Introdução aos Processos Estocásticos - Sistemas Lineares

Eduardo M. A. M. Mendes

DELT - UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais
emmendes@cpdee.ufmg.br

Consideraremos apenas Sistemas Lineares Discretos Invariantes no Tempo (LIT)

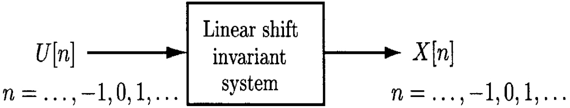

Figura 1: Sistema Linear

- Entrada $\rightarrow$ PA WSS $U[n]$.
- Saída $\rightarrow$ $X[n]$.

Exemplo: Processo MA

$$X[n] = \frac{1}{2}\left(U[n] + U[n-1]\right)$$

onde $U[n]$ tem média e $r_U[k] = \sigma^2\delta[k]$ – ruído branco não necessariamente precisa ser gaussiano.

Neste caso o processo MA pode ser visto como a saída do filtro linear com resposta ao impulso dada por

$$\begin{aligned} h[k] &= \tfrac{1}{2},\ k = 0 \\ &= \tfrac{1}{2},\ k = 1 \\ &= 0,\ \text{caso contrário} \end{aligned}$$

Para sistemas LIT

Introdução (cont.)

1) Convolução

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = h[n] * u[n] \\
&= h[0]U[n] + h[1]U[n-1] \\
&= \frac{1}{2}U[n] + \frac{1}{2}U[n-1]
\end{aligned}
$$

2) Transformada $\mathcal{Z}$

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \\
&= \frac{1}{2}z^{0} + \frac{1}{2}z^{-1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}
\end{aligned}
$$

3) Resposta em Frequência - Fourier ($|f| \leq \frac{1}{2}$).

$$\begin{aligned} H(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-\jmath 2\pi f k} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\jmath 2\pi f(0)} + \frac{1}{2} e^{-\jmath 2\pi f(1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\jmath 2\pi f} \end{aligned}$$

ou

$$H(f) = H(z)|_{z=e^{\jmath 2\pi f}}$$

Sabemos que, dada uma entrada $e^{-\jmath 2\pi f_0 n}$, a saída será

$$H(f_0) e^{-\jmath 2\pi f_0}$$

Introdução (cont.)

onde

$$\begin{aligned} |H(f_0)| &= \text{Magnitude, } f = f_0 \\ \angle H(f_0) &= \text{Fase, } f = f_0 \end{aligned}$$

Exemplo:

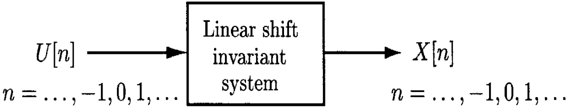

Figura 2: Sistema Linear

Neste caso:

- $U[n]$ - WSS, μ_u, $r_U[k]$.
- $H(z) = h[0] + h[1]z^{-1}$.
- $X[n] = h[0]U[n] + h[1]U[n-1]$

Aplicando a esperança matemática em $X[n]$, temos

$$\begin{aligned} E\left[X[n]\right] &= h[0]\underbrace{E\left[U[n]\right]}_{=\mu_U} + h[1]\underbrace{E\left[U[n-1]\right]}_{=\mu_U} \\ &= \left(h[0]+h[1]\right)\mu_u \text{ Não depende de } n! \end{aligned}$$

$$\mu_x = \underbrace{\left(h[0]+h[1]\right)}_{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}|_{z=1}} \mu_u$$

Em geral

$$\mu_X = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}\Big|_{z=1}\right)\mu_u = H(0)\mu_U$$

Para $E\left[X[n]X[n+k]\right]$

Introdução (cont.)

