Práctica 7

Métodos Numéricos y Computación

I. Derivación numérica *(Tema 4)*

Las fórmulas de derivación son expresiones sencillas que solo requieren información sobre el valor de la función en varios puntos (que, en nuestro caso, son puntos equiespaciados). A nivel computacional, el cálculo se puede abordar desde dos perspectivas distintas: o bien conocemos la función completa en todo su dominio, o bien solo conocemos el valor de la función solo en dichos puntos.

Ejercicio 1 *Implementa una función* `dy_cinco` *que, dada la función f, el punto x_0 y el valor de h, permitan aproximar $f'(x_0)$ utilizando la fórmula de los cinco puntos. Implementa una función* `dy_cinco_discreto`*, que, tomando como entrada el valor de las $x's$ (puntos equiespaciados) y el valor de las y's, permitan aproximar $f'(x_0)$ utilizando la misma fórmula.*

Ejercicio 2 *Responde a los siguientes apartados:*

a) *Aproxima la derivada de la función $f(x) = e^{-2x}\cos(3x)$ en el punto $x_0 = 2$ con $h = 0.1$ y $h = 0.05$ con las fórmulas de los tres y los cinco puntos. Compara la aproximación con el valor real.*

b) *Durante el primer minuto, y en intervalos de 5 segundos, un dispositivo registra la distancia recorrida por un coche, obteniendo:*

Tiempo (s)	*0*	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*
Espacio (m)	*0*	*20*	*50*	*100*	*150*	*180*	*200*

b1) *Aproxima la velocidad del coche en los tiempos $\{10, 15, 20\}$ usando la fórmula de los cinco puntos con $h = 5s$.*

b2) *Aproxima la aceleración del coche a los 15 segundos usando la fórmula de los tres puntos y $h = 5s$.*

b3) *Si quisiéramos aproximar la velocidad en los puntos con $h = 2s$, ¿qué podríamos hacer?*

II. Integración numérica *(Tema 4)*

La aproximación de integrales definidas en base al polinomio interpolador en puntos equiespaciados da lugar a las fórmulas de Newton-Cotes. Estas fórmulas dependen de si la función está definida en los extremos del intervalo (fórmulas cerradas) o no (fórmulas abiertas) y solo requieren de la evaluación de la función sobre un conjunto de puntos equiespaciados. Además, también podemos dar las correspondientes versiones discretas.

Ejercicio 3 *Implementa funciones que, dada una función f y el límite inferior a y superior b, devuelvan las aproximaciones de la integral a partir de la regla de Simpson y Simpson tres octavos, en sus versiones cerradas y abiertas. Llámalas* `simpson_cerrado`, `simpson_abierto`, `simpson38_cerrado`, `simpson38_abierto`. *Implementa las versiones discretas de estas funciones, es decir, suponiendo que disponemos exclusivamente de información sobre el valor de la función en los puntos necesarios.*

Ejercicio 4 *Aplica las funciones anteriores para aproximar la integral en los siguientes casos:*

a) *Aproxima las integrales* $\int_0^{\pi/4} x \sin x \, dx$ *y* $\int_0^{\pi/4} \sin x/x \, dx$ *y representa las áreas por la que se está aproximando en cada caso.*

b) *Consideremos los siguientes datos:*

x	0.0	0.12	0.22	0.32	0.36	0.40	0.44
$f(x)$	0.200000	1.309729	1.305241	1.743393	2.074903	2.456000	2.542985

b1) *Representa los datos anteriores.*

b2) *Observa las distancias entre los puntos y combina adecuadamente las reglas del trapecio, Simpson y Simpson tres octavos para aproximar la integral anterior.*

A fin de reducir el error de la aproximación de las integrales definidas se pueden considerar métodos compuestos para los cuales se divide el intervalo original en un número determinado de subintervalos y se aplican sobre ellos las fórmulas simples.

Ejercicio 5 *Implementa una función* `simpson_compuesto` *que, dada una función* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y la cantidad de veces m que se aplicará* `simpson_cerrado` *sobre m subintervalos de amplitud $(b-a)/m$, devuelva la aproximación de la integral de f sobre $[a, b]$. Nota que m puede ser par o impar a diferencia de n en el planteamiento teórico.*

Ejercicio 6 *Consideremos la siguiente integral:*

$$\int_1^3 (sin(2x) + x)dx.$$

a) *Aproxima su valor usando las reglas del trapecio, Simpson y Simpson tres octavos.*

b) *Aproxima su valor usando las reglas del trapecio y de Simpson compuestas tomando seis puntos equiespaciados.*

c) *Obtén el valor exacto de la integral (de forma analítica sobre el papel) y calcula el error absoluto cometido a partir de cada una de las aproximaciones anteriores.*

d) *Aproxima su valor usando el número de intervalos necesario para obtener una aproximación con error menor de 10^{-3} a partir de las reglas del trapecio y Simpson compuesto.*