Universidad de Alicante

Movimiento relativo: tiro parabólico.

Mireia Serrano Beltrá

Mecánica Newtoniana y Relatividad
Prácticas de ordenador

Índice

1. Objetivos

El informe se enfoca en el análisis del tiro parabólico. Se analizará el efecto de la rotación de la Tierra, utilizando modelos y programas en Python para realizar los cálculos pertinentes.

2. Fundamento teórico

Consideraremos dos sistemas de referencia: uno fijo (que denotaremos por ') y otro que rota con la Tierra. Ambos tienen el mismo origen de coordenadas, siendo su eje z coincidente con el eje de rotación de la Tierra.

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{r} \times \vec{\alpha} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2\vec{v} \times \vec{w} \tag{1}$$

Donde $\vec{\alpha}$ y $\vec{\omega}$ son, respectivamente, la aceleración de rotación de la Tierra y su velocidad angular. También encontramos los siguientes términos:

- Aceleración centrípeta: $\vec{a_{ce}} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}$, dirigida hacia el centro de la trayectoria circular de un objeto en movimiento, necesaria para mantener su órbita.
- Aceleración de Coriolis: $\vec{a_{co}} = 2\vec{v} \times \vec{\omega}$, actúa sobre un objeto en movimiento en un sistema de referencia no inercial, como la Tierra en rotación.

Para el caso de la rotación terrestre, tenemos que $\vec{\alpha} = 0\frac{m}{s^2}$ y que $\vec{a'} = \vec{g}$. Así, la ecuación (1) queda como:

$$\vec{a} = \vec{g} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2\vec{v} \times \vec{\omega} \tag{2}$$

El término centrípeto solo depende de la latitud ϕ, cuyo módulo se queda como:

$$|(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}| = 0{,}3373 \cdot cos(\phi)$$

Por otro lado, el término de Coriolis viene dado por la siguiente expresión:

$$\vec{\omega} = (\omega_x, 0, \omega_y) = \omega(-cos(\phi), 0, sin(\phi)) \tag{3}$$

$$\vec{v} \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & 0 & \omega_y \end{vmatrix} = 2v_y\omega_z\vec{i} + 2(v_z\omega_x - v_x\omega_z)\vec{j} - 2v_y\omega_x\vec{k} \tag{4}$$

3. Cuestiones

En este apartado responderemos a las cuestiones planteadas en el guión.
Antes de dar paso a la resolución de las cuestiones, debemos tener en cuenta que los datos iniciales introducidos en el programa son: $m = 1kg$, la aceleración $\vec{g} = 9{,}8\frac{m}{s^2}$, la velocidad angular $|\vec{\omega}| = 7{,}272e - 05\frac{rad}{s}$ y el radio terrestre $R_T = 6378000m$.

3.1. Cuestión 1:

En el programa, la aceleración se ha modificado con dos términos, fuerza centrípeta y fuerza de Coriolis. ¿Puedes indicar cuál de ellas es más importante?
Para ver cómo afectan estas componentes de la aceleración al movimiento, veamos cómo cambia si anulamos alguna de estas aceleraciones.

	Coriolis (m/s^2)	Centrípeta (m/s^2)	Tiempo final (s)	Posición final
Caso base	0.000073	0.032	23881	$x_f = -43405{,}120$ $y_f = -118{,}288$ $z_f = -0{,}294$
Caso 1	0	0.032	23882	$x_f = -43406{,}991$ $y_f = 5{,}3192$ $z_f = -0{,}890$
Caso 2	0.000073	0	23809	$x_f = -43301{,}886$ $y_f = -117{,}606$ $z_f = -0{,}899$

Tabla 1: Datos obtenidos con el programa para la trayectoria con rotación.

