Задачи по блоку математических дисциплин (с 1 по 8)

1. Докажите, что множество рациональных чисел счётно.

В теории множеств, **счётное мно́жество** есть бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.

Рациональным числом называется число вида:

$$r = \frac{m}{n}, \text{где } n \in N = \{1, 2, 3, \ldots\} \text{ а } m \in Z = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots.\}$$

Теорема. Множество рациональных чисел счетно.

Доказательство (первый вариант)

Представим множество всех рациональных чисел в виде бесконечной таблицы.

$$R = \begin{cases} 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots \\ \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \ldots \\ \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Оценим, как строятся строки этой таблицы.

Первая строка – это все целые числа, расположенные по возрастанию их модуля и так, что знаки “+” и “–” чередуются.

Вторая строка – это все несократимые дроби со знаменателем 2, расположенные по возрастанию их модуля и так, что знаки “+” и “–” чередуются.

Третья строка – это все несократимые дроби со знаменателем 3, расположенные по возрастанию их модуля и так, что знаки “+” и “–” чередуются.

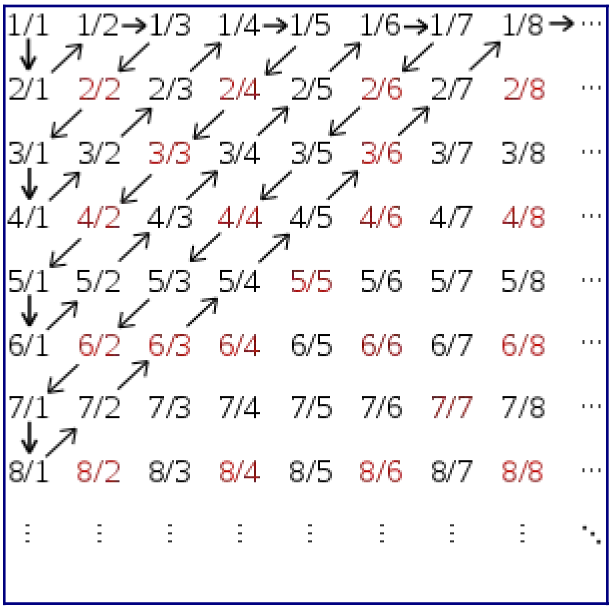
Вообще, n-ая строка это все несократимые дроби со знаменателем n, расположенные по возрастанию их модуля и так, что знаки “+” и “–” чередуются.

Очевидно, что в этой таблице находятся все рациональные числа. Используя снова прием диагонализации представим R в виде:

$$R = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, 2 \ldots\right\}$$

Так как R представилось в форме последовательности, то отсюда следует, что R –счетное множество.

Счётность множества (второй вариант)



Нумерация **положительных** рациональных чисел

Чтобы оценить количество рациональных чисел, нужно найти мощность их множества. Легко доказать, что множество рациональных чисел счётно. Для этого достаточно привести алгоритм, который нумерует рациональные числа, т. е. устанавливает биекцию между множествами рациональных и натуральных чисел. Примером такого построения может служить следующий простой алгоритм. Составляется бесконечная таблица обыкновенных дробей, на каждой i-ой строке в каждом j-ом столбце которой располагается дробь $\frac{i}{j}$. Для определённости считается, что строки и столбцы этой таблицы нумеруются с единицы. Ячейки таблицы обозначаются (i, j), где i — номер строки таблицы, в которой располагается ячейка, а j — номер столбца.

Полученная таблица обходится «змейкой» по следующему формальному алгоритму.

- Если текущее положение (i, j) таково, что i — нечётное, а $j = 1$, то следующим положением выбирается $(i + 1, j)$.
- Если текущее положение (i, j) таково, что $i = 1$, а j — чётное, то следующим положением выбирается $(i, j + 1)$.
- Если для текущего положения (i, j) сумма индексов $(i + j)$ нечётна, то следующее положение — $(i - 1, j + 1)$.
- Если для текущего положения (i, j) сумма индексов $(i + j)$ чётна, то следующее положение — $(i + 1, j - 1)$.

