DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE.
Asignatura: ELECTROMAGNETISMO I - 2º Curso Grado en Física Curso 2022-23

<u>PROBLEMAS TEMA 1</u>: Introducción a la teoría matemática de campos

1. Encontrar el vector de posición relativa del punto P(-2,-2,3) respecto del punto P´(-3,1,4) y el vector unitario $\vec{u}$ asociado a la dirección PP´. Calcula los cosenos directores de $\vec{u}$ y comprueba que la suma de sus cuadrados es igual a la unidad. <u>Solución</u>: $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{11}})(1,-3,-1)$

2. Dados los vectores $\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$ y $\vec{B} = -6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + \vec{k}$. Encontrar la componente del vector $\vec{A} \times \vec{B}$ en la dirección del vector $\vec{C} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$. <u>Solución</u>: $(-\frac{25}{\sqrt{3}})$

3. Sean dos sistemas de referencia R_1 y R_2, que tienen el mismo origen O y ejes de coordenadas $X_1\, X_2\, X_3$ y $X_1'\, X_2'\, X_3'$, respectivamente. Sabiendo que el ángulo que forman los ejes X_1 y X_1' es de 30º, encontrar la matriz de transformación para el cambio de un sistema de coordenadas a otro. Sea un vector, cuyas componentes respecto al sistema R_1 son $\vec{A} = (1,2,-2)$. Encontrar las componentes del vector en R_2. Determinar su módulo y sus cosenos directores respecto de R_1 y R_2. <u>Solución</u>: $\vec{A}' = \left(2+\sqrt{3}, -1+2\sqrt{3}, -4\right)/2$; A = A' =3; cos α = 1/3, cos β = 2/3; cos γ = -2/3; cos α' = $\left(2+\sqrt{3}\right)/6$, cos β' = $\left(-1+2\sqrt{3}\right)/6$; cos γ' = -2/3

4. Sea un punto P de coordenadas (-1,3,2) en un sistema de ejes cartesianos. ¿En qué dirección aumenta lo más rápidamente posible la función $\Phi(x,y,z) = (x+y)^2 + z^2 - xy + 2z$? <u>Solución</u>: $\vec{u}(\max crec) = (1,5,6)/\sqrt{62}$

5. Sea un campo descrito por una función bidimensional en el plano XY de la forma $\Phi(x,y) = x^2 - y^2$. Dibujar las líneas de nivel del campo y las líneas de gradiente. <u>Solución</u>: Líneas de nivel $x^2 - y^2 = C$ $(C = cte)$; Líneas de gradiente: $x \cdot y = B$ $(B = cte)$

6. Sea la función vectorial $\vec{A} = (3x^2 + y)\vec{\imath} - (senx - z)\vec{\jmath} + \alpha\vec{k}$. Calcula α para que la divergencia de la función vectorial sea nula. <u>Solución</u>: $\alpha = -6xz + f(x,y)$

7. Obtener las coordenadas cartesianas de un vector $\vec{A}$ cuyas coordenadas en esféricas son (1,1,1). Calcular también las coordenadas cartesianas de un vector $\vec{B}$ cuyas coordenadas en cilíndricas son (-1,3,2). Nótese que una manera de saber que se ha hecho correctamente es comprobar que el módulo es independiente del tipo de coordenadas.
<u>Solución</u>: $\vec{A}(cart)$ = (- 0.095, 1.701, - 0.301); $\vec{B}(cart) = (0.567, -3.111, 2)$

8. Sea la función escalar $\Phi(r,\varphi,\theta) = r^3 sen\theta \tan\varphi$, expresada en coordenadas esféricas. Obtener expresiones para la función en coordenadas cartesianas y en coordenadas cilíndricas.

<u>Solución:</u> $\Phi(x,y,z) = (\frac{y}{x})(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{1/2}$; $\Phi(\rho,\varphi,z) = \rho \tan\varphi\ (\rho^2 + z^2)$

9. Sea la función escalar $\Phi(r,\varphi,\theta) = r^2 sen^2\theta\, cos^3\varphi$, expresada en coordenadas esféricas. Obtener el gradiente de la función y el laplaciano de la función.

10. Sea la función vectorial $\vec{A} = (e^{\rho} cos\varphi, z\, sen\varphi, \rho^2)$, expresada en coordenadas cilíndricas. Calcular la divergencia y el rotacional de la función.

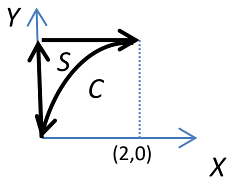
11. La ecuación de una familia de elipsoides es U= $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$. Encontrar el vector unitario normal en cada punto de la superficie de estos elipsoides.

Solución: $\vec{n} = (\frac{x}{a^2}\ \vec{\imath} + \frac{y}{b^2}\vec{\jmath} + \frac{z}{c^2}\vec{k})(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4})^{-1/2}$

12. Dado el campo vectorial $\vec{A} = xy\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} + zx\vec{k}$, evaluar el flujo del vector a través de la superficie de un paralelepípedo rectangular de lados a,b,c con uno de los vértices coincidente con el origen de coordenadas y las aristas paralelas a las direcciones positivas de los ejes rectangulares. Evaluar la integral de volumen de la divergencia del vector. Discute los resultados.

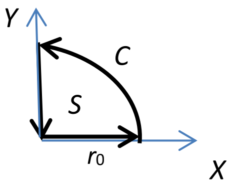
Solución: $\Phi = (\frac{abc}{2})(a+b+c)$

13. Dado el campo vectorial $\vec{A} = x^2y\vec{\imath} + xy^2\vec{\jmath} + a^3e^{-\beta r}\cos(\alpha x)\vec{k}$ donde a, α y β son constantes. Evaluar la integral de línea del campo vectorial sobre la trayectoria cerrada *C* en el plano XY de la figura. Los tramos rectos de la trayectoria son paralelos a los ejes XY y el tramo curvo es la parábola $y^2 = kx$, donde k es una constante. Evaluar la integral de superficie del rotacional del campo vectorial indicado sobre la superficie *S* encerrada dentro de *C*. Discutir los resultados.



Solución: $\gamma = (\frac{8\sqrt{2k}}{3} - \frac{16\sqrt{2k}}{7} - \frac{4k\sqrt{2k}}{5})$

14. Dado el vector $\vec{A} = 4\vec{u}_r + 3\vec{u}_\theta - 2\vec{u}_\varphi$, encontrar su integral de línea sobre la trayectoria cerrada de la figura. El tramo curvo es un arco de circunferencia de radio r0 centrada en el origen. Encontrar también la integral de superficie del rotacional del vector sobre el área encerrada dentro de la trayectoria. Discutir los resultados.



Solución: $\gamma = -r_0\pi$