



Universidad de Alicante

---

# Osciladores acoplados

---

Mireia Serrano Beltrá

Mecánica Analítica  
Prácticas de ordenador

# Índice

	Página
<b>1. Objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2. Fundamento teórico</b>	<b>1</b>
2.1. Modos normales . . . . .	2
2.1.1. Modo normal antisimétrico . . . . .	2
2.1.2. Modo normal simétrico . . . . .	3
2.2. Acoplamiento débil . . . . .	3
<b>3. Resultados</b>	<b>4</b>
3.1. Dinámica del sistema . . . . .	4
3.1.1. Desplazamiento . . . . .	4
3.1.2. Energías . . . . .	6
3.1.3. FFT . . . . .	8
3.2. Modos normales . . . . .	11
3.2.1. Modo simétrico . . . . .	11
3.3. Modo antisimétrico . . . . .	13
3.4. Ampliación . . . . .	15
<b>4. Conclusión</b>	<b>17</b>
<b>5. Bibliografía</b>	<b>17</b>

## 1. Objetivos

El objetivo principal de esta práctica es estudiar un sistema de osciladores acoplados.

## 2. Fundamento teórico

Para estudiar un sistema formado por dos osciladores acoplados, vamos a tomar como modelo el sistema formado por dos partículas iguales de masa  $m$  situadas en los extremos de dos muelles de idéntica constante elástica  $k$ . El acoplamiento se efectúa uniéndolas mediante un muelle de constante  $k'$ , tal como se puede ver en la figura.

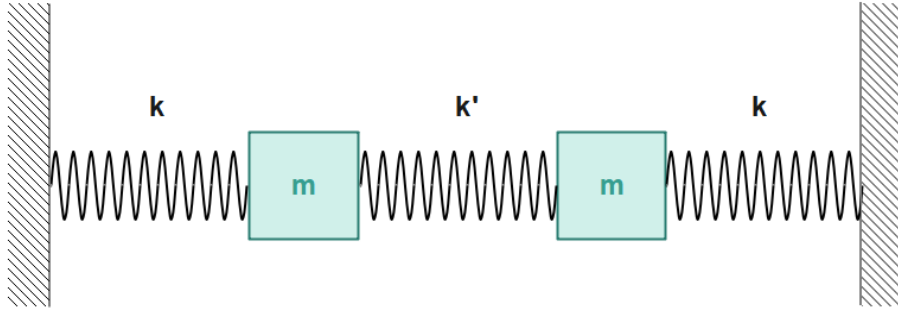


Figura 1: Dibujo esquemático de dos muelles acoplados

Llamaremos  $x_1$  y  $x_2$  a los desplazamientos de cada una de las partículas a partir de su posición de equilibrio. Por lo que el sistema tendrá dos grados de libertad.

El muelle de la izquierda se estira  $x_1$  y el de la derecha se comprime  $x_2$ , mientras que el central se deforma  $x_2 - x_1$ . Por lo que las fuerzas sobre cada partícula serán:

$$F_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2)$$

$$F_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1)$$

Aplicamos la segunda Ley de Newton aplicada a cada masa. Y escribimos las ecuaciones del movimiento en forma de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$m\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + (k + k')x_2 - k'x_1 = 0$$

Buscamos soluciones oscilantes:

$$x_1(t) = B_1 e^{i\omega t}$$

$$x_2(t) = B_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{bmatrix} (k + k' - m\omega^2) & -k' \\ -k' & (k + k' - m\omega^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que haya soluciones no triviales el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo.

$$(k + k' - m\omega^2)^2 - (k')^2 = 0 \implies \omega = \sqrt{\frac{k + k' \pm k'}{m}}$$

Finalmente tenemos dos movimientos armónicos simples de frecuencias:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} \quad (1)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

El movimiento general de dos osciladores acoplados puede considerarse como la superposición de dos modos normales de oscilación de frecuencias angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

## 2.1. Modos normales

A continuación realizaremos un cambio de coordenadas:

$$\eta_1 = x_1 + x_2$$

$$\eta_2 = x_1 - x_2$$

De manera que las ecuaciones se escriben como:

$$m\ddot{\eta}_1 + (k + 2k')\eta_1 = 0$$

$$m\ddot{\eta}_2 + k\eta_2 = 0$$

### 2.1.1. Modo normal antisimétrico

El primer modo normal de frecuencia se obtiene cuando los dos osciladores se mueven en oposición de fase. Por lo tanto, las condiciones iniciales serán:

$$x_1(0) = -x_2(0)$$

$$\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$$

Entonces:  $\eta_2(0) = 0$  y  $\dot{\eta}_2(0) = 0$ , finalmente:

$$\eta_2(t) = 0 \quad \forall t$$

### 2.1.2. Modo normal simétrico

Por otro lado, cuando los dos osciladores se mueven en fase, tenemos que:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$$

En este caso:

$$\eta_1(t) = 0 \quad \forall t$$

El movimiento general es una combinación lineal de estos dos modos normales:

$$x_1(t) = A_0^1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_0^2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2(t) = A_0^1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - A_0^2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

## 2.2. Acoplamiento débil

Además estudiaremos el caso de acoplamiento débil donde  $k' \ll k$ . Con esta aproximación las ecuaciones de movimiento quedan como:

$$x_1(t) = A_0 \cos(\epsilon \omega_0 t) \cos(\omega_0 t)$$

$$x_2(t) = A_0 \sin(\epsilon \omega_0 t) \sin(\omega_0 t)$$

Donde  $\omega_0$  es la frecuencia natural de vibración, para hallarla debemos fijar una de las masas, por ejemplo tomamos  $x_2 = 0$ :

$$m\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k + k'}{m}} \quad (3)$$

Si calculamos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  utilizando la siguiente aproximación:  $\epsilon = \frac{k'}{2k} \ll 1$ , obtenemos que las dos frecuencias están muy próximas a  $\omega_0$ .

$$\omega_1 \simeq \omega_0(1 + \epsilon)$$

$$\omega_2 \simeq \omega_0(1 - \epsilon)$$

### 3. Resultados

Mediante un programa de Python resolveremos las ecuaciones del movimiento para estudiar el movimiento de las dos masas y la transformada rápida de Fourier.

