Grado en Física. Mecánica Analítica. Problemas Tema 4: Transformaciones canónicas.

Curso 2023-2024

1. En un sistema hamiltoniano con un grado de libertad se realiza una *transformación de escala* $Q = \alpha\, q$, $P = \beta\, p$, donde α y β son constantes. Obtener las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables y la nueva hamiltoniana. ¿Y si además cambiamos t por $T = \gamma\, t$, con γ constante?

2. Probar que la transformación $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$ dada por $Q = q\, t$, $P = p\, t$ no es canónica, usando como hamiltoniana, H, la correspondiente al oscilador armónico.

3. Probar que la transformación afín

$$\begin{aligned} Q &= a_{11}\, q + a_{12}\, p \\ P &= a_{21}\, q + a_{22}\, p, \end{aligned}$$

donde $\det(a_{ij})$=1, es una transformación canónica de valencia unidad. ¿Bajo qué condiciones podemos encontrar funciones generatrices de los diferentes tipos? Obtenerlas en los casos posibles. Comprobar que podemos cambiar el tipo de función generatriz mediante la transformada de Legendre.

4. Demostrar que las siguientes transformaciones son canónicas y obtener, si es posible, funciones generatrices de tipo F_1 y F_2.

   (a)

$$\begin{aligned} Q &= q^2/2 + (p/q)^2 \\ P &= p/q \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} Q &= q^2 + p \\ P &= -q \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} Q &= q\, t \\ P &= p/t - 3q^2\, t^3 \end{aligned}$$

5. Un oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω tiene como hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\,\omega^2}{2} q^2.$$

Considera la transformación canónica generada por la función

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m\,\omega\, q^2\, \cot(Q + \omega\, t).$$

Obtén la nueva hamiltoniana, resuelve las ecuaciones de Hamilton y, deshaciendo la transformación, obtén q y p en función del tiempo.

6. Para un oscilador armónico unidimensional la posición x y el momento p en función del tiempo vienen dados por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega\, t) + (p_0/m\omega) \sin(\omega\, t) \\ p(t) &= -m\, \omega\, x_0 \sin(\omega\, t) + p_0 \cos(\omega\, t) \end{aligned}$$

donde x_0 y p_0 son, respectivamente, la posición y el momento en el instante $t = 0$. Demostrar que la transformación $(x, p) \longrightarrow (x_0, p_0)$ es canónica para cualquier t. Obtener la función generatriz de tipo F_1, comprobando que la nueva hamiltoniana es nula.

7. Toda variable dinámica, $f(\vec{r}, \vec{p})$, del espacio fásico de una partícula que presente simetría esférica en el espacio fásico sólo puede ser función de los escalares $\vec{r}\cdot\vec{r}$, $\vec{r}\cdot\vec{p}$, $\vec{p}\cdot\vec{p}$. Justifica que el corchete de Poisson de cualquier función f, que cumpla esta condición, con cualquiera de las componentes del momento angular de la partícula, ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z, es cero. Si la función f fuera la hamiltoniana, ¿qué conclusión obtendrías?

8. Considera un sistema hamltoniano y G una variable dinámica que no depende explícitamente del tiempo. Si el corchete de Poisson de G con la hamiltoniana H es igual a la derivada total respecto al tiempo de una función $\Lambda(\underline{q}, \underline{p}, t)$,

$$[G, H] = \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t},$$

¿qué constante de movimiento se obtiene?

Basandote en este resultado, considera una partícula de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza que deriva del potencial

$$U(\vec{r}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}.$$

Obtén $[\vec{r}\cdot\vec{p}, H]$ y, a partir de este resultado, encuentra una constante del movimiento.

9. En el instante $t_0 = 0$ un gran número de partículas de masa m ocupan el segmento del eje x comprendido entre $x_0 = 0$ y $x = x_0 + \Delta x$, con momentos $p_x \in [p_0, p_0 + \Delta p]$. Representar en el espacio fásico x, p_x la región ocupada por las partículas. Si éstas se mueven libremente, representar en el espacio fásico la región ocupada en un instante $t_1 > m\, \Delta x/p_0$. Obtén el área en el espacio fásico ocupado por las partículas en los instantes t_0 y t_1, comprobando que son iguales. Interpreta el resultado.

