Einsendeaufgaben Modul MAT23: Analysis kompakt
Einsendeaufgaben Modul MAT24: Analysis

IMA401-402-EA– Artikelnummer 1004435 – Auflage N1054

Name:	Vladimir Zhelezarov
Straße:	xxxxxxxxx
PLZ/Ort:	xxxxxxxxx
Betreuungs-/Immatrikulationsnummer:	xxxxxxxxx
Ausbildungsziel:	BEDEN

Die Einsendeaufgaben geben Ihnen Gelegenheit, zu zeigen, was Sie können. Neben dem Inhalt sind wichtige Komponenten Ihrer Leistung,

– dass Sie in Ihrer Antwort das Wesentliche herausarbeiten (der vorgegebene leere Platz ist dafür ausreichend bemessen) und
– dass Sie Ihre Antwort ausformulieren (Grafiken fügen Sie bitte nur ein, wenn dies in der Aufgabenstellung ausdrücklich gefordert wird).

Indem Sie die Lösungen zu den Einsendeaufgaben abschicken, versichern Sie, die Einsendeaufgaben selbstständig und ohne fremde Hilfe bearbeitet und dabei keine Hilfsmittel (ausgenommen unkommentierte Gesetzestexte und Taschenrechner) benutzt zu haben.

1

Gegeben sei die Funktion

$$-x^4 + x^3 + 8x^2 - 12{,}5x + \frac{x^2 - 1}{2x + 2}$$

a) Wie lautet der Definitionsbereich? Kann die Funktion bei der Definitionslücke stetig ergänzt werden?

b) Bestimmen Sie alle Extremalstellen der Funktion. (Hinweis: Eine Nullstelle der Ableitung liegt bei 2. Die Stelle $x = -1$ darf als Extremalstelle ausgeschlossen werden.)

c) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der Funktion. (Die Stelle $x = -1$ darf als Wendepunkt ausgeschlossen werden.)

2

a) Berechnen Sie die Bogenlänge des Funktionsgrafen von

$$f(z) = \sqrt{1 - z^2} + 1$$

für $-1 \le z \le 1$.

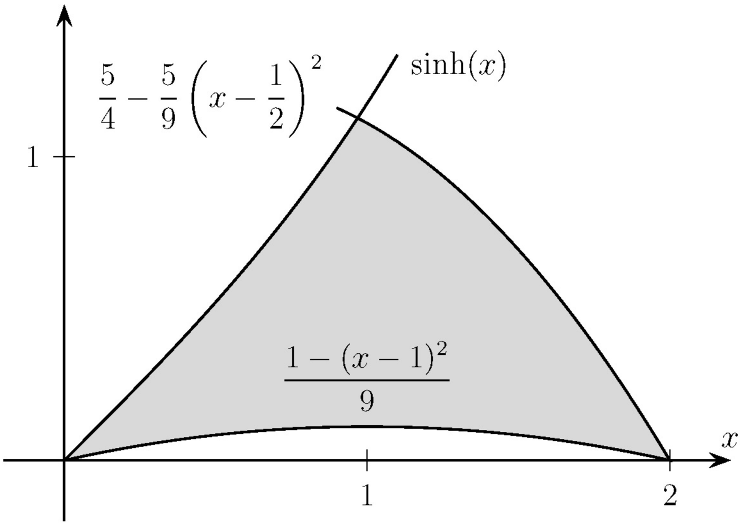
Hinweis: *arcsin(z)* ist eine Stammfunktion von $1/1 - z^2$.

b) Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers, der Funktion aus a) bei Rotation um die z -Achse.

3

Betrachten Sie das grau dargestellte Flächenstück.

(Hinweis: Der Schnittpunkt der oberen Begrenzungen liegt bei x ≈ 0,968939.)



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt.

b) Berechnen Sie den Flächenschwerpunkt.

4

Ein Unternehmen operiert systembedingt mit einer Kostenfunktion K vom Typ
$K = K(x) = ax^2 + bx + c; \quad (x \ge 0), \quad a,b,c = konst.$

Folgende Daten werden beobachtet:

☐ Die Grenzstückkosten betragen 0,9 $\frac{GE/ME}{ME}$ bei einem Output von 10 ME.

