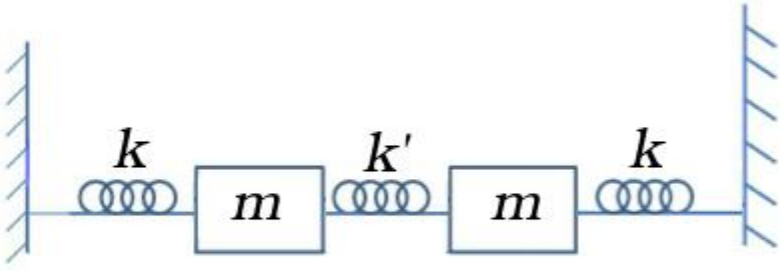
Práctica 2

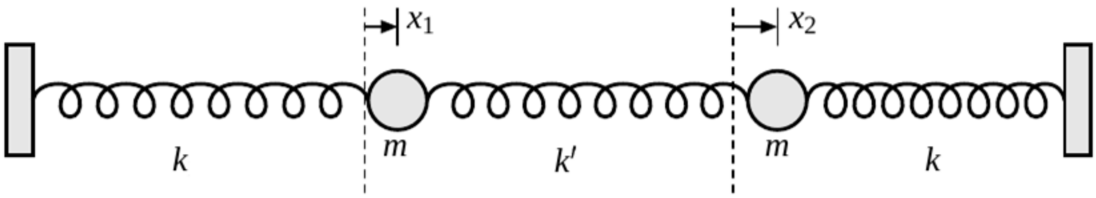
Osciladores acoplados

En esta práctica vamos a estudiar un sistema sencillo, formado por dos masas iguales que están unidas a puntos fijos por dos muelles que tienen la misma constante elástica k y conectadas entre sí por otro muelle de constante k' (ver figura). Este sistema es una idealización que tiene importantes aplicaciones en el estudio de la estructura interna de los sólidos.



Introducción teórica

Consideramos que el movimiento está limitado a una sola dimensión, a la que llamaremos x. Los puntos de equilibrio de los dos muelles iguales se encuentran en las posiciones $x = a$ y $x = b$, medidas desde la pared de la izquierda. El sistema tiene dos grados de libertad, que representaremos por las coordenadas x_1 y x_2, que nos dan la posición de cada una de las masas medida desde su punto de equilibrio correspondiente.



Supongamos que, en un momento dado, la masa de la izquierda se encuentra en x_1 y la masa de la derecha se encuentra en x_2. La fuerza que actúa sobre la masa de la izquierda será $F_1 = -kx_1 - k'(x_1-x_2)$. La fuerza sobre la otra masa vendrá dada por $F_2 = -kx_2 -k'(x_2-x_1)$. Reordenando, tenemos las siguientes ecuaciones del movimiento

$$m\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + (k + k')x_2 - k'x_1 = 0$$

Suponemos una solución de forma oscilatoria

$$x_1(t) = B_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2(t) = B_2 e^{i\omega t}$$

y encontramos que tiene que cumplirse

$$\omega = \sqrt{\frac{k+k\prime \pm k\prime}{m}},$$

con lo que hay dos pulsaciones características o pulsaciones propias del sistema, que tienen frecuencias de pulsación características

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}; \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Modos normales

Para tratar este tipo de problemas es conveniente llevar a cabo un cambio de coordenadas y encontrar las coordenadas normales que se corresponden con los modos de oscilación propios del sistema. Estas coordenadas normales tienen una dependencia con el tiempo mucho más sencilla que las coordenadas que hemos definido inicialmente. En este caso, podemos escribir

$$\eta_1 = x_1 + x_2$$

$$\eta_2 = x_1 - x_2$$

con lo que las ecuaciones nos quedan

$$m\ddot{\eta}_1 + (k+2k')\eta_1 = 0$$
$$m\ddot{\eta}_2 + k\eta_2 = 0$$

Estas ecuaciones tienen la obvia ventaja de que no están acopladas. Cada una de ellas corresponde a un movimiento armónico con frecuencia ω_1 u ω_2. Si imponemos condiciones iniciales

$$x_1(0) = -x_2(0); \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0),$$

tendremos que $\eta_2(0) = 0; \dot{\eta}_2(0) = 0$y, por tanto, $\eta_2(t) = 0 \forall t$.En este caso, las masas están siempre pulsando con frecuencia ω_1 en oposición de fase. Este movimiento se llama **modo normal antisimétrico** de oscilación.

Si, en cambio, imponemos condiciones iniciales

$$x_1(0) = x_2(0); \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$$

entonces $\eta_1(t) = 0 \forall t$.Las masas se mueven con frecuencia ω_2 y están siempre en fase. Este movimiento es el **modo normal simétrico** de oscilación.

En general, el movimiento será una combinación lineal de estos dos modos normales. Si nos quedamos solo con las componentes reales, la forma general del movimiento será:

$$x_1(t) = A_0^1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_0^2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = A_0^1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - A_0^2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Un caso particularmente interesante es el de ***acoplamiento débil***, cuando $k' \ll k$ (es decir, las masas están ligadas débilmente en comparación a las fuerzas que las unen a las paredes). En este caso, las dos frecuencias normales son similares entre ellas y parecidas a la frecuencia natural de uno de los osciladores si dejáramos el otro quieto. Su combinación da lugar a un tipo de movimiento que se conoce como latido (o pulsos de batido) y que viene dado por

$$x_1(t) = [A_0 \cos(\epsilon\omega_0 t)] \cos\omega_0 t$$
$$x_2(t) = [A_0 \sin(\epsilon\omega_0 t)] \sin\omega_0 t$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k+k\prime}{m}}$es la frecuencia natural de uno de los osciladores si ignoramos el otro y $\epsilon = \frac{k\prime}{2k} \ll 1$.

Desarrollo de la práctica

El programa en python que se os proporciona puede solucionar las ecuaciones del movimiento para el sistema que hemos discutido. Hay una serie de valores de entrada que podéis modificar, en particular el valor de *m* y los de las dos constantes elásticas *k* y *k'*. El programa, tal y como se os pasa, genera tres gráficas. Una de ellas muestra el movimiento de las dos masas para que podáis visualizarlo. La segunda traza el desplazamiento de las dos masas. Finalmente, la tercera gráfica muestra la transformada de Fourier rápida de la segunda figura.

Las actividades a realizar son:

1) Dinámica del sistema. Id variando la constante elástica *k'* del muelle que une las dos masas, para comprobar los diversos tipos de movimiento que se dan. Escribid unas líneas de código que calculen y muestren la energía del sistema como función del tiempo. Comprobad cómo varía la energía al modificar el valor de *k'*. Explorad casos de acoplamiento débil y otros de acoplamiento más fuerte. Si es posible, medid el periodo de batido en el acoplamiento débil.

2) **Modos normales.** Seleccionad los valores de las variables para que se exciten los modos de oscilación normal. Usando las gráficas de $x_1(t)$ ó $x_2(t)$, estimad las frecuencias angulares y comprobad que coinciden con los valores teóricos de los modos normales de oscilación.

3) **Transformada de Fourier**. Utilizando la transformada de Fourier, comprobad que, para diferentes modos de oscilación, se obtienen dos picos en las frecuencias correspondientes a los modos normales. Usando los valores del apartado anterior, excitad un modo normal. En el espectro de Fourier debería observarse un solo pico, con el valor adecuado. Probad con el otro modo normal.

4) **Ampliación.** Modifica el problema añadiendo un rozamiento o un tercer oscilador o un campo de gravedad o etc. Comenta el resultado.