| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **xmarci10** | | | | | | |

# Úloha č. 1

(Termín odovzdania 15.11.2019)

## Úloha 1

Uvažujme operáciu $\circ$ definovanú nasledovne: $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$ . S využitím uzáverových vlastností dokážte alebo vyvráťte nasledujúce vzťahy:

(a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$

(b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D$

(c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

$\mathcal{L}_2^D$ značí triedu deterministických bezkontextových jazykov, $\mathcal{L}_2$ triedu bezkontextových jazykov a $\mathcal{L}_3$ triedu regulárnych jazykov.

(10 bodov)

---

### Riešenie

(a) Podľa vety 3.23[1] trieda regulárnych jazykov tvorí množinovú Booleovu algebru z ktorej mimo iné plynie aj uzavretosť voči doplnku. Teda ak $L_2 \in \mathcal{L}_3$ potom aj $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$. Ďalej podľa vety 3.22[1] je trieda regulárnych jazykov uzavretá aj voči operácii $\cup$ (zjednotenie) a teda ak $L_1 \in \mathcal{L}_3$ (zo zadania) a zároveň $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$ potom aj $L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$.
Zadaný vzťah **platí**.

(b) Operáciu $L_1 \circ L2$ je možné aplikáciou DeMorganových zákonov prepísať na tvar $\overline{\overline{L_1} \cap L_2}$. V tomto tvare sa nachádza doplnok regulárneho jazyka $L_1$, ktorý je podľa vety 3.23[1] taktiež regulárny jazyk. Ďalej veta 4.27[1] hovorí, že deterministické bezkontextové jazyky sú uzatvorené voči prieniku s regulárnymi jazykmi. Preto ak $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_3$ a $L_2 \in \mathcal{L}_2^D$ potom aj $\overline{L_1} \cap L_2 \in \mathcal{L}_2^D$. Veta 4.27[1] taktiež hovorí, že deterministické bezkontextové jazyky sú uzatvorené aj voči doplnku a preto $\overline{\overline{L_1} \cap L_2} \in \mathcal{L}_2^D$
Zadaný vzťah **platí**.

(c) Veta 4.24[1] mimo iné hovorí aj o tom, že bezkontextové jazyky nie sú uzatvorené voči doplnku. Keďže tvar $\overline{\overline{L_1} \cap L_2}$ obsahuje doplnok bezkontextového jazyka, je táto uzáverová vlastnosť porušená.

Na vyvrátenie tvrdenia (c) použijeme dôkaz sporom:

Predpokladajme že zadaný vzťah platí. Nech $L_1$ a $L_2$ sú ľubovoľné jazyky nad abecedou $\Sigma$. Za $L_1$ zvolíme jazyk $\emptyset$. Keďže $\emptyset$ je regulárna množina nad $\Sigma$, potom aj jazyk, ktorý značí (v našom prípade $L_1$) je regulárny. Po dosadení $L_1$ do overovaného vzťahu získame výraz $\overline{L_2}$. Keďže podľa vety 4.24[1] doplnok bezkontextového jazyka nieje bezkontextový jazyk, potom $\overline{L_2} \notin \mathcal{L}_2$ a teda ani $\overline{\overline{L_1} \cap L_2} \notin \mathcal{L}_2$.

Zadaný vzťah **neplatí**.

[1] `https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf`

# Úloha 2

Majme jazyk $L$ nad abecedou $\{a, b, \#\}$ definovaný nasledovne:

$$L = \{a^i b^j \# a^k b^l | i + 2j = 2k + l\}$$

Zostrojte deterministický zásobníkový automat $M_L$ taký, že $L(M_L) = L$.

(10 bodov)

