Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский государственный индустриальный университет

Кафедра «Информационные системы и технологии»

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

по специальности «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»

Беркова Андрея Николаевича

на тему

«Исследование напряженно-деформированного состояния двух радиально пересекающихся цилиндрических оболочек с использованием объемных конечных элементов»

Научный руководитель: **Скопинский В.Н., д.т.н., профессор**

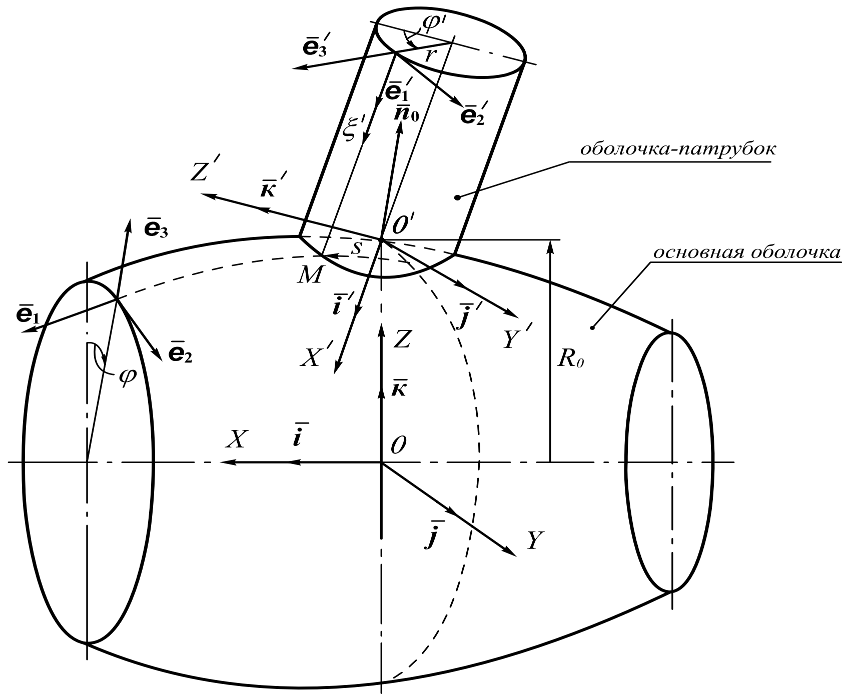
Москва 2010

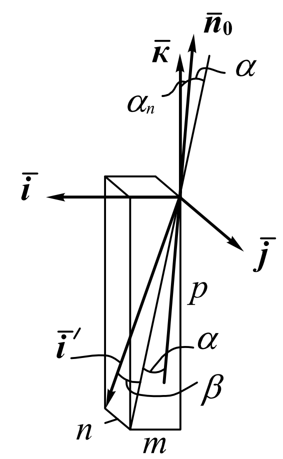
Цель работы

Целью данной работы является:

- Модернизация оболочки (SAISdata) программного комплекса SAIS
- Модернизация автоматизированного генератора двухмерной конечно-элементной модели (КЭМ) радиально пересекающихся цилиндрических оболочек для создания трехмерной КЭМ
- Разработка 8-узлового изопараметрического объемного конечного элемента
- Внедрение разработанного конечного элемента в программный комплекс SAIS

Геометрические соотношения на линии пересечения





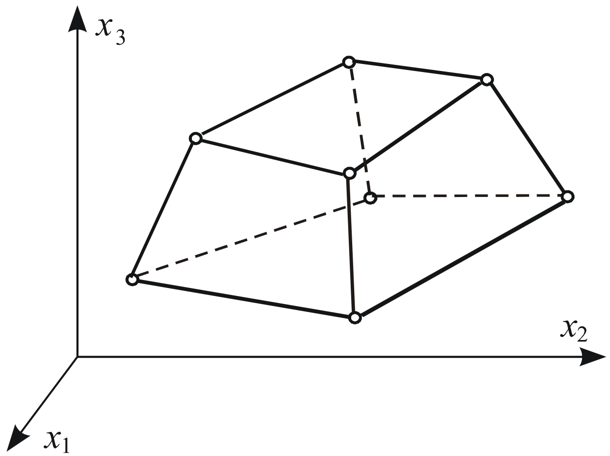
$$\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{X}' + \mathbf{X}_0 \quad (1) \qquad \mathbf{X} = \{x, y, z\}^T; \mathbf{X}' = \{x', y', z'\}^T; \ \mathbf{X}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}^T; \qquad (2)$$

