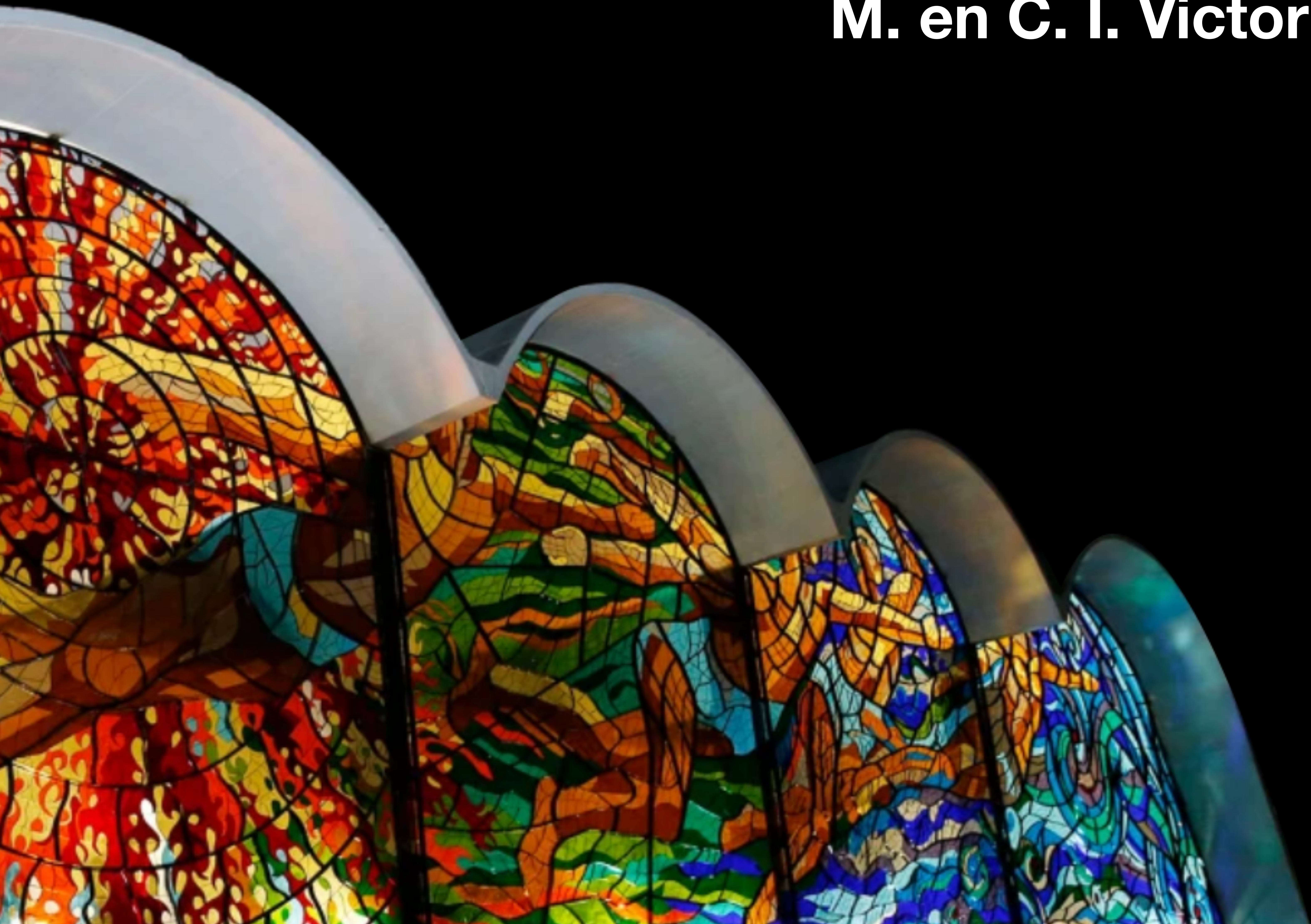
Robótica

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



UNIDAD III
Fundamentos Matemáticos

Cinemática

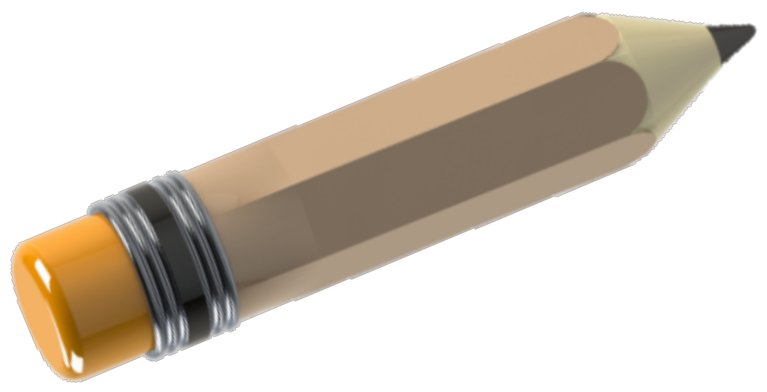
¿Cómo influyen en los movimientos de un robot?

- Estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que lo originaron. Estudia la descripción analítica del movimiento espacial de un cuerpo en función del tiempo

Primer instante de tiempo

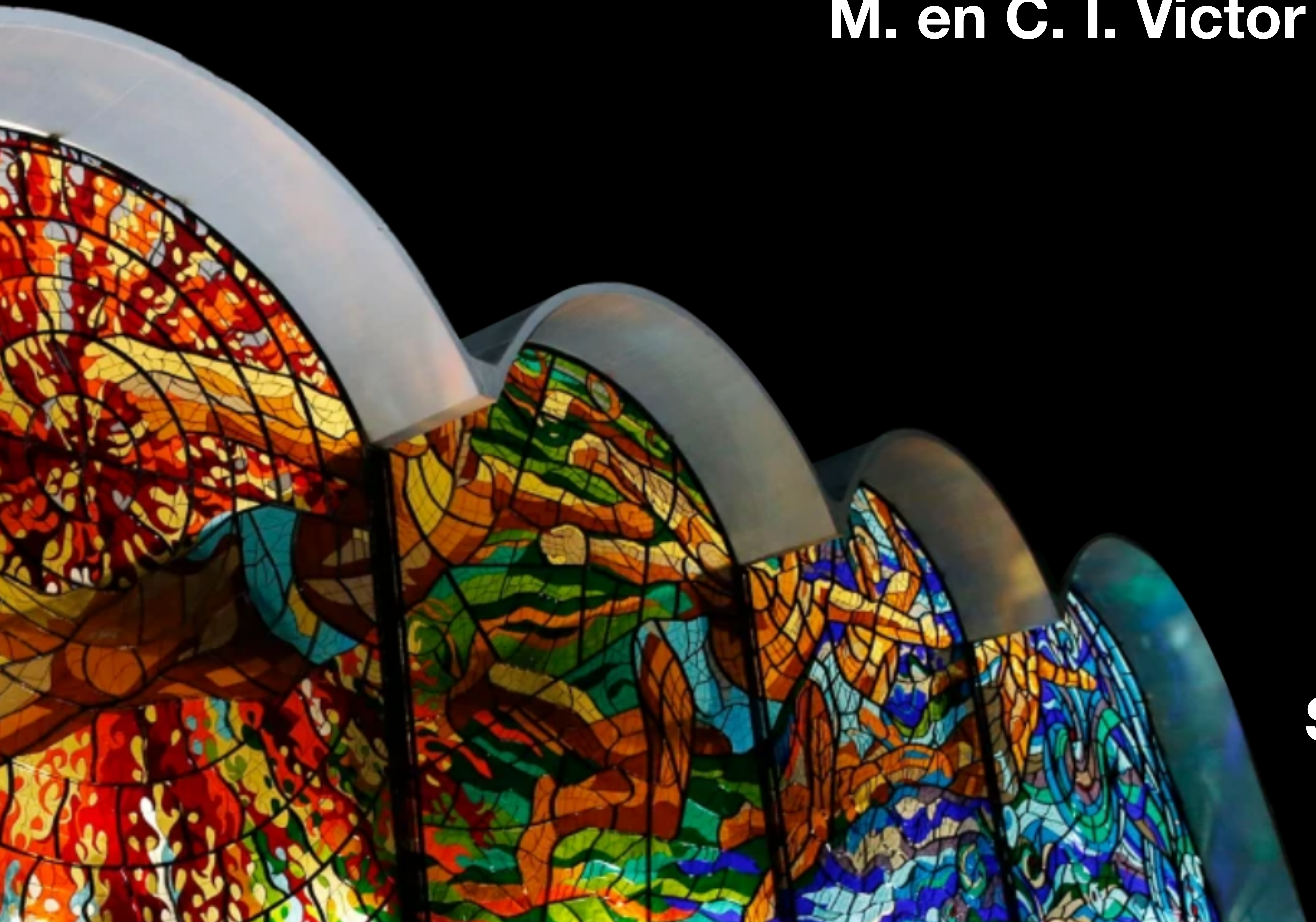
>> posición
>> orientación
>> velocidad
>> aceleración

