Introdução aos Processos Estocásticos - Revisão Probabilidade

Eduardo M. A. M. Mendes

DELT - UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais
emmendes@cpdee.ufmg.br

Introdução

Avaliação

- 2 Provas - 30 e 30 pontos
- 1 Trabalho Final - 40 pontos - tema envolvendo a matéria e de interesse para o seu próprio mestrado (orientador)

Avaliação

- 2 Provas - 30 e 30 pontos
- 1 Trabalho Final - 40 pontos - tema envolvendo a matéria e de interesse para o seu próprio mestrado (orientador)

Introdução

Bibliografia

- Livro Texto - Intuituive Probability and Random Processes using MATLAB, Steve M. Kay, Springer, 2006.
- Outras referências :
    - Probability, Random Variables and Stochastic Processes, Papoulis, 4a edição, McGraw Hill, 2002
    - Probability and Stochastic Processes: A Friendly Introduction to Electrical and Computer Engineers, Roy D. Yates and David J. Goodman, Wiley, 2a edição, 2004
- Fundamentos :
    - Estatística Básica, Wilton de O. Bussab e Pedro A. Morettin, 5a edição, Editora Saraiva, 2006
    - Basic Stochastic Processes, Zdzislaw Brzeznick and Tomasz Zastawnick, Springer, 2009

Introdução

Software

- R - www.r-project.org (Free software)
- Matlab - www.mathworks.com (O PPGEE possui várias licenças)

Introdução

Origem

- Probability - Latim, 1551 - vem de provável - provar, testar (probare)
- Estocástico - 1662, do grego STOKHASTIKOS - caracterizado por uma conjectura - conjectura, alvo, marca.
- No sentido atual - 1934 - Alemanha - Aleatório

Origem

- Probability - Latim, 1551 - vem de provável - provar, testar (probare)
- Estocástico - 1662, do grego STOKHASTIKOS - caracterizado por uma conjectura - conjectura, alvo, marca.
- No sentido atual - 1934 - Alemanha - Aleatório

Origem

- Probability - Latim, 1551 - vem de provável - provar, testar (probare)
- Estocástico - 1662, do grego STOKHASTIKOS - caracterizado por uma conjectura - conjectura, alvo, marca.
- No sentido atual - 1934 - Alemanha - Aleatório

Introdução

Probabilidade

Probabilidade - chance de que um evento possa ocorrer.
Receita de Probabilidade:

- Presença de um experimento aleatório.
- Conjunto de "resultados" (outcomes)
- Probabilidades associadas a esses resultados.

Necessidade de observação - a partir da observação do fenômeno aleatório, devemos ser capazes de determinar as frequências que determinados eventos ocorrem.
Frequências $\rightarrow$ medidas - estimativas de quantidades desconhecidas associadas em geral a populações das quais os dados foram extraídos na forma de amostras
Frequências relativas de certos eventos de interesse $\rightarrow$ probabilidades

Introdução

Probabilidade

Probabilidade - chance de que um evento possa ocorrer.
Receita de Probabilidade:

- Presença de um experimento aleatório.
- Conjunto de "resultados" (outcomes)
- Probabilidades associadas a esses resultados.

Necessidade de observação - a partir da observação do fenômeno aleatório, devemos ser capazes de determinar as frequências que determinados eventos ocorrem.
Frequências $\rightarrow$ medidas - estimativas de quantidades desconhecidas associadas em geral a populações das quais os dados foram extraídos na forma de amostras
Frequências relativas de certos eventos de interesse $\rightarrow$ probabilidades

Introdução

Probabilidade

Probabilidade - chance de que um evento possa ocorrer.
Receita de Probabilidade:

- Presença de um experimento aleatório.
- Conjunto de "resultados" (outcomes)
- Probabilidades associadas a esses resultados.

Necessidade de observação - a partir da observação do fenômeno aleatório, devemos ser capazes de determinar as frequências que determinados eventos ocorrem.
Frequências $\rightarrow$ medidas - estimativas de quantidades desconhecidas associadas em geral a populações das quais os dados foram extraídos na forma de amostras
Frequências relativas de certos eventos de interesse $\rightarrow$ probabilidades

Introdução

Idéia: Construir um modelo teórico que reproduza de maneira razoável a distribuição de frequências, quando o fenômeno é observado diretamente.

Modelos:

- Suposições adequadas e observação direta do fenômeno aleatório
- Modelos Probabilísticos

Construção de Modelos:

- Determinar os eventos de interesse e o seu número
- Determinar como eles ocorrem.