$$
\begin{aligned}
E\left[X[n]X[n+k]\right] &= E\left[(h[0]U[n]+h[1]U[n-1]) \times (h[0]U[n+k]+h[1]U[n+k-1])\right] \\
&= \left(h^2[0]+h^2[1]\right) r_U[k] + h[0]h[1]r_U[k-1] + h[1]h[0]r_U[k+1] \\
&= r_X[k]
\end{aligned}
$$

como não depende de n

$$X[n] \Longrightarrow \text{WSS}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
g[0] &= h^2[0]+h^2[1] \\
g[1] &= h[0]h[1] \\
g[-1] &= h[1]h[0]
\end{aligned}
$$

Logo

Introdução (cont.)

$$
\begin{aligned}
r_X[k] &= g[0]r_U[k] + g[1]r_U[k-1] + g[-1]r_U[k+1] \\
&= \sum_{j=-1}^{1} \underbrace{g[j]}_{=h[j]*h[-j]} \; r_U[k-j]
\end{aligned}
$$

Em relação à PSD, temos

$$
\begin{aligned}
P_X(f) = \mathcal{F}\left(r_X[k]\right) \\
&= \mathcal{F}\left(g[k] * r_u[k]\right) \\
&= G(f) \times P_U f
\end{aligned}
$$

Introdução (cont.)

Se considerarmos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h[k]) &= H(f)\\ \mathcal{F}(h[-k]) &= H^*(f)\end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}P_X(f) &= G(f) \times P_U(f)\\ &= \mathcal{F}(h[k]) \times \mathcal{F}(h[-k]) \times P_U(f)\\ &= H(f) \times H^*(f) \times P_U(f)\\ &= |H(f)|^2 \times P_U(f)\end{aligned}$$

ou seja

- Entrada - $U[n]$ - WSS, μ_U, $P_U(f)$
- Saída - $X[n]$ - WSS, $\mu_X = H(0)\mu_U$, $P_x(f) = |H(f)|^2 \times P_U(f)$.

Caso Especial - Entrada Ruído Branco

$$P_U(f) = \sigma_U^2$$

Logo

$$\begin{aligned} P_X(f) &= |H(f)|^2 \times P_U(f) \\ &= |H(f)|^2 \, \sigma_U^2 \end{aligned}$$

O filtro colore o ruído $\rightarrow$ correlaciona o ruído.

Exemplo: PA Autoregressivo (AR)

$$X[n] = aX[n-1] + \underbrace{U[n]}_{\text{ruído branco}}$$

A resposta em frequência é dada por

$$H(f) = H(z)\big|_{z=e^{\jmath 2\pi f}}$$

onde

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)}$$

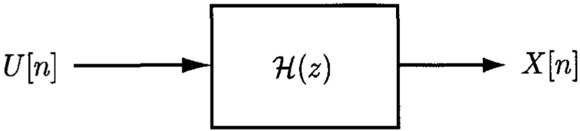

Figura 3: Sistema Linear

Introdução (cont.)

Determinando a função de transferência $H(z)$, temos

$$\begin{array}{rcl} x[n] & = & ax[n-1] + u[n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(z) & = & az^{-1}X(z) + U(z) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} H(z) & = & \dfrac{1}{1 - az^{-1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(f) & = & \dfrac{1}{1 - ae^{-\jmath 2\pi f}} \end{array}$$

e a PSD

Introdução (cont.)

$$
\begin{aligned}
P_X(f) &= |H(f)|^2 \times P_U(f) \\
&= \frac{1}{|1 - ae^{-\jmath 2\pi f}|^2}\sigma_U^2 \text{ com } |f| \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Para achar a ACS

Considere novamente a PSD

$$
\begin{aligned}
P_X(f) &= H(f) \times H^*(f) \times P_U(f) \\
&= H(f) \times H^*(f) \times \sigma_U^2 \\
\downarrow & \\
r_X[k] &= (h[k] * h[-k])\, \sigma_U^2 \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[-i] \times h[k-i] \times \sigma_U^2 \\
\text{ou} & \\
&= \sigma_U^2 \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]h[m+k]}_{\text{correlação}}
\end{aligned}
$$

Para achar a ACS (cont.)