Segundo instante de tiempo



Robótica

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano

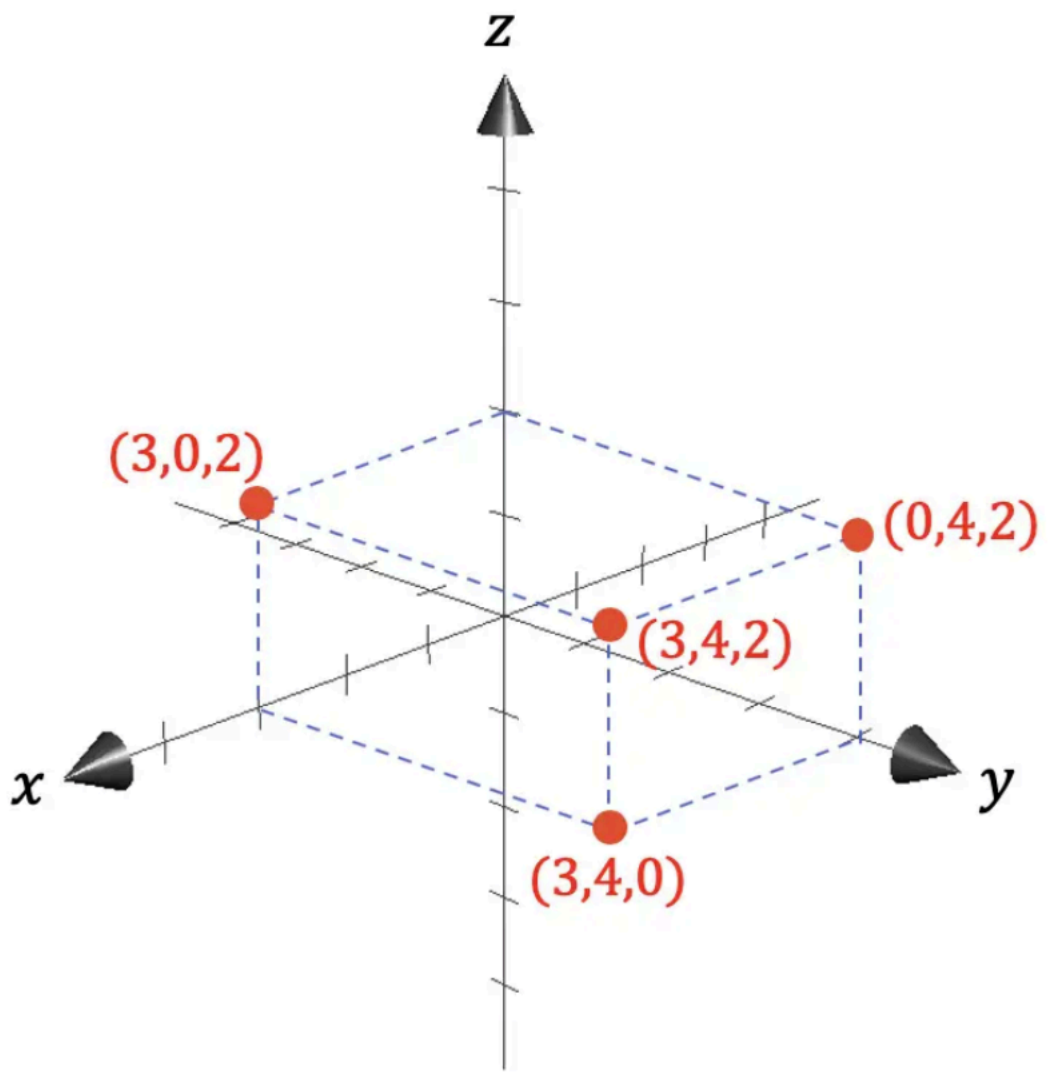


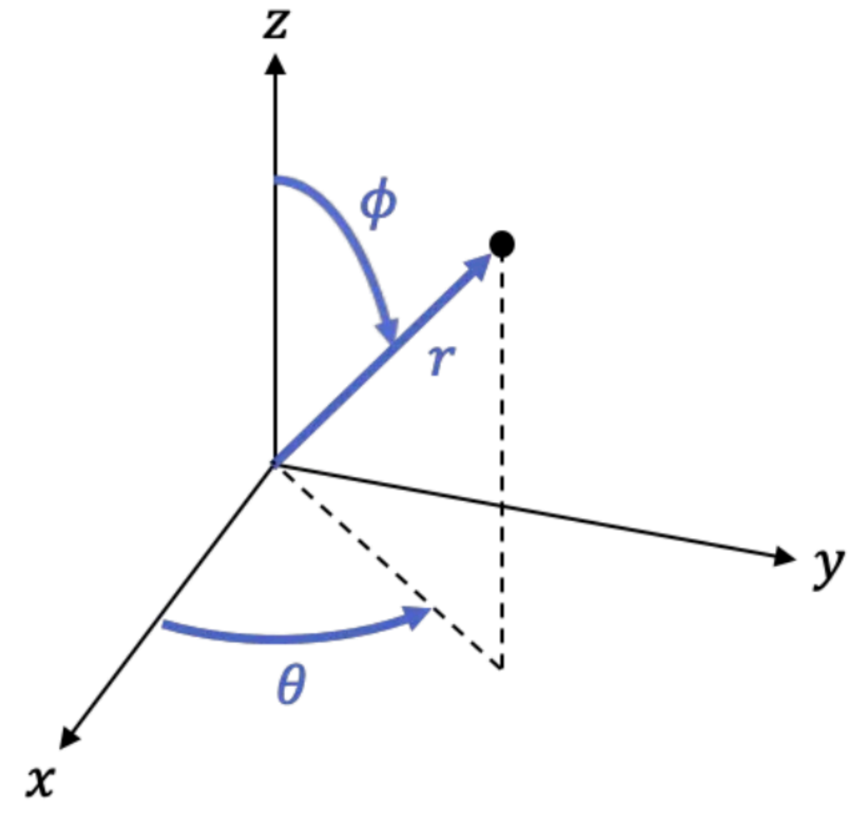
UNIDAD III
Sistemas de coordenadas

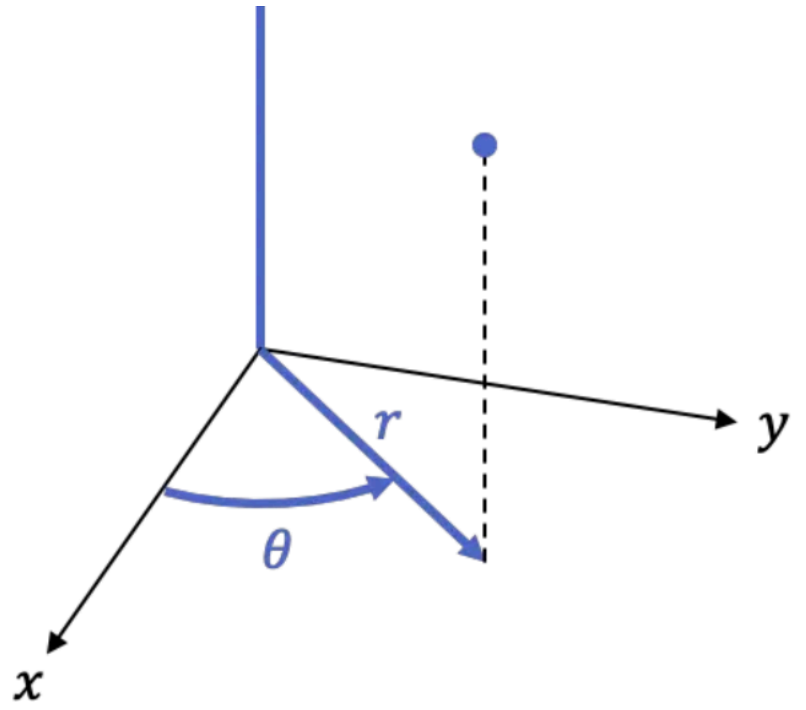
Sistemas de coordenadas

Existen diferentes

- Los sistemas de coordenadas matemáticas son herramientas fundamentales en el campo de la geometría y el análisis matemático.
- Nos permiten representar y visualizar puntos, vectores y formas en el espacio de manera precisa y sistemática.

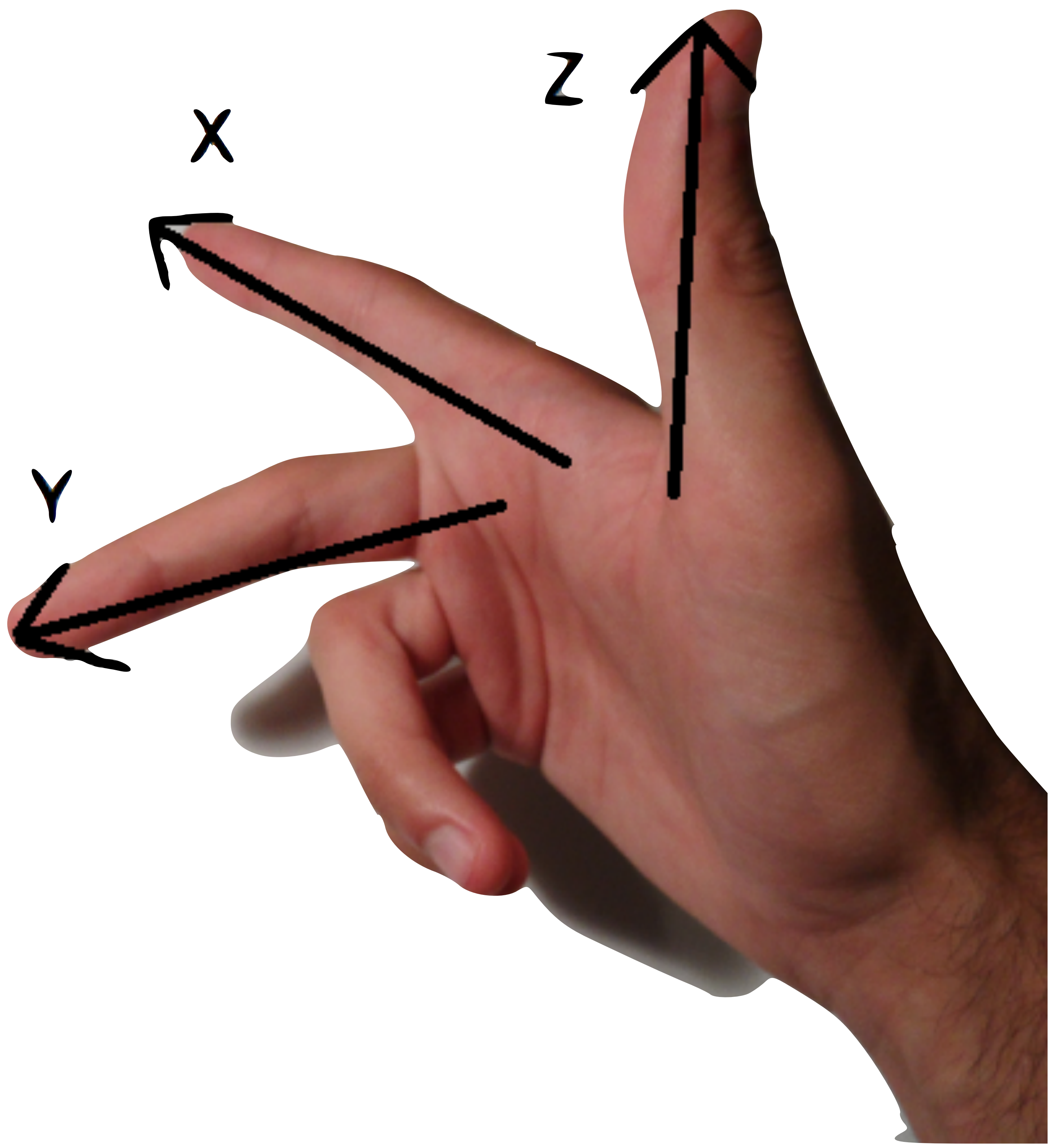






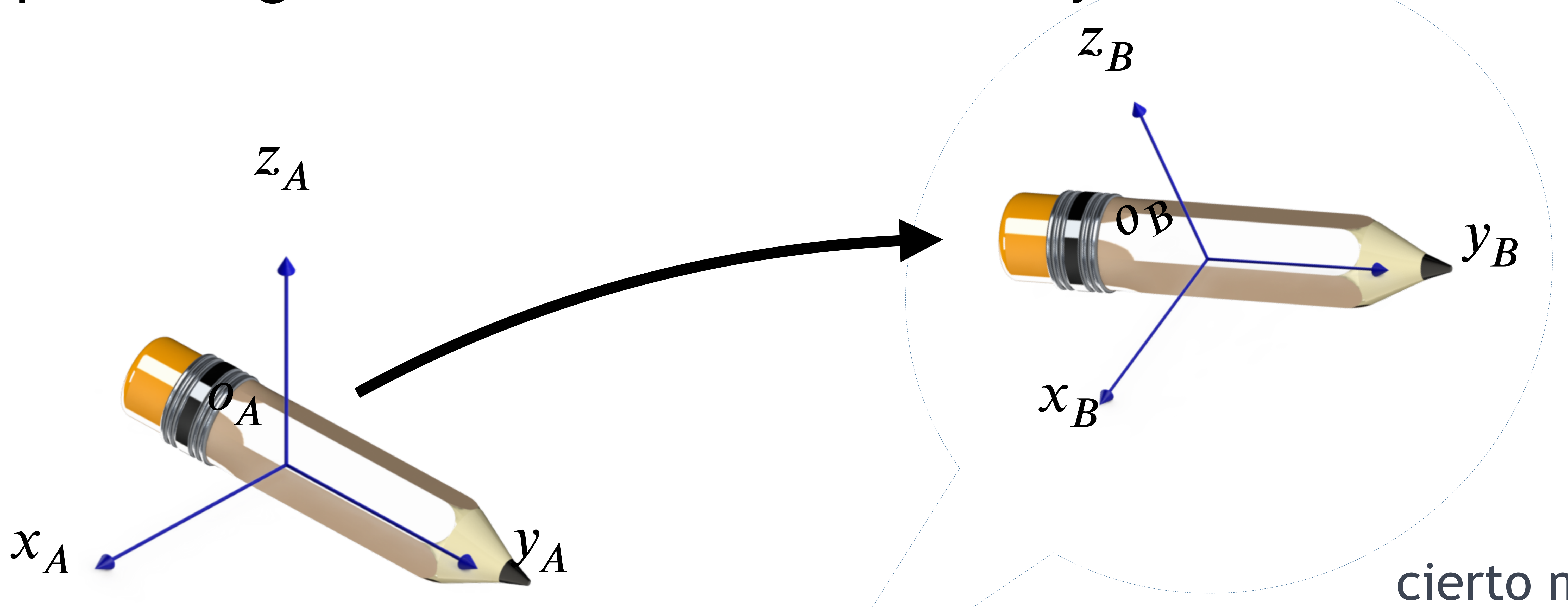
Sistemas de referencia

- Son herramientas fundamentales en el campo de la geometría, la física y otras áreas de estudio.
- Nos permiten establecer un marco de referencia para describir y medir posiciones, movimientos y otras propiedades de objetos en el espacio.
- Sistema de referencia dextrogiro o derecho (convención de la mano derecha)



Cuerpos rígidos

- Se puede especificar a través de la posición y orientación que guarda con respecto algún sistema de referencia fijo.

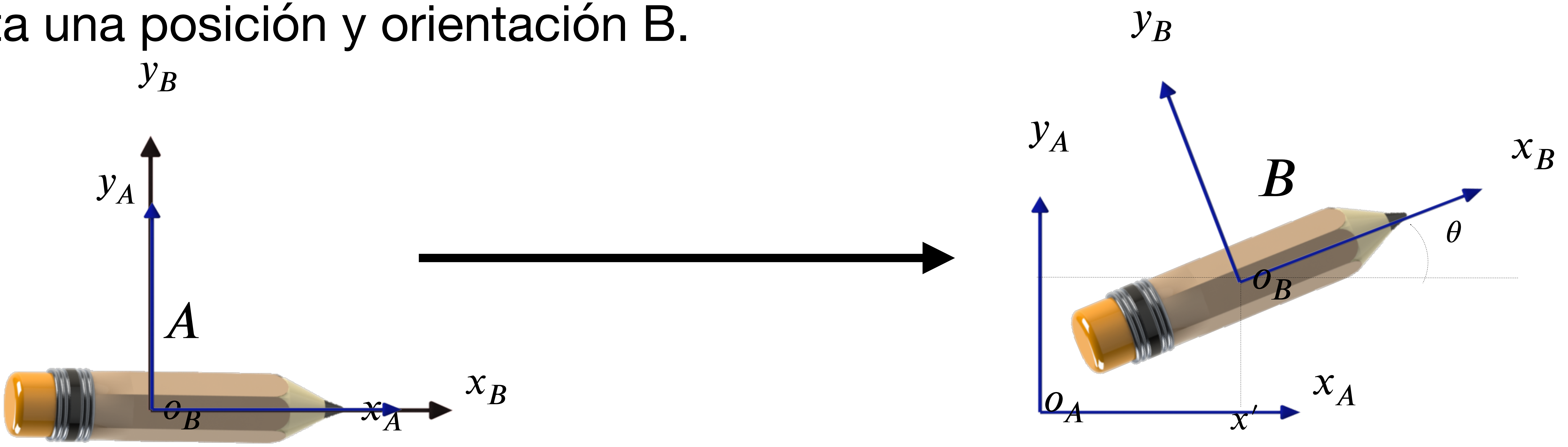


Sistema de referencia base

Un robot industrial puede modelarse como un sistema de *cuerpos rígidos* que mantienen cierto movimiento relativo entre ellos.

