Introdução aos Processos Estocásticos - Variáveis Aleatórias Discretas Múltiplas

Eduardo M. A. M. Mendes

DELT - UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais
emmendes@cpdee.ufmg.br

Conceito

Considere 2 variáveis aleatórias discretas X e Y.

$$\begin{bmatrix} X(s_i) \\ Y(s_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \rightarrow \quad \text{Plano}$$

onde $s_i \in \Omega$ (Espaço Amostral).

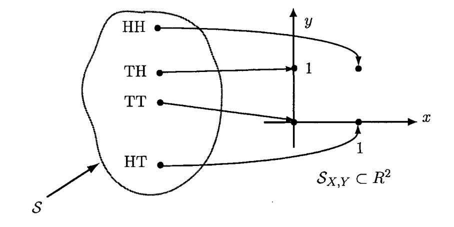

Figura 1: Exemplo de Mapa

Variáveis Aleatórias Discretas Múltiplas

Duas variáveis aleatórias que são definidas no mesmo espaço amostral Ω são ditas distribuidas conjuntamente.

$$\Omega_{X,Y} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Se $\Omega_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_X}\}$ e $\Omega_Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n_Y}\}$, então

$$\Omega_{X,Y} = \Omega_X \times \Omega_Y = \{(x_i, y_i) : i = 1, 2, 3 \ldots, N_X \text{ e } j = 1, 2, 3 \ldots, N_Y\}$$

com $N_{X,Y} = N_X \times N_Y$
A função massa de probabilidade conjunta é definida como:

$$p_{X,Y}[x_i, y_i] = P[X(s) = x_i, Y(s) = y_i] \text{ com } \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, N_X \\ j = 1, 2, \ldots, N_Y \end{array} \right.$$

Exemplo: Morettin, página 200 - Estudar a composição de uma família com 3 crianças quanto ao sexo.

$$
\begin{aligned}
X &= \text{número de meninos} \\
Y &= \begin{cases} 1, & \text{se o primeiro for homen} \\ 0, & \text{se o primeiro for mulher} \end{cases} \\
Z &= \text{Número de vezes em que houve variação de sexo entre um nascimento e outro dentro da mesma família}
\end{aligned}
$$

Eventos	Probabilidades	X	Y	Z
HHH	$\frac{1}{8}$	3	1	0
HHM	$\frac{1}{8}$	2	1	1
HMH	$\frac{1}{8}$	2	1	2
HMM	$\frac{1}{8}$	1	1	1
MHH	$\frac{1}{8}$	2	0	1
MHM	$\frac{1}{8}$	1	0	2
MMH	$\frac{1}{8}$	1	0	1
MMM	$\frac{1}{8}$	0	0	0

Onde

$$\Omega_X = \{\underbrace{0}_{\frac{1}{8}}, \underbrace{1}_{\frac{3}{8}}, \underbrace{2}_{\frac{3}{8}}, \underbrace{3}_{\frac{1}{8}}\}$$

,

$$\Omega_Y = \{\underbrace{0}_{\frac{1}{2}}, \underbrace{1}_{\frac{1}{2}}\}$$

e

$$\Omega_Z = \{\underbrace{0}_{\frac{1}{4}}, \underbrace{1}_{\frac{1}{2}}, \underbrace{2}_{\frac{1}{4}}\}$$

A distribuição conjunta de X e Y é

(x, y)	$p_{X,Y}[x, y]$
$(0, 0)$	$\frac{1}{8}$
$(1, 0)$	$\frac{2}{8}$
$(1, 1)$	$\frac{1}{8}$
$(2, 0)$	$\frac{1}{8}$
$(2, 1)$	$\frac{2}{8}$
$(3, 1)$	$\frac{1}{8}$

A distribuição conjunta de X, Y e Z é

(x, y, z)	$p_{X,Y,Z}[x, y, z]$
$(0, 0, 0)$	$\frac{1}{8}$
$(1, 0, 1)$	$\frac{1}{8}$
$(1, 0, 2)$	$\frac{1}{8}$
$(1, 1, 1)$	$\frac{1}{8}$
$(2, 0, 1)$	$\frac{1}{8}$
$(2, 1, 1)$	$\frac{1}{8}$
$(2, 1, 2)$	$\frac{1}{8}$
$(3, 1, 0)$	$\frac{1}{8}$

Para uma melhor visualização das duas variáveis considere a tabela de dupla entrada abaixo.

