Codage et Assembleur

1- Codage

2- Fonctions et structure d'une machine

3- Algèbre de Boole

4- Les microprocesseurs

5- Programmation

6- Procédure, récursivité et interruptions

7- Assembleur ARM 7

Ch 1 - CODAGE

1 Généralités

1.1 Notion d'information

1.2 Principe de codification

1.3 Notion de langage de codification

1.4 Codage des valeurs booléennes

1.5 Représentation des entiers naturels en base *b*

1.6 Codages des caractères

1.7 Codages des chiffres décimaux
Détection et correction d'erreurs

Chapitre 1 - CODAGE

2 Représentation des nombres

2.1 Entiers naturels

2.2 Nombres positifs à partie fractionnaire

2.3 Entiers relatifs en binaire

2.4 Réels en virgule fixe

2.5 Réels en virgule flottante

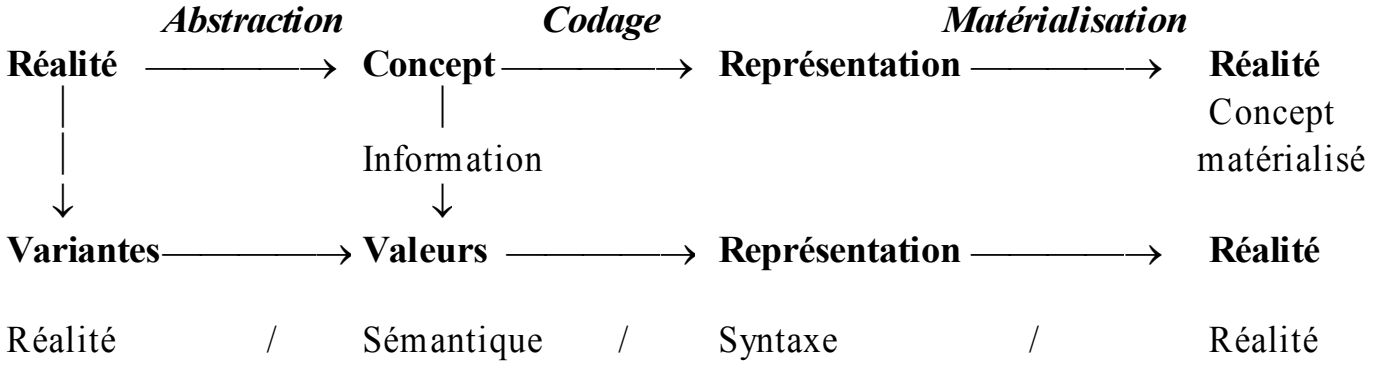
1.1 Notion d'information

- Renseignement, nouvelle : Radio, TV, Presse...
- Renseigne un observateur sur l'état d'un système
- Porte sur les différentes valeurs d'un concept

Exemples de concept :
couleur, nom, âge, température, vitesse...

1.1 Notion d'information (2)

Genèse d'un concept



1.2 Principe de codification

V champ sémantique (ensemble de valeurs d'un concept)
C un ensemble de valeurs de code (représentation)
Un codage est une relation **R** sur **V**x**C**
Un codage fonctionnel est une **application injective**

code : **V** ---> **C** ; $\underline{v}$ ---> c = code($\underline{v}$)

Toute valeur sémantique a sa propre valeur de code

Exemple : l'entier <u>19</u>

19	codage en base 10
10011	codage en base 2
dix-neuf	codage français
XIX	codage romain

1.3 Notion de langage de codification

Un **langage** L est défini par :

- un **alphabet** A (ensemble de symboles)
  $b = |A|$ cardinal de A est la **base** du langage
- un **format** n (nombre de symboles) d'un mot
  un **mot** étant une suite de symboles
- des règles de construction des mots
  contraintes lexicographiques ou syntaxiques

La **puissance lexicographique** d'un langage L est le cardinal de l'ensemble de ses mots, notée $|L|$

1.3 Notion de langage de codification

Puissance lexicographique des langages sans contrainte

Langage L de **format fixe** n : mots de longueur imposée n

$$| L | = b^n$$

Langage de **format variable** n : mots dont la longueur varie de 1 à n

$$| L | = \sum_{i=1}^{n} b^i$$

Le **mot vide** a la longueur 0

La **réunion** L de p langages disjoints L_i

$$| L | = \sum_{i=1}^{p} | L_i |$$

La **concaténation** L de langages L_i

$$| L | = \prod_{i=1}^{p} | L_i |$$

1.4 Codage des valeurs de vérité

La plus petite information : deux valeurs $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\}$

$\underline{v}_1$	$\underline{v}_2$
non	oui
faux	vrai
false	true
0	1

Codage **binaire** ou codage **booléen**,
les valeurs sont les valeurs booléennes **bits** {0,1}

1.5 Représentation des entiers naturels en base *b*

Système de numération en base *b*

base dix	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
base deux	{0, 1}
base seize	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}

Représenter p entiers naturels de 0 à p-1 en format fixe n

$b^{n-1} < p \leq b^n$ ou $n = \text{Entiersup}(log_b\, p)$

La valeur $\underline{v}$ est représentée par la suite de chiffres

$$v = c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0 \quad \text{et} \quad \underline{v} = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{c_i}\,\underline{b}^i$$

