Introdução aos Processos Estocásticos - Processos Estocásticos

Eduardo M. A. M. Mendes

DELT - UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais
emmendes@cpdee.ufmg.br

O que é um processo aleatório?

Exemplo: Lançamento de uma moeda em algum tempo $n = 0$ e que continua indefinidamente, ou seja, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Os resultados são

$$\Omega = \{\{H, H, H, T, \ldots\}, \{H, T, H, T, \ldots\}, \{T, T, H, T, \ldots\}, \ldots\}$$

Se a VA for definida como

$$\left.\begin{array}{cccc} X & = & 0 & \rightarrow & \text{coroa} \\ & = & 1 & \rightarrow & \text{coroa} \end{array}\right\} \quad \text{VA Bernoulli}$$

então temos um processo aleatório de Bernoulli

$$\Omega_X = \{\{1, 1, 0, \ldots\}, \{1, 0, 1, \ldots\}, \{0, 0, 1, \ldots\}, \ldots\}$$

Se VAs são $X[0], X[1], \ldots$ e os resultados $x[0], x[1], \ldots$

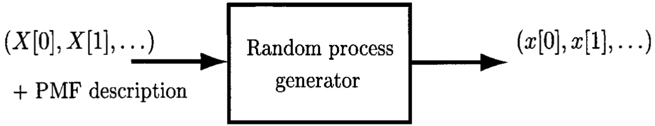

Figura 1: Gerador de processo aleatório

- Na figura acima, temos uma realização - uma sequência infinita de números.
- O conjunto de todas as realizações é chamado de Ensemble.

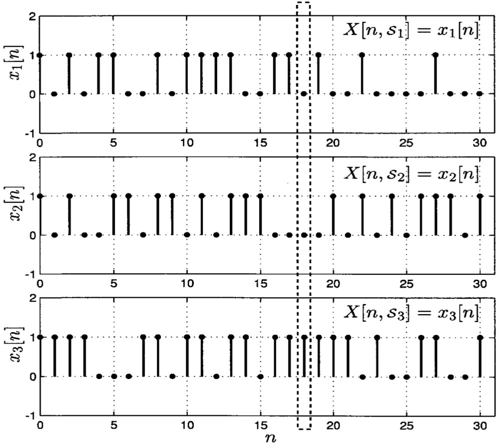

Figura 2: Resultados de um processo de Bernoulli

Notação: $\underbrace{X[n]}_{\{X[0], X[1], \ldots\}}$ ou $\{X[n]\}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Exemplo de Bernoulli

Exemplo: Processo Aleatório de Bernoulli (lançamentos de Bernoulli). Qual é a probabilidade dos 5 primeiros lançamentos serem caras?

$$P\left[X[0]=1, X[1]=1, X[2]=1, X[3]=1, X[4]=1, X[5]=0 \text{ ou } 1, \ldots\right]$$

Só interessam os 5 primeiros:

$$P\left[X[0]=1, X[1]=1, X[2]=1, X[3]=1, X[4]=1\right]=\prod_{n=0}^{4} P\left[X[n]=1\right]=p^5$$

Tipos de Processos Aleatórios

- $$\begin{array}{lll} X[n] & n = 0, 1, 2 \ldots & \text{semi-infinito} \\ X[n] & n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots & \text{infinito} \end{array}$$
- $$\begin{array}{ll} X[n] & \text{PA em tempo discreto} \\ X(t) & \text{PA em tempo contínuo} \end{array}$$
- Classificação dos processos aleatórios
  1) DTDV - Em tempo discreto com valores discretos.
  2) DTCV - Em tempo discreto com valores contínuos.
  3) CTDV - Em tempo contínuo com valores discretos.
  4) CTCV - Em tempo contínuo com valores contínuos.

Tipos de Processos Aleatórios (cont.)

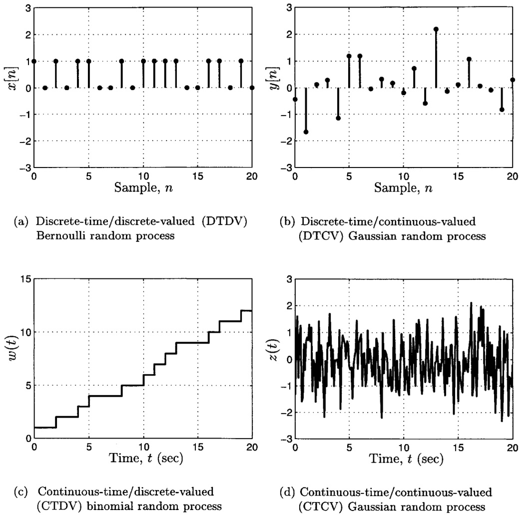

Figura 3: Classificação dos Processos Aleatórios

Passeio Aleatório

Definição:

$$X[n] = \sum_{i=0}^{n} U[i], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

onde $U[i]$ é VA Bernoulli com resultados ± 1 e

$$p_U[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se} \quad k = -1 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad k = 1 \end{cases}$$

$U[n]$ são IID.

