Introdução aos Processos Estocásticos - Processos Estocásticos Gaussianos

Eduardo M. A. M. Mendes

DELT - UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais
emmendes@cpdee.ufmg.br

Muito importante na prática

1) Fisicamente justificável pelo TLC.
2) Matematicamente manipulável.
3) PDF conjunta de amostras $\sim N(\mu, \sigma^2)$.
4) Definida apenas por dois momentos.
   a) Se os momentos podem ser estimados $\rightarrow$ estimativa da pdf $N(\bullet, \bullet)$.
   b) Se PA é WSS $\rightarrow$ Estacionariedade.
5) A saída de um sistema linear cuja entrada é um PA gaussiano é também um PA gaussiano.

Definição: Caso Discreto

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_N \end{pmatrix}^T \sim N(\mu, \mathbf{c})$$

A pdf é

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{c}) e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \mathbf{c}(\mathbf{x}-\mu)}}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mu &= E_{\mathbf{X}}[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} E_{\mathbf{X}_1}(x_1) \\ \vdots \\ E_{\mathbf{X}_N}(x_N) \end{bmatrix} \\
\mathbf{c} &= E_{\mathbf{X}}\left[(\mathbf{X} - E_{\mathbf{X}}[\mathbf{x}])(\mathbf{X} - E_{\mathbf{X}}[\mathbf{x}])^T\right] \\
&= \begin{bmatrix} Var(X_1) & cov(X_1, X_2) & \dots & cov(X_1, X_N) \\ \vdots & Var(X_2) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_N, X_1) & \dots & \dots & Var(X_N) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Introdução (cont.)

1) Somente os dois primeiros momentos μ e $\mathbf{c}$.
2) Se VAs são não correlacionadas $\rightarrow$ $\mathbf{c}$ é diagonal $\rightarrow$ VAs independentes.
3) $\mathbf{Y} = \underbrace{\mathbf{G}}_{M\times N,\ M\leq N} \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y} \sim N(\mathbf{G}\mu, \mathbf{GCG}^T)$

Exemplo: WGN definido IID com $X[n] \sim N(0,\sigma^2)$ e X com dimensão K.

Introdução (cont.)

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{K} p_X[x_i](X[x_i]) \\
&= \prod_{i=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}X^2[n_i]} \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{K}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{K}{2}} det^{\frac{1}{2}}(\sigma^2 I)} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T(\sigma^2 I)^{-1}\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

ou simplesmente $N(\mathbf{0}, \sigma^{\mathbf{2}}\mathbf{I})$, ruído gaussiano branco (WGN).

Introdução (cont.)

Exemplo:

$$X[n] = \frac{1}{2}\left(U[n] + U[n-1]\right)$$

onde $U[n]$ é WGN com variância σ_U^2. Para mostrar que é um PA gaussiano considere

$$K = 2,\ n_1 = 0,\ n_2 = 1$$

logo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} U[-1] \\ U[0] \\ U[1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

ou $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{G}\mathbf{c}_U\mathbf{G}^T) = N(\mathbf{0}, \sigma_U^2\mathbf{G}\mathbf{G}^T)$.

Para $n_1 = n_0$ e $n_2 = n_0 + 1$

Introdução (cont.)

$$\begin{bmatrix} X[n_0] \\ X[n_0+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U[n_0-1] \\ U[n_0] \\ U[n_0+1] \end{bmatrix}$$

que leva ao mesmo resultado.

Transformação Linear de **U** produz outro vetor aleatório gaussiano, ou seja, $X[n]$ é um PA gaussiano.

$$U[n] \rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{-1}}}_{\text{Filtro Suavizador}} \rightarrow X[n] = \frac{1}{2}U[n] + \frac{1}{2}U[n-1]$$

Por exemplo, se o filtro é realmente um suavizador

$$P(X[1]-X[0]>1) < P(U[1]-U[0]>1)$$

Introdução (cont.)

mas

$$P(U[1] - U[0]) \sim N(0,2)$$

pois $U[n] \sim N(0,1)$ e independente.
Logo

$$P(U[1] - U[0]) = Q\left(\frac{1-0}{\sqrt{2}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,2398$$

Para encontrar $P(X[1] - X[0] > 1)$ seja $y = X[1] - X[0]$.

