CLASE 14/10/2024

Advección $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Burguers $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \left[\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \Longrightarrow$

↳ si quiero viscosidad

aproximación de Navier - Stokes

consideramos cosas

$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

NAVIER STOKES

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \cancel{\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}} = \cancel{\vec{g}} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}$ $\overset{\shortparallel}{0}$

si viscosidad irrelevante

Ecuación continuidad

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho + \rho\cancel{\vec{\nabla}\vec{v}} = 0$

0 si incompresible

↳ Fluido incompresible: $\vec{\nabla}\vec{v} = 0$

(corrientes marinas, oceanografía)

$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$

1. ADVECCIÓN: SOLO MÉTODOS EXPLÍCITOS (solo para problemas lineales)

: ① $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$ Diferencias centrales

menos preciso

② $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\cdot \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$

ó

③ $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\cdot \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$

según si van contra el viento ($\nu>0$ ó $<\nu$)

⇓ todos se pueden despejar xq no tenemos n+1

① $u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}[u_{j+1}^n - u_{j-1}^n]$

[CONDICIÓN ESTABILIDAD $\Delta t < \frac{\Delta x}{a} < \frac{2\Delta x}{a}$]

inestable

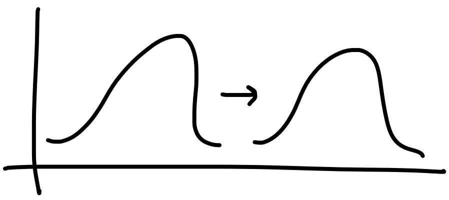
DOWNWIND ② $u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}[u_{j+1}^n - u_j^n]$

Y SIEMPRE $a>0$!!!

estable xo difusivo

UPWIND ③ $u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}[u_j^n - u_{j-1}^n]$

¿Quién es a? Describe el transporte de mi función en el sistema.



Siendo $a>0$, la ecuación que tiene más sentido usar es la que mira los pasos que tiene detrás (CAUSALIDAD: información que viene detrás es la que afecta en el punto): ③

¿Qué tendríamos que sumar a ① para obtener ③?

$$a\frac{\Delta t}{\Delta x}[u_j^n - u_{j-1}^n] = a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{u_{j+1}^n}{2} - \frac{u_{j-1}^n}{2}\right] + \underbrace{\frac{a\Delta t}{2\Delta x}\left[-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1}\right]}_{\text{APROXIMACIÓN A DERIVADA SEGUNDA}} - a\frac{\Delta t}{2}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Tenemos una viscosidad que depende de $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ donde $\nu = a\Delta t\Delta x$. Viscosidad no física, sino numérica, que $\to 0$ si Δt ó $\Delta x \to 0$ ó $N \to +\infty$.

2. BURGUERS: aquí va bien diferencias divididas

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \cdot \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

↑ va a ir cambiando de signo y habría que ir cambiando de método

Otro problema: ya no hay $a \Rightarrow \Delta t < \frac{\Delta x}{\max|u|}$

¿Qué pasa con la energía? Va como la cinética, $\sum_j \frac{1}{2}u_j^2 = E \Rightarrow$ no sabemos cómo irá el fluido, pero sí la energía.

¿Cómo arreglamos para que sea conservativa? $\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}u^2\right]}_{= u\frac{\partial u}{\partial x}} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Para hacer upwind: $dV\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right)\right] = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{1/2(u_j^n)^2 - 1/2(u_{j-1}^n)^2}{\Delta x} = 0 \quad ②$$

MÉTODOS PARA LEYES DE CONSERVACIÓN (se basan en leyes de conservación)

⇓

¿DIFERENCIA ENTRE AMBOS?

② $\underbrace{\frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n)}_{\text{esta parte cambia}}(u_j^n - u_{j-1}^n)$

CONDICIONES CONTORNO PERIÓDICAS : nos dejamos la frontera y luego imponemos (al final de cada paso de tiempo) que el valor 2° y último // 1° y penúltimo sean =