Passeio Aleatório (cont.)

- Comportamento para N elevado - TLC - $X[n] \sim$ Gaussiana.

$$
\begin{aligned}
E[X[n]] &= E\left[\sum_{i=0}^{n} U[i]\right] \\
&= (n+1)\underbrace{E\left[U[0]\right]}_{-1\times\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var[X[n]] &= Var\left[\sum_{i=0}^{n} U[i]\right] \\
&= \underbrace{(n+1)var[U[0]]}_{E[U^2[0]]-E^2[U[0]]=1\times\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}-0} = n+1
\end{aligned}
$$

logo

$$X[n] \sim N(0, n+1)$$

As características mudam com o tempo?

$$\begin{array}{lcl} \text{PA Bernoulli} & \rightarrow & \text{Não} \\ \text{PA Passeio Aleatório} & \rightarrow & \text{Sim} \end{array}$$

Idéia: Verificar as probabilidades do PA ao longo do tempo.

Exemplo: PA Bernoulli

Olhando para um intervalo finito

$$\underbrace{P_{X[n_1],X[n_2],\ldots,X[n_N]}[X_1, X_2, \ldots, X_N]}_{\text{PDF conjunta}} = \prod_{i=1}^{N} p_{X[n_i]}[X_i]$$

Note que a probabilidade das 5 primeiras amostras serem 1 é p^5 e a probabilidade dos próximas 5 amostras é também p^5. Este processo aleatório é estacionário.

$$P_{X[0],X[1],\ldots,X[4]} = P_{X[5],X[6],\ldots,X[9]}$$

De forma geral

$$P_{X[n_0],X[n_0+1],\ldots,X[n_0+4]} = P_{X[n_0+n],X[n_0+n+1],\ldots,X[n_0+n+4]}$$

Definição : Um processo aleatório é estacionário se

$$P_{X[n_1+n_0],X[n_2+n_0],\ldots,X[n_N+n_0]} = P_{X[n_1],X[n_2],\ldots,X[n_N]}$$

para todo $n_1, n_2, \ldots, n_N$ e n_0.

Exemplo PA IID é estacionário

- Considere um PA IID

$$
\begin{aligned}
P_{X[n_1+n_0],X[n_2+n_0],\ldots,X[n_N+n_0]} &= \prod_{i=1}^{N} P_X[n_i+n_0] \quad \text{(Independência)} \\
&= \prod_{i=1}^{N} P_X[n_i] \quad \text{identicamente distribuidos} \\
&= P_{X[n_1],X[n_2],\ldots,X[n_N]} \quad \text{Independência}
\end{aligned}
$$

- Se um PA é estacionário $\rightarrow$ Todos os momentos também são

$$E_{X[n_1+n_0],X[n_2+n_0],\ldots,X[n_N+n_0]} = E_{X[n_1],X[n_2],\ldots,X[n_N]}$$

logo se os momentos não forem estacionários $\rightarrow$ PA não estacionário

Exemplo PA IID é estacionário (cont.)

- Exemplo: PA soma

$$X[n] = \sum_{i=0}^{n} U[i] \qquad \text{com} \quad U[i] \text{ sendo } IID$$

Os momentos são

$$\begin{aligned} E[X[n]] &= (n+1) \times E_U[U[0]] \\ Var[X[n]] &= (n+1) \times Var[U[0]] \end{aligned}$$

não é estacionário.

- Em alguns casos é possível converter um PA não-estacionário em um PA estacionário.
  No caso anterior da PA soma

$$\begin{aligned} Y[n] &= X[n] - X[n-1] \quad \text{com } X[-1] = 0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} U[i] - \sum_{i=0}^{n-1} U[i] = U[n], \text{ que é IID estacionário} \end{aligned}$$

  Se $n_4 > n_3 \geq n_2 > n_1$

$$\left.\begin{aligned} X[n_2] - X[n_1] &= \textstyle\sum_{i=n_1+1}^{n_2} U[i] \\ X[n_4] - X[n_3] &= \textstyle\sum_{i=n_3+1}^{n_4} U[i] \end{aligned}\right\} \quad \text{Incrementos de PA}$$

  são independentes. Se $n_4 - n_3 = n_2 - n_1$, eles têm a mesma PMF/PDF.

