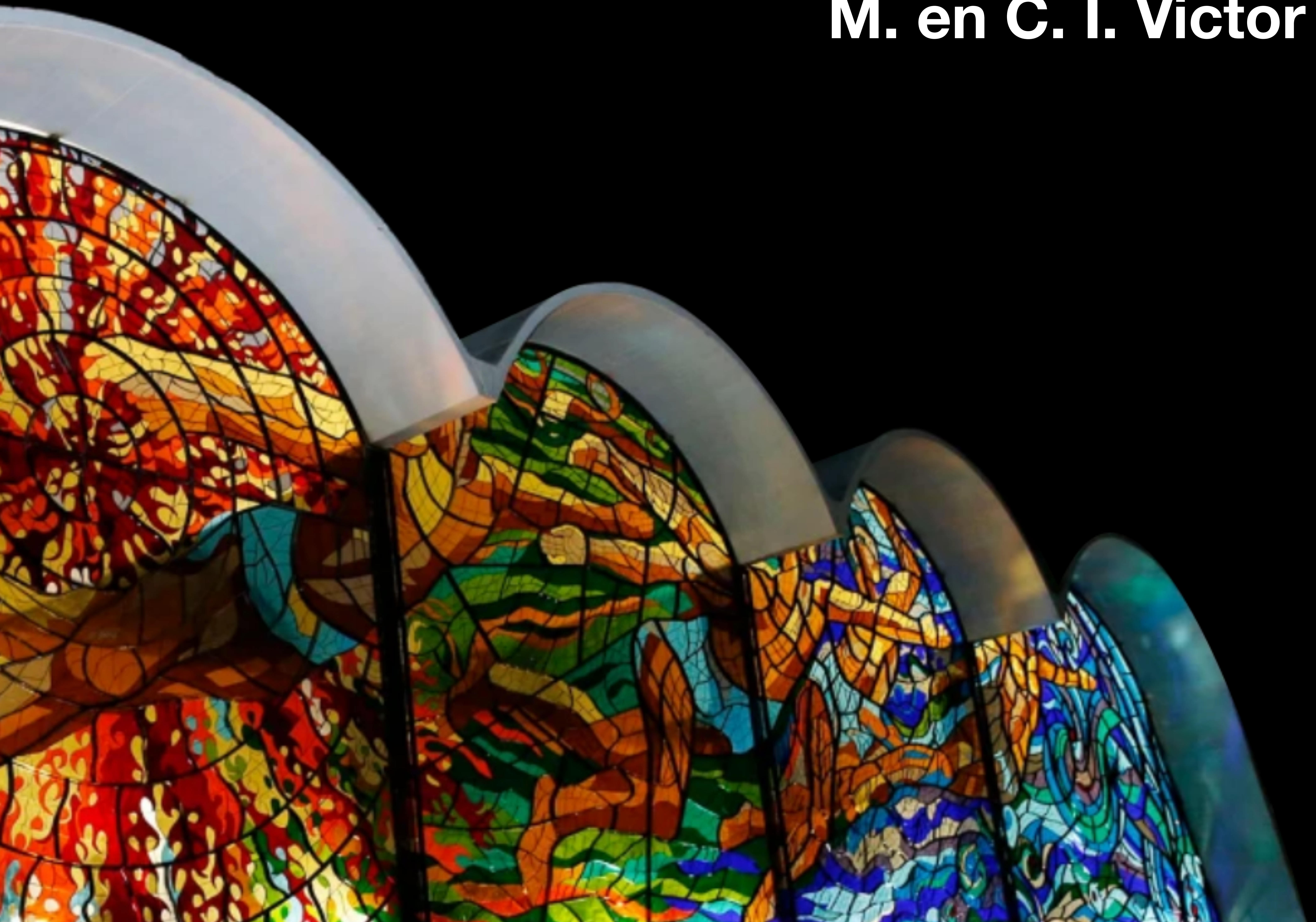
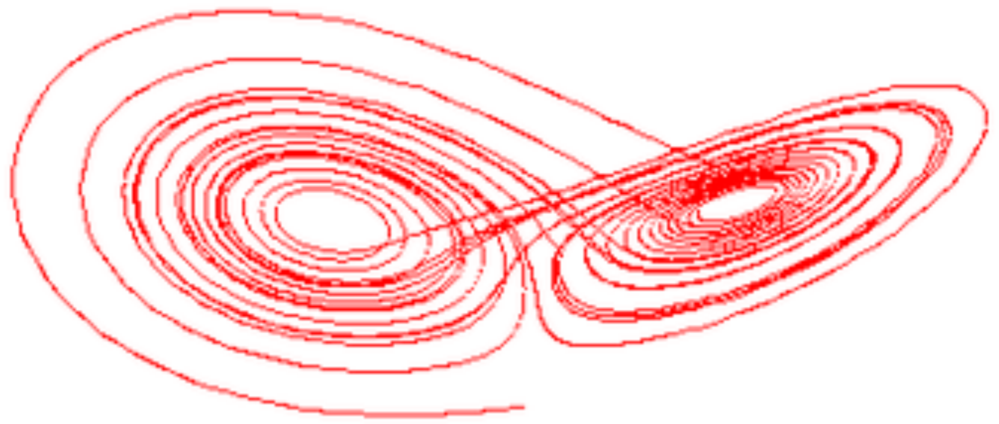
Control no lineal

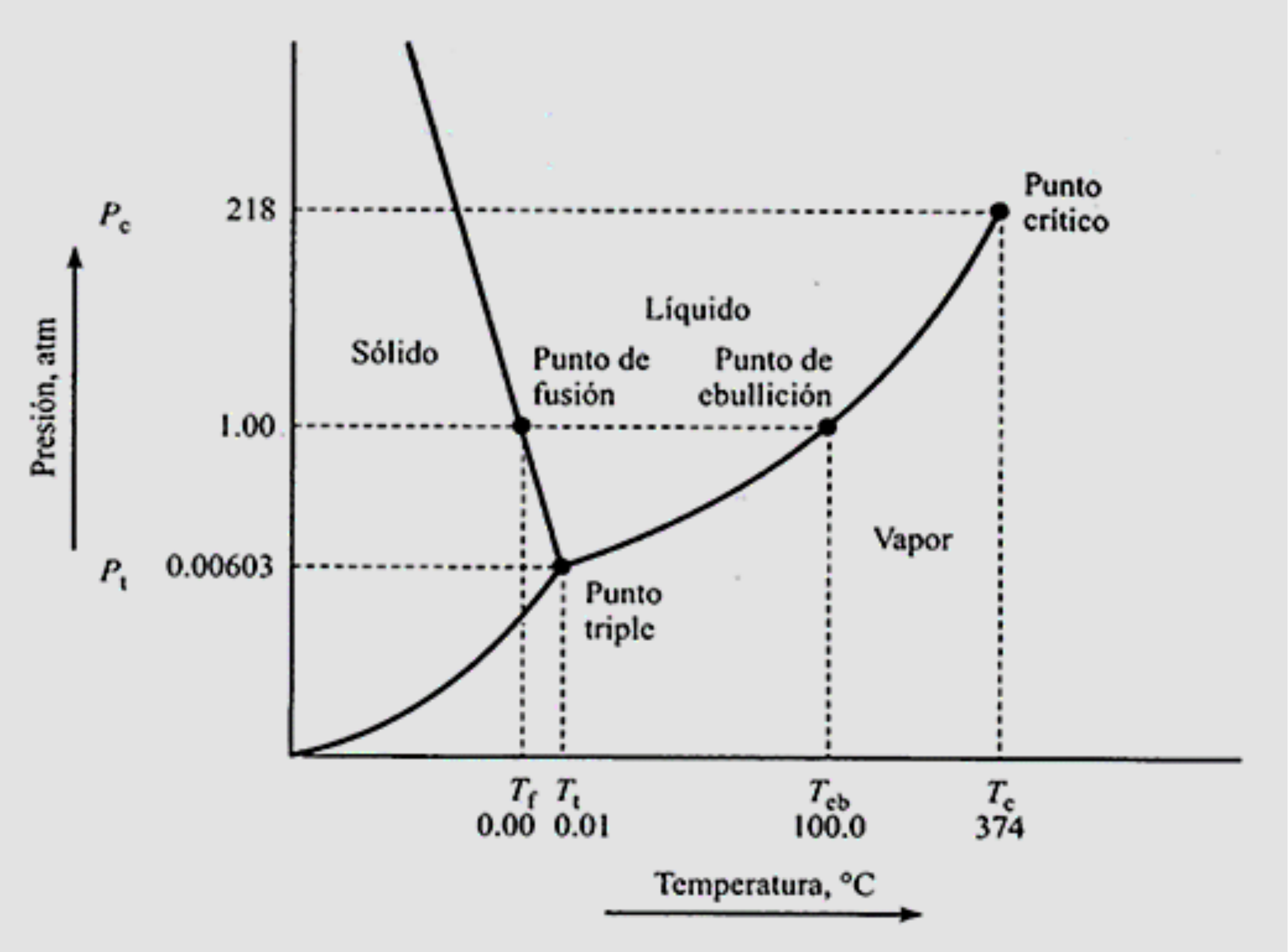
M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



Unidad 2
Análisis Cuantitativo de
Sistemas no lineales

- Estabilidad y Tipos de Equilibrios
- Comportamiento Dinámico: Atractores, Ciclos Límites, Caos
- Diagramas de Fase y Retratos de Fase





Puntos de equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = h(x(t))$$

- Objetivo es diseñar leyes o estrategias de control para la regulación del comportamiento

- Alrededor de valores de referencia deseados → puntos de operación

- **Puntos** de equilibrio

Puntos de equilibrio

- **Trayectorias de equilibrio**
- se obtienen al resolver la ecuación $\dot{x} \equiv 0$
- Cuando la tasa de variación de x respecto al tiempo es cero, es decir, cuando $dx/dt \equiv 0$, tendremos:

$$f(X(U), U) \equiv 0$$

- para calcular el punto de equilibrio(X, U), debemos resolver una ecuación implícita que depende de la señal de control en el equilibrio, dada por el valor U

Puntos de equilibrio

- Consideraremos sistemas de ecuaciones diferenciales que poseen puntos de equilibrio constantes, los cuales están dados por:

$$u(t) = U; x(t) = X(U); y(t) = Y(U) = h(X(U)), \text{ para todo } t$$

- En este caso, diremos que el punto de equilibrio está **parametrizado** en función de la señal de control constante U.
- En general, pueden existir múltiples puntos de equilibrio, *con o sin sentido físico.*
- *E*s posible que ni siquiera exista tal punto de equilibrio constante, ***casos patológicos.***

Ejemplo 1 - Sin punto de equilibrio

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{x(t)} + u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

- Si $u = U = 0$, no existe ningún punto de equilibrio para la variable de estado $x(t)$.

