6.- (1.25 puntos) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |a| < 1$. Considerar la ecuación $(z-1)^n = ae^{-z}$, $z \in \mathbb{C}$. Calcular el número de soluciones (contando multiplicidad) en el conjunto $D(1,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$.

T^{ma} de Rouché: $g,h : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfas en A simplemente conexo tal que $|g(z)| > |h(z)|$ en ∂A, entonces $g(z)$ y $g(z)+h(z)$ tienen el mismo número de ceros en A

Sea D el disco $D(1,1)$, radio 1 centrado en 1: $(z-1)^n = ae^{-z} \iff (z-1)^n - ae^{-z} = 0$ con $a, z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

si llamamos $g(z) = (z-1)^n$ y $h(z) = -ae^{-z}$

$|g(z)| = |(z-1)^n| \underset{\partial D}{<} 1$ $\qquad |h(z)| = |-ae^{-z}| = |ae^{-z}| = |a| \cdot |e^{-z}| < |e^{-z}| = e^{-Re(z)} \underset{\partial D}{<} e^{-2}$

y como $1 > e^{-2} \Rightarrow |g(z)| > |h(z)|$ en $D \Rightarrow g(z)$ y $g(z)+h(z)$ tienen el mismo número de ceros en D $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ como $g(z) = (z-1)^n$ solo tiene un cero en $\mathbb{C}$ (de multiplicidad n) y éste está dentro de $D \Rightarrow$
$\Rightarrow f(z) = g(z) + h(z) = (z-1)^n - ae^{-z}$ tiene n ceros en D

1.- Sea $f : U \to \mathbb{C}$, con $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x+iy,\ x,y \in \mathbb{R})$, una función holomorfa en un conjunto abierto U.

a) (0.75 puntos) Probar que f satisface las condiciones de Cauchy-Riemann si, y solo si, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, donde $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ (llamada derivada de Wirtinger de f con respecto a $\overline{z}$).

$$* \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \overset{*}{=} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \quad (1)$$

Cauchy-Riemann $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ $\qquad (2)$

$(\Rightarrow)$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left[\cancelto{0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)} + i\cancelto{0}{\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)}\right] = 0$$

$(\Leftarrow)$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{C.R. } (2)$$

$\square$

b) (0.75 puntos) Probar que $f(x+iy) = \dfrac{2024e^{-x}}{\cos y + i \operatorname{sen} y}$, $x, y \in \mathbb{R}$, es una función entera;

$$\cos y + i \sin y = e^{iy} \Rightarrow f(x+iy) = \frac{2024e^{-x}}{e^{iy}} = 2024e^{-x}e^{-iy} = 2024e^{-(x+iy)} = 2024e^{-z} = \frac{2024}{e^z}$$

Y como e^z es holomorfa en $\mathbb{C} \Rightarrow f(z)$ holomorfa en $\mathbb{C} \Rightarrow f$ entera

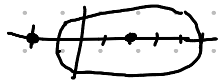
$\left(\dfrac{d}{dz}e^z = e^z\right)$ ✓

2.- 2.1) (0.75 puntos) Demostrar que $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por definición $\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{1}{2}(e^{-z} + e^z)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^z - e^{-z})\right)^2 = \frac{1}{4}\left[(\cancel{e^{-2z}} + \cancel{e^{2z}} + 2) - (\cancel{e^{2z}} + \cancel{e^{-2z}} - 2)\right] =$

$= \frac{1}{4}(2 - (-2)) = \frac{4}{4} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ $\square$

2.2) (1.25 puntos) Calcular $\int_C \frac{\cosh^2(\pi z)}{(z^2-4)^2}\,dz$, donde C es el camino $C(2,3) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 3\}$ recorrido en sentido positivo.



$\int_C \frac{\cosh^2(\pi z)}{(z^2-4)^2}\,dz$ con $C(2,3) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 3\} =$ $\left((z^2-4)^2 = 0 \Longleftrightarrow z^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow z^2 = 4 \Longleftrightarrow z = \pm 2 \right)$

$= \int_C \frac{\cosh^2(\pi z)}{(z-2)^2(z+2)^2}\,dz$ y como $2 \in C(2,3)$ pero $2 \notin C(2,3)$, vamos a calcular la integral con el T^ma de los Residuos ($C(2,3)$ es simplemente convexo y recorremos ∂C en sentido positivo y $\gamma = \partial C$ es regular simple y cerrada, conteniendo a $z_0 = 2$)