Эти правила просматриваются сверху вниз и следующее положение выбирается по первому совпадению.

В процессе такого обхода каждому новому рациональному числу ставится в соответствие очередное натуральное число. Т. е. дроби $1/1$ ставится в соответствие число 1, дроби $2/1$ — число 2, и т. д. Нужно отметить, что нумеруются только несократимые дроби. Формальным признаком несократимости является равенство единице наибольшего общего делителя числителя и знаменателя дроби.

Следуя этому алгоритму, можно занумеровать все положительные рациональные числа. Это значит, что множество положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}_+$ счётно. Легко установить биекцию между множествами положительных и отрицательных рациональных чисел, просто поставив в соответствие каждому рациональному числу противоположное ему. Т. о. множество отрицательных рациональных чисел $\mathbb{Q}_-$ тоже счётно. Их объединение $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$ также счётно по свойству счётных множеств. Множество же рациональных чисел $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ тоже счётно как объединение счётного множества с конечным.

Разумеется, существуют и другие способы занумеровать рациональные числа. Например, для этого можно воспользоваться такими структурами как дерево Калкина — Уилфа, дерево Штерна — Броко или ряд Фарея.

Утверждение о счётности множества рациональных чисел может вызывать некоторое недоумение, т. к. на первый взгляд складывается впечатление, что оно гораздо обширнее множества натуральных чисел. На самом деле это не так и натуральных чисел хватает, чтобы занумеровать все рациональные.

Третий вариант

Следствие 1.3. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.

◄ Каждому рациональному числу, представленному несократимой дробью $\frac{a}{b}$, однозначно соответствует упорядоченная пара (a, b), и, напротив, любая упорядоченная пара (a, b) взаимно простых целых чисел a и b однозначно определяет несократимую дробь $\frac{a}{b}$ и, значит, рациональное число. Следовательно, множество $\mathbb{Q}$ эквивалентно некоторому бесконечному подмножеству множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Поскольку множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ счетно, из теоремы 1.11 вытекает, что любое его бесконечное подмножество счетно. Таким образом, множество $\mathbb{Q}$ счетно. ►

Теорема 1.11. Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

◀ Пустое подмножество конечно по определению. Пусть M — счетное множество, а B — его некоторое непустое подмножество. Поскольку множество M счетно, можно считать, что задана некоторая его нумерация. Следовательно, каждый элемент подмножества B имеет свой номер. Запишем номера элементов множества B в порядке возрастания: $i_1, \ldots, i_n, \ldots$ Если среди них есть наибольший номер i_p, то подмножество B конечно. В противном случае получим счетное подмножество $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}, \ldots\}$, нумерация которого установлена так: $\nu(n) = a_{i_n}$. ▶

2. Докажите, что множества (0, 1) и R равномощны.

Если между двумя множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие (биекция), то такие множества называются **равномощными**. С точки зрения теории множеств, равномощные множества неразличимы.

6) множество всех подмножеств множества натуральных чисел $2^{\mathbf{N}}$.

◀ Покажем равномощность множеств $[0,1]$ и $(0,1)$. Из множества действительных чисел отрезка $[0,1]$ выделим двухэлементное подмножество $\{0,1\}$. Разностью этих множеств будет множество действительных чисел интервала $(0,1)$, и, согласно теореме 1.14, $[0,1] \sim (0,1)$.

Отображение $y = (b-a)x + a$ задает биекцию множества $[0,1]$ на множество $[a,b]$. Следовательно, эти множества равномощны. Заметим, что аналогично доказывается равномощность $(0,1)$ и (a,b).

Покажем, что $(0,1) \sim \mathbb{R}$. Биекцию можно установить, например, с помощью функции $y = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$.