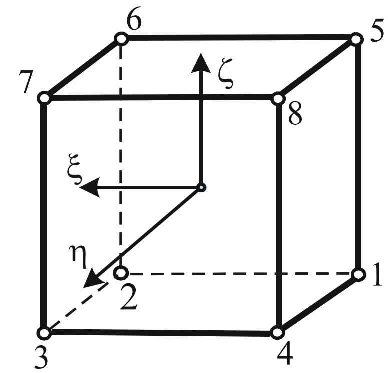
L – матрица перехода от базиса **I'** к базису **I** **(I'=L^{T}I)** $\quad l = \sqrt{m^2 + p^2}$

$$\mathbf{i}' = m \cdot \mathbf{i} + n \cdot \mathbf{j} + p \cdot \mathbf{k}; \quad \mathbf{j}' = -\frac{nm}{l}\mathbf{i} + l \cdot \mathbf{j} - \frac{nm}{l}\mathbf{k}; \quad \mathbf{k}' = -\frac{p}{l}\mathbf{i} + \frac{m}{l}\mathbf{k}. \qquad (3)$$

$$m = \sin\alpha \cdot \cos\beta; \quad n = -\sin\beta; \quad p = -\cos\alpha \cdot \cos\beta \qquad (4)$$

Трехмерный изопараметрический 8-узловой элемент





Базисные функции (функции формы):

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i);\ \ \mathrm{i}=1, 2, \cdots, 8;\ \xi, \eta, \zeta \in [-1; 1] \qquad (5)$$

Преобразование координат

$$\begin{cases} x = \sum\limits_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta, \varsigma) \cdot x_i, \\ y = \sum\limits_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta, \varsigma) \cdot y_i, \\ z = \sum\limits_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta, \varsigma) \cdot z_i. \end{cases} \qquad (6)$$

$$\mathbf{N} = \left(\begin{array}{ccc:ccc:c:ccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{array} \right) \qquad (7)$$

Зависимости между перемещениями, деформациями и напряжениями

$$\underset{3\times1}{\mathbf{f}} = \underset{3\times24}{\mathbf{N}} \cdot \underset{24\times1}{\boldsymbol{\delta}} \qquad \underset{6\times1}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{6\times3}{\mathbf{B}} \cdot \underset{3\times1}{\mathbf{f}} = \underset{6\times3}{\mathbf{B}} \cdot \underset{3\times24}{\mathbf{N}} \cdot \underset{24\times1}{\boldsymbol{\delta}} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \underset{6\times24}{\mathbf{C}} \cdot \underset{24\times1}{\boldsymbol{\delta}} \qquad \underset{6\times1}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{6\times6}{\mathbf{D}} \cdot \underset{6\times1}{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{D} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & c & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & c & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \end{array}\right] \quad (10)$$

$$c = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \qquad b = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \qquad g = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (11)$$

f – вектор перемещений произвольной точки

δ – вектор перемещения узловых точек

ε – вектор деформации произвольной точки

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z; \gamma_{xy}; \gamma_{yz}; \gamma_{zx}\right)^T$$

