Además, para $m=0$, el autovalor de $\hat{p}^0$ es

$E_{\vec{p}} = |\vec{p}|$, luego

$$\left.\begin{aligned} (\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}})\Psi_R &= 0 \\ (\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}})\Psi_L &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ implica}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{|\vec{p}|}\Psi_R &= \Psi_R \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{|\vec{p}|}\Psi_L &= -\Psi_L \end{aligned}\right\} \text{ Esto significa que}$$

los estados con $m=0$ son también

autoestados del operador de helicidad

$$\hat{h} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{|\vec{p}|} \quad \text{con} \quad \text{autovalores}$$

$+1$ (Ψ_R) y -1 (Ψ_L).

Ojo: quiralidad y helicidad son lo mismo para partículas sin masa.

En el caso $m \neq 0$ tenemos las ecuaciones

$$(\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\Psi_R = m\,\Psi_L$$

$$(\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\Psi_L = m\,\Psi_R$$

que muestran oscilaciones entre Ψ_L y Ψ_R con una frecuencia proporcional a la masa. En particular, si consideramos un S.R. en el que la partícula está en reposo:

$$i\partial_0\Psi_R = m\Psi_L$$

$$i\partial_0\Psi_L = m\Psi_R\ ,$$

que es como un sistema de dos estados pero "duplicado".

Vamos a sacar ahora la <u>relación de dispersión</u> de las <u>partículas de Dirac masivas</u>

De nuevo partimos de

$$(\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\psi_R = m\psi_L \qquad (1)$$

$$(\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\psi_L = m\psi_R \qquad (2)$$

Eliminamos ψ_L de (1) e introducimos en (2)

$$(\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})(\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\psi_R = m^2\psi_R$$

$\Rightarrow$ Si ψ_L, ψ_R son autoestados de momento y energía:

$$\underbrace{(p^0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})(p^0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{p})}\psi_R = m^2\psi_R$$

$$[(p^0)^2 - |\vec{p}|^2]\psi_R = m^2\psi_R, \text{ luego}$$

$$E_{\vec{p}} = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

Observación: todavía seguimos teniendo estados con energía negativa. ¿Qué son estos estados?

Si escribimos $E = -|p_0|$, para partículas con $m=0$ tenemos

$$\left.\begin{aligned}(-|p^0| - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\,\Psi_R &= 0\\ (-|p^0| + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\,\Psi_L &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{antipartículas}$$

$$\Longrightarrow\quad \left.\begin{aligned}\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{|\vec{p}|}\,\Psi_R &= -\Psi_R\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{|\vec{p}|}\,\Psi_L &= \Psi_L\end{aligned}\right\}\ \text{antipartículas}$$

(al revés que las partículas).

Resumen:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix}\Psi_L(x)\\ \Psi_R(x)\end{pmatrix}$$

$\Psi_L(x)$, $\Psi_R(x)$ → espinores de Weyl (2 componentes)

$\Psi(x)$ → espinor de Dirac (4 componentes)

A continuación, hablaremos de soluciones de la ecuación de Dirac.

Soluciones de la ecuación de Dirac. Spin.

Veamos qué se oculta en $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$.

Por convenio, llamaremos

- partículas ≡ soluciones frec. positiva
- antipartículas ≡ sols. frecuencia negativa.

Es sencillo ver que un conjunto de soluciones de la ecuación de Dirac viene dado por

$$u(p)\,e^{-ip\cdot x} = \begin{pmatrix} u_L(p) \\ u_R(p) \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x} \quad \text{(partículas)}$$

$$v(p)\,e^{ip\cdot x} = \begin{pmatrix} v_L(p) \\ v_R(p) \end{pmatrix} e^{ip\cdot x} \quad \text{(antipartículas)}$$

- $u_{L,R}(p)$ y $v_{L,R}(p)$ son espinores de Weyl en el espacio de momentos. u y v son los espinores de Dirac en dicho espacio y satisfacen:

$$\left.\begin{array}{l}(\not p - m)\, u(p) = 0 \\ (-\not p - m)\, v(p) = 0\end{array}\right\} (*)$$

Consideremos primero la partícula en reposo:

$p^\mu = (m, 0)$. Entonces, $(*)$ son:

$$\begin{pmatrix} -m & m \\ m & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L(p^0) \\ u_R(p^0) \end{pmatrix} = 0$$

Las soluciones son $u_L(p^0) = u_R(p^0)$.

Escribamos

por conveniencia.

$$u(p^0) \equiv \begin{pmatrix} u_L(p^0) \\ u_R(p^0) \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

donde $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ es un vector columna de dos componentes que escogeremos t.q.

