Introdução aos Processos Estocásticos - Função Massa de Probabilidade Condicional

Eduardo M. A. M. Mendes

DELT - UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais
emmendes@cpdee.ufmg.br

Objetivo: Traduzir os resultados para variáveis aleatórias

Exemplo Kay, página 217

- Experimento - Primeira parte: escolha de uma moeda. $\underbrace{\text{Moeda 1}}_{p_1}$ ou $\underbrace{\text{Moeda 2}}_{p_2}$, onde p_1 e p_2 são probabilidades de sair cara.

  X - variável aleatória que descreve a primeira parte

$$X = \begin{cases} 1 & \rightarrow & \text{Moeda 1} \\ 2 & \rightarrow & \text{Moeda 2} \end{cases}, \text{ com } \Omega_X = \{1, 2\}$$

e

$$p_X[i] = \begin{cases} \alpha, & i = 1 \\ 1 - \alpha, & i = 2 \end{cases} \quad \text{com } 0 < \alpha < 1$$

- Experimento - Segunda parte: Jogar a moeda escolhida 4 vezes e contar o número de caras.

$$Y = \text{VA que descreve o resultado do número de caras,}$$

logo: $\Omega_Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A representação gráfica é

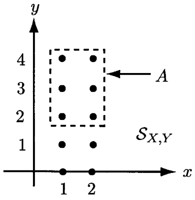

Figura 1: Exemplo de Mapa - $A =$ evento de 2 ou mais caras

Função Massa de Probabilidade Condicional (cont.)

- A probabilidade do evento A é dada por

$$P(A) = \sum_{\{(i,j):(i,j)\in A\}} p_{X,Y}[i,j] = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{4} p_{X,Y}[i,j]$$

- Mas

$$\begin{aligned} p_{X,Y}[i,j] &= P[X=i, Y=j] \text{ Conjunta} \\ p_X[i] &= P[X=i] \text{ Marginal} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} p_{X,Y}[i,j] &= P[Y=j|X=i] \times P[X=i] \text{ Condicional} \\ &= P_{Y|X}[j,i] \times p_X[i] \end{aligned}$$

Função Massa de Probabilidade Condicional (cont.)

- Sabemos que o número de caras tem uma distribuição binomial, logo

$$\underbrace{P[\underbrace{Y=j}_{j=0,1,2,3,4} \mid \underbrace{X=i}_{i=1,2}]}_{p_{Y|X}[j|i]} = \binom{4}{j} p_i^j (1-p_i)^{4-j}$$

- Reescrevendo, temos:

$$\underbrace{p_{X,Y}[i,j]}_{\text{conjunta}} = \underbrace{p_{Y|X}[j|i]}_{\text{condicional}} \times \underbrace{p_X[i]}_{\text{marginal}}$$

ou

$$p_{Y|X}[j|i] = \frac{p_{X,Y}[i,j]}{p_X[i]}$$

No caso do exemplo;

$$
\begin{aligned}
p_{X,Y}[i,j] &= \binom{4}{j} p_1^j (1-p_1)^{4-j} \underbrace{\alpha}_{i=1} \\
& \binom{4}{j} p_1^j (1-p_1)^{4-j} \underbrace{(1-\alpha)}_{i=2}
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
P[A] &= \sum_{j=2}^{4} p_{X,Y}[1,j] + \sum_{j=2}^{4} p_{X,Y}[2,j] \\
&= \sum_{j=2}^{4} \binom{4}{j} p_1^j (1-p_1)^{4-j} \alpha + \sum_{j=2}^{4} \binom{4}{j} p_1^j (1-p_1)^{4-j} (1-\alpha)
\end{aligned}
$$

Função Massa de Probabilidade Condicional (cont.)