#### 3.1. Dinámica del sistema

En este apartado representaremos el movimiento de las masas para diferentes valores de  $k'$ . Además estudiaremos la evolución de las energías del sistema con el tiempo. Por último, analizaremos las frecuencias utilizando la Transformada Rápida de Fourier.

##### 3.1.1. Desplazamiento

En primer lugar, tomamos  $k' = 0,1 \text{ N/m}$  y  $k = 10 \text{ N/m}$ . Puesto que  $k' \ll k$ , se trata de un caso de acoplamiento débil.

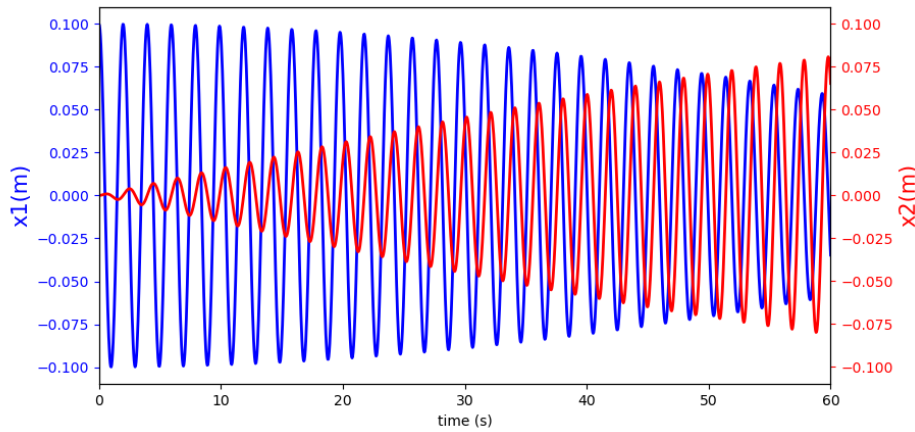


Figura 2: Representación desplazamientos de  $x_1$  y  $x_2$ .

En la gráfica 2 podemos ver la interacción de las partículas en la situación de acoplamiento débil. Inicialmente la masa 1 tiene su amplitud máxima mientras que la masa 2 se mantiene cerca de la posición de equilibrio. A medida que las partículas continúan oscilando alrededor de la posición de equilibrio, se produce un intercambio de energía y las amplitudes de las partículas varían periódicamente.

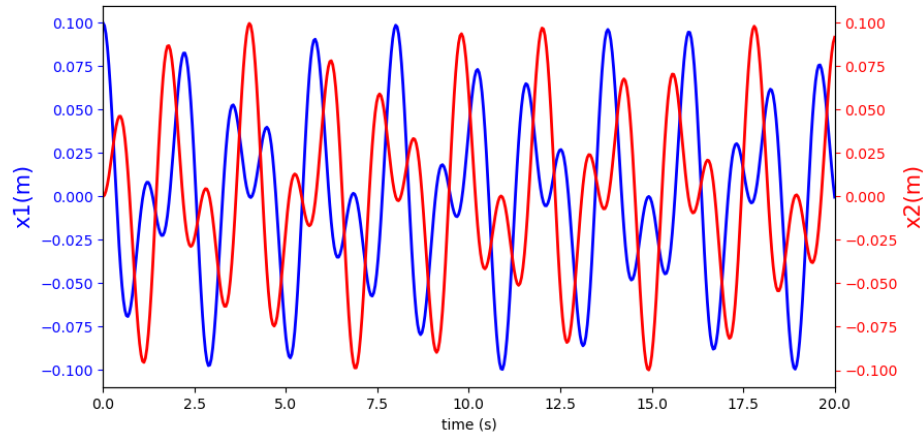


Figura 3: Representación desplazamientos de  $x_1$  y  $x_2$ .

En la gráfica 3 realizamos una representación del caso en el que las constantes elásticas son iguales, en concreto  $k' = k = 10 \text{ N/m}$ . Podemos comprobar con la que las amplitudes de las oscilaciones pueden aumentar significativamente, lo que resulta en oscilaciones de mayor magnitud.

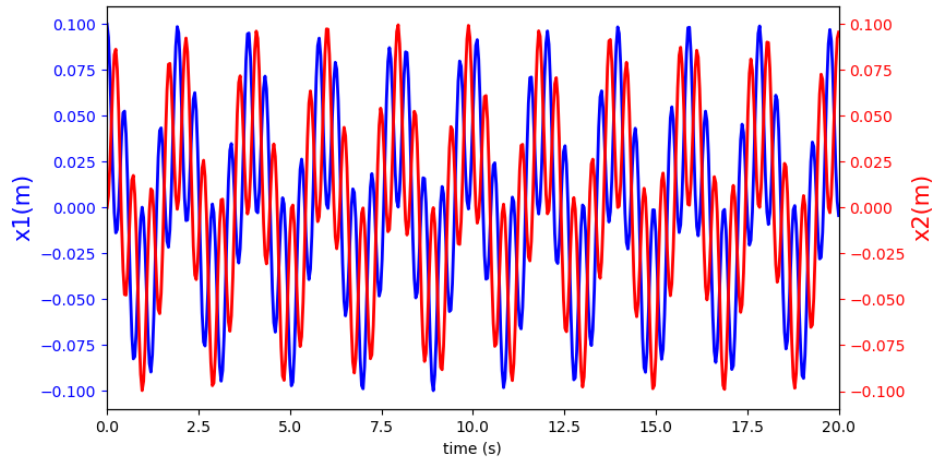


Figura 4: Representación desplazamientos de  $x_1$  y  $x_2$ .