Exemplo 1 - Morettin

- Faces de um dado
- Suposição: O dado é equilibrado
- Modelo:
  - 6 eventos $\rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - "Como eles ocorrem?" $\rightarrow$ Precisamos verificar com um experimento (processo) $\rightarrow$ Jogar os dados.
    - Experimento: Jogar N vezes os dados e colher as frequências de cada uma das faces. $\rightarrow \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \omega_i$ para $i = 1 \ldots 6$.
  - $f_i = \frac{n_i}{N}$ onde $n_i =$ número de vezes que o evento i ocorreu.
-

Faces	1	2	3	4	5	6
Freq. Teórica	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Exemplo

Exemplo 2 - Morettin

Considere um grupo de 2 mulheres (M) e 3 homens (H). A pessoa mais sortuda será o presidente. Queremos saber as probabilidades do presidente ser do sexo masculino ou feminino.

- Duas possibilidades $\rightarrow \Omega = \{H, M\}$
-

Sexo	M	F	Total
Freq. Teórica	2/5	3/5	1

Modelo Probabilístico

Um modelo probabilístico será especificado quando o seguinte for estabelecido:

- O espaço amostral Ω consiste, no caso discreto, da enumeração (finita ou infinita) de todos os resultados possíveis do experimento em questão $\rightarrow \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ - os elementos de Ω são os pontos amostrais ou eventos elementares.
- Uma probabilidade $P(\omega)$ para cada ponto amostral de tal sorte que seja possível encontrar a probabilidade $P(A)$ de qualquer subconjunto A de Ω, isto é, a probabilidade de um evento aleatório (ou simplesmente evento).

Exemplo

Exemplo 3 - Morettin

Moeda lançada 2 vezes

- Espaço amostral: $\Omega = \{(C,C),(C,R),(R,C),(R,R)\}$ com $P(R) = P(C) = \frac{1}{2}$.
- (C,C) ou outro qualquer $\rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- O evento A é quando duas faces iguais são obtidas nos dois lançamentos:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ P(A) &= \sum_j P(\omega_j), \omega_j \in A \\ A &= \{(C,C),(R,R)\} \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 4 - Morettin

$$\text{Uma fábrica produz 3 artigos:} \begin{cases} \text{Bom (B)} \\ \text{Defeituoso}(D) \end{cases}$$

São retirados 3 artigos.

- Arranjo com repetição.
- Conjunto $= \{B, D\}$
- Número de elementos do grupo $= 3$.

Arranjos com repetição:

- $\Omega = \{BBB, BBD, BDB, DBB, DDB, DBD, BDD, DDD\}$.
- $|\Omega| = 2^3 = 8$ elementos
- $A \rightarrow 2$ artigos defeituosos - $A = \{DDB, DBD, BDD\}$.

Exemplo

Exemplo 5 - Morettin

Determine a probabilidade de 3 caras em 4 lançamentos de uma moeda, sabendo que a probabilidade de cara é $p = 0,75$.

$$\begin{array}{ccc} \{C & , & R\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0,75 & & 0,25 \end{array}$$

- A ordem interessa e pode haver repetição: Arranjo com repetição.
- Número de elementos do grupo $= 4$.
- Cardinalidade $= 2^4 = 16$.

$$
\Omega = \left\{
\begin{array}{cccccl}
C & C & C & C & & \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} \\
C & C & C & R & & \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} \\
C & C & R & C & & \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4} \\
C & C & R & R & & \\
C & R & C & C & & \frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} \\
C & R & C & R & & \\
C & R & R & C & & \\
C & R & R & R & & \\
R & C & C & C & & \frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} \\
R & C & C & R & & \\
R & C & R & C & & \\
R & C & R & R & & \\
R & R & C & C & & \\
R & R & C & R & & \\
R & R & R & C & & \\
R & R & R & R & &
\end{array}
\right.
$$

- $$P(3C \text{ ou mais}) = \frac{27}{64} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right) \approx 0,739$$

- A solução do problema de k caras após um número N de lançamentos de uma moeda é:

$$P[k] = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

- No exemplo: $N = 4$ e $k = 3$

$$\begin{aligned} P[3] &= \binom{4}{3} \times \frac{3^3}{4^3} \times \frac{1}{4} = \frac{4!}{3!1!} \times \frac{27}{64} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64} \\ P[4] &= \binom{4}{4} \times \frac{3^4}{4^4} = \frac{27}{64} \times \frac{3}{4} \\ P[3] + P[4] &= \frac{27}{64}\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64} \times \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Exemplo de Código em R

R

```
tt <- 0
N<-100000 # Repetitions
for (j in 1:N) {
        number <- 0
        for (i in 1:4) {   # Four Tosses of the coin
                if (runif(1,0,1)<0.75) {# Toss coin with p=0.75
                        x<-1 # head
                } else {
                        x<-0
                }
                number <- number + x
        }
        if (number >= 3) tt <- tt + 1
}
tt <- tt/N
print(tt)
```

Exemplo

Exemplo 6 - Morettin

Experimento: retirar uma lâmpada de um lote e medir o seu tempo de vida antes de se queimar.