$Y \diagdown X$	0	1	2	3	$p(y)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Repare que podemos facilmente obter as probabilidades de X e Y que são chamadas Probabilidades Marginais.

$$p_X[1] = P[X = 1, Y = 0] + P[X = 1, Y = 1] = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Qual seria a distribuição do número de meninos, sabendo-se que o primeiro filho é do sexo masculino?

$$P[X = x|Y = 1] = \frac{P[X = x, Y = 1]}{P[Y = 1]}$$

x	$p(X\|Y = 1)$
1	$\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$
2	$\frac{P(X=2,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
3	$\frac{P(X=3,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

Probabilidade Condicional

Definição

Seja x_i, um valor de X, tal que $P(X = x_i) = p(x_i) > 0$. A probabilidade

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} \quad \jmath = 1, \ldots, n$$

é denominada Probabilidade Condicional de $Y = y_j$ dado $X = x_i$.

PMF Conjunta

Propriedades

Propriedade 1

$$0 \leq p_{X,Y}[x_i, y_i] \leq 1 \text{ com } \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, N_x \\ j = 1, 2, \ldots, N_y \end{cases}$$

Propriedade 2

$$\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} p_{X,Y}[x_i, y_i] = 1$$

Uma conclusão lógica é que podemos obter a probabilidade marginal da PMF conjunta:

$$p_y[y_j] = \sum_{i=1}^{\infty} p_{X,Y}[x_i, y_j]$$

o contrário não é geralmente possível.

Função de Distribuição Acumulada Conjunta

Definição

A função de Distribuição Acumulada (CDF) conjunta é dada por

$$F_{X,Y} = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{\{(i,j): x_i < x, y_j < y\}} \sum p_{XY}[x_i, y_j]$$

Propriedade 1:

$$0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1$$

Propriedade 2:

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(-\infty, -\infty) &= 0 \\ F_{X,Y}(+\infty, +\infty) &= 1 \end{aligned}$$

Propriedade 3: Monotonicamente crescente - $F_{X,Y}(x,y)$ é monotonicamente crescente à medida que x e/ou y cresce.

Independência de Múltiplas Variáveis Aleatórias

Definição:

$$P[X \in A, Y \in B] = P[X \in A] \times P[Y \in B]$$

a consequência é que a probabilidade conjunta pode ser reduzida ao cálculo das probabilidades marginais.

$$p_{X,Y}[x_i, y_i] = p_X[x_i] \times p_Y[y_i]$$

Exemplo Kay, página 180

- Duas moedas - cara e coroa (Independentes).

$$p_{X,Y}[0,0] = p_X[0] \times p_Y[0] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- A tabela pode ser construída como

Independência de Múltiplas Variáveis Aleatórias (cont.)

	$j=0$	$j=1$	$p_X[i]$
$i=0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$i=1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$p_Y[j]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Transformação de Múltiplas Variáveis Aleatórias

Idéia:

$$\begin{aligned} W &= g(X, Y) \\ Z &= h(X, Y) \end{aligned}$$

e

$$P_{W,Z}[w_i, z_j] = \sum_{\{(k,l): g(x_k, y_l) = w_i,\ h(x_k, y_l) = z_j\}} \sum p_{X,Y}[x_k, y_l] \text{ com } \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, N_w \\ j = 1, 2, \ldots, N_z \end{cases}$$

