Лабораторная работа №5

Модель эпидемии (SIR)

Кадров Виктор Максимович

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Исследовать модель эпидемии(SIR) с помощью программы *xcos* и OpenModelica.

2 Задание

- рассмотреть модель SIR в xcos (в том числе и с использованием блока Modelica), а также в OpenModelica;
- реализовать модель SIR с учётом процесса рождения / гибели особей в xcos (в том числе и с использованием блока Modelica), а также в OpenModelica;
- построить графики эпидемического порога при различных значениях параметров модели (в частности изменяя параметр μ);
- сделать анализ полученных графиков в зависимости от выбранных значений параметров модели.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Математическая модель

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I, \end{cases}$$

где S – численность восприимчивой популяции, I – численность инфицированных, R – численность удаленной популяции (в результате смерти или выздоровления), и N – это сумма этих трёх, а β и γ - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно[1].

3.2 Реализация модели в xcos

В меню Моделирование, Задать переменные окружения зададим значения переменных. (рис. 3.1).

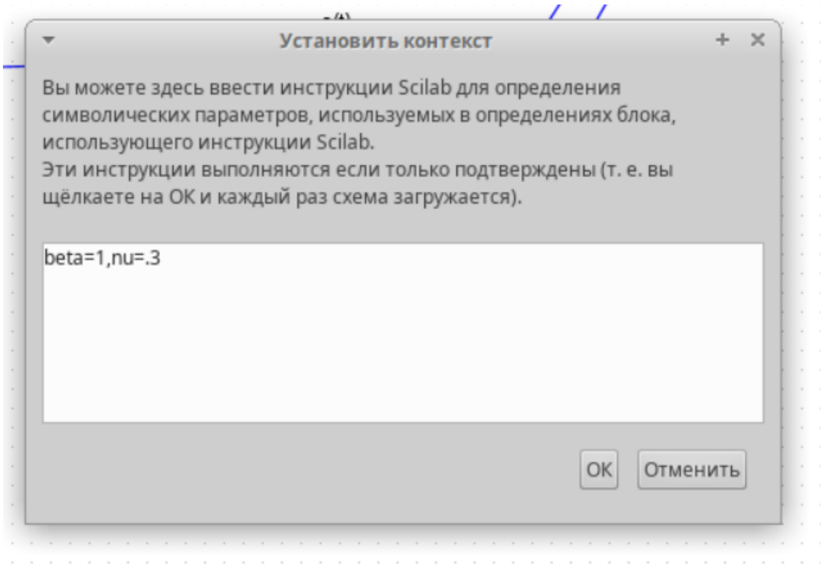

Рис. 3.1: Ввод переменных окружения

В модели, изображённой на рис. 3.2, использованы следующие блоки xcos: - CLOCK_c – запуск часов модельного времени; - CSCOPE – регистрирующее устройство для построения графика; - TEXT_f – задаёт текст примечаний; - MUX – мультиплексер, позволяющий в данном случае вывести на графике сразу несколько кривых; - INTEGRAL_m – блок интегрирования; - GAINBLK_f – в данном случае позволяет задать значения коэффициентов β и ν; - SUMMATION – блок суммирования; - PROD_f – поэлементное произведение двух векторов на входе блока.

Первое уравнение модели задано верхним блоком интегрирования, блоком произведения и блоком задания коэффициента β. Блок произведения соединён с выходами верхнего и среднего блоков интегрирования и блоком коэффициента β, что реализует математическую конструкцию $\beta s(t) i(t)$.

Третье уравнение модели задано нижним блоком интегрирования и блоком задания коэффициента ν. Для реализации математической конструкции $\nu i(t)$ соединяем выход среднего блока интегрирования и вход блока задания коэффициента ν, а результат передаём на вход нижнего блока интегрирования.

Средний блок интегрирования и блок суммирования определяют второе уравнение модели, которое по сути является суммой правых частей первого и третьего уравнений. Для реализации соединяем входы верхнего и нижнего блоков интегрирования с входами блока суммирования, меняя при этом в его параметрах оба знака на минус. Выход блока суммирования соединяем с входом среднего блока интегрирования.

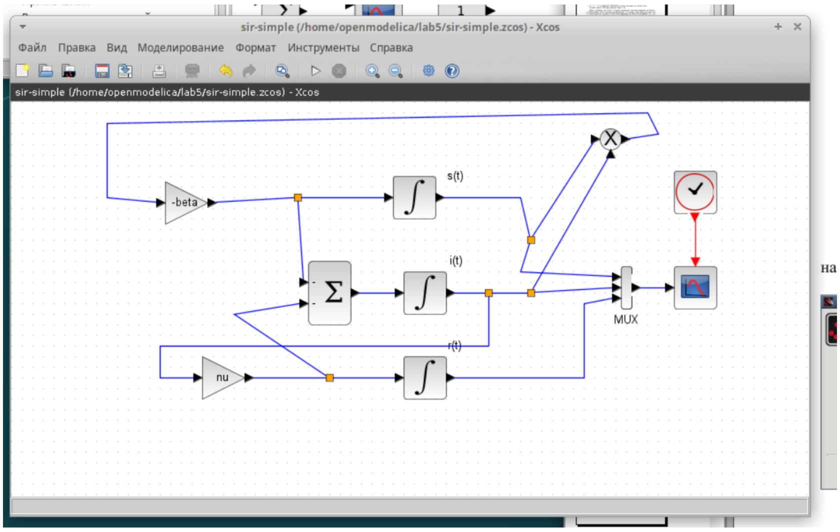

Рис. 3.2: Модель SIR в xcos

Зададим начальные значения в блоках интегрирования. (рис. 3.3, 3.4).

