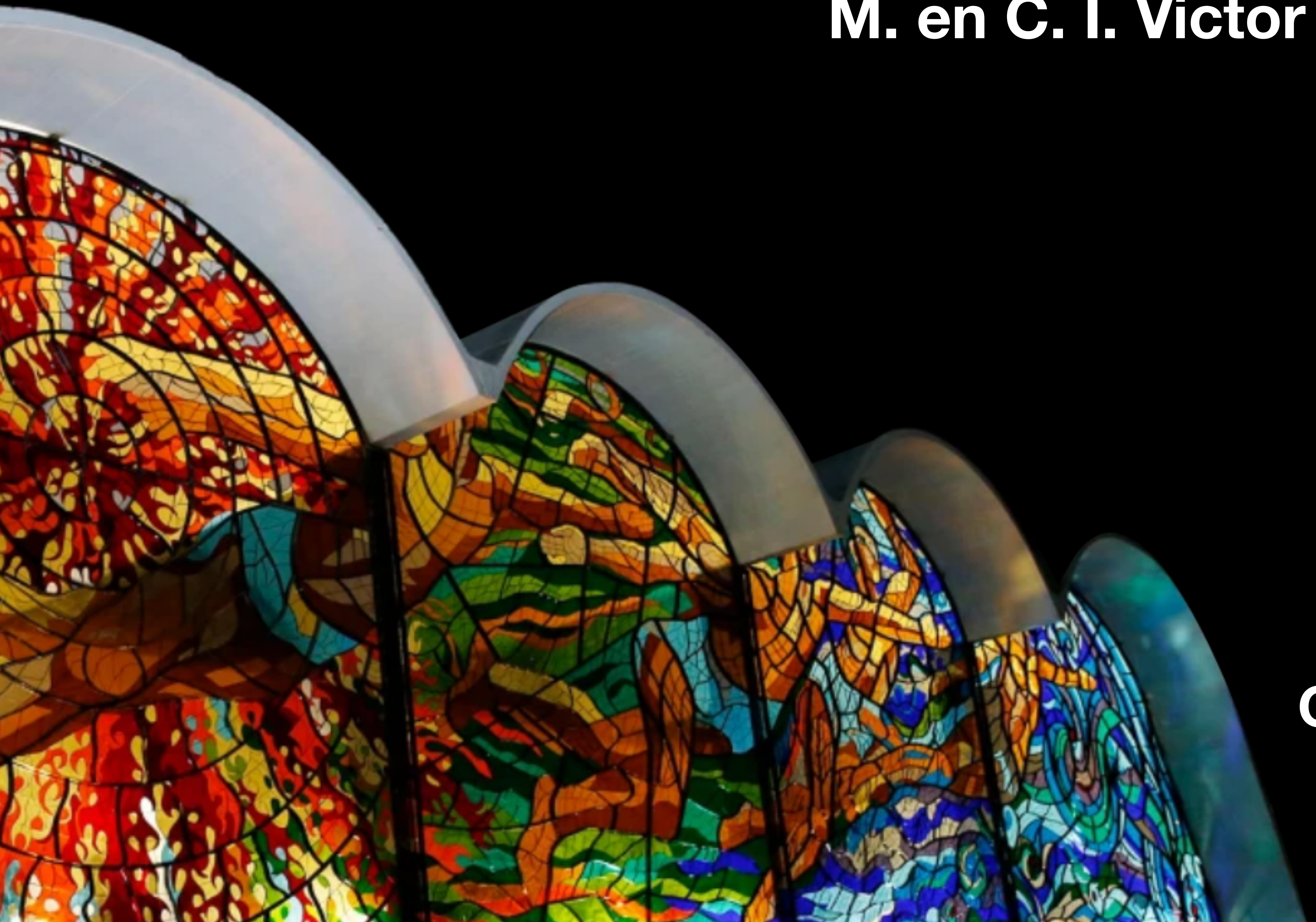
Robótica

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



UNIDAD IV

Cinemática directa e inversa en robots manipuladores

Transformaciones

Uso de los fundamentos matemáticos

- Articulaciones (entrada).
- Elemento terminal (salida).
- Cinemática.
- Restricciones físicas:
- Articulaciones mas comunes:
  - Revolución.
  - Prismática.
- DOF.

Espacios de trabajo

- Directa
  - Se desea conocer la configuración del robot.
  1. Sistema de coordenadas.
  2. Denavit-Hartenberg.
  3. Matrices de transformación.

→ Espacio de las articulaciones

- Indirecta
  - Se conoce la posición.
  - Solución Algebraica o trigonométrica.
  - Matrices inversas

→ Espacio de la tarea

Modelos matemáticos

La salida de uno es la entrada del otro

Modelo Directo

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Espacio de las articulaciones

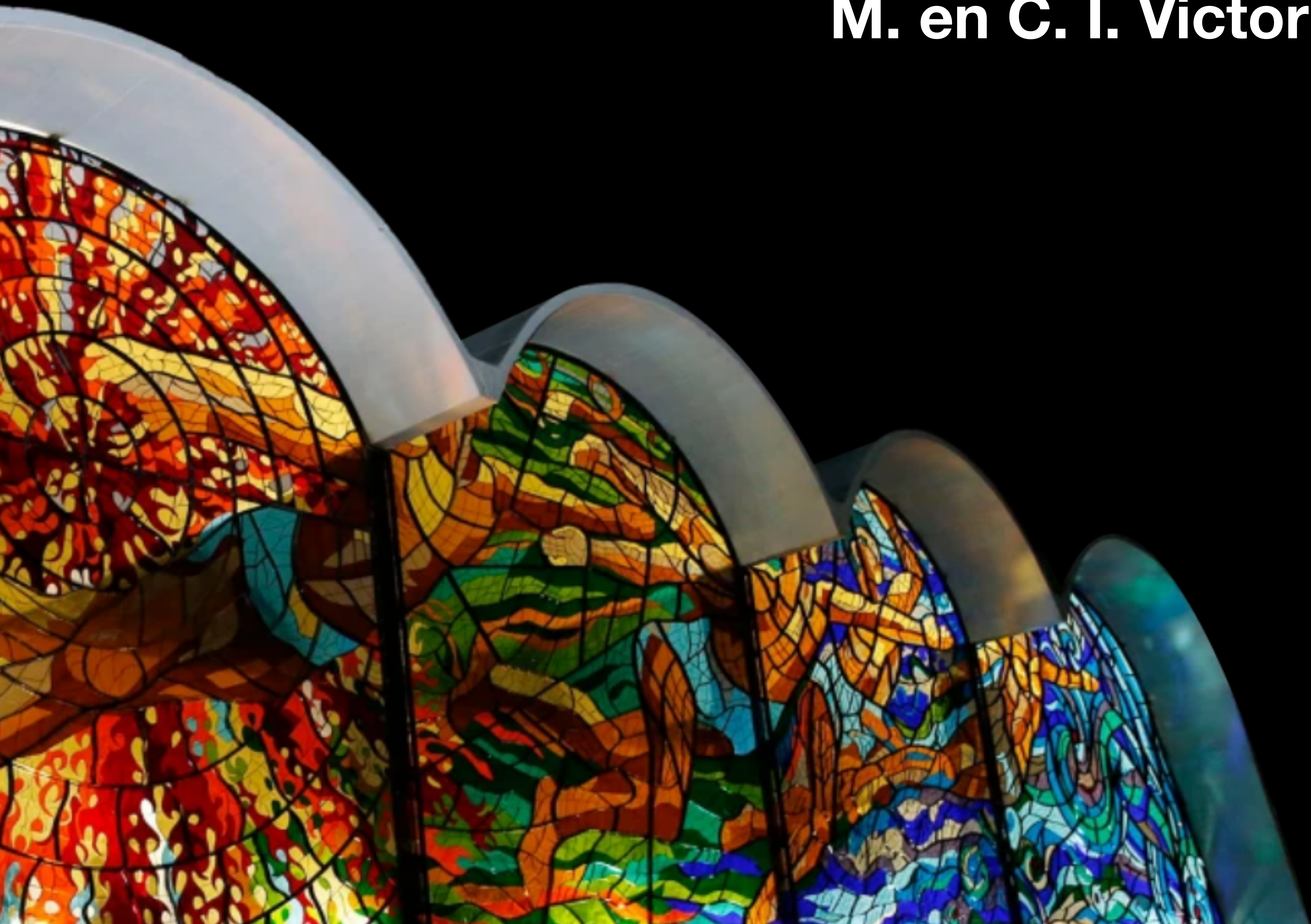
Modelo Inverso

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

Espacio de la tarea

Robótica

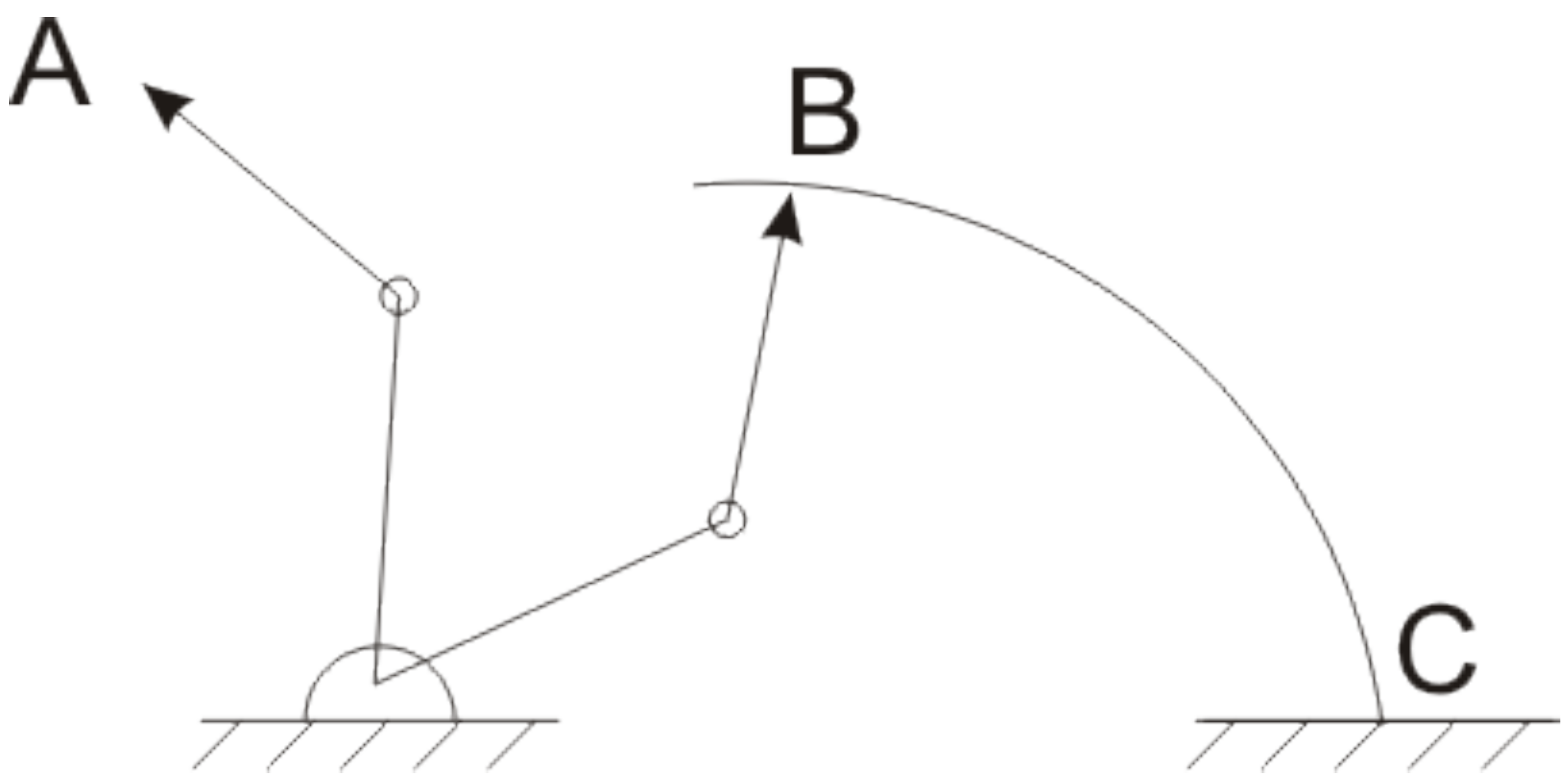
M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



UNIDAD IV
Modelo Directo

Modelo directo

Geométrico MDG

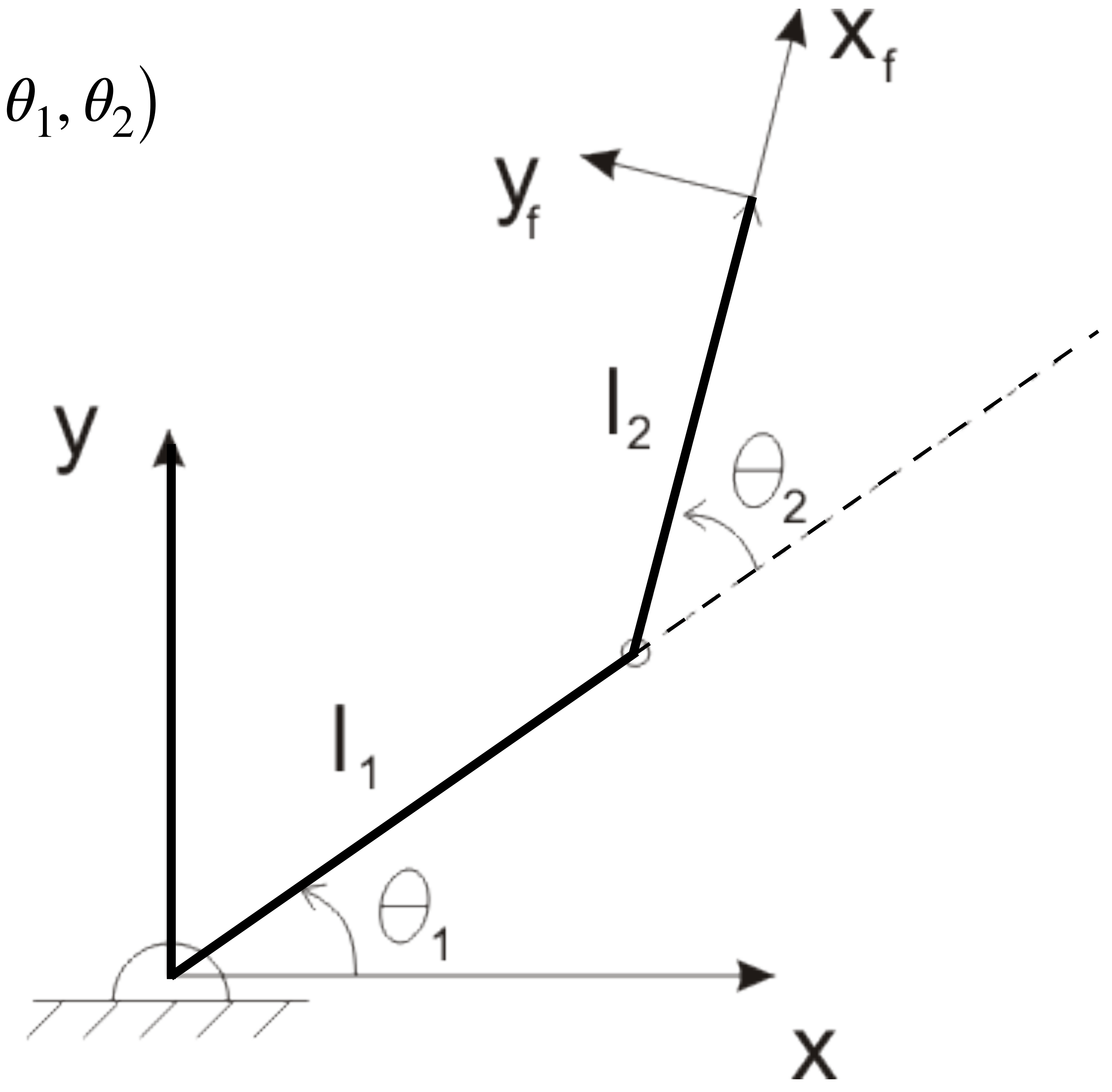


- Se emplean identidades trigonométricas que describen el movimiento del robot.
- Cada robot es diferente
- Se complica con robot de 3 o más DOF.

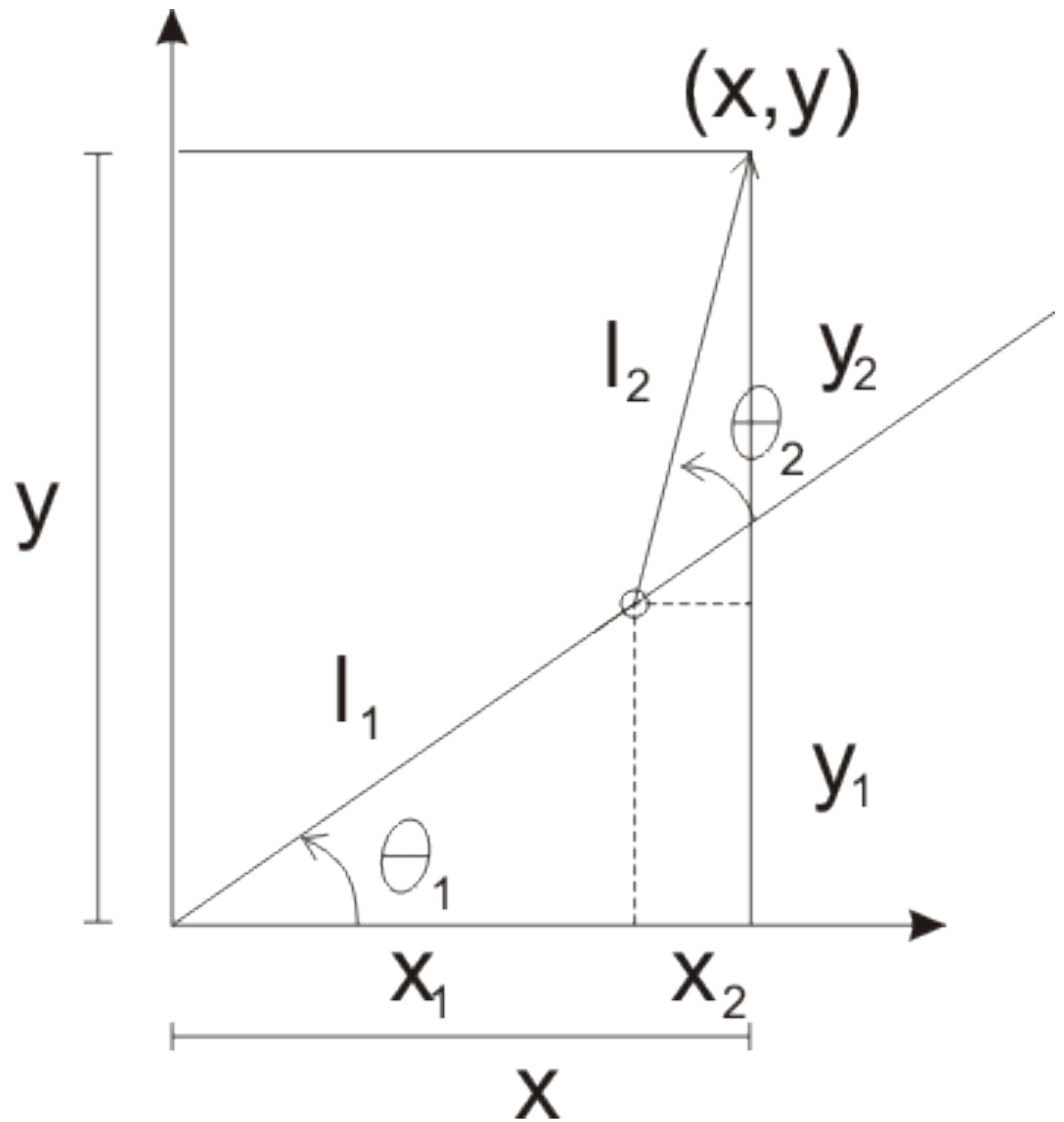
Ejemplo robot planar de 2 DOF

$$(x, y) = F(\theta_1, \theta_2)$$

- Las variables que queremos encontrar son “x” y “y”
- Ambas variables están en función de los ángulos.
- Debemos encontrar las ecuaciones basado en los datos que conocemos.



Ejemplo robot planar de 2 DOF

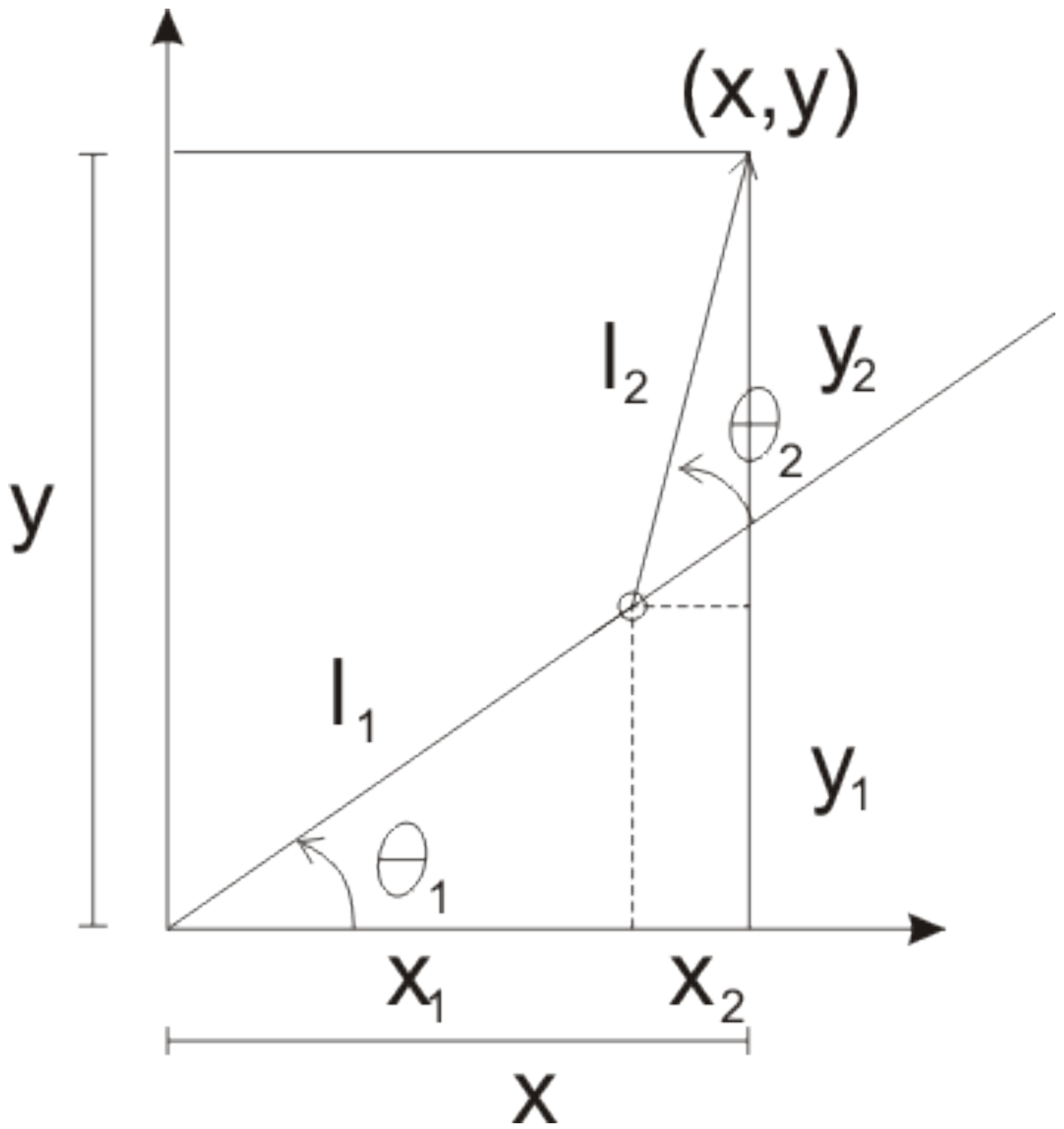


$$x = x_1 + x_2 \qquad cos\theta_1 = \frac{x_1}{l_1} \qquad \cos(\theta_1{+}\theta_2) = \frac{x_2}{l_2}$$

$$x = \ l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_{1+}\theta_2)$$

$$y = y_1 + y_2 \qquad sen\theta_1 = \frac{y_1}{l_1} \qquad \mathrm{sen}(\theta_1{+}\theta_2) = \frac{y_2}{l_2}$$

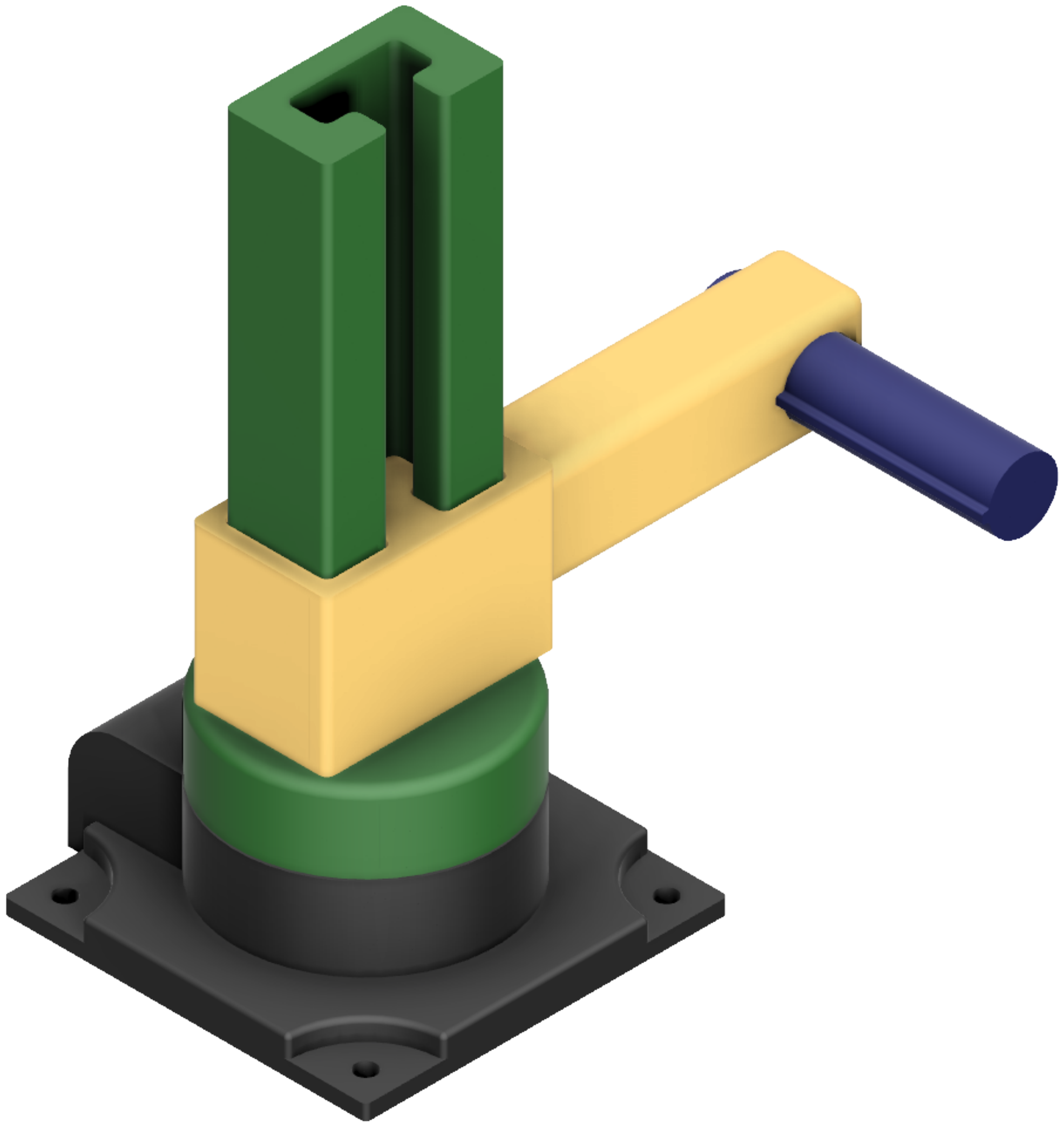
$$y = \ l_1\mathrm{sen}\theta_1 + l_2\mathrm{sen}(\theta_{1+}\theta_2)$$



Ejemplo robot planar de 2 DOF

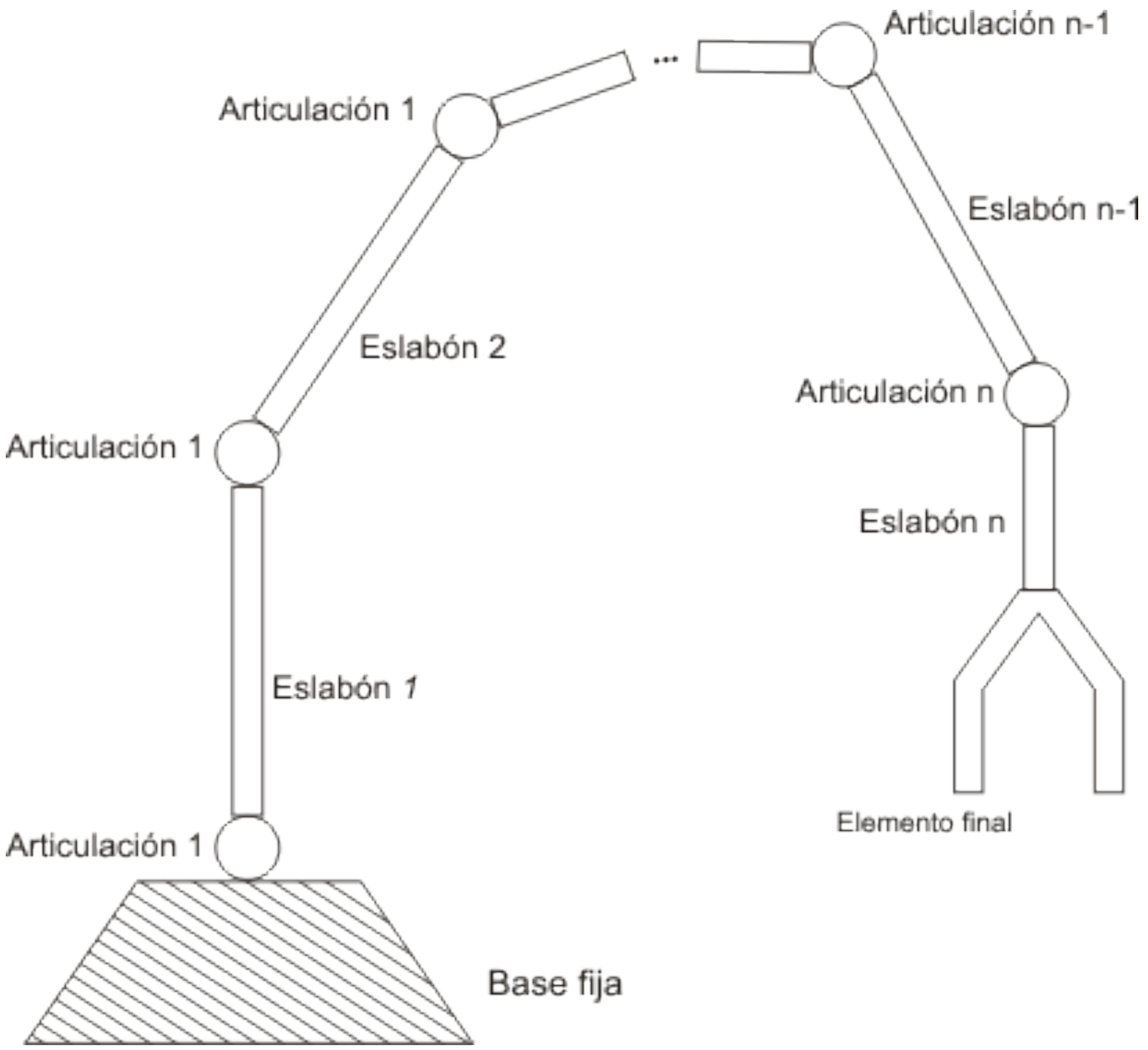
$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

Ejemplo robot cilíndrico de 3 DOF



- El modelo se complica ya que ahora esta en tres ejes.
- ¿No se puede obtener su modelo?
- Algoritmo de DH

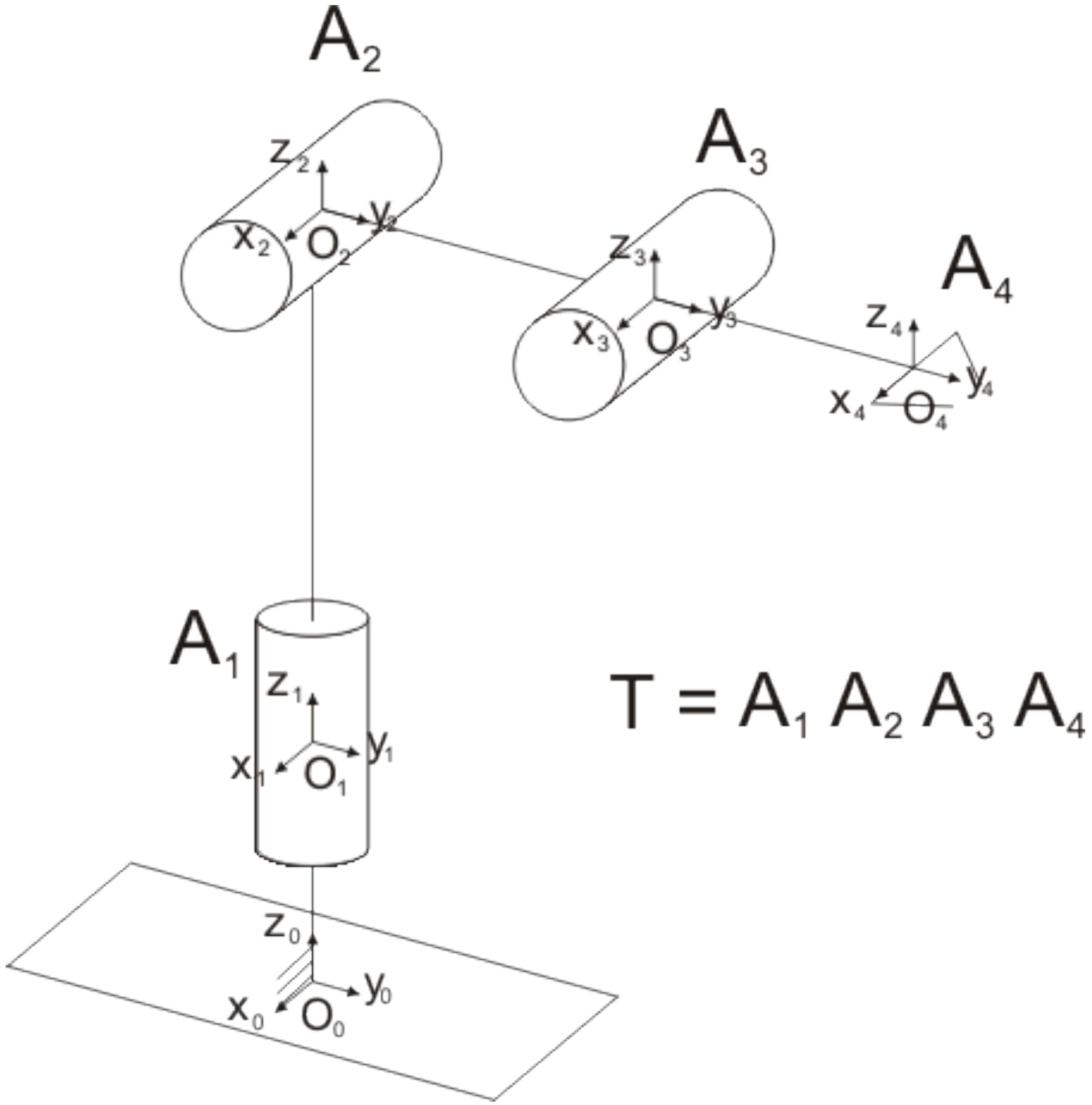
Algoritmo Denavit-Hartenberg



¿Qué conocemos hasta ahora?

