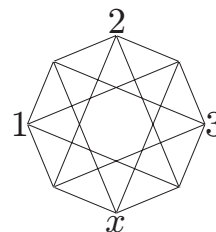

Qüestions de 3 punts:

1. En l'octògon de la figura s'han dibuixat vuit diagonals. Volem escriure en cada vèrtex una de les xifres 1, 2, 3 o 4, de manera que en els extrems dels setze segments dibuixats (costats i diagonals) hi haja xifres diferents. Si ja hi hem escrit les tres xifres que es veuen en el dibuix, quantes xifres distintes poden anar en el vèrtex indicat amb la x ?



A) Només una B) Dues C) Tres D) Quatre E) Cap, no es pot completar.

2. Siguen dos cercles coplanaris. El més petit té un radi de 10 cm. La distància entre els centres és de 6 cm. Els cercles només tenen un punt en comú. Quin és el radi del cercle més gran?

A) 12 cm B) 13 cm C) 14 cm D) 15 cm E) 16 cm

3. Els segments AB i AC són perpendiculars. La distància des d'el punt mitjà del segment BC fins al segment AB és més petita que la distància d'este punt fins al segment AC . Quina de les desigualtats següents és veritat?

A) $AB < AC < BC$, B) $AC < BC < AB$, C) $BC < AB < AC$, D) $AC < AB < BC$, E) $AB < BC < AC$

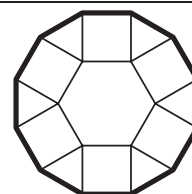
4. Si $2^x = 25$ i $25^y = 64$, aleshores $x \cdot y$ és igual a:

A) 6 B) $\log_2 25 + \log_{25} 64$ C) $\log_2 89$ D) 8 E) $\sqrt{89}$

5. Fem una llista, en ordre ascendent, de tots els números enters i positius de quatre xifres, la suma de xifres dels quals és igual a 4. En quina posició d'esta llista hi ha el número 2011?

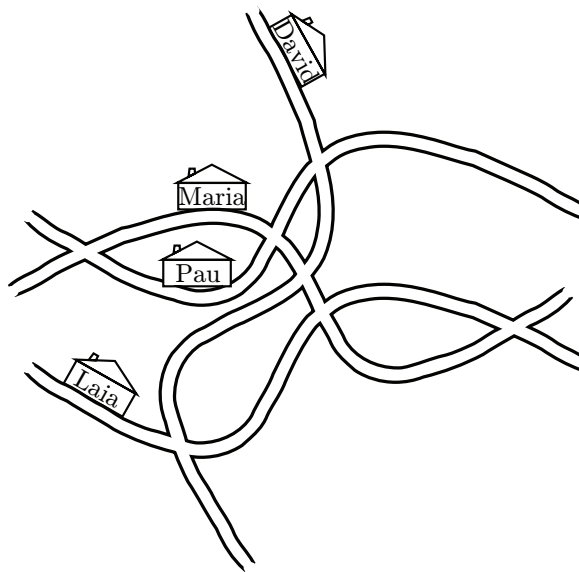
A) 7a B) 8a C) 9a D) 10a E) 12a

6. El dibuix mostre una figura formada per un hexàgon regular de costat unitat, sis triangles i sis quadrats. Quin és el perímetre de la figura?



A) $6(1 + \sqrt{2})$ B) $6 + 3\sqrt{2}$ C) 12 D) $6\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ E) 9

7. Joana, tot i que no sap dibuixar gaire bé, ha intentat esbossar un mapa del seu poble. Ha dibuixat quatre avingudes amb els set encreuaments corresponents i les cases dels seus amics, però, en realitat, l'avinguda Fletxa, l'avinguda Clau i l'avinguda Regla són totes elles avingudes rectes. La quarta avinguda és l'avinguda Corba. Quin dels amics de Joana viu a l'avinguda Corba?



A) David
B) Maria
C) Laia
D) Pau

E) No ho podem saber només mirant el dibuix que ha fet Joana.

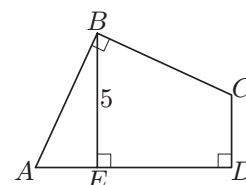
8. Joana té un dau amb una cara marcada amb un 5, dues cares marcades amb un 4 i tres cares marcades amb un 1. Joan té un altre dau igual que el de Joana. Si Joana i Joan tiren els dos daus simultàniament i sumen els punts, quina és la probabilitat del resultat més probable per a la suma dels punts que marquen els dos daus?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

9. Andreu escriu els nombres imparells de l'1 al 2011 en una pissarra i, a continuació, Pere esborra tots els múltiples de 3. Quants nombres queden en la pissarra?

A) 335 B) 1005 C) 336 D) 1006 E) 671

10. Trobeu l'àrea d'un quadrilàter $ABCD$ (segons el dibuix) en el qual $AB = BC$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, BE és perpendicular a AD i $BE = 5$.



