Chapitre 3
Algèbre de Boole

1 Variables booléennes

1.1 Définitions

Ensemble des **constantes booléennes** : B = {0,1}.

Une **variable booléenne simple** x prend ses valeurs dans l'ensemble B = {0,1}.
Une **variable booléenne générale (ou généralisée)** x est un n-uple de variables booléennes simples x_i ; $1 \leq i \leq n$, elle prend ses 2^n valeurs dans l'ensemble $B^n = \{0,1\}^n$; $x = (x_1,x_2,...x_n)$
Une **variable Φ-booléenne simple** x prend ses valeurs dans l'ensemble $B_\Phi = \{0, 1, \mathbf{\Phi}\}$, où **Φ** désigne une valeur indifférente (0 ou 1 indifféremment).

Deux valeurs booléennes générales sont dites **adjacentes** si elles ne diffèrent que par une seule composante.
Exemple : (0,1,0) et (0,1,1) sont adjacentes mais (0,1,0) et (0,0,1) ne le sont pas.

On définit une **relation d'ordre** sur les valeurs booléennes et **Φ**-booléennes:

simples	$0 \leq 1$, ici $0 < 1$	$0 \leq \mathbf{\Phi} \leq 1$
générales	$x \leq y$ ssi $(x_i \leq y_i \,;\, 1 \leq i \leq n)$	

Exemple : $(0,1,0) \leq (0,1,1)$ mais (0,1,0) et (0,0,1) ne sont pas comparables.

1.2 Représentation de l'ensemble des valeurs d'une variable booléenne

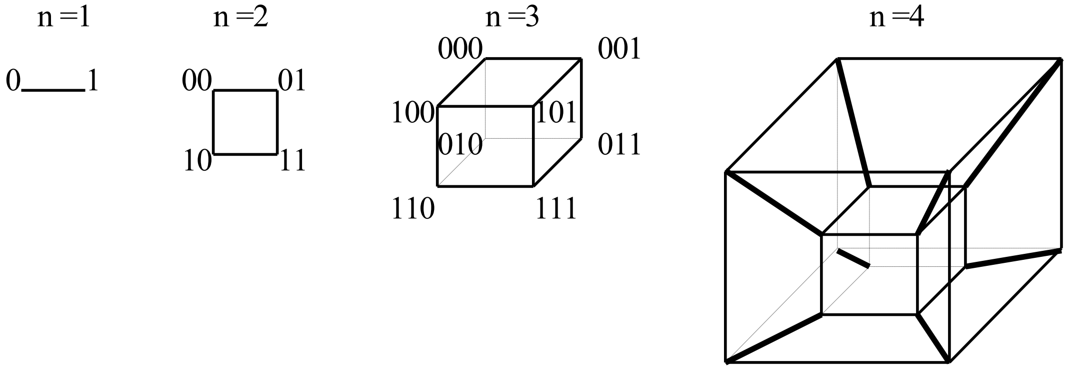
Liste des valeurs suivant l'ordre lexicographique (ou numérique en binaire)

valeur	ordinal
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Liste des valeurs en respectant les adjacences

valeur	ordinal
000	0
001	1
011	3
010	2
110	6
111	7
101	5
100	4

Représentation dans l'espace



Treillis de Boole

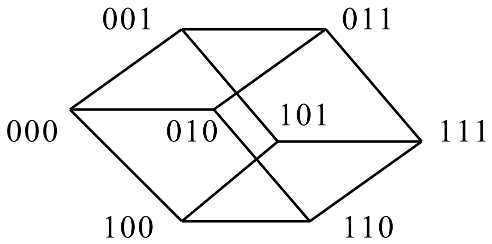


Tableau de Karnaugh

Pour faciliter la lecture des tableaux on pose $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (A,B,C,D)$

n=1

A

0	1

n=2

A\B	0	1	
0	00 0	01 1	
1	10 2	11 3	|A |

B

n=3

A\BC	00	01	11	10	
0	000 0	001 1	011 3	010 2	
1	100 4	101 5	111 7	110 6	|A |

——C—

——B—

n=4

AB\CD	00	01	11	10	
00	0000 0	0001 1	0011 3	0010 2	
01	0100 4	0101 5	0111 7	0110 6	|B |
11	1100 12	1101 13	1111 15	1110 14	| | | |
10	1000 8	1001 9	1011 11	1010 10	|A |

——D—

——C—

1.3 Duale d'une valeur booléenne

Pour une valeur simple : ($0 \to 0^*=1$ et $1 \to 1^*=0$) c'est le complément de la valeur.
Pour une valeur générale : ($x_i \to x_i^*$ et $x \to x^*$) les composantes sont complémentées (CR).

