Introdução aos Processos Estocásticos - VAs Contínuas Múltiplas

Eduardo M. A. M. Mendes

DELT - UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais
emmendes@cpdee.ufmg.br

Serão consideradas 2 VAs, X e Y, conjuntamente distribuidas - significando que o experimento original, espaço amostral Ω, é mapeado em dois números $X(s) = x$ e $Y(s) = y$ onde $s \in \Omega$.

$$\text{Resultados}: \ (x, y) \rightarrow \Omega_{x,y} = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$$

Exemplo: Dardo - achar $P(\text{centro do alvo}) = P\left(\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{4}\right)$

- Se o lançador for um amador, provavelmente os lançamentos estarão em toda a área do alvo.
- Se o lançador for um expert, provavelmente os lançamentos estarão concentrados em uma área pequena perto do centro do alvo.

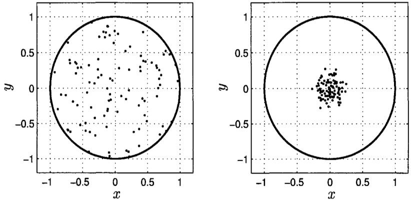


Figura 1: a) amador e b) expert

$$
\begin{aligned}
P(\text{centro do alvo}) &= \frac{\text{Área do centro do alvo}}{\text{Área Total}} \\
&= \frac{\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\pi(1)^2} = \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

Problema: Como achar a probabilidade para o campeão?

$$P_c >> P_a$$

Podemos olhar o caso do amador como

$$P(\text{centro do alvo}) = \underbrace{\pi \left(\frac{1}{4}\right)^2}_{\text{Área}} \times \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{\text{Altura}}$$

Definindo

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

podemos achar o mesmo volume usando

$$
\begin{aligned}
P(\text{centro do alvo}) &= \int\int_A p_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int\int_{\{(x,y):x^2+y^2\leq\left(\frac{1}{4}\right)^2\}} \frac{1}{\pi}dxdy \\
&= \frac{1}{\pi}\times\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

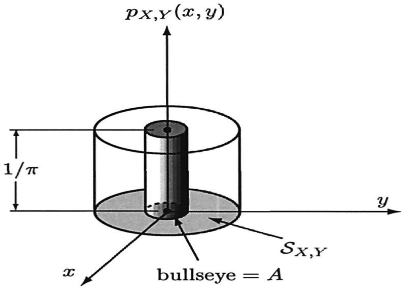


Figura 2: Interpretação Geométrica

Exemplo:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4\left(1 - |2x-1|\right)\left(1-|2y-1|\right), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Introdução (cont.)

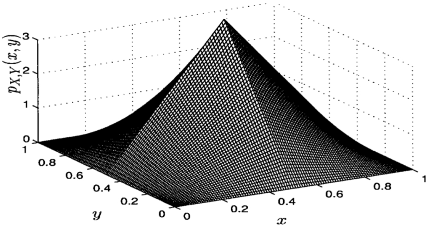


Figura 3: 3D - PDF conjunta

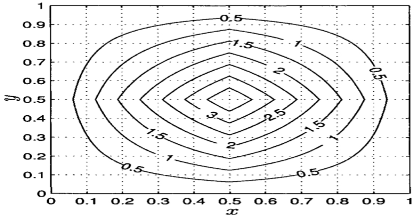


Figura 4: Contorno - PDF conjunta

Para verificar se é uma PDF válida

$$
\begin{aligned}
P(S_{X,Y}) &= \int_0^1 \int_0^1 p_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 4\left(1-|2x-1|\right)\left(1-|2y-1|\right)dxdy \\
&= \int_0^1 2\left(1-|2x-1|\right)dx \int_0^1 2\left(1-|2y-1|\right)dy
\end{aligned}
$$

Introdução (cont.)

Se $p_{X,Y}$ não pudesse ser separada em $g(x) \times g(y)$ a solução seria muito mais difícil. No nosso caso podemos facilmente ver que:

$$\int_0^1 g(x)dx = 1$$

logo

$$P(S_{X,Y}) = 1$$

Em geral é difícil determinar a integral dupla a não ser que:

- $p_{X,Y}$ seja separável.
- a área de integração seja retangular.

