Introdução aos Processos Estocásticos - Valores Esperados

Eduardo M. A. M. Mendes

DELT - UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais
emmendes@cpdee.ufmg.br

Definição

Para as VAs contínuas

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$

Algumas notações usadas para a esperança

$$E\{X\},\ EX,\ \int_\Omega X(\omega) dP(\omega),\ \int_\Omega X(\omega) P(d\omega),$$
$$\int XdP,\ \int X,\ \int_{-\infty}^{\infty} t\ dF_X(t),\ \int t\ dF_X$$

Exemplo: $X \sim U(0,1)$

$$E(x) = \int_0^1 x \times 1 \times dx = \frac{1}{2}\, x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Valores Esperados para algumas PDFs

Definição (cont.)

1) $X \sim U(a, b)$

$$E(x) = \frac{1}{2}(a + b)$$

2) $X \sim exp(\lambda)$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \left(xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

3) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ - simétrica em torno de μ, logo

$$E(x) = \mu$$

Definição (cont.)

4) Laplaciano - $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} e^{-\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}|x|} \quad -\infty < x < \infty$. Para que $E(x)$ exista é preciso que a seguinte integral exista

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x) dx < \infty \quad \text{abs. integrável}$$

No presente caso como sabemos que a pdf laplaciano é simétrica em torno do zero e que a integral existe, temos

$$E(x) = 0$$

Valor Esperado da Transformação

- Considere

$$Y = g(X)$$

onde X e Y são VAs contínuas. O valor esperado de Y é

$$\begin{aligned} E(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy \\ \downarrow & \\ E(g(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x) dx \end{aligned}$$

Valor Esperado da Transformação (cont.)

Exemplo: $g(x) = ax + b$

$$\begin{aligned} E(g(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) p_X(x) dx \\ &= \underbrace{a \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx}_{E(x)} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) dx}_{=1} \\ &= aE(x) + b \end{aligned}$$

- $E(x)$ é linear, logo:

$$E(a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)) = a_1 E(g_1(x)) + a_2 E(g_2(x))$$

Exemplo: $y = x^2$ com $X \sim N(0,1)$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1$$

Valor Esperado da Transformação (cont.)

- Se a VA é mista com PDF

$$p_X(x) = p_C(x) + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$

o valor esperado pode ser calculado por

$$\boxed{E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_C(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i}$$

- Variância

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 \, p_X(x) dx$$

que é o desvio quadrado médio da média.
Exemplo: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \underbrace{E(x)}_{\mu} \right)^2 \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$

Valor Esperado da Transformação (cont.)

Faço $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$
\begin{aligned}
Var(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 u^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} du \\
&= \sigma^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{2\pi}} du}_{=1} \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

Propriedades

1) $Var(c) = 0$
2) $Var(X + c) = Var(X)$
3) $Var(cX) = c^2 Var(X)$

Sabemos também que

- $Var(g_1(X) + g_2(X)) \neq Var(g_1(X)) + Var(g_2(X))$
- $Var(X) = \underbrace{E(X^2)}_{\text{segundo momento}} - E^2(X)$
- $E(X^r)$ - momento de r-ésima ordem

$$\begin{array}{lcl} \text{Se } E(X^s) < \infty & \rightarrow & E(X^r) < \infty \\ & \updownarrow & \text{para } r < s \\ \text{Se } E(X^r) = \infty & \rightarrow & E(X^s) = \infty \end{array}$$

Exemplo

Exemplo: $X \sim exp(\lambda)$

$$E[X^n] = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} dx \quad n = 1, 2, \ldots$$

Solução: Achar $E[X^n]$ como função $E[X^{n-1}]$. Para isso vamos resolver a integral acima por partes

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & x^n & \rightarrow & du & = & nx^{n-1}dx \\ dv & = & \lambda e^{-\lambda x} dx & \rightarrow & v & = & -e^{-\lambda x} \end{array}$$

portanto

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \underbrace{-x^n e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty -e^{-\lambda x} n x^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{\lambda} \underbrace{\int_0^\infty x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} dx}_{E(X^{n-1})} \end{aligned}$$

Exemplo (cont.)

Com esse resultado podemos calcular os momentos

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \frac{1}{\lambda} \\
E[X^2] &= \frac{2}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2} \\
E[X^2] &= \frac{3}{\lambda} \times \frac{2}{\lambda} = \frac{6}{\lambda^3} \\
&\vdots \\
E[X^n] &= \frac{n!}{\lambda^n}
\end{aligned}
$$

Funções Características

- Para achar momentos.
- Para achar PDfs de soma de VAs

$$\begin{aligned}\Phi_X(\omega) &= E[e^{\jmath\omega X}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)e^{\jmath\omega x}dx \\ E(g(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_X(x)dx\end{aligned}$$

Logo

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega)e^{-\jmath\omega x}d\omega$$

Para achar os momentos

$$E(X^n) = \frac{1}{\jmath^n}\frac{d^n\Phi_X(\omega)}{d\omega^n}\bigg|_{\omega=0}$$

Exemplo

Considere a exponencial

$$X \sim exp(\lambda)$$

com $p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
A Transformada de Fourier é:

$$\frac{\lambda}{\jmath\omega + \lambda} \xrightarrow{\text{trocando o sinal}} \frac{\lambda}{\lambda - \jmath\omega}$$

logo

$$\Phi_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - \jmath\omega}$$

e

$$\frac{d^n \Phi_X(\omega)}{d\omega^n} = \lambda \jmath^n n! (\lambda - \jmath\omega)^{-(n+1)}$$

Exemplo (cont.)

portanto

$$
\begin{aligned}
E(X^n) &= \frac{1}{\jmath^n} \frac{d^n \Phi_X(\omega)}{d\omega^n}\bigg|_{\omega=0} \\
&= \frac{n!}{\lambda^n}
\end{aligned}
$$