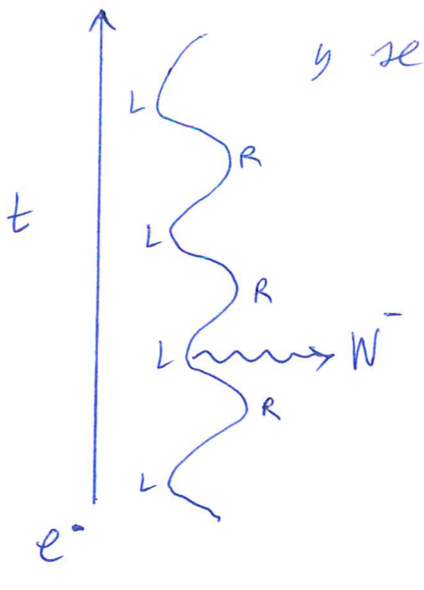
## ¿ Por qué es importante este ejercicio ?

Supongamos que existe una interacción que sólo se acopla con partículas left-handed. En el límite ultrarrelativista, sólo interaccionarían partículas de helicidad negativa y antipartículas de helicidad positiva.

Este es, exactamente, el caso de la Interacción Débil. Describe un campo, $W_+(x)$, que únicamente se acopla a partículas de Dirac left-handed.

Ejemplo: $e^-$ es masivo: oscila entre $u_R$ y $u_L$. Emitirá un $W^-$ sólo cuando sea $u_L$ y se convertirá en un neutrino.




Observación: los neutrinos únicamente existen como partículas left-handed. Como $m_\nu \simeq 0$, se han observado sólo $\nu$ con hel. negativa y $\bar{\nu}$ con hel. positiva.

## Relaciones de ortogonalidad

Es sencillo demostrar (ejercicio) que:

$$u^\dagger(p)\, u(p) = 2E_p\, \xi^\dagger \xi$$

$$v^\dagger(p)\, v(p) = 2E_p\, \eta^\dagger \eta$$

Observación (sin demostrar): estas expresiones NO son invariante Lorentz. Para conseguir invariancia, definimos:

Adjunto de un espinor

$$\bar{u}(p) \equiv u^\dagger(p)\gamma^0$$

De esta manera, $\bar{u}(p)u(p) = 2m\,\xi^\dagger\xi$ sí es invariante Lorentz.

Volvemos a la ortogonalidad: para describir el spin de una partícula, usamos normalmente la base

$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tal que

$$\xi^{s\dagger}\xi^r = \delta^{sr}$$

Entonces, podemos escribir un espinor de Dirac de manera apropiada para ser usado como un estado de base:

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix} \quad , s = 1 \text{ ó } 2$$

y $\bar{u}^s(p)\, u^r(p) = 2m\,\xi^{s\dagger}\xi^r = 2m\,\delta^{sr}$

Ahora sí: importante: podemos expresar cualquier solución arbitraria de la ecuación de Dirac como una $\int$ momento y una $\Sigma$ sobre espines; para partícula:

$$\boxed{\psi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec p}}} \sum_{s=1}^{2} a_{s\vec p}\, u^s(p)\, e^{-ip\cdot x}}$$

Para el caso de antipartículas, obtenemos:

$$\bar{v}^s(p)\, v^r(p) = -2m\eta^{s\dagger}\eta^r = -2m\,\delta^{sr}$$

y la función de onda para antipartículas será

$$\boxed{\psi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1}^{2} b^*_{s\vec{p}}\, v^s(p)\, e^{ip\cdot x}}$$

En las expresiones anteriores, $a_{s\vec{p}}$ y $b^*_{s\vec{p}}$ son las amplitudes del campo.

Finalmente, notemos que

$$\bar{u}^r(p)\, v^s(p) = \bar{v}^r(p)\, u^s(p) = 0 .$$

Resumen

| | espinor | spin up | spin down | normaliz. |
|---|---|---|---|---|
| partícula | $\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\bar{u}^s(p)u^r(p) = 2m\delta^{sr}$ |
| antipartícula | $\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\bar{v}^s(p)v^r(p) = -2m\delta^{sr}$ |

Hagamos algún cálculo para practicar.

Ejemplo

$$\sum_{s=1}^{2} u^s(p)\,\bar{u}^s(p) = \sum_{s} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix} \left( \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \quad \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \right)$$

$$\bar{u}^s(p) = u^\dagger(p)\,\gamma^0 \quad \text{y} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}^s(p) = \left( \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \quad \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \right) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left( \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \quad \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \right)$$

