

**Grado en Física. Mecánica Newtoniana y Relatividad.**  
**Apuntes de clase.**  
Curso 2022-2023



# Chapter 1

## El problema de dos cuerpos: órbitas en un campo de fuerzas central.

### 1.1 Introducción

Una de las aplicaciones más populares de la física Newtoniana es el problema de dos masas que interactúan entre sí mediante la fuerza gravitatoria. Recordemos la expresión de esta interacción:

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{G M_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (1.1)$$

La fórmula (1.1) expresa la fuerza gravitatoria que la masa  $M_1$  ejerce sobre  $m_2$ , siendo  $\mathbf{r}_{1,2}$  las posiciones de  $M_1$  y  $m_2$  respectivamente.

La constante  $G$  es la constante de gravitación universal y su valor es  $G = 6.67384 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg}$ , que determina el orden de magnitud de esta interacción.

$\mathbf{F}_{21}$  será entonces la fuerza que la masa  $m_2$  ejerce sobre  $M_1$ , y por el principio de acción y reacción (tercera ley de Newton) debe cumplirse que  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ .

Analizando rápidamente la forma de esta ley llegamos a dos conclusiones que son fundamentales:

- La fuerza que una partícula hace sobre la otra está dirigida a lo largo de la línea que une a ambas partículas y apunta siempre hacia la partícula que ejerce la fuerza.
- Su intensidad solo depende de  $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$

Si aspiramos a describir las trayectorias de estas partículas en el espacio vemos que tenemos un problema en el cual hay 6 grados de libertad que deben ser determinados en función del tiempo ( las tres coordenadas espaciales de cada partícula). En lo que sigue, trataremos de reducir el problema lo más posible, haciendo uso de las simetrías que tiene el sistema y de las leyes de conservación asociadas a estas simetrías.

## 1.2 Problema Unidimensional equivalente

Para analizar el movimiento de ambas partículas comenzamos escribiendo las ecuaciones de Newton para cada una de ellas:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \quad (1.3)$$

Si sumamos las fórmulas (1.2) y (1.3) obtenemos inmediatamente la ley de conservación del impulso total del sistema  $\mathbf{P}_T = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \\ 0 &= \frac{d\mathbf{P}_T}{dt} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Si consideramos a nuestro sistema como el formado por la masas  $M_1, m_2$ , este estará aislado. Ninguna fuerza externa actúa sobre él, ya que las fuerzas gravitatorias son fuerzas internas. Es decir, para el sistema el espacio está vacío y por lo tanto es isótropo y homogéneo. La conservación del impulso total está asociada a la homogeneidad del espacio ( luego veremos que ocurre con la isotropía). El vector posición que representa al sistema como un todo es la denominada posición del centro de masas  $\mathbf{R}_{cm}$ . Recordemos su definición:

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + m_2} \quad (1.5)$$

Este vector representa a un punto del espacio que está ubicado entre las dos masas, sobre la línea que las une y se sitúa más cerca de la más pesada. En términos de este vector podemos definir también la velocidad del sistema como un todo, velocidad del centro de masa  $\mathbf{V}_{cm}$  y el impulso total se puede escribir en función de esta:

$$\mathbf{V}_{cm} = \frac{d\mathbf{R}_{cm}}{dt} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{P}_T = M_T \mathbf{V}_{cm}, \quad (1.7)$$

donde  $M_T = M_1 + m_2$  es la masa total.

Estas ecuaciones nos muestran que el centro de masa del sistema se moverá con velocidad constante. Entonces podemos poner un sistema de referencia en el centro de masa, que tenga su origen en ese punto. En este sistema de referencia el  $\mathbf{P}_T$  es cero y las coordenadas de las partículas deben satisfacer:

$$0 = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + m_2} \quad (1.8)$$

Vemos entonces que ahora solo tenemos que determinar la posición de una partícula y la de la otra se obtiene por la ecuación (1.8). Hemos reducido el número de grados de libertad de 6 a 3 usando la simetría de traslación espacial.

En el sistema del centro de masa la fuerza que actúa sobre cada partícula apunta siempre hacia el origen. Por lo tanto su momento es 0. El momento

angular  $\mathbf{L}$  entonces debe conservarse. Veamos qué significan estas nuevas restricciones. De la ecuación (1.8) resulta que:

$$M_1 \mathbf{r}_1 = -m_2 \mathbf{r}_2 \quad (1.9)$$

$$M_1 \mathbf{v}_1 = -m_2 \mathbf{v}_2 \quad (1.10)$$

Además:

$$\mathbf{L} = M_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 \quad (1.11)$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times M_1 \mathbf{v}_1 \quad (1.12)$$

Dado que  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son colineales (recordemos que el origen está en el centro de masas), también son colineales con  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Por lo tanto la ecuación (1.12) concluimos que  $\mathbf{v}_i, \mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2$ ) son siempre perpendiculares a un vector fijo  $\mathbf{L}$ . Esto es equivalente a decir que el movimiento de ambas masas transcurre en un plano perpendicular a  $\mathbf{L}$ . Entonces podremos usar coordenadas polares en el plano para describir la posición de cada partícula. Hemos reducido entonces a solo 2 los grados de libertad. Escribamos esto explícitamente

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (1.13)$$

$$= \frac{(M_1 + m_2)}{M_1} \mathbf{r}_2 \quad (1.14)$$

$$= -\frac{(M_1 + m_2)}{m_2} \mathbf{r}_1 \quad (1.15)$$

Entonces podemos escribir la ecuación de movimiento para la masa  $m_2$ , por ejemplo, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} \\ &= \frac{m_2 M_1}{M_1 + m_2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Hemos reducido el problema original a la ecuación (1.16), que es la ecuación de movimiento para una partícula ficticia de masa  $\frac{M_1 m_2}{M_1 + m_2} = m$ , que llamamos *masa reducida*, sometida a una fuerza central  $\mathbf{F}_{12}$ , que es inversamente proporcional al módulo cuadrado de su coordenada,  $r^2$ . Y para describir esta coordenada utilizamos coordenadas polares en el plano. Las coordenadas polares son las más adecuadas ya que la fuerza solo depende de la distancia de  $m$  al origen,  $r$ . Recordando la expresión de la aceleración en coordenadas polares: :

$$\frac{G M_1 m_2}{r^2} = m \left( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \quad (1.17)$$

$$0 = m \left( \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \right) \quad (1.18)$$

Las ecuaciones (1.17), (1.18) son las componentes radial y angular de las ecuaciones de Newton en coordenadas polares

La ecuación (1.18) además expresa que el módulo del momento angular de la masa  $m$  se conserva ( la conservación de su dirección ya la hemos uti-

lizado para restringir el movimiento a un plano y poder utilizar coordenadas polares. En efecto:

$$\begin{aligned} L &= m |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \\ &= m |r \hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}})| \\ &= m r^2 \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Y entonces:

$$\frac{dL}{dt} = m r (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}) = 0, \quad (1.20)$$

que es equivalente a (1.18).

Ahora podemos integrar las ecuaciones (1.17), (1.18) y obtener así una primera integral de movimiento. Luego lo haremos así, pero ahora utilizamos otro argumento de simetría para llegar a ese mismo punto. Cuando tenemos una fuerza central respecto al origen y que solo depende de la distancia al mismo, podemos demostrar que esta fuerza es conservativa, o sea que el trabajo que realiza en un camino dado solo depende de los puntos inicial y final del camino, y no de su forma. En efecto:

$$\int F(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \int F(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot (dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \int_{r_0}^{r_f} F(r) dr. \quad (1.21)$$

Si llamamos  $-U(r)$  a la primitiva de  $F(r)$ , vemos entonces que se cumple lo siguiente:

$$\int_{r_0}^{r_f} F(r) dr = -(U(r_f) - U(r_0)). \quad (1.22)$$

Entonces, la fuerza  $\mathbf{F}$  es conservativa y  $U$  es su energía potencial asociada. El teorema de conservación de la energía mecánica  $E$  nos dice entonces que:

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + U(r) = \text{constant} \quad (1.23)$$

es una constante de movimiento y debe valer lo mismo en todo momento. Escribamos la energía cinética en coordenadas polares:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r). \quad (1.24)$$

Ahora utilizamos la (1.19) para escribir  $\dot{\theta}$  en función de  $L$  y  $r$ :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + U(r). \quad (1.25)$$

Y aquí llegamos al final de la serie de transformaciones. Si miramos la ecuación (1.25) vemos que hemos llevado nuestro problema inicial de 2 masas y 6 grados de libertad a un problema unidimensional, con coordenada  $r$ , de una masa  $m$  (masa reducida) sometida a la acción de un potencial efectivo  $V_{eff}$ :

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2 m r^2} + U(r). \quad (1.26)$$

Este potencial efectivo determina el comportamiento de la coordenada  $r$ , una vez que está definida la energía total  $E$  que debe ser una constante de movimiento. En la figura 1.1 podemos ver la forma que tiene este potencial para el caso de la fuerza gravitatoria. En ese caso  $U(r) = -\frac{G M_1 m_2}{r}$ .

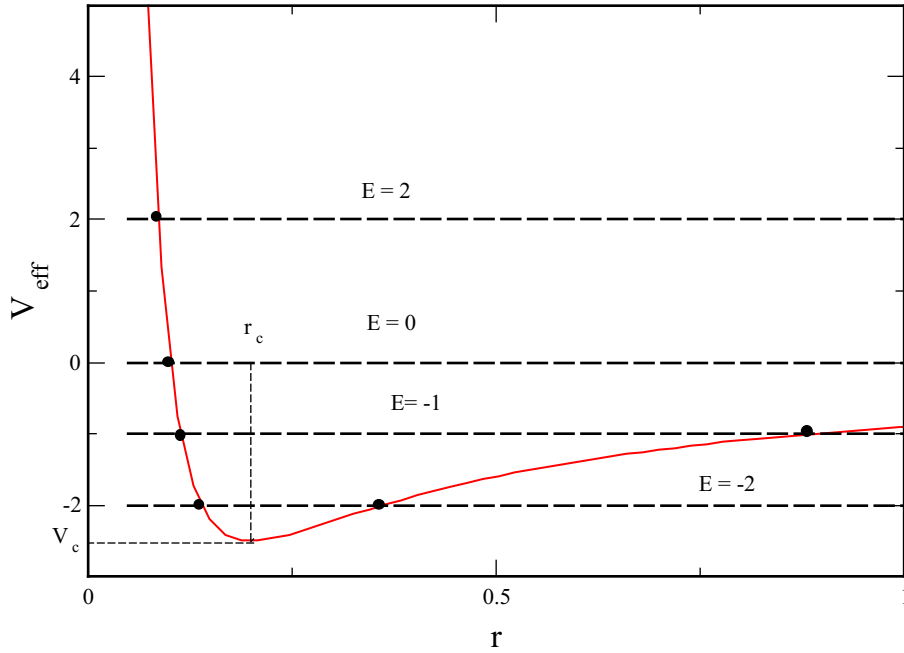


Figure 1.1: Potencial efectivo como función de  $r$ .

Cuando  $r \rightarrow 0$ , domina el término  $\propto \frac{1}{r^2}$ , que proviene de la componente  $\hat{\theta}$  de la velocidad. En cambio cuando  $r \rightarrow \infty$  domina el término  $\propto -\frac{1}{r}$ . De esta manera, el  $V_{eff}$  debe tener un mínimo en algún valor de  $r$  en el intervalo  $(0, \infty)$ . Llamamos  $r_c$  a ese valor de la coordenada  $r$ , que corresponde al mínimo absoluto del potencial efectivo  $V_c$ .

Vemos entonces que en función del valor de la energía total podemos tener diferentes tipos de trayectorias, acotadas o no acotadas. En efecto, de la ecuación (1.25) vemos que debe cumplirse siempre que  $r$  esté comprendida en un intervalo donde  $E \geq V_{eff}$ . De la figura 1.1 podemos ver que este intervalo puede ser no acotado si  $E \geq 0$ . En este caso hay una distancia mínima al centro de fuerzas, que es el punto (marcado con un círculo negro en la figura) donde la energía iguala al potencial efectivo,  $r_{min}$ . Pero no hay una distancia máxima ya que  $r$  puede hacerse tan grande como se quiera y se cumplirá siempre que  $E \geq V_{eff}$ .

Por el contrario, si  $E \leq 0$  existen dos valores de  $r$  en los cuales la energía total iguala al potencial efectivo,  $r_{min}$  y  $r_{max}$ . El movimiento es entonces acotado y transcurre entre estos dos valores, que es donde se cumple que  $E \geq V_{eff}$ .

Es importante recordar qué significa  $r$ , es la distancia entre los dos cuerpos. Si uno de los dos cuerpos es mucho mayor que el otro ( $M_1 \gg m_2$ ), es una buena aproximación pensar que ese cuerpo está en el origen del sistema centro de masa en reposo, y entonces  $m \sim m_2$  y  $r$  describe la distancia de  $m_2$  al origen.

Por otro lado, aún no hemos dicho nada de la coordenada  $\theta$ . Si queremos establecer cómo es la trayectoria debemos encontrar no solo  $r(t)$  sino también  $\theta(t)$ . Por ejemplo, sabemos que si  $E < 0$  la trayectoria será aco-

tada, pero sin conocer  $\theta(t)$  no podemos decir si será cerrada o no. Antes de abordar ese punto, llegaremos hasta aquí por otra vía, integrando las ecuaciones (1.17), (1.18). Para ello vamos a recordar una transformación que suele ser útil:

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{d\dot{r}}{dr} \dot{r} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{r}^2}{dr}\end{aligned}\quad (1.27)$$

Entonces, utilizando (1.27) y (1.19), podemos escribir (1.17) así:

$$\begin{aligned}\frac{m}{2} \frac{d\dot{r}^2}{dr} - \frac{L^2}{m r^3} &= - \frac{G M_1 m_2}{r^2}. \\ \frac{m}{2} \frac{d\dot{r}^2}{dr} &= \frac{L^2}{m r^3} - \frac{G M_1 m_2}{r^2} = 0.\end{aligned}\quad (1.28)$$

La ecuación (1.28) es una ecuación diferencial de primer orden en una variable ( $r$ ), que puede ser integrada inmediatamente:

$$\begin{aligned}\frac{m}{2} \int_{r_0}^{r_f} \frac{d\dot{r}^2}{dr} dr &= - \frac{L^2}{2 m r^2} \Big|_{r_0}^{r_f} + \frac{G M_1 m_2}{r} \Big|_{r_0}^{r_f}. \\ \frac{m}{2} \dot{r}_f^2 + \frac{L^2}{2 m r_f^2} - \frac{G M_1 m_2}{r_f} &= \frac{m}{2} \dot{r}_0^2 + \frac{L^2}{2 m r_0^2} - \frac{G M_1 m_2}{r_0}\end{aligned}\quad (1.29)$$

Esta ecuación, al ser  $r_0$  y  $r_f$  arbitrarios, nos dice simplemente que la energía tal como fue definida en (1.25) se conserva. O sea, que hemos llegado al mismo punto.

## 1.3 Clasificación de las órbitas

### 1.3.1 Elipses

Reducir el problema inicial a uno unidimensional equivalente nos he permitido comprender que tenemos dos posibles tipos de órbita en general, dependiendo de la energía y la forma del potencial: las acotadas y las no acotadas. Si queremos hacer una distinción más fina debemos resolver el problema completamente, es decir determinar también  $\theta(t)$ . Eso nos permitirá encontrar la forma de la órbita  $r(\theta)$  también.

Comenzamos re-escribiendo otra vez las ecuaciones de la conservación de la energía y el momento angular, ligeramente modificadas:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = E - \frac{L^2}{2 m r^2} + \frac{G M_1 m_2}{r} \quad (1.30)$$

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}. \quad (1.31)$$

Si dividimos (1.30) por (1.31) obtenemos:

$$\left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2}{m} \left( \frac{E m^2 r^4}{L^2} - \frac{m r^2}{2} + \frac{K m^2 r^3}{L^2} \right), \quad (1.32)$$



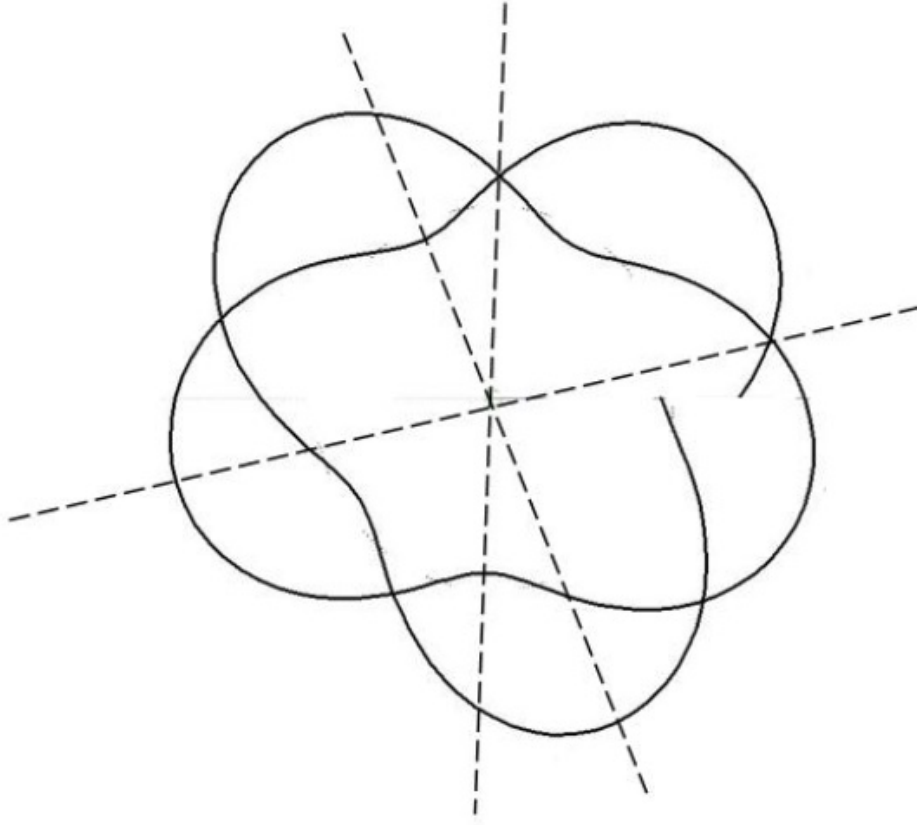


Figure 1.2: Trayectoria abierta para un potencial central con varios puntos de retorno, donde se pueden ver los ejes de simetría definidos por el origen y diferentes puntos de retorno.

donde hemos definido  $K = M_1 m_2 G$ . Vamos a hacer algunas manipulaciones algebraicas ahora. Primero re-escribimos (1.32):

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2}{m} r^4 \left( \frac{E m^2}{L^2} - \frac{m}{2r^2} + \frac{K m^2}{L^2 r} \right). \quad (1.33)$$

Entonces:

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \left( \frac{2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} r^2 \left( \frac{E m^2}{L^2} - \frac{m}{2r^2} + \frac{K m^2}{L^2 r} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.34)$$

El  $\pm$  proviene de que a partir de la energía sol podemos determinar el módulo de la velocidad radial. El signo se definirá entonces con la velocidad radial inicial. Para integrar esta ecuación, la escribimos así:

$$\frac{dr}{r^2 \left( \frac{E m^2}{L^2} - \frac{m}{2r^2} + \frac{K m^2}{L^2 r} \right)^{\frac{1}{2}}} = \pm \left( \frac{2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (1.35)$$

Esta ecuación ya nos permite sacar alguna conclusión sobre las propiedades de la trayectoria. Si el  $r$  inicial para la integración corresponde a un punto de retorno, el valor del ángulo obtenido solo puede diferir en el signo. Por lo tanto la trayectoria debe ser simétrica respecto de un eje que una el origen con un punto de retorno. Ver figura 1.2.