Estado inicial

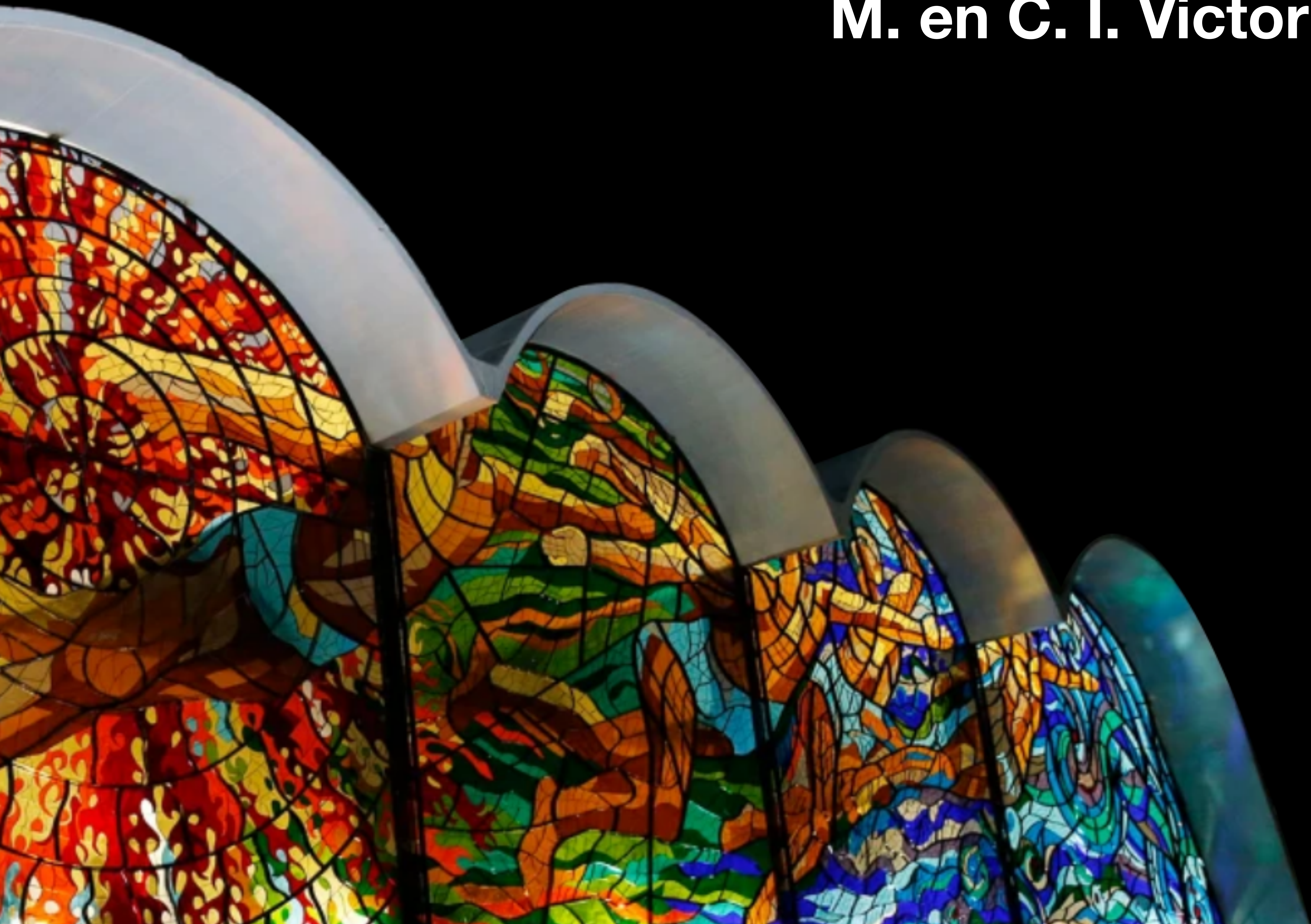
- La figura muestra un cuerpo rígido que cambia de una posición y orientación A hasta una posición y orientación B.



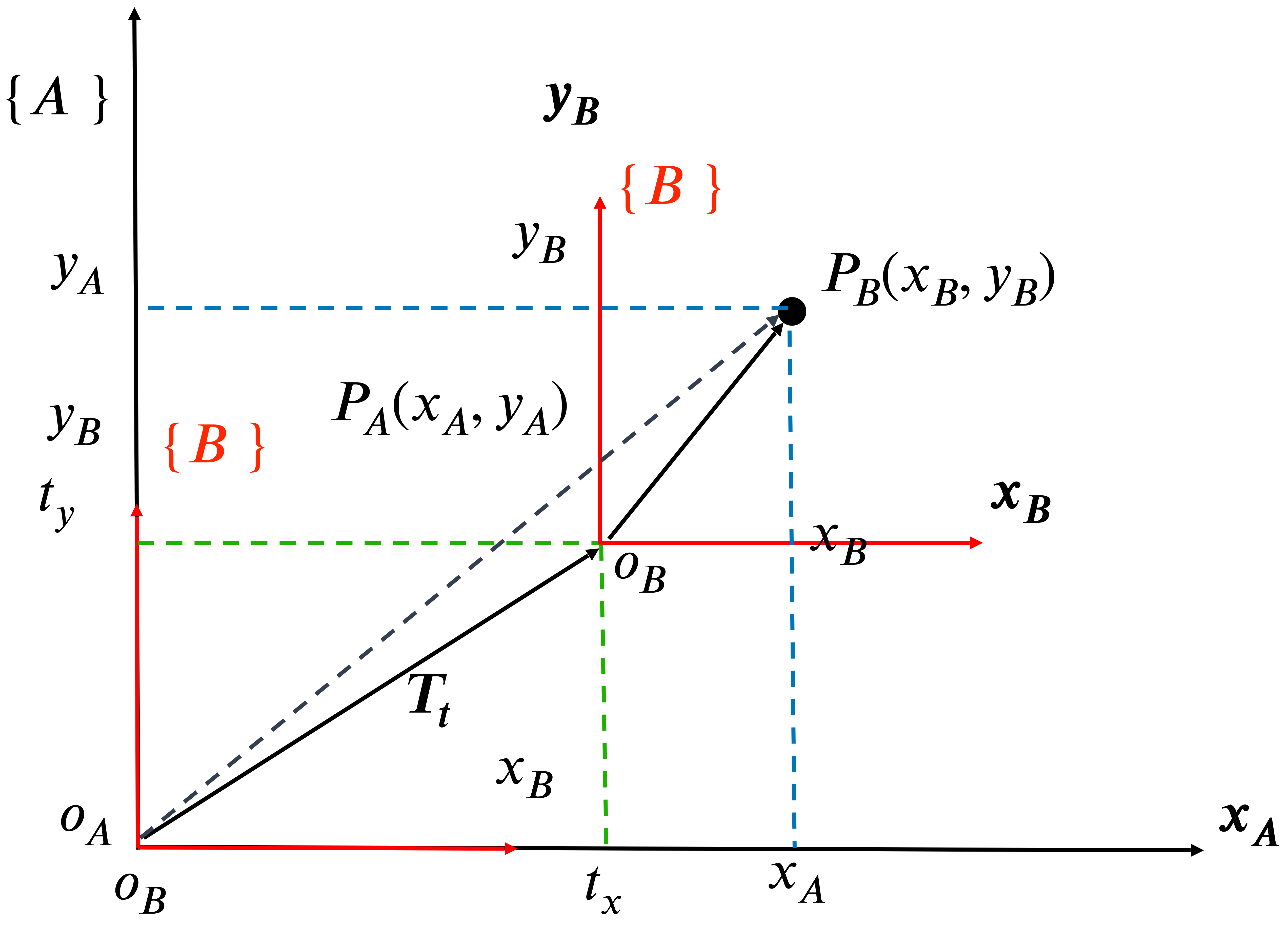
El problema puede ser dividido en dos partes: La representación de la traslación relacionada con la posición y la representación de la rotación relacionada con la orientación.

Robótica

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



UNIDAD III
Traslación y Rotación



Representación matemática

- Un cuerpo rígido que es trasladado desde una posición A hasta una posición B.

$$P' = P + T_t$$

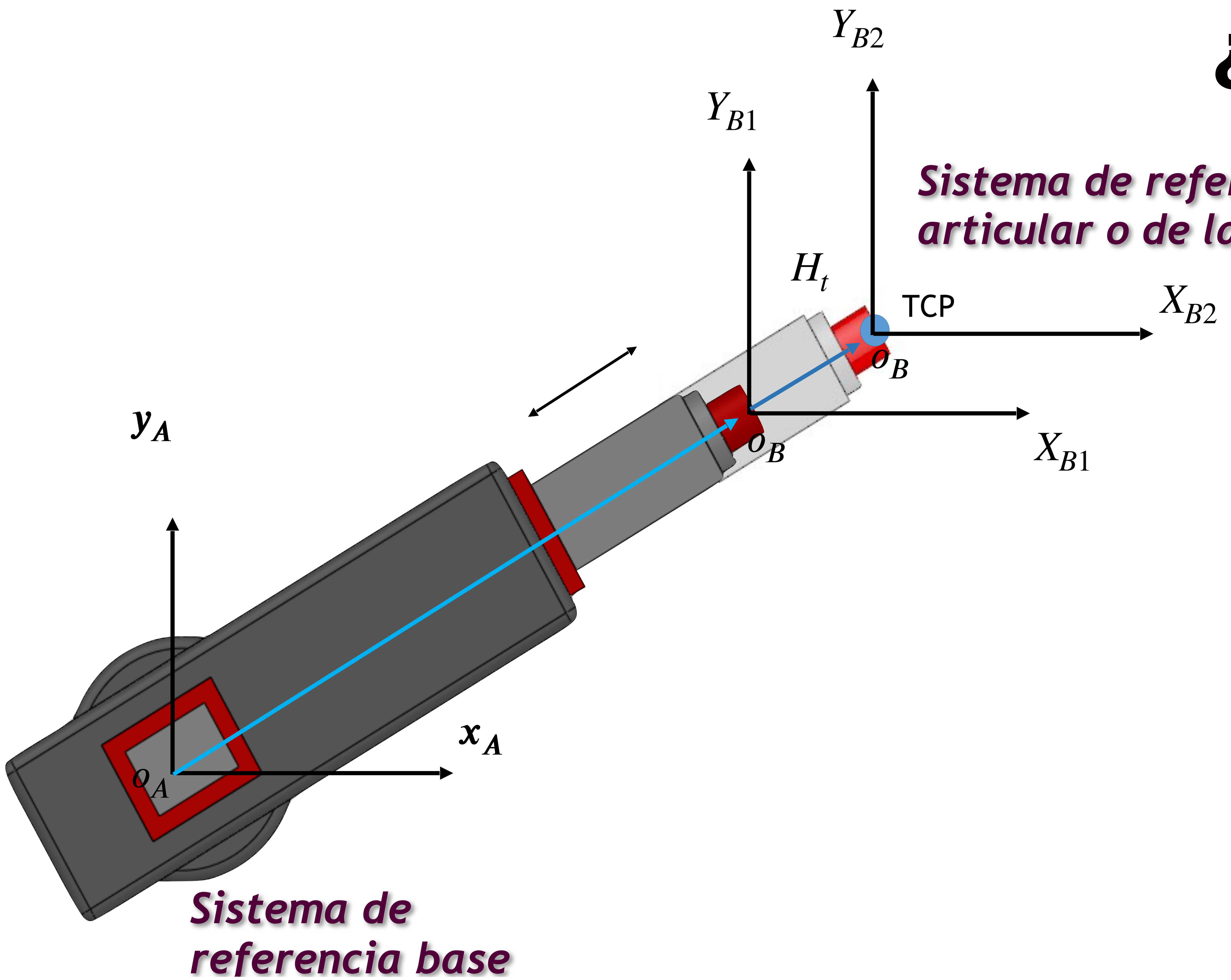
¿Descripción de un punto en B con respecto a A?

$$P_A = P_B + T_t$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

Traslación en robótica

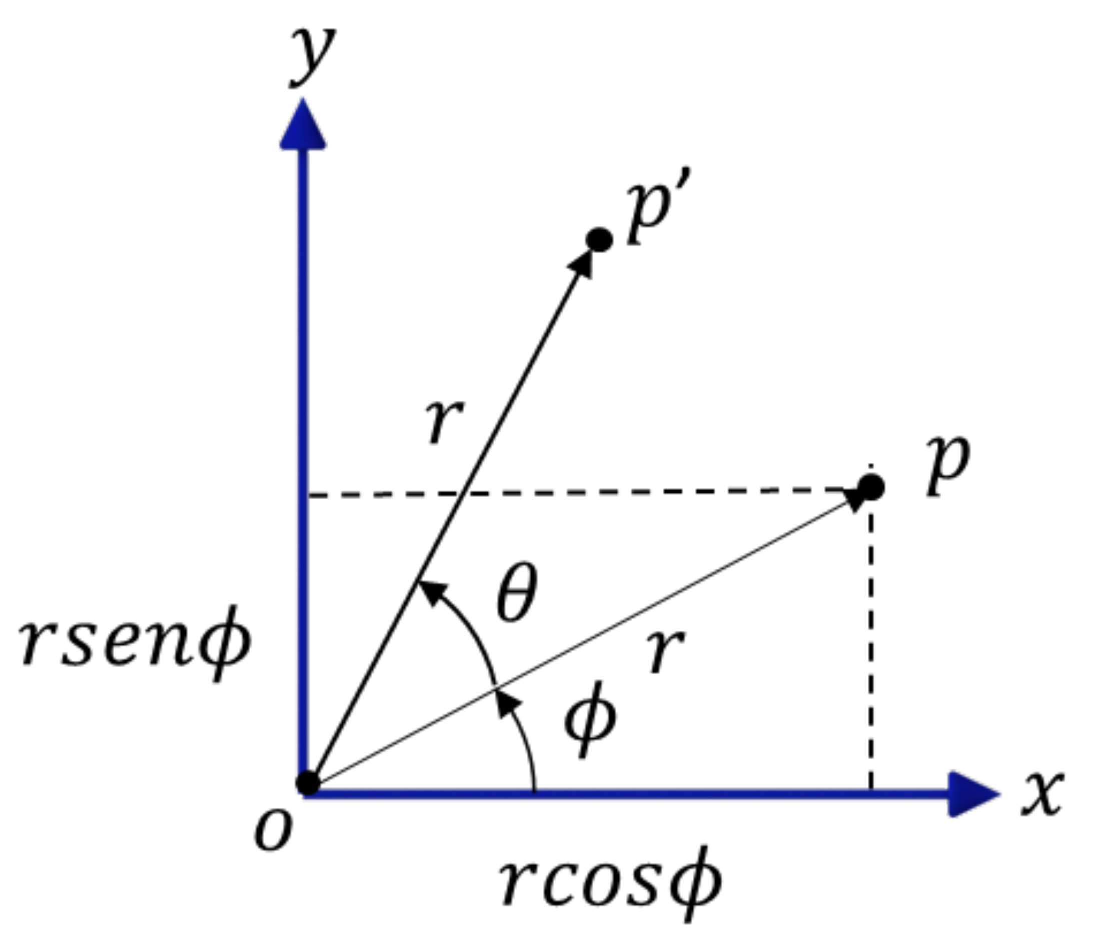
¿Qué pasa cuando el robot se mueve?

