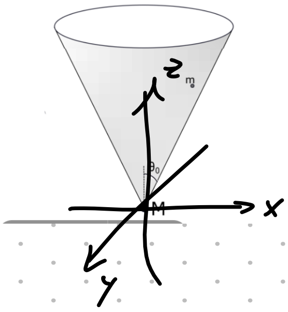
1. Una partícula de masa m puede deslizar sin rozamiento por la superficie de un cono con semi-ángulo de apertura θ_0. En el vértice del cono hay una partícula de masa M fija que ejerce una fuerza de atracción gravitatoria sobe la otra partícula. i) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? ii) Usa las coordenadas generalizadas más apropiadas y obtén la lagrangiana. iii) ¿Hay momentos conservados? iv) A partir de las ecuaciones de Lagrange reduce el problema a un sistema unidimensional conservativo, obteniendo el potencial efectivo. v) Obtén, a partir de las ecuaciones de Lagrange, unas condiciones iniciales para que la partícula describa un movimiento circular uniforme de radio R.



I

Tiene dos grados de libertad. En coordenadas esféricas, ρ y φ, con θ fijo en θ_0.

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta_0\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta_0\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta_0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}=\dot{\rho}\sin\theta_0\cos\varphi-\dot{\varphi}\rho\sin\theta_0\sin\varphi \\ \dot{y}=\dot{\rho}\sin\theta_0\sin\varphi+\dot{\varphi}\rho\sin\theta_0\cos\varphi \\ \dot{z}=\dot{\rho}\cos\theta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^2=\dot{\rho}^2\sin^2\theta_0\cos^2\varphi+\dot{\varphi}^2\rho^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi-2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin^2\theta_0\sin\varphi\cos\varphi \\ \dot{y}^2=\dot{\rho}^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi+\dot{\varphi}^2\rho^2\sin^2\theta_0\cos^2\varphi+2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin^2\theta_0\sin\varphi\cos\varphi \\ \dot{z}^2=\dot{\rho}^2\cos^2\theta_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{\rho}^2\sin^2\theta_0\cos^2\varphi+\dot{\varphi}^2\rho^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi+\dot{\rho}^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi+\dot{\varphi}^2\rho^2\sin^2\theta_0\cos^2\varphi+\dot{\rho}^2\cos^2\theta_0=$$

$$=\dot{\rho}^2\sin^2\theta_0+\dot{\varphi}^2\rho^2\sin^2\theta_0+\dot{\rho}^2\cos^2\theta_0=\dot{\rho}^2+\dot{\varphi}^2\rho^2\sin^2\theta_0 \rightarrow T=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\dot{\varphi}^2\rho^2\sin^2\theta_0)$$

II

$$U=G\frac{Mm}{\rho} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}=T-U=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\dot{\varphi}^2\rho^2\sin^2\theta_0)+G\frac{Mm}{\rho}} \longrightarrow \text{Euler-Lagrange:}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}-\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho}=0 \Longleftrightarrow m\ddot{\rho}-m\dot{\varphi}^2\rho\sin^2\theta_0-G\dfrac{Mm}{\rho^2}=0 \Longleftrightarrow \ddot{\rho}=\dot{\varphi}^2\rho\sin^2\theta_0+G\dfrac{M}{\rho} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}-\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=0 \Longleftrightarrow m\rho^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta_0=0 \Longleftrightarrow \boxed{p_\varphi=m\rho^2\sin^2\theta_0\dot{\varphi} \text{ se conserva}} \end{cases}$$

III

Por el T^ma de Noether tenemos que la independencia de la lagrangiana con respecto a φ implica que su momento asociado se conserva, es decir que $p_\varphi=m\rho^2\sin\theta_0\dot{\varphi}=\ell$ siendo ℓ una constante $\Rightarrow \dot{\varphi}=\dfrac{\ell}{m\rho^2\sin\theta_0}$ Ahora, sustituimos este valor en la lagrangiana tal que:

$$\mathcal{L}'=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2+\frac{\ell^2}{(m\rho^2\sin\theta_0)^2}\cdot\rho^2\sin^2\theta_0\right)+G\frac{Mm}{\rho}=\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}\ell^2\frac{\cancel{m\rho^2\sin^2\theta_0}}{(m\rho^2\sin^2\theta_0)^{\cancel{2}}}+G\frac{Mm}{\rho}\Rightarrow$$

