Cálculo de autovalores: El método de la potencia

$$\text{Si } Au = \lambda u,$$

λ es un *autovalor* de A y

u es un *autovector* correspondiente.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El método de la potencia

Calculando el autovalor dominante y su correspondiente autovector

Suponer:

- A tiene un único autovalor λ_1 de módulo máximo, con autovector correspondiente u_1.
- Una base compuesta por autovectores de A

Empezar con $x^{(0)}$ y definir el método iterativo por

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$$

$$x^{(0)} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n \qquad \text{y}$$

$$\begin{aligned}
x^{(k)} &= Ax^{(k-1)} = A^2 x^{(k-2)} = \cdots = A^k x^{(0)} \\
&= A^k \sum_{i=1}^{n} c_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k c_i u_i \\
&= \lambda_1^k (c_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k c_i u_i) \\
&\rightarrow \lambda_1^k c_1 u_1 \text{ para } k \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Note: Si u es un autovector, entonces cu también lo es.

$\lambda_1 =$ cociente del i-ésimo componente de dos iterados sucesivos.

Normalización

Los iterados podrían converger a cero o crecer sin medida, y por eso pedimos que la coordenada más grande del vector tenga módulo 1.

$$
\begin{aligned}
y^{(k)} &= Ax^{(k-1)} \\
x^{(k)} &= y^{(k)}/\|y^{(k)}\|_\infty
\end{aligned}
$$

de modo que para $k \to \infty$

$$\|y^{(k)}\|_\infty \to |\lambda_1| \quad \text{y} \quad x^{(k)} \to u_1/\|u_1\|_\infty$$

Ejemplo: método de la potencia

(de *Scientific Computing* por Heath)

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
y^{(1)} &= Ax^{(0)} = [0.5, 1.5]^T \\
x^{(1)} &= y^{(1)}/\|y^{(1)}\|_\infty = [0.333, 1.000]^T \\
x^{(2)} &= [0.600, 1.000]^T \\
x^{(3)} &= [0.778, 1.000]^T \\
&\vdots \\
x^{(10)} &= [0.998, 1.000]^T \\
x^{(11)} &= [0.999, 1.000]^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|y^{(11)}\|_\infty &= 1.999 \Rightarrow |\lambda_1| \approx 1.999 \\
u_1 &\approx [0.999, 1.000]^T
\end{aligned}$$

$$Au_1 - \lambda_1 u_1 = \begin{bmatrix} 0.0005 \\ -0.0005 \end{bmatrix}$$

Método de la potencia inverso

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| \leq \ldots |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|$$

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A^{-1}x = \lambda^{-1}x$$

λ_n^{-1} es el autovalor de A^{-1} de mayor módulo y tiene los mismos autovectores correspondientes que λ_n.

Método de la potencia aplicado a A^{-1} halla λ_n^{-1}

$$x^{(k)} = A^{-1}x^{(k-1)} \Rightarrow Ax^{(k)} = x^{(k-1)}$$

(se resuelve este sistema en cada iteración)

Método de la potencia inverso normalizado

$$
\begin{aligned}
Ay^{(k)} &= x^{(k-1)} \\
x^{(k)} &= y^{(k)}/\|y^{(k)}\|_\infty \\
\|y^{(k)}\|_\infty &\rightarrow \lambda_n^{-1} \\
x^{(k)} &\rightarrow u_n \text{ autovector asociado}
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\begin{aligned}
x^{(10)} &= [-0.998, 1.000]^T \\
x^{(11)} &= [-0.999, 1.000]^T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|y^{(11)}\|_\infty &= 1.000 \Rightarrow |\lambda_n| \approx 1 \\
u_n &\approx [-0.999, 1.000]^T
\end{aligned}
$$

$$
Au_n - \lambda_n u_n = \begin{bmatrix} 0.0005 \\ 0.0005 \end{bmatrix}
$$

Desplazamientos

Si $Ax = \lambda x$, $(A - \sigma I)x = (\lambda - \sigma)x$

Si $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ son los autovalores de A, $\{\lambda_1 - \sigma, \lambda_2 - \sigma, \ldots, \lambda_n - \sigma\}$ son los autovalores de $A - \sigma I$

Si λ_i es el autovalor más cercano a σ, $\lambda_i - \sigma$ es el de menor módulo.

Usar método de potencia inverso con $A - \sigma I$:

$$\begin{aligned} (A - \sigma I)y^{(k)} &= x^{(k-1)} \\ x^{(k)} &= y^{(k)}/\|y^{(k)}\|_\infty \end{aligned}$$

$$\|y^{(k)}\|_\infty \to |(\lambda_i - \sigma)^{-1}|, \quad x^{(k)} \to x$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Utilizando los círculos de Gerschgorin, se deduce que el autovalor de parte real más negativa será aquel más cercano a $\sigma = -4$.

Aplicar método a $A + 4I$:

$$\begin{aligned} & \vdots \\ x^{(6)} &= [1.0000, 1.000, 0.0005]^T \\ x^{(7)} &= [1.0000, 1.0000, 0.0001]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|y^{(7)}\|_\infty &= 0.5 \Rightarrow |\lambda_n + 4| \approx 2 \Rightarrow \lambda_n = -2 \text{ o } -6 \\ u_n &\approx [1.0000, 1.0000, 0.0001]^T \end{aligned}$$

$$(A + 2I)x^{(7)} = [0, 0, 0.0008]^T \Rightarrow \lambda_n = -2$$

Técnica de Aniquilación

$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ autovalores de A ordenados, con autovectores correspondientes $\{u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}\}$, linealmente independientes

Si $x^{(0)} = \alpha_2 u^{(2)} + \cdots + \alpha_n u^{(n)}$, el método de la potencia hallará λ_2.

Cualquier vector se puede escribir como

$$x = \alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)} + \cdots + \alpha_n u^{(n)}$$

Para hallar λ_2, hacer $x^{(0)} = (A - \lambda_1 I)x = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)u^{(2)} + \cdots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)u^{(n)}$

Para hallar λ_3 hacer $x^{(0)} = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)x$