Tema 5: Ecuaciones De Maxwell En El Espacio Libre

Las ecuaciones de maxwell en el espacio libre → Si **no** son dependientes del tiempo

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

⇒

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$	Electroestática
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$	Magnetostática

Repasito:

Ley de Coulomb: $\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r^3}\vec{r}}$, $\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}}$

Campo eléctrico creado por una distribución continua de cargas:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\vec{r}-\vec{r}')\,d^3x'}$$

El trabajo: $\boxed{W_{b\to a} = -q'\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}}$ $\quad dW = -q'\,d\phi \iff d\phi = -\frac{dW}{q'}$

El potencial: $\boxed{\phi(b)-\phi(a) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}}$ → distribución cont. de cargas $\boxed{\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3x'}$

Electroestática:

$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi}$ $\quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$ $\quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

La ecuación de Poisson: $\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ → El equivalente de la ley de Gauss para potenciales

Magnetostática:

$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$ $\quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}}$ → $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0}$ → Nos dice que las líneas de corriente son cerradas

↳ Nos dice que no existen monopolos magnéticos y las líneas de fuerza son cerradas.

↳ $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ → La densidad de carga no varía con el tiempo

Como $\vec{\nabla}\cdot B = 0$ podemos introducir el potencial vector $\vec{A}$ mediante: $\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$

Para un campo magnético uniforme $\rightarrow$ $\boxed{\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}}$

Al estudiar la invarianza gauge vimos que $\vec{A}$ no está unívocamente determinada, sino que dos potenciales vectores $\vec{A}$ y $\vec{A}'$ dan el mismo valor campo magnético $\vec{B}$ si difieren en el gradiente de una función escalar:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$$

Es decir, que podemos elegir un valor de χ de modo que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (gauge de Coulomb)

En el gauge de Coulomb: $\boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}}$ $\rightarrow$ Análoga a la ec. Poisson en el gauge de Coulomb

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3x'}$$

$\Longrightarrow$ Ley de Biot-Savart: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\, d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

Conservación de la carga y tetravector corriente

Ecuación de continuidad: $\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{J} = 0}$

Recordamos el tetravector derivada: $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$

$\Longrightarrow$ Ec. continuidad: $\frac{\partial}{\partial x^0}(c\rho) + \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0 \iff \underbrace{\partial_0(\rho c) + \partial_i J^i = 0}$

Definimos el tetravector corriente como: $\boxed{J^\mu = (c\rho, \vec{J})}$

$\Longrightarrow$ Ec. de continuidad de forma covariante: $\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$ $\rightarrow$ La carga se conserva $\rightarrow$ La carga eléctrica es invariante Lorentz

- Al ser J^μ un tetravector ya sabemos como se comporta para un "boost" con velocidad v a lo largo del eje x:

$$\left.\begin{aligned} \rho' &= \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2}J_x\right) \\ J_x' &= \gamma(J_x - v\rho) \\ J_y' &= J_y \\ J_z' &= J_z \end{aligned}\right\} \quad \text{es decir: } J'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} J^\nu$$

De la ec. de continuidad: $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, d^3x = -\int_S \vec{J}\cdot d\vec{s}$

Flujo por unidad de carga que sale del volumen por unidad de tiempo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de Maxwell en forma covariante

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 J^\nu \\ \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}}$$

Ecuaciones de Maxwell en forma covariante, donde

$$\begin{cases} F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ A^\mu = (\phi/c, \vec{A}) \\ J^\mu = (c\rho, \vec{J}) \\ \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \end{cases}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3/c & -E^2/c \\ B^2 & -E^3/c & 0 & E^1/c \\ B^3 & E^2/c & -E^1/c & 0 \end{pmatrix}$$

donde:

$E^1 \equiv E_x$ $\quad B^1 \equiv B_x$

$E^2 \equiv E_y$ $\quad B^2 \equiv B_y$

$E^3 \equiv E_z$ $\quad B^3 \equiv B_z$

Veamos que de estas ecuaciones de Maxwell obtenemos las ec. de Max. de toda la vida:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu} \begin{cases} \xrightarrow{\nu=0} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{Ley de Gauss} \\ \xrightarrow{\nu\neq 0} \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Ley de Ampere - Maxwell} \end{cases}$$

$$\boxed{\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0} \begin{cases} \xrightarrow{\nu=0} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \xrightarrow{\nu\neq 0} \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{Ley de Faraday} \end{cases}$$

Ecuaciones de onda para los potenciales. Gauges.

$\vec{E}$ se puede expresar en función de los potenciales $\phi, \vec{A}$: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$\vec{B}$ se puede expresar en función de los potenciales $\vec{A}$: $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

Sustituyendo en las ec. de Maxwell y teniendo en cuenta $\boxed{\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}}$ se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} &-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &-\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \mu_0\vec{J} \end{aligned}}$$

Ecuaciones de onda para potenciales

Hay una variedad infinita de potenciales que dan lugar a los mismos campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Estos potenciales se relacionan con la simetría gauge:

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &\longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \end{aligned}\right\} \text{Invarianza gauge}$$

Gauge de Lorentz

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0}$$

Covariante

$$\boxed{\Box A^\mu = \mu_0 J^\mu}$$

Las ec. de onda para potenciales queda:

$$\begin{cases} -\nabla^2\phi + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\nabla^2\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\vec{J} \end{cases}$$

Gauge de Coulomb

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$

Gauge no covariante

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\Box\vec{A} = \mu_0\vec{J}_t \end{aligned}}$$

donde $\Box \equiv \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$ (D'Alembertiano)