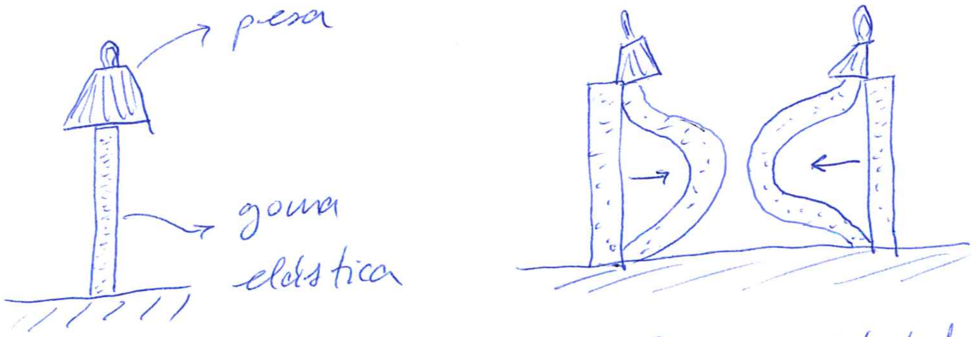
RUPTURA DE SIMETRÍA

"El estado fundamental no tiene la misma simetría que el Hamiltoniano que describe el sistema"



Dos posibilidades que rompen simetría.

Ruptura de simetría con un Lagrangiano

Comencemos con

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi) - V(\phi)$$

Una teoría muy usada es la llamada $\lambda\phi^4$. Para ésta:

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \qquad (\lambda > 0)$$

Observemos que $\mathcal{L}$ es invariante bajo la transformación discreta $\phi(x) \to -\phi(x)$.

El mínimo del potencial está en:

$$\frac{dV}{d\phi} = \mu^2 \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 = 0$$

Entonces, $\mu^2 > 0 \Rightarrow$ mínimo en $\phi = 0$.

($\mu = m$ sería la masa de las excitaciones del campo escalar considerado)

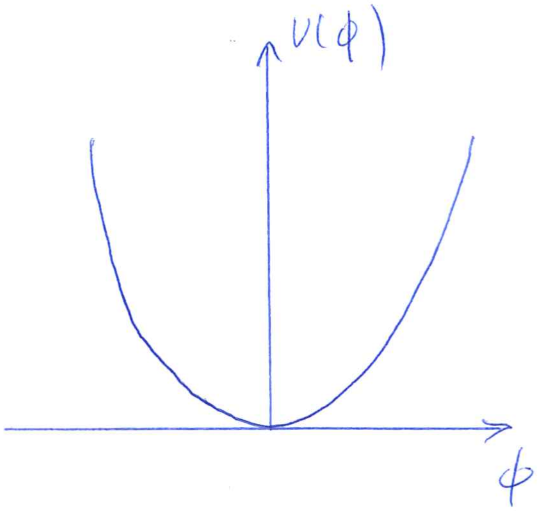
¿Qué ocurre si hacemos?

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

Entonces, el mínimo está en

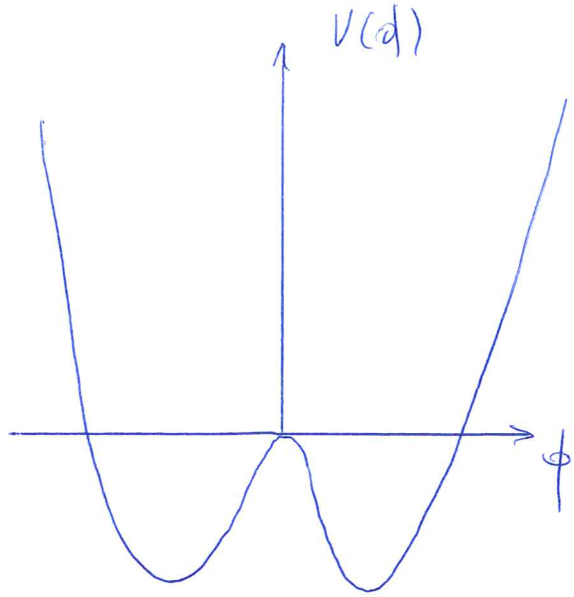
$$\phi_0 = \pm \left(\frac{6\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2}$$

y tendremos la siguiente situación:



$\mu^2 > 0$

$\phi_0 = 0$



$\mu^2 < 0$

$\phi_0 = -\sqrt{\frac{6\mu^2}{\lambda}}$ $\phi_0 = +\sqrt{\frac{6\mu^2}{\lambda}}$

En el caso de la derecha, tenemos dos vacíos para escoger. El sistema escogerá uno de ellos y se romperá la simetría $\phi_0 \to -\phi_0$ del estado fundamental.

¿Cómo son las excitaciones (partículas) del nuevo vacío comparadas con la del estado sin ruptura de simetría?

