Introdução aos Processos Estocásticos - Variáveis Contínuas Aleatórias

Eduardo M. A. M. Mendes

DELT - UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais
emmendes@cpdee.ufmg.br

Introdução

- Variável aleatória nada mais é do que uma mapa do espaço amostral para um número
- Exemplo: Dados: $S = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$.

$$x(s_i) = i \quad i = 1, \ldots, 6$$

  $|S| = 6$, variável aleatória discreta enumerável. Se $x(s_i) = i$, $i = 1, 2, \ldots$ seria infinito mas é enumerável.
- No caso do dado

$$p[x(s_i) = i] = \frac{1}{6}$$

- No caso do enumerável, suponha que façamos

$$p[x(s_i) = i] = \frac{1}{2^i} \text{ com } i = 1, 2, \ldots$$

então

$$\sum_{i=1}^{\infty} p[x(s_i) = i] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

logo é uma PMF.

- Notação:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Maiúscula} & \rightarrow & X & \rightarrow & \text{VA} \\ \text{Minúscula} & \rightarrow & x & \rightarrow & \text{valor} \end{array}$$

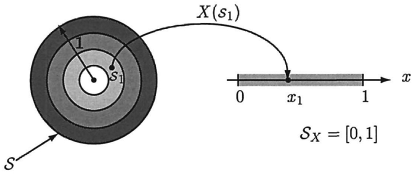


Figura 1: Mapa

$S_X = [0,1]$ - x é a distância do centro do alvo. Repare que $p[x(s_i) = x_i] = p_i$ para $i = 1, 2, \ldots$ não tem mais sentido, pois não há garantia que a soma seja 1.

Solução: Intervalo - assumindo que os resultados são igualmente prováveis

$$p\left[0 \le x \le \frac{1}{2}\right] = p\left[\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}\right] = p\left[\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

e

$$p[a \leq x \leq b] = b - a, \quad 0 \leq a \leq b \leq 1$$

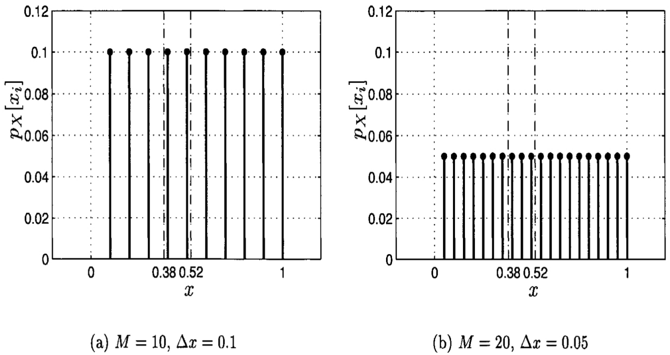


Figura 2: Aproximação discreta

Introdução (cont.)

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 1, \ldots, M.$$

Neste caso

$$p[x_i] = \frac{1}{M} \text{ e } \Delta x = \frac{1}{M} \rightarrow 1 = \Delta x \times M$$

e

$$p[a \leq X \leq b] = \sum_{\{i: a \leq x_i \leq b\}} \frac{1}{M}$$

mas $\frac{1}{M} = \Delta x$, então

$$p[a \leq x \leq b] = \sum_{\{i: a \leq x_i \leq b\}} 1 \times \Delta x$$

$$\text{definindo} \begin{cases} p_X(x) & = & 1 & \text{para} & 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \\ p_X(x) & = & 0 & \text{para} & x < 0 \text{ e } x > 1 \end{cases}$$

Introdução (cont.)

podemos escrever

$$p[a \leq x \leq b] = \sum_{\{i:a \leq x_i \leq b\}} p_X(x_i)\Delta x$$

quando $\Delta x \to 0$

$$p[a \leq x \leq b] = \int_a^b p_X(x)dx$$

onde $p_X(x)$ é função densidade de probabilidade (PDF). Para o dardo (alvo), temos

$$\begin{aligned} p[a \leq x \leq b] &= \int_a^b p_X(x)dx \\ &= \int_a^b 1dx \\ &= b - a \end{aligned}$$

Introdução (cont.)

