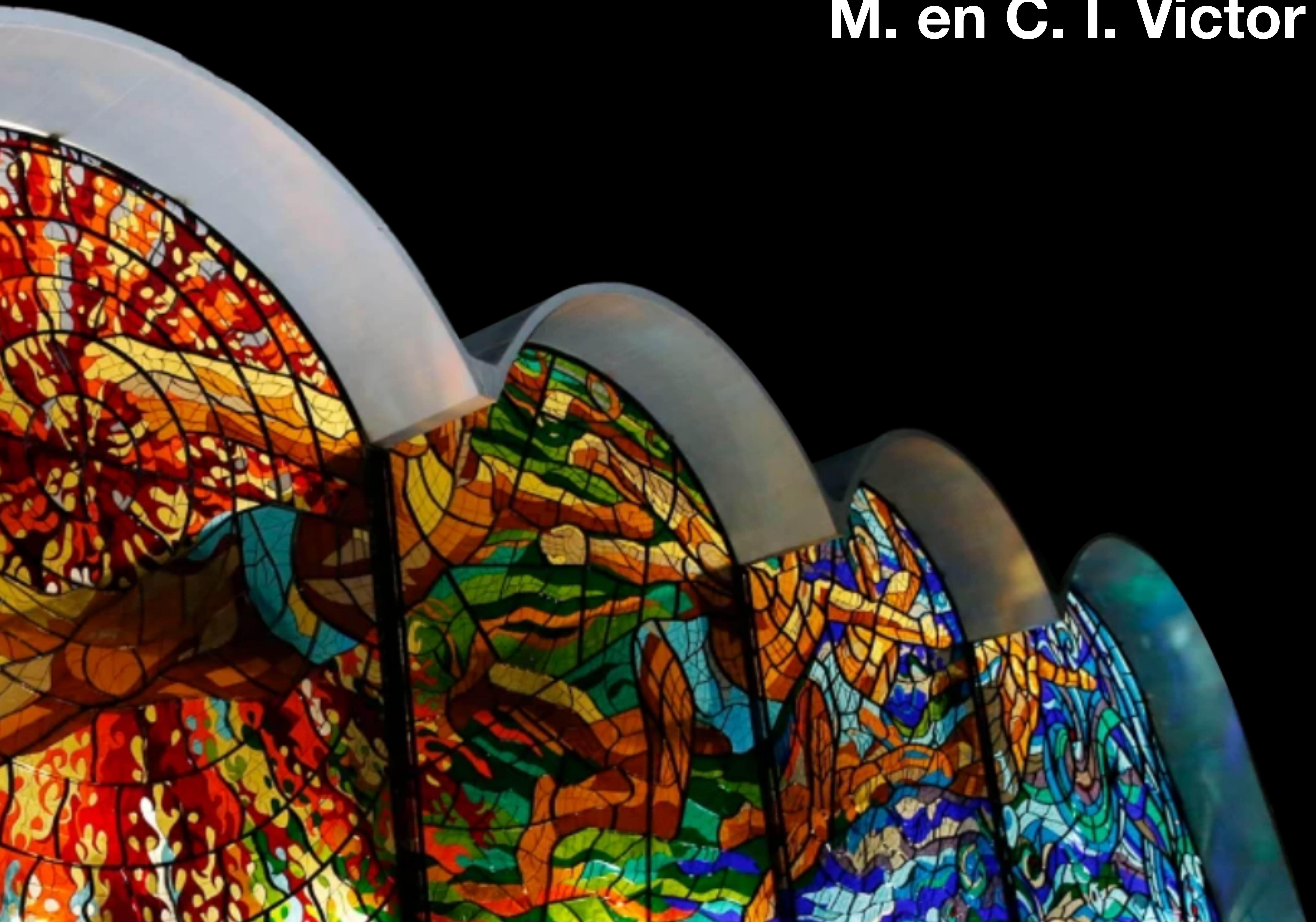
Control no lineal

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



Unidad III
Métodos de diseño de control no lineal

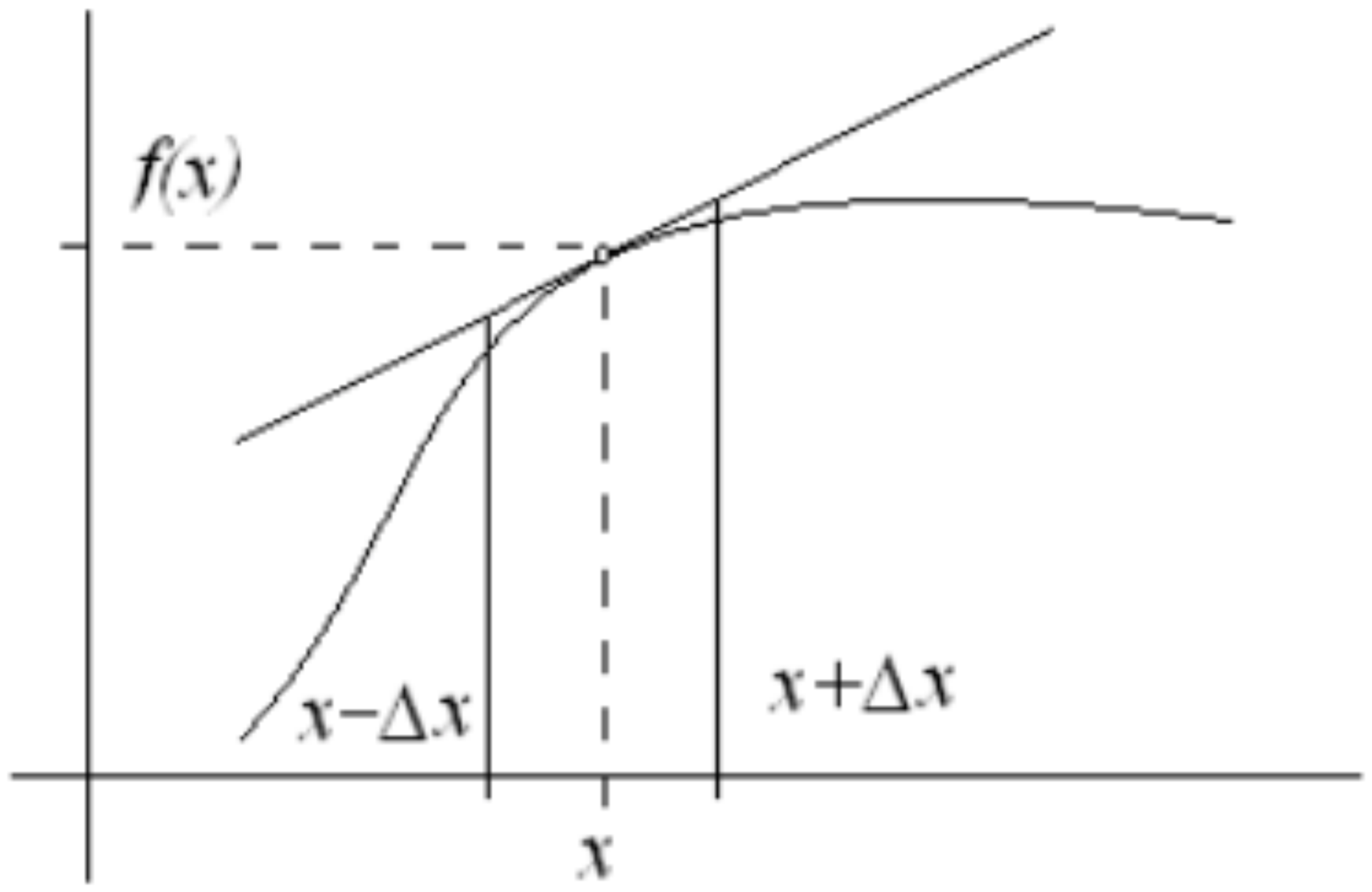
Contenido

- Linealización aproximada
- Linealización exacta

Definición

- Muchos componentes y actuadores poseen características **no lineales** y la eficacia de su acción requiere que se mantenga en el punto de operación donde actúan de manera lineal.