B – матрица дифференциальных операторов

σ – вектор напряжений **D** – матрица упругости

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx}\right)^T$$

E, μ – модуль Юнга и Коэффициент Пуассона материала

Вычисление матрицы С

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \hdashline \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 & \mathbf{C}_5 & \mathbf{C}_6 & \mathbf{C}_7 & \mathbf{C}_8 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \qquad (15)$$

$$\left(d\boldsymbol{\delta}^e\right)^T \mathbf{R}^e - \int_{V^e} \left(d\boldsymbol{\varepsilon}^e\right)^T \boldsymbol{\sigma}^e dV = 0 \Rightarrow \left(d\boldsymbol{\delta}^e\right)^T \left(\int_{V^e} \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} dV \cdot \boldsymbol{\delta}^e - \mathbf{R}^e \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_V \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} dV \cdot \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{R}^e; \quad \int_V \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} dV = \mathbf{K}^e \Rightarrow \mathbf{K}^e \cdot \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{R}^e \quad (16)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{C}^T(\xi,\eta,\zeta) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}(\xi,\eta,\zeta) dV = \int_{V^e} \mathbf{G}(\xi,\eta,\zeta) dV \quad (17)$$

Численное интегрирование методом Гаусса:

$$\int_{V^e} \mathbf{G}(\xi,\eta,\zeta) dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{G}(\xi,\eta,\zeta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{n_k} \left(H_i H_j H_k \mathbf{G}(\xi_i,\eta_j,\zeta_k) |\mathbf{J}| \right) \quad (18)$$

Вектор нагрузок:

$$\mathbf{F}_p^e = -\int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV$$

Поверхностные нагрузки:

$$\mathbf{F}_q^e = -\int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{q}^e dS \quad (19)$$

Глобальная матрица жесткости:

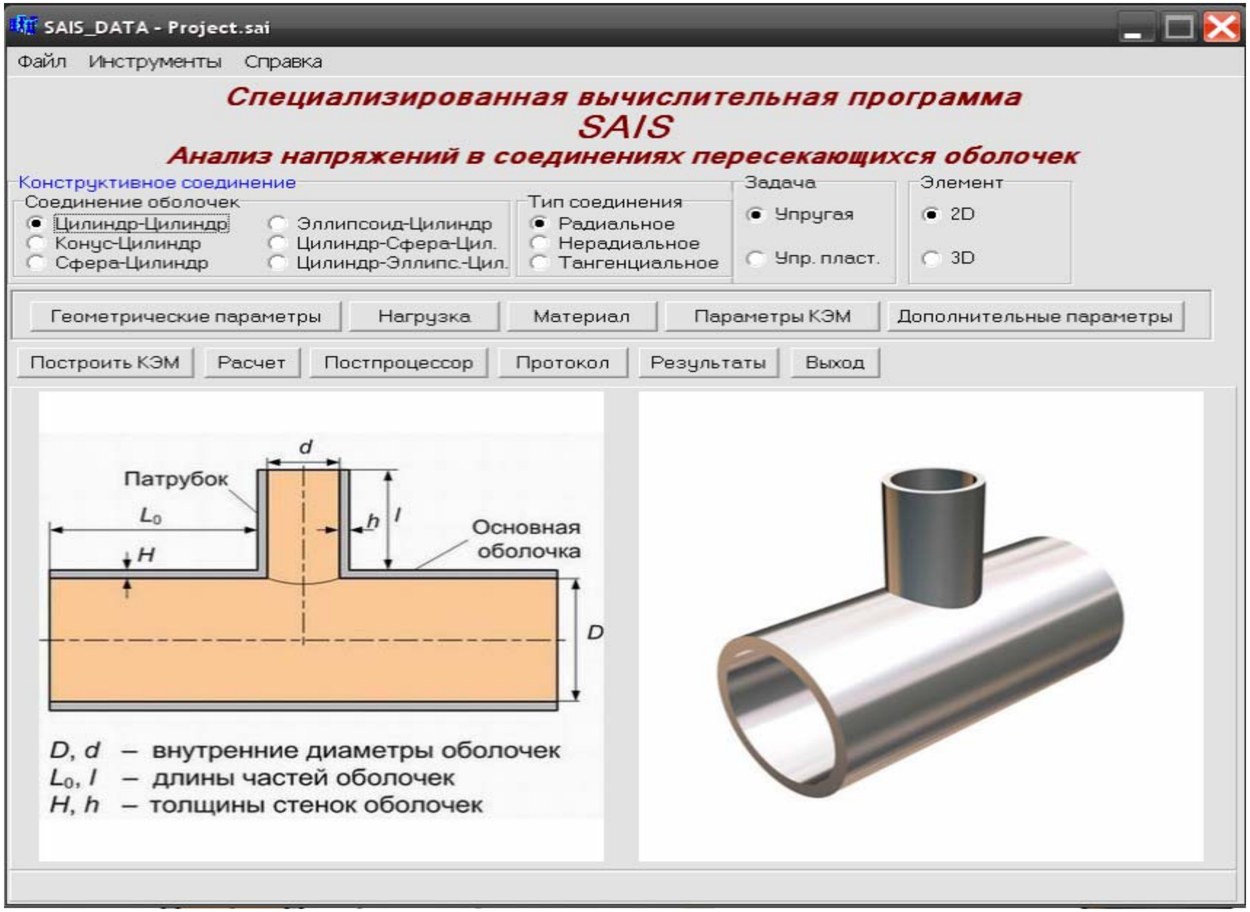
$$\mathbf{K} = \sum_e (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e. \quad (20)$$

