

ОТЧЕТ

Владислав Морозов, 408 гр.

Задание 2 (осенний семестр 2023/2024 учебного года)

1 Постановка задачи

Для заданной функции $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ требуется найти ее наилучшее приближение линейной комбинацией $\sum_{j=1}^n c_j g_j(x, y)$ линейно независимых элементов $g_1, \dots, g_n \in L_2(\Omega)$, то есть найти набор коэффициентов c_j^0 такой, что

$$\Delta = \|f - \sum_{j=1}^n c_j^0 g_j\| = \inf_{c_1, \dots, c_n} \|f - \sum_{j=1}^n c_j g_j\|.$$

Здесь $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$, где $(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi \bar{\psi} dx dy$.

Линейно независимые элементы $g_j(x, y)$ строятся как базисные функции в методе конечных элементов для заданного способа разбиения области Ω и заданного набора узлов на конечном элементе.

Известно, что решение этой задачи существует, единственно и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида $A c = b$, где A – матрица Грама с элементами $a_{ij} = (g_i, g_j)$, b – вектор проекций заданной функции на базис, т.е. $b_j = (f, g_j)$, а c – искомый вектор коэффициентов наилучшего приближения.

Конкретная постановка задачи определяется:

- 1) формой области – $KTE - 2$ – трапеция с вершинами $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 1)$;
- 2) способом разбиения на конечные элементы – равнобедренные прямоугольные треугольники с катетом h ;
- 3) выбором вершин треугольников в качестве узлов для построения функций форм;
- 4) методом решения системы линейных уравнений – Algorithm 2 (Conjugate Gradient).

2 Локальная матрица Грама

Найдем вид функций формы:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 1 + \frac{x-y}{h}, & \Phi_2 &= -\frac{x}{h}, & \Phi_3 &= \frac{y}{h}, \\ \tilde{\Phi}_1 &= 1 + \frac{y-x}{h}, & \tilde{\Phi}_2 &= \frac{x}{h}, & \tilde{\Phi}_3 &= -\frac{y}{h}. \end{aligned}$$

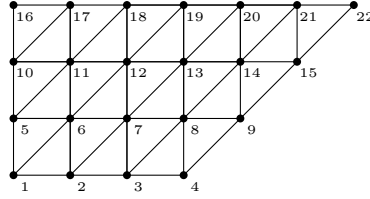
Базисные функции (φ_{ij}) и формулы элементов вектора правой части (b_j) можно найти в отчете к упражнению 2-2.

Зная функции формы (их аналитические формулы), можем найти элементы локальной матрицы Грама по формуле $h_{ij} = \int_{\Delta} \Phi_i \Phi_j dx dy$. В нашем случае эта матрица имеет следующий вид:

$$H_{3 \times 3} = \frac{h^2}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 Глобальная матрица Грама

Зададим нумерацию базисных элементов. Рассмотрим пример для $n = 3$, $h = \frac{1}{3}$:



Элементы глобальной матрицы Грама находятся по формуле $a_{ij} = \int_{\Omega} g_i g_j dx dy$. Для данного примера эти элементы легко ищутся с помощью локальной матрицы Грама и приведенного выше рисунка. Явный вид глобальной матрицы Грама $A_{22 \times 22}$, а также явный вид матрицы $A_{(\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1) \times (\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1)}$, полученной обобщением рассмотренного примера, можно найти в отчете к упражнению 2-3.

4 Метод решения системы линейных уравнений

Algorithm 2 (Conjugate Gradient):

1. Compute $r_0 := b - A c_0$, $p_0 := r_0$
2. For $j = 0, 1, \dots$ until convergence Do:
3. $\alpha_j := (r_j, r_j) / (A p_j, p_j)$
4. $c_{j+1} := c_j + \alpha_j p_j$
5. $r_{j+1} := r_j - \alpha_j A p_j$
6. $\beta_j := (r_{j+1}, r_{j+1}) / (r_j, r_j)$
7. $p_{j+1} := r_{j+1} + \beta_j p_j$
8. EndDo

5 Таблицы результатов счета

Рассматриваемые функции и соответствующие нормы в квадрате:

$$\begin{aligned} f_1 &= d_1, & (f_1, f_1) &= \frac{3d_1^2}{2}; \\ f_2 &= d_1 x + d_2 y, & (f_2, f_2) &= \frac{15d_1^2 + 17d_1 d_2 + 7d_2^2}{12}; \\ f_3 &= d_1 x^2 + d_2 y^2 + d_3 xy, & (f_3, f_3) &= \frac{126d_1^2 + 74d_1 d_2 + 22d_2^2 + 129d_1 d_3 + 49d_2 d_3 + 37d_3^2}{60}. \end{aligned}$$

Приведенные ниже таблицы содержат величины Δ , посчитанные по формуле

$$\Delta = \sqrt{(f, f) - 2(b, c) + (A c, c)},$$

а также соответствующие количества итераций используемого метода.

h	f_1	f_2	f_3
$\frac{1}{8}$	1.590e-04 12	2.495e-04 12	5.099e-03 12
$\frac{1}{16}$	1.430e-04 12	1.686e-04 12	1.299e-03 12
$\frac{1}{32}$	1.676e-04 11	2.016e-04 11	4.604e-04 11
$\frac{1}{64}$	2.016e-04 10	2.393e-04 10	4.280e-04 10

Таблица результатов счета 1 ($\varepsilon = 10^{-4}$)

h	f_1	f_2	f_3
$\frac{1}{8}$	1.621e-06 17	1.768e-06 18	5.086e-03 18
$\frac{1}{16}$	9.870e-07 18	1.677e-06 18	1.273e-03 18
$\frac{1}{32}$	1.547e-06 17	2.403e-06 17	3.183e-04 18
$\frac{1}{64}$	1.004e-06 17	1.513e-06 17	7.962e-05 17

Таблица результатов счета 2 ($\varepsilon = 10^{-6}$)