- PDF - probabilidade por unidade de comprimento.
- Olhando um intervalo pequeno

$$P\left[x_o - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq x_o + \frac{\Delta x}{2}\right] = \underbrace{\sum_{\{i:x_i=x_o\}}}_{\text{Só um valor no intervalo}} p_X(x_i) \times \Delta x$$

$$= p_X(x_i) \times \Delta x$$

logo

$$p_X(x_i) = \frac{P\left[x_o - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq x_o + \frac{\Delta x}{2}\right]}{\Delta x}$$

- Propriedades da PDF

$$\begin{aligned} p_X(x) &\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx &= 1 \end{aligned}$$

Campos de Borel e Variáveis Aleatórias

- Sabemos que quando um espaço amostral Ω não é contável existe a possibilidade de que não seja possível definir a medida de probabilidade para todos os seus sub-conjuntos.

Devemos nos restringir a medida a conjuntos de certa família, que, por sua vez, devem ser gerais o bastante para permitir as operações usuais com conjuntos (álgebra de conjuntos)

Considerando uma família $\mathcal{F}$ que tenha as seguintes propriedades:

  - se um conjunto A pertence a $\mathcal{F}$, então seu complemento $A^c = \Omega - A$ também pertence a $\mathcal{F}$;
  - Se um número contável de conjuntos $A_1, A_2. \ldots,$ todos pertencentes a $\mathcal{F}$, então a união $\cup A_n$ também pertence a $\mathcal{F}$.
  - Usando as Leis de De Morgan podemos concluir que $\cap_n A_n$ também pertence a $\mathcal{F}$.

Campos de Borel e Variáveis Aleatórias (cont.)

- As propriedades acima significam que podemos operar sobre os membros da família com as operações básicas, por um número contável de vezes, de qualquer maneira ou ordem e o resultado é ainda um membro da família. Ou seja, a família é fechada com relação as operações definidas.

  Tal família de conjuntos de $\mathcal{F}$ é chamada um campo de Borel em Ω

  Exemplos:

  - Família de todos os conjuntos - Provalmente será impossível definir a probabilidade nela.
  - Família com dois conjuntos $\{\emptyset, \Omega\}$ - muito pequeno!
  - Família com quatro conjuntos $\{\emptyset, \Omega, A, A^C\}$ - muito pequeno para a maioria dos problemas de interesse.

- Objetivo: Achar um campo de Borel $\mathcal{F}$ razoável e com uma medida de probabilidade P definida sobre ele.

$$\text{Tripla de Probabilidade} \quad (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$$

  Os conjuntos em $\mathcal{F}$ são ditos mensuráveis e têm, por si, uma probabilidade.

- Seja X uma função com valor real definida em Ω. Então X é chamada uma variável aleatória se e somente se para qualquer número real x, temos

$$\{\omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

  desde modo $P\{X \leq x\}$ é definido como função de x de distribuição F.

- Repare se $a < b$

$$\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} - \{X \leq a\}$$

que pertence a $\mathcal{F}$ uma vez que $\mathcal{F}$ é fechado em relação a diferença. Como sabemos isso nada mais é que

$$F(b) - F(a)$$

- Com estas condições podemos definir o valor esperado (Esperança Matemática)

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$$

Exemplos de PDFs

- Exemplo: PDF exponencial $X \sim exp(\lambda)$

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0 \text{ (decrescente)}$$

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 1 \text{ se } \lambda > 0$$

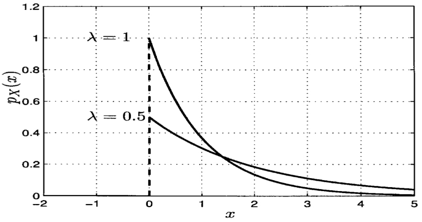


Figura 3: PDF exponencial

Repare que o valor de $p_X(0)$ pode ser maior do que 1, mas o que interessa é a integral!

- Problema: Descontinuidade - se o número de degraus for finito, não precisamos nos preocupar pois a PDF de um ponto é normalmente zero (Medida de Lebesgue igual a zero). Considere $p[-\epsilon < x < \epsilon]$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} p_X(x)dx \approx \epsilon p_X(0) \to 0$$

Exemplos de PDFs (cont.)

