> #Лабораторная работа 1
#Тема: Операции с математическими выражениями и функциями в Maple
#Выполнила: Лебедева Милана Валерьевна
#группа 353504
#Вариант 8

>

> #Задание 1
#Упростить адлгебраическое выражение

> restart

> $a := simplify\left(\frac{x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6}{5x^4 + 10x^3 - 100x^2 - 330x - 225}\right);$
#Упростим отдельно первую часть выражения

$$a := \frac{x^2 - 3x + 2}{5x^2 - 10x - 75} \quad (1)$$

> $b := simplify\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 - 15x}\right);$ #Упростим отдельно вторую часть выражения

$$b := \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+3)(x-5)} \quad (2)$$

> $result := simplify\left(\frac{a}{b}\right);$ #Выполняем деление дробей

$$result := \frac{x}{5} \quad (3)$$

>

> #Задание 2
#Привести выражение к многочлену стандартного вида

> restart

> $expand((2x - 7)\cdot(5x^2 + 6)\cdot(3x + 4));$ #Раскроем скобки

$$30x^4 - 65x^3 - 104x^2 - 78x - 168 \quad (4)$$

>

> #Задание 3
#Разложиить многочлен на множители

> restart

> $factor(x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 30x - 45);$

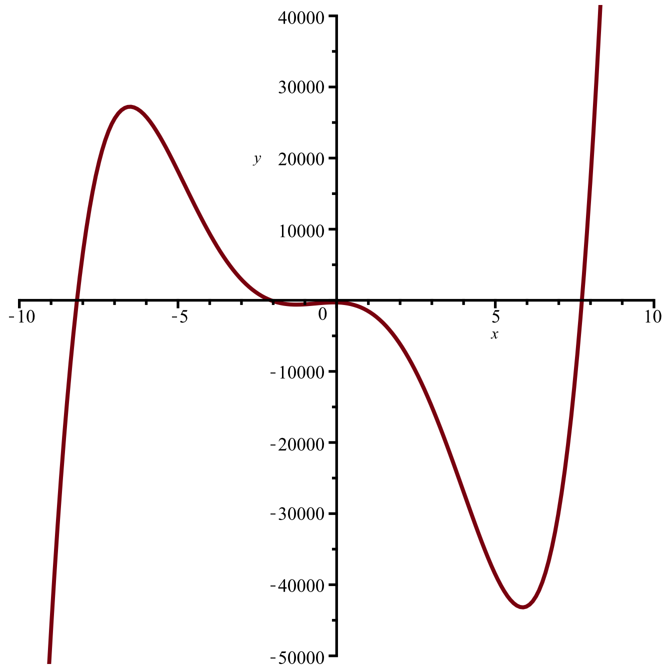