2 Fonctions booléennes

Une **fonction booléenne** F est une application ; $F : B^n \to B; (x_1, \ldots ,x_n) \to F(x_1, \ldots ,x_n)$

Une **fonction Φ-booléenne** prend ses valeurs dans B_Φ ; $F : B^n \to B_\Phi$

2.1 Représentation des fonctions booléennes

Table de vérité

x_1 x_2 x_3	F
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

Tableau de Karnaugh

x_1 \ x_2 x_3	00	01	11	10	
0		1		1	
1			1	1	|x_1

——x_3—

——x_2—

2.2 Duale et complémentaire d'une fonction booléenne

La **duale** F^* de la fonction F est définie par $\forall x \in B^n$, $F^*(x) = (F(x^*))^*$.

La **complémentaire** $\overline{F}$ de la fonction F est définie par $\forall x \in B^n$, $\overline{F}(x) = \overline{F(x)}$.

La **réciproque** F_r de la fonction F est définie par $\forall x \in B^n$, $F_r(x) = F(x^*)$.

Exemple : La fonction majorité $M(x_1,x_2,x_3)$ prend la valeur 1 quand les composantes à 1 de la variable x sont majoritaires.

x*	$x_1\ x_2\ x_3$	M	M(x*)	M*
1 1 1	0 0 0	0	1	0
1 1 0	0 0 1	0	1	0
1 0 1	0 1 0	0	1	0
1 0 0	0 1 1	1	0	1
0 1 1	1 0 0	0	1	0
0 1 0	1 0 1	1	0	1
0 0 1	1 1 0	1	0	1
0 0 0	1 1 1	1	0	1

La duale n'est pas toujours égale à la fonction initiale. La fonction majorité est autoduale.

2.3 Relation d'ordre

La relation d'ordre définie sur les valeurs booléennes est étendue aux fonctions booléennes :

$$(F \leq G) \Leftrightarrow (\forall x \in B^n, F(x) \leq G(x))$$

On remarque que (F(x) = 1) => (G(x) = 1)
donc les cases à 1 du tableau de Karnaugh de F sont à 1 dans celui de G.

2.4 Les opérateurs booléens

Les principaux opérateurs booléens sont des fonctions de une ou deux variables.

Il y a 4 opérateurs unaires : Z la fonction constante 0, I l'identité, $\overline{x}$ le complément et U la fonction constante 1.

x	Z	I	$\overline{x}$	U
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Parmi les 2^4 fonctions de deux variables, les opérateurs OU (somme), ET (produit), NOR, NAND, XOR (ou exclusif) et EQV (équivalence) sont les plus utilisés.

x y	OU $x+y$	ET $x.y$	NOR $\overline{x+y}$	NAND $\overline{x.y}$	XOR $x\oplus y$	EQV $\overline{x\oplus y}$
0 0	0	0	1	1	0	1
0 1	1	0	0	1	1	0
1 0	1	0	0	1	1	0
1 1	1	1	0	0	0	1

Exercice :
1- Déterminer la réciproque F_r , la duale F* et la complémentaire $\overline{F}$ de chaque opérateur.
2- Montrer qu'il est possible d'exprimer les opérateurs ET, OU et complément à l'aide du NOR.

3 La structure d'algèbre de Boole (B, + , . , ¯)

3.1 Axiomes

Commutativité
$\forall (x,y)\in B^2 \quad x + y = y + x$ et $x \,.\, y = y \,.\, x$

Associativité
$\forall (x,y,z) \in B^3 \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ et $(x \,.\, y) \,.\, z = x \,.\, (y \,.\, z)$

Distributivité
$\forall (x,y,z) \in B^3 \quad x + (y \,.\, z) = (x + y) \,.\, (x + z)$ et $x \,.\, (y + z) = x \,.\, y + x \,.\, z$

Eléments neutres
$\forall x\in B \quad x + 0 = 0 + x = x$ et $x \,.\, 1 = 1 \,.\, x = x$

Complémentation
$\forall x\in B \quad x + \overline{x} = 1$ et $x \,.\, \overline{x} = 0$

