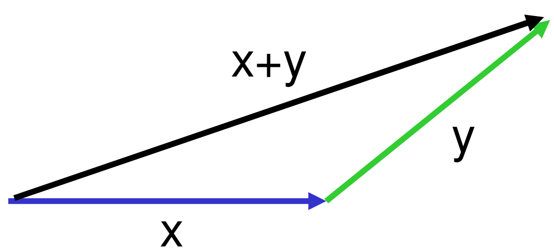
$$\|x\| = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x = (0, \cdots 0) = 0$$

$$\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\| \quad \text{para todo} \quad \alpha \in R \quad \text{y} \quad x \in R^n$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{para todo} \quad x, y \in R^n$$

La última propiedad se conoce como desigualdad triangular.

La norma de *x* se puede pensar como la longitud o magnitud del vector *x*.



$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Norma de vectores y matrices:

Ejemplo:

La función de R^n en R^+ definida a partir del producto interno de vectores

$$\|x\| = \sqrt{x^t x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

es una norma.

Verifiquemos que se cumple la desigualdad triangular.

$$\|x+y\|^2 = (x+y)^t (x+y) = \|x\|^2 + y^t x + x^t y + \|y\|^2$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schawrz se tiene

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Tomando raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad sigue

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

☑

Se deja como ejercicio verificar las otras propiedades.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Norma de vectores y matrices (cont.):

Definimos 3 normas vectoriales en R^n

- La norma euclidea o norma l_2

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

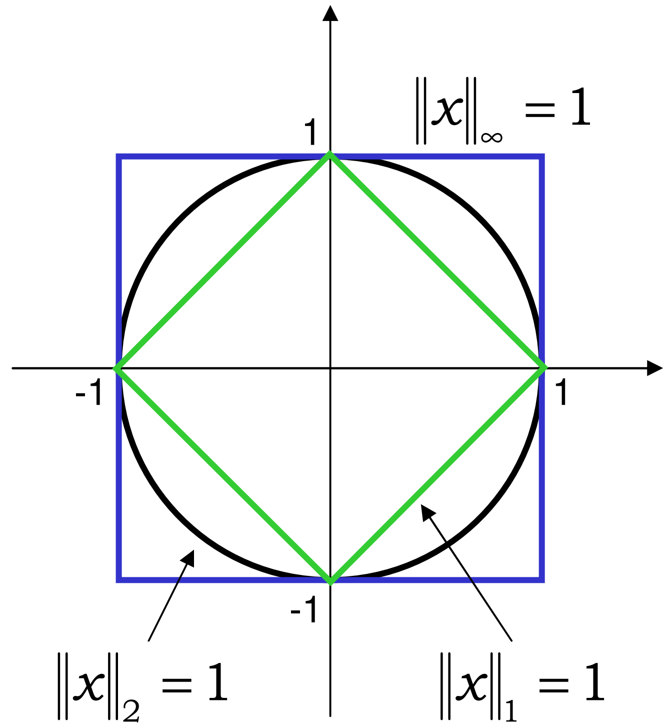
- La norma l_1

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- La norma l_∞

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

Ejemplo: conjunto de puntos en R^2 con norma igual a 1



Ejemplo: $x = (1,-1,3)$

$$\|x\|_1 = |1| + |-1| + |3| = 5,\ \ \|x\|_2 = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11},\ \ \|x\|_\infty = \max\{1,1,3\} = 3$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Norma de vectores y matrices (cont.)

- Dos normas vectoriales son equivalentes || . || y || . ||' si existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$c_1\|x\|' \leq \|x\| \leq c_2\|x\|' \text{ para todo } x \in R^n$$

En la práctica esto significa que cuando || . ||' está acotada, también || . || y viceversa.

- Una norma matricial es una aplicación

$$\|\!|\cdot|\!\| : M_n \to R^+ \cup \{0\}$$

que verifica las siguientes propiedades

$$\|\!|A|\!\| = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad A = 0$$

$$\|\!|\lambda A|\!\| = |\lambda|\,\|\!|A|\!\| \quad \text{para todo} \quad \lambda \in R,\ A \in M_n$$

$$\|\!|A+B|\!\| \leq \|\!|A|\!\| + \|\!|B|\!\| \quad \text{para todo} \quad A, B \in M_n$$

$$\|\!|A \cdot B|\!\| \leq \|\!|A|\!\|\,\|\!|B|\!\| \quad \text{para todo} \quad A, B \in M_n$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Norma de vectores y matrices (cont.)

- Sea || . || una norma en R^n, se define la norma matricial

$$\|\cdot\| : M_n \to R^+ \cup \{0\}$$

como

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Cuando una norma matricial se define de la forma anterior (a través de una norma vectorial), se dice que es una norma matricial subordinada a la norma vectorial. Tenemos los siguiente ejemplos:

$$\|A\|_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \qquad \|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Norma de vectores y matrices (cont.)

