МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет Механико-математический

Кафедра Вычислительных систем

Направление подготовки Математика и компьютерные науки

КУРСОВАЯ РАБОТА МАГИСТРАНТА

Мистюрина Вячеслава Владимировича

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Расчёт максимальных потоков между всеми парами вершин сети

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой,

ученая степень, звание

……………/ Глинский Б.М.

(фамилия , И., О.) / (подпись, МП)

«…12…»…мая…………2018г.

Научный руководитель

д.т.н., доцент

ученая степень, звание

зав. лаб. ИВМиМГ СО РАН

должность, место работы

Родионов А.С. /……………

(фамилия , И., О.) / (подпись, МП)

«…18…»…мая…………2018г.

Дата защиты: «…18…»…мая…………2018г.

Новосибирск, 2018

Содержание

1 Введение **3**

1.1 Актуальность работы 3

1.2 Цель магистерской работы 4

1.3 Цель курсовой работы 5

2 Определения и обозначения **5**

3 Потоки в графах **6**

3.1 Определение 6

3.2 Стандартные алгоритмы 7

4 Методы ускорения расчёта **7**

4.1 Разделение графа на несколько компонент связности 8

4.2 Стягивание цепи 8

4.3 Обработка мостов 10

4.4 Удаление висячих вершин 11

5 Реализация алгоритмов и численные эксперименты **12**

5.1 Алгоритм перебора пар 12

5.2 Алгоритм с использованием редукций 12

6 Реализация алгоритмов и численные эксперименты **13**

7 Заключение **14**

1 Введение

В данной работе рассматривается такой показатель надёжности сети, как матрица математических ожиданий величин максимальных потоков между всеми парами узлов в сети. Точный расчёт этого показателя требует полного перебора всех возможных вариантов разрушений сети, а следовательно является NP-трудной задачей и, как следствие, сопряжён с большими временными и вычислительными трудностями и требует разработки новых алгоритмов.

При рассмотрении задач, связанных с надёжностью сетей, сеть обычно описывается случайным графом, где рёбра отображают сетевые каналы, а в качестве узлов выступают сенсоры, серверы, переключатели и другие устройства. В нашем случае, в качестве узлов будут выступать рабочие станции, а в качестве рёбер - различные виды связей между ними. Узлы сети мы будем считать абсолютно надёжными, соединения же подверженными отказам.

1.1 Актуальность работы

Различные виды сетей активно применяются для изучения вулканов [1], военного наблюдения [2], среды обитания [3].

Для различных видов сетей можно по разному трактовать значение исследуемого показателя надёжности, например:

1. Для информационных сетей - количество информации, которое мы можем передать между любой парой узлов.

2. Для транспортных сетей - количество грузов, которое мы можем перевезти между любой парой узлов.

В данной работе объектом исследования является система сетевой структуры, в которой в качестве модели используется случайный граф с абсолютно надёжными вершинами, моделирующими узлы, и ненадёжными рёбрами, моделирующими связи в сети. Пропускные способности каналов считаем одинаковыми в обоих направлениях, поэтому граф считаем неориентированным.

В качестве предмета исследования выбран такой показатель надёжности сети как матрица математических ожиданий величин максимальных потоков между всеми парами узлов в сети и соответствующее арифметическое среднее.

1.2 Цель магистерской работы

Целью магистерской работы является разработка и реализация алгоритма точного расчёта описанного показателя. Алгоритм должен абсолютно точно вычислять искомый показатель и завершаться за разумное время для как можно больших размерностей графов.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

1. Разработать точный алгоритм расчёта искомого показателя надёжности, завершающийся за разумное время.

2. Разработать и исследовать различные методы ускорения.

3. Реализовать алгоритм с помощью средств языка `C++`.

4. Реализовать параллельную версию алгоритма.

