→ parece mal firmado toda la hoja

HOJA 5 - SISTEMAS DE PARTÍCULAS INTERACTUANTES

EJERCICIO 1. La función de partición para un gas clásico con N partículas de la misma masa m con interacción entre sus partículas dependiente solo de distancias entre dos pares de átomos se puede aproximar a

$$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi m}{h_0^2 \beta}\right)^{3N/2} V^N \left(1 + \frac{N^2}{2}\cdot\frac{I(\beta)}{V}\right) \text{ donde } I(\beta) = 4\pi\int_0^\infty dr\, r^2 (e^{-\beta u(r)} - 1)$$

siendo $u(r)$ la dependencia de la energía de interacción con la distancia entre dos partículas. Calcula la energía media del sistema y la presión media para el potencial de Sutherland:

$$u(r) = \begin{cases} \infty & \text{si } r < r_0 \\ -u_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^s & \text{si } r > r_0 \end{cases}$$

con r distancia entre partículas, r_0 la separación mínima y u_0 valor de la energía mínima del potencial.

¿Relación de los resultados de la presión obtenida con la ecuación de Van der Waals?

• ENERGÍA MEDIA DEL SISTEMA

Por definición tenemos que $\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$. Primero vamos a calcular la integral $I(\beta)$ para este potencial:

$$I(\beta) = 4\pi\int_0^\infty dr\, r^2 (e^{-\beta u(r)} - 1) = \left[4\pi\int_0^{r_0} dr\, r^2 (\cancel{e^{-\beta\infty}}^{\,0} - 1)\right] + \left[4\pi\int_{r_0}^\infty dr\, r^2 (e^{+\beta u_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^s} - 1)\right] =$$

$$= \left[-4\pi\int_0^{r_0} dr\, r^2\right] + \left[4\pi\int_{r_0}^\infty dr\, r^2 \beta u_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^s\right] = -4\pi\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{r_0} + 4\pi\beta u_0 r_0^s \int_{r_0}^\infty r^{2-s}\,dr =$$

TRUCO! EXPANSIÓN EN SERIE DE LA INTEGRAL: como $e^x - 1 \simeq x$, vamos a separar la integral en dos

⇒ para esto suponemos $T \to \infty$, $\beta \simeq 0$

$$= -\frac{4\pi}{3}r_0^3 + 4\pi\beta u_0 r_0^s \frac{1}{3-s}\cdot r^{3-s}\Big|_{r_0}^\infty = -\frac{4}{3}\pi r_0^3 - 4\pi\beta u_0 r_0^3\cdot\frac{1}{3-s}$$

suponemos $s > 3$ para que se anule cuando $r \to +\infty$

Sustituyendo en la expresión de Z nos queda:

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\ln\frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi m}{h_0^2}\right)^{3N/2} V^N - \frac{3N}{2}\ln\beta + \ln\left(1 + \frac{N^2}{2V}\cdot I(\beta)\right)\right] =$$

$$= +\frac{3N}{2}\cdot\frac{1}{\beta} + \frac{\frac{N^2}{2V}\cdot I'(\beta)}{1 + \frac{N^2}{2V}\cdot I(\beta)} = \frac{3N}{2\beta} + \frac{\frac{N^2}{2V} I'(\beta)}{1 + \frac{N^2}{2V} I(\beta)} = \frac{3N}{2\beta} + \frac{\frac{N^2}{2V} 4\pi u_0 r_0^3\cdot\frac{1}{3-s}}{1 + \frac{N^2}{2V}\left(-\frac{4\pi}{3}r_0^3 - 4\pi\beta u_0 r_0^3\cdot\frac{1}{3-s}\right)} =$$

$$= \frac{3N}{2\beta} + \frac{\frac{N^2}{2V} 4\pi u_0 r_0^3\cdot\frac{1}{3-s}}{\left[1 - \frac{N^2}{2V}\left(\frac{4\pi}{3}r_0^3 + 4\pi\beta u_0 r_0^3\cdot\frac{1}{3-s}\right)\right]} = \frac{3}{2}NkT + \frac{N^2}{V}2\pi u_0 r_0^3\cdot\frac{1}{3-s}$$