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \sim N(\mathbf{A}E[\mathbf{X}], \mathbf{A}\mathbf{c_X}\mathbf{A}^T)$$

com $\mathbf{A}E[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$ ($X[n]$ tem média zero).

$$Var(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}\mathbf{c_X}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{c_X} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mas

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} U[-1] \\ U[0] \\ U[1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

logo

$$\begin{aligned} \mathbf{c_X} &= \mathbf{G c_U G}^T = \mathbf{G}\sigma_U^2 I \mathbf{G}^T \\ &= \mathbf{G G}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$Var(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

o que implica em $Y \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} P(X[1] - X[0] > 1) = P(Y > 1) &= Q\left(\frac{1-0}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{2}\right) \\ &= 0,0786 < 0,2398 = P(U[1] - U[0]) \end{aligned}$$

Movimento Browniano = Passeio Aleatório com passos gaussianos

$$X[n] = \sum_{i=0}^{n} U[i] \qquad n \geq 0$$

onde $U[n]$ é WGN com variância σ_U^2.

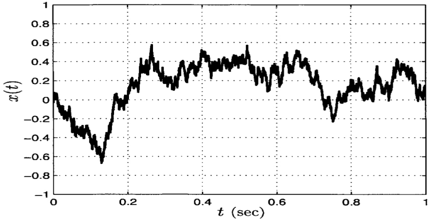


Figura 1: Realização de Processo Wiener

Processo Wiener em Tempo Discreto (cont.)

- Qualquer conjunto de amostras é uma transformação linear de $U[i]$s o que resulta em um PA gaussiano.
- A variância é

$$Var(X[n]) = (n+1)\sigma_U^2$$

ou seja, um processo não-estacionário.

PA Gaussiano

Propriedades de um PA Gaussiano

1) Se as amostras são não-correlacionadas - independência.
2) Se um PA Gaussiano é WSS - estacionário no sentido restrito

Transformações Lineares - Novos PAs Gaussianos podem ser definidos como saída de filtros LTI com entradas gaussianas

- Filtro MA

$$U[n] \rightarrow \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}} \rightarrow X[n]$$

- Filtro AR

$$U[n] \rightarrow \boxed{\frac{1}{1 - az^{-1}}} \rightarrow X[n]$$

$$X[n] = aX[n-1] + U[n] \quad \text{com } |a| < 1$$

PA Gaussiano (cont.)

- Filtro MA

$$U[n] \to \boxed{1 - bz^{1}} \to X[n]$$

$$X[n] = U[n] - bU[n-1]$$

- Filtro ARMA

$$U[n] \to \boxed{\frac{1 - bz^{-1}}{1 - az^{-1}}} \to X[n]$$

$$X[n] = aX[n-1] + U[n] - bU[n-1] \text{ com } |a| < 1$$

ou na forma geral

$$\to \boxed{\frac{1 - b(1)z^{-1} - b(2)z^{-2} - \cdots - b(q)z^{-q}}{1 - a(1)z^{-1} - a(2)z^{-2} - \cdots - a(p)z^{-p}}} \to$$

PA Gaussiano (cont.)

$$X[n] = \sum_{k=1}^{p} a[k]X[n-k] + U[n] - \sum_{k=1}^{q} b[k]U[n-k]$$

um ARMA(p,q), onde $U[n]$ é WGN com variância σ_U^2.