Por último, estudiamos el desplazamiento de las partículas cuando  $k'$  es mayor que  $k$ , en concreto tomamos  $k' = 80 \text{ N/m}$  y  $k = 10 \text{ N/m}$ . Se trata de un acoplamiento fuerte entre las masas. En este caso se produce un aumento en la fuerza recuperadora del muelle, esto resulta en oscilaciones más rápidas y más intensas de las masas. Este efecto se puede ver claramente en la animación realizada con el programa Python.

### 3.1.2. Energías

A continuación, se investigará cómo la variación de la constante elástica  $k'$  afecta las energías del sistema. Para ello representamos gráficamente los mismos casos que en el apartado anterior.

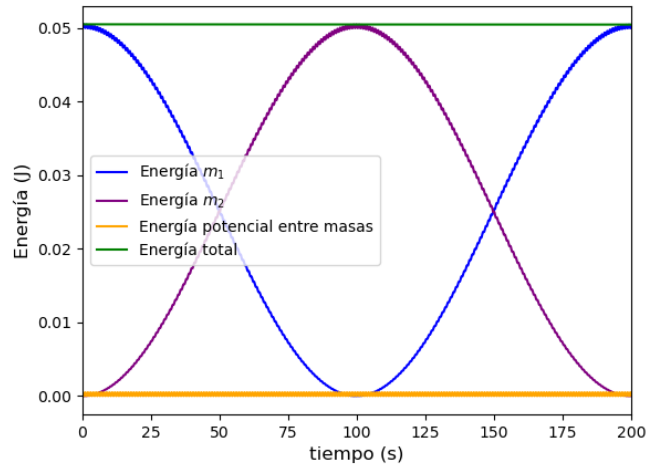


Figura 5: Representación de las energías del sistema.

Para empezar, en la gráfica 5 estudiamos las energías para un acoplamiento débil. A medida que las partículas continúan oscilando, la energía se transfiere de una partícula a otra de manera alternativa. De acuerdo con el principio de conservación de la energía, la energía total del sistema se mantiene constante.

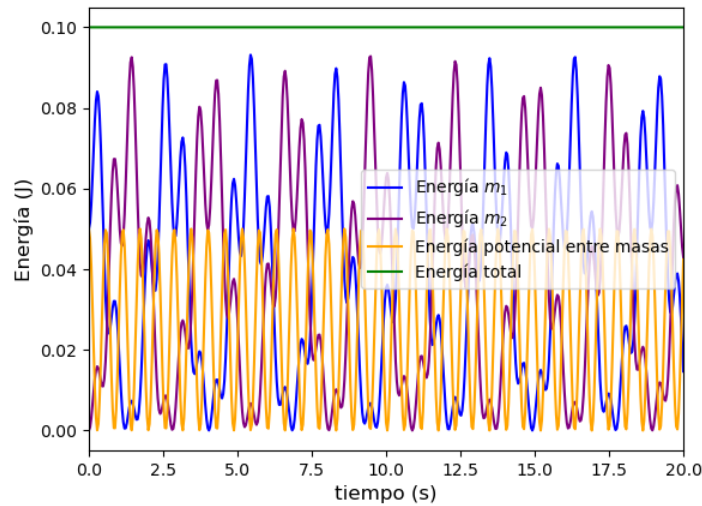


Figura 6: Representación de las energías del sistema.



En la gráfica 6 estudiamos las energías para  $k' = k = 10 \text{ N/m}$ . En este caso la energía potencial entre las masas ha aumentado puesto que el valor de la constante elástica  $k'$  es mayor.

En cuanto a las energías de cada una de las masas, se puede ver que los patrones de las oscilaciones son muy similares. Sin embargo, cuando una masa alcanza su valor máximo la otra se encuentra en un mínimo. Este fenómeno significa que cuando una masa alcanza su máxima energía cinética (máxima velocidad y máximo desplazamiento), la otra masa se encuentra en un punto de equilibrio donde su energía cinética es mínima. Esto implica que la energía se está transfiriendo de una masa a otra a medida que oscilan.

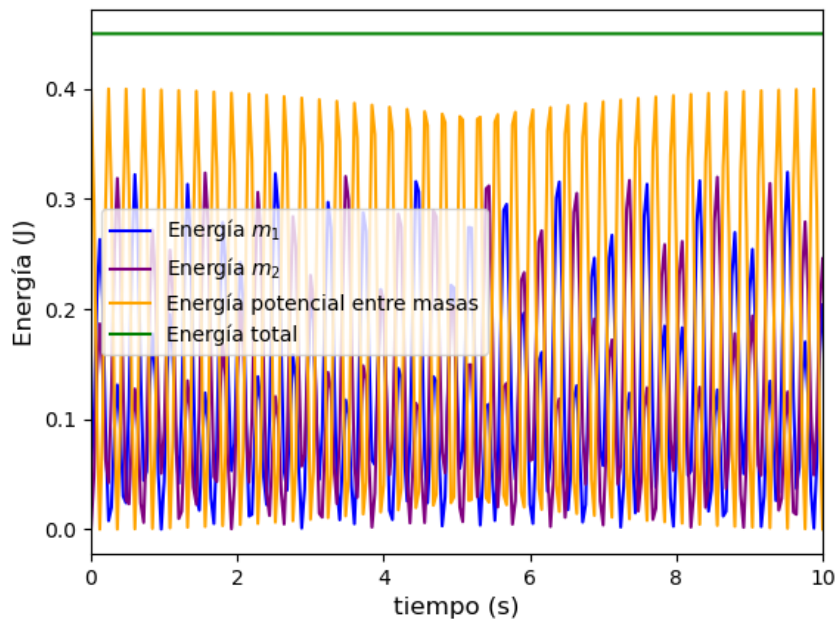


Figura 7: Representación de las energías del sistema.