$\xi^\dagger \xi = 1$. (ξ es un espinor. Así se llama usualmente)

Repetimos el argumento para antipartículas y obtenemos:

$$-\begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_L(p^0) \\ v_R(p^0) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_L(p^0) = -v_R(p^0).$$

Escribimos

$$v(p^0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix}$$

con $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ el espinor asociado a las antipartículas.

Observación: para las partículas (u) y antipartículas (v), tenemos dos grados de libertad, codificados en ξ (η). Dichos espinores nos informarán sobre el spin de las partículas/antipartículas.

El operador de spin de una partícula en reposo es

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}.$$

Este operador actúa sobre ξ o η.

- una partícula con spin up a lo largo del eje z tiene $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y otro con spin down a lo largo del eje z tiene $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- de forma similar, definimos una antipartícula en reposo con spin up a lo largo del eje z como aquella que tiene $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de tal forma que

$$\hat{S}_z \eta = -\frac{1}{2}\eta.$$

Una antipartícula con spin down en z tiene $S_z = 1/2$ y $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tal que $\hat{S}_z \eta = \frac{1}{2}\eta$.

¿Qué ocurre en el caso de que las partículas no estén en reposo? Deberíamos hacer un boost sobre el caso anterior. Daremos el resultado sin demostrar:

- Para una partícula / antipartícula con momento p^μ, los espinores de Dirac vienen dados por

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} \quad ; \quad v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta \end{pmatrix}$$

Ejemplo: calculemos el espinor para una partícula con $p^\mu = (E_{\vec{p}}, 0, 0, |\vec{p}|)$ y $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$u_L(p) = \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi = \sqrt{p^\mu \sigma_\mu}\,\xi = \sqrt{p^0\sigma_0 - |\vec{p}|\sigma_3}\,\xi$$

$$= \sqrt{p^0 I - |\vec{p}|\sigma_z}\,\xi = \left[\begin{pmatrix} E_{\vec{p}} & 0 \\ 0 & E_{\vec{p}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |\vec{p}| & 0 \\ 0 & -|\vec{p}| \end{pmatrix}\right]^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{\vec{p}} - |\vec{p}| & 0 \\ 0 & E_{\vec{p}} + |\vec{p}| \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} - |\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \sqrt{E_{\vec{p}} + |\vec{p}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u_L(p) = \sqrt{E_{\vec{p}} + |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_R(p) = \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}\,\xi = \sqrt{p^0 \bar{\sigma}_0 - |\vec{p}|\bar{\sigma}_z}\,\xi$$

$$= \left[\begin{pmatrix} E_{\vec{p}} & 0 \\ 0 & E_{\vec{p}} \end{pmatrix} - |\vec{p}|\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{1/2}\xi$$

$$= \left[\begin{pmatrix} E_{\vec{p}} + |\vec{p}| & 0 \\ 0 & E_{\vec{p}} - |\vec{p}| \end{pmatrix}\right]^{1/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{E_{\vec{p}} - |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} + |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ \sqrt{E_{\vec{p}} - |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

es el espinor de Dirac buscado.

Exploremos ahora la helicidad y quiralidad de part. / antipart. en más detalle

Ejemplo: consideremos una partícula con spin up a lo largo de z. Su momento es $|\vec{p}|$ (a lo largo de z). $\Leftrightarrow$ helicidad positiva

Según nuestra "receta" anterior

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L(p) \\ u_R(p) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} - p\cdot\sigma}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \sqrt{E_{\vec{p}} + p\cdot\sigma}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Si es a lo largo del eje z:

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} - |\vec{p}|}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \sqrt{E_{\vec{p}} + |\vec{p}|}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{\vec{p}} \to |\vec{p}|]{\text{ultrarrel.}} \begin{pmatrix} 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \sqrt{2E_{\vec{p}}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{2E_p}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \text{ luego } \quad u_L = 0$$

$$u_R = \sqrt{2E_{\vec{p}}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Conclusión: partículas ultrarrelativistas con helicidad positiva tienen espinores right-handed.

Consideremos ahora una partícula con helicidad negativa (spin down a lo largo de z y momento a lo largo de $+z$).

El espinor de Dirac será

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p - p\cdot\sigma}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \sqrt{E_p + p\cdot\sigma}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{ejemplo}\\\text{anterior}}}{\Big\downarrow}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + |\vec{p}|}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \sqrt{E_p - |\vec{p}|}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_p \to |\vec{p}|]{\text{ultrarr.}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2E_p}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ 0 \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \sqrt{2E_p}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

luego $u_L = \sqrt{2E_p}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ y $u_R = 0$.

Entregable: haced lo mismo pero considerando antipartículas. Resultado: antipartículas ultrarrelativistas con helicidad positiva (negativa) tienen espinores left- (right-) handed.