ТЕХНОСФЕРА

Алгоритмы и структуры данных

Лекция 4

Списки. Деревья. Поиск.

План лекции

1. Абстракция *хранилище*
2. Структура данных «список».
3. Деревья. Обход деревьев.
4. Абстракция *приоритетная очередь*
5. Бинарная куча
6. `HeapSort`
7. Дерево отрезков.
8. Задача поиска. Абстракция поиска.
9. Последовательный поиск.
10. Поиск с сужением зоны.
11. Распределяющий поиск. Поиск с использованием свойств ключа.

Абстракция *хранилище*.

Абстракция *хранилище*

- Хранилище содержит *ключи* и *значения*.
- Помимо операций создания и уничтожения хранилища реализуются операции:
  - `create` — создать новую пару;
  - `read` — найти пару по ключу;
  - `update` — изменить значение по ключу;
  - `delete` — удалить пару по ключу.

Структуры данных, реализующие эту абстракцию называются `CRUD`-структурами.

Структура данных «список».

Списки

Список — структура данных, которая реализует абстракции:

- `insertAfter` — добавление элемента за текущим.
- `insertBefore` — добавление элемента перед текущим.
- `insertToFront` — добавление элемента в начало списка.
- `insertToBack` — добавление элемента в конец списка
- `find` — поиск элемента
- `size` — определение количества элементов

Списки: реализация

Для реализации списков обычно требуется явное использование указателей.

```
struct linkedListNode {
  someType data;
  linkedListNode *next;
};
```

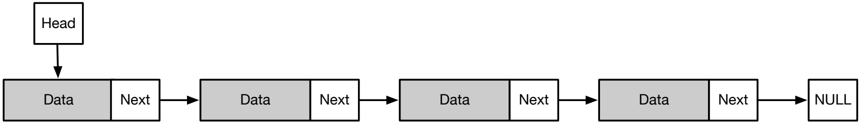
Внутренние операции создания элементов — через `malloc`, `calloc`, `new`.

```
...
linkedListNode *item = new linkedListNode();
item->data = myData;
...
```

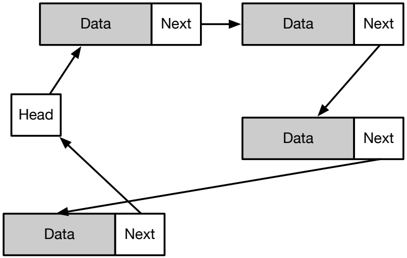
Списки: представления

Различные варианты представлений:

В линейном виде:



В виде кольца:



Списки: сложность

Стоимость операций:

Операция	Время	Память
`insertAfter`	`O(1)`	`O(1)`
`insertBefore`	`O(N)`	`O(1)`
`insertToFront`	`O(1)`	`O(1)`
`insertToEnd`	`O(N)`	`O(1)`
`find`	`O(N)`	`O(1)`
`size`	`O(N)`	`O(1)`

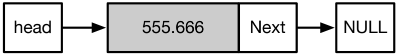
Списки: создание

```
typedef double myData;

linkedListNode *list_createNode(myData data) {
  linkedListNode *ret = new linkedListNode();
  ret->data = data;
  ret->next = nullptr;
  return ret;
}
```

Создание списка из одного элемента:

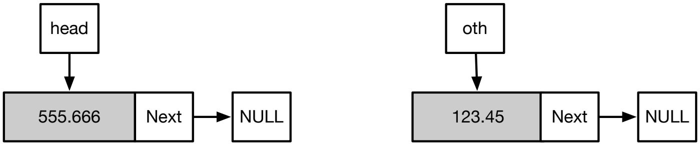
```
linkedListNode *head = list_createNode(555.666);
```



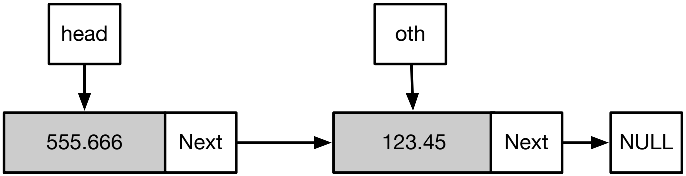
Списки: добавление

Добавление элемента в хвост списка:

```
linkedListNode *oth = list_createNode(123.45);
```

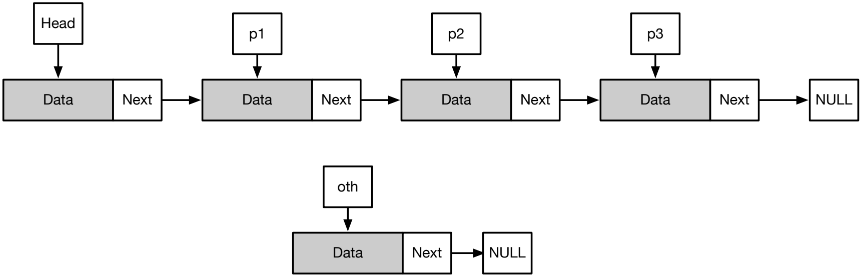



```
head->next = oth;
```



Списки: добавление

Добавление элемента в хвост списка, состоящего из нескольких элементов:

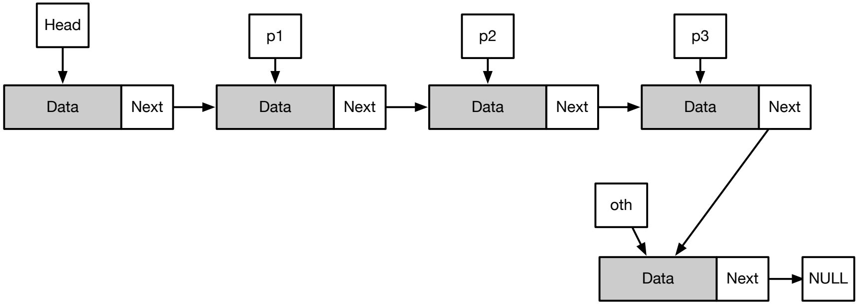


Проход по элементам до нужного (`traversal`, `walk`):

```
linkedListNode *ptr = head;
while (ptr->next != nullptr) {
  ptr = ptr->next;
}
ptr->next = oth;
```

Списки: добавление

Заключительное состояние после вставки.

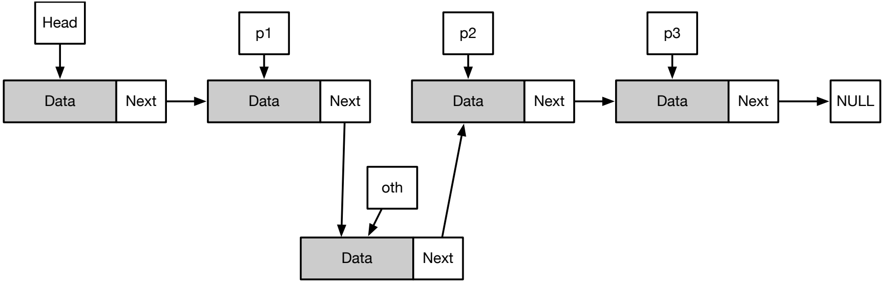


Сложность операции — $O(N)$

Списки: добавление

Вставка `insertAfter` *ЗА* конкретным элементом `p1` примитивна.

```
oth->next = p1->next;
p1->next = oth;
```



Списки: добавление

Вставка *ПЕРЕД* известным элементом p2 сложнее:

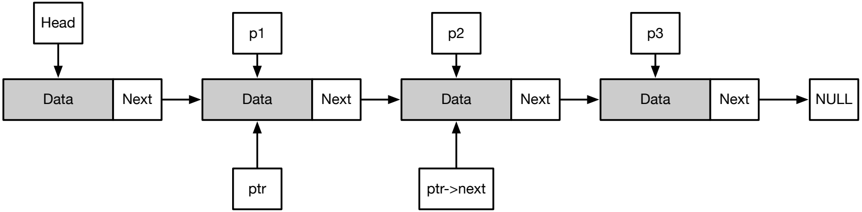
```
linkedListNode *ptr = head;
while (ptr->next != p2) {
  ptr = ptr->next;
}
oth->next = p2;
ptr->next = oth;
```

Списки: удаление

Удаление элемента p2 — непростая операция.

- Нужно найти удаляемый элемент и его предшественника:

```
linkedListNode *ptr = head;
while (ptr->next != p2) {
  ptr = ptr->next;
}
// ptr - prev to p2
```

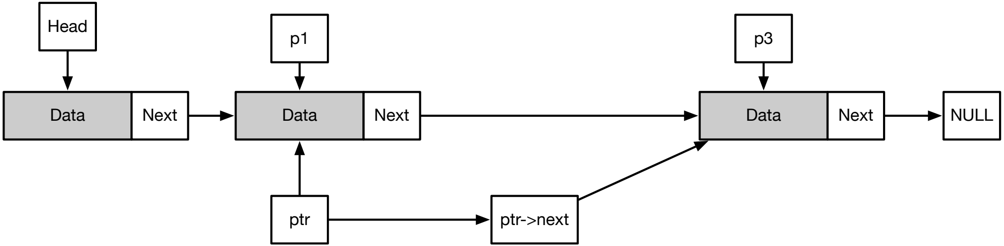


Списки: удаление

Удаление элемента из списка.