Поскольку равномощность $[0,1]$ и $2^{\mathbf{N}}$ ранее доказана, имеем

$$[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim \mathbb{R} \sim 2^{\mathbf{N}}. \qquad ▶$$

Теорема 1.17. Множество действительных чисел отрезка $[0, 1]$ равномощно множеству всех последовательностей нулей и единиц $\{0, 1\}^{\omega}$.

◀ Каждое действительное число из отрезка $[0, 1]$ представим в виде бесконечной дроби в двоичной системе счисления. Число 1 представим в виде периодической дроби, содержащей бесконечное число единиц — $0,1(1)$. Конечные рациональные дроби представим как бесконечные, дополнив справа бесконечным числом нулей. Таким образом, каждое число из $[0, 1]$ представлено в виде последовательности нулей и единиц. Кроме этого, выбросим счетное множество всех периодических дробей вида $0,\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_k0(1)$, поскольку каждая такая дробь представляет то же самое число, что и дробь $0,\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_k1(0)$, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$ для всякого $i = \overline{1, k}$. Легко видеть, что полученное таким образом множество двоичных дробей равномощно множеству $\{0, 1\}^{\omega}$. ▶

Следствие 1.2. $[0, 1] \sim 2^{\mathbf{N}}$.

◀ Выше была доказана равномощность множеств $(0, 1)^{\omega}$ и $2^{\mathbf{N}}$. Тогда имеем $[0, 1] \sim \{0, 1\}^{\omega} \sim 2^{\mathbf{N}}$. ▶

Теорема 1.18. Следующие множества равномощны:
1) множество действительных чисел отрезка $[0, 1]$;
2) множество действительных чисел интервала $(0, 1)$;
3) множество действительных чисел отрезка $[a, b]$;
4) множество действительных чисел интервала (a, b);
5) множество действительных чисел (числовая ось) $\mathbb{R}$;

3. Найдите матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Вычисляем определитель Δ матрицы А.

2) Заменяем каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением.

3) Транспонируем полученную матрицу.

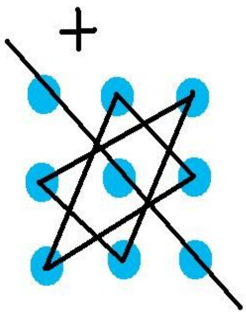
4) Находим обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \; \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} \end{pmatrix}$

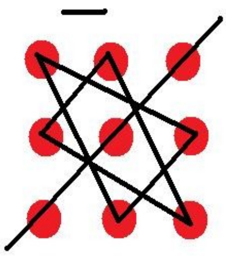
Исходная матрица имеет вид:

$$A = \begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

1) Вычислим определитель матрицы А.

Его можно найти по правилу для матрицы размером 3 на 3:





Тогда определитель матрицы:

Δ =2*2*1+(-1)*(-1)*(-1)+0*0*(-1)-0*2*(-1)-(-1)*0*1-2*(-1)*(-1)*=4+(-1)+0-0-0-2=1.

2) Найдём алгебраические дополнения матрицы:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=1$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=2$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=1$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=2$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=3$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=1$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=2$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=4$$

Запишем матрицу из алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

3) Транспонируем полученную матрицу (замена строк столбцами):

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

4) Для того чтобы найти обратную матрицу, разделим каждый элемент полученной матрицы на определитель $\Delta=1$:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

4. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$

Для того что бы найти ранг матрицы можно использовать метод окаймления миноров. Суть его заключается в нахождении миноров, начиная с низших и двигаясь к более высоким порядкам. Если миноры более высоких порядков, например n+1 равны 0, при условии, что минор n-го порядка не равен 0, то ранг будет равен n.