$\mathbf{a}^e$ – матрица связи номеров глобальных узлов (матрица индексов)

$$\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{F}. \quad (21)$$

Система линейных алгебраических уравнений

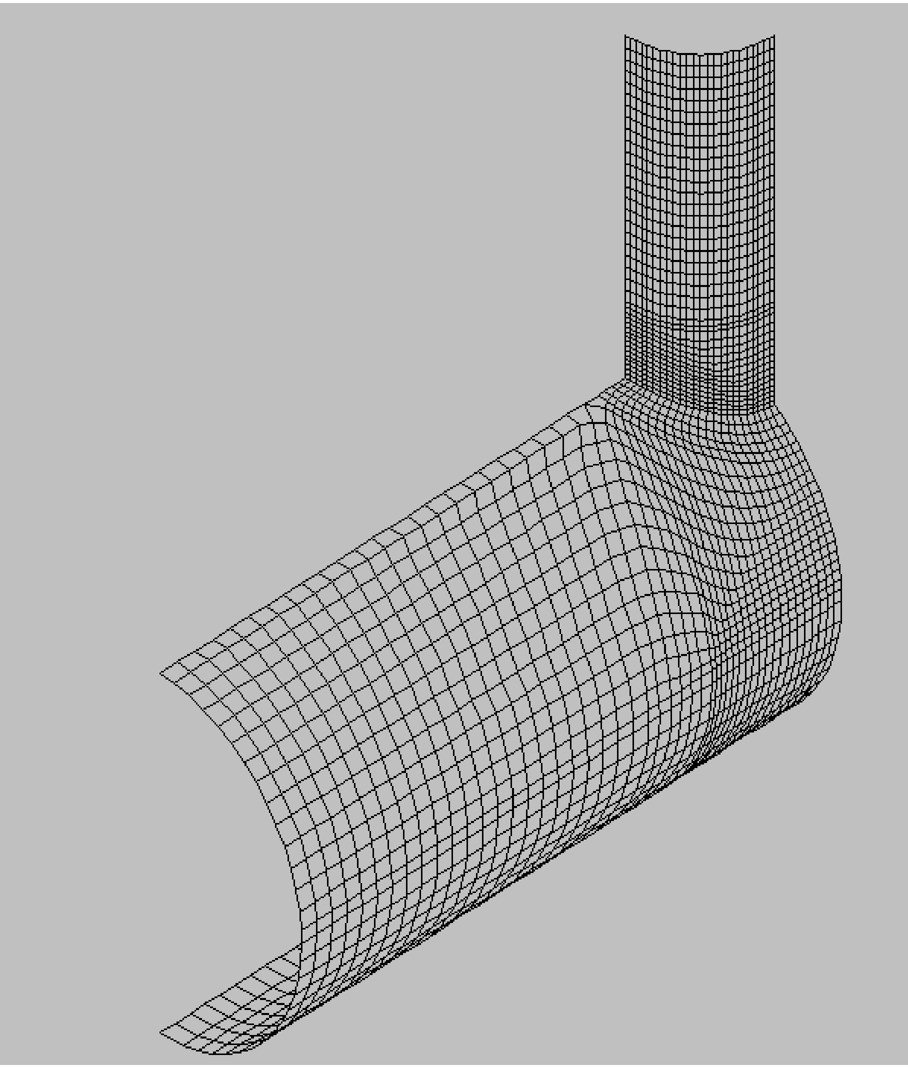
Главное окно программы *SAISdata*



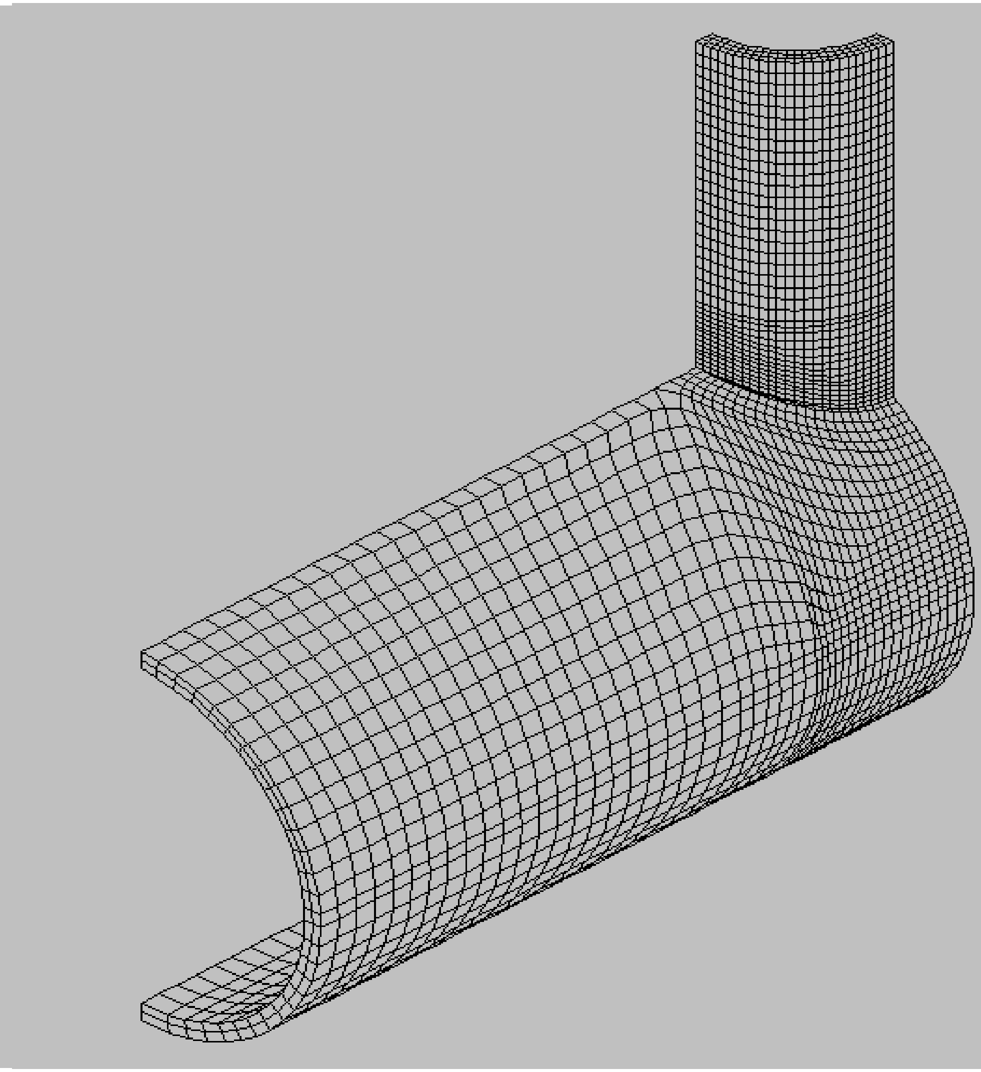
Структура вычислительной программы

- программа SAISdata — подготовка исходных данных
- модуль SAISbase — создание КЭМ соединения, формирование и решение САУ, получение линейных решений, определение НДС