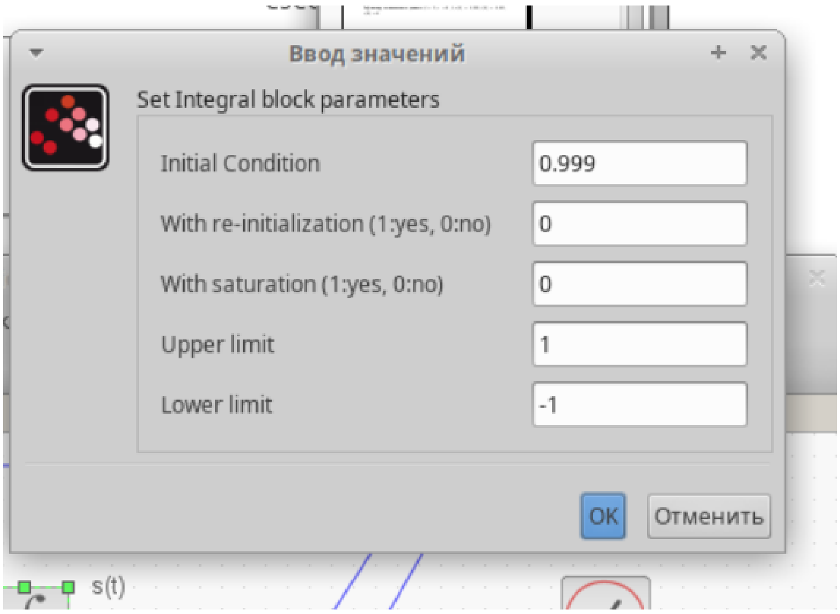

Рис. 3.3: Задать начальные значение в блоке интегрирования для S

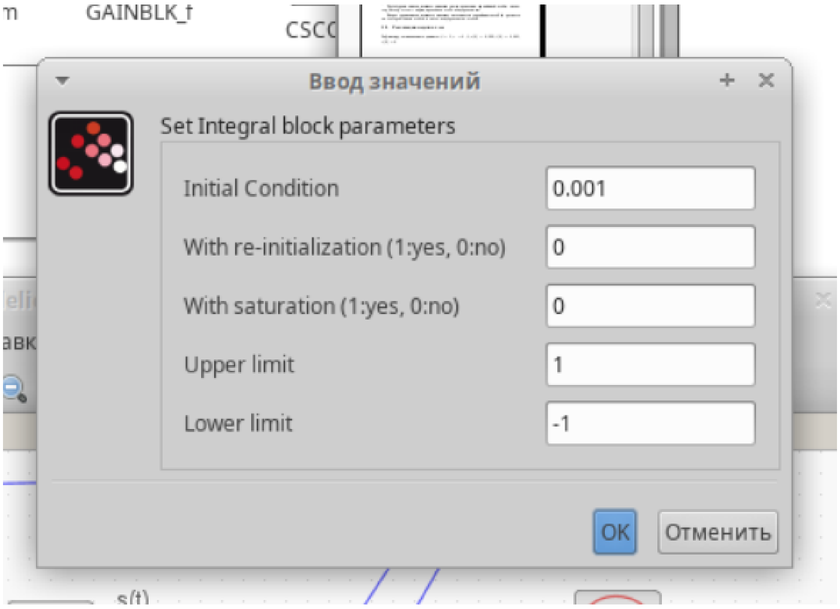

Рис. 3.4: Задать начальные значение в блоке интегрирования для I

Зададим конечное время интегрирования. (рис. 3.5).

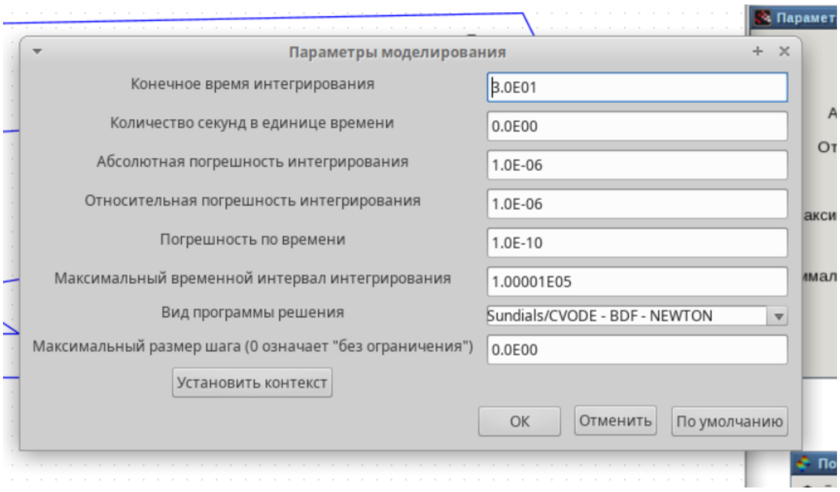

Рис. 3.5: Зададим конечное время интегрирования

Результат моделирования в xcos. (рис. 3.6).

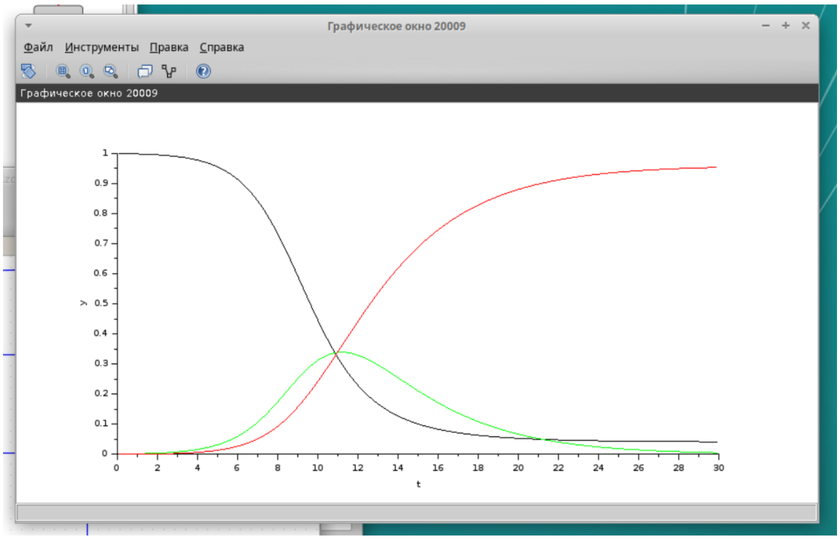

Рис. 3.6: Результат моделирования в xcos

3.3 Реализация модели с помощью блока Modelica в xcos

Для реализации модели с помощью языка Modelica помимо блоков CLOCK_c, CSCOPE, TEXT_f и MUX требуются блоки CONST_m – задаёт константу; MBLOCK(Modelica generic) – блок реализации кода на языке Modelica(рис. 3.7).

