1.- Dado $p \in \mathbb{Z}$, consideremos la función $f(z) = \dfrac{z^p}{(9-z^2)(z+i)}$.

i) (1 punto) Clasificar todas las singularidades de $f(z)$.

ii) (1 punto) Si $p = 1$, calcular la integral $\int_C f(z)\,dz$, donde C es la circunferencia de centro el origen y radio 2.

I) $f(z)$ analítica para $z \in \mathbb{C} : z \neq \{3, -3, i\}$

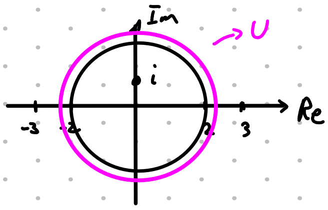
Buscamos los ceros del denominador: $z_1 = \pm 3$ $\;z_2 = i$ y $z = \infty$

z_1 y z_2 son singularidades aisladas ya que podemos encontrar un disco de radio >0 en el que son la única singularidad. Cuando esto no sucede, la singularidad es no aislada como en $z = \infty$

z_1 es un polo de orden 2 y z_2 un polo de orden 1.

II) Con el T^{ma} de los Residuos: $\quad U \supset D(0,2)$ $\quad |-i| = 1 < 2$ ✓

$|-3| = |3| = 3 > 2$ ✗



$$\mathrm{Res}(f, -i) = \lim_{z \to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{z}{9 - z^2} = \frac{-i}{9+1} = \frac{-i}{10}$$

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(-\frac{i}{10}\right) = \frac{\pi}{5}$$

T^{ma} Rouché

$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ en $\partial D \implies$ f y g tienen el mismo nº de ceros

$n \in \mathbb{Z}$

2.- (1 punto) Sea $\alpha > 1$. Hallar el número de ceros de la función $f(z) = ze^{\alpha - z} - 1$ en el interior del disco unidad.

$f(z) = ze^{\alpha - z} - 1 = 0 \implies ze^{\alpha - z} = 1 \iff e^{\alpha - z} = 1/z \iff \alpha - z = \ln\left(\frac{1}{z}\right) + 2\pi i n$

Invocamos el Principio del Argumento: Si $\Delta \arg(f(z)) = 2\pi k$ mientras z recorre una curva, entonces k es el número de ceros menos el número de polos en el interior de la curva.

Si consideramos la curva $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $|z| = 1$: $f(e^{i\theta}) = \underbrace{e^{i\theta}}_{\text{Rotación completa}} e^{\alpha - e^{i\theta}} - 1$

No sé

3.- ¿Verdadero o falso? Justificar la respuesta (demostrar la afirmación si es cierta y dar un contraejemplo si es falsa).

a) (0'5 puntos) Si dos funciones enteras son iguales sobre un conjunto de puntos no numerable, entonces son idénticas (es decir, iguales para todo $z \in \mathbb{C}$).

Verdadero, las funciones enteras son holomorfas en $\mathbb{C}$. Por Bolzano-Weierstrass, todo subconjunto no numerable de $\mathbb{C}$ tiene puntos de acumulación. Por el T^{ma} DE IDENTIDAD DE FUNCIONES HOLOMORFAS, si $f(z) = g(z)$ en un subconjunto de $\mathbb{C}$ con puntos de acumulación, entonces $f(z) = g(z)$ en todo $\mathbb{C}$.

b) (0'5 puntos) La expresión i^i únicamente admite el valor $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Falsa, $\log(i) = \log(e^{i\frac{\pi}{2}}) = i\frac{\pi}{2} + 2\pi i k \implies i^i = e^{i\log(i)} \iff i^i = e^{i\left(i\frac{\pi}{2} + 2\pi i k\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$

y para $k = 0$ tenemos el valor del enunciado, pero este no es único, pues $k \in \mathbb{Z}$

$i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi}$ (para $k = 1$)

c) (0'5 puntos) La función $f(x+iy) = (x+iy)(x^2+y^2)$ es derivable en la circunferencia unidad. $\quad z = x+iy \quad \bar{z} = x - iy \quad z\bar{z} = x^2 + y^2$

Falsa, $f(x+iy) = (x+iy)(x^2+y^2) \iff f(z) = z|z|^2$ con $z \in \mathbb{C} \iff f(z) = z^2\bar{z}$

Como f depende de $\bar{z}$, f no es holomorfa $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z^2 \neq 0\right)$ en la circunferencia unidad.