- Переместить указатели.

```
ptr->next = p2->next;
delete p2;
```



Списки: размер

Операция `size` — две возможности:

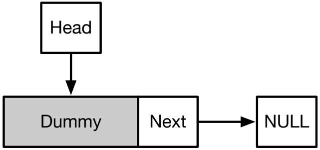
- Через операцию `walk` до `NULL`:

  ```
  linkedListNode *ptr = head;
  int size = 0;
  while (ptr != nullptr) {
    ptr = ptr->next;
    size++;
  }
  return size;
  ```

- Вести размер списка в структуре данных. Потребуется изменить все методы вставки/удаления.

Списки: альтернативное представление

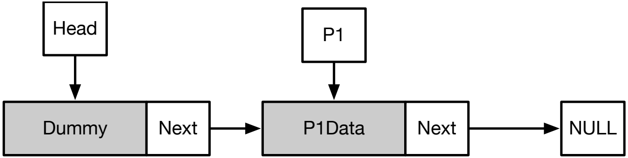
- При нашем представлении требуется всегда различать, работаем ли мы с головой списка или с другим элементом. При смене головы списка приходится заменять все указатели в программе.
- Существуют различные способы представления списков.
- Для абстрактного типа данных удобнее иметь список с неизменной головой.



- Это — пустой список, содержащий ноль элементов.

Списки: альтернативное представление

- Список, состоящий из одного элемента `p1`.



- Такое представление упрощает реализацию за счёт одного дополнительного элемента.

Списки: сложность

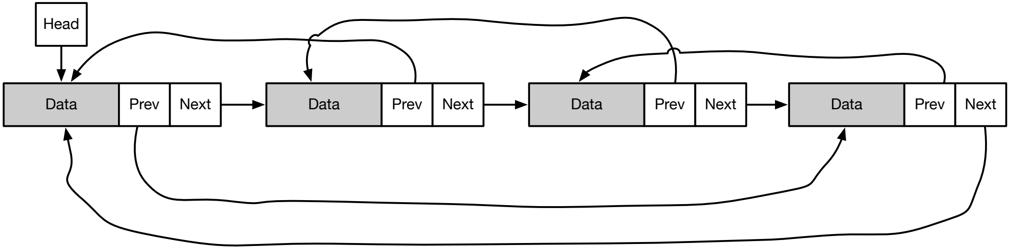
Ещё раз оценим сложность основных операций:

- Вставка элемента в голову списка — $O(1)$
- Вставка элемента в хвост списка — *O(N)*
- Поиск элемента — $O(N)$
- Удаление известного элемента — *O(N)*
- Вставка элемента ЗА известным — $O(1)$
- Вставка элемента ПЕРЕД известным — *O(N)*

Можно ли улучшить худшие случаи?

Списки: двусвязные списки

Худшие случаи можно улучшить, если заметить, что операция «слева-направо» более эффективно реализуется, чем «справа-налево» и восстановить симметрию.



Списки: двусвязные списки: сложность

Для двусвязного списка сложность такая:

- Вставка элемента в голову списка — $O(1)$
- Вставка элемента в хвост списка — *O(1)*
- Поиск элемента — $O(N)$
- Удаление известного элемента — *O(1)*
- Вставка элемента ЗА известным — $O(1)$
- Вставка элемента ПЕРЕД известным — *O(1)*

Списки: двусвязные списки: вставка

Операции вставки и удаления усложняются:
Для вставки элемента `oth` после элемента `p1`:

1. Подготавливаем вставляемый элемент.
2. Сохраняем указатель `s = p1->next`
3. `oth->prev = p1`
4. `oth->next = s`
5. `s->prev = oth`
6. `p1->next = oth`

Списки: двусвязные списки: удаление

Для удаления элемента `p1` из списка:

1. Сохраняем указатель `s = p1->next`
2. `s->prev = p1->prev`
3. `p1->prev->next = s`
4. Освобождаем память элемента `p1`

Списки: использование

Когда используют списки? Когда нужно представлять быстро изменяющееся множество объектов.

- Пример из математического моделирования: множество машин при моделировании автодороги. Они:
    - появляются на дороге (вставка в начало списка)
    - покидают дорогу (удаление из конца списка)
    - перестраиваются с полосы на полосу (удаление из одного списка и вставка в другой)
- Пример из системного программирования: представление множества исполняющихся процессов, претендующих на процессор. Представление множества запросов ввода/вывода. Важная особенность: лёгкий одновременный доступ от множества процессоров.

Списки: использование: менеджер памяти

Одна из реализаций выделения/освобождения динамической памяти (`calloc`/`new`/`free`/`delete`).

- Вначале свободная память описывается пустым списком.
- Память в операционной системе выделяется *страницами*.
- При заказе памяти:
  - если есть достаточный свободный блок памяти, то он разбивается на два подблока, один из которые помечается занятым и возвращается в программу;
  - если нет достаточной свободной памяти, запрашивается несколько страниц у системы и создаётся новый элемент в конце списка (или изменяется старый).

На практике применяется несколько списков, в зависимости от размера заявки.

Связные списки как хранилище

- Сложность операций:
  - ***Create*** — $O(1)$
  - ***Read*** — $O(N)$
  - ***Update*** — $O(N)$
  - ***Delete*** — $O(N)$

Структура данных «дерево».

Деревья: особенности

Основная особенность деревьев — наличие нескольких наследников.
По максимальному числу наследников деревья делятся на

- двоичные (бинарные)
- троичные (тернарные)
- N-ричные

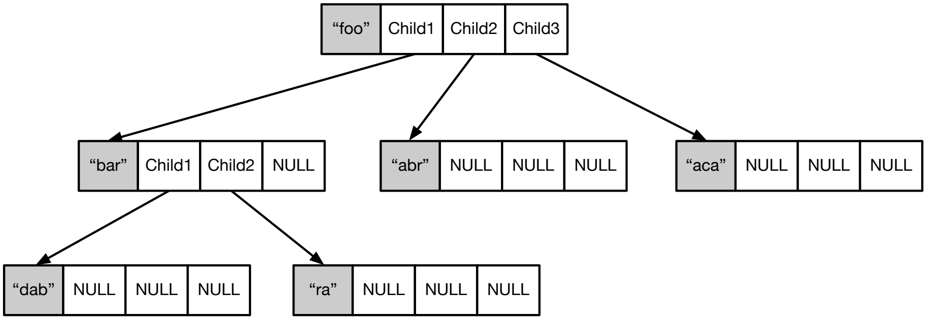
```
struct tree {
  tree *children[3];
  myType data;
  ...
};
```

Деревья: соглашения

- Любое `N`-ричное дерево может представлять деревья меньшего порядка.
- Соглашение: если наследника нет, соответствующий указатель равен `NULL`.
- Деревья `1`-ричного порядка существуют (списки).

Деревья: троичное дерево

Пример дерева троичного дерева или дерева 3-порядка.



Деревья: классификация

- Условно все элементы дерева делят на две группы:
  - ***Вершины***, не содержащие связей с потомками.
  - ***Узлы***, содержащие связи с потомками.
- Второй вариант — все элементы дерева называют ***узлами***, а ***вершина*** — частный случай ***узла***, ***терминальный узел***.
- Ещё термины:
  - ***Родитель (parent)***
  - ***Дети (children)***
  - ***Братья (sibs)***
  - ***Глубина (depth)***

$$D_{node} = D_{parent} + 1$$

Деревья: создание узла

- Добавим метод создания элемента (узла) дерева:

```
struct tree {
  string data;
  tree *child[3]{nullptr,nullptr,nullptr}
  tree(string init) { //  constructor
    data = init;
  }
  ...
};
```

Деревья: пример построения

- Дерево на примере строится, например, так:

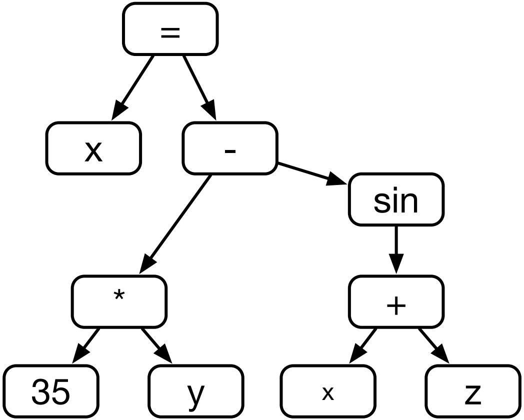
```
tree *root = new tree("foo");
root->child[0] = new tree("bar");
root->child[1] = new tree("abr");
root->child[2] = new tree("aca");
root->child[0]->child[0] = new tree("dab");
root->child[0]->child[1] = new tree("ra");
```

Деревья: пример использования

Использование деревьев:

- Для представления выражений в языках программирования.

x = 35y - sin(x+z);



Деревья: вариант представления

- Вариант хранения N-дерева: массив.
  - Все узлы нумеруются, начиная с 0.
  - Для узла с номером K номера детей

$$K \cdot N + 1 \dots K \cdot N + N$$

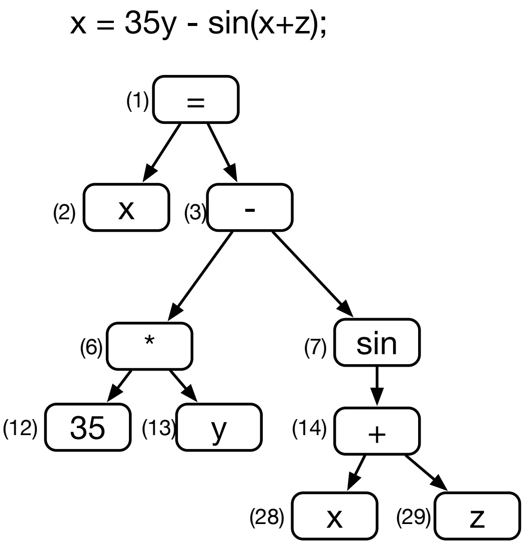
  - Для 2-дерева корневой узел = 0, дети 1-го уровня $(Depth = 2)$ 1 и 2 ...