Ahora hacemos el cambio de variable  $u = \frac{1}{r}$ , con lo que resulta:

$$\frac{du}{\left(\frac{2Em}{L^2} - u^2 + \frac{2Kmu}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \pm d\theta. \quad (1.36)$$

Siguiendo con el maquillaje, completamos cuadrados en el denominador y obtenemos:

$$\frac{du}{\left(\frac{2Em}{L^2} + \frac{K^2m^2}{L^4} - \left(u - \frac{Km}{L^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \pm d\theta. \quad (1.37)$$

Ahora, para terminar, renombramos algunas cantidades:  $A^2 = \frac{2Em}{L^2} + \frac{K^2m^2}{L^4}$ ,  $B = \frac{Km}{L^2}$ , y  $x = \frac{u-B}{A}$ . Con esto, resulta:

$$\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm d\theta. \quad (1.38)$$

Antes de seguir adelante, merece una reflexión cómo integramos. Para integrar, debemos definir una situación inicial:  $r_0, \theta_0, \dot{r}_0, L$ . Los límites de integración de un lado y del otro ( en  $x$  y en  $\theta$ ) dependerán, en general, de esta elección. Por ejemplo, si  $r_0$  no es un punto de retorno de la trayectoria e integramos el ángulo en un sentido, la variación de  $r$  será una pero si elijo integrar el ángulo en el sentido opuesto, la variación de  $r$  será la opuesta. Y las integrales serán diferentes. Por esto es conveniente tomar el  $r$  que corresponde a un punto de retorno como  $r_0$ . En ese caso, a partir de ese punto el  $r$  solo puede disminuir o aumentar siempre ( disminuye si  $r_0$  es el máximo  $r$  y aumenta si  $r_0$  es el mínimo  $r$ ), independientemente del signo de la integral angular. Tanto gire hacia un lado u otro de la posición de  $r_0$  la integral en  $x$  es la misma. Esto significa que la órbita debe ser simétrica respecto de cualquier eje que una el origen con un punto de retorno. Este es un resultado que vale para cualquier potencial central. Tomaremos el cero para los ángulos ese eje.

Esta integral es una integral directa y el resultado final lo podemos escribir como:

$$\cos^{-1} x - \cos^{-1} x_0 = \theta \quad (1.39)$$

Como  $x_0$  corresponde a un punto de retorno, sea este un máximo o un mínimo de  $r$ , es fácil ver que es igual a 1 (comprobarlo). Entonces  $\cos^{-1} x_0 = 0$ . Por lo tanto tendremos:

$$x = \cos \theta. \quad (1.40)$$

Ahora podemos desandar el camino y entonces tenemos que:

$$\frac{1}{r} = B + A \cos \theta. \quad (1.41)$$

Y, finalmente:

$$r = \frac{1}{B + A \cos \theta}. \quad (1.42)$$

Observemos que si  $E < 0$  el denominador no puede anularse nunca ya que  $A$  es menor que  $B$ . Por lo cual  $r$  tendrá un valor máximo y un valor mínimo. Y la trayectoria es cerrada, ya que se repite cíclicamente al variar  $\theta$ . Por el contrario, si  $E \geq 0$ , entonces  $A > B$  y el denominador se anula para algún  $\theta$ , dando lugar a trayectorias no acotadas: Todo esto está en completo acuerdo con el análisis gráfico del potencial efectivo que hicimos previamente. La relación (1.42) corresponde a una elipse.  $\theta = 0$  es el ángulo que corresponde a la menor distancia al origen y  $\theta = \pi$  a la mayor distancia al origen, Asumiendo que tomamos  $A$  como la raíz positiva. Vamos a escribir la ecuación (1.42) en coordenadas cartesianas para mostrar que efectivamente se trata de una elipse. Para ello utilizamos que :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.43)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}. \quad (1.44)$$

Reemplazando en (1.41) obtenemos

$$B \sqrt{x^2 + y^2} + A x = 1. \quad (1.45)$$

$$(1.46)$$

Entonces

$$B^2 (x^2 + y^2) = 1 - 2 A x + A^2. \quad (1.47)$$

$$(1.48)$$

Y finalmente, completando cuadrados, obtenemos:

$$\frac{y^2}{\frac{1}{B^2 - A^2}} + \left( x + \frac{A}{B^2 - A^2} \right)^2 \frac{1}{\frac{B^2}{(B^2 - A^2)^2}} = 1 \quad (1.49)$$

Con esta ecuación podemos relacionar fácilmente las constantes físicas con los parámetros geométricos de la elipse. Empecemos por lo más fácil:

$$b^2 = \frac{1}{B^2 - A^2} \quad (1.50)$$

$$a^2 = \frac{B^2}{(B^2 - A^2)^2}, \quad (1.51)$$

donde  $a$  es el semieje  $x$  y  $b$  el semieje  $y$ . Notemos que la ecuación (1.49) es la ecuación de una elipse cuyo centro está desplazado en la dirección  $x$  por la cantidad  $x_0 = \frac{A}{B^2 - A^2}$  y recordemos que  $A$ , al ser una raíz cuadrada, que puede ser positivo o negativo.

Por otro lado sabemos que existe una manera de definir una elipse como el lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen que la suma de sus distancias a dos puntos distintos y fijos de ese plano es siempre la misma. Llamemos  $s$  a esa suma. Esto define una elipse cuyo semieje mayor es  $\frac{s}{2}$ . Los dos puntos del plano son los focos de la elipse y se sitúan simétricamente entorno al centro de la elipse sobre el eje mayor. En la figura 1.3 vemos esto concretado sobre una elipse centrada en el origen, de  $a = 1$  y  $b = 0.5$  y

Observando la figura vemos que en general se cumple lo siguiente:

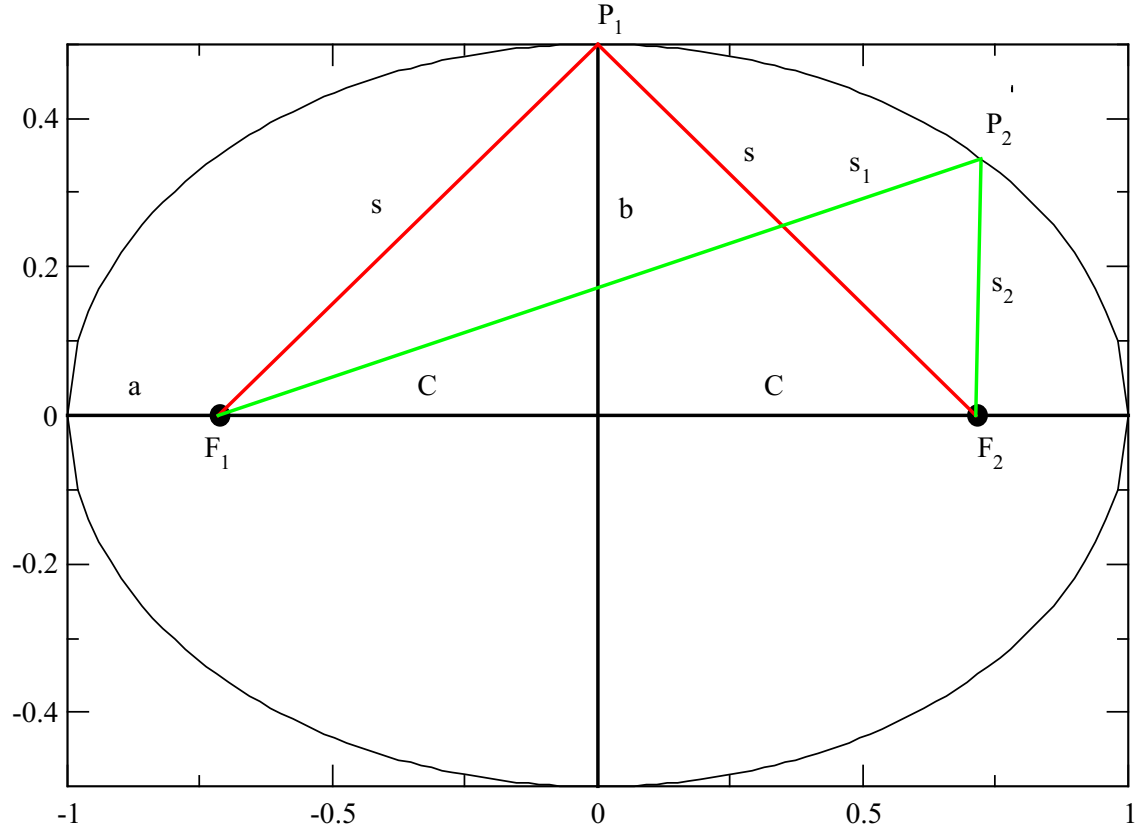


Figure 1.3: Elipse con centro en el origen de coordenadas.  $F_1$  y  $F_2$  son sus focos. El semieje mayor es 1 y el menor 0.5. Todos los puntos de la curva cumplen que  $s_1 + s_2 = 2$ .

- $s_1 + s_2 = 2a$ . Entonces  $s = a$ .
- $C^2 = a^2 - b^2$

Volvamos ahora a nuestra elipse. Sabemos que  $a = \frac{B}{(B^2 - A^2)}$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{(B^2 - A^2)}}$  y que  $x_0 = \frac{A}{B^2 - A^2}$ . Entonces podemos ver que  $b^2 + x_0^2 = a^2$ . Y entonces concluimos que  $x_0 = C$ . O sea, la trayectoria es una elipse cuyo foco está en el origen de coordenadas. Dependiendo del signo que asignemos a  $A$  (recordar que proviene de una raíz cuadrada) estaremos describiendo la misma elipse pero con el origen en el otro foco. En su forma polar es conveniente describir la ecuación de la elipse con un ligero cambio respecto de (1.42):

$$r = \frac{P}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad (1.52)$$

y  $P = B^{-1}$ .  $\epsilon = \frac{A}{B} = \sqrt{1 + \frac{2EP}{K}}$  es la excentricidad de la elipse.  $\epsilon$  mide cuánto se aparta la figura de una circunferencia. Si  $\epsilon = 0$  la curva es

una circunferencia de radio  $B^{-1}$ .  $\epsilon$  debe ser menor que 1 para que la curva sea una elipse.

El punto de máxima aproximación al centro de fuerzas se llama perigeo, en el caso más habitual de estar hablando de un objeto que orbita el planeta tierra, y el de máximo alejamiento se llama apogeo. En el caso general los nombres de esos puntos son periapsis y apoapsis. Evidentemente en estos puntos la velocidad radial es 0 y entonces el potencial efectivo  $V_{eff}$  es igual a la energía total  $E$ .

Evidentemente la órbita que estamos describiendo es cerrada. En este caso el tiempo  $T_r$  que toma el sistema para, partiendo de un valor de  $r$ , volver a ese mismo  $r$  es el mismo que tarda en variar el ángulo en  $2\pi$ ,  $T_\theta$ . El período es entonces  $T = T_r = T_\theta$ . Para que una órbita sea cerrada la condición general es que  $\frac{T_r}{T_\theta} = \frac{p}{q}$ , con  $p$  y  $q$  enteros. Vamos a comprobar que  $T_r = t_\theta$  en este caso, tomando un caso particular en el cual  $E \gtrsim V_c$ , donde  $V_c$  es el valor mínimo del potencial efectivo  $V_{eff}$ . Esto quiere decir que todo el movimiento transcurre en la vecindad de  $r_c$ . Podemos desarrollar el potencial efectivo en torno a  $r_c$  hasta segundo orden (ya que el primer orden es nulo pues  $r_c$  corresponde al mínimo de  $V_{eff}$ ). Así podemos escribir la energía total como:

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r})^2 + V_{eff}(r_c) + \frac{1}{2} \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2}(r_c) (r - r_c)^2. \quad (1.53)$$

Es fácil comprobar que :

$$\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2}(r_c) = \frac{m^3 K^4}{L^6}. \quad (1.54)$$

Entonces la energía dada por la ecuación (1.53) corresponde a un oscilador armónico, un muelle de constante elástica  $K_r = \frac{m^3 K^4}{L^6}$ . Y por lo tanto  $T_r = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_r}} = 2\pi \frac{L^3}{m K^2}$ .

Ahora veamos la velocidad angular y con ella el  $T_\theta$ . Para ello recordamos la expresión del momento angular, que es una cantidad conservada,  $L = m r^2 \dot{\theta}$ . Entonces podemos tomar  $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T_\theta} = \frac{L}{m r_c^2}$  (reemplazando  $r$  por  $r_c$ ).

Y, finalmente, reemplazando  $r_c$  por su valor, obtenemos  $T_\theta = 2\pi \frac{L^3}{m K^2}$ .

Analicemos ahora otro caso en el cual hay trayectorias acotadas y cerradas. Es el caso de un muelle ideal en tres dimensiones. Todo el desarrollo que hicimos se mantiene válido, solo debemos cambiar el potencial gravitatorio por  $U_m = \frac{1}{2} K_m r^2$ . Entonces podemos re-escribir las ecuaciones (1.30) y (1.31):

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = E - \frac{L^2}{2 m r^2} - \frac{1}{2} K_m r^2 \quad (1.55)$$

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}. \quad (1.56)$$

Procedemos como antes, dividiendo ambas ecuaciones y tomando raíz cuadrada, para obtener una expresión que relaciona  $r$  con  $\theta$ :

$$\left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2}{m} \left( \frac{E m^2 r^4}{L^2} - \frac{m r^2}{2} - \frac{K_m m^2 r^6}{2 L^2} \right), \quad (1.57)$$

Tomamos raíz cuadrada y hacemos algunas manipulaciones algebraicas :

$$\frac{dr}{r^3 \left( \frac{2Em}{L^2 r^2} - \frac{1}{r^4} - \frac{K_m m}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \pm d\theta. \quad (1.58)$$

Ahora hacemos  $\frac{1}{r^2} = u$  y completamos cuadrados en el denominador para obtener:

$$\frac{du}{\left( - \left( \frac{Em}{L^2} - u \right)^2 + \frac{E^2 m^2}{L^4} - \frac{K_m m}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \pm 2 d\theta. \quad (1.59)$$

En esta expresión podemos resaltar varias cosas:

- $\frac{E^2 m^2}{L^4} - \frac{K_m m}{L^2} \geq 0$ . Esto es así porque siempre es  $E \geq V_c$ . Recordemos que  $V_c$  es el mínimo del potencial efectivo, que en este caso resulta ser  $\frac{L K_m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}$ . Entonces definimos  $A^2 = \frac{E^2 m^2}{L^4} - \frac{K_m m}{L^2}$ .
- $0 \leq \left( \frac{Em}{L^2} - u \right)^2 \leq A^2$ . Esto es así porque el valor máximo (mínimo) de  $u$  corresponde al valor mínimo (máximo) de  $r$ , y estos son en este caso  $r_{min}^2 = \frac{L^2}{m \left( E + \sqrt{E^2 - \frac{K_m^2 L^2}{m}} \right)}$  y  $r_{max}^2 = \frac{L^2}{m \left( E - \sqrt{E^2 - \frac{K_m^2 L^2}{m}} \right)}$ .

Definimos entonces  $\tilde{u} = \frac{\left( \frac{Em}{L^2} - u \right)}{A}$  y escribimos la ecuación como

$$\frac{d\tilde{u}}{(1 - \tilde{u}^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm 2 d\theta. \quad (1.60)$$

Esto se puede integrar inmediatamente ( la integral es  $\cos^{-1}$ ) y así, deshaciendo el camino de cambios, obtenemos:

$$r = \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{Em}{L^2} + A \right)}} \frac{1}{\sqrt{(1 - \epsilon^2 \cos^2 \theta)}}, \quad (1.61)$$

$$\epsilon = \sqrt{\left( \frac{2A}{\frac{Em}{L^2} + A} \right)}, \quad (1.62)$$

Aquí  $\epsilon$  es la excentricidad. Cuando  $\epsilon$  es cero la curva es un círculo.

Esta expresión da como resultado una trayectoria acotada y cerrada en cualquier caso, ya que  $A < \frac{Em}{L^2}$ . Este no era el caso del potencial gravitatorio, donde teníamos trayectorias que podían llegar hasta infinito dependiendo de las condiciones iniciales. La razón de esta diferencia es que el potencial efectivo del muelle tiende a infinito cuando  $r$  lo hace, impidiendo la existencia de trayectorias no acotadas.

Pero observemos que hay otra diferencia, en este caso cuando  $\phi$  recorre la mitad de todo su rango de variación  $(0, \pi)$  la coordenada radial vuelve a su valor inicial. Es decir, en este caso se cumple que  $\frac{T_\theta}{T_r} = 2$ . La trayectoria es cerrada, por lo tanto, pero recordemos que en el caso gravitatorio ese cociente era 1.

La ecuación (1.61) representa a una elipse cuyo centro está en el origen de coordenadas. Para ver esto no hay más que pasar a coordenadas cartesianas el resultado de integrar (1.60) recordando que  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ , para obtener:

$$\left( \frac{Em}{L^2} - A \right) x^2 + \left( \frac{Em}{L^2} + A \right) y^2 = 1. \quad (1.63)$$

Está claro que en este caso los semi-ejes son  $a = \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{Em}{L^2} - A \right)}}$  y  $b = \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{Em}{L^2} + A \right)}}$ .

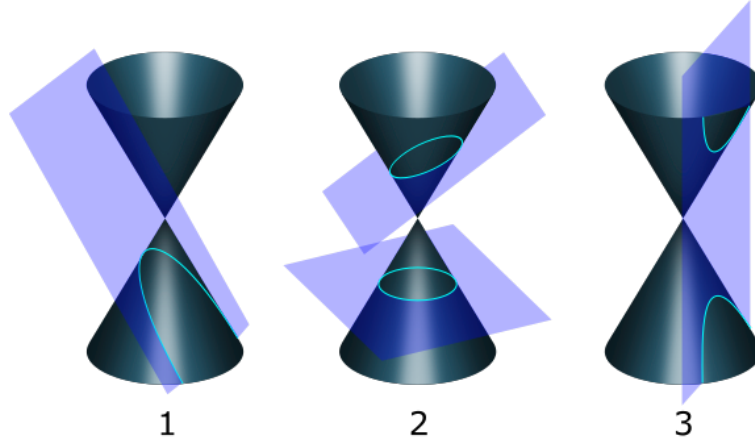


Figure 1.4: Secciones cónicas: Parábola (1), elipse y círculo (2) e hipérbola (3).

### 1.3.2 Parábolas e Hipérbolas

Volvemos ahora al caso del potencial gravitatorio, para analizar el caso de las órbitas no acotadas. Para ello traemos hasta aquí la ecuación (1.51) :

$$r = \frac{P}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

recordando que  $P = B^{-1}$ ,  $\epsilon = \frac{A}{B}$  es la excentricidad y  $A^2 = \frac{2Em}{L^2} + \frac{K^2 m^2}{L^4}$ ,  $B = \frac{Km}{L^2}$ .

Es claro entonces que si  $E \geq 0$  resulta que  $\epsilon \geq 1$ . En ese caso el denominador puede anularse para algún valor de  $\theta$ , que corresponderá entonces a  $r \rightarrow \infty$ .