- Espaço Amostral

$$\Omega = \{t \in R : t \geq 0\}$$

- Evento A - tempo de vida inferior a 20 horas

$$A = \{t : 0 \leq t < 20\}$$

1) Urna com 2 bolas brancas (B) e 3 bolas vermelhas (V). Retira-se uma bola aleatoreamente. Se for B, lança-se uma moeda. Se V, a bola é devolvida e retira-se outra. Qual é o espaço amostral?
   - Solução: $\{(B, C), (B, R), (V, V), (V, B)\}$
2) Lance de um dado até que 5 apareça pela primeira vez. Enumere os possíveis resultados.
   - Solução: $\Omega = \{5, (\bar{5}, 5), (\bar{5}, \bar{5}, 5), (\bar{5}, \bar{5}, \bar{5}, 5), \ldots\}$
3) Três jogadores A, B e C disputam um torneio de tênis. Inicialmente, A joga com B e o vencedor joga com C; e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes em seguida ou quando são distribuidos, ao todo, quatro partidas. Quais são os possíveis resultados do torneio?

- Solução: Construindo um diagrama com os resultados

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & A & \rightarrow & A & (A, C, B, A) \\
 & & & & & & \updownarrow & & & \\
 & & & & B & \rightarrow & B & \rightarrow & B & (A, C, B, B) \\
 & & & & \updownarrow & & & & & \\
 & & C & \rightarrow & C & \rightarrow & C & & & (A, C, C) \\
 & & \updownarrow & & & & & & & \\
A & \rightarrow & A & \rightarrow & A & & & & & (A, A) \\
\updownarrow & & & & & & & & & \\
B & \rightarrow & B & \rightarrow & B & & & & & (B, B) \\
 & & \updownarrow & & & & & & & \\
 & & C & \rightarrow & C & \rightarrow & C & & & (B, C, C) \\
 & & & & \updownarrow & & & & & \\
 & & & & A & \rightarrow & A & \rightarrow & A & (B, C, A, A) \\
 & & & & & & \updownarrow & & & \\
 & & & & & & B & \rightarrow & B & (B, C, A, B)
\end{array}
$$

4) Duas moedas são lançadas. Dê dois espaços amostrais para esse experimento. Represente um deles como o produto cartesiano de dois espaços amostrais.

- $\Omega_1 = \{(C, C), (C, R), (R, C), (R, R)\} = \{C, R\} \times \{C, R\}$.
- $\Omega_2 = \{0, 1, 2\}$, $\omega_i \rightarrow$ número de caras em dois lançamentos.

1.2) Um carta é escolhida de um barulho de 52 cartas. Identifique o experimento aleatório, o conjunto de resultados e as probabilidades de cada resultado.

- Solução: É um experimento aleatório - retirar uma carta
- $\Omega = \{\text{Ás}, \text{Rei}, \ldots, 2\}$ e 4 tipos (espadas, coração, ...)
- $p = \frac{1}{52}$

1.7) Considere um experimento com os seguintes resultados possíveis $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Se designarmos

$$P[k] = \frac{1}{2^k}, \quad = 1, 2, 3, \ldots$$

para os resultados. A soma das probabilidades é 1?

- Solução: Podemos ter um número infinito de resultados e mesmo assim de designar probabilidades não zero para os resultados?

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

sim, mas:

a) As probabilidades não são iguais.
b) O número de resultados é enumerável (contável).

1.10) Uma moeda é lançada 12 vezes. A sequência observada é $\{H, H, T, H, H, T, H, H, H, H, T, H\}$ (não importe com a ordem). A moeda é equilibrada?

Problemas - Kay - página 10 (cont.)

- Solução: Repare que temos 9 caras, logo podemos calcular

$$P[9] = \binom{12}{9} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{2^{12}} \approx 0,0537$$

  Não se pode afirmar nada, mas certamente essa não é a sequência mais provável.
  6 caras e 6 coroas $\rightarrow$

$$P[6] = \binom{12}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \approx 0.2255$$

1.11) Prove que $\sum_{k=0}^{N} P[k] = 1$, onde $P[k] = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$.