Para sistemas causais

$$
\begin{aligned}
r_X[k] &= \sigma_U^2 \sum_{m=0}^{\infty} h[m]h[m+k] \text{ para } k \geq 0 \\
&= r_X[-k] \text{ para } k < 0
\end{aligned}
$$

Exemplo: Considere o seguinte sistema linear

$$
\begin{aligned}
X[n] &= \sum_{l=0}^{\infty} a^l U[n-l] \\
&\text{ou} \\
X[n] &= aX[n-1] + U[n] \text{ com } X[-1] = 0
\end{aligned}
$$

determinar $r_X[k]$.

Para achar a ACS (cont.)

Solução: Considerando uma entrada impulsiva, podemos escrever

$$x[n] = h[n] = a^n \qquad n \geq 0$$

logo

$$\left.\begin{array}{rcl} h[l] & = & a^l,\ l \geq 0 \\ & = & 0,\ l < 0 \end{array}\right\} = a^l \qquad \underbrace{u_s[l]}_{\text{função degrau}}$$

e

$$r_X[k] = \sigma_U^2 \sum_{m=0}^{\infty} a^m u_s[m] a^{m+k} u_s[m+k]$$

Para $k \geq 0$ e $m \geq 0$, $u_s[m] = u_s[m+k] = 1$,

Para achar a ACS (cont.)

$$r_X[k] = \sigma_U^2 \sum_{m=0}^{\infty} a^{2m+k}$$

$$\begin{aligned} &= \sigma_U^2 a^k \sum_{m=0}^{\infty} \left(a^2\right)^m \\ &= \sigma_U^2 a^k \frac{1}{1-a^2} \text{ para } |a| < 1 \text{ e } k \geq 0 \end{aligned}$$

ou

$$= \sigma_U^2 a^{|k|} \frac{1}{1-a^2} \text{ com } -\infty < k < \infty$$

Interpretação da PSD

A idéia é trabalhar com a seguinte expressão

$$\int_{f_1}^{f_2} P_X(f)df = \text{ Potência Média no intervalo } [f_1, f_2]$$

- Medição de Potência Média
  Considere o sistema linear mostrado na figura abaixo

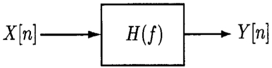

Figura 4: Sistema Linear

com resposta em frequência

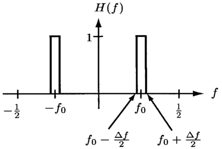

Figura 5: Resposta em Frequência

Potência Média na saída do filtro $= E[Y^2[n]] = r_Y[0]$. Mas

$$r_Y[k] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_Y(f) e^{\jmath 2\pi f k} df$$

Interpretação da PSD (cont.)

e

$$
\begin{aligned}
r_Y[0] &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_Y(f)df \\
\downarrow & \\
E[y^2[n]] &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_Y(f)df \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(f)|^2\, P_x(f)df \\
&= \int_{-f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{-f_0+\frac{\Delta f}{2}} 1 \times P_X(f)df + \int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}} 1 \times P_X(f)df \\
&= 2\int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}} P_X(f)df
\end{aligned}
$$

Interpretação da PSD (cont.)

- Para $\Delta f \to 0$

$$
\begin{aligned}
r_Y[0] &= 2\int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}} P_X(f)df \\
&\approx 2P_X(f_0)\int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}} df \\
&= 2P_X(f_0)\Delta f
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
P_X(f_0) &= \frac{1}{2}\frac{r_Y[0]}{\Delta f} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\text{Potência Média Total na saída}}{\Delta f} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2 \times \text{Potência Média total em } [f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}]}{\Delta f} \\
&= \frac{\text{Potência Média total em } [f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}]}{\Delta f} \\
&= \text{Potência por unidade de frequência} \\
&= \text{Densidade Espectral de Potência}
\end{aligned}
$$

