

Análisis del movimiento de un paracaídas considerando la resistencia del aire

Valentina Miranda Garcés

Tatiana Murillo Mosquera

Isabella Montoya Castellanos

José Antonio Álvarez Cadavid

Pablo Ardila Ochoa

Universidad de Medellín

Física I

Volodymyr Akimov

11 de mayo de 2023

1. Resumen

El problema del paracaídas es un modelo de un fenómeno físico que hace uso de ecuaciones diferenciales para describir el movimiento de un paracaídas. Este modelo suele ser encontrado en libros de ecuaciones diferenciales, siendo una versión simplificada de un fenómeno real. Dado que el curso de Física I se enfoca en el movimiento y su descripción, además de la relación de este con fuerzas o influencias diversas, se considera que este fenómeno puede llegar a ser muy pertinente para la aplicación de los conceptos aprendidos durante el curso, pues será posible considerar diferentes fuerzas y observar un movimiento con características que incluyen la aplicación de diferentes temas tratados en la clase. Además de esto, la construcción y todo el proceso experimental se presentan de forma factible para el nivel y las capacidades de los integrantes del proyecto.

El movimiento que describe un paracaídas tiene un carácter de complejidad elevado debido a su dependencia de múltiples factores, entre los cuales uno que es esencialmente determinante: las corrientes de aire. Debido a la complejidad de su desarrollo teórico, la fabricación de paracaídas se ha caracterizado por ser semiempírica, lo cual implica un factor de costos bastante considerable. Para describir el movimiento del paracaídas, se buscaron modelos matemáticos desarrollados con anterioridad, que contengan la constante de fricción en función de valores conocidos como la velocidad terminal y la gravedad. Dichos datos anteriores, además del tiempo de vuelo y la posición del objeto, fueron obtenidos gracias al dispositivo experimental: el lanzamiento de 10 paracaídas, lanzados desde una altura definida y cargados con igual masa, variando solo el área de cada uno de los paracaídas. Estas pruebas experimentales fueron registradas en video y con el apoyo de la herramienta Tracker, se obtienen y tabulan en puntos específicos las variables del tiempo y la velocidad; posteriormente esos datos serán graficados y visualmente obtener la velocidad terminal. Con este dato respectivo, se efectúa el cálculo de la constante de fricción en cada uno de los 10 casos, es decir, para cada paracaídas con su determinada área. Culminando con los datos experimentales se graficaron las constantes halladas con las respectivas áreas, para la debida interpretación y relación entre los datos obtenidos. Al tiempo, de manera computacional resolver los modelos matemáticos del movimiento del paracaídas para usar los valores de los coeficientes hallados y modelar la trayectoria obtenida teóricamente de cada paracaídas. Finalmente, se comparan los hallazgos teóricos y experimentales obtenidos al final del proceso, donde se efectuaron los respectivos análisis y formularán las respectivas conclusiones sobre los modelos matemáticos, relación entre las variables en estudio, posibles errores y su debida explicación.

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Describir la variación de la fuerza de fricción causada por la resistencia del aire en función del área del paracaídas

2.2. Objetivos específicos

- Hallar modelos matemáticos previamente desarrollados que permiten la descripción del movimiento de un paracaídas.
- Obtener las ecuaciones que contengan la constante de fricción en función de valores conocidos como la velocidad terminal y la gravedad.
- Construir 10 paracaídas a escala variando en ellos el área.
- Realizar pruebas experimentales del lanzamiento de los paracaídas y registrar variables de velocidad y posición en momentos específicos haciendo uso de la herramienta Tracker.
- Obtener las tablas de datos de tiempo y velocidad para graficar e identificar visualmente la velocidad terminal.
- Usar el valor de la velocidad terminal para hallar el valor de la constante de fricción para las diferentes áreas.
- Graficar los valores de las constantes en función de las áreas y determinar qué tipo de curva describe.
- Resolver los modelos matemáticos del movimiento del paracaídas computacionalmente para usar los valores de los coeficientes hallados y modelar la trayectoria obtenida teóricamente de cada paracaídas.
- Comparar los resultados del modelamiento computacional con los obtenidos experimentalmente.

