Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

# Tema 5: Magnetostática Parte B

Electromagnetismo

2º Curso Grado Física

Universidad de Alicante – Departamento de Física Aplicada

# Índice

**MAGNETOSTÁTICA**:

Campos magnéticos creados por **corrientes estacionarias** (cargas que que se mueven con velocidad constante, es decir, que la intensidad de corriente o la densidad de corriente son independientes del tiempo)

1. Inducción magnética (campo **B**)

   Repaso año anterior e intensificación

2. Ley de Ampere y aplicaciones

   Repaso año anterior e intensificación

Tema 16 Wagness

3. Divergencia de B y condiciones de contorno para las componentes normales

4. El potencial vector **A** y aplicaciones.

5. Ecuación de Laplace y Poisson para el potencial vector.

RECORDATORIO YA VISTO EN PARTE A

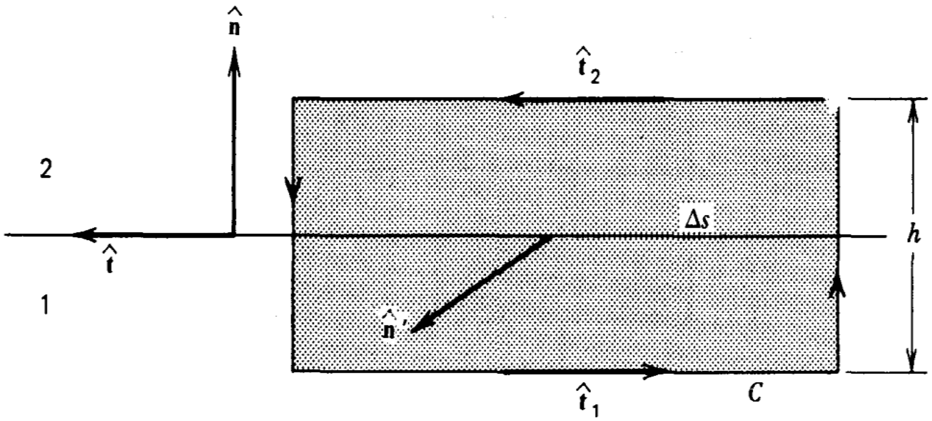
# Ley de Ampere: forma diferencial

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B})\cdot d\mathbf{a}$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}}$$

B no es conservativo

# Condición de contorno **B**: componentes tangenciales

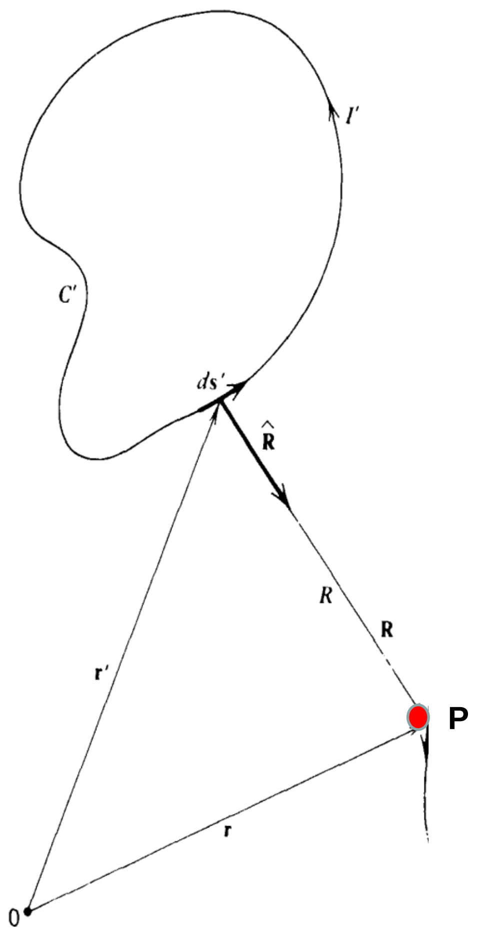



$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0 \mathbf{K}$$

$$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$$

# 3. Divergencia de B

Sea una corriente filamental *I´.* La inducción B creada en un punto P (según la definición, ver transparencia 11 Tema5 parte A




$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} \frac{I' d\mathbf{s}' \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} \frac{I' d\mathbf{s}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

Calculamos la divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \left[ \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} \frac{I' d\mathbf{s}' \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I'}{4\pi}\oint_{C'} \nabla \cdot \left[ \frac{d\mathbf{s}' \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right]$$

Se puede demostrar (ver pag. 309 Wagsness):

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

Esta es una de las Ecuaciones de Maxwell. Válida tb para campos no Estacionacionarios.

# Condiciones de contorno para las componentes normales de B en superficies de discontinuidad

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = B_{2n} - B_{1n} = 0$$

Se conservan!!!

