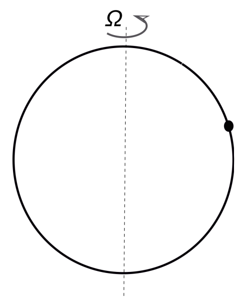
Examen Final de Mecánica Analítica.
12 de junio de 2023

1. Una partícula de masa m está ensartada en un aro de radio R. El aro está situado en un plano vertical y gira alrededor de su diámetro vertical con una velocidad angular Ω, como indica la figura. La partícula puede deslizar sin rozamiento por el aro y sobre ella actúa la fuerza de la gravedad.



   (a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? Obtén la lagrangiana del sistema.

   (b) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

   (c) Obtén la hamiltoniana. ¿Se conserva? ¿Es igual a la energía? Interpreta el resultado.

   (d) Obtén las condiciones iniciales, si es que existen, para que la partícula describa un movimiento circular uniforme. ¿Cuál sería el radio de la circunferencia que describe?

2. La lagrangiana de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético es
$$L = \frac{1}{2} m\, \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - e\,\phi + e\,\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}.$$
Considera el caso en que la partícula se mueve en el plano $x - y$ y $\phi = -E_x\, x$, $\vec{A} = (0, B_z\, x, 0)$, donde E_x y B_z son constantes.

   (a) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

   (b) Obtén los momentos canónicos. ¿Se conserva alguno de ellos? Interpreta el resultado en base a alguna simetría de la lagrangiana.

   (c) Obtén la hamiltoniana en función de los momentos y las ecuaciones de Hamilton.

   (d) Para el caso $E_x = 0$, y considerando la rotación infinitesimal
$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x + \epsilon\, y \\ y &\longrightarrow -\epsilon\, x + y \\ \dot{x} &\longrightarrow \dot{x} + \epsilon\, \dot{y} \\ \dot{y} &\longrightarrow -\epsilon\, \dot{x} + \dot{y} \end{aligned}$$
   aplica el teorema de Noether y obtén la cantidad conservada asociada.

3. Las dos partículas de la figura tienen la misma masa m y pueden deslizar sin rozamiento por las rectas paralelas. El muelle sujeto a una de las partículas tiene un extremo fijo que dista a de una de las rectas y la distancia entre las rectas es también a. Los muelles tienen una constante elástica k y longitud natural de equilibrio $\ell_0 = 0$. Usando las coordenadas indicadas, x_1 y x_2,

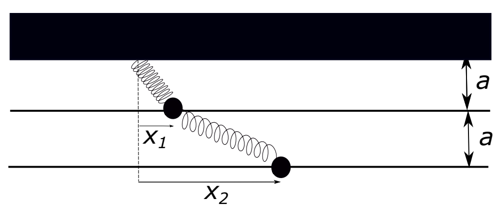
    (a) Obtén la lagrangiana del sistema.

    (b) A partir de la expresión de la energía potencial, obtén las coordenadas x_1 y x_2 para que el sistema esté en equilibrio.

    (c) Obtén las frecuencias propias de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.

    (d) Obtén los modos normales (sin normalizar) y dibuja esquemáticamente cómo se moverían las partículas en cada modo.

    (e) Estando el sistema en la posición de equilibrio le comunicamos a la partícula que está arriba una velocidad inicial v_1, ¿qué velocidad inicial le tendrímos que comunicar a la otra partícula para excitar sólo el modo de menor frecuencia. ¿Y el de mayor frecuencia?



4. Dada la transformación $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$

$$\begin{aligned} Q &= q + t\, e^p \\ P &= p, \end{aligned}$$

    (a) Demuestra que es una transformación canónica.

    (b) Obtén una función generatiz de tipo F_2 de la transformación.

    (c) Si la hamiltoniana de un sistema es

    $$H = q + t\, e^p,$$

    usa la transformación dada para obtener la nueva hamiltoniana y las ecuaciones de hamilton correspondientes.

    (d) Obtén la solución de las ecuaciones de hamilton del apartado anterior y úsala para obtener $q(t)$ y $p(t)$ con las condiciones iniciales $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$.

5. Una partícula se mueve sobre el eje x y su energía potencial es $U(x) = -F\, x$, siendo F una constante.

    (a) Escribe la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente.

    (b) Obtén una solución completa para la función principal de Hamilton.

    (c) A partir de ella obtén el movimiento de la partícula, $x(t)$, con condiciones iniciales en $t = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Interpreta el resultado.