Часто удобнее нумеровать с 1. Тогда дети нумеруются

$$[K \cdot N \dots (K + 1) \cdot N)$$

Деревья: нумерация

Для дерева выражений нумерация будет такой:



Деревья: альтернативное представление

- Представление в виде массива (фрагмент):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...	22
=	x	-			*	sin					35	y	+								

- Количество памяти $= O(2^{D_{max}})$
- Невыгодно при разреженном дереве

Деревья: обход

- Алгоритмы работы с деревьями часто рекурсивны.
- Всего существует 6=3! способов обхода бинарного дерева.
- На практике применяют четыре основных варианта рекурсивного обхода:
    - Прямой
    - Симметричный
    - Обратный
    - Обратно симметричный

Деревья: обход

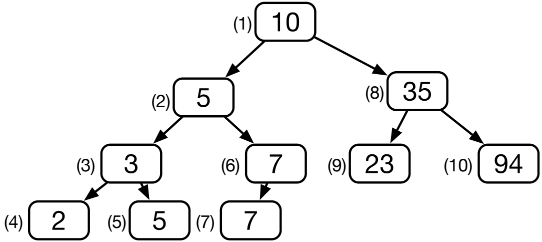
Бинарное дерево.

```
struct tree {
  string data;
  tree *left = nullptr;
  tree *right = nullptr;
  tree(string const &init) { //  Constructor
    data = init;
  }
};
```

Деревья: обход

Прямой способ обхода.

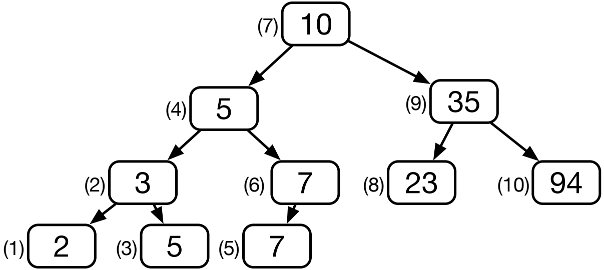
```
void walk(tree *t) {
  work(t);
  if (t->left != nullptr) walk(t->left);
  if (t->right != nullptr) walk(t->right);
}
```



Деревья: обход

Симметричный способ обхода.

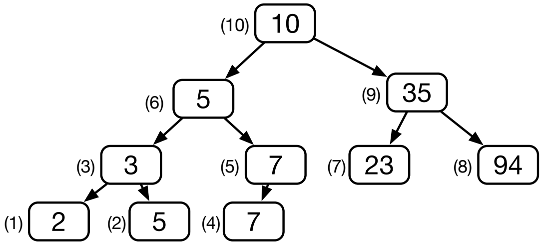
```
void walk(tree *t) {
  if (t->left != nullptr) walk(t->left);
  work(t);
  if (t->right != nullptr) walk(t->right);
}
```



Деревья: обход

Обратный способ обхода.

```
void walk(tree *t) {
  if (t->left != nullptr) walk(t->left);
  if (t->right != nullptr) walk(t->right);
  work(t);
}
```

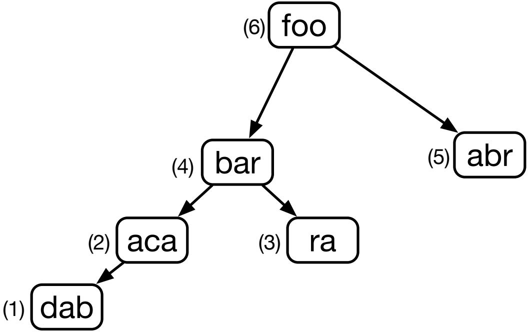


Деревья: обход

Функция обработки может быть параметром.

```
using walkFunction = void (*)(tree *); // C++11 syntax
void walk(tree *t, walkFunction wf) {
  if (t->left != nullptr) walk(t->left, wf);
  if (t->right != nullptr) walk(t->right, wf);
  wf(t);
}
void printData(tree *t) {
  printf("t[%p]='%s'\n", t, t->data.c_str());
}
int main() {
  tree *root = new tree("foo");
  root->left = new tree("bar");
  root->right = new tree("abr");
  root->left->left = new tree("aca");
  root->left->left->left = new tree("dab");
  root->left->right = new tree("ra");
  walk(root, printData);
}
```

Деревья: обход




```
t[0x7ff0e1c03290]='dab'
t[0x7ff0e1c03260]='aca'
t[0x7ff0e1c032d0]='ra'
t[0x7ff0e1c03200]='bar'
t[0x7ff0e1c03230]='abr'
t[0x7ff0e1c031d0]='foo'
```

Деревья: обход

Вывод генеалогического дерева (обратно симметричный обход):

```
using walkFunction = void (*)(tree *t, int lev); // C++11 syntax

void walk(tree *t, walkFunction wf, int lev) {
  if (t->right != nullptr) walk(t->right, wf, lev+1);
  wf(t, lev);
  if (t->left != nullptr) walk(t->left, wf, lev+1);
}

void printData(tree *t, int lev) {
  for (int i = 0; i < lev; i++) {
    printf("  ");
  }
  printf("%s\n", t->data.c_str());
}
int main() {
  ...
  walk(root, printData, 0);
}
```

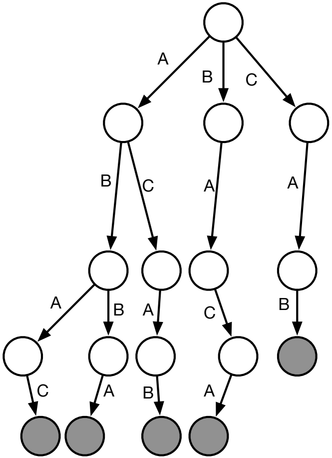
Деревья: обход

Вывод программы:

```
  abr
foo
    ra
  bar
    aca
      dab
```

Деревья: обход

- При использовании динамических структур данных для некоторых операций важно выбрать верный обход дерева.
- Вспомним префиксное дерево из второй лекции:



Деревья: обход

- Заказ памяти под поддеревья происходил динамически.
- Имелся узел, от которого шло построение дерева.
- Так как в данном дереве не хранится информация о том, кто является предком узла, корневой узел — центр всего построения.
- При операции освобождения памяти узла исказятся значения подузлов.

Деревья: динамическая память

- Напомним порядок выделения и уничтожения памяти в конструкторе и деструкторе:

```
struct node {
  node *children[3];
  bool  is_leaf;
  node();
  ~node();
};
```

Деревья: динамическая память

- Конструктор:

```
node::node() {
  children[0] = children[1] = children[2] = nullptr;
  is_leaf = false;
}
```

1. Система выделяет память из *кучи*, достаточную для хранения всех полей структуры.
2. После этого исполняется инициализация полей (написанный нами код).

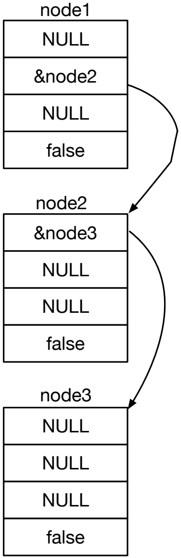
Деревья: динамическая память

- Деструктор:

```
node::~node() {
  printf("node destructor is called\n");
}
```

1. Исполняется написанный нами код.
2. Система освобождает занятую память.
3. Обращение к освобождённой памяти приводит к ошибкам.