$$(x^2 - 5)(x + 3)^2 \quad (5)$$

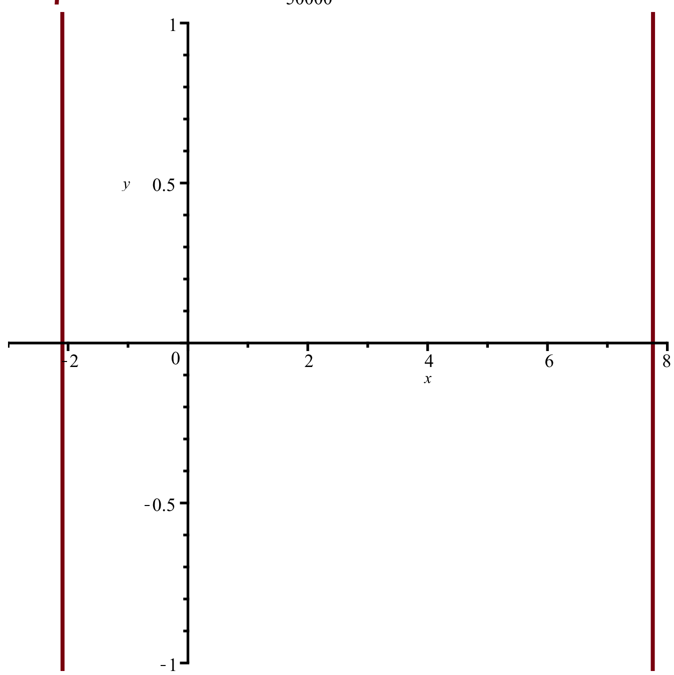
>

> #Задание 4
#Построить график многочлена и найти все его корни

> restart

> $expr := 6x^5 + 15x^4 - 372x^3 - 771x^2 - 120x - 300:$
$plot(expr, x = -10..10, y = -50000..40000);$ #Строим график и указываем нужный диапазон
$plot(expr, x = -3..8, y = -1..1);$





> *evalf*(*fsolve*($6\,x^5 + 15\,x^4 - 372\,x^3 - 771\,x^2 - 120\,x - 300$), 6); #*Находим корни*

$$-8.18301,\ -2.07491,\ 7.72944 \tag{6}$$

> #*Задание 5*
#*Разложить рациональную дробь на сумму простейших дробей*

> *restart*

> *convert*$\left(\dfrac{3\,x^4 + 4\,x^3 + 5\,x - 2}{(x^2+2)\cdot(x-3)^2\cdot(x^2-4)}, parfrac \right)$; #*Разложение на сумму дробей*

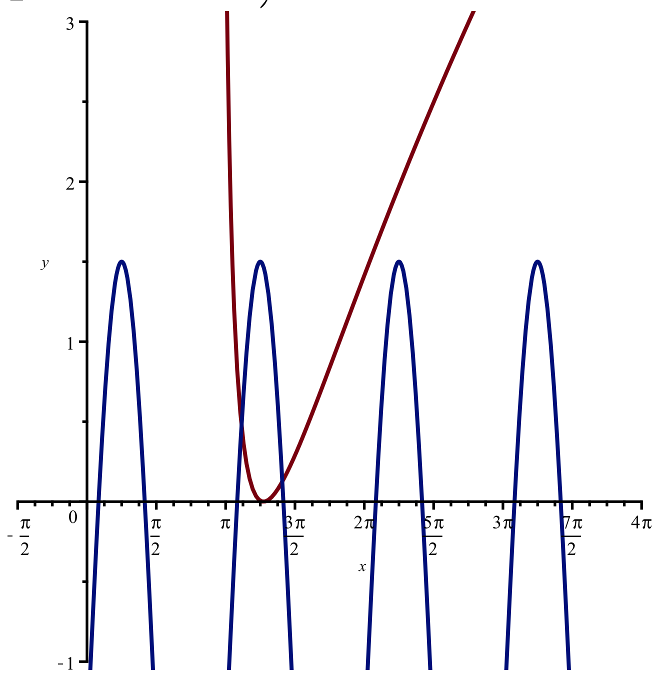
$$\frac{11}{3\,(x-2)} + \frac{364}{55\,(x-3)^2} - \frac{1}{150\,(x+2)} - \frac{10909}{3025\,(x-3)} + \frac{-39\,x - 106}{726\,(x^2+2)} \tag{7}$$

>

> #Задание 6
#Решить графически уравнение и найти его приближенные корни с точностью до 10^{-5}

> restart

> $f1 := \ln^2(x-3)$:
$f2 := 3\cdot\sin(2\,x) - 1.5$:
$plot\left([f1, f2], x = -\frac{\text{Pi}}{2} ..4\cdot\text{Pi}, y = -1..3\right)$; #Строим графики