- Un manipulador robótico consiste en n eslabones, numerados de 1 a n.
- Los eslabones se conectan por articulaciones que solo tienen un grado de libertad.
- Las articulaciones son numeradas desde 1 hasta n.
- Controlar el elemento final con respecto a la base, es necesario encontrar la relación entre el sistema de coordenadas.
- Solo funciona con robots de lazo abierto.

Algoritmo Denavit-Hartenberg



¿Cómo se aplica el algoritmo?

- Es una serie de pasos ordenados.
- Nos ayudan a establecer sistemas de referencia que representan el movimiento.
- Nos permite encontrar un conjunto de parámetros.
- Podemos saber cuales son las ecuaciones para la posición, pero para la rotación no.
- Usaremos las matrices homogéneas.

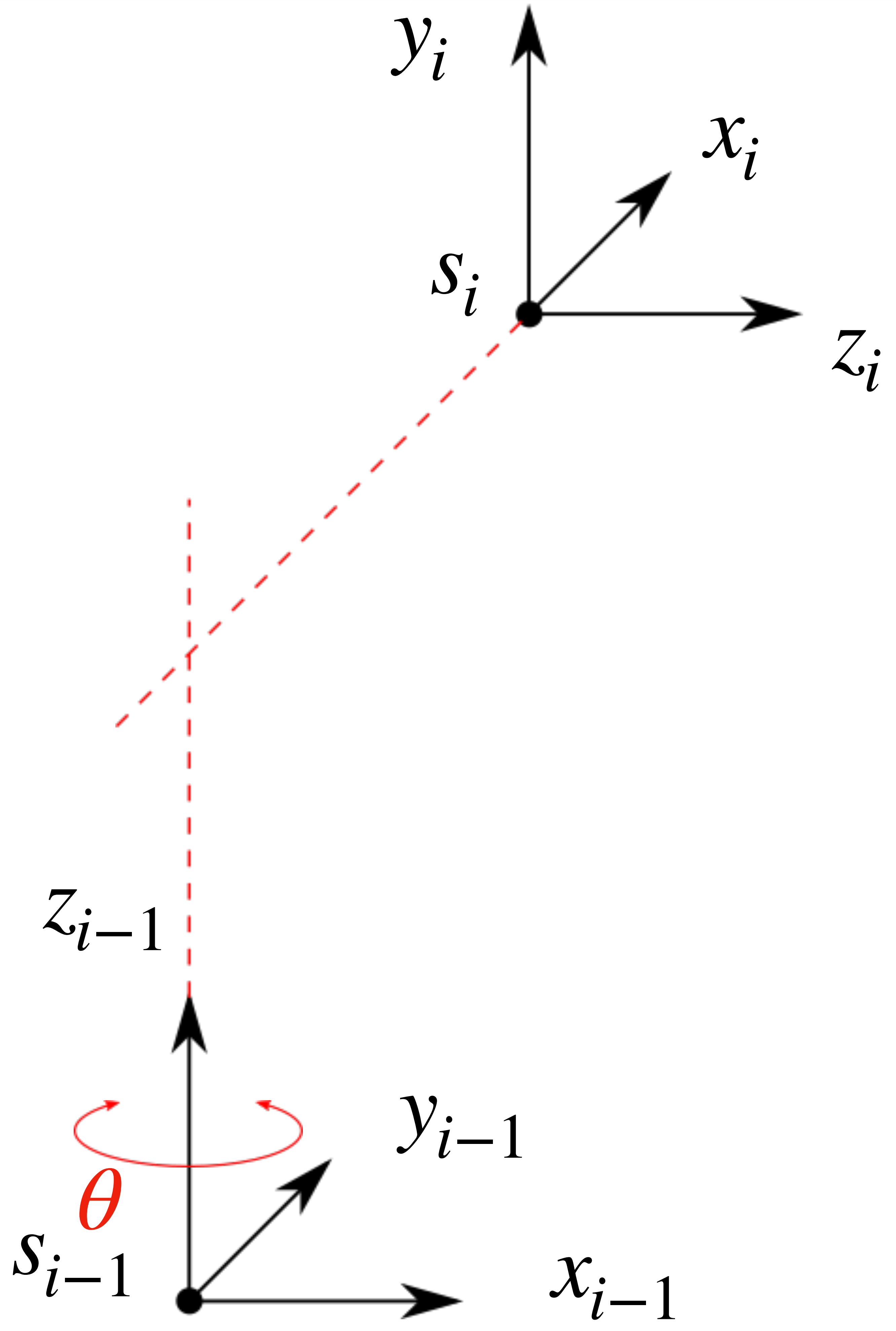
Las matrices homogéneas

- Cada matriz representa el producto de cuatro transformaciones básicas.

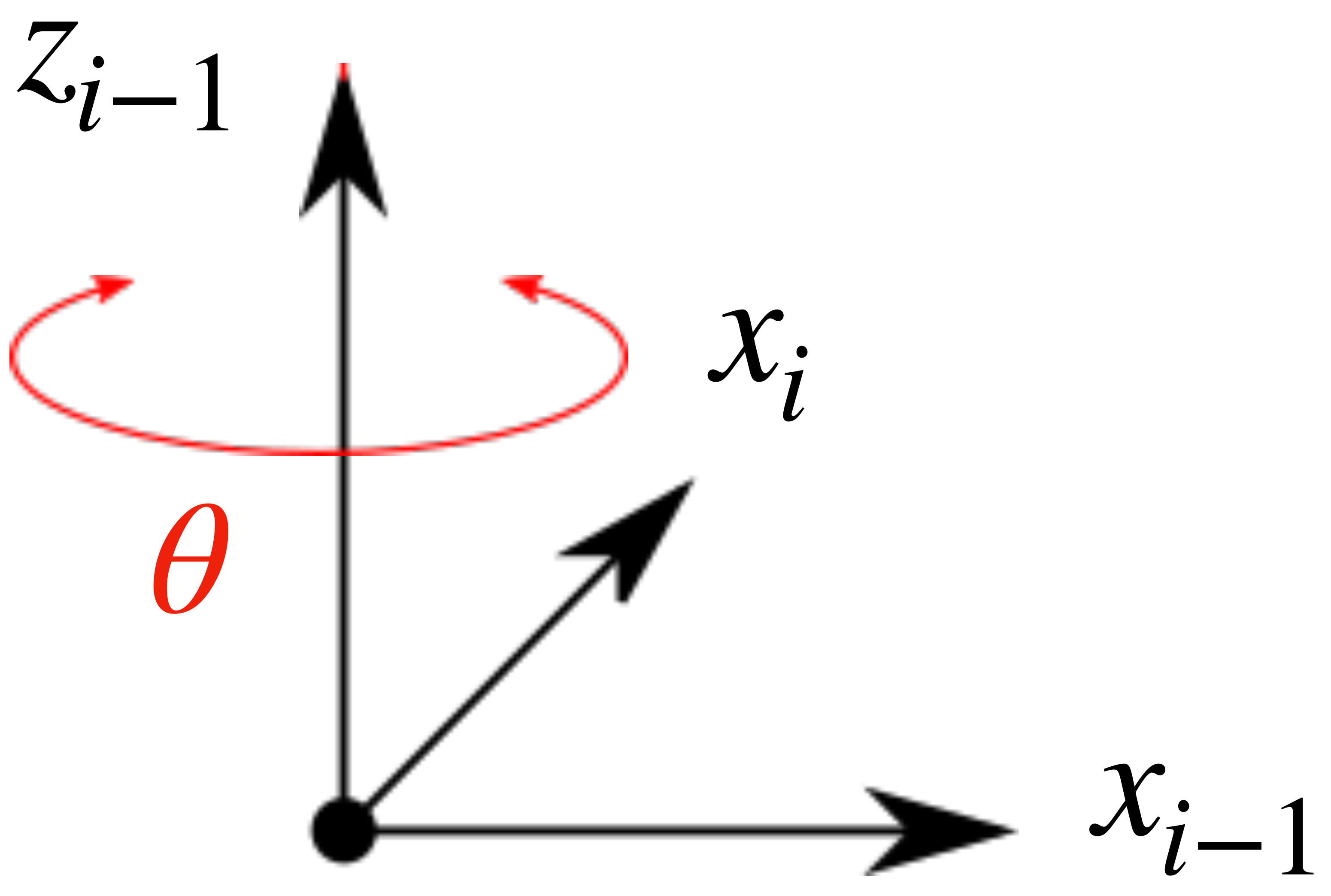
$$A_i = R_{z_{i-1},\theta}, T_{z_{i-1},d}, T_{x_i,a}, R_{x_i,\alpha}$$

$$\begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Parámetros Denavit-Hartenberg