На наш взгляд более простым является метод приведения матрицы к треугольному виду. И если в задании не указано, каким именно методом нужно искать, то предпочтительнее использовать именно данный способ. Путем элементарных преобразований делаем все элементы, стоящие ниже главной диагонали равными нулю. К элементарным преобразованиям относятся:

- перестановка двух параллельных рядов матрицы;

- умножение всех элементов какого-либо ряда на число отличное от нуля;

- прибавление ко всем элементам ряда соответствующих элементов параллельного ряда умноженных на одно и то же число.

Далее подсчитываем количество нулевых строк в матрице и отнимаем от общего числа строк. Полученное значение и будет рангом матрицы.

Исходная матрица имеет вид:

1 1 1

2 2 3

3 3 4

1) Произведём элементарные преобразования:

-вычтем 1-ую строку из остальных строк так, что бы в 1-ом столбце все элементы ниже обратились в 0, домножая на 2, 3, соответсвенно

1	1	1
0	0	1
0	0	1

-так как все элементы матрицы в 2-ом столбце, начиная с 2-ой строки равны 0, то поменяем местами 2 столбец на 3.

1	1	1
0	1	0
0	1	0

-вычтем 2-ую строку из остальных строк так, что бы в 2-ом столбце все элементы ниже обратились в 0, домножая на 1, соответсвенно

1	1	1
0	1	0
0	0	0

2) Найдём ранг матрицы:

Так как количество нулевых строк равно 1, а общее количество строк равно 3, то ранг матрицы равен:

rang|A|=3-1=2

Задача:

Найти ранг матрицы |A| :

1	1	1
2	2	3
3	3	4

Как известно, ранг матрицы не изменяется:
а) при перестановке двух строк;
б) при умножении одной строки на число отличное от нуля;
в) при прибавлении (вычитании) некоторой строки умноженной на любое число к другой строке;
г) при транспонировании.
Из последнего следует, что описанные выше правила справедливы и для столбцов.

Для нахождение ранга матрицы, преобразуем исходную матрицу в трапециевидную равного ранга. Для этого воспользуемся описанными выше правилами. При этом стремимся, чтобы все элементы стоящие ниже главной диагонали были равны нулю, а все элементы стоящие на главной диагонали были отличны от нуля (возможно кроме последних, стоящих в полностью нулевых строках).

Шаг:1
Вычтем из строки 2 строку 1 умноженную на $a_{2,1}=2$

Вычитаемая строка :

2	2	2

Модифицированная матрица :

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{matrix}$$

Шаг:2

Вычтем из строки 3 строку 1 умноженную на $a_{3,1}=3$

Вычитаемая строка :

$$\begin{matrix} 3 & 3 & 3 \end{matrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Шаг:3

Поменяем местами столбцы 2 и 3.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Шаг:4

Вычтем из строки 3 строку 2 умноженную на $a_{3,2}=1$

Вычитаемая строка :

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Требуемый вид матрицы получен и ее ранг совпадает с рангом исходной.

Проанализируем последнюю матрицу, в ней легко выделить невырожденную квадратную подматрицу (минор) порядка 2. Этот минор располагается с 1-й по 2-ю строку и с 1-го по 2-й столбец (см. ниже).

Минор 2-го порядка :

$$\begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix}$$

0 1

Данный минор невырожденный (его определитель не равен нулю) т.к. определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов. Кроме того, из конечной матрицы нельзя выделить невырожденную подматрицу порядка больше чем 2, следовательно, **ранг матрицы |A| равен 2**

Ответ: **rang|A|=2**

5. Запишите расширенную матрицу заданной системы уравнений и решите эту систему

$$y+3z=-1;$$
$$2x+3y+5z=3;$$
$$3x+5y+7z=6;$$

Метод Гаусса

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

Процесс решения системы уравнений методом Гаусса, состоит из двух этапов:

Процесс решения системы уравнений методом Гаусса, состоит из двух этапов:
На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду, путем последовательному исключения переменных.
На втором этапе решения (обратный ход) мы будем последовательно находить переменные из получившейся ступенчатой системы.

Прямой ход.

Запишем исходную систему.

