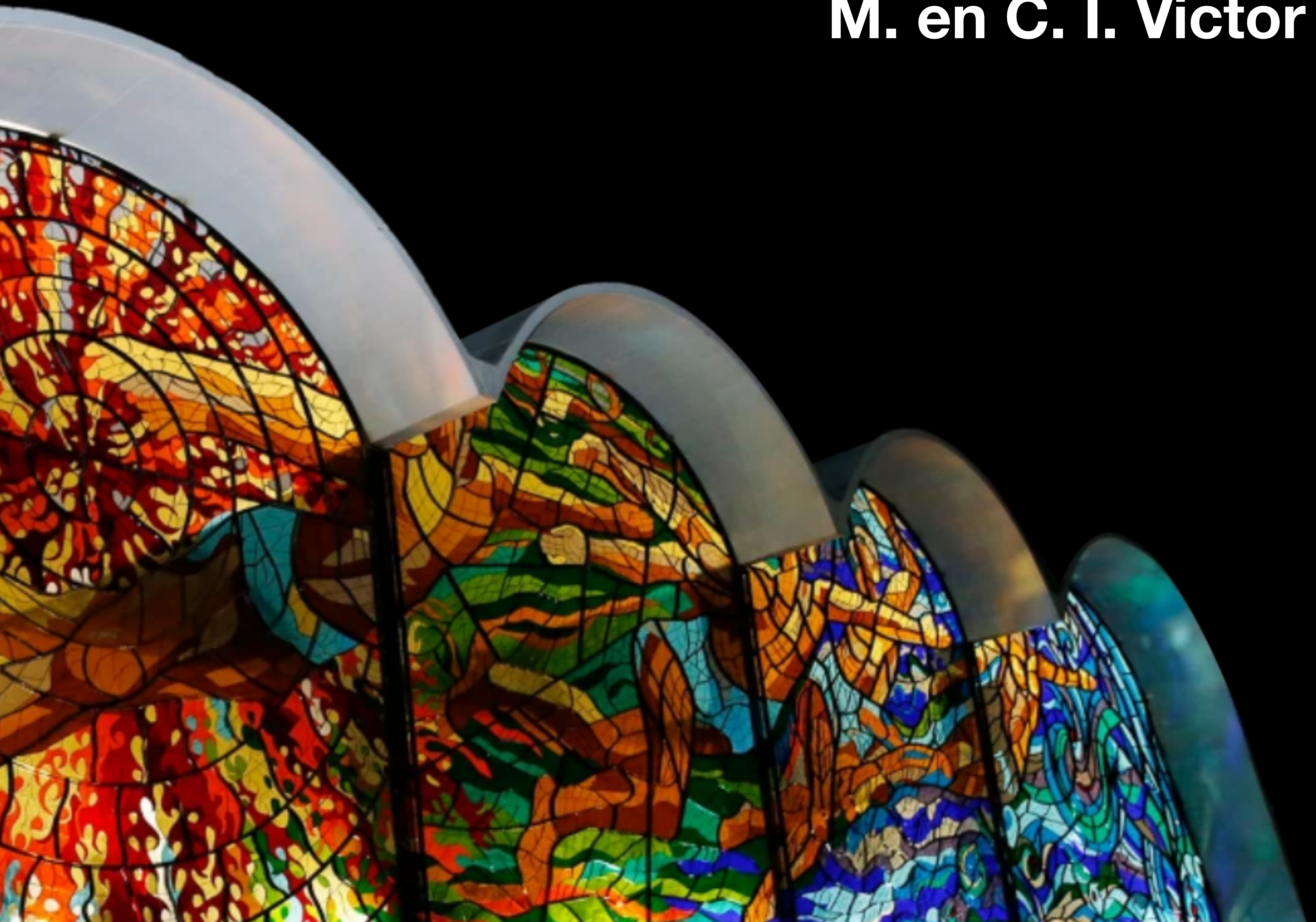
Control no lineal

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



Unidad I
Introducción a lo control
no lineal

Introducción al control no lineal

- Conceptos básicos de sistemas no lineales
- Diferencias entre control lineal y no lineal
- Importancia y aplicaciones del control no lineal