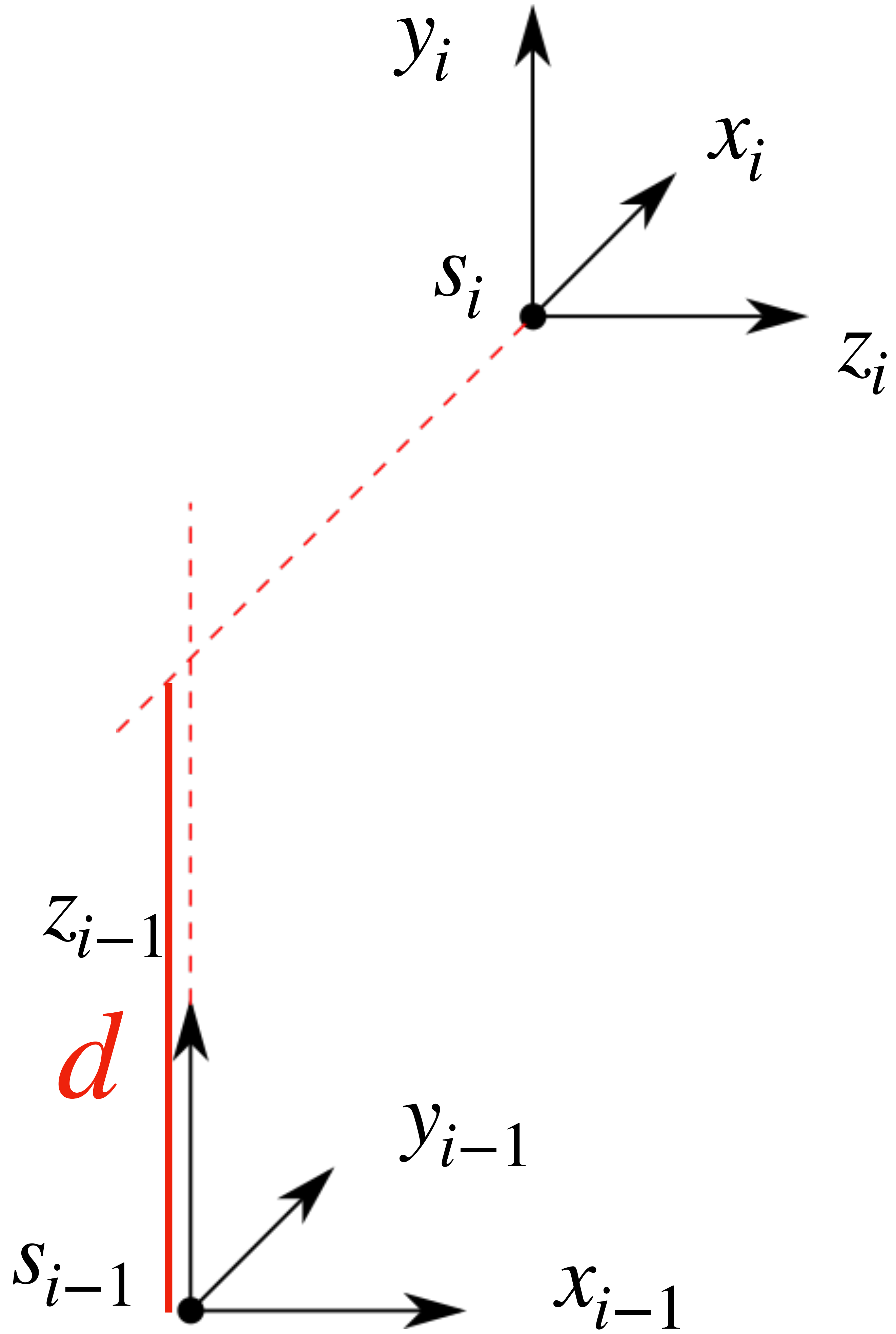


Ángulo θ sobre el eje z_{i-1}



Debemos hacer coincidir el eje x_{i-1} con el eje x_i

Parámetros Denavit-Hartenberg

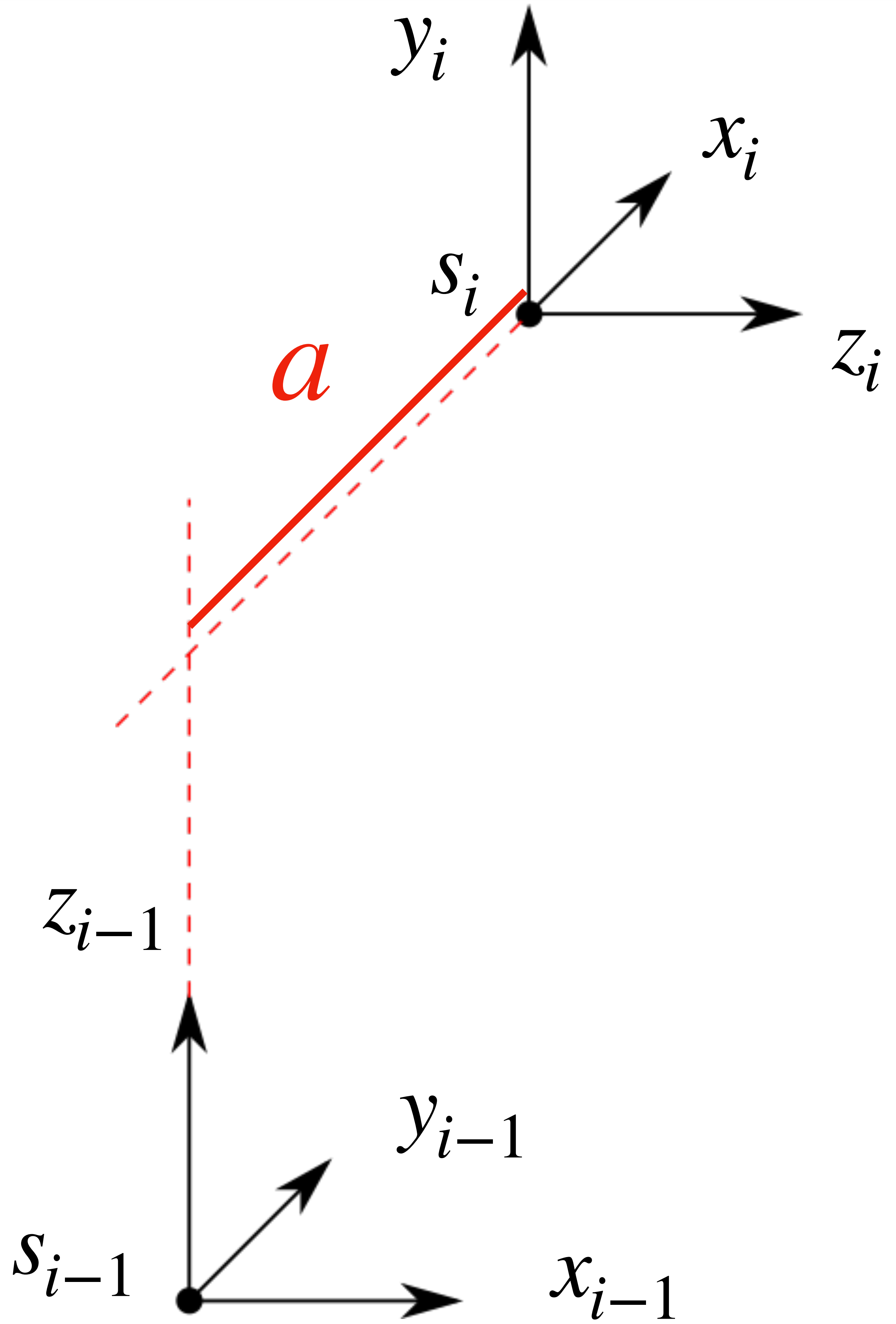


Distancia d sobre el eje z_{i-1}

Debemos hacer coincidir el origen s_{i-1} con el origen s_i

En otras palabras, se pone al mismo nivel

Parámetros Denavit-Hartenberg

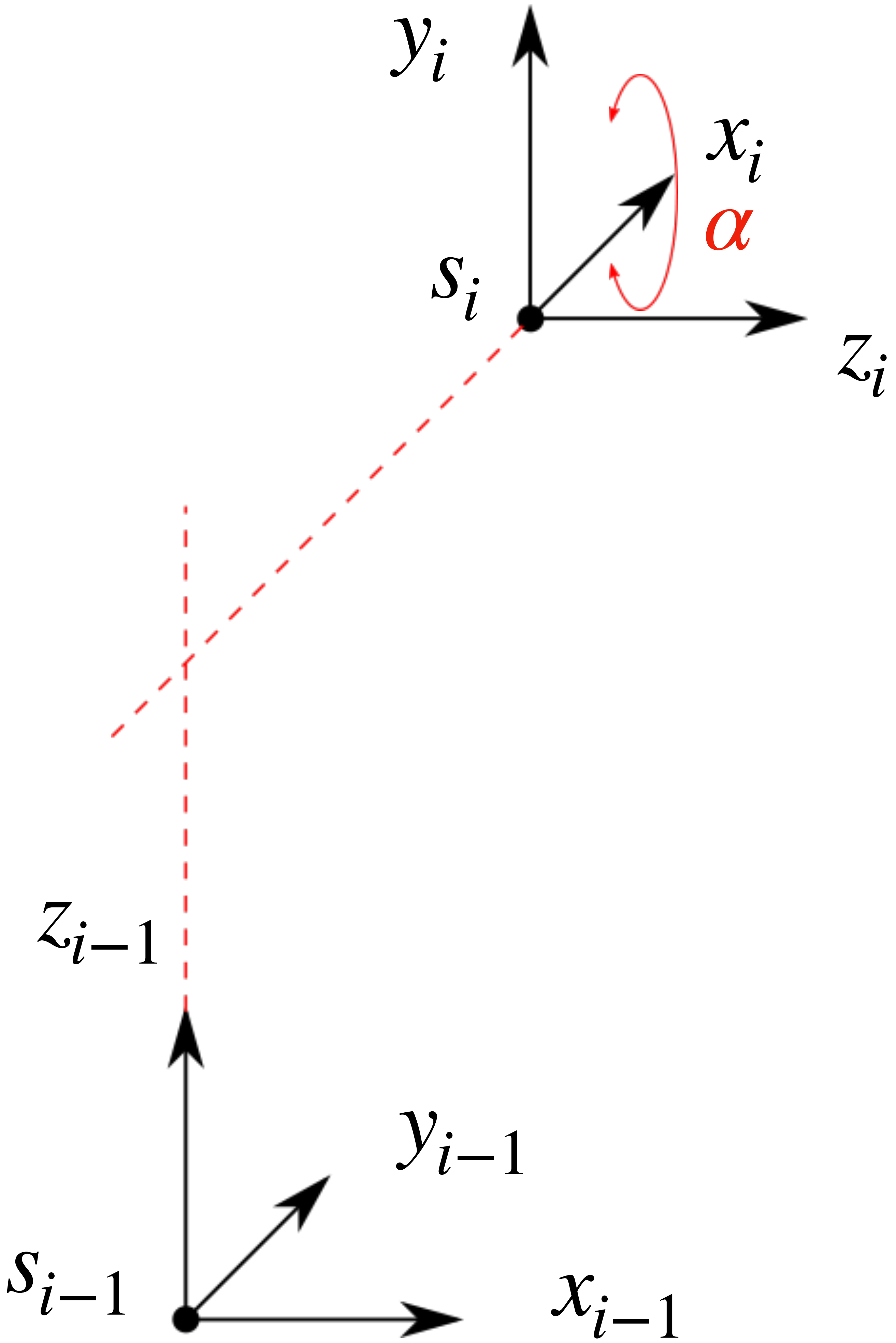


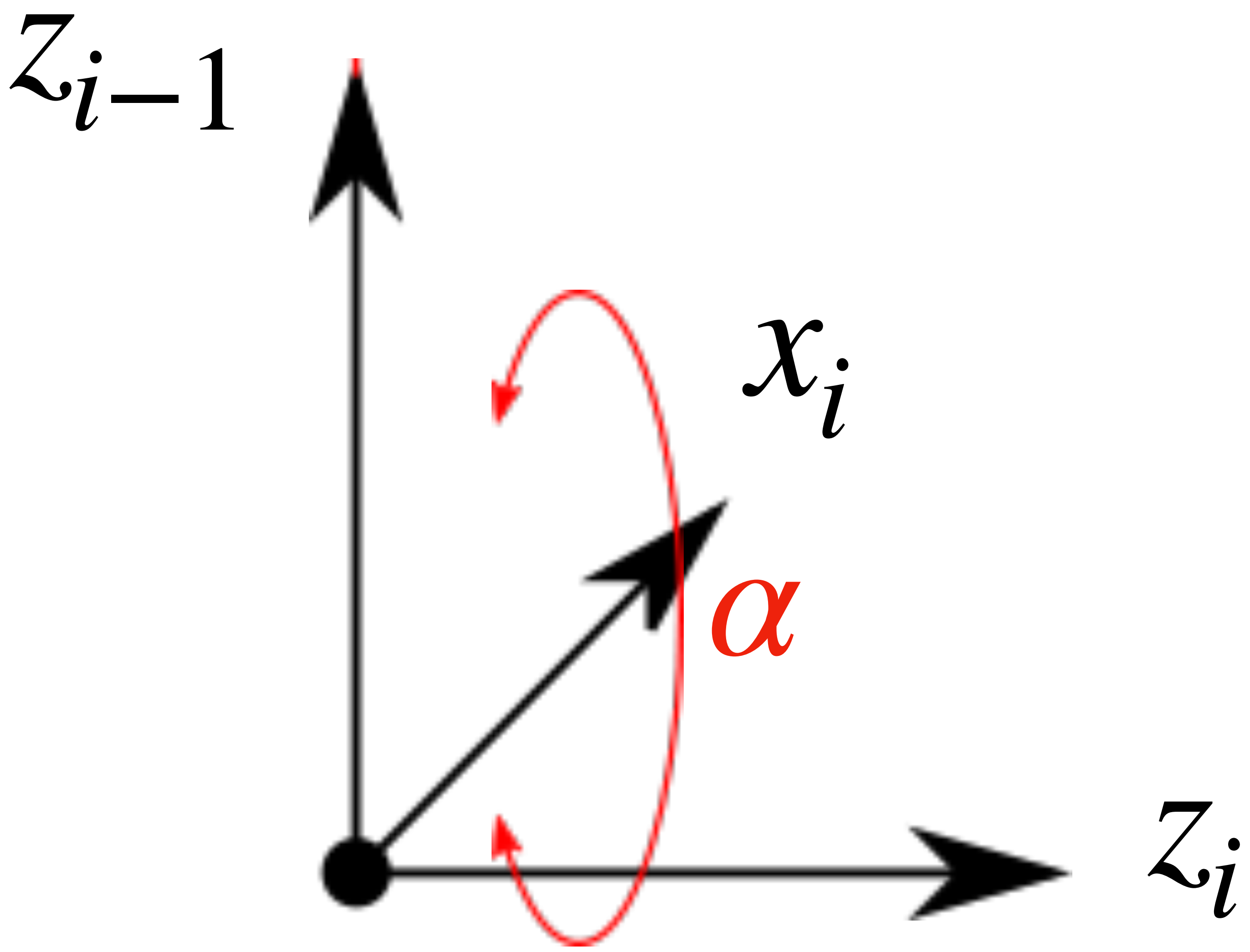
Distancia a sobre el eje x_i

Debemos hacer coincidir el origen s_{i-1} con el origen s_i

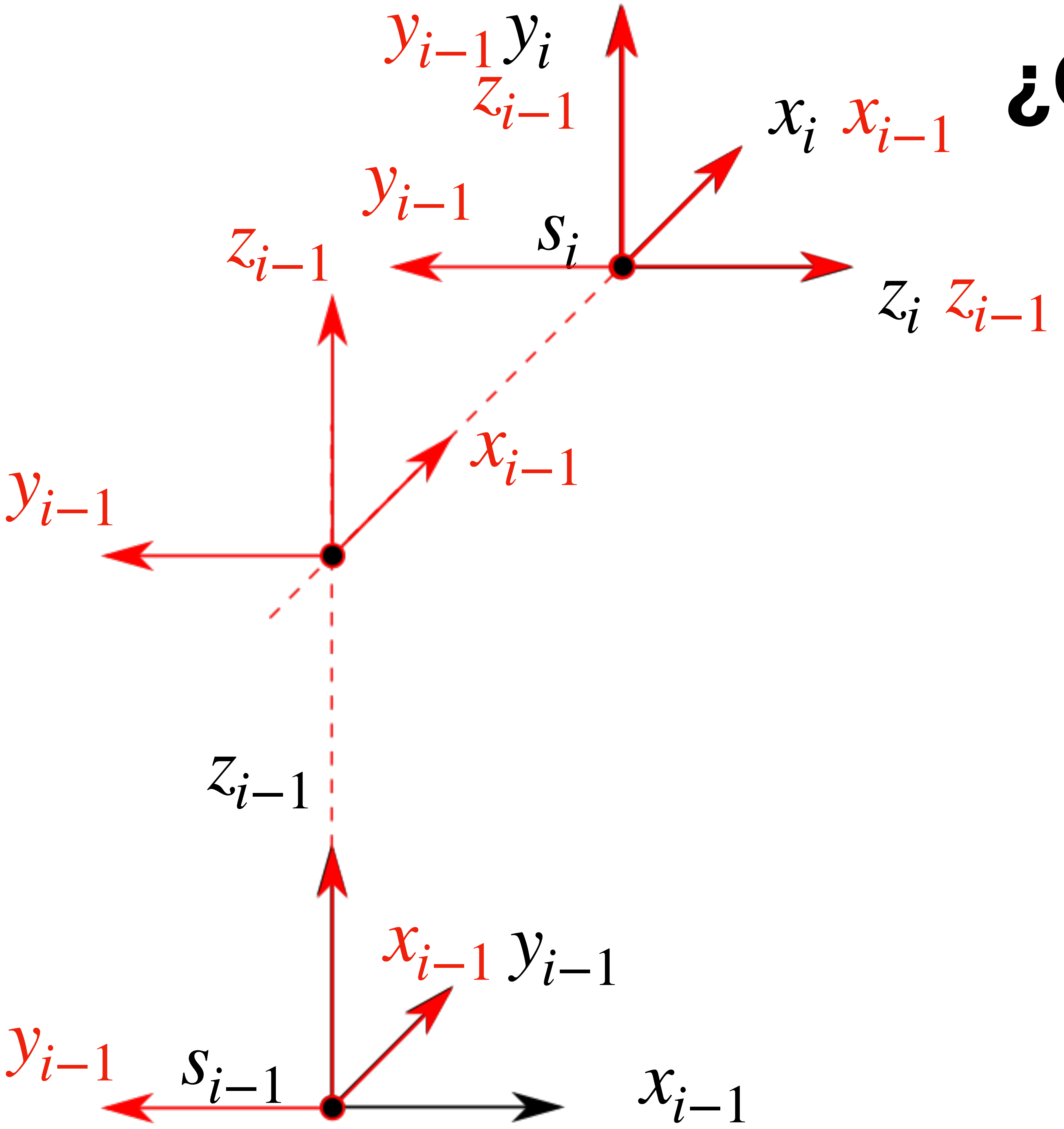
En este caso los orígenes si coinciden

Parámetros Denavit-Hartenberg



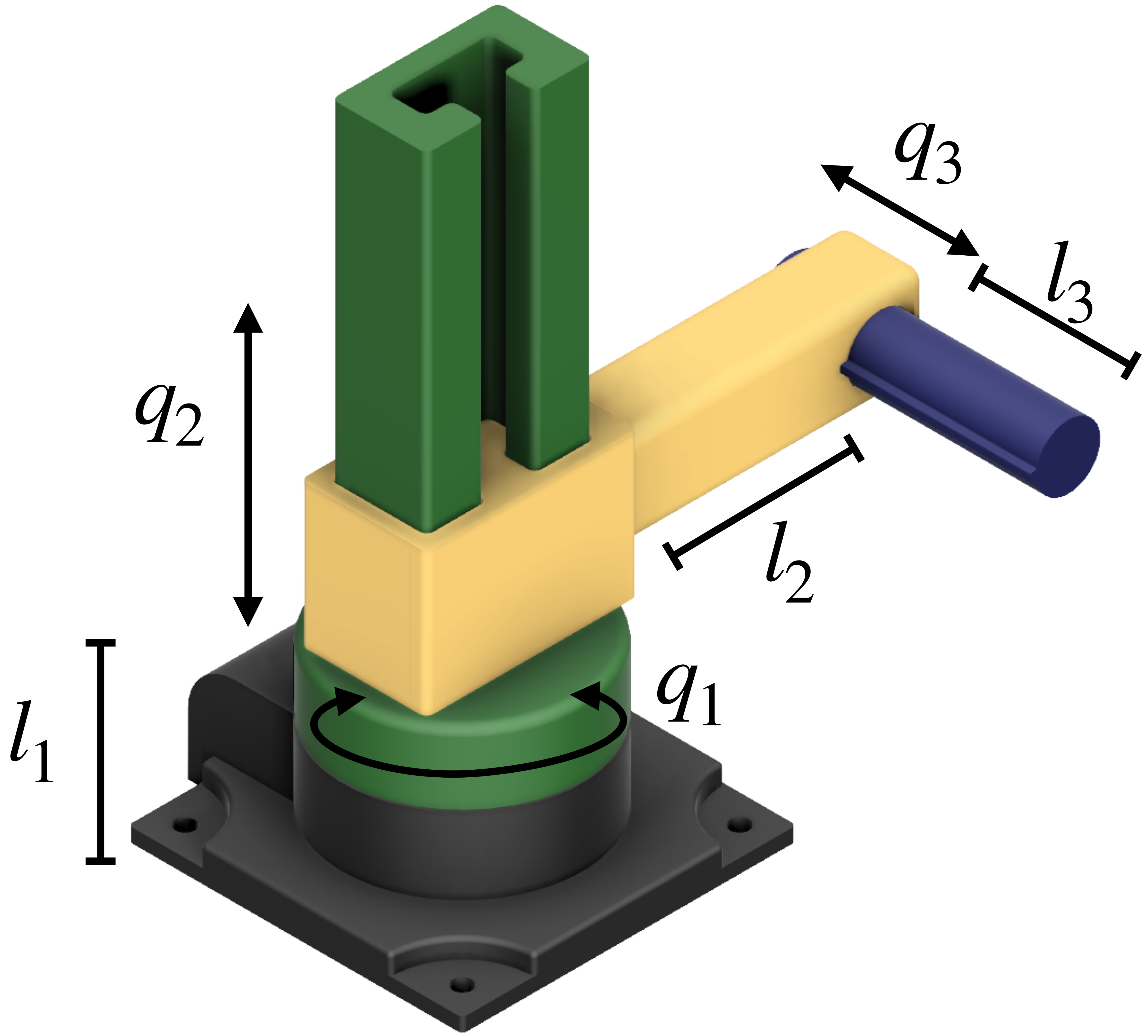


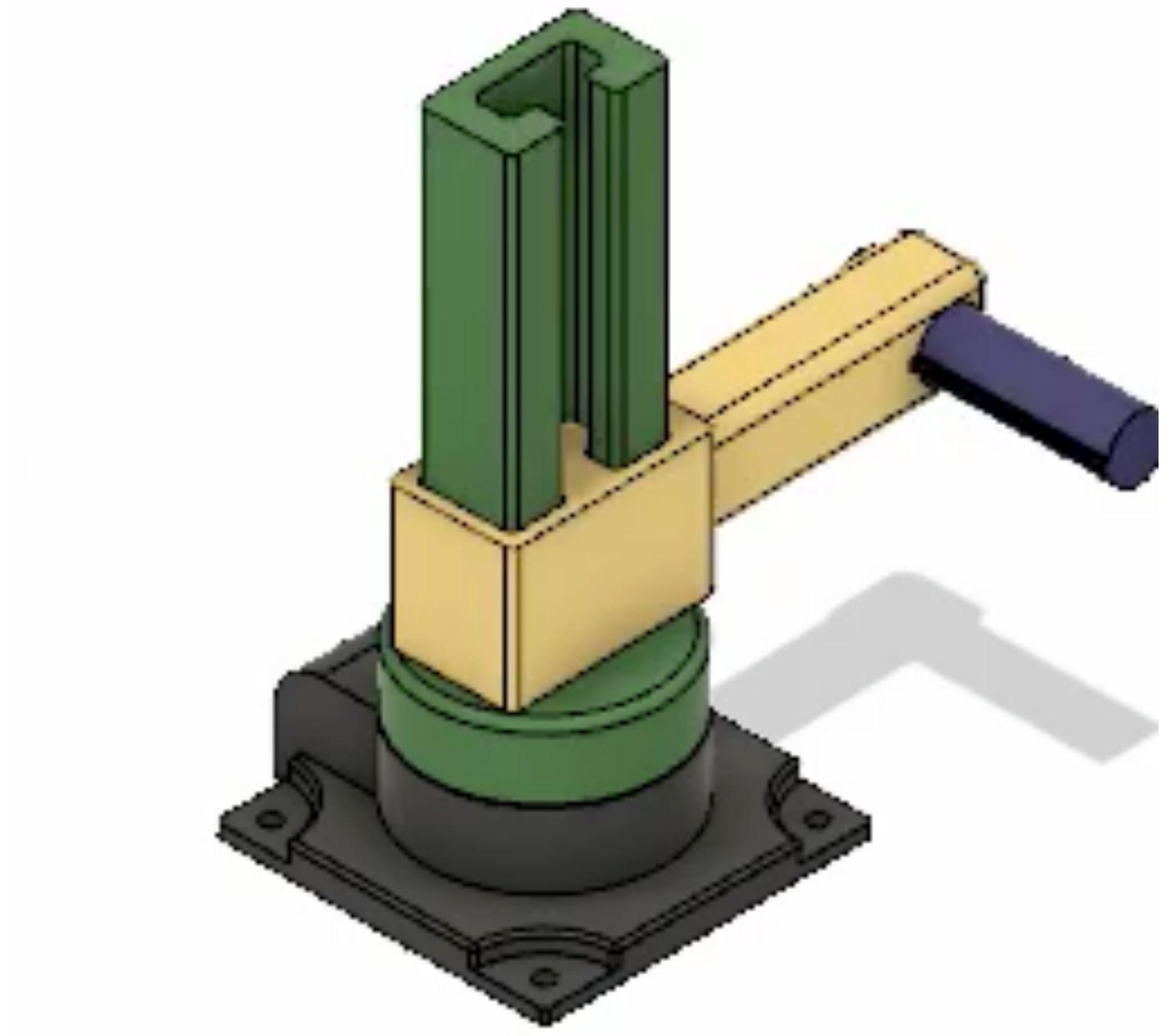
Debemos hacer coincidir el eje x_{i-1} con el eje x_i



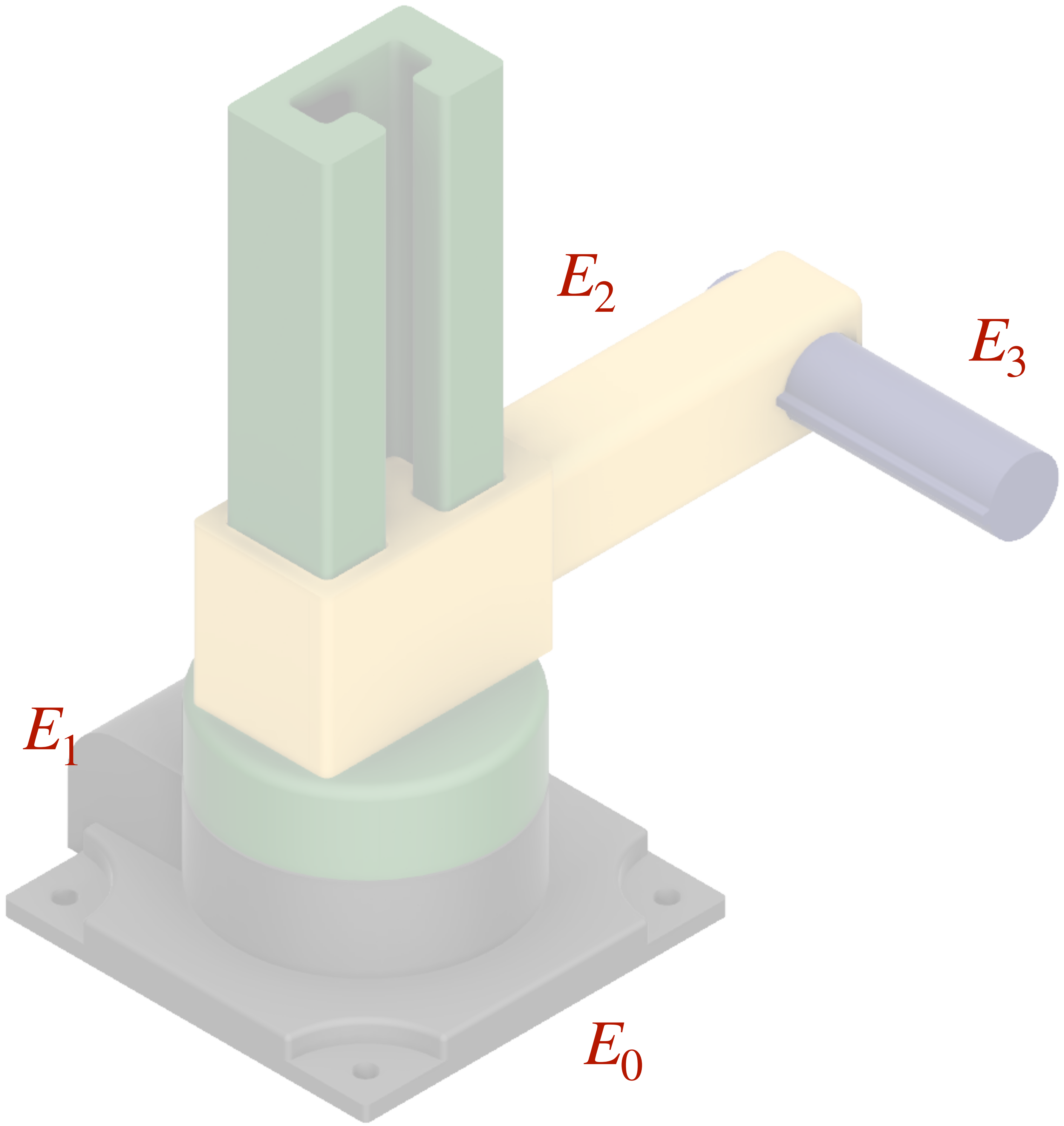
¿Qué pasa cuándo aplicamos las matrices?

Identificar las constantes y variables



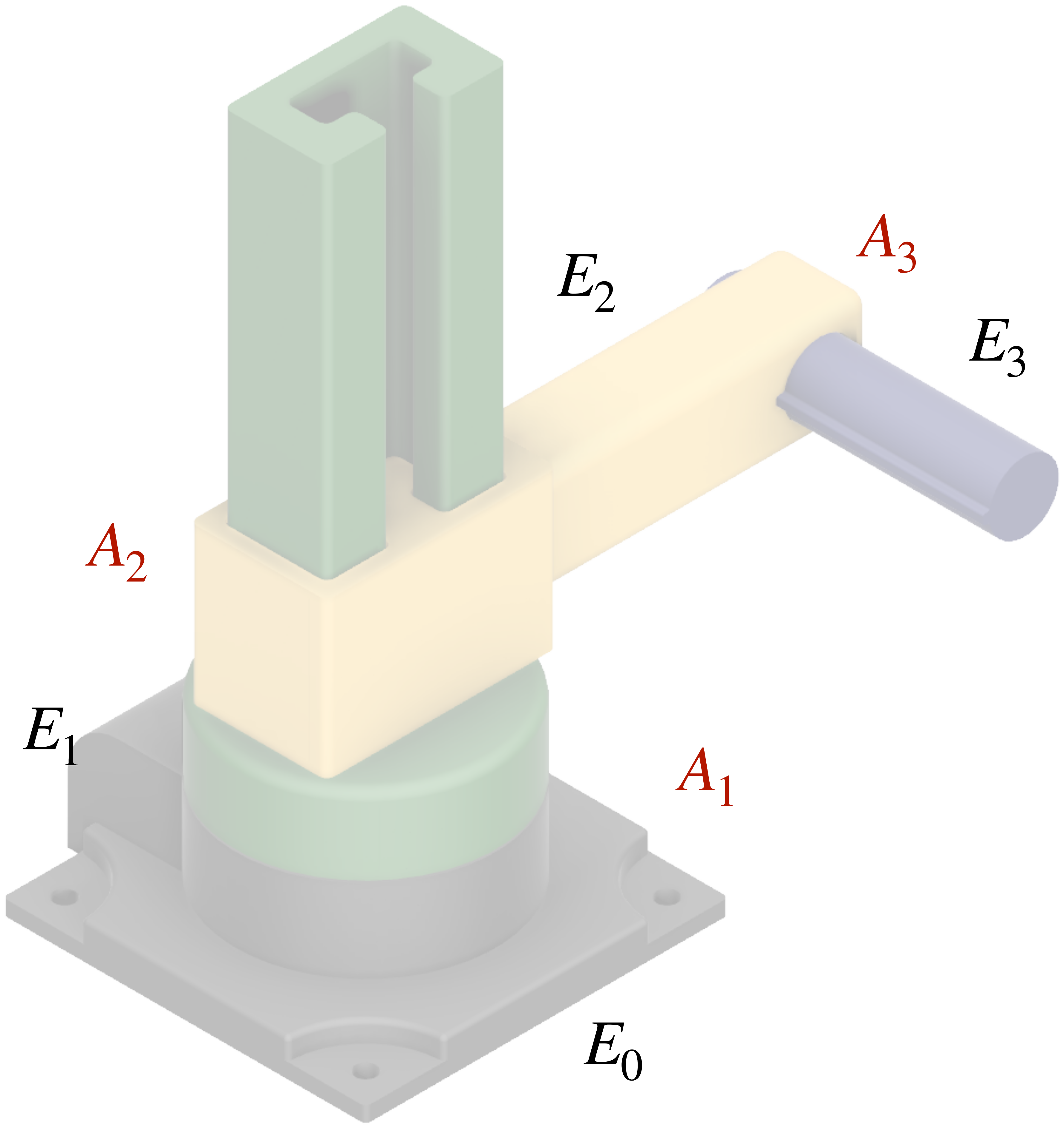


Algoritmo Denavit-Hartenberg



Numerar los eslabones

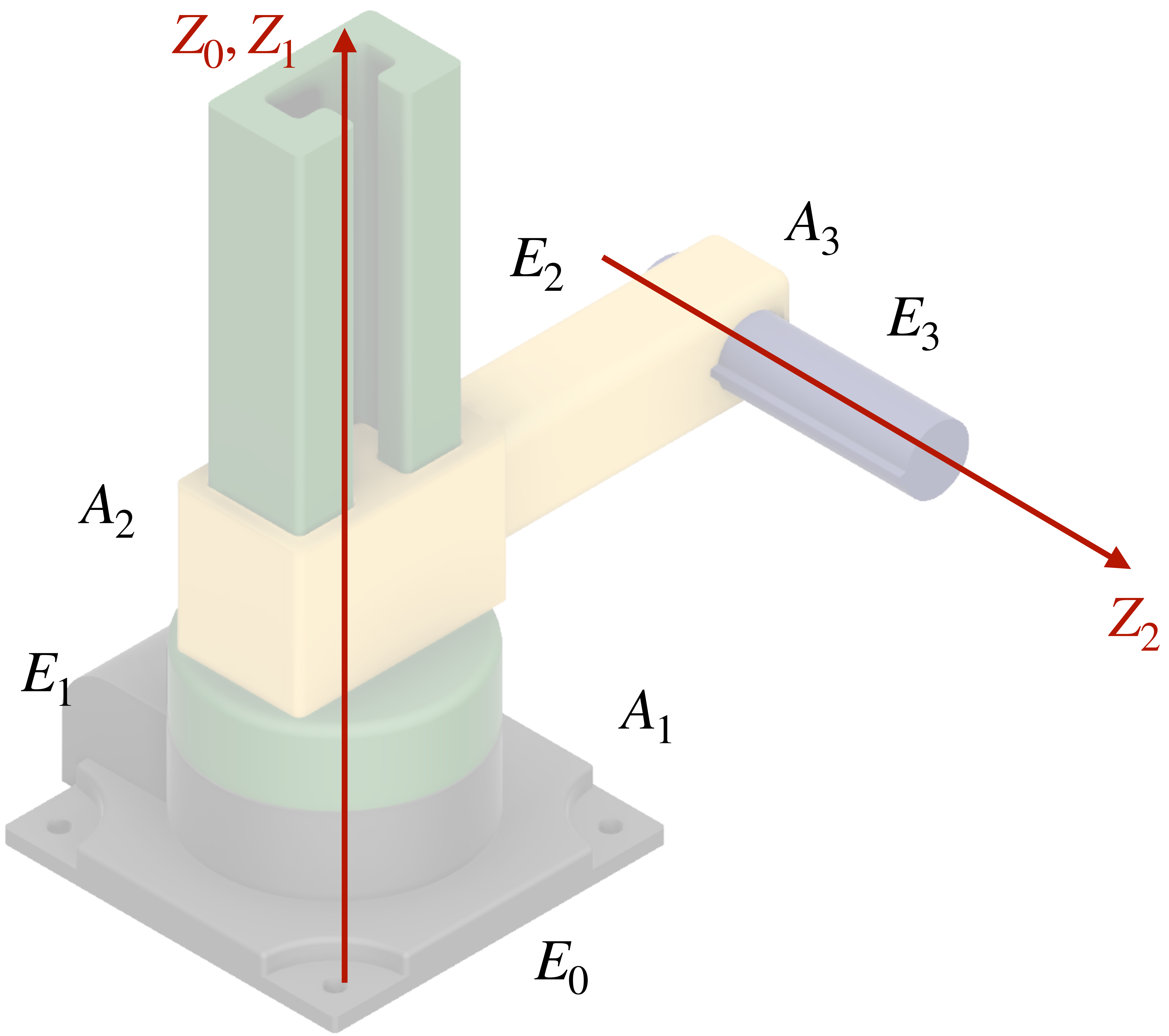
- Comenzando con 1 (primer eslabón móvil) y terminando con n (último eslabón móvil).
- Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.



Numerar las articulaciones

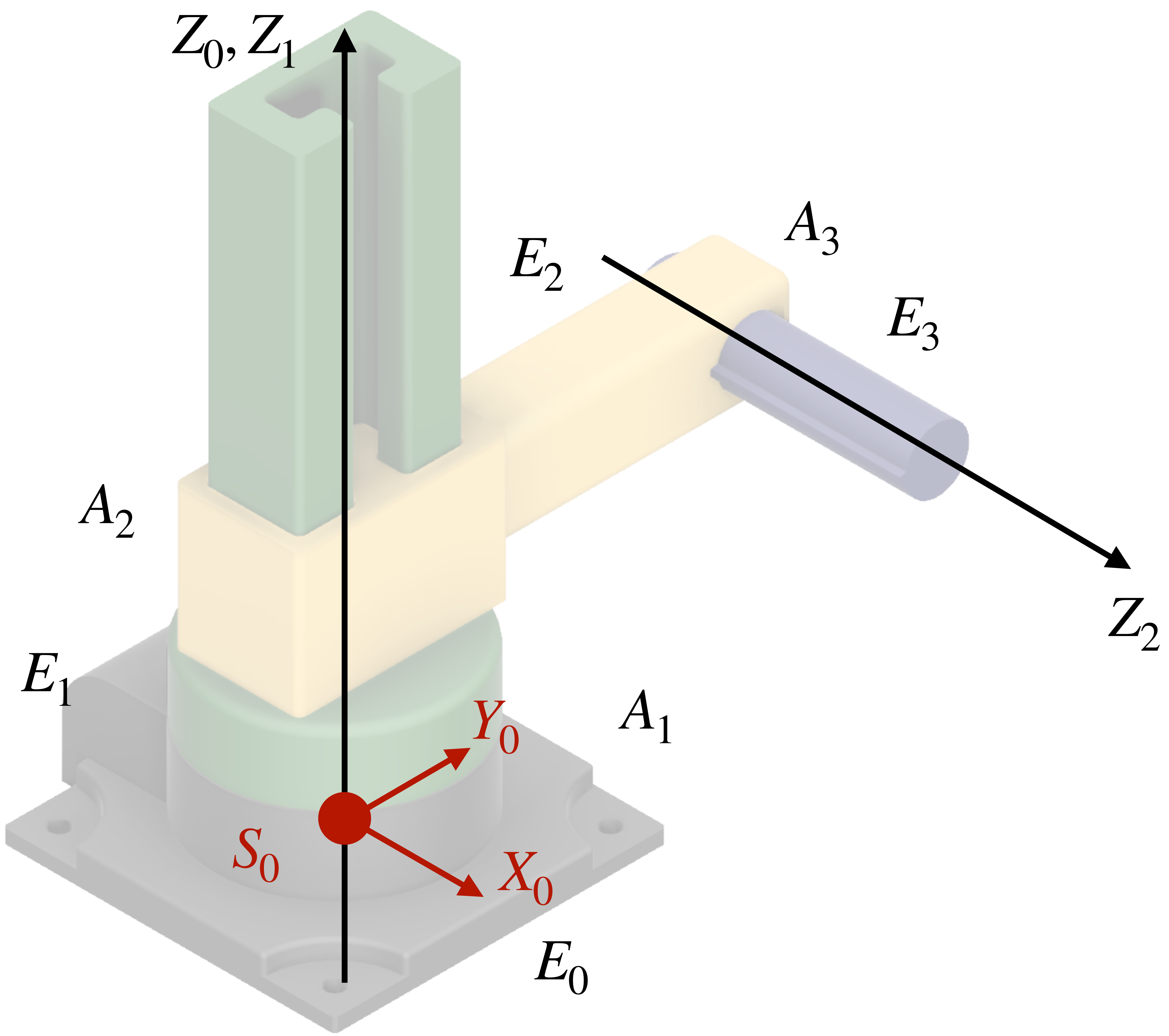
- Comenzando en 1 (correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n.
- No hay articulación 0.

Algoritmo Denavit-Hartenberg



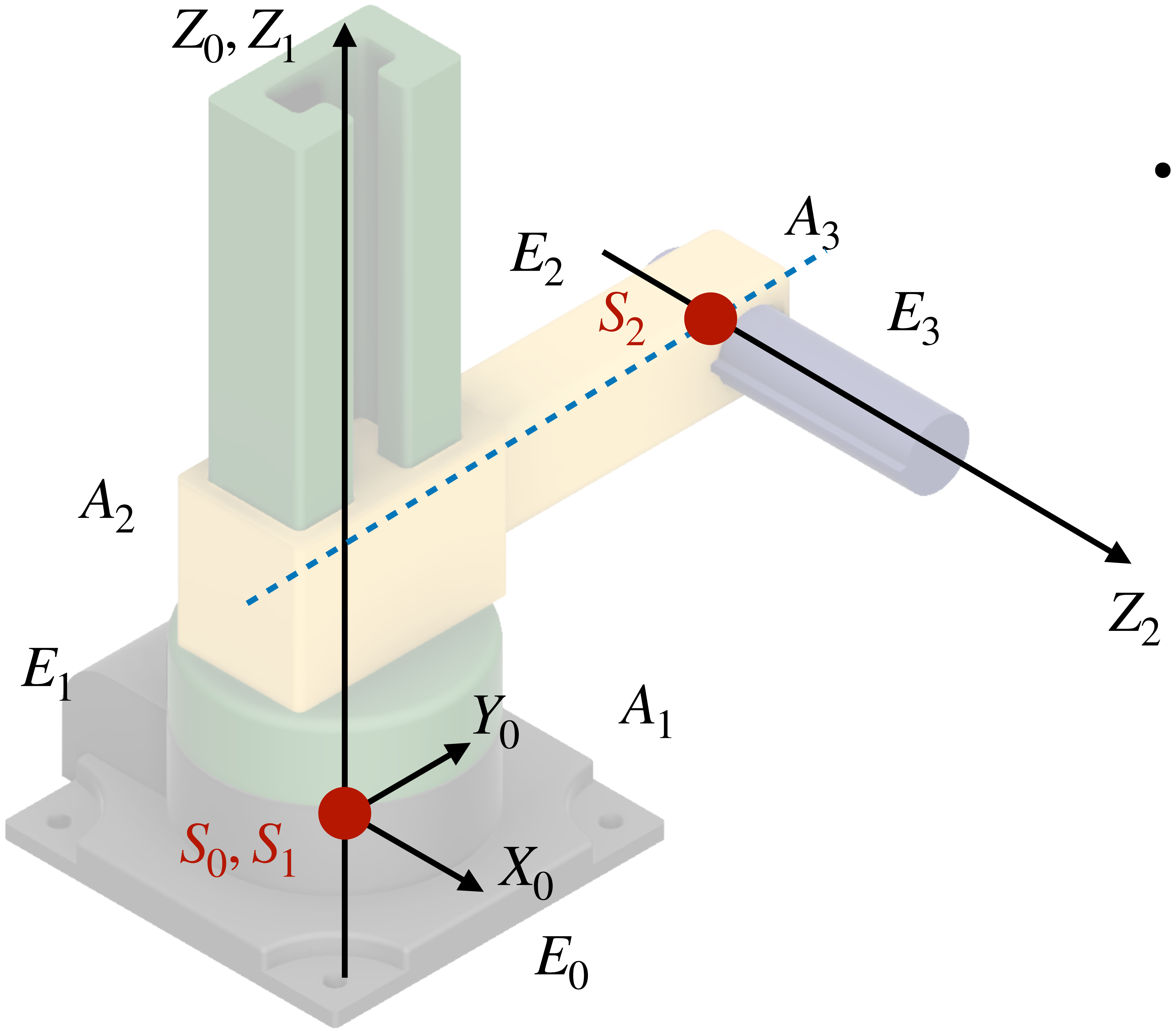
Establecer los ejes Z

- Localizar enumerar los ejes de la articulaciones $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$.
  - Si es de rotación, el eje Z esta sobre el eje de rotación.
  - Si es prismática, el eje Z será a lo largo del desplazamiento.
  - Para i=1 hasta n situar el eje Z_{i-1} sobre articulación i



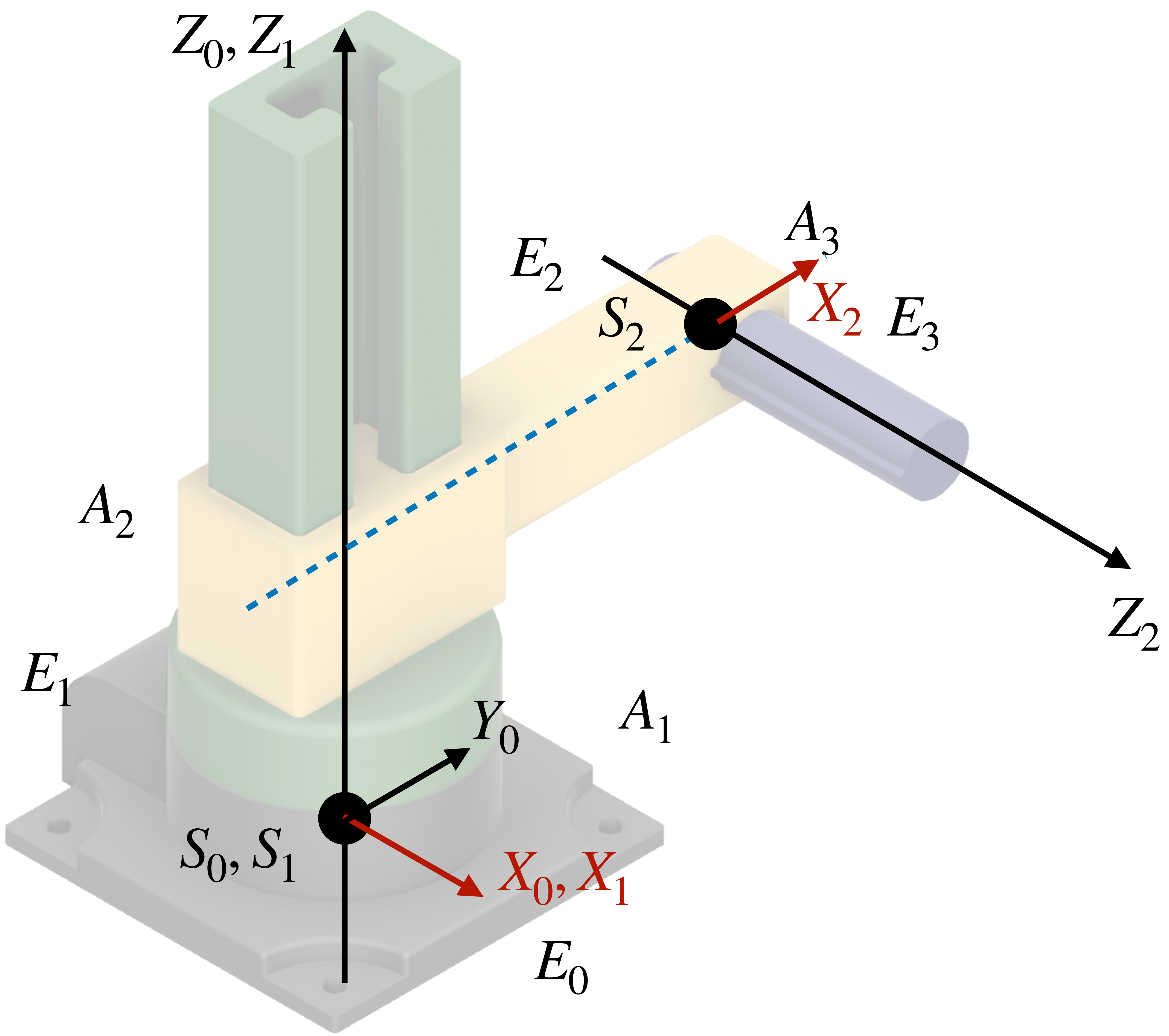
Sistema de referencia 0

- Establecer el sistema de referencia inercial o fijo.
  - Fijar el origen en cualquier punto del eje Z_0.
  - Los eje X_0 Y_0 son elegidos de acuerdo con la convención de la mano derecha.



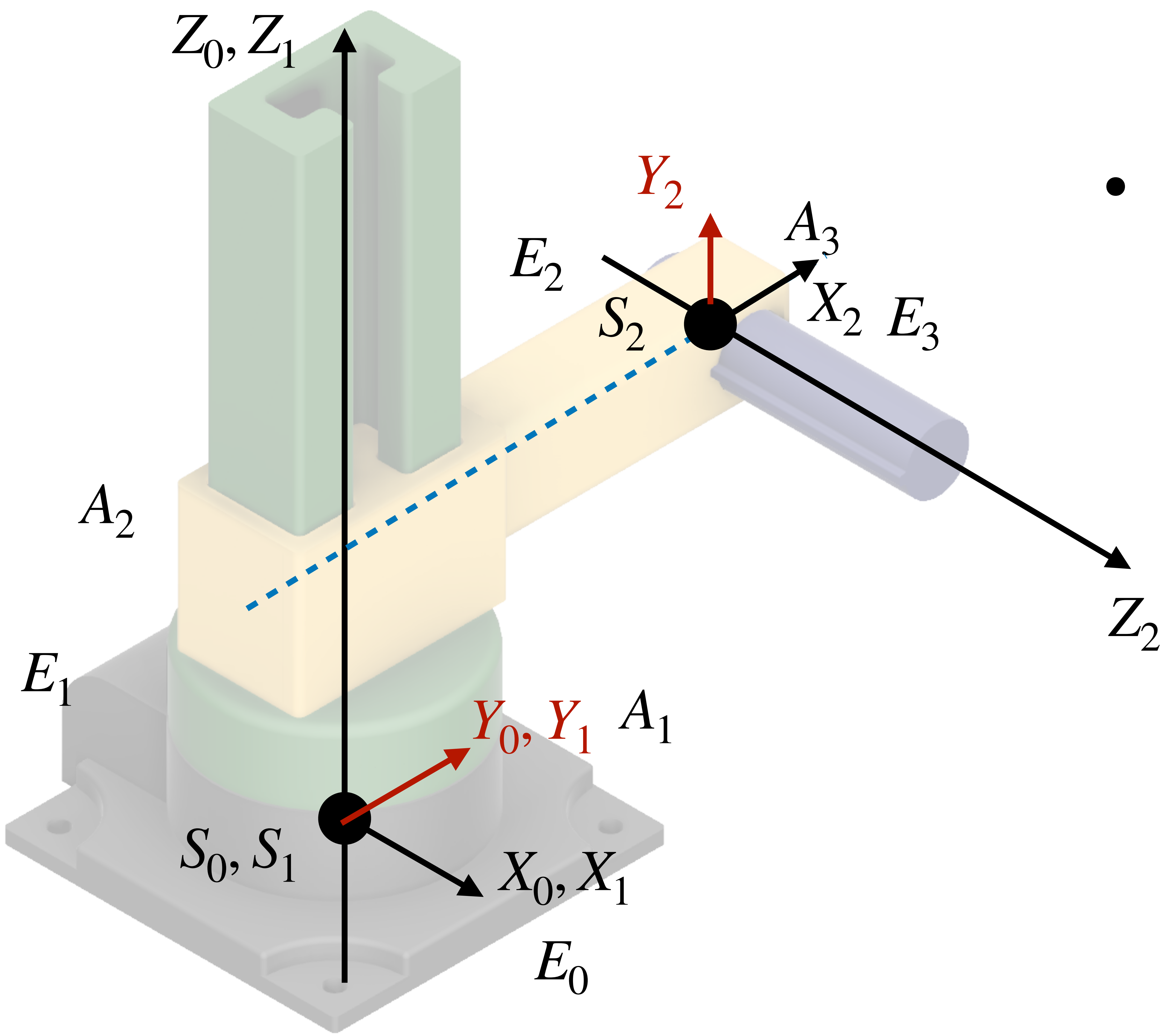
Localizar los demás orígenes

- Para i de 1 a n-1, localizar el O_i.
  - Si Z_i intersecta Z_{i-1}, colocar O_i en la intersección.
  - Si Z_i y Z_{i-1} son paralelos, localice O_i en cualquier lugar a lo largo del eje Z_i.
  - Si Z_i y Z_{i-1} son no coplanares existe un único segmento que es perpendicular a ambos, que define la dirección de X_i, O_i se localiza donde intersecta X_i con Z_i.