- PDF Uniforme $\rightarrow \quad X \sim U(a,b)$

$$\text{Áreas} = 1 \qquad p > 0$$

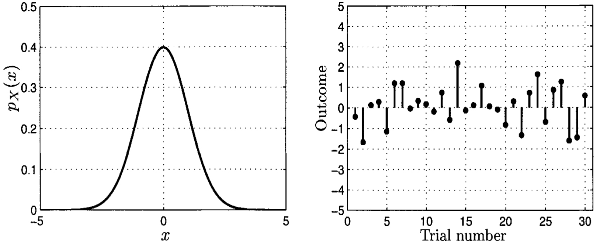
- PDF Gaussiana (Normal) $\rightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

onde $\mu \rightarrow$ centro , $\quad \sigma \rightarrow$ espalhamento.
obs.:

1. $\int e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ - só numericamente
2. Se $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ - Normal
3. $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1$

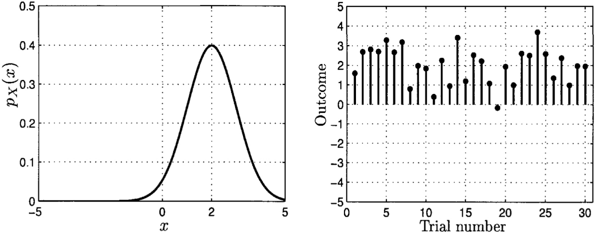
Exemplos de PDFs (cont.)



(a) $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ (b) $\mu = 0, \sigma^2 = 1$

Figura 4: PDF gaussiana

Exemplos de PDFs (cont.)

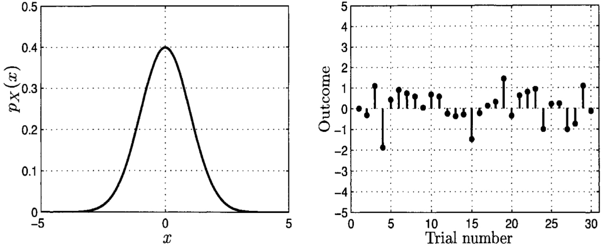


(c) $\mu = 2, \sigma^2 = 1$

(d) $\mu = 2, \sigma^2 = 1$

Figura 5: PDF gaussiana

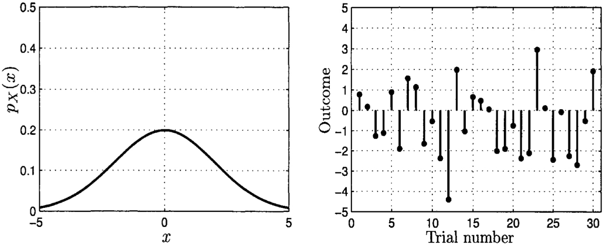
Exemplos de PDFs (cont.)



(a) $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ (b) $\mu = 0, \sigma^2 = 1$

Figura 6: PDF gaussiana

Exemplos de PDFs (cont.)



(c) $\mu = 0, \sigma^2 = 2$

(d) $\mu = 0, \sigma^2 = 2$

Figura 7: PDF gaussiana

Prova para a Normal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = I$$

Tomando o quadrado

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy \end{aligned}$$

Fazendo $x = rcos(\theta)$ e $y = rsen(\theta)$, temos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -rsen(\theta) \\ sen(\theta) & rcos(\theta) \end{bmatrix}$$

e

$$\left|det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right)\right| = |rcos^2(\theta) + rsen^2(\theta)| = r > 0$$

Logo

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}r^2}rd\theta dr \\ &= \int_0^{\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2}dr\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}d\theta \\ &= -e^{-\frac{1}{2}r^2}\Big|_0^{\infty} = 1 \end{aligned}$$

- PDF Laplaciano

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}e^{-\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}|x|} \qquad -\infty < x < \infty$$