Finalmente, representamos las energías del sistema para  $k' = 80 \text{ N/m}$  y  $k = 10 \text{ N/m}$ . Si comparamos la energía potencial entre las masas con el resto de casos, nos damos cuenta de que al aumentar la constante elástica aumenta la energía potencial, tal y como establece la expresión teórica ( $U = \frac{1}{2}kx^2$ ). Además, podemos comprobar de nuevo la conservación de la energía total del sistema.

### 3.1.3. FFT

En este apartado, utilizaremos la transformada rápida de Fourier (FFT) para analizar las frecuencias del sistema. La transformada de Fourier nos permite descomponer una señal y así identificar las frecuencias características del sistema.

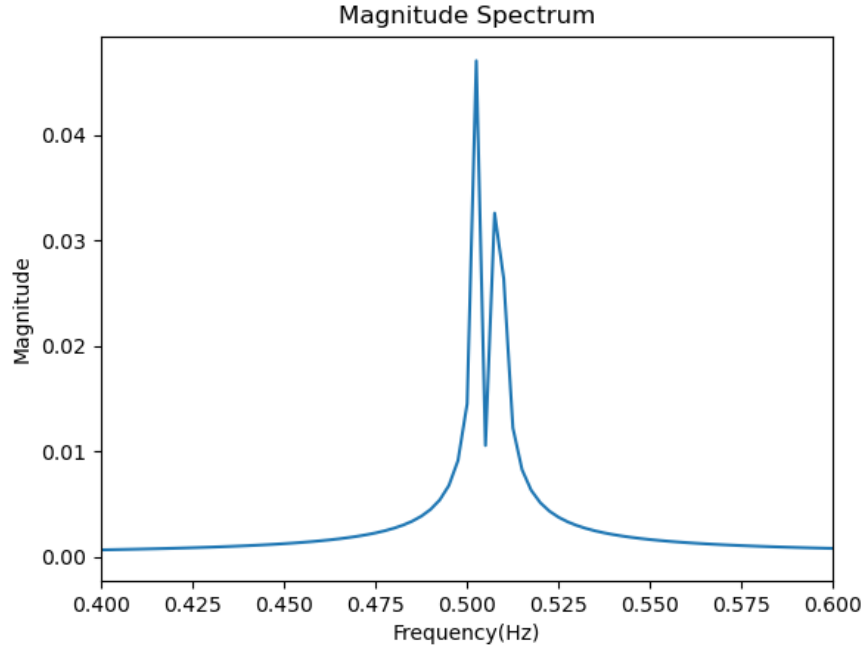


Figura 8: Espectro de frecuencias del sistema de osciladores acoplados. Caso de acoplamiento débil.

En la gráfica 8 observamos dos picos que corresponden a las frecuencias naturales del sistema. De la gráfica extraemos que los valores de las frecuencias son:  $f_1 = 0,503 \text{ Hz}$  y  $f_2 = 0,508 \text{ Hz}$ . A partir de la expresión 4 podemos obtener las frecuencias angulares:

$$\omega = f \cdot 2\pi \quad (4)$$

De manera que:

$$\omega_1 = 3,158 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 3,192 \text{ rad/s}$$

Además, comparamos estos resultados con los obtenidos a partir de la expresión teórica (ecuación 3) y verificamos que es una buena aproximación:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k + k'}{m}} = \sqrt{10,1} = 3,178 \text{ rad/s} \sim 3,158 \text{ rad/s} \sim 3,192 \text{ rad/s}$$

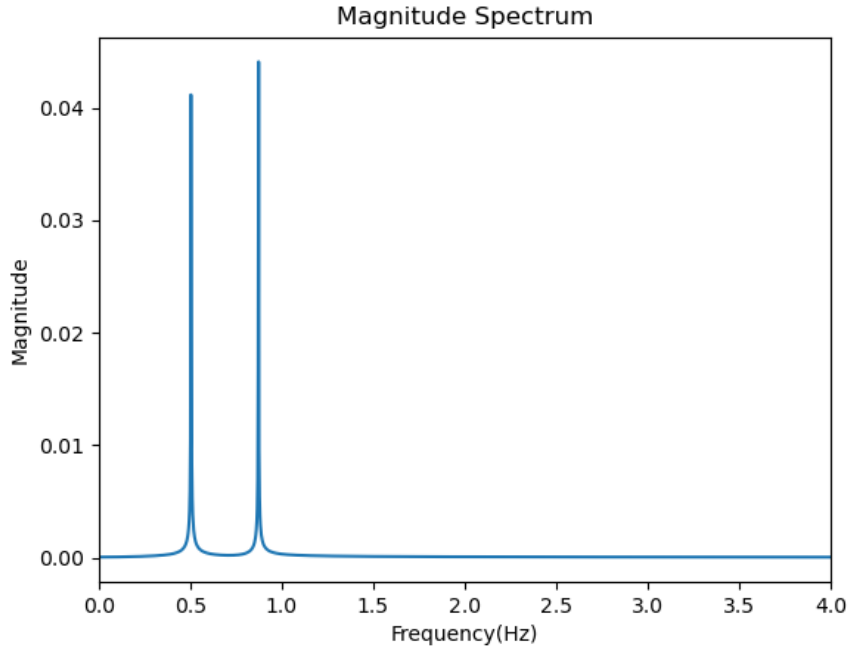


Figura 9: Espectro de frecuencias del sistema de osciladores acoplados. Caso en el que las constantes elásticas son iguales.

