Introdução aos Processos Estocásticos - Processos Estocásticos - Frequência

Eduardo M. A. M. Mendes

DELT - UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais
emmendes@cpdee.ufmg.br

Introdução

Idéia: Analisar o conteúdo de frequência de um PA - algo como Fourier para sinais determinísticos.

- Um PA WSS (Wide Sense Stationary) é definido como sendo um PA cujo

$$\begin{aligned} \mu_X[n] &= \mu, \quad -\infty < n < \infty \quad \text{(constante)} \\ c_x[n_1, n_2] &= g(|n_2 - n_1|), \quad -\infty < n_1 < \infty, \quad -\infty < n_2 < \infty \end{aligned}$$

repare que $c_x[n_1, n_2]$ só depende do intervalo entre as amostras do PA.

Exemplo: Processo Média Móvel

$$
\begin{aligned}
\mu_X[n] &= 0 \\
c_x[n_1, n_2] &= \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma_u^2 & \text{para} \quad |n_2 - n_1| = 0 \\ \frac{1}{4}\sigma_u^2 & \text{para} \quad |n_2 - n_1| = 1 \\ 0 & \text{para} \quad |n_2 - n_1| > 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Note que

$$
Var(X[n]) = \sigma_X^2[n] = c_x[n, n] = \frac{1}{2}\sigma_u^2
$$

PA WSS

Um PA WSS é um caso especial de PAs estacionários.

$$\begin{array}{lcl} \text{PA estacionário} & \rightarrow & \text{PA WSS} \\ \text{PA WSS} & \nrightarrow & \text{PA estacionário em geral} \end{array}$$

- Vantagem do PA WSS: só dois momentos (média, variância)

Prova

Prova: Assuma que $X[n]$ é estacionário ou

$$p_{X[n_1+n_0],\ldots,x[n_N+n_0]} = p_{x[n_1],\ldots,x[n_N]} \quad \forall n_1, n_2, \ldots, n_N \text{ e } n_0.$$

- Seja $N = 1$ e $n_1 = n$

$$p_{X[n+n_0]} = p_{X[n]}$$

  Se olharmos para $n = 0$, temos que $p_{X[n_0]} = p_{X[0]} \quad \forall n_0$. Isso implica que a PDF não depende do tempo, ou seja, $\mu_X[n] = \mu$ para $-\infty < n < \infty$.

Prova (cont.)

- Seja $N = 2$

$$p_{X[n_1+n_0],X[n_2+n_0]} = p_{X[n_1],X[n_2]}$$

Se $n_0 = -n_1$

$$p_{X[0],X[n_2-n_1]} = p_{X[n_1],X[n_2]}$$

que resulta em

$$E\left[X[n_1]X[n_2]\right] = E\left[X[0]X[n_2 - n_1]\right]$$

Se $n_0 = -n_2$

$$p_{X[n_1-n_2],X[0]} = p_{X[n_1],X[n_2]}$$

que resulta em

$$E\left[X[n_1]X[n_2]\right] = E\left[X[0]X[n_1 - n_2]\right]$$

Prova (cont.)

- Combinando os resultados, temos

$$E[X[n_1]X[n_2]] = E[X[0]X[|n_2 - n_1|]]$$

Logo

$$\begin{aligned} c_X[n_1, n_2] &= E[X[n_1]X[n_2]] - E[X[n_1]]\,E[X[n_2]] \\ &= E[X[0]X[|n_2 - n_1|]] - \mu^2 \\ &= g(|n_2 - n_1|) \end{aligned}$$

Sequência de Autocorrelação

Suposição: $X[n]$ é um PA WSS, o que implica que $E\left[X[n_1]X[n_2]\right]$ depende somente de $\left|n_2 - n_1\right|$.

Seja $n_1 = n$ e $n_2 = n + k$

$$E\left[X[n_1]X[n_2]\right] = E\left[X[n]X[n+k]\right]$$

depende somente de k ou melhor, de $\left|k\right|$.

Definição:

$$r_X[k] = E\left[X[k]X[n+k]\right] \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty$$

é chamada sequência de autocorrelação (ACS).

- A ACS mede a correlação entre as amostras do PA.