REPE + ABAJO ↓

2. La lagrangiana de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético es

$$L = \frac{1}{2} m\,\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} - e\,\phi + e\,\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}.$$

Considera el caso en que la partícula se mueve en el plano $x-y$ y $\phi = -E_x\,x$, $\vec{A} = (0, B_z\,x, 0)$, donde E_x y B_z son constantes.

$\Rightarrow z = 0$

(a) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

(b) Obtén los momentos canónicos. ¿Se conserva alguno de ellos? Interpreta el resultado en base a alguna simetría de la lagrangiana.

(c) Obtén la hamiltoniana en función de los momentos y las ecuaciones de Hamilton.

(d) Para el caso $E_x = 0$, y considerando la rotación infinitesimal

$\frac{eB_z}{m}(p_y - eB_z)$

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x + \epsilon\, y \\ y &\longrightarrow -\epsilon\, x + y \\ \dot x &\longrightarrow \dot x + \epsilon\,\dot y \\ \dot y &\longrightarrow -\epsilon\,\dot x + \dot y \end{aligned}$$

aplica el teorema de Noether y obtén la cantidad conservada asociada.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \cancel{\dot z^2}) + eE_x x + eB_z\dot y + \cancel{exz}$$

Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} m\ddot x = e(E_x + \cancel{z}) \\ m\ddot y = 0 \\ \cancel{m\ddot z = ex} \end{cases}$

$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} \Rightarrow p_i = m\dot q_i \qquad p_x = m\dot x$

$p_y = m\dot y + eB_z$

Como $\mathcal{L}(x,y,\dot x,\dot y) = \mathcal{L}(x,\dot x,\dot y)$ p_y se conserva $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0\right)$

Podemos decir que p_z se "conserva" ya que $z=0$ pues tenemos z constante y igual a cero. De esta forma podemos añadir tantas variables como queramos y decir que se conservan si las igualamos a cero.

$$H = \sum_i \dot q_i p_i - \mathcal{L} = \dot x p_x + \dot y p_y + \dot z p_z - \mathcal{L} =$$
$$= \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \cancel{\dot z^2}) - (ex(E_x + \cancel{z}) + eB_z\dot y) =$$
$$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + \cancel{p_z^2}) - (ex(E_x + \cancel{z}) + eB_z\dot y) =$$
$$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) - E_x e x + \frac{eB_z}{2m}(eB_z - p_y)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot q_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot p_i \end{cases} \Rightarrow \quad \dot x = \frac{p_x}{2}, \; \dot y = \frac{p_y}{2} - \frac{eB_z}{m} \qquad \dot p_x = +eE_x, \; \dot p_y = 0 \leftarrow b)$$

Si $E_x = 0$; $\quad x \to x + \varepsilon y \quad y \to y - \varepsilon x \quad \dot x \to \dot x + \varepsilon \dot y \quad \dot y \to \dot y - \varepsilon \dot x \Rightarrow$

Por el T^ma de Noether, las transformaciones rotacionales que mantienen invariantes a la lagrangiana están asociadas a la conservación del momento angular, en este caso $l_z = xp_y - yp_x = cte.$

$$\delta x = \varepsilon y \quad \delta \dot x = \varepsilon \dot y \quad \delta y = -\varepsilon x \quad \delta \dot y = -\varepsilon \dot x$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + eE_x x + eB_z\dot y$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\delta x + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}}\delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x}\delta \dot x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y}\delta \dot y = \cancel{eE_x}\varepsilon y + \cancel{m\dot x\varepsilon\dot y} + (\cancel{m\dot y} + eB_z)(-\varepsilon \dot x) = -e\varepsilon B_z\dot x \neq 0 \; ??$$

5. Una partícula se mueve sobre el eje x y su energía potencial es $U(x) = -F\,x$, siendo F una constante.

(a) Escribe la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente.

(b) Obtén una solución completa para la función principal de Hamilton.

