Electromagnetismo II

Tema 6. SOLUCIÓN GENERAL DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

1.- (a) Demostrar que:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{\mathbf{J}}}{R}\right)=\frac{1}{R}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{J}})+\frac{1}{R}(\vec{\nabla}'\cdot\vec{\mathbf{J}})-\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{\mathbf{J}}}{R}\right)$$

donde $\vec{\nabla}$ denota derivadas con respecto a $\vec{\mathbf{r}}$, y $\vec{\nabla}'$ denota derivada con respecto a $\vec{\mathbf{r}}'$.

(b) Teniendo en cuenta que $\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}',t-R/c)$ depende de $\vec{\mathbf{r}}'$ tanto explícitamente como a través de *R*, mientras que sólo depende de $\vec{\mathbf{r}}$ a través de *R*, confirmar que:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{J}}=-\frac{1}{c}\dot{\vec{\mathbf{J}}}\cdot(\vec{\nabla}R) \qquad \vec{\nabla}'\cdot\vec{\mathbf{J}}=-\dot{\rho}-\frac{1}{c}\dot{\vec{\mathbf{J}}}\cdot(\vec{\nabla}'R)$$

y usar este resultado para calcular la divergencia de $\vec{\mathbf{A}}$.

(c) A partir de los resultados anteriores, verificar que los potenciales retardados satisfacen el gauge de Lorenz.

2.- Un cable conductor rectilíneo e infinito transporta una corriente:

$$I(t)=\begin{cases} 0, & t\le 0 \\ I_0, & t>0 \end{cases}$$

Esto es, una corriente constante I_0 que empieza de forma abrupta en $t = 0$. Determinar las expresiones de los campos eléctrico y magnético resultantes.

3.- Un cable conductor rectilíneo e infinito transporta una corriente:

$$I(t)=\begin{cases} 0, & t\le 0 \\ kt, & t>0 \end{cases}$$

donde k es una constante. Determinar las expresiones de los campos eléctrico y magnético resultantes.

4.- A partir de los potenciales de Liénard-Wiechert para una carga con movimiento arbitrario:

$$\phi(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left[R-\dfrac{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{R}}}{c}\right]_{ret}}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\mathbf{v}}}{\left[R-\dfrac{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{R}}}{c}\right]_{ret}}=\frac{\vec{\mathbf{v}}}{c^2}\phi(\vec{\mathbf{r}},t)$$

determinar las expresiones de los campos eléctrico y magnético resultantes.

5.- Una carga puntual q se mueve con movimiento circular uniforme con velocidad angular ω en una circunferencia de radio a. La circunferencia se encuentra en el plano xy, centrada en el origen, y la carga se encuentra en el punto $(a,0)$ en el instante $t = 0$. Determinar los potenciales de Liénard-Wiechert en puntos sobre el eje z.

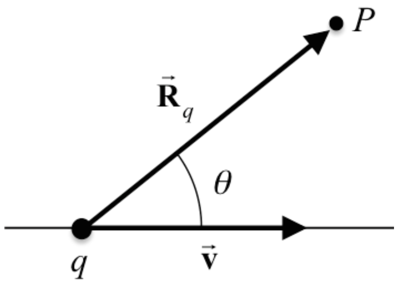
6.- Demostrar que los potenciales escalar y vector de una carga puntual q que se mueve con velocidad constante vienen dados por las expresiones:

$$\phi(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2 t - \vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{v}})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c^2}\phi(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{(c^2 t - \vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{v}})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}$$

7.- Demostrar que el potencial escalar de una carga puntual q que de mueve con velocidad constante puede expresarse de forma más simple como:

$$\phi(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R_q\sqrt{1-(v^2/c^2)\mathrm{sen}^2\theta}}$$



donde $\vec{\mathbf{R}}_q \equiv \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{v}}t$ es el vector desde la posición *presente* de la partícula (posición de la carga q en t), y θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{R}}_q$ y $\vec{\mathbf{v}}$. ¿Cuál es la expresión para velocidades no relativistas?

8.- Determinar las expresiones de los campos eléctrico y magnético de una carga puntual que se mueve con velocidad constante, así como sus expresiones para velocidades no relativistas.

9.- Sea una carga puntual q que se mueve a lo largo del eje x. Demostrar que los campos eléctrico y magnético sobre el eje a la derecha de la carga vienen dados por:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\left(\frac{c+v}{c-v}\right)\hat{\mathbf{u}}_x \qquad \vec{\mathbf{B}} = 0$$

(No suponer que la velocidad es constante). ¿Cuánto valdrían los campos a la izquierda de la carga?

10.- Para una carga puntual q que se mueve con velocidad constante, determinar el flujo del campo eléctrico creado por la carga a través de una superficie esférica centrada en la posición presente de la carga.

11.- Demostrar que los potenciales escalar y vector de una carga puntual q que se mueve con velocidad constante:

$$\phi(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2 t - \vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{v}})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c^2}\phi(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{(c^2 t - \vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{v}})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}$$

satisfacen el gauge de Lorenz.

12.- Una varilla delgada de longitud L tiene carga q distribuida uniformemente con densidad lineal de carga λ. La varilla se encuentra en el eje x y se mueve con velocidad constante v a lo largo de dicho eje x, sentido positivo, de modo que en el instante $t = 0$ la parte de atrás de la varilla pasa por el origen de coordenadas. Determinar:

(a) Los potenciales retardados creados por la varilla en el origen de coordenadas en función del tiempo, para $t > 0$. ¿Cuáles son las expresiones de estos potenciales cuando la varilla se aproxima a una carga puntual?

(b) Los potenciales en el sistema de referencia respecto al cual la varilla está en movimiento aplicando las transformaciones de Lorentz a los potenciales en el sistema de referencia de la varilla en reposo. Expresarlos en función de las coordenadas y las magnitudes de la varilla (densidad lineal de carga y longitud) del sistema de referencia de la varilla en reposo.

13.- La espira que se muestra en la figura tiene carga neta nula y transporta una corriente cuya intensidad I aumenta linealmente con el tiempo t de modo que:

$$I(t) = kt \ \ (-\infty < t < +\infty), \qquad k = \text{constante}$$

(a) Determinar los potenciales retardados ϕ y $\mathbf{A}$ en el punto O.

(b) Encontrar el valor del campo eléctrico $\mathbf{E}$ en el punto O. ¿Por qué a pesar de que la carga neta de la espira es nula, ésta produce un campo eléctrico? ¿Por qué no se puede determinar el campo magnético $\mathbf{B}$ creado por la espira de la expresión del potencial vector $\mathbf{A}$ obtenida en el apartado (a)?