

Apuntes de análisis de variable compleja

2023

Apuntes de las clases de *Análisis de variable compleja* dadas por *Juan Matías Sepulcre Martínez* y transcritos a L^AT_EX por *Víctor Mira Ramírez* durante el curso 2023-2024 del grado en Física de la *Universidad de Alicante*.

Índice

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos Página 3

- 1.1 Definiciones básicas 3
 - 1.2 Analiticidad 5
 - 1.3 Algunas funciones elementales 5
- Función exponencial — 5 • Función logarítmica — 6 • Función potencia — 7 • Funciones trigonométricas — 7

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1: Número complejo

Un **número complejo** z es un par ordenado de números reales a, b escrito como $z = (a, b)$ en coordenadas cartesianas. Existe una notación equivalente, la forma binómica: $z = a + ib$ siendo $i = (0, 1)$.

El conjunto de los número complejos se denota por: $\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Comentario:

Siempre que $a = 0$ sea un número imaginario puro, y $b = 0$ sea un número real.

Definición 1.1.2: Conjugado

Llamamos conjugado de un número complejo al número denotado $\bar{z} = a - ib$, siendo $z = a + ib$. Geométricamente, podemos decir que el eje real actúa de 'espejo' del número en el plano.

Comentario:

Llamamos \mathbb{C} al cuerpo de los numeros complejos. \mathbb{C} es un cuerpo conmutativo, pero no totalmente ordenado. En cambio, cualquier ecuación algebraica tiene solución en los complejos. De todas formas, el teorema fundamental del álgebra nos asegura que tendrá n soluciones en los complejos

Comentario:

Cuando los coeficientes de una ecuación algebraica son reales, las soluciones complejas vienen por pares.

Teorema 1.1.1 Operaciones elementales

SUMA	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	
RESTA	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	
PRODUCTO	$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	(teniendo en cuenta que $i^2 = -1$)
DIVISIÓN	$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$	(multiplicando por el conjugado)

Comentario:

El elemento unidad es $1 + 0i$ y el elemento inverso es $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$. Para que un número complejo tenga elemento inverso, debe ser distinto de cero. El producto de un número complejo por su elemento inverso es la unidad.

Definición 1.1.3: Componentes de los complejos

Llamamos **módulo** del número complejo $z = a + bi$ a la cantidad $\sqrt{a^2 + b^2}$ denotada $|z|$

Llamamos **argumento** del número complejo $z = a + bi$ al ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la recta que contiene el vector (a, b) . Se denota $\text{Arg } z = \alpha$ y se expresa en radianes.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a \neq 0$$

Definición 1.1.4: Módulo

Llamamos **módulo** de un número complejo $z = a + bi$, y lo denotamos $|z|$, a la cantidad

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Definición 1.1.5: Argumento

Llamamos **argumento** de un número complejo $z = a + bi$ al ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la recta que contiene al vector. El argumento de z se representa por $\text{Arg}(z) = \alpha$, y se expresa normalmente en radianes.

$$\alpha = \arctan \frac{b}{a}, \text{ si } a \neq 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ si } a = 0, b > 0$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}, \text{ si } a = 0, b < 0$$

Si el ángulo se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi)$ lo llamaremos argumento principal.

Comentario:

lol

Comentario:

forma exponencial: el desarrollo en serie de la exponencial es: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ si introducimos un número complejo en la exponencial: $e^{iy} = 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots$

Si analizamos el valor de i^n en función de n , entonces vemos como la exponencial compleja queda ahora como:

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots\right) = \cos(y) + i \sin(y)$$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \text{ con } z = x + iy$$

1.2 Analiticidad

Definición 1.2.1: Función armónica conjugada

Sea $u: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en un abierto de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diremos que $v: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función armónica conjugada** de u en \mathcal{D} si v es armónica en \mathcal{D} y satisfacen las condiciones de *Cauchy-Riemann*, (o equivalentemente la función $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en $\{x + iy \in \mathbb{C}: (x, y) \in \mathcal{D}\}$)

Comentario:

Una función armónica es aquella que satisface la ecuación de Laplace.

Teorema 1.2.1

Sea $u(x, y): \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica de \mathcal{D} y consideramos v una región rectangular contenida en \mathcal{D} . Entonces existe una conjugada armónica de $u(x, y)$ en v .

1.3 Algunas funciones elementales

1.3.1. Función exponencial

Definición 1.3.1

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Teorema 1.3.1

1. $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
2. $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \quad z \in \mathbb{C}$
3. $\arg(e^z) = \{\operatorname{Im}(z) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
4. $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}} \quad z \in \mathbb{C}$
5. $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad x \in \mathbb{R}$
 $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi ki \quad z \in \mathbb{C}$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \quad x \in \mathbb{R}$
 $\nexists \lim_{|z| \rightarrow \infty} e^z = \infty \quad x \in \mathbb{R}$
7. e^x es entera (derivable en todo punto de \mathbb{C}) $(e^z)' = e^z$
8. $e^{z+\omega} = e^z \cdot e^\omega, \quad z, \omega \in \mathbb{C}$
 $(e^z)^n = e^{nz}, \quad n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$

Ejemplo 1.3.1 ($e^{iz} - e^{-iz} = 4i$)

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} - 4i = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$$

$$\text{Si } \omega = e^{iz} \Rightarrow \boxed{\omega^2 - 4i\omega - 1 = 0}$$

$$w = \frac{4i \pm \sqrt{-16 + 4}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = 2i \pm \sqrt{3} = 2 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow \boxed{e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i}$$

1.3.2. Función logarítmica

Definición 1.3.2

Se introduce por la necesidad de solucionar ecuaciones como la anterior.

$$x = e^y \iff y = \log x, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}$$