(c) A partir de ella obtén el movimiento de la partícula, $x(t)$, con condiciones iniciales en $t = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot x(0) = v_0$. Interpreta el resultado.

$$T = \frac{p^2}{2m} \quad U = -xF \Rightarrow \mathcal{L} = T - U = \frac{p^2}{2m} + xF$$

$$H = \sum \dot q p - \mathcal{L} = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} - xF = \frac{p^2}{2m} - xF = T + U$$

$$S(x,\alpha,t) = W(x,\alpha) + g(t) \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = \dot g(t)$$

$$\text{H-J}: \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - xF = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - xF = -\frac{\partial S}{\partial t} = -\dot g(t) \Rightarrow g(t) = -\alpha t$$

↑ porque $\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - xF$ es independiente del tiempo

α puede ser tratado como una cte.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - xF = \alpha \Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2m(\alpha + xF)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W(x,\alpha) = \int \sqrt{2m(\alpha + xF)}\,dx = \cancel{x\sqrt{2m\alpha} + \frac{2}{3}\sqrt{2mF}\,x^{3/2}} \Rightarrow S(x,\alpha,t) = \cancel{x\sqrt{2m\alpha} + \frac{2}{3}\sqrt{2mF}}\,x^{3/2} - \alpha t$$

$\frac{1}{3mF}(2m\alpha + 2mFx)^{3/2}$ (*)

$$\Rightarrow \boxed{S = \cancel{x\sqrt{2mE} + \frac{2}{3}\sqrt{2mF}}\,x^{3/2} - Et}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \Rightarrow -\alpha = -E \Leftrightarrow \alpha = E \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta = \cancel{x\sqrt{\frac{m}{2\alpha}} - t} = \beta \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \beta = x\sqrt{\frac{m}{2E}} - t \Leftrightarrow x(t) = (\beta + t)\sqrt{\frac{2E}{m}} \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \boxed{x(t) = \left(x_0\sqrt{\frac{m}{2E}} + t\right)\sqrt{\frac{2E}{m}}}$$

**

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p = \cancel{\sqrt{2m\alpha} + \sqrt{2mFx}} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \sqrt{2m(E + Fx)} = p(t) \Rightarrow v_0 = \sqrt{2m(E + Fx_0)}$$

↳ Esto de que v_0 no sea libre chirría

$$\cancel{x(0) = x_0 \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}\,\beta \Rightarrow \beta = x_0\sqrt{\frac{m}{2E}}} \; (2)$$

$$** \; \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{1}{F}\sqrt{2m(E + Fx)} - t = \beta \Rightarrow x(t) = F(\beta + t)^2\frac{1}{2m} - \frac{E}{F} \Rightarrow x(0) = x_0 \Rightarrow \frac{F\beta^2}{2m} - \frac{E}{F} = x_0 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{\frac{2m}{F}\left(x_0 + \frac{E}{F}\right)}$$

4. Dada la transformación $(q,p) \longrightarrow (Q,P)$

$$Q = q + t\,e^p$$
$$P = p,$$

(a) Demuestra que es una transformación canónica.

(b) Obtén una función generatiz de tipo F_2 de la transformación.

(c) Si la hamiltoniana de un sistema es

$$H = q + t\,e^p,$$

usa la transformación dada para obtener la nueva hamiltoniana y las ecuaciones de hamilton correspondientes.

(d) Obtén la solución de las ecuaciones de hamilton del apartado anterior y úsala para obtener $q(t)$ y $p(t)$ con las condiciones iniciales $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$.

$(q,p)\to(Q,P)$ canónica $\iff [Q,Q]=[P,P]=0;\ [Q,P]=\delta_{ij}$

$[Q,Q]=[q+te^p, q+te^p]=\frac{\partial}{\partial q}(q+te^p)\frac{\partial}{\partial p}(q+te^p)-\frac{\partial}{\partial q}(q+te^p)\frac{\partial}{\partial p}(q+te^p)=0$

$[P,P]=[p,p]=0$

$[Q,P]=\frac{\partial}{\partial q}(q+te^p)\frac{\partial}{\partial p}p-\cancel{\frac{\partial}{\partial q}p}\frac{\partial}{\partial p}(q+te^p)=1\cdot 1-0=1 \Rightarrow \boxed{\text{es canónica}}$

$\frac{\partial F_2}{\partial q}=p \quad \frac{\partial F_2}{\partial P}=Q$

$F_2=\int p\,dq=\int P\,dq=Pq+h(P,t)$

$\frac{\partial F_2}{\partial P}=q+\frac{\partial q}{\partial P}=Q=q+te^p \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial P}=te^p=te^P \Rightarrow$

$\Rightarrow h(P,t)=\int te^P\,dP=te^P+\cancel{g(t)}^{\,0}$

$\Rightarrow \boxed{F_2=Pq+te^P}$

$\frac{\partial F_2}{\partial q}=p \quad \frac{\partial F_2}{\partial P}=Q \quad F_2=\int Q\,dP=\int(q+te^P)\,dP=Pq+te^P+g(q,t) \quad \frac{\partial F_2}{\partial q}=P=P+\frac{\partial g}{\partial q}\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial q}=0\rightarrow g(q,t)=g(t)$