3. Dispositivo experimental y medidas

El desarrollo experimental del proyecto comenzó con la construcción de los paracaídas, siguiendo las instrucciones descritas en [3], sin embargo, el material elegido para el paracaídas fue papel celofán, esto por cuestiones de disponibilidad y durabilidad. Además de esto, se decidió hacer 10 paracaídas, donde cada uno posee longitudes de sus lados comenzando desde $0.15\text{m} \pm 0.001\text{m}$, aumentando $0.05\text{m} \pm 0.001\text{m}$ a los lados de cada paracaídas, como se muestra en la figura 1 y 2

Las medidas de las áreas fueron realizadas con una regla común, cuya incertidumbre es 0.1cm o 0.001m . Por otro lado, la longitud de los hilos que conectan los extremos del paracaídas corresponde a la misma longitud de cada lado del paracaídas, es decir, para el paracaídas N1 la longitud de sus lados es $0.15\text{m} \pm 0.001\text{m}$, por lo tanto la longitud de sus cuerdas es también de $0.15 \pm 0.001\text{m}$. Estas longitudes también fueron obtenidas con la misma regla con la que se hallaron las medidas de los cuadrados de papel celofán, es decir, las longitudes de las cuerdas también tienen un error de 0.001m . El material usado para las cuerdas fue hilo coral. Finalmente las cuerdas se unieron a los cuadrados de papel celofán

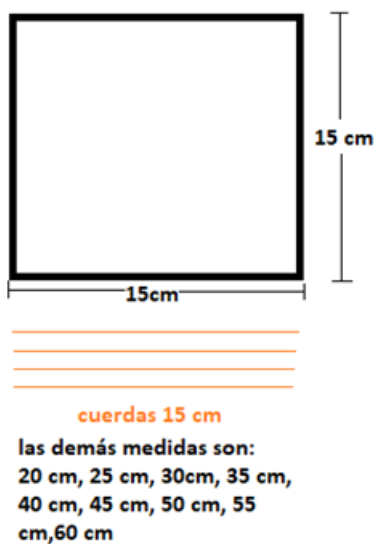


Figura 1: Esquema construcción de paracaídas



Figura 2: Paracaídas realizados

usando unas pequeñas cintas circulares. Para la masa que cuelga de los paracaídas se optó por usar un par de canicas, cuya masa total fue obtenida con una gramera convencional, obteniendo un valor de $0.013 \text{ kg} \pm 0.0001 \text{ kg}$. Por otro lado, el lanzamiento de los paracaídas se llevó a cabo en el coliseo de la Universidad. Se eligió este lugar por su control de corrientes de aire fuertes, de modo que los paracaídas siguieran una trayectoria lo más recta posible. La altura designada para el lanzamiento se obtuvo usando un distanciómetro láser, cuyo error es de 0.001 m , obteniendo una altura de $4.5 \text{ m} \pm 0.001 \text{ m}$. Finalmente, el proceso del lanzamiento de los paracaídas se llevó a cabo ubicando las canicas a la altura registrada y sosteniendo el paracaídas de forma que quede extendido, como se observa en la figura 3 y 4.

Los videos se tomaron desde una distancia suficiente para lograr capturar toda la trayectoria desde que es soltado hasta que llega al suelo. Luego, estos videos fueron estudiados haciendo uso de la aplicación Tracker, para lo cual se registraron manualmente los puntos donde se encuentra el objeto que lleva el paracaídas en un tiempo determinado, variando el step size de cada lanzamiento de modo que fuera posible obtener datos lo más uniformemente posible. Los datos obtenidos de Tracker fueron el tiempo, la posición en y, y la velocidad en y. Estos datos fueron pasados a Excel para replicar las gráficas de velocidad en función del tiempo y así identificar las velocidades terminales. Ahora, teniendo esto, lo siguiente es usar los modelos matemáticos previamente planteados para obtener las constantes de fricción.//