1. En un sistema hamiltoniano con un grado de libertad se realiza una *transformación de escala* $Q = \alpha q$, $P = \beta p$, donde α y β son constantes. Obtener las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables y la nueva hamiltoniana. ¿Y si además cambiamos t por $T = \gamma t$, con γ constante?

Transformación de escala (canónica) ha de cumplir que $[Q_i,Q_j]=[P_i,P_j]=0$ y $[Q_i,P_j]=\delta_{ij}\lambda$ con λ valencia

Como tenemos 1 grado de libertad $\Rightarrow q_i=q_1=q$; $p_i=p_1=p$

$$(q,p,t) \rightsquigarrow (Q,P,t)=(\alpha q,\beta p,t) \qquad \text{con } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$
$$H(q,p,t) \rightsquigarrow K(Q,P,t)=K(\alpha q,\beta p,t)$$

1 gdl. linealidad

- $[Q_i,Q_j]=[Q,Q]=[\alpha q,\alpha q]=\frac{\partial}{\partial q}(\alpha q)\cdot\frac{\partial}{\partial p}(\alpha q)-\frac{\partial}{\partial q}(\alpha q)\frac{\partial}{\partial p}(\alpha q)=\alpha^2\frac{\partial q}{\partial q}\cdot\cancel{\frac{\partial q}{\partial p}}-\alpha^2\cancel{\frac{\partial q}{\partial p}}\frac{\partial q}{\partial q}=0$
- $[P_i,P_j]=[P,P]=[\beta p,\beta p]=\frac{\partial}{\partial q}(\beta p)\cdot\frac{\partial}{\partial p}(\beta p)-\frac{\partial}{\partial q}(\beta p)\frac{\partial}{\partial p}(\beta p)=\beta^2\cancel{\frac{\partial p}{\partial q}}\cdot\frac{\partial p}{\partial p}-\beta^2\frac{\partial p}{\partial p}\cancel{\frac{\partial p}{\partial q}}=0$
- $[Q_i,P_j]=[Q,P]=[\alpha q,\beta p]=\frac{\partial}{\partial q}(\alpha q)\cdot\frac{\partial}{\partial p}(\beta p)-\frac{\partial}{\partial q}(\beta p)\frac{\partial}{\partial p}(\alpha q)=\alpha\beta\frac{\partial q}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial p}-\alpha\beta\cancel{\frac{\partial p}{\partial q}}\cancel{\frac{\partial q}{\partial p}}=\alpha\beta$

y como $[Q_i,P_j]=\delta_{ij}$ y con un grado de libertad $i=j \Rightarrow \alpha\beta=\lambda$ (valencia de la transformación) 4.27

$K(Q,P,t)=H(\frac{1}{\alpha}q,\frac{1}{\beta}p,t)+\frac{\partial f}{\partial t}$ con f función generadora de la transformación

$$\boxed{\dot{Q}=\frac{\partial K}{\partial P}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial H}{\partial p}} \qquad \boxed{\dot{P}=-\frac{\partial K}{\partial Q}=-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial H}{\partial q}}$$

No estoy seguro

$$(q,p,t) \rightsquigarrow (Q,P,T)=(\alpha q,\beta p,\gamma t) \qquad \text{con } \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$
$$H(q,p,t) \rightsquigarrow K'(Q,P,T)=K'(\alpha q,\beta p,\gamma t)$$

$K'(Q,P,T)=H(\frac{1}{\alpha}q,\frac{1}{\beta}p,\frac{1}{\gamma}t)+\frac{\partial f_2}{\partial T} \Rightarrow$