$\boxed{F_2(q,P,t)=Pq+te^P+\cancel{g(t)}^{\,0}}$

$H=q+te^p \qquad K-H=\frac{\partial F_2}{\partial t}\Rightarrow K=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}=q+te^P+Pe^P+\cancel{\dot g}^{\,0}=\boxed{q+e^P(t+P)+\cancel{\dot g}^{\,0}}$

$\frac{\partial K}{\partial q}=-\dot p\iff\dot p=-1\iff\boxed{p(t)=-t}$

$\frac{\partial K}{\partial P}=\dot q\iff\dot q=\frac{\partial}{\partial P}(Pe^P)=e^P(1+P)=\dot q\iff\boxed{q(t)=e^P t(1+P)}$

Verifican que $q(0)=q_0$ y $p(0)=p_0$

3. Las dos partículas de la figura tienen la misma masa m y pueden deslizar sin rozamiento por las rectas paralelas. El muelle sujeto a una de las partículas tiene un extremo fijo que dista a de una de las rectas y la distancia entre las rectas es también a. Los muelles tienen una constante elástica k y longitud natural de equilibrio $\ell_0 = 0$. Usando las coordenadas indicadas, x_1 y x_2,

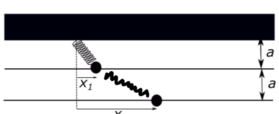
(a) Obtén la lagrangiana del sistema.

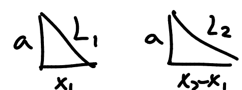
(b) A partir de la expresión de la energía potencial, obtén las coordenadas x_1 y x_2 para que el sistema esté en equilibrio.

(c) Obtén las frecuencias propias de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.

(d) Obtén los modos normales (sin normalizar) y dibuja esquemáticamente cómo se moverían las partículas en cada modo.

(e) Estando el sistema en la posición de equilibrio le comunicamos a la partícula que está arriba una velocidad inicial v_1, ¿qué velocidad inicial le tendrímos que comunicar a la otra partícula para excitar sólo el modo de menor frecuencia. ¿Y el de mayor frecuencia?





$L_1=(a^2+x_1^2)^{1/2}$

$L_2=(a^2+(x_2-x_1)^2)^{1/2}$

$T=\frac12 m(\dot x_1^2+\dot x_2^2)$

$U=\frac12 k(\Delta x_1^2+\Delta x_2^2)=\frac12 k((L_1-\cancel{\ell_0})^2+(L_2-\cancel{\ell_0})^2)=\frac12 k(L_1^2+L_2^2)=$

$=\frac12 k\left(2a^2+x_1^2+(x_2-x_1)^2\right)=\frac12 k(2a^2+2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)$

$\boxed{\mathcal{L}=T-U=\frac12 m(\dot x_1^2+\dot x_2^2)-\frac12 k(2a^2+x_1^2+(x_2-x_1)^2)}$ a)

$\vec\nabla U=\vec 0\Rightarrow\left(\frac{\partial U}{\partial x_1},\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)=(0,0)$

$\frac{\partial U}{\partial x_1}=2kx_1-kx_2=0$

$\frac{\partial U}{\partial x_2}=kx_2-kx_1=0$

$\iff\left(\begin{array}{cc|c}2&-1&0\\1&-1&0\end{array}\right)\Rightarrow\boxed{x_1=x_2=0}$ b)

$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}=2k\quad\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}=k\quad\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_2\partial x_1}=-k\rightarrow\mathbb{V}=\begin{pmatrix}2k&-k\\-k&k\end{pmatrix}$

$\frac{\partial^2 T}{\partial\dot x_1^2}=m=\frac{\partial^2 T}{\partial\dot x_2^2}\quad\frac{\partial^2 T}{\partial\dot x_1\partial\dot x_2}=0=\frac{\partial^2 T}{\partial\dot x_2\partial\dot x_1}\Rightarrow\mathbb{T}=\begin{pmatrix}m&0\\0&m\end{pmatrix}\Rightarrow|\mathbb{V}-\omega^2\mathbb{T}|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2k-\omega^2m&-k\\-k&k-\omega^2m\end{vmatrix}=0\iff m^2\omega^4-3km\omega^2+k^2=0$