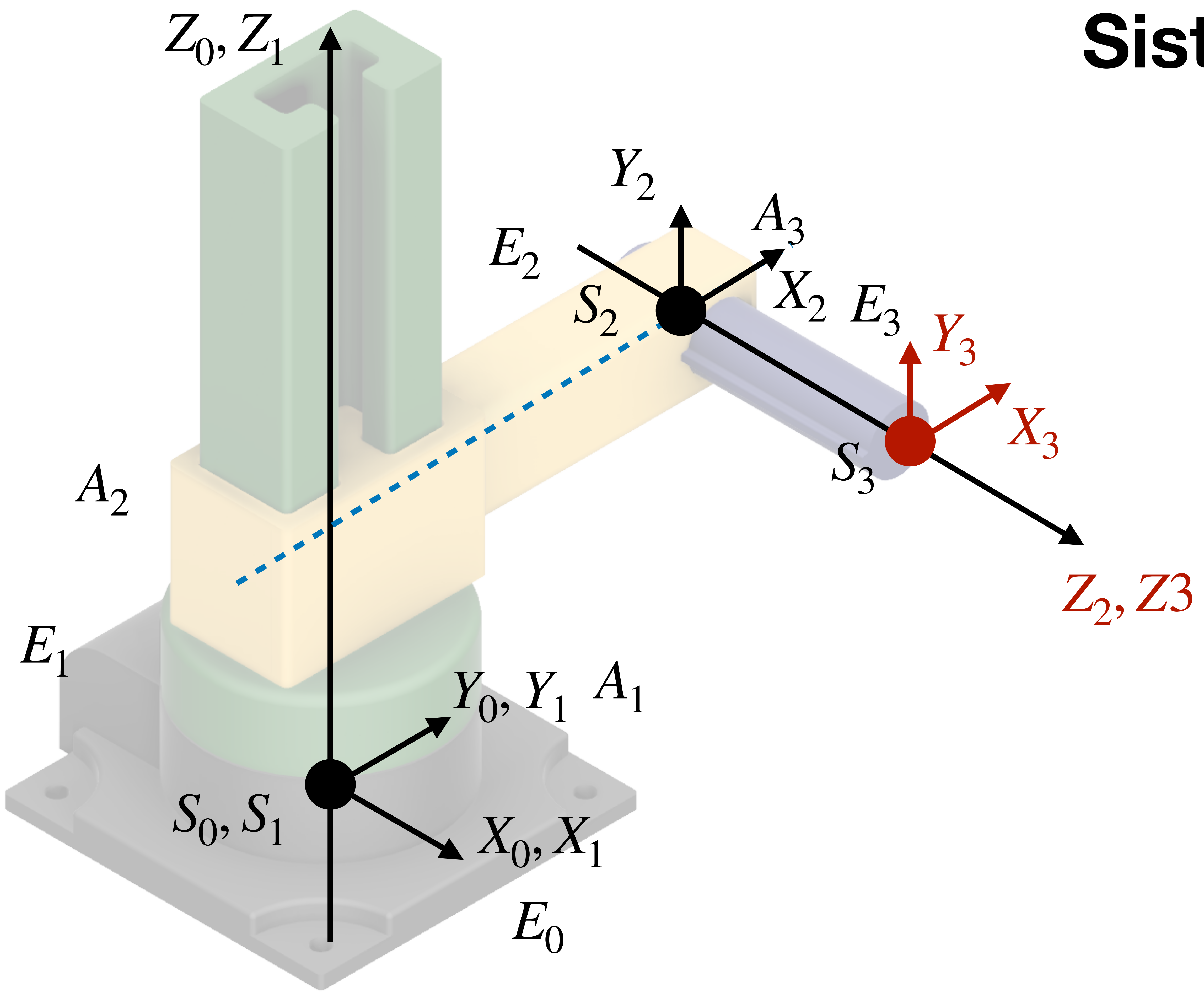
Establecer los ejes X

- Para establecer el eje X_i.
  - Si Z_{i-1} y Z_i son paralelos, X_i es ortogonal a Z_{i-1} y pasa por O_i.
  - Si Z_{i-1} y Z_i se intersectan, el eje X_i va en dirección del vector normal al plano formado por Z_{i-1} y Z_i.
  - Si Z_{i-1} y Z_i son no coplanares existe un único segmento que es perpendicular a ambos, que define la dirección de X_i



Ahora los ejes Y

- Establecer Y_i para completar un sistema de acuerdo a la convención de la mano derecha.



Sistema del elemento terminal $O\ X_nY_nZ_n$.

- Si la articulación es de revolución, fijar Z_n a lo largo de la dirección Z_{n-1}.
- El origen O_n se establece a lo largo del eje Z_n de preferencia en el centro del eje terminal.
- Fijar Y_n en dirección donde se cierra el elemento terminal.
- Si el elemento terminal es una pinza fijar X_n y Y_n para formar un sistema derecho.

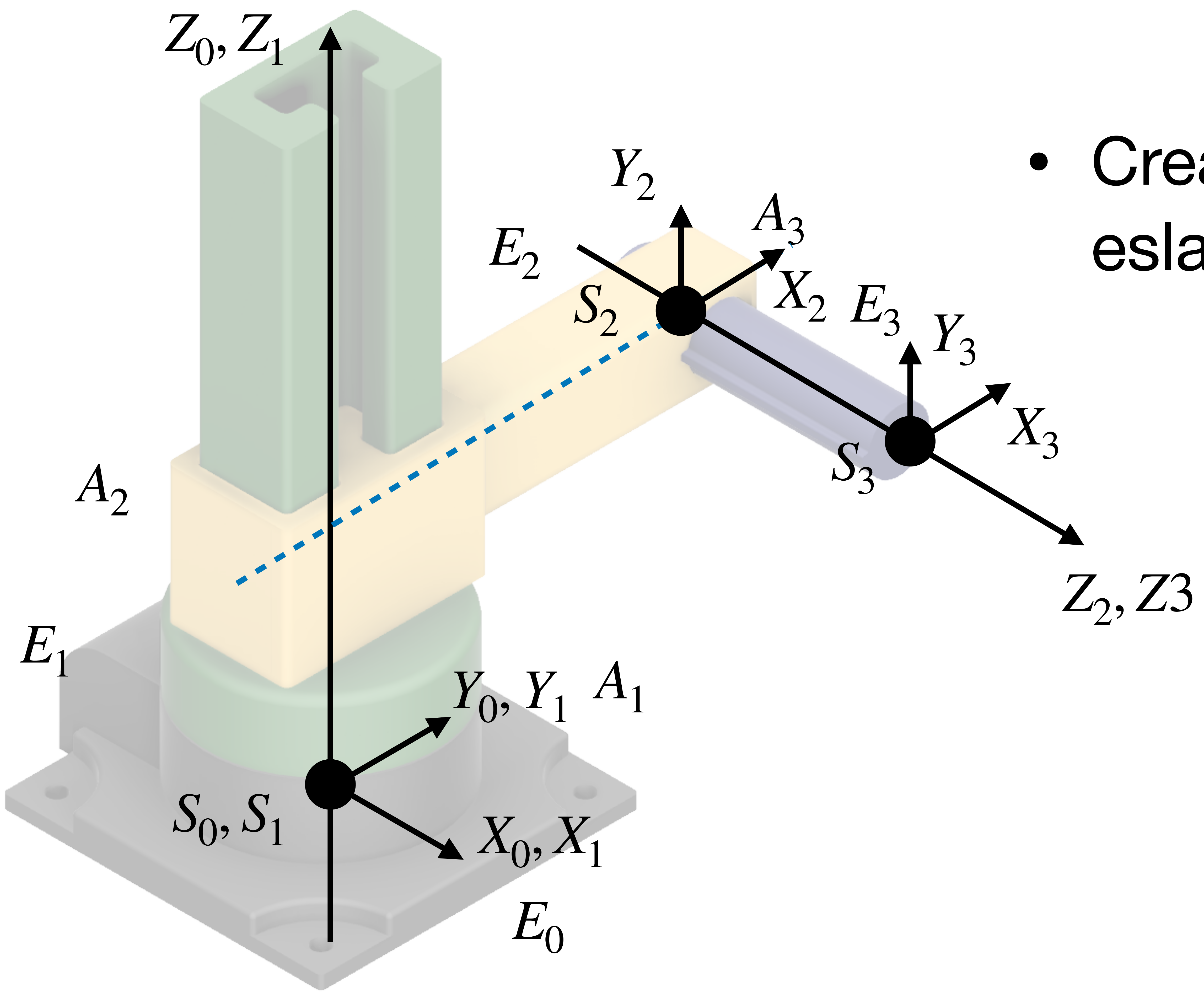


Tabla de parámetros

- Crear una tabla de parámetros de eslabones θ_i, d_i, a_i y α_i.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	0
2	90°	$l_1 + q_2$	l_2	90°
3	0	$l_3 + q3$	0	0

Algoritmo Denavit-Hartenberg

Las matrices A

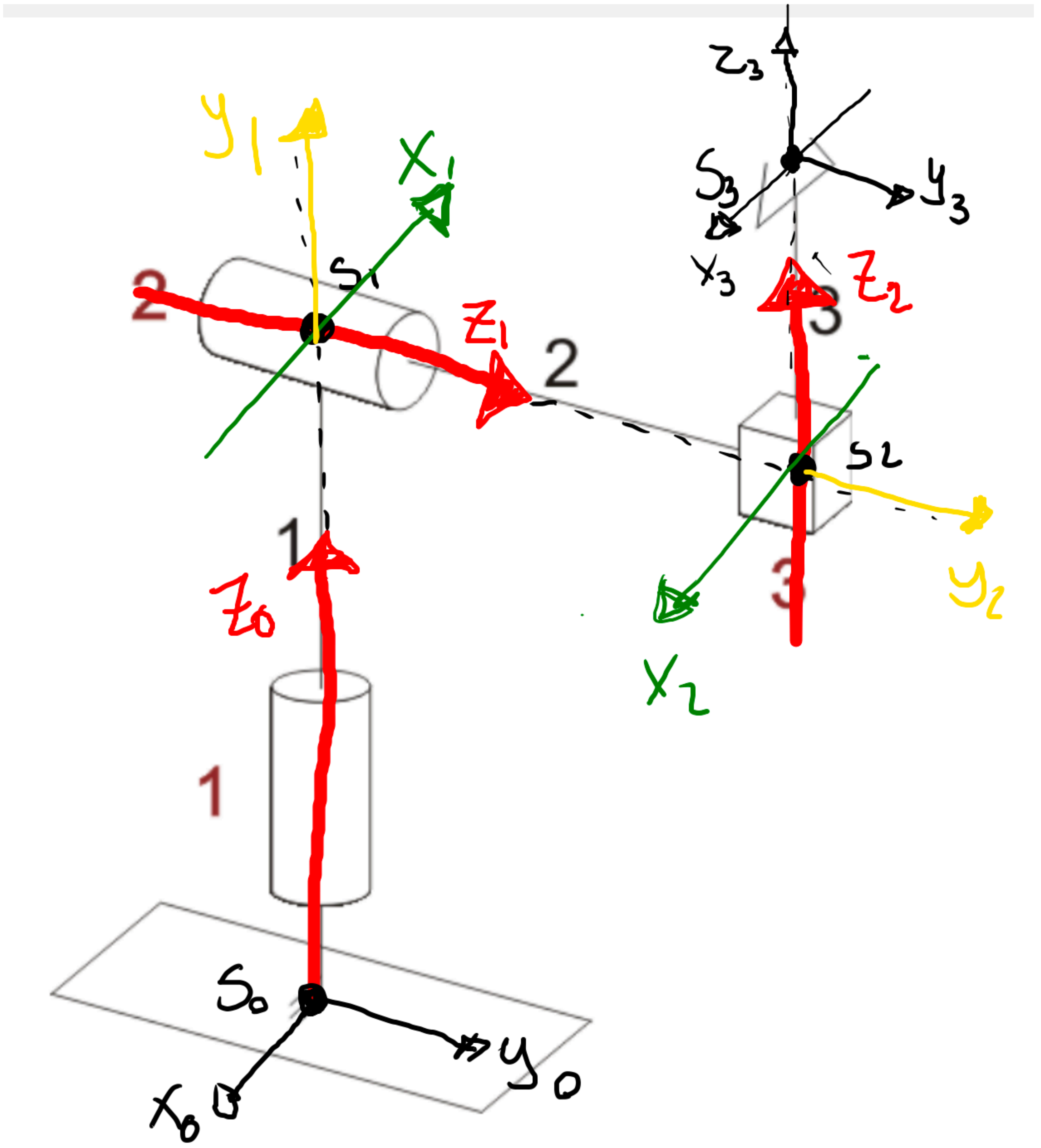
- Obtener las matrices de transformación de A_i de acuerdo a los valores de la tabla del paso 7.

$$A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 - 90 & -s\theta_1 - 90c - 90 & s\theta_1 - 90s - 90 & 0c\theta_1 - 90 \\ s\theta_1 - 90 & c\theta_1 - 90c - 90 & -c\theta_1 - 90s - 90 & 0s\theta_1 - 90 \\ 0 & s - 90 & c - 90 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 c90 & s\theta_2 s90 & 0c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 c90 & -c\theta_2 s90 & 0s\theta_2 \\ 0 & s90 & c90 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c - 90 & -s - 90c0 & s - 90s0 & 0c - 90 \\ s - 90 & c - 90c0 & -c - 90s0 & 0s - 90 \\ 0 & s0 & c0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2



	i	θ	d	a	α
R	1	$180°+q_1$ *	l_1	Ø	90°
R	2	$180°+q_2$ *	l_2	Ø	90°
P	3	Ø	l_3+q_3 *	Ø	Ø°

Algoritmo Denavit-Hartenberg

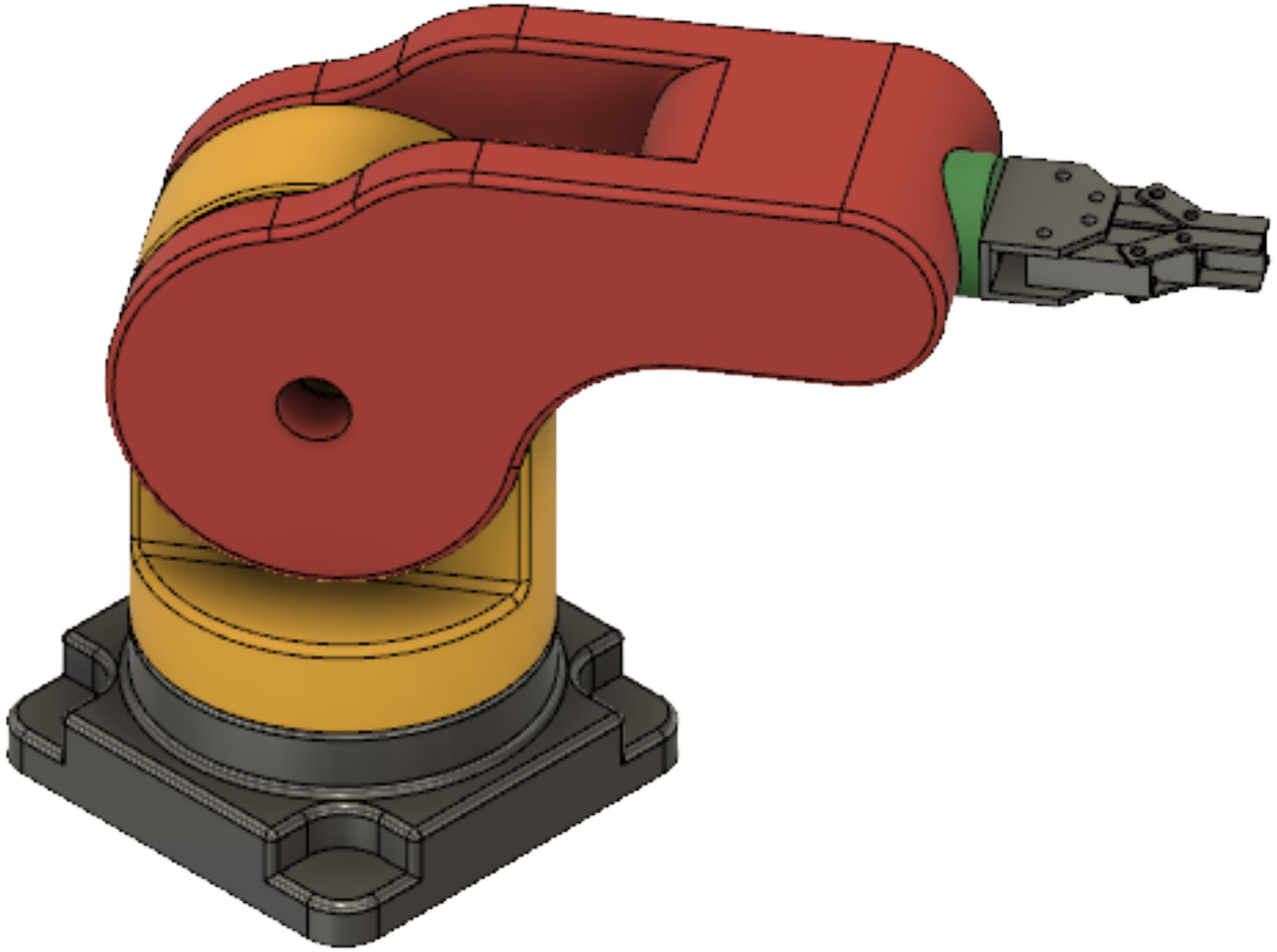
Las matrices A

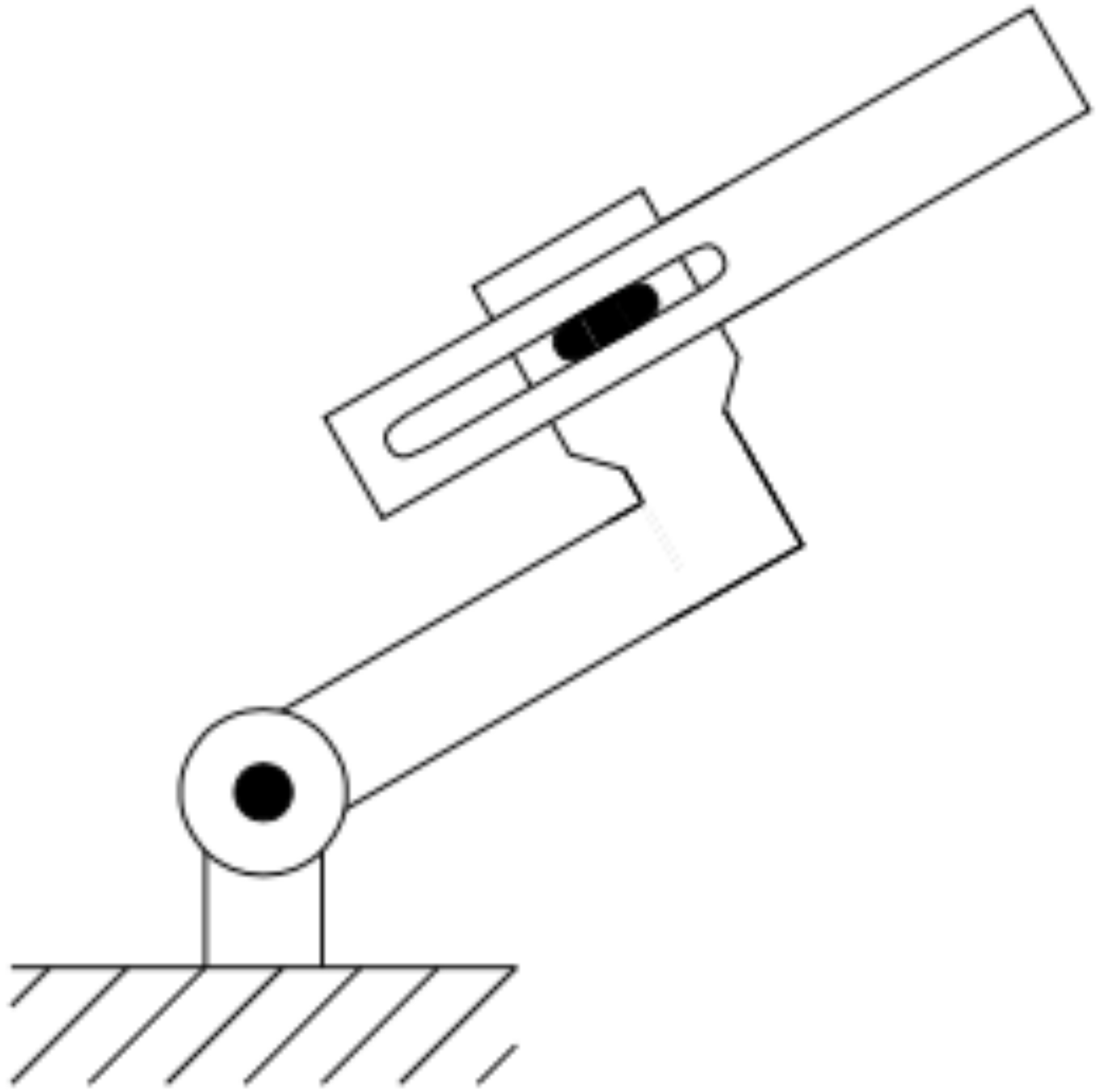
$$A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 - 90 & -s\theta_1 - 90c - 90 & s\theta_1 - 90s - 90 & 0c\theta_1 - 90 \\ s\theta_1 - 90 & c\theta_1 - 90c - 90 & -c\theta_1 - 90s - 90 & 0s\theta_1 - 90 \\ 0 & s - 90 & c - 90 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 c90 & s\theta_2 s90 & 0c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 c90 & -c\theta_2 s90 & 0s\theta_2 \\ 0 & s90 & c90 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} c - 90 & -s - 90c0 & s - 90s0 & 0c - 90 \\ s - 90 & c - 90c0 & -c - 90s0 & 0s - 90 \\ 0 & s0 & c0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ -\cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & -\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2 & d_2\cos\theta_1 + l_1\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ 0 & -\cos\theta_1\cos\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 & d_2\sin\theta_1 - l_1\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & d_1 + l_1\cos\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1