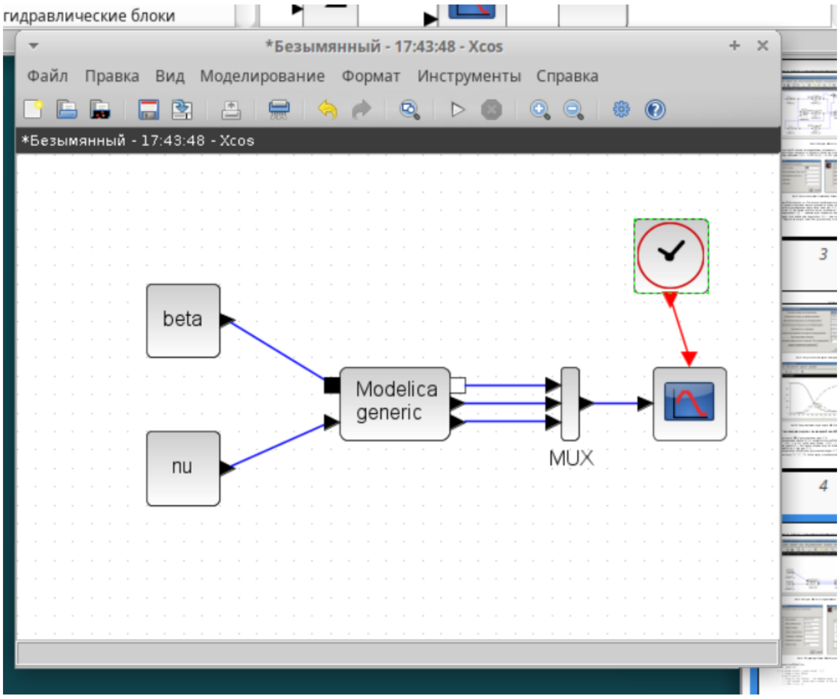

Рис. 3.7: Модель SIR в xcos с применением блока Modelica

Зададим параметры блока Modelica. Переменные на входе (“beta”,“nu”) и выходе (“s”, “i”, “r”) блока заданы как внешние (“E”). (рис. 3.8)

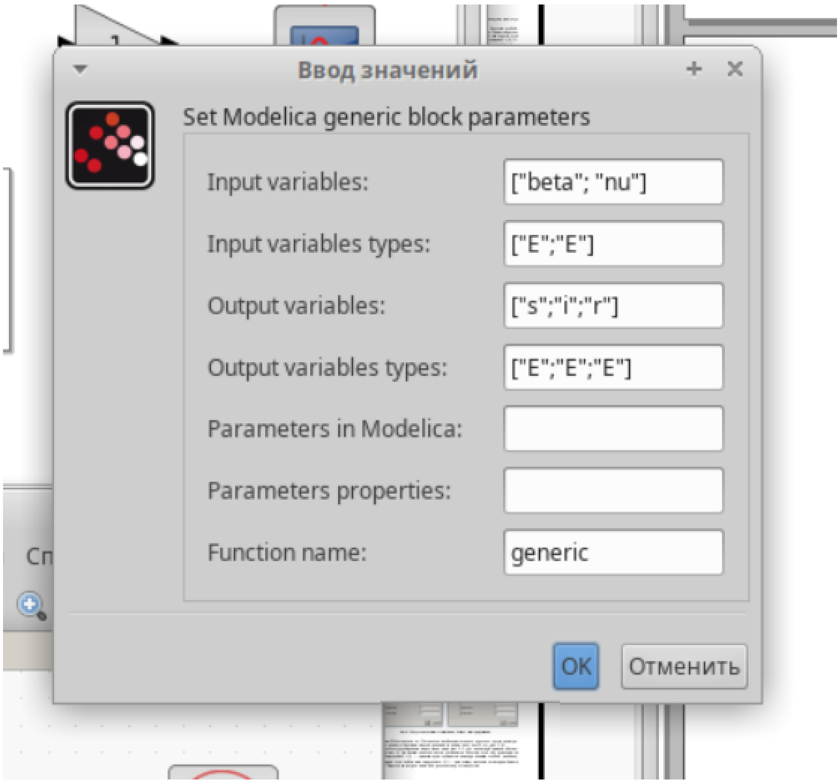

Рис. 3.8: Параметры блока Modelica

Код на языке Modelica. (рис. 3.9)

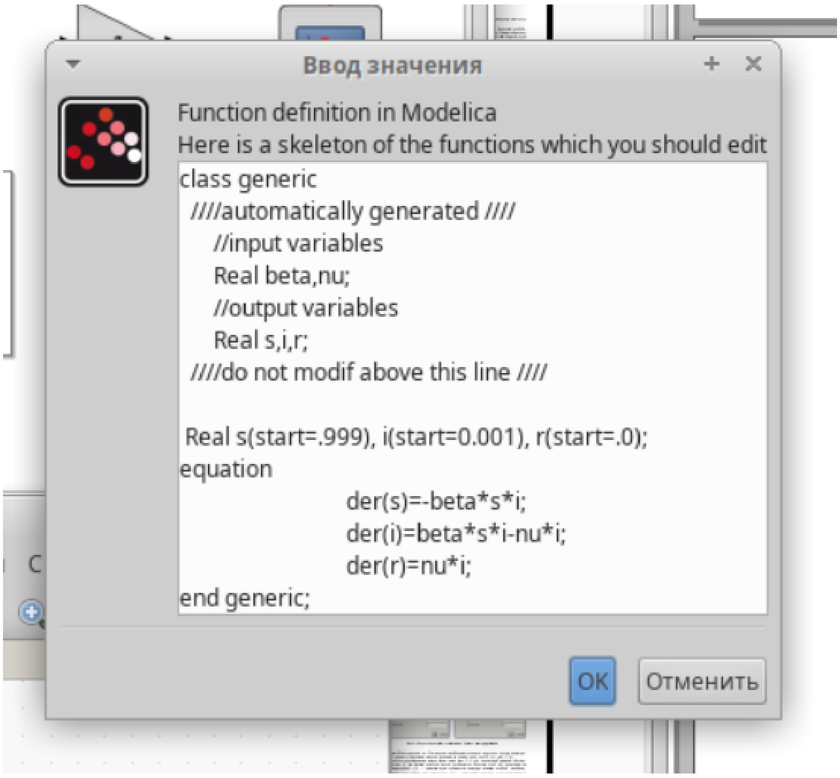

Рис. 3.9: Параметры блока Modelica

Результат моделирования с помощью блока Modelica в xcos. (рис. 3.10).

