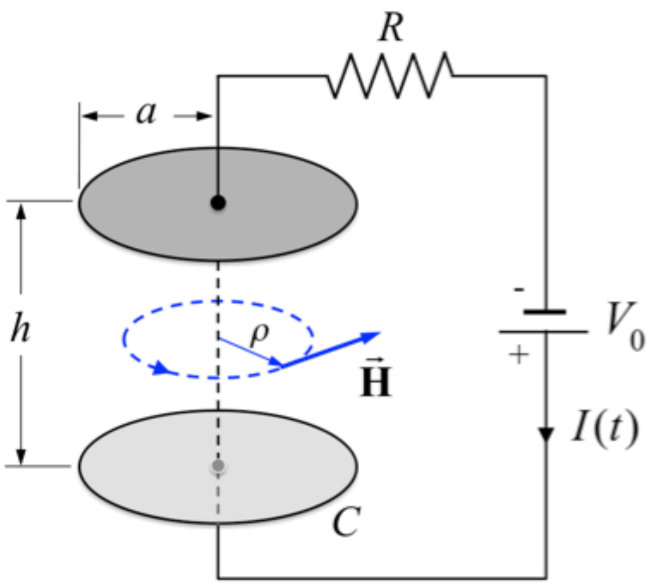
Un condensador de capacidad C está formado por dos placas circulares paralelas de radio a separadas una distancia h. El condensador se carga mediante una resistencia R conectada en serie a una diferencia de potencial V_0. En un instante $t > 0$ el vector $\vec{\mathbf{H}}$ entre las placas del condensador es:

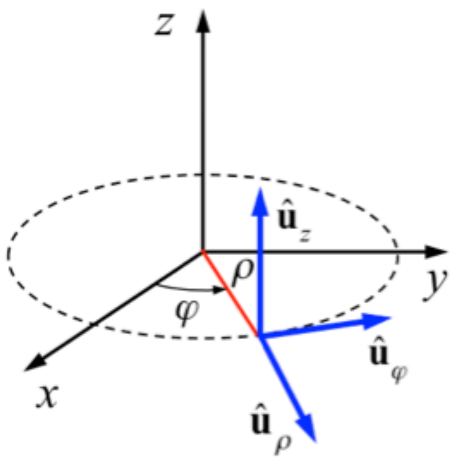
$$\hat{\mathbf{H}}(\rho,t) = \frac{V_0\rho}{2\pi a^2 R}\mathrm{e}^{-t/RC}\,\hat{\mathbf{u}}_\varphi$$

(a) Obtener la expresión del vector desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$ entre las placas del condensador. [Usar la expresión del rotacional en coordenadas cilíndricas]

(b) A partir de la expresión del vector desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$ determinar la densidad superficial del carga σ en las láminas del condensador, la variación de la carga q en función del tiempo y la intensidad de la corriente.

(c) Calcular el flujo del vector de Poynting a través de la superficie cilíndrica de radio a y altura h comprendida entre las placas del condensador y la energía final almacenada en el condensador.





Rotacional en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\varphi)\right)\hat{\mathbf{u}}_\rho + \left(\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\mathbf{u}}_\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{u}}_z\right]$$

(a) Para determinar el vector desplazamiento $\vec{D}$ hacemos uso de la ley de Ampère-Maxwell teniendo en cuenta que entre las placas del condensador se tiene $\vec{J}=0$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

donde:

$$\vec{H}(\rho,t) = \frac{V_0 \rho}{2\pi a^2 R} e^{-t/RC} \hat{u}_\varphi$$

es decir, $\vec{H}$ sólo depende de ρ y tiene componente $\hat{u}_\varphi$:

$$\vec{H}(\rho,t) = H_\varphi(\rho)\hat{u}_\varphi$$

por lo que el rotacional de $\vec{H}$ vale:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\varphi)\hat{u}_z = \frac{1}{\rho}\frac{V_0 e^{-t/RC}}{2\pi a^2 R}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2)\hat{u}_z =$$

$$= \frac{2V_0\rho}{2\pi a^2 R\rho} e^{-t/RC}\hat{u}_z = \frac{V_0}{\pi a^2 R} e^{-t/RC}\hat{u}_z$$

con lo cual, de la ecuación de Ampère-Maxwell:

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{V_0}{\pi a^2 R} e^{-t/RC}\hat{u}_z$$

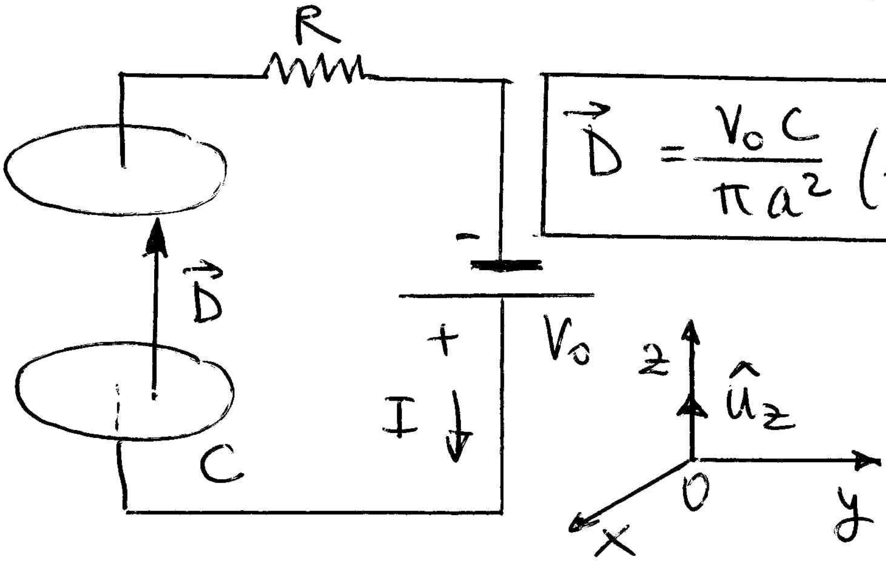
Integrando entre $t=0$ y t:

$$\vec{D} = \int_0^t \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}dt = \frac{V_0\hat{u}_z}{\pi a^2 R}\int_0^t e^{-t/RC}dt =$$

$$= \frac{V_0\hat{u}_z}{\pi a^2 R}\left[-RC\, e^{-t/RC}\right]_0^t =$$

$$= \frac{V_0 C}{\pi a^2}\left(1 - e^{-t/RC}\right)\hat{u}_z$$

Por lo que el vector desplazamiento entre las placas del condesador tiene la expresión:



$$\boxed{\vec{D} = \frac{V_0 C}{\pi a^2}\left(1 - e^{-t/RC}\right)\hat{u}_z}$$

(b) Densidad superficial de carga σ

El vector $\vec{D}$ es normal a la superficie de la placa y su módulo es:

$$D \equiv |\vec{D}| = \sigma$$

por tanto:

$$\boxed{\sigma = \frac{V_0 C}{\pi a^2}\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

Carga q en función del tiempo

A partir de la densidad superficial de carga σ podemos determinar q teniendo en cuenta que el área de la placa es πa^2:

$$\sigma = \frac{q}{\pi a^2} \rightarrow q = \sigma \pi a^2 = V_0 C\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$\boxed{q(t) = V_0 C\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

Intensidad de la corriente

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = V_0 C \frac{1}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

$$\boxed{I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}$$

(c) Vector de Poynting $\vec{S}$

Sabemos que:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \text{(vector de Poynting)}$$

Para calcular el flujo del vector de Poynting primero debemos obtener el vector campo eléctrico $\vec{E}$. Si suponemos que la permitividad del medio entre las placas del condensador es ε, el campo entre las placas es:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{V_0 C}{\varepsilon \pi a^2}\left(1 - e^{-t/RC}\right)\hat{u}_z}$$

Suponer despreciables los efectos de bordes lleva consigo que el campo eléctrico $\vec{E}$ no dependa de la coordenada z.