Filtragem de Wiener

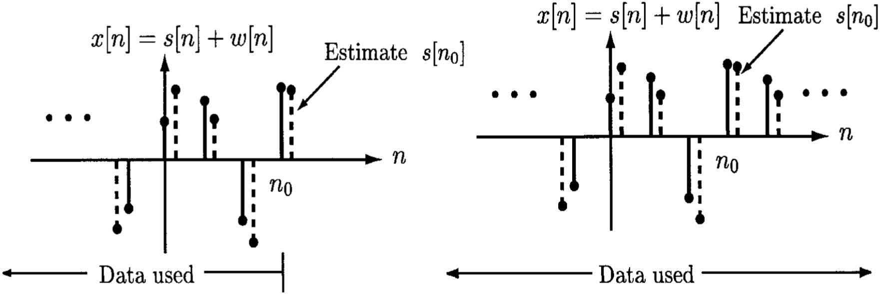

Figura 6: Filtragem e Suavização

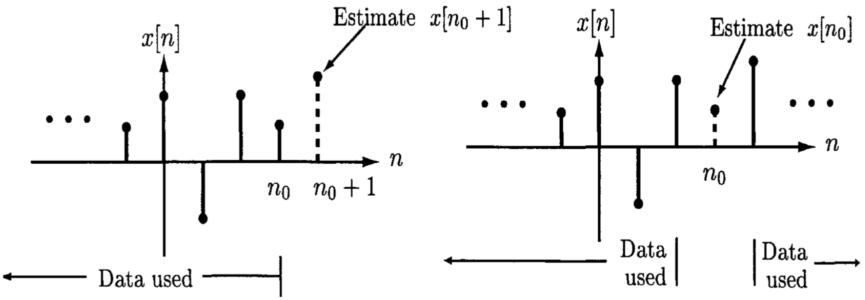

Figura 7: Predição e Interpolação

Suavizador:

$$x[n] = s[n] + w[n] \text{ com } -\infty < n < \infty$$

Vamos supor que:

Filtragem de Wiener (cont.)

- $s[n]$ é um PA WSS com média zero e PSD $P_s(f)$.
- $w[n]$ é um PA WSS com média zero e PSD $P_w(f)$.

Objetivo: Estimar $s[n]$ para algum n_0 usando um filtro linear

$$\hat{s}[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{h[k]}_{\text{não-causal}} x[n_o - k]$$

que é o Suavizador de Wiener.

Problema: Determinar $h[k]$ que minimize o MSE, ou seja

$$MSE = E\left[(s[n_0] - \hat{s}[n_0])^2\right]$$

No problema de regressão, sabemos que os resíduos, ξ, não são correlacionados com os regressores. Lembrando da estimação utilizando o método dos mínimos quadrados, temos

$$\begin{aligned}
\underbrace{X}_{\text{Matriz de Regressores}} \theta &= Y \\
\theta &= \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \\
\xi &= Y - X\theta
\end{aligned}$$

e

$$X^T \xi = 0 \text{ - Princípio da Ortogonalidade}$$

No nosso caso

Filtragem de Wiener (cont.)

$$E\left[\left(s[n_0] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n_0-k]\right) \times x[n_0-l]\right] = 0 \text{ com } -\infty < l < \infty$$

logo

$$E\left[s[n_0] \times x[n_0-l]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]E\left[x[n_0-k] \times x[n_0-l]\right]$$

Para distinguir os efeitos de $s[n]$ e $w[n]$ (lembre-se da definição de $x[n]$) é preciso, geralmente, que eles sejam não-correlacionados, ou seja, vamos assumir que

$$E\left[s[n]w[m]\right] = 0 \qquad \forall m,\ n$$

Temos então

Filtragem de Wiener (cont.)