3.2 Théorèmes

Théorème de l'idempotence
$\forall x\in B \quad x + x = x$ et $x \,.\, x = x$

Théorème des éléments neutres
$\forall x\in B \quad x + 1 = 1$ et $x \,.\, 0 = 0$

Théorème d'absorption
$\forall (x,y) \in B^2 \quad x + x \,.\, y = x$ et $x \,.\, (x + y) = x$

Théorème de complémentation (De Morgan)
$\forall (x,y) \in B^2 \quad \overline{x + y} = \overline{x} \,.\, \overline{y}$ et $\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$

Théorème d'involution
$\forall x\in B \quad \overline{\overline{x}} = x$

Théorème de complémentation de Shannon
$\forall (x_1,x_2, \ldots ,x_n) \in B^n \quad = \overline{x_1}.\overline{x_2}\ldots\overline{x_n}$ et $\overline{x_1.x_2\ldots x_n} =$

Principe de dualité
Toute relation booléenne a sa duale, obtenue en échangeant 0 et 1, somme et produit.

Exercices
1- Démontrer les théorèmes
2- Vérifier que $\wp(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E, muni des opérations :
$\cup$ la réunion, $\cap$ l'intersection et du complément C, est une algèbre de Boole.
3- Vérifier que $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des propositions logiques sur un ensemble E, muni des opérations : $\vee$ (disjonction), $\wedge$ (conjonction) et de la négation $\neg$, est une algèbre de Boole.

4 Formes systématiques

4.1 Formes polynomiales (ou disjonctives)

Un **monôme** booléen ou **p-terme** est un produit de variables booléennes simples qui apparaissent sous leur forme directe x_i ou complémentée $\overline{x_i}$. On note $\tilde{x}_i$ l'une de ces formes et un p-terme se présente sous la forme : $\tilde{x}_{i1} \cdot \tilde{x}_{i2} \cdot \cdots \cdot \tilde{x}_{ip}$, $1 \leq p \leq n$

Exemple : xy, $x\overline{y}z$, x sont des p-termes.

Une **forme polynomiale** (ou **forme disjonctive**) d'une fonction représente la fonction comme une somme de monômes (ou de p-termes).

Exemple : $f(x,y,z) = xy + x\overline{y}z + x$

Un **monôme canonique** (ou **minterme**) est un p-terme de degré maximum. Toutes les n variables sont présentes sous leur forme directe ou complémentée. Un minterme se présente sous la forme : $\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 \cdot \cdots \cdot \tilde{x}_n$

Il y a 2^n mintermes. Il est possible de les numéroter :

$$m_a = \prod_{i=1}^{n} \tilde{x}_{a,i} \text{ où } a = (a_1 a_2 ... a_n)_2 \text{ et } \tilde{x}_{a,i} = \begin{cases} \overline{x}_i & \text{si } a_i = 0 \\ x_i & \text{si } a_i = 1 \end{cases}$$

Exemple : Pour n=3, le minterme m_4 s'écrit $x\overline{y}\,\overline{z}$ car $4 = (100)_2$. On remarque que ce minterme ne prend la valeur 1 que si (x,y,z) = (1,0,0), ce qui correspond à la ligne 4 d'une table de vérité. On numérote les lignes et les mintermes de 0 à 2^n-1.

Remarque : Le p-terme xy peut s'écrire $xy(z+\overline{z}) = xyz + xy\overline{z}$, on a alors une somme de mintermes si on utilise n=3 variables.

1ère forme d'un théorème de Shannon

Toute fonction $f(x_1, ... ,x_n)$ peut s'écrire :

$$f(x_1, ... ,x_n) = x_i.f(x_1, ... ,x_{i-1} , 1 , x_{i+1}, ... ,x_n) + \overline{x}_i.f(x_1, ... ,x_{i-1} , 0 , x_{i+1}, ... ,x_n) \; ; 1 \leq i \leq n$$

On en déduit que toute fonction booléenne de n variables peut s'écrire de façon unique sous la forme d'une somme de mintermes :

$$f(x_1, ... ,x_n) = \sum_{a \in B^n} f(a).m_a$$

C'est la **1ère forme le Lagrange** ou **forme canonique disjonctive**.

Remarque : Dans l'expression précédente, pour simplifier les notations, on a identifié la valeur booléenne *a* (n-uple) et la représentation binaire *â* (suite finie de n bits).