Методы исследования базируются на теории вероятностей и теории графов. Языком реализации выбран `C++` для последующей адаптации и тестирования алгоритмов на кластере. Практическая значимость заключается в возможности точного расчёта указанного показателя надёжности, что в свою очередь позволяет ускорить и улучшить процесс проектирования надёжных сетей.

1.3 Цель курсовой работы

Целью курсовой работы является точное вычисление матрицы величин максимальных потоков между всеми парами узлов в надёжной сети.

Для достижения указанной цели, были поставленны следующие задачи:

1. Разработать точный алгоритм, вычисляющий искомую величину.
2. Реализовать и исследовать влияние различных методов ускорения.
3. Реализовать алгоритм с помощью средств языка `C++`.

2 Определения и обозначения

Используется модель неориентированного графа. Введем обозначения:

$G(V, E)$ – неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E.

c_{ij} – вес ребра между вершинами i и j.

f_{ij} – величина максимального потока между i и j.

3 Потоки в графах

Впервые задача о максимальном потоке была сформулирована в 1951 году Джорджем Данцигом. В 1955 году Лестер Форд и Делберт Фалкерсон впервые построили алгоритм для решения этой задачи. В течение последующих лет интерес к ней подогревался высокой практической значимостью и её применимостью при исследовании информационных и транспортных сетей. В 1970 году был опубликован частный случай алгоритма Форда-Фалкерсона, именуемый алгоритмом Эдмонда-Карпа. В 1986 году Гольдбергом и Тарьяном был опубликован алгоритм проталкивания предпотока. В дальнейшем решение задачи многократно улучшалось.

3.1 Определение

Прежде всего, необходимо ввести понятие потока.

Выделим две вершины в графе: источник, который будем обозначать s, и сток, который будем обозначать буквой t.

Поток - функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами для любых вершин u и v:

1. Ограничение пропускной способности – поток не может превысить пропускную способность: $f(u, v) \leqslant c(u, v)$.

2. Антисимметричность – поток из u в v должен быть противоположен потоку из v в u : $f(u, v) = -f(v, u)$.

3. Сохранение потока – $\sum\limits_{w \in V} f(w, v) = 0$ для всех $w \in V \setminus \{s, t\}$.

Величина потока – сумма потоков из источника $|f| = \sum\limits_{v \in V} f(s, v)$.

Максимальный поток между u и v – такой поток f, что его величина максимальна.

3.2 Стандартные алгоритмы

Наиболее стандартными алгоритмами вычисления максимального потока являются алгоритмы Эдмондса-Карпа, Диница [7] и проталкивания предпотока [8]. Асимптотическая сложность этих алгоритмов $O(|V| * |E|^2), O(|V|^2 * |E|), O(|V|^2 * |E|)$ соответственно. Несмотря на то, что сложность алгоритма Эдмондса-Карпа растёт быстрее, он более эффективно расходует память, что может положительно сказаться на производительности.

4 Методы ускорения расчёта

Методы ускорения расчёта различных показателей надёжности, как правило, сводятся к декомпозиции, редукции цепей и висячих вершин, а также рассмотрения других особенностей структур (наличие мостов, и точек сочленения, специальный вид графа, например, циклы или деревья и пр.) [9–11]. При этом возможность использования данных методов и их сложность существенно зависят от рассматриваемых показателей.

Так как исследуемые графы являются неориентированными, то поток в одну сторону равен потоку в другую, следовательно, итоговая матрица будет симметрична и нет необходимости считать поток между всеми парами - достаточно посчитать потоки для пар, находящихся над диагональю матрицы.

4.1 Разделение графа на несколько компонент связности

Исходный граф может иметь несколько компонент связности. Очевидно, между парами вершин в разных компонентах связности поток равен нулю. Таким образом, можно извлечь из графа его компоненты связности, найти потоки внутри них и затем собрать ответ из этих частей, предполагая, что между компонентами связности величины потоков равны нулю.

