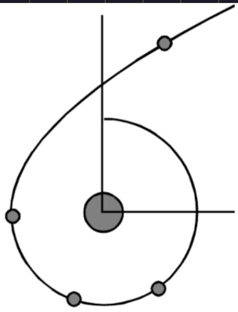
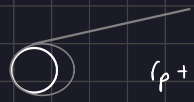
ENERO 2021

5) Una sonda espacial de exploración, de masa m, se acerca a un planeta de masa M, muchísimo mayor, y radio R. La sonda se aproxima al planeta siguiendo una órbita parabólica con los motores apagados. Cuando llega a su punto de máximo acercamiento, situado a una altura R por encima de la superficie del planeta, dispara sus motores para conseguir un cambio de velocidad que consideraremos instantáneo, con el fin de entrar en una órbita elíptica que tenga su pericentro justo sobre la superficie del planeta.
¿En qué factor debe cambiar la velocidad para conseguirlo? **(2 ptos)**





$r_p + r_a = 2a = 3R$ $\qquad$ $r_p = R$, $r_a = 2R$

El momento angular del satélite $L = rp\sin\alpha$ donde $L_p = Rmv_p\sin\frac{\pi}{2}$ $\quad L_a = 2Rmv_a\sin\frac{\pi}{2}$
Por el T^ma^ de conservación del momento angular $L_a = L_p$

$$Rmv_p = 2Rmv_a \iff Rv_p = 2Rv_a \iff v_p = 2v_a$$

Por el T^ma^ de la conservación de la EM, $\Delta E = 0$ $\quad E_{ap} = E_{peri} \iff U_a + K_a = U_p + E_p \iff \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{R} \iff$

$$\iff \frac{1}{2}v_a^2 - \frac{GM}{2R} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM}{R} \iff v_a^2 - \frac{GM}{R} = v_p^2 - \frac{2GM}{R} \iff v_a^2 + \frac{GM}{R} = v_p^2$$

Sustituyendo $v_p = 2v_a$ en $v_a^2 + \frac{GM}{R} = v_p^2$ $\qquad \frac{GM}{R} = 3v_a^2 \iff v_a = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$ $\rightarrow$ Velocidad final

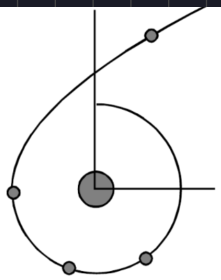
Calculamos ahora su velocidad inicial (la velocidad en la órbita parabólica)

$$0 = E = K + U = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{2R} \iff \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{GM}{2R} \iff v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{\frac{\frac{GM}{3R}}{\frac{GM}{R}}} = \sqrt{\frac{R}{3R}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \iff v_a = \sqrt{\frac{1}{3}}\,v_0 \iff v_a = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0$$

ENERO 2020

5) Una sonda espacial de masa m se acerca a un planeta de masa M, muchísimo mayor. Cuando se encuentra a una gran distancia, tiene una velocidad $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, donde R es el radio del planeta, y lleva los motores apagados. Atraída por la gravedad, llega al punto de máximo acercamiento, r_0, situado $R/4$ por encima de la superficie del planeta. Entonces dispara sus motores para conseguir un cambio de velocidad que consideraremos instantáneo.
¿En qué factor debe cambiar la velocidad para que la sonda entre en una órbita circular? **(2 ptos)**



Sabemos que la órbita original es una órbita hiperbólica y sabemos que el satélite cambia a una órbita circular, es decir, una órbita elíptica donde $r_a = r_p$.

El momento angular en la órbita circular: $\quad L = rp\sin\alpha$
$L_a = L_p \iff \frac{5R}{4}mv_a\sin\frac{\pi}{2} = \frac{5R}{4}mv_p\sin\frac{\pi}{2} \iff v_a = v_p$

Sabemos pues que la velocidad del satélite será la misma en todo el recorrido de la órbita circular por lo que es normal que obtengamos que $v_a = v_p$

Energía órbita circular $\quad E = -\frac{2GMm}{5R} = K + U = \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{4GMm}{5R} \iff -\frac{2}{5}\frac{GM}{R} = \frac{1}{2}v_c^2 - \frac{4}{5}\frac{GM}{R} \iff \sqrt{\frac{4}{5}\frac{GM}{R}} = v_c$

La energía de la órbita hiperbólica es >0, y, como en el infinito no siente atracción gravitatoria por el planeta así que la energía mecánica es solo la energía cinética del satélite en el infinito $E = \frac{1}{2}mv_0^2$

Cuando el satélite llega al punto de máximo acercamiento $r = \frac{5}{4}R$ sí que tendrá energía potencial gravitatoria. Por el T^ma^ de la conservación de la energía $E_1 = E \iff K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 \iff K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{4}{5}\frac{GM}{R} \iff \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{GM}{R} + \frac{4}{5}\frac{GM}{R} \iff v_1 = \sqrt{\frac{13}{5}\frac{GM}{R}}$

$$\frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{\frac{13}{5}\frac{GM}{R}}{\frac{4}{5}\frac{GM}{R}}} = \sqrt{\frac{\frac{13}{5}}{\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{13}{4}} \iff v_1 = \sqrt{\frac{13}{4}}\,v_0$$

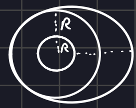
ENERO 2022

5) Un satélite artificial describe una órbita circular en torno a la Tierra a una altura R sobre la superficie terrestre, donde R es el radio de la Tierra.

a) Se quiere que el satélite pase a describir una órbita elíptica en la que el apogeo se encuentre a una altura 2R sobre la superficie terrestre. Para ello, los motores del satélite cambian la velocidad del mismo. ¿En qué factor tenemos que modificar su velocidad? **(1 pto)**

b) Una vez el satélite se encuentra en la nueva órbita, se quiere que pase a una órbita circular de radio 3R. ¿Dónde habría que encender de nuevo los motores y en qué factor sería necesario modificar la velocidad? **(1 pto)**

Considera que la masa de la Tierra y la constante de gravitación universal son datos.