Analicemos lo que ocurre para  $E = 0$ . En este caso  $\epsilon = 1$  y  $r \rightarrow \infty$  cuando  $\theta = \pm\pi$ . La curva no es cerrada. Para dilucidar qué curva es, busquemos la expresión en coordenadas cartesianas. Operando como antes rápidamente llegamos a esta expresión:

$$x = \frac{R}{2} - \frac{1}{2R} y^2, \quad (1.64)$$

que representa una parábola horizontal.

Tanto la elipse como la parábola y la hipérbola son secciones cónicas. Es decir, son curvas que se obtienen al cortar una sección de un cono, quedándonos con el borde de esa sección (ver figura 1.4).

Alternativamente, se puede definir una sección cónica puramente en términos de geometría plana: es el lugar geométrico de todos los puntos P cuya distancia a un punto fijo F (llamado foco) es un múltiplo constante (llamado excentricidad  $\epsilon$ ) de la distancia de P a una línea fija L (llamada directriz). Para  $0 < e < 1$  obtenemos una elipse, para  $e = 1$  una parábola, y para  $e > 1$  una hipérbola. Notar que esta es una definición alternativa a la que ya dimos de la elipse, utilizando la distancia a dos focos. Pero esta definición permite englobar los tres casos.

En este caso, el foco es el origen de coordenadas y la directriz es la recta vertical definida por  $x = P$ . La parábola tiene su vértice en  $x_v = \frac{P}{2}$ . En ese momento la distancia de la trayectoria al centro de fuerzas es la menor posible. En este caso la interacción dobla completamente la trayectoria. Una partícula que incide desde el infinito, finalmente volverá al infinito

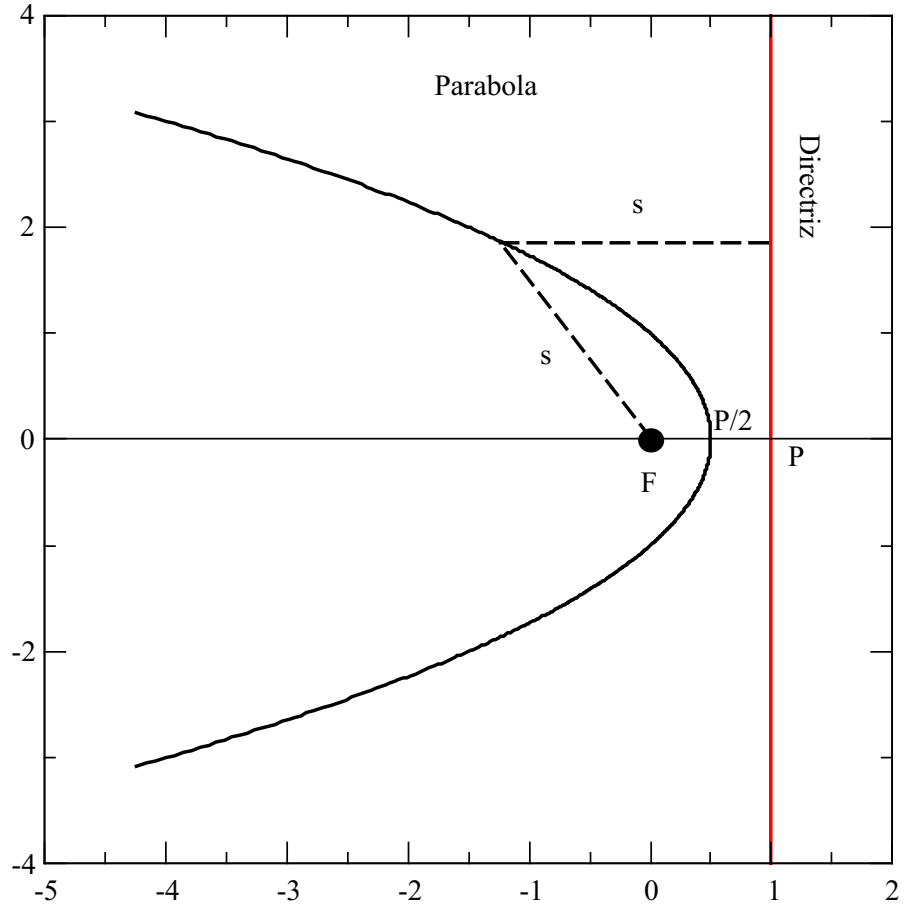


Figure 1.5: Trayectoria parabólica para  $P = 1$

moviéndose en la dirección exactamente opuesta. En la figura 1.5 vemos la trayectoria parabólica dibujada para  $P = 1$ .

El caso de la hipérbola es similar, solo que en este caso es  $\epsilon > 1$ . La ecuación en este caso es:

$$\begin{aligned} \frac{\left(x - \frac{P\epsilon}{\epsilon^2 - 1}\right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ a &= \frac{P}{\epsilon^2 - 1} \\ b &= \frac{P}{\sqrt{(\epsilon^2 - 1)}} \end{aligned} \tag{1.65}$$

Para que (1.65) tenga sentido debe cumplirse que  $x \geq \frac{P}{\epsilon - 1}$  o  $x \leq \frac{P}{\epsilon + 1}$ . La segunda condición establece una continuidad con la situación parabólica ( $\epsilon = 1$ ). La primera condición solo existe cuando  $\epsilon > 1$  y su significado físico es que corresponde a trayectorias que solo existen si el potencial es repulsivo. Son entonces trayectorias espurias, ya que nuestro potencial es atractivo. Aparecen al elevar al cuadrado las ecuaciones para despejar  $x$  en función de  $y$ . Obviamente, si el potencial fuese repulsivo estas serían las trayectorias reales, y las espurias serían las segundas.



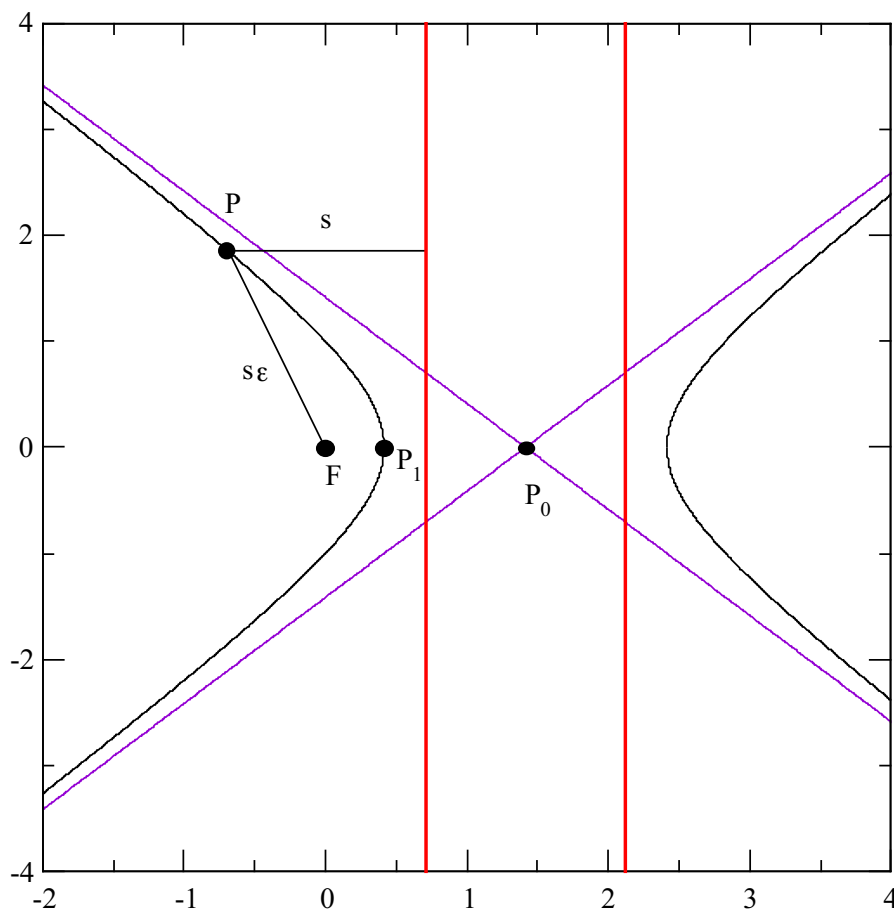


Figure 1.6: Trayectoria hiperbólica para  $\epsilon = \sqrt{2}$  y  $R = 1$ .

En la figura 1.6 podemos ver esas trayectorias dibujadas. El origen está en el foco  $F$ . Entonces  $P_1 = \frac{R}{\epsilon+1}$ ,  $P_2 = \frac{R}{\epsilon-1}$  y  $P_0 = R \frac{\epsilon}{\epsilon^2-1}$ . La directriz que corresponde a la hoja de la izquierda es la recta vertical por  $x = \frac{P}{\epsilon}$ . Esta es la rama que se convierte en parábola cuando  $\epsilon = 1$ . La otra directriz es la recta vertical que corresponde a  $x = P \frac{\epsilon^2+1}{\epsilon(\epsilon^2-1)}$ .

### 1.3.3 Leyes de Kepler

Ahora, aprovechando lo que hemos discutido antes, enunciemos las leyes de Kepler.

1. Las trayectorias planetarias son cónicas.
2. La velocidad areolar es constante
3. Cuando la trayectoria es cerrada el período es proporcional al eje mayor de la órbita elíptica elevado a las tres medias.

La primera ley ha sido demostrada, en sus diferentes posibilidades, en las páginas precedentes.

Vamos ahora a la segunda y tercera ley. Sabemos que el movimiento de un planeta transcurre en un plano. Su radio vector, en un intervalo de tiempo

$dt$  barre una cierta área del plano  $dA$ . Entonces se define la velocidad areolar como  $\frac{dA}{dt}$ . El radio vector  $r$  recorre un ángulo  $d\phi$  en el intervalo  $dt$ . El elemento  $dA$  es el área de un triángulo que es justo la mitad del área del paralelogramo definido por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v} dt$ . Esta área puede calcularse entonces de la siguiente manera:

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| dt \quad (1.66)$$

Entonces, utilizando la definición del momento angular, que es una cantidad conservada y por lo tanto constante, obtenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}, \quad (1.67)$$

que es la expresión matemática de la segunda ley de Kepler.

A partir de esta relación vamos a obtener la tercera ley. Sabemos que las órbitas cerradas son elipses de semiejes  $a = \frac{B}{(B^2 - A^2)} = \frac{K}{2E}$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{(B^2 - A^2)}} = \frac{L}{\sqrt{(2Em)}}$ , con  $A = \sqrt{(\frac{2Em}{L^2} + \frac{K^2 m^2}{L^4})}$  y  $B = \frac{Km}{L^2}$ . El área total que barre el vector posición al dar una vuelta completa es el área de la elipse y, como la velocidad areolar es constante, debe ser el producto de esa velocidad por el período  $T$ :

$$\pi a b = \frac{L}{2m} T. \quad (1.68)$$

Entonces :

$$\frac{2m}{L} \pi a b = T. \quad (1.69)$$

Además, utilizando la definición de  $a$  y  $b$  en términos de las constantes físicas podemos ver que  $\frac{mb}{L} = \left(\frac{ma}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Entonces:

$$2\pi \left(\frac{m}{K}\right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} = T \quad (1.70)$$

Observemos que  $m$  es la masa reducida y  $K = G M_2 m_1$ . Cuando  $M_2 \gg m_1$  es entonces  $m \simeq m_1$  y la ecuación (1.69) nos dice que la relación entre período y semi-eje mayor es independiente del planeta. Otra peculiaridad de esta relación es que nos dice que el período es independiente de la excentricidad de la órbita. Dos órbitas con diferente excentricidad pero el mismo semi-eje mayor tendrán el mismo período.

Resumiendo, las órbitas planetarias están caracterizadas por tres parámetros: los semi-ejes  $a$  y  $b$  y la excentricidad  $\epsilon$ . Esta última define la forma de la órbita. Cuando la excentricidad es cero, la órbita es circular. Los planetas del sistema solar tienen órbitas con excentricidades muy pequeñas:

Astro	Excentricidad
Mercurio	0.206
Venus	0.0068
Tierra	0.017
Júpiter	0.048
Saturno	0.054
Ceres	0.08
Plutón	0.25
Luna	0.054
Tritón	$1.6 \times 10^{-5}$
Marte	0.093
Cometa Halley	0.967
Cometa Hole Bopp	0.995
Cometa Mc Naught	1,000019
Cometa C1980E1	1,057

El cometa Hole Bopp es muy singular. Su órbita es casi parabólica, muy excéntrica. Esto significa que su perihelio es mucho más pequeño que su apogeo. Es un cometa extremadamente brillante, que aunque pasó por cerca de la Tierra a una distancia relativamente grande, a la cual otros cometas no se ven, este sí se pudo ver muy bien dada su gran luminosidad. Además tiene el record de permanencia, ya que se pudo ver desde el hemisferio norte terrestre durante 18 meses. Esto aconteció entre 1996 – 1997. La vez anterior que el cometa Hole Bopp se asomó a nuestro planeta fue hace 4000 años aproximadamente (nada comparado con la historia del Universo, que comenzó hace unos 13000 millones de años). En aquel momento atravezábamos el final de la edad de bronce y comenzaba la del hierro. La escritura se había inventado hacía relativamente poco ( hace unos 5000 años de su invención), o sea estábamos en los comienzos de la Historia humana propiamente dicha. No sabemos si alguien se percató de su presencia en el cielo ni qué pudo pensar de él un eventual observador. La próxima vez que pase cerca nuestro, hacia el año 6000, probablemente la Historia de los seres humanos ya habrá terminado...

### 1.3.4 Transferencia entre órbitas

Ahora analizaremos, en forma bastante simplificada, cómo hacer un viaje espacial. Es decir como transferir un objeto que está en una órbita sobre nuestro planeta a una órbita sobre un planeta vecino, por ejemplo Marte. Consideraremos que tanto la Tierra como Marte tienen una órbita circular en torno al sol. La idea es utilizar una órbita elíptica con foco en el sol para llevar nuestra nave desde la tierra hasta Marte.

Como la Tierra tiene una órbita circular en torno al sol, si aumentamos la velocidad de la nave para que escape de la atracción gravitatoria terrestre, esta entrará en una órbita solar cuyo perihelio es el radio de la órbita terrestre. Y queremos que su apohelio corresponda al radio de la órbita marciana.

Asumiendo que la nave está en una órbita circular de radio  $r_0$  en torno a la tierra con velocidad  $\mathbf{v}_0$ , se le aplica un impulso que cambie su velocidad en  $\delta\mathbf{v}$  de tal manera de que entre en una órbita hiperbólica respecto de la

tierra ( $\mathbf{v}_0$  y  $\delta\mathbf{v}$  son co-lineales). La conservación de la energía nos permite escribir:

$$\frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m (v_0 + \delta v)^2 - \frac{G m M_T}{r_0}, \quad (1.71)$$

donde  $v_\infty$  es la velocidad que tiene la nave ( respecto de la tierra) cuando podemos considerar que ya ha escapado del campo gravitatorio terrestre. Recordando que  $v_0^2 = \frac{G M_t}{r_0}$  ( condición de órbita circular inicial), podemos escribir:

$$v_\infty = \sqrt{((v_0 + \delta v)^2 - 2 v_0^2)} \quad (1.72)$$

Si  $\mathbf{v}_t$  es la velocidad de la tierra respecto del sol,  $r_t$  el radio de su órbita circular, y asumimos también que  $\mathbf{v}_t$  y  $\mathbf{v}_\infty$  son paralelas, podemos escribir para la velocidad de la nave respecto del sol  $\mathbf{v}$  :

$$v = v_\infty + v_t \quad (1.73)$$

Esta es la velocidad de la nave respecto del sol. La nave ahora está en una órbita elíptica en torno al sol, justo en su perihelio ( que es el radio de la órbita terrestre  $r_t$ ). Y con una energía que será:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m M_s}{r_t}, \quad (1.74)$$

Queremos que el apohelio de esta órbita coincida con la órbita circular de Marte en torno al sol, de radio  $r_m$ . Por lo tanto, el semieje mayor de esta órbita elíptica será  $a = \frac{r_m + r_t}{2}$ . La energía de una órbita elíptica de semieje mayor  $a$  puede escribirse como  $E = -\frac{G M_s m}{2a}$  (¡demostrarlo!). Entonces podemos igualar y obtener la expresión :

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m M_s}{r_t} = -\frac{G M_s m}{2a} \quad (1.75)$$

En esta ecuación todo es conocido, excepto  $v$ . Entonces podemos obtener  $v$  para que la órbita solar nos lleve hasta Marte. Y como  $v$  la tenemos escrita en términos de  $\delta v$ , podemos determinar esta última.

Veamos cuál sería, aproximadamente, el tiempo de viaje hasta Marte utilizando esta órbita solar  $T_m$ . El cálculo se puede hacer utilizando la tercera ley de Kepler. Sabemos los radios de las órbitas terrestres y marcianas  $r_t = 1.5 \times 10^8$  km y  $r_m = 2.28 \times 10^8$  km. Por lo que el semi-eje mayor de esta órbita será  $a = 1.89 \times 10^8$  km. Tal como hemos argumentado, el tiempo de viaje siguiendo esta órbita solar es justo la mitad del período de la orbita. Así que invocando la tercera ley de Kepler y considerando la órbita terrestre como circular de período 365 días, tenemos que:

$$T_m = \frac{1}{2} \frac{1.89}{1.50} 365 = 258 \quad (1.76)$$

### 1.3.5 El teorema del virial

Consideremos la cantidad  $G = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i$  en un sistema de  $N$  partículas clásicas. Si tomamos su derivada temporal obtenemos:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \quad (1.77)$$

Utilizando la ecuación de Newton y la definición de impulso, escribimos:

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + \frac{\mathbf{p}_i^2}{m} \\ &= 2T + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i,\end{aligned}\quad (1.78)$$

donde  $T$  es la energía cinética del sistema.

Ahora hagamos el valor medio temporal durante un intervalo  $\tau$  de estas cantidades. La media temporal de una función del tiempo se define como:

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = 2 \langle T \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle \quad (1.79)$$

Ahora, supongamos que se trata de un sistema donde todas las trayectorias son acotadas ( como lo son las trayectorias de partículas con energía negativa en un campo gravitatorio, por ejemplo). Entonces escribimos:

$$\frac{(G(\tau) - G(0))}{\tau} = 2 \langle T \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle. \quad (1.80)$$

Si  $\tau \rightarrow \infty$ , al ser todas las cantidades en (1.79) acotadas, el término de la izquierda tiende a 0. Y por lo tanto obtenemos que:

$$2 \langle T \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle. \quad (1.81)$$

Este es el Teorema del Virial, que permite relacionar el valor medio temporal de la energía cinética con el valor medio temporal de una cantidad que, en general, está relacionada con la energía potencial del problema.

Para ilustrar esto consideremos la aplicación del teorema más simple posible, una partícula en un campo gravitatorio externo. En ese caso :

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.82)$$

Reemplazando en la expresión del teorema (1.80) obtenemos:

$$\langle T \rangle = \frac{\langle U \rangle}{2} \quad (1.83)$$

En este caso particular no hace falta que la media temporal sea sobre un intervalo infinito de tiempo, ya que el sistema es periódico como sabemos. Entonces la media temporal se refiere a la media en un período. Esta relación entre energía cinética y potencial medias para una partícula que se mueve en un campo gravitatorio es trivial obtenerla en el caso de órbitas circulares, pero el teorema nos dice que se mantiene en el caso general de órbitas elípticas.