Determinamos ahora $\vec{E}$ y $\vec{H}$ sobre los puntos de la superficie lateral del cilindro para los cuales tenemos $\rho = a$:

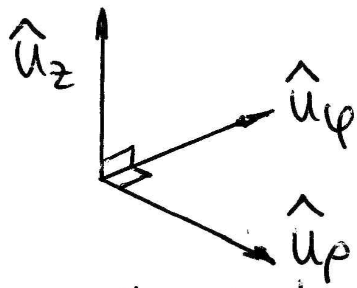
$$\boxed{\rho = a} \rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \dfrac{V_0 C}{\varepsilon \pi a^2}\left(1 - e^{-t/RC}\right)\hat{u}_z \\[2ex] \vec{H} = \dfrac{V_0}{2\pi a R}\, e^{-t/RC}\,\hat{u}_\varphi \end{cases}$$

El vector de Poynting en los puntos de la superficie lateral del cilindro vale entonces:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{V_0 C}{\varepsilon \pi a^2}\,\frac{V_0}{2\pi a R}\, e^{-t/RC}\left(1 - e^{-t/RC}\right)\hat{u}_z \times \hat{u}_\varphi$$

$$= -\frac{V_0^2 C}{2\varepsilon \pi^2 a^3 R}\left(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}\right)\hat{u}_\rho$$

donde hemos tenido en cuenta:



$$\hat{u}_z \times \hat{u}_\varphi = -\hat{u}_\rho$$

Así pues, el vector de Poynting en puntos de la superficie lateral del cilindro de radio de la base a y altura h es:

$$\boxed{\vec{S} = -\frac{V_0^2 C}{2\varepsilon \pi^2 a^3 R}\left(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}\right)\hat{u}_\rho}$$

El flujo de $\vec{S}$ sobre la superficie lateral se dirige hacia el interior del condensador.

No hay flujo a través de las bases del cilindro ya que $\vec{S}$ es tangente a las bases, por lo que sólo hay flujo a través de la superficie lateral del cilindro:

$$\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S} \longrightarrow d\vec{S} = h a d\varphi \, \hat{u}_\rho$$

de donde:

$$\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S} - \int_0^{2\pi} |\vec{S}| a h d\varphi = -|\vec{S}| 2\pi a h$$

y sustituyendo el valor del vector de Poynting:

$$\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S} = -\frac{V_0^2 c h}{\varepsilon \pi a^2 R}\left(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}\right)$$

La capacidad del condensador de láminas plano-paralelas cuya superficie πa^2, separación entre las placas h y permitividad ε, es:

$$C = \varepsilon \frac{\pi a^2}{h}$$

queda para el flujo del vector de Poynting:

$$\boxed{\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S} = -\frac{V_0^2}{R}\left(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}\right)}$$

Para calcular la energía final almacenada en el condensador, W_c, aplicamos el teorema de Poynting:

$$\frac{dW_{EM}}{dt} = -\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV - \oint_V \underbrace{(\vec{E}\times\vec{H})}_{\vec{S}}\cdot d\vec{S}$$

Teniendo en cuenta que entre las láminas del condensador se tiene $\vec{J}=0$, queda:

$$W_{EM} = W_c \rightarrow \frac{dW_c}{dt} = -\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$$

superficie

Integrando entre $t=0$ y $t=\infty$ (condensador cargado):

$$W_c = \int_0^\infty dt\left[-\int_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\right] =$$

$$= \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty \left(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}\right)dt =$$

$$= \frac{V_0^2}{R}\left[-RCe^{-t/RC} + \frac{1}{2}RCe^{-2t/RC}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{V_0^2}{R}C\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}CV_0^2$$

de donde:

$$\boxed{W_c = \frac{1}{2}CV_0^2}$$

Vemos como el flujo total de energía que entra en el condensador es igual a la energía de dicho condensador cuando la diferencia de potencial entre sus placas es V_0.