Exemplos

Em geral assumimos que $X[n]$ é gaussiano e WSS com média μ_X e ACS $r_X[k]$

$$\underbrace{X[n]}_{\text{Gaussiano WSS}} \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow \underbrace{Y[n]}_{\text{Gaussiano WSS}}$$

$$Y[n] \rightarrow \begin{cases} \mu_Y & = \quad \mu_X H(0) \\ P_Y(f) & = \quad |H(f)|^2 \times P_X(f) \end{cases}$$

Exemplo: ARMA

$$\begin{aligned} \mu_X &= \underbrace{\mu_U}_{=0} H(0) = 0 \\ P_X(f) &= |H(F)|^2 \times P_U(f) \\ &= |H(e^{j2\pi f})|^2 \times \sigma_U^2 \\ &= \sigma_U^2 \frac{\left|1 - b(1)e^{-\jmath 2\pi f} - \cdots - b(q)e^{\jmath 2\pi fq}\right|^2}{\left|1 - a(1)e^{-\jmath 2\pi f} - \cdots - a(p)e^{\jmath 2\pi fp}\right|^2} \end{aligned}$$

Exemplo: Diferenciador - (remover o sinal DC)

$$X[n] \rightarrow \boxed{1 - z^{-1}} \rightarrow Y[n] = X[n] - X[n-1]$$

onde $X[n]$ é um PA WSS Gaussiano com μ_x e $r_X[k]$. Qual é a PDF de $Y = \begin{bmatrix} Y[0] \\ Y[1] \end{bmatrix}$?

Solução

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E[Y[n]] \\ &= E[X[n] - X[n-1]] \\ &= \mu_X - \mu_X = 0 \text{ (sem nível DC)} \end{aligned}$$

Exemplos (cont.)

e

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}_y &= \begin{bmatrix} E[Y[0]Y[0]] & E[Y[0]Y[1]] \\ E[Y[1]Y[0]] & E[Y[1]Y[1]] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_Y[0] & r_Y[1] \\ r_Y[1] & r_Y[0] \end{bmatrix} \text{ é WSS}
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
P_Y(f) &= |H(f)|^2 \times P_X(f) \\
&= H(f) \times H^*(f) \times P_X(f) \\
&= (1 - e^{-\jmath 2\pi f})(1 - e^{\jmath 2\pi f}) P_X(f) \\
&= 2P_X(f) - e^{\jmath 2\pi f} P_X(f) - e^{-\jmath 2\pi f} P_X(f)
\end{aligned}
$$

Exemplos (cont.)

Tomando a transformada de Fourier inversa

$$r_Y[k] = 2r_X[k] - r_X[k+1] - r_X[k-1]$$

$$\mathbf{c}_Y = \begin{bmatrix} r_Y[0] & r_Y[1] \\ r_Y[1] & r_Y[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(r_X[0] - r_X[1]) & 2r_X[1] - r_X[2] - r_X[0] \\ 2r_X[1] - r_X[2] - r_X[0] & 2(r_X[0] - r_X[1]) \end{bmatrix}$$

Logo a pdf conjunta é

$$P_{Y[0],Y[1]}(y[0], y[1]) = \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}} det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{c}_Y)} e^{-\frac{1}{2} y^T \mathbf{c}_Y^{-1} y}$$

Em geral é difícil achar a pdf do PA $Y[n] = X[n] + \frac{1}{2}X^2[n]$ para

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y[n_1] & y[n_2] & \cdots & y[n_k] \end{bmatrix}^T$$

Se $X[n]$ é gaussiano, podemos pelo menos achar os momentos de $Y[n]$.

Exemplo:

$$\begin{aligned} E[Y[0]Y[1]] &= E\left[\left(X[0] + \frac{1}{2}X^2[0]\right) \times \left(X[1] + \frac{1}{2}X^2[1]\right)\right] \\ &= E\left[X[0]X[1]\right] + \frac{1}{2}E\left[X[0]X^2[1]\right] + \\ & \quad \frac{1}{2}E\left[X^2[1]X[0]\right] + E\left[X^2[0]X^2[1]\right] \end{aligned}$$

repare que o termo $E\left[X^2[0]X^2[1]\right]$ é de 4^a ordem!

