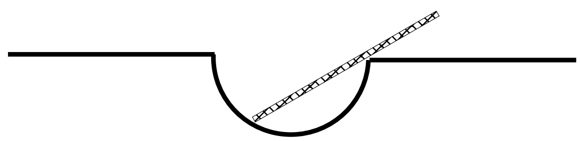
Grado en Física. Mecánica Analítica. Problemas Tema 1: Mecánica Lagrangiana.

Curso 2023-2024

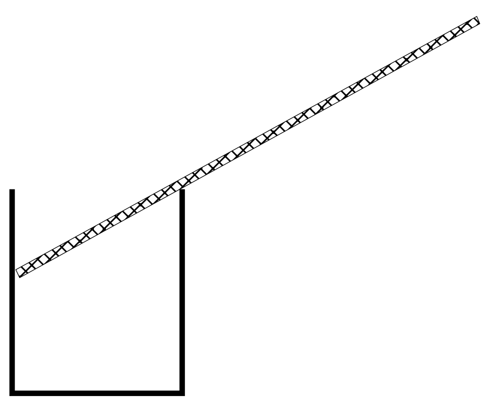
1. Problema unidimensional conservativo. Una partícula de masa $m = 1$ puede moverse en el eje x bajo la acción de la fuerza $F(x)$, cuya energía potencial asociada es $U(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Representa la energía potencial y las curvas de nivel de energía en el espacio fásico (x, p) correspondientes a los valores de energía característicos. Analiza cualitativamente, a partir de esta representación, los posibles movimientos de la partícula dependiendo de las condiciones iniciales.

2. Una varilla metálica de longitud ℓ se apoya sobre un hemisferio de radio R perfectamente liso, como muestra la figura. Encontrar la posición de equilibrio usando el principio de los trabajos virtuales. ¿Se trata de equilibrio estable? Analizar los casos $\ell > 2R$ y $\ell < 2R$.



   Sol.: Si $\ell > 2R$, $\cos\theta = \frac{\ell}{16R}\left[1 + \sqrt{1 + 128(R/\ell)^2}\right]$, donde θ es el ángulo que forma la varilla con la horizontal; Si $\ell < 2R$, $\theta = 0$ y la solución anterior si $\ell > 2\sqrt{2}R/3$.

3. Una varilla metálica de longitud ℓ está apoyada sobre un vaso de vidrio como muestra la figura. Si el diámetro del vaso es $\ell/4$ y no hay rozamiento, encontrar el ángulo que forma la varilla con la horizontal en la posición de equilibrio usando el principio de los trabajos virtuales. ¿Se trata de equilibrio estable?



   Sol.: $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

4. Determina los grados de libertad de los siguientes sistemas: i) un péndulo simple, ii) un péndulo esférico, iii) un péndulo doble, iv) un sólido rígido, v) un disco que rueda sin deslizar por una guía recta, vi) una molécula diatómica, vii) dos partículas sobre las que actúa la atracción gravitatoria mutua. Propón en cada caso coordenadas generalizadas.

   Sol.: i) 1; ii) 2; iii) 2; iv) 6; v) 1; vi) 6; vii) 6.

5. Estudiar el movimiento unidimensional de un cuerpo en un plano inclinado sin rozamiento usando la formulación Lagrangiana.

6. Obtener las ecuaciones de movimiento de una partícula que puede moverse en el plano $x-y$ sobre la que actúa una fuerza central, cuya energía potencial es $U(r) = \frac{1}{2}k\,r^2$, usando la formulación Lagrangiana en los siguientes casos: a) Tomando como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas; b) Tomando como coordenadas generalizadas las coordenadas polares.

   Sol.: a) $m\ddot{x} = -k\,x$, $m\ddot{y} = -k\,y$; b) $m\ddot{r} = m\,r\,\dot{\theta}^2 - k\,r$, $\frac{d}{dt}\left(m\,r^2\,\dot{\theta}\right) = 0$.

7. De los extremos de una cuerda que pasa por una polea de masa despreciable penden dos masas, m_1 y m_2. Usando la formulación Lagrangiana obtén la aceleración del sistema así como la tensión de la cuerda. Realiza el mismo problema pero considerando ahora que la polea tiene masa M, radio R ($I = MR^2/2$) y la cuerda no desliza.

   Sol.: $a = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g$; $T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$; $a = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+M/2}g$; $T_1 = \frac{(2m_2+M/2)m_1}{m_1+m_2+M/2}g$; $T_2 = \frac{(2m_1+M/2)m_2}{m_1+m_2+M/2}g$.