Exemplo Kay, página 220

- Dois dados

$$\begin{array}{lcl} \text{dado 1} & \rightarrow & 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \text{dado 2} & \rightarrow & 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array}$$

- Experimento: jogar os dois e pegar a soma dos resultados
- Problema: Qual é a PMF condicional sabendo-se que a soma é par?

$$\begin{array}{rcl} Y & \rightarrow & \text{variável aleatória soma} \\ \Omega_Y & = & \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ X & \rightarrow & \text{variável aleatória} \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & \rightarrow & \text{par} \\ 0 & \rightarrow & \text{ímpar} \end{array} \right. \end{array}$$

Função Massa de Probabilidade Condicional (cont.)

$$
\begin{aligned}
p_{Y|X}[j|1] &= ? \\
P_{Y|X}[j|0] &= ?
\end{aligned}
$$

Podemos facilmente construir a tabela dos resultados

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=1$	2	3	4	5	6	7
$i=2$	3	4	5	6	7	8
$i=3$	4	5	6	7	8	9
$i=4$	5	6	7	8	9	10
$i=5$	6	7	8	9	10	11
$i=6$	7	8	9	10	11	12

- Total de resultados $= 36$.
- Total de resultados pares $= 18$
- Total de resultados ímpares $= 18$.

Note que

$$
\begin{aligned}
P_{Y|1} &= \frac{p_{X,Y}[1,j]}{p_X[1]}, \quad j = 2, 4, 6, \ldots, 12 \text{ (par)} \\
&= \frac{p_Y[j]}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{N_j}{36}}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\overbrace{N_j}^{\text{número de ocorrências da soma } = j}}{18}
\end{aligned}
$$

Função Massa de Probabilidade Condicional (cont.)

Usando a tabela para contar, temos

$$\frac{p_{Y|X}[j|1] = \begin{cases} \frac{1}{18}, & j = 2 \\ \frac{3}{18}, & j = 4 \\ \frac{5}{18}, & j = 6 \\ \frac{5}{18}, & j = 8 \\ \frac{3}{18}, & j = 10 \\ \frac{1}{18}, & j = 12 \end{cases}}{1}$$

Do mesmo modo

$$\frac{p_{Y|X}[j|0] = \begin{cases} \frac{2}{18}, & j = 3, 11 \\ \frac{4}{18}, & j = 5, 9 \\ \frac{6}{18}, & j = 7 \end{cases}}{1}$$

Obs.: $p_{Y|X}[j|0] \neq 1 - p_{Y|X}[j|1]$

Relações Importantes

1) Se a PMF conjunta $p_{X,Y}[y_j, x_i]$ é conhecida, então:

$$
\begin{aligned}
p_{Y|X}[y_j|x_i] &= \frac{p_{X,Y}[x_i, y_j]}{\sum_j p_{X,Y}[x_i, y_j]} \\
p_{X|Y}[x_i|y_j] &= \frac{p_{X,Y}[x_i, y_j]}{\sum_i p_{X,Y}[x_i, y_j]}
\end{aligned}
$$

2)

$$p_{X|Y}[x_i, y_j] = \frac{p_{Y|X}[y_j|x_i] \times p_X[x_i]}{p_Y[y_j]}$$

3) Bayes

$$p_{Y|X}[y_j|x_i] = \frac{p_{X|Y}[x_i|y_j] \times p_Y[y_j]}{\sum_j p_{X|Y}[x_i, y_j] \times p_Y[y_j]}$$

4)

$$
\begin{aligned}
p_{X,Y}[x_i, y_j] &= p_{Y|X}[y_j|x_i] \times p_X[x_i] \\
p_{X,Y}[x_i, y_j] &= p_{X|Y}[x_i|y_j] \times p_Y[y_j]
\end{aligned}
$$

5) Lei da Probabilidade Total

$$
\underbrace{p_Y[y_j]}_{\text{outra marginal}} = \sum_i \underbrace{p_{Y|X}[y_j|x_i]}_{\text{condicional}} \times \underbrace{p_X[x_i]}_{\text{marginal}}
$$

Cálculo da PMF para a soma de VAs

Considere X e Y variáveis discretas em $\mathbb{Z}$ e $Z = X + Y$.

Idéia: Condicionar para depois de descondicionar.

Solução

- Suponha X é conhecido e $X = i$, logo

$$\underbrace{Z = \underbrace{i}_{\text{uma constante}} + Y}_{\text{Transformação de } Y \text{ em } Z}$$

- Sabe-se que :

$$\begin{array}{lll} \text{Se} & U & \text{tem PMF } p_U[j] \\ & U + i & \text{tem PMF } p_U[j - i] \end{array}$$

- Logo a PMF de Z em $Z = j$ é

$$p_{Z|X}[j|i] = p_{Y|X}[j-i, i]$$

Para achar a $p_Z[j]$ basta aplicar a Lei da Probabilidade Total

$$\begin{aligned} p_z[j] &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_{Z|X}[j,i] \times p_X[i] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_{Y|X}[j-i,i] \times p_X[i] \quad \text{independência} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_Y[j-i] \times p_X[i] \quad \text{convolução discreta} \end{aligned}$$

Cálculo da PMF para a função máximo

$$Z = max(X, Y)$$

supondo:

- X e Y são variáveis discretas em $\mathbb{Z}$.
- X e Y são independentes.
- as marginais de X e Y são conhecidas.