- Consiste en expresar una función o ecuación diferencial no lineal con una **versión lineal aproximada**, sólo válida en un intervalo muy pequeño de valores de la variable independiente.



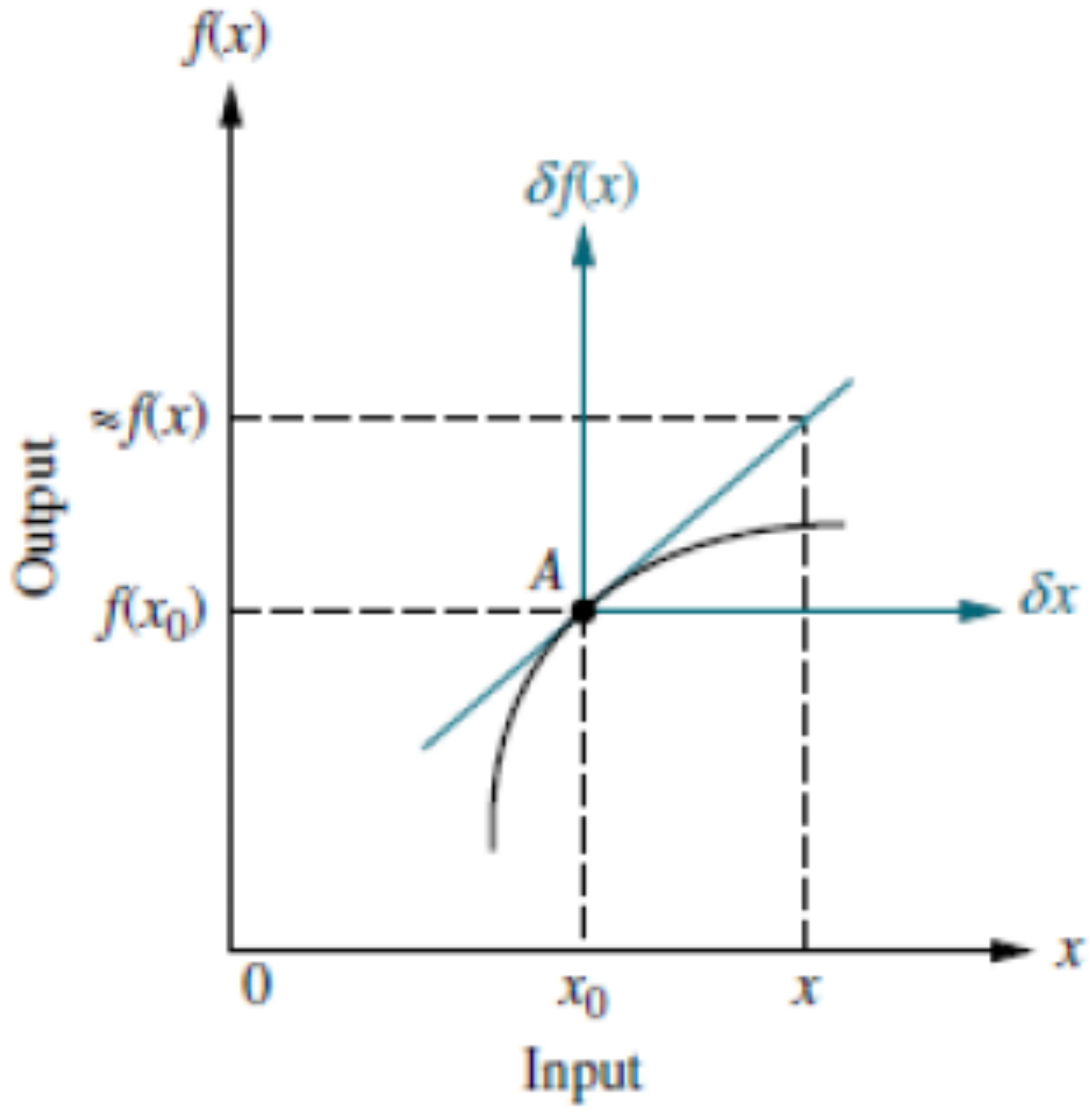
Linealización aproximada

¿Con qué fin?

- Poder aplicar al sistema representado por dicha función o ecuación diferencial, todas las técnicas de control para sistemas lineales.