8. Problema de dos cuerpos: dos partículas de masas m_1 y m_2 se mueven bajo la acción de la fuerza gravitatoria mutua. Obtén la lagrangiana del sistema usando las coordenadas cartesianas de cada partícula. ¿Hay alguna coordenada cíclica? Obtén ahora la lagrangiana usando como coordenadas las coordenadas cartesianas del centro de masas y las coordenadas esféricas de la posición relativa entre las partículas. Razona, a partir de las ecuaciones de Lagrange, que eligiendo adecuadamente el eje polar del movimiento relativo podemos prescindir de la coordenada polar θ. Escribe, en ese caso la lagrangiana y obtén las magnitudes conservadas.

9. Obtén las ecuaciones de movimiento de una bolita de masa m que se desliza por un alambre recto que gira en un plano con velocidad angular Ω en una región libre de fuerzas. El mismo problema pero supón ahora que el plano es vertical y actúa la fuerza de la gravedad sobre la bolita.

   Sol.: $\ddot{r} = \Omega^2\,r$; $\ddot{r} = \Omega^2\,r - g\sin(\theta_0 + \Omega\,t)$.

10. Un alambre circular de radio R está en un plano vertical y gira respecto a su diámetro vertical con una velocidad angular Ω. Una bolita, de masa m, ensartada en el alambre puede deslizar sin rozamiento por él. Sobre la bolita actúa la fuerza de la gravedad. Elige las coordenadas generalizadas más apropiadas y obtén la lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange correspondientes.

    Sol.: $L = \frac{1}{2}m\,R^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\,\sin^2\theta\right) - m\,g\,R\,\cos\theta$; $m\,\ddot{\theta} = \frac{m\,\Omega^2}{2}\,\sin 2\theta + \frac{m\,g}{R}\sin\theta$.

11. Determinar las ecuaciones de movimiento de una partícula 'libre' restringida a moverse sobre la superficie de una esfera, de radio R, usando coordenadas esféricas θ, ϕ. Comprobar que $\theta(t) = \theta_0 + \Omega\,t$, $\phi(t) = \phi_0$ es solución de las ecuaciones de movimiento. Interpreta este resultado.

    Sol.: $\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\,\dot{\phi}^2$, $\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right) = 0$.

12. Demuestra que las ecuaciones de Lagrange son invariantes bajo transformaciones de coordenadas generalizadas: $q_i = q_i(\underline{Q}, t)$.

13. Considera una partícula libre de masa m que puede moverse en el plano $x-y$. Obtén la Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange correspondientes usando como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas x e y. Considera ahora el cambio a las coordenadas x' e y'

correspondientes a un sistema de ejes cartesianos en rotación, con velocidad angular constante Ω, que viene dado por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega\, t) & \sin(\Omega\, t) \\ -\sin(\Omega\, t) & \cos(\Omega\, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Obtén la nueva Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange correspondientes. Identifica la fuerza centrífuga y la de Coriolis.

Sol.: $L' = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) + m\,\Omega(x'\dot{y}' - y'\dot{x}') + \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2)\Omega^2$; $m\,\ddot{x}' = 2m\,\Omega\,\dot{y}' + m\,\Omega^2\,x'$, $m\,\ddot{y}' = -2m\,\Omega\,\dot{x}' + m\,\Omega^2\,y'$,

14. Comprueba que las ecuaciones de movimiento de una carga e en un campo electromagnético pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de Lagrange con energía potencial de la forma $U = e(\Phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$, donde Φ es el potencial eléctrico y $\mathbf{A}$ el potencial vector. Téngase en cuenta que la fuerza de Lorentz es $F = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$ y que $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$.

15. Considera el movimiento de una partícula de carga e en un campo magnético homogéneo B en dirección del eje z. Toma como potencial vector $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}B(y\,\mathbf{e}_x - x\,\mathbf{e}_y)$. Obtén la Lagrangiana y los momentos canónicos conjugados p_x, p_y y p_z. ¿Son conservados? ¿Cuál de ellos es igual al momento mecánico?

    Sol.: $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\,\frac{1}{2}B(\dot{x}y - x\dot{y})$; $p_x = m\,\dot{x} - \frac{1}{2}q\,B\,y$, $p_y = m\,\dot{y} + \frac{1}{2}q\,B\,x$, $p_z = m\,\dot{z}$.

16. Demostrar, haciendo uso del cálculo variacional, que la distancia más corta entre dos puntos del espacio (euclídeo de dimensión 3) es la línea recta.