- Si $u = U \neq 0$ entonces si existe un punto de equilibrio, el cual toma el valor $x(t) = X(U) = -1/U$

Ejemplo 2 - Dos o más puntos de equilibrio

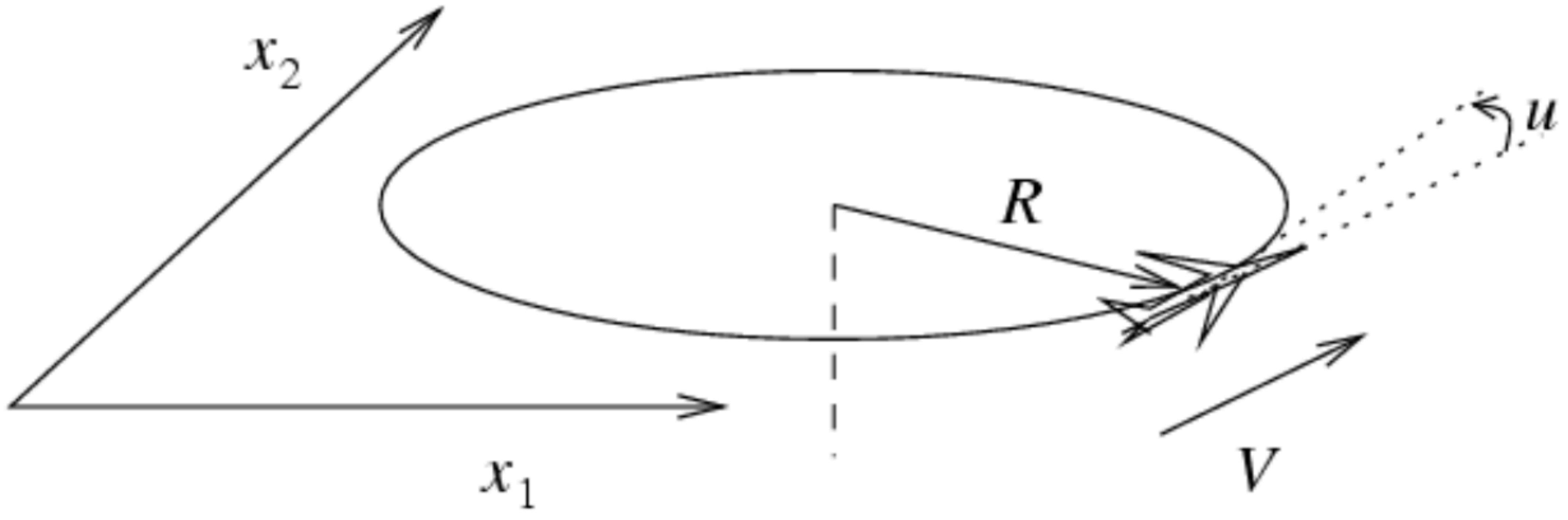
$$\dot{x} = u(x^2 - 2)$$

$$y = x$$

- Tiene para $u = U \neq 0$, dos puntos de equilibrio ubicados en $x = \pm\sqrt{2}$.
- Pero $u = U = 0$ entonces el sistema tiene infinitos puntos de equilibrio, ya que, en este caso, para cualquier $x = X = constante$, se cumple que $dx/dt = 0$.

Modelo 1 - Avión en vuelo horizontal

- Un avión que vuela describiendo un círculo de radio R, en un plano de dos dimensiones paralelo al plano tangente a la tierra.



$$\dot{x}_1 = V \cos u$$

$$\dot{x}_2 = V \sin u$$

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R$$

Modelo 1 - Avión en vuelo horizontal

- En este caso no existe ningún punto de equilibrio constante pues el par de ecuaciones diferenciales igualadas a cero, para un valor fijo U de u.
- Si expresamos el sistema anterior en coordenadas polares, a partir de la transformación de coordenadas dada por:

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}; \qquad x_1 = \rho\cos\theta\, ; x_2 = \rho\sin\theta$$

$$\dot{\rho} = V\cos(\theta - u)$$

$$\dot{\theta} = V\sin(\theta - u)$$

$$y = \rho - R$$

Modelo 2 - Gas confinado a un recipiente cerrado

- La ecuación diferencial que describe los cambios de presión de un gas dentro de un tanque, del cual se permite cierto escape en régimen subcrítico, está dada por:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{RTK_0A_0}{V}\sqrt{P_0(P - P_0)} + \frac{RTT}{V}u$$

- Donde u es el volumen de gas por unidad de tiempo

Modelo 2 - Gas confinado a un recipiente cerrado

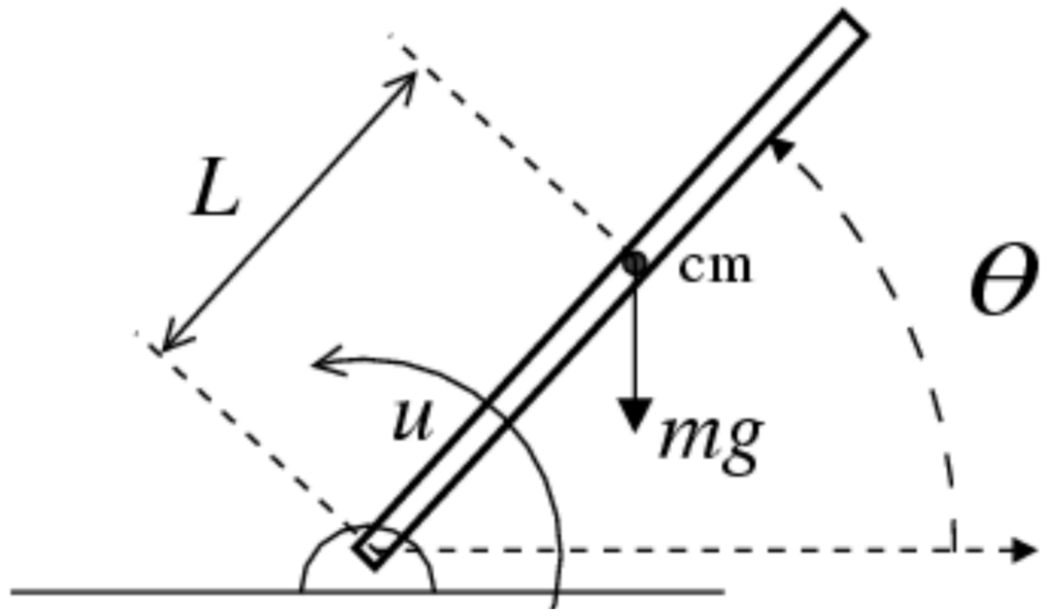
- Punto de equilibrio, si no alimentamos gas alguno al tanque, $u = U = 0$, el punto de equilibrio de la presión es $P = P_0$.

- Si, por el contrario, inyectamos una cantidad constante de gas $u = U \neq 0$, el punto de equilibrio para la presión resulta ser ahora:

$$P(U) = P_0 + \frac{1}{P_0}\left(\frac{U}{K_0 A_0}\right)^2$$

Modelo 3 - Péndulo sin amortiguamiento

- El modelo de un péndulo simple sin amortiguamiento está dado por:



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{mmgL}{J}\cos x_1 + \frac{1}{J}u$$

$$y = x_1$$

Modelo 3 - Péndulo sin amortiguamiento

- El punto de equilibrio para x_2 es, simplemente $x_2 = 0$.
- Sin embargo, si $u = U = 0$, entonces tendremos infinitos puntos de equilibrio constante para x_1 para cada valor del ángulo x_1 que haga $cos x_1 = 0$
- En efecto, $x1 = \pm(2k + 1)\pi/2, k = 1,2,3,...,$ son puntos de equilibrio del sistema.
- Sin embargo, si restringimos el espacio de estados a una región donde x_1 pertenece al intervalo $x_1 \in [\pi/2 - \delta, \pi/2 + \delta]$
- Para un δ suficientemente pequeño, poseerá un único punto de equilibrio sobre ese intervalo.

Modelo 4 - Reactor biológico

- La cantidad de *metanol* en un reactor biológico de agitado permanente que utiliza organismos conocidos como *metilomonas.*

$$\dot{x}_1 = \frac{A_\mu x_2}{B + x_2} x_1 - u x_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{A_\sigma x_2}{B + x_2} x_1 + u(A_f - x2)$$

$$y = x_2$$

- Donde: u es la tasa de disolución del sustrato y A_f es la concentración del sustrato en la alimentación del tanque, la cual puede ser considerada constante. A_μ y A_σ son constantes conocidas

Modelo 4 - Reactor biológico

- Para valores constantes de la tasa de disolución, $u = U \neq 0$, el sistema tiene dos puntos de equilibrio constantes. Uno de ellos ubicado en $(X_1, X_2) = (0, A_f)$ y el otro en:

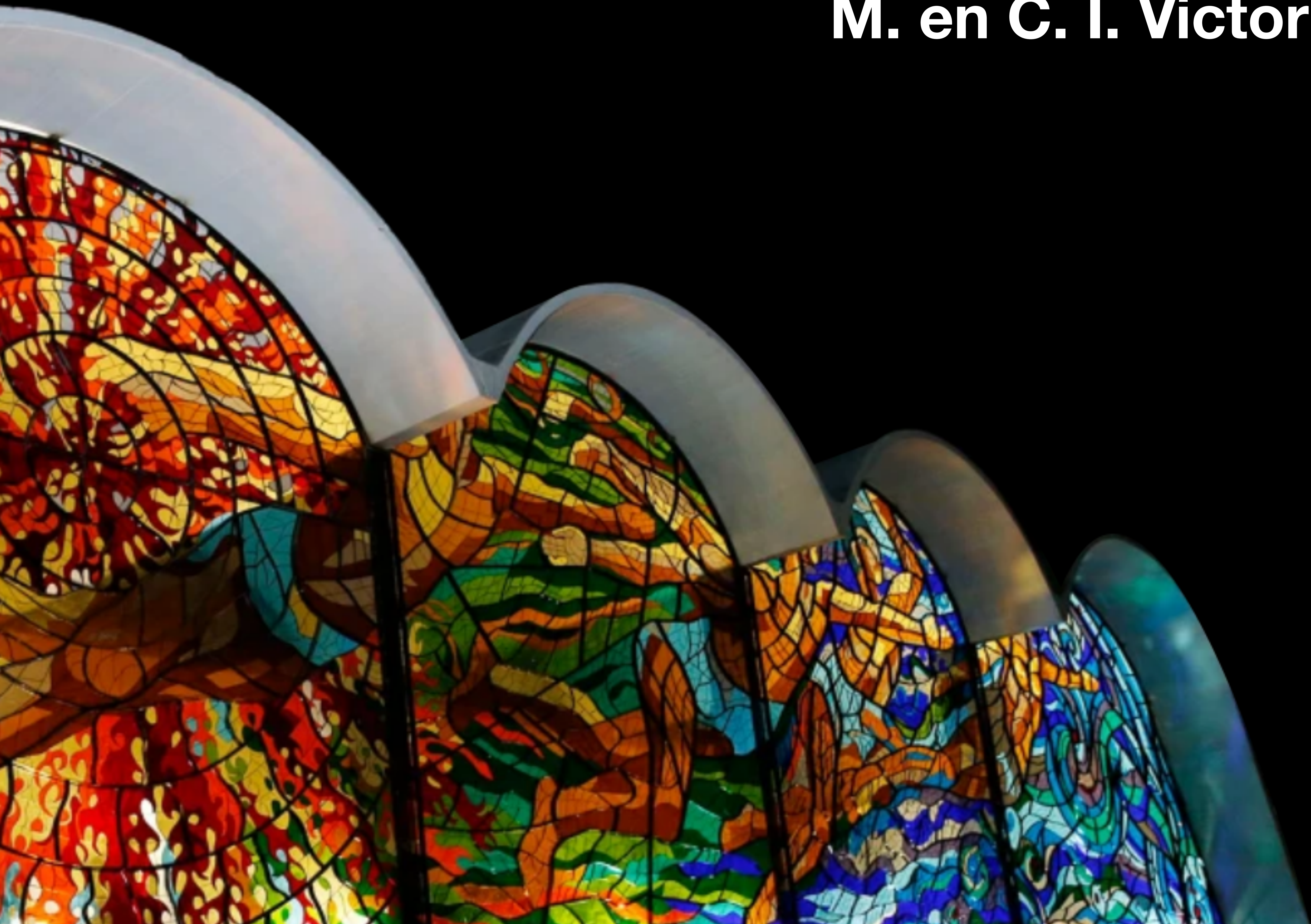
$$x_1 = X_1(U) = \frac{A_\mu}{A_\sigma}\frac{A_f A_\mu - (A_f + B)U}{A_\mu - U}$$

$$x_2 = X(U) = \frac{BU}{A_\mu - U}$$

- Si $u = U = 0$ entonces $X_1 = 0$ o $X_2 = 0$.