> $evalf\left(fsolve\left(f1 = f2, x = \text{Pi}..\frac{5\cdot\text{Pi}}{4}\right), 6\right)$; #Решаем уравнение на первом промежутке

$$3.50130 \tag{8}$$

> $evalf\left(fsolve\left(f1 = f2, x = \frac{5\cdot\text{Pi}}{4}..\frac{3\cdot\text{Pi}}{2}\right), 6\right)$; #Решаем уравнение на втором промежутке

$$4.42599 \tag{9}$$

>

> #Задание 7
#Доказать, что $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$, определив номер n_ε,
начиная с которого все члены последовательности (a_n) попадут в ε
− окрестность точки a
. Проиллюстрировать полученный результат с помощью чертежа, положив $\varepsilon = 0.1$

> restart

> $solve\left(\left\{\text{abs}\left(\frac{7\cdot n+4}{4\cdot n-1} - \frac{7}{4}\right) < \frac{1}{10}\right\}, \{n\}\right)$;
#Нашли все номера n из определения предела последовательности

$$\left\{\frac{117}{8} < n\right\}, \left\{n < -\frac{113}{8}\right\} \tag{10}$$

> $with(plots)$:

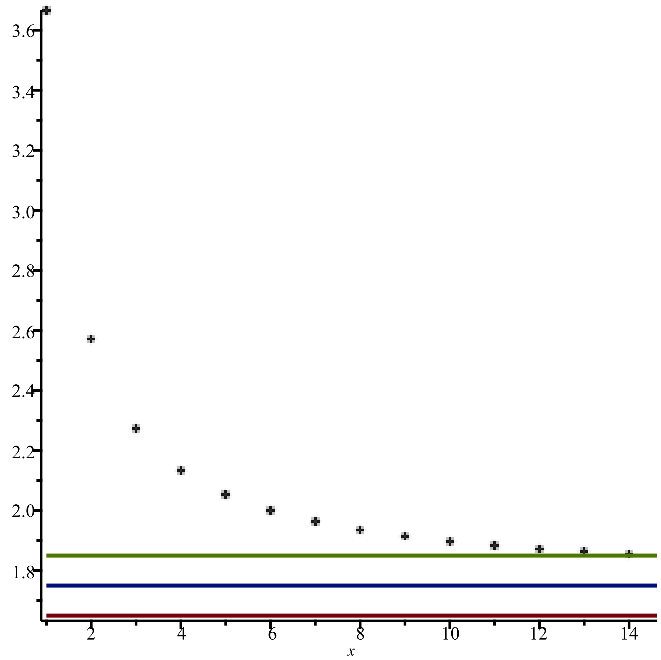
$$P1 := pointplot\left(\left\{seq\left(\left[n, \frac{(7\cdot n+4)}{4\cdot n-1}\right], n=1..\frac{117}{8}\right)\right\}\right):$$

#Строим последовательность точек

$$P2 := plot\left(\left[\frac{7}{4}-\frac{1}{10}, \frac{7}{4}, \frac{7}{4}+\frac{1}{10}\right], x=1..\frac{117}{8}\right):$$

\>

\> $display(P1, P2);$



\>

\> *#Задание 8*

#Вычислить пределы числовых последовательностей

\> *#1)*

restart

\> $limit(\text{sqrt}(n\cdot(n+5))-n, n=\text{infinity});$

$$\frac{5}{2} \qquad \textbf{(11)}$$

\> *#2)*

restart

\> $$\text{limit}\left(\left(\frac{2\,n^2+5\,n+7}{2\,n^2+5\,n+3}\right)^n, n=\text{infinity}\right);$$

$$1 \qquad \textbf{(12)}$$

\>

\> *#Задание 9*

#Для заданной кусочно-непрерывной функции выполнить следующие действия:

#1. Определить ее через функциональный оператор и построить график

#2. В точке разрыва и на бесконечности найти односторонние пределы

#3. Найти производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности

#4. Построить в одной системе координат графики функции, производной и какой-нибудь первообразной

#5. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми x=1, x=5, y=0; Сделать чертеж

