Grado en Física. Mecánica Analítica. Problemas Tema 3: Mecánica Hamiltoniana.

Curso 2023-2024

1. Escribe las ecuaciones canónicas de Hamilton para un sistema en el que, además de las fuerzas conservativas, hay fuerzas no conservativas. Considera una partícula de masa m que se deja caer y sobre la cual actúa, además de la fuerza de la gravedad, una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad. Obtén las ecuaciones canónicas de movimiento y su solución.

   Sol.: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \mathcal{F}_i'$; $\dot{x} = p/m$, $\dot{p} = -m\,g - k\,p/m$, $p(t) = m^2\,g/k + C\exp(-k\,t/m)$, $x(t) = m\,g\,t/k - C\,(m/k)\,\exp(-k\,t/m) + K$.

2. Obtén la Hamiltoniana y las ecuaciones canónicas de un péndulo esférico usando coordenadas esféricas. Obtén las ecuaciones canónicas correspondientes a pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.

   Sol.: $H = \frac{p_\theta^2}{2m\,\ell^2} + \frac{p_\phi^2}{2m\,\ell^2\sin^2\theta} - m\,g\,\ell\,\cos\theta$ (se ha tomado el eje polar hacia abajo y el origen de potenciales en el origen de coordenadas).

3. Obtén la Hamiltoniana y las ecuaciones canónicas de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa de potencial U en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.

   Sol.: $H = \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m} + U(x,y,z)$; $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m\,r^2} + \frac{p_\phi^2}{2m\,r^2\sin^2\theta} + U(r,\theta,\phi)$; $H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\,\rho^2} + \frac{p_z^2}{2m} + U(\rho,\phi,\theta)$.

4. Obtener la Hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton de un trompo simétrico con un punto fijo en un campo gravitatorio tomando como coordenadas generalizadas los ángulos de Euler.

   Sol.: $H = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + m\,g\,d\,\cos\theta$.

5. Obtener la Hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton de una partícula no relativista de masa m y carga e que se mueve en presencia de un campo electromagnético con potencial eléctrico ϕ y potencial vector $\vec{A}$.

   Sol.: $H = \frac{(\vec{p} - e\,\vec{A})^2}{2m} + e\,\phi$.

6. Obtener los corchetes de Poisson $[q_i, q_j]$, $[p_i, p_j]$ y $[q_i, p_j]$ donde $\{q_i\}$ son las coordenadas generalizadas de un sistema Hamiltoniano y $\{p_i\}$ los momentos conjugados.

   Sol.: $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$; $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$.

7. Comprueba que los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas del momento angular $\boldsymbol{\ell}$=$\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ verifican las siguientes relaciones

$$[\ell_x, \ell_y] = \ell_z, \qquad [\ell_y, \ell_z] = \ell_x, \qquad [\ell_z, \ell_x] = \ell_y.$$

8. La identidad de Jacobi para las variables dinámicas f, g y h de un sistema Hamiltoniano es la igualdad $[f,[g,h]] + [h,[f,g]] + [g,[h,f]] = 0$. Demuestra, basándote en ella, que si f, g son constantes de movimiento de un sistema Hamiltoniano, entonces $[f,g]$ también es una constante de movimiento.

9. Obtén la Hamiltoniana de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza gravitatoria $\mathbf{F} = -\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r}$. Demuestra, usando los corchetes de Poisson, que el vector de Runge-Lenz

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}$$

es constante.

Sol.: $H = \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m} - \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

10. Aplicando el principio de Fermat, realiza un programa en `python` para obtener la trayectoria de rayos de luz si el índice de refracción, n, es una función de la altura y, dada por $n = e^{y/10}$. De forma similar, aplica el principio de Maupertuis y realiza un programa en `python` para obtener la trayectoria de una partículas que se mueven en un campo gravitatorio de intensidad constante g.