IV

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}'=\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+\frac{\ell^2}{2m\rho^2\sin^2\theta_0}+G\frac{Mm}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{eff}=-G\frac{Mm}{\rho}-\frac{\ell^2}{2m\rho^2\sin^2\theta_0}}$$

que es una función unidimensional ya que su única entrada es ρ

V

Que el movimiento sea a velocidad y radio constantes $\Rightarrow \boxed{\rho(0)=R,\ \dot{\rho}(0)=0} \rightarrow \ddot{\rho}=0$ Usaremos la lagrangiana sin reducir ya que la reducción que hemos hecho es a velocidad angular constante y no radio constante

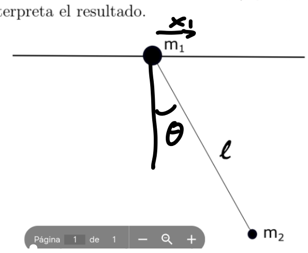
$p_\phi=\ell\neq0 \Rightarrow \dot{\varphi}(0)\neq0$ para que haya algún movimiento (hemos fijado ya que $\dot{\rho}(0)$ va a ser 0)

$$\mathcal{L}=T-U=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\dot{\varphi}^2\rho^2\sin^2\theta_0)+G\frac{Mm}{\rho} \qquad \dot{\varphi}\ \text{cte} \qquad \rightarrow\text{Euler-Lagrange}\Rightarrow$$

$$\text{E-L}\Rightarrow\begin{cases} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}-\underbrace{\cancel{\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}}}_{\to 0\ \text{simetría}}=0 \Rightarrow mR^2\sin^2\theta_0\ddot{\varphi}=0 \qquad (mR^2\sin^2\theta_0\dot{\varphi} \text{ se conserva, T}^{ma}\text{ Noether}) \\ \Rightarrow \underbrace{\cancel{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}}}_{\to 0\ \text{cond. iniciales}}-\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho}=0 \Rightarrow -m\dot{\varphi}^2\rho\sin^2\theta_0+\dfrac{GMm}{\rho^2}=0 \Longleftrightarrow \dot{\varphi}^2=\dfrac{GMm}{\rho^2}\Big/m\rho\sin^2\theta_0 \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}(0)=\left(\dfrac{GM}{R^3\sin^2\theta_0}\right)^{1/2}} \end{cases}$$

V

2. Considera un sistema formado por dos partículas de masas m_1 y m_2. La primera puede deslizar a lo largo de una recta horizontal sin rozamiento. La segunda puede moverse en el plano vertical que contiene la recta y está unida a la primera mediante un hilo rígido de longitud ℓ. Sobre las partículas actúa la fuerza gravitatoria cuya intensidad es constante e igual a g. i) Elige coordenadas generalizadas adecuadas y obtén la lagrangiana del sistema. ii) Obtén los momentos canónicos y analiza si alguno de ellos es conservado, justificando el resultado. iii) Explica por qué este sistema tiene dos grados de libertad y sin embargo sólo hay un modo de oscilación. iv) Obtén la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio eliminando el modo no oscilatorios. v) ¿A qué tiende la frecuencia si $m_2/m_1 \to 0$? Interpreta el resultado.



$$\begin{cases}\bar r_{10}=(0,0)\\ \bar r_{20}=(0,-L)\end{cases} \quad \begin{cases}\bar r_1=(x_1,0)\\ \bar r_2=(x_1+L\sin\theta,\ -L\cos\theta)\end{cases} \xrightarrow[0]{\text{Taylor}} \begin{cases}\bar r_1=(x_1,0)\\ \bar r_2=(x_1+L\theta,\ -L(1-\frac{\theta^2}{2}))\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\bar r_1=(x_1,0)\\ \bar r_2=(x_1+L,\ L(\frac{\theta^2}{2}-1))\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{\bar r}_1=(\dot x_1,0)\\ \dot{\bar r}_2=(\dot x_1+L\dot\theta,\ L\theta\dot\theta)\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}|\dot r_1|^2=\dot x_1^2\\ |\dot r_2|^2=(\dot x_1+L\dot\theta)^2+L^2\theta^2\dot\theta^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|\dot r_1|^2=\dot x_1^2\\ |\dot r_2|^2=\dot x_1^2+L^2\dot\theta^2+2\dot x_1L\dot\theta+L^2\dot\theta^2\theta^2\end{cases}$$

I

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}=T-U=\frac12 m_2(\dot x_1^2+L^2\dot\theta^2+2\dot x_1L\dot\theta+L^2\dot\theta^2\theta^2)+\frac12 m_1\dot x_1^2-m_2gL\cos\theta}$$