> *restart*

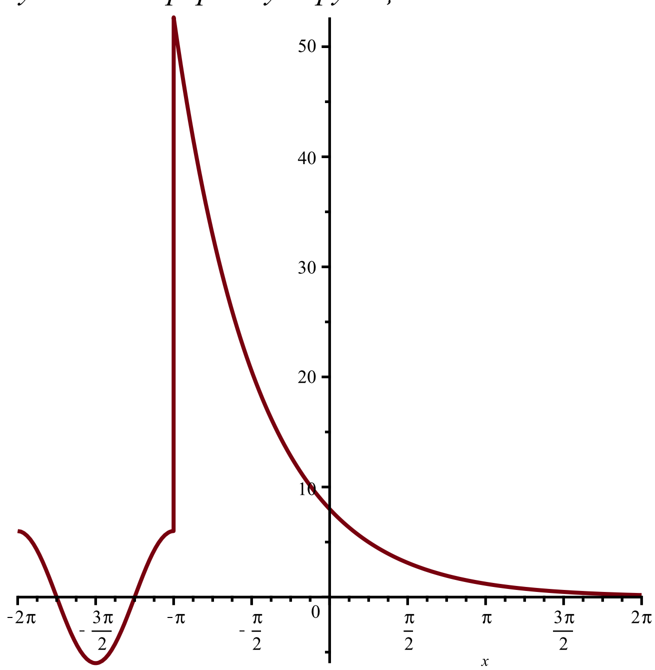
> *#1)*

$P := piecewise\left(x < -\mathrm{Pi},\ 6\cdot\cos(2\,x),\ x \geq -\mathrm{Pi},\ 8\cdot\exp\left(-\frac{6}{10}\cdot x\right)\right);$

#Задаем кусочно-непрерывную функцию

$$P := \begin{cases} 6\cos(2\,x) & x < -\pi \\ 8\,\mathrm{e}^{-\frac{3\,x}{5}} & -\pi \leq x \end{cases} \quad (13)$$

> *plot*(P); *#Строим кусочно-непрерывную функцию*



> *#2)*

limit$(P, x=-\mathrm{Pi}, left)$; *#Пределы в точке разрыва*

$$6 \quad (14)$$

> *limit*$(P, x=-\mathrm{Pi}, right)$;

$$8\,\mathrm{e}^{\frac{3\,\pi}{5}} \quad (15)$$

> *limit*$(P, x=\mathrm{infinity}, left)$; *#Пределы на бесконечности*

$$0 \quad (16)$$

> *limit*$(P, x=-\mathrm{infinity}, right)$;

$$-6\,..6 \quad (17)$$

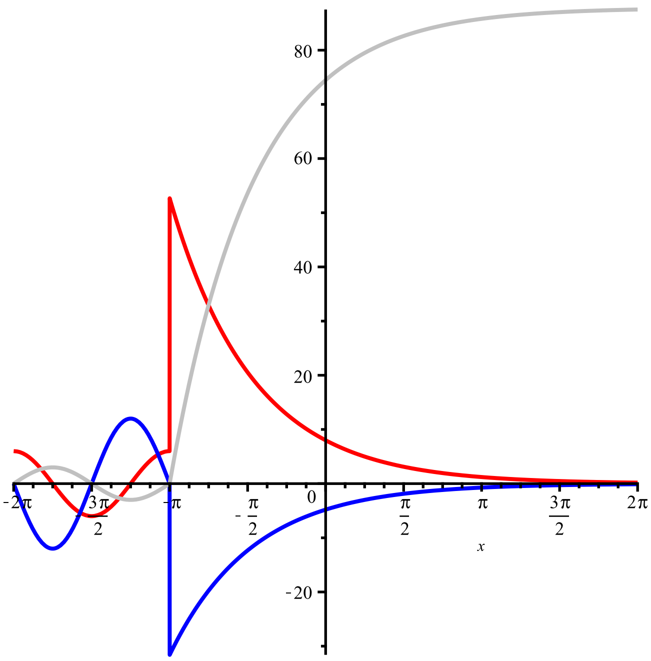
> #3)
diff(P, x); #Производная функции

$$\begin{cases} -12\sin(2x) & x < -\pi \\ \textit{undefined} & x = -\pi \\ -\dfrac{24\,e^{-\frac{3x}{5}}}{5} & -\pi < x \end{cases} \quad (18)$$