- Objetivo es diseñar una estrategia para generar una ecuación lineal que represente a un sistema no lineal en una región muy limitada.

- Para obtener un modelo matemático lineal de un sistema no lineal es necesario suponer que la variable a controlar sólo se desvía ligeramente de un punto de operación A de coordenadas $(x_o, f(x_o))$.



Linealización aproximada

Encontrar una linea

- Podemos utilizar el punto A como un nuevo centro de coordenadas donde la variable independiente δx corresponde con la entrada al sistema, mientras que la variable dependiente $\delta f(x)$ representa la salida del sistema.

- Hacemos este cambio de coordenadas para utilizar la ecuación de la pendiente m_a de la recta de la siguiente manera.

$$m_a \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{ó} \qquad m_a \approx \frac{\delta f(x)}{\delta x}$$

Linealización aproximada

Encontrar una linea

- Si despejamos $f(x)$ y a $\delta f(x)$.

$$f(x) \approx f(x_0) + m_a(x - x_0) \qquad\qquad \delta f(x) \approx m_a(\delta x)$$

- Esta última es una aproximación matemática lineal para $f(x)$, una función que a grandes rasgos no es lineal.

- ¿Si combinamos $f(x)$ y $\delta f(x)$?

Linealización aproximada

Encontrar una linea

- Otra forma de razonar es pensar que, alrededor del punto de operación A, $f(x)$ tiene el valor de $f(x_0)$ más un pequeño, componente de valor $m_a(\delta x)$ a lo largo de una línea recta de pendiente m_a.

$$f(x) \approx f(x_0) + m_a(x - x_0) \approx f(x_0) + m_a(\delta x)$$

- Las series de Taylor nos permite hacer esto.

$$f(x) \approx f(x_0) + m_a(\delta x)$$

Expansión en serie de Taylor

- Consideremos nuevamente el sistema no lineal.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), u(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = h(x(t))$$

- Cuyos puntos de equilibrio son constantes y están dados por (U, X, Y)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\sigma), u(\sigma))d\sigma$$

$$y(t) = h\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\sigma), u(\sigma))d\sigma \right) \qquad \text{(eq. 1)}$$

Expansión en serie de Taylor

- Esta representación tiene sus ventajas al momento de evaluar el efecto causado sobre los estados y las salidas debido a ***posibles perturbaciones*** que se sucedan en el estado inicial x_0 y en la función de entrada $u(t)$.

- Supongamos que el sistema dinámico se encuentra operando en perfecto equilibrio.

$$x(t_0) = x_0; \quad u(t) = U; \quad y(t) = h(x) = Y$$

- Es decir, el estado inicial en que encontramos operando al sistema en el instante t_0 que coincide con el estado de equilibrio constante X.

- El cual se produce de manera inmutable sobre la base de sustentar la entrada constante $u = U$ durante un período de tiempo indefinidamente grande.

Expansión en serie de Taylor

- Consideremos **perturbaciones significativas**, tanto en el estado inicial de equilibrio $x_0 = X$, como en la función de entrada de equilibrio $u(t) = U$, descritas de la manera siguiente:

$$x(t_0) = x_0 + x_{0\delta} = X + x_{0\delta}\,; \qquad u(t) = U + u_\delta(t)$$

- Con estas perturbaciones que suceden alrededor de los valores de equilibrio, consecuentemente, se suceden cambios o perturbaciones tanto en el estado de equilibrio constante del sistema $x(t) = X$ como en el valor de la salida $y(t) = Y$.

Expansión en serie de Taylor

- Utilizando el sistema de ecuaciones 1, el estado perturbado y la salida perturbada pueden ser descritos mediante

$$x(t) = X + x_{0\delta} + \int_{t_0}^{t} f(X + x_\delta(\sigma), U(\sigma) + u_\delta(\sigma))d\sigma$$

$$y(t) = h(X + x_\delta(t))$$

- La expresión constituye una representación exacta del efecto de las perturbaciones.

Expansión en serie de Taylor

- Usando el **teorema de expansión en serie de Taylor**, podemos escribir los valores perturbados de las funciones $f(\cdot)$ y $h(\cdot)$ como:

$$f(X + x_\delta(t), U + u_\delta(t)) = f(X, U) + \frac{\partial f}{\partial x}\,|_{X,U}\; x_\delta(t) + \frac{\partial f}{\partial u}\,|_{X,U}\; u_\delta(t) + \ldots + T.O.S.$$

$$h(X + x_\delta(t)) = h(X) + \frac{\partial h}{\partial x}\,|_{X}\; x_\delta(t) + \ldots + T.O.S.$$

- La donde T.O.S. significa **términos de orden superior**

Expansión en serie de Taylor

- Tomando en cuenta que $f(X, U) = 0$, la cual viene de la definición de punto de equilibrio, podemos calcular el valor del estado perturbado como:

$$x_\delta(t) = x_{0\delta} \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \mid_{X,U} x_\delta(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \mid_{X,U} u_\delta(t) + \ldots + T.O.S. \right] d\sigma$$

$$y_\delta(t) = \left[h(X) + \frac{\partial h}{\partial x} \mid_{X} x_\delta(t) + \ldots + T.O.S. \right] - h(X)$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x} \mid_{X} x_\delta(t) + \ldots + T.O.S.$$

Linealización aproximada

Expansión en serie de Taylor

- Si truncamos la serie de Taylor y despreciamos los términos de orden superior utilizados en las fórmulas anteriores, la ecuación integral del estado perturbado como en la ecuación de salida, obtendremos sólo una aproximación (lineal en este caso) a los valores de $x_\delta(t)$ y de $y_\delta(t)$:

$$\tilde{x}_\delta(t) = x_{0\delta} \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \,|_{X,U}\, \tilde{x}_\delta(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \,|_{X,U}\, u_\delta(t) \right] d\sigma$$

$$\tilde{y}_\delta(t) = \frac{\partial h}{\partial x} \,|_X\, \tilde{x}_\delta(t)$$

Representación del sistema linealizado

- De esta forma, designaremos mediante la matriz A de n filas y n columnas, la matriz *Jacobiana* $\partial f / \partial x$ particularizada en el punto de equilibrio constante (X, U).