☐ Für einen Output von 8 ME stimmen Grenzkosten und Stückkosten überein.

☐ Die durchschnittlichen variablen Kosten betragen 4 $\frac{GE}{ME}$ bei einer Produktionsmenge von 20 ME.

Wie lautet die konkrete Kostenfunktion der Unternehmung?

IMA 401-402

① $f(x) = -x^4 + x^3 + 8x^2 - 12{,}5x + \frac{x^2-1}{2x+2}$

a) $2x+2 \neq 0 \quad x \neq -1$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = -x^4 + x^3 + 8x^2 - 12{,}5x + \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{2\cancel{(x+1)}} \Rightarrow$

$f(x) = -x^4 + x^3 + 8x^2 - 12x - 0{,}5$

b) $f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 16x - 12$

$$
\begin{array}{r|l}
 & -4x^2 - 5x + 6 \\
x-2 & -4x^3 + 3x^2 + 16x - 12 \\
 & -4x^3 + 8x^2 \\
 & -5x^2 + 16x - 12 \\
 & -5x^2 + 10x \\
 & 6x - 12 \\
 & 6x - 12 \\
 & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow f'(x) = (x-2)(-4x^2 - 5x + 6) = 0$

$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{3}{4} \quad x_3 = -2$

$f''(x) = -12x^2 + 6x + 16$

$f''(2) = -20 \Rightarrow \text{MAX} \qquad f''\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{55}{4} \Rightarrow \text{MIN}$

$f''(-2) = -44 \Rightarrow \text{MAX}$

$f(2) = -\frac{1}{2} \quad f\left(\frac{3}{4}\right) \approx -4{,}9 \quad f(-2) = 31{,}5$

c) $f''(x) = -12x^2 + 6x + 16 = 0$

$x_1 \approx 1{,}43 \qquad x_2 \approx -0{,}93$

$f'''(x) = -24x + 6$

$f'''(1{,}43) = -28{,}32 \qquad f'''(-0{,}93) = 28{,}32$

$<0 \Rightarrow$ konvex-konkav $\qquad >0 \Rightarrow$ konkav-konvex

② $f(z) = \sqrt{1-z^2} + 1 \qquad -1 \leq z \leq 1$

a) $$S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'(z))^2}\, dz$$

$$f'(z) = \frac{1}{2}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2z) = -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\Rightarrow S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{z^2}{1-z^2}}\, dz = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-z^2+z^2}{1-z^2}}\, dz =$$

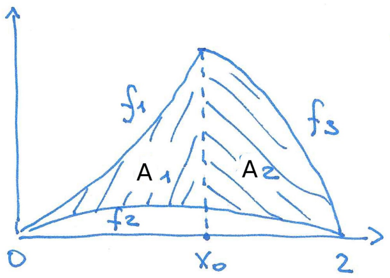
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = [\arcsin(z)]_{-1}^{1} = \pi$$

b) $$M = 2\pi \int_{-1}^{1} f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2}\, dz =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-z^2} + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = 2\pi \int_{-1}^{1} 1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\, dz$$

$$= 2\pi [z]_{-1}^{1} + 2\pi [\arcsin(z)]_{-1}^{1} = 4\pi + 2\pi^2 \approx 32{,}3$$

3 a)



$f_1(x) = \sinh(x)$

$f_2(x) = \frac{1-(x-1)^2}{9}$

$f_3(x) = \frac{5}{4} - \frac{5}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

$x_0 = 0,968939$

$$A_1 = \int_0^{x_0}\int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy\,dx = \int_0^{x_0} \sinh(x) - \frac{1-(x-1)^2}{9}\,dx =$$

$$= \left[\cosh(x)\right]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} \frac{-x^2+2x}{9}\,dx =$$

$$= \left[\cosh(x)\right]_0^{x_0} + \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_0} - \frac{2}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0} \approx 0,4367$$