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & & \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & \end{array}\right)$$

0 -1 2

- Исключим переменную x_1 из всех уравнений, за исключением первого.

Очевидно, решать систему уравнений в целых числах удобнее. Поступим следующим образом:

Умножим коэффициенты уравнения 3 на -1 .

Обычно, данное преобразование системы выполняется в уме и не указывается при решении!

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 + {}} x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ -3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & & \\ 3 & 5 & 3 & -3 \\ -5 & -7 & -6 & \end{array}\right)$$

0 -1 2

Прибавим получившееся уравнение к уравнению 2.

$$\begin{cases} \phantom{-x_1 - {}} x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & & \\ -2 & -2 & -3 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & \end{array}\right)$$

0 -1 -1

Поменяем местами уравнения 1 и 2 (порядок уравнений в системе не имеет значения).

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ \phantom{-x_1 - {}} x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & & \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & \end{array}\right)$$

-1 -3 0

Умножим коэффициенты уравнения 1 на 3.

Обычно, данное преобразование системы выполняется в уме и не указывается при решении!

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 - 6x_3 = -9 \\ \phantom{-3x_1 - {}} x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -6 & & \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & \end{array}\right)$$

-3 -9 0

Прибавим получившееся уравнение к уравнению 3.

Уравнение 1 не изменится в исходной системе!.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & & \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & \end{array} \right)$$

-1 -3 0

- Исключим переменную x_2 из последнего уравнения.

Прибавим уравнение 2 к уравнению 3.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_2 + 3x_3 = -1 \\ 4x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & & \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & \end{array} \right)$$

-1 -3 0

Обратный ход.

- Рассмотрим уравнение 3 последней получившейся системы:

$4x_3 = -4$

$x_3 = -1$

- Рассмотрим уравнение 2 последней получившейся системы:

$x_2 + 3x_3 = -1$

Из данного уравнения , найдем значение переменной x_2.

$x_2 = -3x_3 - 1$

Подставим, ранее найденное, значение переменной x_3.

$x_2 = -3*(-1) - 1$

$x_2 = 2$

- Рассмотрим уравнение 1 последней получившейся системы:

$-x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3$

Из данного уравнения , найдем значение переменной x_1.

$- x_1 = 2 x_2 + 2 x_3 - 3$

$x_1 = - 2 x_2 - 2 x_3 + 3$

Подставим, ранее найденные, значения переменных x_2 , x_3 .

$x_1 = - \begin{matrix} 2 * \\ 2 \end{matrix} - \begin{matrix} 2 * (\\ - 1 \end{matrix}) + 3$

$x_1 = 1$

Ответ :

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = - 1$

Решим систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_2 + 3 x_3 = -1 \\ 2 x_1 + 3 x_2 + 5 x_3 = 3 \\ 3 x_1 + 5 x_2 + 7 x_3 = 6 \end{cases}$$

$x_1 = \det A_1 / \det A = 4 / 4 = 1$

$x_2 = \det A_2 / \det A = 8 / 4 = 2$

$x_3 = \det A_3 / \det A = -4 / 4 = -1$

- **Найдем det A**

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} =$$

Из элементов столбца 3 вычитаем соответствующие элементы столбца 2 , умноженные на 3.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} =$$

Разлагаем определитель по элементам первой строки.

$$= (-1)^{1+1} * 0* \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} * 1* \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} * 0* \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) * \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) * \mathbf{(}\ 2 * (-8) - (-4) * 3\ \mathbf{)} =$$

$$= (-1) * (-4) \quad = 4$$

- **Найдем det A_1**

Определитель det A_1 получается из определителя det A , путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix} =$$

Из элементов строки 3 вычитаем соответствующие элементы строки 2 , умноженные на 2.

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

Из элементов столбца 3 вычитаем соответствующие элементы столбца 2 , умноженные на 3.