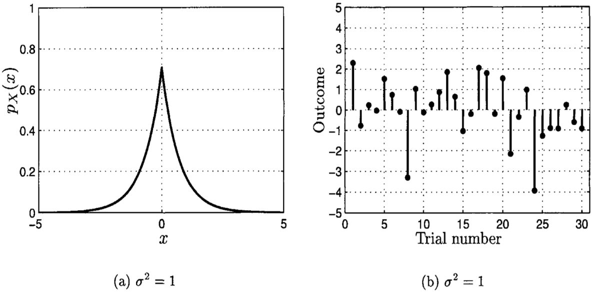
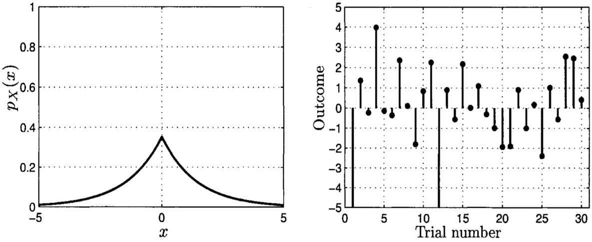


Figura 8: PDF laplaciano

Exemplos de PDFs (cont.)



(c) $\sigma^2 = 4$ (d) $\sigma^2 = 4$

Figura 9: PDF laplaciano

- PDF Cauchy: razão entre duas VAs $\sim N(0,1)$.

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad -\infty < x < \infty$$

Exemplos de PDFs (cont.)

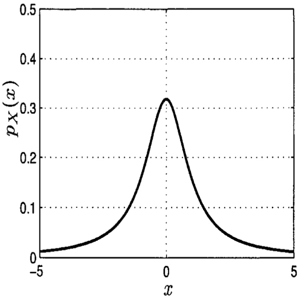


Figura 10: PDF Cauchy

Exemplos de PDFs (cont.)

- PDF Gamma - $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ - Pode modelar uma grande faixa de PDFs para VAs não-negativas.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

com $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ e $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dz$ (função gamma).

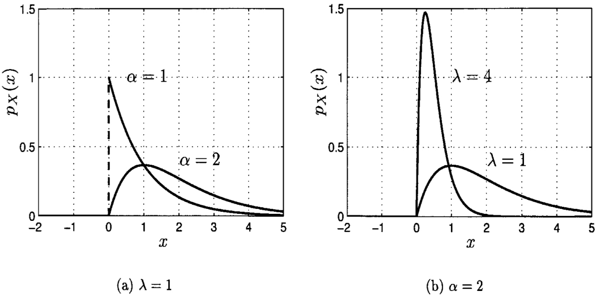


Figura 11: PDF gamma

Propriedades de $\Gamma(z)$

1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2) $\Gamma(N) = (N-1)!$
3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Exemplos de PDFs (cont.)

- Casos especiais

1) $\alpha = 1$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(1)} x^{1-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

nada mais é do que a exponencial.

2) PDF χ^2_N com N graus de liberdade para $\alpha = \frac{N}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} x^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

é o resultado da soma dos quadrados de várias PDFs $\sim N(0,1)$.

3) Erlang para $\alpha = N$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^N}{\Gamma(N)} x^{N-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

é o resultado da soma de N variáveis aleatórias exponenciais com o mesmo λ.

Exemplos de PDFs (cont.)

4) Rayleigh

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- Facilmente integrável
- Resultado da raiz quadrada da soma dos quadrados de VAs independentes $\sim N(0, \sigma^2)$.

Funções de Distribuição Cumulativas

Definição igual à definição para a variável aleatória discreta

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P[X \leq x] \quad -\infty < x < \infty \\
&= \int_{-\infty}^{x} p_X(t)dt
\end{aligned}
$$

obs.: útil para encontrar $P[a \leq x \leq b]$.

- Exemplo: $X \sim exp(\lambda)$. Sabemos que a pdf é dada por

$$
p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0 \text{ (decrescente)}
$$

logo

$$
F_X(x) = \begin{cases} P[X \leq x] = 0 \quad \text{se } x < 0 \\ = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt, \ (x \geq 0) = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}
$$

Repare que $F_X(x)$ é contínua em $x = 0$, mas $p_X(x)$ não!

