

Introdução aos Processos Estocásticos - Independência

Eduardo M. A. M. Mendes

DELT - UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais
emmendes@cpdee.ufmg.br

Independência

Independência

Definição: dois eventos A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Obs.: Independência **não é** “um não ter influência no outro”.

Exemplos

Exemplo 1: Suponha que num experimento, tenhamos

$$P(A) = \frac{52}{104} = 0,5$$

$$P(B) = \frac{87}{104} = 0,8365$$

$$P(C) = \frac{83}{104} = 0,7981$$

e

$$P(A \cap B) = \frac{45}{104} = 0,4327 \quad P(A) \times P(B) = 0,418$$

$$P(A \cap C) = \frac{39}{104} = 0,375 \quad P(A) \times P(C) = 0,399$$

$$P(B \cap C) = \frac{70}{104} = 0,6731 \quad P(B) \times P(C) = 0,667$$

Exemplos (cont.)

B e C parecem mais próximos de serem “independentes”.

Exemplo 2: Experimento - Lançamento de um dado 2 vezes.

Evento - 4 no primeiro lançamento e 5 no segundo lançamento.

- $|\Omega| = 6^2 = 36$.
- $A = \{4 \ 5\} \rightarrow |A| = 1$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$$

Mas podemos fazer também

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A_1 = \{4\}, A_2 = \{5\}$

Exemplos (cont.)

- $P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{1}{6}$ e $P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_1|} = \frac{1}{6}$
- $P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \rightarrow$ Independentes

Exemplo 3: Experimento - Escolher duas canetas sem reposição de

$$\{R_1, R_2, G, B\}$$

- Espaço amostral = $\Omega = \{R_1R_2, R_1G, R_1B, R_2G, R_2B, GB\}$
- A - evento em que escolhemos exatamente 1 caneta vermelha

$$A = \{R_1G, R_1B, R_2G, R_2B\}$$

- B - evento em que escolhemos exatamente 1 caneta verde

$$B = \{R_1G, R_2G, GB\}$$

Exemplos (cont.)

- $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $A \cap B = \{R_1 G, R_2 G\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = P(A \cap B) \rightarrow$ Independentes.

Exemplo 4: Experimento - Suponha, agora, que há mais uma caneta (roxa).

$$\{R_1, R_2, G, B, P\}$$

- Espaço Amostral:
 $\Omega = \{R_1 R_2, R_1 G, R_1 B, R_1 P, R_2 G, R_2 B, R_2 P, GB, GP, BP\} \rightarrow |\Omega| = 10.$
- $A = \{R_1 G, R_1 B, R_1 P, R_2 G, R_2 B, R_2 P\}$ e $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Exemplos (cont.)

- $B = \{R_1G, R_2G, GB, GP\}$ e $P(A) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
- $A \cap B = \{R_1G, R_2G\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- $P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} \neq \frac{1}{5} \rightarrow$ **Não** são independentes!!!!

Independência Mútua

Independência Mútua

Se 3 eventos são independentes 2 a 2, será que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) ?$$

Resposta: Não.

Proposição 1.11: Seja A_1, A_2, \dots, A_n mutualmente independentes. Então

$$P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

Exemplo: Três eventos para os quais $P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$, mas para par a par não é independente.

Independência Mútua (cont.)

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = p$ e $P(\{4\}) = q$.

Consequentemente

$$3p + q = 1$$

com $0 \leq p, q \leq 1$.

Vamos considerar $A = \{1, 4\}$, $B = \{2, 4\}$ e $C = \{3, 4\}$. Repare que a interseção de qualquer par é $\{4\}$ que é a interseção dos três também e que

$$P(\{4\}) = q$$

Como $P(A) = P(B) = P(C) = p + q$, devemos ter

$$(p + q)^3 = q \text{ e } (p + q)^2 \neq q$$

Resolver $(p + q)^3 = q$ e $3p + q = 1$ é mesma coisa do que resolver

$$8q^3 + 12q^2 - 21q + 1 = 0$$

Independência Mútua (cont.)

Fatorando, temos

$$(q - 1)(8q^2 + 20q - 1)$$

onde $q = 1$ não nos interessa. A raiz que nos interessa é

$$q = \frac{-5 + 3\sqrt{3}}{4}$$

Logo $p = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$ e

$$(p + q) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$(p + q)^3 = q$$

$$(p + q)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \neq q$$

O que completa o nosso exemplo.

Independência Mútua

Proposição 1.12

Se A e B são independentes, então A e B^c são independentes.