- $$\begin{aligned} E\left[s[n_0] \times x[n_0 - l]\right] &= E\left[s[n_0]\left(s[n_0 - l] + w[n_0 - l]\right)\right] \\ &= E\left[s[n_0]s[n_0 - l]\right] \text{ (Princípio de Ortogonalidade)} \\ &= r_s[l] \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} E\left[x[n_0 - k]x[n_0 - l]\right] &= E\left[(s[n_0 - k] + w[n_0 - k]) \times (s[n_0 - l] \times w[n_0 - l])\right] \\ &= E\left[s[n_0 - k]s[n_0 - l]\right] + E\left[w[n_0 - k]w[n_0 - l]\right] \\ &= r_s[l - k] + r_w[l - k] \end{aligned}$$

Filtragem de Wiener (cont.)

Logo

$$
\begin{aligned}
r_s[l] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\left(r_s[l-k] + r_w[l-k]\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] r_s[l-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] r_w[l-k] \\
&= h[l] * r_s[l] + h[l] * r_w[l]
\end{aligned}
$$

- Achando a Transformada de Fourier

$$P_s(f) = H(f)P_s(f) + H(f)P_w(f)$$

e

$$H(f) = \frac{P_s(f)}{P_s(f) + P_w(f)}$$

Exemplo

Sinal AR em ruído com

$$P_s(f) = \frac{\sigma_U^2}{|1 - ae^{-\jmath 2\pi f}|^2}$$

e

$$P_w(f) = \sigma_w^2$$

Portanto o suavizador de Wiener é

$$\boxed{H_{\text{ótimo}} = \frac{\frac{\sigma_U^2}{|1-ae^{-\jmath 2\pi f}|^2}}{\frac{\sigma_U^2}{|1-ae^{-\jmath 2\pi f}|^2} + \sigma_w^2}}$$

Implementação do Filtro usando a IFFT

$$\hat{s}[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{P_s(f)}{P_s(f) + \sigma_w^2} \times \underbrace{X_N(f)}_{\text{Fourier - } \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\jmath 2\pi f n}} e^{\jmath 2\pi f n} df$$

Exemplo (cont.)

Olhando para o MSE

$$\begin{aligned}
MSE &= E\left[(s[n_0]-\hat{s}[n_0])^2\right] \\
&= E\left[(s[n_0]-\hat{s}[n_0])\,s[n_0]\right] - \underbrace{E\left[\underbrace{(s[n_0]-\hat{s}[n_0])}_{\text{erro}}\hat{s}[n_0]\right]}_{\text{não-correlacionado }=0} \\
&= E\left[(s[n_0]-\hat{s}[n_0])\,s[n_0]\right] \\
&= E\left[(s[n_0])^2\right] - E\left[\hat{s}[n_0]s[n_0]\right] \\
&= r_s[0] - E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\text{ótimo}}[k]x[n_0-k]s[n_0]\right] \\
& \quad r_s[0] - E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\text{ótimo}}[k]\left(s[n_0-k]+w[n_0-k]\right)s[n_0]\right]
\end{aligned}$$

Exemplo (cont.)

mas $w[n_0 - k]$ e $s[n_0]$ não são correlacionados. Finalmente

$$
\begin{aligned}
MSE &= r_s[0] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\text{ótimo}}[k] \underbrace{E\left[s[n_0 - k]s[n_0]\right]}_{=r_s[k]} \\
&= r_s[0] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\text{ótimo}}[k] r_s[k]
\end{aligned}
$$

Passando para o domínio da frequência e usando Parseval

Exemplo (cont.)

$$
\begin{aligned}
MSE &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_s(f)df - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H_{\text{ótimo}} P_s(f)df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - H_{\text{ótimo}}) P_s(f)df \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{P_s(f)}{P_s(f) + P_w(f)}\right) P_s(f)df \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{P_w(f)}{P_s(f) + P_w(f)} P_s(f)df \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{P_w(f)P_s(f)}{P_w(f)\left(\frac{P_s(f)}{P_w(f)} + 1\right)} df \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{P_s(f)}{\left(\frac{P_s(f)}{P_w(f)} + 1\right)} df
\end{aligned}
$$

