Del Caos al Arte: Atractores Extraños

Valentina Miranda Garcés

24 de noviembre de 2022

1. Introducción

El cambio se muestra como una propiedad innata de la mayoría de los sistemas que componen la vida. A medida que el tiempo pasa, es posible hallar diferencias en lo que era un tiempo antes. Un sistema cuyo comportamiento cambia en función del tiempo es llamado un sistema dinámico [7]. Analizar la evolución de estos sistemas puede brindar información relevante para áreas muy diversas como crecimiento poblacional, meteorología, mercados financieros, e incluso reacciones químicas. Cada uno de estos sistemas tienen en común su variabilidad en el tiempo y estudiando características como sus parámetros de control y condiciones iniciales es posible predecir su comportamiento, es decir, conocer cuál será su cambio en el tiempo antes de que este haya pasado. La predictibilidad está fundada en el determinismo, que establece que al conocer las condiciones actuales de un sistema, será posible conocer las condiciones un tiempo después. Sin embargo, esta declaración puede llegar a ser cuestionada cuando se encuentran sistemas dinámicos que aunque en un principio son determinísticos, su predicción presenta límites, pues su comportamiento a largo plazo puede llegar a ser fortuito. Sin embargo, esto no significa que su estudio no sirva de nada, por el contrario, estos comportamientos son relevantes para las ciencias que les conciernen y aún más, es posible encontrar en estas características caóticas o aleatorias patrones y figuras singulares.

2. Objetivos

Estudiar el sistema caótico financiero no lineal hallando los parámetros que alteran la periodicidad del sistema para graficar el espacio fase e interpretarlo de modo que se puedan sacar conclusiones relevantes para el modelo.

3. Marco teórico

Es posible expresar matemáticamente el comportamiento dinámico de un sistema en términos de una función del tiempo [7].haciendo uso de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. Esto permitirá la continua captura de la evolución del sistema en el tiempo y al obtener las ecuaciones, será posible entonces hallar las soluciones numéricas y graficar los resultados. Teniendo esto presente, será entonces posible introducir el sistema en cuestión. Se conoce como un sistema caótico financiero no lineal:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\frac{1}{\beta} - \alpha)x + z + xy \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta y - x^2 \\ \frac{dz}{dt} &= -x - \sigma z \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Para este modelo,α,β y σ son parámetros que se asumen constantes en el tiempo.α representa el ahorro, es decir, los ingresos restantes después de pagar impuestos y gastar dinero.β es el costo por inversión (todos los costos involucrados que reducen las ganancias de una inversión).σ es la elasticidad de las demandas de comerciales, que mide la efectividad de una campaña publicitaria para generar nuevas ventas [2].

Por otro lado, x, y y z son las variables del modelo. La variable x representa la tasa de interés; y representa la demanda de inversión, es decir, la demanda de las empresas de bienes y servicios para mantener o expandir sus operaciones y z representa el precio índice, que, según Fallis, G [3] "It is a statistic designed to compare how these prices have changed over time. [Es una estadística diseñada para comparar cómo los precios (de la canasta de bienes y servicios de los hogares) han cambiado en el tiempo].

De acuerdo con Ma y Chen [5], "the savings amount variable in the system must be kept in an appropriate level... the smaller is, the greater the fluctuation of the system is". Con esto se infiere que el parámetro presenta un papel importante en la evolución del modelo. Teniendo esto en cuenta, a continuación se determinan los valores de los parámetros y las condiciones iniciales o semillas, es decir, el primer valor de cada variable, para los cuales el sistema presenta un comportamiento caótico y de acuerdo a este punto de partida evaluar otras características del modelo. [2] "When $\alpha = 0{,}00001$, $\beta = 0{,}1$, $\sigma = 1$, we discover a new chaotic attractor of the nonlinear finance chaotic system."