Control no lineal

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



Unidad 2
Atractores

Introducción

- Un sistema dinámico es un proceso que va cambiando en el tiempo.
- La evolución temporal de un sistema está descrita por las iteraciones de una sola función $f : E \to E$.
- Definida en cierto conjunto $E \in \mathbb{R}^n$ que recibe el nombre de espacio fase.
- Las iteraciones de f son las funciones en E que obtenemos al componer f consigo misma, $f = f^1, f \cdot f = f^2, f \cdot f \cdot \ldots \cdot f = f^n$.
- Estas funciones nos ayudan a describir el movimiento que se da en E.

Introducción

- Si el sistema se encuentra en estado inicial x_0, la´orbita de x_0 bajo f es el siguiente conjunto: $\{x_0, f(x_0), f2(x_0), \ldots\} =´ \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$
- Así su evolución temporal corresponde a la sucesión $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$
- Decimos que $x_0 \in E$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$. Cuando sucede que exista $n \in N, n \geq 2$ tal que $f^n(x_0) = x_0$ y para cada $j, 1 \leq j < n, f^j(x_0) \neq x_0$ decimos que x_0 es un punto periódico de periodo n.

Atractores

Introducción

- Se denomina atractor a aquellos estados a los que converge un sistema a partir de diversos estados iniciales.

- Así que la palabra atractor significa un conjunto atractivo.

- Supongamos que las órbitas de cierto sistema empiezan a acercarse cada vez más a cierto conjunto.

- Después de cierto tiempo dejará de observar la diferencia entre un punto del atractor y un punto de dicha órbita.

Introducción

- Se le llama atractor porque esa región parece atraer diversas trayectorias hacia si.

Atractores

Descripción

- En la teoría de sistemas dinámicos se estudia como son las órbitas de las diferentes condiciones iniciales. En general nos interesará saber si la órbita de una condición inicial converge a cierto valor (que será necesariamente un punto fijo).

- Si converge a un ciclo periódico o si se comporta de forma aparentemente aleatoria.

- Comúnmente se considera al atractor como un conjunto cerrado formado por los puntos de acumulación o convergencia de las órbitas que lo componen.

Atractores

Descripción

- Cuando las trayectorias eventualmente se convierten en estacionarias, decimos que es un atractor de punto fijo.
- Según las trayectorias qué el o los atractores provoquen o modifiquen se clasifican en: Periódicos o Erráticos.
- Geométricamente, un punto, una curva, una variedad de puntos o un conjunto complicado de estructuras cuyas trayectorias no tienen, **aunque puedan**, que satisfacer alguna propiedad especial, excepto la de permanecer en el atractor.

Definición 1

Un conjunto atractor es un conjunto cerrado A con las siguientes propiedades:

1. A es un conjunto invariante: cualquier trayectoria x_n que empiece en A, permanece en A para todo tiempo.

2. A atrae un conjunto abierto de condiciones iniciales: hay un abierto U conteniendo a A tal que si $x_0 \in U$, entonces la distancia de x_n a A tiende a cero, cuando n tiende a infinito.

3. A es mínimo: no existe ningún subconjunto propio de A, que satisfaga las condiciones 1 y 2.

Atractores

Definición 1

- Hay varios tipos de atractores hacia los cuáles los sistemas dinámicos en evolución tienden a converger.

- La mayoría de los sistemas no lineales tienden hacia atractores de estado estable en los que nada ocurre, como en un péndulo en reposo.

- El atractor de ciclo límite, se observan la interminable repetición del mismo comportamiento, como el oscilador de Van Der Pol.

- Los atractores más interesantes son los caóticos o atractores extraños.

Definición 2

Se define como atractor extraño, un atractor que presenta una dependencia sensible a condiciones iniciales.

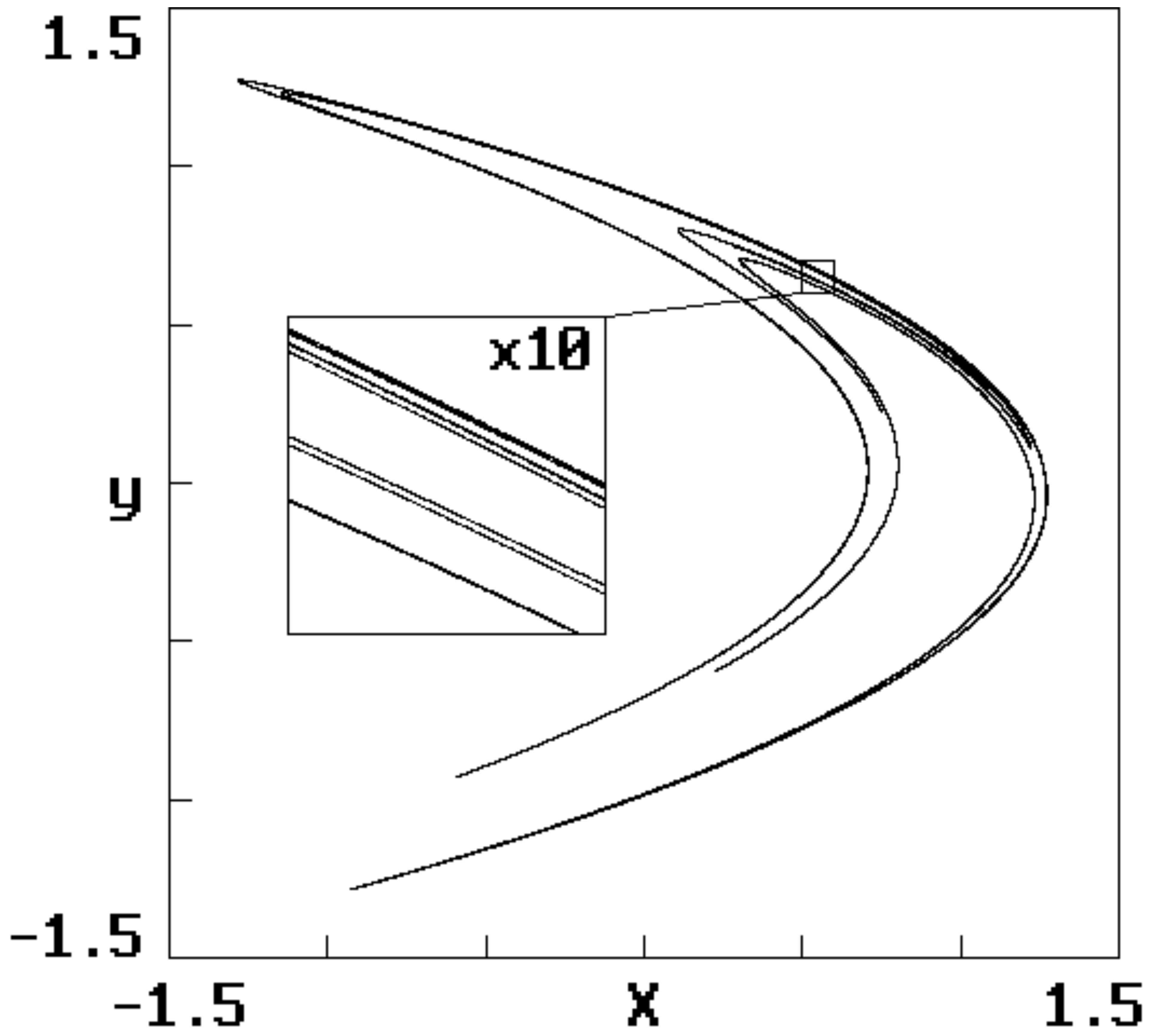
- Compresión
- Expansión
- Plegamiento
- Cerramiento
- Microestructura fractal

Sistema de Hénon

$$x_{n+1} = 1 + y_n - 1.4x_n^2$$

$$y_{n+1} = 0.3x_n$$

- Si se hacen sucesivas ampliaciones, se observa que la imagen obtenida es casi igual o muy similar.
- Si el atractor tiene estructura fractal entonces hay muchas definiciones de dimensión de atractor.
- Dimensión puntual (pointwise dimension).



Definición 3

Sea A un atractor del sistema dinámico discreto actuando en un espacio de Hilbert. Sea $x_0 \in A$ y $\epsilon > 0$. Suponemos que A tiene una medida invariante local μ_ϵ.

- La dimensión puntual de A en x_0 es:

$$d(x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon^2 - 2\lambda_1(\epsilon)}{\lambda_1(\epsilon)}$$

- Donde λ_1 es el valor propio mas grande del operador Γ^ϵ. Teoría de las bases locales.

Modelo presa-depredador

- El modelo presa-depredador se ocupa de la interacción entre dos especies, donde una de ellas (presa) tiene abundante comida y la segunda especie (depredador) tiene suministro de alimentos exclusivamente a la población de presas.