Ahora bien:

$$\sum_{s=1}^{2} \xi^s \xi^{s\dagger} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \; 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \; 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\sum_{s=1}^{2} u^s(p)\,\bar{u}^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma} \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{p\cdot\sigma}\,\sqrt{p\cdot\bar\sigma} = \Big[\big(p^0 - p^1\sigma_x - p^2\sigma_y - p^3\sigma_z\big)\big(p^0 + p^1\sigma_x + p^2\sigma_y + p^3\sigma_z\big)\Big]^{1/2}$$

$$= \Big[(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2\Big]^{1/2}$$

$$= \sqrt{E^2 - p^2} = m$$

luego

$$\sum_{s=1}^{2} u^s(p)\,\bar u^s(p) = \begin{pmatrix} m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar\sigma & m \end{pmatrix}$$

$$= \gamma^\mu p_\mu + m = (\gamma\cdot p + m)\,\mathbb{1}_{4\times4}$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ -\bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Resultado importante:

$$\boxed{\sum_s u^s(p)\,\bar u^s(p) = \gamma\cdot p + m} = \not p + m$$

Entregable: para antipartículas, se tiene:

$$\boxed{\sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \gamma\cdot p - m} = \not{p} - m$$

Para terminar este capítulo, antes de entrar el Lagrangiano y cuantización, vamos a hablar del <u>límite no-relativista de la ec. Dirac</u>

Se suele decir que la ec. de Dirac es necesaria para hablar del spin. En realidad, la <u>ecuación de Pauli</u> ya lo hacía

$$\hat{H}\psi = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^2}{2m}\psi$$

¿Cómo tomamos el límite no-relativista?

En el límite no relativista,

$$E^2 = p^2 + m^2 \longrightarrow m^2$$

$\Rightarrow E = mc^2$ (recordad que ultrarrelativista es $E = pc$).

Para hacer una teoría no relativista, la idea es reemplazar el campo relativista

$$\varphi(\vec{x},t) \longrightarrow \phi(\vec{x},t)\, e^{-imc^2/t}$$

para factorizar la gran energía en reposo.

Hagamos ésto en Dirac:

$$\psi_L(t,\vec{x}) = \phi_L(t,\vec{x})\, e^{-imt}$$

Entonces, $(\hat{\not{p}} - m)\psi = 0 \implies$

$$\implies \begin{pmatrix} -m & \hat{E} - \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \\ \hat{E} + \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L(t,\vec{x})e^{-imt} \\ \phi_R(t,\vec{x})e^{-imt} \end{pmatrix} = 0$$

donde $\hat{E} = i\partial_0$.

Observad que

$$\hat{E}\,\phi_a(t,\vec{x})e^{-imt} = e^{-imt}(m + \hat{E})\,\phi_a(t,\vec{x})$$

$(a = L,R)$.

Obtenemos

$$-m\phi_L + (m + \hat{E} - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\phi_R = 0$$

$$\underbrace{(m + \hat{E} + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\phi_L - m\phi_R = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_R = \left(1 + \frac{\hat{E}}{m} + \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{m}\right)\phi_L$$

lo meto en la 1ª ec.

$$\left[-m + (m + \hat{E} - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\left(1 + \frac{\hat{E}}{m} + \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{m}\right)\right]\phi_L = 0$$

$$\left[-\cancel{m} + \left(\cancel{m} + \hat{E} + \cancel{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}} + \hat{E} + \frac{\hat{E}^2}{m} + \cancel{\frac{\hat{E}}{m}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}} - \cancel{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}} - \cancel{\frac{\hat{E}}{m}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}} - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^2}{m}\right)\right]\phi_L = 0$$

$$\left(2\hat{E} + \frac{\hat{E}^2}{m} - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^2}{m}\right)\phi_L = 0$$

$\hat{E}^2$ despreciable si estoy a baja energía:

$$\Rightarrow \quad \hat{E}\phi_L = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^2}{2m}\phi_L \quad , \text{ que es la ec. de Pauli.}$$

Ejercicio: comprobad que la misma ecuación sirve para $\phi_R$.

Toda esta discusión anterior es muy relevante para calcular el factor giromagnético del electrón

Vamos a partir del acoplamiento mínimo (ya hemos hablado de él en clase)

$$\hat{\vec{p}} \longrightarrow \hat{\vec{p}} - q\vec{A}$$

$$\hat{E} \longrightarrow \hat{E} - qA^0$$

Entonces,
$$(\hat{E} - qA^0)\phi = \frac{[\vec{\sigma}\cdot(\hat{\vec{p}} - q\vec{A})]^2}{2m}\phi$$

El R.H.S. de la ec. anterior lo vamos a desarrollar usando:

$$\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$$

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\,\varepsilon^{ijk}\sigma^k$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Ejercicio: llegad a

$$(\hat{E} - qA^0)\,\phi = \frac{[\vec{\sigma}\cdot(\hat{\vec{p}} - q\hat{\vec{A}})]^2}{2m}\phi - \frac{q}{2m}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\,\phi$$

Por otro lado, la interacción de un momento magnético con un $\vec{B}$ externo viene dada por

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}}\cdot\vec{B} \equiv -g\frac{q}{2m}\hat{\vec{S}}\cdot\vec{B}$$

Como $\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \Rightarrow \boxed{g_e = 2}$

En realidad $g_e = 2{,}0023193\ldots$ y se calcula teniendo en cuenta que tenemos no partículas sino campos cuánticos.