También podemos invocar el T^{ma} DE CAUCHY-RIEMANN $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

y ver que $u(x,y) = x(x^2+y^2)$ $\quad v(x,y) = y(x^2+y^2)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2 \neq x^2 + 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy \neq -2xy = \frac{\partial v}{\partial x} \implies$ No se cumple Cauchy-Riemann

$\implies$ No es holomorfa $\implies$ No es derivable de funciones enteras

d) (0'5 puntos) Si una función $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ es entera y acotada en el eje real, entonces es constante.

T^{ma} de Liouville

Hipótesis:

f entera

f acotada $\Rightarrow \exists M > 0 : |f(z)| < M, \forall z \in \mathbb{C}$

La estimación de Cauchy para la primera derivada es $|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$ y como podemos tomar r arbitrariamente grande, entonces $\lim_{r \to \infty} \frac{M}{r} = 0 \Rightarrow |f'(z)| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es constante

e) (0'5 puntos) Si f es una función analítica no constante sobre un conjunto abierto U acotado y es continua sobre $\bar{U}$, entonces f tiene un cero en U o $|f|$ asume su mínimo valor sobre la frontera de U.

Verdadero

Por el ppio del módulo máximo, f no tiene un mínimo local en U a menos que f sea cte. que no lo es por hipótesis. Sabemos que hay extremos en $\bar{U}$ ya que f es analítica $\Rightarrow$ continua y no es constante.

si $z_0 \in U$ y $f(z_0) = 0$ Tenemos un cero en U

si $z_0 \in U$ y $f(z_0) \neq 0$ $|f(z_0)| \geq m = 0$ $m = \min\{|f(z)| : z \in \partial U\} \Rightarrow$

el mínimo sucede en ∂U

No lo tengo claro

4.- 4.1) (1'25 puntos) Enunciar y demostrar el teorema de los residuos.

T^{ma} DE LOS RESIDUOS

Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en D simplemente conexo excepto en n un número finito de ptos z_k, singularidades aisladas de f. Sea γ una curva simple, cerrada, regular a trozos y con orientación positiva tal que su dominio contiene las singularidades:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Demostración:

Si desarrollamos la Serie de Laurent de f alrededor de cada punto con singularidad z_k

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(k)} (z - z_k)^m \Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_k) = a_{-1}^{(k)} \quad (*)$$

Consideramos una curva arbitrariamente pequeña γ_k que contenga una de las singularidades (podemos hacerlo porque son aisladas por hipótesis) en sentido positivo

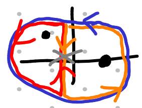
$$\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(k)} (z - z_k)^m\,dz$$

- para $m \neq -1$ $\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_k} (z - z_k)^m\,dz = 0$
- para $m = -1$ $\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_k} \frac{a_{-1}^{(k)}}{(z - z_k)}\,dz = 2\pi i\, a_{-1}^{(k)} \overset{(*)}{=} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$

Por lo que basta ver que $\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz$ para acabar la demostración.

Podemos ver que esta igualdad es cierta ya que si tomamos γ_k como la sección curva de γ correspondiente y unido al otro extremo con un segmento rectilíneo, que será recorrido en el sentido contrario por el siguiente camino γ_{k+1} y por tanto se cancelará. $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Rightarrow$

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_{\sum_k \gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz \Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) \quad \square$$



4.2) (1'5 puntos) Dado $a > 1$, utilizar el teorema de los residuos para hallar el valor de la integral $\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$.