Realizamos el mismo procedimiento para los casos restantes. En la gráfica 9 vemos las frecuencias cuando  $k' = k$ :

$$f_1 = 0,874 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 0,508 \text{ Hz}$$

De acuerdo con la ecuación 4 las frecuencias angulares son:

$$\omega_1 = 5,492 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 3,192 \text{ rad/s}$$

Si comparamos estos resultados con las expresiones analíticas:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} = 5,477 \text{ rad/s} \sim 5,492 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{10} = 3,162 \text{ rad/s} \sim 3,192 \text{ rad/s}$$

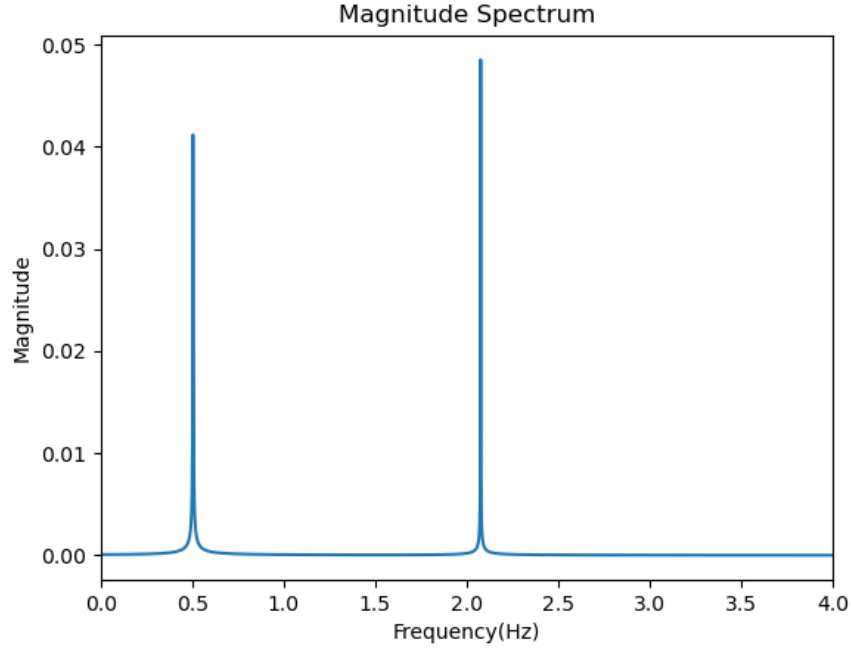


Figura 10: Espectro de frecuencias del sistema de osciladores acoplados. Caso de acoplamiento fuerte.

Finalmente, las frecuencias obtenidas cuando  $k' \gg k$ :

$$f_1 = 2,071 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 0,508$$

De acuerdo con la ecuación 4 las frecuencias angulares son:

$$\omega_1 = 13,012 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 3,192 \text{ rad/s}$$

Repetimos el mismo procedimiento y comparamos los datos experimentales con los teóricos:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} = 13,038 \text{ rad/s} \sim 13,012 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{10} = 3,162 \text{ rad/s} \sim 3,192 \text{ rad/s}$$

Del estudio de la Transformada Rápida de Fourier extraemos que al aumentar la constante elástica del acoplamiento ( $k'$ ) la frecuencia asociada a  $+k'$  aumenta. Mientras que la frecuencia ( $\omega_2$ ) que depende únicamente de  $k$  se mantiene constante. Al aumentar  $k'$  las masas se ven más fuertemente afectadas por el movimiento de la otra.

## 3.2. Modos normales

A continuación analizaremos los modos normales cambiando las condiciones iniciales en el programa de Python tal y como se describe en el desarrollo teórico de este informe.

### 3.2.1. Modo simétrico

Las condiciones iniciales son:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0,1$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$$

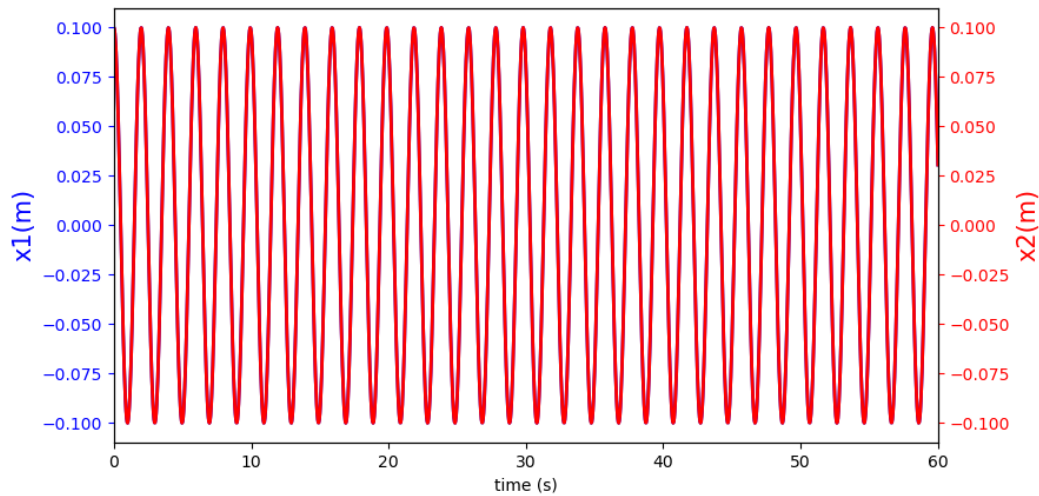


Figura 11: Desplazamientos de  $x_1$  y  $x_2$  en el caso del modo simétrico.