4. Modelo matemático

Partiendo de la Segunda ley de Newton, la ley de fuerzas, se tiene que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un objeto (denotadas \vec{F}_i) es igual a la masa m por la aceleración

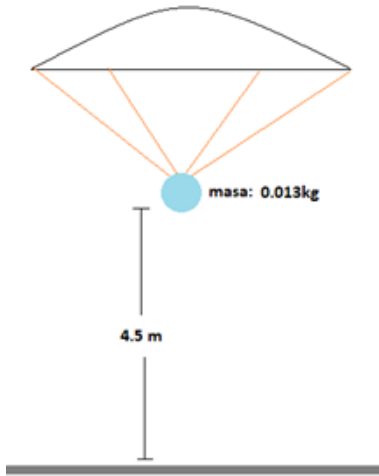


Figura 3: Esquema lanzamiento del paracaídas



Figura 4: lanzamiento del paracaídas

\vec{a} , así:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (1)$$

De forma específica, se puede pensar en el movimiento que describe un paracaídas y las fuerzas que ejercen sobre él una perturbación en su estado de movimiento. Primero podemos considerar el peso, que será nombrado F_g y está dado por:

$$F_g = mg \quad (2)$$

donde m es la masa del objeto y g es la constante gravitacional. Esta fuerza apunta en la dirección hacia la que cae el paracaídas, hacia el suelo. Hasta este punto podría describirse un movimiento en caída libre, sin embargo, el diseño que posee un paracaídas tiene el propósito de disminuir esa velocidad que lleva el objeto a medida que cae, de modo que se debe ejercer una fuerza con dirección contraria al peso, por lo tanto, se hace uso del medio por el que cae el paracaídas para incluir una fuerza sobre él, la fuerza de fricción del aire, nombrada F_d . En el desarrollo teórico de los modelos del movimiento de un paracaídas, tal como en [1], se asume que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto, de modo que F_d se obtiene:

$$\begin{aligned} F_d &\propto v^2 \\ F_d &= Av^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Donde A es una constante de proporcionalidad. Con esto en cuenta, se puede entonces presentar un diagrama de cuerpo libre para el paracaídas, como en la figura 5.

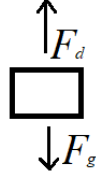


Figura 5: Diagrama de cuerpo libre paracaídas

También es posible especificar la Segunda ley de Newton para este esquema, obteniendo entonces:

$$\begin{aligned} F_g - F_d &= ma \\ mg - Av^2 &= ma \end{aligned} \quad (4)$$

Teniendo esto, es posible usar la definición de aceleración como primera derivada de la velocidad para integrar y así obtener una ecuación que permita determinar la velocidad en función del tiempo.

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2 \quad (5)$$

Siendo $\frac{A}{m} = k$

De acuerdo con [1], se asume una condición inicial de $v(0) = 0$ para obtener los límites de integración y así obtener la función de la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \tanh(t\sqrt{gk}) \quad (6)$$

En este punto es importante introducir el concepto de velocidad terminal, es decir, la velocidad que alcanza el objeto cuando la sumatoria de las fuerzas se igualan a cero. Esto será necesario para obtener el valor de k en términos de otras variables conocidas, haciendo uso de la ecuación (4):

$$\begin{aligned} 0 &= g - kv_t^2 \\ k &= \frac{g}{v_t^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Reemplazando (7) en (6) se tiene que:

$$v = v_t \tanh\left(\frac{gt}{v_t}\right) \quad (8)$$

Finalmente, será posible obtener la posición en función del tiempo al integrar la ecuación (8), de modo que resulta:

$$x = \frac{g}{v_t^2} \ln\left(\cosh\left(\frac{gt}{v_t}\right)\right) \quad (9)$$

5. Resultados y análisis

área paracaídas (en m^2)	velocidad terminal (en $\frac{m}{s}$)	constante k
0.0225	4.770	0.431
0.04	3.627	0.746
0.0625	2.916	1.154
0.09	2.709	1.337
0.1225	1.933	2.627
0.16	1.789	3.065
0.2025	1.448	4.679
0.25	1.204	6.773
0.3025	1.072	8.535
0.36	0.987	10.062