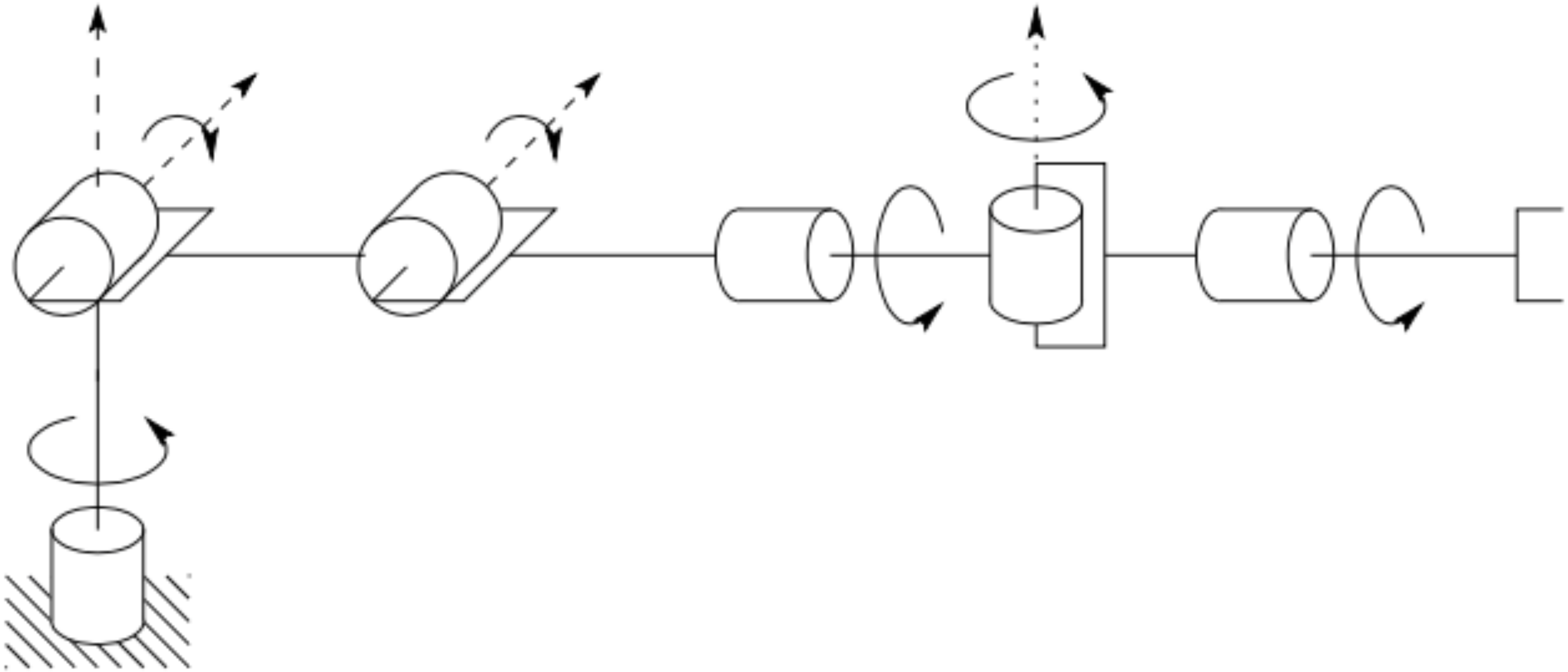
Aplica el algoritmo DH





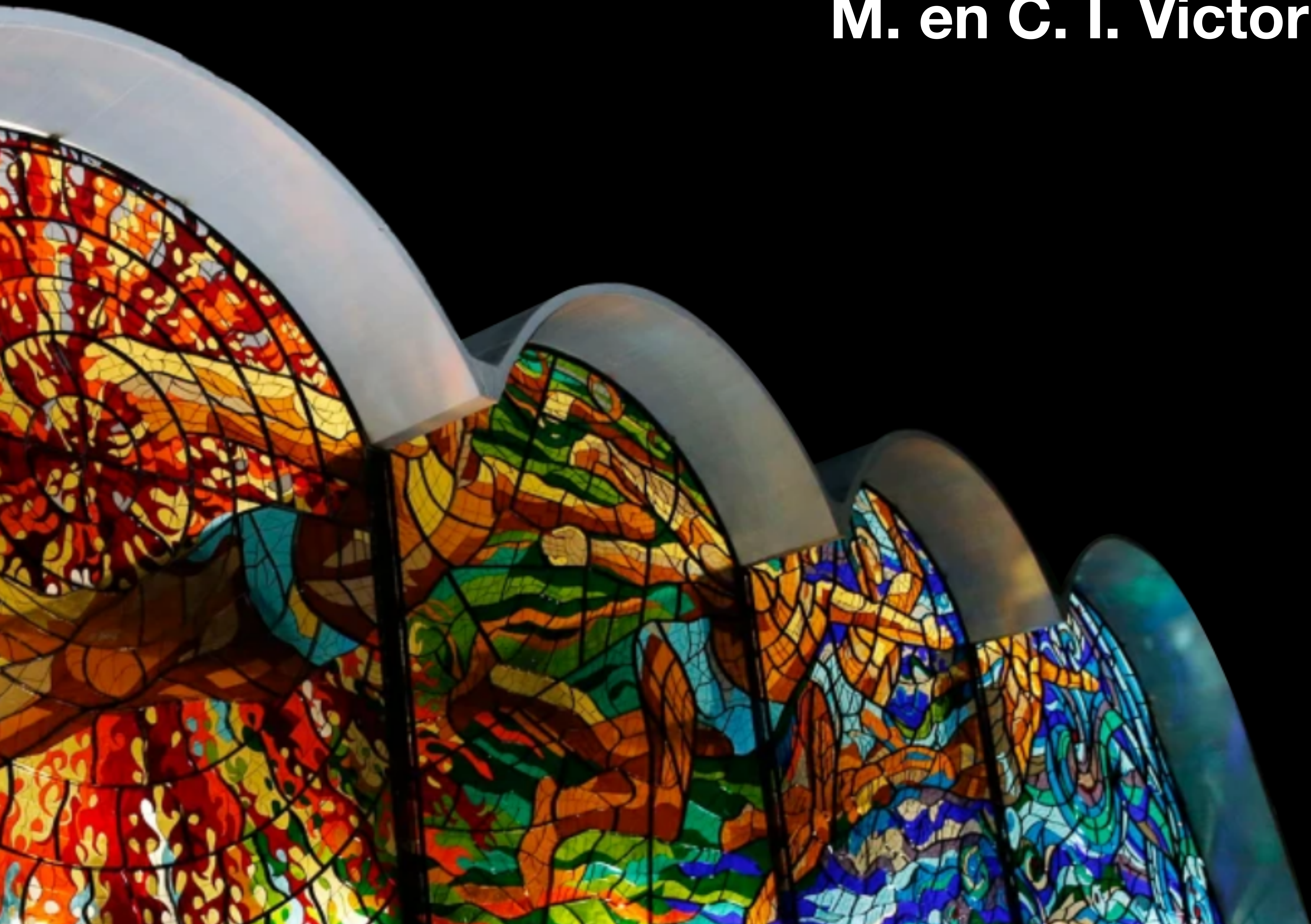
Ejercicio 2

Aplica el algoritmo DH



Robótica

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



UNIDAD IV
Modelo Inverso

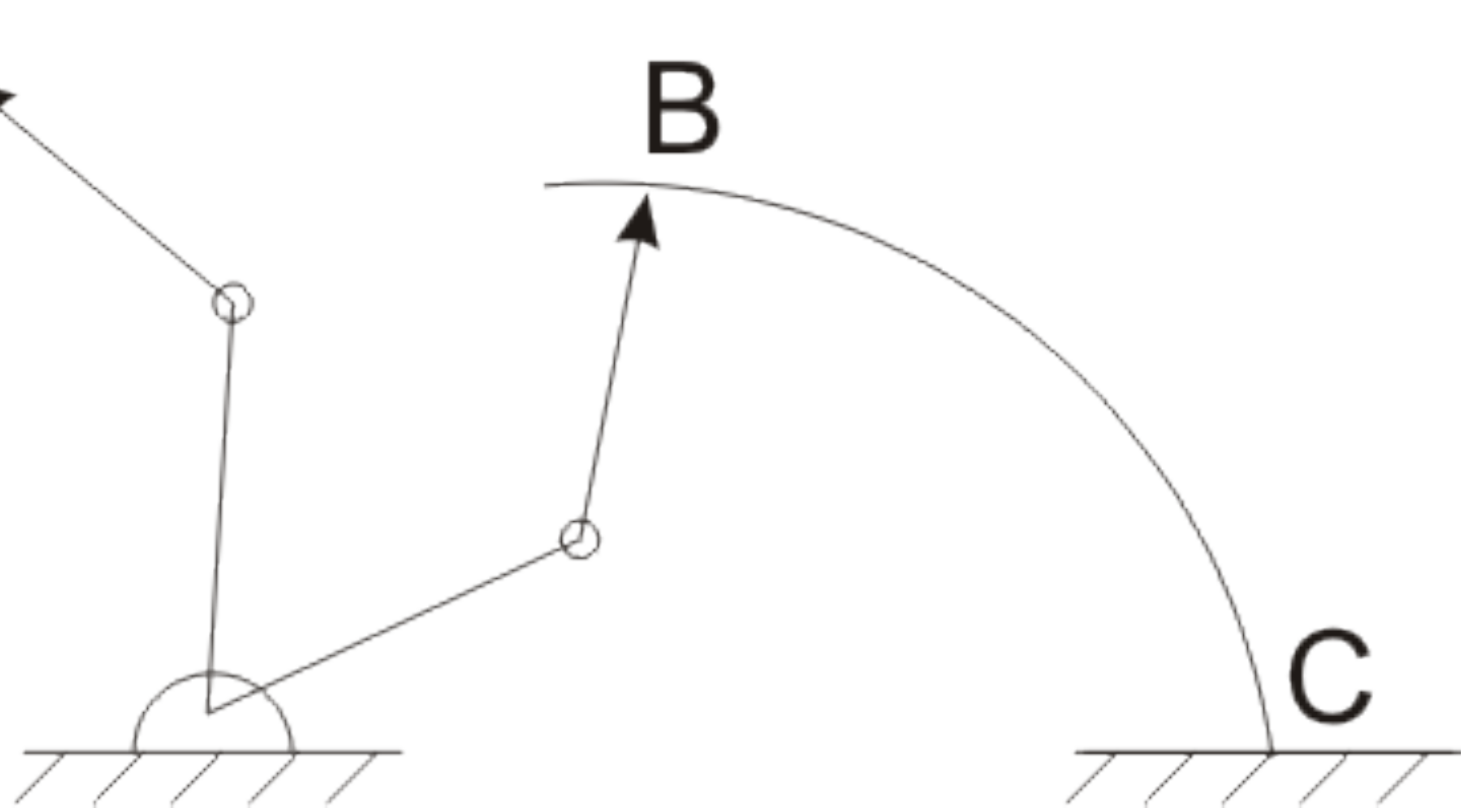
Espacio de la tarea

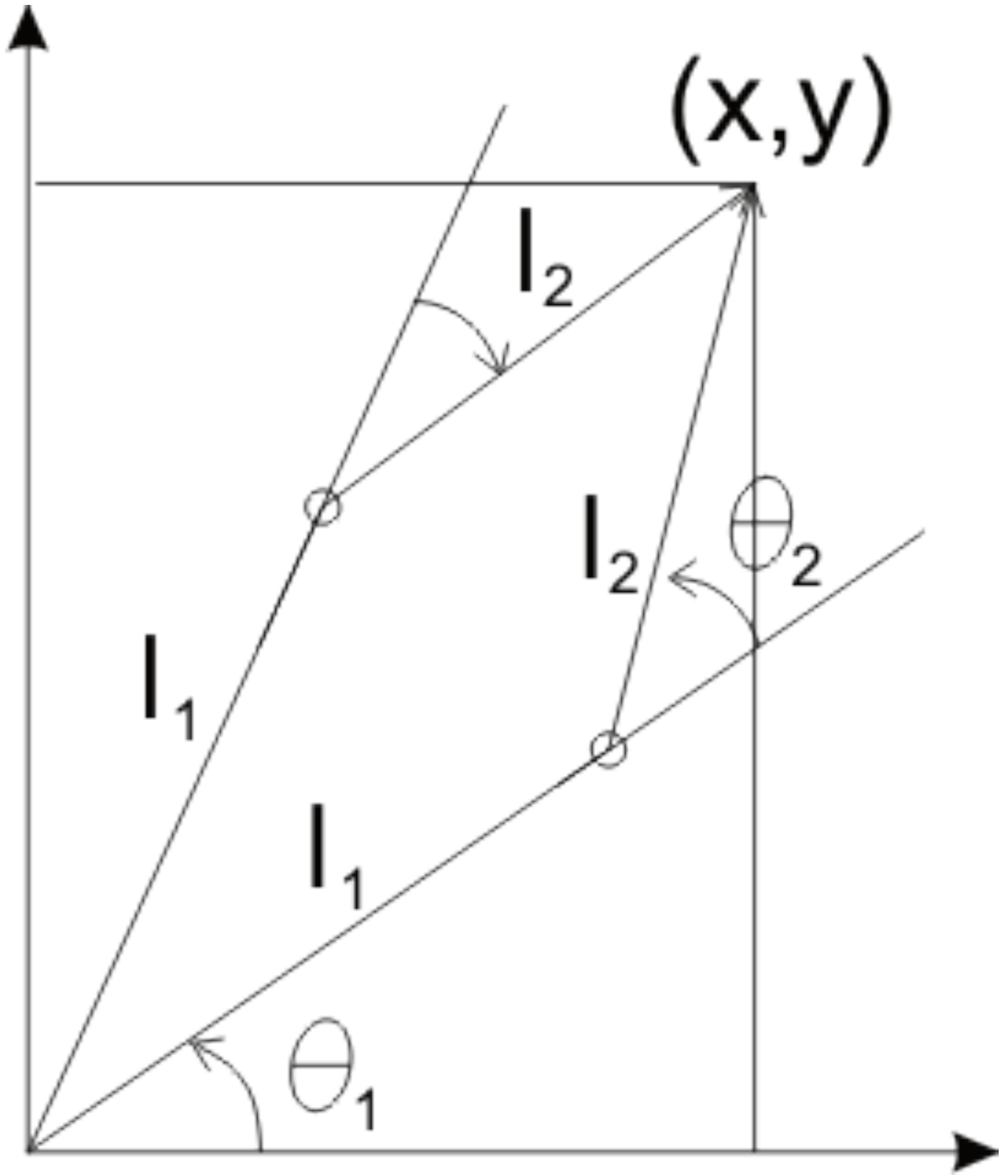
- Relación entre las variables – orientación y posición.
- Problema esta en determinar correspondencia.
- Complejo:
  - Ecuaciones no lineales (solución no explicita).
  - Múltiples soluciones.
  - Soluciones infinitas (manipuladores redundantes).
  - No hay solución.

Modelo geométrico inverso (MGI)

Se emplea la geometría del robot

- Cada robot tiene diferente geometría



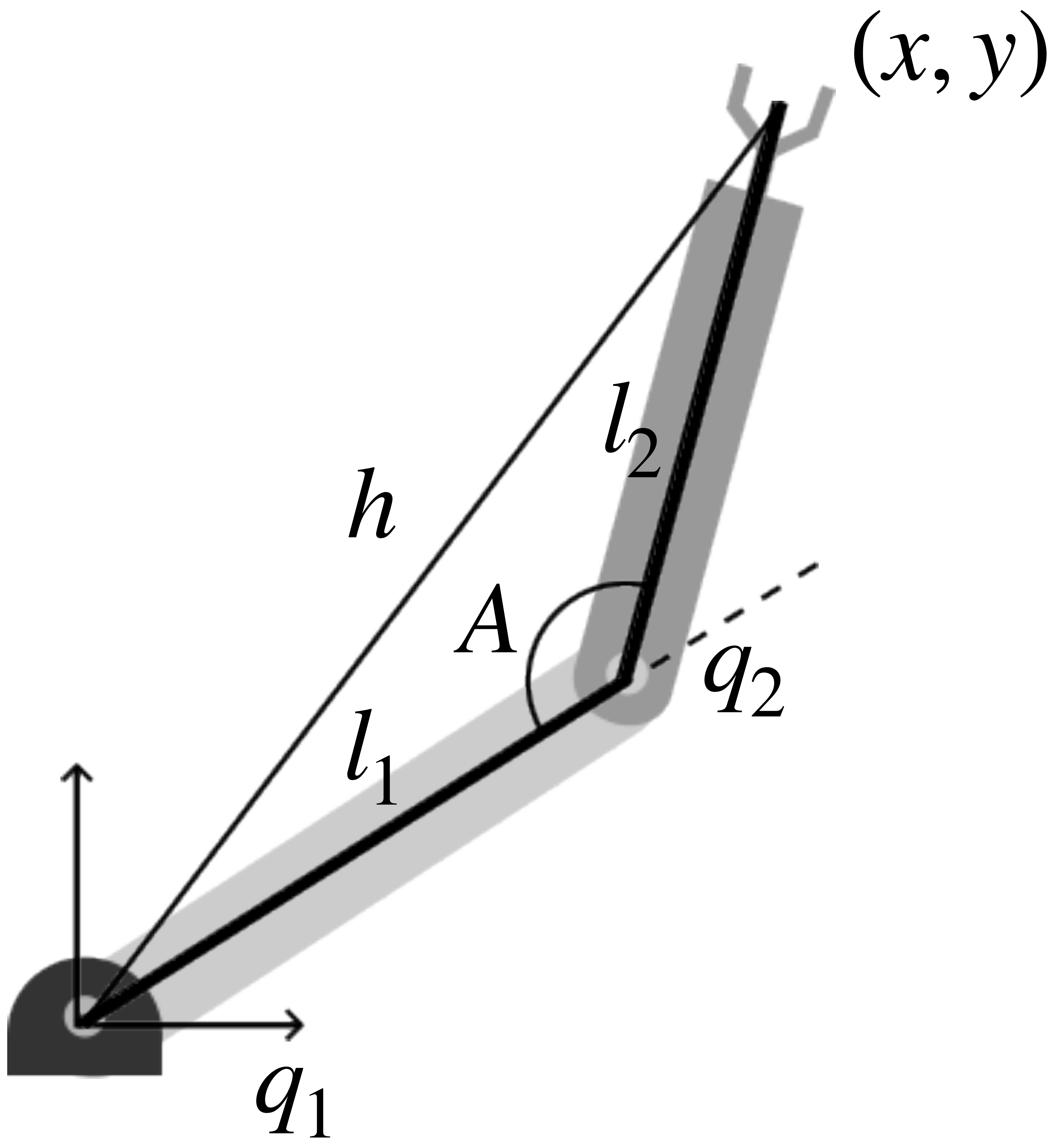


Dentro del espacio de trabajo del robot

$$(q_1, q_2) = F^{-1}(x,\ y)$$

- Si $(x,\ y)$ $\notin$ al espacio de trabajo no hay solución
- Si $(x,\ y)$ $\in$ al espacio de trabajo:
  - Hay una solución.
  - Hay varias soluciones.
  - Hay un infinito de soluciones.

Modelo geométrico inverso (MGI)



Trigonometría

$$A = 180 - q_2$$

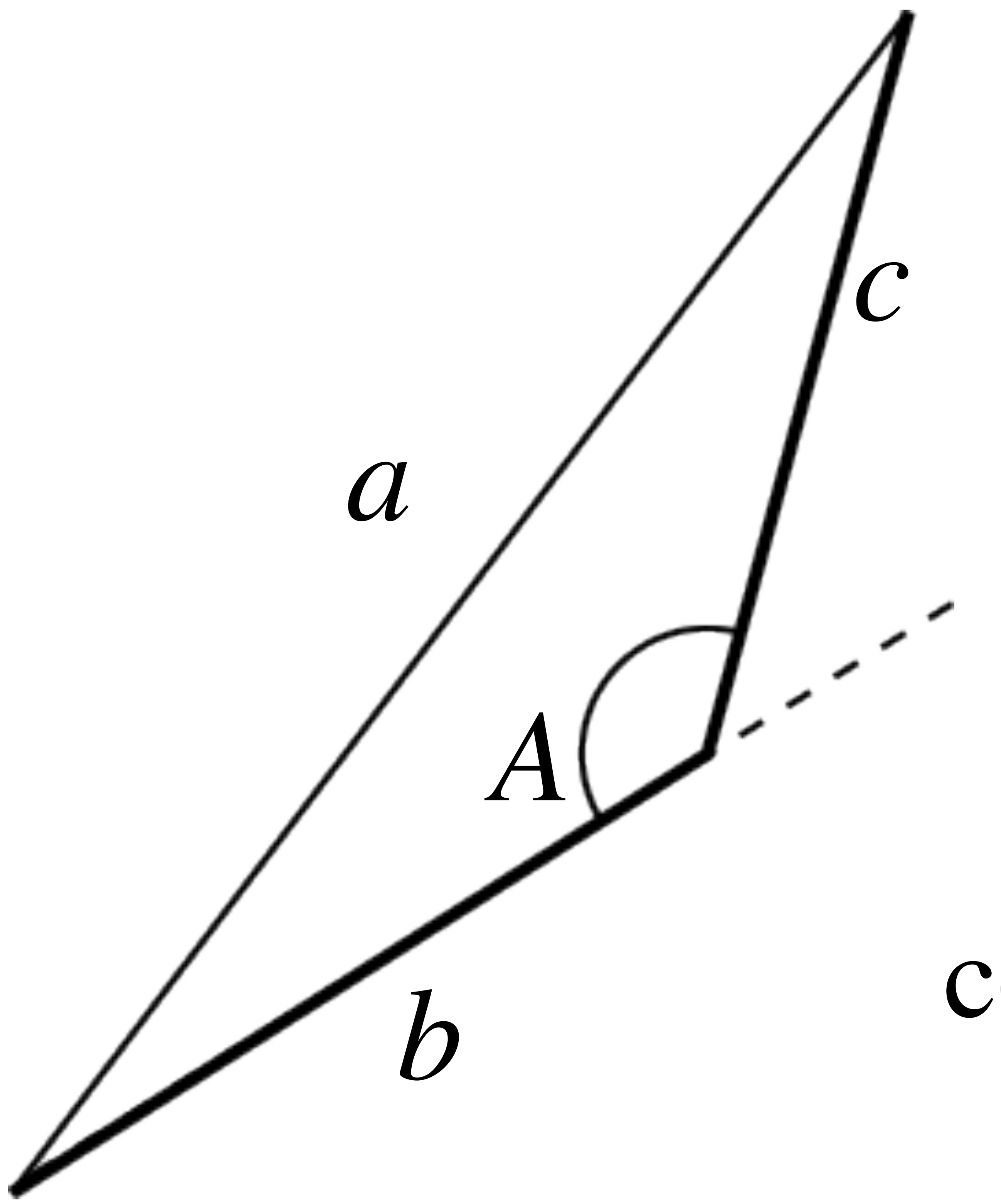
$$\cos A = \cos(180 - q_2)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\cos(180 - q_2) = -\cos q_2$$

Modelo geométrico inverso (MGI)

Leyes de los cosenos y teorema de pitagoras



$$a^2 = b^2 + c^2 - ab\cos(A)$$

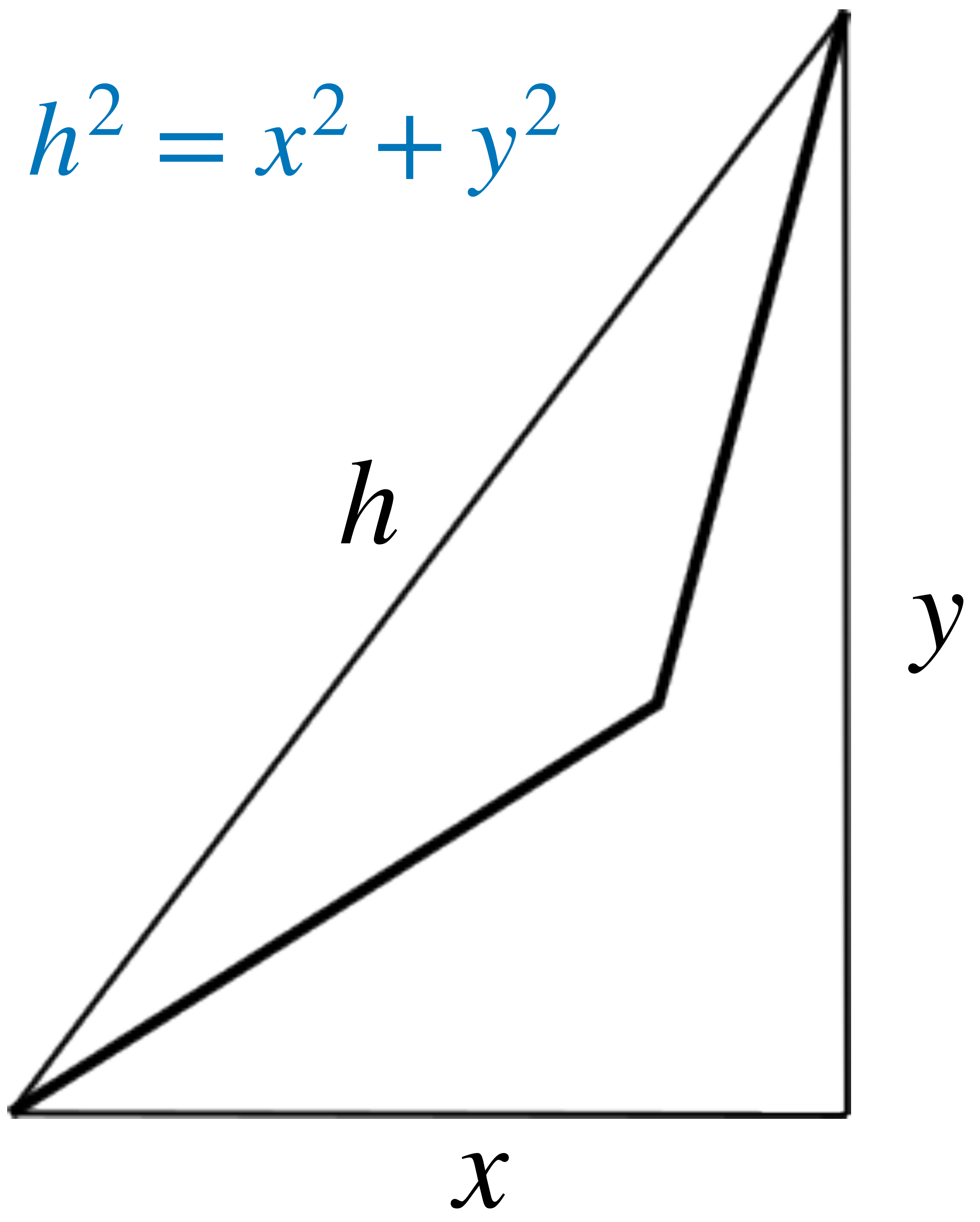
$$h^2 = x^2 + y^2$$

$$h = a$$

$$x^2 + y^2 = l_1^{\,2} + \; l_2^{\,2} + 2\, l_1 l_2 \cos q_2$$

$$\cos q_2 = \frac{x^2 + y^2 \; - \; l_1^{\,2} - \; l_2^{\,2}}{2\, l_1 l_2} = D$$

$$\cos q_2 = D$$



Modelo geométrico inverso (MGI)

Algebra

$$q_2 = \cancel{\cos^{-1}} D$$

$$\cos^2 q + \sin^2 q = 1 \longrightarrow sen^2\, q_2 = 1 - cos^2\, q_2$$

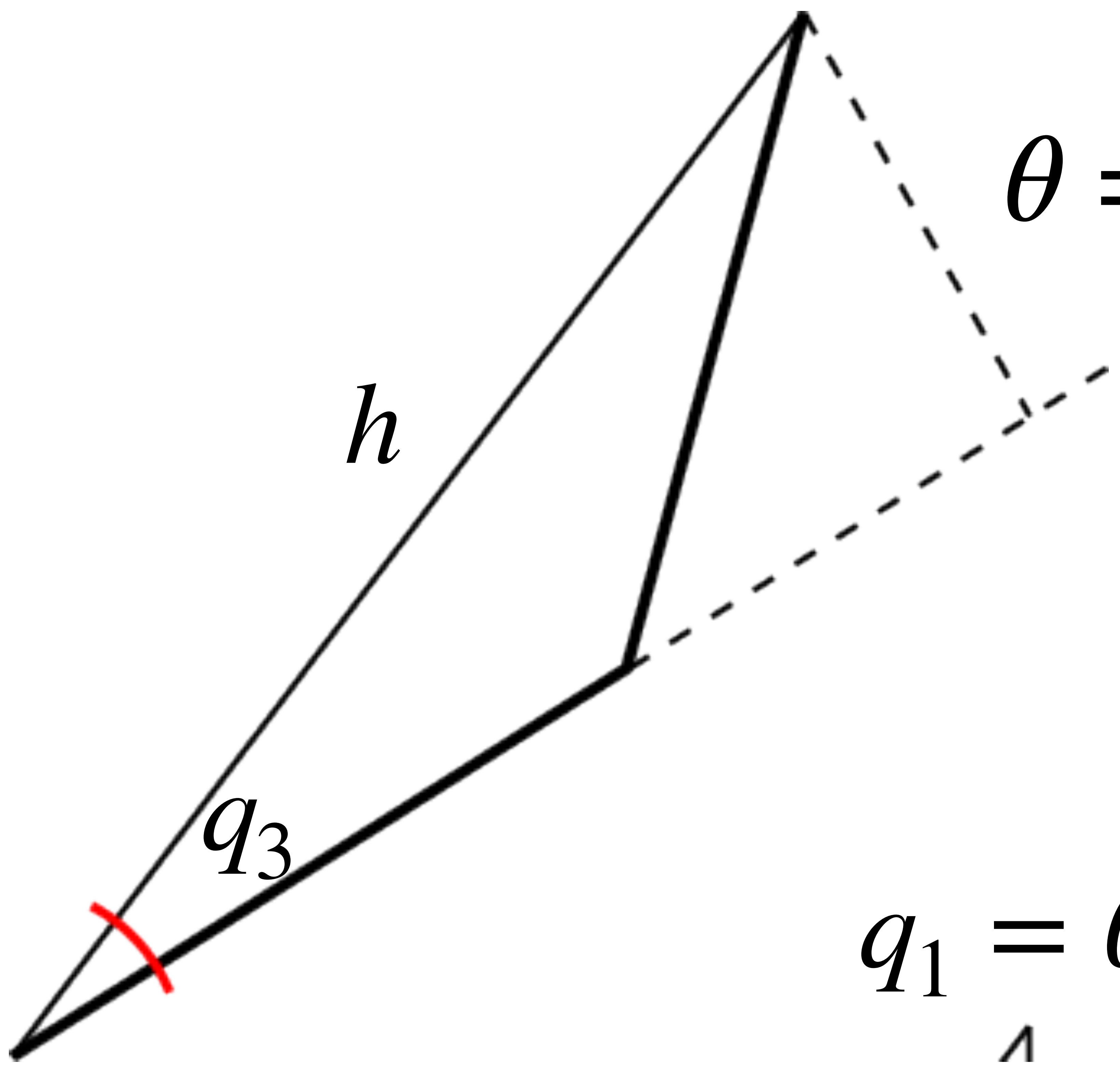
$$sen\; q_2 = \sqrt{1 - D^2}$$

$$\tan q = \frac{\sin q}{\cos q} \longrightarrow \tan q_2 = \frac{\pm\sqrt{1 - D^2}}{D}$$

$$q_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - D^2}}{D}\right)$$

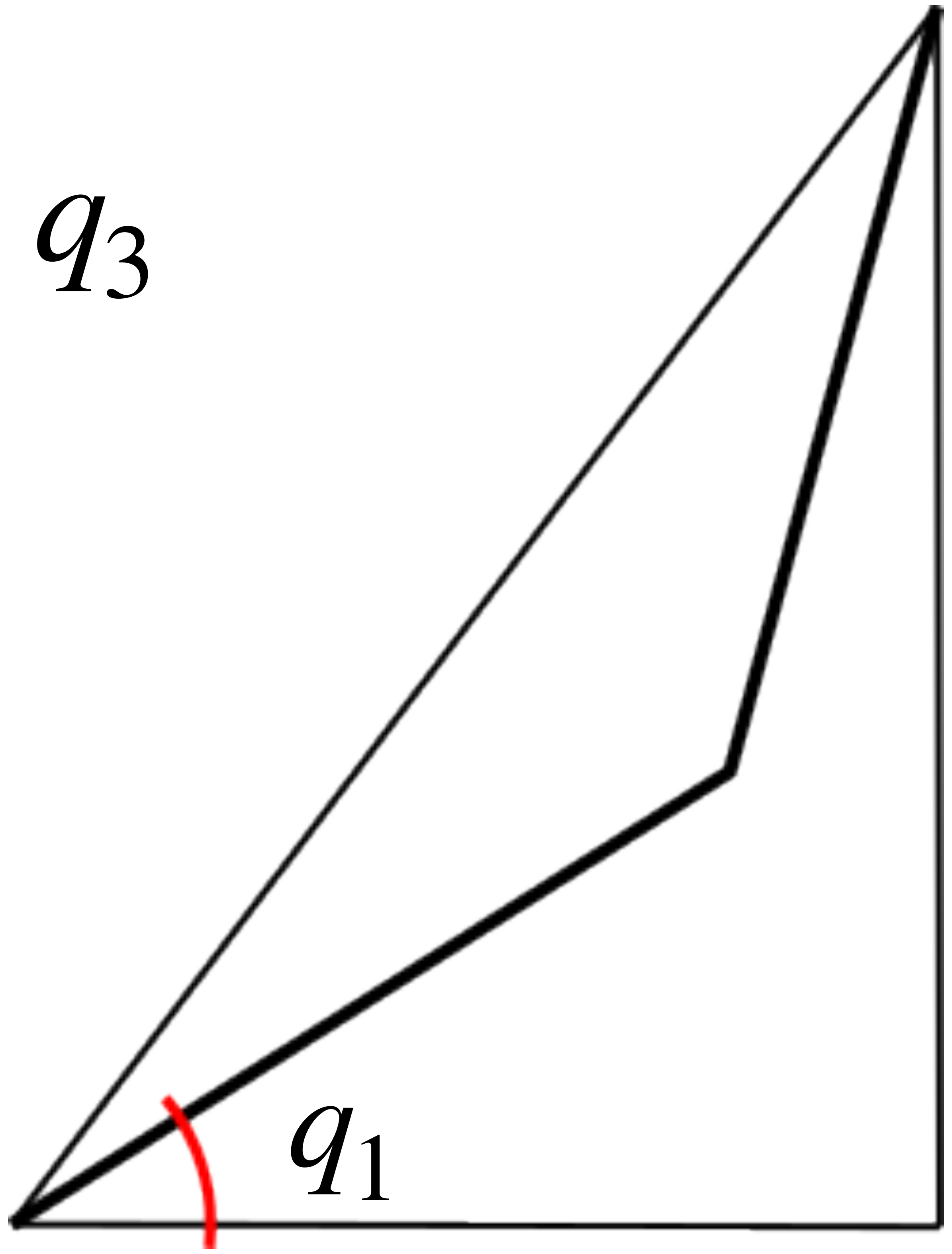
Modelo geométrico inverso (MGI)

Encontrar q1



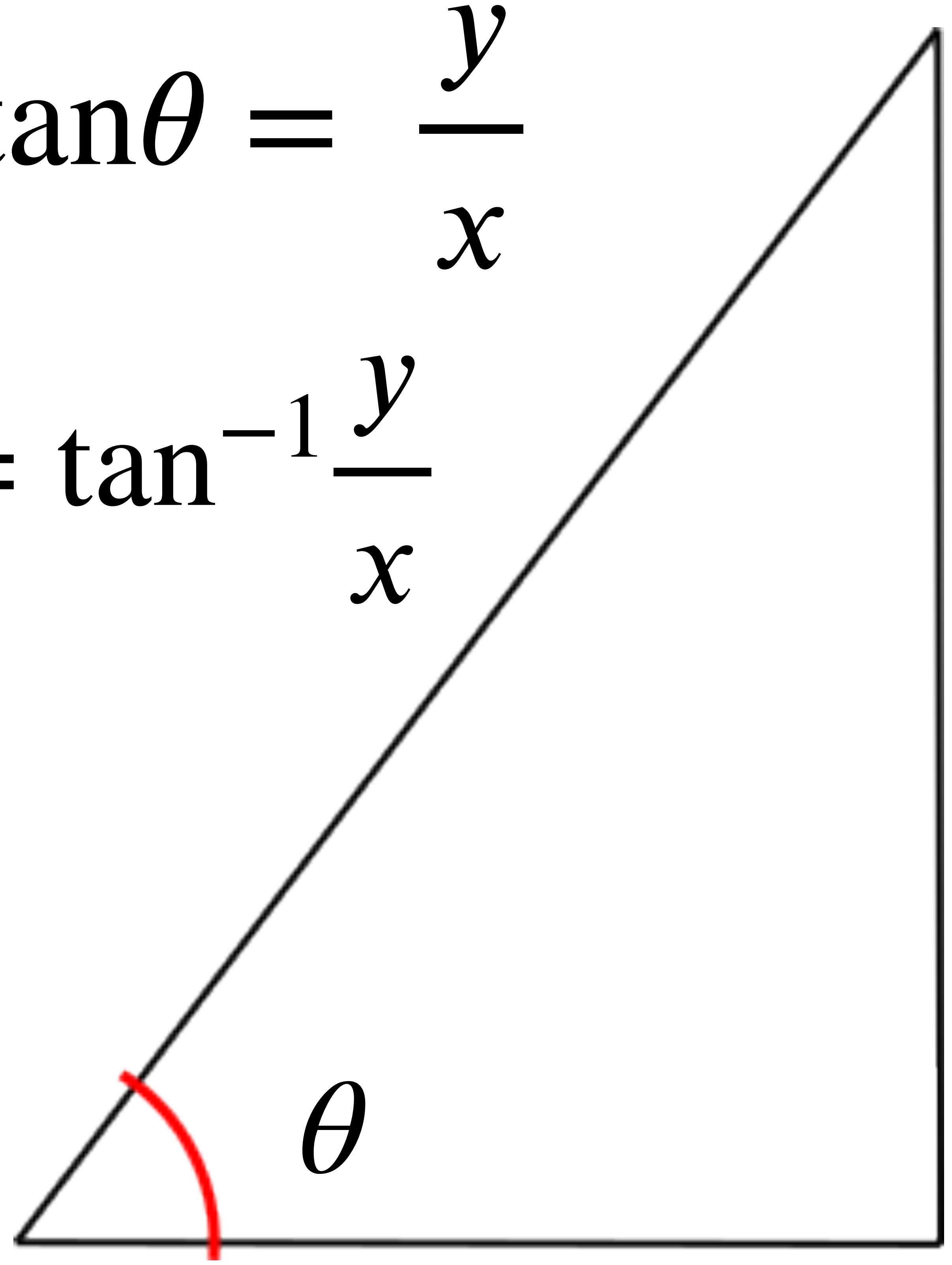
$$\theta = q_1 + q_3$$

$$q_1 = \theta - q_3$$



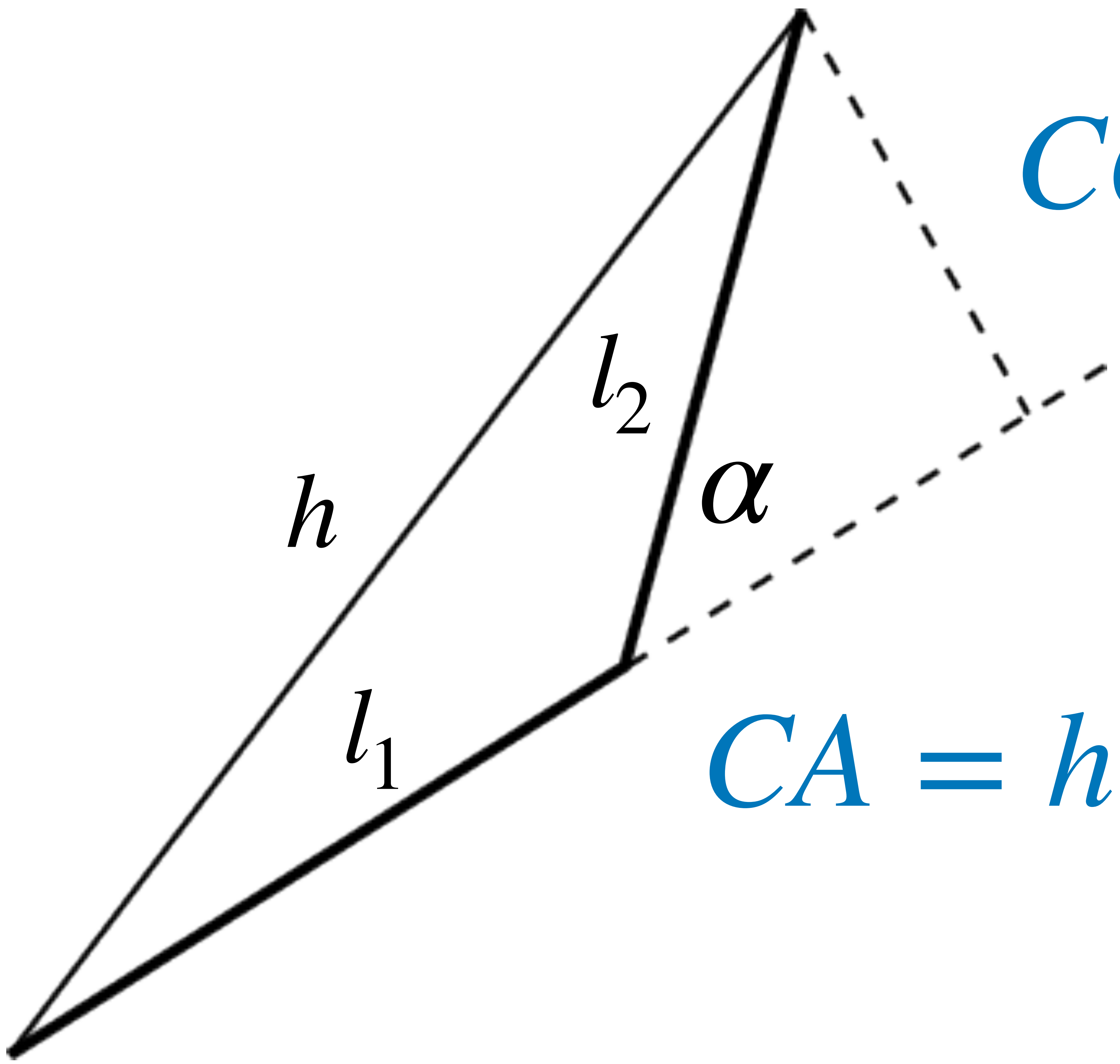
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$