### 1.3.6 El teorema de Bertrand

Vamos a probar que los únicos potenciales centrales cuyas órbitas acotadas son cerradas son el gravitatorio (o Coulombiano)  $-\frac{k}{r}$  y el armónico  $\frac{kx}{2}$ . La demostración está inspirada en el trabajo de Lowell S. Brown, en tanto quien presentó este resultado por primera vez fue M. J. Bertrand. Se conoce como Teorema de Bertrand.



# Chapter 2

## Dinámica del cuerpo rígido.

### 2.1 Introducción

Un cuerpo rígido es un caso especial de un sistema de muchas partículas en el que las distancias entre partículas permanecen fijas. Si llamamos  $N$  al número de partículas total, tendríamos que determinar  $3N$  coordenadas para describir el movimiento del cuerpo, pero la restricción de mantener las distancias entre partículas constantes reduce ese número a solo 6 grados de libertad.

Si queremos describir el movimiento de un cuerpo rígido primero podemos seguir la trayectoria de un punto cualquiera del mismo y también describir la orientación del cuerpo respecto de este punto. Para seguir la trayectoria del punto elegido necesitamos 3 coordenadas. Una vez fijado el punto, podemos situar otro punto cualquiera respecto del primero.

Este segundo punto estará situado sobre una esfera con centro en el primero. Por lo tanto para ubicarlo necesitamos dar dos ángulos (por ejemplo latitud y longitud).

Ya tenemos dos puntos localizados y 5 coordenadas establecidas. Estos dos puntos definen un eje respecto del cual puedo rotar al cuerpo rígido sin modificar las posiciones de los dos puntos ya fijados. Por lo tanto, dando el ángulo de rotación respecto de ese eje fijamos completamente la posición del cuerpo rígido. El número de coordenadas necesario para conseguir esto es entonces 6.

Veremos que hay dos posibles elecciones para ese primer punto, dependiendo de la naturaleza del movimiento. Si el cuerpo rígido tiene un vínculo que mantiene uno de sus puntos fijo, entonces esa es la elección apropiada. Si ningún punto del cuerpo rígido está fijo, la elección apropiada es el centro de masa del cuerpo por razones que expondremos más adelante.

#### 2.1.1 Movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo

Sea  $O$  un punto fijo de nuestro cuerpo rígido. La restricción de que todas las distancias entre partículas sean constantes obliga a que el movimiento sea una rotación respecto de  $O$ . Sea  $\boldsymbol{\Omega}$  la velocidad angular del cuerpo en su rotación respecto de  $O$ .

En ese caso la velocidad de cada partícula podemos expresarla como:

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i. \quad (2.1)$$

Podemos entonces calcular el momento angular total del cuerpo  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i). \quad (2.2)$$

Entonces, aplicando la conocida relación  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  podemos escribir:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} \left( \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}). \quad (2.3)$$

Para darnos cuenta de lo que esta ecuación representa, escribamos una componente del vector  $\mathbf{L}$ , por ejemplo la  $x$ :

$$L_x = \Omega_x \left( \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \right) - \sum_{i=1}^N m_i x_i (x_i \Omega_x + y_i \Omega_y + z_i \Omega_z). \quad (2.4)$$

Reordenando y cancelando términos finalmente obtenemos:

$$L_x = \Omega_x \left( \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) \right) - \Omega_y \left( \sum_{i=1}^N m_i y_i x_i \right) - \Omega_z \left( \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i \right). \quad (2.5)$$

Y análogamente para  $L_y$  Y  $L_z$ :

$$L_y = \Omega_y \left( \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) \right) - \Omega_x \left( \sum_{i=1}^N m_i y_i x_i \right) - \Omega_z \left( \sum_{i=1}^N m_i z_i y_i \right). \quad (2.6)$$

$$L_z = \Omega_z \left( \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \right) - \Omega_x \left( \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i \right) - \Omega_y \left( \sum_{i=1}^N m_i z_i y_i \right). \quad (2.7)$$

Estas ecuaciones nos permiten observar que la relación entre el momento angular del cuerpo rígido y la velocidad angular es una relación matricial. Efectivamente, a partir de las ecuaciones (2.5),(2.6),(2.7), podemos escribir:

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.8)$$

donde

$$I_{k,l} = \sum_{i=1}^N (\delta_{k,l} m_i r_i^2 - m_i r_{ik} r_{il}), \quad (2.9)$$



es una matriz de  $3 \times 3$  que denominamos *Tensor de Inercia* del cuerpo rígido. Observemos que para definir el tensor de inercia debemos definir un origen respecto del cual medir distancias y una terna de ejes cartesianos que definen las coordenadas de cada partícula del cuerpo rígido. Es decir, el tensor de inercia nos da información de cómo está distribuida la masa del cuerpo respecto de un dado sistema de coordenadas. Dos cuerpos con igual cantidad de masa pero diferente distribución tendrán una respuesta dinámica diferente.

### 2.1.2 El tensor de inercia

Hasta el momento hemos tratado al cuerpo rígido como un conjunto discreto de partículas. Pero en realidad este es una distribución de masa continua. Cada elemento  $m_i$  es en realidad una cantidad infinitesimal de masa alojada en torno del punto  $\mathbf{r}_i$  en un volumen  $dx dy dz = dV$ . Entonces podemos escribir :  $m_i = \rho(\mathbf{r}_i) dV$ , donde  $\rho$  es la densidad de masa del cuerpo, que en general dependerá de la posición. Entonces, podemos transformar las sumas en integrales sobre el volumen del cuerpo:

$$I_{k,l} = \int_V dV \rho(\mathbf{r}) (\delta_{k,l} r^2 - r_k r_l). \quad (2.10)$$

Esta es la expresión que utilizaremos para calcular el tensor de inercia. Este tensor tiene dos características fundamentales: es una matriz simétrica de números reales. Sabemos que toda matriz real y simétrica puede ser diagonalizada, con autovalores reales. Es decir, podemos hacer una rotación de la base cartesiana de tal manera que en la nueva base la matriz de inercia luzca así:

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Veremos por qué esto es importante para describir la dinámica del cuerpo rígido más adelante. Ahora haremos algunos ejemplos de cálculo del momento de inercia de cuerpos rígidos:

- Anillo

Consideremos un anillo de radio  $R$  colocado en el plano  $x - y$ . Calcularemos el tensor de inercia respecto del centro geométrico del anillo. El anillo es homogéneo de masa  $M$ . Por lo tanto tiene una densidad lineal de masa  $\rho = \frac{M}{2\pi R}$ . Comenzamos con el eje  $z$ ,  $I_{33}$ .

Un elemento del anillo es un diferencial de arco de círculo  $ds = R d\theta$  que corresponde a una masa  $dm = \rho ds$ . La distancia de cada  $dm$  al eje  $z$  que pasa por el centro geométrico del anillo es  $R$ , la misma para todos los elementos diferenciales de masa. Aplicando la ecuación (2.11) para el caso  $k = l = 3$  obtenemos:

$$I_{33} = \int_L ds \rho(\mathbf{r}) (r^2 - z^2) = \frac{M}{2\pi R} \int_L ds (x^2 + y^2) = \frac{M}{2\pi R} 2\pi R R^2 = M R^2 \quad (2.12)$$

Observando el tercer término de esta ecuación vemos que:

$$I_{33} = \frac{M}{2\pi R} \int_L ds (x^2 + y^2) = I_{22} + I_{11}. \quad (2.13)$$

Y como el anillo es completamente simétrico en el plano  $x - y$  resulta que  $I_{11} = I_{22} = \frac{MR^2}{2}$ . Al mismo resultado llegamos integrando. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} I_{22} &= \frac{M}{2\pi R} \int_L ds x^2 = \\ &= \frac{M}{2\pi R} \int_0^{2\pi} d\theta R^2 \cos^2 \theta = \\ &= \frac{M}{2\pi} R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \left( \frac{1}{2} + \cos 2\theta \right) = \frac{MR^2}{2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Los elementos no diagonales que involucran la coordenada  $z$  de los elementos de masa del anillo son todos 0 pues esa coordenada es 0. Entonces  $I_{13} = I_{31} = I_{32} = I_{23} = 0$ .

Es fácil ver que también  $I_{12} = I_{21} = 0$ . Por simetría del anillo, por cada  $dm$  con coordenadas  $(x, y)$  existe otro igual con coordenadas  $(x, -y)$ . Ambos elementos dan contribuciones de igual módulo y signo opuesto a  $I_{12}$  o  $I_{21}$ . Por lo tanto al sumar todas obtenemos 0.

Entonces, esta terna de ejes cartesianos es una terna de ejes principales de inercia para el anillo. Notemos que la degeneración de los autovalores que corresponden a los ejes  $x$  e  $y$  nos dice que cualquier combinación de  $x$  e  $y$  será también un eje principal con el mismo autovalor. Si hacemos rotar al anillo respecto de cualquier eje contenido en el plano  $x - y$  el momento angular será paralelo a la velocidad angular (que está dirigida a lo largo del eje de rotación). Lo mismo ocurre si hacemos rotar al anillo respecto del eje  $z$ .

Pero si la velocidad angular de rotación tiene componente en el plano  $x - y$  y en el eje  $z$ , entonces el momento angular no será paralelo a la velocidad angular.

- Disco

Ahora consideremos un disco homogéneo en el plano  $x - y$  y calculemos el tensor momento de inercia respecto de una terna cartesiana con origen en el centro geométrico del disco. Para los elementos no diagonales del tensor de inercia valen exactamente las mismas consideraciones que en el caso del anillo y por lo tanto todos los elementos no diagonales valen 0. Por lo tanto la terna de ejes escogida es una terna de ejes principales de inercia.

Calculemos los elementos diagonales ahora. Para calcularlos deberemos hacer una integral de superficie. La densidad es constante  $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ . Un elemento diferencial de área se puede escribir en coordenadas cartesianas  $ds = dx dy$ , pero dada la simetría del disco conviene escribirlo en coordenadas polares  $ds = dr r d\theta$ . Entonces para el

eje  $z$  tenemos:

$$I_{33} = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} d\theta dr r r^2 = I_{22} + I_{11}, \quad (2.15)$$

ya que  $r^2 = x^2 + y^2$ . Entonces

$$I_{33} = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R dr r^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M R^2}{2}. \quad (2.16)$$

Y  $I_{11} = I_{22} = \frac{M R^2}{4}$ .

Se repite la degeneración en el plano  $x - y$  y vale igual todo lo dicho para el caso del anillo.

- Esfera

Consideremos ahora una esfera homogénea y calculemos el tensor de inercia respecto de su centro geométrico.

Primero afirmamos que los elementos diagonales respecto de cualquier eje que pase por el centro de la esfera son todos iguales, dada la simetría esférica.

Luego es inmediato ver que los no diagonales son todos 0. En efecto, los elementos no diagonales contienen el producto de dos coordenadas  $k, l$ . Pero para un mismo valor de la coordenada  $k$  tenemos elementos de masa idénticos en  $l$  y  $-l$  cuyas contribuciones al elemento no diagonal  $I_{kl}$  al sumarse se anulan.

O sea, solo tenemos que calcular un número. Supongamos que el eje sea el eje  $z$  sin pérdida de generalidad. La densidad será constante  $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ . Ahora debemos integrar en el volumen. Dada la simetría del cuerpo en cuestión nos conviene usar las coordenadas esféricas  $(r, \phi, \theta)$  para escribir el  $dV$ . Entonces  $dV = (dr)(r \sin \phi d\theta)(r d\phi) = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$ . La distancia de cada elemento de masa respecto del eje  $z$  es  $r \sin \phi$ , entonces:

$$I_{33} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R dr r^4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi = \frac{2MR^2}{5}. \quad (2.17)$$

- Cilindro

Calculemos el momento de inercia de un cilindro respecto de su eje principal, que tomamos como eje  $z$ . Evidentemente en este caso las coordenadas adecuadas son las cilíndricas. La densidad de masa será  $\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$ , donde  $R$  y  $L$  son el radio y la longitud del cilindro. El diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas es  $dV = (r d\theta)(dr)(dz)$  y la distancia al cuadrado de los puntos al eje  $z$  es  $r^2$ . Entonces:

$$I_{33} = \frac{M}{\pi R^2 L} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz r^3 = \frac{MR^2}{2}. \quad (2.18)$$

Ahora deberíamos calcular el momento de inercia respecto de los otros ejes  $I_{11}, I_{22}$ . Posponemos ese cálculo hasta después, para enunciar primero otras propiedades del tensor de inercia.

### El Teorema de Steiner

Supongamos que conocemos el tensor de inercia respecto de una terna de ejes que pasan por el centro de masa  $O$  y queremos trasladarlo hasta otro punto  $P$ . Veamos cómo están relacionados ambos tensores. Veamos primero los elementos diagonales. El elemento diagonal respecto del eje  $x$  que pasapor  $P$  será :

$$I_{11}^P = \int (y^2 + z^2) \rho dV \quad (2.19)$$

Las coordenadas de los elementos de masa del cuerpo respecto de  $P$  son  $(x, y, z)$  y respecto del centro de masa son  $(x', y', z')$ . El vector que une el centro de masa con  $P$  es  $\mathbf{OP}$ . Entonces:

$$I_{11}^P = \int \left( (y' - OP_y)^2 + (z' - OP_z)^2 \right) \rho dV \quad (2.20)$$

Si desarrollamos los cuadrados y tenemos en cuenta que

$$\int y' \rho dV = \int z' \rho dV = 0$$

, ya que estas serían las coordenadas del centro de masa en un sistema donde el centro de masa es el origen, obtenemos:

$$I_{11}^P = \int (y'^2 + z'^2) \rho dV + M (OP_y^2 + OP_z^2) = I_{11}^O + M (d_{OP}^{\perp_x})^2. \quad (2.21)$$

$d_{OP}^{\perp_x}$  es la distancia entre  $O$  y  $P$  medida perpendicularmente al eje  $x$ . Análogamente podemos escribir las fórmulas para los otros elementos diagonales del tensor:

$$\begin{aligned} I_{22}^P &= I_{22}^O + M (d_{OP}^{\perp_y})^2, \\ I_{33}^P &= I_{33}^O + M (d_{OP}^{\perp_z})^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ahora veamos qué pasa con los elementos no diagonales. Son tres distintos, ya que el tensor es simétrico. Calculemos uno, por ejemplo  $I_{12}^P$ :

$$\begin{aligned} I_{12}^P &= - \int x y \rho dV = \\ &= - \int (y' - OP_y) (x' - OP_x) \rho dV \\ I_{12}^P &= - \int y' x' \rho dV - M OP_x OP_y \\ I_{12}^P &= I_{12}^O - M OP_x OP_y. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Podemos escribir fórmulas análogas para los otros elementos:

$$\begin{aligned} I_{13}^P &= I_{13}^O - M OP_x OP_z, \\ I_{23}^P &= I_{23}^O - M OP_y OP_z, \end{aligned} \quad (2.24)$$

Todo esto podemos resumirlo en una sola fórmula:

$$\mathbb{I}^P = \mathbb{I}^O + M (|\mathbf{OP}|^2 \mathbb{1} - \mathbf{OP} \otimes \mathbf{OP}), \quad (2.25)$$

donde  $\mathbf{OP} \otimes \mathbf{OP}$  es el producto diádico del vector  $\mathbf{OP}$  consigo mismo.

Ahora que tenemos el teorema de Steiner, podemos calcular los momentos de inercia  $I_{11}$  e  $I_{22}$  del cilindro. Les queda como ejercicio, con las siguientes ayudas:

- Considerar al cilindro como una suma de discos planos de espesor  $dz$ . Conocemos los momentos de inercia  $I_{11}$  e  $I_{22}$  de cada uno de esos discos respecto de sus centros.
- Utilizando el teorema de Steiner los trasladamos al origen y los sumamos.

### 2.1.3 Dinámica del cuerpo rígido

Vamos a estudiar ahora cómo evoluciona el momento angular y cómo podemos calcularlo en una situación general ( sin pedir que un punto del cuerpo esté en reposo).

Empecemos calculando la evolución temporal de el momento angular respecto de un punto  $p$  fijo en el laboratorio,  $\mathbf{L}_p$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_p}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)}{dt} = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_p. \end{aligned} \quad (2.26)$$

La derivada del momento angular respecto de  $P$  es el momento total que hacen las fuerzas que actúan sobre el cuerpo rígido respecto de  $P$ .

Vamos a ver ahora cómo podemos calcular el momento angular  $\mathbf{L}_p$ , teniendo en cuenta que el cuerpo rígido puede trasladarse respecto de  $P$ .

Ahora  $\mathbf{r}_i$  es la posición de las partículas respecto de  $P$ ,  $\mathbf{r}'_i$  es la posición de las partículas respecto del centro de masa  $CM$  y  $\mathbf{R}_{CM}$  es la posición del centro de masa respecto de  $P$ . Del mismo modo  $\mathbf{v}_i$  es la velocidad de las partículas respecto de  $P$ ,  $\mathbf{v}'_i$  es la velocidad de las partículas respecto del centro de masa  $CM$  y  $\mathbf{V}_{CM}$  es la velocidad del centro de masa respecto de  $P$ . Entonces escribimos:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_p &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}_{CM}) \times (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_{CM}) = \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ahora podemos distribuir el producto y recordar que  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0$  y  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = 0$  ya que estas son respectivamente la posición y la velocidad del centro de masa en el sistema en el cual el centro de masa está en reposo en el origen de coordenadas. Entonces obtenemos:

$$\mathbf{L}_p = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i + M \mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{V}_{CM} \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) tiene una interpretación física muy clara.  $\mathbf{L}_p$  tiene dos contribuciones:

- El primer término representa el momento angular del cuerpo rígido respecto del centro de masa  $\mathbf{L}_{CM}$ , el cual podemos escribir entonces como  $\mathbb{I}^{CM} \cdot \omega$ . Este es el momento angular intrínseco del cuerpo rígido. Describe la rotación sobre sí mismo.
- El segundo término se llama momento angular orbital y describe la rotación del cuerpo rígido como un todo respecto de  $P$ . Toda su masa está colocada en el centro de masa y moviéndose con  $\mathbf{V}_{CM}$ .

Del mismo modo, la derivada temporal de  $\mathbf{L}_p$  será la suma de la derivada de cada uno de estos términos. Veamos qué resulta en cada caso:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d(\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i)}{dt} = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{d\mathbf{v}'_i}{dt} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ahora no podemos decir que  $m_i \frac{d\mathbf{v}'_i}{dt} = \mathbf{F}_i$ . La ecuación de Newton no tiene que cumplirse necesariamente en el sistema del centro de masa, ya que este puede estar moviéndose con aceleración. Pero entonces escribimos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d(\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i)}{dt} = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{d(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{CM})}{dt} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Y entonces, como  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0$ , resulta que:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_{CM}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

O sea, independientemente de cómo sea el movimiento del centro de masa, la derivada de  $\mathbf{L}_{CM}$  es igual al momento de las fuerzas externas en el sistema del laboratorio respecto del centro de masa.