Prova: Sabemos que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

- $P(B^c) = 1 - P(B)$ (Proposição 1.3)
- $A \cap B$ e $A \cap B^c$ são disjuntos e não tem elementos em comum e a sua união é A .
- Usando o Axioma 3, temos

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

- Logo:

$$\begin{aligned}P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\&= P(A) - P(A) \times P(B) \\&= P(A)(1 - P(B)) \\&= P(A) \times P(B^c)\end{aligned}$$

Colorário 1.13

Se A e B são independentes, A^c e B^c também são.

prova: Aplicar Proposição 1.12 duas vezes.

proposição 1.14

Sejam os eventos A , B e C mutuamente independentes, então A e $B \cap C$ são independentes e A e $B \cup C$ são independentes.

Exemplo

Podemos assumir que lançamentos sucessivos de uma moeda são **independentes**, mesmo se a moeda não for equilibrada. Suponha que a probabilidade de ser cara é 0,6 (moeda viciada) e a mesma seja lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de se conseguir 3 caras, 2 coroas, 1 cara ou só coroa?

Solução:

a) Três caras

$$P(\{H\}) = 0,6$$

$$P(\{3 \text{ caras}\}) = (0,6)^3 \approx 0,216$$

b) Duas caras - $\{HHT, HTH, THH\}$

$$P(\{HHT\}) = 0,6 \times 0,6 \times 0,4 = 0,144$$

$$P(\{2 \text{ caras}\}) = 3 \times 0,144 = 0,432$$

Exemplo (cont.)

c) Uma cara - $\{TTH, THT, HTT\}$

$$P(\{1 \text{ cara}\}) = 3 \times (0,4)^2 \times 0,6 = 0,288$$

d) Só coroa

$$P(\{\text{só coroa}\}) = (0,4)^3 = 0,064$$

Note que:

$$0,216 + 0,144 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1$$

Definição

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ para } P(B) \neq 0.$$

Na prática - Probabilidade de A dado que B ocorreu.

Exemplo 1

- Suponha que um homem e uma mulher saíram para jantar. Quem pagará a conta será decidido no lançamento de uma moeda ($\{H, T\}$), três vezes, da seguinte maneira: mais caras do que coroas a mulher paga a conta, caso contrário, o homem paga a conta.
- Suponha que no primeiro lançamento da moeda saiu cara (H). Qual é a probabilidade de que a mulher pague a conta?

Solução:

1) Sem a condição de que cara saiu no primeiro lançamento.

- Espaço Amostral:
 $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \rightarrow |\Omega| = 2^3 = 8$
- Evento A - mais caras - $A = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$
- Evento B - Mais coroas - $B = \{HTT, THT, TTH, TTT\}$

Exemplo 1 (cont.)

- Claramente a probabilidade é $\frac{1}{2}$

$$T(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$T(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

2) Com a condição, ou seja, sabendo que o resultado do primeiro lançamento é **cara**.

- Evento $E = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$ - Este é o nosso novo espaço amostral.
- A_1 - mulher paga - $A \cap E = \{HHH, HHT, HTH\}$
- B_1 - homem paga - $B \cap E = \{HTT\}$

Exemplo 1 (cont.)

- Então:

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|E|} = \frac{3}{4}$$

$$P(B_1) = \frac{|B_1|}{|E|} = \frac{1}{4}$$

Usando a definição de probabilidade condicional

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

- $A \cap E = \{HHH, HHT, HTH\}$
- $P(A \cap E) = \frac{|A \cap E|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$
- $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Exemplo 1 (cont.)

- $$P(A|E) = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$$

Usando o mesmo raciocínio, temos

$$P(B|E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$$

Note que:

$$P(A|E) + P(B|E) = 1$$

pois $A \cup B = \Omega$.

Exemplo 2

Um carro qualquer é escolhido aleatoriamente ao trafegar pela Av. Antônio Carlos. A probabilidade de que o carro seja amarelo é $\frac{3}{100}$. A probabilidade da cor do cabelo do motorista ser louro é $\frac{1}{5}$. A probabilidade que o carro seja amarelo e a cor do cabelo do motorista seja louro é $\frac{1}{50}$.

Encontre a probabilidade condicional que a cor do cabelo do motorista seja louro dado que a cor do carro é amarelo.

Solução

- Y - evento {carro amarelo}
- B - evento {cabelo louro}

Exemplo 2 (cont.)