Деревья: динамическая память



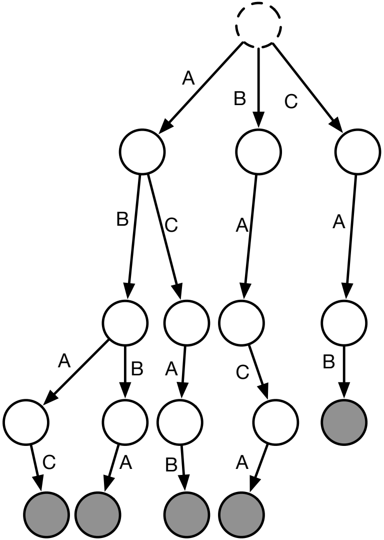
Деревья: динамическая память

- Удаление корневого узла приводит к тому, что остальные узлы останутся недоступны.
- Такие недоступные узлы называются *висячими ссылками* (*dangling pointers*).
- Ситуация, возникшая в программе называется *утечкой памяти* (*memory leak*).
- Чтобы не было утечки памяти, удаление узлов нужно производить с терминальных.

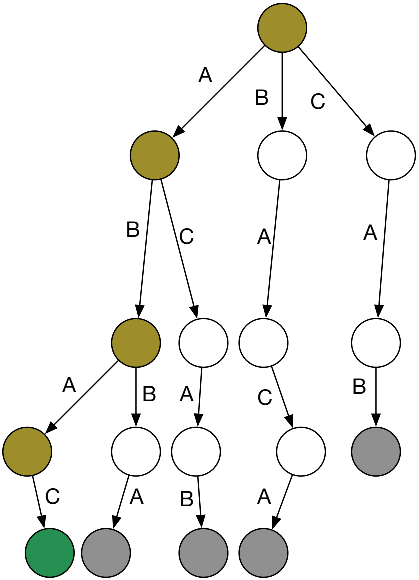
Деревья: освобождение памяти

```
void destroy(node *n) {
  for (int i = 0; i < 3; i++) {
    if (n->children[i] != nullptr) {
      destroy(n->children[i]);
    }
  }
  delete n;
}
```

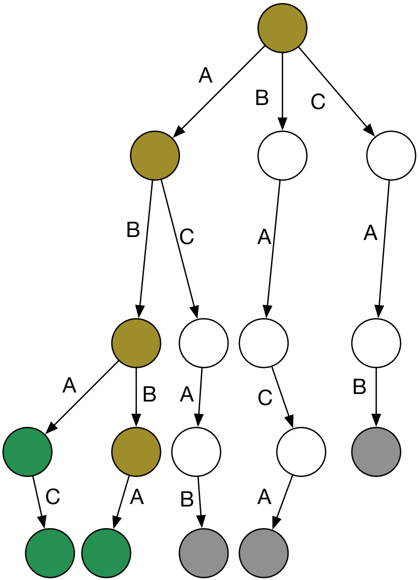
Деревья: освобождение памяти



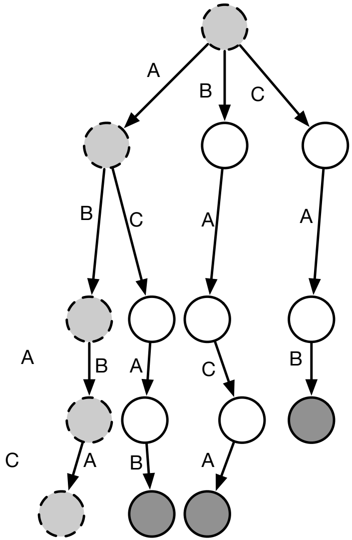
Деревья: освобождение памяти



Деревья: освобождение памяти



Деревья: освобождение памяти



Деревья: свойства

Свойства деревьев:

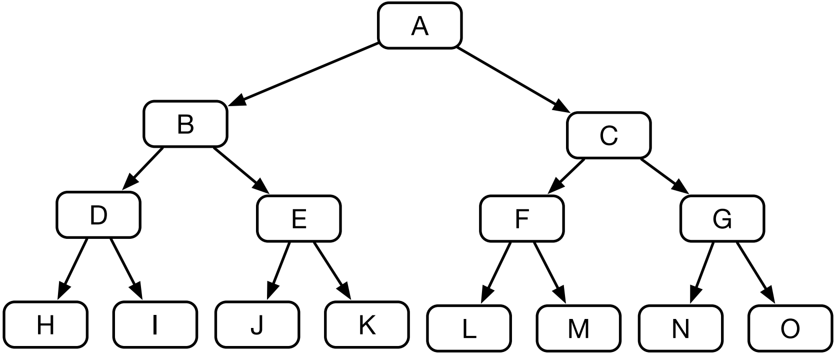
- Позволяют использовать быстро изменяющиеся структуры данных.
- Есть надежда, что операции вставки и удаления окажутся быстрыми (быстрее $O(N)$).
- Есть надежда, что операции поиска окажутся быстрыми (быстрее $O(N)$).

Полные бинарные деревья

Определение:

- **Полное бинарное дерево** T_H высоты H есть бинарное дерево, у которого путь от корня до любой вершины содержит ровно H рёбер, при этом у всех узлов дерева, не являющимися листьями, есть и правый, и левый потомок.

Полное бинарное дерево высоты 3.



Полные бинарные деревья

Рекурсивное определение:

- **Полное бинарное дерево** T_H высоты H есть бинарное дерево, у которого к корню прикреплены левое и правое поддеревья T_{H-1} высоты $H-1$.
- По этому определению число узлов в дереве T_H есть $N = 2^{H+1} - 1$

$$H = \log_2 (N + 1)$$

Абстракция *приоритетная очередь*

Приоритетная очередь

- Приоритетная очередь (`priority queue`) — очередь, элементы которой сравнимы и имеют приоритет.
- После вставки элемента очередь остаётся в упорядоченном по приоритету состоянии.
- Первым извлекается наиболее приоритетный элемент (максимум или минимум).

Интерфейс абстракции:

- `insert` — добавление элемента из очереди;
- `extractMin(Max)` — извлекает самый приоритетный элемент;
- `fetchMin(Max)` — получает самый приоритетный элемент.

Приоритетная очередь

Пример приоритетной очереди:

Значение (`value`)	Приоритет (`priority`)
Москва	12000000
Казань	1500000
Урюпинск	10000
Малиновка	200

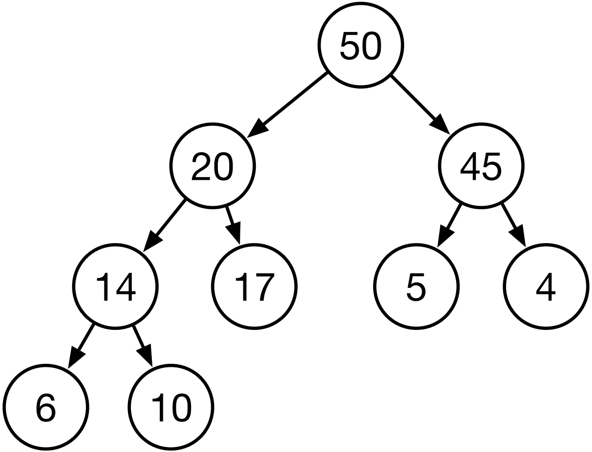
Приоритетная очередь:представление

- *Бинарная куча* — бинарное дерево, удовлетворяющее условиям:
  - Для любой вершины её приоритет не меньше (больше) приоритета потомков.
  - Дерево является правильным подмножеством полного бинарного.

Другое название — пирамида (heap).

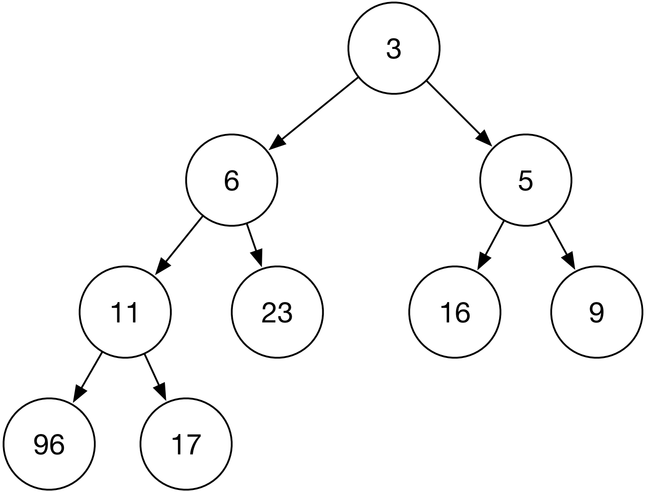
Приоритетная очередь

- Невозрастающая пирамида

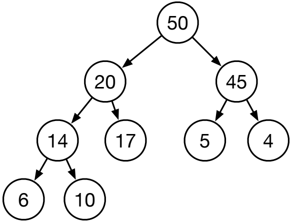


Приоритетная очередь

- Неубывающая пирамида



Приоритетная очередь:реализация



Хранение в виде массива с индексами от 1 до N:

50	20	45	14	17	5	4	6	10

- Индекс корня дерева всегда равен 1 — максимальный (минимальный) элемент
- Индекс родителя узла i равен $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$
- Индекс левого потомка узла i равен $2i$
- Индекс правого потомка узле i равен $2i+1$