$\Rightarrow K'(Q,P,T)=H(\frac{1}{\alpha}q,\frac{1}{\beta}p,\frac{1}{\gamma}t)+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial f_2}{\partial t} \Rightarrow$

$$\begin{cases}\frac{\partial Q}{\partial T}=\frac{\partial K}{\partial P} \Longleftrightarrow \frac{1}{\gamma}\dot{Q}=\frac{\partial K}{\partial P}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial H}{\partial p} \Longleftrightarrow \boxed{\dot{Q}=\frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial H}{\partial p}}\\ \frac{\partial P}{\partial T}=-\frac{\partial K}{\partial Q} \Longleftrightarrow \frac{1}{\gamma}\dot{P}=-\frac{\partial K}{\partial Q}=-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial H}{\partial q} \Longleftrightarrow \boxed{\dot{P}=-\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\partial H}{\partial q}}\end{cases}$$

2. Probar que la transformación $(q,p) \longrightarrow (Q,P)$ dada por $Q = q\,t$, $P = p\,t$ no es canónica, usando como hamiltoniana, H, la correspondiente al oscilador armónico.

$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kq^2 \qquad (q,p)\rightsquigarrow(Q,P) \qquad Q=qt,\quad P=pt$

$[Q_i,Q_j]=[tq_i,tq_j]=t^2[q_i,q_j]=0$

$[P_i,P_j]=[tp_i,tp_j]=t^2[p_i,p_j]=0$

$[Q_i,P_j]=t^2[q_i,p_j]=t^2\delta_{ij}\neq\delta_{ij}$ y t^2 no es una cte. asociable a la val. de la transformación

3. Probar que la transformación afín

$$Q = a_{11}\,q + a_{12}\,p$$
$$P = a_{21}\,q + a_{22}\,p,$$

donde $\det(a_{ij})=1$, es una transformación canónica de valencia unidad. ¿Bajo qué condiciones podemos encontrar funciones generatrices de los diferentes tipos? Obtenerlas en los casos posibles. Comprobar que podemos cambiar el tipo de función generatriz mediante la transformada de Legendre.

Como $|a_{ij}|=1$ la transformación es canónica.

$\frac{\partial F_1}{\partial q}=p \qquad \frac{\partial F}{\partial Q}=-P$

$Q=a_{11}q+a_{12}p \Longleftrightarrow p=\frac{1}{a_{12}}(Q-a_{11}q)$

$F_1=\int p\,dq=\int\frac{1}{a_{12}}(Q-a_{11}q)dq \qquad \frac{\partial F}{\partial Q}=\frac{\partial}{\partial Q}\int\frac{1}{a_{12}}(Q-a_{11}q)dq=\int\frac{1}{a_{12}}\frac{\partial}{\partial Q}(Q-a_{11}q)dq=\frac{1}{a_{12}}\int dq=\frac{q}{a_{12}}=-P$

$\Longleftrightarrow \boxed{Q=a_{11}q+a_{12}p,\quad P=\frac{q}{a_{12}} \quad \text{con } F_1=\frac{Q}{a_{12}}q-\frac{a_{11}}{2a_{12}}q^2 \quad \boxed{\text{si } a_{12}\neq 0}}$ $F_1(q,Q)$

$F_2(q,P)$

$\frac{\partial F_2}{\partial q}=p,\quad \frac{\partial F_2}{\partial P}=Q \qquad p=\frac{1}{a_{22}}(P-a_{21}q) \Rightarrow F_2=\int\frac{1}{a_{22}}(P-a_{21}q)dq=\boxed{\frac{P}{a_{22}}q-\frac{a_{21}}{2a_{22}}q^2=F_2}$

$\frac{\partial F_2}{\partial P}=\int\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{a_{22}}(P-a_{21}q)\right)dq=\int\frac{1}{a_{22}}dq=\frac{q}{a_{22}}=Q \Longleftrightarrow \boxed{Q=\frac{q}{a_{22}} \quad P=a_{21}q+a_{22}p \quad \boxed{\text{con } a_{22}\neq 0}}$

$$\frac{\partial F_3}{\partial p} = -q \ , \quad \frac{\partial F_3}{\partial Q} = -P \qquad q = \frac{1}{a_{11}}(Q - a_{12}p) \qquad F_3 = -\int \frac{1}{a_{11}}(Q - a_{12}p)\,dp = \boxed{\frac{Q}{a_{11}}p + \frac{a_{12}}{2a_{11}}p^2 = F_3}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q} = -\int \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{1}{a_{11}}(Q - a_{12}p)\right)dp = -\int \frac{1}{a_{11}}dp = \frac{-p}{a_{11}} = -P \iff \boxed{Q = a_{11}q + a_{12}p \quad P = \frac{p}{a_{11}} \quad \text{con } \boxed{a_{11} \neq 0}}$$