Soluçao: Usando a Lei de Probabilidade Total, temos:

$$p_Z[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_{Z|X}[k|i] \times \underbrace{p_X[i]}_{\text{conhecida}}$$

Determinar $p_{Z|X}$ para $X = i$, mas

$$Z = max(i, Y) = \underbrace{g(Y)}_{\text{Só uma variável}}$$

Cálculo da PMF para a função máximo (cont.)

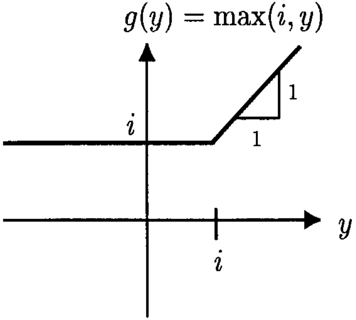

Figura 2: Exemplo: $Z = max(i, Y)$

Cálculo da PMF para a função máximo (cont.)

$$P_{Z|X}[k|i] = \begin{cases} 0, & k = \ldots, i-2, i-1 \\ \sum_{j=-\infty}^{i} p_{Y|X}[j|i], & k = i \\ p_{Y|X}[k,i], & k = i+1, i+2, \ldots \end{cases}$$

Cálculo da PMF para a função máximo (cont.)

Logo:

$$
\begin{aligned}
p_Z[k] &= \sum_{i=-\infty}^{k-1} p_{Z|X}[k|i] \times p_X[i] + \\
&\quad p_{Z|X}[k|k] \times p_X[k] \\
&\quad \sum_{i=k+1}^{\infty} p_{Z|X}[k|i] \times p_X[i] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k-1} p_{Y|X}[k|i] \times p_X[k] + \\
&\quad \sum_{j=-\infty}^{k} p_{Y|X}[j|k] \times p_X[k] \quad {\color{red} i = k}
\end{aligned}
$$

Usando a independência de X e Y, temos:

Cálculo da PMF para a função máximo (cont.)

$$
\begin{aligned}
p_Z[k] &= \sum_{i=-\infty}^{k-1} p_Y[k] \times p_X[i] + \sum_{j=-\infty}^{k} p_Y[j] \times p_X[k] \\
&= p_Y[k] \sum_{i=-\infty}^{k-1} p_X[i] + p_X[k] \sum_{j=-\infty}^{k} p_Y[j] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k-1} p_{X,Y}[i,k] + \sum_{j=-\infty}^{k} p_{X,Y}[k,j]
\end{aligned}
$$

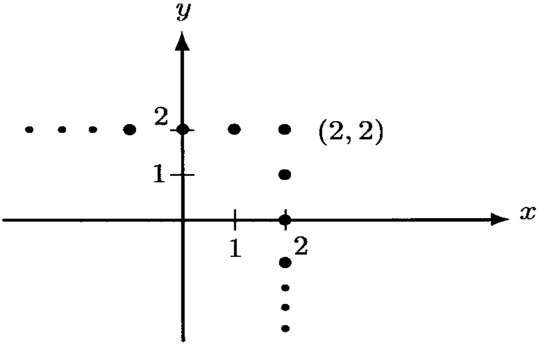

Figura 3: Pontos da PMF conjunta

Mais definições

Valor Esperado e Variância

- Valor Esperado (Média) da Probabilidade Condicional

$$\underbrace{E_{Y|X}[Y|x_i]}_{\text{é uma função de } x_i} = \sum_j y_j p_{Y|X}[y_j, x_i]$$

e, portanto, $E_{Y|X}[g(Y)|x_i]$

- Variância da Probabilidade Condicional

$$Var(Y|x_i) = \sum_j \left(y_j - E_{Y|X}[Y|x_i]\right)^2 \times p_{Y|X}[y_j, x_i]$$

Exemplo Kay - página 230

- Experimento: dois dados

$$\begin{aligned} \text{dado } 1 &\rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \text{dado } 2 &\rightarrow 2, 2, 2, 3, 3, 3 \end{aligned}$$

- Evento: Face Observada
- Problema: Valor Esperado da face

Solução: Condicional pois depende do dado.

$$X \rightarrow \text{ variável aleatória} \begin{cases} 1 & \rightarrow \text{ dado } 1 \\ 2 & \rightarrow \text{ dado } 2 \end{cases}$$

$$Y \rightarrow \text{ face observada}$$

$$\begin{aligned} E_{Y|1} &= ? \\ E_{Y|2} &= ? \end{aligned}$$

Exemplo Kay - página 230 (cont.)