Приоритетная очередь: реализация на базе массива.

```
struct bhnode { // node
  string data;
  int priority;
};

struct binary_heap {
  bhnode *body;
  int     bodysize;
  int     numnodes;
  binary_heap(int maxsize);
 ...
};
```

Бинарная куча

- Создание бинарной кучи

```
binary_heap::binary_heap(int maxsize) {
  body = new bhnode[maxsize+1];
  bodysize = maxsize;
  numnodes = 0;
}

~binary_heap::binary_heap() {
  delete body;
}

void binary_heap::swap(int a, int b) {
  std::swap(body[a],body[b]);
}
```

$$T_{create} = O(N)$$

Бинарная куча: поиск минимума(максимума)

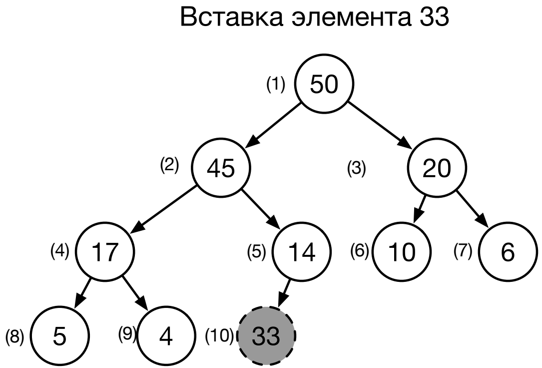
- Поиск в `min-heap`:

```
std::optional<bhnode> binary_heap::fetchMin() {
   if (numnodes <= 0) return std::nullopt;
   return {body[1]};
}
```

$$T_{fetchMin} = O(1)$$

Бинарная куча: вставка элемента

- Этап 1. Вставка в конец кучи.

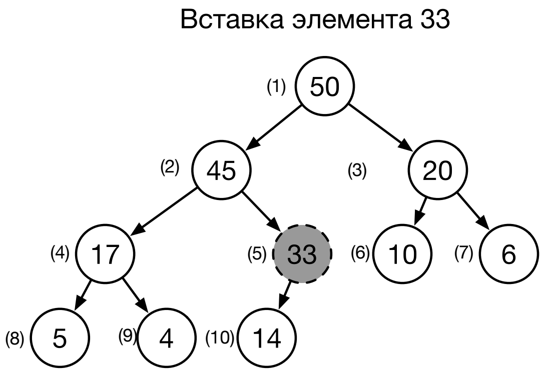


Отлично! *Структура* кучи не испортилась!

50	45	20	17	14	10	6	5	4	33

Бинарная куча: вставка элемента

- Этап 2. Корректировка значений.



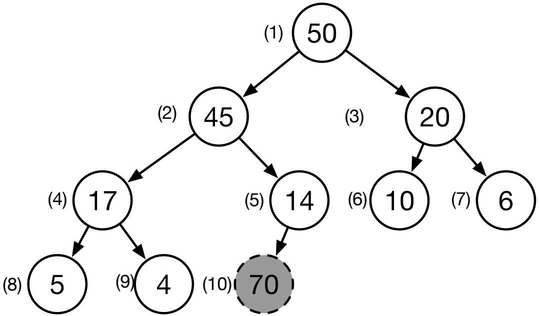
Куча удовлетворяет всем условиям.

50	45	20	17	33	10	6	5	4	14

Бинарная куча: вставка элемента

- Попытаемся вставить максимальный элемент.

Вставка элемента 70

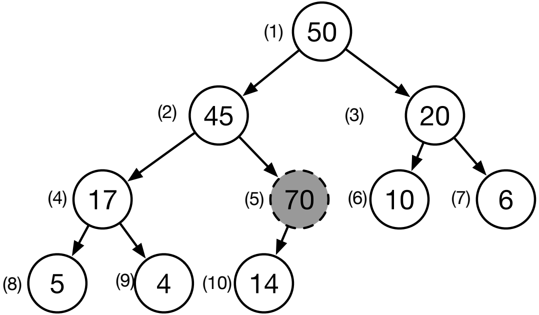


50	45	20	17	14	10	6	5	4	70

Бинарная куча: вставка элемента

- Максимальный элемент ползёт вверх по дереву.

Вставка элемента 70

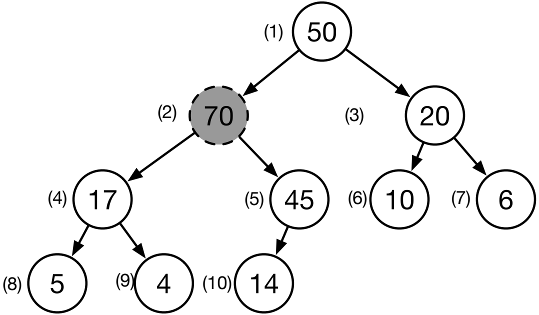


50	45	20	17	70	10	6	5	4	14

Бинарная куча: вставка элемента

- Максимальный элемент ползёт вверх по дереву.

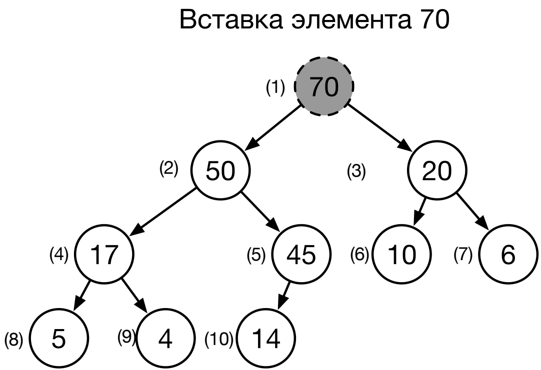
Вставка элемента 70



50	70	20	17	45	10	6	5	4	14

Бинарная куча: вставка элемента

- Максимальный элемент ползёт вверх по дереву.



70	50	20	17	45	10	6	5	4	14

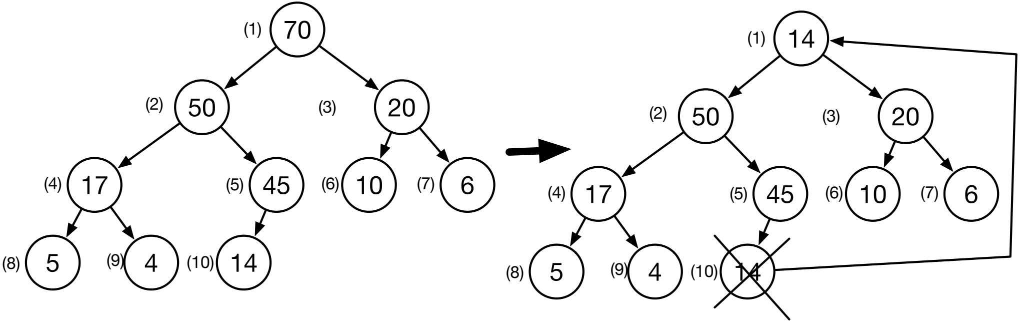
Бинарная куча: вставка элемента

- Реализация.

```
int binary_heap::insert(bhnode node) {
  if (numnodes > bodysize) {
    return -1; // or expand
  }
  body[++numnodes] = node;
  for (size_t i = numnodes;
   i > 1 && body[i].priority > body[i/2].priority;
   i /= 2) {
    swap(i, i/2);
  }
  return 0;
}
```

$$T_{Insert} = O(\log N)$$

Бинарная куча: удаление максимального (минимального)



Свойства кучи нарушены. Требуется восстановление.

Бинарная куча: восстановление свойств

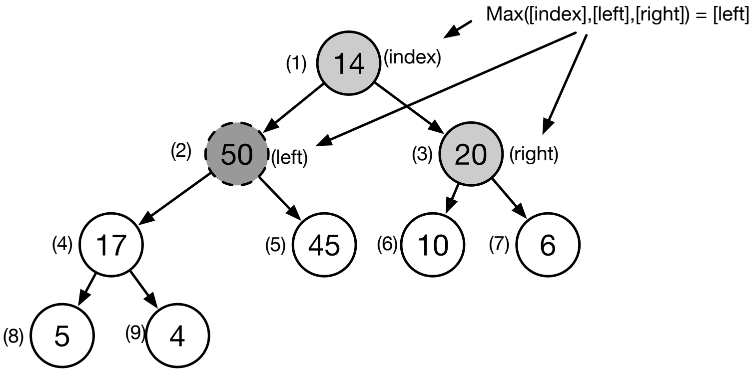
- Для восстановления свойств применяем функцию $heapify$.

```
void binary_heap::heapify(size_t index) {
  for (;;) {
    auto left = index + index, right = left + 1;
    // Who is greater, [index], [left], [right]?
    auto largest = index;
    if (left <= numnodes && body[left].priority > body[index].priority)
      largest = left;
    if (right <= numnodes && body[right].priority > body[largest].priority)
      largest = right;
    if (largest == index) break;
      swap(index, largest);
    index = largest;
  }
}
```

$$T_{heapify} = O(\log N)$$

Бинарная куча: восстановление свойств

- Восстановление индекса (1)