El método numérico para resolver este sistema de ecuaciones será Runge-Kutta, cuyo algoritmo se encuentra en la GNU Scientific Library, para lo cual se implementará un programa en C. Los valores que se obtendrán al iterar por un número determinado de veces (en este caso 50000) se conoce como órbita, y al obtenerla será posible graficar cada una de las variables en función del tiempo, por lo que en este punto será posible evidenciar que al modificar los parámetros del sistema, este presentará una periodicidad específica, pero lo más relevante para continuar será el momento en el que la periodicidad se vuelva difícil de detectar, o en otras palabras, cuando el sistema se vuelve caótico.

En este momento será importante introducir el concepto de caos, orientado hacia el contexto de sistemas dinámicos. En términos generales, un sistema dinámico caótico también sigue la idea de una ausencia de orden, sin embargo, también debe cumplir unas condiciones más específicas, entre las cuales destaca que "el sistema tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales". [1], pues esto es lo que cuestiona el determinismo de estos sistemas. Al ser sensible a las condiciones iniciales, lo que significa es que cualquier mínimo cambio en la semilla hará que el sistema evolucione de una forma diferente. Cuando se habla de cambios mínimos pueden ser en la escala de 0,00001 de diferencia.

Hasta ahora se han introducido conceptos importantes en el análisis de sistemas dinámicos, sin embargo, es momento de agregar un concepto fundamental y de donde saldrán los resultados más interesantes. Este concepto es el espacio fase. Es un espacio multidimensional obtenido al graficar cada una de las variables del sistema en un eje, esto quiere decir que las dimensiones de este espacio serán las mismas que las variables del sistema [7]. El espacio fase llega a ser bastante útil pues "In phase space the complete state of knowledge about a dynamical system at a single instant collapses to a point"[En el espacio fase el completo conocimiento del estado de un sistema dinámico en un solo instante colapsa en un punto] [4]. Por lo tanto, para conocer más a fondo el estado de un sistema a cada instante, se procederá a graficar el espacio fase con las órbitas obtenidas anteriormente.

Junto con el concepto de espacio fase también aparecen los atractores. "The attractor refers to a set of points in the phase space that asymptotically (i.e as the time $t \to \infty$) attract or repel all neighboring trajectories encountered in their basin of attraction"[El atractor se refiere a un conjunto de puntos en el espacio fase que atraen o repelen todas las trayectorias cercanas] [7].Esto significa que al graficar el espacio fase será posible encontrar áreas o puntos en los que cualquier trayectoria tarde o temprano se dirige hacia esas secciones y se mantiene ahí. La etapa crucial será entonces al momento de graficar el espacio fase con órbitas cuyos parámetros llevan a una evolución caótica del sistema. En este espacio fase será posible visualizar el objeto principal de estudio del proyecto: el atractor extraño. Al igual que un atractor, todas las trayectorias en el espacio fase convergen hacia él, pero lo más importante es que también es sensible a las condiciones iniciales, lo que quiere decir que pequeños cambios llevarán a trayectorias completamente diferentes [6].

4. Análisis y Resultados

Después de llevar a cabo la implementación de los códigos, el primero resultado esperado fue el espacio fase donde se observa el atractor extraño en la figura 1. Para esto se tomó de referencia los valores establecidos en la sección anterior. Es posible evidenciar que en efecto, el sistema se vuelve caótico cuando el parámetro α, que hace referencia al ahorro, es muy pequeño. Pero ahora que se conoce esto, es importante recordar que cada uno de esos parámetros y variables son indicadores de una situación del mundo real, en este caso, se puede asumir que el modelo proporciona una perspectiva sobre la situación económica de un país; en este sentido, ¿cuáles pueden ser los valores que hace que el sistema evolucione de manera favorable?