Três dimensões a volume não nulo requer uma área (base) não nula

Introdução (cont.)

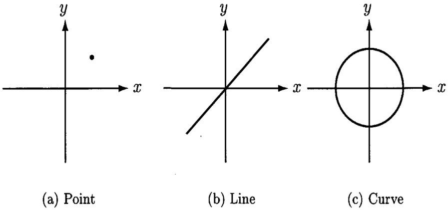


Figura 5: Exemplos de eventos com probabilidade zero para variáveis X e Y contínuas distribuidas conjuntamente.

Introdução (cont.)

Exemplo: PDF gaussiana bivariada

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} \qquad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

onde $-1 < \rho < 1$. Os contornos de PDF constante são dados por

$$\underbrace{p_{X,Y}(x,y)}_{x^2-2\rho xy+y^2} = c$$

se $\rho = 0 \rightarrow$ círculo senão $\rho \neq 0 \rightarrow$ elipse.

$$|\rho| < 1 \rightarrow x^2 - 2\rho xy + y^2 = r^2 > 0$$

$$x^2 - 2\rho xy + y^2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

com $det(\bullet) = 1 - \rho^2 > 0$.

PDFs Marginais

- Para uma VA distribuida conjuntamente, a PDF marginal é a pdf que quando integrada leva a $p[a \leq x \leq b]$.

Repare que

$$
\begin{aligned}
p[a \leq x \leq b] &= P[a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty] \\
& \int\int_A p_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b p_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_a^b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dy}_{p_X(x)} dx
\end{aligned}
$$

PDFs Marginais (cont.)

Exemplo: Gaussiana Bivariada padrão

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)} dy$$

mas

$$\begin{aligned} x^2 - 2\rho xy + y^2 &= y^2 - 2\rho xy + \rho x^2 - \rho x^2 + x^2 \\ &= (y-\rho x)^2 + (1-\rho^2)x^2 \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2} \times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(1-\rho^2)x^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)} dy}_{=1} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \sigma^2 &=& 1-\rho^2 \\ \mu &=& \rho x \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \rightarrow X \sim N(0,1) \end{aligned}$$

Independência

- Lembrando

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

ou seja, o conhecimento do evento B não muda a probabilidade de ocorrência do evento A.

- Duas VAs contínuas são independentes se para todo os eventos A e B

$$P[x \in A, y \in B] = P(x \in A) \times P(y \in B)$$

ou seja

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \times p_Y(y)$$

Independência (cont.)

- Exemplo: VA exponencial

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{(x+y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} p_{X,Y} &= e^{-(x+y)}u(x)u(y) \quad \text{(degrau)} \\ &= \underbrace{e^{-x}u(x)}_{p_X(x) \to X \sim exp(1)} \times \underbrace{e^{-y}u(y)}_{p_Y(y) \to Y \sim exp(1)} \end{aligned}$$

Para ser independente é preciso que cada fator seja uma PDF válida ($\int = 1$).

Independência (cont.)

- Exemplo

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{(x+y)} & x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } y < x \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Não há como escrever como degrau.

- Exemplo: Gaussiana Bivariada com $\rho = 0$.

$$\begin{aligned} P_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{p_X(x)} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}}_{p_Y(y)} \end{aligned}$$

repare que são independentes

Transformações

Determinar a PDF de

$$Z = g(X, Y)$$

Problema Típico: Se $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$ são independentes, qual é a PDF da distância de $(x, y) = (0, 0)$ ou

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}?$$

- Solução - usando a CDF: Encontrar $F_Z(z)$ e

$$p_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}$$

- Extensão de

$$p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Solução CDF

- Exemplo: Soma de VAs $U(0,1)$ independentes

$$X = U_1 + U_2$$

$$F_X(x) = \iint_{\{(U_1,U_2):u_1+u_2\leq x\}} p_{U_1,U_2}(u_1,u_2)du_1du_2$$

onde

$$p_{U_1,U_2} = p_{U_1} \times p_{U_2} \text{ (Independência) } = \begin{cases} 1 & 0 < u_1 < 1, 0 < u_2 < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Solução CDF (cont.)