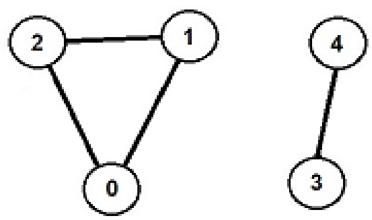

Рис. 1: Разделение графа на несколько компонент связности

Например, на графе, представленном на рисунке 1, $f_{ij} = 0$ для $i \in \{0, 1, 2\}, j \in \{3, 4\}$, так как эти вершины находятся в разных компонентах связности.

4.2 Стягивание цепи

В этом параграфе мы будем следовать обозначениям, введённым на рисунке 2 – i_0, $i_1 ... i_m$ - вершины цепи, пронумерованные в порядке следования, u и v - любые вершины в графе, не обязательно не принадлежащие цепи.

При обнаружении цепи в графе мы можем применить следующую редукцию: заменить обнаруженную цепь на ребро, пропускная способность равна минимальной пропускной способности всех ребёр цепи, затем посчитать величины потоков в получившемся графе. Чтобы величину максимального потока

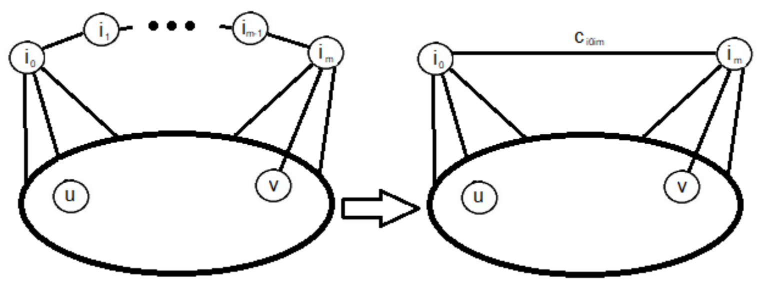

Рис. 2: Разделение графа на несколько компонент связности

между парой вершин в исходном графе, нужно рассмотреть следующие случаи:

1. Обе вершины не находятся в цепи.

2. Одна вершина находится в цепи, другая нет.

3. Обе вершины находятся в цепи.

1. Если обе вершины не находятся в цепи, то величина максимального потока между ними равна величине максимального потока между этими вершинами в преобразованном графе.

2. Если одна вершина (например i_p) находится в цепи, а другая нет, то величина максимального потока между ними равен сумме величин двух потоков - величине потока, который можно доставить до i_p с одной стороны, который равен $\min(f_{vi_0}, \min\limits_{j\in[0...p-1]} c_{i_j i_{j+1}})$ и величине потока, который можно доставить с другой стороны, равной $\min(f_{vi_m}, \min\limits_{j\in[p...m-1]} c_{i_j i_j+1})$.

3. Если обе вершины (например i_p и i_k, $p < k$) находятся в цепи, то величина максимального потока между ними равна сумме двух величин потоков: величине максимального потока, который можно доставить по цепи, равная $\min\limits_{j\in[p..k]} c_{ij}$, и величине максимального потока, который можно доставить через

остальной граф, равная $\min(\min_{j\in[0,p-1]} c_{i_j i_{j+1}}, f_{i_0 i_m}, \min_{j\in[k,m-1]} c_{i_j i_{j+1}})$.

4.3 Обработка мостов

Мостом называется такое ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности. При обнаружении моста в графе (например, между вершинами i и j, как на рисунке 3) мы можем провести следующую редукцию: разделить на граф на два подграфа, разделённые мостом и посчитать потоки внутри этих подграфов. Чтобы получить величины потоков в исходном графе, нужно перебрать все пары вершин и рассмотреть два случая:

1. Обе вершины лежат в одном подграфе.
2. Вершины лежат в разных подграфах.