Resultado válido también para campos no estacionarios

# 4. Potencial vector **A**

Como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

⇒ Existe una función vectorial **A** tal que:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

**A** recibe el nombre de **Potencial Vector**

Esto es similar a cuando para el campo **E** decíamos que

Como $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

⇒ Existe una función escalar $\phi$ tal que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$$

$\phi$ recibe el nombre de **Potencial electrostático**

# ¿Es posible tener una expresión para obtener **A** a partir de sus corrientes fuentes?

Partimos de la definición de B:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} \frac{I' d\mathbf{s}' \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} \frac{I' d\mathbf{s}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

Haciendo transformaciones algebraicas en el término que hay dentro de la integral (fórmulas vectoriales del Tema 1), se llega a (ver detalles en libro):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi}\oint_{C'} \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{s}'}{R}\right) = \nabla \times \left(\frac{\mu_0 I'}{4\pi}\oint_{C'} \frac{d\mathbf{s}'}{R}\right)$$

Comparando esta expresión con : $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ se deduce

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} \frac{I' d\mathbf{s}'}{R}}$$

Expresión para obtener **A** debido a una corriente filamental I´

Notesé de la expresión anterior que **A** irá en la misma dirección que la corriente.

La expresión anterior para el caso de una carga puntual q que se mueve con velocidad **v** será:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{R}$$

Las expresiones correspodientes para corrientes distribuidas (volumétricas, **J,** o superficiales, **K**), en lugar de filamentales, son:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')d\tau'}{R}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')da'}{R}$$

Las expresiones anteriores son importantes porque la idea es poder obtener el A de una determinada corriente o conjunto de corrientes (filamentales o distribuidas) y a partir de A  obtener B haciendo su rotacional.

Es similar a lo que haciamos en Electrostática, donde el problema Fundamental era obtener el potencial electrostático, del modo que fuera,  a partir de él obtener el campo **E** haciendo el gradiente. Recuerdese que el método más potente para otener el potencial es resolver la ecuación de Laplace o Poisson.

¿Será posible hacer algo parecido para **A**?  Es decir  ¿es posible tener ecuaciones de Laplace y Poisson para **A**?

# Divergencia de **A**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} \frac{I'\,d\mathbf{s}'}{R}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \left( \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} \frac{I'\,d\mathbf{s}'}{R} \right) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi}\oint_{C'} \nabla \cdot \left( \frac{d\mathbf{s}'}{R} \right)$$

Haciendo transformaciones algebraicas en el término que hay dentro de la integral (fórmulas vectoriales del Tema 1), se llega a (ver detalles en libro):

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0}$$

# Condiciones de contorno para A en superficies de discontinuidad

Componentes normales: partimos de $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = A_{2n} - A_{1n} = 0$$

Componentes tangenciales: partimos de $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = \lim_{h \to 0} (h\mathbf{B}) = 0$$

h es el espesor de la capa de transición entre los medios a ambos lados de la interfase; Sabemos que B debe ser finito cuando h tienda a cero

$$\boxed{\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1}$$

El potencial vector es continuo siempre en las interfases entre distintos medios (equivalente al resultado de que el potencial Electrostático es continuo en las interfases

# 5. Ecuación de Laplace y Poisson para **A**

Partiendo de la forma diferencial de la Ley de Ampere (transparencia 20. Tema 5 parte A)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Se ha usado que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}}$$

**ECUACIÓN DE POISSON**

En realidad son tres ecuaciones, una para cada componente del sistema de coordenadas elegido. En cartesianas

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \qquad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \qquad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

Si la ecuación se aplica en una región donde no hay densidad de corriente ($J = 0$):

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = 0}$$

**ECUACIÓN DE LAPLACE**

**SOBRE LA AMBIGUEDAD O INDETERMINACIÓN AL OBTENER A**

En física, las cantidades que reciben el nombre de potencial, tienen cierta ambigüedad en relación a su valor absoluto (que depende de donde se ponga el origen). Esto es porque el objetivo de estos potenciales es usarlos para obtener, mediante derivación en ellos, de campos de interés.

Por ejemplo, en el potencial electrostático, esa indeterminación venía dada por la constante aditiva que surge al integrar y cuyo valor se obtenía eligiendo el origen de potencial de forma arbitraria.

Para el potencial A también existe cierta ambigüedad

Para que un potencial vector **A** sea adecuado para producir un determinado **B**, debe cumplir:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

La indeterminación de que hablamos viene de que no hay un único **A** que cumpla esto.

Supongamos que tenemos un potencial **A†** dado por:

$$\mathbf{A}^{\dagger}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r})$$

$\chi(\mathbf{r})$ es un campo escalar arbitrario

$$\mathbf{B}^{\dagger} = \nabla \times \mathbf{A}^{\dagger} = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \chi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Donde se ha usado el hecho de que el rotacional del gradiente de una función escalar es cero (una de las expresiones vectoriales del Tema 1)

**Hay muchos posibles potenciales A validos!!!**

Aunque la cantidad de ellos se reduce si exigimos $\nabla \cdot \mathbf{A}^{\dagger} = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}\dagger = 0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \nabla \chi = \nabla^2 \chi,$$

$$\boxed{\nabla^2 \chi = 0}$$

Los potenciales escalares que se añadan deben cumplir esta condición (llamada Gauge de Coulomb, o norma de Colomb.
Notese, que esto es lo mismo que decir que este potencial escalar la ecuación de Laplace

# RESUMEN: Métodos para determinar A

1) A partir de la definición de **A** (conocidas las corrientes que lo producen).