- модуль SAISpost — визуализация КЭМ и результатов расчета

Конечно-элементная модель исследуемой конструкции



Двухмерная КЭМ



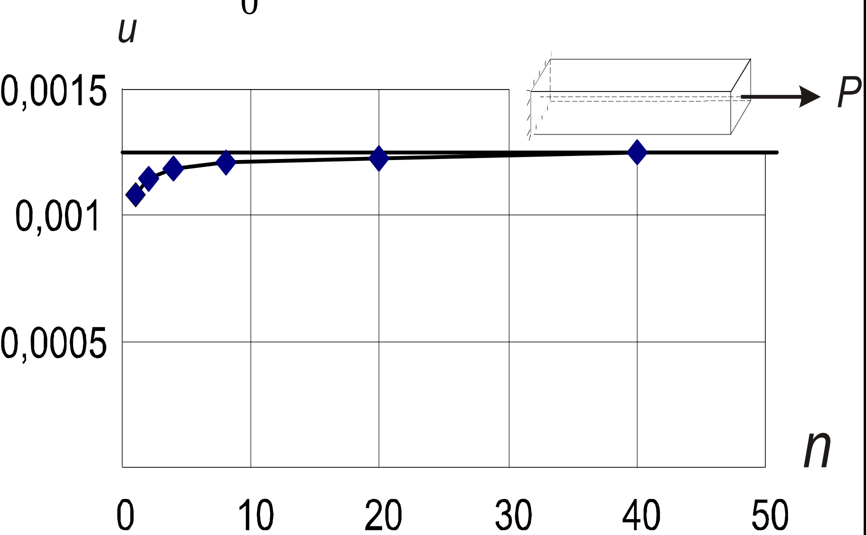
Трехмерная КЭМ

Консольная балка под действием сосредоточенной нагрузки

Растягивающая осевая сила P_x

$$\sigma_x = \frac{P_x}{a \cdot h} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad (22)$$

$$u_{\max} = \int_0^l \varepsilon_x dx = \frac{P_x \cdot l}{E \cdot a \cdot h}. \qquad (23)$$