Sea $z \in \mathbb{C} - 0$, definimos el logaritmo principal de z , y lo denotamos por $\log z$, como

$$\log z = \ln|z| + i \cdot \text{Arg}(z)$$

Vemos que $e^{\log z} = e^{\log|z| + i \text{Arg}(z)} = e^{\ln|z|} e^{i \text{Arg}(z)} = |z| e^{i \text{Arg}(z)} = z$

El conjunto de todos los logaritmos de z será:

$$\log z = \{\ln|z| + i(\text{Arg}(z) + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 1.3.2

1. Si $z = x > 0 \Rightarrow \log z = \ln|z| + i \cdot \text{Arg}(z) = \ln x$
 $\log z = \{\ln x + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}\}$
2. Si $z = -x > 0 \Rightarrow \log z = \ln x - i \cdot (-\pi)$ (argumento de z)
 $\log z = \{\ln x + i(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}\}$
3. Si $z = ix, x > 0 \Rightarrow \log z = \ln x + i \frac{\pi}{2}$
 $\log z = \left\{ \ln x + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z} \right\}$

Comentario:

Retomando la ecuación del ejemplo anterior,

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i = \begin{cases} (2 + \sqrt{3})i \leftrightarrow iz = \log(2 + \sqrt{3})i \leftrightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) - i \ln(2 + \sqrt{3}) \\ (2 - \sqrt{3})i \leftrightarrow iz = \log(2 - \sqrt{3})i \leftrightarrow z = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right) - i \ln(2 - \sqrt{3}) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Teorema 1.3.2 Propiedades

1. $\log z$ es holomorfa en $\mathbb{C} - [-\infty, 0] \implies$ de hecho, no es continua en $(-\infty, 0]$
2. $\log_{\theta_0} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}, \arg(z) = \theta_0\}$
3. $e^{\log_{\theta_0} z} = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \arg(z) = \theta_0$ y $(\log_{\theta_0})' = \frac{1}{z}$
4. $\log_{\theta_0} e^z = z \quad \forall z = x + iy, \theta_0 \leq y < \theta_0 + 2\pi$ $z = x + iy, e^z = e^x e^{iy} \implies \log_{\theta_0} e^z = z$
cuando $y \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$

Definición 1.3.3

Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$, tomamos $z \neq 0, z = re^{i\theta}, r > 0, \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$ y entonces $\log_{\theta_0} z = \ln|z| + i\theta$

Si $\theta_0 = -\pi \implies \log_{\theta_0} z = \text{Log} z$

Si $\theta_0 = 0 \implies \log_0 z = \ln|z| + i\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

1.3.3. Función potencia

Definición 1.3.4: Potencia de exponente arbitrario

Sea $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, tomamos por definición z^α , llamada potencia de exponente arbitrario como el conjunto de todos los valores dados por:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} \quad (1.1)$$

Dohde $\log z$ representa el conjunto de todos los logaritmos de z .

Definición 1.3.5: Función exponencial general

Sea $a \in \mathbb{C} \setminus 0$, tomaremos por definición a^z , llamada función exponencial general como el conjunto de todos los valores dados por:

$$a^z = \exp(z \log a) \quad (1.2)$$

Donde $\log a$ es el conjunto de todos los logaritmos de a .

Ejemplo 1.3.3

- $(-2)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \log(-2)} = e^{\frac{1}{2}(\ln 2 + i(\pi + 2\pi k))}$, con $k \in \mathbb{Z}$ (tomando la primera definición, $z = -2$ y $\alpha = \frac{1}{2}$)
- $2^i = e^{i \log(2)} = e^{i(\ln 2 + 2\pi k i)} = e^{-2\pi k} e^{i \ln 2} = e^{-2\pi k(\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2))}$ con $k \in \mathbb{Z}$
- $(-1)^{\frac{1}{\pi}} = e^{\frac{1}{\pi} \log(-1)} = e^{\frac{1}{\pi}(\pi + 2\pi k i)} = e^i \cdot e^{2ki} = e^{(2k+1)i}$, con $k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 1.3.4 (Potencia de exponente entero)

Sea $\alpha \in \mathbb{Z}$, entonces $f(z) = z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\ln|z| + i(Arg(z) + 2\pi k))} = e^{\alpha \ln|z|} \cdot e^{i\alpha Arg(z)} \cdot e^{i\alpha 2\pi k} = |z|^\alpha \cdot e^{i\alpha Arg(z)}$ función univaluada

Comentario:

Cuando tomemos $k = 0$ en la función logarítmica, entonces obtenemos la denominada **rama principal**.

Ejemplo 1.3.5 (Función multiforme/aplicación multivaluada)

$f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ con $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ Tomando $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $-\pi \leq \theta < \pi$ La llamada rama principal de $z^{\frac{1}{2}}$ es $f_1(z) = e^{\frac{1}{2}(\ln(r) + i\theta)} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{\theta}{2}i}$ Otra rama con el i ? $\arg(z) = \pi$ viene dada por $-f_1(z) = f_2(z) = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{\theta+2\pi}{2}i}$

Si $k = 2 \rightarrow e^{\frac{1}{2}(\ln r + i(\theta + 4\pi))} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot e^{2\pi i} = f_1(z)$

1.3.4. Funciones trigonométricas

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \quad \text{es holomorfa en } \mathbb{C} \text{ excepto en } \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

Hiperbólicas

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

Teorema 1.3.3 Propiedades

1. $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
2. $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$
3. $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
4. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
5. $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi i, n \in \mathbb{Z}$
6. $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}i, n \in \mathbb{Z}$
7. $\sinh(z) = -i \sin(iz)$
8. $\cosh(z) = \cos(iz)$

Comentario:

Comparación con el caso real:

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$
- $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$