Определение справедливой цены парковки в случае кольцевого движения

Зюзин Владимир, Худайбердиев Юсуф

2019г.

1 Постановка задачи.

В этом году предлагалось распространить результаты со случая простейшего графа, состоящего всего их двух районов (вершин): жилой район и рабочий район, на кольцо: все вершины графа одновременно являются и жилыми и рабочими районами. Жители каждого района в равных пропорциях работают в оставшихся районах. Движение на кольце одностороннее, а дороги между районами одинаковые и для личного транспорта и для общественного.

Будем считать, что городов N и они расположены друг относительно друга на одном и том же расстоянии на этом кольце. Также, при моделировании будем руководствоваться следующей логикой, которой могут следовать люди: чем ближе я к месту работы, тем позже я выеду из дома.

Введем следующие утверждения:

1. люди выезжают на работу в соответствии с тем, насколько далеко им добираться до нее (то есть, как много городов им предстоит проехать на своем пути). Иными словами: раньше выезжают те, кому ехать до работы дольше.

2. Люди выезжают с работы в одно и то же время из всех городов и высаживаются по ходу движения в своем "домашнем" городе.

3. Общественный транспорт не едет по одним дорогам с личным.

В таком случае, можно наблюдать следующую ситуацию:

Пусть люди из города 1 выезжают в город N самые первые. К тому моменту, когда они доедут до города 2, первые жители города 2, которые едут в город N, тоже начнут выезжать. Таким образом, на дороге из города 2 в город 3 пересекутся потоки людей, которые едут в город N. Но при этом в тот момент, масса людей, едущих в город $N-1$ (то есть более близкий), только начнет выезжать. Отсюда приходим к следующему: *люди, которые едут в разные города на работу, на дороге не пересекутся.* Пересекаться же будут только люди, которые едут в один и тот же город на работу, а

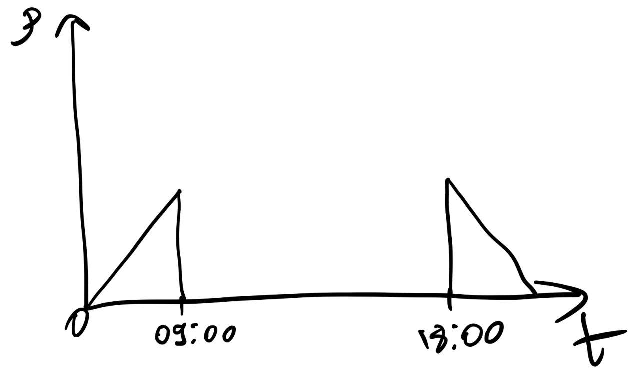

Рис. 1: Зависимость плотности потока от времени

это приводит к тому, что со временем, плотность на дороге, возрастает с каждым городом до тех пор, пока человек не приедет на работу, после чего резко убывает до 0. Примерный график показан на Рис.1.

Плюс к этому, рассматривая задачу исходя из таких предположений, получается, что задача симметрична относительно города начала и нечувствительна к тому, из какого города начинается движение той или иной доли людей.

Покажем, что это действительно так: так как популяция городов одинакова, расстояние между городами одинаковое, общественный и личный транспорт не пересекается и из утверждения 1 потоки пересекаются только у тех жителей, которым нужно проехать в один и тот же город, получим, что человек, которому ехать из города 1 в город $N-1$ потратит столько же времени, как и человек, которому надо добраться из города 2 в город N.

Поэтому, далее будем полагать без ограничения общности, что выезд происходит из города 1.

При этом, заметим, что такую ситуацию вполне можно наблюдать и в реальной жизни: представим себе МКАД. Если людям надо доехать в какой-то район, предположим, Ясенево, то выйдет такая ситуация: они будут пересекаться на дороге с людьми, которые едут в другие районы, но при этом, около въезда в Ясенево плотность потока, в которой побывал данный человек, будет максимальной. А именно, при въезде он встретит всех тех из других районов, кому тоже надо в Ясенево. Поэтому, можно считать, что построенная модель в какой-то мере аппроксимирует реальную ситуацию на дороге.

2 Предварительные сведения.

Обозначим долю людей, перемещающихся на работу из города 1 в город N как x_{1N}, из города 2 в город N как x_{2N} и так далее. Заметим, что на самом деле из симметрии нам важны не первый и последний пункт, а количество дорог между ними, то есть можно переобозначить x_{1N} как x_{N-1}.

