Основная теорема о рекурентных оценках.

Пусть $a \geqslant 1$ и $b > 1$ — константы, $f(n)$ — функция, $T(n)$ определено при неотрицательных n формулой

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

где под n/b понимается либо $\lceil n/b \rceil$, либо $\lfloor n/b \rfloor$. Тогда:

1. Если $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

2. Если $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, то $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.

3. Если $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и если $af(n/b) \leqslant cf(n)$ для некоторой константы $c < 1$ и достаточно больших n, то $T(n) = \Theta(f(n))$.

1) $T(n) = 2T(n/2) + n^3$

В этом случае:

$a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n^3$

$n^{\log_b(a)} = n^{\log_2(2)} = n^1 = n$.

$f(n) = \Omega(n^{\log_2 2+\varepsilon})$ для $\varepsilon=2$

Для достаточно большого n:

$af(n/b) = 2(n/2)^3 = n^3/4 \leq cn^3$, для c=1

По 3 утверждению: $T(n) = \theta(n^3)$

2) $T(n) = 16T(n/4) + n^2$

$a = 16$, $b = 4$, $f(n) = n^2$

$n^{\log_b a} = n^{\log_4 16} = n^4$

$f(n) = O(n^{\log_4 16-\varepsilon})$, для $\varepsilon=2$

$T(n) = \theta(n^4)$

3) $T(n) = 7T(n/2) + n^2$

$a = 7$, $b = 2$, $f(n) = n^2$

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 7} \approx n^{2,8}$

$f(n) = O(n^{\log_2 7-\varepsilon})$, для $\varepsilon \approx 0,8$

По 3 утверждению: $T(n) = \theta(n^{2,8})$