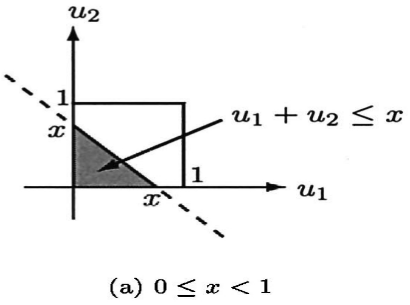
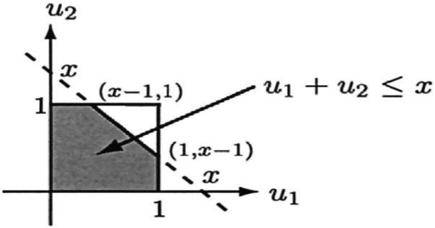


Figura 6: A reta $u_1 + u_2 = x$ é válida para $0 < x < 1$

No caso da figura acima

$$\text{Área} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Solução CDF (cont.)



(b) $1 \leq x \leq 2$

Figura 7: A reta $u_1 + u_2 = x$ é válida para $1 < x < 2$

Solução CDF (cont.)

No caso da figura acima

$$\text{Área} = \left\{ \; 1 - \frac{1}{2}(2-x)^2 \right.$$

Para $x > 2$

$$\text{Área} = \left\{ \; 1 \right.$$

Logo

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(2-x)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

e

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Solução CDF (cont.)

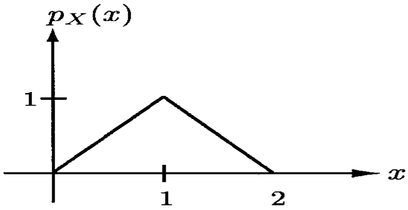


Figura 8: PDf da soma de duas variáveis independentes $U(0,1)$. Convolução

- $Z = X + Y$ onde X e Y são independentes.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(x + y \leq z)$$

Solução CDF (cont.)

- Fixar z e determinar todos os valores de (x, y) para os quais $x + y \leq z$ - Região de Integração

$$
\begin{aligned}
F_z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} p_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} p_X(x) \times p_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{z-x} p_Y(y)dy}_{F_Y(z-x)} dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dF_Z(z)}{dz} &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \frac{dF_Y(z-x)}{dz} dx \\
\downarrow \\
p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \times p_Y(z-x)dx
\end{aligned}
$$

Solução CDF (cont.)

ou

$$\boxed{p_Z(z) = p_X * p_Y}$$

- $$\begin{aligned} W &= X \\ Z &= g(X,Y) \end{aligned}$$

  Encontrar a PDf conjunta de (W,Z)

  $$p_{W,Z}\left\{\begin{array}{lcllcl} W &=& h(X,Y) & \rightarrow & W &=& X \\ Z &=& g(X,Y) & \rightarrow & Z &=& g(X,Y) \end{array}\right.$$

Solução Variável Auxiliar (cont.)

- Usando a notação matricial, podemos escrever o seguinte

$$\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{G \to G^{-1} \text{ existe}} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Obs.: Lembrando que para o caso $Y = 2X$, onde $X \sim U(1,2)$

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= p_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| \\ &= p_X\left(\frac{y}{2}\right) \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2D - Compressão, expansão e rotação.

- Exemplo: Considere $U_1 \sim U(0,1)$ e $U_2 \sim U(0,1)$ e

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \frac{U_1+U_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

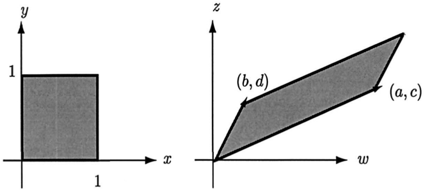


Figura 9: Mapa das Transformações.