Если обе вершины лежат в одном подграфе, то величина потока между ними равна величине потока в этом подграфе. Если вершины лежат в разных подграфах (например u в первом, v во втором), то величина максимального потока между ними равна минимуму из величины максимального потока от u до моста, пропускной способности моста и величине потока от моста до v, т.е. $f_{uv} = \min(f_{ui}, c_{ij}, f_{jv})$.

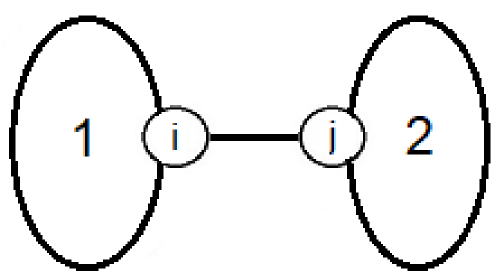

Рис. 3: Мост в графе

4.4 Удаление висячих вершин

Висячие вершины (вершины степени 1) могут быть обработаны следующим образом: удалим вершину и посчитаем величины потоков в оставшемся графе. Чтобы восстановить величины максимальных потоков в исходном графе, нужно рассмотреть два случая:

1. Обе вершины не являются висячими.

2. Одна вершина висячая, вторая нет.

Если обе вершины не висячие, то наличие висячей вершины никак не влияет на поток между ними, а следовательно величина потока между ними равна величине потока между ними в графе с удалённой висячей вершиной.

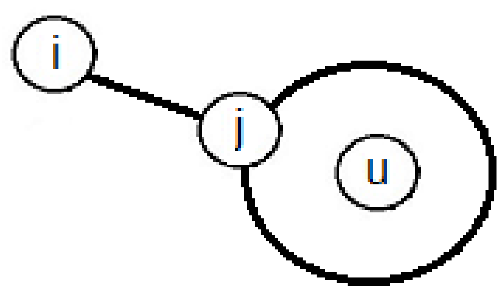

Рис. 4: Висячая вершина

Если одна вершина является висячей, а вторая нет, то величина потока между ними равна минимуму величины потока до опорной вершины и пропускной способности опорного ребра, то есть, следуя обозначениям из рисунка 4, $f_{ui} = \min(f_{uj}, c_{ij})$

5 Реализация алгоритмов и численные эксперименты

5.1 Алгоритм перебора пар

Простейшая версия алгоритма заключается в следующем: будем перебирать пары вершин, учитывая симметричность потоков, и считать величину максимального потока между ними с помощью стандартных алгоритмов.

5.2 Алгоритм с использованием редукций

Алгоритм с использованием редукций будет применять редукции следующим образом:

1. Разделяем граф на несколько компонент связности (описано в пункте 4.1).

2. Стягиваем цепи (описано в пункте 4.2).

3. Обрабатываем мосты (описано в пункте 4.3).

4. Удаляем висячие вершины (описано в пункте 4.4).

5. Пользуясь алгоритмом перебора пар получаем ответ.

Такой порядок действий обусловлен следующими соображениями: в процессе редукций не может быть увеличено число компонент связности, поэтому мы можем выделить их ещё на первом этапе. При обнаружении цепи-моста обработка мостов будет обрабатывать каждую вершину цепи, что существенно уступает обработке стянутой цепи, поэтому сначала идёт стягивание цепей и только за ней обработка мостов.

6 Реализация алгоритмов и численные эксперименты

Было реализовано 6 версий алгоритма:

1. Алгоритм перебора пар на базе алгоритма Эдмондса-Карпа.
2. Алгоритм перебора пар на базе алгоритма Диница.
3. Алгоритм перебора пар на базе алгоритма проталкивания предпотока.
4. Алгоритм с использованием редукций на базе алгоритма Эдмондса-Карпа.
5. Алгоритм с использованием редукций на базе алгоритма Диница.
6. Алгоритм с использованием редукций на базе алгоритма проталкивания предпотока.