Exemplo: O PA diferenciador por ser descrito pela seguinte equação

$$X[n] = U[n] - U[n-1] \quad \text{com } U[n] \sim N(\mu, \sigma_U^2)$$

Calculando a ACS, temos

$$\begin{aligned} r_X[k] &= E\left[X[k]X[n+k]\right] \\ &= E\left[\left(U[n] - U[n-1]\right)\left(U[n+k] - U[n+k-1]\right)\right] \\ &= E\left[U[n]U[n+k]\right] - E\left[U[n]U[n+k-1]\right] - \\ &\quad E\left[U[n-1]U[n+k]\right] + E\left[U[n-1]U[n+k-1]\right] \end{aligned}$$

Sequência de Autocorrelação (cont.)

- Para $n_1 \neq n_2$ (Lembre da propriedade de independência)

$$E\left[U[n_1]U[n_2]\right] = E\left[U[n_1]\right]E\left[U[n_2]\right] = \mu\mu = \mu^2$$

- Para $n_1 = n_2 = n$

$$E\left[U[n_1]U[n_2]\right] = E\left[U^2[n]\right] = E\left[U^2[0]\right] = \sigma_u^2 + \mu^2$$

- Logo

$$E\left[U[n_1]U[n_2]\right] = \mu^2 + \sigma_U^2\delta[n_2 - n_1]$$

e

$$\begin{aligned} r_X[k] &= \mu^2 + \sigma_U^2\delta[k] - \left[\mu^2 + \sigma_U^2\delta[k-1]\right] \\ &\quad - \left[\mu^2 + \sigma_U^2\delta[k+1]\right] + \mu^2 + \sigma_U^2\delta[k] \\ &= 2\sigma_U^2\delta[k] - \sigma_U^2\delta[k-1] - \sigma_U^2\delta[k+1] \end{aligned}$$

Sequência de Autocorrelação (cont.)

O coeficiente de correlação é

$$\rho_{X[n],X[n+1]} = \frac{cov(X[n], X[n+1])}{\sqrt{Var(X[n])Var(X[n+1])}}$$

Como $X[n]$ tem média zero, podemos escrever

Sequência de Autocorrelação (cont.)

$$
\begin{aligned}
\rho_{X[n],X[n+1]} &= \frac{E[X[n],X[n+1]]}{\sqrt{E[X^2[n]]E[X^2[n+1]]}} \\
&= \frac{r_X[1]}{\sqrt{r_X[0]r_X[0]}} \\
&= \frac{r_X[1]}{r_X[0]} \\
&= -\frac{\sigma_U^2}{2\sigma_U^2} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

- Propriedades das ACS

Sequência de Autocorrelação (cont.)

1) $r_X[0] > 0$. Considere

$$\begin{aligned} r_X[k] &= E\left[X[n]X[n+k]\right] \\ r_X[0] &= \underbrace{E\left[X^2[n]\right]}_{\text{Potência Média}} > 0 \end{aligned}$$

2) $r_X[-k] = r_X[k]$, ou seja, é uma sequência par. Considere o seguinte raciocínio

$$\begin{aligned} r_X[k] &= E\left[X[n]X[n+k]\right] \\ r_X[-k] &= E\left[X[n]X[n-k]\right] \end{aligned}$$

Seja $n = m + k$

$$\begin{aligned} r_X[-k] &= E\left[X[m+k]X[m]\right] \\ &= E\left[X[m]X[m+k]\right] \\ &= E\left[X[n]X[n+k]\right] \\ &= r_X[k] \end{aligned}$$

Sequência de Autocorrelação (cont.)

3) $|r_X[k]| \leq r_X[0]$. Usando a desigualdade de Schwartz temos

$$\begin{aligned} |E[X[n]X[n+k]]| &\leq \sqrt{E[X^2[n]]\,E[X^2[n+k]]} \\ |r_X[k]| &\leq \sqrt{r_X[0]r_X[0]} = |r_X[0]| = r_x[0] \end{aligned}$$

Para PAs WSS com média zero

$$\rho_{X[n],X[n+k]} = \frac{r_X[k]}{r_X[0]}$$

e

$$\left|\rho_{X[k],X[n+k]}\right| \leq 1$$

Exemplos

- Ruído branco - PA WSS com média zero, variância σ^2 e amostras não-correlacionadas.

$$\begin{aligned} r_X[k] &= E\left[X[n]X[n+k]\right] \\ &= E\left[X[n]\right] E\left[X[n+k]\right] \text{ para } k \neq 0 \end{aligned}$$

Como $k \neq 0$, as amostras não são correlacionadas, ou seja

$$cov(X, Y) = 0 \Longrightarrow E[XY] - E[X]E[Y] = 0 \rightarrow E[XY] = 0$$

Logo

$$r_X[k] = 0, \quad k \neq 0$$

Para $k = 0$

Exemplos (cont.)