Tabla 1: valores de la velocidad terminal obtenidos experimentalmente

Después de llevar a cabo los lanzamientos y obtener los valores de las velocidades en diferentes momentos con Tracker, la velocidad terminal para cada área fue hallada obteniendo un promedio de los intervalos que mostraban un comportamiento constante, sin embargo, se obtuvo que, a medida que aumentaba el área del paracaídas, estas gráficas empezaban a diferir más en la uniformidad a lo largo de la trayectoria, lo cual se puede deber a ciertas razones que se describen a continuación.

La primera de ellas puede deberse a que la proporción área-masa no alcanzaba a compensar la influencia de las corrientes de aire en el lugar del experimento, pues, a pesar de que fue realizado en un lugar cerrado, de igual forma este poseía zonas de ventilación que pueden haber influido en los resultados.

Esta parte se complementa con el hecho de que las trayectorias de los paracaídas con áreas mayores se presentaban menos rectas que las demás, de modo que también se daba un movimiento a lo largo de la horizontal, causando fluctuaciones en su trayectoria vertical.

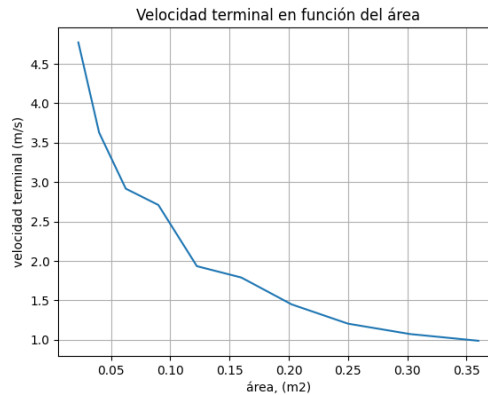


Figura 6: Velocidad en función del área del paracaídas

A pesar de eso, fue posible extraer información relevante, dentro de la cual cabe resaltar la tendencia a disminuir la velocidad terminal a medida que aumenta el área, como se puede observar en la figura (6)

Por otro lado, el resultado más relevante para los objetivos del proyecto se presenta al obtener el valor de la constante k para cada área haciendo uso de la ecuación (7). Los resultados, presentados en la tabla (1), pueden ser analizados por medio de la figura (7).

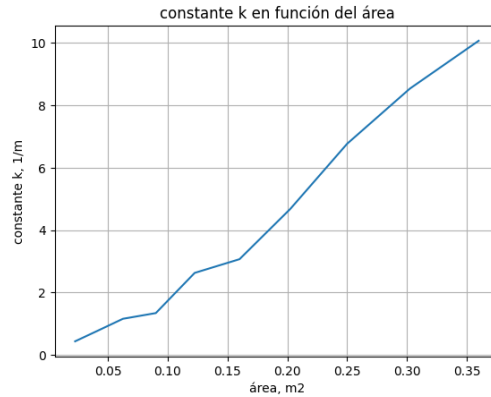


Figura 7: Constante k en función del área del paracaídas

Allí se observa una clara relación entre el área del paracaídas y la constante k , de modo que se puede determinar que a medida que se aumenta el área del paracaídas, esta constante también aumenta.

Este resultado expresa una pertinencia acorde con la teoría, pues, de acuerdo con el desarrollo realizado por [2], la constante de proporcionalidad A de la ecuación 3 puede ser expresada tomando en cuenta otros factores de la siguiente forma:

$$A = \frac{1}{2} C \rho A' v^2$$

Donde C es un coeficiente de fricción (o arrastre), A' es el área del objeto orientado hacia el fluido y ρ es la densidad del fluido. Pensando en un desarrollo de esta igualdad, es posible evidenciar que si el valor de A' aumenta, el coeficiente A también lo hará, sin embargo, esto se menciona para determinar un criterio de evaluación sobre los resultados obtenidos experimentalmente, pues este modelo incluye terminología de fluidos que va más allá del alcance del curso.

