Paul Dirac (1902-1984) y Vladimir Fock (1898-1974) propusieron una densidad lagrangiana para el campo electromagnético de la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \partial_\rho A_\sigma \, \partial^\rho A^\sigma - J^\eta A_\eta$$

(a) Sustituir esta densidad lagrangiana en las ecuaciones de Euler-Lagrange de un campo y discutir el resultado que se obtiene.

(b) Esta densidad lagrangiana difiere de la densidad lagrangiana ordinaria en una tetradivergencia. ¿Modifica esto de alguna manera la acción o las ecuaciones de movimiento? ¿Por qué?

(a) Escribimos $\mathcal{L}$ bajando los índices del término $\partial^\rho A^\sigma$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \partial_\rho A_\sigma \, g^{\rho\xi} g^{\sigma\lambda} \partial_\xi A_\lambda - J^\eta A_\eta$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right)}_{\circledast} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}}_{\circledast\circledast} = 0$$

$$\left[\frac{\partial_\rho A_\sigma}{\partial_\mu A_\nu} = \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma\right] \quad \left[\frac{\partial_\xi A_\lambda}{\partial_\mu A_\nu} = \delta^\mu_\xi \delta^\nu_\lambda\right]$$

$$\circledast = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 g^{\rho\xi} g^{\sigma\lambda}\left[\frac{\partial_\rho A_\sigma}{\partial_\mu A_\nu}\partial_\xi A_\lambda + \right.$$

$$\left. + \partial_\rho A_\sigma \frac{\partial_\xi A_\lambda}{\partial_\mu A_\nu}\right] = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2\left[g^{\rho\xi} g^{\sigma\lambda}\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma \partial_\xi A_\lambda + \right.$$

$$\left. + g^{\rho\xi} g^{\sigma\lambda}\delta^\mu_\xi \delta^\nu_\lambda \partial_\rho A_\sigma\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2\left[g^{\mu\xi} g^{\nu\lambda}\partial_\xi A_\lambda + g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu}\partial_\rho A_\sigma\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2\left(\partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu\right) = \underline{\underline{-\varepsilon_0 c^2 \partial^\mu A^\nu}}$$

$$\circledast\circledast = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial}{\partial A_\nu}\left(-J^\sigma A_\sigma\right) = -J^\sigma \underbrace{\frac{\partial A_\sigma}{\partial A_\nu}}_{\delta^\nu_\sigma} =$$

$$= -J^\sigma \delta^\nu_\sigma = \underline{\underline{-J^\nu}}$$

Sustituyendo $\circledast$ y $\circledast\circledast$ en las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_\nu)}\right)}_{\circledast} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}}_{\circledast\circledast} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(-\varepsilon_0 c^2 \partial^\mu A^\nu\right) - \left(-J^\nu\right) = 0$$

$$\varepsilon_0 c^2 \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}}_{\mu_0} J^\nu = \mu_0 J^\nu$$

de donde:

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 J^\nu}$$

Recordando la definición del operador D'Alambertiano:

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \partial_i^2 = \partial_0^2 - \nabla^2$$

se puede escribir:

$$\boxed{\Box A^\mu = \mu_0 J^\mu}$$

Ponemos:

$$\left.\begin{aligned} J^\mu &= (c\rho, \vec{J}) \\ A^\mu &= \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} \Box \phi &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Box \vec{A} &= \mu_0 \vec{J} \end{aligned}\right\}$$

que son las ecuaciones de onda para los potenciales en el gauge de Lorenz ($\partial_\mu A^\mu = 0$):

$$\left.\begin{aligned} -\nabla^2\phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= \mu_0\vec{J} \end{aligned}\right\}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad \text{(gauge de Lorenz)}$$

(b) Densidad lagrangiana ordinaria:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 c^2 F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} - J^\eta A_\eta =$$

$$= -\frac{1}{4}\varepsilon_0 c^2 (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) - J^\eta A_\eta$$

$$= -\frac{1}{4}\varepsilon_0 c^2 \Big(\underbrace{\partial_\rho A_\sigma \partial^\rho A^\sigma}_{1} - \partial_\rho A_\sigma \partial^\sigma A^\rho -$$

$$- \partial_\sigma A_\rho \partial^\rho A^\sigma + \underbrace{\partial_\sigma A_\rho \partial^\sigma A^\rho}_{2}\Big) - J^\eta A_\eta$$

1 y 2 son iguales porque los índices están sumados (son mudos):

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 c^2 \left(2\partial_\rho A_\sigma \partial^\rho A^\sigma - 2\partial_\rho A_\sigma \partial^\sigma A^\rho\right) - J^\eta A_\eta$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \partial_\rho A_\sigma \partial^\rho A^\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \underbrace{\partial_\rho A_\sigma \partial^\sigma A^\rho}_{3} - J^\eta A_\eta$$

Veamos como podemos escribir el término ③.
Vamos a calcular:

$$\partial_\rho (A_\sigma \partial^\sigma A^\rho) = \underbrace{\partial_\rho A_\sigma \partial^\sigma A^\rho}_{③} + A_\sigma \underbrace{\partial_\rho \partial^\sigma}_{\text{los intercambiamos}} A^\rho =$$

$$= \partial_\rho A_\sigma \partial^\sigma A^\rho + A_\sigma \partial^\sigma \underbrace{\partial_\rho A^\rho}_{=0 \text{ (gauge de Lorenz)}} = \partial_\rho A_\sigma \partial^\sigma A^\rho = ③$$

de donde:

$$③ = \partial_\rho A_\sigma \partial^\sigma A^\rho = \underbrace{\partial_\rho (A_\sigma \partial^\sigma A^\rho)}_{\text{tetradivergencia}}$$

luego la densidad lagrangiana ordinaria queda:

$$\mathcal{L}' = \underbrace{-\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \partial_\rho A_\sigma \partial^\rho A^\sigma - J^\eta A_\eta}_{\mathcal{L} \text{ (Dirac-Fock)}} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \underbrace{\partial_\rho (A_\sigma \partial^\sigma A^\rho)}_{\text{tetradivergencia}}$$

Al calcular la acción tenemos:

$$I = \int \mathcal{L}\, d^4x$$

$$I' = \int \mathcal{L}'\, d^4x$$

$$I' = \int \mathcal{L}' d^4x = \underbrace{\int \mathcal{L}\, d^4x}_{=I} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \int \partial_\rho (A_\sigma \partial^\sigma A^\rho)\, d^4x$$

$$I' = I + \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \int \underbrace{\partial_\rho (A_\sigma \partial^\sigma A^\rho)}_{\text{tetradivergencia}} d^4x}_{=0}$$

$= 0$ al aplicar el T^ma Gauss y cambiarlo por un "flujo".

por lo que una tetradivergencia no modifica la acción y, por tanto, tampoco las ecuaciones de movimiento.

Al aplicar el teorema de Gauss se tiene en cuenta que los campos son nulos o constantes en la superficie del infinito, del mismo modo que se hizo al estudiar la invariancia gauge y la ecuación de continuidad (conservación de la carga).