- Solução: Vamos primeiro provar o teorema Binomial, ou seja, $(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$
  Para $N = 1$, temos

$$\begin{aligned} a+b &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} \\ &= \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 \\ &= b+a \end{aligned}$$

  N $\rightarrow$ OK.
  Para $N+1$

$$\sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} a^k b^{N+1-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N+1}{k} a^k b^{N+1-k} + \binom{N+1}{N+1} a^{N+1}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\binom{N+1}{k} &= \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} \\
\frac{(N+1)N!}{k!(N+1-k)!} &= \frac{N!}{k!(N-k)!} + \frac{N!}{(k-1)!(N+1-k)!} \\
&= \frac{N!}{k!\frac{(N+1-k)(N-k)!}{(N+1-k)}} + \frac{N!}{(N+1-k)!\frac{k(k-1)!}{k}} \\
&= \frac{(N+1-k)N!}{(N+1-k)!k!} + \frac{N!k}{(N+1-k)!k!} \\
&= \frac{N!(N+1-k+k)}{(N+1-k)!k!} \\
&= \frac{(N+1)!}{k!(N+1-k)!} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Usando:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} a^k b^{N+1-k} &= \sum_{k=0}^{N} \left[\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} \right] a^k b^{N+1-k} + a^{N+1} \\
&= b \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k} + \\
& \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k-1} a^k b^{N+1-k}}_{\text{Qdo } k=0 \rightarrow \binom{N}{-1}=0} + a^{N+1}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Faço } l = k-1 \rightarrow \begin{cases} k = 1 & \rightarrow \quad l = 0 \\ k = N & \rightarrow \quad l = N-1 \\ \\ k = l+1 & \rightarrow \quad -k = -l-1 \end{cases}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
&= b\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k b^{N-k} + \sum_{l=0}^{N-1}\binom{N}{l}a^{l+1}b^{N-l} + a^{N+1} \\
&= b\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k b^{N-k} + a\left(\underbrace{\sum_{l=0}^{N-1}\binom{N}{l}a^{l}b^{N-l} + a^{N}}_{\sum_{l=0}^{N}\binom{N}{l}a^l b^{N-l}}\right) \\
&= b(a+b)^N + a(a+b)^N \\
&= (a+b)^{N+1}
\end{aligned}
$$

Usando a probabilidade p

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} P[k] &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^k \\
&= (p + (1-p)]^N \\
&= 1 \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

Considere o espaço amostral finito $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ em que todos os elementos têm a mesma probabilidade $\frac{1}{n}$. Se A for um evento contendo m elementos amostrais, então

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

"Prova":
Suponha que A possa ser escrito como $A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ldots \{\omega_n\}$.
Usando a idéia de conjunto disjuntos (e teoria da medida), temos que

$$P(\{\omega_1\}) \cup P(\{\omega_2\}) \cup \ldots P(\{\omega_n\}) = P(A)$$

mas todos os elementos amostrais têm a mesma probabilidade, logo

Perspectiva Histórica (cont.)

$$
\begin{aligned}
mP\{\omega_i\} &= P(A) \\
m \times \frac{1}{n} &= P(A) \rightarrow P(A) = \frac{m}{n}
\end{aligned}
$$

Poderíamos ter provado que a probabilidade de cada elemento é $\frac{1}{n}$.

Princípio Multiplicativo

Princípio Multiplicativo: Um princípio fundamental da contagem nos diz que se uma tarefa pode ser executada em duas etapas, a primeira podendo ser realizada de p maneiras diferentes e a segunda de q maneiras, então as duas podem ser realizadas simultaneamente de pq maneiras.

Probabilidade

Deficiências da Definição Clássica

1. m e n são positivos $\rightarrow \frac{m}{n} \rightarrow$ racional.
2. n é finito
3. Definição baseada em eventos que tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Solução de Von Mises (1931):

$$p(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Problema: Infinito.

Probabilidade

Axiomas de A. N. Kolmogorov

- Considerando que um evento é um subconjunto do espaço amostral Ω, os eventos A_1, A_2, ... são chamados mutualmente exclusivos ou disjuntos se
$$A_i \cap_{i \neq j} A_j = 0$$
- De acordo com Kolmogorov cada evento apresenta uma probabilidade $P(A)$ (que é um número). As probabilidades satisfazem três axiomas:
  - Axioma 1 : Para um evento A, temos que $P(A) \geq 0$
  - Axioma 2 : $P(\Omega) = 1$ (evento certo)
    $P(\emptyset) = 0$ (evento impossível)
  - Axioma 3 : Se os eventos A_1, A_2, ... são disjuntos, então:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

a) Finito: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
b) Infinito: ?