- Mediante el vector B de n filas designaremos al vector $\partial f / \partial x$ evaluado en (X, U).

- Designaremos mediante el vector fila C al vector $\partial f / \partial x$, evaluado en X.

$$x_\delta(t) = x_{0\delta} \int_{t_0}^{t} (Ax_\delta(\sigma) + Bu_\delta(\sigma))d\sigma$$

$$y_\delta(t) = Cx_\delta(t)$$

Espacio de estados

- Si tomamos derivadas respecto del tiempo en esta ecuación integral, obtenemos una ecuación diferencial equivalente para $x_\delta(t)$:

$$\dot{x}_\delta(t) = Ax_\delta(t) + Bu_\delta(t), \qquad x(t_0) = x_{0\delta}$$

$$y_\delta(t) = Cx_\delta(t) \tag{eq. 2}$$

- Para dicho sistema de ecuaciones diferenciales, puede observarse que hemos tomado en cuenta como condición inicial en $t = t_0$, el valor $x_{0\delta} = x_0 - X$.

Linealización aproximada

Espacio de estados

- La ecuación diferencial (eq. 2) representa un sistema de ecuaciones diferenciales lineales en x_δ y en u_δ. A este sistema se le llama ***representación lineal en el espacio de estado***, o brevemente, **representación de estado.**

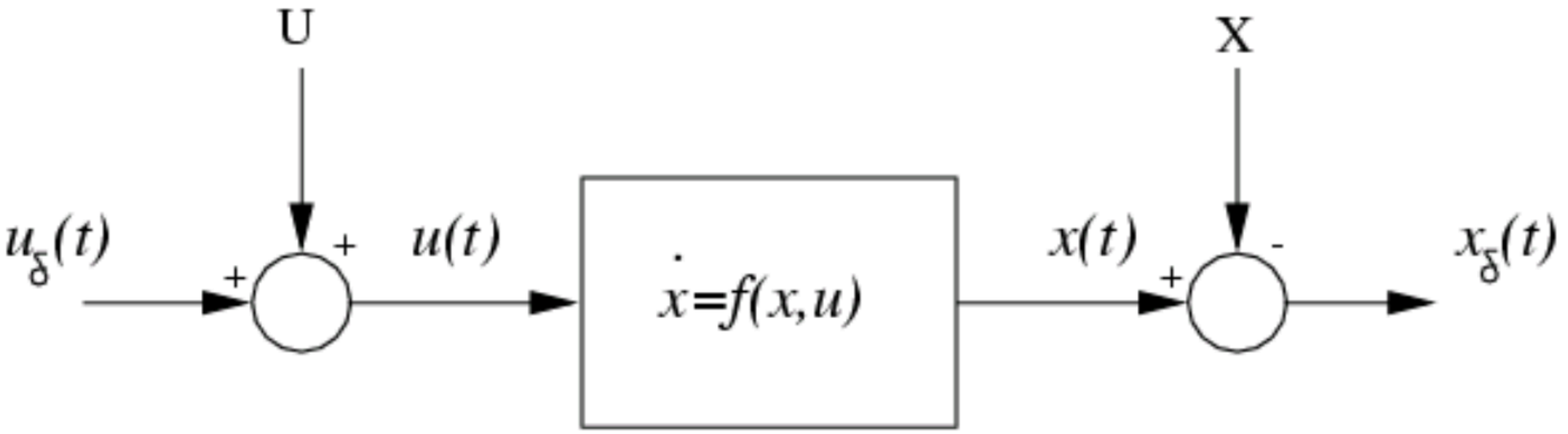
- La solución $x_\delta(t)$ es una aproximación al comportamiento de las perturbaciones que exhibe el sistema no lineal (eq. 1) sobre los valores de la trayectoria de equilibrio $x(t) = X$ y $u(t) = U$.

- Para conocer íntegramente la solución de (eq. 2) debemos conocer el valor de la perturbación del estado inicial $x_\delta(t_0)$ como los valores, en función del tiempo, de las perturbaciones de la entrada en equilibrio $u_\delta(t)$.

Espacio de estados

- En forma aproximada tendremos igualmente

$$x(t) = X + x_\delta(t); u(t) = U + u_\delta(t); y(t) = Y + y_\delta(t)$$



Representación en funciones de transferencia

- A partir de la representación de estados incrementales, surge la representación en funciones de transferencia asociadas al comportamiento linealizado del sistema.

- Supongamos que tenemos un sistema no lineal, n-dimensional, de una entrada y una salida

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), u(t))$$

$$y(t) = h(x(t))$$

Linealización aproximada

Representación en funciones de transferencia

- Sea $u(t) = U$ un punto de operación constante para la entrada escalar del sistema dado que corresponde con el valor nominal de la entrada, tenemos un valor de equilibrio para el vector de estado y para la salida, dados, respectivamente, por $x(t) = X(U)$ y $y(t) = Y(U)$.

- La expresión linealizada del sistema alrededor del punto de operación $(U, X(U), Y(U))$ genérico, parametrizada en términos del valor constante (en equilibrio) de la entrada de control U, está dada por:

$$\dot{x}_\delta = A(U)x_\delta + B(U)u_\delta$$

$$y_\delta = C(U)x_\delta$$

Representación en funciones de transferencia

- Donde:

$$A(U) = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{X(U),U} \; ; \quad B(U) = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{X(U),U} \; ; \quad C(U) = \left.\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right|_{X(U)}$$