Obtention de la forme canonique disjonctive

A partir d'une table de vérité, il suffit de faire la somme des mintermes pour lesquels la fonction a la valeur 1.

A partir d'une expression polynomiale booléenne on peut soit développer les p-termes (monômes) soit repérer les cases correspondant aux p-termes dans le tableau de Karnaugh.

Exemple : La fonction majorité M(x,y,z) prend la valeur 1 quand les composantes à 1 de la variable sont majoritaires.

minterme	x y z	M	N°
$\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$	0 0 0	0	0
$\overline{x}.\overline{y}.z$	0 0 1	0	1
$\overline{x}.y.\overline{z}$	0 1 0	0	2
$\overline{x}.y.z$	0 1 1	1	3
$x.\overline{y}.\overline{z}$	1 0 0	0	4
$x.\overline{y}.z$	1 0 1	1	5
$x.y.\overline{z}$	1 1 0	1	6
$x.y.z$	1 1 1	1	7

On obtient $M(x,y,z) = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$ ou $M(x,y,z) = \overline{x}.y.z + x.\overline{y}.z + x.y.\overline{z} + x.y.z$

Pour obtenir une forme canonique disjonctive d'une fonction F **Φ**-booléenne, on détermine d'abord deux fonctions booléennes Inf(F) et Sup(F) telles que Inf(F) $\leq$ F $\leq$ Sup(F). Ces fonctions sont obtenues en remplaçant les valeurs indifférentes par 0 puis par 1. Les formes canoniques disjonctives ne diffèrent que par des mintermes indifférents associés aux valeurs indifférentes.

Exercice : Compléter le tableau des fonctions booléennes de 2 variables

x y	0 0 1 1 0 1 0 1	Expression	Désignation
f0	0 0 0 0	0	Zéro
f1	0 0 0 1	x.y	ET
f2	0 0 1 0		Inhibition de x par y
f3	0 0 1 1	x	Identité x
f4	0 1 0 0		
f5	0 1 0 1		
f6	0 1 1 0		OU Exclusif
f7	0 1 1 1		
f8	1 0 0 0		
f9	1 0 0 1		Equivalence
f10	1 0 1 0		NON y
f11	1 0 1 1		y Implique x
f12	1 1 0 0		
f13	1 1 0 1		
f14	1 1 1 0		
f15	1 1 1 1		

4.2 Formes polynales (ou conjonctives)

On applique le principe de dualité.

Un **monal** booléen ou **s-terme** est une somme de variables booléennes simples qui apparaissent sous leur forme directe x_i ou complémentée $\overline{x_i}$. On note $\tilde{x}_i$ l'une de ces formes et un s-terme se présente sous la forme : $\tilde{x}_{i1} + \tilde{x}_{i2} + ... + \tilde{x}_{ip}$, $1 \leq p \leq n$
Exemple : x+y, x+$\overline{y}$+z, x sont des s-termes.

Une **forme polynale** (ou **forme conjonctive**) d'une fonction représente la fonction comme un produit de monaux (ou de s-termes).
Exemple : f(x,y,z) = (x+y) . (x+$\overline{y}$+z) . x

Un **monal canonique** (ou **maxterme**) est un s-terme de degré maximum. Toutes les n variables sont présentes sous leur forme directe ou complémentée. Un maxterme se présente sous la forme : $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + ... + \tilde{x}_n$
Il y a 2^n maxtermes. Il est possible de les numéroter :

$$M_a = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{a,i} \text{ où } a = (a_1 a_2 ... a_n)_2 \text{ et } \tilde{x}_{a,i} = \begin{cases} \overline{x}_i & \text{si } a_i = 0 \\ x_i & \text{si } a_i = 1 \end{cases}$$

Exemple : Pour n=3, le maxterme M_4 s'écrit $x+\overline{y}+\overline{z}$ car 4 = $(100)_2$. On numérote les maxtermes de 0 à 2^n-1.

Remarque : Le s-terme x+y peut s'écrire $(x+y)+z.\overline{z} = (x+y+z) . (x+y+\overline{z})$, on a alors un produit de maxtermes si on utilise n=3 variables.

