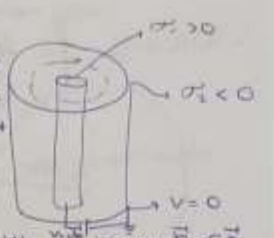
CORRECCIÓN PARCIAL

$\sigma_1 \cdot \pi R_1^2 = \sigma_2 \pi R_2^2$

$Q_{int} = -Q_{ext}$



EJERCICIO 1: (modelo B)
Habría que responderlo de dos formas

a) Métodos para sacar $\vec{E}$:

1) T^ma Gauss para $\vec{D}$ por ser un material IHL y usamos $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ para sacar $\vec{E}$. Después para sacar el potencial usábamos $\vec{E} = -\nabla \phi$ y con las cond. de contorno sacamos las constantes que nos aparecen al integrar. También tendríamos que sacar σ_f para las 4 regiones

2) Ec. Laplace o Poisson aplicada en todas las variables → en una simetría cilíndrica tendrá una forma concreta

$\phi_i = A_i + B_i \ln \rho$, $i = 1, 2, 3, 4$ ← la solución

b) → Como habían 4 regiones habrá 4 ctes a determinar.

Las condiciones de contorno serán:

R_1 → radio pequeño

R_2 →

R_3 → radio más grande

~~[illegible]~~

1) Región ①:

$\rho = R_1 \rightarrow \boxed{\phi_1 = V}$

$0 < \rho < R_1 \rightarrow \phi_1 = V$

$\Rightarrow \boxed{A_1 = V}$, $\boxed{A_2 = 0}$

2) Región ②:

$\rho = R_3 \Rightarrow \phi_4 = (r = R_3) = 0$

$\rho > R_3 \Rightarrow \boxed{\phi_4 = 0} \Rightarrow \boxed{A_4 = 0}$, $\boxed{B_4 = 0}$

3) Continuidad en las interfases (en R_1, R_2 y R_3):

$\phi_1 (r = R_1) = \phi_2 (r = R_1)$

$\phi_2 (r = R_2) = \phi_3 (r = R_2)$

$\phi_3 (r = R_3) = \phi_4 (r = R_3)$

La última condición que me falta es: 4) $\vec{n} \left(\underbrace{\varepsilon_2 \vec{E}_2}_{\vec{D}_2} - \underbrace{\varepsilon_1 \vec{E}_1}_{\vec{D}_1} \right) \Big|_{r = R_2} = \sigma_f$ → cond. de contorno de $\vec{D}$ que como es IHL lo podemos escribir como $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

Evaluado en R_2 donde $\sigma_f = 0$ porque entre los dieléctricos no hay densidad de carga completamos todas las condiciones de contorno necesarias.

Todo esto es usando el método ② (método de la ec. de Laplace). Usando el método ① no es necesario la condición de contorno 4).

* Si en vez de un cilindro fuese una esfera sería lo mismo.

Una tercera opción es:

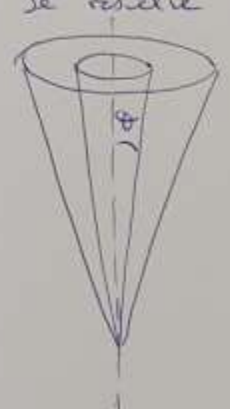
3) $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$ → $\vec{E} = -\dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$ → saco $\vec{E}$ y con eso uso $\vec{E} = -\nabla\phi$ y saco el potencial integrando.

$\vec{D} = 0$ ← por el T^ma de Gauss para $\vec{D}$.

Esta bien como idea pero resolver la integral es muy complicado

EJERCICIO 2: (modelo A) el de los conos.

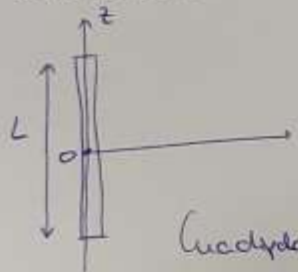
Se resuelve la ec. de Laplace en esféricas con una variable (θ)



Resolviendo → $\boxed{\phi = A \log\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) + B}$

Después usamos $\vec{E} = -\nabla\phi$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

EJERCICIO 4: (modelo A)



$\lambda = kz$ (k cte)

Momento monopolar $Q = 0$ → porque es impar.