Para esto, se lleva a cabo una evaluación sobre la relación entre el mismo sistema y el papel que cumple cada componente (variables y parámetros). Un buen punto de partida es el mencionado parámetro α, el cual permite un mejor desarrollo del modelo si su valor no es tan pequeño. Seguido de esto se tienen los otros dos parámetros, de los cuales β obedece a un comportamiento contrario, es decir, mientras más pequeña sea, el modelo será más óptimo, lo cual tiene mucho sentido considerando que un costo de inversión alto genera tasas de interés

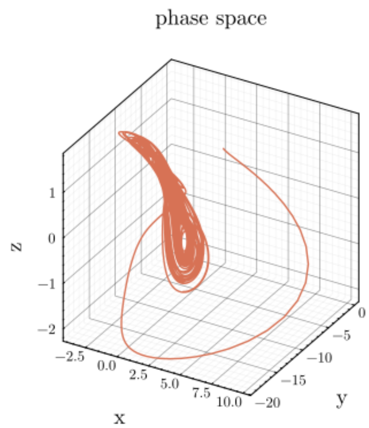

Figura 1: Espacio fase del sistema con $\alpha = 0{,}00001$, $\beta = 0{,}1$, $\sigma = 1$, $x = 0{,}1$, $y = o{,}21$, $z = o{,}31$

más altas y la demanda por inversión disminuye. Finalmente, se observa que σ presenta unas características más especiales, pues se esperaría que un valor de este parámetro alto sería fructuoso para su evolución, y esto llega a ser cierto hasta el momento en el que se vuelve desproporcionadamente alto, y allí provoca una fluctuación exagerada del sistema lo cual se quiere evitar al buscar una economía estable.

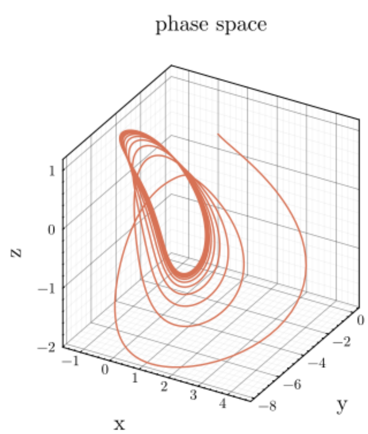

Figura 2: Espacio fase del sistema con $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}2$, $\sigma = 0{,}7.\alpha + \beta = \sigma$ y $\alpha > \beta$

Luego de analizar los parámetros, se pasa al estudio de las variables, y más específicamente, se resalta la importancia de los valores iniciales en la evolución del modelo. En secciones anteriores se ha mencionado que un sistema caótico es llamado así por ser muy sensible a las condiciones iniciales, lo cual se puede evidenciar tomando como referencia los valores iniciales y parámetros establecidos en [2], cambiando la variable $x = 0{,}1$ por como $x = 0{,}1001$ se aprecia en la figura 3.

Dejando este comportamiento caótico de lado, sí es cierto que unas condiciones iniciales más favorables, al igual que parámetros coherentes, permiten que el sistema tenga una evolución más fluida y alcance una periodicidad en un tiempo menor.

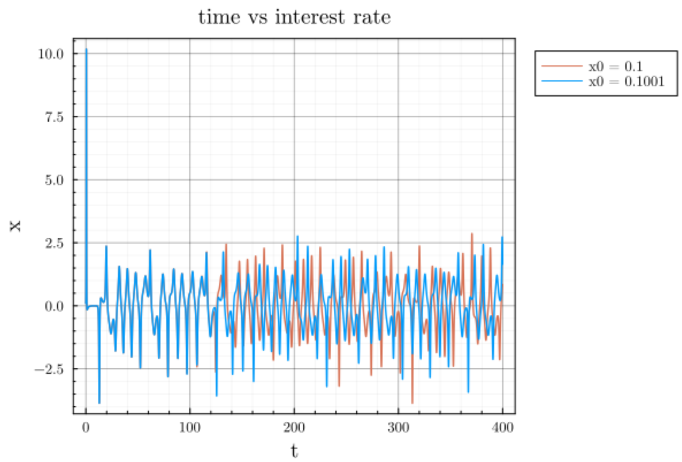

Figura 3: Espacio fase del sistema comparando cuando $x = 0{,}1$ y $x = 0{,}1001$