Repare

$$E\left(X_1^{\ell_1}X_2^{\ell_2}\cdots X_N^{\ell_N}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}X_1^{\ell_1}X_2^{\ell_2}\cdots X_N^{\ell_N}p_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(X_1\cdots X_N)dX_1\cdots dX_N$$

que trata com uma pdf gaussiana multivariada, função do 1^o e 2^o momentos.

Resultado Interessante: Se $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}X1 & X_2 & X_3 & X_4\end{bmatrix}^T \sim N(\mathbf{0},\mathbf{c})$, então

$$\begin{aligned}E[X_1X_2X_3X_4] &= E[X_1X_2]E[X_3X_4]+\\ &\quad E[X_1X_3]E[X_2X_4]+E[X_1X_4]E[X_2X_3]\end{aligned}$$

Se $X[n]$ é um PA Gaussiano com média zero

Transformações Não-Lineares (cont.)

$$
\begin{aligned}
E[X[n_1]X[n_2]X[n_3]X[n_4]] &= E[X[n_1]X[n_2]] \times E[X[n_3]X[n_4]] + \\
&\quad E[X[n_1]X[n_3]] \times E[X[n_2]X[n_4]] + \\
&\quad E[X[n_1]X[n_4]] \times E[X[n_2]X[n_3]]
\end{aligned}
$$

só é preciso o segundo momento.
Se $X[n]$ é também WSS

$$
\begin{aligned}
E[X[n_1]X[n_2]X[n_3]X[n_4]] &= r_X[n_2 - n_1] \times r_X[n_4 - n_3] + \\
&\quad r_X[n_3 - n_1] \times r_X[n_4 - n_2] + \\
&\quad r_X[n_4 - n_1] \times r_X[n_3 - n_2]
\end{aligned}
$$

Transformações Não-Lineares (cont.)

Exemplo: Quadrado de um PA Gaussiano WSS

$$X[n] \rightarrow \boxed{(\ )^2} \rightarrow Y[n] = X^2[n]$$

onde $X[n]$ tem média zero.

Solução

$$E[Y[n]] = E[X^2[n]] = r_X[0] = \mu_Y$$

$$\begin{aligned} E[Y[n]Y[n+k]] &= E[X^2[n] \times X^2[n+k]] \\ &= E[X[n]X[n]X[n+k]X[n+k]] \\ &= r_X[0] \times r_X[0] + r_X[k]r_X[k] + r_X[k] \times r_X[k] \\ &= r_X^2[0] + 2r_X^2[k] \quad \text{que não depende de } n \end{aligned}$$

Transformações Não-Lineares (cont.)

$Y[n]$ é WSS com

$$
\begin{aligned}
\mu_Y &= r_X[0] \\
r_Y[k] &= r_X^2[0] + 2r_X^2[k] \\
P_Y(f) &= \mathcal{F}\{r_Y[k]\} = r_X^2[0]\delta(f) + 2\underbrace{P_X(f) * P_X(f)}_{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_X(v)P_X(t-v)dv}
\end{aligned}
$$

Considere, agora, que $X[n]$ é um PA MA, ou seja

$$X[n] = \frac{1}{2}(U[n] - U[n-1]) \text{ com } \sigma_U^2 = 1$$

Sabemos que

$$r_X[k] = \frac{1}{2}\delta[k] + \frac{1}{4}\delta[k+1] + \frac{1}{4}\delta[k-1]$$

Logo

Transformações Não-Lineares (cont.)

$$
\begin{aligned}
\mu_Y &= r_X[0] = \frac{1}{2} \\
r_Y[k] &= r_X^2[0] + 2r_X^2[k] \\
&= \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{2}\delta[k] + \frac{1}{4}\delta[k-1] + \frac{1}{4}\delta[k+1]\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\delta[k] + \frac{1}{8}\delta[k-1] + \frac{1}{8}\delta[k+1] \\
P_Y(f) &= \frac{1}{4}\delta(t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(e^{-\jmath 2\pi f} + e^{\jmath 2\pi f}\right) \\
&= \frac{1}{4}\delta(t) + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}cos(2\pi f)}_{\text{Comparar com a PSD de } x} \qquad \text{com } |f| \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Transformações Não-Lineares (cont.)