$$r_X[k] = E\left[X^2[n]\right] = Var(X[n]) = \sigma^2$$

Finalmente

$$r_X[k] = \sigma^2\delta[k]$$

Olhando para covariância novamente

$$\begin{aligned} c_X[n_1, n_2] &= E\left[X[n_1], X[n_2]\right] - E\left[X[n_1]\right]E\left[X[n_2]\right] \\ &= r_X[n_2 - n_1] - \mu^2 \end{aligned}$$

Fazendo $n_1 = n$ e $n_2 = n + k$

$$c_X[n, n+k] = r_X[k] - \mu^2$$

Se 2 amostras são não correlacionadas quando $k \to \infty$

Exemplos (cont.)

$$c_X[n, n+k] \to 0 \text{ e } r_X[k] \to \mu^2$$

- PA Média Móvel

$$\begin{aligned} c_X[n_1, n_2] &= \frac{\sigma_U^2}{2} \text{ para } n_1 = n_2 \\ &= \frac{\sigma_U^2}{4} \text{ para} |n_2 - n_1| = 1 \\ &= 0 \text{ para} |n_2 - n_1| > 1 \end{aligned}$$

mas $r_X[k] = c_X[n, n+k] + \mu^2$ com $\mu = 0$, logo

Exemplos (cont.)

$$
\begin{aligned}
r_X[k] &= \frac{\sigma_U^2}{2},\ k = 0 \\
&= \frac{\sigma_U^2}{4},\ k = \pm 1 \\
&= 0,\ |k| > 1
\end{aligned}
$$

- Senoide com Fase Aleatória

$$
\begin{aligned}
\mu &= 0 \\
c_X[n_1, n_2] &= \frac{1}{2} cos\left(2\pi(0,1)(n_2 - n_1)\right) \\
r_X[k] &= \frac{1}{2} cos\left(2\pi(0,1)k\right)
\end{aligned}
$$

Exemplos (cont.)

- PA autoregressiva- Considere o seguinte caso

$$X[n] = aX[n-1] + U[n] \qquad -\infty < n < \infty$$

onde $|a| < 1$ e $U[n]$ é um PA WSS com variância σ_U^2.

Resolvendo a equação diferença temos

$$\begin{aligned}
X[0] &= aX[-1] + U[0] \quad \text{com } X[-1] = 0 \\
X[1] &= aX[0] + U[1] \\
X[2] &= aX[1] + U[2] = a^2 \underbrace{X[0]}_{=U[0]} + aU[1] + U[2] \\
&\vdots \\
X[n] &= \sum_{l=0}^{\infty} a^l U[n-l]
\end{aligned}$$

Para determinar a ACS, devemos calcular

$$
\begin{aligned}
r_x[k] &= E\left[X[n]X[n+k]\right] \\
& E\left[X[n]\left(aX[n+k-1]+U[n+k]\right)\right] \\
&= aE\left[X[n]X[n+k-1]\right]+E\left[X[k]U[n+k]\right] \\
&= ar_X[k-1]+E\left[X[n]U[n+k]\right]
\end{aligned}
$$

Para $k > 0$

$$
\begin{aligned}
E\left[X[n]U[n+k]\right] &= E\left[\sum_{l=0}^{\infty} a^l U[n-l]U[n+k]\right] \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} a^l E\left[U[n-l]U[n+k]\right]
\end{aligned}
$$

Para ser diferente de 0, a diferença tem que ser $l + k = 0$ ou $l = -k$ o que implica que

$$E\left[U[n-l]U[n+k]\right] = 0$$

logo

$$r_X[k] = a r_X[k-1], \quad k > 0$$

Resolvendo a nova equação diferença, temos

$$\begin{aligned} r_X[1] &= a r_X[0] \\ t_X[2] &= a r_X[1] = a^2 r_X[0] \\ &\vdots \\ r_X[k] &= a^k r_X[0] \end{aligned}$$

Exemplos (cont.)

Voltando e calculando as esperanças e ACSs, temos

$$E\left[X[n]\right] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \underbrace{E\left[U[n-k]\right]}_{=0} = 0$$

e

$$\begin{aligned} r_x[0] &= E\left[X^2[n]\right] \\ &= E\left[\sum_{k=0}^{\infty} a^k U[n-k] \sum_{l=0}^{\infty} a^l U[n-l]\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a^k a^l \underbrace{E\left[U[n-k]U[n-l]\right]}_{r_u[k-l]=\sigma_U^2\delta[k-l]} \\ &= \sigma_U^2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} = \sigma_U^2 \frac{1}{1-a^2} \end{aligned}$$

Exemplos (cont.)