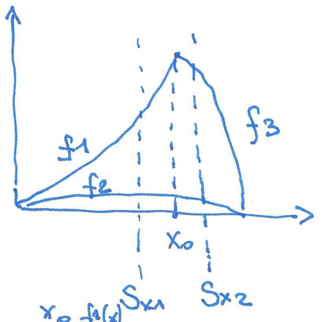
$$S_2 = \int_{x_0}^{2}\int_{f_2(x)}^{f_3(x)} dy\,dx = \int_{x_0}^{2} \frac{5}{4} - \frac{5}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1-(x-1)^2}{9}\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{2} \frac{5}{4} - \frac{5}{9}x^2 + \frac{5}{9}x - \frac{5}{36} + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{2} -\frac{4}{9}x^2 + \frac{3}{9}x + \frac{10}{9} = -\frac{4}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_0}^{2} + \frac{3}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{2} + \frac{10}{9}\left[x\right]_{x_0}^{2} =$$

$A_2 \approx 0,605$ $\quad\Rightarrow A = A_1 + A_2 \approx 1,04$

3 b)



$$S_{x1} = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} x \, dy \, dx = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} x \left(\sinh(x) - \frac{1-(x-1)^2}{9} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{A} \int_0^{x_0} x.\sinh(x) \, dx - \frac{1}{9.A} \int_0^{x_0} -x^3+2x^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{A} \left[x.\cosh(x) \right]_0^{x_0} - \frac{1}{A} \int_0^{x_0} 1.\cosh(x) \, dx + \frac{1}{9A} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{x_0} - 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{x_0} =$$

$$= \frac{1}{1{,}04} \left(x_0.\cosh(x_0) - 0 \right) - \frac{1}{1{,}04} \left(\sinh(x_0) - 0 \right) + \frac{1}{9.1{,}04} \left(\frac{x_0^4}{4} - 0 \right) -$$

$$-2 \left(\frac{x_0^3}{3} - 0 \right) = -0{,}2630$$ //unlogisch...

$$S_{x2} = \frac{1}{A} \int_{x_0}^{2} \int_{f_2(x)}^{f_3(x)} x \, dy \, dx =$$ //ähnlich wie 3a

$$= \frac{1}{A} \int_{x_0}^{2} x \left(-\frac{4}{9} x^2 + \frac{3}{9} x + \frac{10}{9} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{A}\left(-\frac{4}{9}\right)\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_0}^{2} + \frac{1}{A}\cdot\frac{3}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_0}^{2} + \frac{1}{A}\cdot\frac{10}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{2} =$$

$= 0{,}347$ // auch unlogisch

$S_x = \frac{A_1 \cdot S_{x1} + A_2 S_{x2}}{A_1 + A_2} = \ldots$ // mit den korekten Werte

~~Für Sy würde ich die Fläche zwischen f3 und f1 ber~~

Für S_y: zuerst den Schwerpunkt von der Figur zwischen f_3 und f_1 (nach y integriert) berechnen, dann Schwerpunkt von der Fläche zw. f_2 und X und kombinieren wie oben bei S_x, bloß mit „–" im Zähler.

④ $K = K(x) = ax^2 + bx + c \qquad (x \geq 0)$

$a, b, c = \text{const} = ?$

Stückkosten: $k(x) = \frac{K(x)}{x} = ax + b + \frac{c}{x}$

Grenzstückkosten: $k'(x) = a - \frac{c}{x^2}$

Grenzkosten: $K'(x) = 2ax + b$

Durchschnittliche variablekosten: $K_v(x) = ax + b$

$$\left| \begin{array}{lll} 0{,}9 = a - \frac{c}{10^2} & \Rightarrow & c = (a - 0{,}9).100 \\ 2a.8 + \cancel{b} = a.8 + \cancel{b} + \frac{c}{8} & & \\ a.20 + b = 4 & \Rightarrow & b = 4 - 20a \end{array} \right.$$

$$16a + \cancel{4 - 20a} = 8a + \cancel{4 - 20a} + \frac{(a - 0{,}9).100}{8}$$

$$64a = 100a - 90$$

$$a = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow b = 4 - 20a = -46$$

$$c = (a - 0{,}9)100 = 160$$

$$\Rightarrow K(x) = 2{,}5x^2 - 46x + 160$$