Na páscoa de 1933, A. N. Kolmogorov publicava "Foundations of Probability". O modelo de Kolmogorov foi estabelecido em termos de Teoria de medida e integração de Lebesgue.
Espaços Mensuráveis: Os componentes essenciais na teoria da medida são:

- um conjunto Ω,
- uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω - coleção de subconjuntos mensuráveis,
- a função μ de $\mathcal{F}$ em $[0, \infty]$ chamada medida

Pequena Introdução à Teoria da Medida (cont.)

Usando a notação, temos

$$(\Omega, \mathcal{F}) - \text{espaço mensurável}$$

e

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mu) - \text{espaço de medida}$$

Se $\{A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ é uma classe de conjuntos disjuntos de Ω tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = \Omega$, então os $\{A_i\}$ cobrem Ω. Esta classe $\{A_i\}$ é chamada partição de Ω.

Uma classe de uma coleção enumerável de subconjuntos $A_j \subset \Omega$ denominada $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra se:

1) Se $A_i \in \mathcal{F}$, então $A_i^c \in \mathcal{F}$.
2) Se $\{A_i, i = 1, 2, \ldots\} \in \mathcal{F}$, então $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Os subconjuntos de Ω que são elementos da σ-álgebra são chamados eventos. Os elementos de Ω são chamados pontos.

Exemplos:

- Ω - ω-pontos de um lançamento de um dado, logo

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Suponha

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4\}\}$$

$\mathcal{C}$ não é um corpo, pois

$$\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \notin \mathcal{C}$$

mas

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{C}, \{1, 3, 5, 6\}, \{6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

é uma σ-álgebra e mínima.

- Considere novamente

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4\}, \{6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \end{aligned}$$

repare que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ e que os átomos de $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são:

$$\begin{array}{ccc} \{1, 3, 5\} & , & \{2, 4, 6\} \\ \{1, 3, 5\} & , & \{2, 4\}, \{6\} \end{array}$$

$\mathcal{F}_2$ gera uma partição mais refinada que $\mathcal{F}_1$.

Pequena Introdução à Teoria da Medida (cont.)

- Seja $\Omega = \mathbf{R}$ e $\mathcal{C}$ a classe de todos os intervalos da forma $(-\infty, a]$, $(b, c]$, e (d, ∞) e dos seguintes intervalos construídos a partir destes três:

$$\begin{aligned}
(b, c]^c &= (-\infty, b] \cup (c, \infty) \in \mathcal{C} \\
(d, \infty]^c &= (-\infty, d] \in \mathcal{C} \\
(-\infty, a]^c &= (a, \infty) \in \mathcal{C}
\end{aligned}$$

Repare que $\mathcal{C}$ é fechada em termos de uniões e interseções finitas. $\mathcal{C}$ é um corpo, mas

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(b - \frac{1}{n}, c\right] = [b, c] \notin \mathcal{C}$$

logo $\mathcal{C}$ não é uma σ-álgebra.

A σ-álgebra mínima gerada pela coleção de conjuntos abertos de A é chamada Corpo de Borel. Os membros desta σ-álgebra são chamados conjuntos de Borel.

Exemplo: Considere o conjunto **R**. A coleção de conjuntos de Borel em **R** é denominado $\mathcal{R}$. Cada intervalo aberto é um membro de **R**.

Note que os seguintes conjuntos são também conjuntos de Borel:

$$
\begin{aligned}
(a, b] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right) \\
[a, b) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right) \\
[a, b] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Então **R** contém: conjuntos como os de cima, interseções e uniões enumeráveis e complementos.

Exemplo de Jeffrey S. Rosenthal

O exemplo a seguir mostra a necessidade das definições dadas anteriormente.

Proposição: Não existe uma definição de $P(A)$ (medida) para todos os subconjuntos de $A \subseteq [0, 1]$, que satisfaça os axiomas de Kolmogorov.

Prova: Por contradição.

- Suponha que $P(A)$ possa ser definida para cada subconjunto de $A \subseteq [0, 1]$.
- Defina a relação de equivalência $x \sim y$ se e somente se a diferença de $y - x$ é racional. Esta relação particiona o intervalo $[0, 1]$ em uma união disjunta de classes de equivalência.
- Seja H um subconjunto de $[0, 1]$ que contém apenas um elemento de cada classe de equivalência. (Vamos substituir o 0 por outro valor).

Exemplo de Jeffrey S. Rosenthal (cont.)