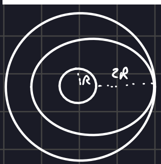
Cambio de órbita:
Elíptica circular ⟶ Elíptica

$E_0 = -\frac{GMm}{4R}$ $\quad E_1 = -\frac{GMm}{5R}$

• $E_0 = -\frac{GMm}{4R} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{2R} \iff v_0 = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$

• $E_1 = -\frac{GMm}{5R} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{2R} \iff v_1 = \sqrt{\frac{3}{5}\frac{GM}{R}}$

$\frac{v_0}{v_1} = \sqrt{\frac{\frac{GM}{2R}}{\frac{3}{5}\frac{GM}{R}}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \iff v_1 = \sqrt{\frac{6}{5}}\,v_0$



Habría que encender los motores en el apocentro de la órbita elíptica de la que partimos

$\frac{v_{11}}{v_2} = \sqrt{\frac{\frac{4}{15}\frac{GM}{R}}{\frac{1}{3}\frac{GM}{R}}} = \sqrt{\frac{12}{15}} = \sqrt{\frac{4}{5}} \iff v_2 = \sqrt{\frac{5}{4}}\,v_{11}$

$E_1 = -\frac{GMm}{5R} = \frac{1}{2}mv_{11}^2 - \frac{GMm}{3R} \iff v_{11} = \sqrt{\frac{4}{15}\frac{GM}{R}}$

$E_2 = -\frac{GMm}{6R} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{3R} \iff v_2 = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{GM}{R}}$

JULIO 2021

5). Un satélite artificial realiza una órbita circular alrededor de la Tierra, situado a una altura sobre la superficie $2R_T$, donde R_T es el radio de la Tierra

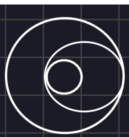
(a) Calcula la velocidad del satélite, su momento angular y su periodo orbital en función de G, M_T y R_T. **(0,5 ptos)**

(b) Si cambiamos la velocidad del satélite, manteniendo su dirección, podemos conseguir que el satélite pase a describir una órbita elíptica que justo roza la superficie terrestre. Calcula cuánto tiene que cambiar la velocidad en función de las mismas constantes. **(1 pto)**

$L = rp\sin\alpha \Rightarrow L = 3Rmv\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}^{\,1} = m\sqrt{3GMR}$ $\ \mathrm{kg\,\frac{m^2}{s}}$

$F_c = F_g \iff \frac{mv^2}{3R} = \frac{GMm}{9R^2} \iff v = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$ m/s

$T = \sqrt{\frac{4\pi^2\, 27R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{108\pi^2 R^3}{GM}}\ s^{-1}$



Energía órbita circular $\quad E_0 = -\frac{GMm}{6R} = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{3R} \iff v_0 = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{GM}{R}}$

Energía órbita elíptica $\quad E_1 = -\frac{GMm}{4R} = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{3R} \iff v_1 = \sqrt{\frac{1}{6}\frac{GM}{R}}$

$\frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{\frac{1}{6}\frac{GM}{R}}{\frac{1}{3}\frac{GM}{R}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \iff v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,v_0$

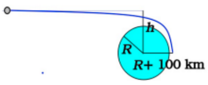
JULIO 2022

5). Un meteorito de masa $m = 4 \times 10^{12}$ kg se dirige hacia la Tierra. A una gran distancia, lleva una velocidad $v = 10$ m/s y tiene un parámetro de impacto h. Supongamos que el meteorito pasa rozando la Tierra, tan solo 100 km por encima de la superficie. Se dice que la Tierra presenta al meteorito un tamaño efectivo de blanco (o sección eficaz de dispersión) $S = \pi \cdot h^2$.

a) ¿Qué velocidad lleva el meteorito en el punto de máximo acercamiento? **(0,75 ptos)**

b) Calcula el valor de S. **(0,75 ptos)**

c) ¿Qué ocurriría si la velocidad inicial del meteorito fuera tan solo $v = 1$ m/s? **(1 pto)**



$R_{\oplus} = 6.37 \times 10^6$ m ; $M_{\oplus} = 5.98 \times 10^{24}$ kg ; $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg

Como viene del infinito y lleva velocidad no nula ⇒ órbita hiperbólica

$E = K = \frac{1}{2}mv_0^2$ $\quad (v_0 = 10\,m/s)$

$E_a = K + U = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{R+100\cdot10^3} \iff \sqrt{2\left(50 + \frac{GM}{R+100\cdot10^3}\right)} = v_1 = 1'1\cdot10^4$ m/s