1.6 Codages des caractères

Les caractères sont en général ordonnés (chiffres, lettres…)
1- Constituer une liste des *p* caractères utilisés
2- Coder un caractère par son rang de 0 à *p*-1

Les codes informatiques utilisent généralement un **format fixe**
Certains codes sont **contextuels** (code Baudot 5 bits)
Les codes **7 bits ASCII**, ISO... sont les plus utilisés
ainsi que des extensions **8** bits et **16** bits du code ASCII
Pages de codes, codes UTF

Des valeurs numériques sont représentées avec ces codes
Il est difficile d'effectuer des calculs sur les représentations

Code télégraphique international 5 bits

	LETTRES	CHIFFRES	CODE				
1	A	—	1	1	0	0	0
2	B	?	1	0	0	1	1
3	C	:	0	1	1	1	0
4	D	‘‘	1	0	0	1	0
5	E	3	1	0	0	0	0
6	F	É	1	0	1	1	0
7	G	%	0	1	0	1	1
8	H	H	0	0	1	0	1
9	I	8	0	1	1	0	0
10	J	Déclenchement sonnerie	1	1	0	1	0
11	K	(	1	1	1	1	0
12	L	)	0	1	0	0	1
13	M	.	0	0	1	1	1
14	N	,	0	0	1	1	0
15	O	9	0	0	0	1	1
16	P	0	0	1	1	0	1
17	Q	1	1	1	1	0	1
18	R	4	0	1	0	1	0
19	S	'	1	0	1	0	0
20	T	5	0	0	0	0	1
21	U	7	1	1	1	0	0
22	V	=	0	1	1	1	1
23	W	2	1	1	0	0	1
24	X	/	1	0	1	1	1
25	Y	6	1	0	1	0	1
26	Z	+	1	0	0	0	1
27	Retour du chariot		0	0	0	1	0
28	Changement de ligne		0	1	0	0	0
29	Lettres		1	1	1	1	1
30	Chiffres		1	1	0	1	1
31	Espace		0	0	1	0	0
32	Non employé		0	0	0	0	0

Symboles	Transmission par		Ruban perforé
	Circuit ouvert ou fermé	Double courant	
0	Pas de courant	Courant négatif	Trou absent
1	Courant positif	Courant positif	Trou présent

Code Sixbit à 6 bits

CARACTÈRE	CODE	CARACTÈRE	CODE
0	0 0 0 0 0 0	Blanc	0 1 0 0 0 0
1	0 0 0 0 0 1	/	0 1 0 0 0 1
2	0 0 0 0 1 0	S	0 1 0 0 1 0
3	0 0 0 0 1 1	T	0 1 0 0 1 1
4	0 0 0 1 0 0	U	0 1 0 1 0 0
5	0 0 0 1 0 1	V	0 1 0 1 0 1
6	0 0 0 1 1 0	W	0 1 0 1 1 0
7	0 0 0 1 1 1	X	0 1 0 1 1 1
8	0 0 1 0 0 0	Y	0 1 1 0 0 0
9	0 0 1 0 0 1	Z	0 1 1 0 0 1
Espace	0 0 1 0 1 0	‡	0 1 1 0 1 0
=	0 0 1 0 1 1	'	0 1 1 0 1 1
Apostrophe	0 0 1 1 0 0	(	0 1 1 1 0 0
>	0 0 1 1 1 1	-	0 1 1 1 0 1
√	0 0 1 1 1 0	/	0 1 1 1 1 0
		Annulation	0 1 1 1 1 1
—	1 0 0 0 0 0	+	1 1 0 0 0 0
J	1 0 0 0 0 1	A	1 1 0 0 0 1
K	1 0 0 0 1 0	B	1 1 0 0 1 0
L	1 0 0 0 1 1	C	1 1 0 0 1 1
M	1 0 0 1 0 0	D	1 1 0 1 0 0
N	1 0 0 1 0 1	E	1 1 0 1 0 1
O	1 0 0 1 1 0	F	1 1 0 1 1 0
P	1 0 0 1 1 1	G	1 1 0 1 1 1
Q	1 0 1 0 0 0	H	1 1 1 0 0 0
R	1 0 1 0 0 1	I	1 1 1 0 0 1
]	1 0 1 0 1 0	?	1 1 1 0 1 0
$	1 0 1 0 1 1	.	1 1 1 0 1 1
*	1 0 1 1 0 0	)	1 1 1 1 0 0
]	1 0 1 1 0 1	[	1 1 1 1 0 1
;	1 0 1 1 1 0	<	1 1 1 1 1 0
△	1 0 1 1 1 1	≠	1 1 1 1 1 1