$\Rightarrow \int_C \frac{\cosh^2(\pi z)}{(z-2)^2(z+2)^2}\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{\cosh^2(\pi z)}{(z-2)^2(z+2)^2}, 2\right)$ y como $z_0 = 2$ es un polo de orden 2, para calcular su residuo usamos la fórmula

$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left((z-z_0)^N f(z)\right)$ donde N es el orden. En nuestro caso $N = 2 \Rightarrow$

$\mathrm{Res}(f, 2) = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-2)^2} \frac{\cosh^2(\pi z)}{\cancel{(z-2)^2}(z+2)^2}\right) = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz}\left(\frac{\cosh(\pi z)}{z+2}\right)^2 = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{-z}+e^{z}}{2(z+2)}\right)^2 =$

$= \lim_{z \to 2} \frac{e^{-z}+e^{z}}{z+2} \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{-z}+e^{z}}{2(z+2)}\right) = \lim_{z \to 2} \frac{e^{-z}+e^{z}}{z+2}\left(\frac{(-e^{-z}+e^{z})(2(z+2)) - e^{-z} - e^{z}}{(z+2)^2}\right) = \frac{e^{-2}+e^{2}}{4}\left(\frac{(-e^{-2}+e^{2})8 - e^{-2} - e^{2}}{16}\right) =$

$= \frac{e^{-2}+e^{2}}{4}\left(\frac{-9e^{-2}+7e^{2}}{16}\right) = \frac{1}{32}\left(-9e^{-4} + 7 + 9 + 7e^{4}\right) = \frac{1}{32}\left(7e^{4} - 9e^{-4} + 16\right)$

$\Longrightarrow \int_C \frac{\cosh^2(z)}{(z^2-4)^2}\,dz = \frac{\pi i}{16}\left(7e^{4} - 9e^{-4} + 16\right)$

4.- (1.5 puntos) Calcular y clasificar las singularidades (incluyendo el caso $z = \infty$) de la función $f(z) = z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$.

T^ma de Clasificación de Singularidades

- Decimos que una singularidad es aislada si existe un entorno en el plano complejo que la contiene únicamente
- Decimos que una singularidad es esencial si $\lim_{z \to z_0} \neq \infty$ y $\lim_{z \to z_0} \neq k$
- Decimos que una singularidad es un polo si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ y su orden es el exponente de crecimiento en este límite
- Decimos que una singularidad aislada es evitable si f es extensible analíticamente a z_0, es decir, que $\exists g$ definida en un entorno de z_0 tal que $f(z) = g(z)$ si $z \neq z_0$

No es un T^ma de clase

- En este caso, tendremos una singularidad en $z = 0$ $\lim_{z \to 0} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \to 0} z^2 \frac{e^{\frac{i}{z}} - e^{-\frac{i}{z}}}{2i} = \lim_{z \to 0} z^2 \frac{e^{i/z}}{2i}$

  Serie de Laurent del seno $\sin(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1} \Rightarrow z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} =$

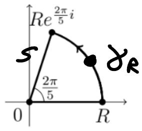
  $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n-1)} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^{-n}}{(1-2n)!} z^{2n+1}$ y como los a_n los evaluamos en $n < 0$ y hay infinitos términos $\Rightarrow$ la singularidad es esencial.

- En $z = \infty$ nos definimos $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow \lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z^2}$; $\lim_{z \to 0} z \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} =$

  $= \lim_{z \to 0} \frac{z}{z} = 1$ $\quad$ ($\sin z \underset{0}{\rightsquigarrow} z$ por Taylor)

  $\Rightarrow z = \infty$ es un polo de orden 1

5.- (2.25 puntos) Analizar el valor de la integral $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^5}$ a partir del teorema de los residuos utilizado con el camino cerrado que aparece representado en la figura.



γ curva cerrada, regular y simple,

$1+z^5=0 \iff z=(-1)^{1/5} \iff$

$z=e^{\frac{1}{5}(\ln|1|+i(-\pi+2\pi n))} = e^{\frac{1}{5}i\pi(2n-1)} \iff$

$\iff z_1=e^{-\frac{\pi i}{5}} \quad z_2=e^{\frac{\pi i}{5}} \quad z_3=e^{\frac{3}{5}\pi i} \quad z_4=e^{i\pi} \quad z_5=e^{\frac{7}{5}\pi i}$

y como el arco que describe γ va de 0 a $\frac{2}{5}\pi i$, sabemos que solo z_2 queda dentro.