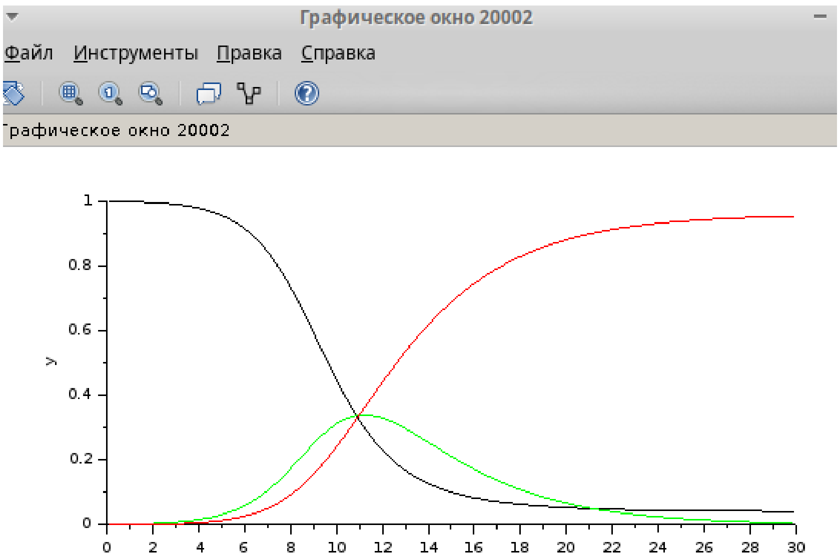

Рис. 3.10: Результат моделирования с помощью блока Modelica в xcos

3.4 Реализация модели SIR в OpenModelica

Создадим файл модели, зададим дифференциальные уравнения и присвоим переменным значения. (рис. 3.11).

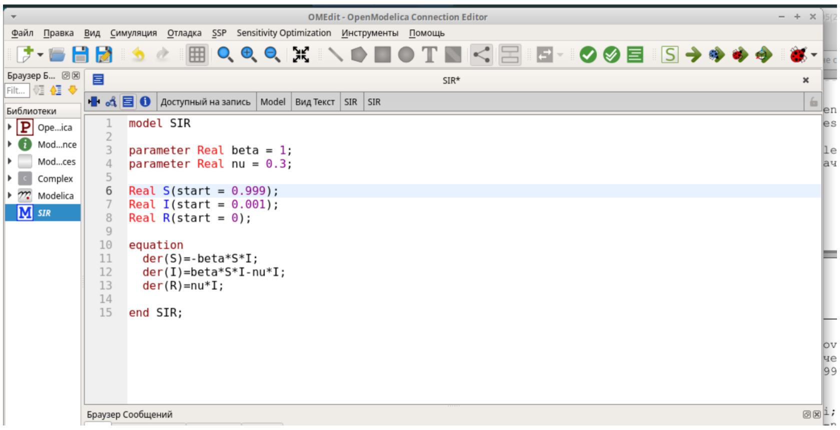

Рис. 3.11: Реализация модели SIR в OpenModelica

Зададим интервал симуляции. (рис. 3.12).

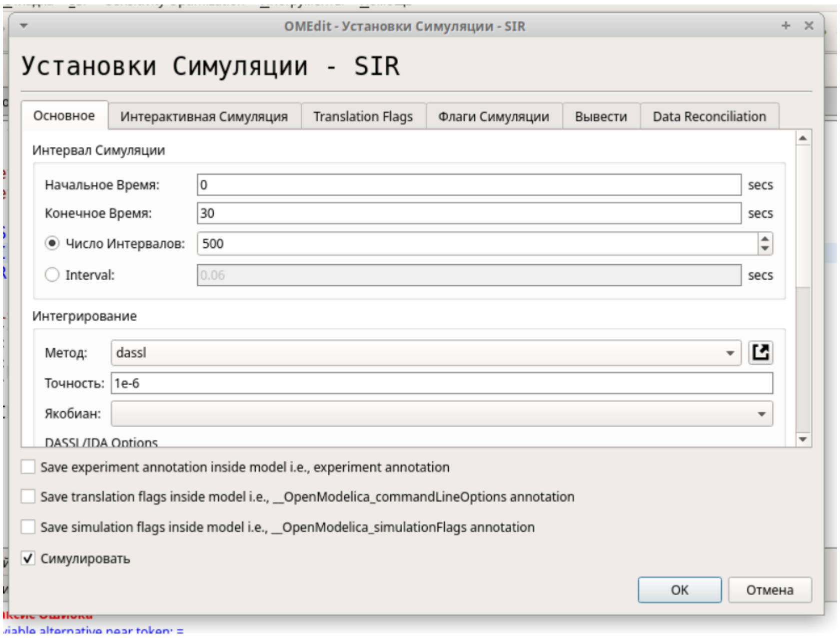

Рис. 3.12: Зададим интервал симуляции

Результат реализации модели SIR в OpenModelica (рис. 3.13).

