

Zadanie indywidualne

Całkowanie metodą złożonych trapezów

Autor:
Marcin Smarzewski

1 Metoda złożonych trapezów

Całkowanie złożoną metodą trapezów jest metodą numeryczną, mającą na celu obliczenie przybliżonej wartości całki oznaczonej. Metoda ta polega na podzieleniu przedziału na równe podprzedziały - ilość podprzedziałów oznacza precyzję, im więcej podprzedziałów(trapezów) tym wynik będzie bardziej zbliżony do poprawnego. Przybliżenie wartości całki wygląda w następujący sposób:

1. a_n - wartość funkcji na początku n-tego podprzedziału(I podstawa trapezu)
2. b_n - wartość funkcji na końcu n-tego podprzedział(II podstawa trapezu)
3. h - długość podprzedziału oraz długość trapezu

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{n=1}^{precyzja} \frac{a_n + b_n}{h}$$

2 Działanie programu

2.1 Przetwarzanie danych

2.1.1 Przetwarzanie danych wejściowych z terminala

Dane wejściowe wpisane w terminalu są parsowane ze względu na kolejność wykonywania działań która nie musi być zachowana przez użytkownika. Funkcja wpisana przez użytkownika zamieniana jest na odwrotną notację polską w funkcji RPN(listing 1.) Korzysta ona z algorytmu Shunting yard który w liście kroków przedstawia się następująco:

1. Pobierz element
2. Jeśli aktualny element jest x'em lub jest liczbą->zwróć go na wyjściu
3. Jeśli element jest operatorem i stos jest pusty lub jest nawiasem otwierającym -> wrzucić go na stos
4. Jeśli element jest operatorem(lub funkcją) o **WIĘKSZYM** priorytecie niż aktualny element na górze stosu -> wrzucić go na stos
5. Jeśli element jest operatorem(lub funkcją) o **MNIEJSZYM** priorytecie niż aktualny element na górze stosu -> zwracaj elementy ze stosu na wyjściu do napotkania elementu o mniejszym bądź równym priorytecie lub wyczerpaniu stosu lub do napotkania nawiasu otwierającego
6. Jeśli element jest nawiasem zamykającym -> zwracaj elementy ze stosu do napotkania nawiasu otwierającego -> zdejmij nawias otwierający ze stosu
7. Jeśli można pobrać następny element -> przejdź do kroku 1.

2.1.2 Przetwarzanie danych wejściowych z pliku testowego

Przetwarzanie samych danych(funkcji) jest identyczne jak w przypadku danych przyjętych z terminala. Format pliku testowego wygląda następująco:

Wiersz 2n-1 - Funkcja której wartość będzie obliczona przez program

Wiersz 2n - Wartość funkcji obliczona oraz wpisana przez użytkownika

Listing 1: Funkcja RPN

```
string RPN(string equation){           //checkString(string) usuwa spacje oraz
equation=checkString(equation); //dodaje * miedzy cyframi oraz funkcjami
    equation=fixSpaces(equation);    //fixSpaces(string) dodaje spacje
    cout<<endl<<equation<<endl;      //wokol operatorow
    stack<string>ostack;
    string curr,result="";
    istringstream temp(equation);
    while(temp>>curr){
        if(isdigit(curr[0])||curr=="x"){
            result+=curr+"_";
        }
        else if(isOperator(curr)){
            if(ostack.empty()||curr=="(") ostack.push(curr);
            else{
                while(!ostack.empty()
                    &&rnpPrio(curr)<=rnpPrio(ostack.top())
                    &&ostack.top()!="("){
                    result+=ostack.top()+"_";
                    ostack.pop();
                }
                if(curr==")" ostack.pop();
                else ostack.push(curr);
            }
        }
    }
    while(!ostack.empty()){
        result+=ostack.top()+"_";
        ostack.pop();
    }
    return result;
}
```

3 Obliczanie całki

Po przetworzeniu danych wejściowych na odwrotną notację polską program oblicza sumę funkcji

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{n=1}^{\text{precyzja}} \frac{a_n + b_n}{h}$$

Oblicza to w funkcji `calculateIntegral`(listing 2). W funkcji przypisanie `a=b` po dodaniu aktualnego trapezu do sumy pozwala zaoszczędzić niepotrzebnemu liczeniu ówczśnie policzonej funkcji(początek przedziału `n+1` jest końcem przedziału `n`).

Funkcja `evalFun`(listing3) oblicza wartość wyrażenia ONP dla aktualnego końca przedziału. Aby obliczyć funkcję elementarne(trigonometryczne, logarytmiczne itp.).

Funkcja używa biblioteki `<functional>`. Dzięki niej nie musimy definiować oddzielnie przypadków wywołania danej funkcji, lecz możemy zdefiniować uniwersalną funkcję wywołującą(listing 4).