TRUCO! Esto ≃ 1

• PRESIÓN MEDIA DEL SISTEMA:

$$\langle P\rangle = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{1}{\beta}\left[N\frac{1}{V} + \frac{\frac{N^2}{2}I(\beta)\frac{-1}{V^2}}{\left[1 + N^2/2V\, I(\beta)\right]}\right] = \quad (\text{denominador} \simeq 1)$$

$$= \frac{1}{\beta}\left[\frac{N}{V} + \frac{-N^2}{2V^2}\cdot\frac{-4\pi r_0^3}{3}\left(1 + \beta u_0\cdot\frac{3}{3-s}\right)\right] = \frac{1}{\beta}\left[\frac{N}{V} + \frac{N^2}{V^2}\cdot\frac{2\pi r_0^3}{3}\cdot\left(1 + \beta u_0\frac{3}{3-s}\right)\right]$$

EJERCICIO 2. En la aproximación de campo medio la función de partición para un

RELACIÓN CON VAN DER WAALS

La ecuación de Van Der Waals es una modificación a la ley de los gases ideales que se emplea para describir gases reales, puesto que tiene en cuenta la interacción entre partículas:

$$\left(P+\frac{a'}{v^2}\right)(v-b')=kT \Longrightarrow \left(P+\frac{n^2a}{V^2}\right)(V-nb)=nRT$$

Veamos el resultado que hemos obtenido y estudiemos cómo relacionarlos:

$$\langle P\rangle \equiv P=\frac{1}{\beta}\left[\frac{N}{V}+\frac{N^2}{V^2}\cdot\frac{2\pi r_0^3}{3}\left(1+\beta u_0\frac{3}{3-s}\right)\right] \Rightarrow \text{vamos a definir } b=\frac{2\pi r_0^3}{3} \text{ y } a\equiv b u_0\frac{3}{3-s}$$

de forma que:

$$P=\frac{1}{\beta}\left[\frac{N}{V}+\frac{N^2}{V^2}(b-\beta a)\right] \Rightarrow$$ definimos una nueva magnitud $v=\frac{V}{N}$ llamada volumen específico donde $n=\frac{1}{v}$

$$P=kT\left[n+n^2\left(b-\frac{1}{kT}a\right)\right] \longrightarrow P+an^2=kT\left[n+n^2b\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (P+an^2)(1+nb)$$ $\longrightarrow$ no sé cómo llegar hasta Van der Waals

Repite el cálculo para el potencial de esferas rígidas: $u(r)=\begin{cases}\infty & \text{si } r<r_0\\ 0 & \text{si } r\geq r_0\end{cases}$.

- **CÁLCULO INTEGRAL**

$$I(\beta)=4\pi\int_0^\infty dr\,r^2\left(e^{-\beta u(r)}-1\right)=4\pi\int_0^{r_0}dr\,r^2(\underbrace{e^{-\beta\infty}}_{0}-1)+4\pi\int_{r_0}^\infty dr\,r^2(\underbrace{e^{-\beta\cdot 0}-1}_{0})=$$

$$=-4\pi\int_0^{r_0}dr\,r^2=-\frac{4\pi}{3}r^3\Big|_0^{r_0}=-\frac{4\pi}{3}r_0^3$$

- **ENERGÍA MEDIA** $\langle E\rangle=-\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}=\ldots=\frac{3N}{2\beta}+\frac{N^2/2V\cdot I'(\beta)}{\underbrace{\left[1+N^2/2V\,I(\beta)\right]}_{\simeq 1}}=\frac{3N}{2\beta}+\frac{N^2}{2V}\cdot 0=\frac{3}{2}NkT$

- **PRESIÓN MEDIA** $\langle P\rangle=+\frac{\partial\ln Z}{\partial V}\cdot\frac{1}{\beta}=\ldots=\frac{1}{\beta}\left[\frac{N}{V}+\frac{N^2}{2V^2}\cdot(-I(\beta))\right]=\frac{1}{\beta}\left[\frac{N}{V}+\frac{N^2}{V^2}\cdot\frac{2\pi}{3}r_0^3\right]$

Mismo problema con Van der Waals.

EJERCICIO 2. En la aproximación de campo medio la función de partición para un gas no-ideal de N partículas a T constante es:

$$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi m k T}{h^2}\right)^{3N/2}\left[(V - V_x)\, e^{-\beta\langle u_e\rangle}\right]^N$$

a) Explica el significado de V_x y de $\langle u_e\rangle$.