Exemplo: Variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson

$$p_{X,Y}[k, l] = e^{-(\lambda_X + \lambda_Y)} \frac{\lambda_X^k \lambda_Y^l}{k! l!}$$

Transformação de Múltiplas Variáveis Aleatórias (cont.)

com

$$\begin{aligned} X &\sim Pois(\lambda_X) \quad k = 0, 1, \ldots \\ Y &\sim Pois(\lambda_Y) \quad l = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Considere a transformação

$$\begin{aligned} W &= g(X, Y) = X \\ Z &= h(X, Y) = X + Y \end{aligned}$$

Solução: $(k, l) =?$

$$\begin{aligned} g(x_k, y_l) &= w_i \\ h(x_k, y_l) &= z_j \end{aligned}$$

Transformação de Múltiplas Variáveis Aleatórias (cont.)

e

$$\begin{aligned} x_k &\rightarrow k \quad (k = 0, 1, \ldots) \\ y_l &\rightarrow l \quad (l = 0, 1, \ldots) \end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned} w_i &\rightarrow i \\ z_j &\rightarrow j \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} g(k,l) &= i \xrightarrow{W=g(X,Y)=X} k \\ h(k,l) &= j \xrightarrow{Z=h(X,Y)=X+Y} k+l \end{aligned}$$

Transformação de Múltiplas Variáveis Aleatórias (cont.)

Resolvendo para k e l, temos:

$$\begin{aligned} k &= i \\ l &= j - k = j - i \geq 0 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} p_{W,Z}[i,j] &= \sum_{\substack{k=0 \\ \{(k,l):k=i,\ l=j-i>0\}}}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{X,Y}[k.l] \\ &= p_{X,Y}[i, j-i] \times \mu[i] \times \mu[j-i] \quad \text{degrau unitário} \\ &= e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)} \frac{\lambda_X^i \lambda_Y^{j-i}}{i!(j-i)!} \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots \text{ e } j = i, i+1, \ldots \end{aligned}$$

Exemplo: Achar a PMF de $Z = X + Y$ da probabilidade conjunta do exemplo anterior de Poisson.

Solução

- É necessário acrescentar uma variável aleatória $W = X \rightarrow \Omega_W = \Omega_X = \{0, 1, \ldots\}$
- A probabilidade é

$$\begin{aligned} p_z[j] &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{W,Z}[i,j] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)} \frac{\lambda_X^i \lambda_Y^{j-i}}{i!(j-i)!} \mu[i]\mu[j-i] \end{aligned}$$

Transformação de Múltiplas Variáveis Aleatórias (cont.)

- Repare que

$$\begin{array}{rll} \mu[i] & \text{dispara} & \text{para } i > 0 \\ \mu[j-i] & \text{dispara} & \text{para } j-i > 0 \to i < j \end{array}$$

Logo:

$$p_Z[j] = \sum_{i=0}^{j} e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)} \frac{\lambda_X^i \lambda_Y^{j-i}}{i!(j-i)!}$$

Como no exemplo anterior

$$Z = X + Y$$

Então

$$
\begin{aligned}
p_Z[j] &= e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)} \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{j!\,i!(j-i)!} \lambda_X^i \lambda_Y^{j-i} \\
&= e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \lambda_X^i \lambda_Y^{j-i} \\
&= e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)} \frac{1}{j!} (\lambda_X+\lambda_Y)^j
\end{aligned}
$$

Fazendo $\lambda = \lambda_X + \lambda_Y$, temos

$$p_Z[j] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \rightarrow Pois(\lambda_X + \lambda_Y)$$

- Conclusão:

$$\begin{aligned} X &\sim Pois(\lambda_X) \\ Y &\sim Pois(\lambda_Y) \\ X+Y &\sim Pois(\lambda_X+\lambda_Y) \end{aligned}$$