Como $r_X[k] = a^k r_X[0]$, logo

$$r_x[k] = \frac{\sigma_U^2}{1 - a^2} a^{|k|}$$

$$\begin{aligned} \text{se } a \uparrow^1 \quad &\rightarrow \quad \text{decaimento suave} \\ a \downarrow_0 \quad &\rightarrow \quad \text{decaimento abrupto} \end{aligned}$$

ACS é positiva definida. Para X com média zero e $X = [X[0], X[1], \cdots, X[N-1]]^T$

$$R_X = \begin{bmatrix} r_X[0] & r_X[1] & \dots & r_X[N-1] \\ r_X[1] & r_X[0] & \dots & r_X[N-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_X[N-1] & \dots & \dots & r_X[0] \end{bmatrix}$$

Exemplos (cont.)

Se $a = [a_0, a_1, \cdots, a_{N-1}]^T$

$$a^T R_X a > 0 \text{ para todo } a \neq 0$$

Ergocidade e Média Temporal

Seja $X[n]$ um PA WSS com média $E[X[n]] = \mu$. Será que é possível determinar um μ de uma só realização?

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \to \mu \text{ quando } N \to \infty \text{ ?}$$

Sabemos que

$$\mu = E[X[n]] \text{ para } n \text{ fixo}$$

onde μ é a média do processo $X[n]$ e

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} x_m[\text{fixo}]$$

é média do ensemble.

Ergocidade e Média Temporal (cont.)

Para que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_i[n] \rightarrow \mu \text{ se } E[X[n]] = \mu \quad \forall n$$

a média temporal deve ser igual a média da população, ou seja,

$$\lim_{N\rightarrow\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_i[n] = \lim_{M\rightarrow\infty} \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} x_m[i] = \mu$$

E o caso finito: $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n] = \mu$?

Ergocidade e Média Temporal (cont.)

- No caso de IID

$$E[\hat{\mu}_N] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\underbrace{E[x[n]]}_{=\mu} = \mu$$

É preciso também que

$$Var[\hat{\mu}_N] \to 0$$

Neste caso, $Var[\hat{\mu}_N] = \frac{\sigma^2}{N} \to 0$ quando $N \to \infty$ e o PA é dito ergódico na média.

- Ergocidade está relacionada com o problema da determinação das estatísticas de um processo aleatório a partir de uma única amostra desse processo.

Assim um processo é dito ergódico, na forma mais geral, se (com probabilidade 1) todas as suas estatísticas podem ser determinadas a partir de uma única função amostra do processo.

Exemplo 1: PA Média Móvel com PDF de U não especificada e $E[U[n]] \neq 0$.

$$X[n] = \frac{1}{2}\left(U[n] + U[n-1]\right)$$

com

$$\left.\begin{array}{rcl} E[U[n]] & = & \mu \\ Var[U[n]] & = & \sigma_U^2 \end{array}\right\} \text{para } -\infty < n < \infty \text{ com } U[n] \text{ não correlacionados}$$

Ergocidade e Média Temporal (cont.)

Solução: $X[n]$ é WSS

$$\begin{aligned} E[X[n]] &= E\left[\frac{1}{2}\left(U[n] + U[n-1]\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu \end{aligned}$$

e

$$Var\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\right] = a^T C_X a \text{ (forma quadrática)}$$

Sabemos que

$$C_{X_{i,j}} = E\left[\left(X[i] - E\left[X[i]\right]\right)\left(X[j] - E\left[X[j]\right]\right)\right]$$

No caso do exemplo

$$
\begin{aligned}
X[n] - E[X[n]] &= \frac{1}{2}\left(U[n] + U[n-1]\right) - \mu \\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{(U[n] - \mu)}_{\bar{U}[n]} + \underbrace{(U[n-1] - \mu)}_{\bar{U}[n-1]}\right)
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
C_{X_{i,j}} &= \frac{1}{4} E[(\bar{U}[i] - \bar{U}[i-1]) \times (\bar{U}[j] - \bar{U}[j-1])] \\
&= \frac{1}{4}\underbrace{E[\bar{U}[i]\bar{U}[j]]}_{=\sigma_U^2\delta[j-i]} + \frac{1}{4}\underbrace{E[\bar{U}[i]\bar{U}[j-1]]}_{=\sigma_U^2\delta[j-1-i]} + \\
&\quad \frac{1}{4}\underbrace{E[\bar{U}[i-1]\bar{U}[j]]}_{=\sigma_U^2\delta[j-i+1]} + \frac{1}{4}\underbrace{E[\bar{U}[i-1]\bar{U}[j-1]]}_{=\sigma_U^2\delta[j-i]}
\end{aligned}
$$

Ergocidade e Média Temporal (cont.)