Modelo geométrico inverso (MGI)

Más trigonometría



$$CO = h \sin \alpha$$

$$CA = h \cos \alpha$$

$$CA = l_1 + l_2 \cos q_2$$

$$CO = l_2 \sin q_2$$

$$\tan q_3 = \frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2}$$

Modelo geométrico inverso (MGI)

Más algebra

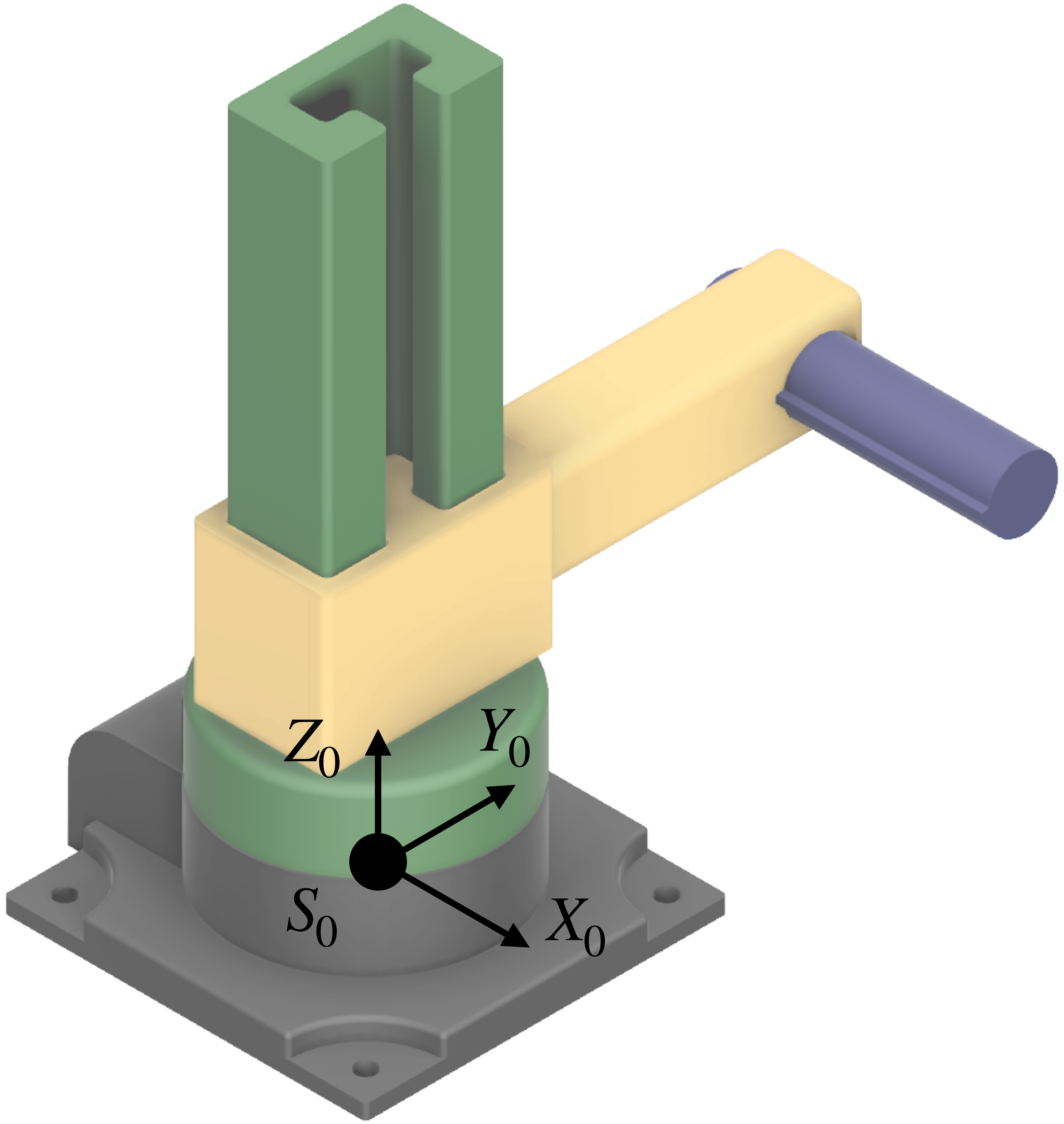
$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad q_3 = \tan^{-1}\frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2}$$

$$\theta = q_1 + q_3 \qquad q_1 = \theta - q_3$$

$$q1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{l_2 \sin q_2}{l1 + l2 \cos q2}\right)$$

MGI del ejercicio 2

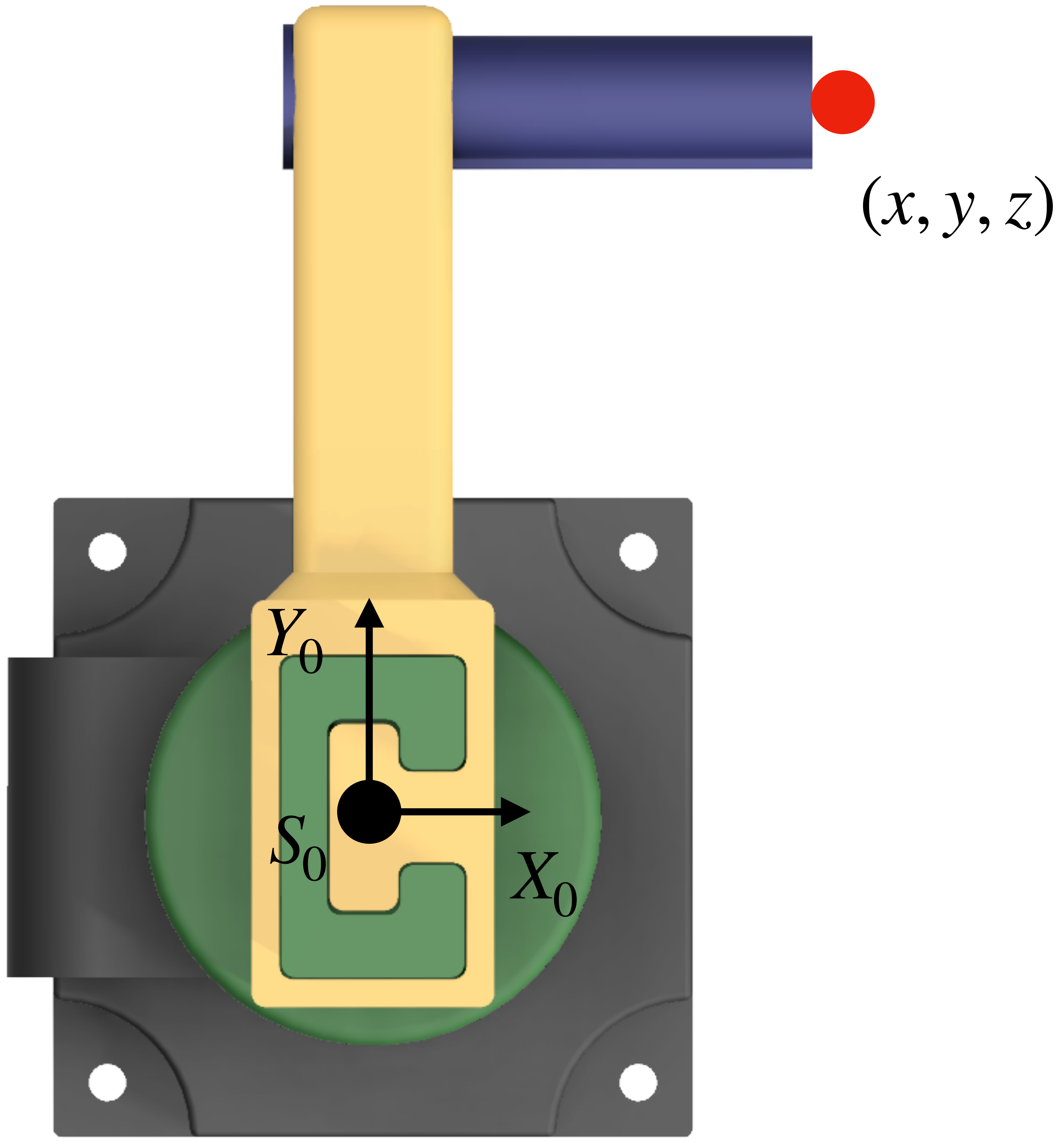
Robot 3DOF - RPP

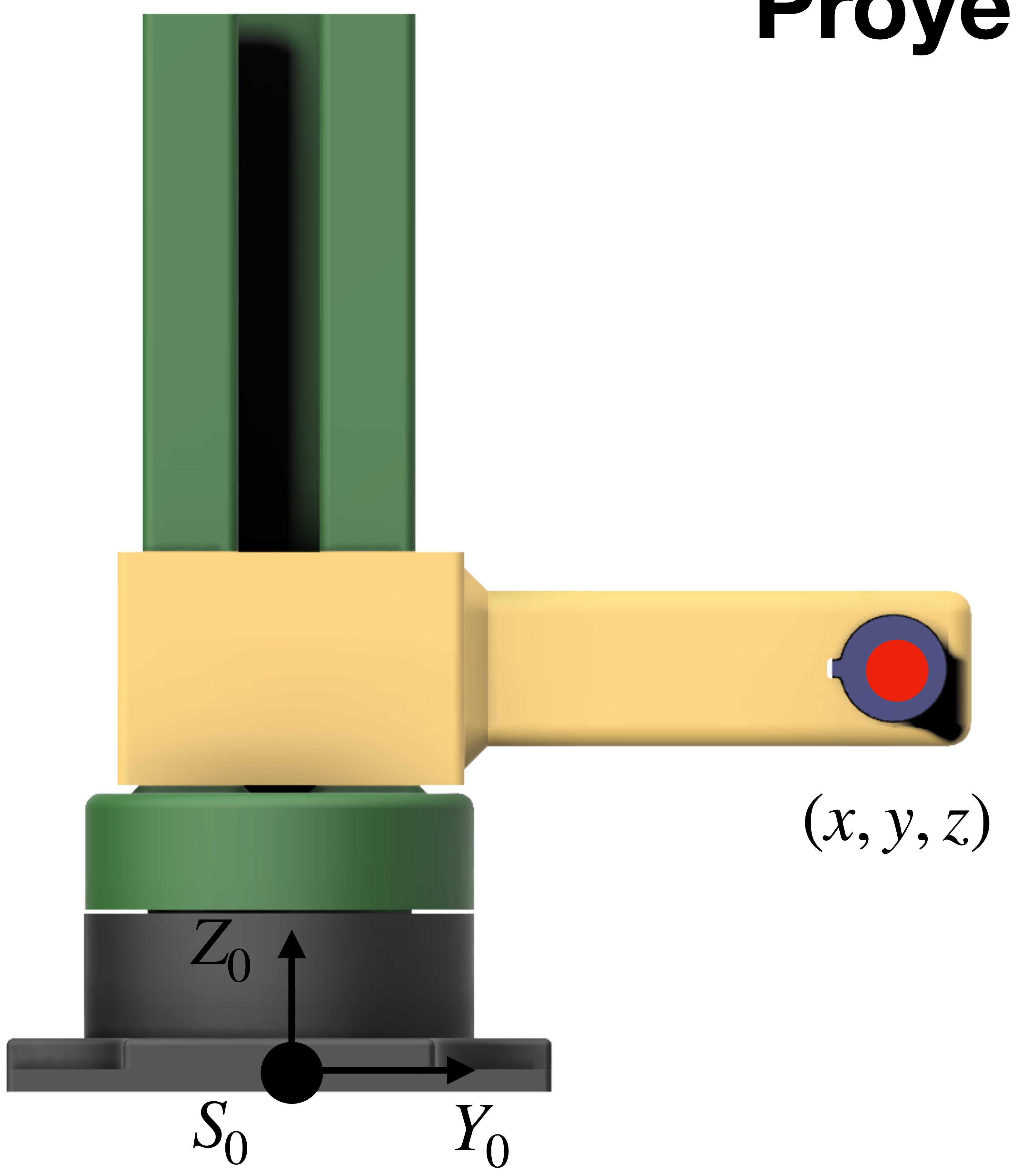


$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Para obtener los valores de las articulaciones q_i podemos proyectar el punto p sobre el planos del espacio 3D

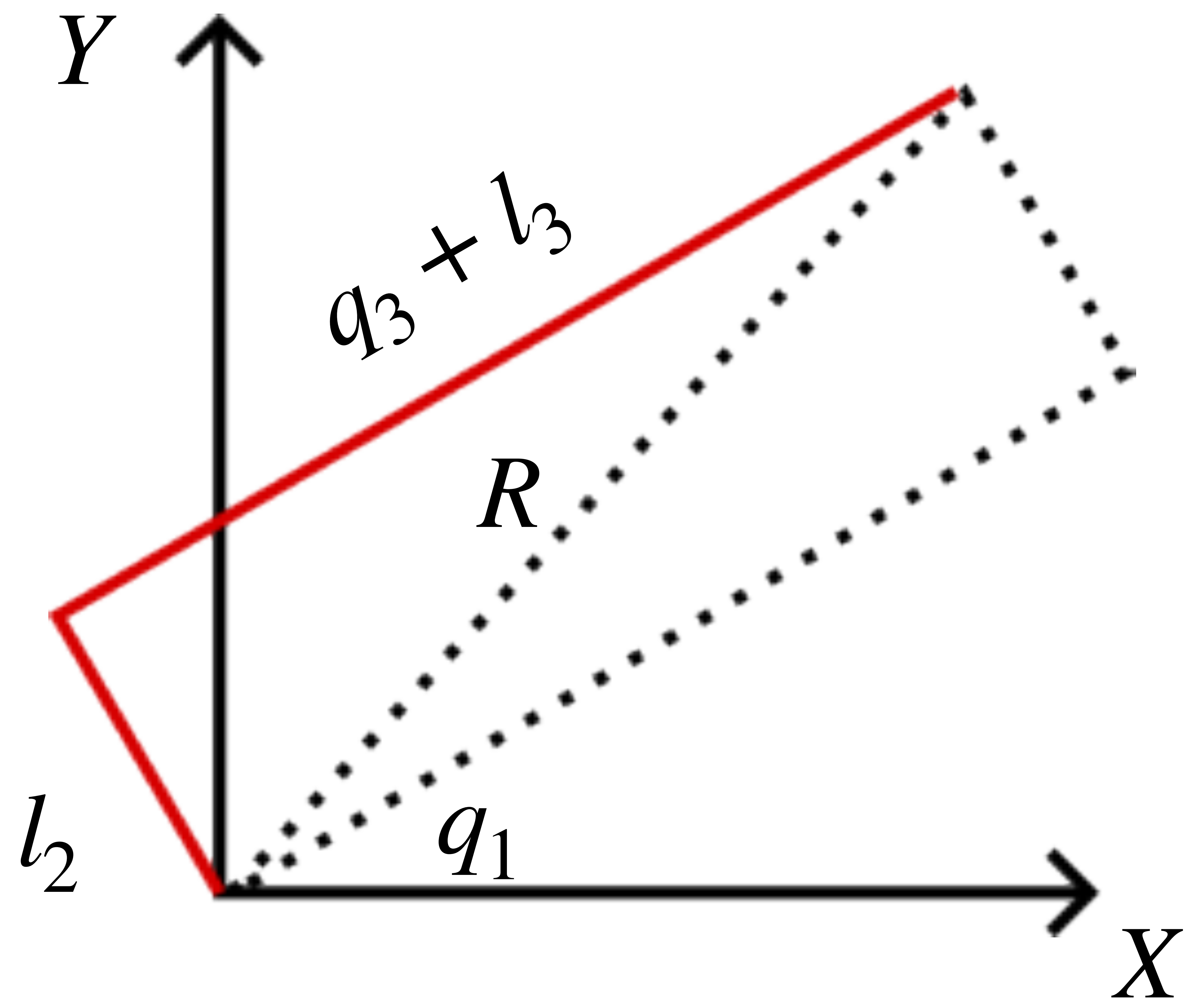
Proyecciones





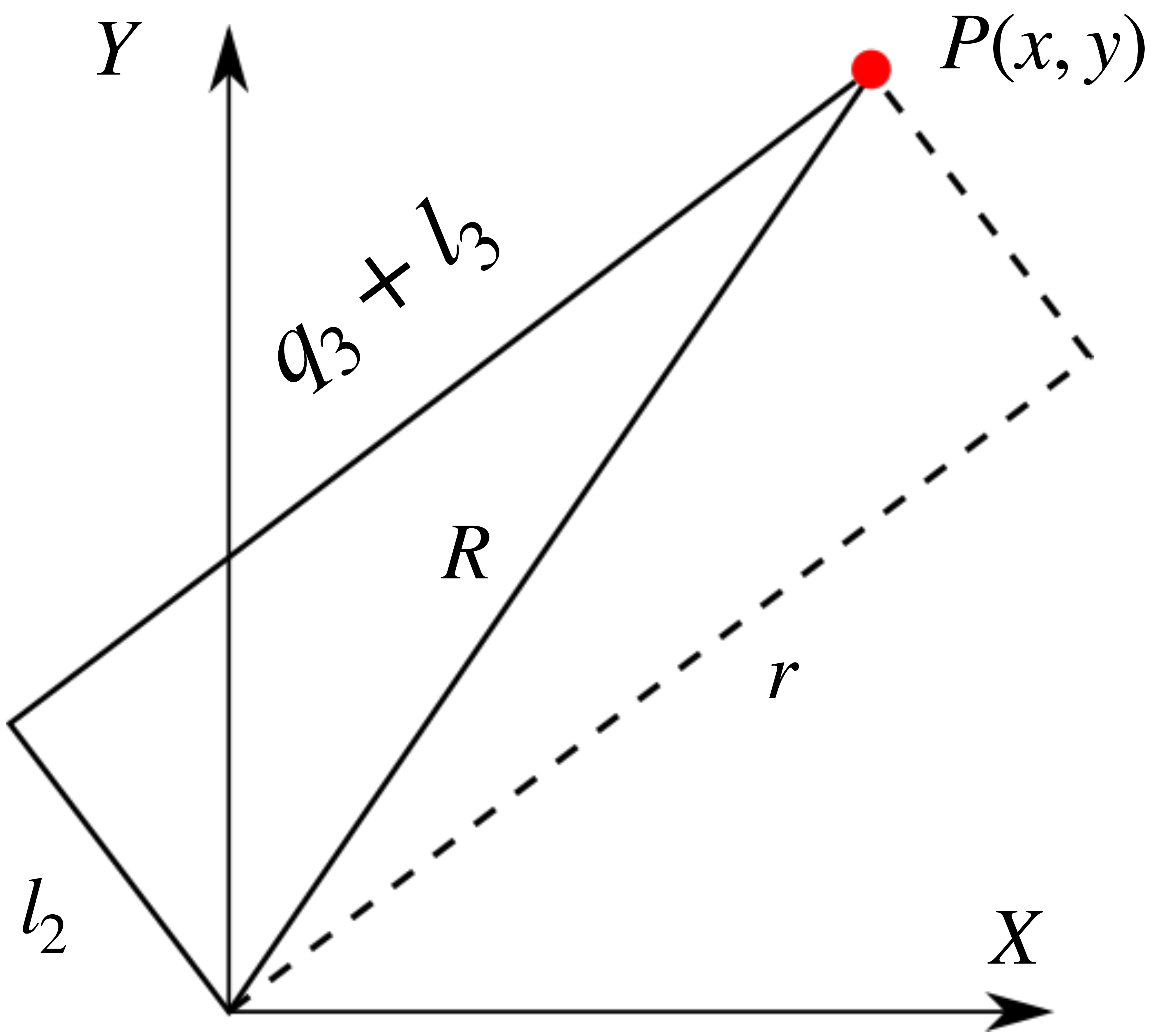
MGI del ejercicio 2

¿Cómo es el movimiento del robot desde los planos?



Se debe de considerar el movimiento del robot, ya que en algunos planos no es representativo como para ser analizado

MGI del ejercicio 2



Para q3

$$R^2 = x^2 + y^2$$

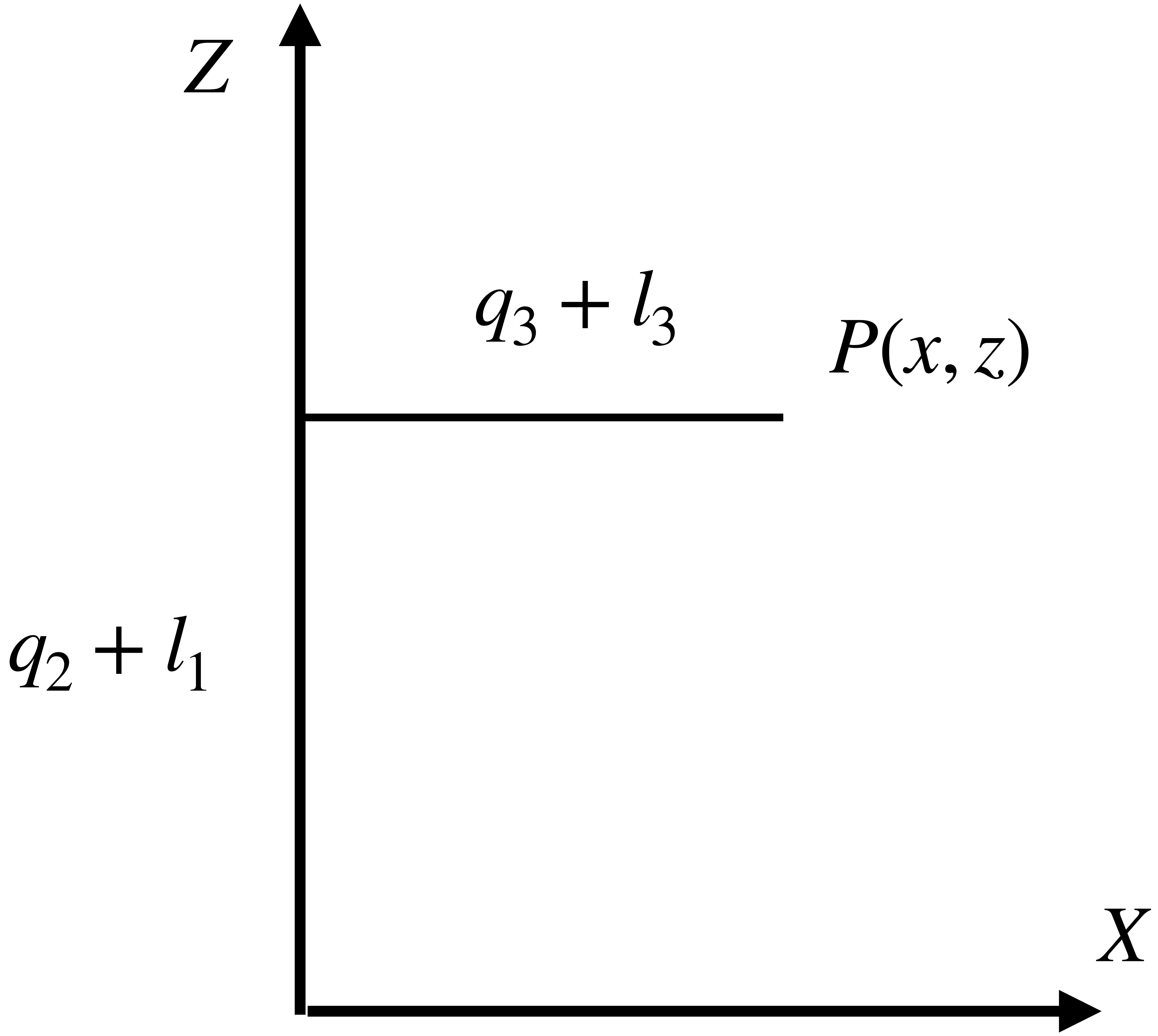
$$R^2 = r^2 + {l_2}^2 \qquad r^2 = (q_3 + l_3)^2$$

$$x^2 + y^2 = (q_3 + l_3)^2 + {l_2}^2$$

$$q_3 = \sqrt{x^2 + y^2 - {l_2}^2} - l_3$$

MGI del ejercicio 2

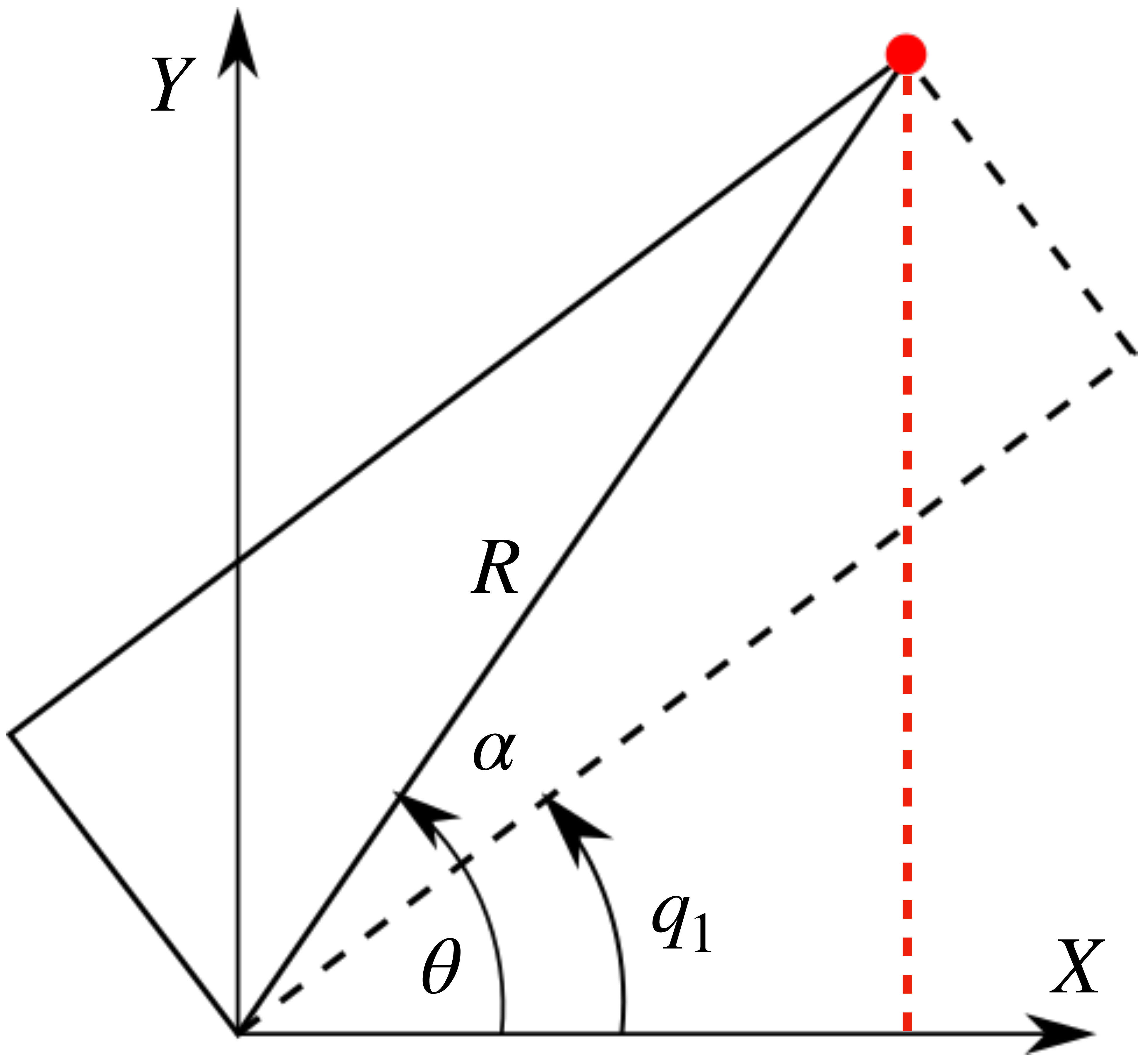
Para q2



$$z = q_2 + l_1$$

$$q_2 = z - l_1$$

MGI del ejercicio 2

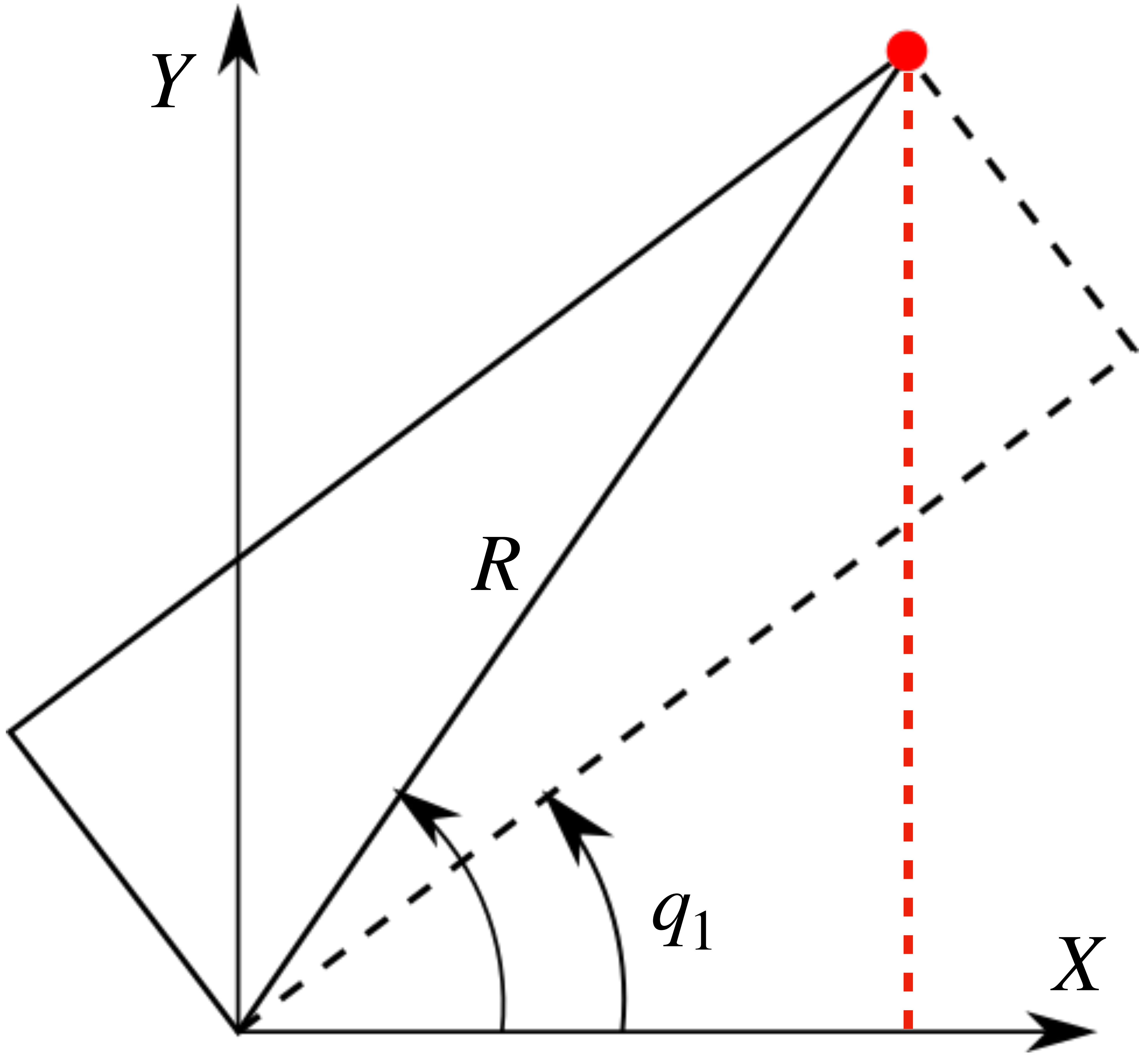


Usemos lo que si conocemos

$$\theta = q_1 + \alpha$$

$$q_1 = \theta - \alpha$$

MGI del ejercicio 2



Encontrar los dos ángulos restantes

$$\theta = tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \alpha = tan^{-1}\frac{l_2}{q_3 + l_3 + l_5}$$