Solução Variável Auxiliar (cont.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow det(\bullet) = 1 \times \frac{1}{2} - 0 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

e portanto

$$p_{W,Z}(w,z) = p_{X,Y}\left(G^{-1}\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}\right)\left|det(G^{-1})\right|$$

- Exemplo $\left\{\begin{array}{lcl} W & = & \sigma_W X \\ Z & = & \sigma_Z Y \end{array}\right.$ $\quad X, Y \sim$ Gaussiana Bivariada

  Podemos escrever

$$\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_W & 0 \\ 0 & \sigma_Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

  onde

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_W} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_Z} \end{bmatrix} \rightarrow det(G^{-1}) = \frac{1}{\sigma_W \sigma_Z}$$

Solução Variável Auxiliar (cont.)

e

$$G^{-1}\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W}{\sigma_W} \\ \frac{Z}{\sigma_Z} \end{bmatrix}$$

Calculando a probabilidade conjunta, temos

$$\begin{aligned}
p_{W,Z}(w,z) &= \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{w}{\sigma_W}\right)^2 - 2\rho\frac{w}{\sigma_W}\frac{z}{\sigma_Z} + \left(\frac{z}{\sigma_Z}\right)^2\right]}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\frac{1}{\sigma_W\sigma_Z} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{w}{\sigma_W}\right)^2 - 2\rho\frac{w}{\sigma_W}\frac{z}{\sigma_Z} + \left(\frac{z}{\sigma_Z}\right)^2\right]}}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)\sigma_W^2\sigma_Z^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi det^{\frac{1}{2}}(C)} e^{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}^T C^{-1}\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}}
\end{aligned}$$

com $-\infty < w < \infty$, $-\infty < z < \infty$ e onde

$$C = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma_W\sigma_Z \\ \rho\sigma_W\sigma_Z & \sigma_Z^2 \end{bmatrix}$$

que é a matriz de covariância

Mais de Transformações

Dado

$$
\begin{aligned}
W &= g(X, Y) \\
Z &= h(X, Y)
\end{aligned}
$$

$$
p_{W,Z}(w, z) = p_{X,Y}\left(g^{-1}(w, z), h^{-1}(w, z)\right) \times \underbrace{\left| det \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, z)} \right|}_{\text{Jacobiano}}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
x &= g^{-1}(w, z) \\
y &= h^{-1}(w, z)
\end{aligned}
$$

- Exemplo: Considere

$$\begin{array}{rclcrcl} X & \sim & N(0,1) & & W & = & X \\ Y & \sim & N(0,1) & & Z & = & \frac{Y}{X} \end{array}$$

Solução

$$\begin{aligned} x &= w \\ y = & \quad wz \end{aligned}$$

logo

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & w \end{bmatrix}$$

e

$$\left| det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,z)}\right) \right| = |w|$$

Mais de Transformações (cont.)

Podemos assim calcular

$$\begin{aligned} p_{W,Z}(w,z) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\bigg|_{x=w,y=wz} \times |w| \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(w^2+w^2z^2)} \times |w| \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}w^2(1+z^2)} \times |w| \end{aligned}$$

com $-\infty < w < \infty$ e $-\infty < z < \infty$.

Mais de Transformações (cont.)

Para a PDF de $\frac{Y}{X}$

$$
\begin{aligned}
p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}w^2(1+z^2)} \times |w| dw \\
&= 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}w^2(1+z^2)} \times |w| dw \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} w e^{-\frac{1}{2}w^2(1+z^2)} dw \\
&= \frac{1}{\pi} \left. \frac{e^{-\frac{1}{2}(1+z^2)w^2}}{-(1+z^2)} \right|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\pi(1+z^2)}
\end{aligned}
$$

que é a distribuição de Cauchy.

Mais de Transformações (cont.)

- Exemplo: Se $X \sim N(0, \sigma^2)$, $Y \sim N(0, \sigma^2)$ e X e Y são independentes então

$$\begin{array}{rclcccc} R & = & \sqrt{x^2+y^2}, & R & \geq & 0 & \\ \Theta & = & arctg\left(\frac{Y}{X}\right), & 0 & \leq & \theta & < & 2\pi \end{array}$$

Repare que existe aqui uma transformação de variáveis e que $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, logo

$$det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right) = det\left(\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}\right) = r \geq 0$$

A conjunta de (x, y) pode ser escrita da seguinte maneira

$$p_{X,Y} = p_X(x) \times p_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}$$

Mais de Transformações (cont.)