- Exemplo: Ruído Branco Gaussiano (WGN) - aplicações: Radar, Sonar, Comunicações.
  DTCV, $X[n]$ é IID com $X[n] \sim N(0, \sigma^2)$ com $-\infty < n < \infty$:

$$
\begin{aligned}
E[X[n]] &= 0 \\
\underbrace{E[X^2[n]]}_{\text{Potência Média}} &= Var[X[n]] = \sigma^2
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
P_{X[n_1],\ldots,X[n_N]} &= \prod_{i=1}^{N} p_{X[n_i]}(X_i) \\
&= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} x_i^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} det^{\frac{1}{2}}(C)} e^{-\frac{1}{2}x^T C^{-1} x} \quad \rightarrow \quad N(0, \underbrace{\sigma^2 I}_{C})
\end{aligned}
$$

Ruído Branco pois a potência é igualmente distribuída na frequência.

Processo Média Móvel

$$X[n] = \frac{1}{2}\left(U[n] + U[n-1]\right) \quad -\infty < n < \infty$$

Assim

$$\begin{aligned} X[0] &= \frac{1}{2}\left(U[0] + U[-1]\right) \\ X[1] &= \frac{1}{2}\left(U[1] + U[0]\right) \end{aligned}$$

Média que move ao longo do tempo $\longrightarrow$ Efeito Suavizador (Filtro Linear).

Para achar a PDF conjunta, repare que existe uma transformação linear entre X e U

Processo Média Móvel (cont.)

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U[-1] \\ U[0] \\ U[1] \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$X = G \times \underbrace{U}_{N(0,\sigma^2 I)}$$

$$\downarrow$$

$$X \sim N(0, G \times C_u \times G^T)$$

Mas

$$E[X] = E[GU] = GE[U] = 0$$

e

$$GC_uG^T = G\sigma^2 IG^T = \sigma^2 GG^T$$

com

$$GG^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2} & \frac{\sigma^2}{4} \\ \frac{\sigma^2}{4} & \frac{\sigma^2}{2} \end{bmatrix} \right)$$

é estacionária.

Senóide com Fase Aleatória

$$X[n] = cos\left(2\pi(0,1)n + \theta\right) \quad -\infty < n < \infty \quad \theta \sim U(0, 2\pi)$$

Uma vez conhecido o valor de $\theta \rightarrow$ sinal determinístico!

- Cálculo da PDF marginal - Suponha

$$Y = cos\left(2\pi(0,1)n_0 + x\right)$$

x tem duas soluções

$$\begin{aligned} x_1 &= arccos(y) - 2\pi(0,1)n_0 = g_1^{-1}(y) \\ x_2 &= 2\pi - [arccos(y) - 2\pi(0,1)n_0] = g_2^{-1}(y) \end{aligned}$$

Senóide com Fase Aleatória (cont.)

com $-1 < y < 1 \rightarrow 0 < arccos(y) < \pi$. Logo

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= p_X\left(g_1^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg_1^{-1}(y)}{dy}\right| + p_X\left(g_2^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg_2^{-1}(y)}{dy}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right| \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}
\end{aligned}
$$

Finalmente (voltando para $X[n]$)

$$
p_{X[n]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

Senóide com Fase Aleatória (cont.)

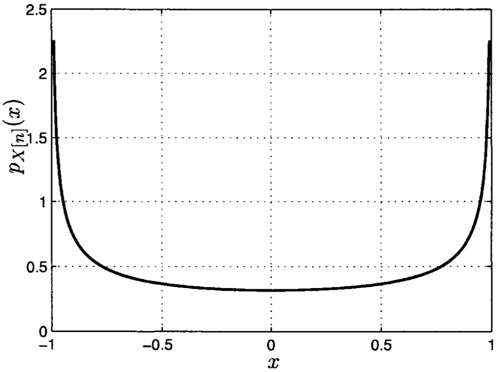

Figura 4: PDF marginal

Momentos Conjuntos

- Momentos Importantes

$$E[X], \quad Var[x], \quad Cov[X, Y]$$

- Sequência Média

$$\mu_X[n] = E[X[n]] \quad -\infty < n < \infty$$

- Sequência Variância

$$\sigma_X^2[n] = Var[X[n]] \quad -\infty < n < \infty$$

- Sequência Covariância

$$c_X[n_1, n_2] = cov\left(X[n_1], X[n_2]\right) = E\left[(X[n_1] - \mu_X[n_1])(X[n_2] - \mu_X[n_1])\right]$$

lembrando que, no caso contínuo,

$$E\left(X(n_1)X(n_2)\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{X(n_1),X(n_2)}(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$$

Propriedades

$$\begin{aligned} c_X[n_1, n_2] &= c_X[n_2, n_1] \\ c_X[n, n] &= \sigma_X^2[n] \end{aligned}$$

Momentos Conjuntos (cont.)