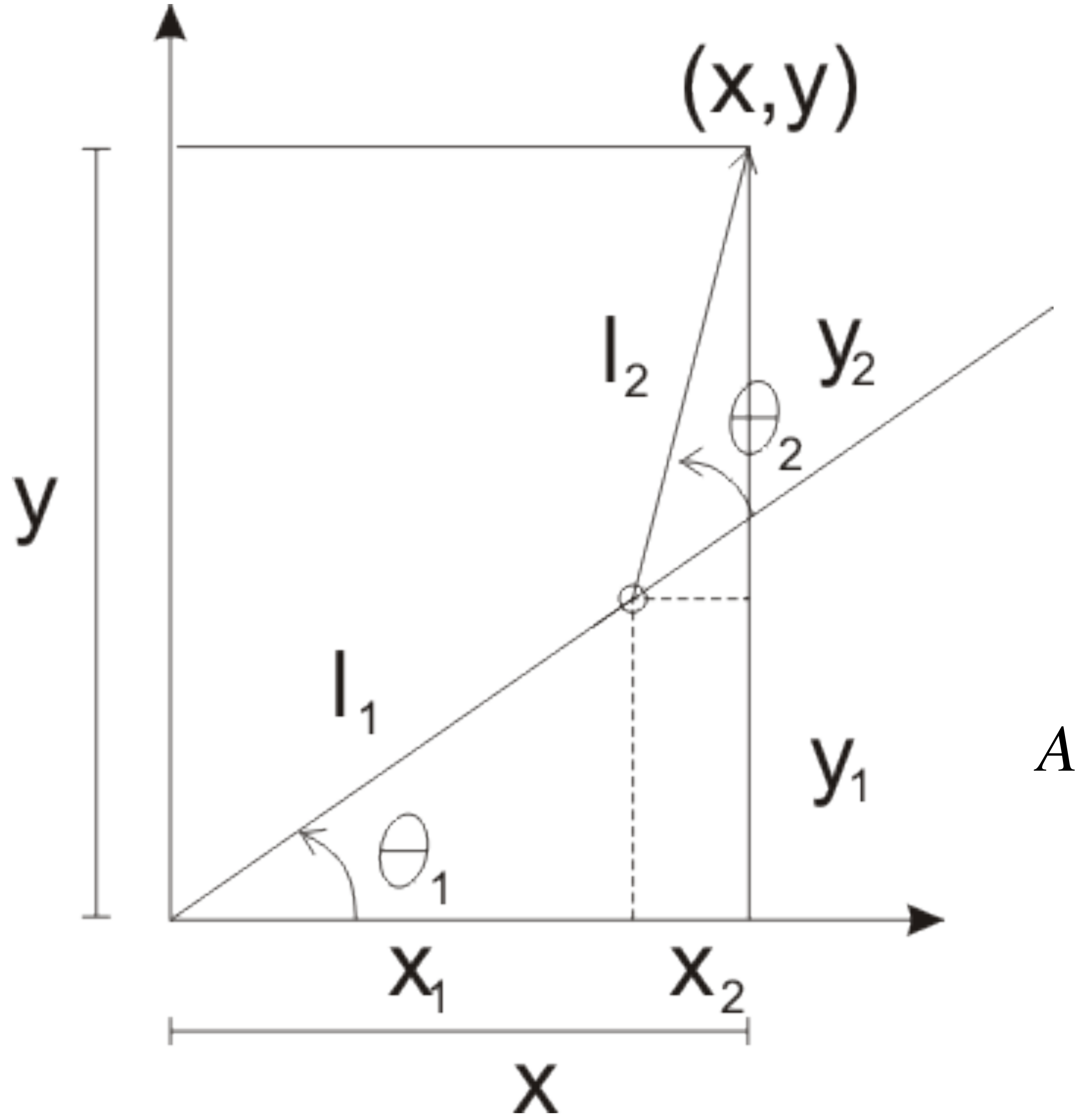
$$q_1 = tan^{-1}\frac{y}{x} - tan^{-1}\frac{l_2}{q_3 + l_3 + l_5}$$

Formamos ecuaciones mediante las matrices de DH

$$T = A_1 A_2 \ldots A_n$$

$$T = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & d_x \\ s_y & n_y & a_y & d_y \\ s_z & n_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Robot planar RR



i	θ	d	a	α
1	q_1	0	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0

$$A1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & l_1 \cos q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & l_1 \sin q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & l_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & l_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz resultante de DH

$$\cos(q_1 \pm q_2) = \cos q_1 \cos q_2 \mp \sin q_1 \sin q_2$$

$$\sin(q_1 \pm q_2) = \sin q_1 \cos q_2 \pm \cos q_1 \sin q_2$$

$$T = A_1 * A_2 \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar el valor de q_2

$$
\begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & 0 & \boxed{l_1\cos q_1 + l_2\cos(q_1+q_2)} \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & \boxed{l_1\sin q_1 + l_2\sin(q_1+q_2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & \boxed{d_x} \\ s_y & n_y & a_y & \boxed{d_y} \\ s_z & n_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$l_1\cos q_1 + l_2\cos(q_1+q_2) = d_x$$

$$l_1\sin q_1 + l_2\sin(q_1+q_2) = d_y$$

Completamos el teorema de Pitágoras

$$(E_1\cos q_1 + E_2\cos(q_1+q_2))^2 = (d_x)^2 \qquad (E_1\sin q_1 + E_2\sin(q_1+q_2))^2 = (d_y)^2$$

$$E_1{}^2\cos^2 q_1 + 2E_1\cos q_1 E_2\cos(q_1+q_2) + E_2{}^2\cos^2(q_1+q_2) = (d_x)^2$$

$$E_1{}^2\sin^2 q_1 + 2E_1\sin q_1 E_2\sin(q_1+q_2) + E_2{}^2\sin^2(q_1+q_2) = (d_y)^2$$

$$(d_x)^2 + (d_y)^2 = E_1{}^2\cos^2 q_1 + 2E_1\cos q_1 E_2\cos(q_1+q_2) + E_2{}^2\cos^2(q_1+q_2) + E_1{}^2\sin^2 q_1 + 2E_1\sin q_1 E_2\sin(q_1+q_2) + E_2{}^2\sin^2(q_1+q_2)$$

$$(d_x)^2 + (d_y)^2 = E_1{}^2\underbrace{(\cos^2 q_1 + \sin^2 q_1)}_{1} + E_2{}^2\underbrace{(\cos^2(q_1+q_2) + \sin^2(q_1+q_2))}_{1} + 2E_1E_2\underbrace{(\cos q_1\cos(q_1+q_2) + \sin q_1\sin(q_1+q_2))}_{\cos q2}$$

Aplicamos Algebra de Kínder

$$(d_x)^2 + (d_y)^2 = E_1{}^2 + E_2{}^2 + 2E_1E_2\cos q_2$$

$$\cos q_2 = \frac{(d_x)^2 + (d_y)^2 - E_1{}^2 - E_2{}^2}{2E_1E_2}$$

$$\sin q_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_2}$$

$$q_2 = \tan^{-1}\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 q_2}}{\cos q_2}$$

$$\cos q_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1{}^2 - l_2{}^2}{2\, l_1 l_2} = D$$

$$q_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}\right)$$

Ejemplo MI

Para encontrar el valor de q_1

$$A_1{}^{-1} * T = A_1{}^{-1} A_1 A_2 A_3 \qquad A_1{}^{-1} * T = I A_2 A_3 \qquad A_1{}^{-1} * T = A_2 A_3$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -1R^T d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & \sin q_1 & 0 & -E_1 \\ -\sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1{}^{-1} * T = A_1{}^{-1} * A_1 * A_2$$

$$\begin{bmatrix} \cos q_1 n_x + \sin q_1 n_y & \cos q_1 s_x + \sin q1 s_y & \cos q_1 a_x + \sin q_1 a_y & \cos q_1 d_x + \sin q_1 d_y - E_1 \\ -\sin q_1 n_x + \cos q_1 n_y & -\sin q_1 s_x + \cos q_1 s_y & -\sin q_1 a_x + \cos q_1 a_y & -\sin q_1 d_x + \cos q_1 d_y \\ n_z & s_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & E_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & E_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo MI

Para encontrar el valor de q_1

$$\cos q_1 d_x + \sin q_1 d_y - E_1 = E_2 \cos q_2$$

$$-\sin q_1 d_x + \cos q_1 d_y = E_2 \sin q_2$$

$$E_2 \cos q_2 + E_1 = A = R \cos \theta$$

$$E_2 \sin q_2 = B = R \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{E_2 \sin q_2}{E_1 + E_2 \cos q_2}$$

Para encontrar el valor de q_1

$$E_1 \cos q_1 + E_2 \cos(q_1 + q_2) = d_x$$

$$E_1 \sin q_1 + E_2 \sin(q_1 + q_2) = d_y$$

$$E_1 \cos q_1 + E_2 \cos q_1 \cos q_2 - E_2 \sin q_1 \sin q_2 = d_x$$

$$E_1 \sin q_1 + E_2 \sin q_1 \cos q_2 + E_2 \cos q_1 \sin q_2 = d_y$$

$$\cos q_1 (E_1 + E_2 \cos q_2) - \sin q_1 (E_2 \sin q_2) = d_x$$

$$\sin q_1 (E_1 + E_2 \cos q_2) + \cos q_1 (E_2 \sin q_2) = d_y$$

$$E_2 \cos q_2 + E_1 = A$$

$$E_2 \sin q_2 = B$$

$$A \cos q_1 - B \sin q_1 = d_x$$

$$A \sin q_1 + B \cos q_1 = d_y$$

Para encontrar el valor de q_1

$$\cos\theta = \frac{A}{R}$$

$$\frac{d_x}{R} = \frac{A\cos q_1 - B\sin q_1}{R}$$

$$\frac{d_x}{R} = \cos q_1 \cos\theta - sinq_1 \sin\theta$$

$$\frac{d_x}{R} = \cos(q_1 + \theta)$$

$$\sin\theta = \frac{B}{R}$$

$$\frac{d_y}{R} = \frac{A\sin q_1 + B\cos q_1}{R}$$

$$\frac{d_y}{R} = sinq_1 \cos\theta + \cos q_1 \sin\theta$$

$$\frac{d_y}{R} = sin(q_1 + \theta)$$

Otra vez Algebra de Kínder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(q_1 + \theta)}{\cos(q_1 + \theta)} = \tan(q_1 + \theta) = \frac{\tan q_1 + tan\theta}{1 - \tan q_1 \tan \theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan q_1 + tan\theta}{1 - \tan q_1 \tan \theta}$$

$$\tan q_1 + tan\theta = \frac{dy}{dx}(1 - \tan q_1 \tan \theta)$$

$$\tan q_1 + tan\theta = \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} \tan q_1 \tan \theta$$

$$\tan q_1 (1 + \frac{dy}{dx} \tan \theta) = \frac{dy}{dx} - tan\theta$$

$$\tan q_1 = \frac{\frac{dy}{dx} - tan\theta}{1 + \frac{dy}{dx} \tan \theta}$$

Sustituciones básicas

$$\tan q_1 = \frac{\frac{dy}{dx} - tan\theta}{1 + \frac{dy}{dx}\tan\theta}$$

$$\tan q_1 = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{E_2 \sin q_2}{E_1 + E_2 \cos q_2}}{1 + \frac{dy}{dx}\frac{E_2 \sin q_2}{E_1 + E_2 \cos q_2}}$$

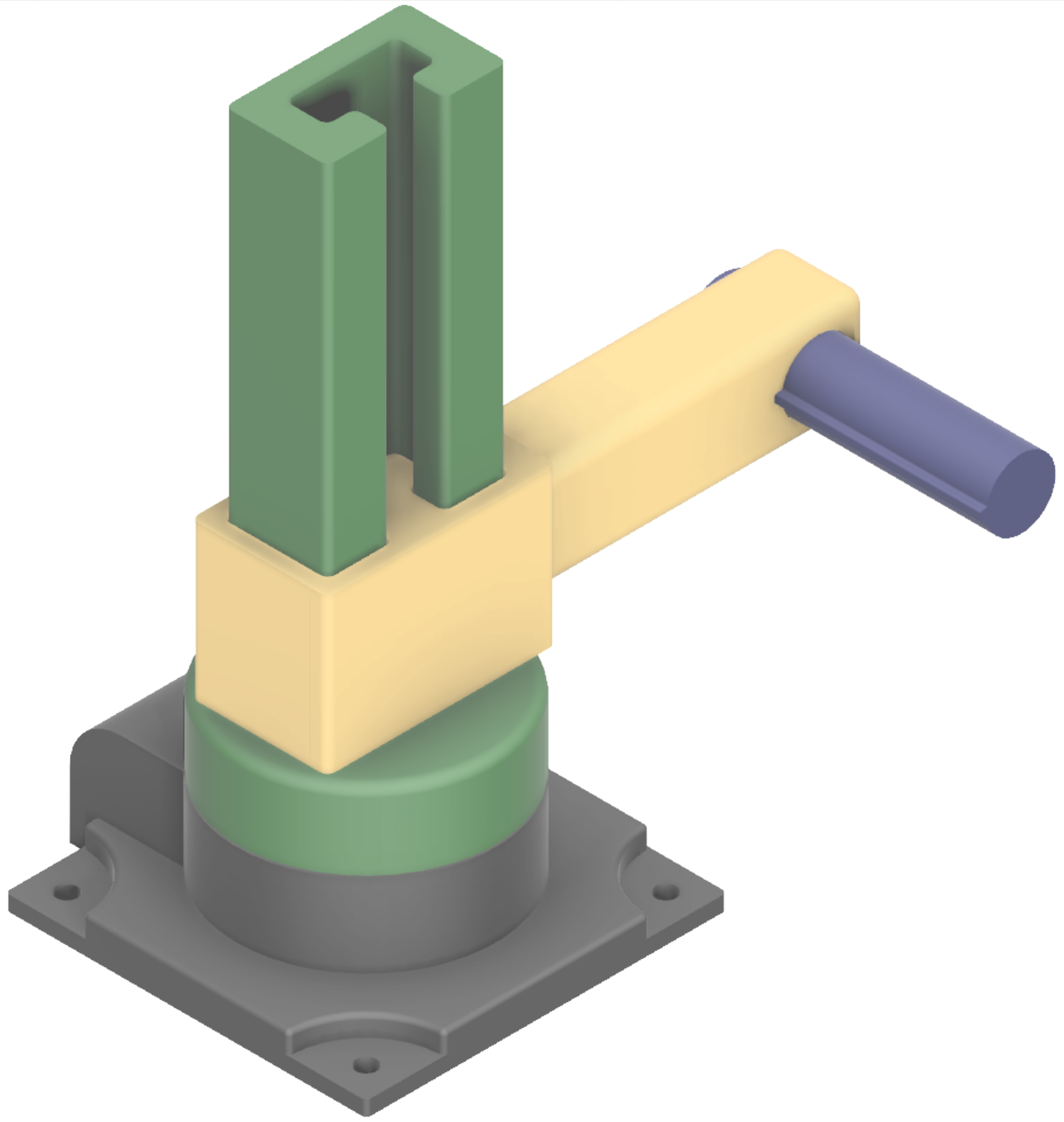
$$q_1 = \tan^{-1} \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{E_2 \sin q_2}{E_1 + E_2 \cos q_2}}{1 + \frac{dy}{dx}\frac{E_2 \sin q_2}{E_1 + E_2 \cos q_2}}$$

$$\frac{YA + XB}{XA - YB} = \frac{\frac{Y}{X} + \frac{B}{A}}{1 - \frac{Y}{X} \cdot \frac{B}{A}} = \tan\Big(\arctan(Y/X) - \arctan(B/A)\Big)$$

$$q_1 = \tan^{-1}\frac{dy}{dx} - \tan^{-1}\frac{E_2 \sin q_2}{E_1 + E_2 \cos q_2}$$

$$q1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{l_2 \sin q_2}{l1 + l2 \cos q2}\right)$$

Ejemplo MI 2



$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i	θ	d	a	α
1	q_1	0	0	0
2	90	$l_1 + q_2$	l_2	90
3	0	$l_3 + q_3$	0	0

$$T = \begin{bmatrix} -\sin q_1 & 0 & \cos q_1 & (l_3 + q_3)\cos q_1 - l_2 \sin q_1 \\ \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & (l_3 + q_3)\sin q_1 - l_2 \cos q_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo MI 2

$$A_1^{-1}T = A_2A_3$$

$$\begin{bmatrix} s_x\cos q_1 + s_y\sin q_1 & n_x\cos q_1 + n_y\sin q_1 & a_x\cos q_1 + a_y\sin q_1 & d_x\cos q_1 + d_y\sin q_1 \\ -s_x\sin q_1 + s_y\cos q_1 & -n_x\sin q_1 + n_y\cos q_1 & -a_x\sin q_1 + a_y\cos q_1 & -d_x\sin q_1 + d_y\cos q_1 \\ s_z & n_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & l_3 + q_3 \\ 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo MI 2

$$d_x \cos q_1 + d_y \sin q_1 = l_3 + q_3 \qquad -d_x \sin q_1 + d_y \cos q_1 = l_2$$

$$(d_x \cos q_1 + d_y \sin q_1)^2 + (-d_x \sin q_1 + d_y \cos q_1)^2 = (l_3 + q_3)^2 + l_2^2$$

$$d_x^2 \cos^2 q_1 + 2d_x d_y \cos q_1 \sin q_1 + d_y^2 \sin^2 q_1 + d_x^2 \sin^2 q_1 - 2d_x d_y \sin q_1 \cos q_1 + d_y^2 \cos^2 q_1 = (l_3 + q_3)^2 + l_2^2$$

$$d_x^2 + d_y^2 = (l_3 + q_3)^2 + l_2^2$$

$$q_3 = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 - l_2^2} - l_3$$

Ejemplo MI 2

$$Mv = b \qquad M = \begin{bmatrix} d_x & d_y \\ -d_y & d_x \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} \cos q_1 \\ \sin q_1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} l_3 + q_3 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad v = M^{-1}b$$

$$M^{-1} = \frac{1}{d_x^2 + d_y^2} \begin{bmatrix} d_x & -d_y \\ d_y & d_x \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

$$\begin{bmatrix} \cos q_1 \\ \sin q_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{d_x^2 + d_y^2} \begin{bmatrix} d_x & -d_y \\ d_y & d_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_3 + q_3 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo MI 2

$$\cos q_1 = \frac{d_x(l_3+q_3) - d_y l_2}{d_x^2 + d_y^2}, \qquad \sin q_1 = \frac{d_y(l_3+q_3) + d_x l_2}{d_x^2 + d_y^2}$$

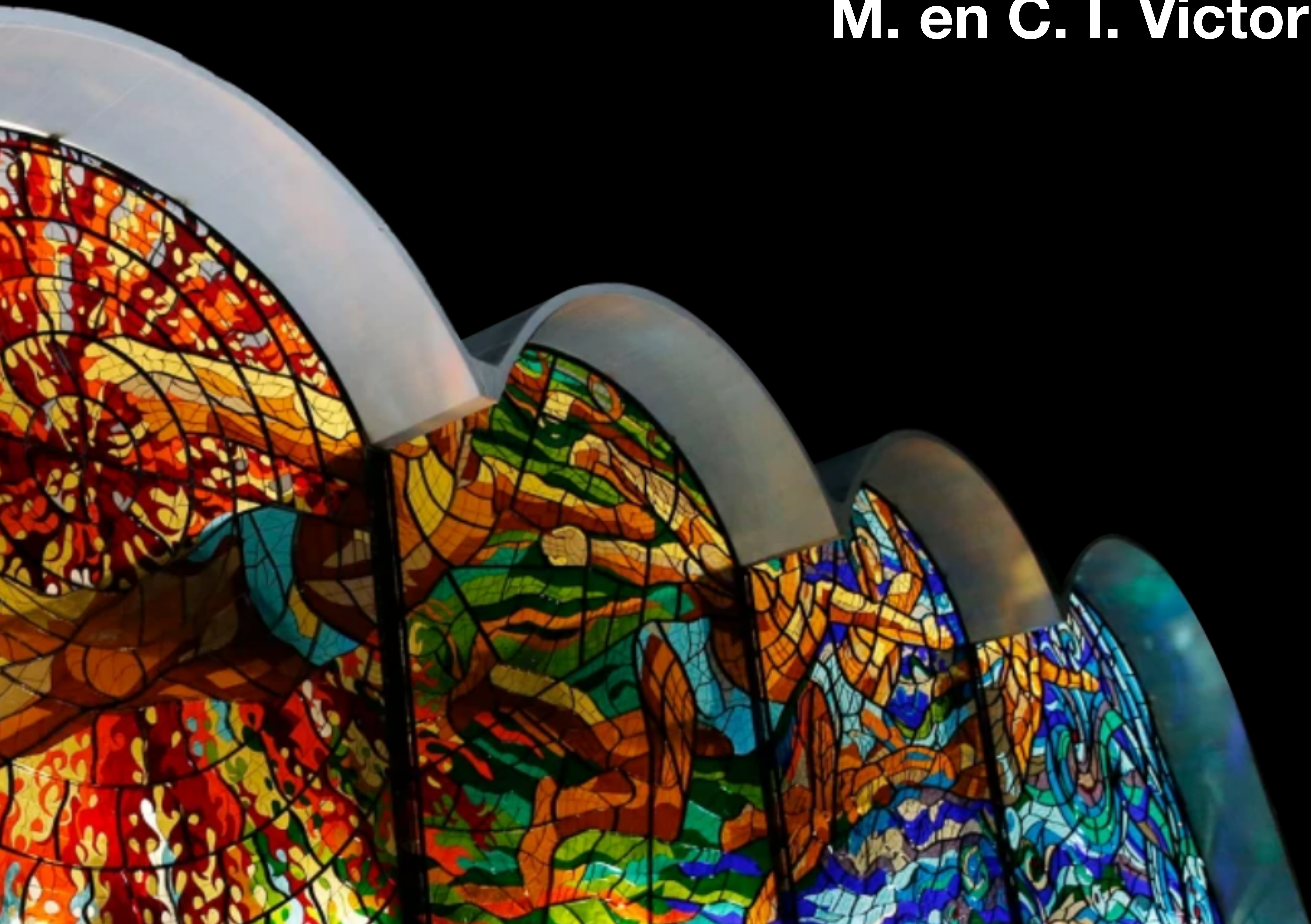
$$\tan q_1 = \frac{\sin q_1}{\cos q_1} = \frac{d_y(l_3+q_3) + d_x l_2}{d_x(l_3+q_3) - d_y l_2}$$

$$\frac{YA + XB}{XA - YB} = \frac{\frac{Y}{X} + \frac{B}{A}}{1 - \frac{Y}{X}\cdot\frac{B}{A}} = \tan\Big(\arctan(Y/X) - \arctan(B/A)\Big)$$

$$q_1 = \arctan\left(\frac{d_y(l_3+q_3) + d_x l_2}{d_x(l_3+q_3) - d_y l_2}\right) = \arctan\left(\frac{d_y}{d_x}\right) - \arctan\left(\frac{l_2}{l_3+q_3}\right)$$

Robótica

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



UNIDAD IV
Desacoplo cinemático

Desacoplo cinemático

¿Qué es? y ¿Para qué se ocupa?

- El desacoplo cinemático es un concepto fundamental en robótica y control de sistemas mecánicos.

- Se refiere a la capacidad de controlar los movimientos de un sistema en diferentes partes de manera independiente, sin que el movimiento de una parte afecte directamente el movimiento de otras partes.

- Esto es esencial en aplicaciones robóticas, ya que permite una mayor flexibilidad y precisión en el control del robot.

Desacoplo cinemático

¿Qué es? y ¿Para qué se ocupa?

- Consideremos un ejemplo simple. Un brazo robótico con tres articulaciones que se utilizan para mover una herramienta en el extremo del brazo.

- Si estas articulaciones están perfectamente desacopladas entre sí, significa que se puede mover cada articulación de forma independiente sin que afecte la posición o la orientación de la herramienta en el extremo del brazo.

- Sin embargo, en la realidad, es difícil lograr un desacople cinemático perfecto, ya que las articulaciones de un robot suelen estar conectadas de alguna manera y pueden tener ciertas interacciones.

Desacoplo cinemático

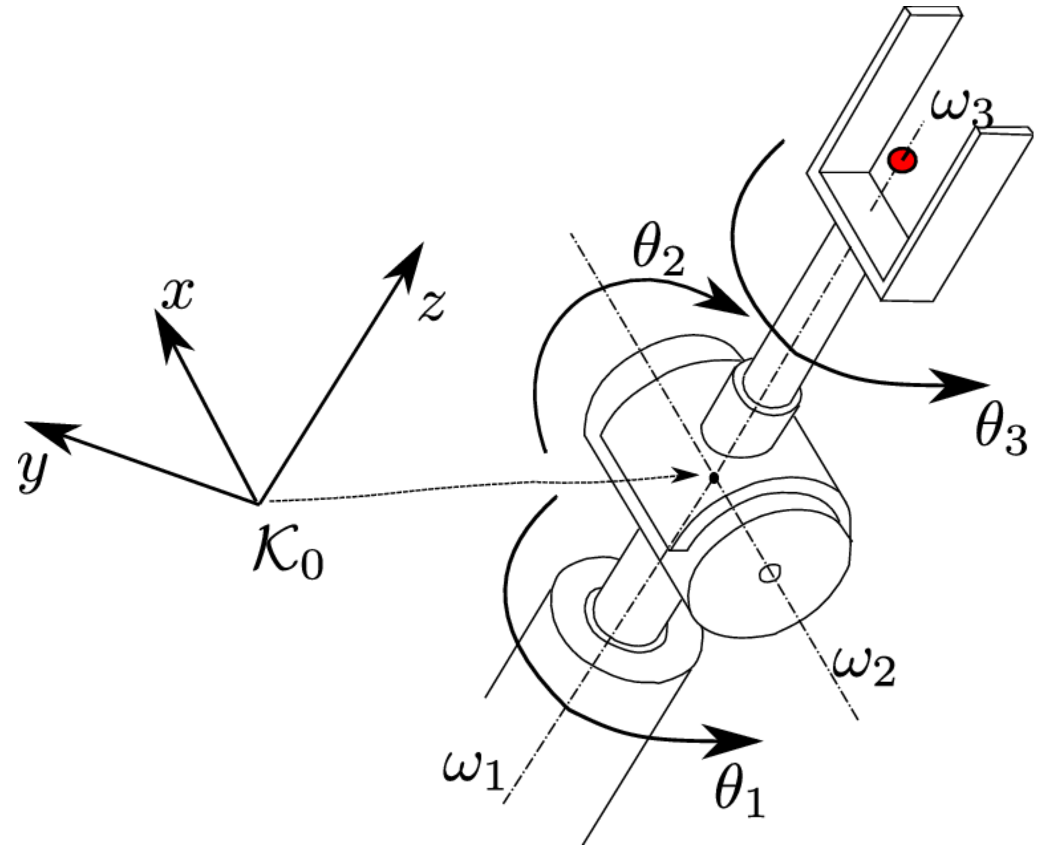
¿Por qué usar desacoplo cinemático?

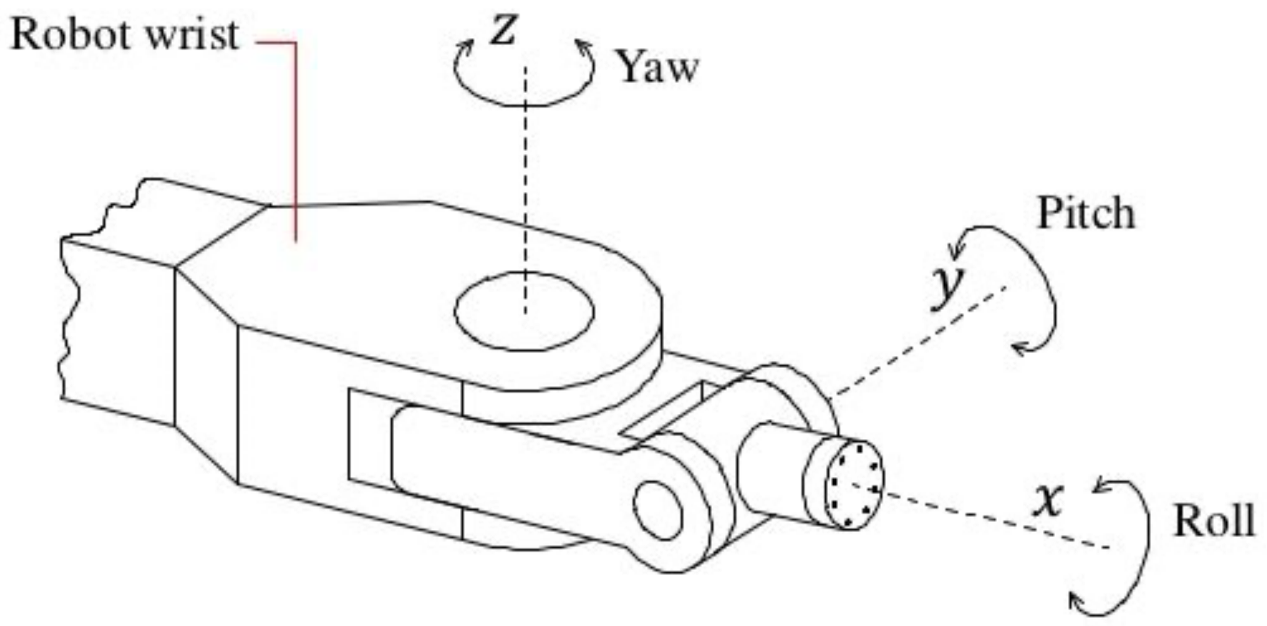
- **Control Preciso**: Permite un control preciso de cada articulación del robot o componente del sistema sin la necesidad de preocuparse por las influencias no deseadas de otras partes.
- **Facilita la Programación**: Simplifica la programación del robot, ya que los movimientos de las articulaciones pueden tratarse de forma independiente, lo que hace que la programación sea más intuitiva y eficiente.
- **Adaptabilidad**: Un sistema con desacople cinemático puede adaptarse más fácilmente a cambios en el entorno o en la tarea que se le asigna, ya que es más versátil y menos rígido en sus movimientos.
- **Seguridad**: En situaciones críticas, como la interacción con humanos, un robot con desacople cinemático puede detener rápidamente un movimiento en una parte del cuerpo sin afectar las demás partes, lo que puede mejorar la seguridad.

Desacoplo cinemático

¿Qué es? y ¿Para qué se ocupa?