La gráfica obtenida para el desplazamiento de  $x_1$  y  $x_2$  nos muestra una simetría en las oscilaciones, ambas masas oscilan en fase, alcanzan sus valores máximos y mínimos en el mismo instante, independientemente del valor de  $k'$  que tomemos.

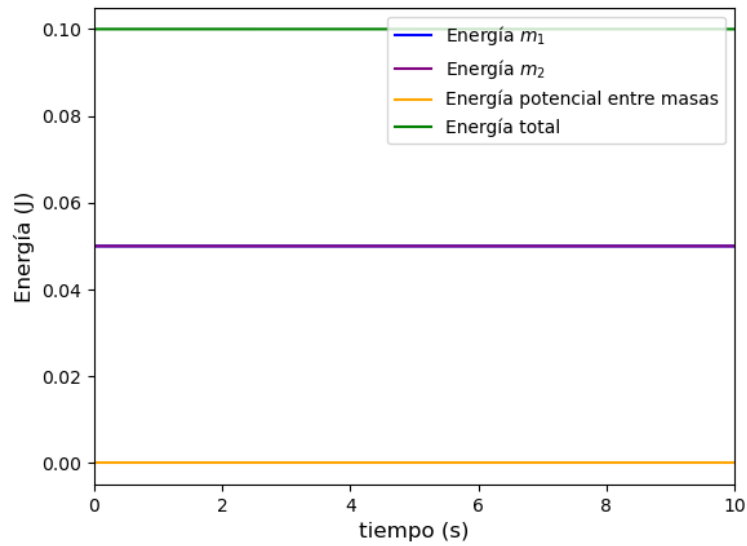


Figura 12: Representación gráfica de las energías del sistema.

En cuanto a las energías del sistema, el reparto es uniforme, ambas masas tendrán la misma energía cinética y potencial en cada instante de tiempo. Por tanto, como era de esperar, la energía total del sistema se conservará.

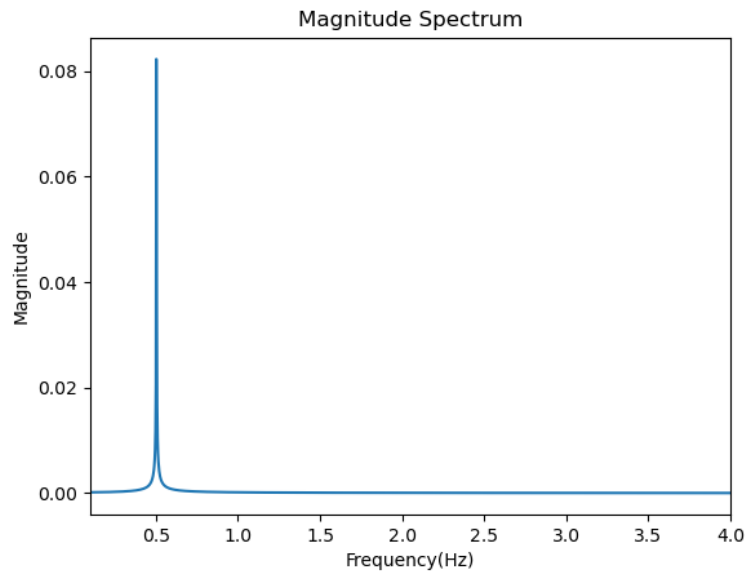


Figura 13: Espectro de frecuencias del sistema de osciladores acoplados. Modo simétrico.

Al realizar el mismo estudio que en el apartado anterior del espectro de frecuencias mediante la Transformada Rápida de Fourier obtenemos un solo pico. Esto significa que tendremos una única frecuencia natural, cuyo valor es  $f = 0,5 \text{ Hz}$ , aplicando la ecuación 4:

$$\omega = \pi \text{ rad/s}$$

Este resultado se aproxima al valor teórico de la frecuencia obtenido aplicando la ecuación 1 :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{10} \text{ rad/s} \sim \pi \text{ rad/s}$$

### 3.3. Modo antisimétrico

Por otro lado, realizaremos el mismo estudio pero en el caso del modo antisimétrico. Las condiciones iniciales que debemos tomar (de acuerdo con el desarrollo teórico) son:

$$x_1(0) = -x_2(0)$$

$$\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$$

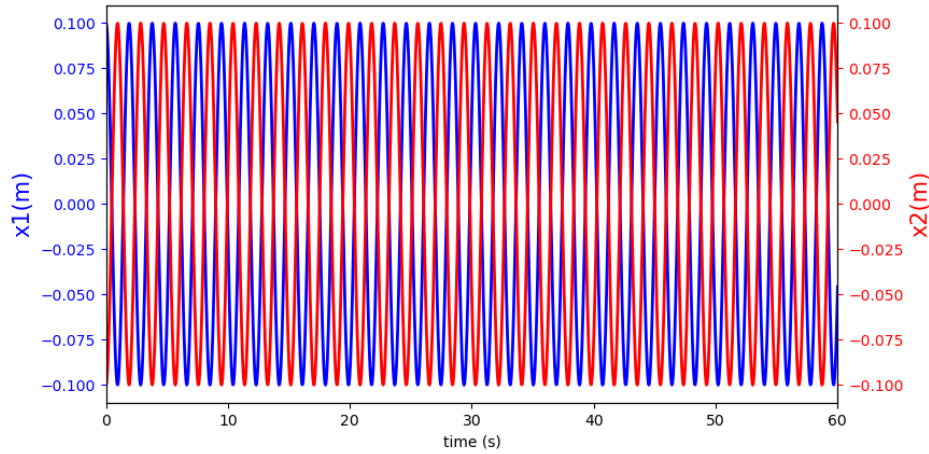


Figura 14: Desplazamientos de  $x_1$  y  $x_2$  en el caso del modo antisimétrico.