- Se o dado é o 1, a PMF condicional é:

$$p_{Y|X}[j|1] = \frac{1}{6}, \quad j = 1, \ldots, 6$$

- Se o dado é o 2,

$$P_{Y|X}[j|2] = \frac{1}{2}, \quad j = 2, 3$$

- Usando a definição:

$$\begin{aligned} E_{Y|X}[Y|1] &= \sum_{j=1}^{6} j p_{Y|X}[j|1] = \frac{1}{6} \times (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \\ E_{Y|X}[Y|2] &= \sum_{j=2}^{3} j p_{Y|X}[j|2] = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

- $E_Y[Y] = ?$
  - Usando a propriedade 4, temos:

$$p_{X,Y}[i,j] = p_{Y|X}[j|1] \times \underbrace{p_X[i]}_{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{12}, & i = 1; \quad j = 1, 2, \ldots, 6 \\ \frac{1}{4}, & i = 2; \quad j = 2, 3 \end{cases}$$

  - Usando a propriedade 5 e o resultado acima

$$p_Y[j] = \sum_{i=1}^{2} p_{Y,X}[i,j] = \begin{cases} p_{X,Y}[1,j] & = & \frac{1}{12}, & j = 1, 4, 5, 6 \\ p_{X,Y}[1,j] + p_{X,Y}[2,j] & = & \frac{1}{12} + \frac{1}{4}; & j = 2, 3 \end{cases}$$

Exemplo Kay - página 230 (cont.)

- Finalmente

$$E_Y[Y] = \sum_{j=1}^{6} j \times p_Y[j] = 1 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{1}{12} = 3$$

Repare:

$$E_Y[Y] = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = 3$$

ou seja

$$E_Y[Y] = E_{Y|X}[Y|1] \times p_X[1] + E_{Y|X}[Y|2] \times p_X[2]$$

- Podemos generalizar

$$\boxed{E_Y[Y] = \sum_{i} E_{Y|X}[Y|x_i] \times p_X[x_i]}$$

- Prova

$$\begin{aligned}
E_Y[Y] &= \sum_i \left(\sum_j y_j p_{Y|X}[y_j|x_i] \right) \times p_X[x_i] \\
&= \sum_i \sum_j y_j \frac{p_{X,Y}[x_i, y_j]}{p_X[x_i]} \times p_X[x_i] \\
&= \sum_j y_j \sum_i p_{X,Y}[x_i, y_j] \\
&= \sum_j y_j p_Y[y_j] \\
&= E_Y[Y]
\end{aligned}$$

Exemplo Kay - página 230 (cont.)

- Em suma

$$
\begin{aligned}
E_Y[Y] &= E_X[g(X)] \\
&= E_X\left[E_{Y|X}[Y|X]\right]
\end{aligned}
$$

Variáveis Aleatórias N-dimensionais

- As mesmas idéias dos capítulos anteriores podem ser estendidas para variáveis aleatórias N-dimensionais

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_N(s) \end{bmatrix} \\
X &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Variáveis Aleatórias N-dimensionais (cont.)

- Transformações

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ &\vdots \\ y_N &= g_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) \end{aligned}$$

- Probabilidade

$$p_{Y_1,\ldots,Y_N}[y_1, \ldots, y_N] = \sum_{\{x_1,\ldots,x_N\}:g_1(x_1,\ldots,x_N)=y_1,\ldots,g_N(x_1,\ldots,x_N)=y_N} \cdots \sum p_{X_1,\ldots,X_N}[x_1, \ldots, x_N]$$

Variáveis Aleatórias N-dimensionais (cont.)