> *int*(P, x); #Неопределенный интеграл функции

$$\begin{cases} 3\sin(2x) & x \le -\pi \\ -\dfrac{40\,e^{-\frac{3x}{5}}}{3} + \dfrac{40\,e^{\frac{3\pi}{5}}}{3} & -\pi < x \end{cases} \quad (19)$$

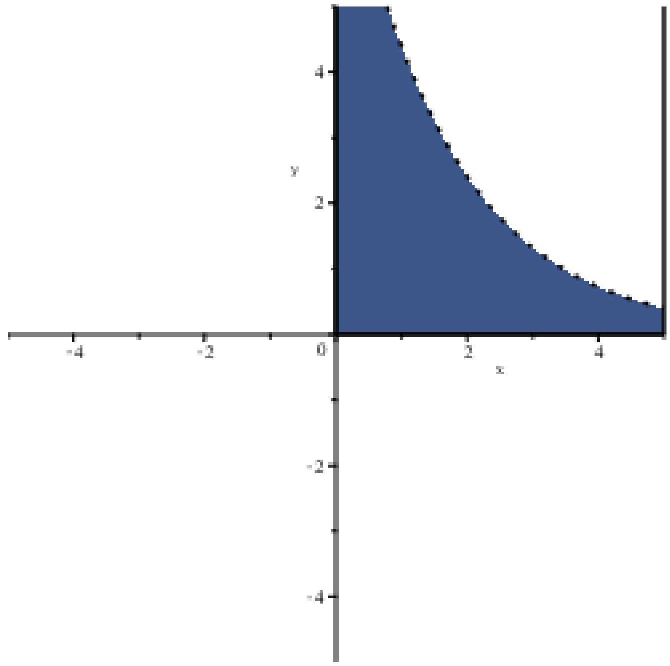
> #4)
plot([P, *diff*(P, x), *int*(P, x)], *color* = [*red*, *blue*, *gray*]); #Строим графики



> #5)
convert(*int*(P, x = 1 ..5), *double*);
#Посчитали площадь с помощью определенного интеграла

$$6.65366090301550 \quad (20)$$

> *with*(*plots*) :
$inequal\left(\left[8\cdot\exp\left(-\frac{6}{10}x\right) > y, x \ge 0, x \le 5, y \ge 0\right], x = -5 ..5, y = -5 ..5\right);$
#Строим облать, определенную нер-ми двух переменных