Code ISO à 7 bits

valeur des éléments binaires successifs

0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1

eb 7	eb 6	eb 5	eb 4	eb 3	eb 2	eb 1		0	1	2	3	4	5	6	7
			0	0	0	0	0	NUL	Codes de commande réservés à certaines fonctions spécifiques de la transmission et à certains délimiteurs d'informations.	ESPACE	0	à	P	\	p
			0	0	0	1	1			!	1	A	Q	a	q
			0	0	1	0	2			»	2	B	R	b	r
			0	0	1	1	3			$	3	C	S	c	s
			0	1	0	0	4			£	4	D	T	d	t
			0	1	0	1	5			%	5	E	U	e	u
			0	1	1	0	6			&	6	F	V	f	v
			0	1	1	1	7			Apostrophe '	7	G	W	g	w
			1	0	0	0	8			(	8	H	X	h	x
			1	0	0	1	9			)	9	I	Y	i	y
			1	0	1	0	10			*	:	J	Z	j	z
			1	0	1	1	11			+	;	K	Degré °	k	é
			1	1	0	0	12			,	<	L	ç	l	ù
			1	1	0	1	13			—	=	M	§	m	è
			1	1	1	0	14	Sortie du code		.	>	N	^	n	~
			1	1	1	1	15	Entrée dans le code		/	?	O	Souligné —	o	Annulation

Code EBCDIC d'IBM

Équivalent des quatre éléments binaires de faibles poids	Équivalent des quatre éléments binaires de forts poids															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	Nul				Blanc	&	—									0
1									a	j			A	J		1
2									b	k	s		B	K	S	2
3									c	l	t		C	L	T	3
4	Codes de commande								d	m	u		D	M	U	4
5									e	n	v		E	N	V	5
6									f	o	w		F	O	W	6
7									g	p	x		G	P	X	7
8									h	q	y		H	Q	Y	8
9									i	r	z		I	R	Z	9
10					¢	!	.	:								
11					.	$	,	#								
12					<	*	%	@								
13					(	)	—	'								
14					+	;	>	=								
15					/	¬	?	"								

Code ASCII et page de code USA

0	32		64	@	96	`	128	Ç	160	á	192	└	224	α
1 ☺	33	!	65	A	97	a	129	ü	161	í	193	┴	225	ß
2 ☻	34	"	66	B	98	b	130	é	162	ó	194	┬	226	Γ
3 ♥	35	#	67	C	99	c	131	â	163	ú	195	├	227	π
4 ♦	36	$	68	D	100	d	132	ä	164	ñ	196	─	228	Σ
5 ♣	37	%	69	E	101	e	133	à	165	Ñ	197	┼	229	σ
6 ♠	38	&	70	F	102	f	134	å	166	ª	198	╞	230	µ
7 •	39	'	71	G	103	g	135	ç	167	º	199	╟	231	τ
8 ◘	40	(	72	H	104	h	136	ê	168	¿	200	╚	232	Φ
9 ○	41	)	73	I	105	i	137	ë	169	⌐	201	╔	233	Θ
10 ◙	42	*	74	J	106	j	138	è	170	¬	202	╩	234	Ω
11 ♂	43	+	75	K	107	k	139	ï	171	½	203	╦	235	δ
12 ♀	44	,	76	L	108	l	140	î	172	¼	204	╠	236	∞
13 ♪	45	-	77	M	109	m	141	ì	173	¡	205	═	237	ø
14 ♫	46	.	78	N	110	n	142	Ä	174	«	206	╬	238	ε
15 ☼	47	/	79	O	111	o	143	Å	175	»	207	╧	239	∩
16 ►	48	0	80	P	112	p	144	É	176	░	208	╨	240	≡
17 ◄	49	1	81	Q	113	q	145	æ	177	▒	209	╤	241	±
18 ↕	50	2	82	R	114	r	146	Æ	178	▓	210	╥	242	≥
19 ‼	51	3	83	S	115	s	147	ô	179	│	211	╙	243	≤
20 ¶	52	4	84	T	116	t	148	ö	180	┤	212	╘	244	⌠
21 §	53	5	85	U	117	u	149	ò	181	╡	213	╒	245	⌡
22 ▬	54	6	86	V	118	v	150	û	182	╢	214	╓	246	÷
23 ↨	55	7	87	W	119	w	151	ù	183	╖	215	╫	247	≈
24 ↑	56	8	88	X	120	x	152	ÿ	184	╕	216	╪	248	°
25 ↓	57	9	89	Y	121	y	153	Ö	185	╣	217	┘	249	∙
26 →	58	:	90	Z	122	z	154	Ü	186	║	218	┌	250	·
27 ←	59	;	91	[	123	{	155	¢	187	╗	219	█	251	√
28 ∟	60	<	92	\	124	¦	156	£	188	╝	220	▄	252	ⁿ
29 ↔	61	=	93	]	125	}	157	¥	189	╜	221	▌	253	²
30 ▲	62	>	94	^	126	~	158	₧	190	╛	222	▐	254	■
31 ▼	63	?	95	_	127	⌂	159	ƒ	191	┐	223	▀	255	