Como el orden de z_2 es 1, $\mathrm{Res}(f,z_2)=\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{5}}}(z-e^{\frac{\pi}{5}i})\frac{1}{\prod_{n=0}^{4}(z-z_n)} = \frac{1}{1+e^{\frac{\pi i}{5}}}$

$=\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{5}}}\frac{1}{(z-e^{-\frac{\pi i}{5}})(z-e^{\frac{3\pi}{5}i})(z-e^{i\pi})(z-e^{7/5\pi i})} = \frac{1}{1+e^{\frac{\pi i}{5}}} \Rightarrow \int_\Gamma f(z)dz = \frac{2\pi i}{1+e^{\pi i/5}}$

$\int_\Gamma f(z)dz = \int_0^R f(x)dx + \cancel{\int_{\gamma_R} f(z)dz}^{\to 0} + \cancel{\int_S f(x)dx}^{\to 0} = \frac{2\pi i}{1+e^{\pi i/5}}$

$S=[0,Re^{\pi i/5}] \Rightarrow \gamma(t)=Re^{\pi i/5}(1-t) \quad t\in[0,1] \quad \gamma'(t)=-Re^{\pi i/5} \Rightarrow \int_S f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt =$

$=\int_0^1\frac{-Re^{\pi i/5}}{1+R^5e^{\frac{\pi i}{5}5}(1-t)^5}dt = -R\int_0^1\frac{e^{\pi i/5}}{1+R^5e^{\pi i/5}(1-t)^5}dt = 0$

Lema de Jordan $\quad \left|\int_{\gamma_R} g(z)e^{iaz}dz\right| \le \frac{\pi M_g(\gamma_R)}{a}(1-e^{-Ra})$ con $M_g(\gamma_R)=\max\{|g(z)|, z\in\gamma_R^*\}$

$g(z)=(1+\underbrace{R^5e^{\frac{i\pi}{5}}}_{A}(1-t)^5)^{-1}$; $\left|\frac{1}{1+A(1-t)^5}\right| = \frac{1}{|1+A(1-t)^5|} \le \frac{1}{1-|A(1-t)^5|} = \frac{1}{1-|A||1-t|^5} =$

$=\frac{1}{1-R^5|1-t|^5} \le \frac{1}{1-R^5(1+R)^5}$; $\lim_{R\to\infty}\frac{1}{1-R^5(1+R)^5}=0$

$\int_{\gamma_R} f(z)dz = -R\int_{\gamma_R}\frac{e^{i\pi/5}}{1+R^5e^{\pi i/5}(1-t)^5}dt \to 0$

3.- i) (0.75 puntos) Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n\ge1}\frac{(z+2024)^n}{n}$. Calcular su radio de convergencia.

Criterio de la raíz: $L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

$L<1 \Rightarrow$ converge absolutamente

$L>1 \Rightarrow$ diverge

$L=1 \Rightarrow$ no concluye

$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2024)^n}{n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\left|\left(\frac{z+2024}{n^{1/n}}\right)^n\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\frac{|z+2024|}{n^{1/n}} = |z+2024|<1$

$\Rightarrow$ la serie converge cuando $z\in D(-2024,1) \Rightarrow$ El radio de convergencia es

$r=\left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)^{-1} = \frac{1}{|z+2024|} \overset{\downarrow}{=} 1$

ii) (0.75 puntos) Probar que $\sum_{n\ge1}\frac{\cos(nz)}{n}$ no converge absolutamente si z no es real.

Hemos de probar que $\sum_{n\ge1}\left|\frac{\cos(nz)}{n}\right|$ diverge si $y\neq0$ $\quad (z=x+iy\in\mathbb{C})$

$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\cos(nz)}{n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{e^{inz}-e^{-inz}}{2n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{e^{in(x+iy)}-e^{-in(x+iy)}}{2n}\right|^{1/n} =$

$=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{e^{n(ix-y)}-e^{-n(ix-y)}}{2n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{e^{inx}e^{-ny}-e^{-inx}e^{ny}}{2n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{e^{|ny|}}{2n}\right|^{1/n} =$

Vemos que en $n\to\infty$ ni e^{-ny} ni e^{ny} domina, para $y<0$ e^{-ny} lo hará y viceversa para $y>0$ $\Rightarrow$

$=\limsup_{n\to\infty}\left|\left(\frac{e^{|y|}}{\sqrt[n]{2n}}\right)^n\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{e^{|y|}}{\sqrt[n]{2n}}\right| = \infty$ □