- Nos casos em que a transformação é $1 \leftrightarrow 1$

$$y = g(x) \quad \rightarrow \quad x = g^{-1}(y)$$

$$p_Y[y] \quad \rightarrow \quad p_X[g^{-1}(y)]$$

Se a transformação é linear

$$y = \underbrace{A}_{N \times N} x \quad \rightarrow \quad x = A^{-1} y$$

$$p_Y[y] \quad = \quad p_X[A^{-1} y]$$

Se Y tem dimensão menor do que N, acrescentar variáveis auxiliares

Exemplo

Com uma sequência de eventos de Bernoulli independentes

$$p_{X_1,\ldots,X_N} = p^{\sum_{i=1}^{N} k_i}(1-p)^{N-\sum_{i=1}^{N} k_i}$$

considere

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_2 &= X_1 + X_2 \\ Y_3 &= X_1 + X_2 + X_3 \end{aligned}$$

Logo:

Exemplo (cont.)

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X \\
X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} Y
\end{aligned}
$$

- Y - 3 Bernoullis com

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3$$

logo

$$\Omega_{Y_1,Y_2,Y_3} = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(0,1,2),(1,1,2),(1,2,2),(1,2,3)\}$$

Exemplo (cont.)

- Usando a inversa

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= -y_1 + y_2 \\ x_3 &= -y_1 + y_3 \end{aligned}$$

logo

$$p_{Y_1.Y_2,Y_3}[l_1, l_2, l_3] = p_{X_1,X_2,X_3}[l_1, l_2 - l_1, l_3 - l_1]$$

mas

$$p_{X_1,X_2,X_3}[k_1, k_2, k_3] = p^{k_1+k_2+k_3}(1-p)^{3-(k_1+k_2+k_3)}$$

logo

$$p_{Y_1,Y_2,Y_3}[l_1, l_2, l_3] = p^{l_3}(1-p)^{3-(l_3)}$$

Exemplo (cont.)

- Verificando em Ω_{Y_1,Y_2,Y_3}, temos

$$
\begin{aligned}
l_3 = 0 \quad &\rightarrow \quad (0,0,0)\\
l_3 = 1 \quad &\rightarrow \quad (0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\\
l_3 = 2 \quad &\rightarrow \quad (0,1,2),(1,1,2),(0,2,2)\\
l_3 = 3 \quad &\rightarrow \quad (1,2,3)
\end{aligned}
$$

e

$$\sum p_{Y_1,Y_2,Y_3} = 1(1-p)^3 + 3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p) + p^3 = 1$$

- PMF Binomial como resultado da soma de variáveis independentes de Bernoulli
- Usando a função característica para uma variável de Bernoulli

$$\begin{aligned}\phi_X(\omega) &= E_X[e^{\jmath\omega X}] \\ &= e^{\jmath\omega 1}p + e^{\jmath\omega 0}(1-p) \\ &= pe^{\jmath\omega} + (1-p)\end{aligned}$$

- Como as variáveis são independentes, podemos escrever

$$p_Y[k] = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\prod_{i=1}^{N} \phi_{X_i}(\omega)}_{\text{convolução}\to\text{produto}} e^{-\jmath\omega k} \frac{d\omega}{2\pi}$$

PMF Binomial como resultado da soma de variáveis (cont.)

- Usando o Teorema da Binomial

$$
\begin{aligned}
p_Y[k] &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \left(pe^{\jmath\omega}\right)^i (1-p)^{N-i} \, e^{-\jmath\omega k} \frac{d\omega}{2\pi} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{e^{\jmath\omega i} e^{-\jmath\omega k}}_{\text{Ortogonais - } \neq 0 \to k=i} \frac{d\omega}{2\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N
\end{aligned}
$$

Valores Esperados

- $E_X[X] = E_{X_1,\ldots,X_N}\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ \ldots \\ X_N \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ \ldots \\ E[X_N] \end{bmatrix}$. Considere também

$$E_{X_1,\ldots,X_N}\left[\sum_{i=1}^{N} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i E_{X_i}[X_i]$$

Em notação vetorial é

$$E_X[aX] = a^T E_X[X] \text{ onde } a = [a_1 \ldots a_N]^T$$

- Considere $Var[X_1 + X_2] = var[X_1] + Var[X_2] + 2cov[X_1, X_2]$. Para estender para $Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]$, vamos usar a definição

$$Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E_X\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i - E_X\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]\right)^2\right] = E_X\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i - E_{X_i}[X_i]\right)^2\right]$$

Chamando $U_i = X_i - E_{X_i}[X_i]$, temos:

$$\begin{aligned} var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] &= E_X\left[\left(\sum_{i=1}^{N} U_i\right)^2\right] \\ &= E_X\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} U_i U_j\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \underbrace{E_X\left[U_i U_j\right]}_{cov[X_i, X_j]} \end{aligned}$$

Logo $Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} cov[X_i, X_j]$, lembrando que $cov[X_i, X_i] = Var[X_i]$ e que $cov[X_i, X_j] = cov(X_j, X_i]$.

