Practica 3: Efecto del teorema de la raqueta del tenis

El teorema de la raqueta de tenis, o del eje intermedio fue estudiado por Mark S. Ashbaugh, Carmen C. Chicone and Richard H. Cushman en 1989. Describe el movimiento de un cuerpo rígido con tres momentos de inercia principales diferentes. Los nada intuitivos resultados también se conocen como el efecto Dzhanibekov, en honor al cosmonauta que lo describió.

Se puede ver https://www.youtube.com/watch?v=gkDHp7I7Cgg
https://www.youtube.com/watch?v=1x5UiwEEvpQ

Cuando se diagonaliza el tensor de inercia, ***I*,** será de la forma :

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Sin perdida de generalidad supondremos que $I_1 > I_2 > I_3$,

En un sistema de referencia inercial la derivada del momento angular, $\vec{L}$, es igual al momento de fuerzas $\vec{M}$, aplicado sobre él:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I \cdot \vec{\omega})}{dt} = \vec{M}$$

Donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular de rotación,

Aunque para describir este movimiento es más común trabajar con un sistema no-inercial, *giratorio* con los ejes principales. En este sistema, la derivada temporal debe ser reemplazada por otra expresión que dé cuenta también de las fuerzas ficticias asociadas a la no-inercialidad del sistema:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M}.$$

Desarrollando

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = M_1$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = M_2$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = M_3$$

Vamos a considerar que el cuerpo no está sometido a ningún momento de fuerza externo. Es decir, estamos interesados en el problema definido por

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \text{ (1)}$$

$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 \quad \text{(2)}$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \quad \text{(3)}$$

Este sistema presenta un comportamiento estable para los ejes de rotación asociados al mayor y al menor momento de inercia.

Supongamos que tenemos un vector angular ($\omega_1 >> \omega_2 \approx \omega_3$). Inicialmente la variación $\dot{\omega}_1$ es despreciable. Derivamos (2)

$$I_2\ddot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\dot{\omega}_3$$

Sustituimos en (3) obteniendo

$$I_2 I_3 \ddot{\omega}_2 = (I_1 - I_2)(I_3 - I_1)\omega_1^2 \omega_2$$

El factor que multiplica a la componente es negativa, así que como su derivada segunda es negativa implica que la rotación alrededor de este eje es estable para el cuerpo.[1]

Un análisis similar para la tercera componente nos lleva a

$$I_2 I_3 \ddot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)(I_3 - I_1)\omega_1^2 \omega_3$$

por lo que esta componente es estable.

Al considerar el tercer eje obtenemos expresiones similares

$$I_1 I_3 \ddot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)(I_3 - I_1)\omega_3^2 \omega_1$$

$$I_2 I_3 \ddot{\omega}_2 = (I_2 - I_3)(I_3 - I_1)\omega_3^2 \omega_2$$

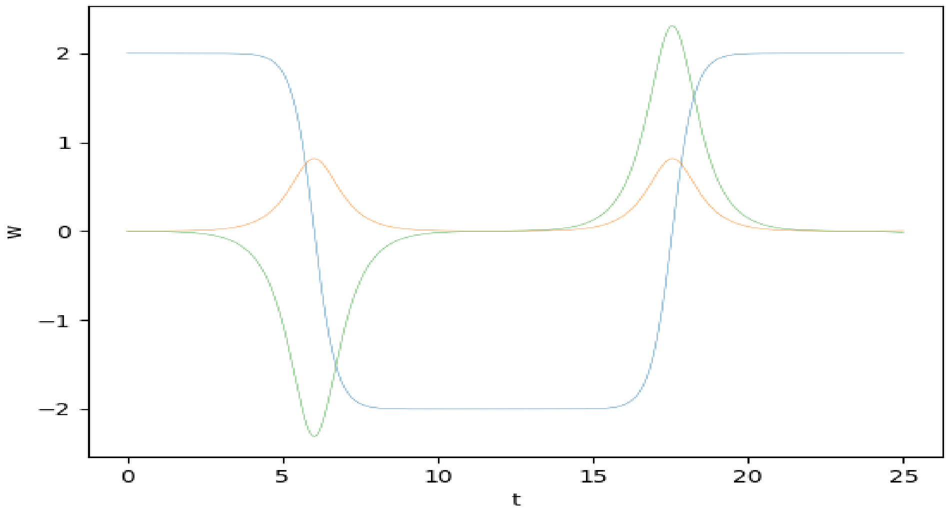
por lo que estas componentes son estables en los límites de validez de la aproximación.

Ahora al considerar el segundo eje, realizando un análisis similar llegamos a

$$I_1 I_3 \ddot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)(I_1 - I_2)\omega_2^2 \omega_1$$

$$I_1 I_3 \ddot{\omega}_3 = (I_2 - I_3)(I_1 - I_2)\omega_2^2 \omega_3$$

El factor que multiplica a ω_1 es positivo por lo que la rotación sobre el segundo eje ya no es estable, sino que inicialmente presentará un comportamiento de tipo exponencial. Así que cualquier pequeña perturbación a lo largo de los otros ejes provoca que el cuerpo haga "giros inesperados".