A) 20 B) 22,5 C) 25 D) 27,5 E) 30

Qüestions de 4 punts:

11. Una nau espacial es va desplaçar de la Terra a un planeta molt distant descobert recentment. Quan havia recorregut exactament un quart del camí, va perdre el contacte per ràdio. Aleshores, la nau va viatjar 2^{18} km sense comunicació i just en el moment en què va restablir el contacte, va rebre este missatge: «Encara heu de recórrer 2^{19} km per arribar fins al planeta». La distància en quilòmetres des de la Terra al planeta es pot expressar com a potència de 2. Quin és l'exponent d'esta potència?

A) 18 B) 19 C) 22 D) 20 E) 24

12. Miquel vol escriure nombres enters i positius en les cel·les de la taula 3×3 , de manera que la suma dels quatre nombres de cada quadrat 2×2 siga 10. Ja ha escrit quatre nombres a la taula, tal com es mostra en la figura. Quin dels nombres següents podria ser la suma dels cinc restants?

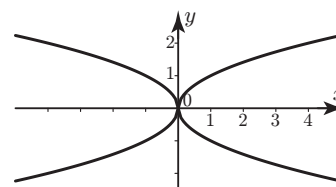
	2	
5		3
	4	

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) El que diu l'enunciat no és possible.

13. 36 xiquets d'una escola han anat a esquiar. Deu xiquets tenen exactament un germà que també hi és, sis xiquets hi són amb dos germans més, i vuit xiquets hi són amb tres germans més. Els altres xiquets no tenen cap germà en l'esquiada. Quantes famílies s'han aplegat en esta esquiada?

A) 36 B) 21 C) 18 D) 22 E) 24

14. Quants gràfics de les funcions $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = +\sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = +\sqrt{|x|}$ i $y = -\sqrt{|x|}$ hi ha representats en el diagrama següent? ($|x|$ indica el valor absolut de x .)

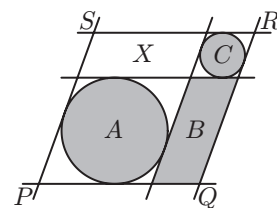


A) Cap B) 2 C) 4 D) 6 E) Tots 8

15. Ariadna, Berta, Carla, Diana i Eugènia fan una cursa en què només poden anar saltant, i cadascuna fa salts sempre de la mateixa longitud. Aquestes longituds són de 70, 80, 85, 90 i 95 cm, respectivament. Totes comencen en el mateix punt al llarg d'una pista circular de 400 metres de longitud encreuada per una rasa de 75 cm d'amplada. La cursa preveu que es facin 10 voltes a la pista i només una xiqueta arriba a la meta: les altres han caigut a la rasa. Qui és la guanyadora? (Observació: haureu de suposar que els peus d'estas xiquetes no tenen dimensions.)

A) És impossible respondre-ho sense més informació. B) Berta C) Carla D) Diana E) Eugènia

16. Tenim tres línies horitzontals i tres línies inclinades paral·leles entre elles. Els dos cercles són tangents a quatre de les línies. A , B i C són les àrees de les figures ombrejades. Quines àrees, entre les A , B i C , cal conèixer per a poder saber l'àrea del paral·lelogram X ?

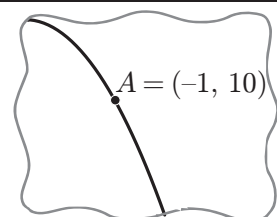


- A) A i C B) A C) B D) C E) X no es pot calcular a partir d' A , B i C .

17. Les cel·les d'una taula 9×9 s'acolorixen en un d'aquests 3 colors: roig, blau o verd, talment que en qualsevol fila de la taula el nombre de cel·les roges és més gran o igual que el nombre de les cel·les blaves d'aquella fila i també més gran o igual que el nombre de cel·les verdes de la fila; i, en qualsevol columna, el nombre de cel·les blaves és més gran o igual que el nombre de cel·les roges i més gran o igual que el nombre de cel·les verdes. Quin és el mínim nombre de cel·les verdes?

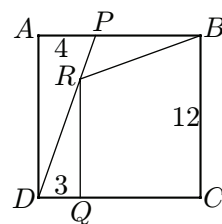
- A) 0 B) 9 C) 3 D) 27 E) 10

18. Al pla XY , amb els eixos cartesianes habituals, el punt $A = (-1, 10)$ es marca sobre la paràbola $y = ax^2 + bx + c$. Després s'esborren els eixos coordenats i quasi tota la paràbola, la qual, això sí, sabem que s'havia dibuixat en uns eixos paral·lels a les vores del full. Digueu quina de les afirmacions següents pot ser falsa.