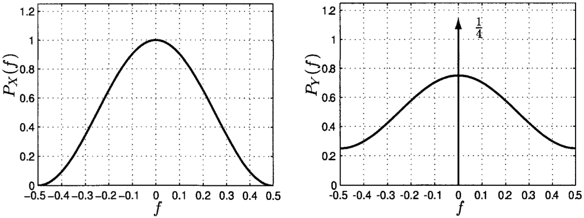


Figura 2: Quadrado de um PA Gaussiano WSS

Processo Aleatório Gaussiano em Tempo Contínuo

Considere

$$X(t) \qquad -\infty < t < \infty$$

$X(t)$ é gaussiano se

$$\mathbf{x} = \big(x(t_1), x(t-2), \ldots, x(t_r)\big)^T$$

tem pdf gaussiana multivariada para todo k e todo $\{t_1, \ldots, t_k\}$.

Exemplo: PA Wiener em Tempo Contínuo (Movimento Browniano)

$$X(t) = \int_0^t U(\tau) d\tau \quad t \geq 0$$

onde $U(t)$ é WGN CT com $r_U(\tau) = \frac{N_o}{2}\delta(\tau)$.

Processo Aleatório Gaussiano em Tempo Contínuo (cont.)

Repare que os incrementos, por exemplo $X(t_2) - X(t_1)$, são independentes e estacionários.

- Se $X(t)$ é gaussiano, precisamos provar que a "soma não-contável" de VAS gaussianas é gaussiana.

- Precisamos achar somente a média e a covariância

$$
\begin{aligned}
E(X(t)) &= E\left(\int_0^t U(\tau)d\tau\right) \\
&= \int_0^t E(U(\tau))d\tau = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X(t_1)X(t_2)) &= E\left(\int_0^{t_1} U(\tau_1)d\tau_1 \int_0^{t_2} U(\tau_2)d\tau_2\right) \\
&= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \underbrace{E\left(U(\tau_1)\times U(\tau_2)\right)}_{r_U(\tau_2-\tau_1)=\frac{N_o}{2}\delta(\tau_2-\tau_1)} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \frac{N_o}{2}\int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_2}\delta(\tau_2-\tau_1)d\tau_2\right)d\tau_1
\end{aligned}
$$

Para que o impulso dispare é preciso que t_2 seja maior do que t_1. Logo

$$E\left(X(t_1) \times X(t_2)\right) = \frac{N_o}{2} \int_0^{t_1} d\tau_1 = \frac{N_o}{2} t_1 \text{ para } t_2 > t_1$$

e

$$E\left(X(t_1) \times X(t_2)\right) = \frac{N_o}{2} \int_0^{t_2} d\tau_2 = \frac{N_o}{2} t_2$$

ou

$$E\left(X(t_1) \times X(t_2)\right) = \frac{N_o}{2} min(t_1, t_2)$$

O PA Wiener $X(t) \sim N\left(0, \frac{N_o}{2} t\right)$ é não-estacionário.

Rayleigh Fading Sinusoid

Neste caso temos

- Amplitude Aleatória e
- Fase Aleatória

Exemplo: Senoide transmitida é recebida no destino a partir de caminhos múltiplos (Interferência Construtiva e Destrutiva) - Multipath Fading.