- Se supone que, durante el proceso, en un intervalo de tiempo t, el medio no debería cambiar favoreciendo a ninguna de las especies.

$$P_1(n+1) = (1-\mu_0)P_1(n) - r(1-P_1(n))P_1(n)^2 + \frac{c^2B(n)}{c + (\mu_0 + rP_1(n)(1-P_1(n)))P_2(n)}$$

Modelo presa-depredador

$$B(n+1) = -(\gamma - 2)B(n) - r(1 - P_1(n))P_1(n)B(n) + \beta_0 A(n)$$

$$A(n+1) = -(\gamma - 2)A(n) - rP_1(n)(1 - P_1(n))A(n) - e^{\alpha}(\frac{c^2 B(n+1)}{c + (\mu_0 + rP_1(n)(1 - P_1(n)))P_2(n+1)} + \frac{(\mu 0 + rP_1(n)(1 - P_1(n)) - 2)c^2 B(n)}{c + (\mu_0 + rP_1(n)(1 - P_1(n)))P_2(n)})$$

$$P2(n+1) = -bP_2(n) + dB(n)P_2(n)$$

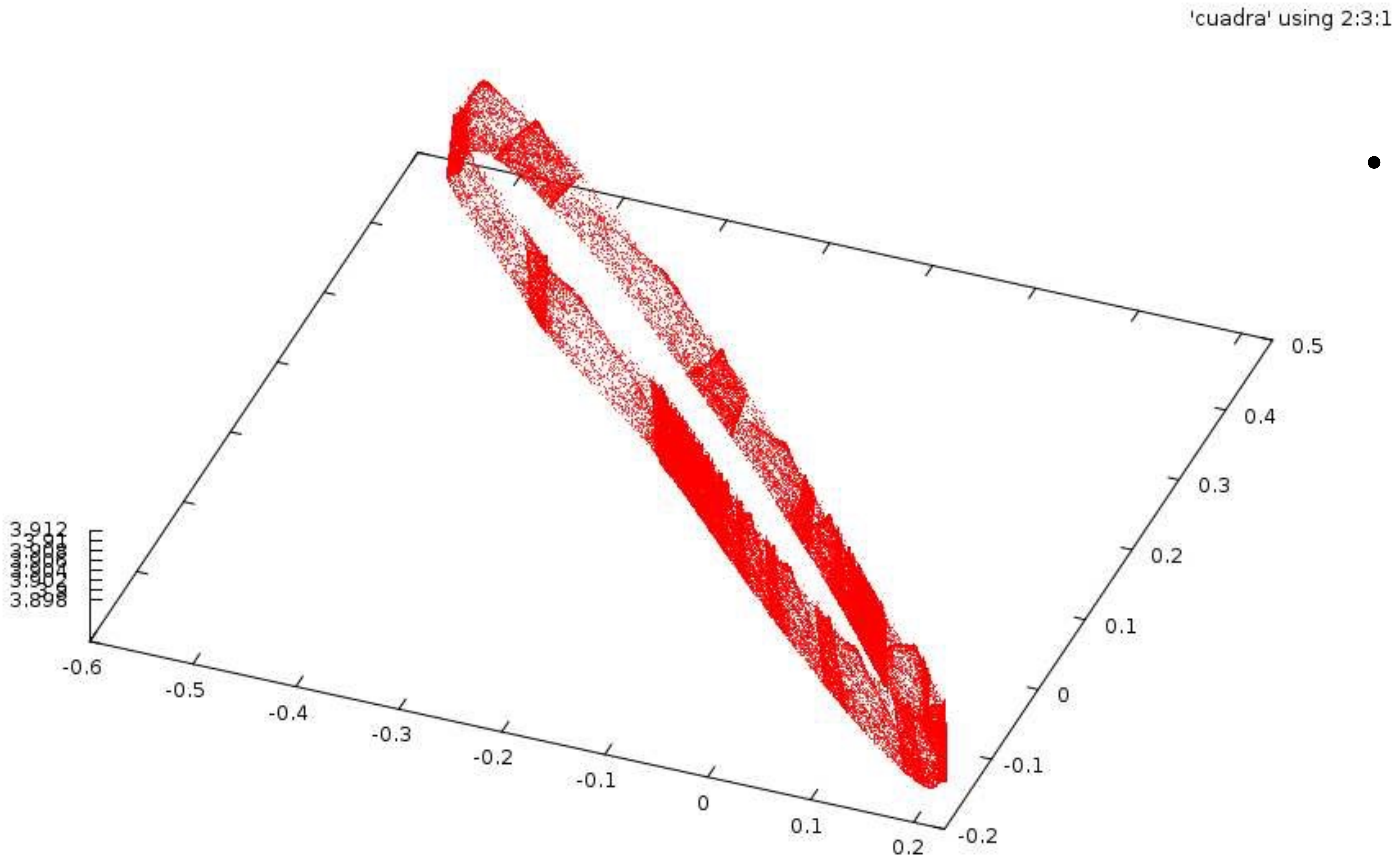
- Cuando μ (tasa de mortalidad de las presas) era constante, el modelo presa depredador era inestable.
- $\mu = \mu_0 + rP_1(1 - P_1)$ para algunos valores de r el modelo presa-depredador es estable.

Atractores

Cálculo de la órbita

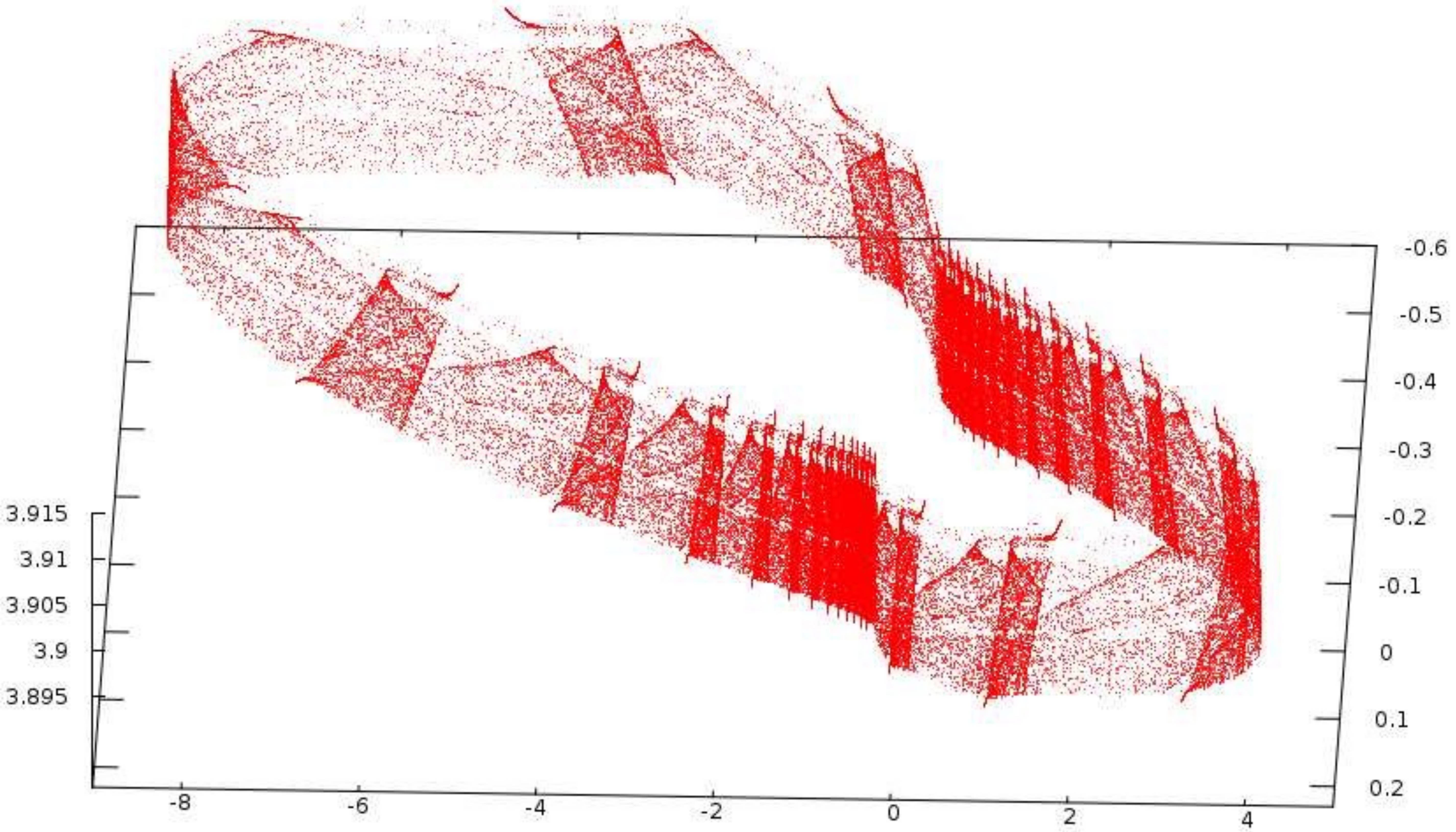
- El sistema dinámico con los valores de los parámetros fijos $\mu_0 = 1.5$, $c = 1$, $e^\alpha = 1.7$, $d = 5$, $\gamma = 3.2$, $\beta_0 = 0.01$, $b = 0.9$, $\lambda = 0$.
- Primero hay que observar lo sucede con el sistema dinámico conforme se varía r.
- Los valores que toma r varían entre 3.87 y 3.93 con incrementos de 0.0001.

Cálculo de la órbita



- Proyección del sistema en P_1 y A variando r.