Code ASCII page de code Latin

0		32		64	@	96	`	128	Ç	160	á	192	└	224	ó
1	☺	33	!	65	A	97	a	129	ü	161	í	193	┴	225	ß
2	☻	34	"	66	B	98	b	130	é	162	ó	194	┬	226	ô
3	♥	35	#	67	C	99	c	131	â	163	ú	195	├	227	ò
4	♦	36	$	68	D	100	d	132	ä	164	ñ	196	─	228	õ
5	♣	37	%	69	E	101	e	133	à	165	Ñ	197	┼	229	Õ
6	♠	38	&	70	F	102	f	134	å	166	ª	198	ã	230	µ
7	•	39	'	71	G	103	g	135	ç	167	º	199	Ã	231	þ
8	◘	40	(	72	H	104	h	136	ê	168	¿	200	╚	232	Þ
9	○	41	)	73	I	105	i	137	ë	169	®	201	╔	233	Ú
10	◙	42	*	74	J	106	j	138	è	170	¬	202	╩	234	Û
11	♂	43	+	75	K	107	k	139	ï	171	½	203	╦	235	Ù
12	♀	44	,	76	L	108	l	140	î	172	¼	204	╠	236	ý
13	♪	45	-	77	M	109	m	141	ì	173	¡	205	═	237	Ý
14	♫	46	.	78	N	110	n	142	Ä	174	«	206	╬	238	¯
15	☼	47	/	79	O	111	o	143	Å	175	»	207	¤	239	´
16	►	48	0	80	P	112	p	144	É	176	░	208	ð	240	-
17	◄	49	1	81	Q	113	q	145	æ	177	▒	209	Ð	241	±
18	↕	50	2	82	R	114	r	146	Æ	178	▓	210	Ê	242	‗
19	‼	51	3	83	S	115	s	147	ô	179	│	211	Ë	243	¾
20	¶	52	4	84	T	116	t	148	ö	180	┤	212	È	244	¶
21	§	53	5	85	U	117	u	149	ò	181	Á	213	ı	245	§
22	▬	54	6	86	V	118	v	150	û	182	Â	214	Í	246	÷
23	↨	55	7	87	W	119	w	151	ù	183	À	215	Î	247	¸
24	↑	56	8	88	X	120	x	152	ÿ	184	©	216	Ï	248	°
25	↓	57	9	89	Y	121	y	153	Ö	185	╣	217	┘	249	¨
26	→	58	:	90	Z	122	z	154	Ü	186	║	218	┌	250	·
27	←	59	;	91	[	123	{	155	ø	187	╗	219	█	251	¹
28	∟	60	<	92	\	124	|	156	£	188	╝	220	▄	252	³
29	↔	61	=	93	]	125	}	157	Ø	189	¢	221	¦	253	²
30	▲	62	>	94	^	126	~	158	×	190	¥	222	Ì	254	■
31	▼	63	?	95	_	127	⌂	159	ƒ	191	┐	223	▀	255	

1.7 Codages des chiffres décimaux

Codes spéciaux sur 4 bits ou plus

DCB, STIBITZ, GRAY, 2 parmi 5…

Codes pondérés

Représentation des entiers par concaténation des codes des chiffres
On construit ainsi des représentations de représentations

Des bits supplémentaires sont ajoutés aux représentations pour la **détection** et la **correction d'erreurs** de transmission

Bits de parité

Codes linéaires

Distance de Hamming

Code DCB : Décimal Codé Binaire

Chiffres	Représentation DCB
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Code STIBITZ excès de trois

Chiffres	Représentation STIBITZ
0	0011
1	0100
2	0101
3	0110
4	0111
5	1000
6	1001
7	1010
8	1011
9	1100

Code Acken

Table du code Acken

	b4	0	0	1	1
b2	b1 \ b3	0	1	0	1
0	0	0	4	-	6
0	1	1	-	-	7
1	0	2	-	-	8
1	1	3	-	5	9

Point de symétrie

Les codes décimaux pondérés

- **Codes pondérés**
  La valeur c du chiffre représenté est
  $c = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 + a_4.b_4$
  a_1, a_2, a_3, a_4 sont les poids du code
  b_1, b_2, b_3, b_4 sont les bits de la représentation
- Systèmes de poids

  1,1,2,5 – 1,1,3,4 – 1,1,3,5 – 1,1,3,6 – 1,2,2,4 – 1,2,2,5 – 1,2,2,6 – 1,2,3,3 – 1,2,3,4 – 1,2,3,5 – 1,2,3,6 – 1,2,3,7 – 1,2,4,4 – 1,2,4,5 – 1,2,4,6 – 1,2,4,7 – 1,2,4,8.
- Des poids peuvent être négatifs (6, 3, 1, -1)

Codes décimaux pondéré

code 5, 2, 1, 1

Comment est représenté le nombre 1789 avec le code de poids 5, 2, 1,1 ? Vérifier le code et coder.

Chiffres \ Poids	5	2	1	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	1	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	0	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0
9	1	1	1	1

1789

0001 1100 1110 1111

Propriétés des codes décimaux

- Les **codifications à suite ordonnée**
  L'assignation sémantique respecte l'ordre lexicographique des combinaisons croissant ou décroissant.
- Les **codifications à suite naturelle**
  Ce sont des codes à suite ordonnée composée des successeurs ou des prédécesseurs.
- Les **codifications auto-complémentaires**
  La représentation du complément à 9 d'un chiffre décimal c s'obtient en complémentant tous les bits de la représentation du chiffre initial c.