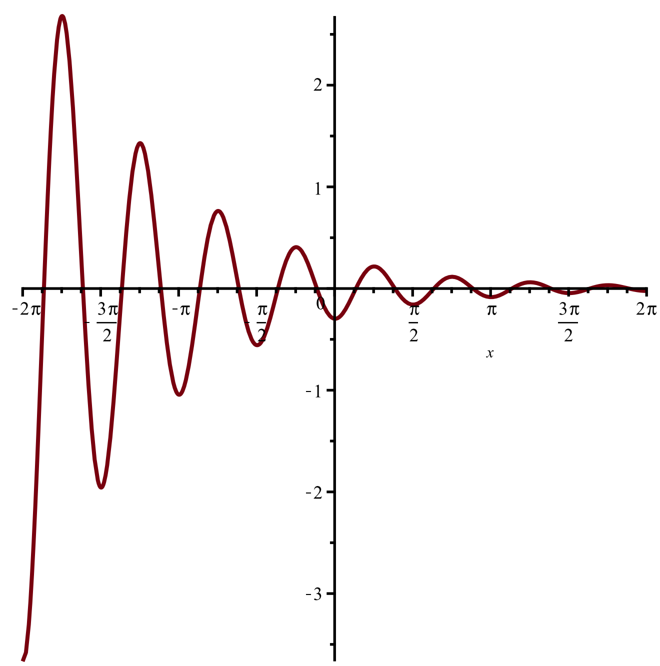
>

> #Задание 10
#Построить кривые на плоскости. Для кривой 2-го порядка найти каноническое уравнение с помощью ортогонального преобразования

> restart

> $y := \frac{3}{10} \cdot \exp\left(-\frac{4}{10}x\right) \cdot \cos(4 \cdot x + 3) :$

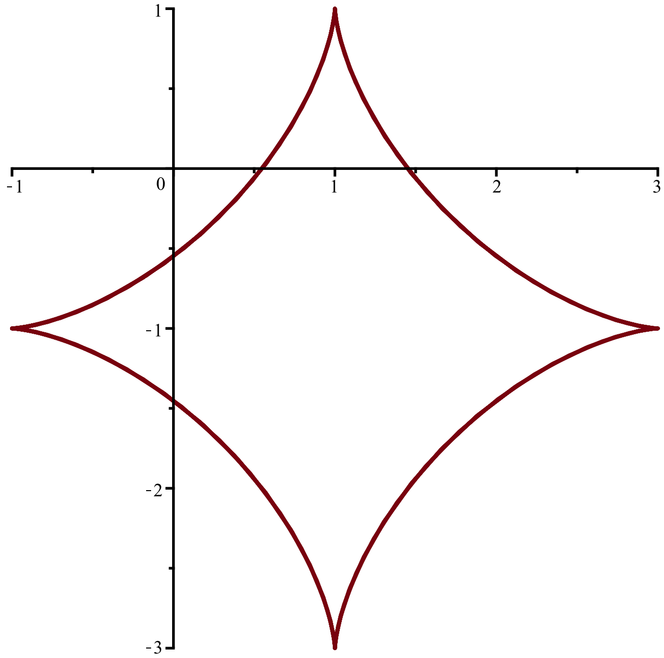
> $plot(y);$



> restart

> $x := t \rightarrow 1 + 2 \cdot \cos^3(t) :$
$y := t \rightarrow 2 \cdot \sin^3(t) - 1 :$

