Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

Grado en Física
Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal

Electromagnetismo II

Práctica 2.- Transformación Lorentz de los campos eléctrico y magnéticos

1.- Ecuaciones de transformación de los campos para un "boost" en el eje x

Estamos interesados en obtener las ecuaciones de transformación de los campos para un sistema de referencia, S', que se mueve con velocidad v en la dirección del eje x respecto de otro sistema de referencia S. Figura 1.

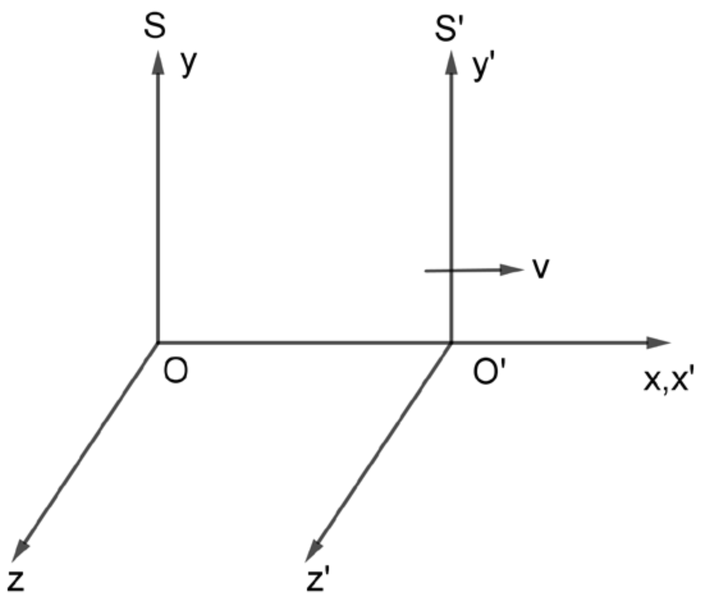

Figura 1."Boost" en la dirección del eje x.

El tensor campo electromagnético $F^{\mu\nu}$, está dado por:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

La transformación de un tensor de orden dos como consecuencia de un "boost" en el eje x viene dada por:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}F^{\alpha\beta}$$

Que matricialmente queda:

$$F' = \Lambda F \Lambda^{\mathrm{T}}$$

Donde la matriz de transformación Λ viene dada a través de:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siendo β = v/c y γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

De manera que F' se puede obtener realizando el siguiente producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -\gamma(E_y/c - \beta B_z) & -\gamma(E_z/c + \beta B_y) \\ E_x/c & 0 & \gamma(\beta E_y/c - B_z) & \gamma(\beta E_z/c + B_y) \\ \gamma(E_y/c - \beta B_z) & -\gamma(\beta E_y/c - B_z) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z/c + \beta B_y) & -\gamma(\beta E_z/c + B_y) & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que las transformaciones de Lorentz de los campos E y B para un "boost" con velocidad v en el eje x vienen dadas por:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) & B'_y &= \gamma(B_y + vE_z/c^2) \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) & B'_z &= \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{aligned} \qquad (1)$$

2.- Simulación de líneas de campo utilizando Python

Se simulará ahora el campo eléctrico creado por una carga en reposo q. Se supondrá en la simulación que la carga se encuentra en el origen de coordenadas y se calculará el campo eléctrico en el plano yz. El código en Python, comentado, es el siguiente:

```
"""Primeramente importamos las librerías necesarias"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Circle


"""Definimos las función campo eléctrico"""
def E(q, r0, y,z):
    """Devuelve el campo electrico vector E=(Ey,Ez) debido a una carga q en r0."""
    den = np.hypot(y-r0[0], z-r0[1])**3
    return q * (y - r0[0]) / den, q * (z - r0[1]) / den


"""Creamos un mallado de  puntos"""
ny, nz = 64, 64
y = np.linspace(-2, 2, ny)
z = np.linspace(-2,2,nz)
Y, Z = np.meshgrid(y, z)
q = 1 # Le damos un valor unidad a la carga
"""Hallamos el campo eléctrico"""
# Vector de campo eléctrico, E=(Ex, Ey), como componentes separadas
Ey, Ez = np.zeros((ny, nz)), np.zeros((ny, nz))
r0=np.array([0,0])
Ey, Ez = E(q, r0,y=Y, z=Z)


"""Dibujamos el campo eléctrico"""
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
color = 2 * np.log(np.hypot(Ey, Ez))
ax.streamplot(y, z, Ey, Ez, color=color, linewidth=1, cmap=plt.cm.hot,
            density=2, arrowstyle='->', arrowsize=1.5)

ax.add_artist(Circle((0,0), 0.05, color='#0000aa'))
```

```
ax.set_xlabel('$y$')
ax.set_ylabel('$z$')
ax.set_xlim(-2,2)
ax.set_ylim(-2,2)
ax.set_aspect('equal')
```