	Coriolis (m/s^2)	Centrípeta (m/s^2)	Tiempo final (s)	Posición final
Caso base	0.000073	0.032	23809	$x_f = -43302{,}049$ $y_f = 5{,}303$ $z_f = -0{,}450$
Caso 1	0	0.032	23809	$x_f = -43302{,}049$ $y_f = 5{,}303$ $z_f = -0{,}450$
Caso 2	0.000073	0	23809	$x_f = -43302{,}049$ $y_f = 5{,}303$ $z_f = -0{,}450$

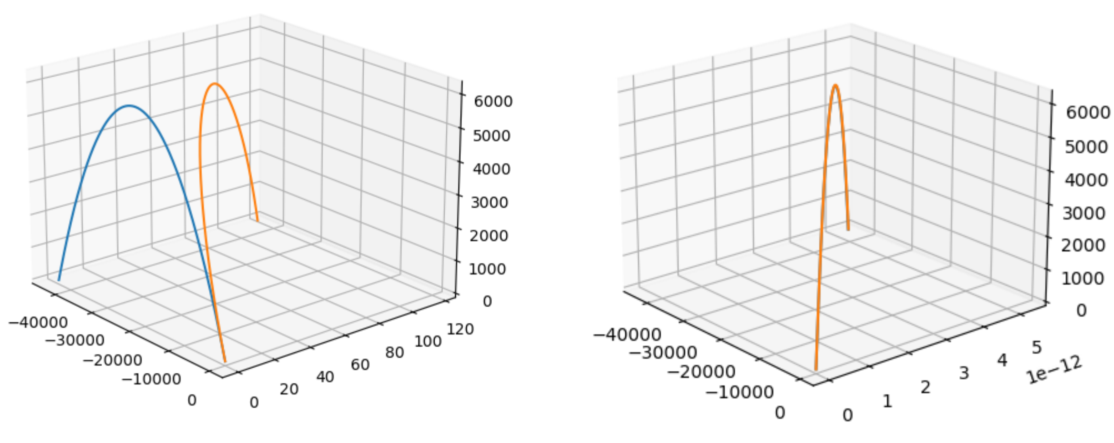
Tabla 2: Datos obtenidos del tiro puro.

	Error (m)
Caso base	156.8
Caso 1	104.9
Caso 2	117.6

Tabla 3: Error en el tiro.

En la tabla 1 tenemos los valores de las aceleraciones en tres casos distintos, así como la posición del proyectil. Por otro lado, en la tabla 2 consideramos el tiro puro, es decir, sin considerar la rotación de la Tierra. A partir de estos resultados, calculamos el error obtenido al no considerar dicha rotación.

Si nos fijamos en los resultados de la tabla 3, el error del tiro es menor para el caso 1, en el que la aceleración de coriolis es nula. Esto significa, que este se asemeja más al tiro parabólico puro. Por lo que la aceleración más importante es la que viene determinada por la fuerza de Coriolis.
Seguidamente, mediante el programa de Python, representamos en una gráfica 3d el tiro parabólico en el caso 1 (1a) y en el caso 2 (1b). La línea naranja representa el tiro puro, mientras que el azul es la trayectoria con rotación. De esta manera podemos estudiar cuál se asemeja más al tiro puro.



(a) Sin aceleración centrípeta

(b) Sin aceleración coriolis

Figura 1: Comparación del caso 1 y caso 2.

Tal y como habíamos demostrado analíticamente, el caso sin aceleración de coriolis representa una trayectoria similar al caso puro. Por lo que podemos concluir, que es de mayor importancia la aceleración de coriolis.

3.2. Cuestión 2:

¿La dirección afecta al error del tiro? Intenta razonar cuál es el origen de esta diferencia si la hay o si no la hay por qué no se debería producir.
En este apartado, vamos a analizar la dirección del tiro. Si ejecutamos el programa con una latitud de 40, obtenemos la gráfica 2, que representa el error del tiro en función del ángulo del plano.