Veamos ahora cómo calcular la energía cinética del cuerpo rígido. Como siempre, empezamos desde su definición fundamental:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_{CM})^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Y teniendo en cuenta que  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = 0$ , resulta

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}'_i{}^2 + \frac{M}{2} \mathbf{V}_{CM}^2 \quad (2.33)$$

Una vez más, hemos desacoplado la energía cinética debida a la traslación del centro de masa de la energía cinética debido a la rotación en torno al mismo. Veamos cómo se puede expresar ese termino de rotación,  $T_{CM}$ :

$$\begin{aligned} T_{CM} &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\omega \times \mathbf{r}'_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\omega \times \mathbf{r}'_i) \cdot (\omega \times \mathbf{r}'_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\omega \times \mathbf{r}'_i) \times \omega \cdot \mathbf{r}'_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\mathbf{r}'_i \omega^2 - \omega \omega \cdot \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{r}'_i \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\mathbf{r}'_i{}^2 \omega^2 - (\omega \cdot \mathbf{r}'_i)^2) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Veamos cómo son esos términos. Por ejemplo, el que solo tiene  $\omega_x$ :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\mathbf{r}'_i{}^2 \omega_x^2 - \omega_x^2 x_i'^2) = \\ &\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (y_i'^2 + z_i'^2) \omega_x^2 = \frac{1}{2} \omega_x I_{xx}^{CM} \omega_x \end{aligned} \quad (2.35)$$

Y similarmente:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\mathbf{r}'_i{}^2 \omega_y^2 - \omega_y^2 y_i'^2) = \\ &\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (x_i'^2 + z_i'^2) \omega_y^2 = \frac{1}{2} \omega_y I_{yy}^{CM} \omega_y \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\mathbf{r}'_i{}^2 \omega_z^2 - \omega_z^2 z_i'^2) = \\ &\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (x_i'^2 + y_i'^2) \omega_z^2 = \frac{1}{2} \omega_z I_{zz}^{CM} \omega_z \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ahora miramos uno que contenga dos componentes distintas de  $\omega$ , por ejemplo  $\omega_x$  y  $\omega_y$ :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N -\frac{m_i}{2} (\omega_x x'_i y'_i \omega_y + \omega_y y'_i x'_i \omega_x) = \\ &\frac{1}{2} (\omega_x I_{xy}^{CM} \omega_y + \omega_y I_{yx}^{CM} \omega_x) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Todo esto podemos resumirlo en una ecuación:

$$T_{CM} = \frac{1}{2} \omega^T \cdot \mathbb{I}^{CM} \cdot \omega \quad (2.39)$$

### Ecuaciones de Euler

Cuando describimos el movimiento de un sólido rígido desde el laboratorio, el tensor de inercia respecto de la terna de ejes fijos en el laboratorio dependerá del tiempo.

Para evitar esto utilizaremos una terna de ejes fijos al cuerpo, sus ejes principales de inercia. Respecto de estos ejes el tensor de inercia es constante y diagonal. Pero el precio que tenemos que pagar es que la base rota junto al cuerpo y por lo tanto, cuando calculamos derivadas respecto del tiempo, tenemos que derivar los versores también.

Veamos cómo se deriva un vector escrito en una base rotante:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^3 L'_i \hat{\mathbf{e}}'_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{dL'_i}{dt} \hat{\mathbf{e}}'_i + \sum_{i=1}^3 L'_i \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_i}{dt} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Los versores  $\hat{\mathbf{e}}'_i$  son versores rotantes con velocidad  $\Omega$  en cada instante. Observando la figura 2.1 podemos escribir para la variación  $\Delta\hat{\mathbf{e}}'_i$  en el intervalo  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta\hat{\mathbf{e}}'_i}{\Delta t} \right| &= |\hat{\mathbf{e}}'_i| \sin \phi \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ &= |\hat{\mathbf{e}}'_i| \sin \phi \omega. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Además  $\Delta\hat{\mathbf{e}}'_i$  es perpendicular a  $\omega$  y  $\hat{\mathbf{e}}'_i$  y su sentido es en el mismo del giro de la rotación. Toda esta información se resume en la ecuación vectorial siguiente:

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_i}{dt} = \omega \times \hat{\mathbf{e}}'_i. \quad (2.42)$$

Si aplicamos esto en la ecuación (2.40), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \frac{dL'_i}{dt} \hat{\mathbf{e}}'_i + \sum_{i=1}^3 L'_i (\omega \times \hat{\mathbf{e}}'_i) \\ &= \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{rot} + \omega \times \mathbf{L}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde  $\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{rot}$  significa que debemos derivar  $\mathbf{L}$  en el sistema de referencia que rota con los ejes.

Aplicemos esto para calcular  $\frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt}$  para un cuerpo que se mueve libre de



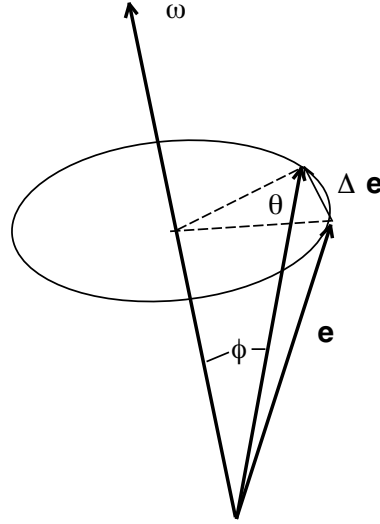


Figure 2.1: Evolución de un versor  $\mathbf{e}$ , que rota con velocidad  $\omega$ , durante un intervalo  $\Delta t$ . El versor forma un ángulo arbitrario  $\phi$  con el eje de rotación.

fuerzas, salvo su propio peso. Entonces  $\mathbf{L}_{CM} = \sum_{i'=1}^3 I_{i'} \omega_{i'} \hat{\mathbf{e}}_{i'}$  y:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} &= 0 \\ &= \frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt}|_{rot} + \omega \times \mathbf{L}_{CM} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Escribiendo las tres ecuaciones de esta identidad vectorial tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= I_{x'} \dot{\omega}_{x'} + \omega_{y'} \omega_{z'} (I_{z'} - I_{y'}) \\ 0 &= I_{y'} \dot{\omega}_{y'} + \omega_{z'} \omega_{x'} (I_{x'} - I_{z'}) \\ 0 &= I_{z'} \dot{\omega}_{z'} + \omega_{y'} \omega_{x'} (I_{y'} - I_{x'}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Estas son las ecuaciones de Euler, que nos permiten encontrar  $\omega(t)$ . Veamos algunas características de estas soluciones. Supongamos que tenemos un cuerpo con  $I_{x'} > I_{y'} > I_{z'}$ . Y supongamos que  $\omega_{x'}(0) \sim 1$ ,

$\omega_{y'}(0) \sim \omega_{z'}(0) \sim 0$ . Para encontrar las soluciones supondremos que :

$$\omega_{y'}(t) \sim \omega_{z'}(t) \sim 0 \forall t, \quad (2.46)$$

y veremos si las soluciones encontradas son consistentes con esta hipótesis. Como consecuencia de (2.37), cada vez que aparezca un producto entre  $\omega_{y'}(t)$  y  $\omega_{x'}(t)$  lo reemplazaremos por 0. Entonces las ecuaciones (2.36) quedan como:

$$\begin{aligned} 0 &= I_{x'} \dot{\omega}_{x'} \\ 0 &= I_{y'} \dot{\omega}_{y'} + \omega_{x'} (I_{x'} - I_{z'}) \omega_{x'} \\ 0 &= I_{z'} \dot{\omega}_{z'} + \omega_{x'} (I_{y'} - I_{x'}) \omega_{y'} \end{aligned} \quad (2.47)$$

La primera igualdad de esta ecuación nos dice que  $\omega_{x'}$  es constante. Derivando una vez más la segunda y tercera igualdad y volviendo a utilizar las ecuaciones (2.36) obtenemos para  $\omega_{z'}$  y  $\omega_{y'}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{\omega}_{y'} + \omega_{x'}^2 \frac{(I_{x'} - I_{z'}) (I_{x'} - I_{y'})}{I_{y'} I_{z'}} \omega_{y'}, \\ 0 &= \ddot{\omega}_{z'} + \omega_{x'}^2 \frac{(I_{x'} - I_{z'}) (I_{x'} - I_{y'})}{I_{y'} I_{z'}} \omega_{z'}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde  $\Omega^2 = \omega_{x'}^2 \frac{(I_{x'} - I_{z'}) (I_{x'} - I_{y'})}{I_{y'} I_{z'}}$  es una constante positiva y por lo tanto estas ecuaciones nos dan una dependencia armónica con el tiempo para  $\omega_{x'}$  y  $\omega_{y'}$ , lo que valida la hipótesis inicial. Las componentes  $\omega_{x'}$  y  $\omega_{y'}$  oscilarán con una pulsación  $\Omega$  en torno a los valores iniciales, manteniéndose siempre pequeñas.

Un análisis similar se puede hacer si el eje de rotación es  $z'$  inicialmente. La componente  $\omega_{z'}$  será constante y las otras dos se mantendrán pequeñas y oscilarán con pulsación  $\Omega^2 = \omega_{z'}^2 \frac{(I_{z'} - I_{x'}) (I_{z'} - I_{y'})}{I_{y'} I_{x'}}$ . Debido a que  $I_{z'}$  es el menor de todos los momentos de inercia, otra vez este coeficiente es positivo, como debe ser para que las soluciones sean armónicas.

La situación cambia si el eje de giro inicial es el eje que corresponde al momento de inercia intermedio  $I_{y'}$ . Todo el desarrollo del cálculo es similar y finalmente obtenemos  $\Omega^2 = \omega_{y'}^2 \frac{(I_{y'} - I_{x'}) (I_{y'} - I_{z'})}{I_{z'} I_{x'}}$ . Ahora  $\Omega^2$  es negativo, lo que implica que  $\Omega$  es imaginario. Entonces las soluciones ya no son armónicas sino exponenciales y entonces ya no es válida la suposición de la (2.37). Entonces  $\omega_{y'}$  no es constante y debemos resolver las tres ecuaciones de (2.36) simultáneamente para obtener la solución. Al haber una respuesta exponencial inicialmente en las componentes de  $\omega$  el vector sigue una evolución que lo aleja del eje  $y'$ , cerca del cual estaba inicialmente. La respuesta es tal que al cabo de un tiempo  $t$   $\omega_{y'}(t) = -\omega_{y'}(0)$ . En ese momento el vector  $\omega$  ha vuelto a su posición inicial, pero es el eje  $y'$  el que ha invertido su sentido respecto de la situación inicial.

Este efecto de inestabilidad en la rotación libre de un sólido rígido se llama efecto Dhyaniyevkov. Aquí hay un enlace donde se discute el mismo y su vinculación con la rotación terrestre ( la tierra no es una esfera perfecta, sino un ovoide con diferentes momentos de inercia en las diferentes direcciones): <https://www.youtube.com/watch?v=yIz6hHgRmk8>

Está claro que en este movimiento debe conservarse la energía cinética de rotación respecto del centro de masa del cuerpo, ya que no existe ninguna fuerza externa que haga torque respecto de él. O sea:

$$T_{CM} = \frac{1}{2} \omega^T \cdot \mathbb{I}^{CM} \cdot \omega$$

$$1 = w_{x'}^2 \frac{I_{x'x'}}{T_{CM}} + w_{y'}^2 \frac{I_{y'y'}}{T_{CM}} + w_{z'}^2 \frac{I_{z'z'}}{T_{CM}} + \quad (2.49)$$

Entonces, de la ecuación (2.39) vemos que en todo momento el vector  $\omega$  se sitúa sobre la superficie del elipsoide definido por esa ecuación.

### 2.1.4 Ángulos de Euler

Ahora que tenemos escritas las ecuaciones de Euler el paso siguiente sería escribir las componentes de  $\omega$  en términos de coordenadas angulares que describan la rotación del cuerpo rígido. Esas coordenadas angulares son los ángulos de Euler, que definiremos en esta sección.

En la figura 2.2 vemos dos sistemas coordenados, el sin primar y el primado y algunos sistemas intermedios. El sistema sin primar es el sistema fijo en el laboratorio y el primado es el sistema fijo al cuerpo rígido. Los ejes intermedios están numerados y son pasos intermedios en el proceso de ir del sistema fijo (sin primar) al móvil (primado).

Para ir de un sistema a otro hacemos rotaciones. La primer rotación que aplicamos es una rotación en torno al eje  $z$  del sistema fijo, de ángulo  $\phi$ , y terminamos con la terna  $(x_1, y_1, z)$ . Esta operación de rotación está representada por la matriz:

$$\mathbb{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Es una rotación en el plano  $x - y$  y por lo tanto el eje  $z$  permanece invariante.

Aplicando esta matriz a las coordenadas de un vector, colocadas como un vector columna a su derecha, nos da las coordenadas de ese vector en el nuevo sistema de ejes. Las rotaciones son operaciones que conservan la norma de los vectores. Una matriz que representa a una transformación que preserva la norma se dice que es unitaria y su inversa es igual a su transpuesta. En este caso:

$$\mathbb{R}^{-1}(\phi) = \mathbb{R}(-\phi) = \mathbb{R}^T(\phi) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

A continuación hacemos una rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $x_1$ . La nueva terna es  $x_1, y_2, z'$ . La matriz que representa a esta operación es:

$$\mathbb{R}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

ya que en este caso es el eje  $x_1$  el que debe permanecer invariante. Notemos que cuando hacemos rotaciones de ángulos finitos, el orden en que hacemos las operaciones es importante. En efecto:

$$\mathbb{R}(\theta)\mathbb{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Pero

$$\mathbb{R}(\phi)\mathbb{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & -\cos \phi \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

O sea que si cambiamos el orden, el resultado es en general distinto. Sin embargo, cuando las rotaciones son infinitesimales (se desprecian términos de segundo orden en los ángulos), las operaciones conmutan y el resultado de cambiar el orden de la multiplicación es el mismo:

$$\mathbb{R}(\phi)\mathbb{R}(\theta) = \mathbb{R}(\theta)\mathbb{R}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 \\ \phi & 1 & -\theta \\ 0 & \theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Esta propiedad es la que nos permite definir un vector asociado a las rotaciones infinitesimales (pues la suma conmuta) mediante la regla de la mano derecha (un pseudo vector en realidad). Y entonces, también podemos definir un vector velocidad angular asociado a las rotaciones infinitesimales y podemos sumarlos.

Hacemos ahora la última rotación, con la cual llevamos el sistema sin primar sobre el sistema primado. Esta vuelve a ser una rotación de ángulo  $\psi$  en torno del eje  $z'$  de la última terna. Su matriz es entonces:

$$\mathbb{R}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Ahora juntamos las tres operaciones secuencialmente y obtenemos la matriz que nos lleva desde el sistema fijo en el laboratorio al fijo al cuerpo:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(\psi)\mathbb{R}(\theta)\mathbb{R}(\phi) = \\ \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \cos \psi \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} = \\ \mathbb{R}(\phi, \theta, \psi). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Con esta matriz pasamos las coordenadas de un vector en la base del laboratorio a la base del sistema que rota con el cuerpo. Para hacer la transformación inversa debemos invertir esta matriz:

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}(\psi)\mathbb{R}(\theta)\mathbb{R}(\phi))^{-1} &= \mathbb{R}^{-1}(\phi)\mathbb{R}^{-1}(\theta)\mathbb{R}^{-1}(\psi) = \\ &= \mathbb{R}(-\phi)\mathbb{R}(-\theta)\mathbb{R}(-\psi) = \\ &= \mathbb{R}(-\psi, -\theta, -\phi) \end{aligned} \quad (2.58)$$

O sea, para obtener la matriz inversa, que nos lleva desde el sistema fijo al cuerpo al sistema del laboratorio, debemos reemplazar en la matriz de 2.47  $\phi \rightarrow -\psi$ ,  $\theta \rightarrow -\theta$ ,  $\psi \rightarrow -\phi$ .

Ahora que ya sabemos transformar coordenadas de un sistema al otro, vamos a escribir el vector velocidad angular del cuerpo rígido en un sistema de coordenadas. Sabemos que las velocidades angulares podemos componerlas sumando vectorialmente, ya que podemos representar los giros infinitesimales por vectores utilizando la regla de la mano derecha. Por lo tanto, el vector velocidad angular  $\omega$  lo escribimos como:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_\phi + \omega_\theta + \omega_\psi \\ &= \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{x}}_1 + \dot{\psi} \hat{\mathbf{z}}'\end{aligned}\tag{2.59}$$

El primer sumando de la ecuación 2.59 está escrito en la terna  $(x_1, y_1, z)$ . Para llevarlo al sistema primado (fijo al cuerpo), debemos aplicarle  $\mathbb{R}(\psi) \mathbb{R}(\theta)$ . Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \omega_{\phi x'} \\ \omega_{\phi y'} \\ \omega_{\phi z'} \end{pmatrix} &= \mathbb{R}(\psi) \mathbb{R}(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{R}(\psi) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.60}$$

El segundo sumando de la ecuación 2.59 está escrito en la terna  $(x_1, y_2, z')$ . Para llevarlo al sistema primado (fijo al cuerpo), debemos aplicarle  $\mathbb{R}(\psi)$ . Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \omega_{\theta x'} \\ \omega_{\theta y'} \\ \omega_{\theta z'} \end{pmatrix} &= \mathbb{R}(\psi) \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.61}$$

Y finalmente el tercer sumando de la ecuación 2.59 ya está escrito en la terna fija al cuerpo  $(x', y', z')$ . Si ahora sumamos los tres vectores con sus coordenadas escritas en la base fija al cuerpo, obtenemos  $\omega$  en la base fija al cuerpo:

$$\omega' = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}.\tag{2.62}$$

Ponemos  $\omega'$  para recordar que es el vector  $\omega$  escrito en la base fija al cuerpo. Podemos también escribir en la base del laboratorio, por ejemplo aplicando

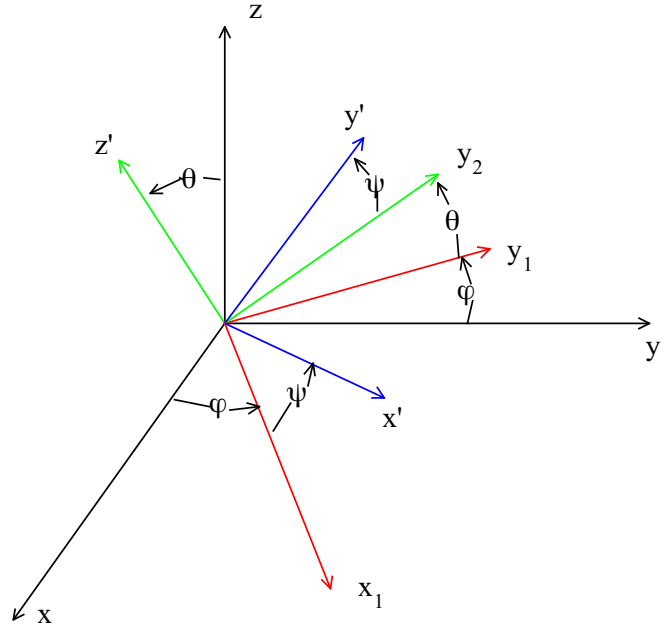


Figure 2.2: Los ángulos de Euler  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  definen rotaciones que permiten pasar de una terna de ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  fija an el laboratorio a otra  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  fija al cuerpo.

la matriz de 2.58 a 2.62. Obtenemos:

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ -\dot{\psi} \cos \phi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Estas expresiones de  $\omega$  nos servirán para la siguiente sección.