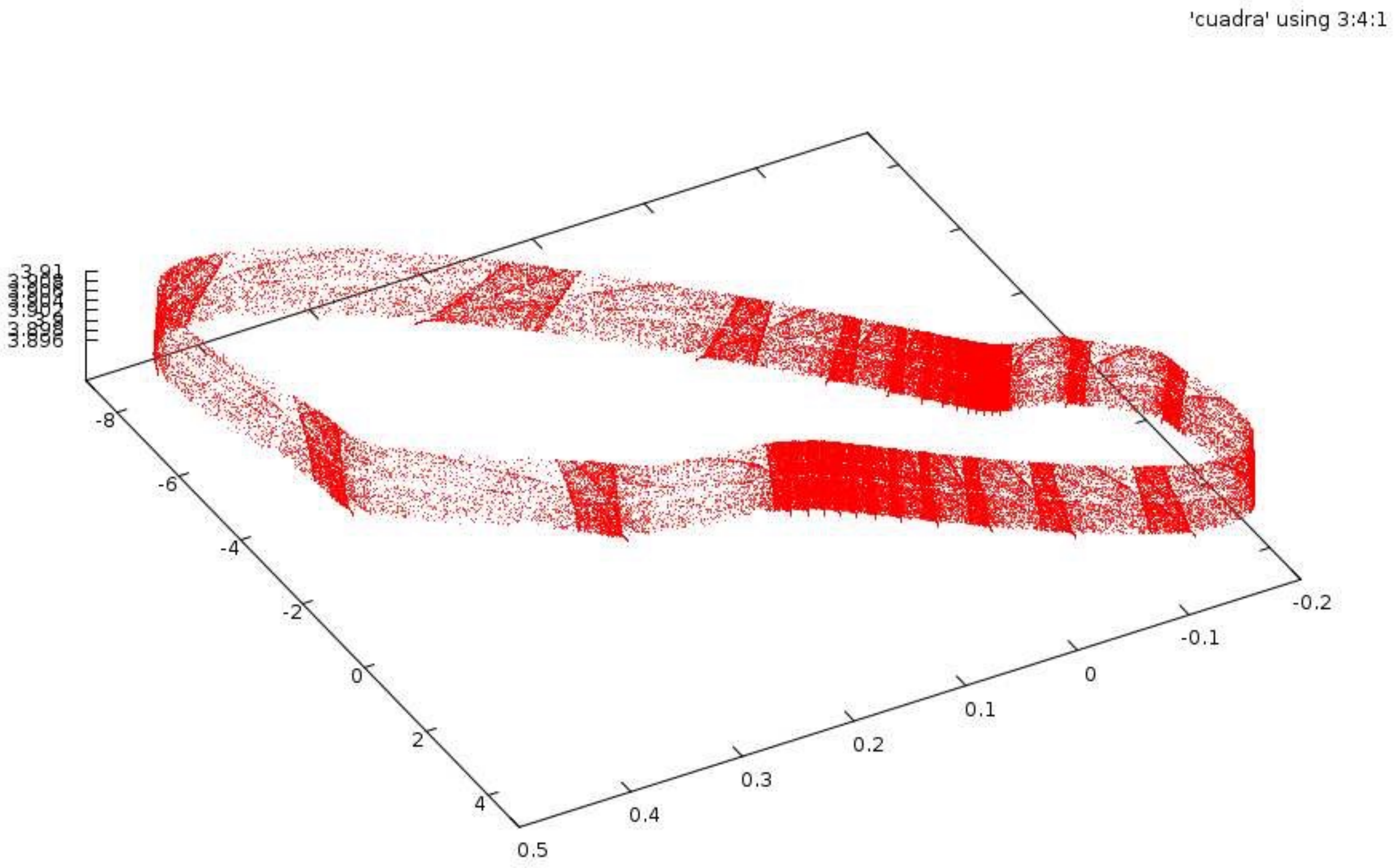
Cálculo de la órbita



- Proyección del sistema en P_1 y B variando r.

Atractores

Cálculo de la órbita



- Proyección del sistema en A y B variando r.

Atractores

Dimensión del atractor

$$P_1(n+1) = -0.5P_1(n) - 3.9(1-P_1(n))P_1(n)^2 + \frac{B(n)}{1+(1.5+3.9P_1(n)(1-P_1(n)))P_2(n)}$$

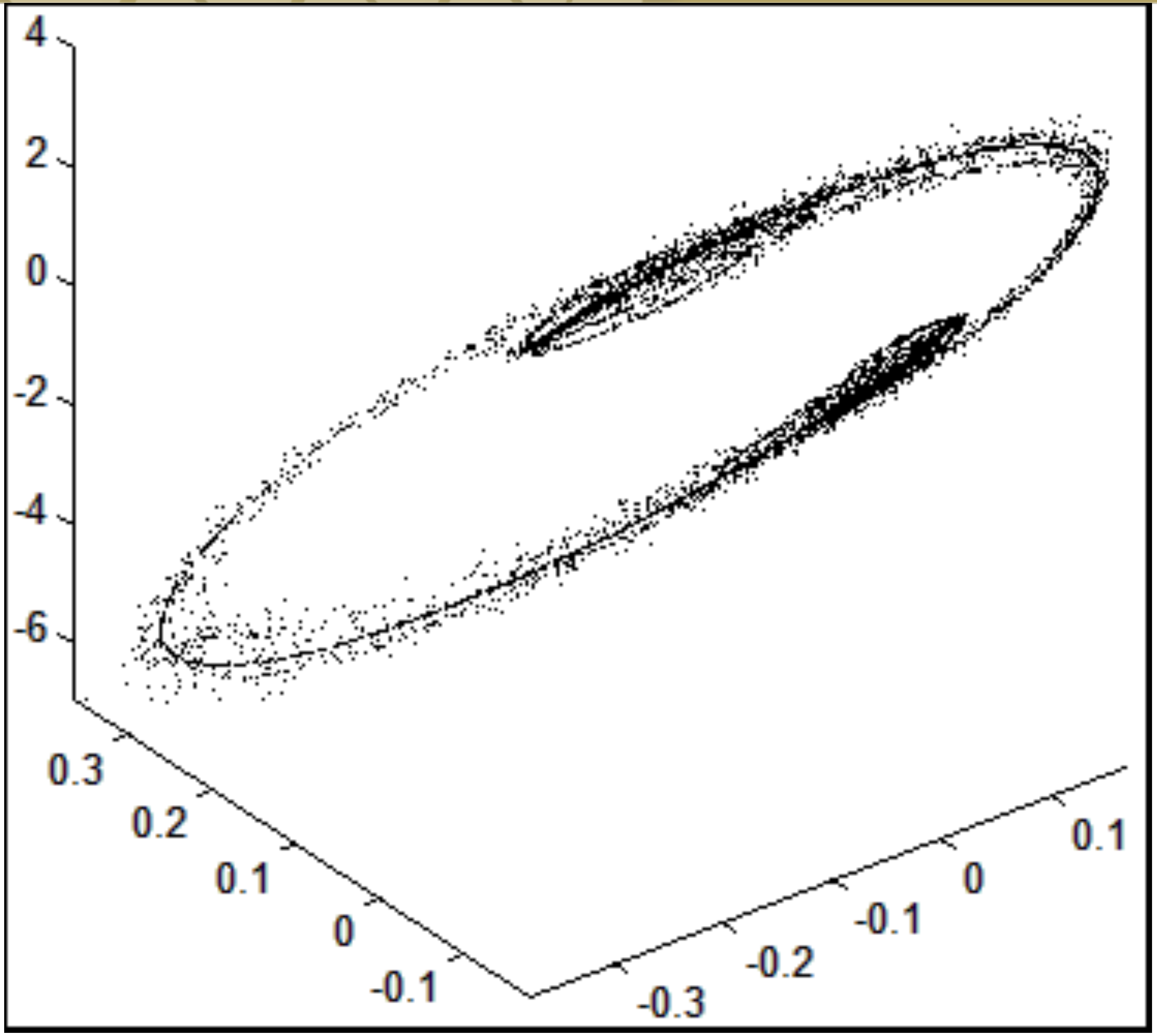
$$B(n+1) = -1.2B(n) - 3.9(1-P_1(n))P_1(n)B(n) + 0.01A(n)$$

$$A(n+1) = -1.2A(n) - 3.9P_1(n)(1-P_1(n))A(n) - 1.7\left(\frac{B(n+1)}{1+(1.5+3.9P_1(n)(1-P_1(n)))P_2(n+1)} + \frac{(1.5+3.9P_1(n)(1-P_1(n))-2)B(n)}{1+(1.5+3.9P_1(n)(1-P_1(n)))P_2(n)}\right)$$

$$P2(n+1) = -9P_2(n) + 5B(n)P_2(n)$$

- Cuando μ (tasa de mortalidad de las presas) era constante, el modelo presa depredador era inestable.

- $\mu = \mu_0 + rP_1(1-P_1)$ para algunos valores de r el modelo presa-depredador es estable.



Cálculo de la órbita

- Atractor que surge de iterar el sistema.
- Si estamos interesados en saber la dimensión del atractor de manera local lo primero es fijar un punto de la órbita en donde se desea obtener dicha información.
- A este punto seleccionado se le conoce como ***"centro"***.

Dimensión del atractor

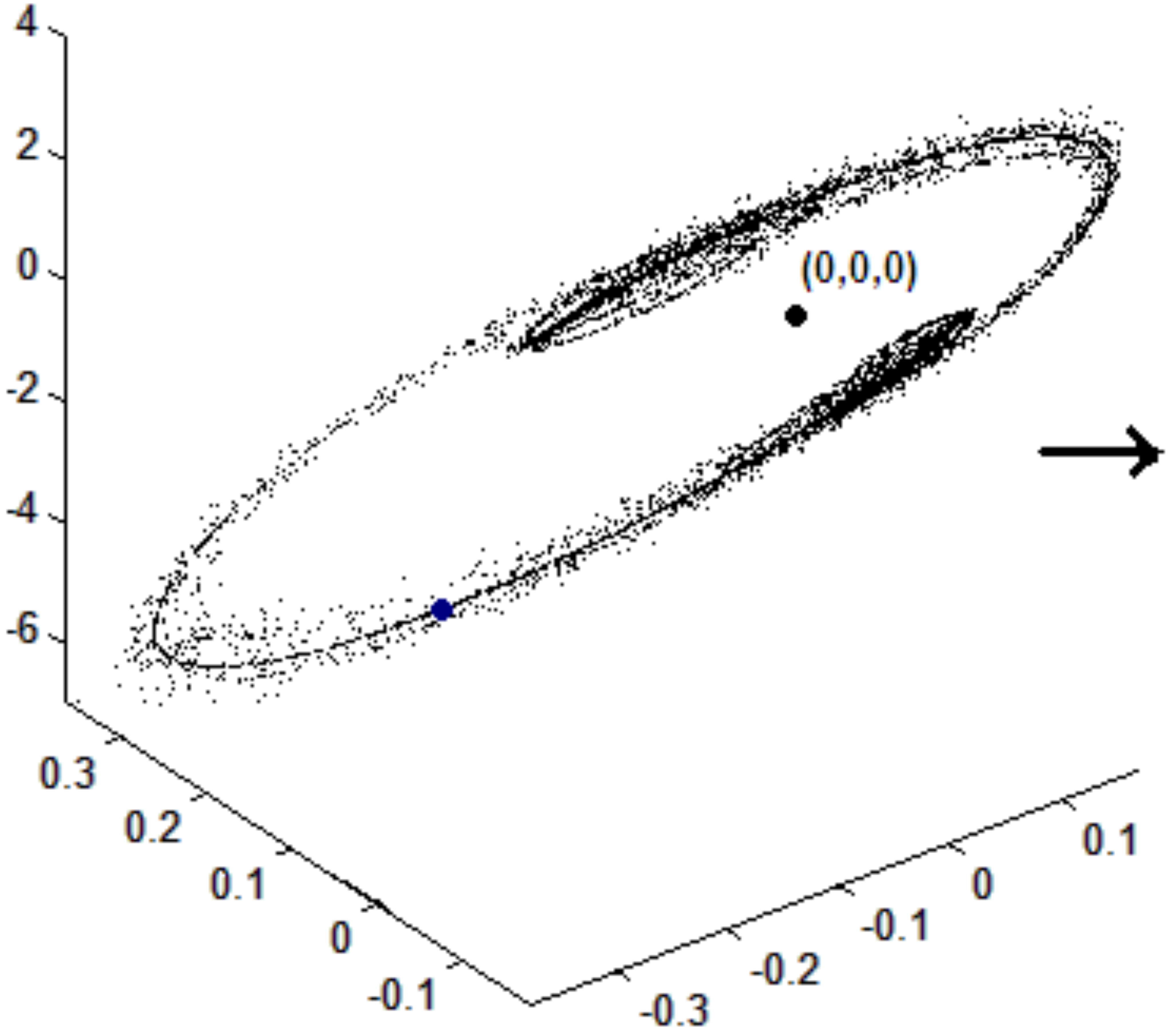
- Se construye una matriz M de tamaño $N \times 4$ de tal manera que los renglones estén formados por los puntos que pertenecen a la intersección del atractor y una vecindad de radio ϵ centrada en el origen.

