1

Gegeben sei die Funktion

$$-x^4 + x^3 + 8x^2 - 12,5x + \frac{x^2-1}{2x+2}$$

a) Wie lautet der Definitionsbereich? Kann die Funktion bei der Definitionslücke stetig ergänzt werden?

Der Definitionsbereich lautet: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Bei der Definitionslücke $x = -1$ tritt ein unbestimmter Ausdruck vom Typ 0/0 auf, den wir jetzt bestimmen wollen:

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2-1}{2x+2} = \lim_{x\to-1} \frac{2x}{2} = -1$$

Durch $f(-1) := -1$ kann die Funktion also stetig ergänzt werden.

b) Bestimmen Sie alle Extremalstellen der Funktion. (Hinweis: Eine Nullstelle der Ableitung liegt bei 2. Die Stelle $x = -1$ darf als Extremalstelle ausgeschlossen werden.)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -4x^3 + 3x^2 + 16x - 12,5 + \frac{2x(2x+2) - 2(x^2-1)}{(2x+2)^2} \\
&= -4x^3 + 3x^2 + 16x - 12,5 + \frac{2(x+1)^2}{4(x+1)^2} \\
&= -4x^3 + 3x^2 + 16x - 12,5 + \frac{2}{4} \quad \text{für } x \neq -1 \\
&= -4x^3 + 3x^2 + 16x - 12 \\
&= (x-2)(-4x^2 - 5x + 6) \quad \text{siehe Hinweis!} \\
&= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2 \ \lor \ x = -2 \ \lor \ x = 3/4 \\
f''(x) &= -12x^2 + 6x + 16 \quad \text{für } x \neq -1 \\
f''(2) &= -20 \ < \ 0 \quad \text{Maximalstelle} \\
f''(-2) &= -44 \ < \ 0 \quad \text{Maximalstelle} \\
f''(3/4) &= 55/4 \ > \ 0 \quad \text{Minimalstelle}
\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der Funktion. (Die Stelle $x = -1$ darf als Wendepunkt ausgeschlossen werden.)

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -12x^2 + 6x + 16 \quad \text{für } x \neq -1 \\
&= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1/4 \pm \sqrt{67/48} \\
f'''(x) &= -24x + 6 \\
f'''(1/4 - \sqrt{67/48}) &\approx 28,35 \ > \ 0 \quad \text{konkav–konvex–WP} \\
f'''(1/4 + \sqrt{67/48}) &\approx -28,35 \ < \ 0 \quad \text{konvex–konkav–WP}
\end{aligned}$$

3

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt

$$
\begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{A} \cdot \int_0^{0,968939} \int_{(1-(x-1)^2)/9}^{\sinh(x)} x \; dy \; dx + \frac{1}{A} \cdot \int_{0,968939}^{2} \int_{(1-(x-1)^2)/9}^{5/4-5/9\cdot(x-1/2)^2} x \; dy \; dx \\
&= \frac{1}{A} \cdot \int_0^{0,968939} x \cdot \sinh(x) - \frac{x - x^3 + 2x^2 - x}{9} \; dx \\
&\quad + \frac{1}{A} \cdot \int_{0,968939}^{2} \frac{5x}{4} - \frac{5}{9} \cdot (x^3 - x^2 + x/4) - \frac{2x^2 - x^3}{9} \; dx \\
&= \frac{1}{A} \cdot \left([x \cdot \cosh(x)]_0^{0,968939} - \int_0^{0,968939} \cosh(x) \; dx - \frac{1}{9} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{0,968939} \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{5x^2}{8} - \frac{5}{9} \cdot (x^4/4 - x^3/3 + x^2/8) - \frac{1}{9} \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \right]_{0,968939}^{2} \right) \\
&= \frac{1}{A} \cdot \left([x \cdot \cosh(x) - \sinh(x)]_0^{0,968939} - \frac{1}{9} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{0,968939} \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{5x^2}{8} - \frac{5}{9} \cdot (x^4/4 - x^3/3 + x^2/8) - \frac{1}{9} \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \right]_{0,968939}^{2} \right) \\
&\approx \frac{1}{A} \cdot 1,098381
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_y &= \frac{1}{A} \cdot \int_0^{0,968939} \int_{(1-(x-1)^2)/9}^{\sinh(x)} y \; dy \; dx + \frac{1}{A} \cdot \int_{0,968939}^{2} \int_{(1-(x-1)^2)/9}^{5/4-5/9\cdot(x-1/2)^2} y \; dy \; dx \\
&= \frac{1}{A} \cdot \int_0^{0,968939} \frac{1}{2} \cdot \left(\sinh^2(x) - \frac{(2x - x^2)^2}{81} \right) \; dx \\
&\quad + \frac{1}{A} \cdot \int_{0,968939}^{2} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(-20x^2 + 20x + 40)^2}{36^2} - \frac{(2x - x^2)^2}{81} \right) \; dx \\
&= \frac{1}{2A} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (\sinh(x)\cosh(x) - x) - \frac{1}{81} \cdot (x^5/5 - x^4 + 4x^3/3) \right]_0^{0,968939} \\
&\quad + \frac{1}{2A} \cdot \left[\frac{25}{81} \cdot (x^5/5 - x^4/2 - x^3 + 2x^2 + 4x) - \frac{1}{81} \cdot (x^5/5 - x^4 + 4x^3/3) \right]_{0,968}^{2} \\
&\approx 0,439494
\end{aligned}
$$