La gráfica 14 nos muestra el caso opuesto al modo simétrico, cuando una partícula se mueve en un sentido, la otra se mueve en el sentido opuesto. En la gráfica, se puede ver que cuando una masa alcanza su amplitud máxima, la otra masa alcanza su amplitud mínima.

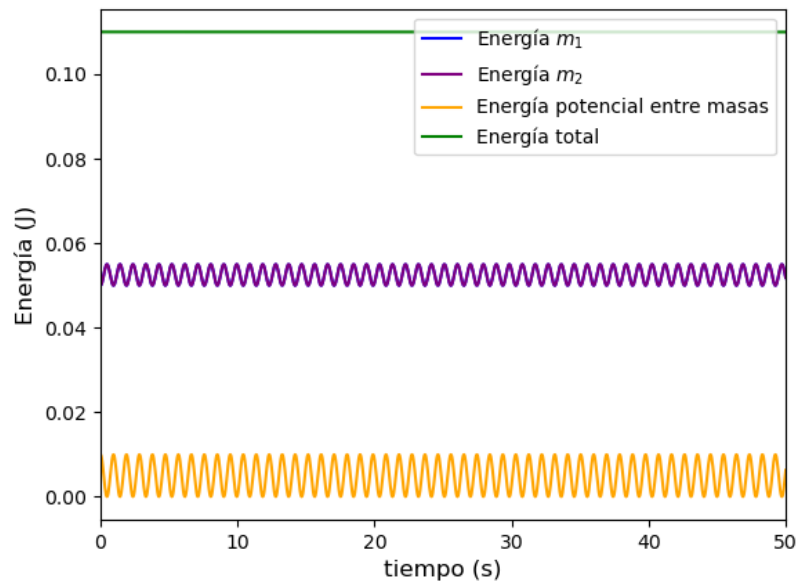


Figura 15: Representación gráfica de las energías del sistema.

A pesar de tener una relación opuesta entre las masas, se puede comprobar en la gráfica 15 que la energía total sigue permaneciendo constante.

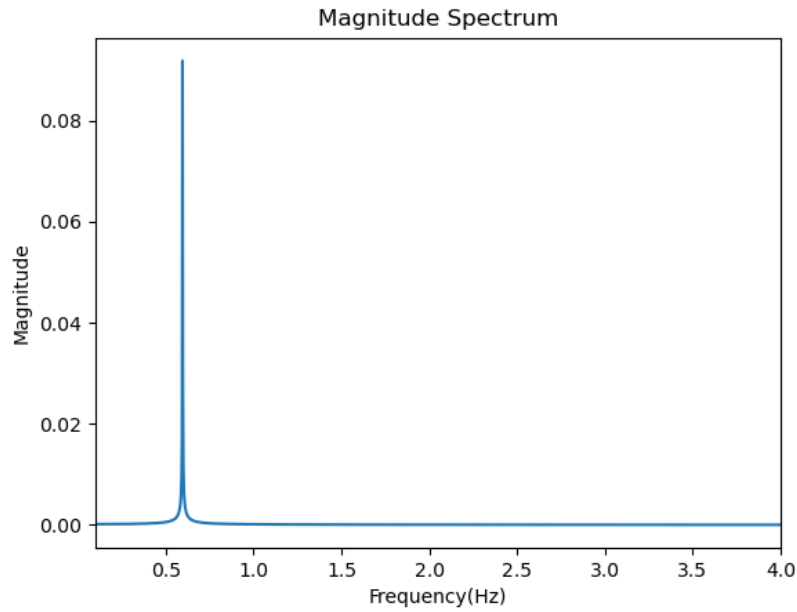


Figura 16: Espectro de frecuencias del sistema de osciladores acoplados. Modo antisimétrico.



Al igual que en el modo simétrico nos encontramos con un solo pico en la gráfica, por lo que tendremos una única frecuencia natural. Seguimos el mismo procedimiento para hallar su valor,  $f = 0,874 \text{ Hz}$ , la frecuencia angular será:

$$\omega = 5,492 \text{ rad/s}$$

Si lo comparamos con el valor teórico obtenido tras aplicar la ecuación 2:

$$\omega = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} = \sqrt{20} = 5,476 \text{ rad/s} \sim 5,492 \text{ rad/s}$$

### 3.4. Ampliación

Por último vamos a incluir un campo gravitatorio y veremos cómo afecta al sistema analizando los mismos conceptos y gráficas que en los anteriores apartados.