Para ver el significado físico haremos el desarrollo desde cero:

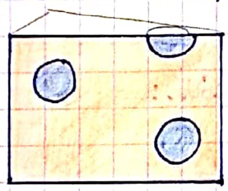
$$Z = \frac{1}{N!\,h^{3N}}\left(\iint d^3r\, d^3p\, e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + u_e(\vec{r})\right)}\right)^N = \frac{1}{N!\,h^{3N}}\left(\iint d^3r\, d^3p\, e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\cdot e^{-\beta u_e(\vec{r})}\right)^N =$$

$$= \frac{1}{N!\,h^{3N}}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} d^3p\, e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right)^N}_{\text{GAUSSIANA}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} d^3r\, e^{-\beta u_e(\vec{r})}\right) = \frac{1}{N!\,h^{3N}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right)^{3N}\left(\int_{-\infty}^{\infty} d^3r\, e^{-\beta u_e(\vec{r})}\right)$$

$$= \frac{1}{N!\,h^{3N}}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{3N}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d^3r\, e^{-\beta u_e(\vec{r})}}_{*} = \frac{1}{N!\,h^{3N}}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{3N}{2}}\left[(V - V_x)\, e^{-\beta\langle u_e\rangle}\right]^N$$

* ¿Cómo resolvemos esta integral? TRUCO Separamos el volumen total en dos regiones: aquellas donde $u_e \to +\infty$ y por ello la partícula no puede acceder, y otras donde sí puede estar.

V



Parece un queso

- V_x: regiones no accesibles
- $V \setminus V_x$: regiones accesibles

$\Big\}\; V = V_x \cup (V \setminus V_x)$

Como la unión es disjunta, puedo separar en dos la integral:

$$\int_V d^3r\, e^{-\beta u_e(r)} = \underbrace{\int_{V_x} d^3r\, e^{-\beta u_e(r)}}_{0 \text{ porque } u_e \to +\infty} + \int_{V\setminus V_x} d^3r\, e^{-\beta u_e(r)} = e^{-\beta\langle u_e\rangle}\int_{V\setminus V_x} d^3r = (V - V_x)\, e^{-\beta\langle u_e\rangle}$$

suponemos que el valor de $u_e(r)$ es cte e $= \langle u_e\rangle$

b) Teniendo en cuenta que $\langle u_e\rangle = \frac{N}{2}\langle u\rangle$, donde $\langle u\rangle$ es la energía media entre moléculas, calcula $\langle u_e\rangle$ considerando el potencial de Sutherland.

De la teoría vemos que $\langle u\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{I(\beta)}{V}\right)$. Para Sutherland:

$$\langle u_e\rangle = \frac{N}{2}\langle u\rangle = \frac{N}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{I(\beta)}{V}\right)\right) = \frac{N}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{4}{3V}\pi r_0^3 - \frac{4\pi}{V}\beta u_0 r_0^3\cdot\frac{1}{3-s}\right)\right) =$$

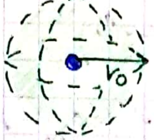
$I(\beta)$ calculado en el ej 1

$$= \frac{N}{2}\cdot\frac{4\pi u_0 r_0^3}{V}\cdot\frac{1}{3-s} = \frac{2\pi N u_0 r_0^3}{V(3-s)} = -\frac{N}{V}a$$

$$a = \frac{2\pi u_0 r_0^3}{s-3}$$ DISTANCIA MÍNIMA RELATIVA

c) Calcula V_x en términos del radio de la molécula r_0 del potencial de Sutherland. Ten en cuenta que el nº parejas interacción $\approx N^2/2$.

En su definición hemos descrito V_x como la sección del volumen inaccesible por tener $u \to +\infty$. En el potencial de Sutherland, $u(r) = \infty$ si $r < r_0$. Para una única molécula, V_{xi} corresponde a la región esférica de radio r_0 que la rodea:



$V_{xi} = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \Rightarrow$ si consideramos V_x total, hemos de multiplicar por todos los posibles pares de interacción: $V_x = \frac{N^2}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3$

EJERCICIO 3. Muestra que si $J>0$ y H externo es nulo, la menor energía para el modelo de Ising a primeros vecinos con una red cúbica es: $E = -DNJ$, con $D \equiv$ dimensionalidad y $N \equiv$ nº átomos de la red. (Pista: calcula el nº 1^{os} vecinos en una red cúbica con 1, 2, 3 dimensiones). Calcula la energía del estado fundamental para una red triangular en 2D con Ising.

