Aproximación de Funciones

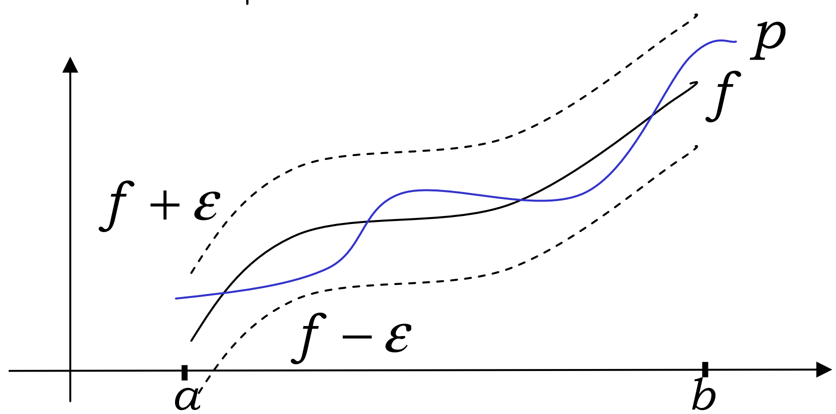
La clase de los polinomios reales es el conjunto de funciones de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Teorema de aproximación de Weierstrass

Si f es una función $[a,b] \subset R \to R$ y continua en $[a,b]$, dado $\varepsilon > 0$, existe un polinomio p, definido en $[a,b]$, con la propiedad de que

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x \in [a,b].$$



Aspectos importantes para considerar la clase de polinomios en la aproximación de funciones:

- es sencillo determinar la derivada
- es sencillo determinar la integral indefinida

En ambos casos el resultado sigue siendo un polinomio.

Aproximación de Funciones

Polinomio de Taylor

Consideremos el problema de encontrar un polinomio de grado especifico que este “cerca” de una función dada, alrededor de un punto.

Un polinomio *p* coincidirá con una función *f* en el punto x_0 cuando

$$p(x_0) = f(x_0).$$

El polinomio tendrá la misma “dirección” que la función *f* en $(x_0, f(x_0))$ si

$$p'(x_0) = f'(x_0).$$

El polinomio de grado n que mejor aproxime a la función *f* cerca de x_0, tendrá tantas derivadas en x_0, como sea posible que coinciden con las de *f*.

Esta es precisamente la condición que satisface el polinomio de Taylor de grado *n* para la función *f* en x_0:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

el cual tiene un término de error $p_n(x) - f(x) = R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$,

para algún número $\xi(x)$ entre x_0 y x.

Aproximación de Funciones

Polinomio de Taylor

Ejemplo:

El polinomio de Taylor de grado 3 alrededor de $x_0=0$ para $f(x)=(1+x)^{1/2}$

$$p_3(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

Si queremos aproximar

$$\sqrt{1.1}=f(0.1)\approx p_3(0.1)=1+\frac{1}{2}0.1-\frac{1}{8}(0.1)^2+\frac{1}{16}(0.1)^3=1.0488125$$

donde el error

$$|R_3(0.1)|=\left|f^{(4)}(\xi)\right|\frac{(0.1)^4}{4!}=\left|-\frac{15}{16}(1+\xi)^{-7/2}\right|\frac{(0.1)^4}{24}$$

$$\leq\frac{15}{16\cdot 24}(0.1)^4\max_{\xi\in[0,0.1]}(1+\xi)^{-7/2}\leq 3.91\times 10^{-6}$$