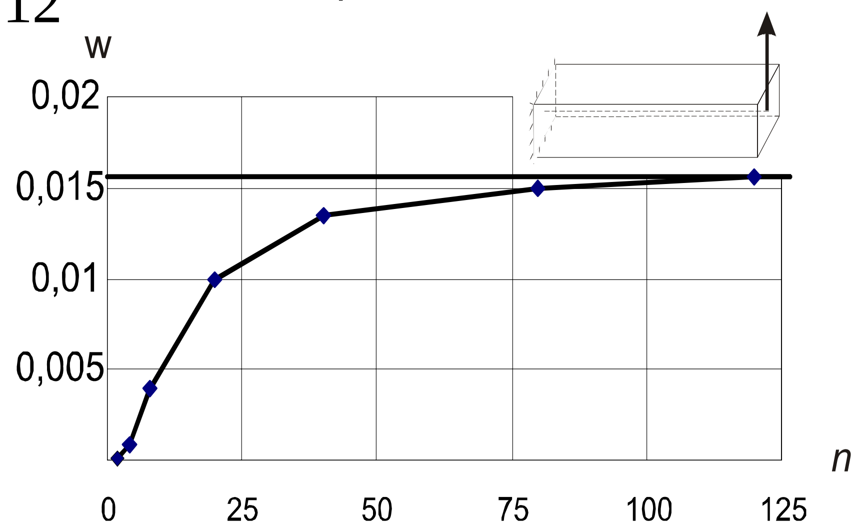


Поперечная сила P_z

$$w_{\max} = \frac{P_z l^3}{3EJ_y} \quad (24) \qquad \sigma_{\max} = \frac{P_z l}{W_y} \quad (25)$$

$$W_y = \frac{a \cdot h^2}{6}$$ – момент сопротивления изгибу (26)

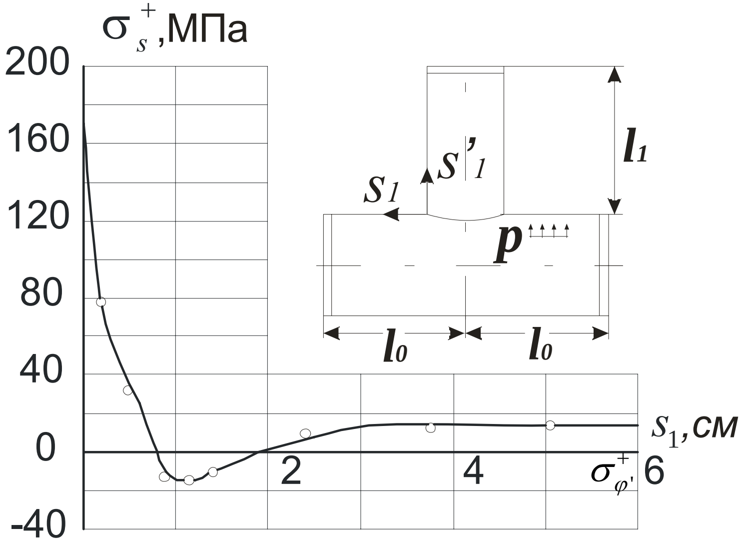
$$J_y = \frac{a \cdot h^3}{12}$$ момент инерции площади поперечного сечения (27)