- Forma parte de la cinemática directa e inversa
- Se puede aplicar en robots donde los últimos 3 DOFs cortan en un mismo punto
- Separar el problema de la cinematica en dos:
    - Posición
    - Orientación





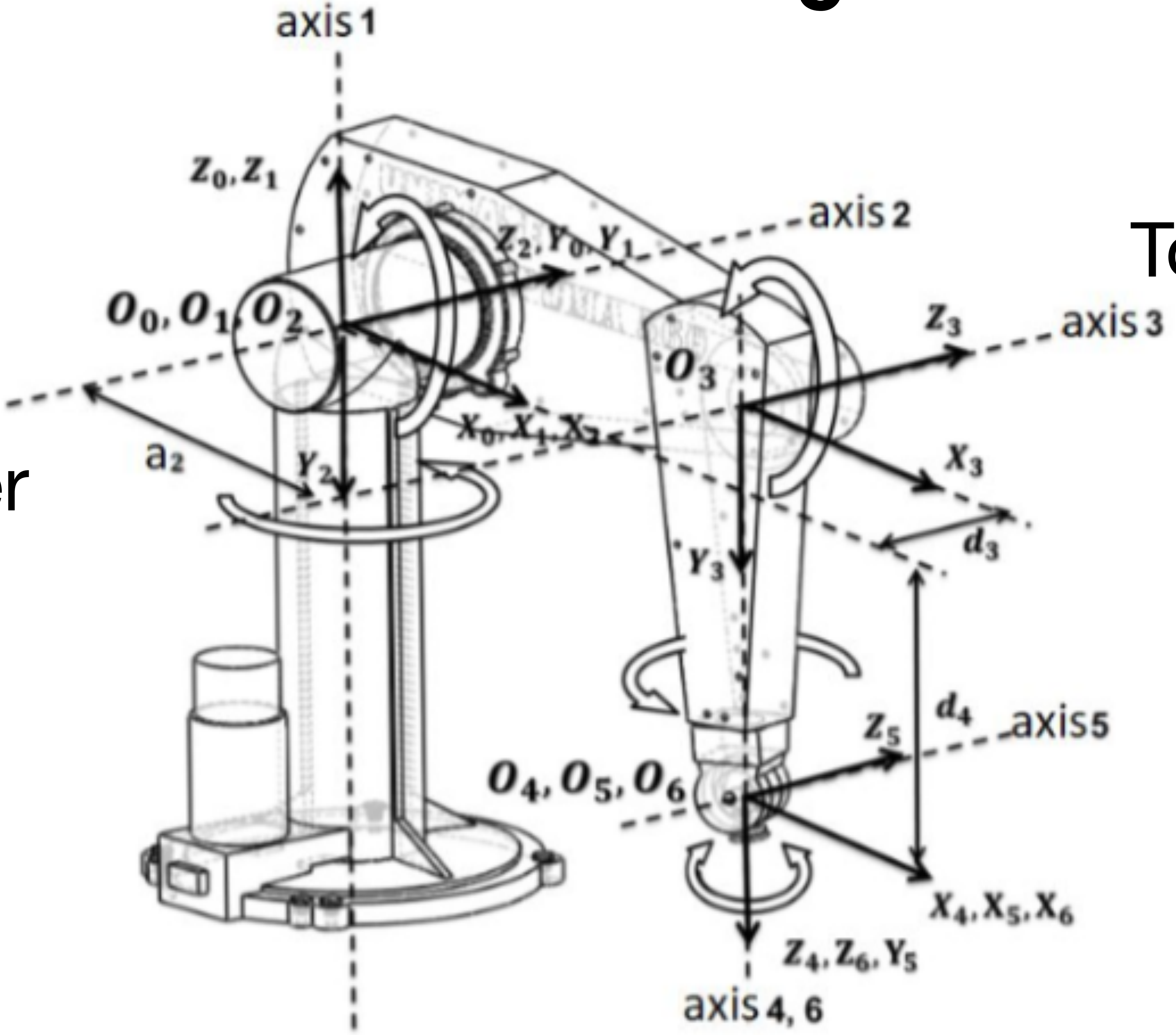
Desacoplo cinemático

¿Cómo se hace la separación?

Posición

Encontrar la posición del punto de intersección

Se puede utilizar cualquier método visto anteriormente



Orientación

Tomar el punto como inicio para una nueva solución

Solo se debe encontrar la rotación

Expresión matemática

$$R_6^0 = (q_1, \ldots, q_6) = R$$

$$p_6^0 = (q_1, \ldots, q_6) = p$$

- Consideramos que Z_3, Z_4 y Z_5 se interceptan en p

$$p = p_c^0 + d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad p_c^0 = p - d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Expresión matemática

- El marco de referencia del elemento terminal esta definido por $s_6x_6y_6z_6$
- La posición de los componentes del elemento terminal están definidos por $p_xp_yp_z$
- Los componentes del centro del wrist p_c^0 está denotado por $x_cy_cz_c$

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - d_6r_{13} \\ p_y - d_6r_{23} \\ p_z - d_6r_{33} \end{bmatrix}$$

Desacoplo cinemático

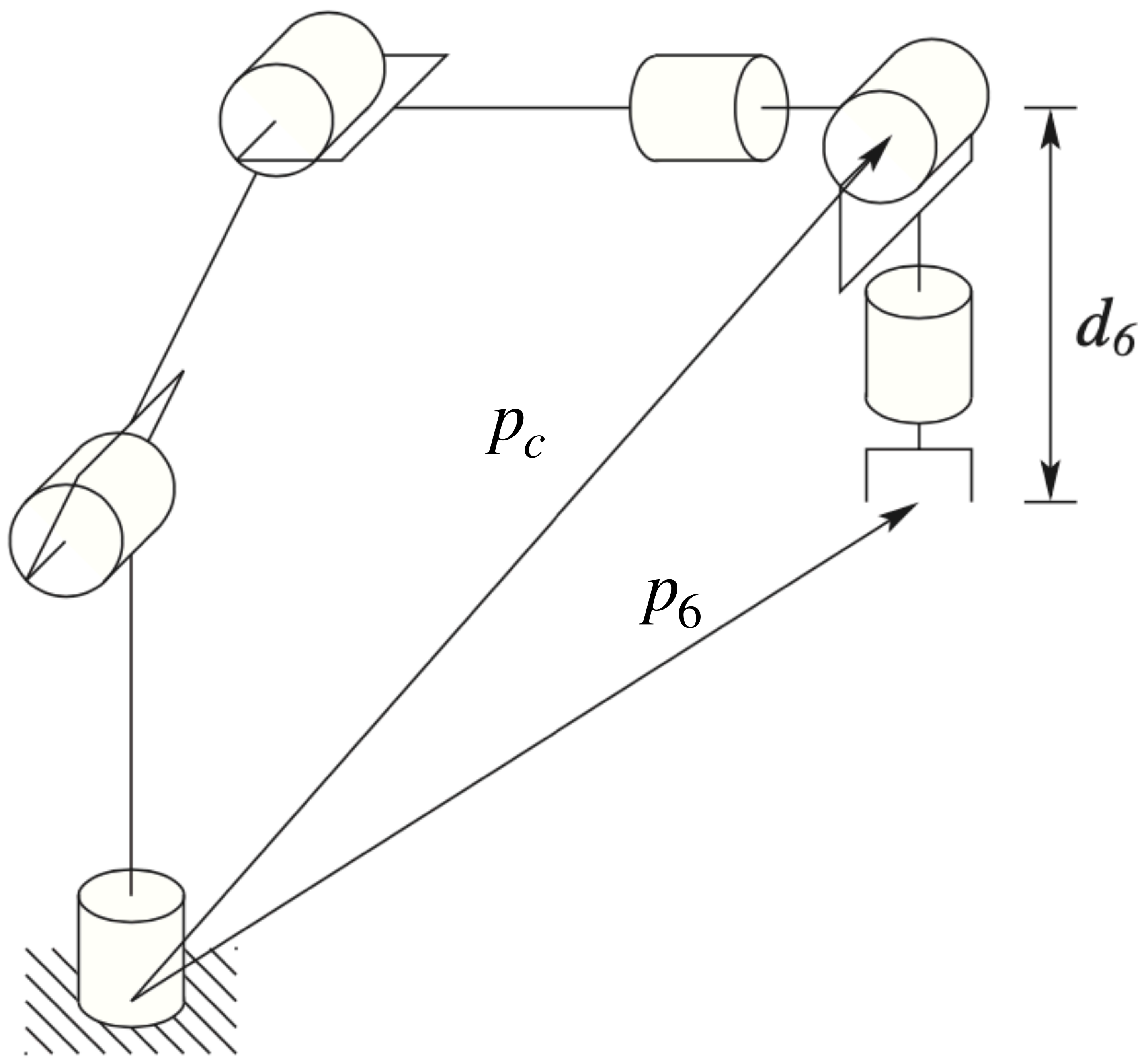
Expresión matemática

- Por definición, la orientación de los tres primeros DoF R_3^0
- Se puede determinar la orientación relativa del ET

$$R = R_3^0 R_6^3$$

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1} R = (R_3^0)^T R$$

- Tal como se vio en la parametrización de las rotaciones R_6^3 se puede resolver utilizando las ecuaciones de los ángulos de Euler



Desacoplo cinemático

¿Qué se necesita para aplicar?

- Un robot de 6DoF
- Wrist donde coincidan s_3, s_4 y s_5
- Aplicar DH
- Aplicar cualquier modelo inverso para A_1, A_2 y A_3

Ejemplo robot articulado

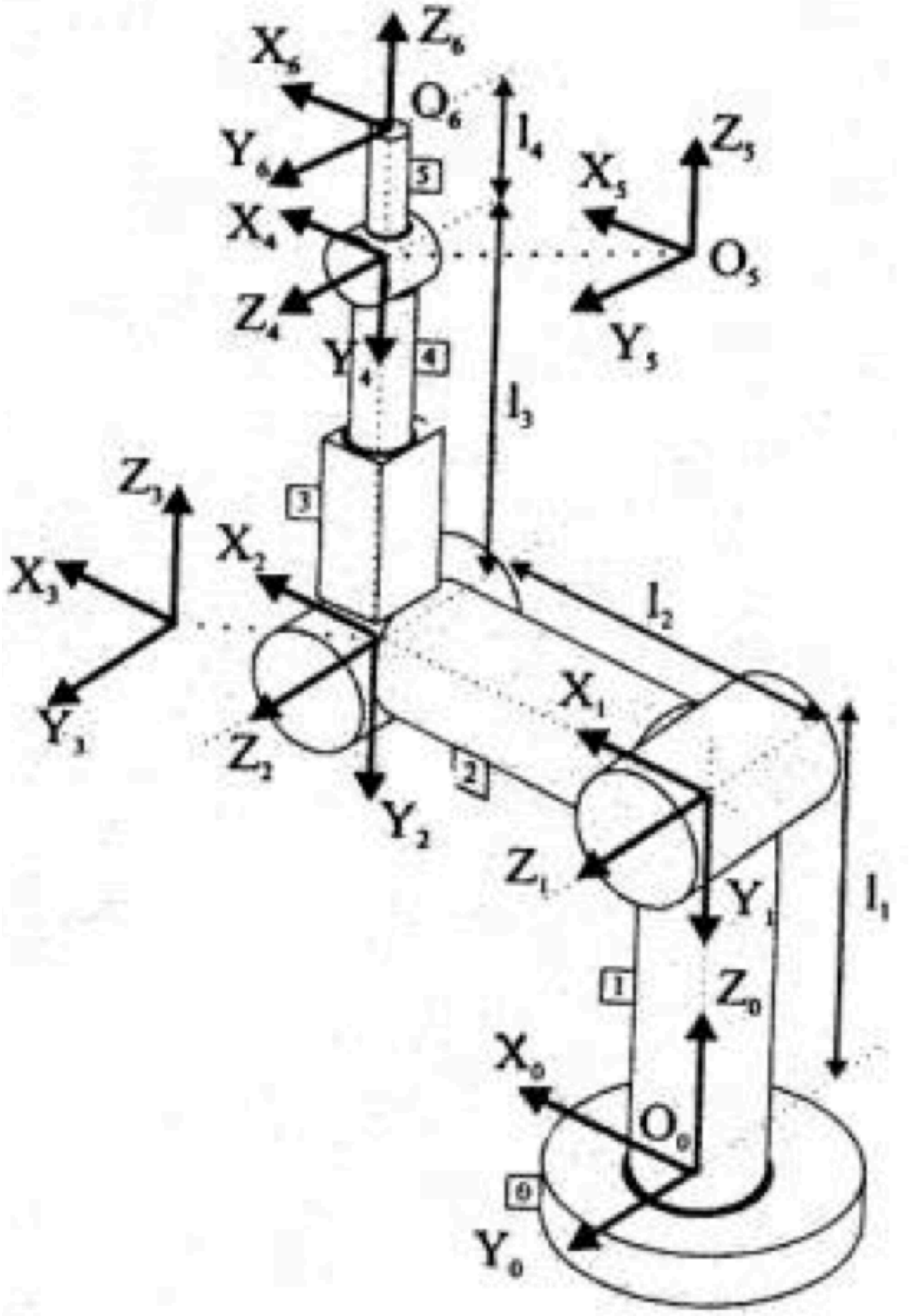


Tabla de parámetros DH

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	-90
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	0	90
4	q_4	l_3	0	-90
5	q_5	0	0	90
6	q_6	l_4	0	0

Desacoplo cinemático

Ejemplo robot articulado

$$T_0^6 = \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4c_5c_6 - s_1s_4c_5c_6 - c_1s_{23}s_5c_6 - c_1c_{23}c_4s_6 - s_1s_4s_6 & -c_1c_{23}c_4c_5s_6 + c_1c_{23}c_4s_5c_6 - s_1s_4s_6 & c_1c_{23}s_4 + s_1c_4 & l_2c_1c_2 + l_3(c_1c_{23}c_4 - s_1s_4) + l_4 \\ s_1c_{23}c_4c_5c_6 + c_1s_4c_5c_6 - s_1s_{23}s_5c_6 - s_1c_{23}c_4s_6 + c_1s_4s_6 & -s_1c_{23}c_4c_5s_6 + s_1c_{23}c_4s_5c_6 + c_1s_4s_6 & s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & l_2s_1c_2 + l_3(s_1c_{23}c_4 + c_1s_4) + l_4 \\ -s_{23}c_4c_5c_6 - c_{23}s_5c_6 + s_{23}c_4s_6 & s_{23}c_4c_5s_6 + c_{23}s_5s_6 & c_{23}c_4 & l_1 - l_2s_2 - l_3s_{23}c_4 + l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desacoplo cinemático

Ejemplo robot articulado

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & l_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & l_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & 0 & \sin q_3 & 0 \\ \sin q_3 & 0 & -\cos q_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^3 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos(q_2 + q_3) & -\sin q_1 & \cos q_1 \sin(q_2 + q_3) & l_2 \cos q_1 \cos q_2 \\ \sin q_1 \cos(q_2 + q_3) & \cos q_1 & \sin q_1 \sin(q_2 + q_3) & l_2 \sin q_1 \cos q_2 \\ -\sin(q_2 + q_3) & 0 & \cos(q_2 + q_3) & l_1 - l_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desacoplo cinemático

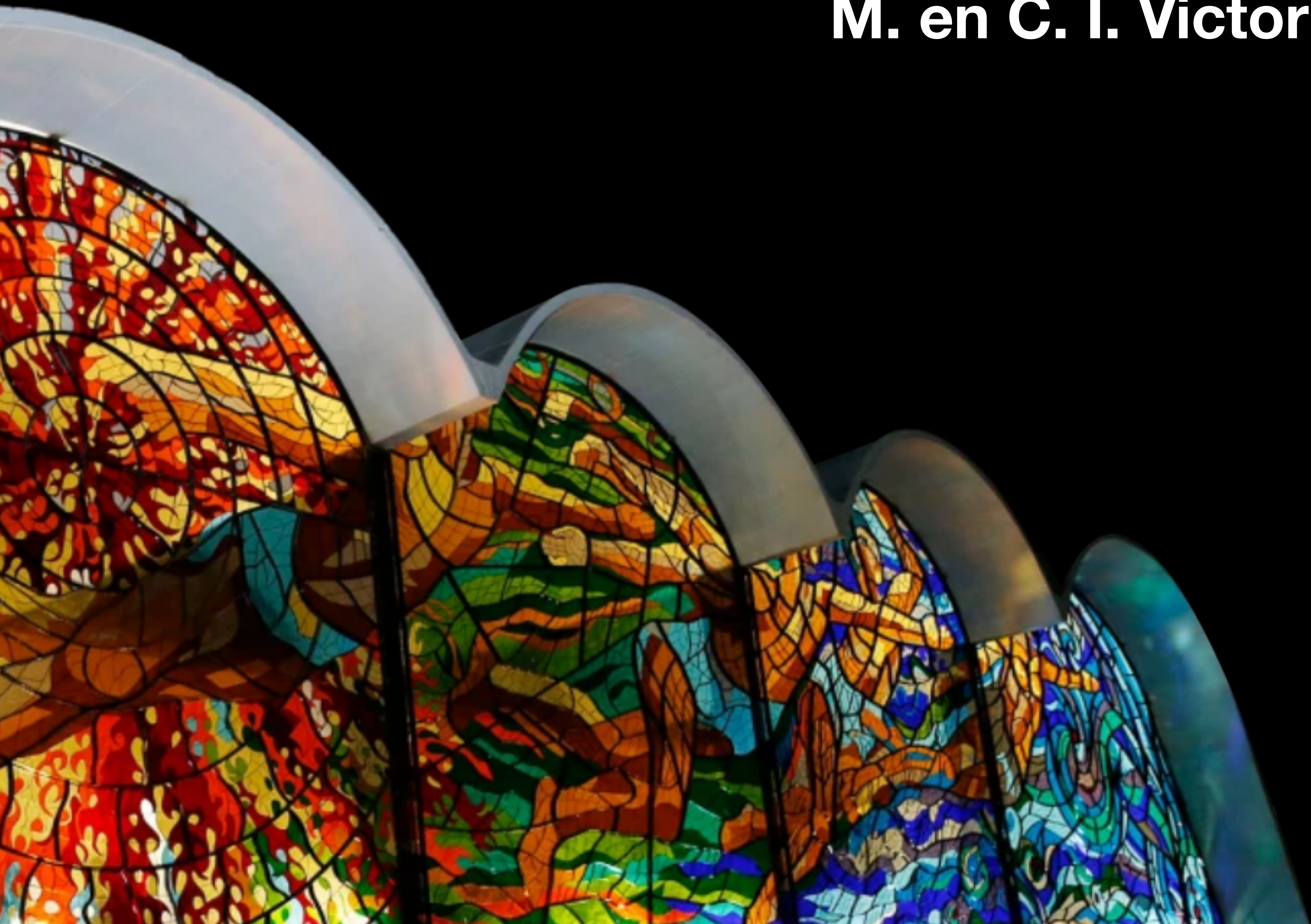
Ejemplo robot articulado

$$\begin{bmatrix} cq_4 & 0 & -sq_4 \\ sq_4 & 0 & cq_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cq_5 & 0 & sq_5 \\ sq_5 & 0 & -cq_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cq_6 & -sq_6 & 0 \\ sq_6 & cq_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cq_4cq_5cq_6 - sq_4sq_6 & -cq_4cq_5sq_6 - sq_4cq_6 & cq_4sq_5 \\ sq_4cq_5cq_6 + cq_4sq_6 & -sq_4cq_5sq_6 + cq_4cq_6 & -sq_4cq_5 \\ -sq_5cq_6 & sq_5cq_6 & cq_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} R_{13} = cq_4sq_5 \\ R_{23} = -\, sq_4cq_5 \\ R_{33} = cq_5 \\ R_{31} = -\, sq_5cq_6 \\ R_{32} = sq_5cq_6 \end{gathered} \qquad \Longrightarrow$$

Robótica

M. en C. I. Victor Manuel Montaño Serrano



UNIDAD IV
Modelo Cinemático

Propagación de velocidades

¿Qué es?

- Podemos determinar la relación de las velocidades mediante la jacobina de la cinemática directa.
- La jacobina se puede usara para:
  - Planificación y ejecución de trayectorias suaves.
  - Determinación de configuraciones singulares.
  - Derivar las ecuaciones dinámicas.
  - Transformación de fuerzas y pares desde ET.

Propagación de velocidades

¿Qué es?

- La cinemática directa nos da la posición y orientación del efector final en función de las articulaciones $Q = [q_1, q_2, \ldots q_n]^T$

$$X = f(Q)$$

- Si derivamos respecto al tiempo:

$$\dot{x} = \frac{\partial f(Q)}{\partial q}\dot{q}$$

- El término $\frac{\partial f(Q)}{\partial q}$ es la matriz Jacobiana $J(Q)$.

Propagación de velocidades

¿Cómo se propagan las velocidades?

- Para cada eslabón i, se calcula:

Velocidad angular ω_i Velocidad lineal v_i

- Se propagan desde el eslabón anterior $i-1$ mediante las ecuaciones:

Articulaciones revolución

$$J_{v_i} = z_{i-1} \times o_n - o_{i-1}$$

$$J_{\omega_i} = z_{i-1}$$

Articulaciones prismáticas

$$J_{v_i} = z_{i-1}$$

$$J_{\omega_i} = 0$$

Matriz antisimetrica

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(a)b = a \times b$$

$$a \times b = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

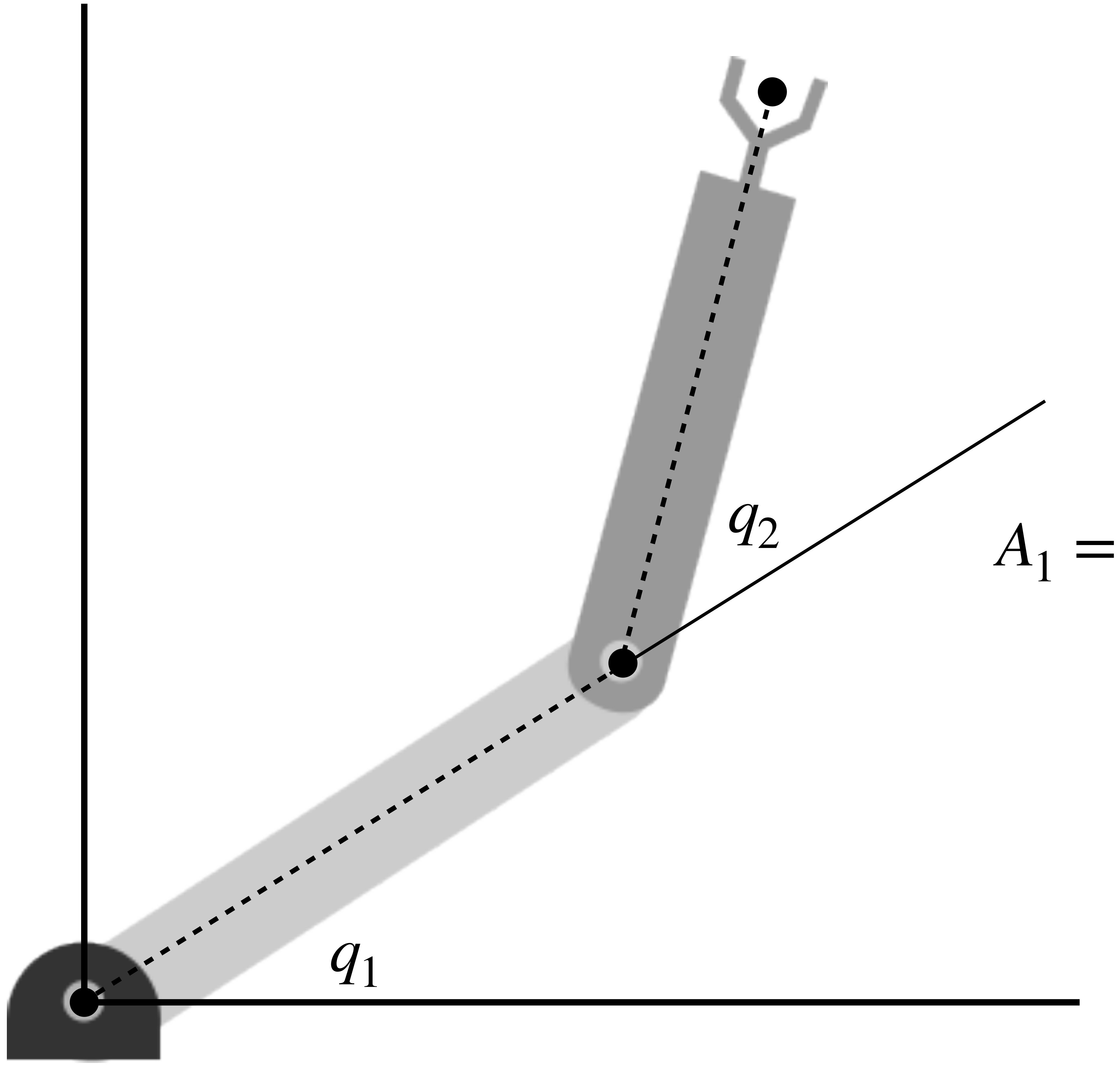
¿Cómo se propagan las velocidades?

- Después propagar las velocidades, se puede escribir la velocidad del efector final en función de todas las velocidades articulares $\dot{q}_1$:

$$J(Q) = \begin{bmatrix} J_{v_i} \\ J_{\omega_n} \end{bmatrix}$$

- Se propagan desde el eslabón anterior $i - 1$ mediante las ecuaciones:

Ejemplo 1



θ_i	d_i	a_i	α_i
q_1	0	l_1	0
q_2	0	l_2	0

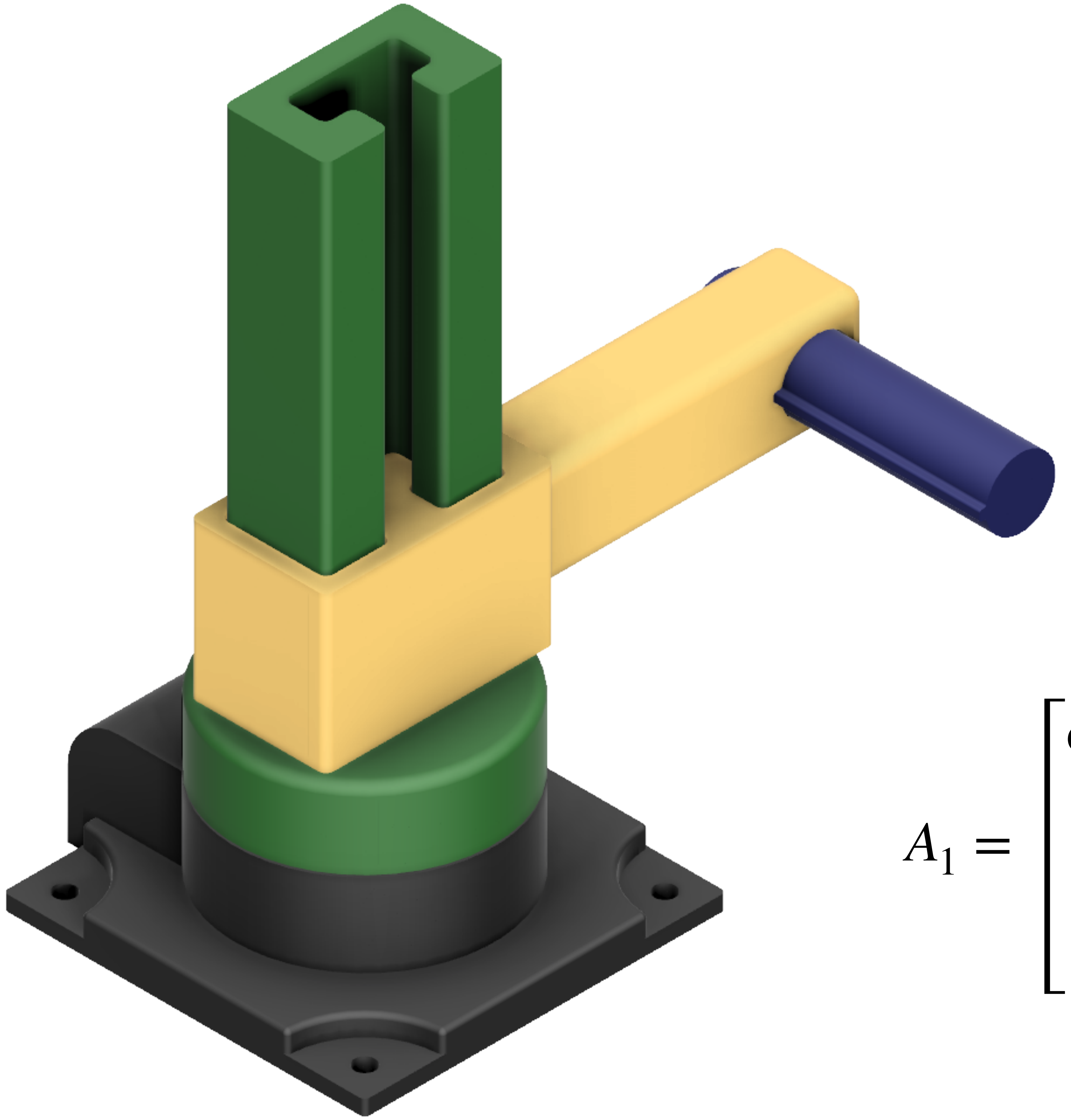
$$A_1 = \begin{bmatrix} cq_1 & -sq_1 & 0 & l_1 * cq_1 \\ sq_1 & cq_1 & 0 & l_1 * sq_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} cq_2 & -sq_2 & 0 & l_2 * cq_2 \\ sq_2 & cq_2 & 0 & l_2 * sq_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = A_1 A_2 \begin{bmatrix} cq_{12} & -sq_{12} & 0 & l_1 * cq_1 + l_2 * cq_{12} \\ sq_{12} & cq_{12} & 0 & l_1 * sq_1 + l_2 * sq_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

$$J(Q) = \begin{bmatrix} z_0 \times o_2 - o_0 & z_1 \times o_2 - o_1 \\ z_0 & z_1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2



i	θ	d	a	α
1	q_1	0	0	0
2	90	$l_1 + q_2$	l_2	90
3	0	$l_3 + q_3$	0	0

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} -\sin q_1 & 0 & \cos q_1 & -l_2 \sin q_1 \\ \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & l_2 \cos q_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} -\sin q_1 & 0 & \cos q_1 & (l_3 + q_3)\cos q_1 - l_2 \sin q_1 \\ \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & (l_3 + q_3)\sin q_1 - l_2 \cos q_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

$$o_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad o_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad o_2 = \begin{bmatrix} -l_2 \sin q_1 \\ l_2 \cos q_1 \\ l_1 \cos q_2 \end{bmatrix} \quad o_3 = \begin{bmatrix} (l_3 + q_3)\cos q_1 - l_2 \sin q_1 \\ (l_3 + q_3)\sin q_1 - l_2 \cos q_1 \\ l_1 + q_2 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \\ \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad z_3 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \\ \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

$$J_{v_1} = z_0 \times (o_3 - o_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (l_3 + q_3)\cos q_1 - l_2 \sin q_1 \\ (l_3 + q_3)\sin q_1 + l_2 \cos q_1 \\ l_1 + q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left((l_3 + q_3)\sin q_1 + l_2 \cos q_1\right) \\ (l_3 + q_3)\cos q_1 - l_2 \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\omega_1} = z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Propagación de velocidades

Ejemplo 2

$$J_{v_2} = z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad J_{\omega_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{v_3} = z_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \\ \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad J_{\omega_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_{v_1} & J_{v_2} & J_{v_3} \\ J_{\omega_1} & J_{\omega_2} & J_{\omega_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left((l_3 + q_3)\sin q_1 + l_2 \cos q_1\right) & 0 & \cos q_1 \\ (l_3 + q_3)\cos q_1 - l_2 \sin q_1 & 0 & \sin q_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobiana Analítica

- Si $R = Rz, \psi, R_{y,\theta}, R_{z,\phi}$. Entonces $\dot{R} = S(\omega)R$.

$$\omega = \begin{bmatrix} \cos\psi \sin\theta\dot{\phi} - \sin\psi\dot{\theta} \\ \sin\psi \sin\theta\dot{\phi} + \cos\psi\dot{\theta} \\ \cos\theta\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\sin\theta & \sin\psi & 0 \\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = B(\alpha)\dot{\alpha}$$

Propagación de velocidades

Jacobiana Analítica

- Si se combinan las relaciones de velocidad con la de la Jacobiana se tiene:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} d \\ B(\alpha)\dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha) \end{bmatrix} J_a(q)\dot{q}$$

Jacobiana Analítica

- La Jacobiana analítica se puede calcular de la Jacobiana Geométrica como:

$$J_a(q) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} J(q)$$

- Siempre y cuando

$$det B(\alpha) \neq 0$$

Propagación de velocidades

Jacobiana Analítica

$$J_a(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \phi}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \theta}{\partial q_1} & \frac{\partial \theta}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \theta}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \psi}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Propagación de velocidades

Jacobiana Analítica

$$\begin{cases} x = (l_3 + q_3)\cos q_1 - l_2 \sin q_1 \\ y = (l_3 + q_3)\sin q_1 - l_2 \cos q_1 \\ z = l_1 + q_2 \end{cases}$$

$$J_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_3 + q_3)\sin q_1 - l_2 \cos q_1 & 0 & \cos q_1 \\ (l_3 + q_3)\cos q_1 + l_2 \sin q_1 & 0 & \sin q_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobiana Analítica

$$\begin{cases} \phi = q_1 \\ \theta = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \qquad J_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_a(q) = \begin{bmatrix} -(l_3 + q_3)\sin q_1 - l_2 \cos q_1 & 0 & \cos q_1 \\ (l_3 + q_3)\cos q_1 + l_2 \sin q_1 & 0 & \sin q_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$