Aproximación de Funciones

Polinomio de Taylor

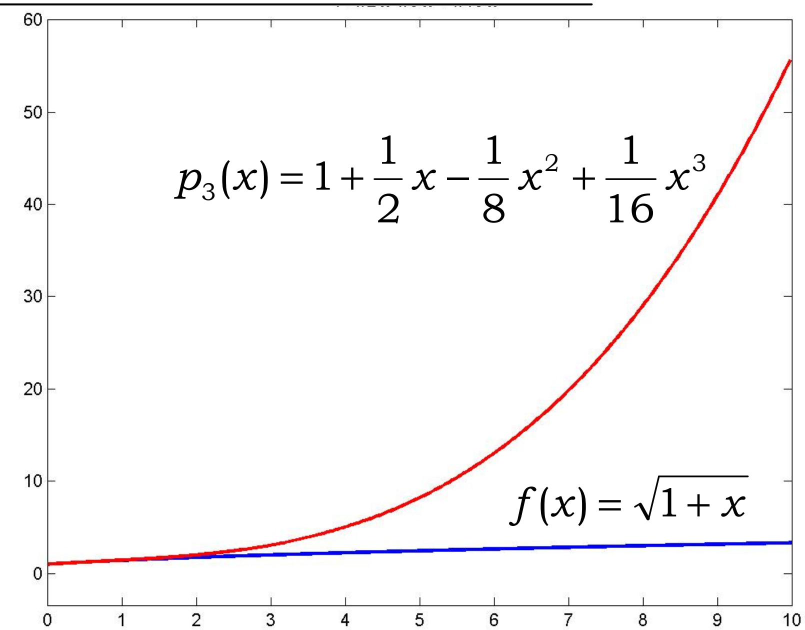
Ejemplo (cont.)**:**

x	0.1	0.5	1	2	10
$p_3(x)$	1.048813	1.2266	1.438	2.00	56.00
$f(x)$	1.048809	1.2247	1.414	1.73	3.32
$\lvert p_3(x)-f(x)\rvert$	0.000004	0.0019	0.024	0.27	52.68

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

La razón para que esta técnica de aproximación falle es que el término del error crece en valor absoluto conforme *n* crece.

Esto resulta de que $x=10$ no está lo suficientemente cerca de $x_0=0$.



Aproximación de Funciones

Función "taylor"

Calcula el desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto dado, para una función simbólica dada. Por defecto el polinomio es de grado 5 y alrededor del cero.

Polinomio de Taylor de grado *n* alrededor del punto x_0 :

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

el cual tiene un término de error $p_n(x) - f(x) = R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$,

para algún número $\xi(x)$ entre x_0 y x.

El polinomio de Taylor de grado 3 alrededor de $x_0=0$ para $f(x)=(1+x)^{1/2}$

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

>> taylor(sqrt(1+x), 8, 0) $\rightarrow$

1+1/2*x-1/8*x^2+1/16*x^3-5/128*x^4+7/256*x^5-21/1024*x^6+33/2048*x^7

Aproximación de Funciones

Función “taylor” (cont.)

```
>> syms x;
>> taylor(exp(-x), 6, 0)        retorna
        ans = 1-x+1/2*x^2-1/6*x^3+1/24*x^4-1/120*x^5

>> taylor(log(x), 6, 1)    retorna   (grado 5 y alrededor del 1)
        ans = x-1-1/2*(x-1)^2+1/3*(x-1)^3-1/4*(x-1)^4+1/5*(x-1)^5

>> taylor(sin(x), 8, pi/2)     retorna   (grado 7 y alrededor de pi/2)
        ans = 1-1/2*(x-1/2*pi)^2+1/24*(x-1/2*pi)^4-1/720*(x-1/2*pi)^6

>> syms t;
>> taylor(x^t, 3, t)    retorna
       (grado 2, respecto a la variable t y alrededor de 0)
        ans = 1+log(x)*t+1/2*log(x)^2*t^2
```

Aproximación de Funciones

Polinomio de Taylor

Ejemplo: Aproximar ln2 con un error absoluto menor que 10^{-8}.

Sea $f(x)$ = ln$x$ definida en [1,2]. Así, $f(x) \in C^{\infty}[1,2]$.

Por el teorema de Taylor, se tiene:

$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$, para cualquier $x \in [1,2]$ y cualquier $n \in N$,

donde

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \quad \text{y} \quad R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

con $x_0 = 1$ y $1 < \xi < x$ (polinomio de Taylor alrededor de $x_0 = 1$)

Se tiene $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\, x^{-k}, \quad k \geq 1 \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$

de donde

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n\, n!\, \xi^{-(n+1)}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\xi}\right)^{n+1}(x-1)^{n+1}$$

Aproximación de Funciones

Polinomio de Taylor

Ejemplo (cont.): Aproximar ln2 con un error absoluto menor que 10^{-8}.

$$f(2) = p_n(2) + R_n(2) \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = f(2) \approx p_n(2) \quad \text{para } n \text{ grande}$$

$$|R_n(2)| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\xi}\right)^{n+1}(2-1)^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\xi}\right)^{n+1} \quad \text{con } 1 < \xi$$

sigue $\quad \frac{1}{\xi} < 1 \quad \Rightarrow \quad |R_n(2)| < \frac{1}{n+1}$

Si se quiere $|R_n(2)| < 10^{-8}$, basta que $\frac{1}{n+1} < 10^{-8} \quad \Rightarrow \quad n > 10^8 - 1$