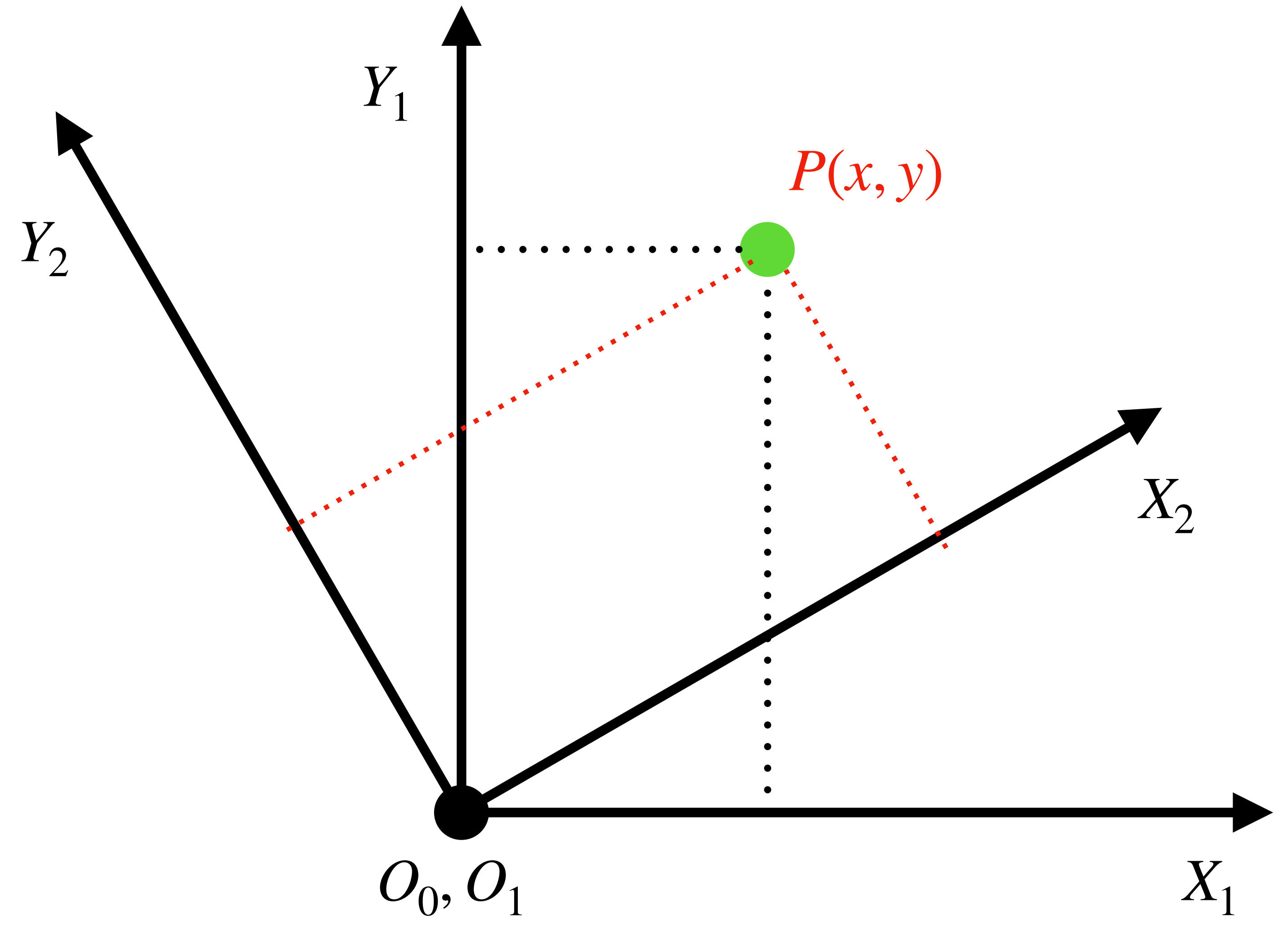


$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$$

Representación matemática

- Un cuerpo rígido que es rotado desde una posición *p* hasta una posición *p*'.





$$x' = r\cos(\phi + \theta) = r\cos\phi\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\theta$$

$$y' = r\,\mathrm{sen}(\phi + \theta) = r\cos\phi\sin\theta + r\,\mathrm{sen}\phi\cos\theta$$

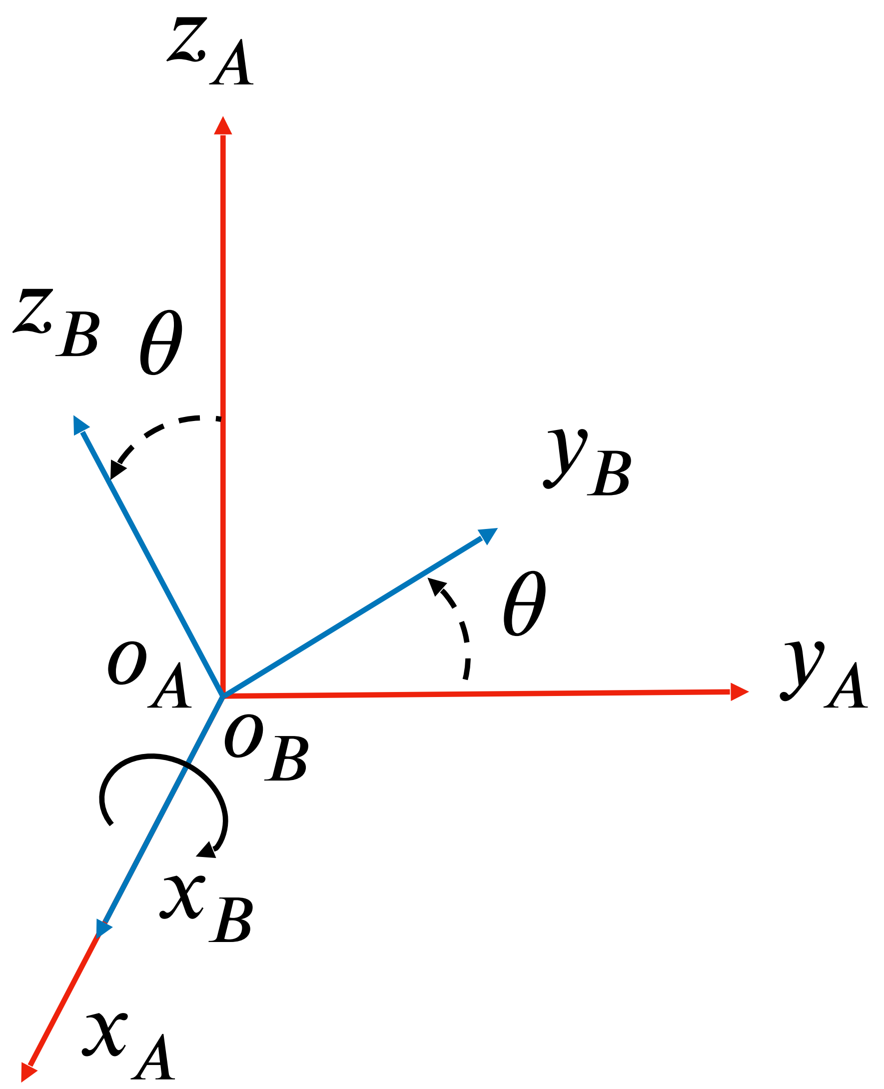
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P' = R \bullet P}$$

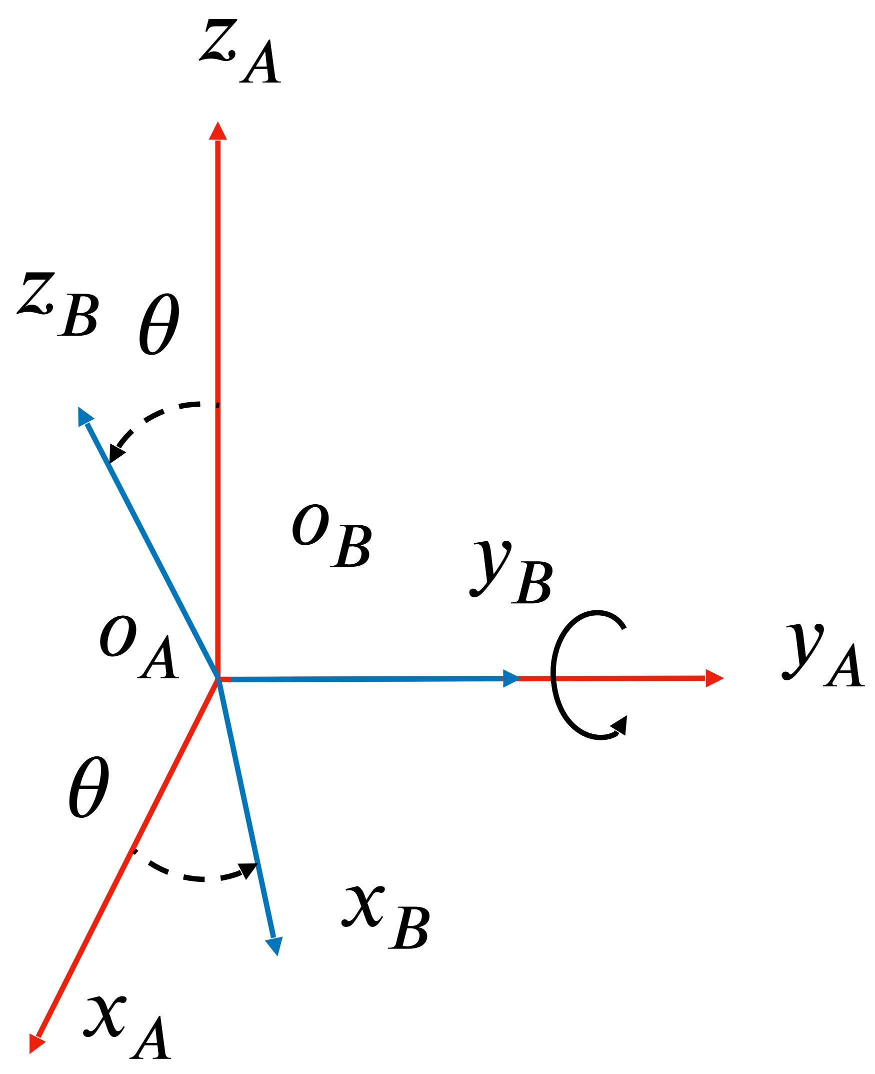
Rotación

Rotaciones definidas

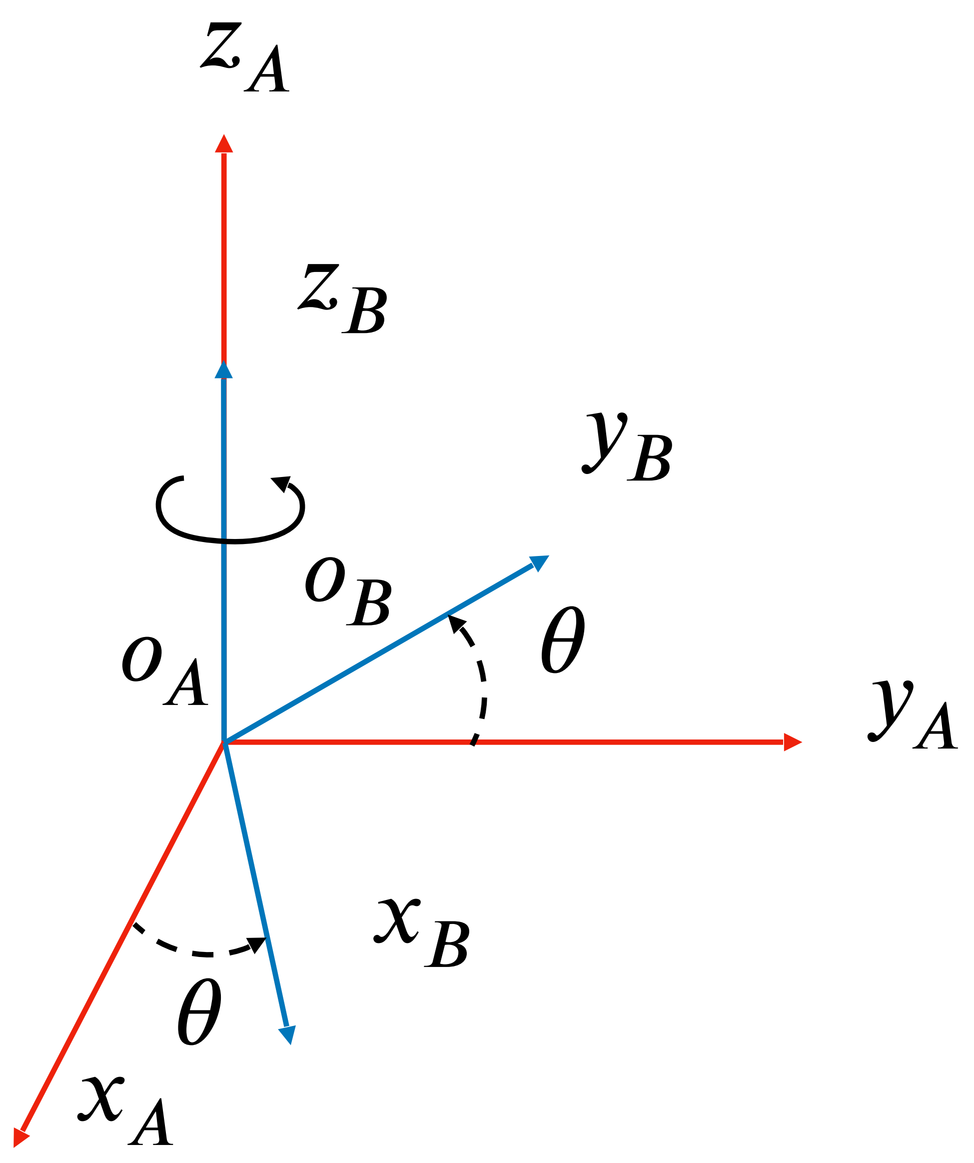
$$\boldsymbol{R_x}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$