VA contínua

- Uma variável aleatória é chamada contínua se sua CDF é contínua.
- Contra-exemplo:

$$p_X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 1 \\ \frac{1}{2} & k = 2 \end{cases} \qquad \text{VA discreta}$$

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

Sabemos que a CDF de uma variável discreta é contínua à direita, portanto

$$\begin{aligned} F_X(1) &= P[X \leq 1] = P[X < 1 \text{ ou } X = 1] \\ &= P[X < 1] + P[X = 1] \\ &= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

No todo é descontínua.

VA contínua (cont.)

- Exemplo: Gaussiana $\rightarrow N(0,1)$. A PDF é

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

e a CDF

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ &= \Phi(x) \begin{cases} 0, & x = -\infty \\ 1, & x = \infty \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Função de Probabilidade $Q(x) = 1 - \Phi(x)$ (à direita):

$$P[X > x] = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

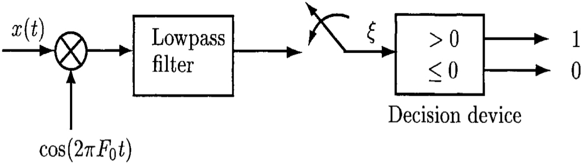


Figura 12: Binary Phase Shift Key (PSK)

- Transmissão:

$$
\begin{aligned}
S_0(t) &= Acos(2\pi F_o t + \pi) = -Acos(2\pi F_o t) \quad < 0 > \\
S_1(t) &= Acos(2\pi F_o t) \quad < 1 >
\end{aligned}
$$

Receptor PSK para comunicação digital (cont.)

- Recepção

$$S_i(t) + \underbrace{w(t)}_{\text{ruído modelado como aleatório}}$$

- Na saída do multiplicador

$$\begin{aligned}
x_m(t) &= Acos(2\pi F_o t + \pi)cos(2\pi F_o t) \\
&= -A\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(4\pi F_o t)\right) \quad < 0 > \\
x_m(t) &= Acos(2\pi F_o t)cos(2\pi F_o t) \\
&= A\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(4\pi F_o t)\right) \quad < 1 >
\end{aligned}$$

Receptor PSK para comunicação digital (cont.)

- Filtro para cortar $4\pi F_o$

$$\xi = \begin{cases} -\frac{A}{2} + w & <0> \\ \frac{A}{2} + w & <1> \end{cases}$$

Assuma que $<1>$ é enviado. Teremos error se $\xi \leq 0$. Qual é a probabilidade disso acontecer?

$$\begin{aligned} P_\xi &= P[\xi \leq 0 | <1> \text{ foi enviado }] \\ &= P\left[\frac{A}{2} + w \leq 0\right] \begin{cases} \text{assuma} \\ \text{que } w \sim N(0,1) \end{cases} \\ &= P\left[w \leq -\frac{A}{2}\right] \\ &= 1 - P\left[w > -\frac{A}{2}\right] \\ &= 1 - Q\left(-\frac{A}{2}\right) = Q\left(\frac{A}{2}\right) \end{aligned}$$

Para $P_\xi \leq 0,1 \rightarrow A > 2,6$

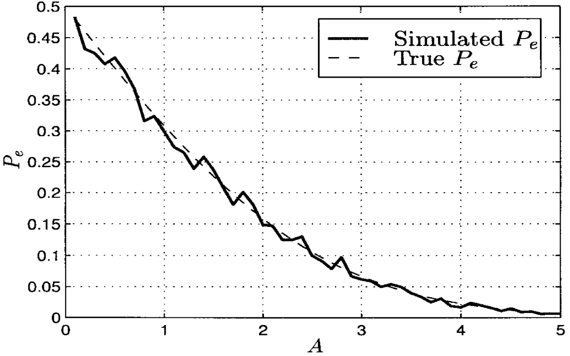


Figura 13: PSK - Probabilidade do erro

CDF

- A vantagem de usar a CDF é evitar a integração. Normalmente temos:

$$P[a \leq x \leq b] = P[a < x \leq b] = F_X(b) - F_X(b)$$

- Exemplo

$$X \sim exp(\lambda)$$

e

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

logo

$$\begin{aligned} P[a \leq x \leq b] &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= (1 - e^{-\lambda b}) - (1 - e^{-\lambda a}) \\ &= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \end{aligned}$$

CDF (cont.)