5. Sumario y conclusiones

Al final del día es importante recordar que el sistema de ecuaciones estudiado es un modelo de algo real, en este caso hace parte del sector financiero. Teniendo esto en mente, es posible darse cuenta de que la economía de un país, un campo que al estar lleno de números podría entenderse como esencialmente determinístico, posee el caos como cualidad innata, lo cual tiene sentido si se lleva a ejemplos de la vida real, donde se evidencia la incertidumbre financiera a pesar de los planes rigurosos que establecen los gobiernos, en este caso haciendo referencia a la sensibilidad de las condiciones iniciales, pues a largo plazo estas planeaciones pueden variar. A pesar de esto, el modelo estudiando provee información relevante que permite establecer por lo menos un punto de partida al momento de llevarlo a una aplicación real.

Cabe resaltar que, aunque fue posible evidenciar el comportamiento caótico y sus características, también fue parte del proceso encontrar por medio de prueba y error una combinación de parámetros que brindaran una evolución adecuada del sistema, para lo cual se concluyó que si $\alpha + \beta = \sigma$ y $\alpha > \beta$, el sistema se vuelve periódico después de un tiempo. Este resultado puede llegar a ser relevante en un proceso de planeación económica, al igual que es importante resaltar el hecho de que el parámetro α, el ahorro, cumple un papel esencial en el desarrollo caótico del modelo, por lo que es un indicador que se debe considerar como prioridad en un modelo financiero aplicado a la realidad.

Referencias

[1] Nisa Aslan, Saliha Şeker y Mustafa Saltan. “The investigation of chaos conditions of some dynamical systems on the Sierpinski propeller”. En: *Chaos, Solitons Fractals* 159 (2022), pág. 112123. ISSN: 0960-0779. DOI: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112123. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077922003332.

[2] Guoliang Cai y Juanjuan Huang. “A New Finance Chaotic Attractor”. En: *International Journal of Nonlinear Science* 3 (2007), págs. 213, 220. URL: http://internonlinearscience.org/upload/papers/20110308103218810.pdf.

[3] George Fallis. “Consumer Price Index”. En: *Encyclopedia of Quality of Life and Well-Being Research*. Ed. por Alex C. Michalos. Dordrecht: Springer Netherlands, 2014, págs. 1217-1218. ISBN: 978-94-007-0753-5. DOI: 10.1007/978-94-007-0753-5_544. URL: https://doi.org/10.1007/978-94-007-0753-5_544.

[4] James Gleick. *Chaos: Making a New Science*. USA: Penguin Books, 1987. ISBN: 0140092501.

[5] Jun-hai Ma y Yu-shu Chen. “Study for the Bifurcation Topological Structure and the Global Complicated Character of a Kind of Nonlinear Finance System(I)”. En: *Applied Mathematics and Mechanics* 22 (2001), págs. 1240-1251. DOI: 10.1023/a:1016313804297.

[6] Barry Parker. “Strange Attractors”. En: *Chaos in the Cosmos: The Stunning Complexity of the Universe*. Boston, MA: Springer US, 1996, págs. 83-103. ISBN: 978-1-4899-3370-6. DOI: 10.1007/978-1-4899-3370-6_5. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4899-3370-6_5.

[7] R. I. Sujith y Samadhan A. Pawar. “An Introduction to Dynamical Systems Theory”. En: *Thermoacoustic Instability: A Complex Systems Perspective*. Cham: Springer International Publishing, 2021, págs. 31-85. ISBN: 978-3-030-81135-8. DOI: 10.1007/978-3-030-81135-8_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-81135-8_2.

6. links

link overleaf: https://www.overleaf.com/read/hvxpxzvpvdwz

link canva: https://www.canva.com/design/DAFS3ugPVew/erHH6ZM08DtX2C9tkk1u1g/view?utm
$DAFS3ugPVewutm_campaign = designshareutm_medium = link2utm_source = sharebutton$