Пусть t_k – временные затраты человека, которому надо проехать k городов от дома до работы, а $T(x)$ – время поездки по одной дороге в зависимости от нагрузки x личного транспорта на ней. Тогда всего в дороге за сутки такой человек будет проводить следующее время t_k:

$$t_k = T(x_{N-1} + \ldots + x_k) + T(x_{N-1} + \ldots + x_{k-1}) + \ldots + 2T(x_{N-1} + \ldots + x_1) +$$

$$+T(x_{N-2} + \ldots x_1) + \ldots + T(x_k + \ldots x_1),$$

В данной модели мы пользуемся следующей зависимостью:

$$T(x) = T_0 + \gamma x^4$$

Введем также вектор $\vec{x}$ – вектор долей людей, которые решили поехать на автомобиле. На k-ой координате этого вектора стоит доля людей, решивших воспользоваться личным транспортом, среди людей, которым нужно проехать k городов до работы. По условию, каждая координата этого вектора при добавлении к ней доли людей, решивших воспользоваться общественным транспортом, даст $\frac{1}{N-1}$.

В дальнейшем мы будем также пользоваться обозначением $x(p)$ – эта зависимость обозначает долю жителей города, оценивающих одну минуту своего времени не меньше, чем в p рублей.

Эту зависимость можно моделировать законом Ципфа-Парето $x(p) = p^{-\eta}$, где $\eta \in [1, 2]$. В данной работе мы представляем его как $x(p) = \frac{c}{p} + d$. c и d вычисляются из краевых условий: $x(p_{min}) = 1$, $x(p_{max}) = 0$. Отсюда получим, что

$$c = \frac{p_{max} \cdot p_{min}}{p_{max} - p_{min}}, d = -\frac{p_{min}}{p_{max} - p_{min}}.$$

3 Решение.

Распишем ежедневные потери людей, передвигающихся на автомобилях A_{ip} и на общественном транспорте B_{ip}:

$$A_{ip} = a + hq + pt_i(\vec{x}),$$

$$B_{ip} = b_1 + pb_2,$$

Здесь a – постоянные суточные затраты на автомобиль, h – часы простоя машины, q – цена одного часа парковки, p – субъективнеая оценка человеком минуты его времени, b_1 – постоянные затраты (суммарная цена билетов), b_2 – время в пути (считаем всегда постоянным).

Чтобы найти зависимость $p_i(\vec{x})$, надо приравнять A_{ip} и B_{ip}. После приравнивания имеем:

$$p_i(\vec{x}) = \frac{a + hq - b_1}{b_2 - t_i(\vec{x})}$$

Отсюда получаем, что в отличие от прошлой постановки задачи, $p(\vec{x})$ не скалярная функция, а векторная. Будем обозначать ее как $\vec{p}(\vec{x})$ – вектор равновесных цен минуты времени.

Представим себе такую динамику (повторяющуюся изо дня в день). Каждый житель в $k+1$-й день смотрит на распределение долей жителей $\vec{x}^k$, использовавших личный автомобиль в k-й день. Считаем, что такая информация (статистика) по вчерашнему дню общедоступна (например, благодаря каким-нибудь интернет сервисам, скажем, Яндекс.Пробки). Исходя из этой информации, каждый житель, оценивающий минуту своего времени в p рублей, оценивает (экстраполируя ситуацию вчерашнего дня на день сегодняшний, за неимением точной информации о $\vec{x}^{k+1}$) свои затраты от двух возможных альтернатив: $A_{ip}(\vec{x}^k)$ – личный автомобиль и B_{ip} – общественный транспорт. Мы считаем всех жителей рациональными, поэтому из двух альтернатив, каждый житель выбирает ту, которая приносит ему наименьшие затраты. Таким образом, происходит формирование x. Из описанного выше ясно, что жители города в $(k+1)$-й день, оценивающие единицу своего времени в $p(\vec{x}^k) < p \leq p_{max}$ рублей, предпочтут в этот день личный автомобиль, а жители, оценивающие единицу своего времени в $p_{min} \leq p < p(\vec{x}^k)$ рублей предпочтут в этот день общественный транспорт.

Вернемся опять к зависимости $x(p)$. Строго говоря, она теперь тоже векторная, но пока рассмотрим лишь ее i-ю координату. Так как по условию люди, живущие в одном городе, распределены по рабочим городам равномерно, и сумма координат вектора $\vec{x}$ должна быть равна 1 по определению x_i, то необходимо отнормировать закон Ципфа еще и на $\frac{1}{N-1}$ для каждой координаты:

$$x_i = x(p_i) = \left(\frac{c}{p} + d\right) \cdot \frac{1}{N-1} = -\frac{ct_i(\vec{x})}{(N-1)(a + hq - b_1)} + const$$

В итоге получим:

$$\vec{x}(\vec{p}) = -\frac{c\vec{t}(\vec{x})}{(N-1)(a + hq - b_1)} + const$$

Таким образом, в $(k+1)$-й день доля $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}(\vec{p}(\vec{x}^k))$ жителей города использует (выберет) личный автомобиль.