Code décimal pondéré 6, 3, 1, -1

Exemple de codification auto-complémentaire

Chiffres \ Poids	6	3	1	-1
0	0	0	1	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	0	0
7	1	0	1	0
8	1	1	0	1
9	1	1	0	0

Contrôle automatique de parité

Code DCB avec parité

Chiffres	Représentation DCB	Clé
0	0000	1
1	0001	0
2	0010	0
3	0011	1
4	0100	0
5	0101	1
6	0110	1
7	0111	0
8	1000	0
9	1001	1

Contrôle de parité croisée

					Clés de parité transversale ↓	
1er chiffre :	0	0	0	0	1
2ème chiffre :	0	1	0	1	1
3ème chiffre :	0	1	1	1	0
4ème chiffre :	1	0	0	1	1
5ème chiffre :	0	0	1	1	0
6ème chiffre :	0	1	0	0	0
7ème chiffre :	0	0	0	0	1
8ème chiffre :	0	0	1	0	0
parité longitudinale →	0	1	0	1	1

Code auto-correcteur de Hamming

- M bits de donnée mi et K bits de contrôle kj
  K décrit M + K + 1 situations : message correct et M + K positions d'erreur donc K vérifie $2^k \geq M + K + 1$
- Pour M = 4, il suffit de prendre K = 3
  - $m_4\ m_3\ m_2\ k_3\ m_1\ k_2\ k_1$
  - k_3 contrôle la parité de $m_4\ m_3\ m_2$
  - k_2 contrôle la parité de $m_4\ m_3\ m_1$
  - k_1 contrôle la parité de $m_4\ m_2\ m_1$

  Tester 1 bit erroné puis 2

Codes linéaires

Exemple : un seul bit de données m et K bits de contrôle kj redondants

Il n'y a que 2 messages corrects : 0...0 et 1...1
Les erreurs sont corrigées en prenant le message correct le plus proche suivant la distance de Hamming (nombre de bits différents).

Pour K = 1, 2, 3 et 4
déterminer le nombre d'erreurs détectées et le nombre d'erreurs corrigées

2.1 Les entiers naturels

Codage en base *b* :
Un entier naturel $\underline{v}$ est représenté par la suite de n chiffres

$$v = (c_{n-1}c_{n-2}...c_1c_0)_b \quad \text{et} \quad \underline{v} = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{c_i}\,\underline{b}^i$$

Exemple : 1996 est codé

$(11111001100)_2$	en binaire
$(2201221)_3$	en ternaire
$(3714)_8$	en octal
$(1996)_{10}$	en décimal
$(7CC)_{16}$	en hexadécimal

Nombre \ Base	2	8	16
0	***0***	***0***	**0**
1	***1***	***1***	**1**
2	***10***	***2***	**2**
3	***11***	***3***	**3**
4	***100***	***4***	**4**
5	***101***	***5***	**5**
6	***110***	***6***	**6**
7	***111***	***7***	**7**
8	**1000**	10	**8**
9	**1001**	11	**9**
10	**1010**	12	**A**
11	**1011**	13	**B**
12	**1100**	14	**C**
13	**1101**	15	**D**
14	**1110**	16	**E**
15	**1111**	17	**F**
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13

Conversion base *b* base b^k

- Regrouper les chiffres par k en commençant par les unités
- Remplacer chaque groupe par le chiffre en base b^k

$$(19)_{10} = (010\ 011)_2$$
$$= (23)_8$$
$$= (0001\ 0011)_2$$
$$= (13)_{16}$$

Conversion base 10 base *b* (partie entière)

Algorithme

$i := 0$;
répéter $r_i := x \bmod b$; $x := x \operatorname{div} b$; $i := i + 1$;
jusqu'à $x = 0$;
$n := i$;

La suite des restes donne la représentation de x en base b

$$x = (r_{n-1} r_{n-2} \ldots r_1 r_0)_b$$

Le **dernier reste** trouvé correspond au chiffre le **plus significatif**

Conversion base *b* base 10

Développer la somme $\underline{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{c_i}\, \underline{b}^i$ avec l'algorithme de Horner

$$(2345)_8 = (((2)x8+3)x8+4)x8+5$$

Passage de base 10 à base b

Exemple : $(131)_{10} = (?)_2$

131	2														
1	65	2													
	1	32	2												
		0	16	2											
			0	8	2										
				0	4	2									
					0	2	2								
						0	1	2							
							1	0							

$(131)_{10} = (10000011)_2$

Passage de base b à base 10

Exemple : $(FEAC9B)_{16} = (?)_{10}$

Il suffit de développer $\sum_{i=0}^{n-1} c_i b^i$

$(FEAC9B)_{16} = (11*16^0 + 9*16^1 + 12*16^2 + 10*16^3 + 14*16^4 + 15*16^5)_{10}$

$= (11*1 + 9*16 + 12*256 + 10*4096 + 14*65536 + 15*1048576)_{10}$

$= (16690331)_{10}$

On peut utiliser l'algorithme de Horner

Passage base b base b^k

Exemple : $(111110000101)_2 = (?)_{16}$

$(1111)_2$	$(1000)_2$	$(0101)_2$
$(15)_{10}$	$(8)_{10}$	$(5)_{10}$
$(F)_{16}$	$(8)_{16}$	$(5)_{16}$

$(111110000101)_2 = (F85)_{16}$

Exemple : $(7605)_8 = (\ ?)_2$

$(7)_8$	$(6)_8$	$(0)_8$	$(5)_8$
$(111)_2$	$(110)_2$	$(000)_2$	$(101)_2$

$(7605)_8 = (\ 111110000101)_2$

2.2 Les nombres positifs à partie fractionnaire

La partie fractionnaire n'a pas toujours un nombre fini de chiffres
Utiliser une **valeur approchée** avec *p* chiffres après la virgule
On parle d'**erreur de chute**