A mesma coisa poderia ser feita usando $p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$\int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = -\lambda e^{-\lambda x}\Big|_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

- Podemos recuperar a PDF da CDF.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)dt \text{ e } p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad \text{TFC}$$

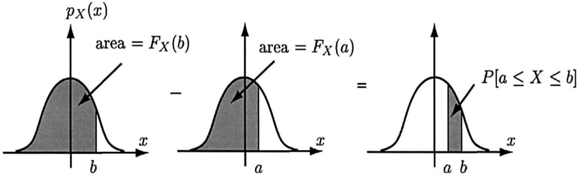


Figura 14: CDF e PDF

$$Y = g(X)$$

- Caso $1 \leftrightarrow 1$

$$Y = 2X \text{ com } X \sim U(1,2)$$

onde

$$\begin{array}{rcl} \Omega_X & = & \{x : \quad 1 < x < 2\} \\ \downarrow & & \\ \Omega_Y & = & \{y : \quad 2 < y < 4\} \end{array}$$

Neste caso

$$p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{fator de escala}}$$

Transformações (cont.)

Note que

$$\frac{d(x)}{dy} = \frac{d\left(\frac{1}{2}y\right)}{dy} = \frac{1}{2}$$

Generalizando

$$\boxed{p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d(g^{-1}(y))}{dy}\right|}$$

Exemplo

$$y = ax + b \text{ com } a \neq 0$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_X &= \{x: \quad -\infty < x < \infty\} \\ \downarrow & \\ \Omega_Y &= \{y: \quad -\infty < y < \infty\} \end{aligned}$$

Transformações (cont.)

Neste caso

$$y = g(x) = ax + b \to x = \frac{y-b}{a} = g^{-1}(y)$$

e

$$p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = p_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \times \left|\frac{1}{a}\right|$$

Caso Particular

$$Y = \sqrt{\sigma^2}X + \mu \text{ com } X \sim N(0,1)$$

Transformações (cont.)

logo

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= p_X\left(\frac{y-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)\left|\frac{1}{\sqrt{\sigma^2}}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)^2} \times \left|\frac{1}{\sqrt{\sigma^2}}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)^2}
\end{aligned}
$$

- Caso 1 $\not\leftrightarrow$ 1 Deve-se considerar a relação anterior por partes

$$
\boxed{p_Y(y) = p_X(g_1^{-1}(y))\left|\frac{d(g_1^{-1}(y))}{dy}\right| + \ldots + p_X(g_N^{-1}(y))\left|\frac{d(g_N^{-1}(y))}{dy}\right|}
$$

Exemplo

$$Y = X^2 \quad \text{com} \quad X \sim N(0,1)$$

$$\begin{array}{rcl} \Omega_X & = & \{x: \quad -\infty < x < \infty\} \\ \downarrow & & \\ \Omega_Y & = & \{y: \quad 0 \leq y < \infty\} \end{array}$$

Transformações (cont.)

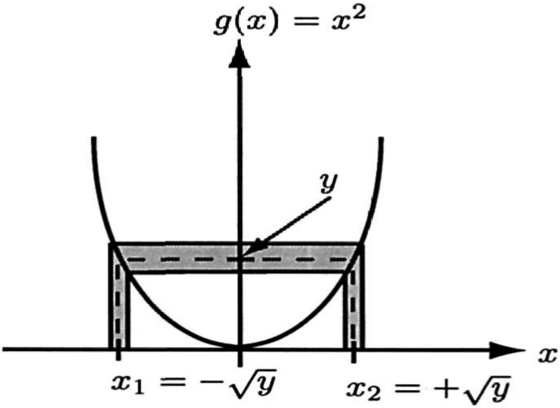


Figura 15: Transformação $1 \not\leftrightarrow 1$

Transformações (cont.)