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Разлагаем определитель по элементам третьей строки.

$$= (-1)^{3+1} * 0* \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} * (-1) * \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} * 0* \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1* \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$= 1* \mathbf{(} (-1) * (-4) - 0 * 3 \mathbf{)} =$

$= 1 * 4 \quad = 4$

- **Найдем det A_2**

Определитель det A_2 получается из определителя det A , путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

К элементам столбца 3 прибавляем соответствующие элементы столбца 2 , умноженные на 3.

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 14 \\ 3 & 6 & 25 \end{vmatrix} =$$

Разлагаем определитель по элементам первой строки.

$$= (- 1)^{1+1} * 0* \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 6 & 25 \end{vmatrix} + (- 1)^{1+2} * (-1) * \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 25 \end{vmatrix} + (- 1)^{1+3} * 0* \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1* \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 25 \end{vmatrix} =$$

$= 1* \mathbf{(} 2 * 25 - 14 * 3 \mathbf{)} =$

$= 1 * 8 \quad = 8$

- **Найдем det A_3**

Определитель det A_3 получается из определителя det A , путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

К элементам столбца 3 прибавляем соответствующие элементы столбца 2 .

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} =$$

Разлагаем определитель по элементам первой строки.

$$= (-1)^{1+1} * 0* \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} * 1* \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} * 0* \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) * \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) * (2 * 11 - 6 * 3) =$$

$$= (-1) * 4 \quad = -4$$

Решим систему уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 + {}} x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

Запишем систему уравнений в матричной форме

A * X = B

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & \end{pmatrix} \; 2 \; * \qquad \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} \; 3$$

0

$$\begin{pmatrix} x_3 \end{pmatrix} \; x_2 \; = \qquad -1$$

x_1

Найдем матицу A^{-1}, обратную к матрице A, методом Гаусса

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & \end{pmatrix} \; 2$$

0

Для этого напишем расширенную матрицу , в левой части которой находится
наша исходная матрица A, а в правой единичная.

Применяя метод Гаусса, последовательно будем приводить нашу исходную матрицу
(левую часть расширенной матрицы) к единичной матрице.
Причем совершенные преобразование мы будем применять ко всей расширенной матрице.

Приведя левую часть расширенной матрицы к единичной, правая часть будет являться
обратной матрицей к нашей исходной.

Последовательность приведения левой части расширенной матрицы к единичной,
Вы можете проследить по выделенным серыми прямоугольниками элементам.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & & 0 & 0 & \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

0 1 2

- Рассмотрим столбец 1.

Постараемся выполнять преобразования матрицы в целых числах. Поступим следующим образом:

К элементам строки 2 прибавим соответствующие элементы строки 3 умноженные на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & & 0 & 0 & \\ -2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

0 1 -1

Поменяем местами строки 1 и 2 .

-2	-2		1	-1	
1	3	1	0	0	3

$$\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 7 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

К элементам стороки 3 прибавим соответствующие элементы строки 1 умноженные на 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & & 1 & -1 & \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -2 & \end{array}\right)$$

-1 0 0

- Рассмотрим столбец 2.

Поменяем местами строки 2 и 3 .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & & 1 & -1 & \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

-1 0 0

К элементам строки 3 прибавим соответствующие элементы строки 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & & 1 & -1 & \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -2 & \end{array}\right)$$

-1 0 0

В левой части расширенной матрицы, все элементы расположенные ниже главной диагонали равны нулю!

Теперь произведем аналогичные преобразования с элементами матрицы расположенными выше главной диагонали.

- Рассмотрим столбец 3.

Элементы строки 3 разделим на 4 .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & & 1 & -1 & \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \end{array}\right)$$

-1 0 0

К элементам строки 1 прибавим соответствующие элементы строки 3 умноженные на 2.

$$\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & & \frac{5}{2} & -2 & \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \end{array}\right)$$

К элементам строки 2 прибавим соответствующие элементы строки 3 умноженные на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & & \frac{5}{2} & -2 & \\ -1 & 0 & \boxed{-\frac{1}{4}} & \frac{9}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \end{array}\right)$$

$-1 \qquad \frac{1}{2} \qquad 0$

- Рассмотрим столбец 2.

