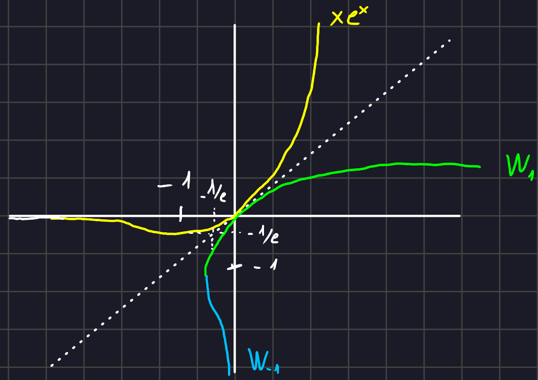
W-Lambert function

$ye^y = x \iff y = W(x)$



$\frac{d}{dx} xe^x = e^x(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (xe^x)(-1) = -\frac{1}{e}$

$W_1 : [-1/e, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $W_{-1} : [-1/e, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$

$[-1, +\infty) \longmapsto \mathbb{R}$ $\qquad$ $[-\infty, -1) \longmapsto \mathbb{R}$

1. No es biyectiva $\qquad$ $I = (-\infty, -1]$ es estrictamente decreciente
$J = [-1, +\infty)$ es estrictamente creciente

2. $f(I) = [-\frac{1}{e}, 0)$ $\qquad$ $f(J) = [-\frac{1}{e}, \infty)$ $\qquad$ $f(-1) = -\frac{1}{e}$

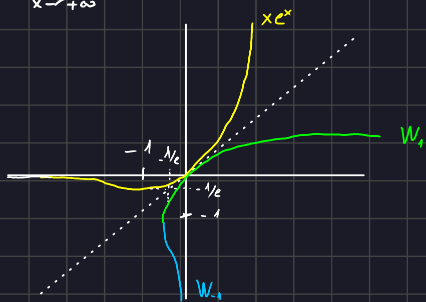
f estr. dec. en I, f continua $\Rightarrow$ el mayor número del intervalo será el primero, aka. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
el menor número del intervalo será el último aka. $f(-1) = -\frac{1}{e}$

f estr. creciente en J, f continua $\Rightarrow$ el menor número del intervalo será el primero, aka. $f(-1) = -\frac{1}{e}$
el mayor número del intervalo será el último aka. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4. $W_1 : [-1/e, +\infty) \longrightarrow [-1, +\infty)$

$W_{-1} : [-1/e, 0) \longrightarrow [-\infty, -1)$



5. Queremos saber si $x = a^x$ tiene solución ¿$f(x) = a^x - x = 0$? $f'(x) = a^x \ln a - 1 = 0$, estudiamos por casos

- si $0 < a \leq 1 \Rightarrow f'(x) < 0$ siempre porque $a^x \ln a - 1 < 0 \Rightarrow$ siempre es decreciente,
como $0 < a < 1 \Rightarrow \ln a < 0$

$\lim_{x \to +\infty} a^x - x = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} a^x - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x} + x = 0 + \infty = +\infty$

por Bolzano, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por tanto será continua en un intervalo $[a, b]$ y en los límites vemos un cambio de signo, $\Rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow \exists c : f(c) = a^x - x = 0$ y c es única por ser estrictamente monótona

- si $a > 1 \Rightarrow$ buscamos máximos y mínimos $f'(x) = a^x \ln x - 1 = 0 \Rightarrow a^x \ln a = 1 \Rightarrow a^x = \frac{1}{\ln a} \Rightarrow x = \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)$
si hay un extremo es en esa x

$f(x) = a^x - x$ $\qquad$ $f\left(\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)\right) = a^{\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)} - \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a} - \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right) = 0$

$\frac{1}{\ln a} - \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right) = 0 \longrightarrow \frac{1}{\ln a} = \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right) \Rightarrow \underbrace{a^{1/\ln a} = a^{\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)}}_{\text{Lo tomo exponentes}} \Rightarrow a^{1/\ln a} = \frac{1}{\ln a} \underset{\text{Lo tomo ln}}{\Rightarrow} \ln\left(a^{\frac{1}{\ln a}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)$

$\frac{1}{\ln a} \ln a = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) \Rightarrow 1 = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) \Rightarrow e = \frac{1}{\ln a} \Rightarrow \ln a = \frac{1}{e} \Rightarrow a = e^{\frac{1}{e}}$

$f(c) > 0 \Rightarrow a > e^{1/e} \Rightarrow$ ninguna

$f(c) < 0 \Rightarrow a < e^{1/e} \Rightarrow$ 2 soluciones