- Considerando que

$$\begin{aligned} p_{W,Z}[i,j] &= p_{X,Y}[i,j-i] \\ p_Z[j] &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{W,Z}[i,j] = \sum_{i=0}^{\infty} p_{X,Y}[i,j-i] \end{aligned}$$

se forem independentes

$$\begin{aligned} p_Z[j] &= \underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} p_X[i] \times p_Y[j-i]}_{\text{Convolução Discreta}} \\ p_Z &= p_X * p_Y \end{aligned}$$

Podemos pensar em Fourier também, $\phi_X(\omega) = E[e^{\jmath\omega X}]$,

$$\phi_Z(\omega) = \phi_X(\omega) \times \phi_Y(\omega)$$

Valor Esperado

Se $Z = g(X, Y)$ então

$$\begin{aligned} E[Z] &= \sum_i z_i p_Z[z_i] \\ E_{X,Y}[g(X,Y)] &= \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{X,Y}[x_i, y_j] \end{aligned}$$

- Linearidade: $E_{X,Y}[\alpha X + \beta Y] = \alpha E_X[X] + \beta E_Y[Y]$
- Se $g(X, Y) = XY$

$$E_{X,Y}[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{X,Y}[x_i, y_j]$$

Valor Esperado (cont.)

- Se X e Y são independentes

$$
\begin{aligned}
E_{X,Y} &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_X[x_i] p_Y[y_j] \\
&= \sum_i x_i p_X[x_i] \sum_j y_j p_Y[y_j] \\
&= E_X[X] \times E_Y[Y]
\end{aligned}
$$

Melhor ainda

$$
E_{X,Y}[g(X)h(Y)] = E_X[g(X)] \times E_Y[h(Y)]
$$

Variância de uma soma de VAs

Se $Z = g(X, Y) = (X + Y - E_{X,Y}[X + Y])^2$, então

$$
\begin{aligned}
Var[X + Y] &= E_Z[Z] = E_{X,Y}[g(X, Y)] \\
&= E_{X,Y}[(X + Y - E_{X,Y}[X + Y])^2] \\
&= E_{X,Y}[(X + Y - E[X] - E[Y])^2] \\
&= E_{X,Y}[((X - E[X]) + (Y - E[Y]))^2] \\
&= E_{X,Y}[(X - E[X])^2 + 2(X - E[X])(Y - E[Y]) + (Y - E[Y])^2] \\
&= \underbrace{E_X[(X - E[X])^2]}_{Var[X]} + 2\,\underbrace{E_{X,Y}[(X - E[X])(Y - E[Y])]}_{\color{red}{cov[X,Y]}} + \underbrace{E_Y[(Y - E[Y])^2]}_{Var[Y]}
\end{aligned}
$$

A covariância também pode ser escrita como:

$$Cov[X, Y] = E_{X,Y}[XY] - E_X[X] \times E_Y[Y]$$

Momentos Conjuntos

- Relação entre Variáveis Aleatórias
- A covariância é um momento central conjunto. Considere o seguinte exemplo:

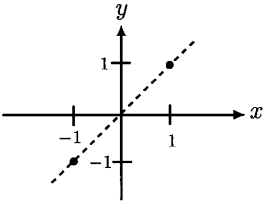

Figura 2: PMF conjunta que mostra a relação entre as variáveis

Note que $p_{X,Y}[-1,1] = p_{X,Y}[1,1] = \frac{1}{2}$ e

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Se } X = 1 & \rightarrow & Y = 1 \\ \text{Se } X = -1 & \rightarrow & Y = -1 \end{array}\right\} {\color{red} Y = X}$$

- Segundo exemplo

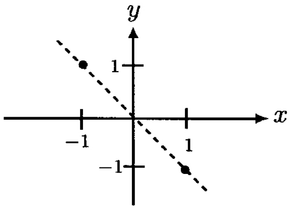

Figura 3: PMF conjunta que mostra a relação entre as variáveis

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Se } X = 1 & \rightarrow & Y = -1 \\ \text{Se } X = -1 & \rightarrow & Y = 1 \end{array}\right\} {\color{red} Y = -X}$$