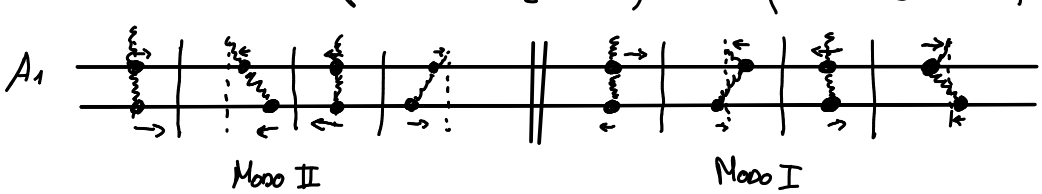
$\Rightarrow\omega^2=\frac{3km\pm\sqrt{9k^2m^2-4m^2k^2}}{2m^2}=\frac{3k\cancel{m}\pm\sqrt{5k^2m^2}}{2m^2}=\frac{k}{2m}(3\pm\sqrt5)\Rightarrow\boxed{\omega_1=\left(\frac{k}{2m}(3+\sqrt5)\right)^{1/2},\ \omega_2=\left(\frac{k}{2m}(3-\sqrt5)\right)^{1/2}}$

$A_1=\mathrm{Ker}(\mathbb{V}-\omega_1^2\mathbb{T})=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}2k-\frac{k}{2}(3+\sqrt5)&-k\\-k&k-\frac{k}{2}(3+\sqrt5)\end{pmatrix}=\mathrm{Ker}\left(k\begin{pmatrix}\frac12(1-\sqrt5)&-1\\-1&-\frac12(1+\sqrt5)\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Env}\{(1,\tfrac12(1-\sqrt5))\}$ //

$\approx(1,-0'6)$

$A_2=\mathrm{Ker}(\mathbb{V}-\omega_2^2\mathbb{T})=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}2k-\frac{k}{2}(3-\sqrt5)&-k\\-k&k-\frac{k}{2}(3-\sqrt5)\end{pmatrix}=\mathrm{Ker}\left(k\begin{pmatrix}\frac12(1+\sqrt5)&-1\\-1&\frac12(-1+\sqrt5)\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Env}\{(1,\tfrac12(1+\sqrt5))\}$

$\approx(1,1'6)$



Modo de menor freq: ω_1

$v_2=\frac12(1-\sqrt5)\,v_1$

Modo de mayor freq: ω_2

$v_2=\frac12(1+\sqrt5)\,v_1$

2. La lagrangiana de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético es

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - e\,\phi + e\,\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}.$$

Considera el caso en que la partícula se mueve en el plano $x - y$ y $\phi = -E_x\, x$, $\vec{A} = (0, B_z\, x, 0)$, donde E_x y B_z son constantes.

(a) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

(b) Obtén los momentos canónicos. ¿Se conserva alguno de ellos? Interpreta el resultado en base a alguna simetría de la lagrangiana.

(c) Obtén la hamiltoniana en función de los momentos y las ecuaciones de Hamilton.

(d) Para el caso $E_x = 0$, y considerando la rotación infinitesimal

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x + \epsilon y \\ y &\longrightarrow -\epsilon x + y \\ \dot{x} &\longrightarrow \dot{x} + \epsilon \dot{y} \\ \dot{y} &\longrightarrow -\epsilon \dot{x} + \dot{y} \end{aligned}$$

aplica el teorema de Noether y obtén la cantidad conservada asociada.

Plano x-y $\Rightarrow z=0$ $\quad E_x = E \quad B_z = B$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + exE + e(0, Bx, 0)\cdot(\dot x, \dot y, 0) =$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + exE + e\dot y Bx$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange: $\sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot x - eE = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}}^{0} = 0 \Rightarrow m\ddot y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} p_y = m\dot y + eBx \text{ se conserva} \\ p_x = m\dot x \end{array}$$

Por el Teorema de Noether sabemos que la independencia de la lagrangiana respecto de una coordenada generalizada nos da la información de que existe una simetría subyacente. En este caso, la lagrangiana es invariante respecto a transformaciones sobre el eje OY ya que esta no depende de y. Por tanto, la cantidad asociada es el momento conjugado asociado a la variable y, p_y.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot x^2 + e\dot y B + \frac{1}{2}m\dot y^2 + exE = \frac{p_x^2}{2m} + exE + \frac{p_y^2}{2m} - \frac{e^2B^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 - e^2B^2) + exE$$

$$H = \sum_i \dot q_i p_i - \mathcal{L} = \dot x p_x + \dot y p_y - \mathcal{L} = m(\dot x^2 + \dot y^2) + \cancel{\dot y eB} - \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) - \cancel{e\dot y B} - exE = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) - exE =$$

$$= \frac{eB}{2m}(eB - p_y) + \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) - exE$$