- N representa el nu´mero de puntos que pertenecen a esta intersección.

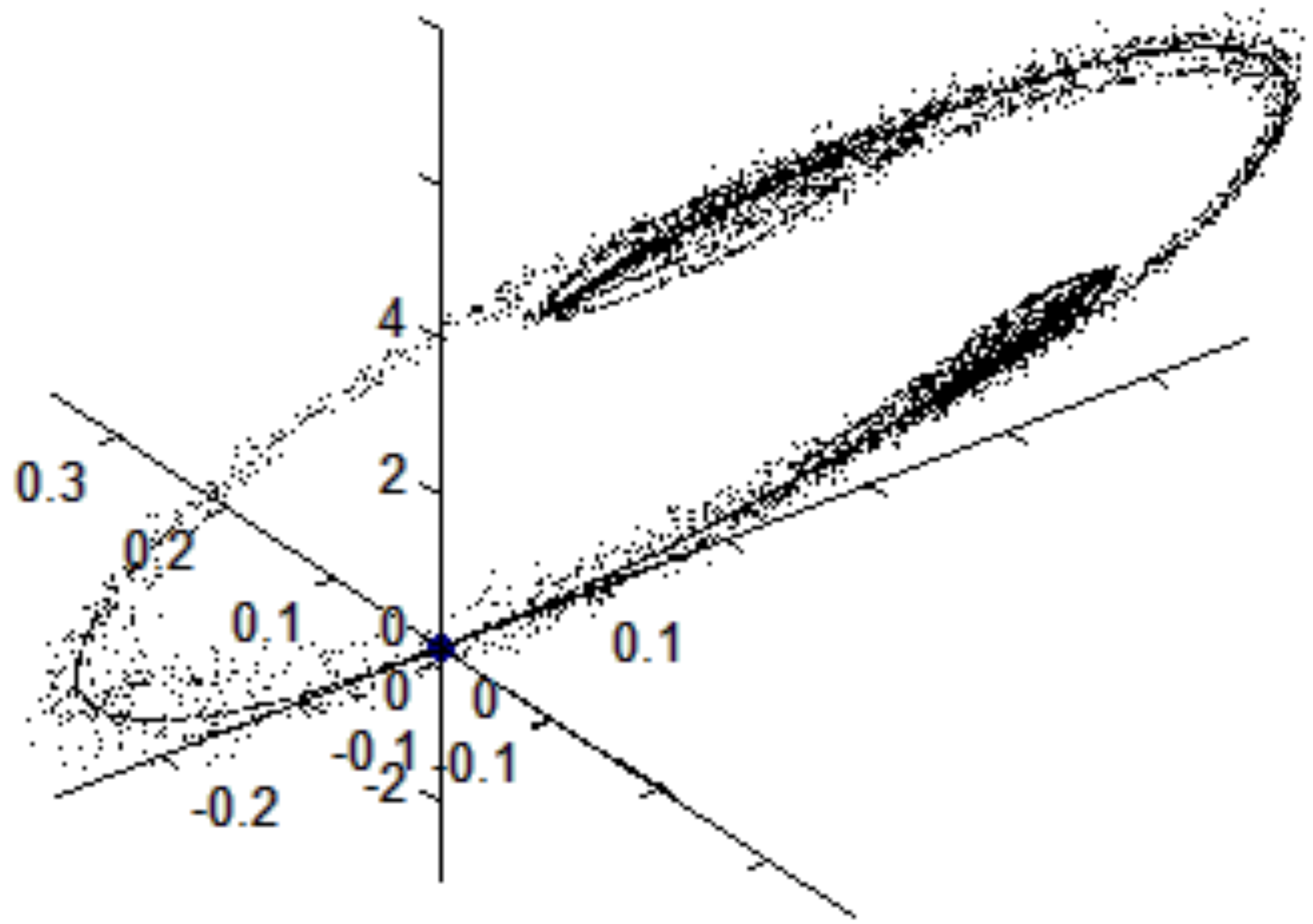
- Una vez que hemos construido M, necesitamos obtener los valores y vectores propios de $\dfrac{M^T M}{N}$

- Un valor propio estará escalado por una constante ϵ^2. La dimensión del atractor de manera local mediante la relación $D = \dfrac{\epsilon^2 - 2\lambda_1}{\lambda_1}$ donde λ_1 es el valor propio mas grande.

Dimensión del atractor



→



Ejercicio 1 Atractor de un péndulo

- Considere un sistema de péndulo no lineal descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$\theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0$$

- Donde:
    - $\theta(t)$ es el ángulo en función del tiempo.
    - $\theta''(t)$ es la segunda derivada del ángulo con respecto al tiempo, que representa la aceleración angular.
    - $\sin(\theta(t))$ es el término no lineal que representa la fuerza gravitatoria en función del ángulo.

Ejercicio 1 Atractor de Lorenz

- El sistema de Lorenz se describe mediante las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

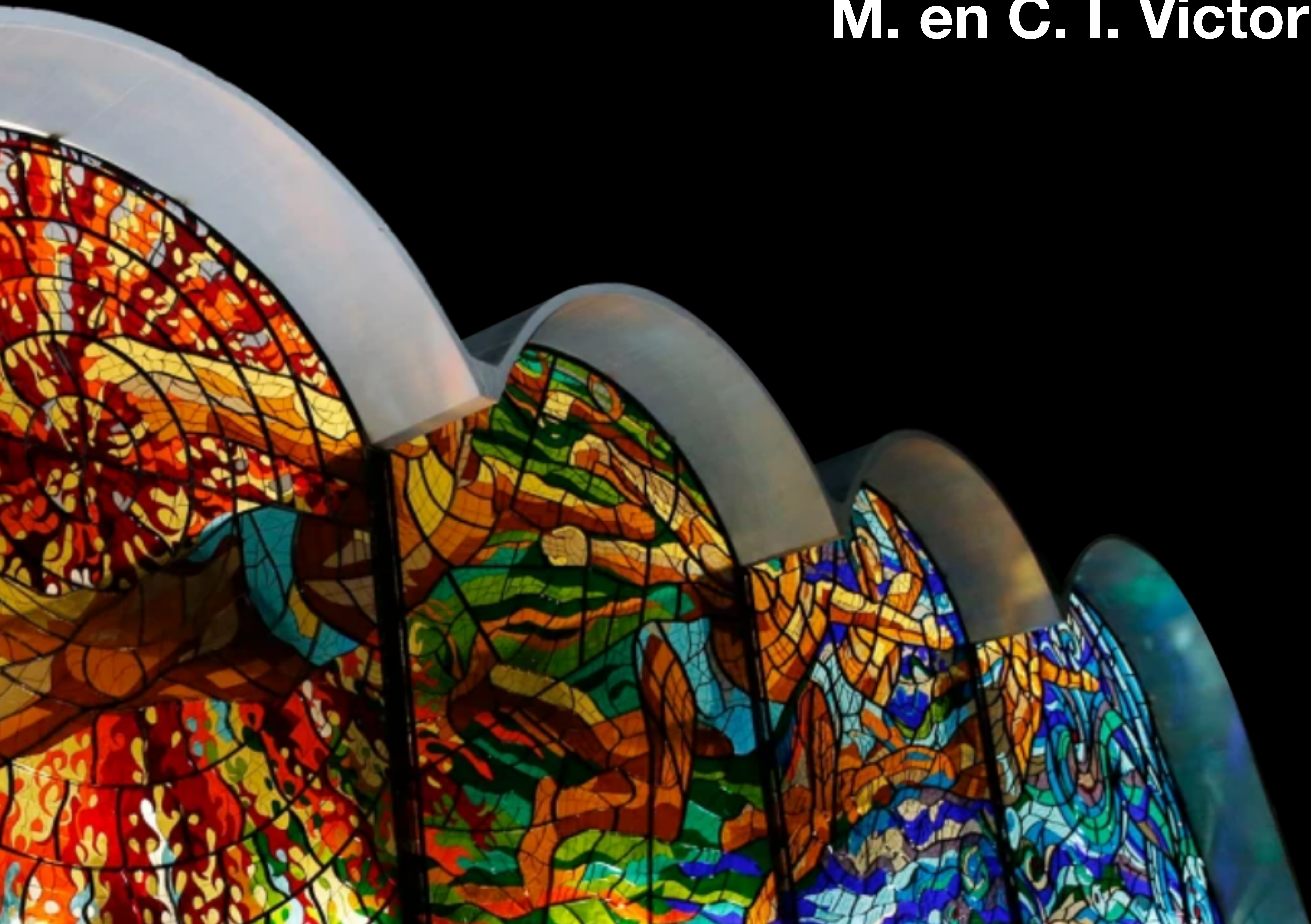
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

- Donde σ, ρ y β son parámetros que determinan el comportamiento del sistema.

Control no lineal

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



Unidad 2

Diagramas de fase

Diagramas de fase

¿Qué son?

- Son representaciones gráficas que muestran el comportamiento dinámico de un sistema dinámico en función de sus variables de estado o coordenadas.

- Diagrama de Fase
- Espacio de Fase
- **Retrato de Fase (Phase Portrait)**
- Plano de Fase
- Gráfico de Fase

- Diagrama de Espacio de Estado
- Retrato de Poincaré
- Plano de Fase de Poincaré
- Diagrama de Estado-Espacio
- Diagrama de Tausend-Besov

Diagramas de fase

¿De dónde se obtienen?

- Un sistema de segundo orden puede ser representado por las ecuaciones de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \dot{x}_1 = f_1(x_i, x_2, t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t)$$

- Si se grafica $x_1(t)$ vs $x_2(t)$, con t como parámetro, la gráfica resultante se llama ***gráfico del plano de estados*** o ***trayectoria del plano de estado***.