Finalmente, podemos escrever

$$p_{R,\Theta} = \begin{cases} \underbrace{\frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\sigma^2}}}_{p_R(r)} \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{p_\Theta(\theta)} & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

onde R tem distribuição de Rayleigh e $\theta \sim U(0, 2\pi)$ (R e θ são independentes).

Valores Esperados

- O valor esperado é

$$E\left[\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{bmatrix}$$

- Se $E(Z)$ se $Z = g(X, Y)$?

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z p_Z(z) dz \quad \rightarrow \text{ cálculo de } p_Z(z)$$

ou

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Valores Esperados (cont.)

- Exemplo: VAs independentes

$$\begin{aligned}
E_{X,Y}(XY) &= \int\int xyp_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int\int xyp_X(x)p_Y(y)dxdy \\
&= \int xp_X(x)dx \int yp_Y(y)dy \\
&= E_X(x) \times E_Y(y)
\end{aligned}$$

- Covariância

$$cov(x,y) = E_{X,Y}\left[(x - E_X(x))\,(y - E_Y(y))\right] = E_{X,Y}(xy) - E_X(x) \times E_Y(y)$$

Valores Esperados (cont.)

- Exemplo: Gaussiana Bivariada

$$E_X(x) = E_Y(y) = 0$$

e

$$cov(X, Y) = E_{X,Y}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2\rho xy+y^2)} dxdy$$

Note que

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \times Var(Y)}}$$

repare que podemos fazer a predição de Y a partir de X.

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_N(s) \end{bmatrix}$$

A PDF conjunta é:

$$\begin{cases} p_{X_1,\dots,X_N}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \geq & 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1,\dots,X_N}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_N & = & 1 \end{cases}$$

$$P(A) = \int \int \cdots \int_A p_{\underline{X}}(\underline{x}) dx$$

VAs Multidimensionais (cont.)

- A PDF multidimensional mais importante é a gaussiana

$$p_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}} det^{\frac{1}{2}}(\underline{C})} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^T \underline{C}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})}$$

onde

$$\underline{\mu} = E_{\underline{X}}((\underline{x})) = \begin{bmatrix} E_{X_1}(x_1) \\ \vdots \\ E_{X_N}(x_N) \end{bmatrix}$$

e

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & \dots & cov(X_1, X_3) & \dots & cov(X_1, X_N) \\ cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \dots & \dots & cov(X_2, X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ cov(X_N, X_1) & \dots & \dots & \dots & Var(X_N) \end{bmatrix}$$

Podemos escrever

$$
\begin{aligned}
X &\sim N(\underline{\mu}, \underline{C}) \\
\underline{C} &= E_{\underline{X}}\left[(\underline{x}-\underline{\mu})(\underline{x}-\underline{\mu})^T\right]
\end{aligned}
$$

Para achar a marginal $p_{X_1}(x_1)$

$$
\begin{aligned}
p_{X_1} &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} p_{\underline{X}}(\underline{x})dx_2\ldots dx_N \\
p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} p_{\underline{X}}(\underline{x})dx_3\ldots dx_N
\end{aligned}
$$

$X_1, X_2, \ldots, X_N$ são independentes se e somente se

$$
p_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1,x_2,\ldots,x_N) = p_{X_1}(x_1)\times p_{X_2}(x_2)\ldots p_{X_N}(x_N)
$$

Exemplo: Independência de $N(\underline{\mu}, \underline{C})$. Basta verificar $\underline{C}$!

VAs Multidimensionais (cont.)

- Se $\underline{C}$ é diagonal - não correlacionadas e por serem gaussianias, independentes.

