1. Inner product and norms
   (a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_2^2 = \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2$ if and only if $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$.
   (b) $2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{a}+\mathbf{x}, \mathbf{b}+\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{a}-\mathbf{x}, \mathbf{b}-\mathbf{y}\rangle$
   (c) $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2$
   (d) $\|\mathbf{x}\|_1 \geq \|\mathbf{x}\|_2 \geq \|\mathbf{x}\|_\infty$
2. Prove the triangle inequality for matrices, $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F + \|\mathbf{B}\|_F$.
3. The following are some useful inequalities for $\ell_2$ norm. Prove them:
   (a) $2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$
   (b) $2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \leq \epsilon\,\|\mathbf{x}\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\,\|\mathbf{y}\|^2$ for any $\epsilon > 0$
   (c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \leq (1+\epsilon)\,\|\mathbf{x}\|^2 + (1+1/\epsilon)\,\|\mathbf{y}\|^2$ for any $\epsilon > 0$
   (d) $\|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_n\|^2 \leq n\,\|\mathbf{x}_1\|^2 + n\,\|\mathbf{x}_2\|^2 + \ldots + n\,\|\mathbf{x}_n\|^2$