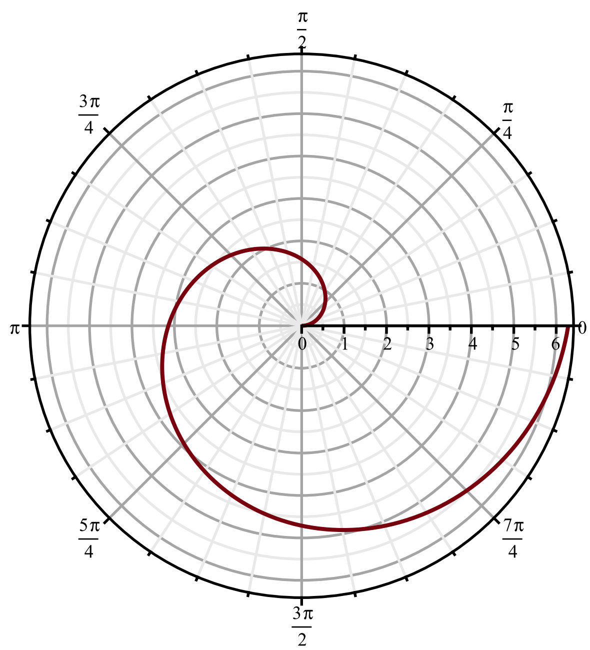
$plot([x(t),\ y(t), t=-10..10]);$



> $restart$

> $\rho = 1 + 2\cdot\sin\left(5\cdot\phi + \frac{\mathrm{Pi}}{4}\right):$

$plots[polarplot](\rho)$; *#Для полярных координат*



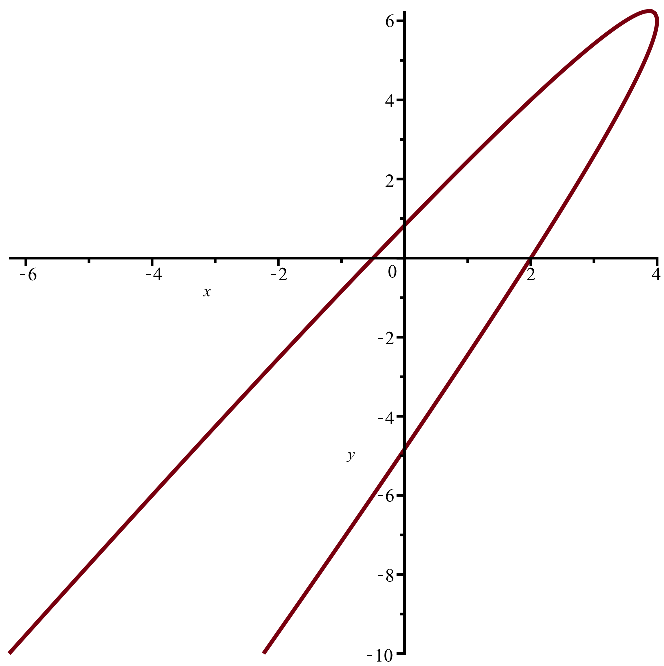
>

> $with(plots) : with(LinearAlgebra) :$

$f(x, y) := 4\cdot x^2 - 4\cdot x\cdot y + y^2 - 6\,x + 4\,y - 4;$

$$f := (x, y) \mapsto 4\cdot x^2 - 4\cdot y\cdot x + y^2 - 6\cdot x + 4\cdot y - 4 \qquad \textbf{(21)}$$

> $implicitplot(f(x, y) = 0, x=-20..10, y=-10..10)$; *#Строим график функции заданной неявно*



> $M := Matrix([[4,-2], [-2, 1]])$: #Создаем матрицу
$v := Eigenvectors(M)$; #Находим собственные векторы. v - матрица соб. векторов

$$v := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

> #Нормализируем собственные векторы с использованием евклидовой нормы
$e1 := Normalize(Column(v[2], [1]), Euclidean)$:
$e2 := Normalize(Column(v[2], [2]), Euclidean)$:
#Заменяем переменные на новые с использованием собственных векторов
$subs\left(x = e1[1] \cdot x1 + e2[1] \cdot y1, y = e1[2] \cdot x1 + e2[2] \cdot y1, 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2 - 6\,x + 4\,y - 4\right)$:
$expr := simplify(\%)$; #Упрощаем

$$expr := \frac{(16\,x1 + 2\,y1)\sqrt{5}}{5} + 5\,x1^2 - 4 \tag{23}$$

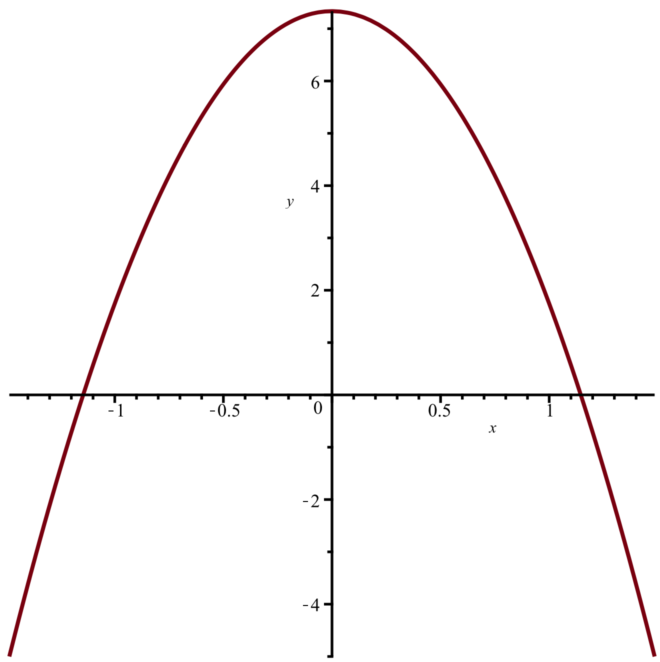
> $expr\_pseudocanon := Student[Precalculus][CompleteSquare](expr)$;
#Выделяем полный квадрат