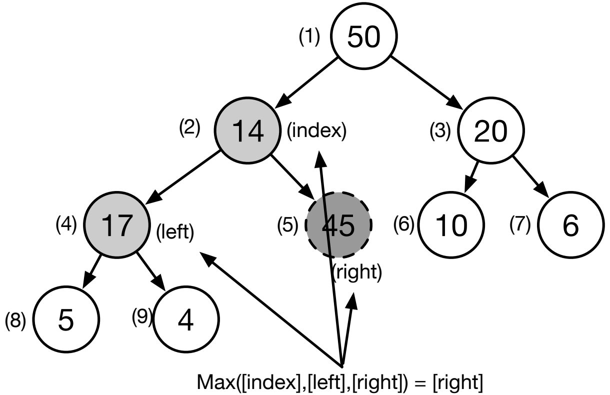


14	50	20	17	45	10	6	5	4

Новый индекс для восстановления (2)

Бинарная куча: восстановление свойств

- Восстановление индекса (2)

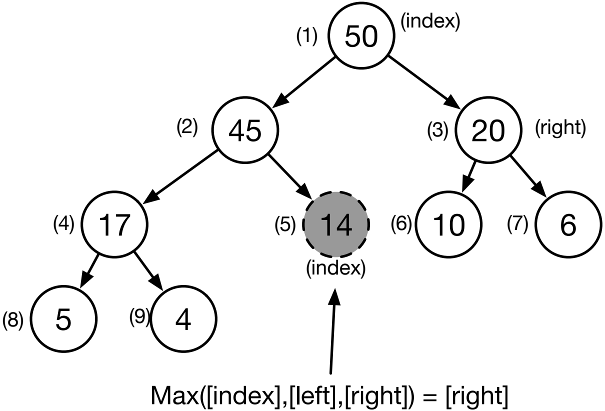


50	14	20	17	45	10	6	5	4

Новый индекс для восстановления (5)

Бинарная куча: восстановление свойств

- Восстановление индекса (5)



50	45	20	17	14	10	6	5	4

Восстановление закончено.

Бинарная куча: сложность операций

- **insert** — $O(\log N)$
- **extractMin(Max)** — $O(\log N)$
- **fetchMin(Max)** — $O(1)$

HeapSort

HeapSort

- На основе бинарной кучи можно реализовать алгоритм сортировки со сложностью $O(N \log N)$ в *худшем* случае.
- Как?
- Является ли отсортированным массив, являющийся представлением бинарной кучи?

HeapSort

- На основе бинарной кучи можно реализовать алгоритм сортировки со сложностью $O(N \log N)$ в *худшем* случае.
- Как?
- Является ли отсортированным массив, являющийся представлением бинарной кучи?
- Нет.
- Кто виноват? Что делать?

HeapSort

- Нужно скомбинировать методы бинарной кучи.
  1. Создать бинарную кучу.
  2. Вставить в неё элементы массива
  3. Извлекать из неё максимальный (минимальный) элемент с удалением.

HeapSort

- Примерный код сортировки HeapSort

```
struct bhnode { // node
  int priority;
};

void heapsort(int v[], size_t vsize) {
  binary_heap *h = new binary_heap(vsize);
  for (size_t i = 0; i < vsize; i++) {
    bhnode b; b.priority = v[i];
    h->insert(b);
  }
  for (size_t i = 0; i < vsize; i++) {
    v[i] = h->extractMin()->priority;
  }
  delete h;
}
```

HeapSort

- Сложность алгоритма:
  1. Создание бинарной кучи — $T_1 = O(1)$.
  2. Вставка N элементов — $T_2 = O(N \log N)$.
  3. Извлечение удалением N элементов — $T_3 = O(N \log N)$.

$$T_{heapsort} = O(1) + O(N \log N) + O(N \log N) = O(N \log N)$$

HeapSort

- Реализация не особенно хороша: требуется $O(N)$ добавочной памяти на бинарную кучу.
- Небольшая хитрость — и добавочной памяти можно избежать.

HeapSort

Модифицируем функцию `heapify`. `size` — размер кучи.

```
void heapify(int v[], size_t i, size_t size)
{
  auto curr = v[i];
  auto index = i;
  for (;;) {
    auto left = index + index + 1, right = left + 1;
    if ( left < size && v[left] > curr)
      index = left;
    if ( right < size && v[right] > a[index])
      index = right;
    if (index == i ) break;
    v[i] = v[index];
    v[index] = curr;
    i = index;
  }
}
```

HeapSort

- Создаём бинарную кучу размером n на месте исходного массива, переставляя его элементы.
- Затем на шаге i мы обмениваем самый приоритетный элемент кучи из позиции 0 с элементом под номером $n - i - 1$.
- Размер кучи при этом уменьшается на единицу, а самый приоритетный элемент занимает теперь положенное ему по рангу место.

```
void sort_heap(int v[], size_t n) {
  for(size_t i = n/2-1; i >= 0; i--) {
    heapify(a, i, n);
  }
  while( n > 1 ) {
    n--;
    swap(a[0],a[n]);
    heapify(a, 0, n);
  }
}
```

HeapSort vs QuickSort

- `HeapSort` гарантирует сложность $O(N \log N)$ даже в худшем случае.
- `QuickSort` такой сложности не гарантирует.
- Почему не забыть о `QuickSort` в пользу `HeapSort`?

HeapSort vs QuickSort

- `HeapSort` гарантирует сложность $O(N \log N)$ даже в худшем случае.
- `QuickSort` такой сложности не гарантирует.
- Почему не забыть о `QuickSort` в пользу `HeapSort`?

- Причина 1: в быстрой сортировке используется меньшее количество операций обмена с памятью.
- Причина 2: N обращений к последовательным ячейкам памяти исполняются до 10-15 раз быстрее, чем столько же обращений к случайным ячейкам памяти из-за организации кэш-памяти.

Дерево отрезков

Дерево отрезков

Пусть нам надо решить задачи:

- Многократное нахождение максимального значения на отрезках массива.
- Многократное нахождение суммы на отрезке массива.

Мы умеем совершать эти действия за время $O(N)$, где $N = R - L + 1$. При определённой подготовке их можно совершать за $O(\log N)$.

Дерево отрезков

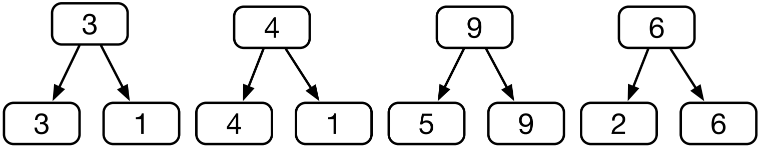
Попробуем воспользоваться бинарными деревьями.
Для примера возьмём массив `{3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6}`.

Вот как выглядит этот массив:

3	1	4	1	5	9	2	6

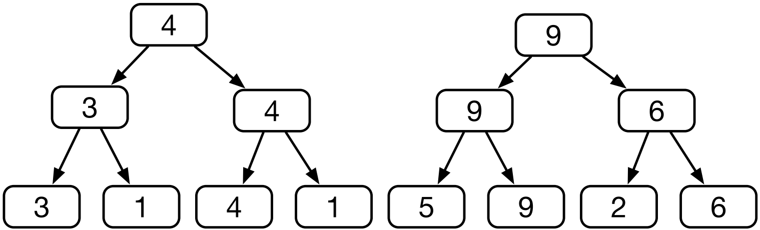
Дерево отрезков

Попарно соединим соседние вершины, поместив в узел-родитель значение функции `max(left,right)`.



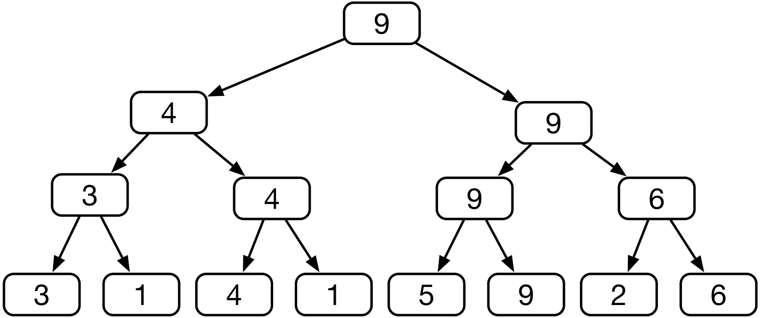
Дерево отрезков

Проделаем эту же операцию от получившихся узлов:



Дерево отрезков

Наконец:



Родитель каждого узла называется *доминирующим узлом*.

