Traitement de l'image
TP 4 : Transformée de Fourier et filtrage fréquentiel

La transformation de Fourier convertit une information temporelle (spatiale en 2D) en une information fréquentielle. Ainsi une sinusoïde pure de fréquence f_0 définie par une courbe infinie dans un repère temporel sera défini simplement par 2 pics (nommés Dirac) en $\pm f_0$ dans le domaine fréquentiel. La transformation de Fourier inverse permet de retrouver cette sinusoïde à partir des deux Diracs.

La transformation de Fourier 2D discrète s'écrit :

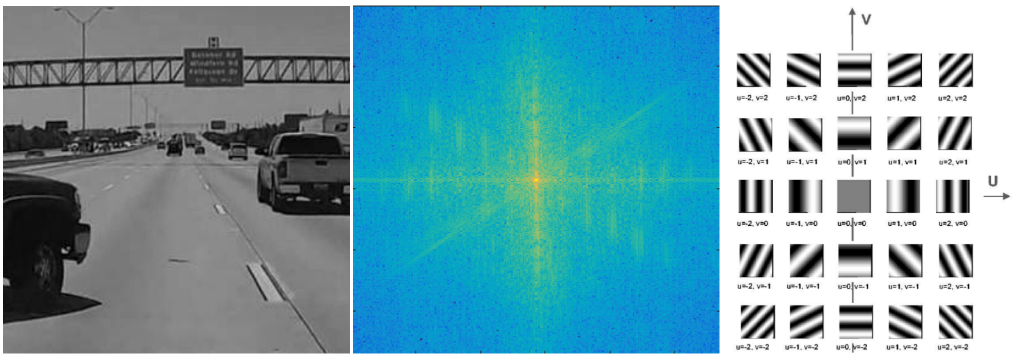
$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) e^{j2\pi(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N})} \tag{1}$$

où $0 \leq u \leq M-1$ et $0 \leq v \leq N-1$.

Afin de s'affranchir de l'information de phase issue de la transformation de Fourier (qui est complexe), on représente habituellement le module de la transformée de Fourier ou spectre de Fourier. On peut être amené à utiliser le logarithme pour mieux visualiser le spectre car l'information centrale, qui représente la composante continue, domine les autres composantes. Habituellement, on utilise :

$$\hat{F}(u,v) = 10\ log(F(u,v)). \tag{2}$$

Chaque point (u,v) du plan de Fourier correspond à une "vague" sinusoïdale de fréquence spatiale $\sqrt{(u^2+v^2)}$ et se propageant le long de l'axe $\triangle$ dirigé selon le vecteur $u\vec{i} + v\vec{j}$. L'image 2D est donc décomposée en une somme de "vagues sinusoïdales" où le centre du plan de Fourier représente les basses fréquences de l'image tandis que les bords représentent les hautes fréquences.

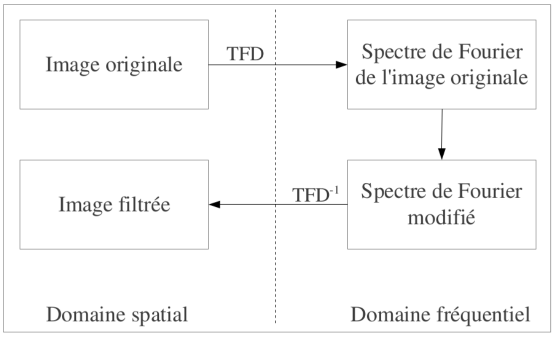


(a) (b) (c)

Une image naturelle ayant un contenu fréquentiel relativement basses fréquences, on s'intéresse traditionnellement à l'information centrale. L'information contenue dans le spectre est très intéressante (densité spectrale, périodicité, etc.) puisqu'elle permet de visualiser le contenu fréquentiel de l'image. De Les lignes directrices fortement représentées dans les images sont mises en valeur dans les spectres. Cependant, le spectre de Fourier ne fournit aucune information de localisation.

I. Filtrage fréquentiel

Nous avons vu dans le TP précédent qu'il était possible de filtrer les images dans le domaine spatial. Il est possible de réaliser un filtrage dans le domaine fréquentiel ou domaine de Fourier. Pour cela, on modifie le spectre de Fourier d'une image avant de réaliser une transformation de Fourier inverse pour avoir accès à l'image filtrée. Le synoptique du filtrage fréquentiel est présenté ci-dessous :



On considère différents types de filtrage :

- le filtrage passe-bas qui élimine les hautes fréquences,
- le filtrage passe-haut qui élimine les basses fréquences,
- et le filtrage passe-bande qui supprime les basses et hautes fréquences.

Application :

1. Ouvrir l'image "road1.png". Calculer et afficher son spectre de Fourier.
   Fonctions Matlab utiles : fft2 (calcul de FFT 2D), fftshift (fréquence (0,0) au centre de l'image), abs (calcul du module de la TF), db (passage en échelle logarithmique, db=10log10).
2. Réaliser un masque de taille carrée de 50 pixels localisé au centre de l'image. Pour ce faire, assigner les 2500 pixels centraux du spectre à 0.
3. Réaliser la transformation de Fourier inverse (ifft2) pour obtenir l'image filtrée résultat. Commenter.
4. Reprenez le synoptique du filtrage fréquentiel en choisissant cette fois de filtrer (mettre à 0) toute l'information hors du carré central. Commenter.

Comme vu dans le TP précédent, filtrer une image peut s'écrire sous la forme d'un produit de convolution entre un noyau et cette image. Malheureusement, les temps de calcul deviennent très important lorsque l'on souhaite appliquer de gros masques de convolution. Le passage dans l'espace de Fourrier devient alors très intéressant. En effet, la convolution dans le domaine spatial et équivalente à une multiplication dans le domaine de Fourier car ces opérations sont dites duales.

Application :

1. Ouvrir l'image "road2.png". Calculer et afficher son spectre de Fourier.

2. Réaliser et afficher un masque gaussien de la taille de l'image :

$$G(m,n) = exp(-\frac{(m-m_0)^2 + (n-n_0)^2}{2\sigma^2}), \tag{3}$$

   où m_0 et n_0 correspondent respectivement au coordonnées du centre de la gaussienne (le centre de l'image) et σ son écartement (ex. 10).

3. Filtrer l'image en multipliant son spectre de Fourrier par le masque gaussien.

4. Réaliser la transformation de Fourier inverse (ifft2) pour obtenir l'image filtrée résultat.

5. Filtrer l'image par convolution avec le masque gaussien. Afficher le résultat et comparer.