MODELO DE ISING (1D)

suma sobre primeros vecinos

· Para una única partícula i: $E_I = -J \sum_{ij}^{'} s_i s_j$ energía interacción

· $E_r = -\sum_{i=1}^{N} \mu H s_i - J \sum_{ij}^{'} s_i s_j$

$\sum_{i,j}^{'} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{z}$ $z \to$ nº 1^{os} vecinos

Ahora si suponemos $H = 0$ (se reduce a la energía de interacción):

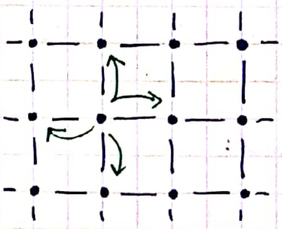
$E_r = (-) J \sum_{ij}^{'} s_i s_j = -J \sum_{i,j}^{'} 1 = -\frac{J}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{z} = -JN\frac{z}{2}$

MÍNIMO CUANDO $s_i = s_j = \pm 1 \; \forall i,j$

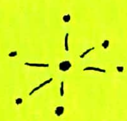
si fuera un +, buscaríamos $s_j \cdot s_i < 0$

¿Cómo conocemos el número de primeros vecinos en una red tridimensional?

1D  $z = 2$, $D = 1 \Rightarrow E_r = -JN \cdot \frac{2}{2} = -JN1 = -JND$ ✓

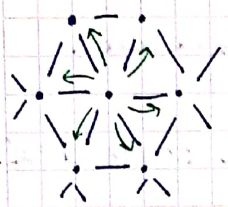
2D  $z = 4$, $D = 2$ $\Rightarrow E_r = -JN \cdot \frac{4}{2} = -JN2 = -JND$ ✓

Hacer una red en 3D no la sé hacer, dibujo una única molécula:

3D  $z = 6$, $D = 3$ $\Rightarrow$ Se repite el patrón $z = 2D$, así que

$E = -JND$

Para una red triangular en 2D, veamos qué ocurre con los primeros vecinos



$z=6 \Rightarrow$ para las redes triangulares, $z=3D$, por tanto:

$$E=-NJ\frac{z}{2}=-3NJ$$

PÁGINA 7

EJERCICIO 4. Muestra que la energía media para N partículas a T constante con spin $\pm 1/2$ interactuantes según el modelo de Ising y en la aprox campo medio viene dada por:

$\langle E\rangle=-N\mu H m-\frac{1}{2}JNzm^2$ donde $m=\langle s_i\rangle=\frac{\langle M\rangle}{\mu N}$, z nº 1ºs vecinos.

Muestra que para $H=0$, $T=0$, el resultado es igual a $\langle E\rangle=-DNJ$.

TEORÍA ISING CAMPO MEDIO

$$\varepsilon_i=-\mu s_i\left(H+\frac{J}{2\mu}\sum_{k=1}^{z}s_k\right)=-\mu s_i H_{eff} \Rightarrow \text{para una única partícula}$$

$$\langle E\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\right\rangle=\underset{\uparrow}{\sum_{i=1}^{N}}\langle\varepsilon_i\rangle=N\langle\varepsilon_i\rangle=N\left\langle-\mu s_i H-\frac{J}{2}\sum_{k=1}^{z}s_i s_j\right\rangle=$$

media lineal

$\langle\varepsilon_i\rangle$ sigue la misma distribución de probabilidad/definición $\forall i$

$$=-\mu NH\langle s_i\rangle-\frac{J}{2}N\left\langle\sum_{k=1}^{z}s_i s_j\right\rangle\underset{\uparrow}{=}-\mu NH\langle s_i\rangle-\frac{J}{2}Nz\langle s_i\rangle^2=-\mu NHm-\frac{J}{2}Nzm^2$$

$\langle s_i\rangle$ es igual $\forall i$ (siguen la misma distribución)

a) Escribe la función de partición y calcula la energía libre F.