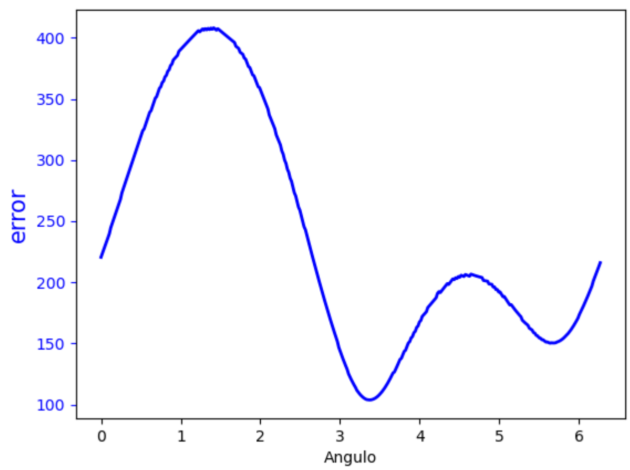


Figura 2: Error del tiro en función del ángulo.

De la gráfica podemos sacar el valor mínimo del ángulo y su error para dicho valor:

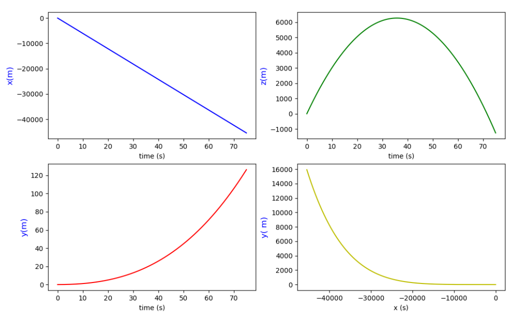
	Ángulo (rad/s)	Error (m)
Valor máximo	1.414	408.118
Valor mínimo	3.368	103.811

Tabla 4: Valores máximos y mínimos.

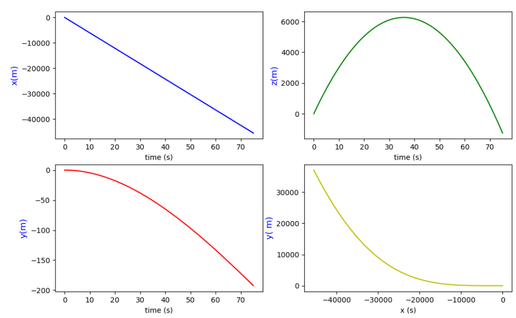
De acuerdo con el argumento de la cuestión 1, para el ángulo mínimo la fuerza de Coriolis disminuye, resultando en un valor del error menor.

3.3. Cuestión 3

Modificar la latitud y analizar cómo afecta. Si nos desplazamos al hemisferio Sur (latitudes negativas) se observa algún cambio en las curvas. En primer lugar, vamos a analizar las gráficas de la trayectoria del proyectil considerando diferentes latitudes.

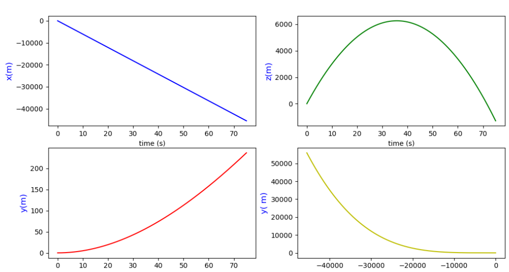


(a) $\phi = 40$

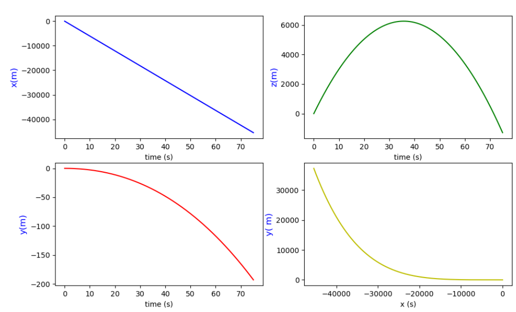


(b) $\phi = -40$

Figura 3: Comparación de la trayectoria para latitud ± 40



(a) $\phi = 120$



(b) $\phi = -120$

Figura 4: Comparación de la trayectoria para latitud ± 120

Cuando inicialmente apuntamos en dirección al hemisferio Norte (latitudes positivas), la trayectoria se curva hacia la derecha. Mientras que, si el tiro se efectúa en el hemisferio Sur (latitudes negativas), la trayectoria tiende a curvarse hacia la izquierda con respecto a la dirección inicial. Se debe a que la rotación de la Tierra es de Oeste a Este.

