24. Интерполяция и аппроксимация кривых и поверхностей. Аппроксимация сплайнами.

1) Интерполяция и аппроксимация кривых и поверхностей.

Под аппроксимацией обычно подразумевается описание некоторой, порой не заданной явно, зависимости или совокупности представляющих ее данных с помощью другой, обычно более простой или более единообразной зависимости. Часто данные находятся в виде отдельных узловых точек, координаты которых задаются таблицей данных.

Результат аппроксимации может не проходить через узловые точки. Напротив, задача интерполяции — найти данные в окрестности узловых точек. Для этого используются подходящие функции, значения которых в узловых точках совпадают с координатами этих точек. Например, при *линейной интерполяции* зависимости $y(x)$ узловые точки соединяются друг с другом отрезками прямых и считается, что искомые промежуточные точки расположены на этих отрезках.

Для повышения точности интерполяции применяют параболы (квадратичная интерполяция) или полиномы более высокой степени (полиномиальная интерполяция).

2) Аппроксимация сплайнами.

Сплайн-функцией степени k с точками соединения $x_0<x_1<\ldots<x_n$ будет функция $y(x)$, которая на отрезке $[x_0,x_n]$ имеет непрерывные производные до $(k-1)$ включительно и на каждом из отрезков $[x_{i-1},x_i]$ равна многочлену степени k.

Далее нас будут интересовать лишь кубические сплайны (k=3). Такой сплайн обеспечивает совпадение в узлах с исходной функцией и непрерывность первой и второй производных в точках соединения.

Прежде всего определяются первые производные во всех точках соединения. Решается трехдиагональная система (n-1) уравнений с доминирующей главной диагональю. Она может быть решена, если задать два краевых условия.

После того как построена трехдиагональная матрица (или дополненная трехдиагональная матрица в случае в)) и вектор свободных членов, система уравнений может быть решена. Для решения такой системы существует эффективный алгоритм, который в отечественной литературе называется *методом прогонки*. В результате решения системы уравнений получается вектор первых производных в точках соединения. Теперь значение $y(x)$ для $x_{i-1}\le x\le x_i$ определяется из многочлена $y(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i$, коэффициенты которого легко найти, поскольку известны значения функции и первые производные в точках соединения.

3) Многочлены Безье.

Вообще-то, построение кривой Безье n-ого порядка не является задачей интерполяции, поскольку эта кривая проходит только через первую и последнюю указанные точки. Тем не менее, раздел "Интерполяция" является наиболее подходящим для размещения этого алгоритма местом, поскольку некоторое сходство с задачами интерполяции есть.

Кривая Безье является параметрической кривой, определенной на плоскости, но это определение легко может быть расширено для пространства большей размерности. Кривая *n*-ого порядка задается следующей формулой: $x(t) = C_n^0 t^0 (1-t)^n x_0 + C_n^1 * t^1 * (1-t)^{n-1} * x_1 + C_n^2 t^2 (1-t)^{n-2} x_2 + \ldots + C_n^n t^n (1-t)^0 x_n$.

Здесь x_i - абсцисса i-ой точки, параметр t лежит в интервало от 0 до 1. Аналогично задаются другие координаты. Такая кривая проходит через первую и последнюю точки, но не обязательно проходит через остальные.

Обычно на практике используется кривая Безье третьего порядка. В таком случае кривая, построенная по набору точек, состоит из набора кривых третьего порядка. Первая кривая строится на основе точек 0, 1, 2, 3. Вторая - на основе 3, 4, 5, 6 и так далее.

СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ

приближенное представление функции или приближенное восстановление функции из заданного класса по неполной информации (напр., по значениям на сетке) с помощью *сплайнов.*

Как и в классич. теории приближения функций, изучаются линейные методы С.-а., включая *сплайн-интерполяцию,* наилучшие методы, а также аппроксимации классами нелинейных сплайнов, напр. сплайнами с нефиксированными узлами.