II

$$p_x=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x}=m_2\dot x+m_2L\dot\theta+m_1\dot x=\dot x(m_1+m_2)+m_2L\dot\theta \Rightarrow \text{Se conserva porque } \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0$$

$$p_\theta=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}=m_2L^2\dot\theta+m_2\dot xL+L^2m_2\theta^2\dot\theta=\dot\theta m_2L^2(1+\theta^2)+m_2L\dot x_1$$

T$^{\text{ma}}$ Noether ($\mathcal{L}$ no depende de $x \Rightarrow$ simetría)

$$\frac{\partial T}{\partial\dot x_1}=m_2\dot x_1+L\dot\theta m_2+m_1\dot x_1=\dot x(m_1+m_2)+Lm_2\dot\theta \iff \frac{\partial^2T}{\partial\dot x_1^2}(0)=m_1+m_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}=m_2L^2\dot\theta+m_2L\dot x_1+L^2\theta^2\dot\theta \Rightarrow \frac{\partial^2T}{\partial\dot\theta^2}(0)=m_2L^2+L^2\theta^2=L^2(m_2+\theta^2) \Rightarrow T=\begin{pmatrix}m_1+m_2 & m_2L\\ m_2L & L^2(m_2+\theta^2)\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial\dot\theta\partial\dot x_1}(0)=m_2L=\frac{\partial^2T}{\partial\dot x\partial\dot\theta} \qquad U=-m_2gL\cos\theta \xrightarrow[0]{\text{taylor}} U=-m_2gL(1-\frac{\theta^2}{2})=m_2gL(\frac{\theta^2}{2}-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2U}{\partial x_1^2}(0)=\frac{\partial^2U}{\partial x\partial\theta}(0)=\frac{\partial^2U}{\partial\theta\partial x_1}(0)=0 \qquad \frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}(0)=mgL \Rightarrow U=\begin{pmatrix}0&0\\0&mgL\end{pmatrix}$$

$$|U-\omega^2T|=\begin{vmatrix}-\omega^2(m_1+m_2) & -\omega^2m_2L\\ -\omega^2m_2L & m_2gL-\omega^2L^2(m_2+\theta^2)\end{vmatrix}=0 \iff -\omega^2(m_1+m_2)[m_2gL-\omega^2L^2(m_2+\theta^2)]--\omega^4m_2^2L^2=0 \iff$$

$$\iff \omega^4\cancel{m_2^2L^2}=-\omega^2m_1m_2gL+\omega^4L^2m_1m_2+\omega^4L^2m_1\theta^2-\omega^2m_2^2gL+\cancel{\omega^4m_2^2L^2}+\omega^4m_2L^2\theta^2 \iff$$

$$\iff \omega^4(L^2m_1m_2+L^2m_2\theta^2+L^2m_1\theta^2)-\omega^2(m_1m_2gL+m_2^2gL)=0 \iff$$

$$\iff \omega^4(L^2m_1m_2+L^2m_2\theta^2+L^2m_1\theta^2)=\omega^2(m_1m_2gL+m_2^2gL) \iff$$

III

$$\iff \boxed{\omega=\left(\frac{g(m_1m_2+m_2^2)}{L(m_1m_2+\theta^2(m_1+m_2))}\right)^{1/2}}$$

IV

Perdemos un $\omega^2=0$ (modo no oscilatorio) al dividir la ecuación por ω^2 en los dos lados

Si $m_2/m_1 \to 0$ $\quad m_1 >>> m_2 \Rightarrow \omega=\left(\frac{gm_1}{Lm_1(1+\theta^2)}\right)^{1/2}=\left(\frac{g}{L(1+\theta^2)}\right)^{1/2}$ (independencia del valor de m_1, m_2)

$$m_1m_2+m_2^2+m_1^2-m_1^2=(m_1+m_2)^2-m_1^2 \approx m_1^2-m_1^2=0$$

↳ Esto está mal, ya veremos como tomorrow

V

$$\omega=\left(\frac{g(m_1m_2+m_2^2)}{L(m_1m_2+\theta^2(m_1+m_2))}\right)^{1/2}=\left(\frac{\frac{g(m_1m_2+m_2^2)}{m_1}}{L(m_1m_2+\theta^2(m_1+m_2))}\right)^{1/2}=\left(\frac{g(m_2+\cancelto{0}{\frac{m_2^2}{m_1}})}{L(m_2+\theta^2(1+\cancelto{0}{\frac{m_2}{m_1}}))}\right)^{1/2}\simeq\left(\frac{gm_2}{L(m_2+\theta^2)}\right)^{1/2}$$

La oscilación de m_2 deja de depender de m_1, lo que nos sugiere que m_1 queda quasi estática como punto de apoyo respecto al cual m_2 oscila.