Por otro lado, introducimos en el programa una latitud negativa ($\phi = -40$) y vemos cómo afecta a la gráfica del error en función del ángulo.

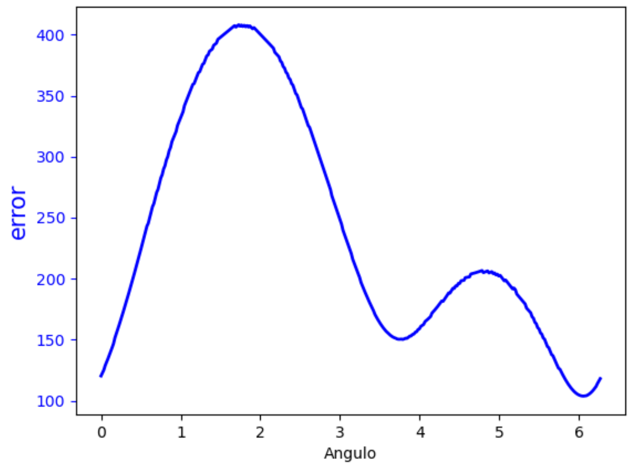


Figura 5: Error del tiro en función del ángulo.

Aunque la representación es similar a la obtenida en la cuestión anterior, nos fijamos en que el valor mínimo se alcanza en 0 y 2π. Esto se debe a que la velocidad angular (ecuación 3) depende del seno y el coseno de la latitud. Recordamos que:

$$cos(\phi) = cos(2\pi) = 1$$

$$cos(\phi) = cos(0) = 1$$

Mientras que para estos valores de la latitud, el seno se anula. Por tanto, se reduce la aceleración de Coriolis y obtenemos el valor mínimo del error.

Podemos concluir que cuando tenemos latitudes positivas, el error mínimo aparece al disparar de norte a sur; y para latitudes negativas, su mínimo está al lanzarlo de sur a norte.

3.4. Cuestión 4

Entrando un valor concreto de ángulos definimos un tiro parabólico puro. Modifica los ángulos de lanzamiento para que el tiro real caiga lo más cerca posible de la posición predicha por el tiro parabólico.
Haciendo uso del código de Python simulamos un tiro parabólico teniendo en cuenta la rotación de la Tierra y la presencia de rozamiento.
Los ángulos que debemos modificar son el ángulo de alzada del tiro y el ángulo sobre el plano.

Ángulo de alzada	10.75º
Ángulo sobre el plano	0.149º
Error (m)	13.869

Tabla 5: Ángulos de lanzamiento.

Con estos valores, obtenemos un movimiento que sigue una trayectoria cercana a la del tiro puro. El error obtenido es mucho menor que en otros casos en los que alcanzamos los 300m.
En la figura 6 podemos ver que el tiro real cae muy cerca de la posición calculada para el tiro puro.

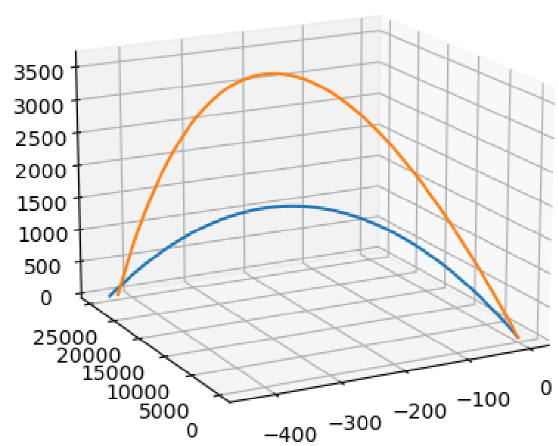


Figura 6: Representación 3d tiro parabólico puro y tiro real.

4. Bibliografía

Algunas de las referencias bibliográficas empleadas para la realización de este informe son:

- Guión de prácticas de ordenador (2023). Movimiento relativo: tiro [Material de clase]. Universidad de Alicante, Departamento de Física.

- Código de Python.