Элементы строки 2 разделим на -1 .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & & \frac{5}{2} & -2 & \\ 1 & \boxed{0} & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \end{array}\right)$$

$-1 \qquad \frac{1}{2} \qquad 0$

К элементам стороки 1 прибавим соответствующие элементы строки 2 умноженные на 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{0} & & -2 & 1 & \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \end{array}\right)$$

$-1 \qquad 1 \qquad 0$

Элементы строки 1 разделим на -1 .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{0} & 0 & & 2 & -1 & \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \end{array}\right)$$

$1 \qquad -1 \qquad 0$

Осталось, только записать обратную матрицу.

$A^{-1} =$ $2 \quad -1 \qquad 1$

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \end{pmatrix} \; 4$$

-1

Вернемся к нашему уравнению, которое мы записали в матричной форме.

$A * X = B$

Умножим левую и правую часть нашего матричного уравнения на A^{-1}

$A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \end{pmatrix} \; {}^{*} \; \frac{1}{4} \qquad \begin{pmatrix} x_3 \end{pmatrix} \; = \; x_2 \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \end{pmatrix} \; {}^{*} \; \frac{1}{4} \qquad \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} \; 3$$

-1 x_1 -1 -1

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & \end{pmatrix} \; {}^{*} \; 2$$

0

Произведение обратной матрицы на исходную есть единичная матрица, т.е. $A^{-1} * A = E$, следовательно

$X = A^{-1} * B$

$$\begin{pmatrix} x_3 \end{pmatrix} \; = \; x_2$$

x_1

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \end{pmatrix} \; {}^{*} \; \frac{1}{4} \qquad \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} \; 3$$

-1 -1

$x_1 = (-1) * (-1) + 2 * 3 + (-1) * 6 = 1 + 6 + (-6) = 1$

$x_2 = \frac{1}{4} * (-1) + \left(-\frac{9}{4}\right) * 3 + \frac{3}{2} * 6 = \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{27}{4}\right) + 9 = 2$

$x_3 = \frac{1}{} * (-1) + \frac{3}{4} * 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) * 6 = \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4} + (-3) = -1$

4

Ответ :

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = -1$

6. Найдите площадь треугольника с вершинами A(1, 1, 1), B(3, 4, 2), C(0, 2, 3).

Нам известны координаты трех точек.

A = (1 , 1 , 1)
B = (3 , 4 , 2)
C = (0 , 2 , 3)

1. Найдем векторное произведение векторов $\vec{CA} \times \vec{CB}$

В результате вычисления векторного произведение двух векторов мы получим **ВЕКТОР**.

Найдем координаты векторов $\vec{CA}\, и\, \vec{CB}$

$\vec{CA}$ = (1 - 0 , 1 - 2 , 1 - 3) = (1 , -1 , -2)

$\vec{CB}$ = (3 - 0 , 4 - 2 , 2 - 3) = (3 , 2 , -1)

Найдём векторное произведение векторов $\vec{CA} \times \vec{CB}$:

$$\vec{CA} \times \vec{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} * \vec{i} * \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} * \vec{j} * \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} * \vec{i} * \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$$

Вычислим длину полученного вектора:

$$|\vec{CA} \times \vec{CB}|^2 = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{75}$$

Найдём площадь треугольника ABC:

$$S = 1/2\sqrt{75} \approx 4{,}33$$

7. Даны точки A(0, 0, 0), B(1,−1, 1), C(7, 3,−5) и D(−2, 2,−2). Найдите объём тетраэдра с вершинами в этих точках.

Нам известны координаты четырех точек.