Mas $\bar{U}[n]$ é ruído branco, logo:

$$
\begin{aligned}
c_{X_{i,j}} &= \frac{1}{2}\sigma_U^2 \text{ se } i = j \\
&= \frac{1}{4}\sigma_U^2 \text{ se} |i - j| = 1 \\
&= 0 \text{ caso contrário}
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
Var[\hat{\mu}_N] &= a^T C_X a \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \cdots \frac{1}{N} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\frac{\sigma_U^2}{2} & \frac{\sigma_U^2}{4} & 0 & \dots & 0 \\
\frac{\sigma_U^2}{4} & \frac{\sigma_U^2}{2} & \frac{\sigma_U^2}{4} & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\
0 & \dots & \dots & \ddots & \ddots \\
0 & \dots & \dots & \frac{\sigma_U^2}{4} & \frac{\sigma_U^2}{2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{1}{N} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ou seja

$$
\begin{aligned}
Var[\hat{\mu}_N] &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\sigma_U^2}{2} + \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-2}\frac{\sigma_U^2}{4} + \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-2}\frac{\sigma_U^2}{4} \\
&= \frac{\sigma_U^2}{2N} + \frac{\sigma_U^2}{4}\frac{N-1}{N^2} + \frac{\sigma_U^2}{4}\frac{N-1}{N^2}
\end{aligned}
$$

Quando $N \to \infty$ $Var[\hat{\mu}_N] \to 0$ (Ergódico na média).

Exemplo 2: Nivel DC aleatório

$$X[n] = A \quad -\infty < n < \infty \text{ e } A \sim N(0,1)$$

Solução: Calculando

Ergocidade e Média Temporal (cont.)

$$\begin{aligned}
\mu_X[n] &= E[X[n]] = E[A] = 0 = \mu \\
r_X[n] &= E[X[k]X[n+k]] \\
&= E[A^2] = 1 \text{ não depende de } N \Rightarrow \text{WSS}
\end{aligned}$$

mas não há informação em uma só realização!

No caso da variância, temos

$$\begin{aligned}
Var[\hat{\mu}_N] &= a^T C_X a = a^T R_X a \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \dots \frac{1}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \end{bmatrix} = 1 \underset{N \to \infty}{\not\to} 0
\end{aligned}$$

Densidade de Potência Espectral (PSD)

Quando analisamos sinais determinísticos com a Transformada de Fourier, temos:

- Sinais variando lentamente - maior conteúdo de frequência nas baixas frequências.
- Sinais variando rapidamente - aparecimento de componentes de alta-frequência relevantes.

$$\text{Fourier} \rightarrow \text{conteúdo de frequência}$$

Para achar periodicidades em dados aleatórios, existe o periodograma (Schuster, 1898)

$$\hat{P}_X(f) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{-\jmath 2\pi f n}\right|^2 \text{ com } -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

Densidade de Potência Espectral (PSD) (cont.)

- Como na prática sempre temos uma sequência finita, o periodograma é calculado usando a FFT. O periodograma assim calculado (sem qualquer "preparo") não é uma boa estimativa espectral devido à polarização espectral e ao fato que a variância espectral em uma dada frequência não diminui com o aumento da sequência utilizada no cálculo.
- A polorização espectral é devida ao truncamento abrupto da sequência. Podemos diminui-la ao multiplicar a sequência por função janela (que promova um truncamento suave).
- A variância pode ser reduzida pela suavização do periodograma.

Densidade de Potência Espectral (PSD) (cont.)

Repare que

$$\hat{P}_X(f) = g\left(X[0], X[1], \ldots, X[N-1]\right)$$

é aleatório! Pode fornecer alguma informação (lento ou rápido) mas é aleatório.

Solução: Média - Valor Esperado.

$$P_X(f) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} E\left[\left|\sum_{n=-M}^{M} X[n]e^{-\jmath 2\pi fn}\right|^2\right]$$

Observações:

1) Na prática M é finito $\rightarrow$ Efeito janela retangular $\rightarrow$ suavização.
2) $P_X(f)$ é chamado de Densidade de Potência Espectral (Potência por unidade de frequência).