- Algunas propiedades de las normas matriciales subordinadas (demostrarlo)
  - $\|Ax\| \leq \|\|A\|\| \, \|x\|$ para todo $A \in M_n, x \in R^n$
  - Existe un vector $x \in R^n$ para el cual se da la igualdad, es decir,

$$\|Ax\| = \|\|A\|\| \, \|x\|$$

  - Para *I* la matriz identidad $\|\|I\|\| = 1$
  - $\rho(A) \leq \|\|A\|\|$ para todo $A \in M_n$
- Normas matriciales subordinadas a las normas vectoriales 1, 2 y ∞
  - $\|\|A\|\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
  - $\|\|A\|\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)} = \sqrt{\rho(A A^*)} = \|\|A^*\|\|_2$

    $\rho(A^* A)$ es el radio espectral de $A^* A$
  - $\|\|A\|\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

  Las normas 1 e ∞ se calculan a partir de los elementos de la matriz, la norma 2 no. Es inmediato que $\|\|A^T\|\|_\infty = \|\|A\|\|_1$.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Norma de vectores y matrices (cont.)

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATLAB

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{2,3,9\} = 9$$

norm(A,1)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{8,4,2\} = 8$$

norm(A,inf)

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 1 & 5 & 4 \\ -7 & 4 & 53 \end{pmatrix}$$

Autovalores: $\begin{cases} 0.5054 \\ 5.2530 \\ 54.2416 \end{cases}$

eig(A' * A)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)} = 7.3649$$

norm(A,2)

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Norma de vectores y matrices (cont.)

- Norma de Frobenius

Es una norma matricial no subordinada a ninguna norma vectorial. Esta dada por

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Se calcula a partir de los elementos de la matriz.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATLAB

norm(A,’fro’)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{1+49+4+4+1+1} = \sqrt{60} = 7.7460$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

El objetivo que perseguimos es resolver numéricamente el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b$$

donde A es la matriz de los coeficientes del sistema, b es el lado derecho del sistema (o término independiente) y x es el vector de incógnitas o de valores que deseamos hallar.

Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ y } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

- **Métodos directos**: proporcionan la solución exacta (salvo errores de redondeo) en un número finito de pasos.
  - Eliminación Gaussiana
  - Sustitución hacia atrás
  - Descomposición LU
  - Sustitución hacia adelante
  - Doolitle, Crout, Cholesky
- **Métodos iterativos**: proporcionan una sucesión $\{x_k\}$ que converge a la solución exacta
  - Richardson
  - Jacobi
  - Gauss Seidel
  - Relajación

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Teorema. Para una matriz *A* de dimensión $n \times n$, las siguientes propiedades son equivalentes:

i. La inversa de *A* existe, es decir A es no singular
ii. El determinante de *A* es no cero
iii. Las filas de *A* forman una base de R^n
iv. Las columnas de *A* forman una base de R^n
v. *A* como una transformación de R^n en R^n es inyectiva
vi. *A* como una transformación de R^n en R^n es sobreyectiva
vii. La ecuación $Ax = 0$ implica $x = 0$
viii. Para cada $b \in R^n$, existe un solo $x \in R^n$ tal que $Ax = b$
ix. *A* es el producto de matrices elementales
x. *0* no es un autovalor de *A*

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes

Definición. Los sistemas

$$Ax = b \quad \text{y} \quad Bx = d$$

cada uno con n ecuaciones y n incógnitas se denominan **sistemas equivalentes** si tienen exactamente la misma solución.

Obs. En muchos casos en lugar de resolver un sistema de ecuaciones lineales, resolveremos un sistema equivalente.

En este caso es importante el no perder o agregar soluciones.

Esta simple idea es el corazón de los procedimientos numéricos.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones elementales por filas sobre matrices

Están permitidas las operaciones elementales siguientes:

* $\mathit{fila}\ \ i \leftrightarrow \mathit{fila}\ \ j$ intercambio de 2 filas

* $\mathit{fila}\ \ i \leftarrow \lambda\ \mathit{fila}\ \ i \quad (\lambda\ \text{ ctte} \neq 0)$ multiplicación de una fila por un número distinto de cero

* $\mathit{fila}\ \ i \leftarrow \mathit{fila}\ \ i + \lambda\ \mathit{fila}\ \ j \quad (\lambda\ \text{ ctte} \neq 0)$ suma de una fila a un múltiplo de otra

Teorema. Si un sistema de ecuaciones

$$Bx = d$$

se obtiene a partir de otro

$$Ax = b$$

mediante una sucesión de operaciones elementales, entonces los 2 sistemas son equivalentes.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Operaciones elementales por filas sobre matrices

matrices elementales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \leftarrow -1 \cdot F_1 + F_2 \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad E_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \leftarrow -2 \cdot F_1 + F_3 \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 E_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \leftarrow -2 \cdot F_2 + F_1 \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 E_2 E_1 I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \leftarrow -3 \cdot F_3 + F_1 \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 E_3 E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_4 E_3 E_2 E_1 I = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz inversa de *A*