(100 millones de términos del polinomio de Taylor)

Usando el polinomio de Taylor alrededor de $x_0 = 3/2$, se tiene

$$|R_n(2)| = \left|\frac{(-1)^n\, n!\, \xi^{-(n+1)}}{(n+1)!}(2-\frac{3}{2})^{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\xi}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}$$

Si se quiere $|R_n(2)| < 10^{-8}$, basta que $\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-8} \quad \Rightarrow \quad n \approx 11$

(aprox. 11 términos del polinomio de Taylor)

Aproximación de Funciones

Interpolación polinómica

Hemos usado polinomios aproximantes que coincidan con una función dada y con algunas de sus derivadas en un único punto.

Estos polinomios son útiles sobre intervalos pequeños para funciones cuyas derivadas existen y son fáciles de calcular, pero obviamente éste no es siempre el caso.

De aquí, el polinomio de Taylor es frecuentemente de poca utilidad, y se deben buscar métodos alternativos de aproximación.

Aproximación de Funciones

Formulación general del problema de interpolación polinómica:

Dados los puntos del plano (x_0,f_0), (x_1,f_1), …, (x_n,f_n), donde los x_i son distintos. Determinar un polinomio *p* que satisface

$$\begin{aligned} &a)\ \text{grado}(p) \le n \\ &b)\ p(x_i) = f_i, \quad i = 0,\ldots,n. \end{aligned} \tag{7}$$

Escribiendo *p* en la base natural *1*, *t*, …, t^n (polinomio interpolante natural)

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \tag{8}$$

se obtiene el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Matriz de Vandermonde

Eliminación Gaussiana no se recomienda para resolver este sistema

Aproximación de Funciones

Interpolación polinómica

Ejemplo. En la determinación del polinomio cuadrático de interpolación para

$$x_o = 100, \quad x_1 = 101, \quad x_2 = 102,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_o \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

la matriz del sistema es

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 100 & 10000 \\ 1 & 101 & 10201 \\ 1 & 102 & 10404 \end{pmatrix}.$$

V = [1, 100, 10000; 1, 101, 10201; 1, 102, 10404]

El número de condición de V es aproximadamente 2.20832×10^8.

La presencia de la diferencia en escala de las entradas de la matriz sugiere el uso de técnicas de escalamiento para solventar el problema. Escalando la matriz a la forma

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.01 & 1.0201 \\ 1 & 1.02 & 1.0404 \end{pmatrix},$$

V = [1, 1, 1; 1, 1.01, 1.0201; 1, 1.02, 1.0404]

conduce a un número de condición de 9.182×10^4, resultando todavía grande.

Aproximación de Funciones

Formulación general del problema de interpolación polinómica:

x = [1, 2, 3, 4]; y = [2, 3, .5, 8]

V = [1, 1, 1, 1; 1, 2, 4, 8; 1, 3, 9, 27; 1, 4, 16, 64]

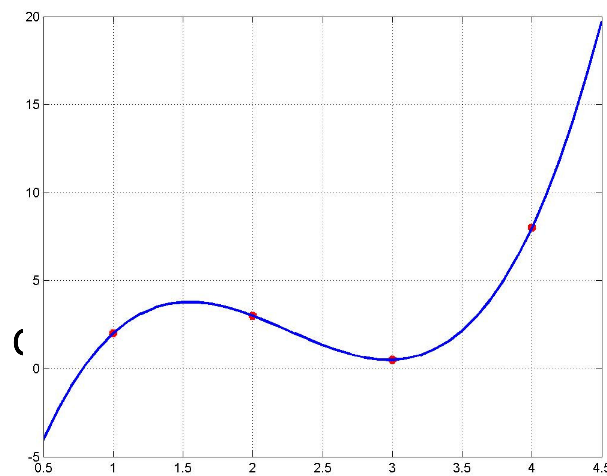
$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

El número de condición de V es aproximadamente 1.171×10^3.

sol = inv(V)*y'

$\rightarrow$ sol = -16.0000 31.0000 -15.2500 2.2500

$$p(x) = 2.25x^3 - 15.25x^2 + 31x - 16$$



p = polyfit(x, y, 3)

$\rightarrow$ p = 2.2500 -15.2500 31.0000 -16.0000

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Lagrange

Consideremos el problema de determinar un polinomio de grado 1 que pase por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Este problema es el mismo que el de aproximar una función f, para la cual $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$, por medio de un polinomio de grado 1, coincidiendo con los valores de f en los puntos dados.