Densidade de Potência Espectral (PSD) (cont.)

3) Só serve para WSS.
4) Não há informação de fase.

Exemplos

Exemplo 1: Ruído Branco

$$\mu = 0,\ r_x[n] = \sigma^2\delta[n]$$

A PSD pode ser calculada por

Exemplos (cont.)

$$
\begin{aligned}
P_X(f) &= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} E\left[\left(\sum_{n=-M}^{M} X[n]e^{-\jmath 2\pi f n}\right)^{*}\left(\sum_{m=-M}^{M} X[m]e^{-\jmath 2\pi f m}\right)\right] \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M}\sum_{m=-M}^{M} \underbrace{E[X[n]X[m]]}_{r_X[m-n]\rightarrow\ \text{ACS se WSS}} e^{-\jmath 2\pi f(m-n)} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M}\sum_{m=-M}^{M} \sigma^2\delta[m-n]e^{-\jmath 2\pi f(m-n)} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} \sigma^2 = \lim_{M\to\infty} \sigma^2 = \sigma^2
\end{aligned}
$$

ou seja, constante no intervalo $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$.

Exemplos (cont.)

Em geral

$$P_X(f) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} \sum_{m=-M}^{M} r_X[m-n] e^{-\jmath 2\pi f(m-n)}$$

que pode ser simplificada para

$$P_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_X[k] e^{-\jmath 2\pi f k}$$

que é a Transformada Discreta de Fourier da ACS - Teorema de Wiener-Khinchine.

No caso do Ruído Branco do exemplo, temos

Exemplos (cont.)

$$
\begin{aligned}
r_X[k] &= \sigma^2 \delta[k] \\
P_X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^2 \delta[k] e^{-\jmath 2\pi f k} = \sigma^2
\end{aligned}
$$

Exemplo 2: PA Autoregressivo de primeira ordem

$$
r_X[k] = \frac{\sigma_U^2}{1-a^2} a^{|k|} \text{ com } -\infty < k < \infty
$$

Exemplos (cont.)

A PSD é

$$
\begin{aligned}
P_X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_U^2}{1-a^2} a^{|k|} e^{-\jmath 2\pi f k} \\
&= \frac{\sigma_U^2}{1-a^2}\left[\sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k} e^{-\jmath 2\pi f k} + \sum_{k=0}^{\infty} a^{k} e^{-\jmath 2\pi f k}\right] \\
&= \frac{\sigma_U^2}{1-a^2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a^{k} e^{\jmath 2\pi f k} + \sum_{k=0}^{\infty} a^{k} e^{-\jmath 2\pi f k}\right] \\
&= \frac{\sigma_U^2}{1-a^2}\left[\frac{a e^{\jmath 2\pi f}}{1-a e^{\jmath 2\pi f}} + \frac{1}{1-a e^{-\jmath 2\pi f}}\right] \\
&= \frac{\sigma_U^2}{(1-a e^{\jmath 2\pi f})(1-a e^{-\jmath 2\pi f})} \\
&= \frac{\sigma_U^2}{1+a^2-2a\cos(2\pi f)}
\end{aligned}
$$

Propriedades da PSD

1) A PSD é uma função real

$$P_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_X[k] e^{-\jmath 2\pi fk}$$

Como $r_X[k]$ é uma função par e $e^{-\jmath 2\pi fk} = cos(2\pi fk) - \jmath sen(2\pi fk)$, a PSD pode ser reduzida para

$$P_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_X[k] cos(2\pi fk)$$

2) A PSD é não negativa.
3) A PSD é simétrica em torno do zero.
4) A PSD é periódica com período 1.

Propriedades da PSD (cont.)

5) A ACS pode ser recuperada da PSD

$$\begin{cases} P_X(f) & = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_X[k] e^{-\jmath 2\pi f k} \\ r_X[k] & = & \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_X(f) e^{\jmath 2\pi f k} df \end{cases}$$

6) PSD - potência média em bandas de frequências.

$$\text{Potência Média}[f_1, f_2] = 2 \int_{f_1}^{f_2} P_X(f) df$$

Propriedades da PSD (cont.)

No caso da banda $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, temos

$$\begin{aligned}
\text{Potência Média}\left[0, \frac{1}{2}\right] &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} P_X(f)df \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_X(f)df \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_X(f)e^{\jmath 2\pi f(0)}df \\
&= r_X[0]
\end{aligned}$$

ou seja, a potência média total $= r_X[0]$.