$$expr\_pseudocanon := 5\left(x1 + \frac{8\sqrt{5}}{25}\right)^2 + \frac{2\,y1\sqrt{5}}{5} - \frac{164}{25} \tag{24}$$

> $expr\_canon := subs\left(x1 = x2 - \left(\frac{\mathrm{sqrt}(5) \cdot 8}{25}\right), expr\_pseudocanon\right)$;
#Замена координат на новые

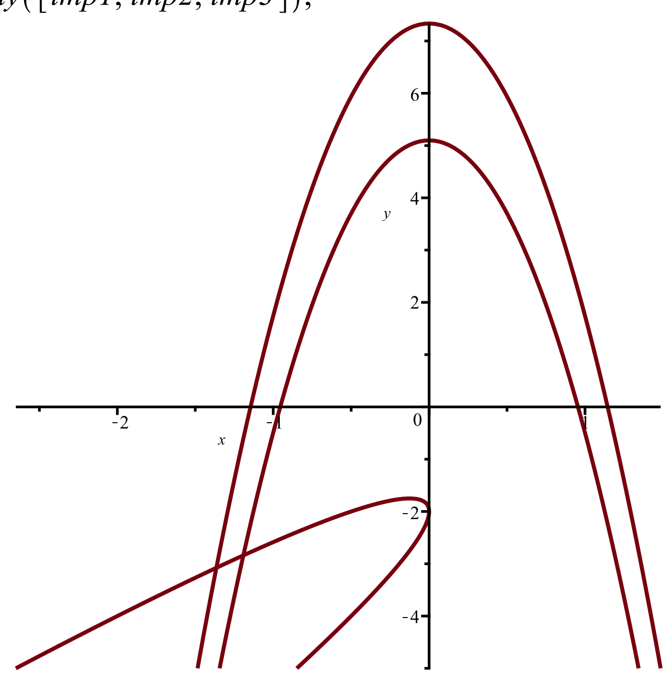
$$expr\_canon := 5\,x2^2 + \frac{2\,y1\sqrt{5}}{5} - \frac{164}{25} \tag{25}$$

> $plots[implicitplot]\left(5 \cdot x^2 + \left(\frac{2 \cdot y \cdot \mathrm{sqrt}(5)}{5}\right) - \frac{164}{25} = 0, x = -10..10, y = -5..10\right)$;
#Строим график



>

> $imp1 := implicitplot\left(4\cdot x^2 - 4\cdot x\cdot y + y^2 - 6\cdot x + 4\cdot y + 4 = 0, x = -10..10, y = -5..10\right)$:
$imp2 := implicitplot\left(5\cdot x^2 + \left(\frac{2\cdot y\cdot \mathrm{sqrt}(5)}{5}\right) - \frac{164}{25} = 0, x = -10..10, y = -5..10\right)$:
$imp3 := implicitplot\left(5\cdot x^2 + \left(\frac{2\cdot y\cdot \mathrm{sqrt}(5)}{5}\right) - \frac{164}{25} + 2 = 0, x = -10..10, y = -5..10\right)$:
$with(plots) : display([imp1, imp2, imp3]);$



>