# Práctica 4

## Métodos Numéricos y Computación

### Aproximación polinómica *(Tema 3)*

En la aproximación de funciones continuas, se utilizan las bases ortogonales de los polinomios de Chebyshev y de los polinomios de Legendre. Estas bases se obtienen aplicando la ortogonalización de Gram-Schmidt a la base canónica de los polinomios considerando diferentes pesos. A lo largo de la historia han sido muy estudiados y se sabe, por ejemplo, que:

(i) Los polinomios de Chebyshev no mónicos verifican la ecuación recurrente:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \text{ para } n = 1, \dots$$

(ii) Los polinomios de Legendre no mónicos verifican la ecuación recurrente:

$$T_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xT_n(x) - \frac{n}{n+1}T_{n-1}(x), \text{ para } n = 1, \dots$$

En ambos casos, $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$. Hemos de tener en cuenta que esta relación de recurrencia no proporciona directamente los polinomios mónicos, pero estos se pueden obtener fácilmente. Además, los polinomios así obtenidos son en el intervalo $[-1, 1]$.

Las bases de los polinomios de Chebyshev y de Legendre hasta grado $n$ conforman bases ortogonales de los polinomios de grado menor o igual que $n$ en el intervalo $[-1, 1]$.

**Ejercicio 1** *Crea una función que devuelva los polinomios ortogonales no mónicos de Chebyshev hasta un cierto grado $n$ teniendo en cuenta las propiedades anteriores. Haz lo mismo para los polinomios de Legendre.*

Una vez escogida una base ortogonal $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ (por ejemplo, las de Chebyshev o Legendre) y una función continua $f$ en $[-1, 1]$, aproximaremos $f$ por:

$$P(x) = a_0 + a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x),$$

donde

$$a_i = \frac{(f, \phi_i)}{(\phi_i, \phi_i)}, \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n,$$

y

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \omega(x)f(x)g(x)dx.$$

**Ejercicio 2** *Dada la función:*

$$f(x) = e^{-2x}\sin(3x), \ \textit{para todo } x \in [-1, 1].$$

*a) Calcula los coeficientes del polinomio aproximante de grado 2 de $f$ en el intervalo $[-1, 1]$ según las dos bases de polinomios ortogonales consideradas y el producto escalar correspondiente.*

*b) Representa en una sola figura la función y sus dos polinomios aproximantes.*

*c) Una vez obtenidas las aproximaciones, calcula la norma de la diferencia entre la función y dichas aproximaciones.*

**Ejercicio 3** *Dada la función:*

$$f(x) = \cos(\arctan x) - e^{x^2}\log(x + 2), \ \textit{para todo } x \in [-1, 1].$$

*a) Obtén el polinomio interpolador de grado 3 en los nodos de Chebyshev.*

*b) Obtén los polinomios aproximantes de grado 3, utilizaremos las base ortogonales de los polinomios de Chebyshev y de Legendre.*

*c) Representa en una misma gráfica la función y los tres polinomios anteriores.*

Ahora bien, supongamos que deseamos aproximar una función cuyo dominio es un intervalo arbitrario $[a, b]$. Necesitamos, por tanto, obtener los correspondientes polinomios ortogonales en el intervalo $[a, b]$ a partir de los polinomios en $[-1, 1]$. A tal fin, podemos aplicar los siguientes cambios de variable:

$$x \in [a, b] \Rightarrow y = -1 + \frac{2}{b-a}(x - a) \in [-1, 1]. \qquad (1)$$

$$y \in [-1, 1] \Rightarrow x = a + \frac{(y + 1)(b - a)}{2} \in [a, b]. \qquad (2)$$

Si $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es una base ortogonal de los polinomios de grado menor o igual que $n$ en el intervalo $[-1, 1]$ para el producto escalar:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \omega(x)f(x)g(x)dx,$$

entonces $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$, definidos como

$$\psi_i(x) = \phi_i\left(-1 + \frac{2}{b-a}(x - a)\right), \ \text{para } i = 0, 1, \ldots, n,$$

es una base ortogonal para los polinomios de grado menor o igual que $n$ en el intervalo $[a, b]$ para el producto escalar:

$$(f, g) = \int_{a}^{b} \omega^*(x)f(x)g(x)dx, \ \text{donde } \omega^*(x) = \omega\left(-1 + \frac{2}{b-a}(x - a)\right).$$

Otra forma de obtener los polinomios ortogonales en un intervalo cualquiera $[a, b]$ es a partir de la transformación lineal de las raíces de los polinomios en $[-1, 1]$ al intervalo $[a, b]$. Si $y \in [-1, 1]$ es una raíz de uno de los polinomios ortogonales en $[-1, 1]$, entonces $x = a + (y + 1)(b - a)/2$ es una raíz del polinomio ortogonal correspondiente en $[a, b]$.

**Ejercicio 4** *Crea funciones para aplicar las transformaciones* (1) *y* (2) *y obtén la base de los polinomios ortogonales de Legendre y Chebyshev de grado menor o igual que 3 en el intervalo* $[3, 6]$.

**Ejercicio 5** *Dada la función:*

$$f(x) = e^{-x} \cos(2x), \text{ para todo } x \in [3, 6].$$

*a) Obtén el polinomio aproximante de grado 3 usando la base ortogonal de los polinomios de Chebyshev.*

*b) Obtén el polinomio aproximante de grado 3 usando la base ortogonal de los polinomios de Legendre.*

*c) Representa en una misma gráfica la función y los dos polinomios aproximantes.*

**Ejercicio 6** *Dada la función:*

$$f(x) = \cos(\arctan x) - e^{x^2} \log(x + 2), \text{ para todo } x \in [2, 5].$$

*a) Obtén el polinomio aproximante de grado 4 usando la base ortogonal de los polinomios de Chebyshev.*

*b) Obtén el polinomio aproximante de grado 4 usando la base ortogonal de los polinomios de Legendre.*

*c) Representa en una misma gráfica la función y los dos polinomios aproximantes.*

*d) Evalúa el error obteniendo la norma inducida por el correspondiente producto escalar de* $||f - p||$ *siendo* $p$ *el polinomio obtenido mediante la base de Chebyshev. Haz lo mismo para* $p$*, el polinomio obtenido mediante la base de Legendre.*