Дерево отрезков: представление

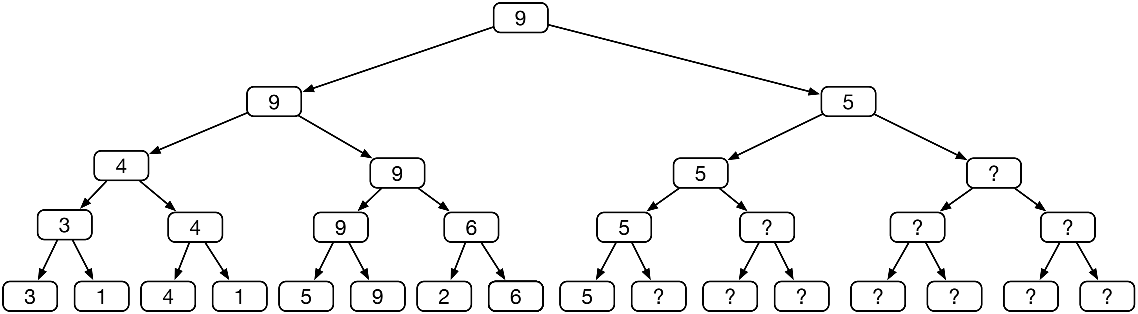
Возможный вариант представления — обычное бинарное дерево с указателями.

- На каждый узел требуется два указателя вниз.
- Для удобной работы требуется индикатор «левый/правый узел» и один указатель на родителя.
- Минимум 4 элемента на узел.

Но ведь это же полное бинарное дерево? Тогда почему не использовать бинарную кучу?

Дерево отрезков: бинарная куча

Бинарная куча требует полного бинарного дерева. Количество элементов должно быть степенью двойки.



Что должно находиться в узлах, отмеченными знаками вопроса?

Дерево отрезков

Все значения в узлах вычисляются с помощью функции

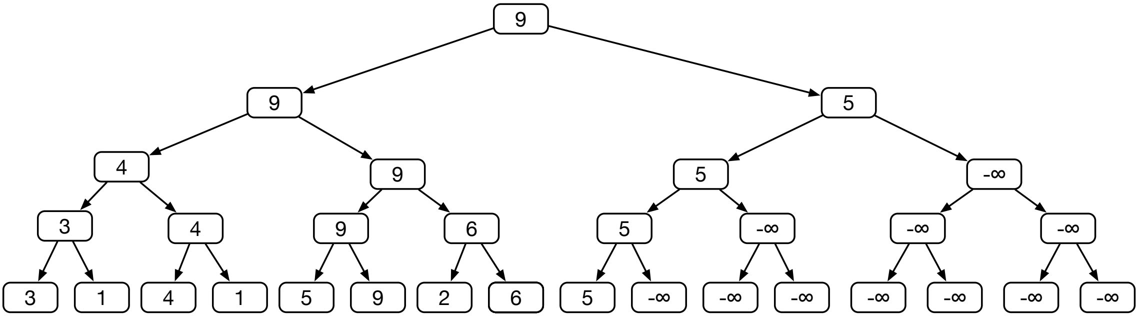
$$P = \max(L, R).$$

Чтобы не плодить сущности, то же самое должно происходить с элементом `'?'`.

То есть элемент `'?'` есть $-\infty$.

Для функции `max` число $-\infty$ есть *нейтральный элемент*.

Дерево отрезков



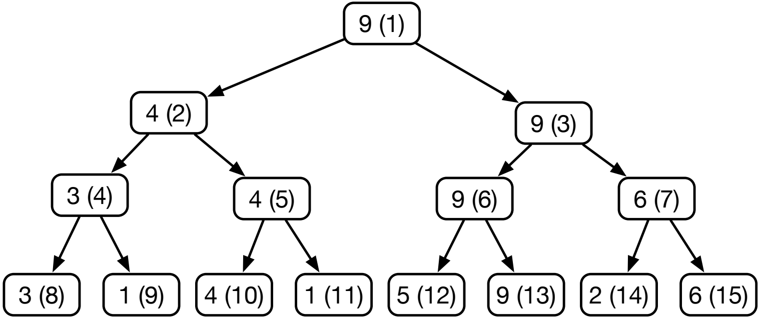
Дерево отрезков

Идея дерева отрезков распространяется на все такие функции, в которых:

$$
\begin{aligned}
A \circ B &= B \circ A \\
A \circ (B \circ C) &= (A \circ B) \circ C \\
\exists E : A \circ E &= A
\end{aligned}
$$

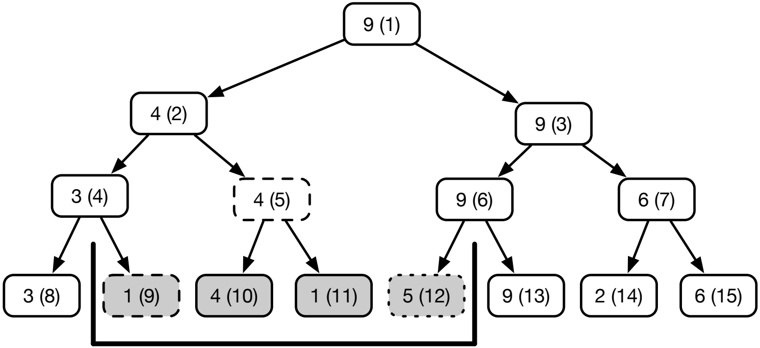
Операция	Нейтральный элемент
`max`	$-\infty$
`min`	$+\infty$
+	0
*	1

Дерево отрезков: алгоритмы



- ***Create(size):*** создаётся бинарная куча, инициализированная нейтральными элементами. $C = \min(2^k) : C \geqslant size$.
- ***Insert/Replace(i, val):*** `body[i+C]=val; propagate(i);`

Дерево отрезков: функция на отрезке



- ***Func(left,right):***
  - `Res = E`
  - `if (left % 2 == 1) Op(Res,body[left++])`
  - `if (right % 2 == 0) Op(Res,body[right--])`
  - `if (right > left) Op(Res,Func(left/2, right/2))`

Дерево отрезков

Сложность операций:

- Требуемая память: $\min = O(2N) \ldots \max = O(4N)$.
- Операция ***Insert/Replace***: $O(\log N)$.
- Операция ***Func*** на любом подотрезке: $O(\log N)$.

Задача поиска. Абстракция поиска.

Задача поиска. Абстракция поиска

Информация нужна для того, чтобы ей пользоваться.

Расширенная задача поиска:

1. Накопление информации (сбор)
2. Организация информации (переупорядочивание, сортировка)
3. Извлечение информации (собственно поиск)

Расширенная задача поиска

- Задача: построение эффективного хранилища данных.
- Требования:
  - Поддержка больших объёмов информации.
  - Возможность быстро находить данные.
  - Возможность быстро модифицировать данные.
- Реализация абстракций:
  - ***Create***
  - ***Read***
  - ***Update***
  - ***Delete***

Задача поиска. Абстракция поиска

- Имеется множество ключей
$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$
- Требуется определить индекс ключа, совпадающего с заданным значением key, `find` — основа для `Read/Update/Delete`.

```
bunch a;
index = a.find(key);
```

$bunch$ — абстрактное хранилище элементов, содержащих ключи (массив, множество, дерево, список...).

Хорошая организация хранилища входит в расширенную задачу поиска.

Последовательный поиск.

Последовательный поиск

Ситуация: к поиску не готовились, ключи не упорядочены.

Индекс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ключ	132	612	232	890	161	222	123	861	120	330
Данные	АВ	СА	ЯФ	АВ	АА	НД	ОР	ОС	ЗЛ	УГ

`find(a, 222) = 5`

`find(a, 999) = 10` (элемент за границей поиска).

Последовательный поиск

```
int dummysearch(int a[], int N, int key) {
   for (int i = 0; i < N; i++) {
       if (a[i] == key) {
          return i;
       }
    }
  return N;
}
```

Вероятность найти ключ в $i-$м элементе $P_i = \frac{1}{N}$

Матожидание числа поисков $\quad E = \frac{N}{2}$

Число операций сравнения в худшем случае $2N$.

$$T(N) = 2 \cdot N = O(N)$$

Последовательный поиск

Небольшая подготовка:

Индекс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ключ	132	612	232	890	161	222	123	861	120	330	999
Данные	АВ	СА	ЯФ	АВ	АА	НД	ОР	ОС	ЗЛ	УГ	??

Результаты не изменились.

`find(a, 222) = 5`

`find(a, 999) = 10` (элемент за границей поиска).

Последовательный поиск

```
int cleversearch(int a[], int N, int key) {
    a[n] = key;
    int i;
    for (i = 0; a[i] != key; i++)
        ;
    return i;
}
```

Число операций сравнения N в худшем случае.

$$T(N) = N = O(N)$$

Поиск ускорен в два раза!

Без подготовки лучших результатов не добиться.

Неупорядоченный массив

- Сложность операций:
  - ***Create*** — $O(1)$
  - ***Read*** — $O(N)$
  - ***Update*** — $O(N)$
  - ***Delete*** — $O(N)$

Поиск с сужением зоны.

Поиск с сужением зоны

Если в зоне поиска имеется упорядочивание — всё становится значительно лучше. Возможное действие: упорядочить по отношению.

- Имеется множество ключей

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$$

- Требуется определить индекс ключа, совпадающего с заданным значением key.

Поиск с сужением зоны

Принцип «разделяй и властвуй».

