Grado en Física, Curso 2023-2024

Mecánica Estadística

Problemas

Tema 4: Estadísticas cuánticas

1. Considera tres partículas, A, B y C y dos posibles estados $s = 1, 2$. Calcula el número total de estados posibles para el sistema de tres partículas considerando la estadística de Maxwell-Boltzmann, la de Bose-Einstein y la de Fermi-Dirac.

2. Considera un sistema de dos partículas, cada una de las cuales puede estar en tres estados distintos de energía 0, ϵ y 3ϵ. El sistema se encuentra en contacto con un baño térmico de temperatura T.

   (a) Escribe la función de partición del sistema, Z, suponiendo que las partículas son distinguibles y que satisfacen la estadística de Maxwell-Boltzmann.

   (b) Calcula la función de partición para el caso de bosones (estadística de Bose-Einstein).

   (c) Calcula la función de partición para el caso de fermiones (estadística de Fermi-Dirac).

3. Supongamos un sistema con dos posibles niveles de energía de valores $\epsilon_1 = 0$ y $\epsilon_2 = \epsilon$. A partir de la estadística de Maxwell-Boltzmann, calcula el número medio de partículas en cada uno de estos dos niveles en función de la temperatura y de ϵ, es decir $\langle n_1 \rangle = f(T, \epsilon)$ y $\langle n_2 \rangle = f(T, \epsilon)$ si:

   (a) Hay una única partícula.

   (b) Hay dos partículas.

   (c) Discute qué sucede en ambos casos cuando la temperatura tiende a cero $KT \ll \epsilon$ y cuando la temperatura es muy alta ($KT \gg \epsilon$).

4. Repite el cálculo del problema anterior para dos partículas partiendo de la definición de valor medio y una colectividad canónica:

$$\langle n_s \rangle = \frac{1}{Z} \sum_R n_s e^{-\beta E_R}$$

5. Calcula la dispersión del número de partículas en un estado s, $\langle \Delta n_s^2 \rangle$ para:

   (a) La estadística de Maxwell-Boltzmann.

   (b) La estadística de Bose-Einstein para fotones (distribución de Planck).

   (c) La estadística de Fermi-Dirac.

6. Calcula la presión media ejercida por la radiación electromagnética en equilibrio térmico en un volumen V. Utiliza la relación entre la presión media y la función de partición y considera que la energía para un estado s es proporcional a $V^{-1/3}$. Si la presión en el interior del sol es de 400 millones de atmósferas, estima la temperatura a la que correspondería esta presión si es debida a la radiación.

7. Partiendo de la ecuación de Planck para la energía por unidad de volumen de radiación del cuerpo negro, obtén la ley de desplazamiento de Wien y la constante de Wien. Usa que la solución de la ecuación trascendente $e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0$ es $x = 4.9651$.

8. Considera la relación termodinámica $TdS = d\langle E \rangle + \langle p \rangle dV$ para un gas de fotones, donde la presión de radiación es $\langle p \rangle = \langle u \rangle / 3$. La energía media en este caso se puede escribir como $\langle E \rangle = \langle u \rangle V$ donde $\langle u(T) \rangle$ es la energía por unidad de volumen, que depende únicamente de la temperatura.

   (a) Supón que la entropía es una función de T y V y expresa dS en términos de dT y dV. Calcula $(\partial S/\partial T)_V$ y $(\partial S/\partial V)_T$.

   (b) Muestra que la identidad matemática $(\partial^2 S/\partial V \partial T) = (\partial^2 S/\partial T \partial V)$ resulta en una ecuación diferencial para $\bar{u}$ que al integrar lleva a la relación de Stefan-Boltzmann $\langle u \rangle \propto T^4$

9. Supongamos un gas ideal de Fermi en reposo a temperatura absoluta $T = 0$ con una energía de Fermi de valor μ_0. La masa de cada partícula es m. Si $\vec{v}$ es la velocidad de una partícula, calcula $\langle v_x \rangle$ y $\langle v_x^2 \rangle$.

10. Obtén una expresión para el número de estados con energía entre ϵ y $\epsilon + d\epsilon$ de los electrones de conducción de un metal ($\rho_\epsilon d\epsilon$, densidad de estados), en función del volumen (V), la masa de los electrones (m) y la energía ϵ. Considera que se trata de un gas ideal en un cubo de lado L. Para ello, ten en cuenta que esta densidad se puede expresar como $\rho_\epsilon = \frac{dN}{d\epsilon}$, donde N es el número de estados accesibles.
    NOTA: N puede calcularse como el volumen de una esfera de radio n, donde n está relacionado con la cuantización del momento lineal de los electrones. Considerad que los electrones pueden tener dos estados de espín.

11. Considera un gas ideal de N electrones en un volumen V a temperatura absoluta $T = 0$.

    (a) Calcula la energía media total de este gas $\langle E \rangle$ teniendo en cuenta la expresión de la densidad de estados obtenida en el ejercicio anterior).

