a) Enunciar y demostrar la FIC

Sea $g: U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en un conjunto abierto U que contiene un disco $\overline{D}(z_0,r)$ para algún $z_0\in\mathbb{C}$ y $r>0$, entonces para cualquier punto $z\in D(z_0,r)$ se tiene que:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(w)}{w-z}\,dz \quad \text{con } C=C(z_0,z)=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|=r\}$$

Demostración:

Tomamos que g es holomorfa en $U\supset D(z_0,r)$ y $z\in D(z_0,r)$. Si tomamos $f(w)=\frac{g(w)}{w-z}$, como g es holomorfa en U y $z\neq w$, entonces f es holomorfa en U

[...]

b) (1 punto) Utilizar el apartado anterior para calcular

$$\int_C \frac{e^{1/(z-5)}}{z^3+(1-3i)z^2-(2+i)z}\,dz,$$

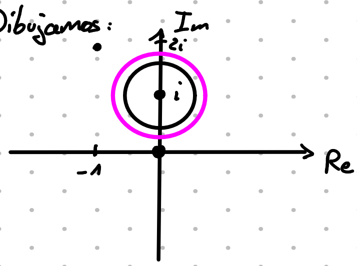
donde C viene dado por $\{z\in\mathbb{C}: |z-i|=1/2\}$.

$C=D(i,1/2)$ Disco centrado en i de radio $\frac{1}{2}$, Buscamos las singularidades de $f(z)$:

$$z^3+(1-3i)z^2-(2+i)z=0 \iff z(z^2+(1-3i)z-(2+i))=0 \iff z^2=\tfrac{1}{2}\left(-1+3i\pm\sqrt{(1-3i)^2+8+4i}\right)=\tfrac{1}{2}\left(-1+3i\pm\sqrt{-8-6i+8+4i}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2=\tfrac{1}{2}\left(-1+3i\pm\sqrt{-2i}\right)=\tfrac{1}{2}\left(-1+3i\pm(1-i)\right)\Rightarrow z_1=0,\ z_2=i,\ z_3=-1+2i$$

Dibujamos:



Podemos encontrar un disco que incluya a C pero no incluya a z_1, z_3

Si denotamos por $g(z)=e^{1/(z-5)}/((z-z_1)(z-z_3))$ tal que

$g(z)=\dfrac{e^{1/z-5}}{z(z+1-2i)}$ Sabemos que g es analítica en $U\supset D(i,\frac{1}{2})$ y $U\not\ni\{z_1,z_3\}$ $\Longrightarrow$ Podemos aplicar la Fórmula Integral de Cauchy

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C\frac{g(z)}{z-i}\,dz=2\pi i\cdot g(i)=2\pi i\,\frac{e^{\frac{1}{-5+i}}}{i(i+1-2i)}=\frac{2\pi e^{\frac{1}{-5+i}}}{1-i}$$ //

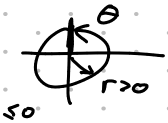
2.- (2 puntos) Sea a el último dígito no nulo de tu DNI. Clasificar las singularidades (incluyendo $z=\infty$) de la función

$$f(z)=\frac{\log_{\frac{\pi}{2}}(i-z)}{(z^2+aiz+2a^2)^{2020}(z-10)^{2021}},$$

donde $\log_{\frac{\pi}{2}}(z)=\ln r+i\theta$, con $z=re^{i\theta}$, $r>0$, $\frac{\pi}{2}<\theta\le\frac{\pi}{2}+2\pi$.

$Log(z)=log_{-\pi}(z)$

↳ No analítica para $Re(z)\le 0$



$\log_{\frac{\pi}{2}}(z)$ no es analítica para $Im(z)\ge 0$ $\Longrightarrow$ $\log_{\frac{\pi}{2}}(i-z)$ no es analítica para $Im(z)\le i$

Buscamos las raíces del denominador para buscar singularidades

- Singularidad en $z=\infty$ $\Longrightarrow$ como la función tiene problemas de analiticidad, esta singularidad es no aislada ya que no podremos encontrar un entorno a ella, en el cual sea la única singularidad. $\nexists K$ t.q. $|z|>K$ para un $K>0$ donde f sea analítica

$$z^2+aiz+2a^2=0 \iff z^2=\tfrac{1}{2}\left(-ai\pm\sqrt{-a^2-8a^2}\right)=\tfrac{1}{2}(-ai\pm 3ai)\Rightarrow \begin{matrix} z_1=ai\\ z_2=-2ai\end{matrix}$$

$a\ge 1$ por ser un dígito del DNI $\Longrightarrow$ z_1 puede ser N.A. si $a=1$, para el resto de casos z_1 es un polo de orden 2020. z_2 tiene siempre problemas de analiticidad y es N.A.