---

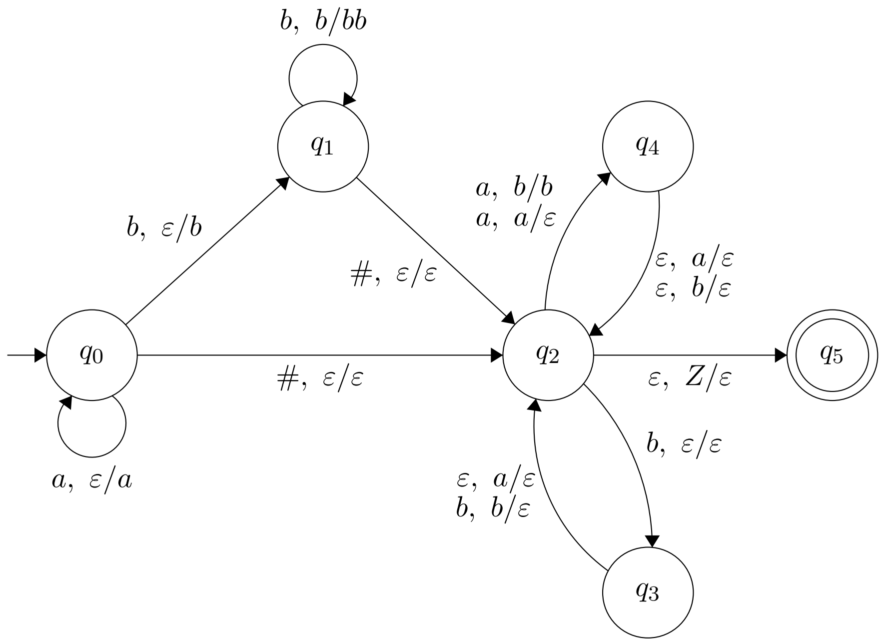
## Riešenie

$$M_L = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b, \#\}, \{a, b, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_5\})$$

kde

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, \varepsilon) &= (q_0, a) \\ \delta(q_0, b, \varepsilon) &= (q_1, b) \\ \delta(q_0, \#, \varepsilon) &= (q_2, \varepsilon) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta(q_1, b, b) &= (q_1, bb) \\ \delta(q_1, \#, \varepsilon) &= (q_2, \varepsilon) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta(q_2, a, a) &= (q_4, \varepsilon) \\ \delta(q_2, a, b) &= (q_4, b) \\ \delta(q_2, b, \varepsilon) &= (q_3, \varepsilon) \\ \delta(q_2, \varepsilon, Z) &= (q_5, \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(q_3, \varepsilon, a) &= (q_2, \varepsilon) \\ \delta(q_3, b, b) &= (q_2, \varepsilon) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta(q_4, \varepsilon, a) &= (q_2, \varepsilon) \\ \delta(q_4, \varepsilon, b) &= (q_2, \varepsilon) \end{aligned}$$



# Úloha 3

Dokážte, že jazyk $L$ z predchádzajúceho príkladu nieje regulárny.

(10 bodov)

---

## Riešenie

Predpokladajme, že jazyk $L$ je regulárny jazyk. Potom podľa vety 3.18[2] existuje celočíselná konštanta $p > 0$ taká, že veta $\boldsymbol{a^p b^p \# a^p b^p}$ môže byť zapísaná v tvare $xyz = a^p b^p \# a^p b^p$, $y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq p \wedge \forall i \geq 0 : xy^i z \in L$

Pri hľadaní podreťazca $y$ môže vďaka podmienke $|xy| \leq p$ nastať iba jedna možnosť:

$$a\underbrace{aa\dots a}_{y}bbb\dots b\#aaa\dots abbb\dots b$$

$$y \in \{a^+\}$$

Reťazec $xyz$ tak bude vyzerať nasledovne:

$$\begin{aligned} x &= a^k & k &\geq 0 \\ y &= a^l & l &> 0 \\ z &= a^{p-k-l}b^p\#a^pb^p & k+l &\leq p \end{aligned}$$

Potom ak za tzv. pumpovaciu konštantu zvolíme napríklad $i = 2$ dostaneme reťazec:

$$xy^2z = a^k a^{2l} a^{p-k-l} b^p \# a^p b^p = \boldsymbol{a^{p+l} b^p \# a^p b^p \notin L}$$

Vzniknutý reťazec ale nepatrí do jazyka $L$, keďže $p + l + 2p \neq 2p + p$. Tým pádom došlo k sporu, čím sme vyvrátili predpoklad, že jazyk $L$ je regulárny.

[2] `https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf`

# Úloha 4

Navrhnite algoritmus, ktorý pre daný nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozhodne či $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$.