- y

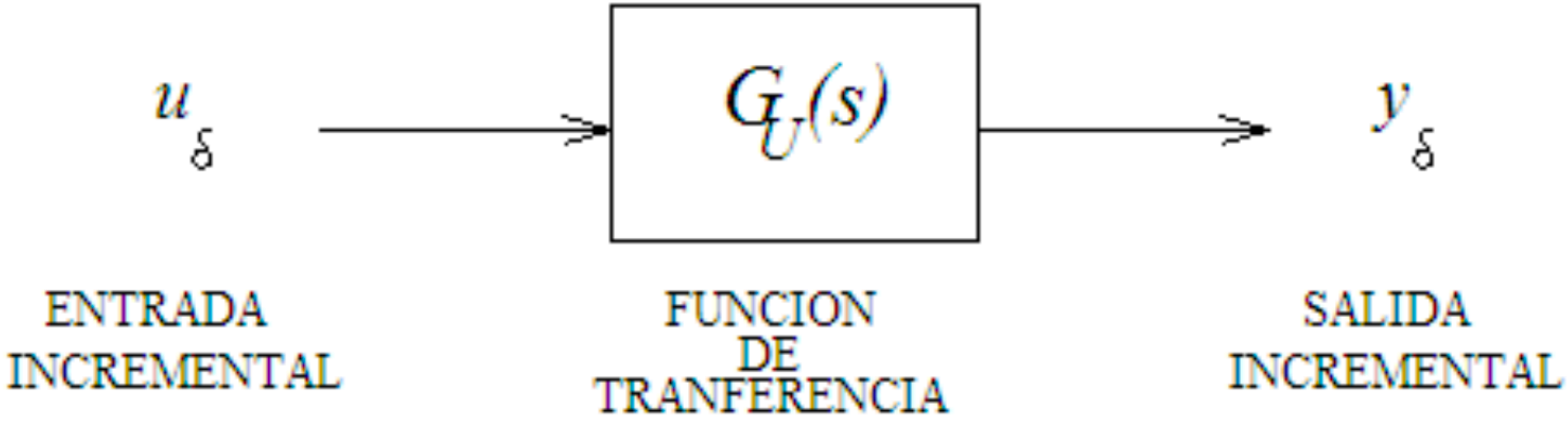
$$x_\delta = x - X(U); u_\delta = u - U; y_\delta = y - Y(U)$$

Linealización aproximada

Representación en funciones de transferencia

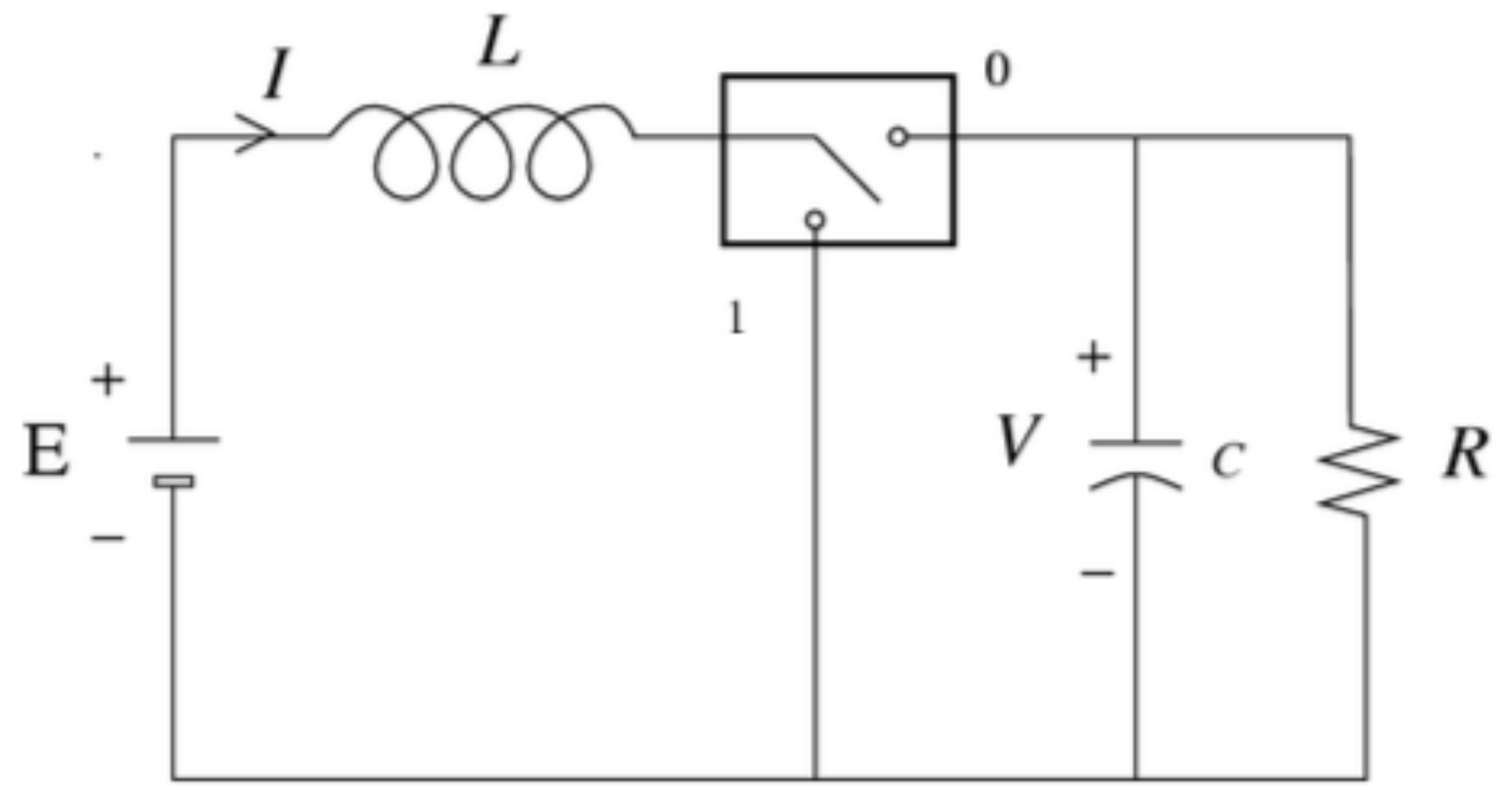
- A partir de esta representación del sistema linealizado, podemos obtener la **función de transferencia del sistema** en lazo abierto:

$$G_U(s) = C(U)[sI - A(U)]^{-1}B(U)$$



Ejemplo 1. Convertidor DC-DC tipo Boost

- Representación en espacio de estados



$$\dot{z}_1 = -\omega_0 z_2 + \mu\omega_0 z_2 + b$$

$$\dot{z}_2 = \omega_0 z_1 - \omega_1 z_2 - \mu\omega_0 z_1$$

$$y = z_2$$

Punto de equilibrio: $\mu = U; Z_1(U) = \dfrac{b\omega_1}{\omega_0^2(1-U)}; Z_2(U) = \dfrac{b}{\omega_0(1-U)}$