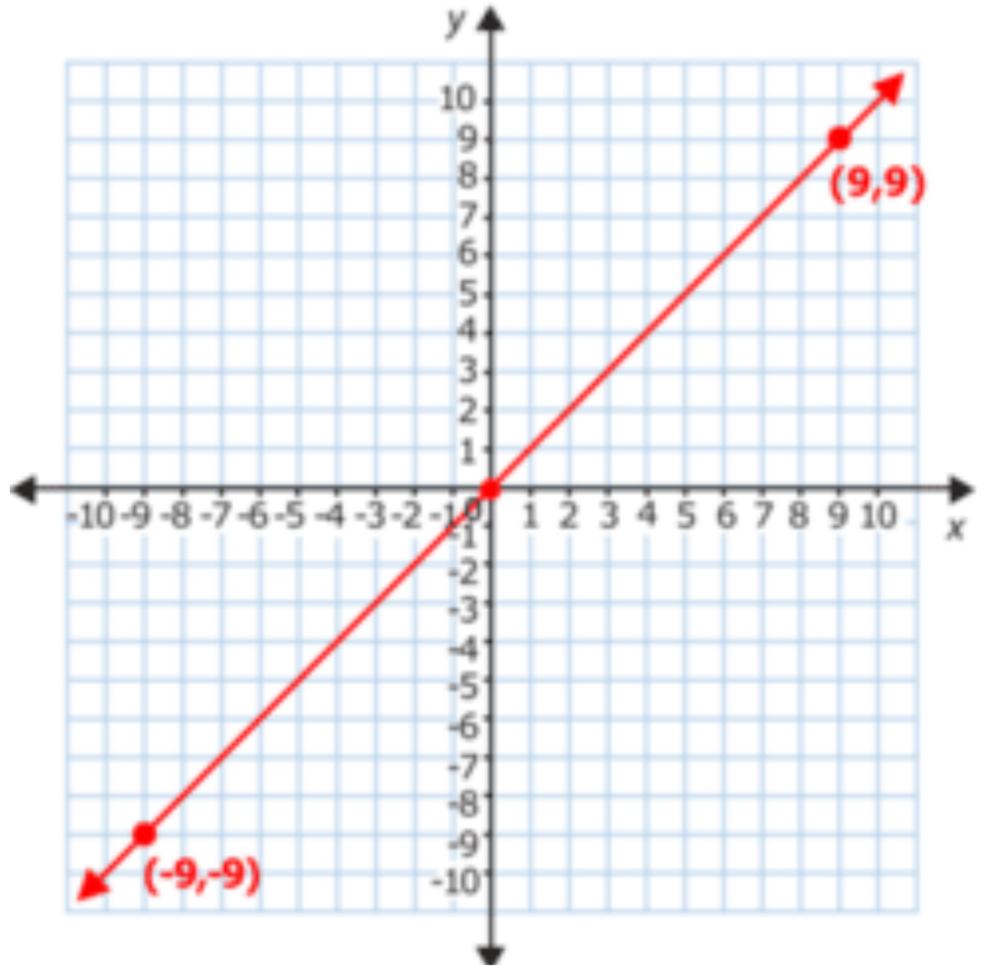
Control no lineal

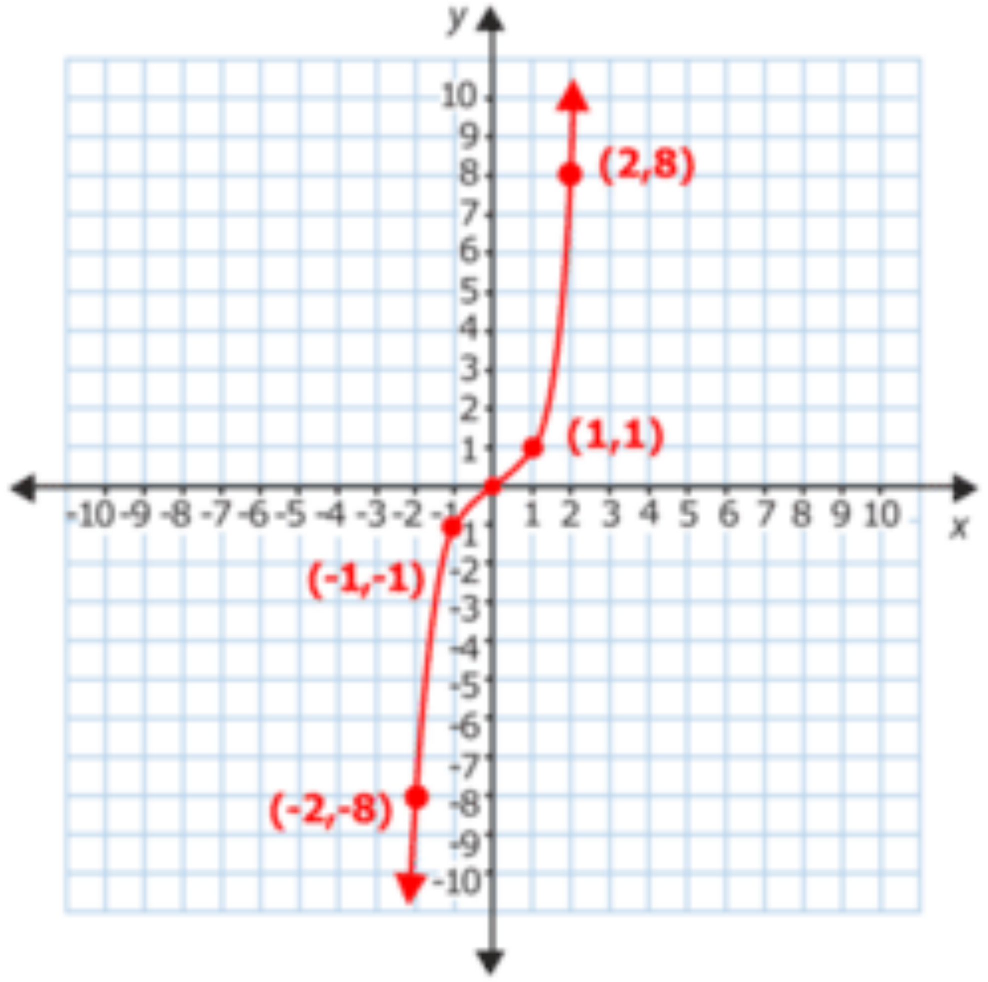
Introducción

- El control no lineal es una rama de la ingeniería de control que se enfoca en el análisis y diseño de sistemas dinámicos complejos
- A diferencia del control lineal, el control no lineal se adentra en sistemas cuyas relaciones entre las variables de entrada y salida no siguen proporcionalidades lineales.
- Esta característica única puede llevar a comportamientos más complejos y no predecibles.

Control no lineal

Lineal vs no lineal





- Ecuación Lineal: La ecuación lineal es una expresión matemática cuyas variables están elevadas a la potencia uno. Un ejemplo típico de una ecuación lineal es la siguiente:

$$y = 2x + 3$$

- Ecuación No Lineal: La ecuación no lineal es una expresión matemática donde las variables pueden estar elevadas a potencias diferentes de uno y/o multiplicadas entre sí.

$$y = x^2 + 3x - 1$$

Características de los Sistemas No Lineales

- **No Proporcionalidad Lineal**
  - Pequeños cambios en las variables de entrada pueden resultar en cambios no proporcionales en las variables de salida
- **Comportamientos No Triviales**
  - Manifestar una amplia gama de comportamientos, como oscilaciones, bifurcaciones, caos, atracción hacia puntos de equilibrio o repulsión.
- **Interacciones No Lineales**
  - Las interacciones entre las variables pueden ser complejas

Modelado de Sistemas No Lineales

- El modelado de sistemas no lineales puede ser más desafiante que el de sistemas lineales debido a la complejidad de sus relaciones matemáticas.

- Los modelos de sistemas no lineales generalmente se expresan mediante ecuaciones diferenciales no lineales, sistemas de ecuaciones o mediante representaciones en espacio de estados.

$u(t)$

Entrada

$$\dot{x}(y) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x(t))u_i(t)$$

$$y(t) = h(x)$$

$y(t)$

Salida

Modelado de Sistemas No Lineales