$F_3(p,Q)$

$$\frac{\partial F_4}{\partial P} = Q \ , \quad \frac{\partial F_4}{\partial p} = -q \qquad q = \frac{1}{a_{21}}(P - a_{22}p) \qquad F_4 = -\int \frac{1}{a_{21}}(P - a_{22}p)\,dp = \boxed{-\frac{P}{a_{21}}p + \frac{a_{22}}{2a_{21}}p^2 = F_4}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial P} = \int \frac{1}{a_{21}}\frac{\partial}{\partial P}(P - a_{22}p)\,dp = \int \frac{1}{a_{21}}dp = \frac{p}{a_{21}} = Q \qquad \boxed{Q = \frac{p}{a_{21}} \ , \quad P = a_{21}q + a_{22}p \quad \text{con } \boxed{a_{21} \neq 0}}$$

$F_4(p,P)$

A todas las F_i les falta una función $A(q)$ ó $A(p)$ como 'cte' de integración porque la decidimos igual a cero

4. Demostrar que las siguientes transformaciones son canónicas y obtener, si es posible, funciones generatrices de tipo F_1 y F_2.

(a)

$$Q = q^2/2 + (p/q)^2 \iff p = q\left(Q - \frac{q^2}{2}\right)^{1/2}$$
$$P = p/q \iff p = Pq$$

$$[P,P] = \left[\frac{p}{q}, \frac{p}{q}\right] = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{p}{q}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{p}{q}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{q}\right) = 0$$

$$[Q,Q] = \left[\frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{q^2}, \frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{q^2}\right] = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{q^2}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{q^2}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{q^2}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{q^2}\right) = 0$$

$$[Q,P] = \left[\frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{q^2}, \frac{p}{q}\right] = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{q^2}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{p}{q}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{q^2}\right) = \left(q - \frac{2p^2}{q^3}\right)\frac{1}{q} - \left(-\frac{p}{q^2}\right)\left(\frac{2p}{q^2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2p^2}{q^4} + \frac{2p^2}{q^4} = 1 \implies \text{la transformación es canónica y de valencia 1}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P \qquad F_1 = \int p\,dq = \int q\left(Q - \frac{q^2}{2}\right)^{1/2}dq = -\frac{2\left(Q - \frac{q^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + g(P)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q \qquad F_2 = \int p\,dq = \int Pq\,dq = \boxed{\frac{P}{2}q^2 + g(P) = F_2(q,P)}$$

(b)

$$Q = q^2 + p \iff p = Q - q^2$$
$$P = -q \iff q = -P$$

$$[Q,Q] = [q^2 + p, q^2 + p] = \cdots = 0$$

$$[P,P] = [-q,-q] = -[q,q] = 0$$

$$[Q,P] = [q^2 + p, -q] = \cancel{\frac{\partial}{\partial q}(q^2+p)\frac{\partial}{\partial p}(-q)}^{\,0} - \frac{\partial}{\partial q}(-q)\frac{\partial}{\partial p}(q^2+p) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \qquad -P = \frac{\partial F_1}{\partial Q} \qquad F_1 = \int p\,dq = \int (Q - q^2)\,dq = \boxed{Qq - \frac{q^3}{3} + g(Q) = F_1(q,Q)}$$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \qquad F_2 = \int p\,dq$$ Pero no podemos escribir p en función de P $\implies \boxed{\nexists F_2}$

$F = F_1(q,Q,t)$	$F = F_2(q,P,t) - Q_iP_i$
$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$
$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$