Vamos a calcular la función de partición, como siempre, como la suma de las energías posibles en una exponencial:

$$Z=\sum_r e^{-\beta E_r}=\sum_r e^{-\beta\left[-\mu s_r\left(H+\frac{J}{2\mu}\sum_{k=1}^{z}s_k\right)\right]}=\sum_{s_1,s_2}\sum_{N=\pm1}e^{\beta\left(\sum_{i=1}^{N}\mu H s_i+J\sum_{i,j}s_i s_j\right)}$$

① Primer intento de dar Z: $\langle E\rangle=-\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}$

$$-\mu NHm-\frac{J}{2}Nzm^2=-\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}\Leftrightarrow\left(+\mu NHm+\frac{J}{2}Nzm^2\right)\beta=\ln Z\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\beta\left(\mu NHm+\frac{J}{2}Nzm^2\right)}=Z$$

entiendo que la segunda parte sí, pero el primer término de dónde sale??

② PROBLEMÓN: NO SÉ DE DÓNDE SALE LA FUNCIÓN DE PARTICIÓN

???

$$\left[Z=e^{-\beta\frac{J}{2}m^2N}\sum_{s_i=\pm1}e^{\beta\left(J\sum_i s_i z m+\sum_i H s_i\right)}\right]\underset{\uparrow}{=}e^{-\beta\frac{J}{2}m^2N}\left(\sum_{s_i=\pm1}e^{\beta(JszM+Hs)}\right)^N=$$

toma $s_i\simeq\langle s_i\rangle=\langle s\rangle$

$$\underset{\uparrow}{=}e^{-\beta\frac{J}{2}m^2N}\left[2\cosh(\beta\mu H+\beta Jmz)\right]^N$$

porque se suma sobre $s_i=\pm1$ y $2\cosh=e^z+e^{-z}$

JUSTIFICACIÓN * : FOTO PIZARRA ALBERTO!!

$H = -\mu H \sum_{i=1}^{N} s_i - J m z \sum_{i=1}^{N} s_i + J m^2 \frac{N z}{2}$ pero no sé de dónde sale esto, se ha definido una magnitud $H = -\sum_{i,j} J s_i s_j - \sum_i \langle H \rangle s_i$ tal que ese es su valor.

Se trata del campo magnético efectivo $H_{eff} = H + \Delta H = H + \frac{J}{2\mu} z \langle s \rangle$?? No lo sé.

Sigo con el ejercicio a partir de ahí.

Tomamos $Z = e^{-\beta \frac{J}{2} m^2 N} \left[2\cosh(\beta \mu H + \beta J m z)\right]^N$ sin saber por qué ¡¡.

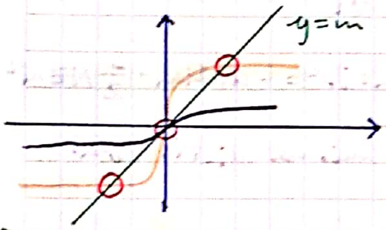
$F = -KT \ln Z$ es la energía libre de Helmholtz:

$$F = \frac{J m^2 N z}{2} - NKT \ln\left[2\cosh(\beta\mu H + \beta J m z)\right]$$

b) Usando $M = -\frac{\partial F}{\partial H}$ muestra que cuando $H=0$, $\exists\, T_c = \frac{zJ}{K}$ por bajo de la cual hay tres soluciones $M=0$, $M = \pm M_0$. Muestra también que cuando $T > T_c$ la única solución es $M=0$.

$M = -\frac{\partial F}{\partial H} = NKT \cdot \frac{2\sinh(\beta\mu H + \beta J m z)}{2\cosh(\beta\mu H + \beta J m z)} \beta H = \mu N \tanh(\beta\mu H + \beta J m z)$. Como $m = \frac{\langle M \rangle}{\mu N} =$

$= \tanh(\beta\mu H + \beta J m z) \xrightarrow[H=0]{} m = \tanh(\beta J m z)$



⊙ T alta ($T > T_c$): tanh pendiente pronunciada, 3 soluciones

⊙ T baja ($T < T_c$): tanh pendiente suave, 1 solución $M=0$

c) Muestra que si $T < T_c$, la solución $M=0$ corresponde a un máximo de F. Dibuja F en función de m para $T > T_c$ y para $T < T_c$.