Наилучшие приближения сплайнами. Изучаются вопросы существования, единственности, характеристич. свойства наилучшего сплайна (н. с.) (см. *Наилучшего приближения элемент*), а также порядки, асимптотика и точные верхние грани уклонений сплайнов от заданного класса функций. Сплайны с фиксированными узлами не образуют *Чебышева систему,* поэтому в C[*a, b*]нет единственности н. с. и характеристич. свойства н. с. сложнее, чем характиристич. свойства *Наилучшего приближения многочлена* (см. [8]).Однако в L[*a, b*]для подкласса непрерывных, функций н. с., если они склеиваются из гладких функций, образующих систему Чебышева на [*a, b*], обладают свойствами единственности [2]. Сплайны с фиксированной гладкостью, но с нефиксированными узлами (предполагается, что число узлов не превосходит заданного числа) не образуют замкнутого множества, поэтому здесь может не существовать н. с. Порядок приближения может быть охарактеризован следующим результатом [6]:

$$\left\| f^{(i)}(x) - S^{(i)}_{m,\,\Delta_n}(x) \right\|_{L_p[a,\,b]} \leqslant$$

$$\leqslant c \, \| \Delta_n \|^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \omega_{m-i}\left(f^{(i+1)}, \|\Delta_n\|\right)_q, \qquad (1)$$

$$1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty,$$

где $S_{m,\,\Delta_n}(x)$ - полиномиальный сплайн степени mс узлами в точках сетки

$$\Delta_n : a = x_0^{(n)} \leqslant x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = b,$$

$$\| \Delta_n \| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i),$$

$\omega_k(f,\,\delta)_q$ - модуль гладкости порядка kв $L_q[\,a,\,b]$и функция f(x)имеет абсолютно непрерывную (l-1)-ю производную и l- юиз $L_q\ (1 \leqslant l \leqslant m),$ i=0,1,..., l-1. При $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ в (1) можно iзаменить на i-1 и убрать множитель $\|\Delta_n\|^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}.$ Более слабые аналоги неравенства (1) получены для многомерных сплайнов. Напр., если $f \in W_2^k(\Omega)$ $(W_2^k(\Omega)$ - пространство Соболева) и S_h^k - совокупность сплайнов (степени не выше kпо каждой переменной) с равномерными узлами и шагом hи область Ω удовлетворяет строгому условию конуса (см. Вложения теоремы),то

$$\inf_{S \in S_h^k} \| f - S \|_{W_2^j(\Omega)} \leqslant c \cdot h^{k-j} \| f \|_{W_2^k(\Omega)}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant k.$$

Для равномерной сетки $(\|\Delta_n\| = 1/n)$ и класса W_q^{m+1} порядок правой части в (1) при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ равен $n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-m-1+i}.$ Если рассматривать приближение сплайнами степени mгладкости m-1 с нефиксированными узлами, число к-рых не превосходит *п,* то за счет выбора узлов можно добиться [7], чтобы порядок аппроксимации был равен n^{-m-1+i}. Для наилучшего равномерного приближения нек-рых классов периодических функций полиномиальными сплайнами с равномерными узлами имеется ряд окончательных результатов. Напр., для класса $\tilde{W}^r H_\omega,$ где $\omega(\delta)$ - выпуклый модуль непрерывности, подсчитана верхняя грань уклонения от сплайнов степени r[4]. Она совпадает с соответствующим *поперечником* этого класса. Изучаются также наилучшие приближения сплайнами при дополнительных ограничениях на его старшую

Производную [13]. В связи с изучением наилучших квадратурных формул естественно возникает задача наилучшего приближения специальной функции $(b - t)^r$ (см. Моносплайн). Линейные методы приближения сплайнам и начали изучать раньше наилучших приближении. При этом преимущественно изучались приближения. *интерполяционными сплайнами* (и. с.) (см. [1], [3], [5]). И. с. часто дают тот же порядок приближения, что и наилучшие; это является одним из преимуществ перед интерполированием многочленами. Так, если функция f(x)имеет непрерывную r-ю производную на $(-\infty,\ \infty),$ то для приближения полиноми- адьными и. с. $S_n(x,h)$ степени $n\geqslant r$ с равномерными узлами интерполяции $x_i=ih,$ $i=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$ и узлами сплайна справедлива оценка [6].