Como H contém um elemento de cada classe de equivalência, logo cada ponto no intervalo $[0,1]$ está contido na união $\cup_{r \ racional \in [0,1)} (H \oplus r)$ de deslocamentos de H.

E como H contém apenas um ponto para cada classe de equivalência, os conjuntos $H \oplus r$ são todos disjuntos.

Usando o Axioma 3, temos:

$$P((0,1]) = \sum_{r \ racional \in [0,1)} P(H \oplus r),$$

mas $P(H \oplus r) = P(H)$ e portanto

$$1 = P((0,1]) = \sum_{r \ racional \in [0,1)} P(H)$$

que é uma contradição (soma infinita de um mesmo valor só pode ser $\pm\infty$ ou 0).

Proposição 1

Se o evento A contém somente um número finito de resultados $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ então

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_n)$$

Prova: Considere que $A_i = \{a_i\}$ para $i = 1 \ldots n$. Então $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos e

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n = A$$

Pelo Axioma 3, temos:

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_n) \quad \square$$

Proposição 1.3

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Prova: Seja $A_1 = A$ e $A_2 = A^c$, então

$$\begin{aligned}
A_1 \cap A_2 &= \emptyset (\text{disjuntos}) \\
A_1 \cup A_2 &= \Omega, \text{logo} \\
P(A_1) + P(A_2) &= \underbrace{P(A_1 \cup A_2)}_{\text{Axioma 3}} \\
&= P(\Omega) \\
&= 1 \ (\text{Axioma 2}) \\
P(A_1) + P(A_2) &= 1 \\
P(A_2) &= P(A^c) = 1 - P(A) \quad \square
\end{aligned}$$

Corolário 1.4

$$P(A) \leq 1 \text{ para qualquer evento } A$$

Prova: Sei que

- $P(A^c) = 1 - P(A)$ (Proposição 1.3)
- $P(A^c) \geq 0$ (Axioma 1)

Então

$$1 - P(A) \geq 0 \rightarrow P(A) \leq 1 \quad \square$$

Corolário 1.5

$$P(\emptyset) = 0$$

Prova: Sei que

- $\emptyset = \Omega^c$, logo

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) \text{ (Proposição 1.3)}$$

- $P(\emptyset) = 1$ (Axioma 2), logo

$$P(\emptyset) = 0 \quad \square$$

Exercício 1.3.2 do livro de Jeffrey S. Rosenthal

Suponha $\Omega = \{1, 2, 3\}$ e que $\mathcal{F}$ é uma coleção de todos os subconjuntos de Ω. Encontre (com prova) condições necessárias e suficientes a respeito dos números x, y e z tal que exista um medida de probabilidade aditiva contável P em $\mathcal{F}$ com $x = P\{1, 2\}$, $y = P\{2, 3\}$ e $z = P\{1, 3\}$.

Solução: As condições necessárias e suficientes são: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ e $x + y + z = 2$.
Para provar necessidade, seja P a medida de probabilidade em Ω. Logo

$$\begin{aligned} x &= P\{1,2\} = P\{1\} + P\{2\}, \\ y &= P\{2,3\} = P\{2\} + P\{3\}, \\ z &= P\{1,3\} = P\{1\} + P\{3\} \end{aligned}$$

Temos, pelo axioma de 1, que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ e assim podemos calcular

$$x + y + z = 2\left(P\{1\} + P\{2\} + P\{3\}\right) = 2P(\Omega) = 2,$$

o que prova a necessidade.
Do lado contrário, vamos assumir que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ e $x + y + z = 2$.

Definindo a medida de probabilidade da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P(\emptyset) &= 0 \\ P\{1\} &= 1-y \\ P\{2\} &= 1-z \\ P\{3\} &= 1-x \\ P\{1,2\} &= x \\ P\{2,3\} &= y \\ P\{1,3\} &= z \\ P\{1,2,3\} &= 1 \end{aligned}$$

Sabemos que para dois conjuntos A e B disjuntos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

No nosso problema, se fizermos $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$ e lembrarmos que $x + y + z = 2$, então

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P\{1, 2\} = x \\
P(A) + P(B) &= P\{1\} + P\{2\} = (1 - y) + (1 - z) \\
&= 2 - y - z = (x + y + z) - y - z = x = P(A \cup B)
\end{aligned}
$$

ou seja, P é a medida de probabilidade desejada (suficiência).