$$
\begin{aligned}
g_1^{-1}(y) &= -\sqrt{y} \rightarrow \frac{dg_1^{-1}(y)}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}} \\
g_2^{-1}(y) &= \sqrt{y} \rightarrow \frac{dg_2^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= \begin{cases} p_X(-\sqrt{y}) \left| \frac{dg_1^{-1}(y)}{dy} \right| + p_X(\sqrt{y}) \left| \frac{dg_2^{-1}(y)}{dy} \right|, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{1}{2}y} + e^{-\frac{1}{2}y} \right) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{\sqrt{2\pi y}} & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Outra solução: usando CDF

$$
F_X(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})
$$

e

$$
\begin{aligned}
P_Y(y) &= \frac{d[F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})]}{dy} \\
&= p_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} - p_X(-\sqrt{y})\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) \\
&= \left(p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(e^{-\frac{1}{2}\left((\sqrt{y})^2\right)} + e^{-\frac{1}{2}\left((-\sqrt{y})^2\right)}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}y}
\end{aligned}
$$

- VAs com CDFs contínuas mas com saltos isolados (descontinuidades).
- Exemplo: Lançamento da Moda

$$\begin{array}{rcl} \text{Se cara} & \rightarrow & X \sim N(0,1) \\ \text{coroa} & \rightarrow & X = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X \leq x| \text{ caras }) \times P(\text{caras}) + \\ & \quad P(X \leq x| \text{ coroas }) \times P(\text{coroas}) \end{aligned}$$

Se a moeda é não viciada

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\left(P(X \leq x| \text{ caras }) + P(X \leq x| \text{ coroas })\right)$$

Variáveis Aleatórias Mistas (cont.)

Temos duas situações

$$\begin{cases} = \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2} \times 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ = \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2} \times 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

ou $\frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}u(x)$ (degrau).

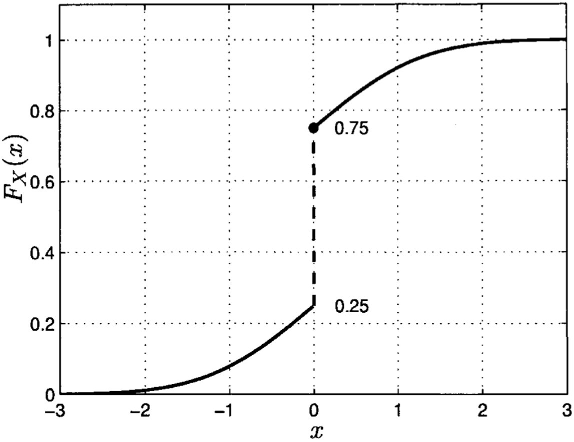


Figura 16: VAs mistas

Variáveis Aleatórias Mistas (cont.)

Podemos calcular a seguinte probabilidade

$$P[x = 0] = F_X(0^+) - F_X(0^-) = 0,75 - 0,25 = 0,5$$

e a PDF

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d\left[\frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}u(x)\right]}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{2}\delta(x)$$

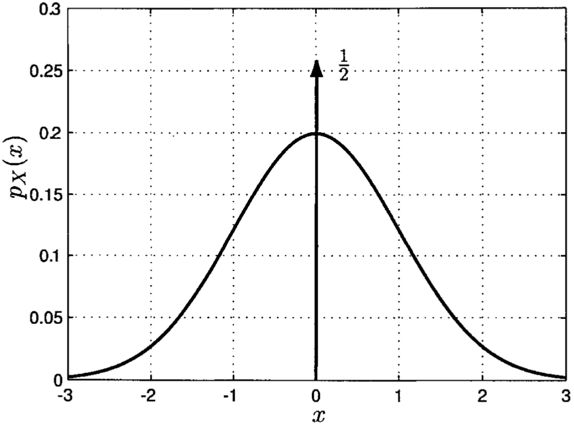


Figura 17: PDF VAs mistas

Variáveis Aleatórias Mistas (cont.)

- Em geral podemos escrever todas as PDFs desse tipo como

$$p_X(x) = p_C(x) + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$

desde que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_C(x)dx + \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Para VAs discretas

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(x - x_i) \quad i = 1, 2, \dots$$