Grado en Física, Curso 2023-2024

Mecánica Estadística

Problemas

Tema 2: Principios fundamentales y colectividades

1. Supongamos un gas ideal de 5 espines de valores $\pm\frac{1}{2}$ en ausencia de un campo magnético externo. Calcula la probabilidad de que n espines se encuentren señalando hacia arriba, para todos los valores de n (n=0, 1, 2, 3, 4, 5).

2. Una partícula de masa m es libre de moverse en una dimensión. Consideremos su posición como x y su momento p. Supongamos que la partícula está confinada en una caja entre las coordenadas $x = 0$ y $x = L$ y que su energía se encuentra entre E y $E + \delta E$. Representa el espacio de fases clásico de esta partícula indicando las regiones de este espacio que le son accesibles.

3. Considera un sistema con dos partículas que interaccionan muy débilmente, con masa m cada una de ellas y que se mueven libremente en una dimensión. Las partículas se encuentran confinadas en una caja cuyas paredes se encuentran entre $x = 0$ y $x = L$. La energía total del sistema se encuentra entre E y $E + \delta E$. Representa el espacio de fases de estas partículas mediante un diagrama para las coordenadas x_1 y x_2 de las partículas y un segundo diagrama de sus momentos p_1 y p_2.

4. Considera una colectividad de osciladores armónicos unidimensionales clásicos.

   (a) Considera que el desplazamiento en función del tiempo viene dado por $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, y que la fase φ puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π de manera uniforme. En este caso la probabilidad de que la fase tenga un valor entre φ y $\varphi + d\varphi$ será: $w(\varphi)d\varphi = (2\pi)^{-1}d\varphi$. Para cualquier valor de tiempo fijo, calcula la probabilidad $P(x)dx$ de encontrarse entre x y $x + dx$. Expresa $P(x)$ en función de la amplitud, A y la posición x.

   (b) Verifica que la distribución hallada en el punto anterior está debidamente normalizada y explica el significado de sus singularidades en los bordes. Calcula $< x >$ y $< x^2 >$.

   (c) Considera el espacio de fases clásico para esta colectividad de osciladores, con su energía en el intervalo entre E y $E + \delta E$. Expresa $P(x)$ en función de E y de x. Relacionando E con la amplitud, muestra que el resultado es el mismo que el obtenido en el apartado (a).

5. Considera un sistema aislado con un número N muy elevado de partículas localizadas que interaccionan muy débilmente con espín 1/2. Cada partícula tiene un momento magnético μ paralelo o antiparalelo a un campo magnético aplicado H. La energía del sistema E será $E = -(n_1 - n_2)\mu H$ donde n_1 es el número de espines alineados paralelamente a H y n_2 los antiparalelos.

   (a) Considera un rango de energías entre E y $E + \delta E$ donde δE es muy pequeño comparado con E pero es microscópicamente grande de forma que $\delta E >> \mu H$. Calcula el número total de estados $\Omega(E)$ que se encuentran en este rango de energías.

   (b) Escribe una ecuación para $\ln \Omega(E)$ en función de E utilizando la aproximación de Stirling.

6. Considera una caja rectangular con cuatro paredes y fondo (pero no la parte superior). El área total de esta caja es A. Calcula las dimensiones de la caja en función de esta área que dan lugar al mayor volumen utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

7. Partiendo de la entropía de Gibbs ($S = -k \sum P_r ln P_r$), demuestra que para la colectividad microcanónica:

   (a) La entropía de Gibbs es igual a la entropía de Boltzmann ($S = k \ln \Omega(E, V, N)$)

   (b) La distribución de probabilidad es constante utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

8. Supongamos un sistema A de N partículas de las cuales n_1 tienen una energía E_1 y n_2 una energía E_2. Este sistema está en contacto con un baño térmico de temperatura T. Se altera el sistema A de forma que la población cambia de n_2 a $n_2 - 1$ y de n_1 a $n_1 + 1$, siendo $n_1 >> 1$ y $n_2 >> 1$. Calcula:

   (a) El cambio en entropía en el sistema A. Considera la definición de entropía de Boltzmann $S = k \ln \Omega$.

   (b) El cambio en entropía en el baño térmico.

   (c) La relación entre la poblaciones n_1 y n_2 en función del cambio en energía y la temperatura.

9. Considera un sistema de N partículas que interaccionan débilmente cada una con spin 1/2 y momento magnético μ situadas en un campo externo H. Supongamos que el sistema está en contacto con un baño térmico de temperatura T. Calcula la energía media en función de T y de H.

10. Los niveles de energía de un oscilador armónico simple unidimensional vienen dados por la relación $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, donde ω es la frecuencia angular característica del oscilador y donde el número cuántico n puede tomar cualquier valor entero $n = 0, 1, 2....$ Supongamos que dicho oscilador está en contacto con un baño térmico a una temperatura T.

(a) Encuentra la relación entre la probabilidad de que el oscilador se encuentre en el primer estado excitado y la probabilidad de que esté en el estado fundamental.

(b) Suponiendo que sólo el estado fundamental y el primer estado excitado están ocupados, calcula la energía media del oscilador en función de la temperatura T.