(c)

$$p = tP + 3q^2t^4 \iff \begin{aligned} Q &= qt \\ P &= p/t - 3q^2t^3 \end{aligned}$$

$[Q,Q] = t^2[q,q] = 0$

$[P,P] = \left[\frac{p}{t} - 3q^2t^3, \frac{p}{t} - 3q^2t^3\right] = \cdots = 0$

$[Q,P] = [qt, p/t - 3q^2t^3] = \frac{\partial}{\partial q}(qt)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{t} - 3q^2t^3\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{p}{t} - 3q^2t^3\right)\cancel{\frac{\partial}{\partial p}(qt)}^{0} =$

$= t \cdot \frac{1}{t} - 0 = 1 \Rightarrow$ Es canónica

$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P \quad F_1 = \int p\,dq$ pero no podemos escribir p en función de $Q \to \boxed{\nexists F_1}$

$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p \quad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q \quad F_2 = \int p\,dq = \int (tP + 3q^2t^4)\,dq = \boxed{tPq + q^3t^4 + g(P) = F_2(q,P)}$

5. Un oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω tiene como hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$

Considera la transformación canónica generada por la función

$$F(q,Q,t) = \frac{1}{2}m\,\omega\,q^2\,\cot(Q + \omega\,t).$$

Obtén la nueva hamiltoniana, resuelve las ecuaciones de Hamilton y, deshaciendo la transformación, obtén q y p en función del tiempo. → No sé si es esto

$F(q,Q,t) = F_1 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial q} = p \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P$

$p = m\omega q \cot(Q + \omega t)$

$P = -\frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{1}{2}m\omega q^2 \cot(Q+\omega t)\right) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \csc^2(Q+\omega t)$

$$\boxed{q = \left(\frac{2P\sin^2(Q+\omega t)}{m\omega}\right)^{1/2} \Rightarrow p = \cos(Q+\omega t)\sqrt{2Pm\omega}}$$

→ Sustituimos en H:

$$\boxed{K(Q,P) = P\omega\cos^2(Q+\omega t) + P\omega\sin^2(Q+\omega t) = P\omega}$$

6. Para un oscilador armónico unidimensional la posición x y el momento p en función del tiempo vienen dados por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0\cos(\omega\,t) + (p_0/m\omega)\sin(\omega\,t) \\ p(t) &= -m\,\omega\,x_0\sin(\omega\,t) + p_0\cos(\omega\,t) \end{aligned}$$

donde x_0 y p_0 son, respectivamente, la posición y el momento en el instante $t = 0$. Demostrar que la transformación $(x,p) \longrightarrow (x_0,p_0)$ es canónica para cualquier t. Obtener la función generatriz de tipo F_1, comprobando que la nueva hamiltoniana es nula.

$[x,x] = \ldots = 0 = \ldots = [p,p]$

$[x,p] = \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\partial p}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial p_0} = \cos^2(\omega t) + m\omega\sin(\omega t)\cdot\frac{1}{m\omega}\sin(\omega t)$

$= \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 \Rightarrow$ canonicidad

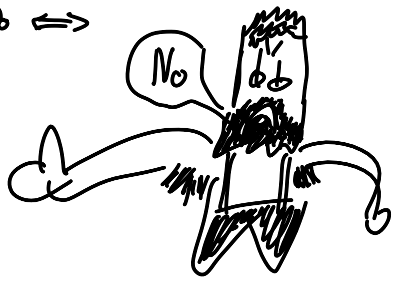
$\frac{\partial F_1}{\partial x} = p \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_0} = -p_0 \quad F_1 = \int p(t)\,dx = \int\left[-m\omega x_0\sin(\omega t) + p_0\cos(\omega t)\right]dx = -m\omega x_0\sin(\omega t)x + p_0 x\cos(\omega t) + g(t) + h(x_0)$

$\frac{\partial F_1}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\int(-m\omega x x_0\sin(\omega t) + p_0 x\cos(\omega t) + g(t) + h(x_0))\,dx = \int\frac{\partial}{\partial x_0}(-m\omega x x_0\sin(\omega t) + p_0 x\cos(\omega t) + g(t) + h(x_0))\,dx$