- A) $b^2 > 4ac$ B) $a < 0$ C) $b < 0$ D) $c < 0$ E) $a - b + c > 0$

19. La figura mostra un quadrat $ABCD$ de costat 12, P i Q són punts dels costats, talment que la distància AP és 4 i la distància DQ és 3. R és el punt del segment PD pel qual RQ és perpendicular a DC . Quina és la distància RB ?



- A) $3\sqrt{10}$ B) 9 C) $\frac{28}{3}$ D) $\sqrt{72}$ E) $5 + \sqrt{12}$

20. Els germans Andreu i Bru contesten correctament les preguntes sobre la quantitat de membres que formen el seu club d'escacs. Andreu diu: «Tots els membres del nostre club, excepte cinc, són homes». Bru diu: «En cada equip de sis membres hi ha, com a mínim, quatre dones». Quants membres té el club d'escacs?

- A) 17 B) 11 C) 8 D) 7 E) 6

Qüestions de 5 punts:

21. En una bossa hi ha moltes boles numerades amb nombres enters positius; cada bola té un nombre i tots els nombres són diferents. 40 boles tenen escrit un nombre divisible per 5, 30 boles un nombre divisible per 6, i 20 boles, un nombre divisible per 30. Quin és el nombre mínim de boles que hi ha d'haver en la bossa per tal que es complisquin eixes condicions?

- A) 40 B) 60 C) 73 D) 90 E) 50

22. En un triangle rectangle la longitud de la hipotenusa és $\sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 25}$ i les longituds dels dos catets són $\sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + (2m - 1)}$ i $\sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}$ per a dos enters positius $m < n$. Quin és el valor de n ?

- A) 9
B) 10
C) 12
D) m i n no estan unívocament determinats.
E) És impossible trobar dos enters positius que complisquen l'enunciat.

23. La successió de funcions $f_1(x), f_2(x), \dots$ satisfà les següents condicions següents:

$$\begin{cases} \text{a) } f_1(x) = x \\ \text{b) } f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)} \end{cases}$$

Determineu el valor de $f_{2011}(2011)$.

- A) 1 B) $-\frac{1}{2010}$ C) $\frac{2010}{2011}$ D) 2011 E) -2011
-

24. El rellotge digital de 24 hores de l'habitació marcava l'hora correcta a la mitjanit, quan la primera donyeta hi va aparèixer, i, com que era una sola, va avançar l'hora que marcava el rellotge una hora. A la 1.00, va aparèixer la segona i llavors ja n'eren dues, així que van avançar l'hora que marcava el rellotge dues hores. Després d'una hora, va aparèixer la tercera, etc. Cada hora, començant per la mitjanit, les donyetes avançaven l'hora que marcava el rellotge tantes hores com el nombre de donyetes que en aquell moment s'havien aplegat en l'habitació. Quantes donyetes eren en l'habitació quan van canviar l'hora a la de la mitjanit per primera vegada?

- A) 12 B) 15 C) 24 D) 48 E) Mai no tornen a canviar l'hora a la de la mitjanit.
-

25. Una companyia aèria no cobra cap recàrrec per les maletes si el pes es trobe dins un límit. Per cada quilò extra es cobreix una taxa. L'equipatge del senyor i la senyora Trip pesa 80 kg i han pagat 40 €. L'equipatge del senyor Wander pesa el mateix però ha pagat 100 €. Quin és el pes màxim que pot portar un passatger sense cap cost addicional?

- A) 39 B) 30 C) 20 D) 18 E) 10
-

26. En l'expressió

$$\frac{C \cdot A \cdot N \cdot G \cdot U \cdot R}{J \cdot O \cdot C}$$

cada lletra representa un nombre enter i positiu d'una sola xifra, lletres diferents corresponen a nombres diferents i el punt volat (·) és el signe de la multiplicació. Quin és el mínim valor enter de l'expressió?

- A) 2 B) 10 C) 35 D) 1 E) Un altre valor
-

27. Calculem el simètric del punt $(0, 2011)$ respecte de la recta $y = mx$. Per quants nombres enters positius, m , aquest simètric és un punt de coordenades enteres?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) Més de 3, però en un nombre finit. E) Per infinits nombres enters positius.
-

28. Si $a = \log_3 5$, $b = \log_5 7$ i $c = \log_7 9$, quina de les respostes següents és certa?

- A) $a < b < c$ B) $b < c < a$ C) $c < b < a$ D) $b < a < c$ E) $c < a < b$
-

29. Una funció f compleix que $f(1) = 2011$ i, a més, pels nombres naturals $n, n \geq 2$,

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$$

Quant és $f(2011)$?

- A) $\frac{1}{1005}$ B) $\frac{2}{2012}$ C) $\frac{3}{2011}$ D) $\frac{1}{2011}$ E) $\frac{1}{670}$
-

30. Siguen x, y i z nombres racionals, diferents de 0, talment que els nombres $a = x + y + z$ i $b = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ siguin enters. Quin és el valor mínim de $a^2 + b^2$?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 8 E) 9
-
-