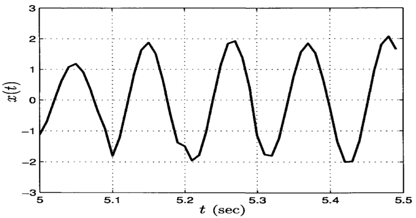


Figura 3: Exemplo de segmento de sinal num curto período de tempo

Considere o seguinte modelo para um período curto de tempo

$$X(t) = \underbrace{A}_{VA:\quad A>0} \; cos(2\pi F_0 t + \underbrace{\theta}_{VA:\quad 0<\theta<2\pi})$$

Qual é a PDF para A e θ?

Rayleigh Fading Sinusoid (cont.)

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \underbrace{Acos(\theta)}_{=U} cos(2\pi F_o t) - \underbrace{Asen(\theta)}_{=V} sen(2\pi F_0 t) \\
&= Ucos(2\pi F_0 t) - Vsen(2\pi F_0 t)
\end{aligned}
$$

Usando o TLC, podemos supor que

$$U \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{e} \quad V \sim N(0, \sigma^2)$$

Repare que

$$E(U) = E(V) = 0 \Longrightarrow E(X) = 0$$

ou seja, com U e V considerados independentes, $X(t)$ está relacionado com um PA Gaussiano com média zero.

Rayleigh Fading Sinusoid (cont.)

$$\begin{bmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(2\pi F_0 t_1) & -sin(2\pi F_0 t_1) \\ \vdots & \vdots \\ cos(2\pi F_0 t_k) & -sin(2\pi F_0 t_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

como $U \sim N(0, \sigma^2)$ e $V \sim N(0, \sigma^2)$ resulta em $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ com PDF Gaussiana Multivariada.

X é uma transformação de uma PDF Gaussiana Multivariada

com

- $A = \sqrt{U^2 + V^2} \quad \sim \quad$ Rayleigh,
- $\theta = \arctan\left(\frac{U}{V}\right) \quad \sim \quad U(0, 2\pi)$

Rayleigh Fading Sinusoid (cont.)

Mas $X(t)$ é WSS?

$$E(U) = E(V) \Longrightarrow E(X(t)) = 0$$

e

$$\begin{aligned}
E(X(t)X(t+\tau)) &= E\left((Ucos(2\pi F_0 t) - Vsen(2\pi F_0 t)) \times \right. \\
&\qquad \left. (Ucos(2\pi F_0(t+\tau)) - Vsen(2\pi F_0(t+\tau)))\right) \\
&= E(U^2)cos(2\pi F_0 t)cos(2\pi F_0(t+\tau)) + \\
&\qquad E(V^2)sen(2\pi F_0 t)sen(2\pi F_0(t+\tau)) \\
&= \sigma^2 cos(2\pi F_0 t)cos(2\pi F_0(t+\tau)) + \sigma^2 sen(2\pi F_0 t)sen(2\pi F_0(t+\tau)) \\
&= \sigma^2 cos(2\pi F_0 \tau) \text{ que não depende de } t
\end{aligned}$$

logo $X(t)$ é WSS.

E a PSD?

Rayleigh Fading Sinusoid (cont.)

$$P_X(F) = \mathcal{F}\{r_X(\tau)\} = \frac{\sigma^2}{2}\delta(F + F_0) + \frac{\sigma^2}{2}\delta(F - F_0)$$

Processo Aleatório Gaussiano Passa-Faixa

O procedimento anterior foi considerado por um tempo curto, mas com o passar do tempo a amplitude de senoide muda, ou seja, o modelo seria ainda melhor se considerássemos A e θ variando com o tempo.

$$x(t) = \underbrace{A(t)}_{\text{modulação em amplitude}} cos(2\pi F_0 t + \underbrace{\theta(t)}_{\text{modulação em fase}})$$

onde $x(t)$ é um processo aleatório passa-faixa.
Usando a mesma idéia, temos

$$x(t) = \underbrace{A(t)cos(\theta(t))}_{=U(t)} cos(2\pi F_0 t) - \underbrace{A(t)sen(\theta(t))}_{=V(t)} sen(2\pi F_0 t)$$