La ecuación de la recta (polinomio de grado 1) que pasa por estos puntos

$$p(x) - y_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1$$

donde en los casos $x = x_0$ y $x = x_1$ se obtiene $p(x_0) = f(x_0)$ y $p(x_1) = f(x_1)$, así p tiene las propiedades requeridas.

Definiendo $L_0(x) = \dfrac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$ y $L_1(x) = \dfrac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$ se tiene

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x). \tag{10}$$

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Lagrange

Los polinomios lineales $L_0(x)$ y $L_1(x)$ satisfacen la propiedad

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \qquad \text{para } \ 0 \leq i, j \leq 1 \tag{11}$$

Para el caso general, la existencia de un polinomio interpolante *p* puede ser establecida de la siguiente manera:

Supongamos que se tienen *n* polinomios $L_i(x)$ que satisfacen la condición

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \qquad \text{para } \ 0 \leq i, j \leq n, \tag{12}$$

entonces el polinomio interpolante *p* tiene la forma

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x). \tag{13}$$

Notamos que *p* satisface los requerimiento en (7), es decir, el grado es menor o igual a *n* y $p(x_j) = f(x_j)$.

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Lagrange

Los polinomios $L_j(x)$ (polinomio de Lagrange de grado n) se escogen de manera similar que en el caso lineal, para que satisfaga la condición (12)

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \quad \text{para } 0 \le j \le n,$$

$$\Leftrightarrow L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{i=n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \quad \text{para } 0 \le j \le n. \tag{14}$$

Teorema. Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son ($n+1$) puntos diferentes y f es una función cuyos valores están dados en estos puntos, entonces existe un único polinomio p de grado a lo más n con la propiedad de que

$$f(x_k) = p(x_k) \quad \text{para } 0 \le k \le n. \tag{15}$$

El polinomio p esta dado por (13), donde los $L_j(x)$ se definen en (14).

Obs. Una consecuencia de este resultado es que la matriz de Vandermonde (9) para $n+1$ puntos distintos es no singular.

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Lagrange

Obs. La unicidad del polinomio interpolante *p* está basado en el resultado siguiente:

> Si un polinomio de grado *n* se anula en *n+1* puntos distintos, entonces el polinomio es el polinomio nulo.

Supongamos que para el problema de interpolación existe otro polinomio *q* diferente al polinomio *p*. Entonces definimos el polinomio *r* de grado menor o igual a *n* como

$$r(x) = p(x) - q(x).$$

Como los polinomios *p* y *q* verifican la condición (15) se tiene

$$r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0,$$

de donde el polinomio *r* se anula en *n+1* puntos. Entonces *r* es el polinomio nulo, y *p* = *q*.

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Lagrange

Teorema (término residual o cota de error). Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $(n+1)$ puntos diferentes en el intervalo $[a,b]$ y $f \in C^{n+1}[a,b]$, entonces para cada $x \in [a,b]$ existe un número $\xi(x)$ en (a,b) tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n), \tag{16}$$

donde p es el polinomio interpolante dado por (13).

Obs. La forma del error del polinomio de Lagrange es similar a la del polinomio de Taylor.

El polinomio de Taylor de grado n alrededor de x_0 concentra toda la información conocida en x_0, en cambio el polinomio de Lagrange de grado n usa información en los diferentes números $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

La fórmula del error (16) no es de uso práctico, ya que está restringida a funciones cuyas derivadas tengan cotas conocidas (por ejemplo funciones trigonométricas).

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Lagrange

Ejemplo. Para los puntos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 4$, determinar el polinomio interpolante de Lagrange de grado 2 para la función $f(x) = 1/x$.