- Controles: son las variables de entrada del sistema. Representan acciones o señales que se aplican para influir en su comportamiento.

$$u(t) = [u_1(t), \ldots, u_m(t)]$$

- Estados: son las variables internas del sistema que describen su condición o configuración en un momento dado.

$$x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$$

- Salidas: son las variables de interés que se observan o miden en el sistema.

$$y(t) = [y_1(t), \ldots, y_p(t)]$$

Ecuación diferencial no lineal

- Son una forma común de modelar sistemas dinámicos no lineales.
- Estas ecuaciones describen cómo cambian las variables de estado del sistema en función de sus propios valores y las variables de entrada a lo largo del tiempo.
- La forma general de una ecuación diferencial no lineal puede ser expresada como:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

- Donde:

$\dot{x}(t)$ representa la derivada temporal de las variables de estado

$x(t), u(t)$ son las variables de control de entrada

$f(x(t), u(t))$ es una función no lineal que define la evolución del sistema.

Ecuación diferencial no lineal - Ejemplo

Modelar un péndulo simple en movimiento. El ángulo del péndulo respecto a la vertical se puede representar por la variable $x(t)$, y la fuerza aplicada al péndulo para mantenerlo en movimiento se puede representar por la variable $u(t)$. El movimiento del péndulo puede ser modelado mediante la siguiente ecuación no lineal:

$$\dot{x}(t) = \omega(t)$$

- Donde:

$\dot{x}(t)$ representa la tasa de cambio del ángulo del péndulo respecto al tiempo.

$\omega(t)$ es una función no lineal que depende del ángulo $x(t)$ y la fuerza $u(t)$ aplicada al péndulo.

Ecuación diferencial no lineal - Ejemplo

Modelar un La función $\omega(t)$ se puede expresar como:

$$\omega(t) = \frac{g}{L} sin(x(t)) + \frac{u(t)}{mL^2}$$

- Donde:

g es la aceleración debido a la gravedad.

Les la longitud del péndulo.

m es la masa del péndulo.