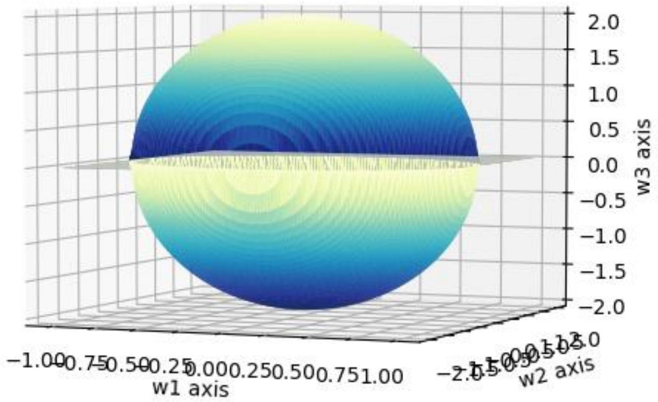
1 Velocidades de rotación. Naranja 1, azul 2 y verde3. I_1=4, I_2=2 e I_3=1.

Aunque en un primer instante puede parecer un sistema caótico aunque cuando se examina vemos que presenta un comportamiento cíclico. Los estados que se suceden están definidos por

1 Formalmente hemos obtenido, dentro de los límites de validez de las aproximaciones, una ecuación diferencial de tipo armónica.

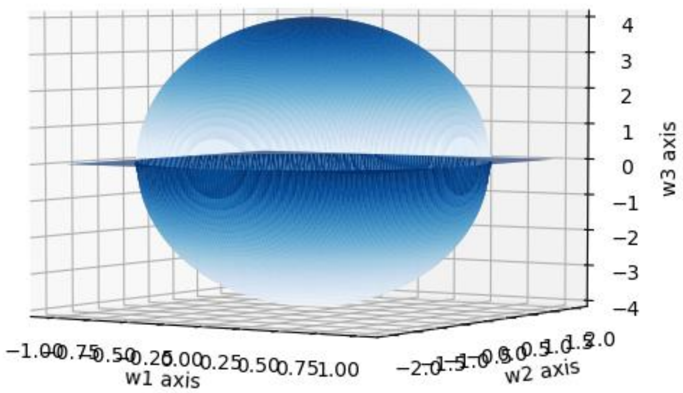
la intersección de los elipsoides definidos por la energía cinética y el módulo del momento angular.

$$E_c = \frac{1}{2}\left(I_1\, \omega_1^2 + I_2\, \omega_2^2 + I_3\, \omega_3^2\right)$$



2Elipsoide de energía cinética. Mismo estado que en la ilustración 1.

$$L^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2$$



3 Elipsoide de momento angular. Mismo caso que ilustración 1 y 2.

Si $L < \sqrt{2EI_1}$ o si $\sqrt{2EI_3} < L$ entonces la intersección es el vacío y ningún movimiento existe para los valores de E y L

Si $L = \sqrt{2EI_1}$ o si $\sqrt{2EI_3} = L$ entonces la intersección consiste puntos únicamente en las orillas del semieje.

Si $\sqrt{2EI_3} < \mathrm{L} < \sqrt{2EI_3}$ obtenemos dos curvas alrededor de las orillas del semieje más pequeño y del más grande.

Si $L = \sqrt{2EI_2}$ la intersección consiste en dos círculos.

Cuestiones

<u>Ejes mayor y menor</u>

Como test del programa,

-Comprueba en los casos estables si las variaciones de las componentes angulares no principales cumplen el comportamiento armónico predicho. Es decir, que su oscilaciones tienen una frecuencia angular que para el primer eje será

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3}}\ \omega_1$$

- Comprueba que la energía cinética y que el módulo del momento angular se conservan en este caso. ojo no hace falta comprobar la precesion

-Comprueba cuál es la evolución del vector velocidad angular y momento angular.

<u>Eje intermedio</u>

- Comprueba en el caso del eje intermedio cuál es el comportamiento de las componentes de la velocidad angulares. ¿Es periódico el proceso o caótico? En el caso que sea periódico intenta estimar el valor del periodo para un caso e intenta ver de qué dependencia parece tener con ω_2.

-Representa las componentes ω_1 frente a ω_3 , ¿qué se observa?

- Comprueba que la energía cinética y que el módulo del momento angular se conservan en el caso del eje intermedio.

- Dibuja la trayectoria del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$. no hace falta estimar valor del periodo

-Razona; Siempre se ha definido que la Tierra es una esfera achatada por los polos. Por lo que tendría dos ejes de simetría iguales y no se aplicaría el teorema. Pero, si no fuera exactamente así, ¿nos deberíamos preocupar por una posible inversión de la rotación del planeta?
no hace falta programar nada, solo explicarlo