Таблица 1: Результаты экспериментов

Версия алгоритма	1	2	3	4	5	6
(50,55)	0,127	0,289	0,65	0,051	0,091	0,15
(60,80)	0,31	0,786	1,52	0,162	0,681	1,25
(100,120)	2,12	5,35	63,61	0,9	1,76	9,59
(150,190)	10,6	29,20	470,56	3,46	10,48	98,35

Используемый процессор - Intel(R) Core(TM) i3-4030U CPU @ 1.90GHz количество оперативной памяти - 8GB. Были случайным образом были сгенерированы 30 графов для каждой пары (количество вершин, количество рёбер) со случайными пропускными способностями в интервале (1, 100). В таблицу 1 занесено среднее арифметическое времени расчёта в секундах.

7 Заключение

В данной работе был рассмотрен такой показатель функциональности сети, как матрица величин поток между всеми парами вершин в графе. Для расчёта этого показателя был реализован алгоритм перебора пар и его модификации, которые ускорили алгоритм.

Таким образом, были решены следующие задачи:

1. Разработан алгоритм точного расчёта.
2. Предложены и реализованы различные методы ускорения вычислений.

В результате численных экспериментов были получены следующие результаты:

1. Алгоритм Эдмондса-Карпа показывает наилучшую производительность как в переборе пар, так и использовании редукций.
2. Получен существенный выигрыш по сравнению с перебором пар, который увеличивается с увеличением размерности.

Была заложена программная основа для дальнейших исследований, которые будут проводиться по следующим направлениям:

1. Решение задач поставленных в магистерской работе.
2. Поиск и анализ новых методов редукций.
3. Усовершенствование разработанных алгоритмов.

Список литературы

[1] G. Werner-Allen, K. Lorincz, M. Welsh, O. Marcillo, J. Johnson, M. Ruiz, and J. Lees. Deploying a wireless sensor network on an active volcano. IEEE Internet Computing, 10:18–25, 2006.

[2] P. Kikiras and J. Avaritsiotis. Unattended ground sensor network for force protection. Journal of Battlefield Technology, 7(3):29–34, 2004.

[3] R. Szewczyk, J. Polastre, A. Mainwaring, and D. Culler. Lessons from a sensor network expedition. In First European Workshop on Wireless Sensor Networks, pages 307–322, 2004.

[4] Liu Sh., Cheng K., Liu X. Network reliability with node failures // Networks. 2000. V. 35. P. 109–117

[5] Leslie G. Valiant The Complexity of enumeration and reliability problems / Valiant Leslie G. // Society for Industrial and Applied Mathematics. -1979. -№3. - P.410-421.

[6] Moore E.F., Shannon C.E. Reliable Circuits Using Less Reliable Relays // J. Franclin Inst., Vol. 262, n. 4b, 1956. P. 191–208.

[7] Dinic E.A. Algorithm for Solution of a Problem of Maximum Flow in a Network with Power Estimation / E.A. Dinic // Soviet Math Dokladv, - 1970. Vol. 11. - P. 1277-1280.

[8] Goldberg A.V. A new approach to the maximum flow problem / A.V. Goldberg // Journal of the ACM. - 1988. - Vol. 35. - P. 921-940.

[9] Shooman A. M. Algorithms for network reliability and connection availability analysis // Electro/95 Intern. Prof. Program Proc. Hynes Convention Center, Boston, MA, June 21–23, 1995. S. l.: IEEE, 1995. P. 309–333

[10] Мигов Д.А. Об одном показателе надёжности для сетей с отказами узлов / Д.А. Мигов // Средства и системы защиты информации и сетевых ресурсов. -2013. -№2. -С.43-48.

[11] Родионов А.С., Родионова О.К. К вопросу практического использования формулы Муры-Шеннона для расчета вероятности связности локальных сетей // Тр. 2 Междунар. науч.-практ. конф. «Информационные технологии и радиосети», ИНФОРАДИО-2000. Омск, 2000. С. 67-69.