- Sabemos:

$$P(Y) = 0,03$$

$$P(B) = 0,2$$

$$P(Y \cap B) = 0,02$$

- Logo: $P(B|Y) = \frac{P(B \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0,02}{0,03} \approx 0,667$

Proposição 2.1

Sejam A e B eventos e $P(B) \neq 0$, então A e B são independentes se e somente se $P(A|B) = P(A)$.

Prova

- 1ª Parte - Suponha que A e B são independentes \rightarrow
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

- 2ª Parte - Suponha que $P(A|B) = P(A)$ ou seja

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

logo A e B são independentes.

Exemplo 1

Sabemos que o gene do filho é metade de um dos dois genes do pai e metade de um dos genes da mãe. Cada um com probabilidade igual a $\frac{1}{2}$.

- B - gene olhos castanhos
- b - gene olhos azuis

Suponha que João tenha olhos castanhos e seus pais também. A irmã de João tem olhos azuis. Qual é a probabilidade de que os genes de João sejam BB ?

Solução

- Os genes da irmã de João são bb que são um de cada pai, logo (caso geral):
Pai = Bb ou bB ou BB
Mãe = Bb ou bB ou BB

Exemplo 1 (cont.)

- No caso de João, podemos ter

$$BB, Bb, bB, bb$$

Todos têm a probabilidade $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

- X - evento em que João tem genes B . Y - evento em que João tem olhos castanhos.

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

ou

$$\begin{aligned} X &= \{BB\} \\ Y &= \{BB, bB, Bb\} \end{aligned} \rightarrow P(X) = \frac{|X|}{|Y|} = \frac{1}{3}$$

Teorema da Probabilidade Total

Situação: Não sabemos a probabilidade de um evento mas sabemos a sua probabilidade quando um outro evento ocorreu.

- Os eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral se
 - Se os eventos são disjuntos dois a dois, ou seja $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$
 - $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

Teorema 2.2: Sejam A_1, A_2, \dots, A_n uma partição do espaço amostral, com $P(A_i) \neq 0$ para todo i , e seja B um evento. Então:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \times P(A_i)$$

Probabilidade Condicional

Prova: Sabemos que:

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \rightarrow P(B \cap A_i) = P(B|A_i) \times P(A_i)$$

Considere também que $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_n$, onde $B \cap A_i$ e $B \cap A_j$ são disjuntos.

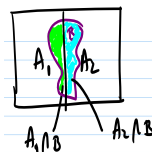


Figura 1: Exemplo dos conjuntos

Note, na figura, que:

- $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$

Probabilidade Condicional (cont.)

- $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) = B$

Então, no nosso caso, a relação acima é

$$(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \dots \cup (A_n \cap B) = B$$

Pelo Axioma 3

$$\sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = P(B)$$

$$\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \times P(A_i) = P(B) \quad \square$$

Exemplo

Um vendedor de abacaxi tem que decidir se aumenta o estoque ou não para o feriado que se aproxima. Ele estima que, se o tempo for ensolarado, ele tem 90% de chance de vender todo seu estoque; se estiver nublado, sua chance é de 60% e se chover, sua chance é de 20%. De acordo com a previsão do tempo, a probabilidade de um dia ser ensolarado é de 30%, de um dia nublado é de 45% e de um dia chuvoso é de 25%. Qual é a probabilidade de que o vendedor venda todo o seu estoque?

Solução

- A_1 - dia ensolarado - $P(A_1) = 0,3$
- A_2 - dia nublado - $P(A_2) = 0,45$
- A_3 - dia chuvoso - $P(A_3) = 0,25$

Repare que são disjuntos e formam uma partição!

- B - evento em que o vendedor vende todo o seu estoque

Exemplo (cont.)

Sabemos, ainda, que:

- $P(B|A_1) = 0,9$
- $P(B|A_2) = 0,6$
- $P(B|A_3) = 0,2$

Usando o teorema da Probabilidade Total, temos:

$$P(B) = 0,9 \times 0,3 + 0,6 \times 0,45 + 0,2 \times 0,25 = 0,59$$

Corolário 2.3

Sejam A e B eventos e suponha que $P(A) \neq 0$ ou 1, então

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|A^c) \times P(A^c)$$

Prova: segue diretamente do teorema 2.2

Teorema de Bayes

Pré-suposto: $P(A|B) \neq P(B|A)$

Teorema 2.4: Sejam A e B eventos com probabilidade não nulas, então

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Prova: Usando a definição de probabilidade condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad (2)$$

Dividindo equações 1 e 2, temos:

$$\frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times \frac{P(A)}{P(B \cap A)}$$

Teorema de Bayes (cont.)