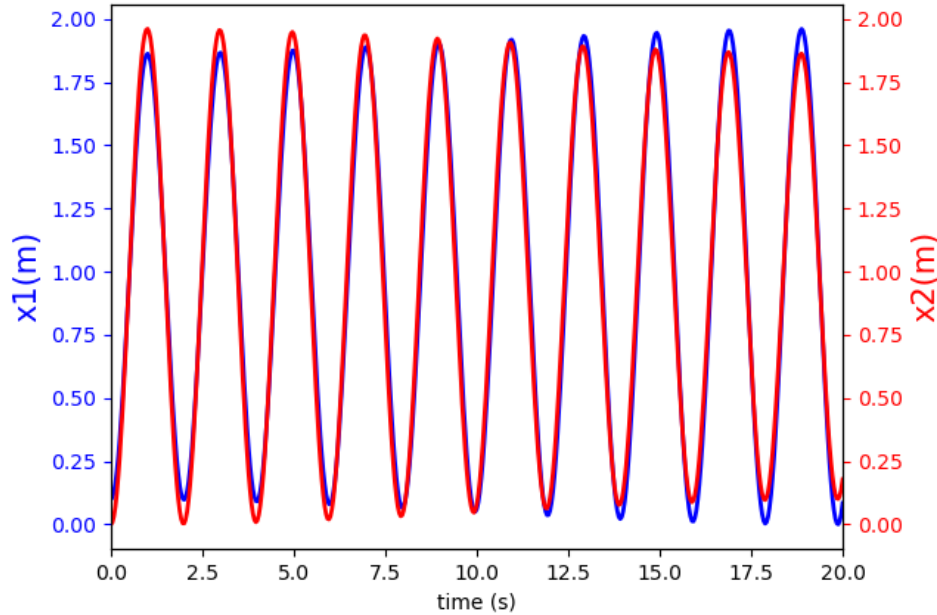


Figura 17: Representación desplazamientos de  $x_1$  y  $x_2$ .

En la gráfica 17 vemos que el movimiento de las masas es similar al caso del modo simétrico, las oscilaciones están en fase y alcanzan los valores máximos y mínimos a la vez.

Al analizar la animación obtenida con el programa de Python vemos que en este caso, las partículas se desplazan más distancia, esto también se verifica en la gráfica, las amplitudes son más grandes. Esto se debe a la fuerza gravitatoria añadida.

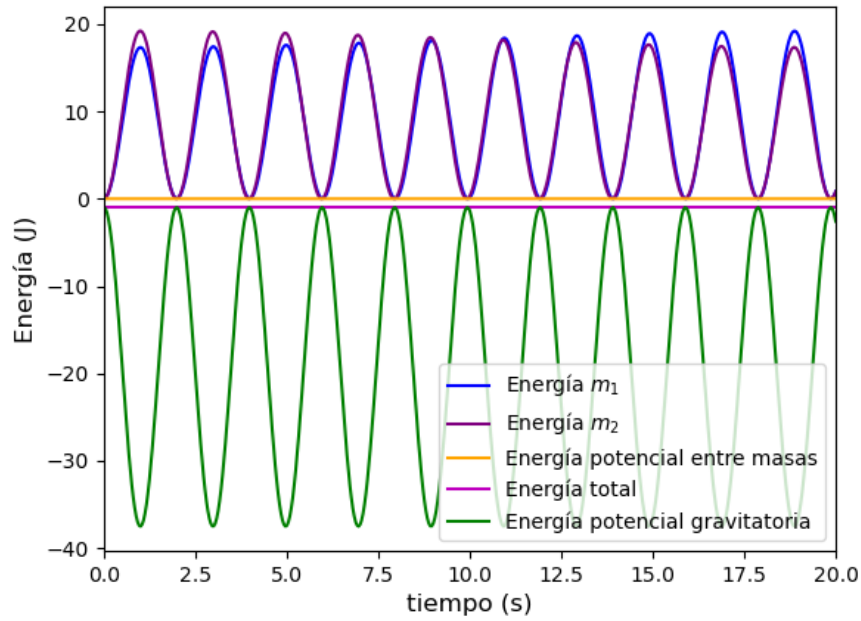


Figura 18: Representación gráfica de las energías del sistema.

Si realizamos el estudio energético de este sistema debemos incluir la energía potencial gravitatoria. En la gráfica 18 se verifica que esta nueva energía potencial es negativa, ya que su expresión es:

$$U_g = -m \cdot g \cdot h \quad (5)$$

Por otro lado, en cuanto a las oscilaciones de las energías individuales de las masas son iguales que en el resto de casos estudiados anteriormente. Sin embargo, cabe destacar que su valor ha aumentado considerablemente. Por último, tal y como hemos obtenido en todas las representaciones, la energía total del sistema se conserva.

## 4. Conclusión

En primer lugar se han resuelto las ecuaciones del movimiento de dos osciladores acoplados mediante un programa de Python. Seguidamente se han estudiado diferentes variaciones de la dinámica del sistema cambiando el valor de  $k'$ . Además se ha realizado un estudio completo de las energías del sistema en cada uno de los apartados, donde hemos comprobado que se conserva la energía en todo momento. Por último, con la ayuda de la Transformada Rápida de Fourier, se han obtenido las frecuencias características.

Por otro lado se ha llevado a cabo el análisis de los modos normales, primero el modo simétrico y después antisimétrico. En este caso se ha demostrado que existe una única frecuencia natural y se ha comparado con el valor teórico.

Una vez se ha explorado por completo el sistema se ha incluido una ampliación donde hemos añadido una fuerza gravitatoria, y hemos sido capaces de conocer el comportamiento de las masas. En conclusión, hemos llevado a cabo los objetivos de esta práctica de ordenador.

## 5. Bibliografía

Algunas de las referencias bibliográficas empleadas para la realización de este informe son:

- Guión de prácticas de ordenador (2023). Osciladores Acoplados [Material de clase]. Universidad de Alicante, Departamento de Física.
- Miralles Torres, J. A. (2023). Apuntes de Mecánica Analítica [Material de clase]. Universidad de Alicante, Departamento de Física.
- EHU Science Department. Acoplamiento de oscilaciones. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/acoplados/acoplados.html>
- Código de Python.