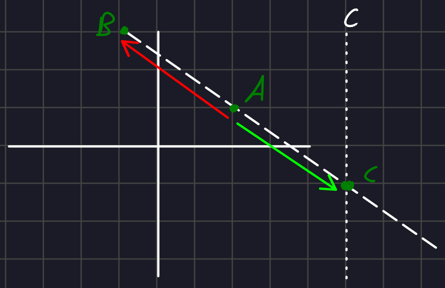
$A=(2,1)$ $B=(-1,3)$ $C=(5,K)$

$\vec{AB}=(-1,3)-(2,1)=(-3,2)$ – Vector
$A=(2,1)$ – Punto
$\longrightarrow$ paramétricas $\begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=1+2\lambda \end{cases} \longrightarrow \lambda=\frac{2-x}{3} \longrightarrow y=1+\frac{4-2x}{3}=\frac{7-2x}{3}$

Recta que pasa por $\vec{AB}$



Para ver que C esté alineado, debe cumplir la ecuación de la recta que hemos calculado.

Calculamos el valor de $\overset{K}{y}$ en la ecuación cuando $x=5$.

$$y=\frac{7-2\cdot5}{3}=\frac{7-10}{3}=\frac{-3}{3}=-1 \Rightarrow \underline{K=-1} \Rightarrow C=(5,-1)$$

Para que C sea simétrico con B respecto a A, la distancia de C a A debe ser igual que la distancia de B a A (es decir, $|\vec{AB}|=|\vec{AC}|$). Además C debe cumplir la ecuación de la recta que pasa por $\vec{AB}$

$$\vec{AC}=(5,K)-(2,1)=(3,K-1)$$

$|\vec{AB}|=\sqrt{(-3)^2+(2)^2}=\sqrt{13}$ u
$|\vec{AC}|=\sqrt{(3)^2+(K-1)^2}$

$\longrightarrow \sqrt{13}=\sqrt{3^2+(K-1)^2} \iff 13=9+(K-1)^2 \iff 4=K^2-2K+1 \iff$
$\iff K^2-2K-3=0 \longrightarrow$ Dos soluciones $K_1=3$; $K_2=-1$

Resolviendo la igualdad obtenemos dos candidatos a punto simétrico,

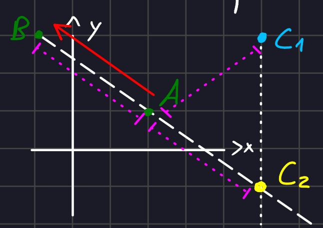
$C_1=(5,K_1)=(5,3)$ y $C_2=(5,K_2)=(5,-1)$

Calcularemos cuál es el punto simétrico viendo cuál cumple la ecuación de la recta que pasa por $\vec{AB}$

Sabemos de antemano por el ejercicio anterior que C_2 cumple la ecuación de la recta y vemos que C_1 no:

$$y=\frac{7-2x}{3} \longrightarrow 3\neq\frac{7-2\cdot5}{3}=\frac{7-10}{3}=-1$$

Por tanto C_2 es el punto simétrico a B respecto de A y el valor de K es -1. Veámoslo:

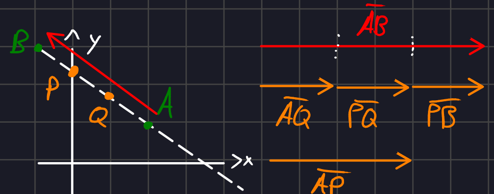


Observamos cómo las tres distancias en morado son iguales pero sólo C_2 está en la recta que contiene a $\vec{AB}$

Sean $P=(\alpha_x,\alpha_y)$ y $Q=(\beta_x,\beta_y)$ dos puntos en la recta que contiene a $\vec{AB}$, sabemos que estos puntos dividen el segmento $\vec{AB}$ en tres segmentos iguales, es decir:

(a) $\vec{AQ}=\frac{1}{3}\vec{AB}$ y (b) $\vec{AP}=\frac{2}{3}\vec{AB}$

Veámoslo:



$\vec{AQ}=(\beta_x-2,\beta_y-1)$
$\vec{AP}=(\alpha_x-2,\alpha_y-1)$

(a) $(\beta_x-2,\beta_y-1)=\frac{1}{3}(-3,2) \longrightarrow \begin{cases}\beta_x-2=\frac{1}{3}\cdot(-3)\\ \beta_y-1=\frac{1}{3}\cdot2\end{cases} \longrightarrow \beta_x=-1;\ \beta_y=\frac{5}{3} \Rightarrow \underline{Q=(-1,\frac{5}{3})}$

(b) $(\alpha_x-2,\alpha_y-1)=\frac{2}{3}(-3,2) \longrightarrow \begin{cases}\alpha_x-2=\frac{2}{3}\cdot(-3)\\ \alpha_y-1=\frac{2}{3}\cdot2\end{cases} \longrightarrow \alpha_x=0;\ \alpha_y=\frac{7}{3} \Rightarrow \underline{P=(0,\frac{7}{3})}$