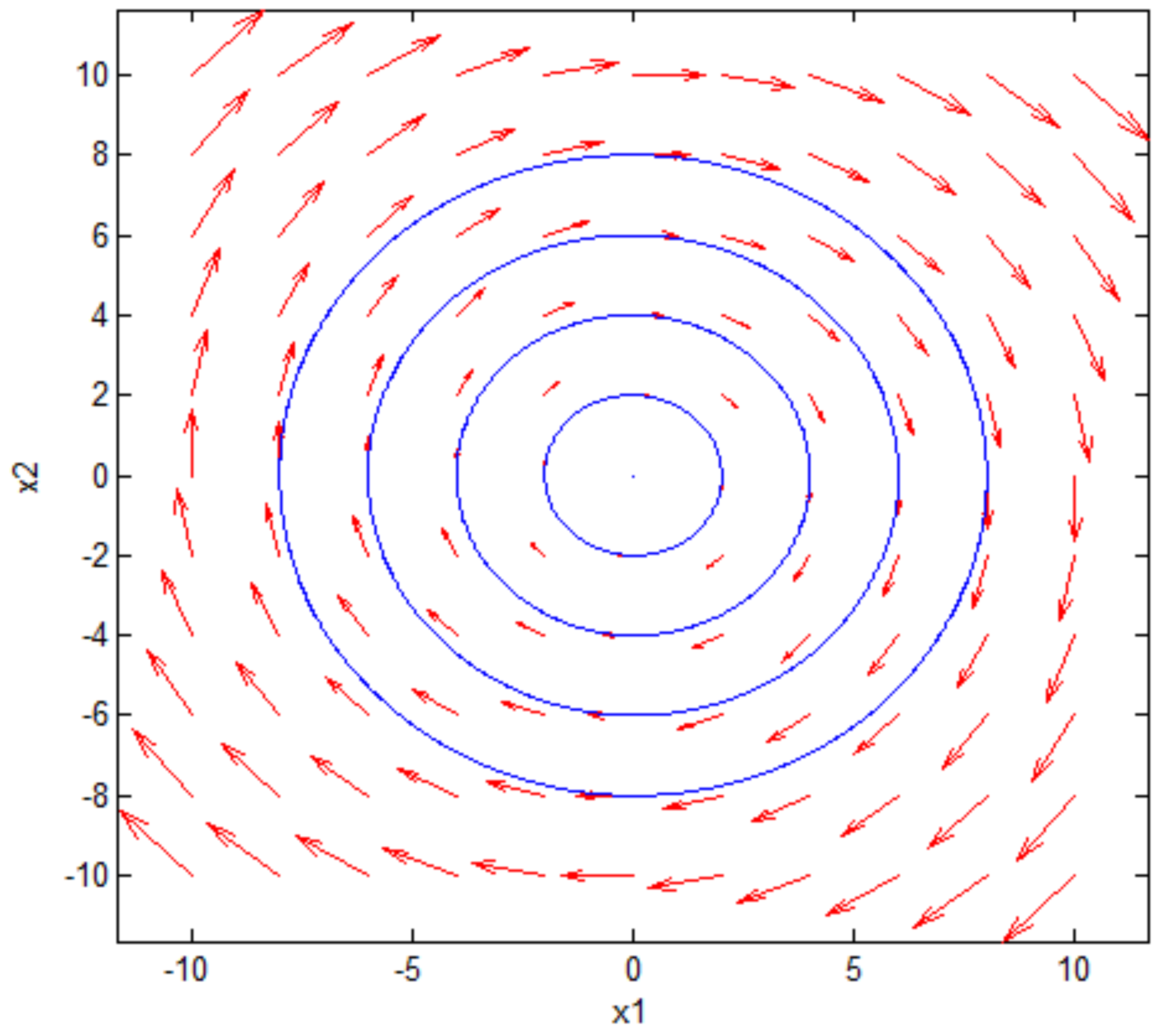
Diagramas de fase

¿De dónde se obtienen?

- El plano bi-dimensional se llama *plano de estados*.

- En el caso especial cuando la primera ecuación es $\dot{x}_1 = x_2$, el plano de estados se llama ***plano de fase*** o ***retrato de fase***

- El gráfico resultante se le conoce como ***gráfico*** o ***trayectoria del plano de fase.***



Ejemplo 1

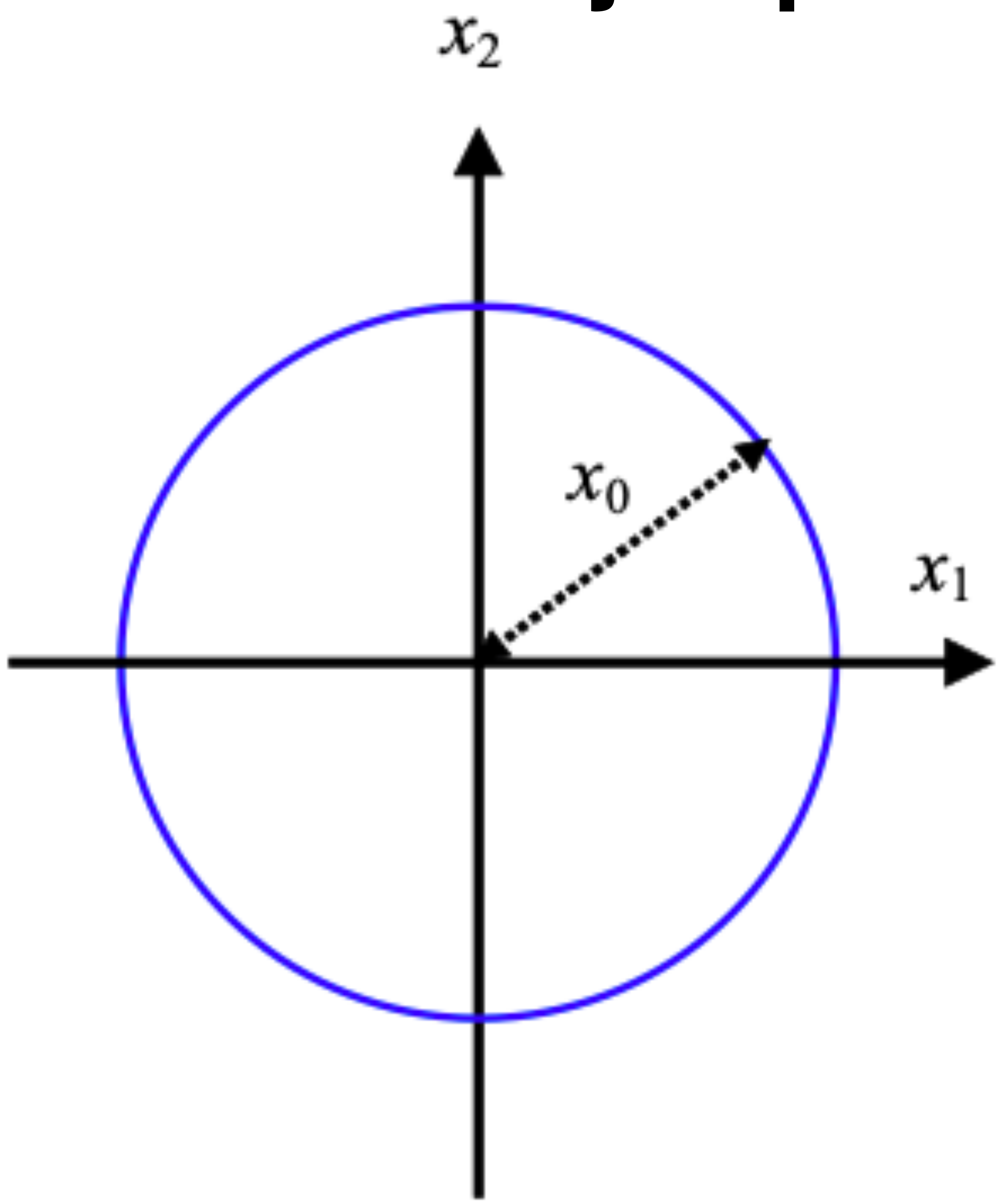
- Determine el plano de fase del sistema dado por

$$\ddot{x} + x = 0$$

- La solución es $x(t) = x_0 cos(t)$ por lo que $\dot{x}(t) = -x_0 sin(t)$.

- Si se define $x_1 = x$ y $x_2 = dx/dt$. Entonces, $x_1^2 + x_2 = x_0^2$.

- Por lo que el plano de fase está dado por la figura:



Ejemplo 2

- Dibujar el plano de fase del sistema dado por:

$$\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$$

- Los puntos de equilibrio están dados por $3x + x^2 = x(3 + x) = 0$ por lo que se tiene a $x_0 = 0$ y $x_0 = -3$ como puntos de equilibrio.

- Si definimos $x_1 = x$ y $x_2 = dx/dt$, entonces, los puntos de equilibrio son (0, 0) y (-3, 0).

.

Método analítico

- Se puede recurrir a obtener las expresiones para $x_1(t)$ y $x_2(t)$, y luego eliminar t combinando $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

- La otra opción es considerar

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{f_2(x_1, x2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Ejemplo 1 MA

$$\ddot{x} + x = 0$$

- Se tiene que:

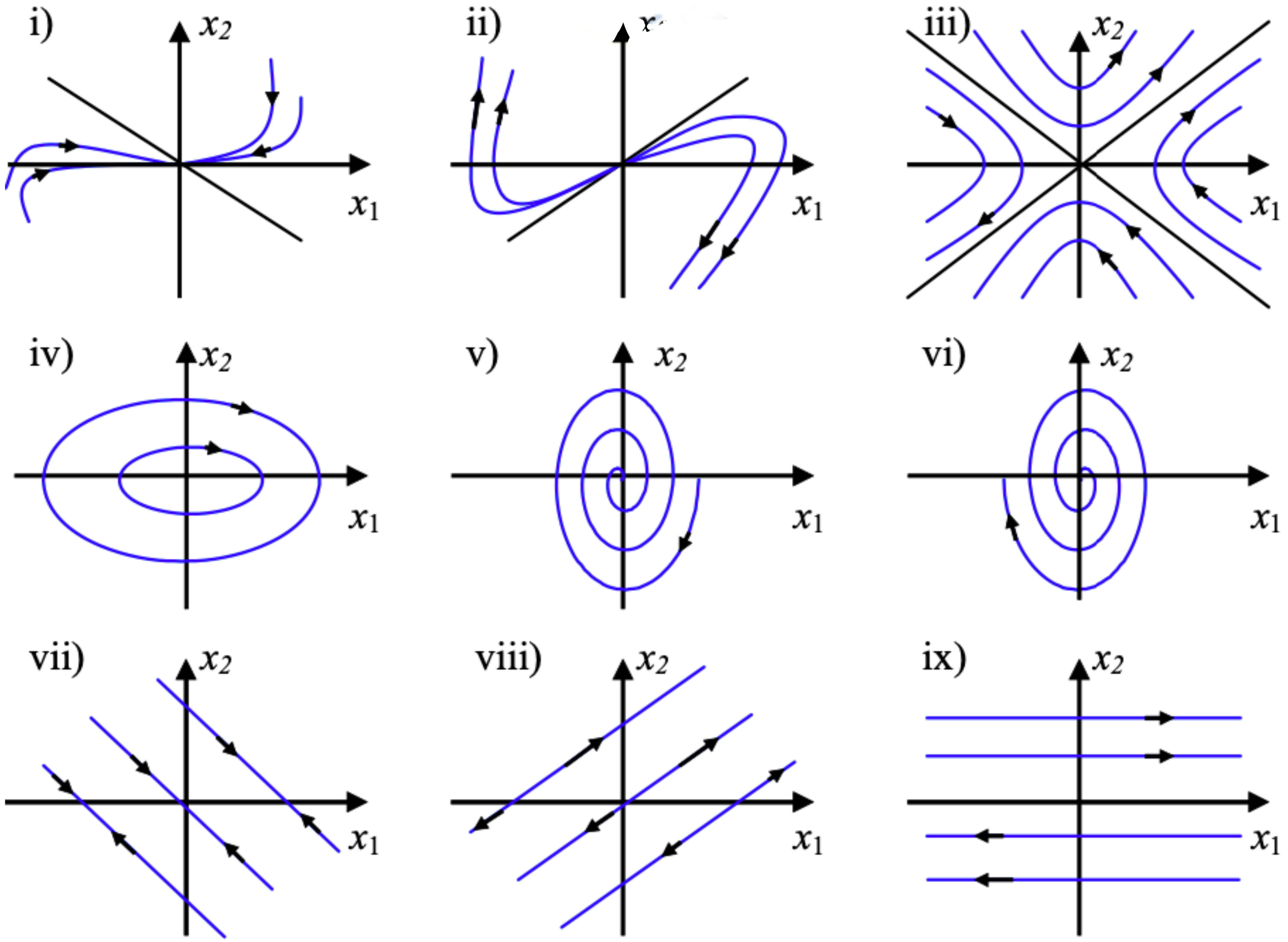
$$\dot{x} = x_2 \text{ y } \dot{x}_2 = -x_1,$$

- por lo que

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1}{x_2} \;\rightarrow\; x_2 dx_2 = -x_1 dx_1 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2 = c \;\rightarrow\; x_2^2 + x_1^2 = x_0^2$$

Diagramas de fase

Formas comunes



Comportamiento local

- Si las funciones $\dot{x}_1 = f_1(x_i, x_2, t)$, son continuamente diferenciables entorno a un punto de equilibrio, el comportamiento en torno a este punto esta íntimamente ligado con el comportamientodel sistema linealizado alrededor de este punto de operación.