Estimação da ACS

Considerando registros finitos e fazendo o mesmo que fizemos para o valor esperado, ou seja

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]$$

podemos estimar $r_X[k]$:

$$\begin{aligned} r_X[k] &= E\left[X[n]X[n+k]\right] \\ &\downarrow \\ \hat{r}_X[k] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]X[n+k] \text{ com } k \geq 0, \text{ pois } r_X[-k] = r_X[k] \end{aligned}$$

Como $X = \{X[0], X[1], \ldots, X[N-1]\}$

$$n + k \leq N - 1 \Longrightarrow n \geq N - 1 - k$$

Estimação da ACS (cont.)

logo

$$\hat{r}_X[k] = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} X[k]X[n+k],\ k = 0, 1, \ldots, N-1$$

- Para uma boa estimativa é preciso que $N \gg k_{max}$.
- Quanto menos termos são “pró-mediados”, pior é o resultado.

Definição:

$$P_X(f) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} E\left[\left|\sum_{n=-M}^{M} X[n]e^{-\jmath 2\pi fn}\right|^2\right]$$

Se tivermos uma só realização finita, não podemos

- Tomar o limite.
- Calcular o $E[\bullet]$ (Média do Ensemble).

Solução: Pró-mediação por janelas (method of averaged periodograms ou Bartlett's method)

$$\begin{cases} I & \text{blocos} \\ L = & \frac{N}{I} \text{ pontos por bloco} \\ y_i[n] = & x[n+iL] \begin{cases} n = 0, \ldots, L-1 \\ i = 0, \ldots, I-1 \end{cases} \end{cases}$$

Estimação da PSD (cont.)

Para cada bloco i, temos

$$\hat{P}_X^{(i)}(f) = \frac{1}{L}\left|\sum_{n=0}^{L-1} y_i[n]e^{\jmath 2\pi fn}\right|^2$$

A média em todas as janelas é o periodograma médio:

$$\hat{P}_{\text{médio}}(f) = \frac{1}{I}\sum_{i=0}^{I-1} \hat{P}_X^{(i)}(f)$$

Quando $N \to \infty$, $I \to \infty$ e $L \to \infty$, $\hat{P}_{\text{médio}}(f) \to P_X(f)$.

Existem outros métodos para a estimação espectral:

- Estimação pelo ajuste de modelos ARMA.
- Multitaper.

Estimação da PSD (cont.)

- Ajuste via mínimos quadrados das frequências conhecidas.
  - Fast Search proposto por Korenberg (1989), project pursuit por Chen and Donoso (1994).
  - Exemplos de métodos para dados espaçados irregularmente: Periodograma de Lomb(1976) e Método de Palmer (2009!)

Processos Aleatórios WSS Contínuos

$$X(t), \ -\infty < t < \infty$$

Se $X(t)$ é WSS, então

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E(X(t)) = \mu, \ -\infty < t < \infty \\ r_X(\underbrace{\tau}_{\text{atraso}}) &= E\left(X(t)X(t+\tau)\right) \text{ com } -\infty < \tau < \infty \end{aligned}$$

onde $r_X(\tau)$ é a função de autocorrelação (ACF).

Propriedades:

1) $r_X(0) > 0$.

$$r_X(0) = E\left(X^2(t)\right) \text{ Potência Média Total}$$

2) $r_X(-\tau) = r_X(\tau)$ (Simetria par).

Processos Aleatórios WSS Contínuos (cont.)

3) $|r_X(\tau)| \leq r_X(0)$

$$\rho_{X(t),X(t+\tau)} = \frac{r_X(\tau)}{r_X(0)} \text{ com } \mu = 0$$

4) $r_X(\tau) \to \mu^2$ quando $\tau \to \infty$.

5) A ACF é uma função semi-definida positiva.

A PSD é definida com

$$P_X(F) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[\left|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{\jmath 2\pi F t} dt\right|^2\right]$$

ou

$$P_X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} r_X(\tau)e^{-\jmath 2\pi F \tau} d\tau \text{ para } -\infty < \underbrace{F}_{\text{em } Hz} < \infty$$

Propriedades:

1) A PSD é uma função real

$$P_X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} r_X(\tau) cos(2\pi F\tau) d\tau$$

2) $P_X(F) \geq 0$.
3) $P_X(-F) = P_X(F)$ (Simetria Par).
4) Podemos obter a ACF

$$r_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(F) e^{-\jmath 2\pi F\tau} dF$$

repare que é não-periódica.