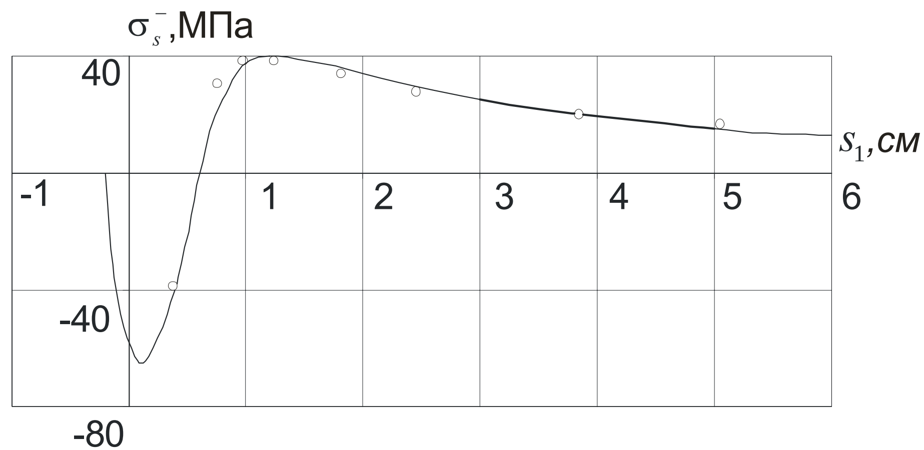


Исследование сходимости численного решения к аналитическому

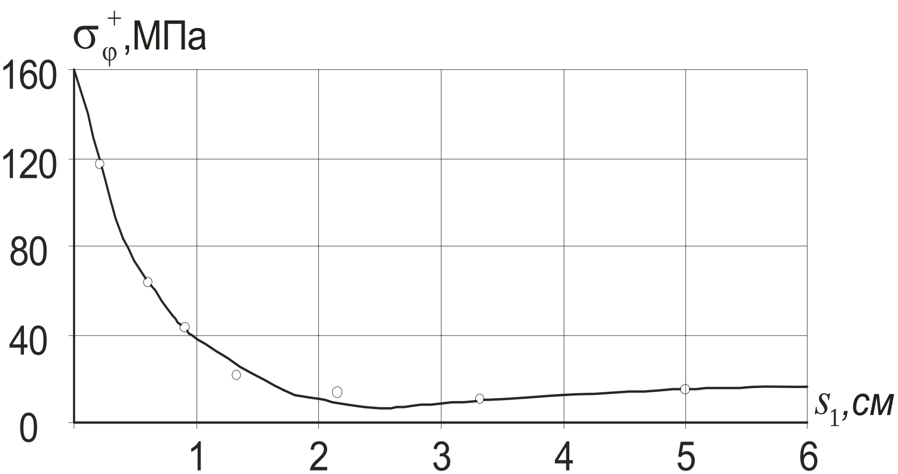
Верификации вычислительной программы

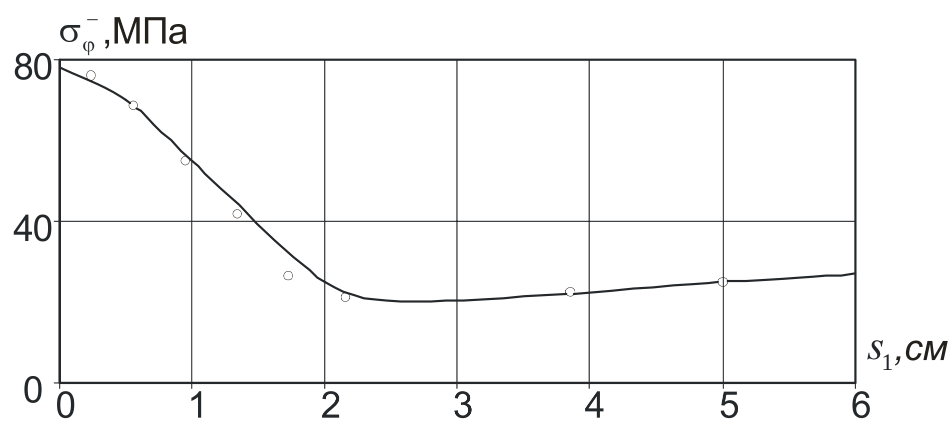
Сравнение расчетных (SAIS3d) и экспериментальных результатов





Продольные напряжения на внешней $\sigma^{+}_{s'}$ *и внутренней* $\sigma^{-}_{s'}$ *поверхности патрубка*





Окружные напряжения на внешней $\sigma^{+}_{\varphi'}$ *и внутренней* $\sigma^{-}_{\varphi'}$ *поверхности патрубка*

Выводы

1. Разработана графическая оболочка SAISdata по подготовке исходных данных в диалоговом режиме.
2. Модернизирован модуль автоматической генерации конечно-элементной модели программы SAIS по трехмерной КЭМ.
3. Создана модель трехмерного изопараметрического 8-узлового конечного элемента.
4. На базе простых классических задач выполнены тестовые расчеты для анализа сходимости конечно-элементного решения.
5. Выполнена верификация разработанной программы для расчета радиально пересекающихся цилиндрических оболочек под действием внутреннего давления путем сравнения расчетных результатов с экспериментальными данными.
6. По результатам дипломной работы в соавторстве опубликованы 2 научные статьи в научно-технических журналах, тезисы докладов трех международных научных конференций и участвовал в двух конкурсах НИРС МГИУ.