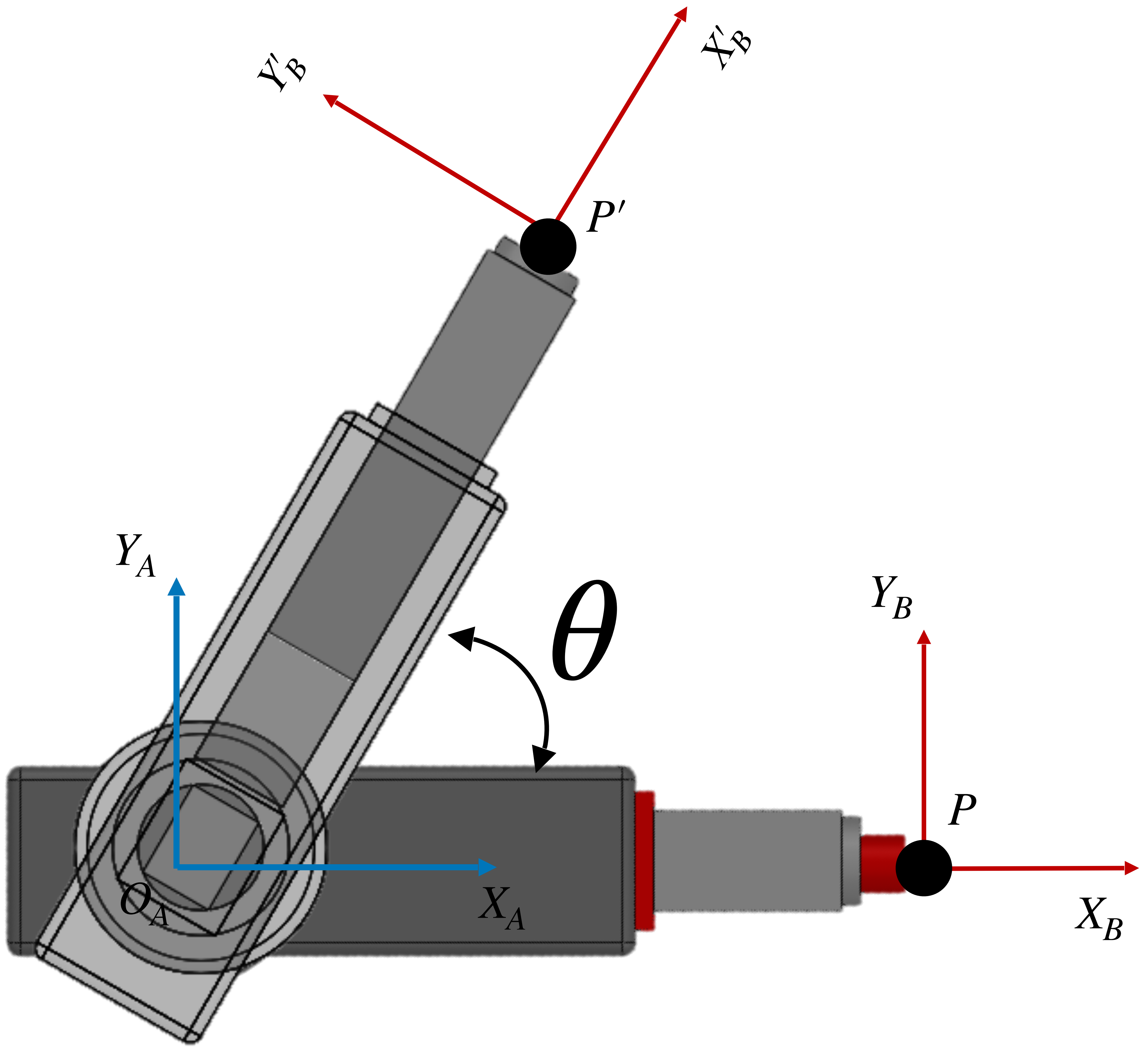
$$\boldsymbol{R_y}(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{R_z}(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



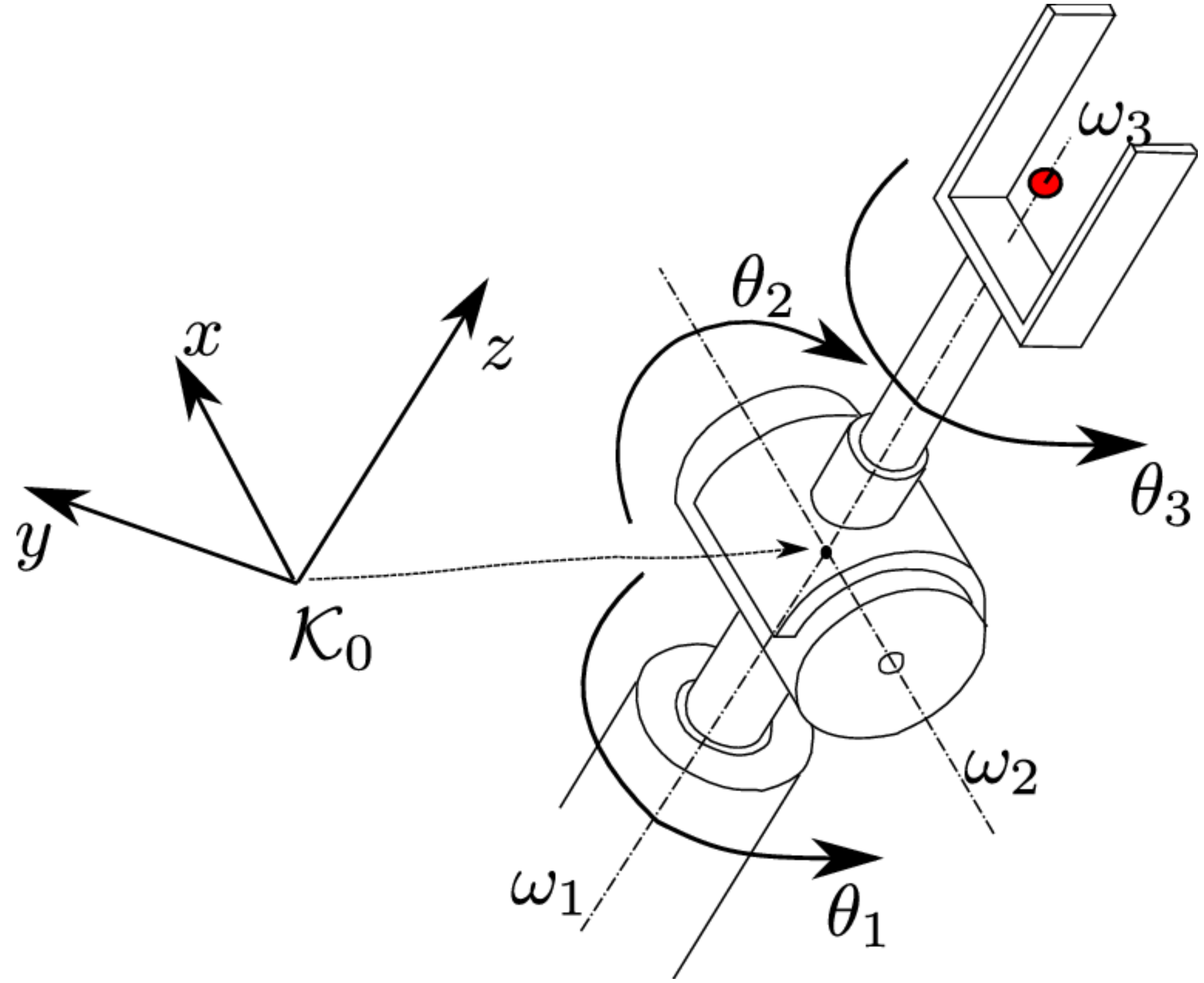
¿Qué pasa cuando el robot se mueve?



La traslación y rotación no son exclusivas de las articulaciones de traslación y rotación. Cada que le robot se mueve puede rotar o trasladar un sistema de referencia.

Los sistemas de referencia que se mueven son los consecuentes a la articulación que esta en movimiento.

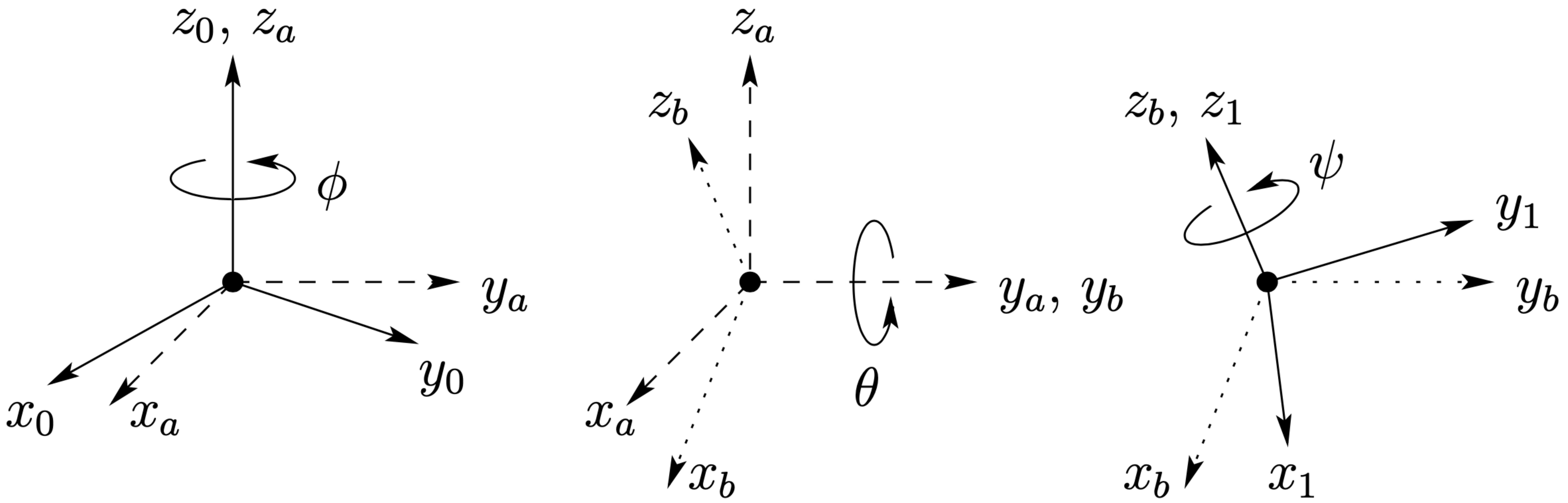
Tres rotaciones



$$R = R_{z,\phi}\, R_{y,\theta}\, R_{z,\psi}$$

Angulos de Euler

Deben seguir ese orden



Angulos de Euler

Representación matricial

$$
\begin{aligned}
R_{ZYZ} &= R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi} \\
&= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Angulos de Euler

¿Cómo sabemos los valores de los ángulos?

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_\theta = r_{33} \qquad s_\theta = \pm\sqrt{1 - r_{33}^2}$$