1. Искомый элемент равен центральному? Да — нашли.
2. Искомый элемент меньше центрального? Да — рекурсивный поиск в левой половине.
3. Искомый элемент больше центрального? Да — рекурсивный поиск в правой половине.

Поиск с сужением зоны

- Вход алгоритма: упорядоченный по возрастанию массив, левая граница поиска, правая граница поиска.
- Выход алгоритма: номер найденного элемента или -1.

```
int binarySearch(int val, int a[], int left, int right) {
   if (left >= right) return a[left] == val? left : -1;
   int mid = (left+right)/2;
   if (a[mid] == val) return mid;
   if (a[mid] < val) {
      return binarySearch(val, a, left, mid-1);
   }  else {
      return binarySearch(val, a, mid+1, right);
   }
}
```

Поиск с сужением зоны

Оценка глубины рекурсии.
Поиск ключа 313:

$$\underbrace{\{\overbrace{1,4,23,45,67}^{\text{левая часть}},\ \overbrace{68}^{\text{центр}},\overbrace{89,105,144,279,313,388}^{\text{правая часть}}\}}_{12 \text{ элементов}}$$

$313 > 68 \rightarrow$ ключ справа

$$\underbrace{\{\ \overbrace{89,105}^{\text{левая часть}}\ ,\overbrace{144}^{\text{центр}},\overbrace{279,313,388}^{\text{правая часть}}\}}_{6 \text{ элементов}}$$

$313 > 144 \rightarrow$ ключ справа

$$\underbrace{\{\quad \overbrace{279}^{\text{левая часть}}\quad ,\overbrace{313}^{\text{центр}},\quad \overbrace{388}^{\text{правая часть}}\quad \}}_{3 \text{ элемента}}$$

$313 = 313 \rightarrow$ ключ найден

Поиск с сужением зоны

Попрактикуемся в основной теореме о рекурсии.

- Количество подзадач $a = 1$.
- Каждая подзадача уменьшается в $b = 2$ раза.
- Сложность консолидации $O(1) = O(N^0) \to d = 0$

$d = \log_b a \to T(N) = \log N$

Результат можно получить и интуитивно.

Поиск с сужением зоны

Оценка глубины рекурсии.
Поиск отсутствующего 10:

$$\underbrace{\{\overbrace{1,4,23,45,67}^{\text{левая часть}},\overbrace{68}^{\text{центр}},\overbrace{89,105,144,279,313,388}^{\text{правая часть}}\}}_{12\ \text{элементов}}$$

$$\underbrace{\{\overbrace{1,4}^{\text{левая часть}},\overbrace{23}^{\text{центр}},\overbrace{45,67}^{\text{правая часть}}\}}_{5\ \text{элементов}}$$

$$\underbrace{\{\overbrace{\emptyset}^{\text{левая часть}},\overbrace{1}^{\text{центр}},\overbrace{4}^{\text{правая часть}}\}}_{2\ \text{элемента}}$$

$$\underbrace{\{\overbrace{\emptyset}^{\text{левая часть}},\overbrace{4}^{\text{центр}},\overbrace{\emptyset}^{\text{правая часть}}\}}_{1\ \text{элемент}}$$

Поиск с сужением зоны

Переход от рекурсии к итерации.

```
int binarySearch(int val, int a[], int left, int right) {
   while (left < right) {
      int mid = (left + right)/2;
      if (a[mid] == val) return mid;
      if (a[mid] < val) {
         right = mid - 1;
      }  else {
         left =  mid + 1;
      }
   }
   return a[left] == val? left : -1;
}
```

Поиск с сужением зоны

- Можно ли быстрее? Хотим уменьшить коэффициент C в формуле $T(N) = C \cdot O(\log N)$.
- Варианты поиска: $N-$ричный поиск. Попытка 1: троичный поиск.

Поиск с сужением зоны

- Троичный поиск.

```
int ternarySearch(int val, int a[], int left, int right) {
   if (left >= right) return a[left] == val? left : -1;
   int mid1 = (left*2+right)/3;
   int mid2 = (left+right*2)/3;
   if (val < a[mid1]) {
      return ternarySearch(val, a, left, mid1-1);
   else if (val == a[mid1]) {
      return mid1;
   } else if (a < a[mid2]) {
      return ternarySearch(val, a, mid1+1, mid2-1);
   } else if (a == a[mid2]) {
      return mid2;
   } else {
      return ternarySearch(val, a, mid2+1, right);
   }
}
```

Поиск с сужением зоны

Добились ли мы выигрыша?

По числу рекурсивных вызовов — выигрыш в $\dfrac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3 \approx 1.58$ раз.

Количество сравнений увеличилось с 3 до 5, проигрыш в ≈ 1.67 раз.

Упорядоченный массив

- Сложность операций:
  - ***Create*** — $O(N)$
  - ***Read*** — $O(\log N)$
  - ***Update*** — $O(\log N)$
  - ***Delete*** — $O(N)$

Распределяющий поиск. Поиск с использованием свойств ключа.

Распределяющий поиск

- Можно ли найти ключ в неотсортированном массиве быстрее, чем за $O(N)$?

Распределяющий поиск

- Можно ли найти ключ в неотсортированном массиве быстрее, чем за $O(N)$?
- Без вспомогательных данных — нет.

Распределяющий поиск

- Можно ли найти ключ в неотсортированном массиве быстрее, чем за $O(N)$?
- Без вспомогательных данных — нет.
- Какова сложность нахождения $M \approx N$ значений в неотсортированном массиве?

Распределяющий поиск

- Можно ли найти ключ в неотсортированном массиве быстрее, чем за $O(N)$?
- Без вспомогательных данных — нет.
- Какова сложность нахождения $M \approx N$ значений в неотсортированном массиве?
- Вариант ответа: если $M > \log N$, то предварительной сортировкой. Сложность составит $O(N \log N) + M \cdot O(\log N) = O(N \log N)$.

Распределяющий поиск

- Можно ли найти ключ в неотсортированном массиве быстрее, чем за $O(N)$?
- Без вспомогательных данных — нет.
- Какова сложность нахождения $M \approx N$ значений в неотсортированном массиве?
- Вариант ответа: если $M > \log N$, то предварительной сортировкой. Сложность составит $O(N \log N) + M \cdot O(\log N) = O(N \log N)$.
- А быстрее можно?

Распределяющий поиск

- Можно ли найти ключ в неотсортированном массиве быстрее, чем за $O(N)$?
- Без вспомогательных данных — нет.
- Какова сложность нахождения $M \approx N$ значений в неотсортированном массиве?
- Вариант ответа: если $M > \log N$, то предварительной сортировкой. Сложность составит $O(N \log N) + M \cdot O(\log N) = O(N \log N)$.
- А быстрее можно?
- В некоторых случаях — да.

Распределяющий поиск

- Если $|D(Key)|$ невелико, то имеется способ, похожий на сортировку подсчётом.
- Создаётся **инвертированный массив**.

$a = \{2, 7, 5, 3, 8, 6, 3, 9, 12\}$. $|D(a)| = 12 - 2 + 1 = 11$.
$a_{inv}[2..12] = \{-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1\}$
$a[0] = 2 \rightarrow a_{inv}[2] = 0$
$a[1] = 7 \rightarrow a_{inv}[7] = 1$
$a[2] = 5 \rightarrow a_{inv}[5] = 2$
$a_{inv}[2..12] = \{0, 6, -1, -1, 5, -1, 4, 7, -1, -1, 8\}$

Распределяющий поиск

index	0	1	2	3	4	5	6	7	8
key	2	7	5	3	8	6	3	9	12

key	2	7	5	3	8	6	3	9	12
index	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Распределяющий поиск

Два этапа. Первый этап — инвертирование.

```
int * prepare(int a[], int N, int *min, int *max) {
    *min = *max = a[0];
    for (int i = 1; i < N; i++) {
        if (a[i] > *max) *max = a[i];
        if (a[i] < *min) *min = a[i];
    }
    if (*max - *min > THRESHOLD) return NULL;
    int *ret = new int[*max - *min + 1];
    for (int i = *min; i <= *max; i++) {
        ret[i] = -1;
    }
    for (int i = 0; i < N; i++) {
        ret[a[i] - *min] = i;
    }
    return ret;
}
```

Распределяющий поиск

Второй этап: поиск.

```
// Preparation
int min, max;
int *ainv = prepare(a, N, &min, &max);
// Where is the key?
result = -1; // Not found value
if (key >= min && key <= max) result = ainv[key - min];
...
delete [] ainv;
```

- $O(N)$ на подготовку.
- $O(M)$ на поиск M элементов.
- $T(N, M) = O(N) + O(M) = O(N)$

Распределяющее хранение

- Сложность операций после подготовки:
  - ***Create*** — $O(1)$
  - ***Read*** — $O(1)$
  - ***Update*** — $O(1)$
  - ***Delete*** — $O(1)$
- Жёсткие ограничения на множество ключей.
- Запрет на повторяющиеся ключи.
- При наличии $f(key)$ сводится к хеш-поиску.

Спасибо за внимание.

Следующая лекция —
— деревья: сбалансированные и
специальные.