- Terceiro exemplo

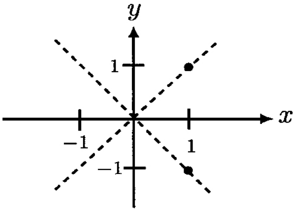

Figura 4: PMF conjunta que mostra a relação entre as variáveis

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Se } X = 1 & \rightarrow & Y = 1 \\ \text{Se } X = 1 & \rightarrow & Y = -1 \end{array}\right\} Y = \pm X$$

Em média se $X = 1 \rightarrow Y = 0$.

Para calcular os valores esperados nos três casos considere

$$E_{X,Y}[X,Y] = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j p_{X,Y}[x_i, y_j]$$

logo

$$\begin{array}{lcccc} \text{Primeiro Caso: } E_{X,Y}[X,Y] & = & (1)\times(1)\times\frac{1}{2} + (-1)\times(-1)\times\frac{1}{2} & = & 1 \\ \text{Segundo Caso: } E_{X,Y}[X,Y] & = & (1)\times(-1)\times\frac{1}{2} + (-1)\times(1)\times\frac{1}{2} & = & -1 \\ \text{Terceiro Caso: } E_{X,Y}[X,Y] & = & (1)\times(-1)\times\frac{1}{2} + (1)\times(1)\times\frac{1}{2} & = & 0 \end{array}$$

Considere a seguinte relação

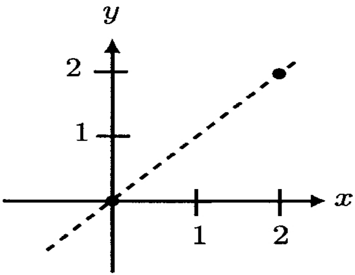

Figura 5: PMF conjunta que mostra a relação entre as variáveis

$$E_{X,Y}[X,Y] = (0)\times(0)\times\frac{1}{2} + (2)\times(2)\times\frac{1}{2} = 2 \neq 1$$

ou seja, a média afeta o resultado!

Momentos Conjuntos (cont.)

- Para retirar o efeito da média, usaremos o momento central conjunto

$$Cov[X, Y] = E_{X,Y}[(X - E_X[X])(Y - E_Y[Y])]$$

- No caso anterior

$$Cov[X, Y] = (-1) \times (-1) \times \frac{1}{2} + (1) \times (1) \times \frac{1}{2} = 1$$

- Se duas variáveis aleatórias são independentes

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E_{X,Y}[(X - E_X[X])(Y - E_Y[Y])] \\ &= E_X[X - E[X]] \times E[Y - E[Y]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- O contrário não é verdadeiro, ou seja, $Cov[X, Y]$ não implica em independência

Momentos Conjuntos (cont.)

- Podemos simplificar o cálculo da variância

$$\begin{aligned} \text{Se } Cov[X,Y] &= 0 \text{ então} \\ Var[X+Y] &= Var[X] + Var[Y] \end{aligned}$$

Exemplo

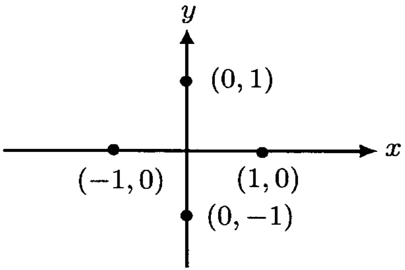

Figura 6: PMF conjunta que mostra a relação entre as variáveis

	$j=-1$	$j=0$	$j=1$	$p_X[i]$
$i=-1$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$i=0$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$i=1$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_Y[j]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Podemos, então, calcular os valores esperados

$$
\begin{aligned}
E_X[X] &= (-1)\times\frac{1}{4}+(0)\times\frac{1}{2}+(1)\times\frac{1}{4}=0\\
E_Y[Y] &= (-1)\times\frac{1}{4}+(0)\times\frac{1}{2}+(1)\times\frac{1}{4}=0
\end{aligned}
$$