- Exemplo: WGN: $X[n] \sim N(0, \sigma^2)$ e IID.

$$\begin{aligned} \mu_X[n] &= E[X[n]] = 0, \quad -\infty < n < \infty \\ \sigma^2_X[n] &= Var[X[n]] = \sigma^2 \quad -\infty < n < \infty \\ c_x[n_1, n_2] &= cov\left(X[n_1], X[n_2]\right) \\ &= E\left(X[n_1], X[n_2]\right) \quad \text{quando } E(X[n]) = 0 \end{aligned}$$

Temos duas situações

1) $n_1 = n_2$

$$c_X[n_1, n_2] = E(X^2[n_1]) = \sigma^2$$

2) $n_1 \neq n_2$ (independentes)

$$c_X[n_1, n_2] = E\left(X[n_1], X[n_2]\right) = 0$$

Logo

$$c_X[n_1, n_2] = \sigma^2 \delta[n_1 - n_2]$$

- Exemplo: Média Móvel

$$X[n] = \frac{1}{2}\left(U[n] + U[n-1]\right) \quad \text{com } U \sim N(0, \sigma^2)$$

Calculando os momentos temos:

$$\begin{aligned} \mu_X[n] &= E(X[n]) \\ &= \frac{1}{2}\left(E(U[n]) + E(U[n-1])\right) \\ &= 0 \qquad -\infty < n < \infty \end{aligned}$$

Momentos Conjuntos (cont.)

$$
\begin{aligned}
c_X[n_1, n_2] &= E\left(X[n_1], X[n_2]\right) \\
&= \frac{1}{4} E\left((U[n_1] + U[n_1 - 1])(U[n_2] + U[n_2 - 1])\right) \\
&= \frac{1}{4} E\left(U[n_1]U[n_2]\right) + \frac{1}{4} E\left(U[n_1]U[n_2 - 1]\right) + \\
&\quad \frac{1}{4} E\left(U[n_1 - 1]U[n_2]\right) + \frac{1}{4} E\left(U[n_1 - 1]U[n_2 - 1]\right)
\end{aligned}
$$

mas

$$
E\left(U[k]U[l]\right) = \sigma^2 \delta[l - k]
$$

logo

$$
c_X[n_1, n_2] = \frac{1}{4} \sigma_U^2 \left(\delta[n_2 - n_1] + \delta[n_2 - n_1 - 1] + \delta[n_2 - n_1 + 1] + \delta[n_2 - n_1]\right)
$$

Momentos Conjuntos (cont.)

Fazendo $n_2 - n_1 = \Delta n$ e simplificando, temos:

$$c_X[n_1, n_2] = \frac{1}{4}\sigma_U^2 \left(2\delta[\Delta n] + \delta[\Delta n - 1] + \delta[\Delta n + 1]\right)$$

Momentos Conjuntos (cont.)

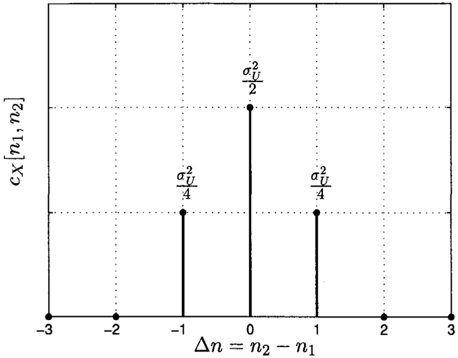

Figura 5: Sequência de covariância para um PA Média Móvel

Momentos Conjuntos (cont.)

- Senóide com Fase Aleatória

$$\mu_X[n] = E\left(X[n]\right) = E\left(cos(2\pi 0,1n + \theta)\right)$$

Usando a definição

$$\mu_X[n] = \int_0^{2\pi} \underbrace{cos(2\pi 0,1n + \theta)}_{S(\theta)} \times \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{p(\theta)} d\theta = 0$$

Agora para a covariância

$$
\begin{aligned}
c_X[n_1, n_2] &= E\left(X_1[n_1], X_2[n_2]\right) \\
&= \int_0^{2\pi} cos(2\pi 0,1 n_1 + \theta) cos(2\pi 0,1 n_2 + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(cos(2\pi 0,1(n_2 - n_1)) + \right. \\
&\qquad \left. cos(2\pi 0,1(n_1 + n_2) + 2\theta) \right) \frac{1}{2\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{2} cos(2\pi 0,1(n_2 - n_1)) + \frac{1}{8\pi} sin(2\pi 0,1(n_1 + n_2) + 2\theta) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2} cos(2\pi 0,1(n_2 - n_1))
\end{aligned}
$$

ou

$$c_X[\Delta n] = \frac{1}{2} cos(2\pi 0,1(\Delta n))$$

Momentos Conjuntos (cont.)

repare que a frequência original é mantida e que só depende do espaçamento temporal.