- Singularidad en $z=10$ $\Rightarrow$ Polo de orden 2021

3.- (1'5 puntos) Calcular el desarrollo en serie de Laurent centrado en $z = i$ de la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi i z)}{z^2 - 2iz - 1}$$

(no únicamente los primeros términos). ¿Cuál es el valor del residuo de $f(z)$ en $z = i$?

$$f(z) = \frac{\sin(\pi i z)}{z^2-2iz-1} = \frac{\sin(\pi i z)}{(z-i)^2}$$

Llamamos $g(z) = \sin(\pi i z)$ y calculamos su desarrollo de Laurent

$$g'(z) = \pi i \cos(\pi i z)$$
$$g''(z) = -(\pi i)^2 \sin(\pi i z)$$
$$g'''(z) = -(\pi i)^3 \cos(\pi i z)$$
$$g^{IV}(z) = (\pi i)^4 \sin(\pi i z)$$

$$\Rightarrow g^k(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2m \\ (\pi i)^k & \text{si } k = 4m-3 \\ -(\pi i)^k & \text{si } k = 4m-1 \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-i)^2} \frac{\sin(\pi i z)}{\cancel{(z-i)^2}}\right) = = \lim_{z\to i} \cos(\pi i z) = \cos(-\pi) \cdot$$

$$g(z) = 0 - \pi i (z-i) - 0 + (\pi i)^3 (z-i)^3 - 0 - (\pi i)^5 (z-i)^5 + \cdots = -\pi i (z-i) + (\pi i)^3 (z-i)^3 - (\pi i)^5 (z-i)^5 + \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [\pi i (z-i)]^{(2k-1)} \Rightarrow \boxed{f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\pi i)^{(2k-1)} (z-i)^{(2k-3)}}$$

El término del residuo aparece cuando $2k-3 = -1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ El residuo es $-\pi i$

4.- (2'25 puntos) Utilizar el teorema de los residuos en la integral

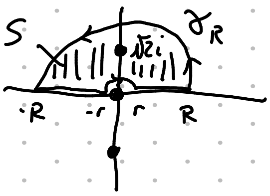
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+4)}\, dx.$$

(Simplificar el resultado final.) ¿La integral es convergente?

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x(x^2+4)} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+4)} dx\right)$$

paridad del seno $\qquad f(z)$ extensión a $\mathbb{C}$

$x(x^2+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2i \vee x_3 = -2i$



$$\Gamma_R = \gamma_R + \gamma_r + [-R, -r] + [r, R]$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz + \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_r^R f(x)dx$$

Γ_R regular, cerrada simple.

$$\operatorname{Res}(f, \sqrt{2}i) = \lim_{z \to 2i} \cancel{(z-\sqrt{2}i)} \frac{e^{iz}}{z\cancel{(z-\sqrt{2}i)}(z+\sqrt{2}i)} = \lim_{z\to 2i} \frac{e^{iz}}{z(z+\sqrt{2}i)} = \frac{e^{-2}}{-8} \longrightarrow T^{ma} \text{ Residuos}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = -\frac{\pi i}{4} e^{-2}$$

$$g(z) = \frac{1}{z(z^2+4)} \; ; \; |g(z)| \leq \frac{1}{|z(z^2+4)|} = \frac{1}{|z^3+4z|} \underset{\text{DTI}}{\leq} \frac{1}{|z^3| - |4z|} \underset{|z|\leq R}{\leq} \frac{1}{R^3-4R} \; ; \; \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^3-4R} = 0$$