El resultado de la ejecución del código anterior es la siguiente figura:

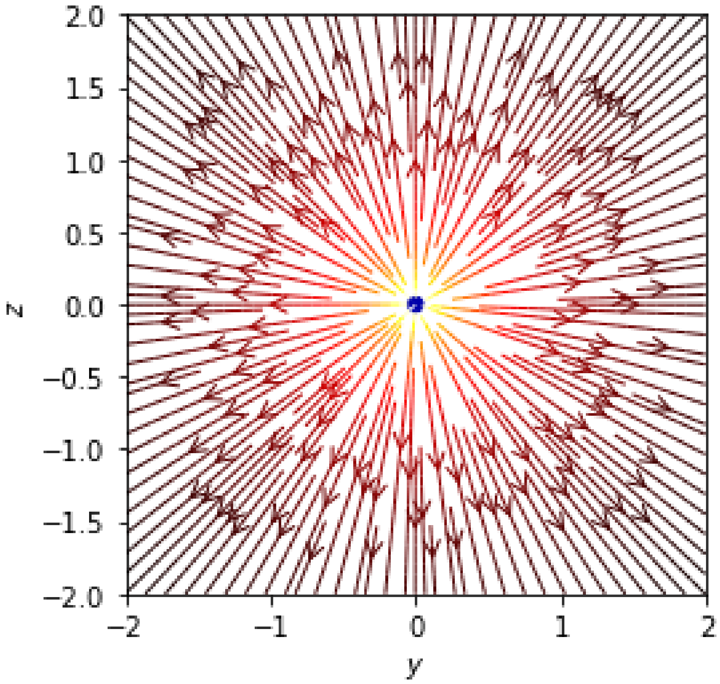

Figura 2.Líneas de campo eléctrico creadas por una carga puntual.

Prácticas a realizar por el alumno

Práctica 1. Se simulará ahora el campo eléctrico y el campo magnético creados por una carga en movimiento con velocidad uniforme en el eje x como se muestra en la figura 3.

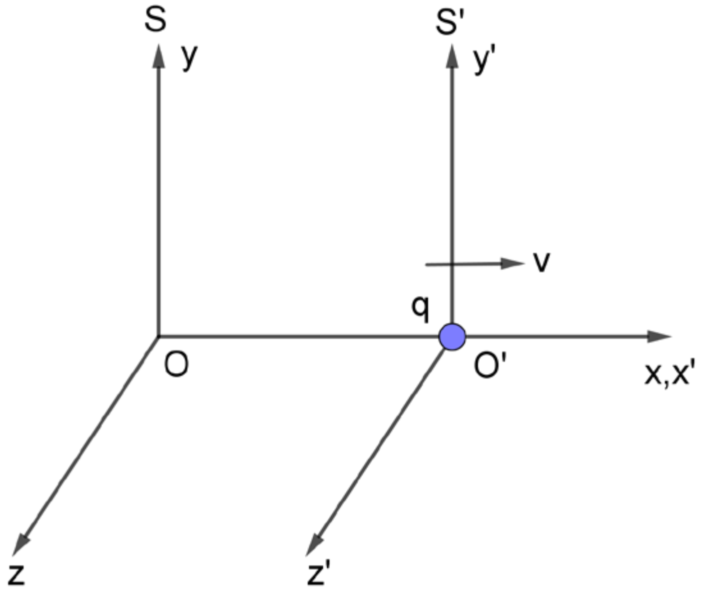

Figura 3. Carga en movimiento.

Para ello se utilizarán las ecuaciones de transformación dadas en la sección 1. Nótese que se pretende calcular el campo eléctrico y magnético en el sistema en reposo, S, conocido el campo eléctrico en el sistema S', es decir se utilizarán las inversas de las transformaciones de la ecuación (1), lo que se consigue sustituyendo v por (-v). En los cálculos suponed $c = 1$, $x = 0$, $t = 0$ y $\beta = 1/10$. Realizar dos figuras similares a la figura 2, una para el campo eléctrico y otra para el campo magnético.

Práctica 2. Realizar una simulación similar al de la práctica 1 para un dipolo eléctrico. Tomad los valores ($q_1 = 1$, $y_1 = 1/2$, $z_1 = 1/2$). ($q_2 = -1$,$y_2 = -1/2$,$z_2 = -1/2$).