2) Resolviendo la Ecuación de Poisson o Laplace (conocida la densidad de corriente que hay en la zona).

3) Si se conoce **B**, por inspección usando

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

4) A partir del flujo de **B**

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

Este método es últil cuando es fácil obtener el flujo de **B**, y además la simetría permite elegir una adecuada trayectoria C

## EJEMPLO DE COMO OBTENER A, CONOCIDO B (POR INSPECCIÓN)

Caso particular **B constante (uniforme)**: $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}},$

Hay que encontrar un vector **A** que cumpla $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$
(hay muchas posibles soluciones).

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B$$

Una posibilidad para que esto ocurra es que se cumplan las 2 condiciones siguientes:

**1) Que $A_y$ y $A_x$ no dependan de z.**

2) Que $A_z$ sólo dependa de z; O bien que $A_z$ = cte.

Si imponemos además que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ vemos que nos quedamos con

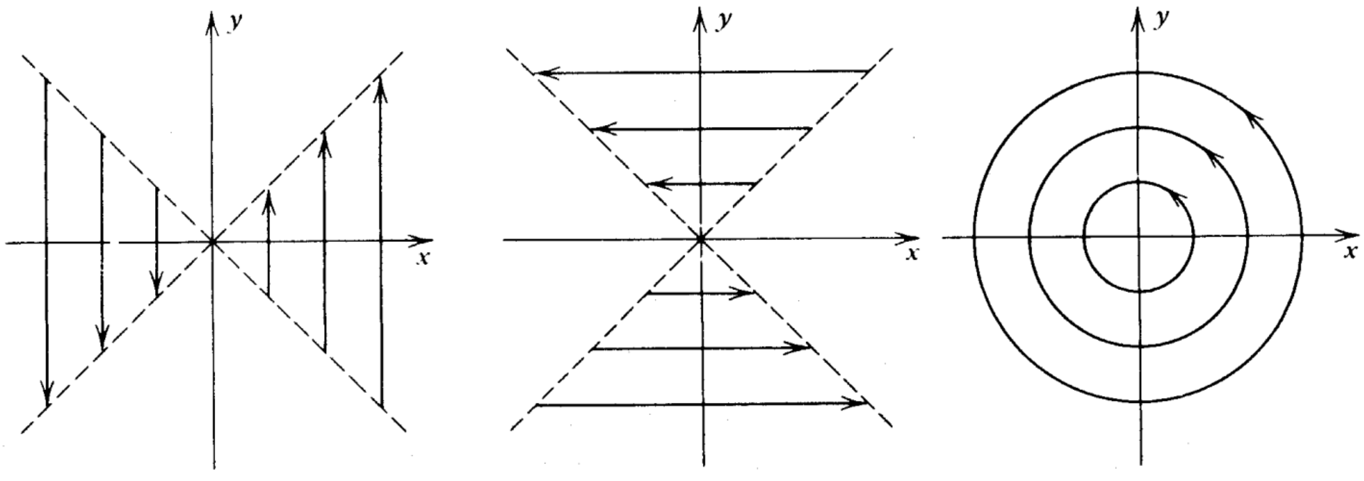
La segunda opción en **2) $A_z$ = cte.**

Si se imponen estas condiciones se ve:

- Las dos primeras ecuaciones recuadradas en transparencia 16 son cero
- **Para la tercera ecuación hay varias posibilidades (en todas $A_z$ = cte).**

(a) $A_y = B\,x$ ; $A_x = 0$ ;
(b) $A_y = 0$ ; $A_x = -\,B\,y$ ;
(c) $A_y = B\,x / 2$ ; $A_x = -\,B\,y / 2$;

**Atención:** En el libro hay erratas (pag. 315). Las coordenadas x e y que hay a la derecha de estas expresiones en el libro aparecen como subíndices




(a) (b) (c)

Una expresión frecuenta y útil de potencial vector A (diferente de las 3 propuestas), **válida para un B uniforme** es la siguiente:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$$

La ventaja de esta opción es que **B puede estar en cualquier dirección** (en el caso anterior estaba en la dirección z)

## EJEMPLOS DE CÁLCULO DEL POTENCIAL A (MEDIANTE DEFINICIÓN)

1) Potencial A debido a una corriente filamental de longitud finita

2) Potencial A debido a dos corrientes filamentales antiparalelas

Estos dos ejemplos vienen propuestos como problemas (8 y 9) de la hoja. Ver resolución en el libro

**EJEMPLOS DE CÁLCULO DE A RESOLVIENDO LA ECUACIÓN DE LAPLACE:** Problemas 7 y 10 de la hoja