En este punto es importante recordar el significado físico de esta constante, para así darle sentido al análisis. Teniendo en cuenta la ecuación (5), se sabe que k corresponde al cociente entre una constante de proporcionalidad A y la masa m del objeto. Dado que para los experimentos realizados la masa era fija, significa que esa variación se va a presentar en la constante de proporcionalidad A , la cual hace parte de la fuerza de fricción del aire. De modo que, a medida que aumenta el área, la constante de proporcionalidad A será mayor, sin embargo, teniendo en cuenta que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad al

cuadrado, esto significa que el aumento en la constante A será compensado por la velocidad, puesto que, como se vio en la figura (6), la velocidad terminal en realidad disminuye a medida que se aumenta el área del paracaídas, de modo que las velocidades que pueden alcanzar los paracaídas de mayor área son menores, con lo cual se puede finalmente concluir que la fuerza de fricción del aire después de alcanzar la velocidad terminal será igual para todos los paracaídas. Esto tiene validez en el fundamento de que, al alcanzar la velocidad terminal la aceleración es cero, y por tanto las fuerzas que actúan sobre el objeto (F_g y F_d) deben ser iguales en magnitud pero con sentido contrario. Este resultado se observa en la figura (8).

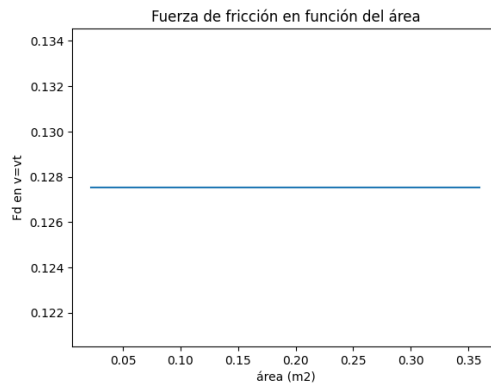


Figura 8: f_d cuando $v = v_t$ en función del área

Con base en el desarrollo teórico del proyecto, es posible hacer uso de las ecuaciones (6) y (8) para obtener las gráficas que describen la velocidad del paracaídas en función del tiempo. Al comparar estas gráficas con las obtenidas tomando los datos de Tracker, fue posible evidenciar que los datos experimentales presentan unas tendencias que vale la pena mencionar.

Para los paracaídas de menor área se observa (como en la figura (9)), que sus valores de velocidad a lo largo de la trayectoria se asemejan a los obtenidos teóricamente.

En contraste, la figura (10) muestra una diferencia bastante pronunciada respecto a la curva teórica. Estas variaciones se presentaron a pesar de llevar a cabo cada lanzamiento múltiples veces, de modo que es posible determinar que, para obtener mejores resultados, es necesario un espacio más adecuado, donde se pueda obtener altura suficiente para alcanzar la velocidad terminal, pero que de igual forma haya un control riguroso de las corrientes de aire. También es posible sugerir el uso de una masa mayor, sin embargo, también es importante resaltar que la influencia de las corrientes de aire tendrá un efecto importante.

Finalmente, se decidió usar los datos hallados experimentalmente, después de haber realizado el análisis y comparación respectivos con la teoría, para desarrollar un modelo computacional con alcance predictivo. Esto se llevó a cabo usando los datos de la constante k obtenidos experimentalmente, de los cuales se obtuvo un ajuste polinomial haciendo uso de la librería Numpy, en Python. Con base en estos coeficiente se construyó una función de

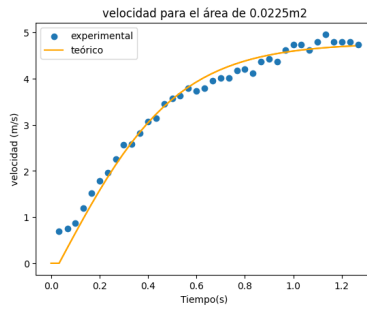


Figura 9: Gráfica de velocidad en función del tiempo, teórico y experimental para el área de 0.0225m