WGN Contínuo

$x(t)$ é gaussiano com média nula para todos os t e WSS com PSD

$$P_X(F) = \frac{N_o}{2}, \ -\infty < F < \infty$$

Mas

$$r_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(F)dF = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_o}{2} dF \rightarrow \infty. \text{ Não existe,}$$

não é fisicamente possível!

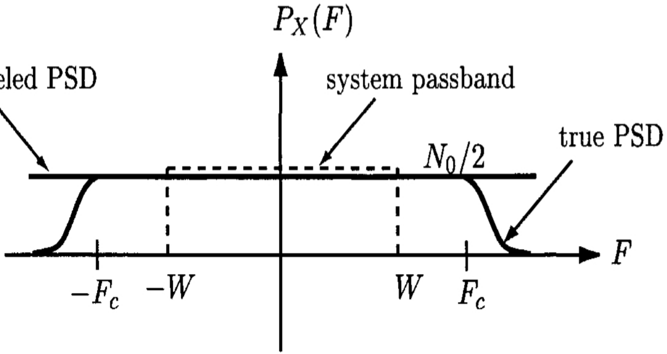

Figura 1: WGN

WGN Contínuo (cont.)

Na prática

$$
\begin{aligned}
r_X(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_X(F) e^{\jmath 2\pi F\tau} d\tau \\
r_X(\tau) &= \frac{N_o}{2}\delta(\tau)
\end{aligned}
$$

ou seja, todas as amostras são não-correlacionadas.

A nova PSD, ao ser passada por um filtro ideal passa-baixas, é

$$
P_X(F) = \begin{cases} \frac{N_o}{2} & |F| \leq w \\ 0 & |F| > w \end{cases}
$$

Caso seja usada a amostragem obedecendo o critério de Nyquist, ou seja

WGN Contínuo (cont.)

$$X(t)|_{t=n\underbrace{\Delta t}_{F_s=\frac{1}{\Delta t}}} = X[n], \; -\infty < n < \infty$$

com $F_s = 2W$, $X[n]$ é um PA aleatório discreto com distribuição gaussiana com média zero e ACS

$$\begin{aligned} r_X[k] &= E\left[X[n]X[n+k]\right] \\ &= E\left[X(n\Delta t)X((n+k)\Delta t)\right] \\ &= r_X[k\Delta t] \text{ (Versão Amostral)} \end{aligned}$$

Olhando novamente para $r_X(\tau)$

WGN Contínuo (cont.)

$$
\begin{aligned}
r_X(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\begin{cases} \frac{N_o}{2} & |F| \leq W \\ 0 & |F| > W \end{cases} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_X(F) e^{\jmath 2\pi F\tau} dF \\
&= \int_{-W}^{W} \frac{N_o}{2} e^{\jmath 2\pi F\tau} dF \\
&= \frac{N_o}{2} \left. \frac{sen(2\pi F\tau)}{2\pi\tau} \right|_{-W}^{W} \\
&= N_o W \frac{sen(2\pi W\tau)}{2\pi W\tau}
\end{aligned}
$$

WGN Contínuo (cont.)

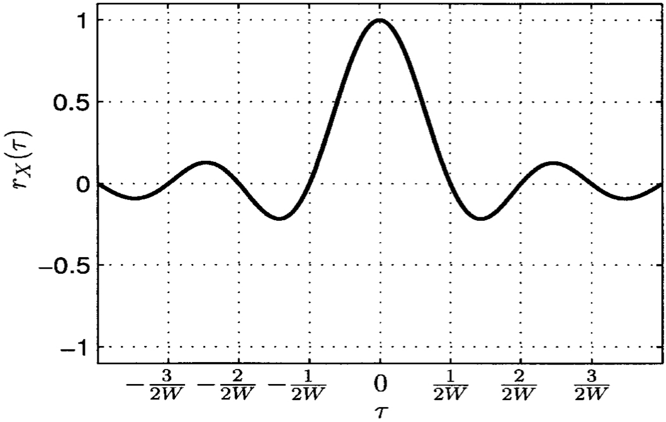

Figura 2: $r_X(\tau)$

WGN Contínuo (cont.)

Note que

$$
\begin{aligned}
r_X\left(\frac{K}{2w}\right) &= 0 \text{ se } k = \pm 1, \pm 2, \ldots \\
\downarrow \qquad & \\
r_X[k] &= N_o W \delta[k]
\end{aligned}
$$

$X[n]$ é um sinal discreto WGN com variância $N_o W$.