Exemplo (cont.)

onde $\left(\frac{P_s(f)}{P_w(f)}+1\right)$ é a relação sinal-ruído (SNR) no domínio da frequência.

$$\begin{array}{lllll} SNR & \uparrow & MSE & \downarrow & \\ SNR & \downarrow & MSE & \rightarrow & P_s(f) \end{array}$$

Predição: Um passo à frente

$$\begin{aligned} MSE &= E\left[\left(x[n_0+1]-\hat{x}[n_0+1]\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(x[n_0+1]-\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n_0-k]\right)^2\right] \end{aligned}$$

Usando o princípio da ortogonalidade, temos:

Exemplo (cont.)

$$E\left[\left(x[n_0+1]-\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n_0+k]\right)x[n_0-l]\right]=0 \text{ para } l=0,1,\ldots$$

logo

$$E\left[x[n_0+1]\times x[n_0-l]\right]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]\times E\left[x[n_0-k]\times x[n_0-l]\right]$$

ou

$$r_X[l+1]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]\times r_X[l-k]$$

repare que não depende de n_0 - serve para qualquer amostra.
O MSE é

Exemplo (cont.)

$$MSE_{\text{min}} = r_X[0] - \sum_{k=0}^{\infty} h_{\text{ótimo}} r_X[k+1]$$

Exemplo: Predição de um processo AR

$$\begin{aligned} r_X[k] &= \frac{\sigma_U^2}{1-a^2} a^{|k|} \\ &= r_X[0] a^{|k|} \end{aligned}$$

logo

$$r_X[0] a^{|l+1|} = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] r_X[0] a^{|l-k|}$$

Exemplo (cont.)

Considerando $h[k] = 0$ para $k \geq 1$, temos

$$a^{|l+1|} = h[0]a^{|l|}$$

e portanto

$$h[0] = \frac{a^{|l+1|}}{a^{|l|}} = a \text{ para } l \geq 0$$

ou seja,

$$\hat{x}[n_0 + 1] = ax[n_0]$$

Generalizando

$$\hat{x}[n] = ax[n-1]$$

- Lembrando que o AR é, por exemplo, $x[n] = ax[n-1] + u[n]$, vemos que a predição descarta $u[n]$.

Exemplo (cont.)

- Repare que o erro é

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n] = u[n]$$

o que implica que $MSE \to \sigma_U^2$.

Sumário da Solução Geral

1) Transformada $\mathcal{Z}$ da ACS

$$
\begin{aligned}
P_X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_X[k]z^{-k} \\
&= \frac{\sigma_U^2}{A(z)A(z^{-1})}
\end{aligned}
$$

onde $A(z) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} a[k]z^{-k}$

2) A solução de $r_X[l+1] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]r_X[l-k]$ é

$$h_{\text{ótimo}}[k] = a[k+1] \qquad k = 0, 1, \ldots$$

e

$$MSE_{\text{min}} = \sigma_U^2$$

3) O Filtro Ótimo é

$$\hat{x}[n_0+1] = \sum_{k=0}^{\infty} a[k+1]x[n_0-k]$$

Olhando novamente para a PSD, temos

$$\begin{aligned} P_X(f) &= P_X\left(e^{\jmath 2\pi f}\right) = \frac{\sigma_U^2}{A\left(e^{\jmath 2\pi f}\right)A\left(e^{-\jmath 2\pi f}\right)} \\ &= \frac{\sigma_U^2}{A\left(e^{\jmath 2\pi f}\right)A^*\left(e^{\jmath 2\pi f}\right)} \\ &= \frac{\sigma_U^2}{\left|A\left(e^{\jmath 2\pi f}\right)\right|^2} \\ &= \frac{\sigma_U^2}{\left|1-\sum_{k=1}^{\infty} a[k]e^{-\jmath 2\pi f k}\right|^2} \end{aligned}$$