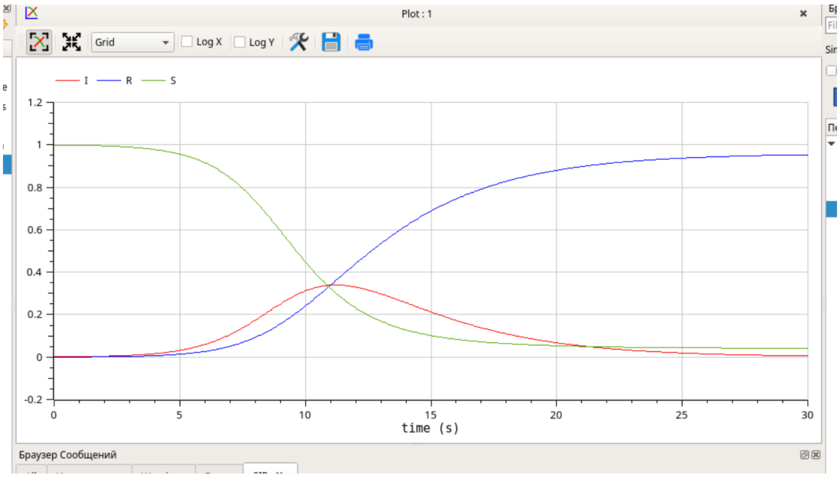

Рис. 3.13: Результат реализации модели SIR в OpenModelica

4 Задание для самостоятельного выполнения

4.1 Модель SIR с учетом демографии

В дополнение к предположениям, которые были сделаны для модели SIR, предположим, что учитываются демографические процессы, в частности, что смертность в популяции полностью уравновешивает рождаемость, а все рожденные индивидуумы появляются на свет абсолютно здоровыми. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta IS + \mu(N - S), \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R, \end{cases}$$

где ν – константа, которая равна коэффициенту смертности и рождаемости.

4.2 Реализация модели в xcos

Для начала добавим переменную μ в Задать переменные окружения в xcos. Добавим необходимые для реализации модели блоки. (рис. 4.1).

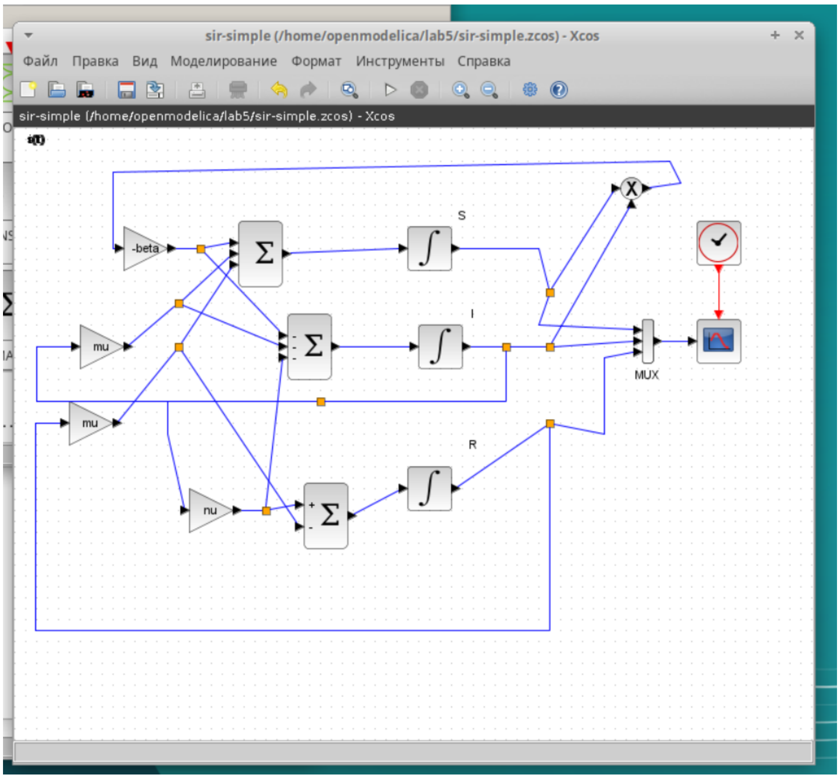

Рис. 4.1: Модель SIR, учитывая демографические процессы, в xcos

Результат моделирования. (рис. 4.2).

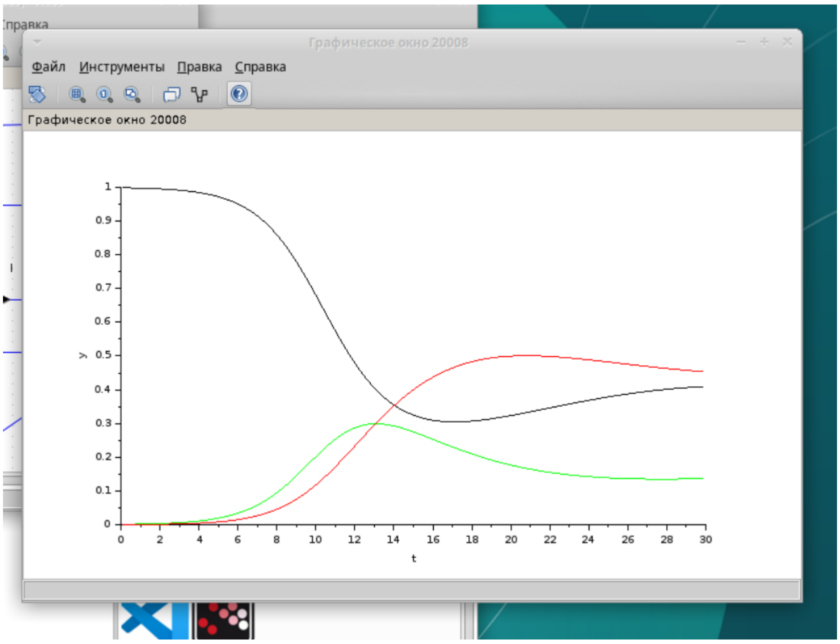

Рис. 4.2: Результат моделирования SIR, учитывая демографические процессы, в xcos

4.3 Реализация модели с использованием блока Modelica в xcos

В изначальную реализацию с помощью блока Modelica добавим параметр μ(рис. 4.3).