### 2.1.5 Análisis de la dinámica de un sólido simétrico libre

Analizaremos ahora las ecuaciones de Euler aplicadas al movimiento de un sólido con un eje de simetría, que se mueve bajo la acción de su propio

peso. Las ecuaciones de Euler son:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}^{\mathbf{CM}}}{dt}\bigg|_{x'} &= 0 = \\
I_{x'} \dot{\omega}_{x'} + \omega_{y'} \omega_{z'} (I_{z'} - I_{y'}) \\
\frac{d\mathbf{L}^{\mathbf{CM}}}{dt}\bigg|_{y'} &= 0 = \\
I_{y'} \dot{\omega}_{y'} + \omega_{z'} \omega_{x'} (I_{x'} - I_{z'}) \\
\frac{d\mathbf{L}^{\mathbf{CM}}}{dt}\bigg|_{z'} &= 0 = \\
I_{z'} \dot{\omega}_{z'} + \omega_{y'} \omega_{x'} (I_{y'} - I_{x'})
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Como eje de simetría tomamos al eje  $z'$ . Esto significa que  $I_{x'} = I_{y'} = I$ . Además es el propio  $\mathbf{L}^{\mathbf{CM}}$  constante, por lo que podemos tomar  $z$  en su misma dirección y sentido. De la última ecuación en 2.54 es inmediato ver que  $\omega_{z'}$  y  $L_{z'}^{\mathbf{CM}} = I_{z'} \omega_{z'}$  deben ser también constantes. Todo esto nos lleva a que el ángulo entre  $z$  y  $z'$ , que es el ángulo de Euler  $\theta$ , debe ser constante. Aprovechando esto últimos escribamos explícitamente las ecuaciones de 2.64 utilizando 2.62:

$$\begin{aligned}
0 &= I \left( \ddot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\phi} \sin \theta \dot{\psi} \cos \psi \right) + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \omega_{z'} (I_{z'} - I) \\
0 &= I \left( \ddot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\phi} \sin \theta \dot{\psi} \sin \psi \right) + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \omega_{z'} (I - I_{z'})
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Multiplicando en 2.55 la primera ecuación por  $\sin \psi$  y la segunda por  $\cos \psi$  y sumándolas obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= I \ddot{\phi} \sin \theta \\
\implies \dot{\phi} &= \text{constante}.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Pero también sabemos que  $\omega_{z'}$  es constante. Entonces:

$$\begin{aligned}
\omega_{z'} &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \\
\implies \dot{\psi} &= \text{constante}.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

El significado físico de  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  es claro. La primera velocidad angular es la velocidad con que el eje  $z'$  gira (precede) en torno al eje  $z$ . La segunda es la velocidad angular con que el sólido gira en torno a su eje de simetría  $z'$ . Ambas son constantes en este caso.

Vemos que la velocidad angular del cuerpo rígido es, en este caso en que  $\theta$  es constante, la composición de dos velocidades: la de giro en torno de su eje, que está a lo largo de  $z'$ , y la de precesión que está a lo largo de  $z$ . Por lo tanto  $\omega$  estará contenida en el plano que contiene a  $z'$  y a  $z$ . Y su proyección sobre el plano  $x' - y'$  formará con  $y'$  un ángulo  $\psi$ . Esto es algo que puede verse de la 2.52 : la proyección sobre el plano  $x' - y'$  es  $\dot{\phi} \sin \theta$  y esa proyección se multiplica por  $\sin \psi$  para obtener  $\omega_{x'}$  y por  $\cos \psi$  para obtener  $\omega_{y'}$ .

Para obtener las componentes del momento angular en la base fija al cuerpo debemos multiplicar las componentes de  $\omega$  por los momentos de inercia correspondientes. En este caso, las componentes  $\omega_{x'}$  y  $\omega_{y'}$  se multiplican

ambas por el mismo número  $I$ . Por lo tanto, la proyección de  $\mathbf{L}$  en el plano  $x' - y'$  forma el mismo ángulo con  $y'$  que la proyección de  $\omega$  en ese plano. Esto es consistente con el hecho de que  $\omega$  está en el plano que contiene a  $z'$  y  $z$  y  $\mathbf{L}$  está sobre el eje  $z$ .

Resumiendo, la imagen de este movimiento es que el eje de simetría gira con locidad  $\dot{\phi}$  en torno a  $\mathbf{L}$ . Y  $\omega$  también gira en torno a  $\mathbf{L}$  con la misma velocidad, contenida en el plano que definen  $\mathbf{L}$  y el eje de simetría.

Determinemos ahora  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  en términos de las condiciones iniciales ( el valor de  $\mathbf{L}$ ). La proyección de  $\mathbf{L}$  sobre el plano  $x' - y'$ , en módulo, es  $L \sin \theta$ . De la ecuación 2.62, vemos que esta proyección es también  $I \dot{\phi} \sin \theta$ . De igualar ambas cosas vemos que  $\dot{\phi} = \frac{L}{I}$ .

Por otro lado, analizando la componente de  $\mathbf{L}$  según  $z'$  tenemos:

$$\begin{aligned} L \cos \theta &= I_{z'}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ \Rightarrow \dot{\psi} &= L \cos \theta \frac{(I - I_{z'})}{I I_{z'}} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Notemos que si  $\dot{\psi} < 0$  ( $I < I_{z'}$ ), entonces el vector  $\omega$  y el eje de simetría del cuerpo están ubicados de lados opuestos a  $\mathbf{L}$  ( y en el mismo plano). Y si  $\dot{\psi} > 0$  ( $I > I_{z'}$ ) están del mismo lado respecto a  $\mathbf{L}$ .



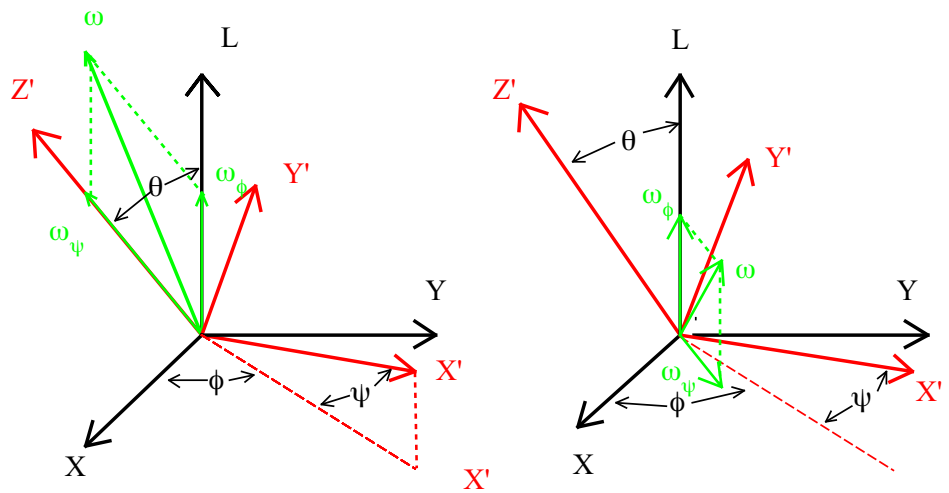


Figure 2.3: Movimiento de un sólido con un eje de simetría en  $z'$ . En el panel de la izquierda se representa la situación en la que  $\dot{\psi} > 0$ . En el eje de simetría gira en torno a  $\mathbf{L}$  con velocidad  $\omega_\phi = \dot{\phi}$ . El sólido gira sobre el eje de simetría con velocidad  $\omega_\psi = \dot{\psi}$ . La velocidad angular del sólido es  $\omega = \omega_\phi + \omega_\psi$  y está siempre en el plano definido por  $\mathbf{L}$  y  $z'$ , entre esas dos direcciones. En el panel de la derecha se representa la situación con  $\dot{\psi} < 0$ . En este caso  $\omega$  y  $z'$  están en lados opuestos a  $\mathbf{L}$ , pero siempre los tres en el mismo plano, que gira en torno a  $\mathbf{L}$  con  $\omega_\phi$



# Chapter 3

## Relatividad Especial.

### 3.1 Introducción

Un sistema de referencia inercial es un sistema de referencia en el cual vale la ley de inercia: un cuerpo que no está sometido a ninguna fuerza se mueve con velocidad constante. Las leyes de la mecánica se formulan desde un sistema de referencia inercial. Dado un sistema de referencia inercial, tenemos una infinidad de ellos puesto que todo sistema de referencia que se mueve con velocidad constante respecto del primero también es un sistema de referencia inercial.

Las transformaciones que conectan dos sistemas de referencia inerciales  $S$  y  $S'$  en mecánica clásica son las transformaciones de Galileo:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{R} + \mathbf{r}' \\ &= \mathbf{V}t + \mathbf{r}',\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $\mathbf{R}$  es la posición del origen de  $S'$  ( $O'$ ) respecto del origen de  $S$  ( $O$ ) y  $\mathbf{V}$  es la velocidad de  $O'$  respecto de  $O$ .

Podemos interpretar gráficamente las ecuaciones de la transformación de Galileo ( ver Fig. 3.1).

Estos diagramas son diagramas espacio-tiempo. Cada punto de este diagrama señala un evento que sucede en la posición  $x$  y a tiempo  $t:(t,x)$ . Por lo tanto las líneas verticales a partir de un punto (líneas quebradas negras) representan la sucesión de eventos que suceden en ese punto y son las líneas de universo de ese punto en el sistema  $S$ . Las líneas horizontales son el conjunto de eventos que suceden todos en el mismo instante en  $S$  (líneas verdes quebradas) y como el tiempo no cambia de  $S$  a  $S'$  también ocurren en el mismo instante en  $S'$ .

La línea de universo asociada al origen de  $S$  es lo que definimos como el eje de tiempo en el sistema  $S$ . Por otro lado, la línea de simultaneidad que corresponde a  $t = 0$  es lo que definimos como el eje espacial en  $S$ .

¿Qué pasa si queremos dibujar los ejes del sistema  $S'$  en este diagrama?

El eje de tiempo  $t'$  corresponde a la línea de universo del origen  $O'$  de  $S'$ .

Pero este se mueve con velocidad  $V$  respecto de  $O$ . Entonces esa línea es la línea roja en la Fig. 3.4, donde  $\tan \Phi = V$ . Por otro lado, el eje de espacio en  $S'$ ,  $x'$ , corresponde a la línea de simultaneidad en  $S'$ , que coincide con la de  $S$ .

Evidentemente la aceleración de una partícula, y por lo tanto la fuerza que actúa sobre ella, será exactamente la misma en  $S$  o en  $S'$ . La ecuación de

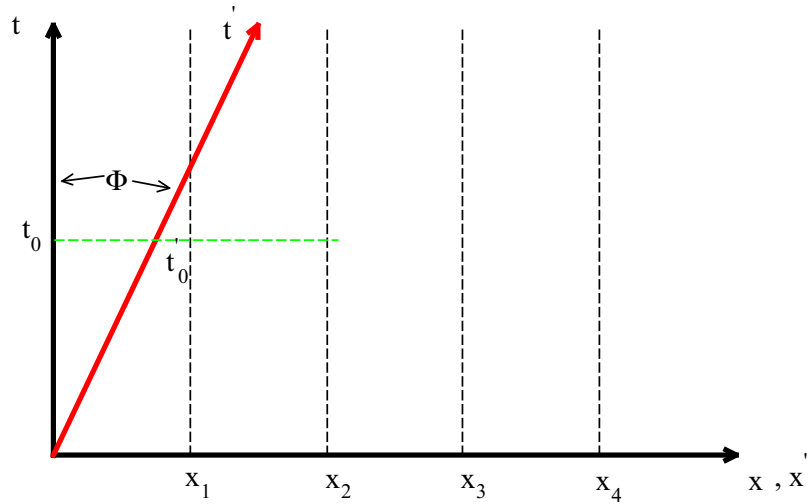


Figure 3.1: Transformación de Galileo. El sistema de referencia  $S'$  se mueve con velocidad  $V$  respecto de  $S$ .  $\tan \Phi = V$  y  $t_0 = t'_0$ .

Newton es la misma si la escribimos en  $S$  o en  $S'$ . No hay en las leyes de la mecánica nada que distinga a  $S$  de  $S'$ . No podemos asignar un movimiento absoluto o un reposo absoluto a ninguno de los dos sistemas, solo podemos decir que hay un movimiento relativo entre ellos.

Veamos un ejemplo con el cual se pone en cuestión lo afirmado en el párrafo precedente. Consideremos un cable infinito, lo largo del eje  $bfz$ , circulado por una corriente  $I$  constante en la dirección positiva. Frente a él, a una distancia  $r$  hay una carga  $q$  en reposo (ver panel (a) 3.2). El cable es neutro, la carga positiva está ligada a los núcleos atómicos fijos y la carga negativa está libre para moverse y produce la corriente  $I$  en la dirección positiva del eje al desplazarse con velocidad  $V$  constante en la dirección negativa del eje  $z$ .

En esta configuración no hay campo eléctrico, solo campo magnético. Como la carga de prueba está en reposo, la fuerza neta sobre ella es 0.

Ahora consideremos un sistema de referencia en el cual los electrones libres del cable están en reposo (ver panel (b) 3.2). Es decir, un sistema que se mueve hacia abajo con velocidad  $V$ . En este sistema la carga positiva del cable es la que se mueve hacia arriba con velocidad  $V$  y por lo

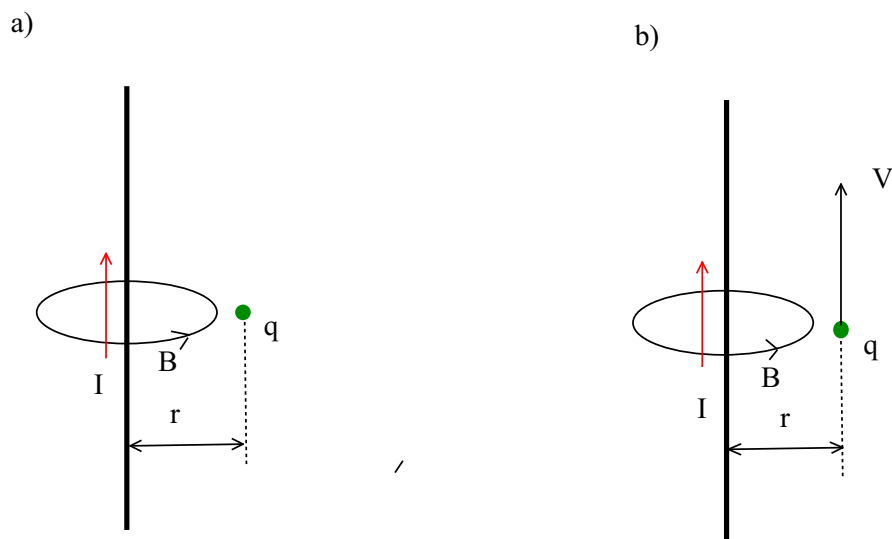


Figure 3.2: Fuerza sobre una carga. a) Sistema de referencia donde la carga está en reposo. b) Sistema de referencia donde la carga se mueve con velocidad  $\mathbf{V}$ .

tanto produce la misma corriente  $I$ . Por lo tanto la configuración de campo eléctrico y magnético es la misma que antes. Pero ahora la carga  $q$  también se mueve con velocidad  $V$  hacia arriba. Por lo tanto sobre ella actuará una fuerza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

, según la ley de Biort-Savat.

Estamos ante una situación en la que la fuerza depende del sistema de referencia inercial que utilizamos para describir al sistema. Este ejemplo niega la afirmación que hicimos antes de que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes. Parece que hubiera un sistema de referencia privilegiado en el cual debemos calcular la fuerza. Pero entonces, ¿cómo saber cuál es ese sistema?.

Para comprender el origen del problema debemos observar que en este ejemplo intervienen fuerzas electromagnéticas. Recordemos entonces las ecuaciones de Maxwell, que rigen a los campos electromagnéticos. En par-

ticular consideremos las mismas en ausencia de fuentes de campos:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

En estas ecuaciones  $\mu_0$  y  $\epsilon_0$  son la permeabilidad magnética y eléctrica del medio, respectivamente. El medio es el medio en que existen los campos cuando no hay materia. Uno puede preguntarse si realmente existen campos cuando no hay materia.

Para ver esto, tomamos rotor en las últimas dos ecuaciones de (3.2) y obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Las ecuaciones (3.3) admiten soluciones de ondas viajeras que viajan con velocidad

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

llamadas ondas electromagnéticas. Pero entonces, cuando escribimos las ecuaciones de Maxwell estamos asumiendo que lo hacemos en el medio en que las ondas electromagnéticas se propagan con velocidad  $c$ . Es decir, utilizamos un sistema de referencia en reposo respecto de ese medio. Y ese es entonces el sistema de referencia privilegiado que estamos buscando. Si hacemos una transformación de Galileo sobre las ecuaciones de Maxwell vemos que estas no son invariantes. El medio en que se propagan las ondas electromagnéticas fue bautizado *eter* y el sistema de referencia privilegiado es el que está en reposo respecto del eter. Y todos los objetos se mueven de una u otra manera respecto del eter. El objetivo pasó a ser entonces detectar ese movimiento. Ese era el cuadro de situación finales del siglo XIX aproximadamente.

Sabemos que la tierra se mueve respecto del Sol con una velocidad de  $V_T = 110000 \text{ Km/h}$  aproximadamente ( $\frac{V_t}{c} \sim 1 \times 10^{-3}$ ). Admitiremos que el Sol y otras estrellas están en reposo respecto del eter, para fijar ideas. Entonces si medimos la velocidad de una onda de luz que se propaga en la misma dirección que la tierra o en sentido contrario deberíamos determinar valores y/o trayectorias diferentes según la transformación de Galileo. Se quería poner esto en evidencia a través de experimentos que nos dieran entonces indirectamente información acerca del eter.

Reseñamos a continuación tres evidencias experimentales contradictorias entre sí respecto de la naturaleza del eter.

### 3.1.1 Aberración de la luz

Consideremos la luz que llega a la tierra desde una estrella lejana, en reposo respecto del eter. La luz es emitida formando un ángulo  $\theta$  con la superficie terrestre. La tierra se mueve con velocidad  $V$  hacia la derecha (ver

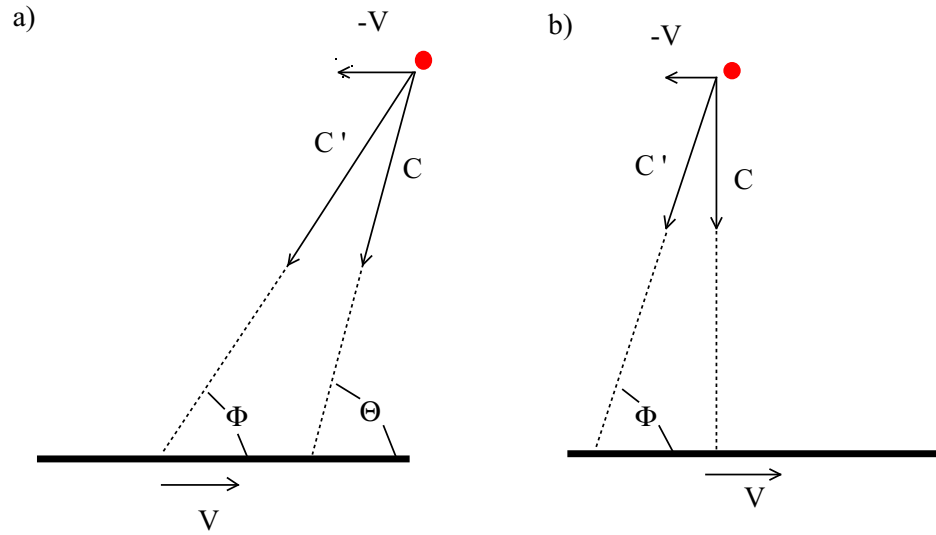


Figure 3.3: Aberración de la luz. a) Incidencia lateral. b) Incidencia normal.

figura 3.3 (a)). Por lo tanto, la estrella se mueve respecto de la tierra con  $-V$  y la velocidad de la luz respecto de la tierra es

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C} - \mathbf{V}$$

. Como  $C \gg V$  debe ser

$$\Theta - \Phi = \delta \ll 1$$

. Además

$$\begin{aligned} \tan \Phi &= \frac{C \sin \Theta}{C \cos \Theta + V} \\ &= \frac{\tan \Theta}{(1 + \frac{V}{C \cos \Theta})} \\ &\simeq \tan \Theta (1 - \frac{V}{C \cos \Theta}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

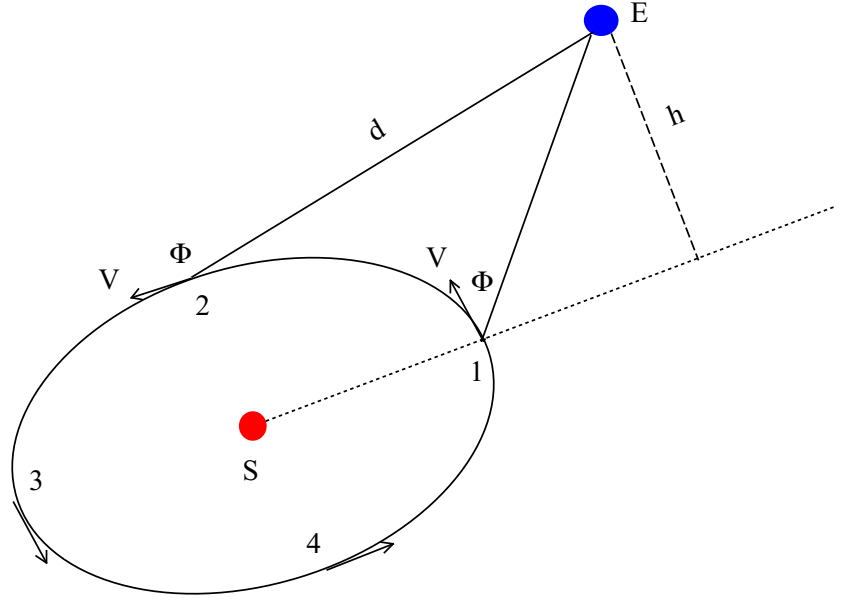


Figure 3.4: Aberración estelar

Por otro lado también es:

$$\begin{aligned}
 \tan \Phi &= \tan(\Theta - \delta) \\
 &\simeq \tan \Theta - \frac{\delta}{\cos^2 \Theta} \\
 &\simeq \tan \Theta \left(1 - \frac{V}{C \cos \Theta}\right)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \delta &\simeq \frac{V}{c} \sin(\Theta) \\
 &\simeq \frac{V}{c} \sin(\Phi)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

El caso de incidencia normal (ver figura 3.3 (b)) se obtiene poniendo  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  en (3.6).

Consideremos ahora la luz que llega desde una estrella lejana ( $E$ ) a la tierra mientras esta recorre su órbita en torno al sol ( $S$ ) ( ver 3.4).

La estrella se haya a una altura  $h$  medida perpendicularmente respecto del plano que contiene a la órbita terrestre. Dependiendo del momento en



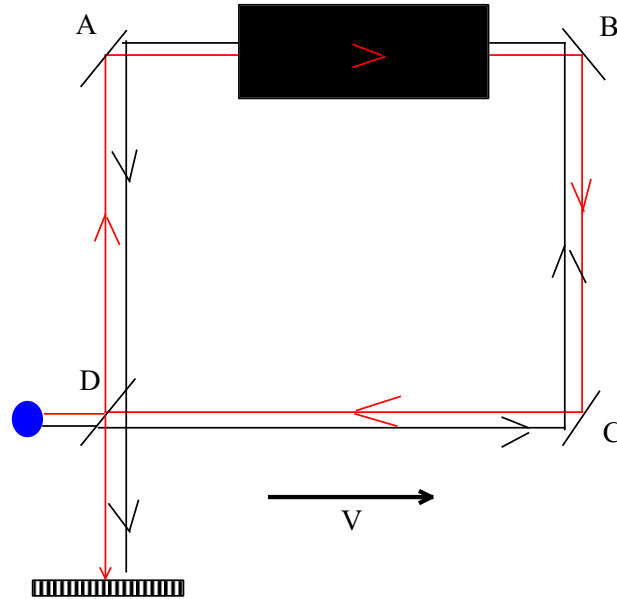


Figure 3.5: Experimento de Fresnel

que observamos la estrella la incidencia de la luz respecto de la velocidad terrestre es diferente. En los puntos 1 y 3 la incidencia es perpendicular ( $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ). En los puntos 2 y 4 la incidencia es lateral  $\Theta \gtrless \frac{\pi}{2}$ . Entonces en los puntos 1 y 3 debemos desplazar el telescopio  $\pm\delta_1$  en la dirección de  $\mathbf{V}$ . Y en los puntos 2 y 4 debemos desplazarlo  $\pm\delta_2$  en la dirección de  $\mathbf{V}$  en esos puntos. De acuerdo con (3.5) es  $\delta_1 > \delta_2$ . Por lo tanto, observando desde la tierra una estrella fija en el eter, parece que su trayectoria fuera una elipse de eje mayor  $\propto \delta_1$  y eje menor  $\propto \delta_2$ . Esto es efectivamente compatible con observaciones astronómicas de estrellas distantes. En todo este análisis hemos supuesto que la Tierra se mueve a través del eter sin perturbarlo.

### 3.1.2 Experimento de Fresnel

El dispositivo experimental de este experimento se ve en la figura 3.5. Esencialmente consiste en una fuente de luz y 4 espejos semireflectantes  $D, A, B, C$ . De esta forma se consigue tener dos rayos de luz que recorren el camino en sentidos opuestos (rojo en sentido horario y negro anti horario). Final-

mente ambos rayos se recogen en una pantalla. En el tramo  $AB$  se coloca un medio material y suponemos que la velocidad terrestre está en la dirección horizontal.

Si la onda asociada a cada rayo recorre su camino en un tiempo distinto ( $t_r, t_n$ ), entonces arriban a la pantalla con una diferencia de fase dada por  $w * (t_r - t_n)$ , donde  $w = \frac{2\pi}{T}$ . Veamos como calculamos el tiempo para cada rayo:

$$\begin{aligned} t_r &= \frac{DC}{C+V} + \frac{AB}{\frac{C}{n}-V} \\ &= \frac{L}{C} \left( \frac{1}{(1+\frac{V}{C})} + \frac{1}{(\frac{1}{n}-\frac{V}{C})} \right) \\ &\simeq \frac{L}{C} \left( 1 - \frac{V}{C} + n + n^2 \frac{V}{C} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{DC}{C-V} + \frac{AB}{\frac{C}{n}+V} \\ &= \frac{L}{C} \left( \frac{1}{(1-\frac{V}{C})} + \frac{1}{(\frac{1}{n}+\frac{V}{C})} \right) \\ &\simeq \frac{L}{C} \left( 1 + \frac{V}{C} + n - n^2 \frac{V}{C} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Donde hemos considerado que el eter no es perturbado dentro del medio material, en cuyo interior la luz se propaga con velocidad  $\frac{C}{n}$ . Entonces:

$$t_n - t_r \simeq \frac{2L}{C} (1 - n^2) \frac{V}{C} \quad (3.9)$$

La diferencia de fase es proporcional a  $\frac{V}{C}$ , al orden más bajo posible en ese factor. Términos con  $(\frac{V}{C})^2$  asumimos que no eran detectables experimentalmente en aquellos tiempos. Esta diferencia de fase produce una figura de franjas de interferencia en la pantalla receptora. Y cambia de signo si colocamos el medio material en la parte de abajo (rotando el dispositivo, por ejemplo). Por lo tanto debería verse un cambio en las franjas de interferencia al realizar esta operación, pero no se observa nada.

Podemos sospechar que la hipótesis de que el eter no es perturbado dentro del medio material no es correcta. Otra posibilidad es que el eter sea completamente arrastrado dentro del medio material. Por lo tanto, en el tramo donde está el medio materia la velocidad de la onda sería solo  $\frac{C}{n}$ , sin corrección por  $V$ . Es fácil ver que en ese caso también se obtiene un desfase  $\propto \frac{V}{C}$ , que debería ser detectable.

Para remediar eso se supuso que el eter era parcialmente arrastrado por el medio material, con un coeficiente adecuado para que solo sobrevivan en el desfase términos de orden 2 o más en  $\frac{V}{C}$ , que no podían ser detectados experimentalmente y así obtener el acuerdo experimental.

Notemos que la explicación de la aberración de la luz estelar supusimos que el eter no era perturbado por el movimiento terrestre.

### 3.1.3 Experimento de Michelson y Moorley

Hacia fines del siglo XIX, Maxwell convenció a Michelson de realizar un experimento definitivo para detectar el movimiento terrestre a través del eter.

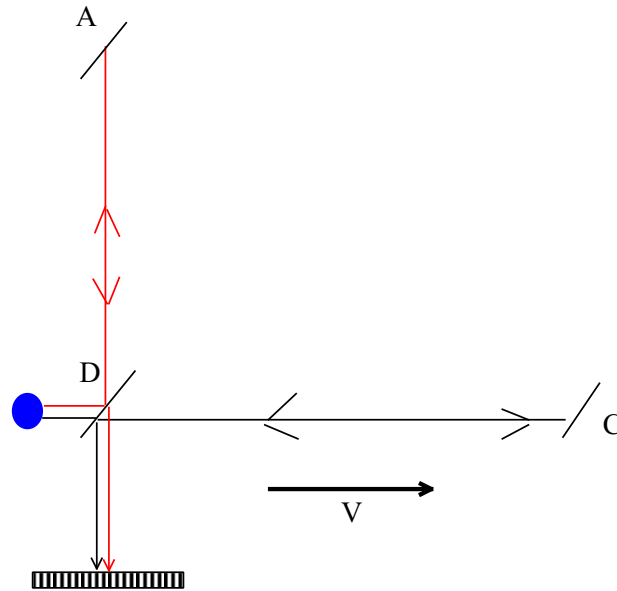


Figure 3.6: Experimento de Michelson

Michelson era un reputado experimental en interferometría óptica y estaba en condiciones de medir con gran precisión, incluso más allá del orden 2 en  $\frac{V}{C}$ . Diseñó un experimento sencillo, pero debido a la gran precisión con que medía, podía considerarse definitivo ( ver Fig. 3.6).

La idea es similar a la del experimento de Fresnel, pero el dispositivo es más simple. Calculemos el desfase entre los rayos rojo y negro:

$$\begin{aligned}
 t_r &= 2 \frac{AD}{\sqrt{C^2 - V^2}} \\
 &= \frac{2L}{C} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{V}{C})^2}} \\
 &\simeq \frac{2L}{C} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{V}{C}\right)^2\right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
t_n &= \frac{CD}{C-V} + \frac{CD}{C+V} \\
&= \frac{2L}{C} \frac{1}{(1 - (\frac{V}{C})^2)} \\
&\simeq \frac{2L}{C} (1 + (\frac{V}{C})^2)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Y entonces

$$t_n - t_r = \frac{L}{C} (\frac{V}{C})^2 \tag{3.12}$$

Esta diferencia era perfectamente medible para Michelson, pero no fue capaz de detectar nada.

Una manera de entender este resultado es imaginar que el eter es completamente arrastrado por el movimiento terrestre, con lo cual las velocidades de la luz en la rama horizontal o vertical deben ser las mismas. Pero esto estaría en contradicción con los dos experimentos descriptos anteriormente.

## 3.2 Postulados de la relatividad especial

Ante conjunto de obeservaciones contradictorias y/o negativas para detectar el movimiento de la tierra a través del eter, Einstein propuso los siguientes postulados como base de una nueva teoría del tiempo y el espacio:

1. La luz se propaga en el vacío ( no existe el eter).
2. La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales.
3. Las leyes de la naturaleza deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales

La velocidad de la luz en el vacío es

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell.

Vamos a deducir una ley de transformación entre sistemas de referencia que cumpla con estas hipótesis. Para ello imaginamos dos sistemas de referencia  $S$  y  $S'$ .  $S'$  se mueve a lo largo del eje  $x$  de  $S$  con velocidad  $V$ . En  $t = t' = 0$  los orígenes de  $S$  y  $S'$  ( $O$  y  $O'$  respectivamente) coinciden. En ese instante se emite desde ambos orígenes un pulso de luz esférico. De acuerdo con las hipótesis anteriores cada observador describirá este pulso como un frente esférico, con centro en su origen, y que avanza con velocidad  $c$ . Entonces para ambos debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= 0 \\
c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Definimos la cantidad

$$S^2(t, x, y, z) = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

que denominamos el intervalo asociado al evento  $(t, x, y, z)$  respecto del origen. Las ecuaciones (3.13), interpretadas de acuerdo a las hipótesis de arriba, también puede escribirse así:

$$\begin{aligned} c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= 0 \\ \Downarrow \\ c^2 t'^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

La anulación de un intervalo implica necesariamente la anulación del otro, ya que corresponde a la propagación de un frente de onda de luz.

O sea que, en general, debe ocurrir que:

$$S^2(t, x, y, z) = K S'^2(t', x', y', z'). \quad (3.15)$$

Donde  $K$  es un número no nulo. ¿De qué puede depender  $K$ ?

Para ver esto volvemos a las hipótesis. Si un movimiento es uniforme en  $S$ , debe ser también uniforme en  $S'$ . Por lo tanto  $K$  no puede depender de las coordenadas.  $K$  tampoco puede depender de la dirección y sentido del movimiento relativo, ya que el espacio es isótropo y homogéneo. Solo puede depender del módulo de  $V$  (al que denotaremos con esta misma letra de aquí en más). O sea:

$$S^2(t, x, y, z) = K(V) S'^2(t', x', y', z'). \quad (3.16)$$

Pero entonces podemos intercambiar  $S$  con  $S'$  cambiando  $V$  por  $-V$  y la ecuación (3.17) debería escribirse así:

$$S'^2(t', x', y', z') = K(V) S^2(t, x, y, z). \quad (3.17)$$

Por lo tanto  $K(V) = 1$ . Y tenemos entonces que el intervalo entre eventos debe ser el mismo en todos los sistemas de referencia inerciales.

Las transformaciones que estamos buscando deben ser lineales, ya que si un cuerpo tiene un movimiento uniforme en un sistema de referencia lo debe tener en cualquier otro. Como el movimiento transcurre a lo largo de  $x$ , nada puede cambiar en  $y$  o en  $z$  (salvo por un cambio de escala global  $y' = \alpha y$ ,  $z' = \beta z$ , pero igual que antes podemos cambiar  $S$  por  $S'$  y  $V$  por  $-V$  y entonces ver que  $\alpha = \beta = 1$ ). Entonces escribimos:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \delta t \\ t' &= \nu x + \kappa t \\ y &= y'; z = z' \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ahora escribimos la ecuación de igualdad de los intervalos (omitiendo los términos en  $y, z, y', z'$  que se cancelan):

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 \quad (3.19)$$

Reemplazando las coordenadas en  $S'$  de acuerdo a las ecuaciones (3.18) e igualando término a término en la ecuación (3.19), obtenemos las siguientes ecuaciones para los coeficientes de la transformación:

$$\begin{aligned} c^2 \nu^2 - \alpha^2 &= 1 \\ \kappa^2 - \left(\frac{\delta}{c}\right)^2 &= 1 \\ \nu \kappa - \frac{\alpha \delta}{c^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Además si en la primera ecuación de (3.18), ponemos  $x' = 0$ , estaremos describiendo el movimiento de  $O'$  desde  $S$ . Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha x + \delta t \\ x &= -\frac{\delta}{\alpha} t = V t \\ V &= -\frac{\delta}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Además, poniendo  $x = 0$  en (3.18) describimos el movimiento de  $O$  desde  $S'$ . Entonces:

$$\begin{aligned} x' &= \delta t \\ x' &= \frac{\delta}{\kappa} t' = -V t' \\ V &= -\frac{\delta}{\kappa} \end{aligned} \quad (3.22)$$

De lo que concluimos que  $\kappa = \alpha$  y reemplazando todo esto en (3.20) obtenemos los valores de todas las constantes:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \beta = \frac{V}{c} \\ \delta &= -V \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -V\gamma \\ \nu &= -\frac{\beta}{c} \gamma \end{aligned} \quad (3.23)$$

Resumiendo, la transformación es :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ y &= y'; z = z' \end{aligned} \quad (3.24)$$

Donde además hemos multiplicado a la coordenada temporal por  $c$ , para que ahora las coordenadas  $ct$  y  $x$  tengan un papel totalmente simétrico en las ecuaciones. Las ecuaciones (3.24) son las transformaciones de Lorentz. Observaciones:

- Las transformaciones de Lorentz son transformaciones que operan en un espacio de 4 dimensiones: tres espaciales y una temporal. Definimos entonces los cuadvectores sobre los cuales se opera de esta manera

$$\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3).$$

En el caso precedente es  $x_0 = ct$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . Siempre colocaremos la componente temporal en primer término. Podemos entonces escribir las ecuaciones (3.24) en lenguaje matricial:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

- Si en (3.24) colocamos  $t' = 0$ , obtendremos los eventos que suceden todos simultáneamente en ese instante en  $S'$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(ct - \beta x) \\ ct &= \beta x. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pero esos eventos conforman, por definición, el eje  $x'$ . Entonces la ecuación (3.26) es la ecuación que representa al eje  $x'$  tal como se ve en el sistema  $S$ . Los eventos que ocurren simultáneamente en  $S'$  serán aquellos que se encuentran sobre rectas paralelas al eje  $x'$  en general. Pero hemos visto que ese eje está inclinado respecto del eje  $x$ , que es la línea de simultaneidad en  $S$ . Luego, eventos que son simultáneos en  $S'$  no lo son en  $S$  y viceversa. La simultaneidad no es un concepto absoluto, depende del sistema de referencia.

Del mismo modo si ponemos  $x' = 0$  en (3.24) estaremos describiendo la trayectoria de  $O'$  tal como se ve desde  $S$ . Y esto es por definición el eje  $t'$ . Así este resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(x - \beta ct) \\ x &= \beta ct. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Evidentemente, los nuevos ejes forman con los originales un ángulo  $\Phi$  tal que  $\tan \Phi = \beta$ . Todo esto se muestra en la Figura 3.7. En esta figura podemos ver también cómo determinar gráficamente las coordenadas de un evento en el sistema  $S'$ , por ejemplo el evento  $B$ . Para determinar  $x'_B$  trazamos a partir de  $B$  una recta paralela al eje  $ct'$  y donde esta corta al eje  $x'$  está la coordenada buscada. Y para determinar  $ct'_B$  trazamos a partir de  $B$  una paralela al eje  $x'$  y donde esta corta al eje  $ct'$  está la coordenada buscada.

- Velocidad límite. En las expresiones 3.24 aparece el factor  $\gamma$  que solo tiene sentido si  $v < c$ , ya que en caso contrario resulta infinito o imaginario. Entonces se impone esta restricción para el movimiento de cualquier partícula o la propagación de cualquier señal. Observe-mos además en la Figura 3.7, que cuando  $v \rightarrow c$  entonces  $\Phi \rightarrow \frac{\pi}{4}$  y los ejes temporales y de espacio se juntan en un mismo eje que coincide con la línea de universo de un rayo de luz (línea negra punteada).

Si consideramos un evento en el origen, los eventos que pueden conectarse con este son aquellos que quedan por encima de la línea de universo de la luz. Porque cualquier cosa o señal que conecte el origen con ellos lo hará con una velocidad menor que  $c$ . La línea de universo de la luz define entonces un cono ( el cono de luz) en el espacio tridimensional y todos los eventos que están dentro de este cono están conectados causalmente con el origen. En la figura 3.7 el evento  $A$  está conectado causalmente con  $B$  pero no con  $C$ . De la propia definición del intervalo entre dos eventos es fácil ver que si están conectados causalmente ( como  $A$  y  $B$ ) es  $S^2 \geq 0$  y si no lo están es  $S^2 < 0$ . Por lo tanto, como el intervalo es un invariante de Lorentz, la condición de estar o no conectados causalmente también lo será.

