Ayer propusimos un entregable que era llegar a

$$:\hat{H}: = \int d^3p \sum_{s=1}^{2} E_{\vec{p}} \left(\hat{a}^{\dagger}_{s\vec{p}} \hat{a}_{s\vec{p}} + \hat{b}^{\dagger}_{s\vec{p}} \hat{b}_{s\vec{p}} \right)$$

Hablemos ahora, para terminar este gran bloque sobre la ecuación de Dirac, de

Simetría local y teoría gauge para fermiones

¿Por qué necesitamos esta teoría? Porque sabemos que los e^- interaccionan con campos electromagnéticos. La idea es incluir fermiones en

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ y, de esta manera, ver cómo interaccionan fotones y electrones. Como resumen, veremos cómo convertir la teoría de Dirac en una teoría gauge imponiendo simetría $U(1)$ local y aplicando la prescripción de acoplamiento mínimo.

Vemos que $\mathcal{L}_D$ es invariante bajo una transformación $U(1)$ global:

$$\psi(x) \to \psi(x) e^{i\alpha}$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha}.$$

Como la transformación es global,

$$\partial_\mu \psi \to e^{i\alpha} \partial_\mu \psi.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \to$$

$$\to \bar{\psi} e^{-i\alpha}(i\not{\partial} - m)\psi e^{i\alpha} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$$

Como resultado de esta invariancia, hay una corriente de Noether conservada (podéis calcularla usando los resultados del capítulo de Tas clásicas de campos):

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Impongamos ahora invariancia frente a una transformación $U(1)$ local. El cambio es:

$$\psi \to \psi e^{i\alpha(x)}$$

Además, introduzcamos un campo gauge, A_μ, mediante la derivada covariante (acoplamiento mínimo):

$$D_\mu = \partial_\mu + iq A_\mu(x)$$

Para asegurar simetría local $U(1)$, el campo gauge se tiene que transformar como

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu \alpha(x)$$

densidad Lagrangiana

Con todos estos ingredientes, la ~~ecuación~~ de Dirac localmente $U(1)$ invariante es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \,,$$

con $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)$

Desarrollando brevemente:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi - \underbrace{q\bar{\Psi}\not{A}\Psi}$$

éste es el famoso término de interacción

$$\mathcal{L}_I = -q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi$$

Si sumamos términos, podemos escribir las contribuciones del campo gauge de Maxwell y del campo fermiónico localmente invariante gauge, así como de la interacción entre ellos. Dicha Teoría, llamada QED, es la más exitosa de todas las teorías que la Física ha desarrollado:

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi}$$