Modelos en Espacio de Estados

- Otra forma de representar sistemas dinámicos no lineales.
- Estos modelos dividen el sistema en ecuaciones que describen cómo evolucionan los estados del sistema y cómo se generan las salidas en función de los estados y las entradas.
- La forma general de un modelo en espacio de estados puede ser expresada como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Modelos en Espacio de Estados

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Donde:

$x(t)$ representa el vector de estados

$\dot{x}(t)$ es la derivada temporal

$x(t), u(t)$ es el vector de entradas de control

$y(t)$ es el vector de salidas del sistema

A, B, C y D son matrices que describen la relación entre las variables

Modelos en Espacio de Estados - Ejemplo

Supongamos que deseamos modelar un sistema de control de temperatura en un horno. El objetivo es mantener la temperatura del horno constante utilizando un controlador. El modelo en espacio de estados para este sistema podría ser el siguiente:

Variables de Estado:

$x_1(t)$: Temperatura interna del horno.

$x_2(t)$: Temperatura del ambiente externo.

Entrada:

$u(t)$: Potencia de calefacción aplicada al horno

Modelos en Espacio de Estados - Ejemplo

Ecuaciones de Estado (no lineales):

$$\dot{x}_1(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + b_1 u(t)$$

$$x_2(t) = c_1 x_2(t) + c_2 x_2(t) + d_1 u(t)$$

Donde:

a_1, a_2, b_1, c_1, c_2 y d_1 son coeficientes no lineales que modelan las interacciones entre las temperaturas del horno y el ambiente, así como la influencia de la potencia de calefacción.

Ecuaciones no lineales simbólicas

- Se expresan utilizando símbolos matemáticos como letras y operadores para representar las variables y las relaciones entre ellas.
- Esto permite trabajar con ecuaciones generales y encontrar soluciones que aplican a diferentes situaciones y valores de las variables.
- Resolver ecuaciones no lineales simbólicamente puede ser complicado, ya que no existe una fórmula general para encontrar soluciones.
- Existen técnicas y métodos numéricos y algebraicos que se utilizan para encontrar soluciones aproximadas o soluciones en forma de series o expresiones analíticas.

Ecuaciones no lineales simbólicas

- Ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$
- Ecuación exponencial: $y = a \cdot e^{bx}$
- Ecuación logarítmica: $y = a \cdot log_b(x)$
- Ecuación trigonométrica: $y = a \cdot sin(bx)$
- Ecuación de crecimiento logístico: $\frac{dP}{dt} = r \cdot P \cdot (1 - \frac{P}{K})$

Ecuaciones no lineales simbólicas - Ejemplo

Supongamos que queremos modelar el crecimiento de una población de bacterias en un cultivo.

Si llamamos $P(t)$ a la población de bacterias en función del tiempo t, podemos usar un modelo exponencial para describir su crecimiento, pero con una tasa de crecimiento que varía con el tiempo:

$$\frac{dP}{dt} = r(t) \cdot P(t)$$

Donde:

- $P(t)$ es la población de bacterias en función del tiempo t.
- $\frac{dP}{dt}$ representa la tasa de cambio de la población con respecto al tiempo.
- $r(t)$ es una función que representa la tasa de crecimiento de las bacterias en función del tiempo.

Modelado de Sistemas No Lineales

Ecuaciones no lineales simbólicas - Ejemplo

Si asumimos que la tasa de crecimiento de las bacterias también depende del tamaño de la población, podemos usar una ecuación de tipo logístico para modelar el crecimiento de la población:

$$\frac{dP}{dt} = r(t) \cdot P(t) \cdot (1 - \frac{P(t)}{K})$$

Donde:

- K es la capacidad de carga del ambiente, es decir, la máxima población que puede soportar el cultivo de bacterias.