Supondo que $U(t)$ e $U(t)$ são PAs Gaussianos e independentes um do outro

$$p_{\mathbf{U},\mathbf{V}} = p_{\mathbf{U}} \times p_{\mathbf{V}}$$

Para que $E(X(t)) = 0$, precisamos assumir que $E(U(t)) = 0 = E(V(t))$ para todo t.

Para $X(t)$ ser WSS, assumimos que $U(t)$ e $V(t)$ são WSS e têm ACF $r_U(\tau) = r_V(\tau)$, logo

$$
\begin{aligned}
r_X(\tau) &= E\left(X(t)X(t+\tau)\right) \\
&= E\left((U(t)cos(2\pi F_0 t) - U(t)sen(2\pi F_0 t)) \times \right. \\
&\qquad \left. (U(t+\tau)cos(2\pi F_0(t+\tau)) - U(t+\tau)sen(2\pi F_0(t+\tau)))\right) \\
&= r_U(\tau)cos(2\pi F_0 t)cos(2\pi F_0(t+\tau)) + \\
&\qquad r_V(\tau)sen(2\pi F_0 t)sen(2\pi F_0(t+\tau)) \\
&= r_U(\tau)cos(2\pi F_0 \tau) \text{ considerando } r_U(\tau) = r_V(\tau)
\end{aligned}
$$

$$P_X(f) = \frac{1}{2}P_U(F + F_0) + \frac{1}{2}P_U(F - F_0)$$

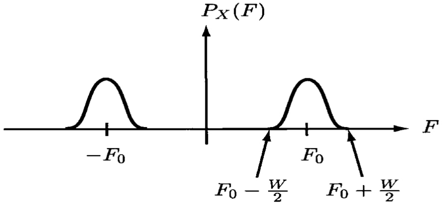


Figura 4: Modulação

Considerando simetria $P_U(F) = P_V(F)$ em torno do zero.

Processo Aleatório Gaussiano Passa-Faixa (cont.)

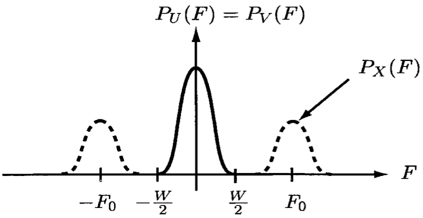


Figura 5: Modulação

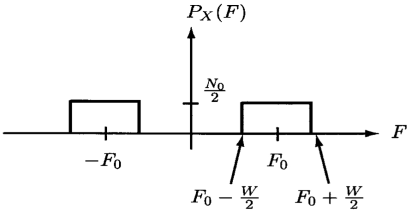
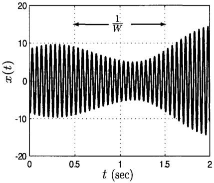


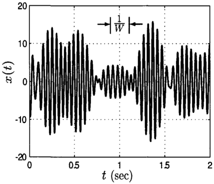
Figura 6: Filtro Passa-Faixa

$$P_U(F) = P_V(F) = \begin{cases} N_o & |F| < \frac{W}{2} \\ 0 & |F| > \frac{W}{2} \end{cases}$$

$$r_U(\tau) = r_V(\tau) = N_o W \frac{sen(\pi W \tau)}{\pi W \tau}$$



(a) $F_0 = 20$ Hz, $W = 1$ Hz



(b) $F_0 = 20$ Hz, $W = 4$ Hz

Figura 7: Realizações de ruído

$$A(t) = \sqrt{U^2(t) + V^2(t)}$$

espera-se que o envelope seja não-correlacionado para $\tau = \Delta t > \frac{1}{W}$.