Proposição 1.6

$$\text{Se } A \subseteq B \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

Prova: Faça

$A_1 = A$

$A_2 = \underbrace{B \backslash A}_{\text{subconjunto dos elementos de } B \text{ que não estão em } A}$ ou $B - A$ (diferença)

Logo

- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (disjuntos)
- $A_1 \cup A_2 = B$

Mas

$$\begin{aligned} P(A_1) + P(A_2) &= P(A_1 \cup A_2) = P(B) \\ P(A) + P(B \backslash A) &= P(B) \end{aligned}$$

Como $P(B \backslash A) \geq 0$ (Axioma 1) $\rightarrow P(A) \leq P(B)$ $\square$.

Proposição 1.7

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Prova: Faço

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cap B \\ A_2 &= A \backslash B \text{ ou } A - B \\ A_3 &= B \backslash A \text{ ou } B - A \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup A_3 &= A \cup B \\ A_1 \cup A_2 &= A \\ A_1 \cup A_3 &= B \end{aligned}$$

Usando o Axioma 3, temos:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \\ P(B) &= P(A_1 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_3) \\ P(A \cup B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \end{aligned}$$

Calculando

$$
\begin{aligned}
P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= (P(A_1) + P(A_2)) + (P(A_1) + P(A_3)) - \\
&\quad P(A \cap B) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\
&= P(A \cup B) \quad \square
\end{aligned}
$$

Proposição 1.8

Para quaisquer três eventos A, B, C, temos

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\
&\quad - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

A extensão é o Teorema de Poincaré de inclusão e exclusâo.

Mais proposições

Seja A, B, C subconjuntos de Ω

- Distributivas:
  - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
  - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- Leis de Morgan
  - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
  - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Prova $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Em duas partes:

1) $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$
Por contradição: $(A \cap B)^c \nsubseteq A^c \cup B^c \rightarrow$ existe um $x \in (A \cap B)^c$ mas $\notin (A^c \cup B^c)$.

Mais proposições (cont.)

Se temos $x \notin A^c \cup B^c \to x \notin A^c$ e $x \notin B^c \to x \in A$ e $x \in B \to$ $x \in A \cap B \to x \notin (A \cap B)^c$ o que é uma contradição, logo

$$(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$$

2) $(A^c \cup B^c) \subseteq (A \cap B)^c$
Por contradição: $(A^c \cup B^c) \nsubseteq (A \cap B)^c \to$ existe um $x \in (A^c \cup B^c)$ mas $\notin (A \cap B)^c$.
Considerando que $x \notin (A \cap B)^c \to x \in A \cap B \to x \in A$ e $x \in B \to$ $x \notin A^c$ e $x \notin B^c \to x \notin (A^c \cup B^c)^c$ o que é uma contradição, logo

$$(A^c \cup B^c) \subseteq (A \cap B)^c$$

Juntando as duas partes, temos

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \quad \square$$

Propriedades Limites

As propriedades a seguir são essenciais quando se quer responder questões sobre a probabilidade de algo que sempre acontece ou que nunca acontece.

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)}$$

e

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)}$$

O seguinte resultado particular pode ser obtido quando consideramos $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} P(A_N), \text{ se } A_n \subset A_{n+1}}$$

Propriedades Limites (cont.)

Da mesma maneira, se considerarmos $A_{n+1} \subset A_n$, então

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} P(A_N), \text{ se } A_{n+1} \subset A_n}$$

Exemplo Morettin 5.8 - página 109

Lote de 20 peças sendo 5 defeituosas. Escolhemos 4 peças do lote ao acaso, ou seja, uma amostra de 4 elementos, de modo que a ordem dos elementos seja irrelevante. Qual é a probabilidade de escolher duas peças defeituosas na amostra?

- Ordem não interessa $\rightarrow$ Combinação $\rightarrow \binom{20}{4}$
- A - evento - 2 defeituosos

$$\binom{5}{2}\binom{15}{2}$$

- $P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}} \approx 0.217$

- Amostragem com reposição
- Amostragem sem reposição

Exemplo

Suponha uma gaveta cheia de canetas coloridas.

Experimento 1: retirar uma caneta, anotar a cor e recolocar a caneta. Repetir até que o número desejado de canetas seja alcançado.

$$\text{2 canetas com reposição: } \Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} RR, & RG, & RB, & RP, \\ GR, & GG, & GB, & GP, \\ BR, & BG, & BB, & BP, \\ PR, & PG, & PB, & PP \end{array} \right\}$$

$A \rightarrow$ pelo menos uma caneta vermelha

$$A = \{RR, RG, RB, RP, GR, BR, PR\}$$

Amostragem (cont.)

$$P(A) = \frac{7}{16}$$

Experimento 2: Sem colocar a caneta de volta

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} & RG, & RB, & RP, \\ GR, & & GB, & GP, \\ BR, & BG, & & BP, \\ PR, & PG, & PB, & \end{array} \right\}$$

$$A = \{RG, RB, RP, GR, BR, PR\}$$

$$P(A) = \frac{6}{12}$$

Experimento 3: Mesmo do experimento 2 sem se importar com a ordem.

