**24. Интерполяция и аппроксимация кривых и поверхностей. Аппроксимация сплайнами.**

**1) Интерполяция и аппроксимация кривых и поверхностей.**

Под аппроксимацией обычно подразумевается описание некоторой, порой не заданной явно, зависимости или совокупности представляющих ее данных с помощью другой, обычно более простой или более единообразной зависимости. Часто данные находятся в виде отдельных узловых точек, координаты которых задаются таблицей данных.

Результат аппроксимации может не проходить через узловые точки. Напротив, задача интерполяции — найти данные в окрестности узловых точек. Для этого используются подходящие функции, значения которых в узловых точках совпадают с координатами этих точек. Например, при *линейной интерполяции* зависимости *у(х)* узловые точки соединяются друг с другом отрезками прямых и считается, что искомые промежуточные точки расположены на этих отрезках.

Для повышения точности интерполяции применяют параболы (квадратичная интерполяция) или полиномы более высокой степени (полиномиальная интерполяция).

**2) Аппроксимация сплайнами.**

*Сплайн-функцией* степени *k* с точками соединения *x0*<*x1*<…<*xn* будет функция *y*(*x*), которая на отрезке [*x0*,*xn*] имеет непрерывные производные до (*k-1*) включительно и на каждом из отрезков [*xi-1*,*xi*] равна многочлену степени *k.*

Далее нас будут интересовать лишь кубические сплайны (*k*=3). Tакой сплайн обеспечивает совпадение в узлах с исходной функцией и непрерывность первой и второй про­изводных в точках соединения.

Прежде всего определяются первые производные во всех точках соединения. Pешается трехдиагональная система (*n*-1) уравнений с доминирующей главной диагональю. Она может быть решена, если за­дать два краевых условия.

После того как построена трехдиагональная матрица (или дополненная трехдиагональная матрица в случае [в)](http://graphics.cs.msu.su/grafor/grafhelp/chapter_5_1.htm#case_c)) и вектор сво­бодных членов, система уравнений может быть решена. Для решения такой системы существует эффективный алгоритм, который в отечес­твенной литературе называется *методом прогонки*. B результате ре­шения системы уравнений получается вектор первых производных в точках соединения. Tеперь значение *y*(*x*) для *xi-1* *x**xi* определяется из много­члена *y*(*x*)=*aix3+bix2+cix+di*, коэффициенты которого легко найти, поскольку известны значения функции и первые производные в точках соединения.

**3) Многочлены Безье.**

Вообще-то, построение кривой Безье *n*-ого порядка не является задачей интерполяции, поскольку эта кривая проходит только через первую и последнюю указанные точки. Тем не менее, раздел "Интерполяция" является наиболее подходящим для размещения этого алгоритма местом, поскольку некоторое сходство с задачами интерполяции есть.

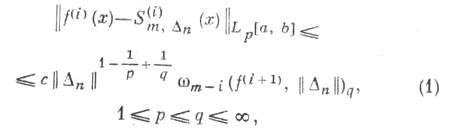
Кривая Безье является параметрической кривой, определенной на плоскости, но это определение легко может быть расширено для пространства большей размерности. Кривая *n*-ого порядка задается следующей формулой: *x(t) = Cn0t0(1-t)nx0 + Cn1\*t1\*(1-t)n-1\*x1 + Cn2t2(1-t)n-2x2 + ... + Cnntn(1-t)0xn*.

Здесь *xi* - абсцисса i-ой точки, параметр *t* лежит в интервало от *0* до *1*. Аналогично задаются другие координаты. Такая кривая проходит через первую и последнюю точки, но не обязательно проходит через остальные.

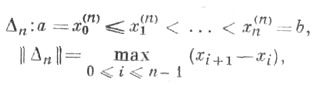
Обычно на практике используется кривая Безье третьего порядка. В таком случае кривая, построенная по набору точек, состоит из набора кривых третьего порядка. Первая кривая строится на основе точек 0, 1, 2, 3. Вторая - на основе 3, 4, 5, 6 и так далее.

**СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ**

приближенное представление функции или приближенное восстановление функции из заданного класса по неполной информации (напр., по значениям на сетке) с помощью *сплайнов.*   
Как и в классич. теории приближения функций, изучаются линейные методы С.-а., включая *сплайн-интерполяцию,* наилучшие методы, а также аппроксимации классами нелинейных сплайнов, напр. сплайнами с нефиксированными узлами.   
Наилучшие приближения сплайнами. Изучаются вопросы существования, единственности, характеристич. свойства наилучшего сплайна (н. с.) (см. [*Наилучшего приближения элемент*](http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/3299/%D0%9D%D0%B0%D0%B8%D0%BB%D1%83%D1%87%D1%88%D0%B5%D0%B3%D0%BE))*,* а также порядки, асимптотика и точные верхние грани уклонений сплайнов от заданного класса функций. Сплайны с фиксированными узлами не образуют *Чебышева систему,* поэтому в С[ *а, b*]нет единственности н. с. и характеристич. свойства н. с. сложнее, чем характиристич. свойства *Наилучшего приближения многочлена* (см. [8]).Однако в L[ *а, b*]для подкласса непрерывных, функций н. с., если они склеиваются из гладких функций, образующих систему Чебышева на [ *а, b*]*,* обладают свойствами единственности [2]. Сплайны с фиксированной гладкостью, но с нефиксированными узлами (предполагается, что число узлов не превосходит заданного числа) не образуют замкнутого множества, поэтому здесь может не существовать н. с. Порядок приближения может быть охарактеризован следующим результатом [6]:

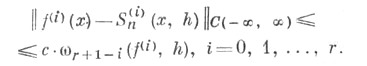


где http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-129.jpg- полиномиальный сплайн степени тс узлами в точках сетки



http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-131.jpg- модуль гладкости порядка kв *Lq*[ *а, b*]и функция f(x)имеет абсолютно непрерывную (*l-*1)-ю производную и *l-* юиз http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-132.jpgi=0,1,..., *l-*1. При http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-133.jpgв (1) можно iзаменить на i-1 и убрать множитель http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-134.jpgБолее слабые аналоги неравенства (1) получены для многомерных сплайнов. Напр., если http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-135.jpghttp://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-136.jpg-пространство Соболева) и http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-137.jpg- совокупность сплайнов (степени не выше kпо каждой переменной) с равномерными узлами и шагом hи область http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-138.jpgудовлетворяет строгому условию конуса (см. [*Вложения теоремы*](http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/787/%D0%92%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)),то

http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-139.jpg  
Для равномерной сетки http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-140.jpgи класса http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-141.jpgпорядок правой части в (1) при http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-142.jpgравен http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-143.jpgЕсли рассматривать приближение сплайнами степени тгладкости m-1 с нефиксированными узлами, число к-рых не превосходит *п,* то за счет выбора узлов можно добиться [7], чтобы порядок аппроксимации был равен *п -m-1+i*. Для наилучшего равномерного приближения нек-рых классов периодических функций полиномиальными сплайнами с равномерными узлами имеется ряд окончательных результатов. Напр., для класса http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-144.jpgгде http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-145.jpg- выпуклый модуль непрерывности, подсчитана верхняя грань уклонения от сплайнов степени r[4]. Она совпадает с соответствующим *поперечником* этого класса. Изучаются также наилучшие приближения сплайнами при дополнительных ограничениях на его старшую Производную [13]. В связи с изучением наилучших квадратурных формул естественно возникает задача наилучшего приближения специальной функции (*b - t*)*r* (см. [*Моносплайн*](http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/3240/%D0%9C%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D1%81%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%B9%D0%BD))*.* Линейные методы приближения сплайнам и начали изучать раньше наилучших приближении. При этом преимущественно изучались приближения. *интерполяционными сплайнами* (и. с.) (см. [1], [3], [5]). И. с. часто дают тот же порядок приближения, что и наилучшие; это является одним из преимуществ перед интерполированием многочленами. Так, если функция f(х)имеет непрерывную r-ю производную на http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051946-146.jpgто для приближения полиноми- адьными и. с. *Sn*(*x,h*)степени http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-1.jpgс равномерными узлами интерполяции *xi=ih,http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-2.jpg* и узлами сплайна справедлива оценка [6].