(c) Calcula la probabilidad del estado n. Suponiendo que la temperatura del baño térmico es de 300K y que $\hbar\omega = 6.25 \times 10^{-5} eV$, calcula la probabilidad del estado n=10.

11. Un sólido a temperatura absoluta T se sitúa en un campo magnético H de 3 T. El sólido está formado por átomos paramagnéticos de espín 1/2 que interactúan débilmente. Si el momento magnético $\mu = 9.27 \times 10^{-24} J/T$ (magnetón de Bohr), calcula la temperatura para la cual más del 75% de los átomos están polarizados con sus espines paralelos al campo magnético.

12. Considera un sistema de N partículas independientes y distinguibles, cada una de las cuales puede existir en uno de dos estados separados una energía ϵ.

(a) Considerando que es un sistema aislado (colectividad microcanónica) en equilibrio, calcula la relación entre la energía del sistema (E), la temperatura (T), el número de partículas (N) y ϵ

(b) Considerando que se trata de un sistema en contacto con un baño térmico (colectividad canónica), calcula la energía media del sistema en equilibrio y compárala con el caso anterior.

13. Considera un gas clásico aislado en un recipiente con energía E y N partículas, y dos subsistemas 1 y 2 dentro de él, cada uno con energía y número de partículas E_1, N_1 y E_2, N_2, respectivamente (donde $E = E_1 + E_2$ y $N = N_1 + N_2$). Los subsistemas están en contacto de forma tal que pueden intercambiar energía entre ellos solamente (pero no partículas).

(a) Escribe el número de estados del sistema (Ω) en función de la energía E_1 y encuentra la ecuación que define el valor de E_1 cuando el sistema llega al equilibrio.

(b) Si llamamos E_1^* al valor de E_1 en equilibrio, demuestra que. cerca de del euilibrio es

$$\Omega(E, E_1) = \Omega_1(E_1^*)\,\Omega_2(E - E_1^*)\,e^{-\frac{(E_1 - E_1^*)^2}{2\,\sigma^2}}$$

falta un logaritmo

donde

$$\sigma^2 = -\frac{1}{\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial E^2}(E_1^*) + \frac{\partial^2\Omega_2}{\partial E^2}(E - E_1^*)}$$

y Ω_1, Ω_2, son el número de estados de los subsistemas 1 y 2 respectivamente.

(c) Demuestra que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial E^2} = -\frac{1}{T^2\, C_v}$$

donde C_v es el calor específico a volumen constante.

(d) Toma N del orden del número de Avogadro, y los valores de C_v y E_1^* que da la teoría de los gases ideales para una temperatura dada y calcula la probabilidad $P(E_1)$ de encontrar al subsistema 1 con $E_1 = E_1^*(1 + 1e^{-6})$.

Tema 2: Soluciones

1. $\frac{1}{32}$ $\frac{5}{32}$ $\frac{10}{32}$ $\frac{10}{32}$ $\frac{5}{32}$ $\frac{1}{32}$.
2. $p = \sqrt{2mE}$; $\delta p = \sqrt{\frac{m}{2E}}\delta E$
3. Considera que $p_1^2 + p_2^2 = 2mE$
4. (a) $P(x)dx = \frac{dx}{\pi(A^2-x^2)^{1/2}}$ (b) $P(x)dx = \frac{m\omega}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{2mE-(m\omega x)^2}}$
5. (a)
$$\Omega(E)\delta E = \frac{N!}{(N/2 - E/(2\mu H))!(N/2 + E/(2\mu H))!}\frac{\delta E}{2\mu H}$$
   (b)
$$\ln\Omega(E) = -\left(\frac{N}{2} - \frac{E}{2\mu H}\right)\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{E}{2N\mu H}\right) - \left(\frac{N}{2} + \frac{E}{2\mu H}\right)\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{E}{2N\mu H}\right) - \ln(2\mu H)$$
6. $x = y = \sqrt{A/3}$; $z = x/2$
7. (b) Considera una única ligadura, la normalización de la función de probabilidad.
8. (a) $\Delta S_A \approx k\ln\frac{n_2}{n_1}$ (b) $\Delta S_{A'} = \frac{-\Delta E}{T}$ (c) $\frac{n_2}{n_1} = e^{\Delta E/KT}$. $\Delta E = E_1 - E_2$
9. $\bar{E} = -N\mu H\tanh\frac{\mu H}{kT}$
10. (a) $e^{\frac{-\hbar\omega}{kT}}$
    (b) $\frac{\hbar\omega}{2}\frac{(1+3e^{\frac{-\hbar\omega}{kT}})}{(1+e^{\frac{-\hbar\omega}{kT}})}$
    (c) $P(n,T) = e^{-n\hbar\omega/kT}(1 - e^{-\hbar\omega/kT})$;
    $P(n = 10, T = 300K) = 2.3 \times 10^{-3}$
11. $T = 3.7K$
12. (a) $E = \frac{N\epsilon}{1+e^{\beta\epsilon}}$ (b) $\bar{E} = E_{microcanonica}$