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(\underline{C}) = \prod_{i=1}^{N} \sigma_i^2$$

- Calculando a inversa

$$\underline{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sigma_N^2} \end{bmatrix}$$

- Finalmente

$$
\begin{aligned}
p_{\underline{X}}(\underline{x}) &= \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}\left(\prod_{i=1}^{N}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^T \underline{C}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})} \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}\left(\prod_{i=1}^{N}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \\
&= \prod_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i-\mu_i)^2}}_{N(\mu_i,\sigma_i^2)} \\
&= \prod_{i=1}^{N} p_{X_i}(x_i)
\end{aligned}
$$

Mais Transformações

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2, \ldots, X_N) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2, \ldots, X_N) \\ &\vdots \\ Y_N &= g_N(X_1, X_2, \ldots, X_N) \end{aligned}$$

Se a transformação for $1 \leftrightarrow 1$

$$p_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = p_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(g_1^{-1}(y), g_2^{-1}(y), \ldots, g_n^{-1}(y)) \underbrace{\left| \left(\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \right) \right|}_{\text{Jacobiano}}$$

Exemplo: $X \sim N(\underline{\mu}, \underline{C})$. Considere que

$$\underline{Y} = \underline{G}\underline{X} \longrightarrow \underline{X} = \underline{G}^{-1}\underline{Y}$$

Solução:

$$\begin{aligned}
p_{\underline{Y}}(y) &= p_{\underline{X}}(\underline{G}^{-1}y) \times \left|det(\underline{G}^{-1})\right| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} det^{\frac{1}{2}}(\underline{C})} e^{-\frac{1}{2}(\underline{G}^{-1}\underline{y}-\underline{\mu})^T \underline{C}^{-1}(\underline{G}^{-1}\underline{y}-\underline{\mu})} \times \left|det(\underline{G}^{-1})\right| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} det^{\frac{1}{2}}(\underline{C}) \left|det(\underline{G})\right|} e^{-\frac{1}{2}(\underline{G}^{-1}(\underline{y}-\underline{G}\underline{\mu}))^T \underline{C}^{-1}(\underline{G}^{-1}(\underline{y}-\underline{G}\underline{\mu}))}
\end{aligned}$$

mas

$$\left|det(\underline{G})\right| = \sqrt{det^2(\underline{G})} = \sqrt{det(\underline{G})det(\underline{G}^T)}$$

e

$$(\underline{G}^{-1}(\underline{y} - \underline{G}\underline{\mu}))^T = (\underline{y} - \underline{G}\underline{\mu})^T(\underline{G}^{-1})^T$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
p_{\underline{Y}}(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} det^{\frac{1}{2}}(\underline{C\,G\,G}^T)} e^{-\frac{1}{2}(\underline{y}-\underline{G}\underline{\mu})^T \underbrace{(\underline{G}^{-1})^T C^{-1} \underline{G}^{-1}}_{(\underline{GCG}^T)^{-1}} (\underline{y}-\underline{G}\underline{\mu})} \\
\underline{Y} &\sim N(\underline{G}\underline{\mu}, \underline{G\,C\,G}^T)
\end{aligned}
$$

Mais Valores Esperados

$$E_{\underline{X}}(\underline{x}) = E_{X_1,X_2,\ldots,X_N}\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} E_{X_1}(x_1) \\ \vdots \\ E_{X_N}(x_N) \end{bmatrix}$$

e

$$E_{X_1,\ldots,X_N}\left[g(X_1,\ldots,X_N)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(X_1,\ldots,X_N)p_{X_1,\ldots,X_N}(x_1,\ldots,x_N)dx_1\ldots dx_N$$

Exemplo: Média de VAs IID (mesma PDF marginal). Considere

$$p_{X_1} = p_{X_2} = \ldots = p_{X_N} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_i^2}$$

e

$$E(x_i) = \mu$$

Mais Valores Esperados (cont.)

O objetivo é lidar com

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Solução

- Média

$$E_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(\bar{X}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_{X_i}(X_i) = \mu$$

Mais Valores Esperados (cont.)

- Variância

$$
\begin{aligned}
Var(\bar{X}) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} Var(X_i) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{N}
\end{aligned}
$$

Note que $N \to \infty \to Var(\bar{X}) = 0$ e $\bar{X} \to \mu$