$z = e^{i\theta} \quad dz = ie^{i\theta}d\theta \Longleftrightarrow d\theta = dz\,\frac{1}{ie^{i\theta}} = dz\,\frac{1}{iz}$

$$\int_0^\pi (a+\cos\theta)^{-2}d\theta = \int_0^\pi \left(a+\tfrac{1}{2}[e^{i\theta}+e^{-i\theta}]\right)^{-2}d\theta = \frac{1}{i}\int_1^{e^{i\pi}}\left(a+\tfrac{1}{2}(z+z^{-1})\right)^{-2}\frac{1}{z}dz = \frac{4}{i}\int_1^{e^{i\pi}}\frac{1}{z(2a+z+z^{-1})^2}dz$$

$$= \frac{4}{i}\int_1^{e^{i\pi}}\frac{1}{\left[z^2(2a+z+z^{-1})\right]^2}dz = \frac{4}{i}\int_1^{e^{i\pi}}\frac{1}{((2az+z^2+1)z)^2}dz$$

y tenemos problemas de analiticidad en $z=0$ y las raíces de $z^2+2az+1$

$$z = \frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2} = \frac{-2a\pm 2\sqrt{(a^2-1)}}{2} = -a\pm\sqrt{a^2-1}$$

Como $a>1$, una raíz cae dentro del disco unitario pero la otra no

$z_1 = -a-\sqrt{a^2-1} \Longrightarrow |z_1|>1$

$z_2 = -a+\sqrt{a^2-1} \Longrightarrow |z_2|<1$

(como $a>1$, $0<\sqrt{a^2-1}<a \Rightarrow \begin{cases} 1<a<|z_1|<2a \\ 0<|z_2|<1\end{cases}$ ¡Polo de orden 2!

Calculamos el residuo $\mathrm{Res}(f,z_1) = \lim_{z\to z_i}\frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left((z-z_i)^N f(z)\right) = \lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-z_1)^2}{(z(2az+z^2+1))^2}z\right) =$

$$= \lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z-z_1}{z(2az+z^2+1)}\right)^2 = \lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left(\frac{-z_1}{2az^2+z^3}\right)^2 = \lim_{z\to z_1} z_1^2\frac{d}{dz}(2az^2+z^3)^{-2} = \lim_{z\to z_1} z_1^2\,\frac{-2(2az+3z^2)}{(2az^2+z^3)^3} =$$

$=$ no sé, pinta feo

5.- Consideremos la función entera $f(z) = \cosh(\pi z)$.

i) (0'75 puntos) Calcular formalmente el exponente de convergencia asociado a los ceros de $f(z)$.

$f(z)=0 \Longleftrightarrow \cosh(\pi z)=0 \Longleftrightarrow \pi z = \operatorname{arcosh}(0) = \frac{i\pi}{2}+2\pi n$ con $n\in\mathbb{Z} \Longleftrightarrow z = \frac{i}{2}+2\pi n$

$M = \inf\{k>0 : \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|z_n|^k}<\infty\}$ con $|z_n| = \sqrt{\left(\frac{i}{2}\right)^2+(2\pi n)^2}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|z_n|^k} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{|z_n|^k}+\frac{1}{|z_0|^k}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|z_n|^k} \text{ con } n\in\mathbb{Z} = \frac{1}{|z_0|^k}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|z_n|^k}$$ porque el signo de n da igual en $|z_n|$

Criterio de comparación: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{|z_n|^k}}{\frac{1}{(2\pi n)^k}} = \lim_n\frac{(2\pi n)^k}{|z_n|^k} = \lim_n\frac{(2\pi n)^k}{\left((\frac{i}{2})^2+(2\pi n)^2\right)^{k/2}} = 1$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi n)^k}$ converge si $k>1 \Longrightarrow 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|z_n|^k}$ converge si $k>1 \Rightarrow M=1$

ii) (1 punto) Hallar la factorización de $f(z)$ en términos del teorema de factorización de Hadamard.

El T^{ma} de factorización de Hadamard establece que una función entera de orden M puede ser factorizada:

$f(z) = e^{g(z)}z^m\prod_k E_M\left(\frac{z}{z_k}\right)$ con $g(z)$ polinomio de grado $\leq M$, m el orden del polo en 0, $z^0=1$

$f(z) = e^{g(z)}\prod_k E_M\left(\frac{z}{z_k}\right)$ con E_M Factor de Weiestrass $E_p(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}} \Longrightarrow E_0\left(\frac{z}{z_k}\right) = 1-\frac{z}{z_k}$

$g(z)$ polinomio de grado 1

$f(z) = e^{g(z)}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\frac{i}{2}+2\pi k}\right)$ No sé sacar $g(z)$, sólo que es de orden 1