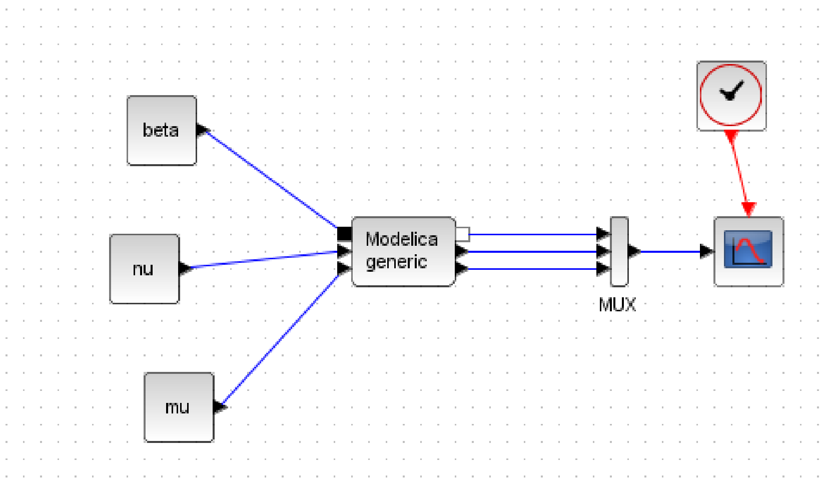

Рис. 4.3: Модель SIR с учетом демографии в xcos с применением блока Modelica

Также изменим данные блока Modelica(рис. 4.4).

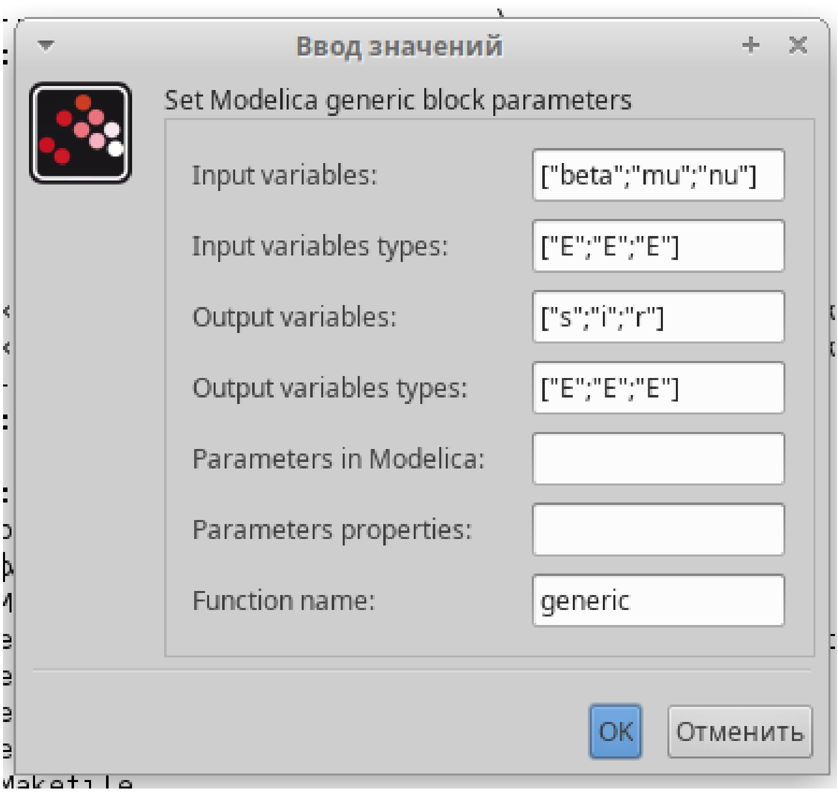

Рис. 4.4: Параметры блока Modelica. Модель SIR с учетом демографии

Код на языке Modelica (рис. 4.5).

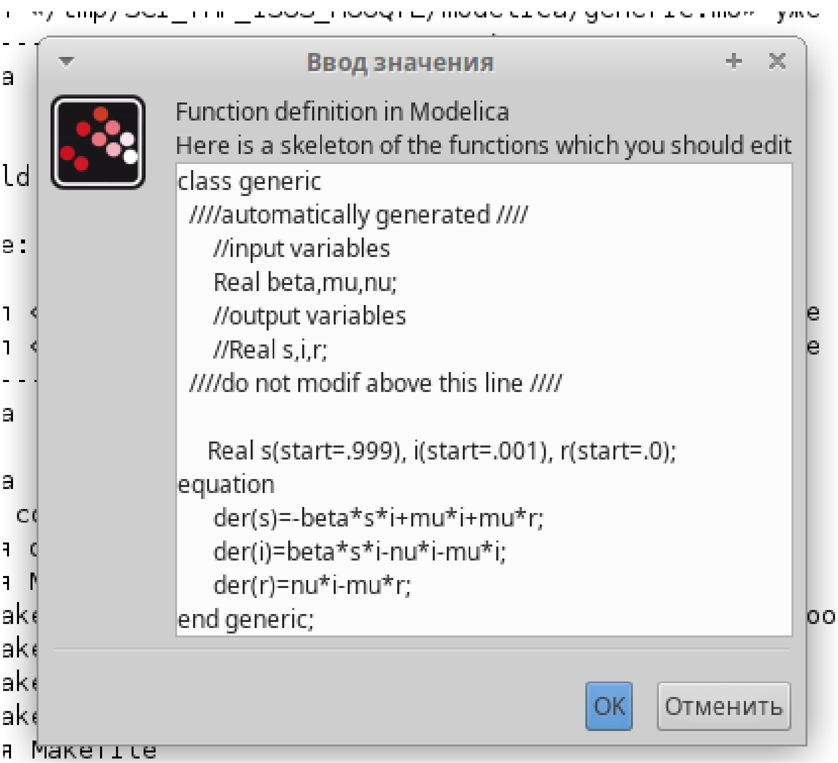

Рис. 4.5: Код на языке Modelica. Модель SIR с учетом демографии

Результат моделирования SIR с учетом демографии с помощью блока Modelica в xcos. (рис. 4.6).