$$\| f^{(i)}(x)-S_n^{(i)}(x,\ h)\|_{C(-\infty,\ \infty)}\leqslant$$
$$\leqslant c\cdot\omega_{r+1-i}(f^{(i)},\ h),\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ r.$$

При изучении и. с. с произвольными узлами в качестве параметра приближения выбирается максимальное расстояние между узлами интерполяции; обычно узлы интерполяции и узлы сплайна тесно связаны между собой. В приложениях наиболее широко используются полиномиальные и. с. $S_3(x)$3-й степени - кубические сплайны. Это связано с тем, что построение таких сплайнов сводится в большинстве случаев к решению системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, имеющей доминирующую главную диагональ. Решение таких систем легко реализуется на ЭВМ. Кроме того, если функция f(x)имеет непрерывную k-ю, $0\leqslant k\leqslant 3,$ производную на [*a, b*], то имеют место оценки

$$\| f^{(i)}(x)-S_3^{(i)}(x)\|_{C[a,\ b]}\leqslant$$
$$\leqslant c\,\|\Delta_n\|^{k-i}\omega(f^{(k)},\ \|\Delta_n\|),\ 0\leqslant i\leqslant k,$$

где $\{x_i^{(n)}\}$ - узлы интерполяции. При *k*=1, 2 константа c>0 не зависит от f и от сеток $\Delta_n.$ При *k*=0 и k=3 на последовательность сеток Δ_n налагаются дополнительные ограничения. Аналог этого результата имеет место также для многомерных кубических сплайнов, а также для сплайнов большей степени.

И. с. нечетной степени обладает рядом экстремальных свойств. Напр., среди всех функций, имеющих абсолютно непрерывную (*т* -1)-ю производную на [*a, b*] и m-ю производную из L_2 [*a, b*]и принимающих в точках $\{x_i\}$, $a<x_0<x_1<\ldots<x_n<b$, заданные значения $\{y_i\}$, полиномиальный сплайн $S_{2m-1}(x)$ с узлами $\{x_i\}$, принимающий в точках $\{x_i\}$ значения $\{y_i\}$, имеющий непрерывную (2т-2)-ю производную на [*a, b*]и совпадающий на $[a, x_0)$и $(x_n, b]$ смногочленами степени не выше *т* -1, имеет наименьшую норму *т* -й производной в L_2 [*a, b*]. Это свойство послужило основой для многочисленных обобщений сплайнов. Для нек-рых классов функций верхняя грань уклонений от и. с. совпадает с верхней гранью уклонений

для н. с., напр. для класса $\tilde{W}^r H_\omega$ при $\omega(\delta)=\delta.$

Сплайны играют важную роль в задаче сглаживания [3], [5] сеточной функции, заданной с погрешностью. С помощью сплайнов строятся базисы [5] и ортонормированные базисы [9], *Лебега константы* к-рых ограничены.

Методы С.-а. тесно связаны с численным решением уравнений в частных производных методом конечных элементов, в основе к-рого лежит *Ритца метод* при специальном выборе базисных функций. В методе конечных элементов в качестве базисных функций выбираются кусочно полиномиальные функции, т. е. *сплайны.* Пусть, напр., Ω - ограниченная область из $\mathbb{R}^2,$ к-рую можно разложить на конечное число правильных треугольных подобластей $T_i,$ $1 \leqslant i \leqslant N.$ Для фиксированного iмногочлен

$$P_i(p_{ij}) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_1 x_2 + \alpha_6 x_2^2$$

определяется из условий

$$P_i(p_{ij}) = f(p_{ij}),\ P_i(q_{ij}) = f(q_{ij}),\ j=1,\ 2,\ 3,$$

где функция f(p)непрерывна на $\overline{\Omega}$ и p_{ij} - вершины треугольника T_i, а q_{ij} - середины его сторон. Пусть S(p) = P_i (p) при $p \in T_i,$ i=0, 1, . . ., *N.* Если $f \in W_2^3(\Omega),$ то

$$\| f - S \|_{W_2^j(\Omega)} \leqslant ch^{3-j} \| f \|_{W_2^3(\Omega)},\ j=0,\ 1,$$

где *h* - длина стороны треугольника T_i и с-абсолютная постоянная.