Práctica 3

Métodos Numéricos y Computación

I. Interpolación polinómica a trozos - Splines *(Tema 2)*

Python nos permite hacer interpolación mediante splines. La librería `scipy` contiene la función `CubicSpline` con la cual podemos calcular los diferentes tipos de splines, evaluarlos, y obtener los coeficientes de los diferentes polinomios cúbicos.

Ejercicio 1 *Dados los puntos:*

x_k	1	2	3	4
y_k	0.5	4	2	0.7

a) Construye el spline cúbico natural ($S''(1) = S''(4) = 0$).

b) Construye el spline cúbico de frontera con $S'(1) = 0.3$ y $S'(4) = -0.3$.

Ejercicio 2 *El número de personas afectadas por el virus contagioso que produce la gripe en una determinada población viene dado por la siguiente función, donde t indica el tiempo en días:*

$$f(t) = \frac{100}{2 + 999e^{-2.1t}}.$$

a) Aproxima esta función en $[0, 7]$ por polinomios de interpolación de grados 4, 6 y 8, tomando nodos equiespaciados.

b) Calcula ahora los polinomios de interpolación tomando nodos de Chebyshev, también de grado 4, 6 y 8.

c) Calcula el spline cúbico natural en seis nodos equiespaciados del intervalo $[0, 7]$.

d) Calcula el spline cúbico de frontera en seis nodos equiespaciados del intervalo $[0, 7]$.

e) Representa la función, los polinomios interpoladores y los splines anteriores junto a los nodos.

II. Aproximación discreta *(Tema 3)*

Un caso particular del problema de aproximación por mínimos cuadrados es la aproximación discreta. Frecuentemente se recopilan observaciones a las cuales queremos asignar un modelo matemático. Supongamos que disponemos de $n+1$ puntos en el plano, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, y consideramos el producto escalar en el espacio de las funciones definidas sobre $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$(f, g) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i).$$

Nuestro objetivo es obtener el polinomio de grado m, $1 \leq m \leq n$, para el cual la distancia a los puntos sea mínima. Más concretamente, si llamamos:

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m,$$

y $\{\phi_0, \phi_1, \phi_m\} = \{1, x, \ldots, x^m\}$ es la base canónica de los polinomios de grado menor o igual que m, e $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$ son las soluciones del siguiente sistema de $m+1$ ecuaciones con $m+1$ incógnitas (llamado sistema de ecuaciones normales):

$$\left.\begin{array}{rcl} a_0(\phi_0,\phi_0) + a_1(\phi_1,\phi_0) + \cdots + a_m(\phi_m,\phi_0) & = & (f,\phi_0) \\ a_0(\phi_0,\phi_1) + a_1(\phi_1,\phi_1) + \cdots + a_m(\phi_m,\phi_1) & = & (f,\phi_1) \\ & \vdots & \\ a_0(\phi_0,\phi_m) + a_1(\phi_1,\phi_m) + \cdots + a_m(\phi_m,\phi_m) & = & (f,\phi_m) \end{array}\right\}$$

Dados $n+1$ puntos del plano, uno de los polinomios aproximantes más utilizados es el de primer grado. Este polinomio es conocido como el modelo (o recta) de regresión lineal $P_1(x) = a_0 + a_1 x$. En este caso, el problema queda reducido a encontrar los parámetros a_0 y a_1 de la recta que mejor se ajusta al conjunto de observaciones. Esta recta tiene importantes aplicaciones, por ejemplo, en el ámbito de la estadística.

Ejercicio 3 *Crea una función* `modelo_discreto_general` *que, dados* $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ *y* $1 \leq m \leq n$, *devuelva el polinomio aproximante de grado* m.

Ejercicio 4 *Consideremos los siguientes datos:*

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y	0.000	0.078	0.138	0.192	0.244

a) *Obtén los polinomios aproximantes de grado 1, 2, 3 y 4.*

b) *Comprueba que el polinomio de grado 4 coincide con el polinomio interpolador.*

c) *Representa en un mismo gráfico los cuatro polinomios junto con los cinco puntos del plano.*

Ejercicio 5 *Un vehículo se mueve supuestamente a velocidad constante. A continuación se muestran los tiempos de llegada a diferentes posiciones separadas 900 metros:*

Posición (x)	0	900	1800	2700
Tiempo (y)	17.6	40.4	67.7	90.1

a) *Obtén el polinomio aproximante de grado 1 (modelo de regresión lineal) y el polinomio aproximante de grado 2.*

b) *Representa el modelo de regresión lineal junto a los datos.*

c) *¿Se mueve el automóvil a velocidad constante?*

d) *Obtén el máximo de los valores absolutos de la diferencia entre la función y el polinomio de grado 1, y entre la función y el polinomio de grado 2, para los valores de* x *conocidos, para indicar los errores máximos.*

e) *Estima el tiempo en que se alcanzará una posición de 1200 metros usando aquel polinomio que presente el menor error atendiendo a las conclusiones del apartado anterior.*