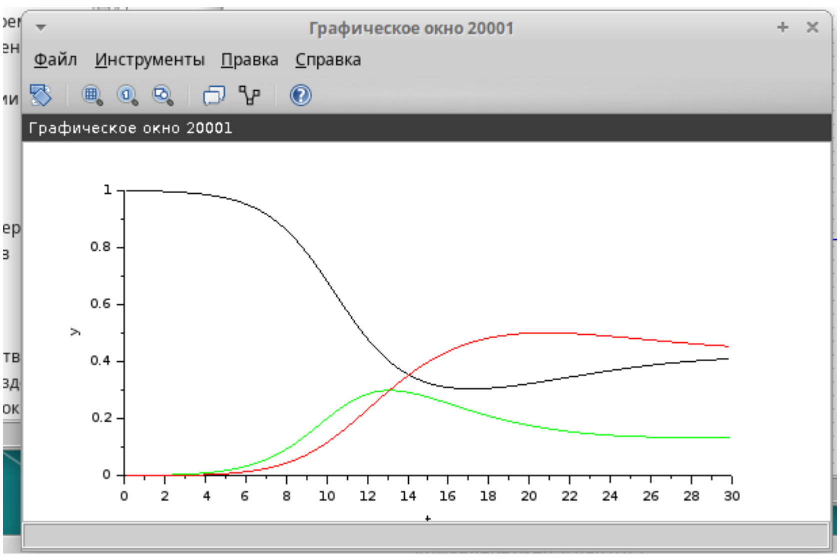

Рис. 4.6: Результат моделирования SIR с учетом демографии с помощью блока Modelica в xcos

4.4 Реализация модели SIR с учетом демографии в OpenModelica

Создадим файл модели, зададим дифференциальные уравнения и присвоим переменным значения. (рис. 4.7).

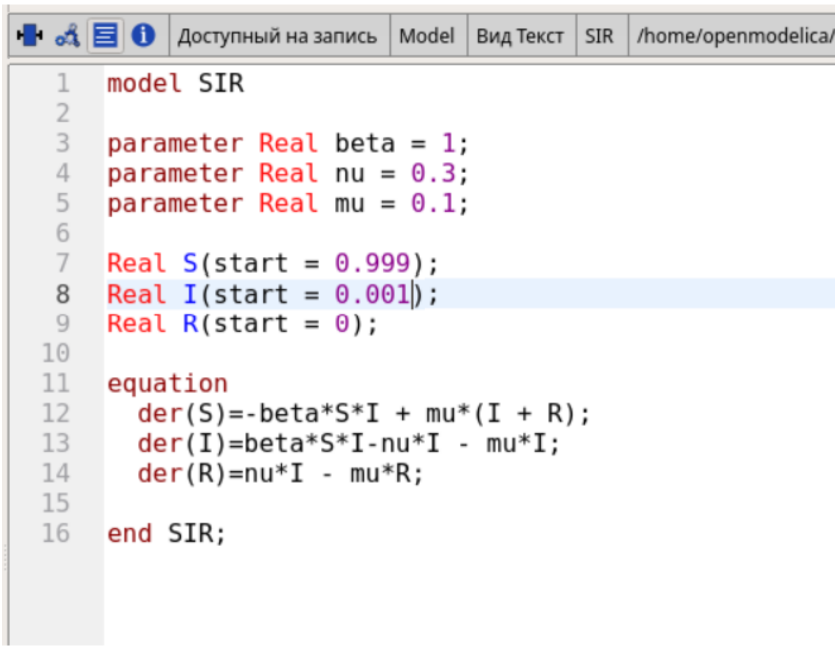

Рис. 4.7: Реализация модели SIR с учетом демографии в OpenModelica

Результат реализации модели SIR с учетом демографии в OpenModelica (рис. 4.8).

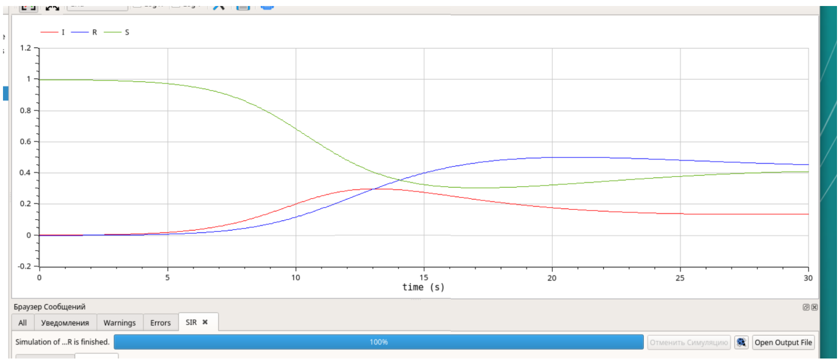

Рис. 4.8: Результат реализации модели SIR с учетом демографии в OpenModelica

4.5 Анализ графиков при разных параметрах модели

Построим графики эпидемического порога при различных значениях параметров модели.

Когда параметр μ достигает значения 0.8(рис. 4.9) на графике появляются прямые. То есть рождается и умирает столько же здоровых, сколько заражается.

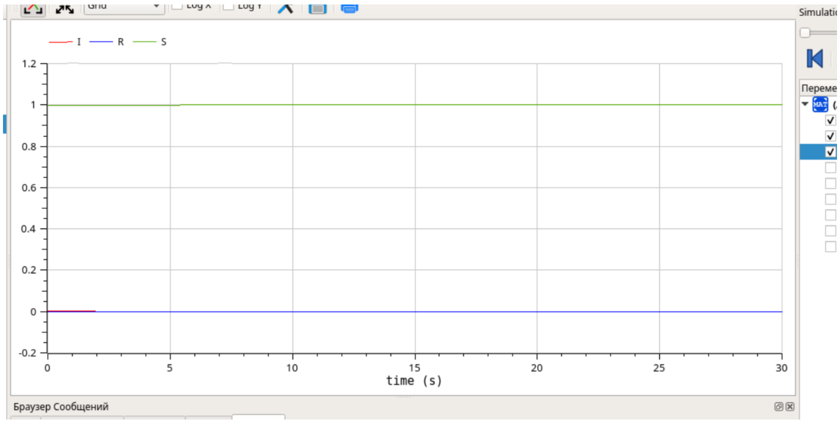

Рис. 4.9: Модель SIR с учетом демографии при $\beta = 1, \nu = 0.3, \mu = 0.8$. OpenModelica

При значении параметра ν равным 0.4, данный параметр отвечает за скорость выздоравления, мы видим, что все три траектории на пересекаются на 30 секундном интервале, и траектория заразившихся накодится значительно ниже здоровых и выздоровивших. (рис. 4.10).