- Se $cov[X_i, X_j]_{i \neq j} = 0$, ou seja, não são correlacionados, podemos escrever

$$Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} Var[X_i]$$

- Caso $N = 2$

$$Var\left[X_1, X_2\right] = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} cov[X_i, X_j]$$

Definindo C_X como uma matriz 2×2 da seguinte maneira

$$C_X = \begin{bmatrix} Var[X_1] & cov[X_1, X_2] \\ cov[X_2, X_1] & Var[X_2] \end{bmatrix},$$

teremos a Matriz de Covariância e

$$Var[X_1 + X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} C_X \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Propriedades da Matriz de Covariância
  1) Simetria: $C_X = C_X^T$

$$C_X = \begin{bmatrix} Var[X_1] & cov[X_1, X_2] & \dots & cov[X_1, X_N] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cov[X_{N-1}, X_1] & \dots & \dots & cov[X_{N-1}, X_N] \\ cov[X_N, X_1] & \dots & \dots & Var[X_N] \end{bmatrix}$$

  2) C_X é definida positiva: $a^T C_X a > 0$. Isso implica que $Var[\sum X_i] > 0$.
  3) A matriz de covariância para variáveis aleatórias não-correlacionadas é diagonal.
  4) A covariância de $Y = A_{M \times N, M \leq N} X$ é

$$C_Y = A C_X A^T$$

5) A matriz de covariância é diagonalizável

$$C_Y = \begin{bmatrix} Var[Y_1] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Var[Y_N] \end{bmatrix}$$

ou seja, podemos descorrelacionar.

- Momentos Conjuntos e Função Característica

$$E_{X_1,\dots,X_N}\left[X_1^{l_1}X_2^{l_2}\dots X_N^{l_N}\right] = \sum_{x_1}\sum_{x_2}\dots\sum_{x_N} x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_N^{l_N}\, p_{X_1,\dots,X_N}[x_1,x_2,\dots,x_N]$$

$$\phi_{X_1,\dots,X_N}(\omega_1,\dots,\omega_N) = E_{X_1,\dots,X_N}\left[e^{\jmath(\omega_1 X_1+\omega_2 X_2+\dots+\omega_N X_N)}\right]$$

- Probabilidade Condicional

$$p_{X_N|X_1\dots X_{N-1}}[x_N|x_1\dots x_{N-1}] = \frac{p_{X_1,\dots,X_N}[x_1,x_2,\dots,x_N]}{p_{X_1,\dots,X_{N-1}}[x_1,x_2,\dots,x_{N-1}]}$$

Exemplo

	-8	0	2	6	$p_{X_1}[x_1]$
-8	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
6	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{X_2}[x_2]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

claramente cada um dos eventos tem probabilidade igual a $\frac{1}{4}$.

Determinar a transformação que gera variáveis aleatórias não correlacionadas.

Solução:

Exemplo (cont.)

- Calculando os valores esperados

$$
\begin{aligned}
E_{X_1}[X_1] &= E_{X_2}[X_2] = \frac{1}{4} \times (-8) + \frac{1}{4} \times (0) + \frac{1}{4} \times (2) + \frac{1}{4} \times (6) = 0 \\
E_{X_1}[X_1^2] &= E_{X_2}[X_2^2] = \frac{1}{4} \times (-8)^2 + \frac{1}{4} \times (0)^2 + \frac{1}{4} \times (2)^2 + \frac{1}{4} \times (6)^2 = 26 \\
E_{X_1,X_2}[X_1 X_2] &= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} x_{1_i} x_{2_j} p_{X,Y}[x_i, y_j] = 6 \\
Var[X_1] &= Var[X_2] = 26 \\
cov[X_1, X_2] &= 6 \\
C_X &= \begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo (cont.)

