Ejercicio 1

Encontrar el dominio de la función $f(x,y) = \sqrt{y} - \ln(\sin(\pi x))$.

$f(x,y) = \sqrt{y} - \ln(\sin(\pi x)) \quad k \in \mathbb{Z} \quad D_f = (k, k+1) \times [0, +\infty)$

Ejercicio 2

Usar la definición de límite para probar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} 3 - x - y = 1.$$

$(|x-1| < \eta, |y-1| < \eta) \Rightarrow |(3-x-y)| < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon > |2-x-y| =$

$= |(1-x)(1-y)| \underset{\uparrow \text{D.Triangular}}{\leq} |1-x| + |1-y| \underset{\uparrow}{=} \eta + \eta \Rightarrow 2\eta \leq \varepsilon \Rightarrow \eta \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \square$

$\begin{cases} \eta < |x-1| \\ \eta < |y-1| \end{cases}$

Ejercicio 3

Estudiar mediante coordenadas polares el límite siguiente :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - 2x}{y^2 + 2x}.$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$\nexists$ lim, depende θ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^2\sin^2\theta - 2r\cos\theta}{r^2\sin^2\theta + 2r\cos\theta} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\sin^2\theta - 2\cos\theta}{r\sin^2\theta + 2\cos\theta} = \frac{-2\cos\theta}{2\cos\theta}$$

Ejercicio 5

Estudiar la continuidad de la función $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ con $f(0,0,0) = 0$.

Coordenadas esféricas

$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\sin\varphi\cos\theta\, r\sin\varphi\sin\theta\, r\cos\varphi}{\sqrt{r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\varphi}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}{r\sqrt{\underbrace{\sin^2\varphi\,\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1} + \cos^2\varphi}_{1}}} = \lim_{r\to 0} r^2\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\varphi =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\cos\varphi| \leq \lim_{r\to 0} r^2 = 0$$

Ejercicio 6

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en $B \subseteq A$ y en $C \subseteq A$.

1. Probar que f es uniformemente continua en $B \cap C$.
2. ¿Ha de ser f uniformemente continua en $B \cup C$?

$f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tq f uniformemente contínua en $B \subseteq A$ y f uniformemente contínua en $C \subseteq A$

1. $B \cap C \subseteq B$ y también $B \cap C \subseteq C$. Si f contínua en B, entonces es contínua en $B \cap C$ $\quad (B \cap C \neq \emptyset)$

2. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) = B \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] = C \end{cases}$ $\quad x \in A$ $\quad (n=1)$

Por ser una constante, f es uniformemente contínua en B y en C, tenemos $B \cup C = [0,2]$ pero en $B \cup C$, f no es contínua y entonces no es uniformemente contínua.