Ejemplo 1. Convertidor DC-DC tipo Boost

$$A = \left.\frac{\partial f(z,u)}{\partial z}\right|_{Z,U} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(z,u)}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1(z,u)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2(z,u)}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2(z,u)}{\partial z_2} \end{bmatrix}\right|_{Z_1(U),Z_2(U),U} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0(1-U) \\ \omega_0(1-U) & \omega_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial f(z,u)}{\partial u}\right|_{Z,U} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(z,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(z,u)}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{Z_1(U),Z_2(U),U} = \begin{bmatrix} \frac{b}{1-U} \\ -\frac{b\omega_1}{\omega_0(1-U)^2} \end{bmatrix}$$

$$C = \left.\frac{\partial h(z)}{\partial z}\right|_{Z} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial h(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial h(z)}{\partial z_2} \end{bmatrix}\right|_{Z_1(U),Z_2(U)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1. Convertidor DC-DC tipo Boost

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{1\delta} \\ \dot{z}_{2\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0(1-U) \\ \omega_0(1-U) & \omega_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1\delta} \\ z_{2\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{b}{1-U} \\ -\dfrac{b\omega_1}{\omega_0(1-U)^2} \end{bmatrix} \mu_\delta$$

$$y_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1\delta} \\ z_{2\delta} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1. Convertidor DC-DC tipo Boost

- La función de transferencia, que relaciona la tensión incremental de salida con el valor incremental de la relación de trabajo, se obtiene del modelo linealizado como:

$$G_U(s) = -\omega_0 Z_1(U) \frac{s - \frac{b}{Z_1(U)}}{s^2 + \omega_1 s + \omega_0^2 (1-U)^2}$$

Ejemplo 2: Linealización del sistema de levitación magnética

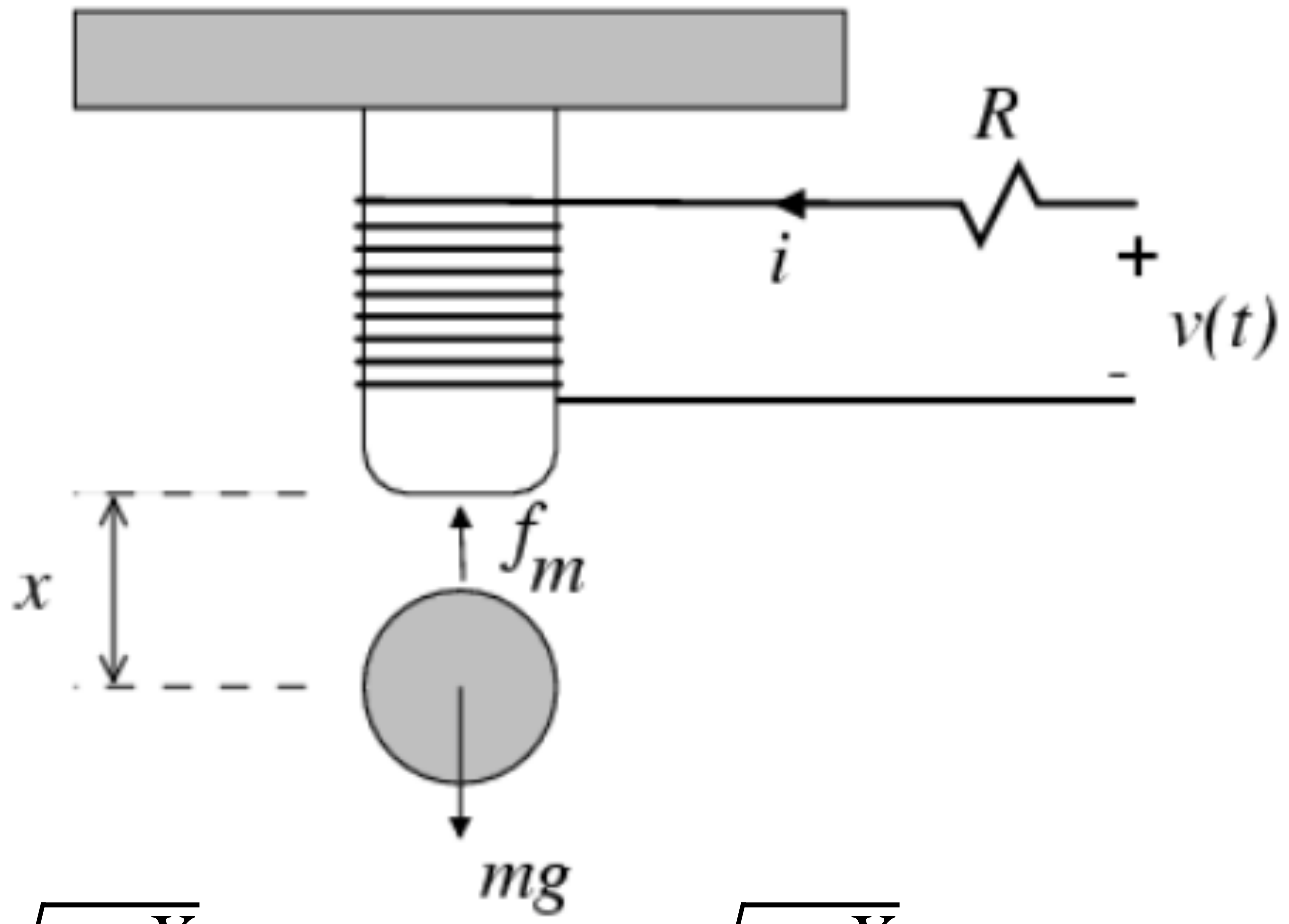
- Representación en espacio de estados:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = g - \frac{c}{m}\frac{x_3^2}{x_1}$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u$$

$$y = x_1$$



Punto de equilibrio: $x_1 = X_1(X) = X; x_2 = 0; x_3 = X_3(X) = \sqrt{\frac{mgX}{c}}; u = U(X) = R\sqrt{\frac{mgX}{c}}$