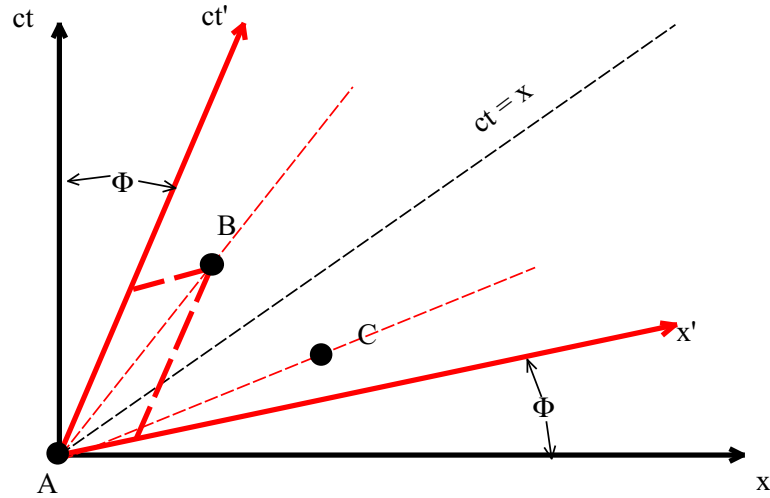


Figure 3.7: Transformación de Lorentz

Otra propiedad importante es la siguiente: si dos eventos no están conectados causalmente, podemos siempre escoger un sistema de referencia donde sucedan simultáneamente. Y por lo tanto también podemos escoger sistemas de referencia donde su ordenamiento temporal se invierte. Es fácil verlo en la figura 3.7. Los eventos  $A$  y  $C$  están ordenados temporalmente de manera que  $t_A < t_C$  ( $t_A = 0$  y  $t_C > 0$ ). Pero si escogemos un sistema de referencia cuyo eje espacial sea la recta que une  $A$  con  $C$ , en ese sistema los eventos son simultáneos ( $t'_A = t'_C = 0$ ). Y si escogemos un sistema de referencia cuyo eje espacial tenga una inclinación mayor que la recta que une  $A$  con  $C$  el orden será al revés en ese sistema ( $t'_A = 0$  y  $t'_C < 0$ ). Pero el orden espacial de los eventos no conectados causalmente no puede cambiarse (es  $x'_C > 0$  en todos los casos. Evidentemente lo mismo podemos decir de eventos conectados causalmente respecto de su orden, intercambiando tiempo y espacio. Si dos eventos están conectados causalmente su orden temporal no puede cambiarse, pero su posición relativa sí.



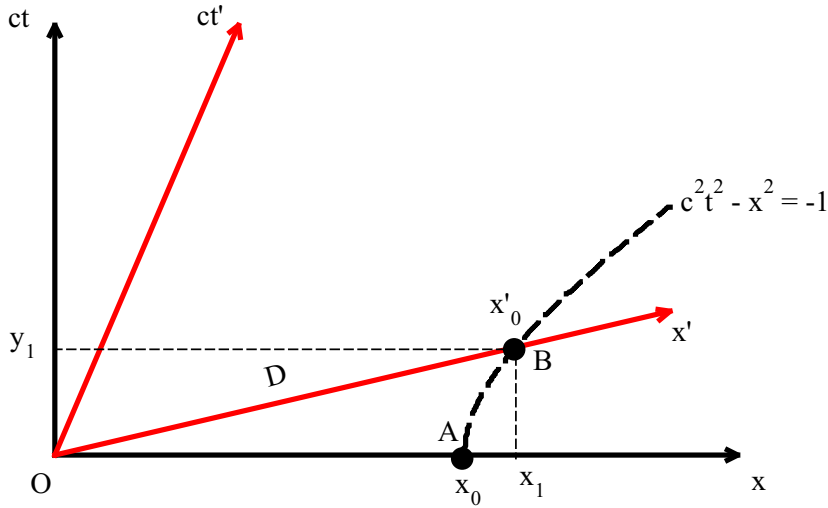


Figure 3.8: Escalas

### 3.2.1 Escalas

Vamos a ver ahora como se modifican las escalas de los ejes espaciales y temporales en una transformación de Lorentz. Consideremos un punto sobre el eje  $x$  del sistema  $S$ ,  $x_0 = 1$ . Este punto representa un evento de coordenadas  $A = (0, 1)$  que tiene un intervalo  $S_A^2 = -1$ . Podemos dibujar entonces la curva que contiene a todos los eventos con intervalo  $-1$ , esta es la curva dada por la ecuación

$$c^2t^2 - x^2 = -1. \quad (3.28)$$

Podemos verla en la figura 3.8.

Consideremos ahora los ejes de un sistema  $S'$  que se mueve con velocidad  $V$  respecto de  $S$ . Veamos la intersección de la curva (3.28) y el eje  $x'$ . Esta es el punto  $x'_0$ , que representa un evento  $B$  y por construcción también tiene intervalo  $S_B'^2 = -1$  y  $ct' = 0$ . Por lo tanto, la coordenada espacial de este evento en  $S'$  también debe ser  $x'_0 = 1$ . Podemos encontrar las coordenadas de  $B$  en el sistema  $S$ . Para ello debemos en la (3.28)  $ct$  por su

valor según la ecuación del eje  $x' ct = \beta x$ . Entonces:

$$\beta^2 x^2 - x^2 = -1.$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} = \gamma; \quad y_1 = \beta\gamma \quad (3.29)$$

Ver Figura 3.8. Entonces  $B = (y_1, x_1)$  y podemos calcular el valor de  $D$  en  $S$ :

$$D = \sqrt{(y_1^2 + x_1^2)}$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}\right)} \quad (3.30)$$

Recordemos que esta distancia  $D$ , calculada en  $S$ , en  $S'$  representa 1. Por lo tanto, a las distancias calculadas en  $S$  tenemos que dividir las por

$$FE = \sqrt{\left(\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}\right)}, \quad (3.31)$$

para obtener cuánto representan en  $S'$ .

Apliquemos esto a la siguiente situación. Tenemos una regla en reposo en el sistema  $S$  de longitud  $l_0$  y queremos determinar su longitud en  $S'$ .

Es importante observar que en  $S'$  la regla está en movimiento. Por eso, para determinar la longitud  $l'_0$  ambos extremos deben ser medidos simultáneamente. El extremo izquierdo se determinó en  $ct' = 0$ . Tenemos que determinar simultáneamente en  $S'$  la posición del extremo derecho. Para ello debemos buscar la intersección de la línea de universo del extremo derecho con el eje  $x'$ , que marca la simultaneidad con el evento del origen en  $S'$ . Esa intersección es el evento de coordenadas  $(y_1, x_1)$ , donde  $x_1 = l_0$  y entonces  $y_1 = \beta l_0$  (ver fig. 3.9).

Por lo tanto la distancia  $OA$  será:

$$OA = \sqrt{(y_1^2 + x_1^2)}$$

$$OA = l_0 \sqrt{(1 + \beta^2)}. \quad (3.32)$$

Si queremos saber cuánto representa este valor en  $S'$  (o sea cuánto vale  $l'_0$ ) debemos dividirlo por  $FE$  de (3.31). Así obtenemos:

$$l'_0 = l_0 \sqrt{(1 - \beta^2)}$$

$$i'_0 = \frac{l_0}{\gamma} \quad (3.33)$$

O sea, en el sistema en el cual la regla está en movimiento su longitud es menor. Observamos a los objetos en movimiento contraídos en la dirección del movimiento. Podríamos obtener el mismo resultado analíticamente. Para ello debemos usar la transformación de Lorentz que nos lleva desde  $S'$  (donde la determinación de los extremos de la regla debe ser simultánea) a  $S$ . Para ello en (3.24) debemos intercambiar  $(ct, x)$  con  $(ct', x')$  y cambiar

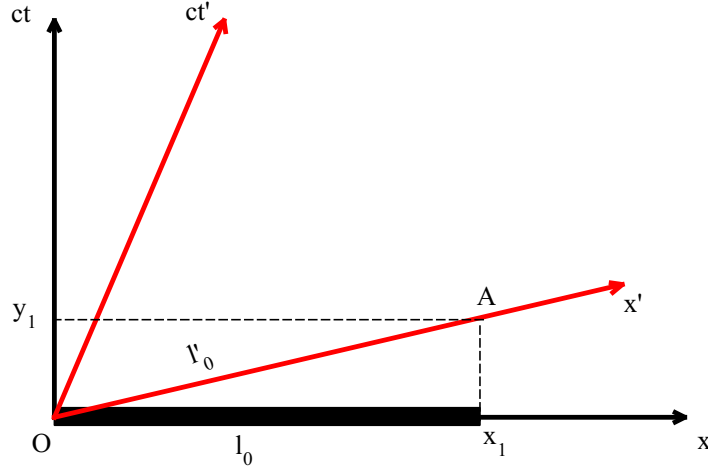


Figure 3.9: Contracción de la longitud

$V$  por  $-V$ . Si llamamos  $x'_1$  y  $x'_2$  a los extremos de la regla en  $S'$  determinados ambos en  $t'$  entonces tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma(x'_1 + \beta ct') \\ x_2 &= \gamma(x'_2 + \beta ct') \\ x_2 - x_1 &= \gamma(x'_2 - x'_1) \\ l_0 &= l'_0 \gamma \end{aligned} \quad (3.34)$$

Notar que  $x_1$  y  $x_2$  son las coordenadas espaciales de eventos que ocurren en los extremos de la regla a tiempos  $t$  diferentes en el sistema  $S$ . Pero igual su diferencia es la longitud de la regla  $l_0$  puesto que esta está en reposo en el sistema  $S$ .

Lo mismo que hemos hecho sobre el eje espacial podemos hacerlo sobre el eje temporal. También hay un factor de escala que aplicar para transformar los tiempos determinados en  $S$  a  $S'$ , que es igual al que ya determinamos para el eje  $x$  ( el procedimiento es el mismo, pueden hacerlo ustedes). Apliquemos eso a la siguiente situación. Al cabo de un intervalo tiempo  $t_1$  medido en el laboratorio, el origen de  $S'$  se ha desplazado hasta la posición  $x_1$  ( ver figura 3.10).

La línea de universo del origen  $O'$  en  $S$  es el eje  $ct'$ . ¿Cuánto es el tiempo que ha transcurrido en un reloj que está siempre en el origen de  $S'$ ? O sea,

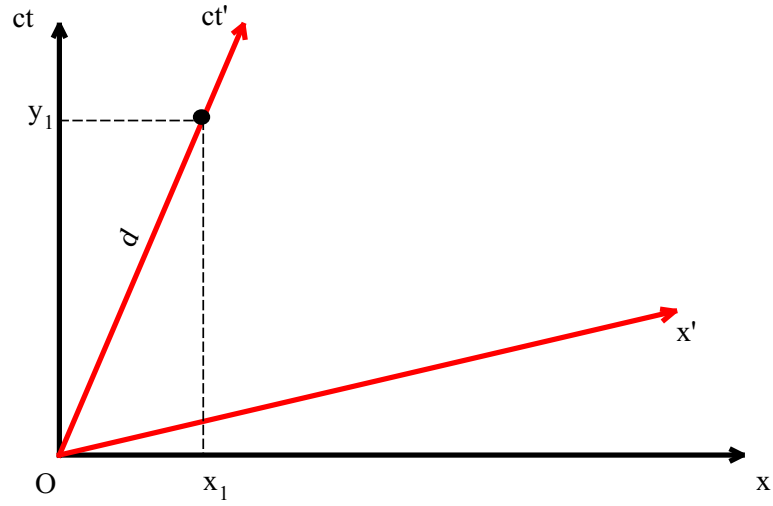


Figure 3.10: Dilatación temporal

un reloj que viaja en  $S$  junto con  $O'$ . Eso equivale a determinar la cantidad  $d$  en  $S$  y aplicarle el factor de escala correspondiente. Entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta y_1 = \beta c t_1 \\ d &= \sqrt{(y_1^2 + x_1^2)} \\ d &= c t_1 \sqrt{(1 + \beta^2)}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Para obtener lo que representa  $d$  en  $S'$  debemos aplicar el factor de escala (3.31). Entonces

$$\begin{aligned} c t'_1 &= \frac{d}{FE} \\ c t'_1 &= \frac{c t_1}{\gamma} \\ \gamma t'_1 &= t_1. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Veamos que nos dice esta relación.  $t'_1$  es el tiempo transcurrido entre dos eventos que suceden en el mismo lugar del sistema  $S'$  (en este caso, el origen  $O'$ ). Llamamos a este intervalo *tiempo propio*.  $t_1$  en tanto es el tiempo

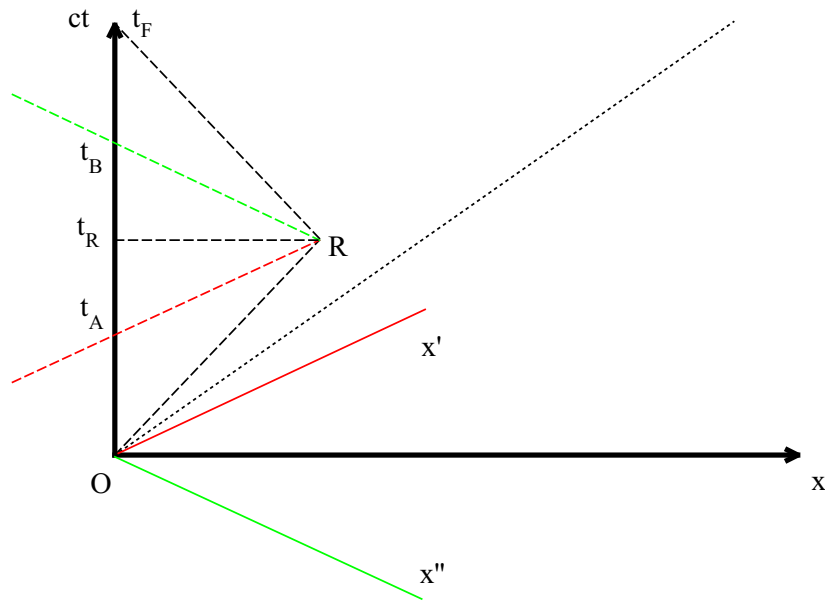


Figure 3.11: Paradoja de los gemelos

determinado en  $S$ , donde esos mismos eventos ya no suceden en el mismo lugar (uno corresponde a  $x = 0$  y el otro a  $x = x_1$ ). Esto se conoce como *dilatación temporal*, porque el lapso de tiempo transcurrido es menor para el viajero en  $S'$  que para el que permanece en el sistema  $S$ .

Esta relación se utiliza para presentar la famosa 'paradoja de los gemelos'. Uno de los hermanos gemelos realiza un viaje. Para el gemelo que quedó en la tierra el tiempo transcurre más lentamente para su hermano, de manera que sostiene que al volver estará más joven. Pero el gemelo viajero puede decir que quien viaja es su hermano ( recordemos que el movimiento uniforme es relativo, no absoluto) y que entonces al re-encontrarse lo verá más joven. La paradoja se plantea con esta contradicción. En realidad no hay tal problema, porque solo hay un viajero, que es quien en algún momento debe acelerarse para invertir su movimiento y volver. Podemos imaginar que esto ocurre en un instante, cuando el viajero se pasa de un sistema con velocidad  $V$  a otro con  $-V$ . Esto se ve en la figura 3.11. El gemelo viajero retorna en el punto  $R$ . Hasta ese momento está en el sistema  $S'$ , cuyo eje espacial es la línea roja continua. Si queremos saber cuanto tiempo ha transcurrido en ese momento para el gemelo que quedó en la Tierra, según el viajero, tenemos que trazar una paralela al eje spa-

cial  $x'$  hasta cortar al eje  $ct$  de  $S$  ( recordar que  $x'$  es la línea de simultaneidad en  $S'$ ). Esto ocurre en el punto  $t_A$ . Por supuesto, el gemelo que quedó en tierra afirma también que  $t_A$  es en realidad el tiempo que ha transcurrido para el viajero ( y  $t_A = \frac{t_B}{\gamma}$ ). Y ambos tienen razón.

En ese instante el viajero se cambia a un sistema de referencia  $S''$  con velocidad  $-V$  respecto de  $S$ . El eje espacial de  $S''$  está dibujado con línea continua verde. Una vez en este nuevo sistema de referencia, si queremos saber cual evento es simultáneo en  $S''$  tenemos que trazar una paralela a la línea verde hasta cortar  $ct$ , y eso ocurre en  $t_B$ . A partir de entonces el gemelo viajero sigue su viaje de retorno en  $S''$ , llegando a la tierra en  $t_f$ . Sin embargo, este proceso de invertir su movimiento ha tomado, para el gemelo que está en la tierra un tiempo  $t_B - t_A$ . Por lo tanto, para calcular el tiempo que ha transcurrido para su gemelo en la tierra, el gemelo viajero debe sumar  $t_A + t_B - t_A + t_f - t_B = t_f$ . En tanto que el gemelo que quedó en la tierra, para calcular el tiempo que ha transcurrido para el viajero debe sumar solamente  $t_A + t_f - t_B = 2t_A < t_f$ .

En general, cuando describimos una trayectoria acelerada como puede ser la representada en la figura 3.12 pensamos que en cada momento el viajero se encuentra instantáneamente en reposo en el origen de un sistema de referencia inercial  $S'$  que en ese momento tiene la misma velocidad que el viajero. Entonces allí computamos el diferencial de tiempo que transcurre para el viajero, que será un diferencial de tiempo propio  $d\tau$  pues transcurre en el origen de  $S'$ . Entonces:

$$c^2 d\tau^2 = dS^2, \quad (3.37)$$

donde  $dS^2$  es el intervalo que conecta esos dos eventos que suceden en el origen de  $S'$ . Este intervalo también podemos escribirlo en las coordenadas de  $S$ , entonces:

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \\ d\tau &= dt \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \\ \tau &= \int_0^{t_F} dt \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

La ecuación (3.38) nos muestra que el tiempo propio del viajero es siempre menor que el tiempo que transcurre en tierra.

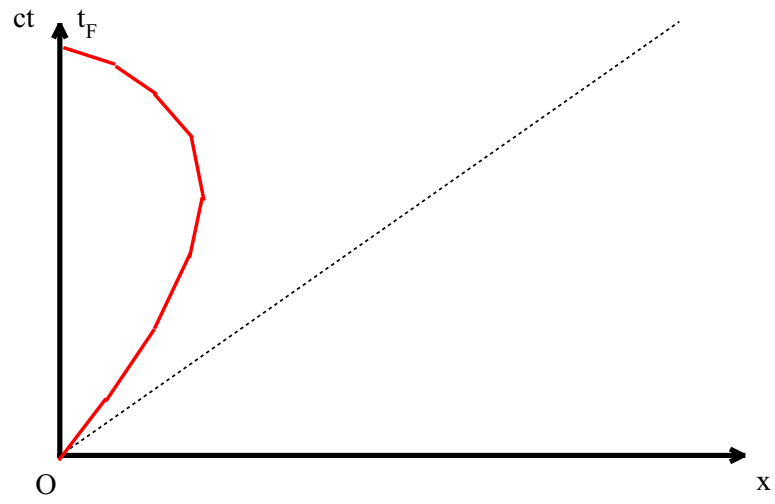


Figure 3.12: Trayectorias aceleradas