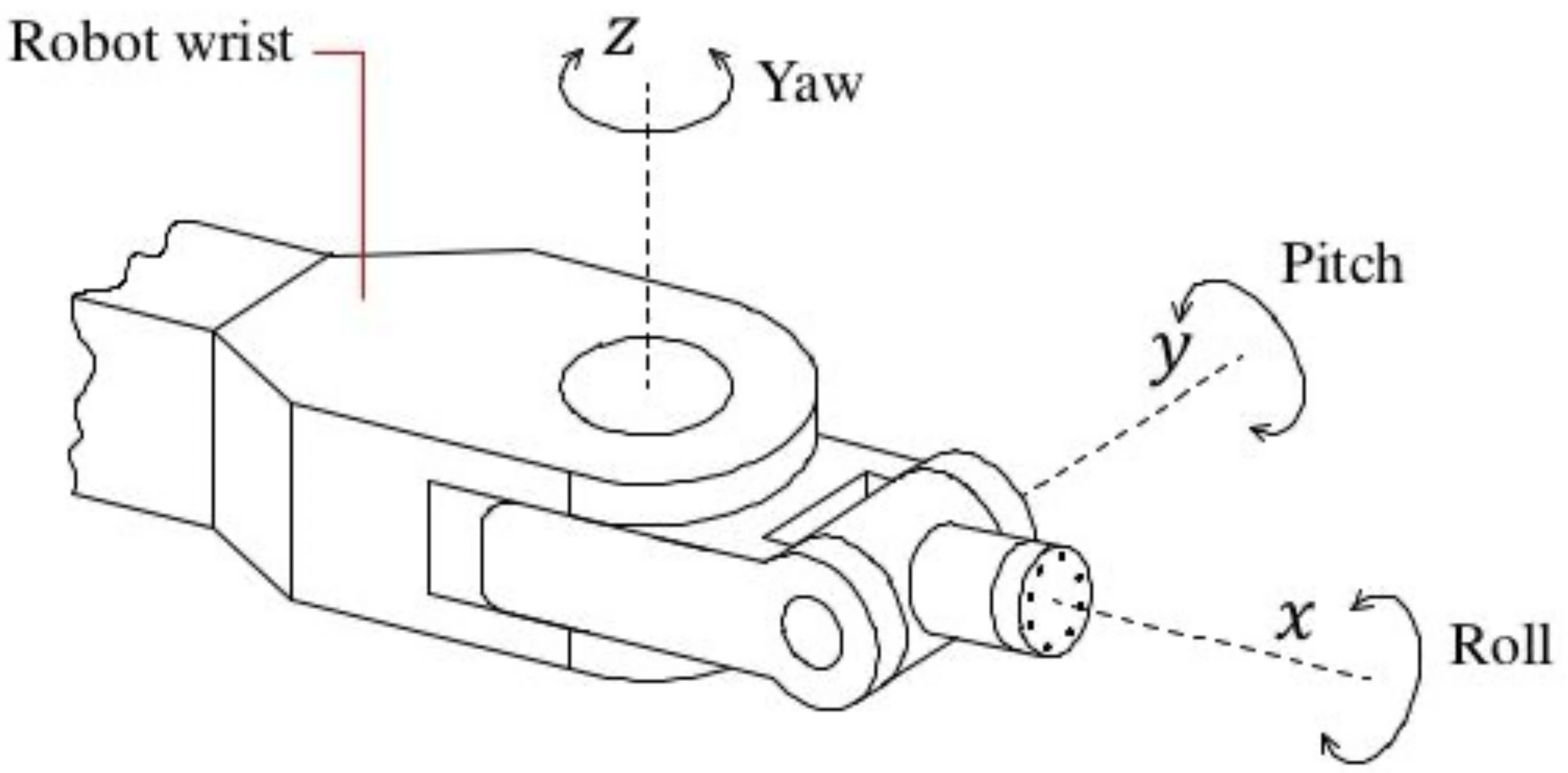
$$\begin{aligned} \theta &= \operatorname{atan2}\left(r_{33}, \sqrt{1 - r_{33}^2}\right) \\ \theta &= \operatorname{atan2}\left(r_{33}, -\sqrt{1 - r_{33}^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \operatorname{atan2}(r_{13}, r_{23}) \\ \psi &= \operatorname{atan2}(-r_{31}, r_{32}) \end{aligned} \qquad s_\theta > 0$$

$$\begin{aligned} \phi &= \operatorname{atan2}(-r_{13}, -r_{23}) \\ \psi &= \operatorname{atan2}(r_{31}, -r_{32}) \end{aligned} \qquad s_\theta < 0$$

Pitch, Yaw y Roll

Tres rotaciones



$$R = R_{z,\phi} \, R_{y,\theta} \, R_{x,\psi}$$

Pitch, Yaw y Roll

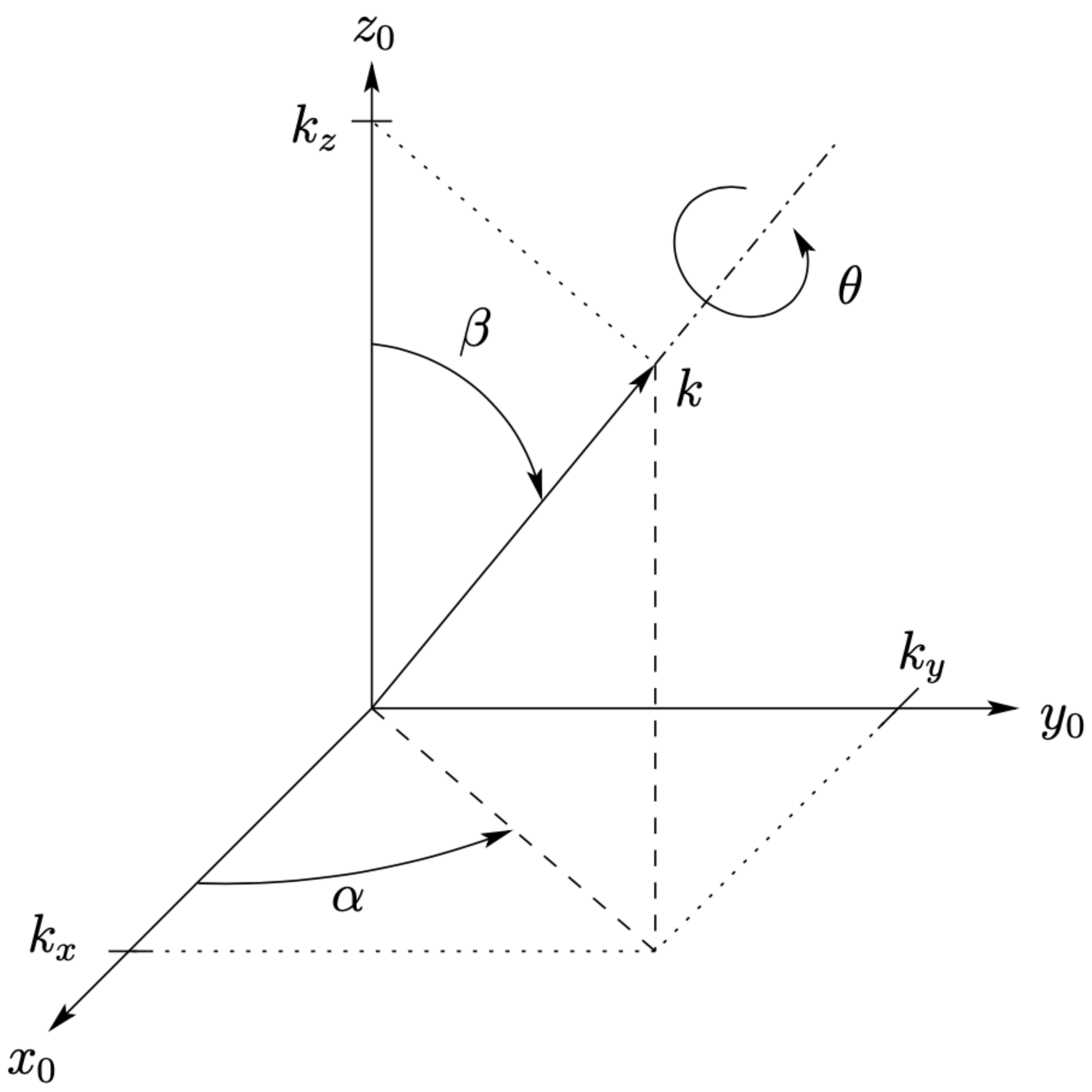
Representación matricial

$$
\begin{aligned}
R_{XYZ} &= R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi} \\
&= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

¿Cómo sabemos los valores de los ángulos?

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c_\phi c_\theta} & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ \underline{s_\phi c_\theta} & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ \underline{-s_\theta} & \underline{c_\theta s_\psi} & \underline{c_\theta c_\psi} \end{bmatrix}$$

Cuando no existe un wrist



$$\begin{aligned} R_{k,\theta} &= R_1^0 R_{z,\theta} R_1^{0^{-1}} \\ &= R_{z,\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\theta} R_{y,-\beta} R_{z,-\alpha} \end{aligned}$$

Representación matricial

$$R_{k,\theta} = \left[\begin{array}{c|c|c} k_x^2 v_\theta + c_\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c_\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c_\theta \end{array}\right]$$

$$v_\theta = \text{ vers } \theta = 1 - c_\theta$$

¿Cómo sabemos los valores del ángulo?

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{Tr(R)-1}{2}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$k = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1

Encuentra la matriz de rotación de Euler con los valores: $\phi = 20; \theta = 30; \psi = 80$

$$R_{ZYZ} \quad = \quad R_{z,\phi}R_{y,\theta}R_{z,\psi}$$

```
m =

    0.1585   -0.7745    0.6124
    0.5245    0.5915    0.6124
   -0.8365    0.1830    0.5000
```

Ejercicio 2

Encuentra los valores de ϕ, θ, ψ de la matriz de Euler: $M1 = \begin{bmatrix} 0.1585 & -0.7745 & 0.6124 \\ 0.5245 & 0.5915 & 0.6124 \\ -0.8365 & 0.1830 & 0.5000 \end{bmatrix}$

```
phi =

    45


theta =

   60.0000


psi =

   12.3401
```

Ejercicio 3

Encuentra la matriz de rotación de Roll-Pich-Yaw con los valores: $\phi = 50, \theta = 90, \psi = 10$

Ejercicio 4

Encuentra los valores de ϕ, θ, ψ de la matriz Roll, Pich, Yaw: $M2 = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.8660 & 0.0000 & -0.5000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$

Ejercicio 5

Encuentra la matriz de rotación de un sistema que se giro un ángulo de 60º sobre el vector v={1,2,1}

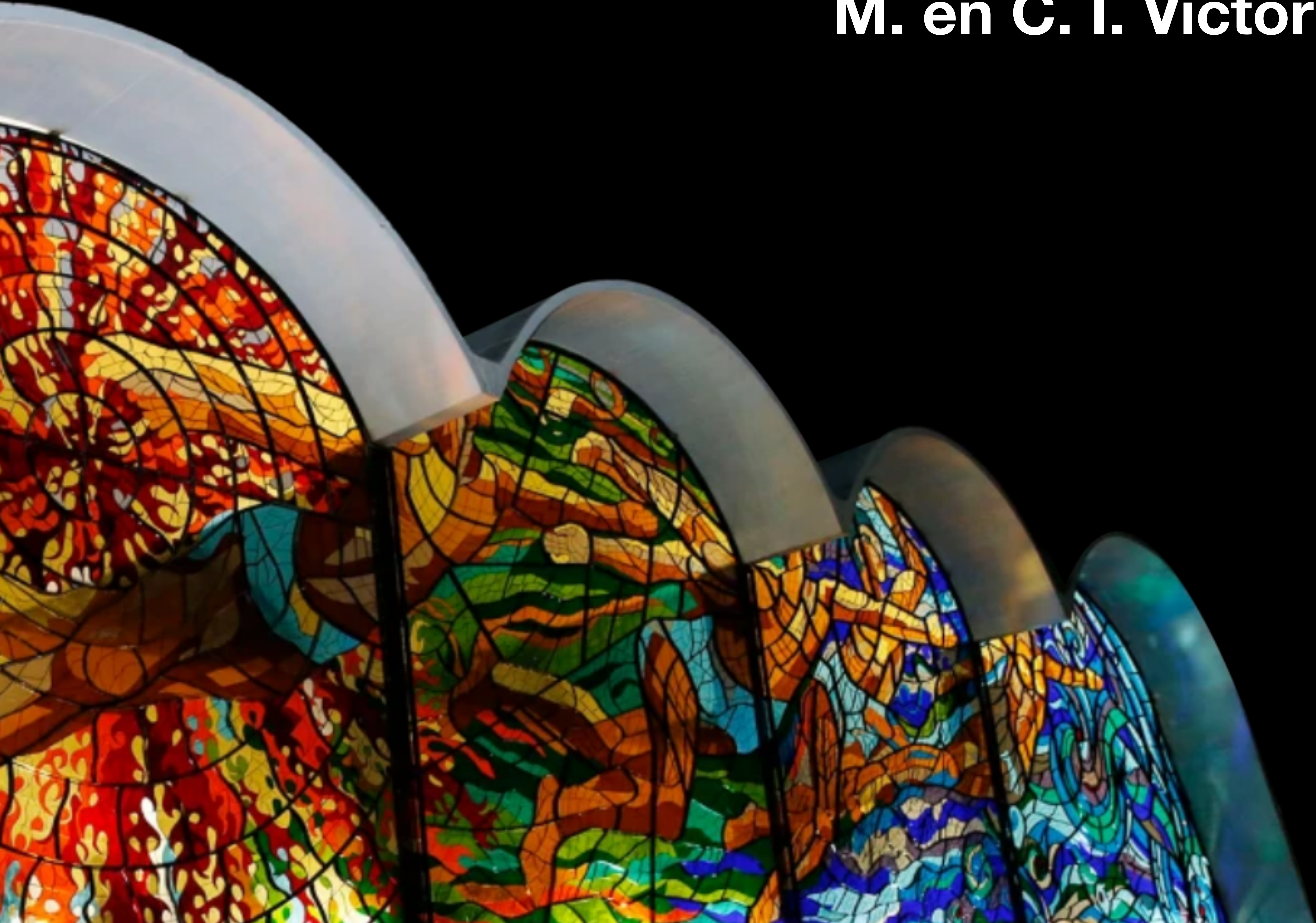
Ejercicio 6

Encuentra vector v, y el ángulo de rotación si se obtuvo la siguiente matriz

$$M3 = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.2440 & 0.9107 \\ 0.9170 & 0.3333 & -0.2440 \\ -0.2440 & 0.9170 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