Se a PSD é truncada, ela toma a forma da PSD de um processo $AR(p)$:

$$P_X(f) = \frac{\sigma_U^2}{\left|1 - \sum_{k=1}^{p} a[k] e^{-\jmath 2\pi f k}\right|^2}$$

logo

$$\hat{x}[n_0 + 1] = \sum_{k=1}^{p} a[k] x[n_0 + 1 - k]$$

Exemplo - Predição

Predição de um passo à frente para o processo MA

- Cálculo de $H(z)$

$$
\begin{aligned}
x[n] &= u[n] - bu[n-1] \\
&\downarrow \\
X(z) &= U(z) - bz^{-1}U(z) \\
&= \underbrace{\left(1 - bz^{-1}\right)}_{H(z)} U(z)
\end{aligned}
$$

- A PSD é $H(f) \times H^*(f) \times \sigma_U^2$ ou

$$P_X(z) = \left(1 - bz^{-1}\right)(1 - bz)\,\sigma_U^2$$

logo

$$A(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

Exemplo - Predição (cont.)

- Tomando a Transformada $\mathcal{Z}$ inversa, temos

$$\mathcal{Z}^{-1}\{A(z)\} = \begin{cases} b^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

com $|b| < 1$ para garantir estabilidade. Colocando na forma $1 - \sum_{k=1}^{\infty} a[k]z^{-k}$, temos

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} -b^k z^{-k}$$

logo o preditor é

$$\boxed{\hat{x}[n_0+1] = \sum_{k=0}^{\infty} -b^{k+1} x[n_0-k]}$$

Exemplo - Predição (cont.)

No caso finito

$$\hat{x}[n_0+1] = \sum_{k=0}^{M-1} -b^{k+1} x[n_0-k]$$

logo

$$r_X[\ell+1] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] r_X[\ell-k] \qquad l = 0, 1, \ldots, M-1$$

que, na notação matricial, é

$$\begin{bmatrix} r_X[0] & r_X[1] & \ldots & r_X[M-1] \\ \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ r_X[M-1] & \ldots & \ldots & r_X[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ \vdots \\ h[M-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_X[1] \\ \vdots \\ r_X[M] \end{bmatrix}$$

que são as Equações de Wiener-Hopf.

Filtro Rejeita Interferência

$$X(t) = S(t) + I(t)$$

onde $I(t)$ é uma interferência de 60 Hz com fase aleatória.

- Encontrar, se possível, um filtro que elimine a interferência sem afetar a PSD de S.

Solução: Filtro Diferença

$$Y(t) = X(t) - X(t - T)$$

onde T é conhecido, pois $T = \frac{1}{F_0} = \frac{1}{60}$.

Caso contínuo (cont.)

- A função de transferência do filtro é

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \delta(t) - \delta(t-T) \\
&\downarrow \\
H(F) &= \left(1 - e^{-\jmath 2\pi F}\right)
\end{aligned}
$$

- A ACS da interferência é

$$
\begin{aligned}
r_I(\tau) &= \frac{A^2}{2} cos(2\pi F_0 \tau) \\
&\downarrow \\
P_I(f) &= \frac{A^2}{4}\delta(F+F_0) + \frac{A^2}{4}\delta(F-F_0)
\end{aligned}
$$

A PSD é

$$\begin{aligned} P_Y(F) &= |H(F)|^2 \times P_X(F) \\ &= |H(F)|^2 \times (P_S(F) + P_I(F)) \\ &= \left|1 + e^{-\jmath 2\pi FT}\right|^2 \times (P_S(F) + P_I(F)) \\ &= (2 - 2cos(2\pi FT)) \times (P_S(F) + P_I(F)) \end{aligned}$$

Para $F = \frac{1}{60}$

$$|H(F)|^2 = 0$$

o que elimina $P_I(F)$, mas a PSD, $P_S(F)$, é modificada!