A covariância é dada por

$$
Cov[X,Y]=E_{X,Y}[XY]=\sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=-1}^{1}\underbrace{i\times j}_{i \text{ ou } j \text{ é zero}}\; p_{X,Y}[i,j]=0
$$

Repare que $p_{X,Y}[1,0]=\frac{1}{4}$, mas $p_X[1]\times p_Y[0]=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, logo não são independentes

k-ésimo Momento

- O k-ésimo momento é definido como:

$$E_{X,Y}[X^k, Y^l] = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^l p_{X,Y}[x_i, y_j]$$

- O k-ésimo momento central é definido como:

$$E_{X,Y}[(X-E[X])^k, (Y-E[Y])^l] = \sum_i \sum_j (x_i - E_X[X])^k (y_j - E_Y[Y])^l p_{X,Y}[x_i, y_j]$$

Predição do Resultado de uma Variável Aleatória

Objetivo: Achar um preditor de Y (função afim) em X

$$\hat{Y} = aX + b$$

Usando a mesma estratégia anterior

$$\begin{aligned}
MSE(a,b) &= E_{X,Y}[(Y-\hat{Y})^2] \\
&= E_{X,Y}[(Y-aX-b)^2] \\
&= E_{X,Y}[Y^2 - 2aXY - 2bY + a^2X^2 + 2abX + b^2] \\
&= E_{X,Y}[Y^2] - 2aE_{X,Y}[XY] - 2bE_{X,Y}[Y] \\
&\quad + a^2E_{X,Y}[X^2] + 2abE_{X,Y}[X] + b^2
\end{aligned}$$

Igualando as derivadas parciais a zero

Predição do Resultado de uma Variável Aleatória (cont.)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial MSE(a,b)}{\partial a} &= -2E_{X,Y}[XY] + 2aE_X[X^2] + 2bE_X[X] = 0 \\
\frac{\partial MSE(a,b)}{\partial b} &= -2E_Y[Y] + 2aE_X[X] + 2b = 0
\end{aligned}
$$

A solução é

$$
\begin{aligned}
a_{opt} &= \frac{E_{X,Y}[XY] - E_X[X]E_Y[Y]}{E_X[X^2] - E_X^2[X]} = \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]} \\
b_{opt} &= E_Y[Y] - \frac{cov[X,Y]}{Var[X]} \times E_X[X]
\end{aligned}
$$

Podemos aplicar uma transformação de variável como se segue

Predição do Resultado de uma Variável Aleatória (cont.)

$$
\begin{aligned}
X_s &= \frac{X - E_X[X]}{\sqrt{Var[X]}} \\
\hat{Y}_s &= \frac{\hat{Y} - E_Y[Y]}{\sqrt{Var[Y]}}
\end{aligned}
$$

$\hat{Y}_s$ pode ser reescrito como:

$$
\hat{Y}_s = \underbrace{\frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X] \times Var[Y]}}}_{\rho_{X,Y} \text{ é o coeficiente de correlação}} \times X_s
$$

com $|\rho_{X,Y}| \leq 1$

Função Característica Conjunta

$$\phi_{X,Y}(\omega_X, \omega_Y) = E_{X,Y}[e^{\jmath(\omega_X X + \omega_Y YY)}]$$

Os momentos conjuntos são dados por

$$E_{X,Y}[X^m Y^n] = \frac{1}{\jmath^{m+n}} \frac{\partial \phi_{X,Y}(\omega_X, \omega_Y)}{\partial \omega_X^n \partial \omega_Y^n}\bigg|_{\omega_X = \omega_Y = 0}$$

$\phi_{X,Y}(\omega_X, \omega_Y) = \phi_X(\omega_X) \times \phi_Y(\omega_Y)$ se X e Y são independentes.