$= \int\left(-m\omega x\sin(\omega t) + \frac{\partial h}{\partial x_0}(x_0)\right)dx = -\frac{1}{2}m\omega x^2\sin(\omega t) + \frac{\partial h}{\partial x_0} = -p_0 \iff$

$\iff h(x_0) = \int\left(\frac{1}{2}m\omega x^2\sin(\omega t) - p_0\right)dx_0 = \frac{1}{2}m\omega x^2 x_0\sin(\omega t) - p_0 x_0$

$\Rightarrow F_1 = -m\omega x_0\sin(\omega t)\left(x + \frac{1}{2}x^2\right) + p_0(x\cos(\omega t) - x_0) + g(t)$



6. Para un oscilador armónico unidimensional la posición x y el momento p en función del tiempo vienen dados por

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 \cos(\omega\, t) + (p_0/m\omega)\sin(\omega\, t) \\
p(t) &= -m\,\omega\, x_0 \sin(\omega\, t) + p_0 \cos(\omega\, t)
\end{aligned}
$$

donde x_0 y p_0 son, respectivamente, la posición y el momento en el instante $t = 0$. Demostrar que la transformación $(x, p) \longrightarrow (x_0, p_0)$ es canónica para cualquier t. Obtener la función generatriz de tipo F_1, comprobando que la nueva hamiltoniana es nula.

$$[x,x] = \ldots = 0 = \ldots = [p,p]$$

$$[x,p] = \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\partial p}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial p_0} = \cos^2(\omega t) + m\omega \sin(\omega t)\cdot\frac{1}{m\omega}\sin(\omega t)$$

$$= \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 \Rightarrow \text{canonicidad}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_0} = -p_0 \qquad F_1 = \int p(t)\,dx = \int(-m\omega x_0 \sin(\omega t) + p_0\cos(\omega t))\,dx = -m\omega x_0 x \sin(\omega t) + p_0 x\cos(\omega t) + g(x_0,t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x_0} = -p_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(-m\omega x_0 x \sin(\omega t) + p_0 x \cos(\omega t) + g(x_0,t)\right) = -m\omega x \sin(\omega t) + \frac{\partial g}{\partial x_0}(x_0,t) \Longleftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x_0}(x_0,t) = m\omega x\sin(\omega t) - p_0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow g = \int[m\omega x \sin(\omega t) - p_0]\,dx_0 = m\omega x x_0 \sin(\omega t) - p_0 x_0 \Rightarrow F_1 = p_0(x\cos(\omega t) - x_0)$$

Tampoco peo weno

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Rightarrow$$

$$K(x_0,p_0) = \frac{m^2\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t) + p_0^2\cos^2(\omega t) - 2m\omega x_0 p_0 \sin(\omega t)\cos(\omega t)}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2\cos^2(\omega t) - \frac{1}{2}\cancel{m\omega^2}\frac{p_0^2}{m^{\cancel{2}}\cancel{\omega^2}}\sin^2(\omega t) =$$

$$= \frac{m^2\omega^2 x_0^2\sin^2(\omega t)}{2m} + \frac{p_0^2\cos^2(\omega t)}{2m} - \omega x_0 p_0 \sin(\omega t)\cos(\omega t) - \frac{m^2\omega^2 x_0^2\cos^2(\omega t)}{2m} - \frac{p_0^2\sin^2(\omega t)}{2m} =$$

$$= (1 - 2\cos^2(\omega t))\left(\frac{m^2\omega^2 x_0}{2m}\right) + (1 - 2\sin^2(\omega t))\frac{p_0^2}{2m} - \omega x_0 p_0 \sin(\omega t)\cos(\omega t) \quad = 0??$$