При изучении и. с. с произвольными узлами в качестве параметра приближения выбирается максимальное расстояние между узлами интерполяции; обычно узлы интерполяции и узлы сплайна тесно связаны между собой. В приложениях наиболее широко используются полиномиальные и. с. S3(x)3-й степени - кубические сплайны. Это связано с тем, что построение таких сплайнов сводится в большинстве случаев к решению системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, имеющей доминирующую главную диагональ. Решение таких систем легко реализуется на ЭВМ. Кроме того, если функция f(х)имеет непрерывную k-ю, http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-4.jpgпроизводную на [ *а, b*]*,* то имеют место оценки

http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-5.jpg

где http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-6.jpg- узлы интерполяции. При *k=*1, 2 константа с>0 не зависит от f и от сеток http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-7.jpgПри *k=*0 и k=3 на последовательность сеток http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-8.jpgналагаются дополнительные ограничения. Аналог этого результата имеет место также для многомерных кубических сплайнов, а также для сплайнов большей степени.   
И. с. нечетной степени обладает рядом экстремальных свойств. Напр., среди всех функций, имеющих абсолютно непрерывную ( *т -*1)-ю производную на [ *а, b*] и m-ю производную из L2 [ *а, b*]и принимающих в точках {*xi*}, a<x0<x1<. . .<*xn<b,* заданные значения {*yi*}, полиномиальный сплайн S2*m-*1(x) с узлами { *х i*},принимающий в точках {*xi*} значения { *у i*}, имеющий непрерывную (2т-2)-ю производную на [ *а, b*]и совпадающий на [а, х 0 )и ( *х п, b*] смногочленами степени не выше *т -*1, имеет наименьшую норму *т* -й производной в L2 [ *а, b*]. Это свойство послужило основой для многочисленных обобщений сплайнов. Для нек-рых классов функций верхняя грань уклонений от и. с. совпадает с верхней гранью уклонений для н. с., напр. для класса http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-9.jpgпри http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-10.jpg  
Сплайны играют важную роль в задаче сглаживания [3], [5] сеточной функции, заданной с погрешностью. С помощью сплайнов строятся базисы [5] и ортонормированные базисы [9], *Лебега константы* к-рых ограничены.   
Методы С.-а. тесно связаны с численным решением уравнений в частных производных методом конечных элементов, в основе к-рого лежит [*Ритца метод*](http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/4870/%D0%A0%D0%B8%D1%82%D1%86%D0%B0) при специальном выборе базисных функций. В методе конечных элементов в качестве базисных функций выбираются кусочно полиномиальные функции, т. е. *сплайны.* Пусть, напр., http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-11.jpg- ограниченная область из http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-12.jpgк-рую можно разложить на конечное число правильных треугольных подобластей *Т i,http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-13.jpghttp://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-14.jpg* Для фиксированного iмногочлен

http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-15.jpg  
определяется из условий

http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-16.jpg

где функция f(р)непрерывна на http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-17.jpgи http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-18.jpg- вершины треугольника *Т i,* а http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-19.jpg- середины его сторон. Пусть S(р) = *Р i* (р) при http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-20.jpgi=0, 1, . . ., *N.* Если http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-21.jpgто

http://dic.academic.ru/pictures/enc_mathematics/051947-22.jpg

где *h -* длина стороны треугольника *Ti* и с-абсолютная постоянная.