- Calculando os autovalores de C_X

$$\begin{aligned} det\left(\lambda I - C_x\right) &= det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 26 & -6 \\ -6 & \lambda - 26 \end{bmatrix}\right) \\ &= (\lambda - 26)^2 - 36 = 0 \begin{cases} \lambda_1 &= 20 \\ \lambda_2 &= 32 \end{cases} \end{aligned}$$

- Calculando os autovetores: $C_X v = \lambda v \rightarrow (C_X - \lambda I)v = 0.$
  -

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fazendo $v_1 = 1$ resulta em $v_2 = -1$. Normalizando temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Exemplo (cont.)

- $$\left(\begin{bmatrix}26 & 6\\ 6 & 26\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}32 & 0\\ 0 & 32\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}-6 & 6\\ 6 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

  Fazendo $v_1 = 1$ resulta em $v_2 = 1$. Normalizando temos:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

O autovetor resultante é

$$V = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

e

$$A = V^T = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

Exemplo (cont.)

Donde podemos escrever a seguinte relação

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} X_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} X_2 \\
Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} X_2
\end{aligned}
$$

Note que

- $E_Y[Y] = E_Y[AX] = AE_X[X] = 0$
- $C_Y = AC_XA^T = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}.$

PMF Condicional

- Lembrando

$$p_{X_N|X_1,\ldots,X_{N-1}}[x_N|x_1,\ldots,x_{N-1}] = \frac{p_{X_1,\ldots,X_N}[x_1,\ldots,x_N]}{p_{X_1,\ldots,X_{N-1}}[x_1,\ldots,x_{N-1}]}$$

logo

$$p_{X_1,\ldots,X_N}[x_1,\ldots,x_N] = p_{X_N|X_1,\ldots,X_N}[x_n|x_1,\ldots,x_{N-1}] \times p_{X_1,\ldots,X_{N-1}}[x_1,\ldots,x_{N-1}]$$

mas

$$\begin{aligned} p_{X_1,\ldots,X_{N-1}}[x_1,\ldots,x_{N-1}] &= p_{X_{N-1}|X_1,\ldots,X_{N-2}}[x_{N-1}|x_1,\ldots,x_{N-2}] \\ &\quad \times p_{X_1,\ldots,X_{N-2}}[x_1,\ldots,x_{N-2}] \end{aligned}$$

- Generalizando

$$\begin{aligned} p_{X_1,X_2,\ldots,X_N}[\ldots] &= p_{X_N|X_1\ldots X_{N-1}}[\ldots] \times p_{X_{N-1}|X_1\ldots X_{N-2}}[\ldots] \times \\ &\quad \ldots \times p_{X_2|X_1}[\ldots] \times p_{X_1}[\ldots] \end{aligned}$$

PMF Condicional (cont.)

- Caso o processo seja de Markov, temos:

$$P_{X_N|X_1,\ldots,X_{N-1}}[\ldots] = P_{X_N|X_{N-1}}[\ldots] \quad N = 3, 4, 5, \ldots$$

- Exemplo: $X_N = \sum_{i=1}^{N} U_i$ onde U_i são independentes.

Seja $U_{i_{\{i=1\ldots N\}}}$ variáveis aleatórias independentes com

$$p_U[k] = \begin{cases} 1-p, & k=-1 \\ p, & k=1 \end{cases}$$

e

$$X_N = \sum_{i=1}^{N} U_i$$

Claramente:

$$X_N = X_{N-1} + U_N \rightarrow U_N = X_N - X_{N-1}$$

e

$$p_{X_1 \ldots X_N}[\ldots] = \prod_{i=1}^{N} p_{X_N|X_{N-1}} \quad \text{com } p_{X_1|X_1}[\ldots] = p_{X_1}[x_1]$$

Random Walk (cont.)

Mas:

$$\begin{array}{rcl} p_{X_N|X_{N-1}}[X_N|X_{N-1}] & = & p_{U_N}[X_N - X_{N-1}|X_{N-1}] \\ \text{usando a independência} & = & p_{U_N}[X_N - X_{N-1}] \\ & & \downarrow \\ & & p_U[X_N - X_{N-1}] \end{array}$$

Logo

$$p_{X1,X_2,\ldots,X_N}[x_1, x_2, \ldots, x_N] = \prod_{i=1}^{N} p_U[X_N - X_{N-1}]$$