Importancia del control no lineal

Consideraciones

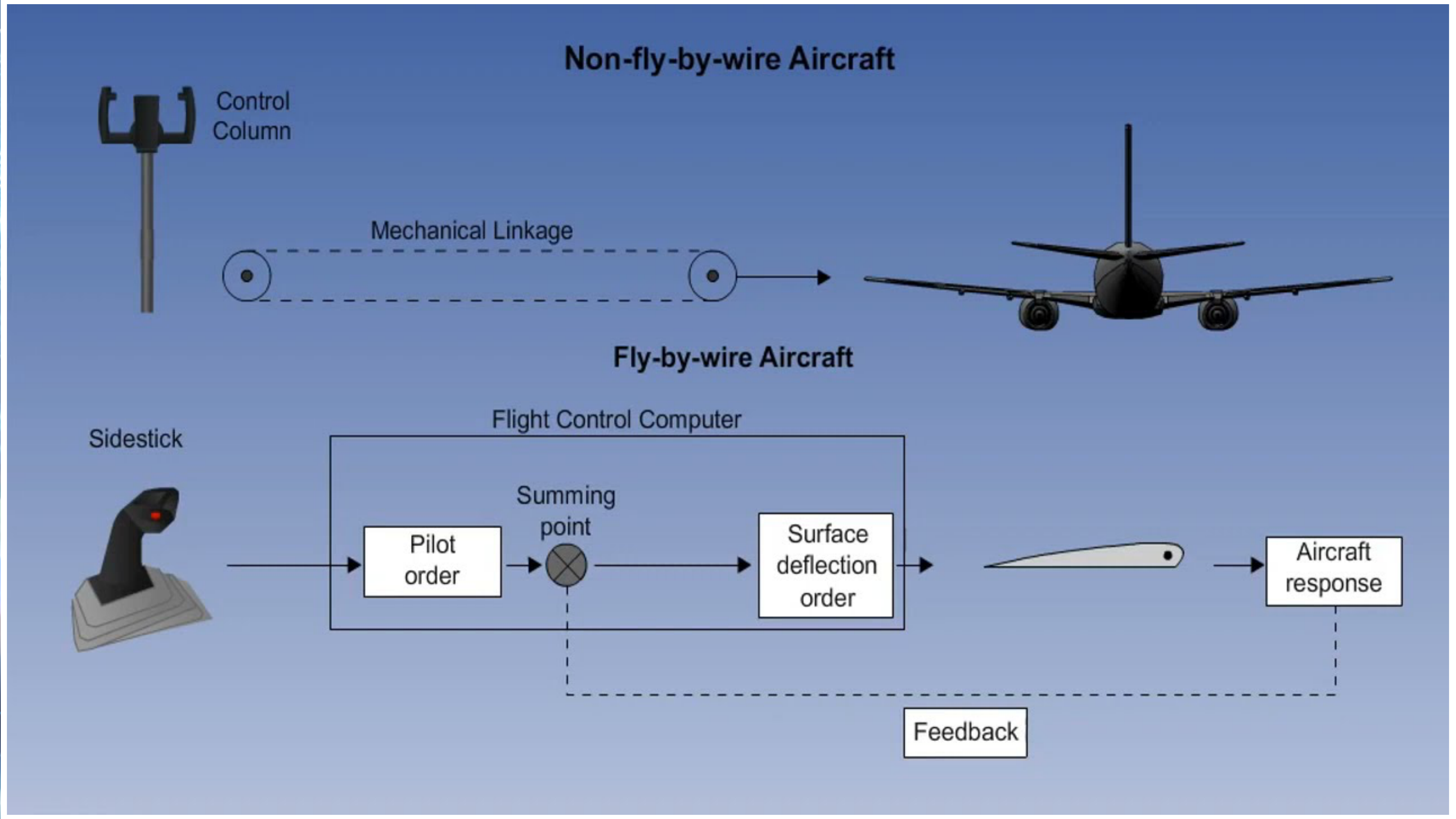
- **Modelado de sistemas reales:** Muchos sistemas en la vida real exhiben comportamientos no lineales. Para diseñar sistemas de control efectivos, es esencial comprender y modelar adecuadamente estos sistemas no lineales.