$$\underline{x} = \sum_{i=-p}^{n-1} \underline{c_i}\,\underline{b}^i \quad \text{et} \quad x = (\ c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0\ ,\ c_{-1}c_{-2}\ldots c_{-p+1}c_{-p}\ )_b$$

$$1/3 = (0{,}1)_3 = (0{,}333333\ldots)_{10}$$

Conversion base 10 base *b* (partie fractionnaire)

Algorithme

pour i := -1 pas -1 à $-p$ faire

$x := (x - \mathrm{INT}(x)) * b$; $c_i := \mathrm{INT}(x)$;

fait

Exercice : Convertir 109,125 en binaire

Conversion base *b* base 10

Calculer la somme $\underline{x} = \sum_{i=-p}^{n-1} \underline{c_i}\,\underline{b}^i$ avec l'algorithme de Horner

$$(0{,}2345)_8 = \frac{1}{8}(2+\frac{1}{8}(3+\frac{1}{8}(4+\frac{1}{8}(5))))$$

Conversion entre les bases b_1 et b_2

Passer par la base dix ; si $b_1 = b^{k1}$ et $b_2 = b^{k2}$ passer par la base b

Passage base 10 base b

Exemple : $(100{,}125)_{10} = (?)_2$

- On convertit la partie entière : $(100)_{10} = (1100100)_2$
- Pour la partie fractionnaire on applique l'algorithme :

0,125 * 2 = 0,25

0,25 * 2 = 0,5

0,5 * 2 = 1,0

0,0 * 2 = 0,0

0,0 * 2 = …

$(100{,}125)_{10} = (1100100{,}0010\ldots)_2$

Passage base b base 10

Algorithme : développer :

$$\underline{x} = \sum_{i=-p}^{-1} c_i b^i$$

Exemple : $(0{,}2345)_8 = (?)_{10}$

$$(0.2345)_8 = \left((0)_{10} * 8^0 + (2)_{10} * 8^{-1} + (3)_{10} * 8^{-2} + (4)_{10} * 8^{-3} + (5)_{10} * 8^{-4} \right)_{10}$$

ou utiliser l'algorithme de Horner

2.3 Les entiers relatifs en binaire

Format fixe sur n bits $(a_{n-1} \ldots a_0)$

Nombre fini d'entiers relatifs x dans $[m, M]$

Les entiers trop grands ou trop petits ont leur partie haute troquée

c'est un **dépassement de capacité** de la représentation

Addition en base 2

```
          1
    5     0     1     0     1
+   6     0     1     1     0
   ---   -----------------------
   11     1     0     1     1
```

Représentation en signe et valeur absolue

Le bit le plus significatif a_{n-1} représente le signe de l'entier :

$a_{n-1} = 0$ si le nombre est positif

$a_{n-1} = 1$ si le nombre est négatif

La valeur absolue est représentée par les n-1 bits (a_{n-2} ... a_0)

Le calcul d'une somme n'est pas immédiat

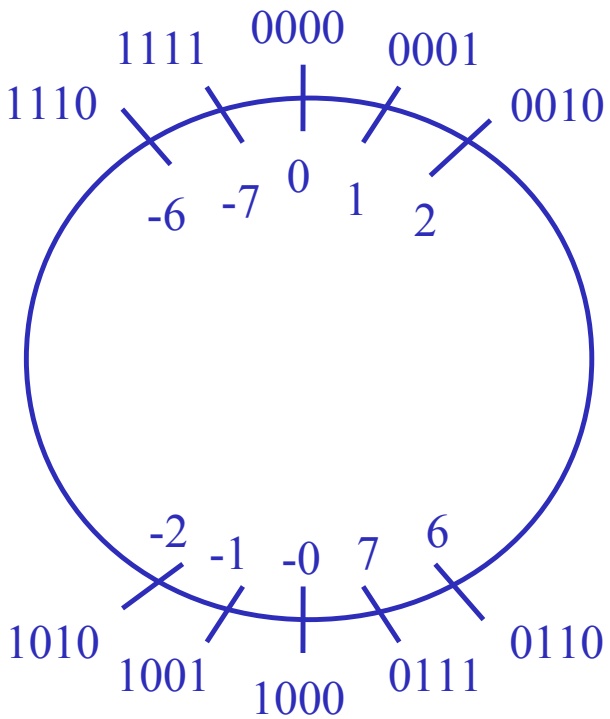
le signe dépend du signe et de la valeur absolue des nombres