Amostragem (cont.)

$$\Omega = \{\{R, G\}, \{R, B\}, \{R, P\}, \{G, B\}, \{G, P\}, \{B, P\}\}$$

$$A = \{\{R, G\}, \{R, B\}.\{R, P\}\}$$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

Existem fórmulas para esses experimentos

	com resposição	sem reposição
Amostra ordenada	n^k	${}^nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Amostra não-ordenada	${}^{n+k-1}C_k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	${}^nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Exemplos

Exemplo 1: Os nomes dos dias da semana são colocados em uma urna. Três nomes são retirados para serem os dias das aulas de Introdução do Processos Estocásticos. Qual é a probabilidade de não termos aula no final de semana?

Solução: Experimento sem reposição $\begin{cases} \text{com repetição} \\ \text{sem repetição} \end{cases}$

- A dimensão do espaço amostral é $|\Omega| = {}^{7}P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$
- A - evento "não ter aulas nos finais de semana". Dimensão de A

$$|A| = {}^{5}P_3 = 60$$

$$P(A) = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$$

Exemplos (cont.)

- Se decidirmos por amostras não ordenadas

$$\frac{{}^5C_3}{{}^7C_3} = \frac{2}{7}$$

Exemplo 2: Um dado é jogado duas vezes. Qual é a probabilidade da soma ser, pelo menos, 10?

Solução: Amostragem com reposição

- $|\Omega| = 6^2 = 36$
- $A = \{(4,6),(5,5),(6,4),(5,6)(6,6)\}$
- $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Exemplos (cont.)

Exemplo 3: Uma caixa contém 20 bolas das quais 10 são vermelhas e 10 são azuis. Retira-se 10 bolas da caixa. Deseja-se 5 bolas vermelhas e 5 azuis. Qual dos procedimentos (com reposição ou sem reposição) levaria a maior probabilidade de ocorrência do evento desejado?

Solução:

Amostragem com reposição

- $|A| = 20^{10}$
- A - evento 5 bolas vermelhas e 5 bolas azuis. Olhando para a amostra

$$\underbrace{RRRRR}_{10^5}\underbrace{BBBBB}_{10^5} = 10^{10}$$

- Existem outras maneiras de retirar 5 bolas vermelhas e 5 azuis

$$\begin{aligned} |A| &= {}^{10}C_5 = 252 \times 10^{10} \\ P(A) &= \frac{252 \times 10^{10}}{20^{10}} \approx 0,246 \end{aligned}$$

Amostragem sem reposição

- Ordenado
  - $|\Omega| = {}^{20}P_{10}$
  - Existem ${}^{10}P_5$ maneiras de escolher 5 bolas vermelhas e ${}^{10}P_5$ de escolher 5 bolas azuis.

$$|A| = \left({}^{10}P_5\right)^2 \, {}^{10}C_5$$

Exemplos (cont.)

- Logo

$$P(A) = \frac{\left({}^{10}P_5\right)^2 \, {}^{10}C_5}{{}^{20}P_{10}} \approx 0,343$$

- Não - ordenado
  - $|\Omega| = {}^{20}C_{10}$
  - $|A| = \left({}^{10}C_5\right)^2$
  - $P(A) = \frac{\left({}^{10}C_5\right)^2}{{}^{20}C_{10}} \approx 0,343$

Exemplo 4: Em uma caixa há 6 moedas de ouro, 4 de prata e 3 de bronze. retira-se 3 moedas aleatoreamente. Qual é a probabilidade de todas serem feitas do mesmo material? E de serem de materiais diferentes?

Solução: Amostragem sem reposição não ordenada

- $|A| = {}^{13}C_3 = 286$

Exemplos (cont.)

- 3 moedas de materiais diferentes

$$P(A) = \frac{{}^{6}C_1 \times {}^{4}C_1 \times {}^{3}C_1}{{}^{13}C_3} = \frac{6 \times 4 \times 3}{286} \approx 0,252$$

- 3 moedas de mesmo material: ${}^{6}C_3 + {}^{4}C_3 + {}^{3}C_3 = 20 + 4 + 1 = 25$

$$P(A) = \frac{25}{286} \approx 0,0857$$