M_1 = (0 , 0 , 0)

M_2 = (1 , -1 , 1)

M_3 = (7 , 3 , -5)

M_4 = (-2 , 2 , -2)

1. Найдем смешанное произведение векторов $\overline{M_4M_1}$, $\overline{M_4M_2}$ и $\overline{M_4M_3}$

В результате вычисления смешанного произведение трех векторов мы получим **ЧИСЛО**.

Найдем координаты векторов $\overline{M_4M_1}$, $\overline{M_4M_2}$ и $\overline{M_4M_3}$.

$\overline{M_4M_1} = (0 - (- 2) , 0 - 2 , 0 - (- 2)) = (2 , -2 , 2)$

$\overline{M_4M_2} = (1 - (- 2) , -1 - 2 , 1 - (- 2)) = (3 , -3 , 3)$

$\overline{M_4M_3} = (7 - (- 2) , 3 - 2 , -5 - (- 2)) = (9 , 1 , -3)$

Найдем смешанное произведение векторов ($\overline{M_4M_1}$ x $\overline{M_4M_2}$) * $\overline{M_4M_3}$ следующим образом:

$$(\overline{M_4M_1} \times \overline{M_4M_2}) * \overline{M_4M_3} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 9 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

К элементам столбца 1 прибавляем соответствующие элементы столбца 2 .

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 10 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

Разлагаем определитель по элементам первого столбца.

$$= (- 1)^{1+1} * 0* \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (- 1)^{2+1} * 0* \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (- 1)^{3+1} * 10* \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 10* \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 10* \mathbf{(} (-2) * 3 - 2 * (-3) \mathbf{)} =$$

$$= 10 * 0 \quad = 0$$

2. Найдем объем треугольной пирамиды, вершинами которой являются точки M_1, M_2, M_3 и M_4.

$V = 1/6* |(\overline{M_4M_1} \times \overline{M_4M_2}) * \overline{M_4M_3}| = 1/6 * 0 = 0$

Смешанное произведение равно нулю, т.е. точки M_1,M_2 , M_3 M_4 лежат в одной плоскости. Соответствено и векторы M_1M_4 , M_2M_4 , M_3M_4 также лежат в одной плоскости.

8. **Запишите уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку A(−3, 4), которая параллельна прямой:**
   1) x-2y+5=0
   2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$
   3) x=3+t
   y=4-7t

У параллельных прямых коэффициенты равны $k_1=k_2$.

1) Уравнение x-2y+5=0 – это уравнение прямой общего вида Ax+By+C=0.

k можно найти по формуле: $k=\frac{-A}{B}$.

Тогда k=1/2.

Подставим в уравнение k и координаты точки и найдём уравнение прямой:

$$y-y_1=k(x=x_1)$$

$$y-4=\frac{1}{2}(x+3)\Rightarrow y-4=\frac{1}{2}x+1{,}5\Rightarrow\frac{1}{2}x-y+1{,}5+4=0.$$

Уравнение прямой:

$$\frac{1}{2}x-y+5{,}5=0.$$

2) Уравнение $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$ — уравнение прямой канонического вида.

$\frac{x-ч_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}$, k можно найти по формуле $k=\frac{m}{l}$.

Находим k и подставляем его и координаты точки в уравнение:

$$k=\frac{3}{2};\, y-y_1=k(x-x_1)\Rightarrow y-4=\frac{3}{2}(x+3)\Rightarrow y-4=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{-3}{2}x+y-\frac{17}{2}=0.$$

3) Данное уравнение — параметрическое уравнение прямой.

$$x = x_0 + a_x t$$
$$y = y_0 + a_y t,$$
$$k = \frac{a_y}{a_x}.$$

Находим k и подставляем его и координаты точек в уравнение:

$$k = \frac{-7}{1}$$
$$y - y_1 = k(x - x_1)$$
$$y - 4 = -7(x + 3) \Rightarrow y - 4 = -7\text{x} - 21 \Rightarrow y - 4 + 7\text{x} + 21 = 0 \Rightarrow$$
$$7\text{x} + y + 17 = 0$$