Determinamos los polinomios L_0, L_1 y L_2

$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = x^2 - 6.5x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{1}{3}(-4x^2 + 24x - 32)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4.5x + 5)$$

Como $f(x_0) = f(2) = 0.5,\ f(x_1) = f(2.5) = 0.4,\ f(x_2) = f(4) = 0.25$

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x) \\ &= 0.5(x^2 - 6.5x + 10) + \frac{0.4}{3}(-4x^2 + 24x - 32) + \frac{0.25}{3}(x^2 - 4.5x + 5) \\ &= 0.05x^2 - 0.425x + 1.15 \end{aligned}$$

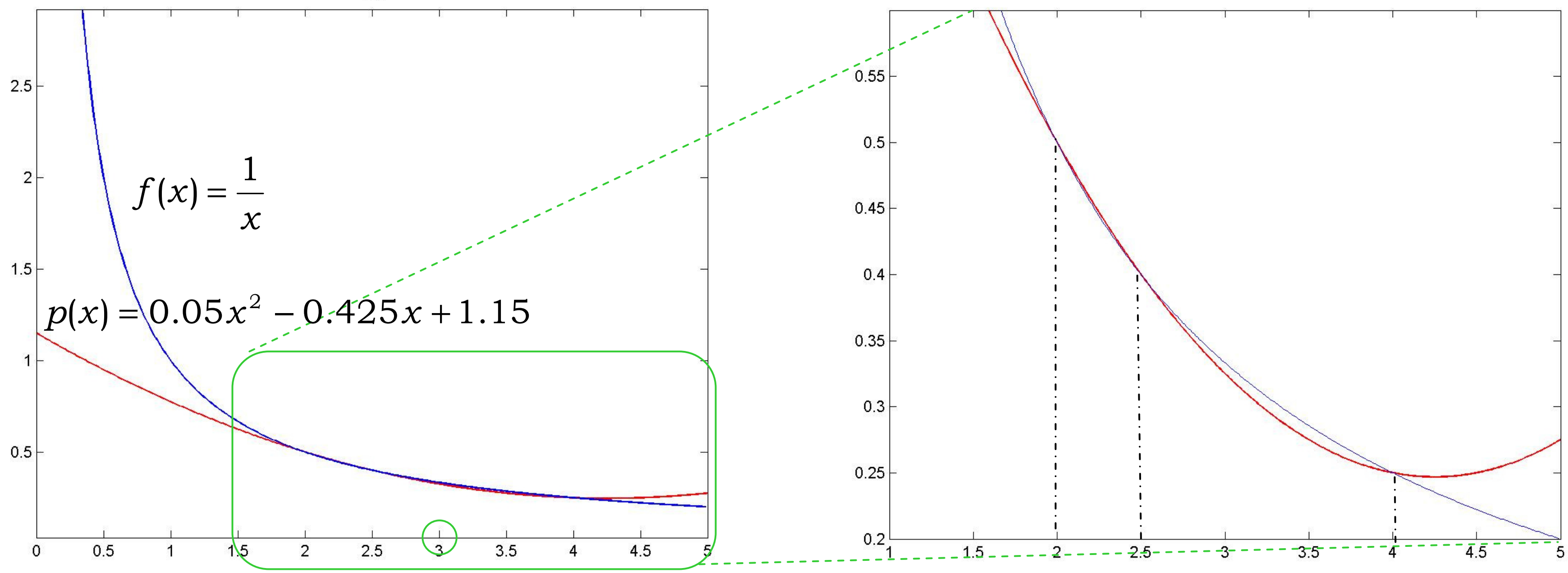
Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Lagrange

Ejemplo (cont.).

$$p(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15 \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

Una aproximación a $f(3) = \frac{1}{3}$ es $p(3) = 0.05 \cdot 3^2 - 0.425 \cdot 3 + 1.15 = 0.325$



Ejercicio. Estimar la cota del error usando la expresión (16).

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Lagrange

Una dificultad que surge al usar estos polinomios es que como es difícil trabajar con el término de error dado por (16), no se sabe generalmente el grado del polinomio necesario para lograr la precisión deseada hasta que los cálculos han sido completados.

La práctica usual consiste en comparar los resultados obtenidos de varios polinomios hasta que se obtiene una concordancia apropiada.

Veremos ahora la derivación de estos polinomios aproximantes de tal manera que se utilicen con mayor ventaja los cálculos de los polinomios anteriores para obtener el nuevo polinomio aproximante.

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Lagrange

Sea f una función definida en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, y supongamos que $m_1, m_2, \ldots, m_k$ son k enteros distintos con $0 \leq m_i \leq n$.

El polinomio de Lagrange de grado menor que k que coincide con f en los puntos $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}$ se denota por $P_{m_1, m_2, \cdots, m_k}(x)$.