la valeur absolue est obtenue par addition ou soustraction

Deux représentations pour zéro : -0 et +0

Signe et valeur absolue

Ex. sur 4 bits



Représentation en complément restreint

Entier positif représenté par sa valeur absolue en binaire $a_{n-1} = 0$
Entier négatif représenté par le complément restreint
de la représentation de sa valeur absolue

$$-x = \mathrm{CR}(x)$$

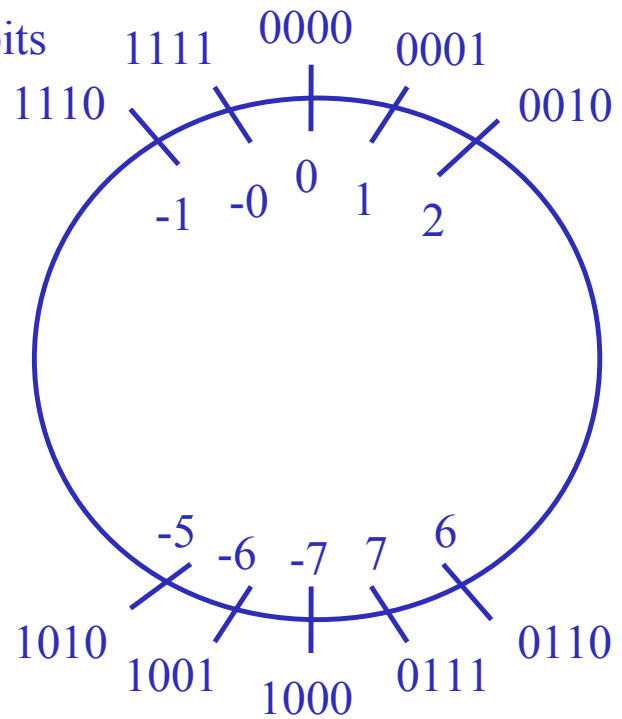
Le complément restreint se calcule en complémentant chaque bit

$\underline{x}$:	$(x_{n-1} \ldots x_0)$	$\underline{-x}$:	$(\overline{x_{n-1}} \ldots \overline{x_0})$
3 :	(0 0 1 1)		
-3 :	(1 1 0 0)		

Propriété : $x = \mathrm{CR}(\mathrm{CR}(x))$
Ajuster le résultat de l'addition suivant la retenue à cause de -0
OVERFLOW : nombres de même signe et somme de signe opposé

Complément restreint

Ex. sur 4 bits



Représentation en complément vrai complément à deux

Entier positif représenté par sa valeur absolue en binaire $a_{n-1} = 0$

Entier négatif représenté par le complément vrai
de la représentation de sa valeur absolue

$$-x = CV(x) = CR(x) + 1$$

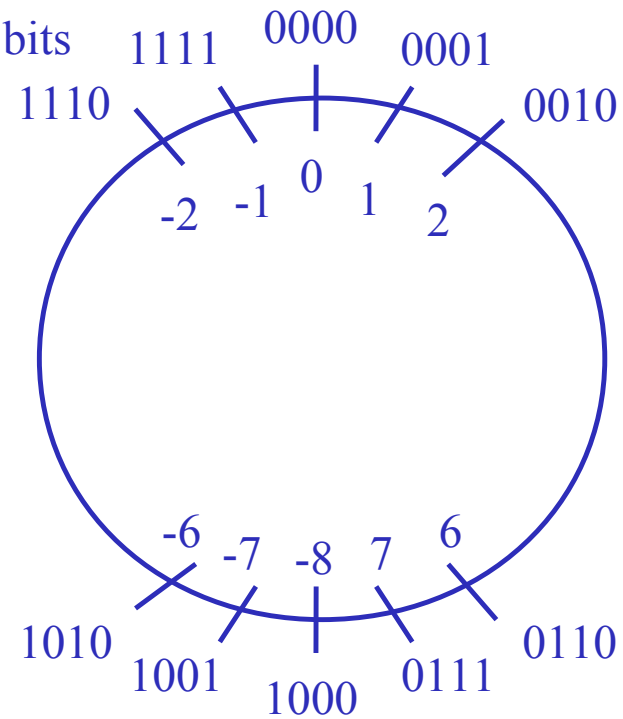
Le complément vrai se calcule en ajoutant 1 au complément restreint
le bit a_n est ignoré

3 :	(0 0 1 1)	0	(0 0 0 0)
	(1 1 0 0) = CR(3)		(1 1 1 1) = CR(0)
	+1		+1
-3 :	(1 1 0 1) = CV(3)	0	1(0 0 0 0) = CV(0)

Propriété : $x = CV(CV(x))$

Complément vrai (à deux)