7. Toda variable dinámica, $f(\vec{r}, \vec{p})$, del espacio fásico de una partícula que presente simetría esférica en el espacio fásico sólo puede ser función de los escalares $\vec{r}\cdot\vec{r}$, $\vec{r}\cdot\vec{p}$, $\vec{p}\cdot\vec{p}$. Justifica que el corchete de Poisson de cualquier función f, que cumpla esta condición, con cualquiera de las componentes del momento angular de la partícula, ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z, es cero. Si la función f fuera la hamiltoniana, ¿qué conclusión obtendrías?

$$\bar{\ell} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (\overbrace{yp_z - zp_y}^{\ell_x}, \overbrace{zp_x - xp_z}^{\ell_y}, \overbrace{xp_y - yp_x}^{\ell_z})$$

$$[f(\bar{r},\bar{p}), \ell_x] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \ell_x}{\partial p_i} - \frac{\partial \ell_x}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial x}\cancelto{0}{\frac{\partial \ell_x}{\partial p_x}} - \cancelto{0}{\frac{\partial \ell_x}{\partial x}}\frac{\partial f}{\partial p_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \ell_x}{\partial p_y} - \frac{\partial \ell_x}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \ell_x}{\partial p_z} - \frac{\partial \ell_x}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p_z} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(-z) - p_z\frac{\partial f}{\partial p_y} + \frac{\partial f}{\partial z}y + p_y\frac{\partial f}{\partial p_z} = 0?$$

$$[f(\bar{r},\bar{p}), \ell_y] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \ell_y}{\partial p_i} - \frac{\partial \ell_y}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \ell_y}{\partial p_x} - \frac{\partial \ell_y}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cancelto{0}{\frac{\partial \ell_y}{\partial p_y}} - \cancelto{0}{\frac{\partial \ell_y}{\partial y}}\frac{\partial f}{\partial p_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \ell_y}{\partial p_z} - \frac{\partial \ell_y}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p_z}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}z + p_z\frac{\partial f}{\partial p_x} + \frac{\partial f}{\partial z}(-x) - p_x\frac{\partial f}{\partial p_z} = 0?$$

$$[f(\bar{r},\bar{p}), \ell_z] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \ell_z}{\partial p_i} - \frac{\partial \ell_z}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \ell_z}{\partial p_x} - \frac{\partial \ell_z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \ell_z}{\partial p_y} - \frac{\partial \ell_z}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cancelto{0}{\frac{\partial \ell_z}{\partial p_z}} - \cancelto{0}{\frac{\partial \ell_z}{\partial z}}\frac{\partial f}{\partial p_z} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(-y) - p_y\frac{\partial f}{\partial p_x} + \frac{\partial f}{\partial y}x + y\frac{\partial f}{\partial p_y} = 0?$$

$$[f, \bar{\ell}] = [f,\ell_x] + [f,\ell_y] + [f,\ell_z] \overset{?}{=} 0 \Rightarrow [H, \bar{\ell}] = 0 \Rightarrow$$ la hamiltoniana es invariante bajo rotaciones ya que $\bar{\ell}$ es la función generadora de las rotaciones

8. Considera un sistema hamltoniano y G una variable dinámica que no depende explícitamente del tiempo. Si el corchete de Poisson de G con la hamiltoniana H es igual a la derivada total respecto al tiempo de una función $\Lambda(\underline{q}, \underline{p}, t)$,

Jaja

$$[G, H] = \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t},$$

¿qué constante de movimiento se obtiene?

Basandote en este resultado, considera una partícula de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza que deriva del potencial

$$U(\vec{r}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Obtén $[\vec{r} \cdot \vec{p}, H]$ y, a partir de este resultado, encuentra una constante del movimiento.

9. En el instante $t_0 = 0$ un gran número de partículas de masa m ocupan el segmento del eje x comprendido entre $x_0 = 0$ y $x = x_0 + \Delta x$, con momentos $p_x \in [p_0, p_0 + \Delta p]$. Representar en el espacio fásico x, p_x la región ocupada por las partículas. Si éstas se mueven libremente, representar en el espacio fásico la región ocupada en un instante $t_1 > m\,\Delta x / p_0$. Obtén el área en el espacio fásico ocupado por las partículas en los instantes t_0 y t_1, comprobando que son iguales. Interpreta el resultado.

Jaja