Prova de Introdução aos Processos Estocásticos

aluno: ____

- **1^a QUESTÃO**

Prove que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$$

também conhecida como desigualdade de Boole.

• **2^a QUESTÃO**

Seja Ω o espaço amostral de um experimento e $\Omega = \{A, B, C\}$, onde $P(A) = p$, $P(B) = q$ e $P(C) = r$. O experimento é repetido indefinidamente e assume-se que os experimentos sucessivos sejam independentes. Encontre a probabilidade do evento: A ocorrer antes B.

• **3^a QUESTÃO**

Uma variável aleatória X é dita *sem memória* se

$$P\left(X \leq x + t | X > t\right) = P\left(X \leq x\right) \qquad x,\ t > 0$$

Mostre que se X é uma VA contínua não-negativa sem memória, então X tem distribuição exponencial.

- **4^a QUESTÃO**

  Um superfície lisa é marcada por linhas paralelas equidistantes de D. Uma agulha de tamanho L, onde $L \geq D$, é jogada aleatoreamente sobre a mesa. Qual é a probabilidade de que agulha intercepta uma das linhas?

• **5^a QUESTÃO**

Seja X e Y definidas da seguinte maneira

$$X = cos\,(\Theta) \quad \text{e} \quad Y = sen\,(\Theta)$$

onde Θ é uma variável aleatória uniformemente distribuida em $(0, 2\pi)$.

a) Mostre que X e Y não são correlacionados

b) Mostre que X e Y não são independentes

• **6^a QUESTÃO**

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis independentes com distribuição normal padrão. Obtenha a função de densidade conjunta de (Y_1, Y_2), onde $Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ e $Y_2 = X_1/X_2$. Y_1 e Y_2 são independentes?

• **7^a QUESTÃO**

Determine a função característica em função da função Gamma $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ da seguinte função que assintoticamente engloba a distribuição de Levy

$$L_\mu(x) \sim \frac{\mu A}{|x|^{\mu+1}} \quad \text{com} \quad x \in \mathcal{R}^+,$$

onde μ e A são parâmetros conhecidos. Haveria alguma restrição nos valores que o parâmetro μ poderia tomar?

- **8^a QUESTÃO**

a) Seja X e Y variáveis aleatórias independentes tendo, cada uma, uma distribuição uniforme $U(0,1)$. Seja $U = min\{X, Y\}$ e $V = max\{X, Y\}$. Encontre $E(U)$ e depois calcule $cov(U, V)$.

b) X e Y têm a seguinte função de densidade bivariada

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2 - 2\rho xy + y^2\right)}.$$

Mostre que X e $Z = \frac{(Y-\rho X)}{\sqrt{1-\rho^2}}$ são independentes com distribuição $N(0,1)$ e deduza que

$$P(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} arcsen(\rho)$$

- **9^a QUESTÃO**

Cada pessoa tem dois genes para fibrose cística. Cada gene pode ser tanto N ou C. Cada criança recebe um gene de cada pai. Se os genes são NN ou NC ou CN então a criança é normal; se os genes são CC então a criança tem fibrose cística.

a) Os pais de uma criança não têm fibrose cística. A própria criança também não tem a doença, entretanto, sua irmã tem. Encontre a probabilidade de que a criança tenha pelo menos um gene C.

b) Na população em geral, a razão dos genes N para os genes C é 49 para 1. Assumindo que os dois genes em uma pessoa são independentes e que uma criança qualquer não tenha fibrose cística, encontre a probabilidade que ela tenha pelo menos um gene C.

c) A criança de a) e a criança de b) cresceram, casaram e planejam ter um filho. Qual é a probabilidade de que o filho tenha fibrose cística?

- **10^a QUESTÃO**

  Seja X uma variável aleatória com parâmetro p, ou seja, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \geq 1$. Escreva um programa, devidamente comentado, em R ou Matlab para simular X baseado na sequência de experimentos de Bernoulli.