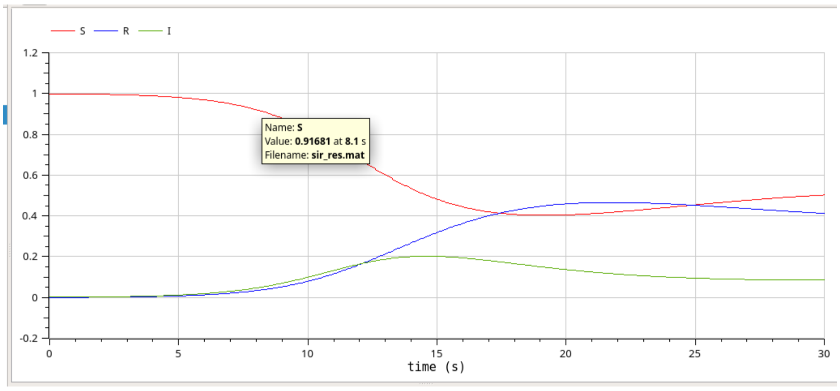

Рис. 4.10: Модель SIR с учетом демографии при $\beta = 1$, $\nu = 0.4$, $\mu = 0.1$. OpenModelica

Когда параметр μ опускается до значения 0.05(рис. 4.11) график становится похожим на первоначальный график, где мы не учитывали это значение.

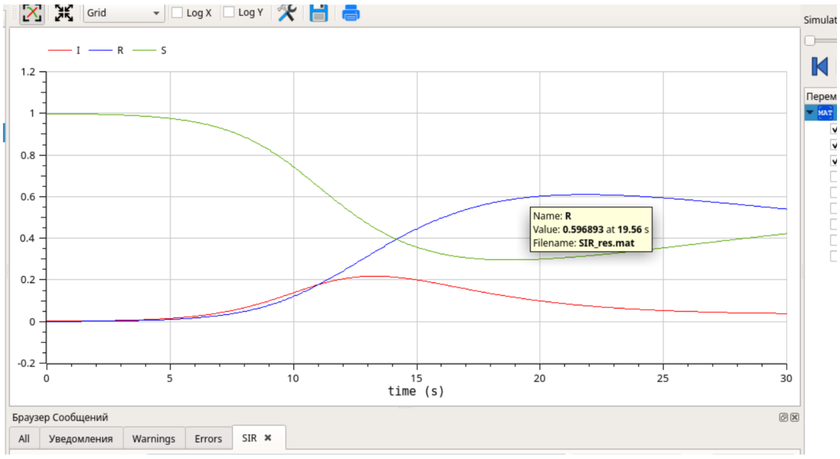

Рис. 4.11: Модель SIR с учетом демографии при $\beta = 1$, $\nu = 0.3$, $\mu = 0.05$. OpenModelica

При значении параметра β равным 4, данный параметр отвечает за скорость заражения, мы видим, что пик заражения наступает очень рано, резкая вспышка заболевших. Также можно заметить, что тогда система быстро приходит в стационарный режим (рис. 4.12).

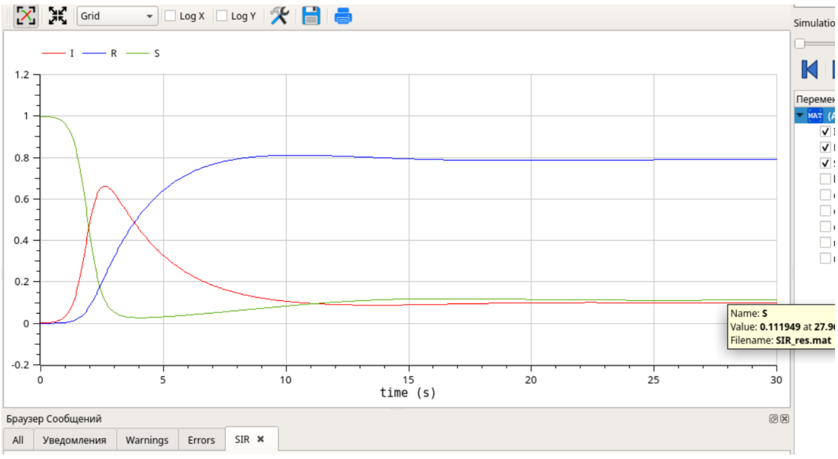

Рис. 4.12: Модель SIR с учетом демографии при $\beta = 4$, $\nu = 0.3$, $\mu = 0.1$. OpenModelica

Когда параметр μ достигает значения 0.4(рис. 4.13) можно заметить, что система быстро стремится к стационарному режиму.

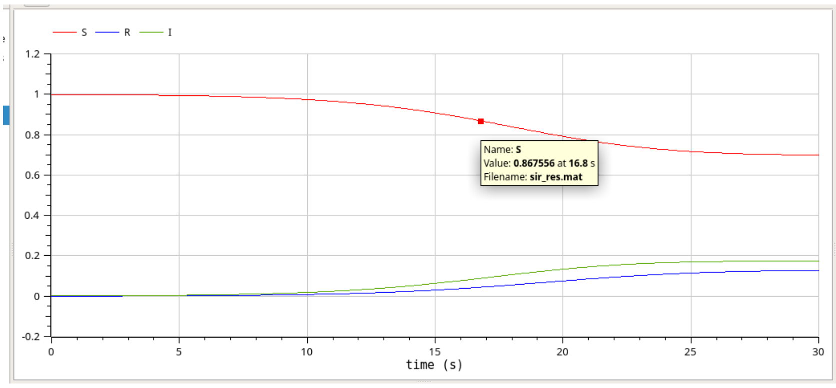

Рис. 4.13: Модель SIR с учетом демографии при $\beta = 1$, $\nu = 0.3$, $\mu = 0.4$. OpenModelica

5 Выводы

Мы исследовали модель эпидемии(SIR) с помощью программы *xcos* и OpenModelica.

Список литературы

1. Королькова А. В. К.Д.С. Лабораторная работа №5. Модель эпидемии(SIR) [Электронный ресурс].