Nu lo he escrito pero el porro es histórico

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot p_i \longleftrightarrow \begin{cases} \dot p_x = eE \\ \dot p_y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot q_i \longleftrightarrow \begin{cases} \dot x = \frac{p_x}{m} = \frac{eE}{m} \\ \dot y = \frac{p_y}{m} - \frac{eB}{2m} \end{cases}$$

Si $E = 0$ $\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + e\dot y Bx$

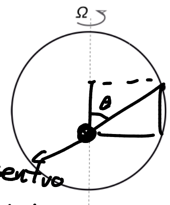
$\delta x = \varepsilon y \quad \delta y = -\varepsilon x \quad \delta \dot x = \varepsilon \dot y \quad \delta \dot y = -\varepsilon \dot x$

$$\delta\mathcal{L} = e\dot y B\varepsilon y + \cancel{m\dot x\varepsilon\dot y} - (\cancel{m\dot y} + eBx)\varepsilon\dot x = e\varepsilon B(y\dot y - x\dot x)$$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x}\delta x + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y}\delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x}\delta \dot x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y}\delta \dot y = m\ddot x\varepsilon y - m\ddot y\varepsilon x + \cancel{m\dot x\varepsilon\dot y} - (\cancel{m\dot y} + eBx)\varepsilon\dot x =$$

$$= m\varepsilon(\ddot x y - \ddot y x) - eB\varepsilon x\dot x = \frac{dl_z}{dt} = 0 \Rightarrow l_z \text{ se conserva}$$

1. Una partícula de masa m está ensartada en un aro de radio R. El aro está situado en un plano vertical y gira alrededor de su diámetro vertical con una velocidad angular Ω, como indica la figura. La partícula puede deslizar sin rozamiento por el aro y sobre ella actúa la fuerza de la gravedad.



el centro por el 1ma del pto. gordo

(a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? Obtén la lagrangiana del sistema.

(b) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

(c) Obtén la hamiltoniana. ¿Se conserva? ¿Es igual a la energía? Interpreta el resultado.

(d) Obtén las condiciones iniciales, si es que existen, para que la partícula describa un movimiento circular uniforme. ¿Cuál sería el radio de la circunferencia que describe?

1 grado de libertad. En esféricas:

$\rho = R$ fijo $\quad \dot\varphi = \Omega$ fijo $\Rightarrow \varphi = \Omega t \quad \theta$ libre

$x = R\sin\theta\cos(\Omega t)$ $\quad \dot x = R\cos\theta\cos(\Omega t)\dot\theta$

$y = R\sin\theta\sin(\Omega t) \Rightarrow \dot y = R\cos\theta\sin(\Omega t)\dot\theta \Rightarrow$

$z = R\cos\theta$ $\quad \dot z = -R\sin\theta\dot\theta$

$\dot x^2 = R^2\cos^2\theta\cos^2(\Omega t)\dot\theta^2$

$\dot y^2 = R^2\cos^2\theta\sin^2(\Omega t)\dot\theta^2$ $\qquad \dot x^2+\dot y^2+\dot z^2 = R^2\dot\theta^2$

$\dot z^2 = R^2\sin^2\theta\,\dot\theta^2$

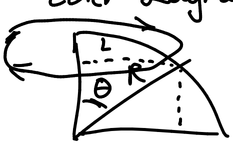
$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(R^2\dot\theta^2) \qquad U = mgR\cos\theta$

$L = T - U = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 - mgR\cos\theta$

$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta$

$H = \sum_i \dot q_i p_i - L = mR^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 + mgR\cos\theta = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 + mgR\cos\theta = T+U = E \qquad H(q,p,t) = H(q,p) \Rightarrow$ se conserva

Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = F_i = 0 \Rightarrow mR^2\ddot\theta + mgR\sin\theta_0 = 0 \qquad$ MCU $\Rightarrow \ddot\theta = 0 \Rightarrow \dot\theta(t) = 0 \Rightarrow \theta(t) = \theta_0$



$L = R\cos\theta$ $\quad$ El radio del MCU descrito será de $R\cos\theta$ (si $\theta_0 = 0$ entonces es R)

Las condiciones iniciales serán $\dot\theta(0) = 0 \quad \theta(t) = \theta_0$