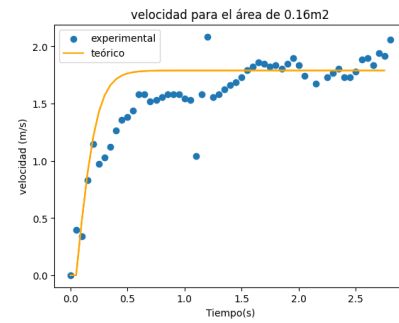


Figura 10: Gráfica de velocidad en función del tiempo, teórico y experimental para el área de 0.16m

la constante k dependiente del área, de modo que se pueda ingresar el área del paracaídas específico, y por medio del desarrollo numérico haciendo uso del método de Euler para la ecuación (5), obtener valores de velocidad y posición en función del tiempo.

El código usando para determinar esto se lista a continuación:

```
import numpy as np
#haciendo un ajuste polinomial de los datos de k
coef = np.polyfit(area,k,deg=2)

fit = [coef[0]*a**2+ coef[1]*a + coef[2] for a in area]

#creando una funcion que devuelve la posicion y la velocidad al recibir
#un area del paracaidas
def traj(a, coef):
    vel_l=[]
    pos_l = []
    t = [0]
    dt = 0.0001
    k= coef[0]*a**2+ coef[1]*a + coef[2]
    g= 9.81
    vel0=0
    pos0=0
    vel_l.append(vel0)
    pos_l.append(pos0)
    i=0
    while pos_l[i]<4.5:
        pos_l.append((vel_l[i]*dt)+ pos_l[i])
        vel_l.append(vel_l[i]+((g-k*((vel_l[i])**2))*dt))
        t.append(t[i]+dt)
```

```
i=i+1  
return t, pos_l, vel_l
```

6. Conclusiones

Por medio del desarrollo teórico y experimental del proyecto fue posible concluir que la constante de fricción k asociada a la fuerza de fricción causada por la resistencia del aire crece a medida que se incrementa el área del paracaídas. Esta afirmación tiene repercusiones en aspectos como el tiempo de caída y tiempo en el que alcanza la velocidad terminal, indicando así que, asumiendo la masa y la altura de lanzamiento constantes, mientras mayor sea el área del paracaídas, este tardará más en llegar al suelo; en contraste, la velocidad terminal será alcanzada en un tiempo menor.

Por otro lado, es importante mencionar que el desarrollo experimental del proyecto presenta espacio para mejoras, teniendo en cuenta las importantes aplicaciones que posee el estudio de los paracaídas tanto para fines de entretenimiento como aterrizaje de aeronaves y prácticas militares, es de gran relevancia continuar con el desarrollo de técnicas tanto experimentales como computacionales que permitan la obtención de información relevante en la fabricación y uso de estos equipos.

Por último, cabe resaltar que el modelo matemático usado para el desarrollo del proyecto es uno bastante simplificado, donde se dejan de forma implícita cuestiones más avanzadas, que no hacen parte del curso actual. Pese a todo esto, las ecuaciones presentadas y sus significados físicos permitieron extraer hallazgos relevantes para el objetivo del proyecto, de modo que pueden considerarse lo suficientemente buenas para el alcance del curso.

Referencias

- [1] D A Lawson. “Freefall parachute jumping”. En: *Teaching Mathematics and Its Applications* 18 (mar. de 1999), págs. 15-19. DOI: [10.1093/teamat/18.1.15](https://doi.org/10.1093/teamat/18.1.15). URL: <https://academic.oup.com/teamat/article-abstract/18/1/15/1649642?redirectedFrom=fulltext>.
- [2] William Moebs, Samuel J. Ling y Jeff Sanny. *University Physics Volume 1 — OpenStax*. Openstax.org, sep. de 2016. URL: <https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/6-4-drag-force-and-terminal-speed>.
- [3] *Parachute Plummet*. Exploratorium, abr. de 2023. URL: <https://www.exploratorium.edu/snacks/parachute-plummet>.