    (b) Considerando la expresión de la energía de Fermi a T =0, escribe la energía media en función del número de electrones y el volumen V.

    (c) Calcula la presión media, $\langle p \rangle$ de este gas.

    (d) Utiliza este resultado para calcular la presión ejercida por los electrones de conducción en el cobre. Considera un electrón de conducción por átomo.

12. Considera una enana blanca de helio, donde se usa la aproximación de que esté compuesta por helio completamente ionizado. Por tanto, la presión sería la de un gas de electrones degenerado, más la presión de los núcleos de helio (gas ideal). Suponiendo que los electrones no son relativistas, obtén:

    (a) La energía media de los electrones en función de la masa de la estrella, M, su radio R y la masa del electrón, m_e y del protón, m_p.

    (b) La presión media ejercida por los electrones en función de los mismos parámetros.

    (c) La contribución a la presión de los núcleos de Helio, suponiendo una temperatura de 10^8 K

NO

13. Considera la función distribución de Fermi.

    (a) Demuestra que $\frac{\partial f}{\partial \epsilon}$ es una función simétrica respecto de μ.

    (b) Demuestra que $\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial f}{\partial \epsilon} = 1$

    (c) Calcula $\int_{-\infty}^{\infty} H(\epsilon)\, f(\epsilon)\, d\epsilon$ hasta el primer orden significativo en kT.

    (d) Aplica la fórmula del punto anterior para obtener el potencial químico como función de T de un gas de Fermi.

    (e) Aplica la fórmula del punto anterior para obtener la energía y el calor específico como función de T de un gas de Fermi. Compara con el resultado de un gas clásico.

Tema 4: Soluciones

1. $\Omega_{MB} = 8$, $\Omega_{BE} = 4$, $\Omega_{FD} = 0$.
2. (a) $Z_{MB} = 1 + e^{-2\epsilon/k_BT} + e^{-6\epsilon/k_BT} + 2e^{-\epsilon/k_BT} + 2e^{-3\epsilon/k_BT} + 2e^{-4\epsilon/k_BT}$
   (b) $Z_{BE} = 1 + e^{-2\epsilon/k_BT} + e^{-6\epsilon/k_BT} + e^{-\epsilon/k_BT} + e^{-3\epsilon/k_BT} + e^{-4\epsilon/k_BT}$
   (c) $Z_{FD} = e^{-\epsilon/k_BT} + e^{-3\epsilon/k_BT} + e^{-4\epsilon/k_BT}$
3. (a) $\langle n_1 \rangle = 1/(1 + e^{-\beta\epsilon})$; $\langle n_2 \rangle = 1/(1 + e^{\beta\epsilon})$
   (b) $\langle n_1 \rangle = 2/(1 + e^{-\beta\epsilon})$; $\langle n_2 \rangle = 2/(1 + e^{\beta\epsilon})$
4. Mismo resultado que en el (b) del problema anterior.
5. (a) $\langle \Delta n_s^2 \rangle = \langle n_s \rangle (1 - \langle n_s \rangle / N) \approx \langle n_s \rangle$;
   (b) $\langle \Delta n_s^2 \rangle = \langle n_s \rangle (1 + \langle n_s \rangle)$
   (c) $\langle \Delta n_s^2 \rangle = \langle n_s \rangle (1 - \langle n_s \rangle)$
6. $\langle p \rangle = \frac{1}{3} \langle u \rangle$; $T = 2 \times 10^7 K$
7. Resolver $(du(\lambda)/d\lambda)_{\lambda = \lambda_m} = 0$
8. $(\partial S/\partial T)_V = \frac{V}{T} \frac{\langle u \rangle}{dT}$; $(\partial S/\partial V)_T = \frac{4}{3} \frac{\langle u \rangle}{T}$.
9. $\langle v_x^2 \rangle = \frac{2}{5} \frac{\mu_0}{m}$
10. $\rho_\epsilon d\epsilon = \frac{dN}{d\epsilon} d\epsilon = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \epsilon^{1/2} d\epsilon$
11. (a) $\langle E \rangle = \frac{V}{5\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \epsilon_F^{5/2} = \frac{3}{5} N \epsilon_F$
    (b) $\langle E \rangle = \frac{3}{10} \left(3\pi^2\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} N$
    (c) $\langle p \rangle = \frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$
12. (a) $\langle E \rangle = 0.35 \frac{M^{5/3} \hbar^2}{m_p^{5/3} m_e R^2}$
    (b) $\langle p \rangle = \frac{2}{3} \frac{\overline{E}}{V} = 0.055 \frac{M^{5/3} \hbar^2}{m_p^{5/3} m_e R^5}$
    (c) $\langle p_i \rangle = \frac{2}{3} E/V$, $E = \frac{3}{2} N_i k T$, $N_i = \frac{M}{4m_p}$