1.(a) $\|\underline{u}+\underline{v}\|_2^2$ $\qquad \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ $\qquad \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$

$= \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + 2\,\underline{u^T v}$

$= \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$ $\qquad \underline{u} \perp \underline{v}$

~~if & only if~~ $\underline{u^T v = 0}$

(b) $2\langle a,b\rangle + 2\langle x,y\rangle = \langle a+x, b+y\rangle + \langle a-x, b-y\rangle$

① $\langle a+x, b+y\rangle = \langle a,b\rangle + \langle x,y\rangle + \langle \cancel{a,y}\rangle + \langle \cancel{x,b}\rangle$

② $\langle a-x, b-y\rangle = \langle a,b\rangle + \langle x,y\rangle - \langle \cancel{x,b}\rangle - \langle \cancel{a,y}\rangle$

$+$

$2\langle a,b\rangle + 2\langle x,y\rangle$

$(a+x)^T(b+y) = a^T b + x^T y + x^T b + a^T y$

(c) $\|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2$

positive

$n\|x\|_2^2 - \|x\|_1^2 \overset{?}{\geq} 0$

$$n\left(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots |x_n|^2\right)$$
$$-\left(|x_1|+|x_2|+\cdots |x_n|\right)^2$$

$$=n\left(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots\right)-\left(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots |x_n|^2\right.$$

$(a+b+c)^2$

$$\left.+\,2|x_1||x_2|+2|x_2||x_3|+\cdots\right)$$

pairs of terms $\frac{n(n-1)}{2}$

$n(n-1)$

$$(n-1)\left(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots |x_n|^2\right)$$
$$-\,2|x_1||x_2|-2|x_2||x_3|-\cdots$$

<u>Eg</u> $n=2$

$$|x_1|^2+|x_2|^2-2|x_1||x_2|=\left(|x_1|-|x_2|\right)^2\geq 0$$

$n=3$

$$2\left(|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2\right)-2|x_1||x_2|-2|x_1||x_3|$$
$$-\,2|x_2||x_3|$$

$$=\left(|x_1|^2+|x_2|^2-2|x_1||x_2|\right)$$
$$+\left(|x_1|^2+|x_3|^2-2|x_1||x_3|\right)$$
$$+\left(|x_2|^2+|x_3|^2-2|x_2||x_3|\right)$$
$$=\left(|x_1|-|x_2|\right)^2+\left(|x_1|-|x_3|\right)^2+\left(|x_2|-|x_3|\right)^2$$
$$\geq 0$$

$$= \sum_{i>j} \left(|x_i| - |x_j|\right)^2 \geq 0$$

$i>j$ ↙ ↘ $\frac{n(n-1)}{2}$

$(2,1)$

$(3,1)$

$(3,2)$

$$\underline{\|x\|_1^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot 1\right)^2$$

$$\leq \left(\sum 1^2\right)\left(\sum |x_i|^2\right)$$

↓ X $x^T \mathbf{1}$ ↓ $\underline{n \; \|x\|_2^2}$

(d) $\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$

$$\|x\|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \underbrace{2\sum_{i>j} |x_i \cdot x_j|}_{\geq 0}$$

$$\geq \underline{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \|x\|_2^2$$

↓

$$\geq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^2 = \|x\|_\infty^2$$

$\underline{\underline{2}}$ $\|A+B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$

$$\|A+B\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 + 2\underline{\underline{\langle A,B\rangle}}$$

$$2\,Tr(A^T B)$$

$$\rightarrow \left(C.S. \quad \langle A,B\rangle \le \|A\|_F \|B\|_F \right)$$

$$\le \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 + 2\|A\|_F\|B\|_F$$

$$= (\|A\|_F + \|B\|_F)^2$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$\langle A,B\rangle = ae + bf + cg + hd$$

vectors, matrices, tensors

C.S. $\langle f,g\rangle$

3(a) $\|x-y\|^2 \ge 0 \longrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x^T\underline{y}$

(b) $\underline{\epsilon\|x\|^2} + \frac{1}{\epsilon}\|\underline{y}\|^2 - 2x^T\underline{y}$

$$\left\| \sqrt{\epsilon}\,\underline{x} - \frac{\underline{y}}{\sqrt{\epsilon}} \right\|^2 = \epsilon\|x\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|y\|^2 - 2x^Ty \ge 0$$

$2x^Ty \le 2\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$ for $\epsilon = 2$

$$\left.\begin{aligned} 2ab &\le 2a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 \\ & 3a^2 + \tfrac{1}{3}b^2 \end{aligned}\right]$$

Young's Inequality

Peter-Paul inequality

(c)

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x^Ty$$
$$\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + \epsilon\|x\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|y\|^2$$
$$= (1+\epsilon)\|x\|^2 + \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)\|y\|^2$$

eg. $\epsilon = 2$

$$\|x+y\|^2 \le 3\|x\|^2 + 1.5\|y\|^2$$

$\epsilon = 1$ $\quad \underline{\|x+y\|^2} \le \underline{2\|x\|^2} + \underline{2\|y\|^2}$

(d) $\underline{\|x_1 + x_2 + \dots x_n\|^2}$

$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots \|x_n\|^2$$

$(\epsilon = 1)$

$$+ \underline{2x_1^Tx_2} + 2x_2^Tx_3 \dots$$
$$\le \underline{\|x_1\|^2} + \|x_2\|^2 + \dots \|x_n\|^2$$
$$+ \underline{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2} + \underline{\|x_2\|^2 + \|x_3\|^2}$$
$$+ \dots$$
$$\underline{n\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots\right)}$$

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$$