Ejemplo 2: Linealización del sistema de levitación magnética

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{X,U} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_3} \end{bmatrix}\right|_{X_1(X),X_2(X),X_3(X),U(X)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{X} & 0 & -2\sqrt{\frac{cg}{mmX}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{X,U} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{X_1(X),X_2(X),X_3(X),U(X)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \left.\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right|_{X} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix}\right|_{X_1(X),X_2(X),X_3(X)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Linealización aproximada

Ejemplo 1. Convertidor DC-DC tipo Boost

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{x}_{2\delta} \\ \dot{x}_{3\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{X} & 0 & -2\sqrt{\frac{cg}{mX}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \\ x_{3\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \mu_\delta$$

$$y_\delta = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \\ x_{3\delta} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1. Convertidor DC-DC tipo Boost

- La función de transferencia asociada a este sistema está dada por:

$$G_X(s) = \frac{y_\delta(s)}{u_\delta(s)} = \frac{\frac{2}{L}\sqrt{\frac{cg}{mX}}}{(s^2 - \frac{g}{X})(s + \frac{R}{L})}$$

Validez del modelo linealizado

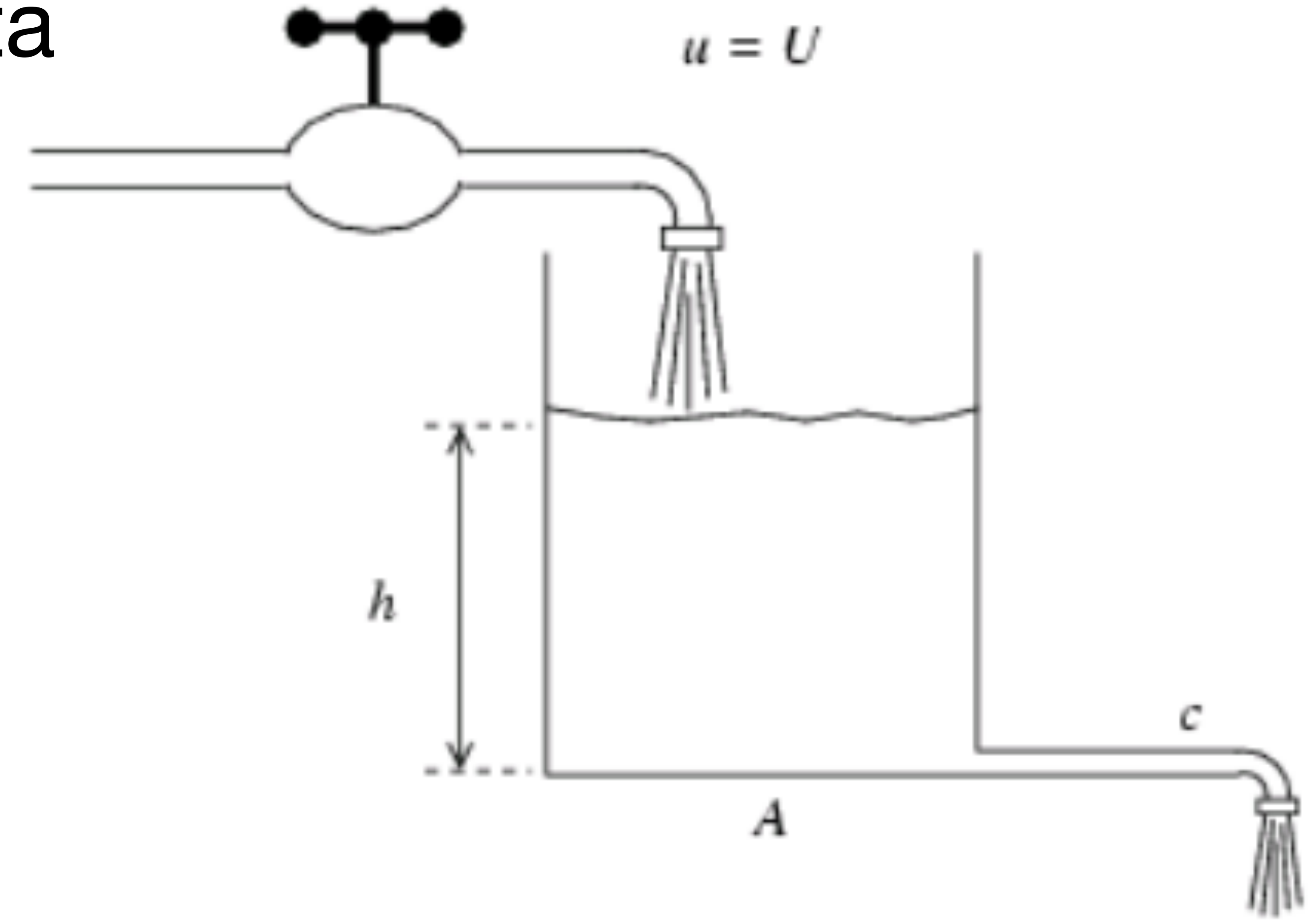
¿Qué tan bueno es el Método de la Linealización Aproximada?

- La linealización aproximada está fundamentada en retener como válida para la descripción de un sistema en ***las vecindades de un punto de equilibrio***.
- Es indudable que las cantidades que estamos despreciando al tomar como sustitutos de las verdaderas perturbaciones a los primeros términos en la expansión propuesta, se tornan **"cada vez más importantes"**.
- Es oportuno señalar, además, que el método de la linealización aproximada no es aplicable a sistemas que exhiban no linealidades carentes de derivadas.

Validez del modelo linealizado

Ejemplo 3. Tanque con pérdida de líquido

- Considere el tanque de la Figura, el cual se alimenta con un cierto líquido a una tasa constante $u = U[m^3/s]$
- El parámetro A es el área de la base del tanque y h representa la altura del nivel del líquido medido desde la base del recipiente.



$$\dot{h} = -\frac{c}{A}\sqrt{h} + \frac{1}{A}u$$

$$y = h$$

Punto de equilibrio $u = U$ está dado por $h = H = U^2/c^2$.