Listing 2: `calculateIntegral`

```
double calculateIntegral(double start , double stop ,
                        int precision , string equation) {
    string RPNV=RPN(equation);
    double result=0,width,a=evalFun(RPNV,start),b;
    width =(stop-start)/precision;
    for (int i=0;i<precision;i++){
        b=evalFun(RPNV,start+width*i);
        result+=((a+b)*width) / 2;
        a=b;
    }
    return result;
}
```

Listing 3: evalFun

```

double evalFun(string RPNV,double value){
    stack<string>operrands;
    double result=0,pres,num1,num2;
    istringstream temp(RPNV);
    string x;
    while(temp>>x)
    {
        if(isdigit(x[0])){
            operrands.push(x);
        }
        else if(x=="x"){
            operrands.push(to_string(value));
        }
        else if(x=="pi") operrands.push(to_string(M_PI));
        else if(isFunc(x)){
            pres=eval(func[x],stod(operrands.top()));
            operrands.pop();
            operrands.push(to_string(pres));
        }
        else if(isOperator(x)){ //Sprawdza czy dany element jest operatorem lub
            num2=stod(operrands.top());
            operrands.pop();
            num1=stod(operrands.top());
            operrands.pop();
            pres=basicOperation(x,num1,num2);
            operrands.push(to_string(pres));
        }
    }
    if(operrands.size()==1) result+=stod(operrands.top());
    return result;
}

```

Listing 4: Przeliczanie funkcji zwracającej typ double oraz przyjmującej typ double w zależności od zmiennej x

```

double eval(function<double(double)> func, double x)
    return func(x);
}
}

```

3.1 Zaimplementowane funkcję oraz działania matematyczne

W programie zostały zaimplementowane podstawowe działania arytmetyczne (dodawanie, odejmowanie, dzielenie oraz mnożenie) oprócz tego zostały dodane wszystkie funkcję trygonometryczne (bez funkcji cyklometrycznych), funkcja logarytmu naturalnego, pierwiastka kwadratowego, funkcja wykładnicza oraz potęgowanie. Zostały one zdefiniowane w globalnej mapie `func` (listing 6).

3.1.1 Format danych

Program jest w stanie przeliczyć to jakiekolwiek wyrażenie matematyczne które korzysta z zaimplementowanych funkcji oraz operacji matematycznych. Przy czym format danych ma pare reguł:

1. Argumenty funkcji zawsze piszemy w nawiasach tzn. $\sin(x)$ jest poprawnym zapisem przy czym $\sin x$ nie.
2. Przed funkcją oraz x 'em może stać cyfra co będzie poprawnym zapisem (funkcja `checkString` wstawi tam znak mnożenia)
3. Gdy nawiasy nie będą domknięte program odrzuci funkcję wypisując przy tym odpowiedni błąd
4. Program powinien korzystać tylko ze zdefiniowanych funkcji ze względu że nie obsługuje on błędów odczytu, nie obliczy funkcji \arcsin ze względu na to że nie jest ona w nim zadeklarowana - program najprawdopodobniej zakończy się przy takim wczytaniu

3.2 Zalety rozwiązania

Główną zaletą rozwiązania są:

1. Jest szybkie przybliżenie wartości całki bez używania do tego wzorów matematycznych lub całkowania metodą analityczną. W przypadku bardziej skomplikowanych całek jest to często szybsze niż ich analityczne obliczenie.
2. Niektóre całki nie posiadają analitycznych rozwiązań, a więc rozwiązanie numeryczne jest dobrym sposobem na przybliżenie jej wartości.

3.3 Wady rozwiązania

Głównymi wadami rozwiązania są następujące wady:

1. Rozwiązanie nie determinuje całkowalności funkcji na danym przedziale, lecz wypisze poprawny wynik. Przykładem może być funkcja $\text{ctg}(x)$ na przedziale $[0,1]$ oraz dokładności 5 program wypisze wartość liczbową gdy całka jnie jest zbieżna(listing 5).
2. Rozwiązanie jest w stanie przybliżyć wartość tej funkcji, ogranicza go dokładność oraz użyty typ danych, także w niektórych przypadkach wyniki będą różnić się od teoretycznych.

Listing 5: oraz precyzją 5]ctg(x) w przedziale [-1,1] oraz precyzją 5
Program liczący całkę oznaczoną złożoną metodą trapezów
1—Wpisz funkcję **do** obliczenia całki
2—Dane testowe pobierane z pliku
3—Zakończ
1
Wpisz funkcję którą chcesz obliczyć
ctg(x)
Wpisz początek przedziału
-1
Wpisz koniec przedziału
1
Wpisz precyzję(ilosc trapezów)
5
Całka oznaczona na podanym przedziale wynosi: -0.67759

4 Przykłady działania programu

Plik testowy zawierający wszystkie funkcje zawarte w programie:

```
Funkcja: pi*x
Jej całka wynosi(na przedziale 0,1 z precyzją 1000) 1.50596
Jej wartość teoretyczna(liczona z definicji całki) wynosi: 1.507
Funkcja: -pi*x
Jej całka wynosi(na przedziale 0,1 z precyzją 1000) -1.50596
Jej wartość teoretyczna(liczona z definicji całki) wynosi: -1.507
Funkcja: -sin(-x^(2x+x^2))
Jej całka wynosi(na przedziale 0,1 z precyzją 1000) 0.405019
Jej wartość teoretyczna(liczona z definicji całki) wynosi: 0.405
Funkcja: ctg(-x)+exp(x^sin(x*pi))
Jej całka wynosi(na przedziale 0,1 z precyzją 1000) 0.124062
Jej wartość teoretyczna(liczona z definicji całki) wynosi: 0.128491
Funkcja: ctg(-x)+ln(exp(x^6))+cos(pi)-sin(x)^2
Jej całka wynosi(na przedziale 0,1 z precyzją 1000) -2.37438
Jej wartość teoretyczna(liczona z definicji całki) wynosi: -2.37068
Program liczący całkę oznaczoną złożoną metodą trapezów
1-Wpisz funkcje do obliczenia całki
2-Dane testowe pobierane z pliku
3-Zakończ
```