2nde forme d'un théorème de Shannon
Toute fonction $f(x_1, ... ,x_n)$ peut s'écrire :

$$f(x_1, ... ,x_n) = [x_i+f(x_1,...,x_{i-1} , 0 , x_{i+1},...,x_n)] . [\overline{x}_i+f(x_1,...,x_{i-1} , 1 , x_{i+1},...,x_n)] \; ; 1 \leq i \leq n$$

On en déduit que toute fonction booléenne de n variables peut s'écrire de façon unique sous la forme d'un produit de maxtermes :

$$f(x_1, ... ,x_n) =$$

C'est la **2nde forme le Lagrange** ou **forme canonique conjonctive**.
Remarque : Dans l'expression précédente, on a identifié la valeur booléenne *a* (n-uple) et la représentation binaire *â* (suite finie de n bits).

Obtention de la forme canonique conjonctive
A partir d'une table de vérité, il suffit de faire le produit des maxtermes compléments des mintermes pour lesquels la fonction a la valeur 0.
A partir d'une expression polynale booléenne on peut développer les monaux (s-termes).
A partir de la forme canonique disjonctive de F on détermine la forme canonique disjonctive de sa complémentaire que l'on complémente pour trouver la forme canonique conjonctive de F.

On remarque que le **complément du minterme m_i** est le **maxterme M_j** tel que **$i+j = 2^n-1$**.

Exercice : Déterminer la forme canonique conjonctive la fonction majorité M(x,y,z).

5 Minimisation de fonctions booléennes

Il s'agit de représenter une fonction sous une forme simplifiée. Un objectif peut être la réduction du coût de sa réalisation.

Relation d'**ordre** : $f \leq g \iff f.g = f \iff f+g = g$

Un **monôme** m d'une fonction f est **premier** ssi tout monôme m' vérifie

$(m' \leq f \text{ et } m \leq m') \Rightarrow (m = m')$

donc m est un plus grand monôme de f.

Remarques :

Si $m.x+m.\overline{x} \leq f$ alors $m \leq f$, en effet $m.x+m.\overline{x} = m.(x+\overline{x}) = m.1 = m$

Les monômes m.x et $m.\overline{x}$ sont adjacents, la variable x n'intervient plus. Sur un tableau de Karnaugh la somme booléenne correspond à une réunion de groupes de cases, ici le groupe obtenu est deux fois plus grand que les précédents. La taille d'un groupe est une puissance de 2 (1, 2, 4, 8...).

Une **base** d'une fonction booléenne est un ensemble de monômes premiers, leur somme est égale à la fonction.

Une **base complète** est l'ensemble de tous les monômes premiers de la fonction.

Une **base** est **irredondante** si elle cesse d'être une base quand on enlève un monôme.

Un **monôme premier** est **obligatoire** dans une base s'il est le seul parmi tous les monômes de la base à couvrir au moins une case du tableau de Karnaugh de la fonction.

Un **monôme premier** est **essentiel** s'il est obligatoire dans la base complète :

il est le seul à couvrir au moins une case

il est présent dans toutes les bases irredondantes.

Exemple :

AB\CD	00	01	11	10	
00		1			
01		1			| B
11	1			1	||
10	1			1	| A

——D—

——C—

Pour simplifier une fonction **Φ-booléenne** on remplace la valeur indifférente par 0 ou 1 suivant les regroupements possibles. Les mintermes indifférents sont utilisés ou non, pour minimiser le nombre de groupes et maximiser leur taille.

Relation d'**ordre** pour une fonction **Φ**-booléenne : $f \leq g \iff Inf(f) \leq Sup(g)$

Un **monôme** m d'une fonction **Φ**-booléenne f est **premier** ssi tout monôme m' vérifie

$(m' \leq f \text{ et } m \leq m') \Rightarrow (m = m')$

donc m est un plus grand monôme de f.

Une **base** d'une fonction **Φ**-booléenne est un ensemble de monômes premiers, leur somme S vérifie la relation : $Inf(f) \leq S \leq Sup(f)$.

Un **monôme premier** est **obligatoire** dans une base s'il est le seul parmi tous les monômes de la base à couvrir au moins une case du tableau de Karnaugh de la fonction Inf(f).

Un **monôme premier** est **essentiel** s'il est obligatoire dans la base complète :

il est le seul à couvrir au moins une case,
il est présent dans toutes les bases irredondantes.

Exercices :
Simplifier la fonction définie par la somme des mintermes (0, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15).
Faire la synthèse d'un transcodeur du code STIBITZ vers le code DCB.
Réaliser un transcodeur DCB vers 7 segments.
Réaliser un demi-additionneur sur 2 bits puis un additionneur sur 3 bits.