Чтобы описанная выше динамика сходилась, необходимо, чтобы матрица первых производных C, такая что $c_{ij} = \frac{\partial x_i^{k+1}}{\partial x_j^k}$ имела норму меньше 1.

Выведем формулу для $\left\| \frac{\partial x_i^{k+1}}{\partial x_j^k} \right\|$

Шаг итерационного процесса теперь будем обозначать как n, чтобы не путать с количеством проеханных дорог. Из формулы выше:

$$\vec{x}^{n+1}(\vec{x}^n) = -\frac{c\vec{t}(\vec{x}^n)}{(N-1)(a+hq-b_1)} + const$$

Тогда:

$$\frac{\partial \vec{x}^{n+1}}{\partial \vec{x}^n} = -\frac{c}{(N-1)(a+hq-b_1)} \frac{\partial \vec{t}(\vec{x}^n)}{\partial \vec{x}^n}$$

,

где

$$\frac{\partial \vec{t}(\vec{x}^n)}{\partial \vec{x}^n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1(\vec{x}^n)}{\partial x_1^n} & \dots & \frac{\partial t_1(\vec{x}^n)}{\partial x_{N-1}^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial t_{N-1}(\vec{x}^n)}{\partial x_1^n} & \dots & \frac{\partial t_{N-1}(\vec{x}^n)}{\partial x_{N-1}^n} \end{pmatrix}$$

Учитывая, что $T(x) = T_0 + \gamma x^4$ и обозначив $x^n = \sum\limits_{i=1}^{N-1} x_i^n$ - суммарная доля людей города, решивших в день n воспользоваться личным транспортом, - получим:

$$\frac{\partial \vec{t}(\vec{x}^n)}{\partial \vec{x}^n} = 4\gamma \begin{pmatrix} (x_1^n)^3 + (x_1^n + x_2^n)^3 + \ldots + 2(x^n)^3 & \dots & 2(x^n)^3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2(x^n)^3 & \dots & (x_{N-1}^n)^3 + \ldots + 2(x^n)^3 \end{pmatrix}$$

Заметим, что максимальные числа в этой матрице стоят на главной диагонали. Оценим их грубо сверху на примере первого диагонального (остальные оцениваются аналогично):

$$(x_1^n)^3 + (x_1^n + x_2^n)^3 + \ldots + 2(x^n)^3 \leq \left(\frac{1}{N-1}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^3 + 2 =$$

$$= \frac{1^3 + 2^3 + ... + (N-1)^3}{(N-1)^3} + 1 =^{1} \frac{(N-1)^2 N^2}{4(N-1)^3} + 1 = \frac{N^2}{4(N-1)} + 1$$

Тогда:

$$\left\| \frac{\partial x_i^{k+1}}{\partial x_j^k} \right\| = \frac{c}{(N-1)(a+hq-b_1)} \left\| \frac{\partial \vec{t}(\vec{x}^n)}{\partial \vec{x}^n} \right\| \leq^{2} \frac{c\gamma}{(a+hq-b_1)} \left(\frac{N^2}{(N-1)} + 4 \right)$$

[1]Из того, что $\sum\limits_{i=1}^{n} n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Отсюда можем получить ограничение на цену парковки:

$$\left\|\frac{\partial x_i^{k+1}}{\partial x_j^k}\right\| < 1 \Leftrightarrow q > \frac{\gamma c N^2/(N-1) - a + b_1}{h}$$

Данное условие будет являться достаточным для сходимости итерационного процесса.

Отметим, что в случае большого числа городов (40+) можно использовать следующее приближение:

$$q > \frac{\gamma c N - a + b_1}{h}$$

Отсюда видно, что с увеличением числа городов цена парковки тоже должна линейно возрастать с коэффициентом $\frac{\gamma c}{h}$

4 Эксперимент.

В рамках решения этой задачи был проведен эксперимент для случая трёх городов.

Параметры для эксперимента были выбраны следующим образом:

- a = 219.7
- $b_1 = 142$
- $b_2 = 134$
- gamma = 15
- $T_0 = 25$
- h = 8
- q = 100
- $p_{min} = 2.08$
- $p_{max} = 52.1$
- $x_0 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

При проведении эксперимента итерационный процесс сошёлся до нужной точности (5 знаков после запятой) за 2 итерации, показав итоговый результат:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.05202 \\ 0.05202 \end{pmatrix}$

[2]Следует из того, что

$$\|A\| \leq N * max\{A_{ij}\}$$

, где N - размерность матрицы. Доказательство этого тривиального факта оставим читателю в качестве упражнения.