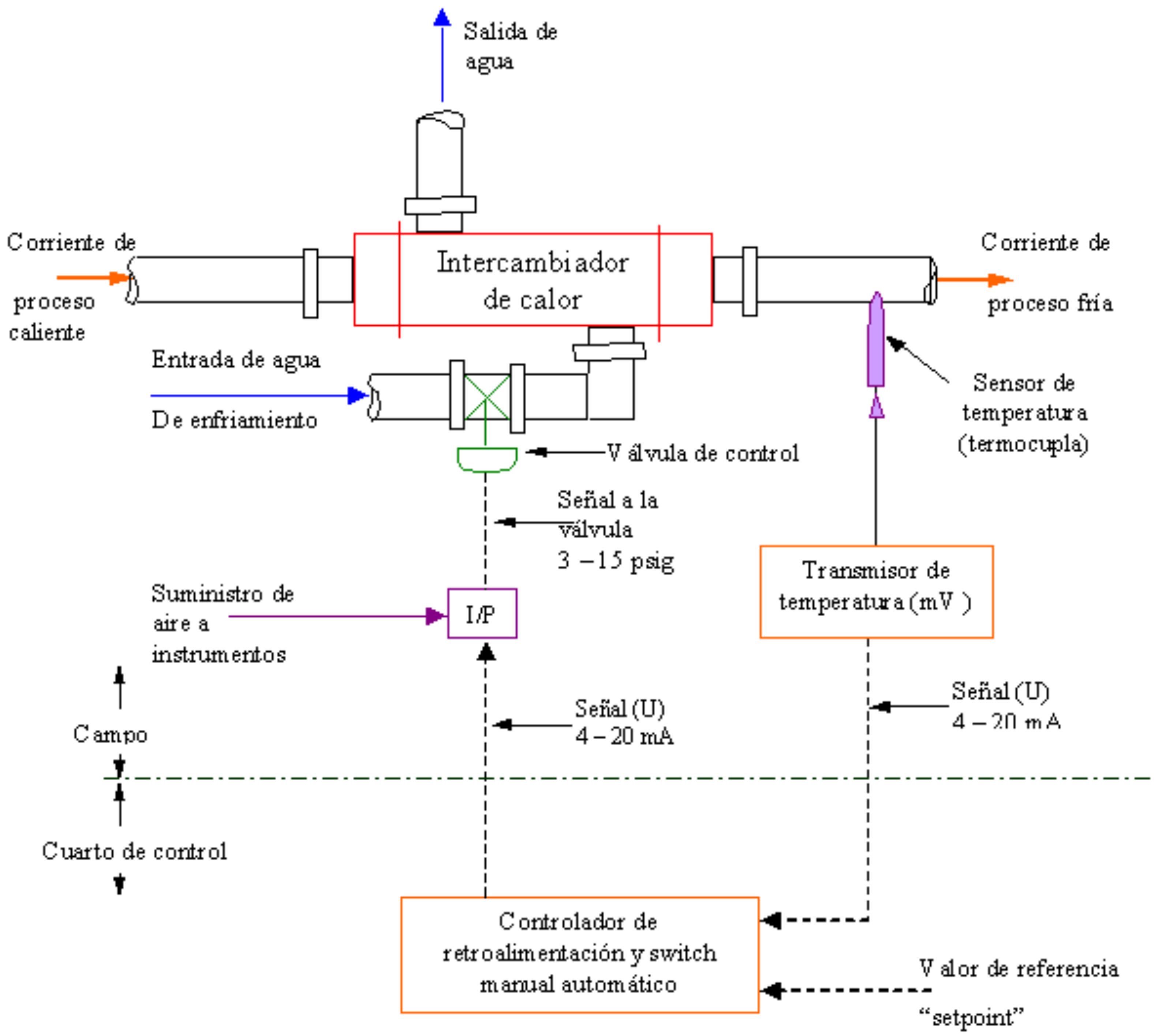
- **Precisión en el control:** Los sistemas no lineales a menudo pueden presentar respuestas más precisas y eficientes si se implementa un control que tenga en cuenta su naturaleza no lineal.

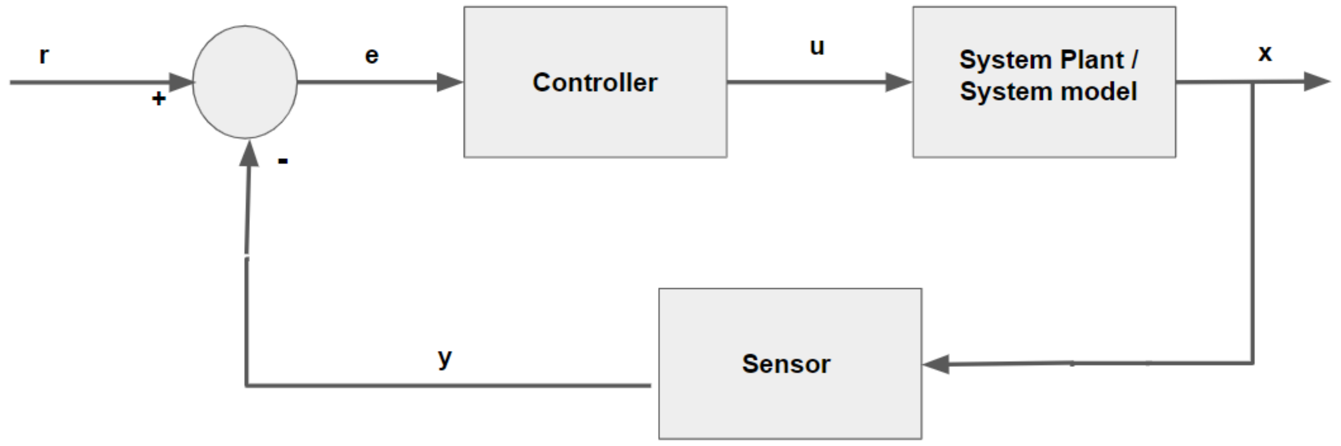
- **Adaptabilidad:** Algunas aplicaciones requieren controlar sistemas que experimentan cambios en sus parámetros o dinámicas con el tiempo.