Teorema. Sea f definida en $x_0, x_1, \ldots, x_k$ y sean x_j y x_i dos números distintos de este conjunto. Si

$$p(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots k}(x)}{x_i - x_j},$$

entonces $p(x)$ es el polinomio de Lagrange de grado menor o igual a k, que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Obs. Este resultado nos da un método para generar en forma recursiva aproximaciones polinómicas de Lagrange.

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Lagrange

Ejemplo. Supongamos que los valores de una función *f* están dados en los puntos x_0, x_1, …, x_4, podemos construir aproximaciones de la función *f* en un punto *x* a partir de la información dada.

Así, $P_0 = f(x_0)$, $P_1 = f(x_1)$, $P_2 = f(x_2)$, $P_3 = f(x_3)$, $P_4 = f(x_4)$

$$P_{0,1}(x) = \frac{(x-x_0)P_1(x)-(x-x_1)P_0(x)}{x_1-x_0}, \quad P_{1,2}(x) = \frac{(x-x_1)P_2(x)-(x-x_2)P_1(x)}{x_2-x_1}, \quad \ldots$$

es decir, se tienen los polinomios siguientes, evaluados en el punto *x*

x_0	P_0				
x_1	P_1	$P_{0,1}$			
x_2	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$		
x_3	P_3	$P_{2,3}$	$P_{1,2,3}$	$P_{0,1,2,3}$	
x_4	P_4	$P_{3,4}$	$P_{2,3,4}$	$P_{1,2,3,4}$	$P_{0,1,2,3,4}$

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{(x-x_0)P_{1,2}(x)-(x-x_2)P_{0,1}(x)}{x_2-x_0},$$

De aquí, si no estamos conforme con la aproximación $P_{0,1,2,3,4}$ en *x* para *f*, podemos seleccionar otro punto x_5, se calcula otra fila a la tabla y se comparan $P_{0,1,2,3,4}$, $P_{1,2,3,4,5}$ y $P_{0,1,2,3,4,5}$ para determinar la precisión adicional.

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Lagrange

El procedimiento descrito se conoce como el **método de Neville**.

Leer x , $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$

Almacenar los valores de *f* como la primera columna de la matriz Q ($Q_{0,0}$ a $Q_{n,0}$)

Para $i = 1$ hasta n

Para $j = 1$ hasta i

$$Q_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

Fin para

Fin para

$$Q_{2,2} = \frac{(x - x_0)Q_{2,1} - (x - x_2)Q_{1,1}}{x_2 - x_0}$$

x_0	$Q_{0,0}$				
x_1	$Q_{1,0}$	$Q_{1,1}$			
x_2	$Q_{2,0}$	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$		
x_3	$Q_{3,0}$	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$	
x_4	$Q_{4,0}$	$Q_{4,1}$	$Q_{4,2}$	$Q_{4,3}$	$Q_{4,4}$

Modificar el algoritmo para permitir agregar nuevos puntos interpolantes.

Aproximación de Funciones

Interpolación polinómica

El problema de interpolación no finaliza con la determinación del polinomio interpolante. En muchas aplicaciones debemos evaluar el polinomio en puntos donde no se conoce el valor de la función.

Hemos visto, que determinar el polinomio interpolante de Lagrange *p(x)* es muy sencillo, ya que sus coeficientes son los valores de la función $f(x_i)$

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x),$$

pero evaluar los polinomios individuales de Lagrange en un punto *x*, es decir $L_i(x)$, no lo es tan fácil, ya que envuelve productos de la forma

$$(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)$$

y este cálculo puede producir fácilmente overflow o underflow.

Aproximación de Funciones

Interpolación polinómica

A pesar de que los coeficientes del polinomio interpolante natural

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \qquad (17)$$

no son fáciles de calcular, éste puede ser evaluado eficiente y establemente mediante el algoritmo denominado **evaluación anidada** (método de Horner)

Para esto, reescribimos el polinomio (17) en la forma

$$p(t) = ((\cdots(((a_n)t + a_{n-1})t + a_{n-2})\cdots)t + a_1)t + a_0. \qquad (18)$$