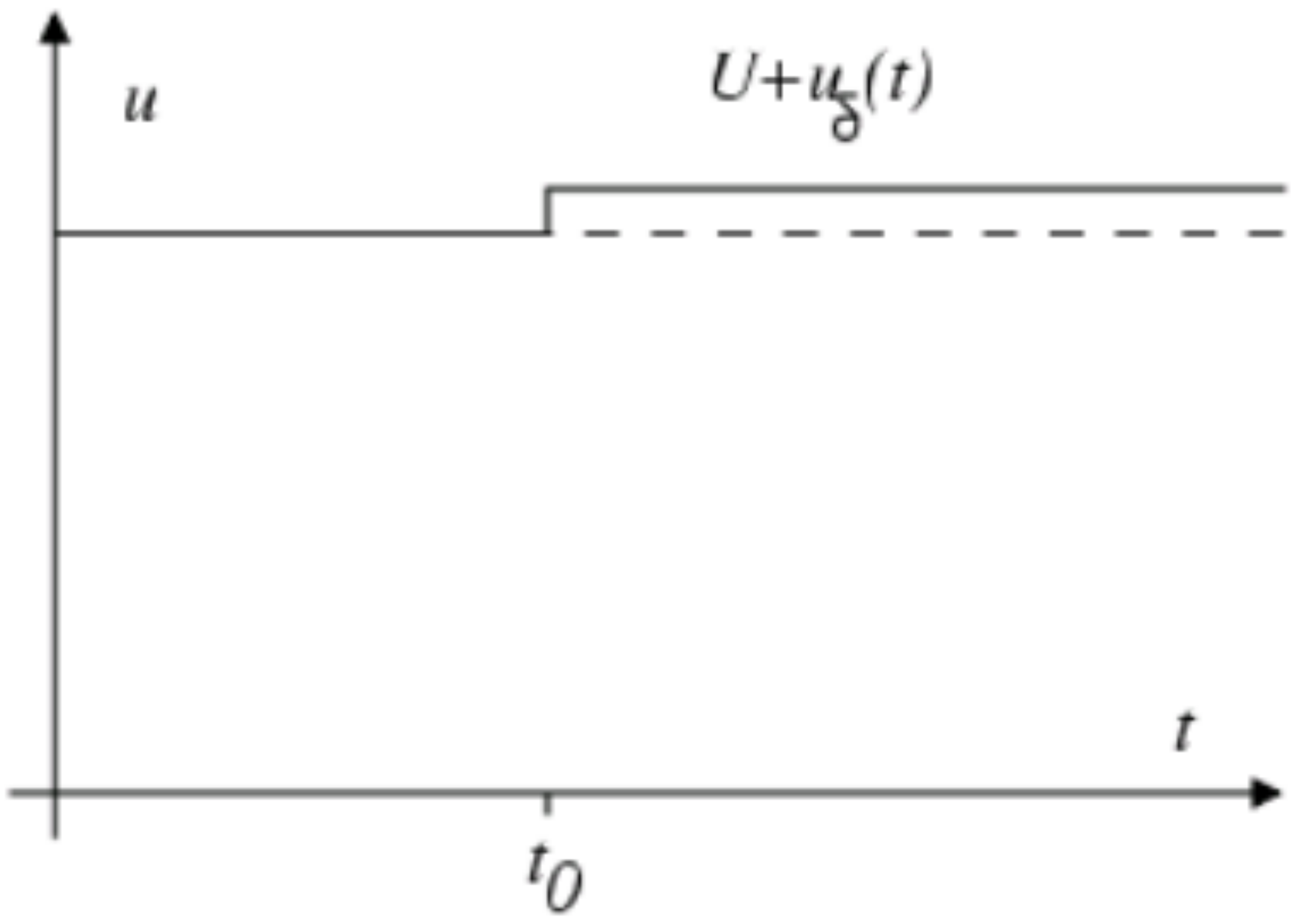
Validez del modelo linealizado

Ejemplo 3. Tanque con pérdida de líquido

- Considere una pequeña perturbación en el valor constante del control dada por un súbito incremento fijo en la tasa de alimentación de líquido al tanque, de valor $\triangle U$.

- De acuerdo a la ecuación diferencial del sistema, el valor del nuevo estado de equilibrio

$$H + h_\delta = \frac{(U + \triangle U)^2}{c^2} = \frac{U^2}{c^2} + \frac{2U \triangle U + \triangle U^2}{c^2}$$



Validez del modelo linealizado

Ejemplo 3. Tanque con pérdida de líquido

- Por otro lado, el sistema linealizado alrededor del punto de equilibrio está dado por

$$\dot{h}_\delta = -\frac{c}{2A\sqrt{H}}h_\delta + \frac{1}{A}u_\delta$$

$$y_\delta = h_\delta$$

- El valor final de h_δ a un escalón de excitación $u_\delta = \triangle U$.

$$h_\delta = \frac{2}{c}\sqrt{H}u_\delta = \frac{2U \triangle U}{c^2}$$

Linealización aproximada

Resumen

1. Definir el Sistema No Lineal.
2. Seleccionar un Punto de Operación o Equilibrio.
3. Linealización Mediante Series de Taylor.
4. Obtener las Ecuaciones Lineales.
5. Análisis y Diseño de Control

Tarea

- Considere el siguiente sistema con una entrada y una salida:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1 u$$

$$y = x_1$$

- Donde:
  - x_1 y x_2 son los estados del sistema.
  - u es la entrada de control.
  - y es la salida del sistema.

Definición

- Consideremos un sistema no lineal cuyo grado sea n, es decir, igual a la dimensión del espacio de estados, que pueden ser representados en la forma:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\ldots = \ldots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1 \ldots, n_n) + ug_n(x_1, \ldots, x_n)$$

Linealización exacta

Definición

- Son exactamente linealizables mediante una redefinición de la variable de control en términos del estado y una entrada auxiliar externa.
- Esta redefinición puede ser interpretada de dos maneras:
  - Como un proceso de realimentación no lineal.
  - Como un proceso de transformación de la coordenada de la variable de control

$$\dot{x}_1 = x_2$$