Aplicaciones

Se puede utilizar en:

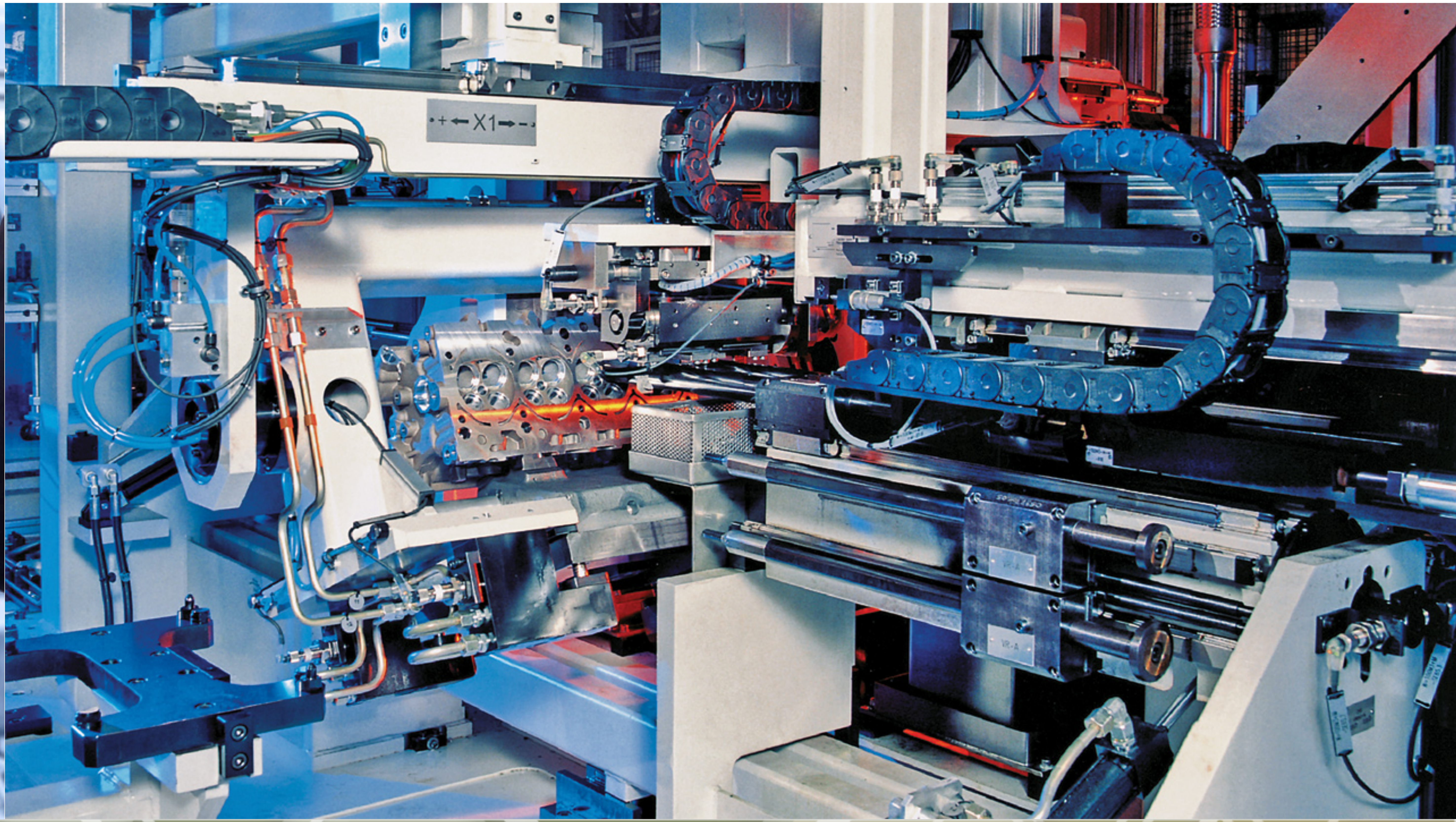






Aplicaciones

Se puede utilizar en:



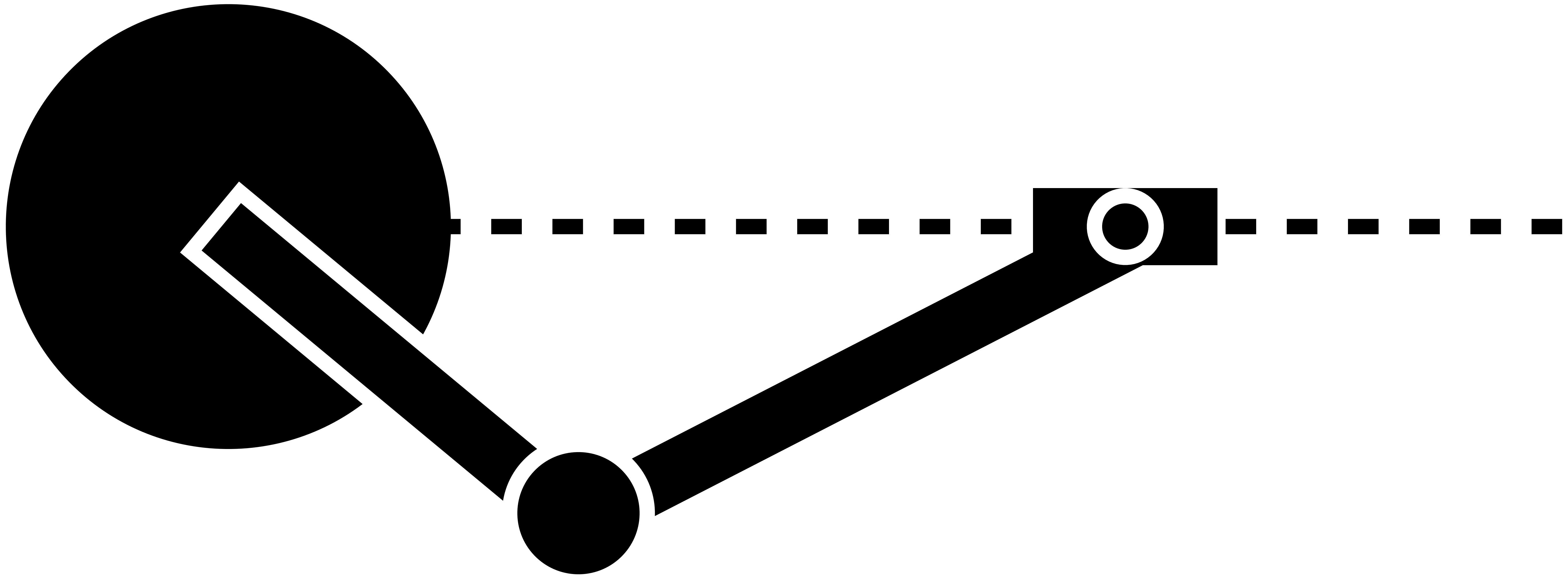
Ecuación diferencial no lineal - Ejercicio

- Considera un mecanismo de biela-manivela, un sistema mecánico comúnmente utilizado en motores de combustión interna y otros dispositivos de conversión de movimiento. El mecanismo consta de una manivela (barra) y una biela conectada a ella. La manivela se mueve en un movimiento circular uniforme y la biela se conecta al extremo de la manivela y se mueve en un movimiento de traslación alternante

- Modelar el sistema del mecanismo biela-manivela como una ecuación diferencial no lineal para encontrar la aceleración angular.

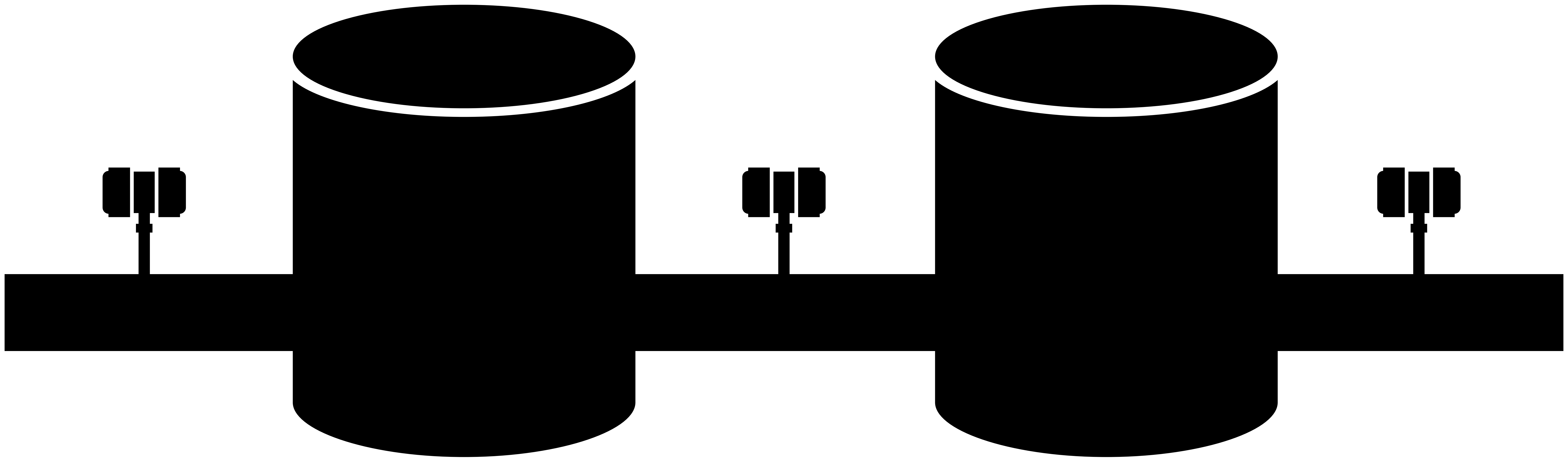
Ejercicio 1

- Modelar el sistema del mecanismo biela-manivela como una ecuación diferencial no lineal.



Ejercicio 2

- Modelar el sistema del doble tanque en el espacio de estados y proporcionar las ecuaciones.



Ejercicio 3

- Realizar el modelado simbólico de la Ley de Enfriamiento de Newton utilizando una ecuación diferencial e indica cual es la variable simbólica usada.

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_{amb})$$