Mas $P(B \cap A) = P(A \cap B)$, logo

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)} \quad \square$$

Se $P(A) \neq 0$ e $\neq 1$ e $P(B) \neq 0$, podemos usar o corolário 2.3 para reescrever o Teorema de Bayes como

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B|A) \times P(A) + P(B|A^c) \times P(A^c)}$$

Exemplo 1

Considerando o exemplo anterior do vendedor de abacaxi, suponha que o mesmo tenha vendido todo o estoque. Qual é a probabilidade de que o dia foi ensolarado?

Solução:

- A_1 - evento “dia ensolarado”
- B - evento “vendeu todo o seu estoque”

A questão é saber quanto é $P(A_1|B)$.

Temos:

- $P(B|A_1) = 0,9$
- $P(A_1) = 0,3$
- $P(B) = 0,59$

Exemplo 1 (cont.)

Logo:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \times P(A_1)}{P(B)} = \frac{0,9 \times 0,3}{0,59} = 0,46$$

Exemplo 2

Suponha que 1 em 1000 pessoas é portadora de uma doença específica. Suponha, também, que a probabilidade de que o portador teste negativo é 1%, enquanto que a probabilidade de que o portador teste positivo é 5%. Seja A o evento “paciente é portador” e B o evento “resultado é positivo”. Foram dados: $P(A) = 0,001$ (tal que $P(A^c) = 0,999$) e que

$$\begin{aligned}P(B|A) &= 0,99 \\ P(B|A^c) &= 0,05\end{aligned}$$

Exemplo 2 (cont.)

- a) O paciente recebe o resultado do teste positivo. Qual é a probabilidade do paciente ser portador?

$$\begin{aligned}P(A|B) &= \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B|A) \times P(A) + P(B|A^c) \times P(A^c)} \\&= \frac{0,99 \times 0,001}{0,99 \times 0,001 + 0,05 \times 0,999} \\&= 0,0194\end{aligned}$$

- b) O paciente recebeu o resultado do teste negativo. Qual é a probabilidade do paciente ser portador?

$$\begin{aligned}P(A|B^c) &= \frac{P(B^c|A) \times P(A)}{P(B^c|A) \times P(A) + P(B^c|A^c) \times P(A^c)} \\&= \frac{0,01 \times 0,001}{0,01 \times 0,001 + 0,95 \times 0,999} \\&= 0,00001\end{aligned}$$

Exemplo 2 (cont.)

Obs.: Paciente sem estória na família, escolhido aleatoriamente.

Mais de dois eventos

Propriedade condicional C dado que A e B tenham ocorrido é

$$P(C|A \cap B) \text{ ou } P(C|A, B)$$

onde

$$P(C|A, B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)}$$

ou

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A, B) \times \underbrace{P(A \cap B)}_{P(B|A) \times P(A)}$$

Proposição 2.5

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos. Suponha que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, então

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}) \times \dots \times P(A_2 | A_1) \times P(A_1)$$

Problema do Aniversário

Se existem 23 ou mais pessoas na sala de aula, então as chances são melhores do que 50% que duas delas façam aniversário no mesmo dia?

Solução: Suponha que há n pessoas: p_1, p_2, \dots, p_n .

- Seja A_2 o evento “ p_2 faz aniversário em dia diferente de p_1 ”

$$P(A_2) = 1 - \frac{1}{365}$$

- Seja A_3 o evento “ p_3 faz aniversário em dia diferente de p_1 e p_2 ”

- $P(A_3|A_2) = 1 - \frac{2}{365}$

- $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3|A_2) = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right)$

A_2 está ligada ao evento “todas as três pessoas fazem aniversário em dias diferentes”

Problema do Aniversário (cont.)

- Estendendo, temos

$$P(A_i | A_1, \dots, A_{i-1}) = 1 - \frac{i-1}{365}$$

- Usando a Proposição 2.5

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_i) = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \times \left(1 - \frac{2}{365}\right) \dots \left(1 - \frac{i-1}{365}\right) = q_i$$

onde q_i é a probabilidade de todas as pessoas p_1, \dots, p_n fazerem aniversário em dias separados.

q_i decresce à medida que mais fatores são multiplicados, pois cada fator é menor do que 1.

Problema do Aniversário (cont.)

- Objetivo: $q_{n-1} > 0,5$ e $q_n \leq 0,5$. Fazendo os cálculo temos

$$q_{22} = 0,5243 \text{ e } q_{23} = 0,4927$$

são necessários 23 pessoas para que a probabilidade de coincidência de aniversário seja maior do que $\frac{1}{2}$.