Robótica

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



UNIDAD III
Cambio de sistemas de referencia

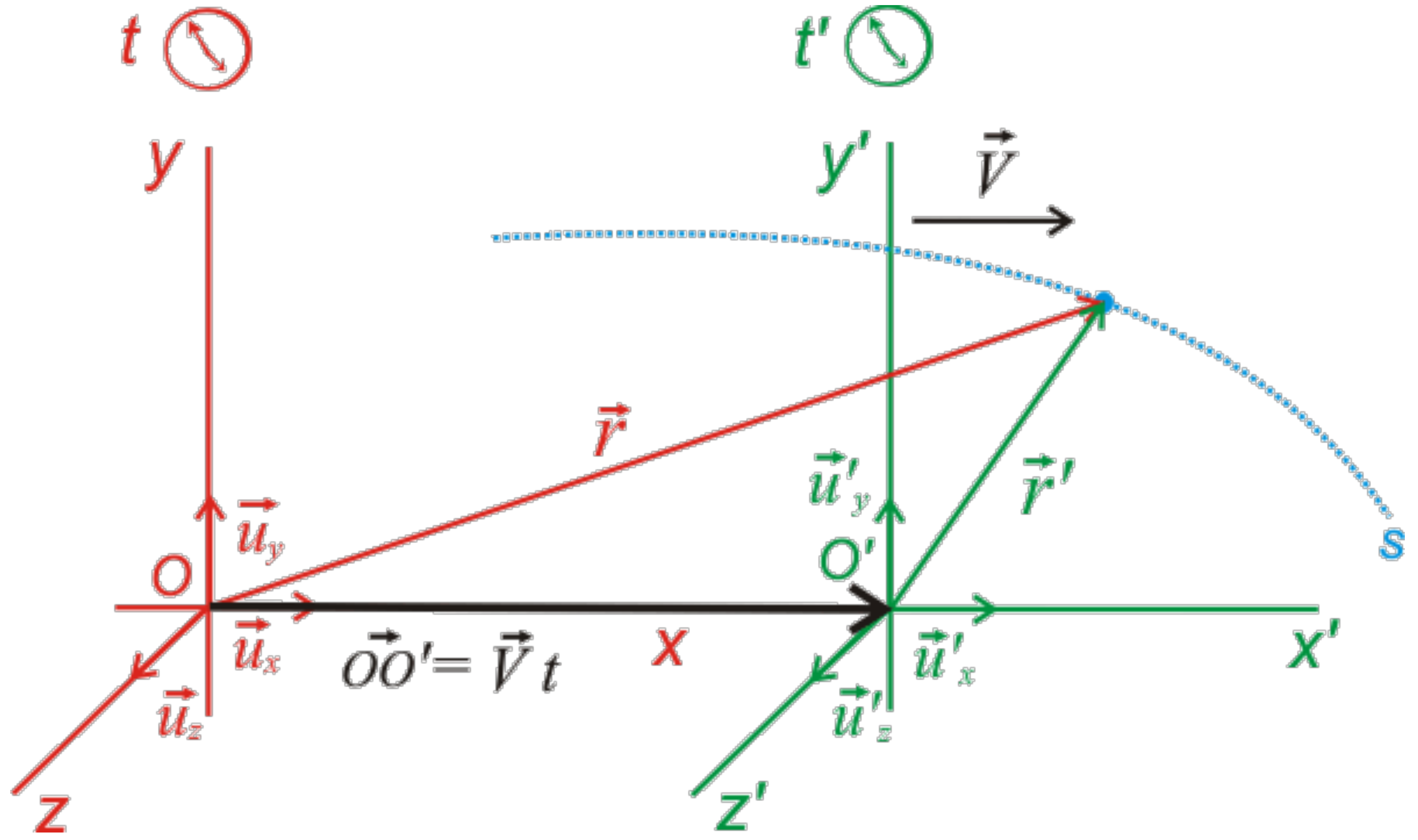
Cambio de sistemas de referencia

Relación entre sistemas de referencia

- Permite describir y analizar fenómenos y cantidades físicas desde diferentes perspectivas y sistemas de coordenadas.
- El cambio de sistemas de referencia es esencial para adaptar y analizar fenómenos en diferentes contextos y marcos de referencia.
- Permite simplificar problemas, transformar cantidades físicas y facilitar el análisis y la interpretación de resultados.
- Los sistemas de referencia están asociados con sistemas de coordenadas, como los sistemas cartesianos, polares, cilíndricos o esféricos.

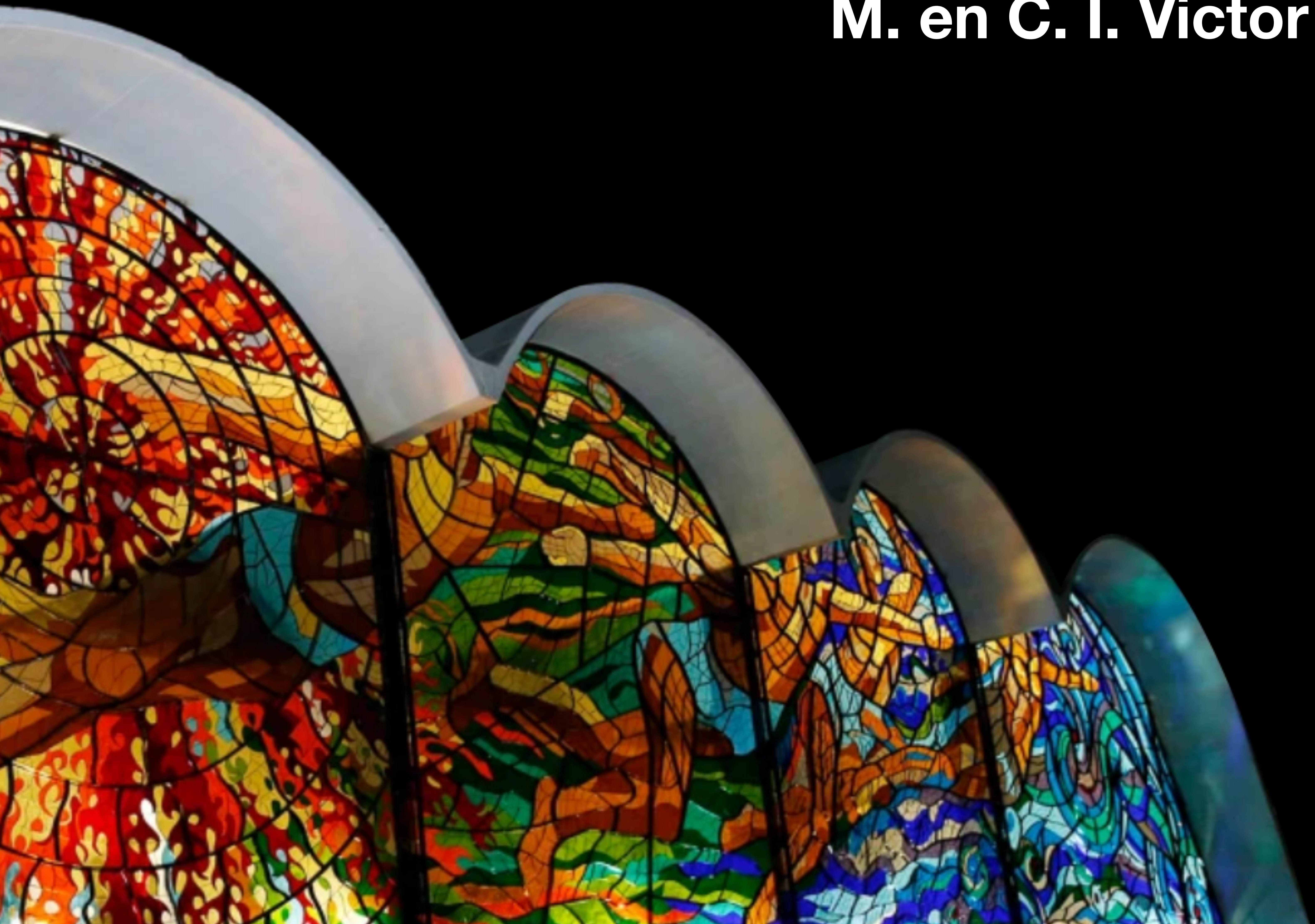
Relación entre sistemas de referencia

- El cambio de sistemas de referencia implica la transformación de las coordenadas y la reinterpretación de las cantidades físicas en el nuevo sistema.
- Las transformaciones de coordenadas permiten cambiar de un sistema de referencia a otro.
- Pueden ser lineales o no lineales, y se basan en ecuaciones matemáticas que relacionan las coordenadas de un sistema con las del otro



Robótica

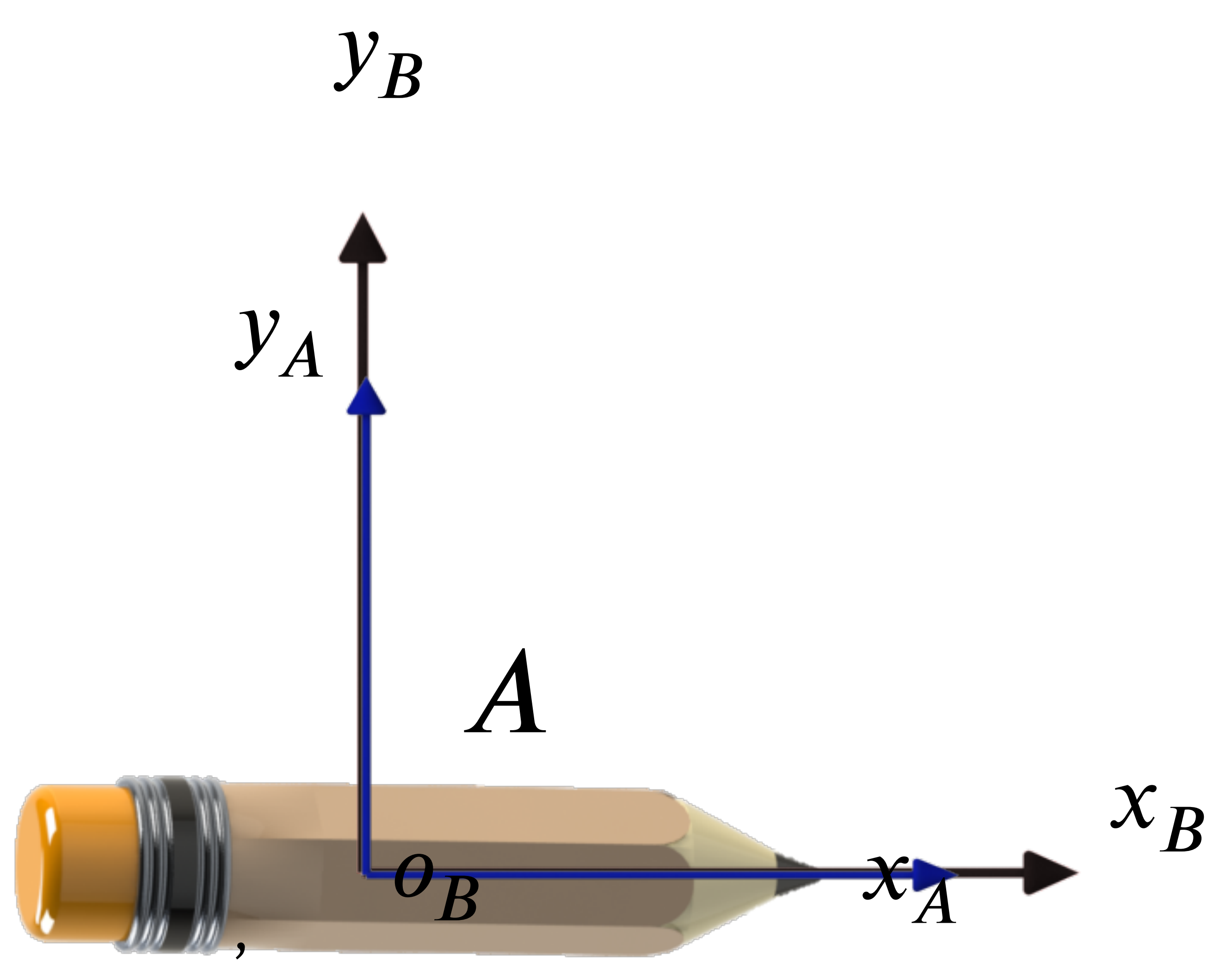
M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano

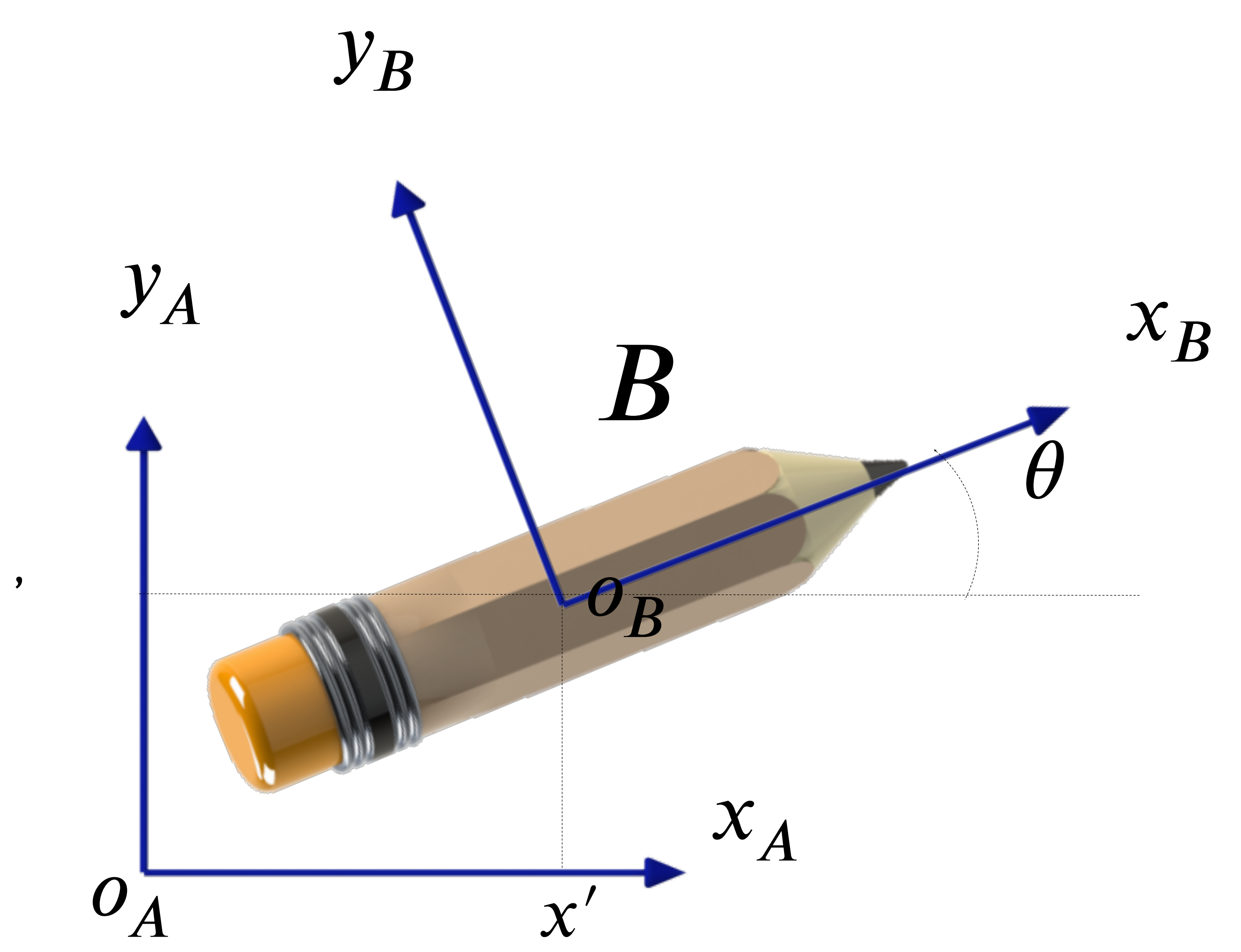


UNIDAD III
Transformaciones homogéneas

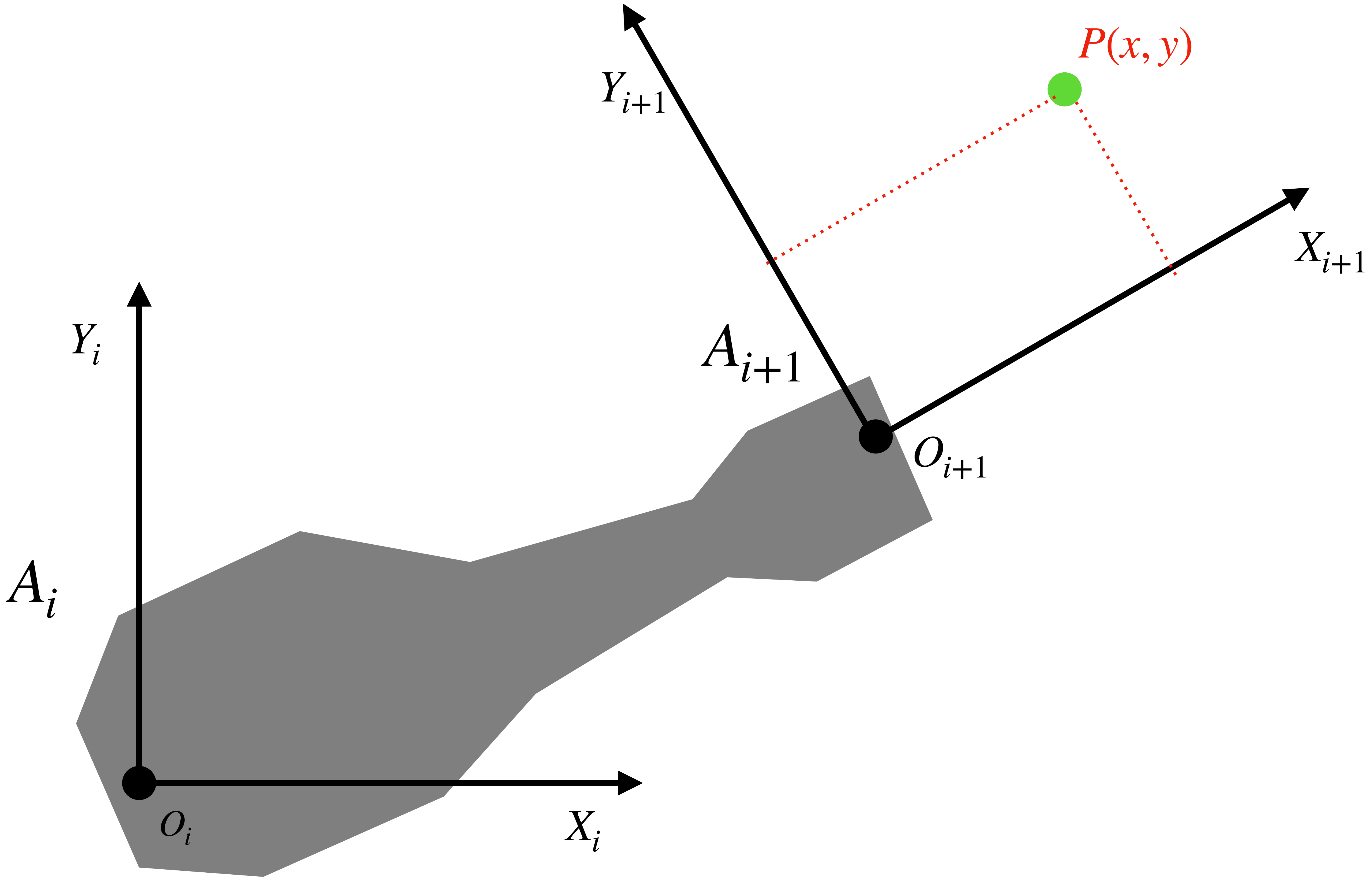
¿Cómo se aplica la rotación y la traslación?

- Para determinar la posición y orientación de un objeto se suelen hacer uso de **las representaciones de traslación y rotación sucesivas** o encadenadas. Por ejemplo, a un punto *p* se le debe aplicar una **rotación**, para obtener sus coordenadas *p'* y posteriormente una **traslación**, para obtener las coordenadas finales *p"*.





¿Cómo junto las operaciones?



Las dos operaciones juntas

Rotación $\Rightarrow$ $P' = R \bullet P$ Traslación $\Rightarrow$ $P'' = P' + T_t$

$$¿P'' = T \bullet P\,?$$

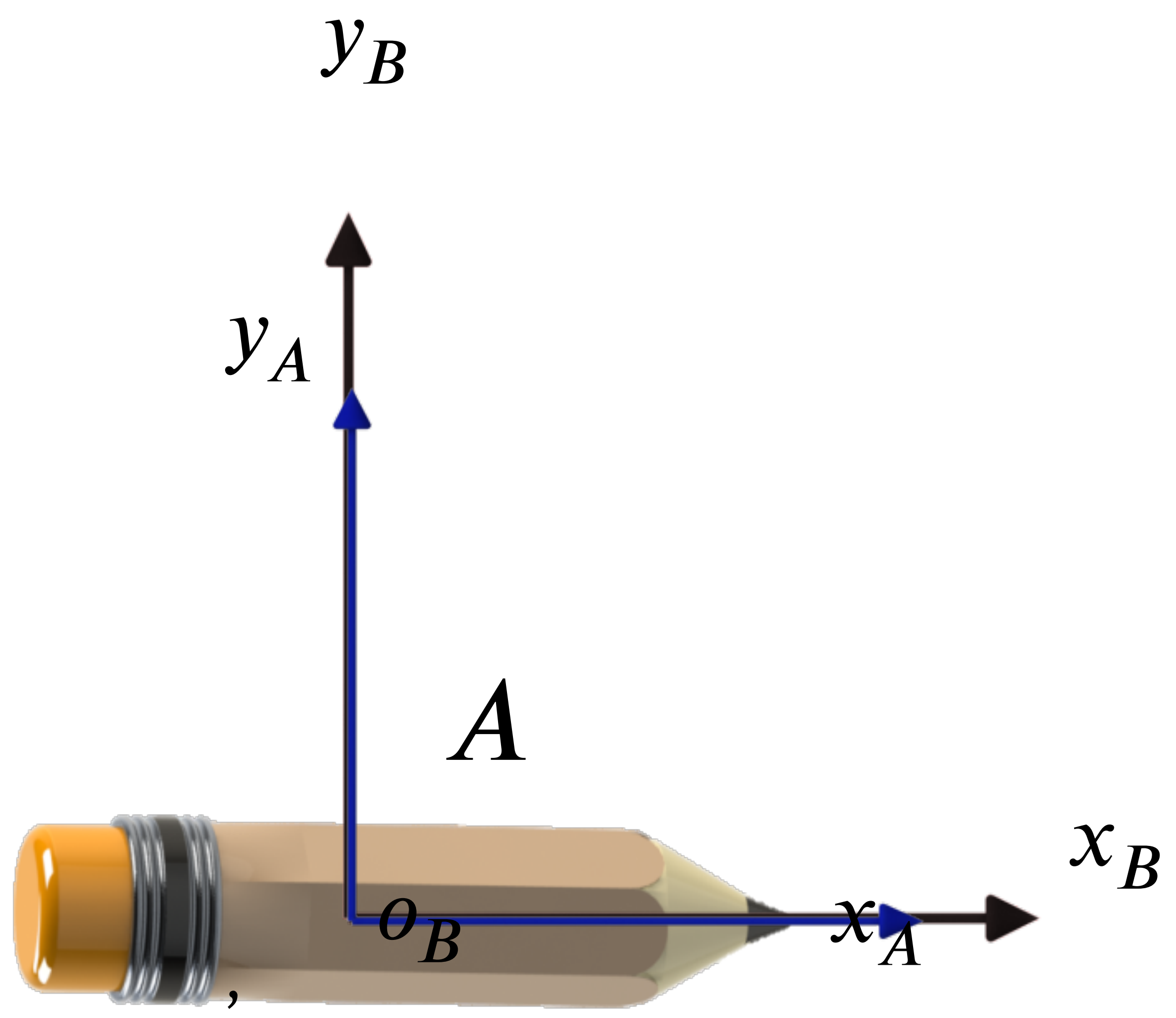
$$\begin{array}{ccc} (x,\ y) & \leftarrow & \\ h \downarrow & & (x/h,\ y/h) \\ (x,\ y,\ h) & \rightarrow & \uparrow \end{array}$$

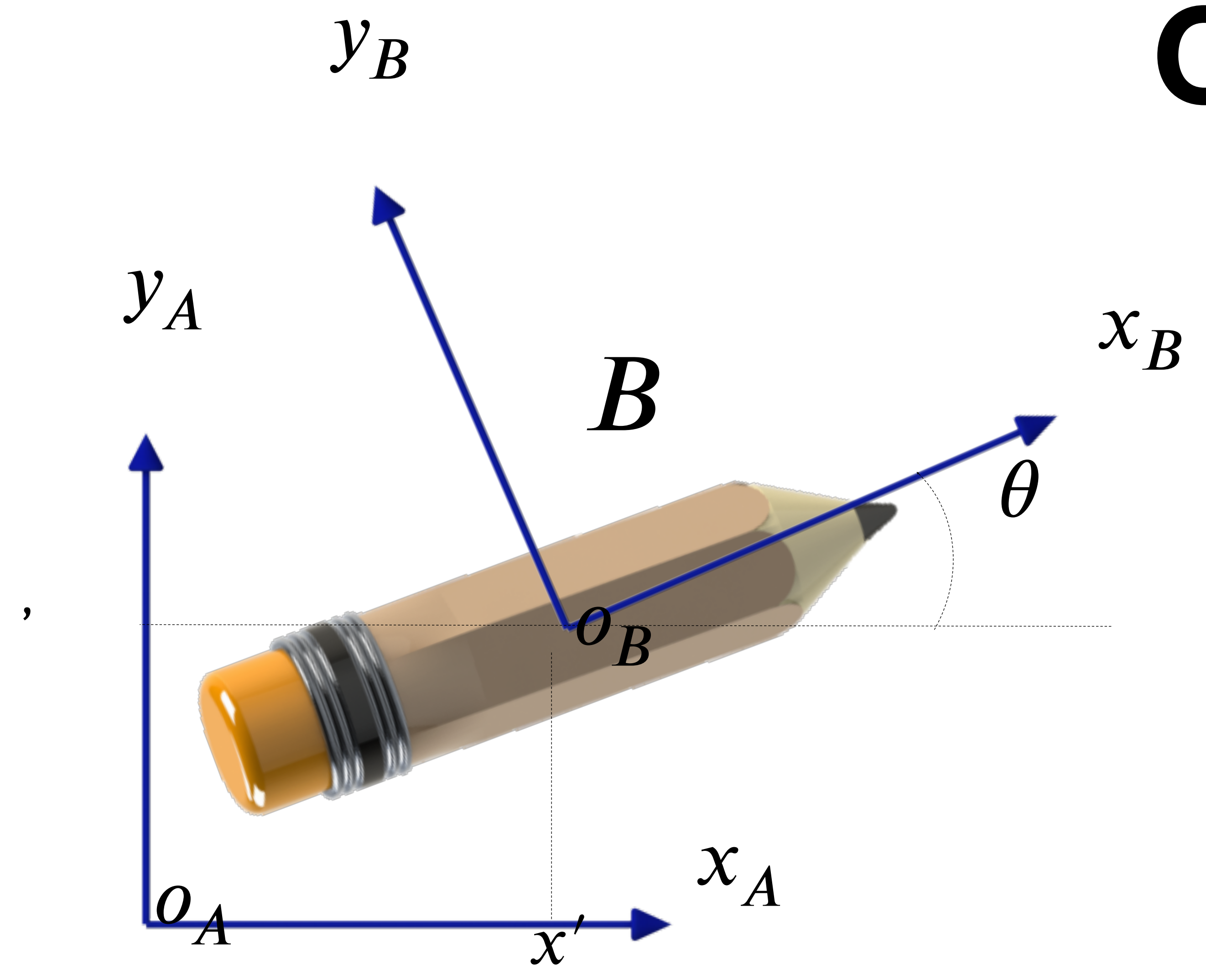
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_t(t_x,\ t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotación $\Rightarrow$ $P' = R(\theta) \bullet P$ Traslación $\Rightarrow$ $P'' = T_t(t_x,\ t_y) \bullet P'$

Combinamos





$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & t_x \\ sen\theta & cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P_A = TP_B}$$

Ejercicio

- Calcular las matrices de transformación homogéneas: H_1^0, H_2^1, H_2^0