Escojamos $+\phi_0$ y desarrollemos alrededor de este mínimo.

$$V(\phi-\phi_0) = V(\phi_0) + \left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)_{\phi_0} (\phi-\phi_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right)_{\phi_0} (\phi-\phi_0)^2 + \cdots$$

$$= V(\phi_0) + \mu^2 (\phi-\phi_0)^2 + \cdots$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = -\mu^2 + \frac{\lambda \phi^2}{2} = \begin{cases} -\mu^2 & \phi_0 = 0 \\ 2\mu^2 & \phi_0 = \pm\sqrt{6\mu^2/\lambda} \end{cases} \right]$$

Entonces, como $V(\phi_0) = cte$ y no modifica las ecuaciones de movimiento:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi' - \mu^2 \phi'^2 + O(\phi')^3,$$

con $\phi' = \phi - \phi_0$.

Si comparamos con la teoría original:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

pasamos de $m = \mu$ a $m = \sqrt{2}\mu$

(ha cambiado la masa de nuestra teoría)

¿Qué ocurriría ahora si la simetría rota fuera continua?

Ruptura de simetrías continuas. Teorema de Goldstone

Consideremos una teoría que tiene un campo con dos componentes, ϕ_1 y ϕ_2. Si le damos la vuelta al término de masa (como hicimos antes), queda:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \phi^1 \partial^\mu \phi^1) + (\partial_\mu \phi^2 \partial^\mu \phi^2) \right]$$

$$+ \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

(Esto viene de un campo escalar complejo

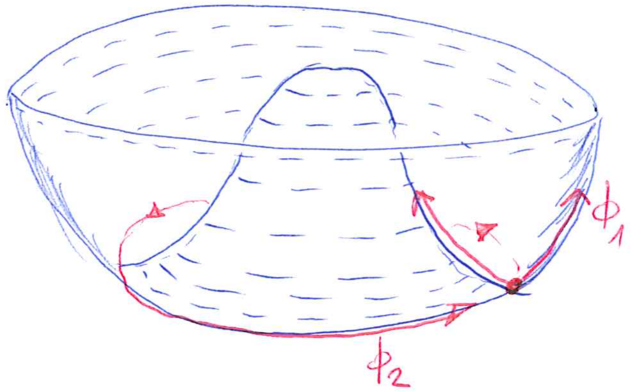
$$\varphi = \phi_1 + i\phi_2 \quad)$$

Este Lagrangiano tiene una simetría.

Invariancia $SO(2)$ en el espacio interno (rotaciones en dicho espacio) → en el plano $\phi_1(x) - \phi_2(x)$

$$\begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$V(\phi_1, \phi_2) = -\frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$ tiene la forma



Hay un número infinito de mínimos del potencial:

$$V(x) = -\frac{\mu^2}{2} x + \frac{\lambda}{4!} x^2 \qquad (x = \phi_1^2 + \phi_2^2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow \qquad \underbrace{x = \phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{6\mu^2}{\lambda}}$$

círculo que contiene a los infinitos mínimos de $V(\phi_1, \phi_2)$.

Supongamos, como antes, que el sistema escoge un mínimo. En particular, tomemos

$(\phi_1, \phi_2) = \left(+ \sqrt{\frac{6\mu^2}{\lambda}}, 0 \right)$ y desarrollemos

usando $\phi_1' = \phi_1 - \sqrt{\frac{6\mu^2}{\lambda}}$ y $\phi_2' = \phi_2$.

Ignorando constantes y cortando a orden dos, como antes, obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi_1' \partial^\mu \phi_1' + \partial_\mu \phi_2' \partial^\mu \phi_2' \right) - \mu^2 (\phi_1')^2 + O(\phi'^3)$$

Resultado:

- las partículas del campo ϕ_1' tienen masa $m = \sqrt{2}\mu$
- el campo ϕ_2' es sin masa

Teorema de Goldstone: la ruptura de una simetría contina da lugar a una excitación masiva y a una sin masa (llamado bosón de Goldstone)

Ejercicio (No entregable)

$U(1) \simeq SO(2)$ (isomorfismo)

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \psi)^\dagger (\partial_\mu \psi) + \mu^2 \psi^\dagger \psi - \lambda (\psi^\dagger \psi)^2$$

- definid $\psi(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)}$

- demostrad:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 (\partial_\mu \theta)^2 + \mu^2 \rho^2 - \lambda \rho^4$$

Ahora, la invariancia $U(1)$ es frente a transformaciones del tipo

$$\rho \to \rho$$
$$\theta \to \theta + \alpha$$

- Romped la simetría y obtened las masas de los campos ρ' y θ' (como en los ejemplos anteriores).

Ruptura de simetrías en teorías gauge.

El mecanismo de Higgs

Ya sabemos que un Lagrangiano que tiene una simetría local contiene campos gauge. Por ejemplo:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \psi^+ - iqA^\mu \psi^+)(\partial_\mu \psi + iqA_\mu \psi) + \mu^2 \psi^+ \psi$$
$$- \lambda (\psi^+ \psi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

ya le dimos la vuelta al signo

es invariante $U(1)$ local ($\psi \to \psi e^{i\alpha(x)}$) siempre que A_μ transforme como

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x)$$

¿Qué describe el Lagrangiano anterior?

- partículas masivas con $E_{\vec{p}} = \sqrt{p^2 + \mu^2}$ y carga opuesta (partículas escalares) (2 partíc.)
- partículas sin masa (vectoriales) con $E_{\vec{p}} = |\vec{p}|$ (2 partíc. según la polarización del fotón)