$\frac{\partial^2 F}{\partial m^2} = \frac{\partial}{\partial m}\left(J m N z - KN \tanh(\beta\mu H + \beta J m z)\right) = J N z - N(1 - \tanh^2(\beta J m z)) \beta J^2 z^2$

$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial m^2}\right|_{m=0} = J N z - N\beta J^2 z^2 \begin{cases} > 0 \text{ si } T > T_c \\ < 0 \text{ si } T < T_c \end{cases}$ → única solución, $m=0$ mínimo de F

COPIO, NICO INTENTO

d) Calcula $M(T)$ cuando $T < T_c$ y $T - T_c \simeq 0$.

Expansión tangente hiperbólica a orden 3, con $m \simeq 0$.

$m \simeq J\beta m z - \frac{\beta^3 m^2 J^3 z^3}{3} \Rightarrow (1 - J\beta z) = -\frac{\beta^3 m^2 J^3 z^3}{3} \underset{\text{despejar } m}{\Rightarrow} m(T) = \sqrt{3}\,\frac{T}{T_c}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}$

e) Calcula la susceptibilidad $\chi = \frac{\partial M}{\partial H}$ $(H=0)$ cuando $T - T_c \simeq 0$.

$\chi = \left.\frac{\partial M}{\partial H}\right|_{H=0} = \frac{\partial}{\partial H}\left(\mu N \tan(\beta\mu H + \beta J m z)\right)$ ... derivar y sustituir

EJERCICIO 4: PLANTEAMIENTO ALEX $\Rightarrow$ esto es lo primero que hizo Alberto, pero luego dijo que estaba mal (ya no sé en lo que queda, pero esto es lo que mejor pinta tiene)

En la teoría se usa que $E = -\mu H \sum_{i=1}^{N} s_i - J \sum_{i,j} s_i s_j$ y $s_i = (s_i - \langle s_i \rangle) + \langle s_i \rangle$.

El desarrollo es:

$$E = -\mu H \cdot \sum_{i=1}^{N} s_i - J \sum_{i,j}^{z} [(s_i - \langle s_i \rangle) + \langle s_i \rangle][(s_j - \langle s_j \rangle) + \langle s_j \rangle] = -\mu H \sum_{i=1}^{N} s_i -$$

$$- J \sum_{i,j}^{z} [\underbrace{(s_i - \langle s_i \rangle)(s_j - \langle s_j \rangle)}_{\to 0} + (s_i - \langle s_i \rangle)\langle s_j \rangle + \langle s_i \rangle (s_j - \langle s_j \rangle) + \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle] =$$

$$= -\mu H \sum_{i=1}^{N} s_i - J \sum_{i,j}^{z} [s_i \langle s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle + \langle s_i \rangle s_j - \cancel{\langle s_i \rangle \langle s_j \rangle} + \cancel{\langle s_i \rangle \langle s_j \rangle}] =$$

Aproximación fluctuaciones muy pequeñas tal que $(s_i - \langle s_i \rangle)(s_j - \langle s_j \rangle) \approx 0$

$$= -\mu H \sum_{i=1}^{N} s_i - J \sum_{i,j}^{z} [s_i \langle s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle + \langle s_i \rangle s_j] \underset{\langle s_i \rangle = \langle s_j \rangle = m}{=} -\mu H \sum_{i=1}^{N} - Jm \sum_{i,j} s_i + Jm^2 \sum_{i,j} 1 \; * -$$

$$* - Jm \sum_{i,j}^{z} s_j = -\mu H \sum_{i=1}^{N} s_i - Jm \frac{z}{2} \sum_{i=1}^{N} s_i - Jm \frac{z}{2} \sum_{i=1}^{N} s_i + Jm^2 \cdot \frac{z}{2} \sum_{i=1}^{N} 1 =$$

$$= -\mu H \sum_{i=1}^{N} s_i - Jmz \sum_{i=1}^{N} s_i + Jm^2 \frac{N \cdot z}{2} \; *$$

Y si tomamos el valor esperado:

$$\langle E \rangle = -\mu H N \cdot m - Jm^2 z N + \frac{1}{2} Jm^2 z N = -\mu H N m - \frac{1}{2} Jm^2 z N$$

Si $H = 0 \Rightarrow \langle E \rangle = -\frac{z}{2} JmN = -DJmN$.

Por tanto, la función de partición es $Z = \sum_{R} e^{-\beta E_R}$, con $E_R = *$

¿Cuál ha sido mi error? Yo he partido directamente del valor medio sin desarrollar antes el valor de la energía, así que luego no sabía qué poner en Z.