Probar que (17) y (18) son equivalentes usando inducción,

La forma (18) sugiere la evaluación sucesiva siguiente

$$\left\{\begin{array}{l} a_n, \\ (a_n)t + a_{n-1}, \\ ((a_n)t + a_{n-1})t + a_{n-2}, \\ \cdots \\ (\cdots(((a_n)t + a_{n-1})t + a_{n-2})\cdots)t + a_1, \\ ((\cdots(((a_n)t + a_{n-1})t + a_{n-2})\cdots)t + a_1)t + a_0 \end{array}\right.$$

Aproximación de Funciones

Interpolación polinómica

Esta idea conduce al algoritmo siguiente:

$$\begin{cases} p = a_n \\ \text{Para } i = \text{n-1 hasta } 0 \\ \qquad p = p * t + a_i \\ \text{Fin para} \end{cases}$$

Al final, *p* contiene la evaluación del polinomio en el punto *t*. Este algoritmo es bastante eficiente, sólo requiere de *n* sumas y *n* multiplicaciones.

Obs. Tenemos:

- el polinomio interpolante natural es difícil de calcular, pero es fácil de evaluar
- el polinomio interpolante de Lagrange es fácil de determinar, pero difícil de evaluar

La pregunta que surge es:

¿Existe un polinomio interpolante que sea fácil de determinar y fácil de evaluar? La respuesta es si.

clase 16

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Newton

Este toma como base los polinomios

$$1,\ (x-x_0),\ (x-x_0)(x-x_1),\ldots,\ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \quad (19)$$

o de manera equivalente, el polinomio interpolante es

$$\begin{aligned} p(x) = c_0 &+ c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots \\ &+ c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \quad (20)$$

Veamos como evaluar un polinomio de este tipo. Para esto escribimos el polinomio (20) usando una forma anidada

$$\begin{aligned} p(x) = ((\cdots(((c_n)&(x-x_{n-1}) \\ &+ c_{n-1})(x-x_{n-2}) + c_{n-2})\cdots)(x-x_1) + c_1)(x-x_0) + c_0, \end{aligned}$$

de donde el algoritmo para evaluar p en un punto t es

$$\left\{ \begin{array}{l} p = c_n \\ \text{Para } i = \text{n-1 hasta } 0 \\ \qquad p = p * (t - x_i) + c_i \\ \text{Fin para} \end{array} \right.$$

Requiere:
2n sumas/restas y
n multiplicaciones.

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Newton

Para determinar el polinomio evaluamos (20) en los puntos x_i,

$$p(x_0) = c_0 + c_1(x_0 - x_0) + c_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) + \dots$$
$$+ c_n(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_{n-1}) = \boxed{c_0}$$
$$p(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) + \dots$$
$$+ c_n(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)\cdots(x_1 - x_{n-1}) = \boxed{c_0 + c_1(x_1 - x_0)}$$

En general, $p(x_i)$ contendrá sólo $i+1$ términos no cero, ya que los últimos $n-i$ términos contienen el factor $(x - x_i)$ evaluado en $x = x_i$.

Usando las condiciones de interpolación $f(x_i) = p(x_i)$, podemos determinar los coeficientes c_i del sistema siguiente

$$\begin{aligned} f(x_0) &= c_0, \\ f(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0), \\ &\dots \\ f(x_n) &= c_0 + c_1(x_n - x_0) + \cdots + c_n(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{21}$$

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Newton

La matriz del sistema (21) es triangular inferior, con elementos en la diagonal distintos de cero, y por lo tanto no singular

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \cdots & (x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Obs. Una consecuencia interesante de la triangularidad del sistema (22) es que la adición de nuevos puntos al problema de interpolación no afecta a los coeficientes que se han calculado.

Obs. Notar que

c_0 — polinomio de grado cero interpolante en (x_0,f_0)

$c_0 + c_1(x - x_0)$, — polinomio de grado uno interpolante en (x_0,f_0), (x_1,f_1)

$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$ — polinomio de grado dos interpolante en (x_0,f_0), (x_1,f_1), (x_2,f_2)

…

Aproximación de Funciones

Polinomio interpolante de Newton

Obs. En principio el sistema triangular (22) puede ser resuelto en O(n^2) operaciones para calcular los coeficientes c_i del polinomio interpolante de Newton. Desafortunadamente, las entradas de la matriz del sistema pueden producir overflow o underflow fácilmente.

Tomaremos otro tipo de enfoque que nos permita determinar los coeficientes c_i del polinomio interpolante de Newton de manera de evitar este inconveniente.