Lema de Jordan: $\left|\int_{\gamma_R} g(z) e^{iaz} dz\right| \leq \frac{\pi M_g(\gamma_R)}{a}(1 - e^{-Ra})$ con $M_g(\gamma_R) = \max\{|g(z)|, z \in \gamma_R^*\}$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0$$

Como x_1 es un polo de orden 1 y $\gamma_r(t) = z_0 + r e^{i(\pi - t)}$ $t \in [0, \pi] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = -\frac{\pi i}{4}$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0} \cancel{(z-0)} \frac{e^{iz}}{\cancel{z}(z^2+4)} = \frac{1}{4}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \cancel{\int_{\gamma_R} f(z)dz} + \cancel{\int_{\gamma_r} f(z)dz} + \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_r^R f(x)dx \xrightarrow[r\to 0]{R\to\infty} -\frac{\pi i}{4} e^{-2} = -\frac{\pi i}{4} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -\frac{\pi}{4} i (e^{-2} - 1) \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+4)} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(-\frac{\pi}{4} i (e^{-2} - 1)\right) = -\frac{\pi}{8}(e^{-2} - 1)$$

5.- Consideremos la función entera $f(z) = e^z - 2021$.

i) (0'75 puntos) Calcular formalmente el exponente de convergencia asociado a los ceros de $f(z)$.

ii) (0'5 puntos) Si la expresión factorizada de $f(z)$ es de la forma $e^{a+bz}\prod_{n\in\mathbb{Z}} E_h\left(\frac{z}{a_n}\right)$ para algunos $a, b \in \mathbb{C}$, ¿cuál es el valor de h? ($E_m(z)$, $m = 0, 1, 2\ldots$, son los factores canónicos o elementales). Justificar la respuesta.

$f(z)=0 \iff e^z-2021=0 \iff e^z=2021 \implies z_n = \ln(2021)+2\pi i n$ con $n\in\mathbb{Z}$

$M = \inf\{k>0 : \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z_n|^k} < \infty\}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z_n|^k} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{|z_n|^k} + \frac{1}{|z_0|^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^k} = \frac{1}{|z_0|^k} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^k}$$

$|z_n| = \sqrt{\ln^2(2021)+(2\pi n)^2}$ → Como el signo de n da igual, son la misma serie

Criterio de comparación: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{|z_n|^k}}{\frac{1}{(2\pi n)^k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\pi n)^k}{|z_n|^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\pi n)^k}{(\ln^2(2021)+(2\pi n)^2)^{k/2}} = 1 \implies$

$\implies \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z_n|^k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2\pi n)^k}$ Converge si $k>1 \implies M = 1$

Si la expresión factorizada de $f(z) = e^{az+b}\prod_{n\in\mathbb{Z}} E_h\left(\frac{z}{z_n}\right)$ h debe ser tal que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z_n|^h}$ converja.

Del apartado anterior concluimos que $h=1$

6.- (0'75 puntos) Si $f(z)$ es una función entera tal que $|f(z)| = 2021$ para todo z con $|z| = 1$, probar que $f(z) = kz^n$ para algún $n \geq 0$ y alguna constante $k \in \mathbb{C}$ tal que $|k| = 2021$.

2 casos: f acotada y f no acotada

$\boxed{\text{Acotada:}}$

f entera $\implies f$ holomorfa en $\mathbb{C}$
f acotada
$\xrightarrow{\text{T}^{\text{ma}}\text{ Liouville}}$ f es una función constante con $|k| = 2021$
$f(z) = k$ con $|k| = 2021 \implies f(z) = kz^n$ con $n=0$ $|k| = 2021$

$\boxed{\text{No acotada}}$

f no acotada
f entera $\implies f$ holomorfa en $\mathbb{C}$

Invocamos el Principio del Máximo: Si una función holomorfa no cte. alcanza su máximo en el interior de un dominio, entonces debe ser cte.

Como $|f(z)| = 2021$ en el disco unidad y f es holomorfa $\implies f$ es cte. $f(z) = k$ con $|k| = 2021$

$\implies f(z) = kz^n$ con $n=0$ y $|k| = 2021$ $\quad (D(0,1) \subset D(0,2021))$

$|f(z)| = |kz^n| = |k||z^n| = 2021 \cdot 1 = |2021|$