- Se fundamenta en la linealización del sistema en torno al punto de equilibrio para luego utilizar las conclusiones derivadas de sistemas lineales para caracterizarlo.

- Así, si x_0 un punto de equilibrio, f_1 y f_2 funciones continuamente diferenciales en la vecindad de (x_1, x_2), entonces el vector de estados se puede definir como $x = x_0 + \Delta x$.

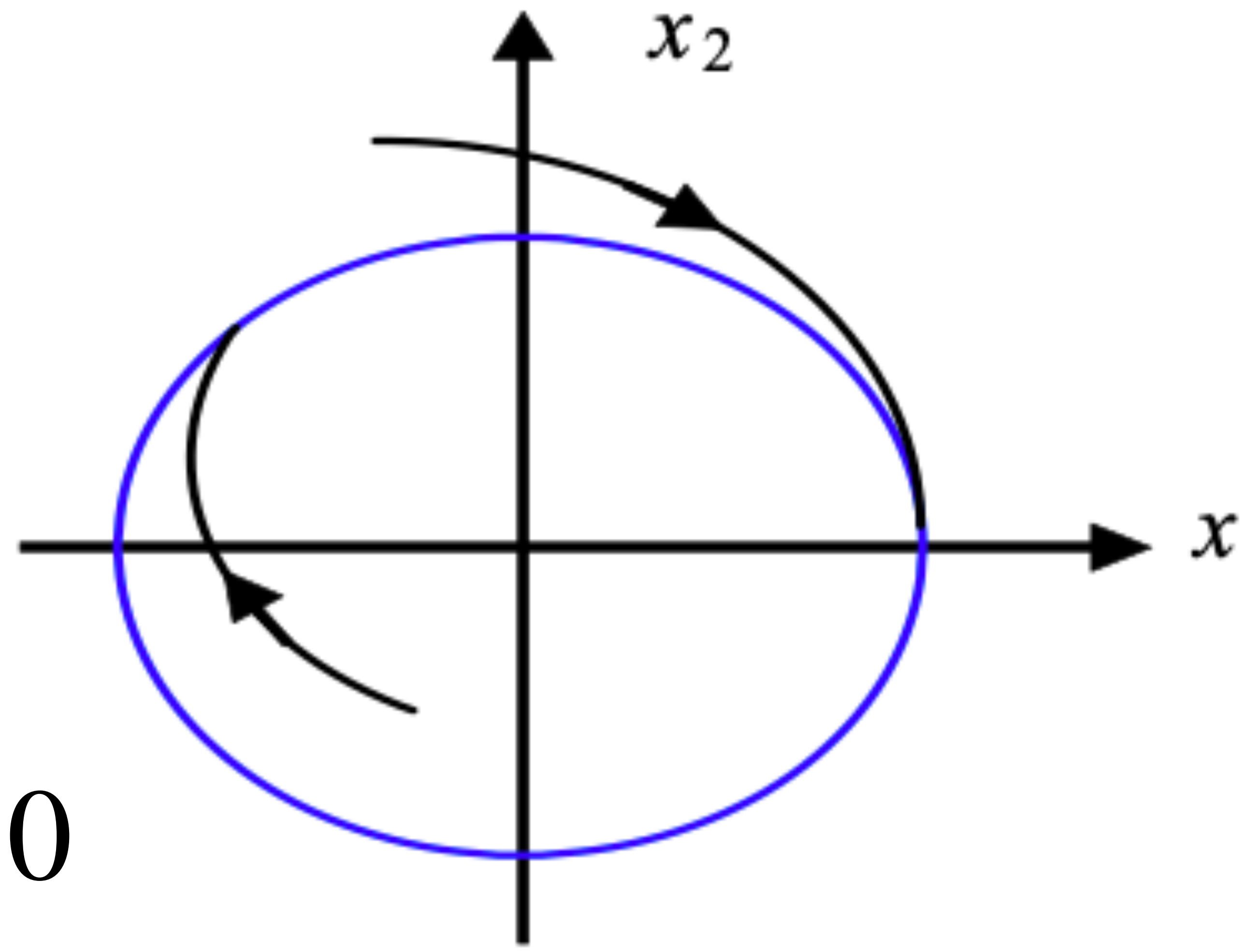
- Por lo que unalinealización del sistema es, $\Delta\dot{x} = A\Delta x$, donde, $A = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\Big|_{x=x_0}$

Ejemplo 3

- Clasificar los puntos de equilibrio del sistema dado por $\dot{x}_1 = -x_1 + x_1x_2$ y $\dot{x}_2 = x_2 - x_1x_2$.
- Los puntos de equilibrio son $(0,0)$ y $(1,1)$
- $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ valores propios son 1 y –1, por ende $(0,0)$ es un punto de silla.
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ciclos limites

- Sea el caso $\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ y $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$
- Al considerar $x_1 = rcos\theta$ y $x_2 = rsin\theta$
- Se obtiene $\dot{r} = -r(r^2 - 1)$ y $\dot{\theta} = -1$
- El cambio de coordenadas muestra que si $r < 1$ entonces $dr/dt > 1$ por lo que el radio crece y si $r > 1$ entonces $dr/dt < 0$ por lo que el radio decrece



- Por lo tanto, en $r = 1$ hay un ciclo límite.

Diagramas de fase

Vs Atractores

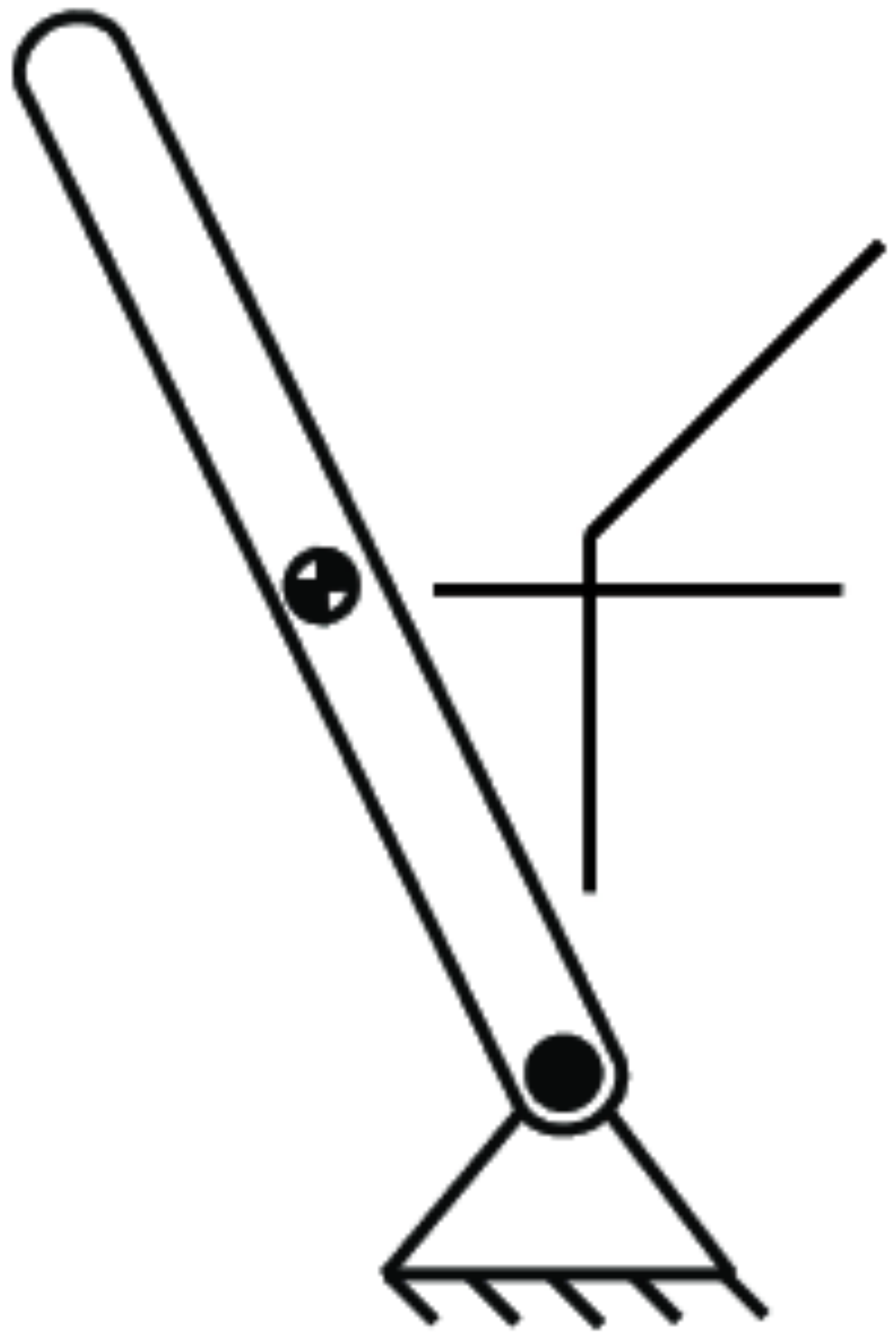
- Un atractor se refiere a un patrón o comportamiento recurrente en el espacio de fase de un sistema dinámico. Es un concepto que describe el comportamiento global del sistema.
- El retardo de fase es una técnica específica que se utiliza para representar y visualizar datos temporales o series temporales en un espacio de fase de mayor dimensión. Se utiliza para analizar datos y extraer información sobre el comportamiento subyacente de un sistema.

Brazo robótico de 1 DOF

Análisis de su modelo

- Supongamos la siguiente ecuación representa el movimiento para el brazo robótico

$$\ddot{\theta} + k_1\dot{\theta} + k_2 sin(\theta) = 0$$



Brazo robótico de 1 DOF

Análisis de su modelo

1. Puntos de equilibrio
2. Encontrar los ciclos limite.
3. Definir su comportamiento local
4. Grafica de su comportamiento
   - Atractores
   - Fases