Ex. sur 4 bits



Représentation en excès à 2^{n-1}

Entier relatif x représenté par $(x + \mathbf{2}^{n-1}) \bmod \mathbf{2}^{n}$

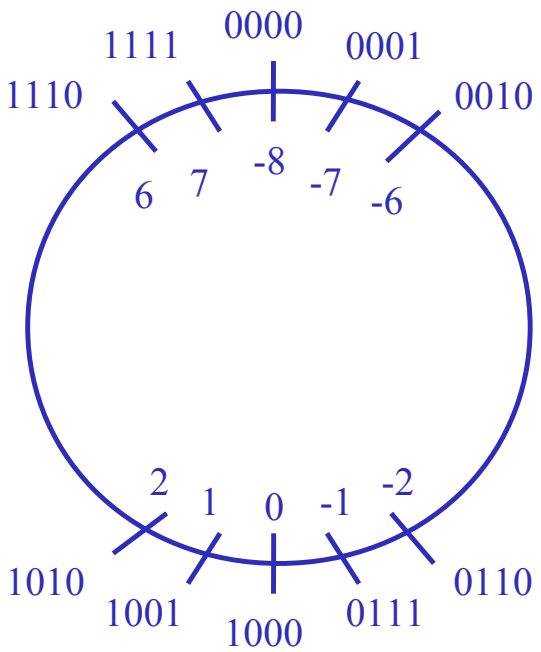
Zéro est représenté par $\mathbf{2}^{n-1}$ en binaire

Corriger le résultat de l'addition en retranchant $\mathbf{2}^{n-1}$
par complémentation du bit de signe a_{n-1}

Exercices :
1- Pour le format fixe n=4 calculer
2+3, 3+(-2), (-5)+(-2), 6+3, (-4)+3, (-5)+(-3), (-5)+5, (-4)+(-5)
avec les quatre représentations.
2- Déterminer le plus grand nombre représentable et le plus petit pour chaque représentation

Excès à 2^{n-1}

Excès à 8 sur 4 bits



2.4 Les réels en virgule fixe

Le réel x est multiplié par un facteur constant $\mathbf{2}^p$ où $p > 0$

$$\underline{x} = s \sum_{i=-p}^{n-1} \underline{c_i 2^i} \quad ; x \ \mathbf{2}^p = s\ (\ c_{n-1}c_{n-2}...c_1c_0c_{-1}c_{-2}...c_{-p+1}c_{-p}\ )_2 \ ; s = \mathrm{sgn}(x)$$

On obtient un entier relatif sur $n+p$ bits, la virgule n'apparaît plus
Seule la connaissance du facteur $\mathbf{2}^p$ permet de retrouver sa position

Placer correctement le 1 lors du calcul du complément vrai

On a les mêmes problèmes qu'avec les entiers relatifs :
erreur de chute, erreur de dépassement de capacité
Overflow : erreur de dépassement arithmétique

Représentation en virgule fixe

Représenter -109,125 sur 12 bits dont 4 pour la partie fractionnaire

On représente en base 2 le réel 109,125

$(109{,}125)_{10} \rightarrow (01101101{,}0010)_2$

On le multiplie par le facteur constant de 2^4

$(01101101{,}0010)_2\ 2^4 = (011011010010)_2$

On utilise la représentation en complément vrai

CR(011011010010) + 1 = 100100101101 + 1
= 100100101110

Donc -109,125 → 100100101110

2.5 Les réels en virgule flottante

Inconvénients des représentations en virgule fixe

- l'erreur due au débordement
- l'erreur de chute cause un défaut de précision

Les représentations en virgule flottante représentent les réels x avec le même nombre de chiffres significatifs, la mantisse **0,m** est **normalisée**

$x = (-1)^s \times 0{,}m \times 2^e$ avec $0{,}1 \leq 0{,}m < 1$

Virgule flottante REAL

En Turbo Pascal le format REAL utilise 48 bits (6 octets)

m = 0,1F C = e + 128

1	39	8
S	F	C

si C = 0 et F = 0 X = 0

sinon $X = (-1)^S \times 0.1F \times 2^{(C-128)}$

Exemple : X = 5

Virgule flottante SINGLE (IEEE)

Le format SINGLE utilise 32 bits (4 octets)

$C = e + 128$

1	8	23
S	C	F

$0 < C < 255$	$X = (-1)^S \times 0.1F \times 2^{(C-126)}$
$C = 0$ et $F \neq 0$	$X = (-1)^S \times 0.F \times 2^{-126}$
$C = 0$ et $F = 0$	$X = (-1)^S\ 0$
$C = 255$ et $F = 0$	$X = (-1)^S\ \infty$
$C = 255$ et $F \neq 0$	NaN (Not a Number)

Virgule flottante DOUBLE (IEEE)

Le format DOUBLE utilise 64 bits (8 octets)

$C = e + 1022$

1	11	52
S	C	F

$0 < C < 2047$	$X = (-1)^S \times 0.1F \times 2^{(C-1022)}$
$C = 0$ et $F \neq 0$	$X = (-1)^S \times 0.F \times 2^{-1022}$
$C = 0$ et $F = 0$	$X = (-1)^S\ 0$
$C = 2047$ et $F = 0$	$X = (-1)^S\ \infty$
$C = 2047$ et $F \neq 0$	NaN

Virgule flottante EXTENDED (IEEE)

Le format EXTENDED utilise 80 bits (10 octets)

$C = e + 16382$ $I = 0$ ou 1 $0{,}m = 0{,}IF$

1	15	1	63
S	C	I	F

$0 < C < 32767$ $X = (-1)^S \times 0.IF \times 2^{(C-16382)}$

$C = 32767$ et $F = 0$ $X = (-1)^S \infty$

$C = 32767$ et $F \neq 0$ NaN