Ďalej demonštrujte beh tohto algoritmu na automate $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_4\})$, kde $\delta$ je definovaná ako

$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_0\}$, $\delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\}$
$\delta(q_2, a) = \{q_0, q_3\}$, $\delta(q_3, a) = \{q_0, q_4\}$
$\delta(q_4, a) = \{q_0\}$

(10 bodov)

---

## Riešenie

**Algoritmus 1** Rozhodne či v jazyku L(A) prijímanom NKA platí $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$

**Vstup:** nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
**Výstup:** $\exists w \in L(A) : |w| < 5 \Rightarrow$ ***False***, $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5 \Rightarrow$ ***True***

Zavedieme reláciu $R_1 \subseteq Q \times Q$ takú že $\forall q_i, q_j \in Q : q_i R_1 q_j \overset{\text{def}}{\iff} (\exists a \in \Sigma : q_j \in \delta(q_i, a))$
**for** $i \leftarrow 1$ to 4 **do**
  **if** $\exists q_j \in F : q_0 R_i q_j$ **then**
    **return** $False$ ▷ $\exists w \in L(A) : |w| = i$
  **end if**
  $R_{i+1} \leftarrow R_i \circ R_1$
**end for**
**return** $True$

Myšlienka algoritmu je založená na postupnom skladaní relácií. Relácia $R_i$ v $i$-tej iterácií udáva, či medzi dvoma stavmi v automate existuje cesta dĺžky $i$. Napríklad ak sú vo vzťahu stavy $q_0, q_2$ v relácii $R_2$ ($q_0 R_2 q_2$), tak musí existovať nejaký stav $q_1$ do ktorého vedie cesta dĺžky 1 z $q_0$ a z ktorého vedie cesta dĺžky 1 do $q_2$:

$$q_0(R_1 \circ R_1)q_2 \Leftrightarrow \exists q_1(q_0 R_1 q_1 \wedge q_1 R_1 q_2)$$

Na to aby sme zistili či pre všetky vety v jazyku prijímanom daným automatom platí že ich dĺžka je aspoň 5, tak potrebujeme aspoň 4 iterácie nášho algoritmu. V každej iterácii následne testujeme či existuje nejaký koncový stav automatu, ktorý by bol vo vzťahu s počiatočným stavom.

### Demonštrácia algoritmu na zadanom automate:

1. Vytvorená relácia $R_1$:

$$R_1 = \begin{array}{c c} \begin{matrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{matrix} \end{array}$$

2. $i \leftarrow 1; \forall q_j \in F : q_0 \not R_1 \, q_j :$

$$R_2 = R_1 \circ R_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{array} \end{array}$$

3. $i \leftarrow 2; \forall q_j \in F : q_0 \not R_2 \, q_j :$

$$R_3 = R_2 \circ R_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{array} \end{array}$$

4. $i \leftarrow 3; \forall q_j \in F : q_0 \not R_3 \, q_j :$

$$R_4 = R_3 \circ R_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{array} \end{array}$$

5. $i \leftarrow 4; \exists q_j \in F : q_0 R_4 q_j \ (q_j = q_4) :$

$$return \ \boldsymbol{False}$$

Existuje cesta dĺžky 4 z počiatočného stavu $q_0$ do koncového stavu $q_4$.

## Úloha 5

Dokážte, že jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 \neq 0 \land \#_b(w) \leq 2\}$ je regulárny. Postupujte nasledovne:

(a) Definujte $\sim_L$ pre jazyk $L$.

(b) Zapíšte rozklad $\Sigma^*/\sim_L$ a určite počet tried tohto rozkladu.

(c) Ukážte, že $L$ je zjednotením niektorých tried rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$.

(10 bodov)

---

### Riešenie

(a) $u \sim_L v \overset{\text{def}}{\iff} [(\#_a(u) mod\, 2 = \#_a(v) mod\, 2) \land (\#_b(u) = \#_b(v) \land 0 \leq \#_b(u), \#_b(v) \leq 2)]$ $\lor (\#_b(u) > 2 \land \#_b(v) > 2)$

(b) $\Sigma^*/\sim_L$:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 0 \ \land\ \#_b(w) = 0\} \\
L_2 &= \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 0 \ \land\ \#_b(w) = 1\} \\
L_3 &= \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 0 \ \land\ \#_b(w) = 2\} \\
L_4 &= \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 1 \ \land\ \#_b(w) = 0\} \\
L_5 &= \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 1 \ \land\ \#_b(w) = 1\} \\
L_6 &= \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 1 \ \land\ \#_b(w) = 2\} \\
L_7 &= \{w \in \Sigma^* \mid \#_b(w) > 2\}
\end{aligned}$$

(c) $L = L_4 \cup L_5 \cup L_6$

Relácia $\sim_L$ má konečný index (7) a $L$ je zjednotením niektorých tried rozkladu $(L_4, L_5, L_6)$. Podľa Myhill-Nerodovej vety (veta 3.20[3]) je potom ekvivalentným tvrdením, že jazyk $L$ je prijímaný DKA. A keďže jazyk $L$ je prijímaný DKA potom je jazyk $L$ **regulárny**.

[3] `https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf`