Sobre el lanzamiento de proyectiles en la Tierra y su comportamiento debido a la rotación

Universidad de Alicante

Facultad de Ciencias

Mecánica newtoniana, Grado en Física

Víctor Masaru Morimoto

December 5, 2022

Abstract

El tiro parabólico es una de las trayectorias más cotidianas. En el lanzamiento de cualquier objeto, la gravedad obliga a que describa una curva mientras se desplaza de manera inercial. Pero cuando alcanzamos grandes distancias, debemos tener en cuenta el efecto de la rotación de la Tierra. Tendremos, por un lado, el efecto de la fuerza centrífuga y por otro el del efecto Coriollis, que se produce por la variación de la distancia al eje de giro, lo que en un sólido rígido como puede ser la Tierra, causa un aumento de la velocidad y por tanto, una fuerza que varía el movimiento.

En esta práctica simularemos utilizando Python este tipo de fenómeno, y daremos resultados concretos sobre el efecto de estos fenómenos en la trayectoria de nuestro proyectil.

Contents

1 Marco teórico.

Tenemos que, al trabajar con un sistema de coordenadas rotantes, debemos tener en cuenta la variación de la dirección de los ejes al calcular la aceleración del sistema, por lo que al derivar utilizaremos la regla de la cadena considerando a los vectores unitarios como funciones que dependen del tiempo. Denotaremos con una coma las expresiones sobre el sistema de coordenadas fijo. Realizaremos el desarrollo en dos variables y generalizaremos a 3:

$$r(t) = r'_x \hat{i}' + r'_y \hat{j}'$$

$$\frac{dr}{dt} = r'_x \frac{d\hat{i}'}{dt} + \frac{dr'_x}{dt}\hat{i}' + r'_y \frac{d\hat{j}'}{dt} + \frac{dr'_y}{dt}\hat{j}'$$

$$= r'_x(w \times \hat{i}') + v'_x \hat{i}' + r'_y(w \times \hat{j}') + v'_y \hat{j}'$$

$$= \overrightarrow{v}' + w \times \overrightarrow{r}'$$

$$\frac{d^2 r}{t^2} = \overrightarrow{a}' + (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{r}') \times w + 2\overrightarrow{v}' \times \overrightarrow{w}'$$

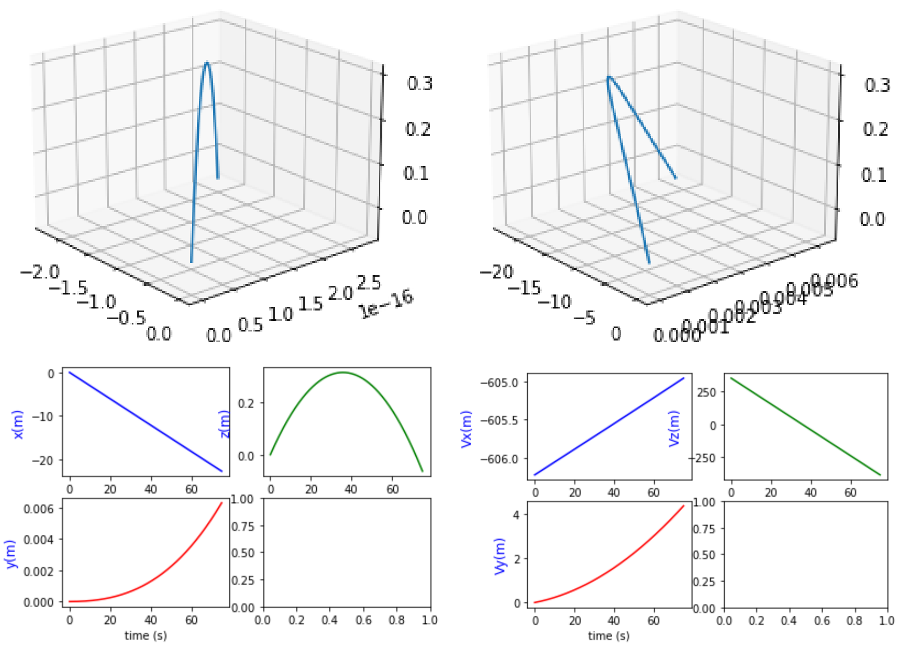
Tenemos que en esta última expresión podemos distinguir la aceleración del la partícula en el sistema rotante, la aceleración centrípeta y la aceleración de Coriollis, respectivamente.
Tomando la gravedad y desarrollando los productos vectoriales para tres variables, tendremos que...

$$\overrightarrow{a}' = g$$

$$(\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{r}') \times w = w^2 r \cos\phi \sin\phi \hat{i} + 0\hat{j} + w^2 r \cos^2\phi \hat{k}$$
$$2\overrightarrow{v}' \times \overrightarrow{w}' = 2v_y w_z \hat{i} + 2(v_z w_x - v_x w_z)\hat{j} - 2v_y w_x \hat{k}$$

2 Primera cuestión.

Una vez que introducimos las expresiones en Python para obtener la ecuación del movimiento resolviendo numéricamente la ecuación diferencial, obtuvimos la siguientes gráficas, según si teníamos en cuenta la Tierra como un sistema rotante o no: (Trabajamos con un ángulo de alzada de 40 grados, disparando el proyectil en dirección sur).



Además, tratamos de ver cuál era más predominante, si la fuerza centrífuga o la de Coriollis, y repetimos la simulación suprimiendo primero los términos de la primera y después los de la segunda. Estos fueron los resultados:

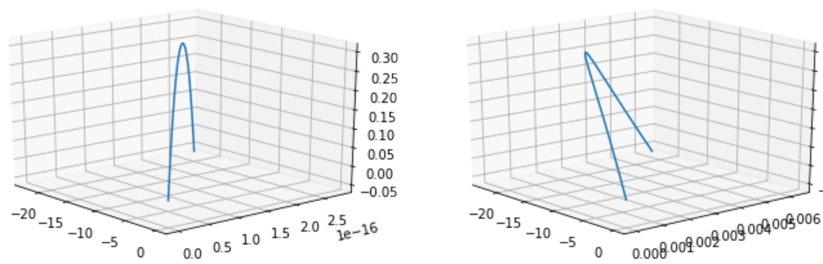


Figure 1: Y aquí podemos observar la trayectoria que seguiría por el efecto añadido de la fuerza centrífuga, y la de Coriollis (de izquierda a derecha). Según los datos del programa, los puntos de impacto distan 44,75 y 111,42 metros, respectivamente.

Nótese como el efecto de la fuerza centrífuga no afecta prácticamente a la forma de la trayectoria, aunque sin embargo sí que produce impacto en una posición diferente (aunque menor a la de la de Coriollis).

3 Segunda cuestión.

Probamos a meter valores en el programa, graficando diferentes trayectorias para ver cuál era el ángulo que mejor aproximaba los puntos de impacto.
Después de hacer varios intentos llegamos a la conclusión que fue el equivalente a 194 grados (dirección suroeste).
Aquí podemos observar la gráfica resultante:

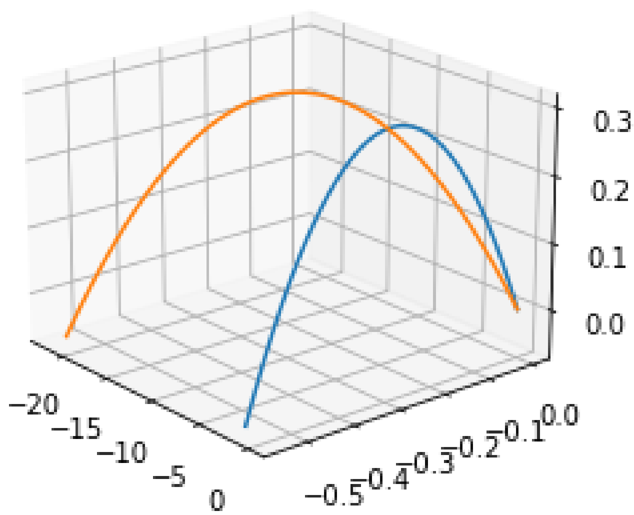
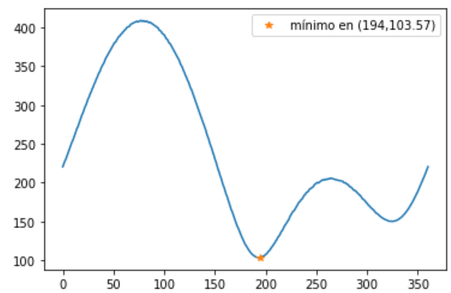
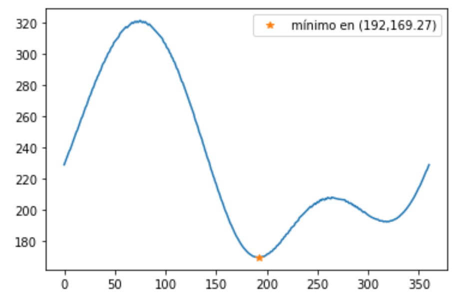


Figure 2: La distancia mínima era de 103,57 metros.

4 Tercera cuestión.

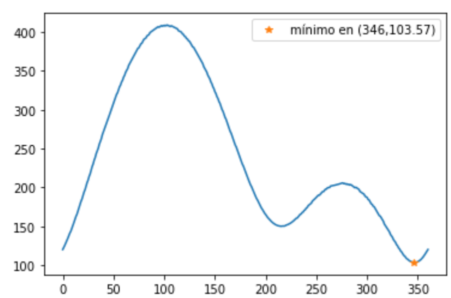
Como determinar el ángulo adecuado a base de prueba y error no era muy conclusivo y tenía inherentemente un derroche considerable de munición, tratamos de graficar el error del tiro en función del ángulo, para un ángulo de alzada de 40 y 60 grados respectivamente:

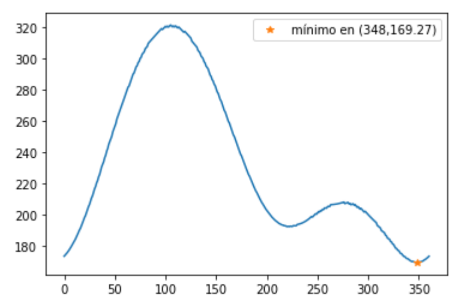




5 Cuarta cuestión.

Al elegir ángulos de alzada negativos (-40 y -60 grados respectivamente), obtuvimos las siguientes gráficas:





Como podemos observar, en comparación con las anteriores gráficas, estas presentaban un mínimo en ángulos cercanos a los 0 grados (dirección norte), mientras que las otras lo hacían para ángulos cercanos a los 180 (dirección sur).