Momento dipolar → $\vec{p} = \int_{-L/2}^{L/2} dz\, kz\, \vec{u}_z = \boxed{\dfrac{kL^3}{12}\vec{u}_z}$

Cuadrupolar → $Q_{xx} = Q_{yy} = \dots = 0 = Q_{xy} = Q_{yx} = Q_{zx} = Q_{xz} = Q_{yz} = Q_{zy}$

Y luego calculamos $\phi \simeq \cancel{\phi_M}^{0} + \phi_D + \cancel{\phi_Q}^{0}$

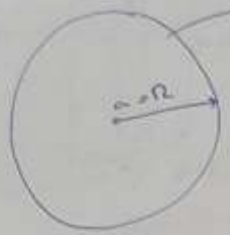
monopolo   cuadrupolo.

$\Rightarrow \boxed{\phi_D = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{kL^3 z}{12 r^3}}$

no nos lo dicen, no podemos asumir que es IHL

EJERCICIO 3: ~~[illegible]~~ modelo A ($\cancel{IHL}$)

Material aislante



$\vec{P} = A(\rho\,\vec{u}_\rho - z\,\vec{u}_z)$ A = cte.

$\sigma_b = \vec{P}\cdot\vec{n}$

a) $\rho_b = -\nabla\cdot\vec{P}$; Usamos coord. cilíndricas y escribimos $\nabla\cdot\vec{P}$ en cilíndricas:

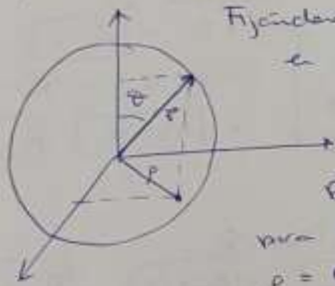
$$\rho_b = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho P_\rho)\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{\partial P_z}{\partial z}$$; sustituimos y operamos:

Sabemos que $\vec{P} = \underbrace{A\rho}_{P_\rho}\,\vec{u}_\rho \underbrace{-Az}_{P_z}\,\vec{u}_z$

$\rho_b = -2A\cdot 0 + A = \boxed{-A}$

$\underline{\sigma_b = \vec{P}\cdot\vec{n}}$ donde $\vec{n} = \vec{u}_r = \text{sen}\,\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\,\vec{u}_z$

se hace en la superficie de la esfera, tomamos los valores para los puntos de la superficie, n → para cualquier punto.



Fijándonos en el dibujo escribimos $\vec{n} = \text{sen}\,\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\,\vec{u}_z$ en coord. cilíndricas.

Hacemos el producto:

$$\sigma_b = \vec{P}\cdot\vec{n} = A(\rho\,\vec{u}_\rho - z\,\vec{u}_z)\Big|_{\text{superficie } r=R}\cdot(\text{sen}\,\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\,\vec{u}_z)$$

solo cogemos los puntos de la superficie.

Para usar el dato r = R para los ptos de la sup., escribimos:

$\rho = R\cdot\text{sen}\,\theta$ y $z = R\cdot\cos\theta$

Sustituimos y resolvemos: $\sigma_b = A(R\,\text{sen}\,\theta\,\vec{u}_\rho - R\cos\theta\,\vec{u}_z)\cdot(\text{sen}\,\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\,\vec{u}_z)$

$$\sigma_b = AR(\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta) = \boxed{-AR\cos(2\theta)}$$

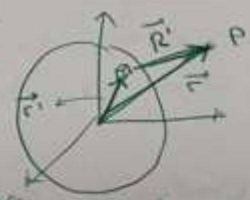
b) Se puede hacer de dos formas:

1) $\phi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_\tau \frac{\vec{P}\cdot\overbrace{(\vec{r}-\vec{r}')}^{\vec{R}}}{|r-r'|^3}\,d\tau'$ está en las transparencias

es más complicado

donde evalúo el potencial

vector posición de los elementos diferenciales de la esfera en esféricas.



2) $\phi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\displaystyle\int_\tau \frac{\overset{\text{cte}}{\rho_b}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d\tau' + \oint_S \frac{\sigma_b}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,da\right] =$ lo tenemos que poner en esféricas

$\vec{r} = 0$ → ponemos el pto en el origen de la esfera

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta'\,d\theta'\int_0^R r'^2\,dr'\,\frac{(-A)}{r'} + \int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta'\,d\theta'\,R^2\,\frac{(-AR\cos(2\theta'))}{R}\right] =$$

$= \boxed{-AR^2/6\varepsilon_0}$

es un módulo → $|\vec{r}-\vec{r}'| = |0-\vec{r}'| = r'$