MAEDO. TEMA 2.

1. Teoremas Fundamentales

1.1. Existencia y unicidad de soluciones.

Ejemplo 1.1. *Consideremos la* **edo** $y^2 + x^2y' = 0$. *Ahora observamos lo siguiente*

I. *Si buscamos soluciones tales que* $y(0) = 0$ *tenemos infinitas.*
II. *Si buscamos soluciones tales que* $y(0) = b \neq 0$ *no tenemos soluciones.*
III. *Si buscamos soluciones tales que* $y(a) = b$ *con* $ab \neq 0$ *entonces tenemos una única solución.*

Definición 1.2 (equicontinuidad)**.** *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones reales definidas en un intervalo* $I \subset \mathbb{R}$. *Diremos que la sucesión* $(f_n)_n$ *es*

I. *Equicontinua en* $x_0 \in I$ *si*
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ si\ x \in I : |x - x_0| < \delta \to |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon \quad \forall n \geq 1.$$
II. *Equicontinua en* I, *si es equicontinua en* x *para todo* x *de* I.
III. *Uniformemente equicontinua en* I *si*
$$Dado\ \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ si\ x, y \in I : |x - y| < \delta \to |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon \quad \forall n \geq 1.$$

Nota 1.3. *Si una sucesión es equicontinua en un punto* x *entonces cada función de la sucesión es continua en* x.

Ejemplos 1.4. *A continuación mostramos unos ejemplos para fijar ideas.*

I. *Cualquier conjunto finito de funciones continuas en* I *es equicontinua en* I.
II. *La sucesión de funciones* $\left(\frac{x}{n}\right)_n$ *es equicontinua en* $\mathbb{R}$.
III. *La sucesión de funciones* $(nx)_n$ *no es equicontinua en ningún punto de* $\mathbb{R}$.

Proposición 1.5. *Toda sucesión de funciones* $(f_n)_n$ *equicontinua en un compacto* K *es uniformemente equicontinua en* K.

Definición 1.6 (Convergencia puntual)**.** *Se dice que la sucesión de funciones reales* $(f_n)_n$ *converge puntualmente a* f *en* $I \subset \mathbb{R}$ *si*
$$\forall x \in I \ y\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_{x,\epsilon} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_{x\epsilon},$$
o equivalntemente cuando para cada $x \in I$ *la sucesión numérica* $(f_n(x))_n$ *converge a* $f(x)$.

Ejemplos 1.7. *Aunque esto ya lo trabajamos en AUVRII.*

I. *Definimos para cada* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$ *con* $x \in I$. *La sucesión* $(f_n)_n$ *converge puntualmente a* $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases}$

II. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ *converge en todo* $\mathbb{R}$ *a* e^x.

Definición 1.8 (denso). *Sean* $I \subset J \subset \mathbb{R}$, *se dice que* I *es denso en* $\mathbb{R}$ *si*

$$\forall x \in J \text{ existe } \delta > 0 : (x-\delta, x+\delta) \cup I \neq \emptyset.$$

Ejemplos 1.9. *Algunos de estos son conocidos gracias a AUVRI.*

I. $\mathbb{Q}$ *es denso en* $\mathbb{R}$
II. $\mathbb{I}$ *es denso en* $\mathbb{R}$.
III. $P = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{R}\}$ *es denso en* $\mathbb{R}$.

Proposición 1.10 (equicontinua + puntual en denso implica puntual). *Si la sucesión de funciones* $(f_n)_n$ *es equicontinua en* J *y converge puntualmente en* $I \subset J$, *con* I *denso en* J *entonces* $(f_n)_n$ *converge puntualmente en* J.

Proposición 1.11 (equicontinua + puntual implica continua). *Si la sucesión de funciones* $(f_n)_n$ *es equicontinua en* I *y converge puntualmente a* f *en* I, *entonces* f *es continua en* I.

Definición 1.12 (convergencia uniforme). *Se dice que la sucesión de funciones* $(f_n)_n$ *converge uniformemente en* I *a* $f : I \to \mathbb{R}$ *si*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon, \forall x \in I,$$

o equivalentemente

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \; \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

Ejemplos 1.13. *Ya los vimos en AUVRII.*

I. $f_n(x) = \frac{n-1}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, *converge uniformemente a* $f(x) = 1$, *en* $\mathbb{R}$.
II. $f_n(x) = x^n$ *no converge uniformemente en* $I = [0, 1]$.

Proposición 1.14 (uniforme implica puntual). *Si una sucesión de funciones converge uniformemente a* f *en* $I \subset \mathbb{R}$ *entonces converge puntualmente a* f *en* I.

Prueba. TRIVIAL ∎

Definición 1.15 (Uniforme de Cauchy). *La sucesión de funciones* $(f_n)_n$ *es uniformemente de Cauchy en* I *si*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \; \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in I\} < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon.$$

Proposición 1.16. *[uniforme sii Cauchy] Una sucesión de funciones* $(f_n)_n$ *es uniformemente convergente en* $I = [a, b]$ *si y sólo si es uniformemente de Cacuhy en* $I = [a, b]$.

Proposición 1.17. *[equicontinua + puntual implica uniforme] Si la sucesión de funciones* $(f_n)_n$ *es equicontinua en* $I = [a, b]$ *y converge puntualmente a* f *en* I, *entonces converge uniformemente a* f *en* I.

Ejemplo 1.18. *La sucesión x^n no es equicontinua en $[0,1]$ porque converge puntualmente y no uniformemente. Si fuera equicontinua usando la proposición 1.17 obtendríamos que es uniformemente convergente.*

Definición 1.19 (Uniformemente acotada)**.** *Una sucesión de funciones $(f_n)_n$, se dice uniformemente acotada en I si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq K, \quad \forall x \in I, \quad , n \geq 1.$$

Teorema 1.20. *[Ascoli-Arcela] Toda sucesión de funciones equicontinua y uniformemente acotada en I, admite una subsucesión uniformemente convergente a una función continua en I.*

Es interesante observar la equivalencia entre la versión dada de PVI y su versión integral, mucho más manejable en algunas ocasiones. Si tenemos un PVI

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = f(x,y); \\ y(x_0) = y_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

y obtenemos $y(x)$ una solución de (1) entonces observamos que $y'(x) = f(x, y(x))$ y si integramos entre x_0 y x obtemos que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \tag{2}$$

Mientras que por otro lado si tenemos $y(x)$ verificando (2) entonces $y(x)$ es solución del problema (1). De esta manera tenemos que buscar soluciones $y(x)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de x_0 de (1) es equivalente a buscar una función continua en el entorno de x_0 que verifique (2).

Teorema de Cauchy-Peano

Teorema 1.21 (`El Teorema de Cauchy-Peano`)**.** *Sea $f(x,y) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un entorno D del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Entonces existe un intervalo cerrado $[x_0 - r, x_0 + r]$ centrado en x_0, una función $y(x)$ definida en él y con gráfica contenida en D, de manera que*

- $y(x_0) = y_0$.
- *y es derivable en $[x_0 - r, x_0 + r]$.*
- $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

Si además el rectángulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - x_0| \leq a \quad |y - y_0| \leq b\}$ está contenido en D y definimos $M = \max\{|f(x,y)| : \ (x,y) \in R\}$, entonces se puede tomar

$$r = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Ejemplo 1.22. *Estudiar la existencia de los siguientes problemas de valor inicial.*

I. $\left\{ \begin{array}{c} y' = y^2 + x^2; \\ y(0) = 1, \end{array} \right.$

II. $\begin{cases} y' = 3y^{2/3}; \\ y(0) = 0, \end{cases}$

Definición 1.23. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y $f(t, y)$ una función definida en D con valores en $\mathbb{R}^2$. Se dice que f es Lipschitz respecto de la variable y si existe una constante $L \geq 0$ tal que si*

$$(t, y_1), (t, y_2) \in D \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

La constante L recibe el nombre de constante de Lipschitz.

Ejemplos 1.24. *Sea $f(t, y) = y^2$ definida en la banda $D = \{(x, y) \in R^2 : |y| < 3\}$. f es Lipschitz en D respecto de y con constante 6. (Si cambiamos el 3?).*
¿Y Si ponemos ahora $D = \mathbb{R}^2$?

Ejemplo 1.25. *Sea D cualquier entorno del punto $(t_0, 0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. La función $f(t, y) = y^{2/3}$ no es Lipschitz en D.*

Proposición 1.26. *Sea D un abierto de $\mathbb{R}^2$, convexo respecto de Y (el segmento $[(t, y_1), (t, y_2)]$ está incuido en D). Supongamos que $f : D \to \mathbb{R}^2$ admite derivada parcial continua $\frac{\partial f}{\partial y}$ en D y es acotada. En ests condiciones f es Lipschitz en D respecto de y.*

Definición 1.27. *Se dice que $f : D \to \mathbb{R}^2$ es localmente lipschitz respecto de y en D si para todo punto $(t_0, y) \in D$ existe un entorno U de (t_0, y) donde f es Lipschitz respecto de la variable y*

Los ejemplos anteriores nos ayudan con esta nueva definición, la función y^2 es localmente lipschitz , basta tomar en cada punto una banda como la del ejemplo, mientras que la función $y^{2/3}$ no es localmente lipschitz respecto de y en los puntos (t_0, y) por lo que en los dominios que contengan puntos de esta forma no podrá ser localmente lipschitz respecto de y.
A continuación vamos a ver dos versiones del conocido Lema de Gronwall, la que necesitaremos inmediatamente es la segunda versión, (corolario XX). Esta desigualdad nos permite sustituir una icecuación integral por la acotación de la solución. Esta inecuación integral suele aparecer al emplear la forma integral (2) del problema de Cauchy (1).

Proposición 1.28. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y supongamos que $f : D \to \mathbb{R}$ admite derivada parcial continua con respecto a y. Entonces f es localmente Lipschitz respecto de y en D.*

Lema 1.29 (`El lema de Gronwall`). *Sean f, g, h tres funciones reales continuas en $[a, b]$ con h no negativa. Supongamos que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(s)f(s)ds.$$

Entonces se verifica para todo $t \in [a, b]$,

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t g(s)h(s) \exp\left(\int_s^t h(r)dr\right) ds.$$

Nota 1.30. *En el caso de que las funciones estén defindas en* $[b,a]$ *y*

$$f(t) \leq g(t) + \int_t^a h(s)f(s)ds, \quad t \in [b,a],$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_t^a g(s)h(s)\exp\left(\int_t^s h(r)dr\right)ds.$$

Y la prueba se realiza con un argumento similar al anterior.

Corolario 1.31. *Sean* f *y* h *dos funciones reales continuas en* $[a,b]$, *con* $h(t) \geq 0$ *y tal que*

$$f(t) \leq c + \int_a^t h(s)f(s)ds, \text{ para cierta constante real } c.$$

Entonces

$$f(t) \leq c\exp(\left(\int_a^t h(s)ds\right).$$

Corolario 1.32. *Sea* f *una función real, continua y positiva en* $[a,b]$, *tal que para todo* $t \in [a,b]$ *se verifica que*

$$f(t) \leq L\int_a^t f(s)ds \text{ para cierta constante real no negativa } L.$$

Entonces f *es identicamente nula.*

$$f(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b].$$

Teorema de Picard-Lindelof

Teorema 1.33 (`El Teorema de Picard-Lindelof`)**.** *Sea* $f(x,y) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función continua y localmente Lipschitz en un entorno* D *del punto* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Entonces existe un intervalo cerrado* $[x_0 - r, x_0 + r]$ *centrado en* x_0, *una función* $y(x)$ *definida en él y con gráfica contenida en* D, *de manera que*

- $y(x_0) = y_0$.
- y *es derivable en* $[x_0 - r, x_0 + r]$.
- $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

Si además el rectángulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - x_0| \leq a \quad |y - y_0| \leq b\}$ *está contenido en* D *y definimos* $M = \max\{|f(x,y)| : \ (x,y) \in R\}$, *entonces se puede tomar*

$$r = \min\{a, \frac{b}{M}\}.$$

Además si $z(x)$ *es otra solución del Problema de valor inicial (o de Cauchy) entonces coincide con* $y(x)$ *en el intervalo donde estén ambas definidas.*

Nota 1.34. *Es importante resaltar que en ambos teoremas, de existencia y unicidad sólo se tiene una implicación por lo que será interesante observar que existan funciones que no son continuas y a pesar de eso algún Problema de valor inicial tenga alguna solución y lo mismo caso con el Teorema de Picard, será interesante buscar algún contraejemplo que demuestre que el recíproco no es cierto.*

Antes de pasar a los ejemplos de existencia y unicidad queremos mostrar algunos ejemplos de las iteradas de Picard.

Ejemplo 1.35. *Estudiar la existencia y unicidad y dar las cuatro primeras iteradas de Picard del PVI* $\left\{\begin{array}{c} y' = y; \\ y(0) = 1, \end{array}\right.$

Ejemplo 1.36. *Estudiar la existencia y unicidad y dar las tres primeras iteradas de Picard del PVI* $\left\{\begin{array}{c} y' = x^2 + y^2; \\ y(0) = 1, \end{array}\right.$

Ejemplo 1.37. *. Estudiar la existencia y unicidad y dar las tres primeras iteradas de Picard del PVI* $\left\{\begin{array}{c} y' = 3y^{2/3}; \\ y(0) = 0, \end{array}\right.$
Repetir las iteradas para la condición inicial $y(0) = 1$.

Ahora pasamos a enunciar un corolario de mucha utilidad para los casos sencillos y los ejemplos prometidos.

Corolario 1.38. `VIP, Antiguo Corolario 24`. *Sea* $D \subset \mathbb{R}^2$ *un abierto,* (t_0, y_0) *un punto de* D *y* f *una función real y continua en* D*. Existe* $r > 0$ *tal que el Problema de Valor Inicial*

$$\left\{\begin{array}{c} y' = f(t,y); \\ y(t_0) = y_0, \end{array}\right. \tag{3}$$

tiene solución definida en $[t_0 - r, t_0 + r]$*. Si además existe y es continua* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *en* (t_0, y_0) *entonces existe* $0 < r' \leq r$ *: el problema de Cauchy* (3) *tiene una única solución en* $[x_0 - r', x_0 + r']$*.*

Ejemplos 1.39. *Estudiar la existencia y unicidad de soluciones, así como el dominio de la solución de los PVI*

I. $\left\{\begin{array}{c} y' = y; \\ y(t_0) = y_0, \end{array}\right.$

II. $\left\{\begin{array}{c} y' = 2\sqrt{y}; \\ y(t_0) = y_0 > 0, \end{array}\right.$

III. $\left\{\begin{array}{c} y' = 2\sqrt{y}; \\ y(0) = 0, \end{array}\right.$

IV. $\left\{\begin{array}{c} y' = y^2; \\ y(0) = 1, \end{array}\right.$

V. $\begin{cases} y' = \frac{-y^2}{x^2}; \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$

VI. $\begin{cases} y' = \frac{2y}{x}; \\ y(-1) = 1, \end{cases}$

Ejemplo 1.40 (Unicidad sin localmente lipschitz). *Sea* $f(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \text{ ó } y \leq 0; \\ \frac{-2y}{x} & si \quad 0 < y \leq x^2; \\ -2x & si \quad 0 < x^2 \leq y; \end{cases}$

I. f *es localmente Lipschitz respecto de* y *en todo* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

II. *El PVI* $\begin{cases} y' = f(x,y); \\ y(0) = 0, \end{cases}$ *tiene como única solución* $y = 0$.

Definición 1.41 (`Aplicación Contractiva`). *Sea* (X,d) *un esapcio métrico y* $f : (x,d) \to (X,d)$ *una aplicación. Se dice que* f *es contractiva si existe* $K \in (0,1)$ *tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq K d(x,y)^a quad \forall (x,y) \in X.$$

Ejemplo 1.42. *La funión* $f(x) = \frac{1}{3}x$ *es una aplicación contractiva.*

Teorema 1.43 (`El teorema del Punto fijo`). *Toda aplicación contractiva,*f*, definida en el espacio métrico completo* (X,d) *verifica que existe un único punto* $x_0 \in X$ *tal que* $f(x_0) = x_0$.

Nota 1.44 (`Prueba del Teorema de Picard-Lindelof usando el teorema del Punto fijo.`).

2. Existencia y Unicidad Sistemas

3. Dependencia de las condiciones iniciales y derivabilidad respecto de las condiciones iniciales.

Lema 3.1. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y conexo. Sea (a, b) un punto de D y $f(x, y)$ una función continua y localmente Lispchitz (respecto de y) en (a, b). Entonces existe $\alpha > 0$ y un rectçangulo $T \subset D$, que contiene al punto (a, b) de forma que si tomamos un punto $(x_0, y_0) \in T$, el problema*

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

tiene una única solución $y_0(x)$ definida en $[a - \alpha, a + \alpha]$.

Teorema 3.2. *En el contexto del lema 3.1, fijados dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) del rectángulo T, las soluciones verifican*

$$|y_0(x) - y_1(x)| \leq (|y_1 - y_0| + M|x_1 - x_0|)e^{k|x-x_0|}, \quad \forall x \in [a - \alpha, a + \alpha].$$

Teorema 3.3. *En el contexto del lema 3.1, la solución $y_0(x)$ es una función continua en el ortoedro $[a - \alpha, a + \alpha] \times T$.*

Teorema 3.4. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto y conexo, (x_0, y_0) un punto de D y $f(x, y)$ y $g(x, y)$ dos funciones continuas en D. Si g es localmente Lipschitz (en la variable y) en (x_0, y_0) de constante K entonces existe $\delta > 0$ y un rectángulo $R \subset D$ verificando que si*

$$|f(x, y) - g(x, y)| \leq \epsilon \quad \forall (x, y) \in R, \text{ entonces}$$

$$|y(x) - z(x)| \leq \frac{\epsilon}{K}\left(e^{K|x-x_0|} - 1\right) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

siendo $y(x)$ y $z(x)$ las respectivas soluciones de

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = g(x, y); \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

Teorema 3.5. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto y conexo, y $f(x, y, \lambda)$ una función continua en $D \times [a, b]$. Supongamos que para $(x_0, y_0) \in D$ existe un entorno $U \subset D$ tal que*

$$|f(x, y_1, \lambda_1) - f(x, y_2, \lambda_2)| \leq k(|y_1 - y_2| + |\lambda_1 - \lambda_2|), \quad \forall (x, y_1, \lambda_1), (x, y_2, \lambda_2) \in U \times [a, b].$$

Entonces existe $\lambda > 0$ tal que si $y(x, \lambda_1)$ e $y(x, \lambda_2)$ son, respectivamente, soluciones de

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \lambda_1); \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = f(x, y, \lambda_2); \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

entonces

$$|y(x, \lambda_1) - y(x, \lambda_2)| \leq |\lambda_1 - \lambda_2|\left(e^{K|x-x_0|} - 1\right)$$

Teorema 3.6. *Si en lema 3.1, cambiamos la condición de Lipschitz por la que exista la derivada parcial de f respecto de la segunda variable siendo además continua, entonces se puede afirmar que la solución $y_0(x) = y(x, x_0, y_0)$, con $(x, x_0, y_0) \in [a - \alpha, a + \alpha] \times T$, admite derivada respecto de y_0 verificando*

$$\frac{\partial}{\partial y_0}(x; x_0, y_0) = e^{\int_{x_0}^{x} f_y(t, y_0(t))dt}.$$

Teorema 3.7. *Si en lema 3.1, cambiamos la condición de Lipschitz por la que exista la derivada parcial de f respecto de la segunda variable siendo además continua, entonces se puede afirmar que la solución $y_0(x) = y(x, x_0, y_0)$, con $(x, x_0, y_0) \in [a - \alpha, a + \alpha] \times T$, admite derivada respecto de x_0 verificando*

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(x; x_0, y_0) = -f(x_0, y_0)e^{\int_{x_0}^{x} f_y(t, y_0(t))dt}.$$

4. Prolongación de soluciones

- Los Teoremas de Peano y Picard nos garantiza existncia en unentorno del punto donde estamos trabajando y nos indica un radio para el dominio de la solución.
- Veamos un ejemplo. Sea $\left.\begin{array}{c} y' = y^2 \\ y(1) = -1, \end{array}\right\}$, como $f(x,y) = y^2$ es una función continua en $\mathbb{R}^2$, y como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ también lo es y en particular en el punto $(1,-1)$ lo son las dos funciones, podemos asegurar gracias al Teorema de Peano y al Corolario 24 la existencia y unicidad de solución definida en un torno del punto 1, $[1-r, 1+r]$ donde $r = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Definición 4.1. *Consideremos f una función continua en el abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ y la ecuación*

$$y' = f(x,y), (x,y) \in D \tag{4}$$

1. *Diremos que (x_0, y_0) es un punto de unicidad global de (4) si existe una única solución maximal con $y(x_0) = y_0$.*
2. *Diremos que (x_0, y_0) es un punto de unicidad local de (4) si existe $r > 0$ tal que cualesquiera dos soluciones verificando $y(x_0) = y_0$ y definidas en $[x_0 - r, x_0 + r]$ coinciden.*
3. *Diremos que (x_0, y_0) es un punto singular de (4) si no es de unicidad local de (4).*

Ejemplo 4.2. *Dada la ecuación $y' = y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ obtenemos que todos los puntos del plano son de unicidad global porque $f(x,y) = y^2$ verifica el corolario 24 en todo $\mathbb{R}^2$.*

Ejemplo 4.3. *Sea $y' = 3y^{2/3}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

- *Los puntos de la forma $(x_0, 0)$ son puntos singulares ya que $y(x) = 0$ e $y(x) = (x - x_0)^3$ son dos soluciones verificando $y(x_0) = 0$.*
- *Los puntos de la forma (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$ son todos de unicidad local ya que la única solución $y(x) = (x - x_0 + y_0^{1/3})^3$ verifica que para $x = x_0 - y_0^{1/3}$ la solución corta a la solución singular $y(x) = 0$ por lo que no tenemos una única solución maximal.*

Proposición 4.4. *Dado D un abierto de $\mathbb{R}^2$. Si todo $(x_0, y_0) \in D$ es un punto de unicidad local de 4 entonces todo punto de D es de unicidad global.*

En estas condciones podemos reescribir

Proposición 4.5. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua en D.*

1. *Si f es una función localmente lipschitziana en D, entonces todo problema de Cauchy*

$$\left.\begin{array}{c} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0, \end{array}\right\},$$

para $(x_0, y_0) \in D$ admite una única solución maximal.

II. *Si f admite derivada parcial continua en D respecto de y, entonces todo problema de Cauchy*

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0, \end{array}\right\},$$

para $(x_0, y_0) \in D$ admite una única solución maximal.

Ahora nos vamos a centrar en cosas más concretas sobre la información del intervalo, como de grande pùede ser, hasta donde se puede prolongar la solución, etc.

Lema 4.6 (Empalme de soluciones)**.** *Si Y_1 es una solución definida en $[a, x_0]$ de $y' = f(x,y)$ y_2 e y_2 es una solución definida en $[x_0, b]$ de la misma acuación, entonces si $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ entonces*

$$y(x) = \left\{\begin{array}{lll} y_1(x) & si & x \in [a, x_0] \\ y_2(x) & si & x \in [x_0, b], \end{array}\right. , \ es\ solucion\ de \quad \left.\begin{array}{l} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_1(x_0), \end{array}\right\}, en [a,b]$$

La demo es trivial.

Ejercicio 1. *En las condiciones de D abierto y f continua en D, es posible que una solución tenga un intervalo de defineción cerrado??*

Lema 4.7 (Lema de Witner)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$, f una función continua en D, $y : I \to \mathbb{R}$ una solución de $y' = f(x,y)$ donde $I = (a,b)$ ó $I = [a,b)$. Sea $(b,z) \in \mathbb{R}^2$ un punto no necesariamente en D y supongamos que este punto verifica:*

I. *(b,z) es un punto límite (de acumulación) de la gráfica de $y(x)$ cuando $x \to b^-$, lo que significa uno de los siguientes enunciados equivalentes*
   - *Para cualquier entorno U del punto (b,z) existen puntos, $(x, y(x))$ con $x \in I$.*
   - *Existe $(x_n)_n$ una sucesión en I verificando que $x_n \to b$ e $y(x_n) \to z$.*

II. *f admite una prolongación continua a un rectángulo de la forma $[b-h, b] \times \{y \in \mathbb{R} : |y - z| \leq h\}$, $h > 0$. (NOTAR que esta condición es trivial si el punto está en D.)*

Entonces

$$\lim_{x \to b^-} y(x) = z.$$

Teorema 4.8. *Sea $f(x,y)$ una función continua definida en el abierto $D \subset \mathbb{R}^2$. Sea $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ una solución maximal de $y' = f(x,y)$. Entonces*

I. *Si $b < +\infty$ y (b,z) es el punto límite de la gráfica de $y(t)$ cuando $t \to b^-$ entonces $(b,z) \in Fr(D)$.*

II. *Si $a > -\infty$ y (a,w) es el punto límite de la gráfica de $y(t)$ cuando $t \to a^+$ entonces $(a,w) \in Fr(D)$.*

III. *Si $K \subset D$ es un compacto entonces existen a', b' con $a < a' < b' < b$ tales que $(x, y(x)) \in D \setminus K$, para todo $x \in (a, a') \cup (b', b)$. Es decir, la gráfica se sale de cualquier compacto dentro de D.*