En el problema del examen pone “coseno” en vez de “seno”,
pero el procedimiento es el mismo

At $t = 0$ the dipole moment of the ring is

$$\mathbf{p}_0 = \int \lambda \mathbf{r}\, dl = \int (\lambda_0 \sin\phi)(b \sin\phi\, \hat{\mathbf{y}} + b\cos\phi\, \hat{\mathbf{x}}) b\, d\phi = \lambda_0 b^2 \left( \hat{\mathbf{y}} \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi + \hat{\mathbf{x}} \int_0^{2\pi} \sin\phi \cos\phi\, d\phi \right)$$
$$= \lambda b^2 (\pi\, \hat{\mathbf{y}} + 0\, \hat{\mathbf{x}}) = \pi b^2 \lambda_0\, \hat{\mathbf{y}}.$$

As it rotates (counterclockwise, say) $\mathbf{p}(t) = p_0[\cos(\omega t)\, \hat{\mathbf{y}} - \sin(\omega t)\, \hat{\mathbf{x}}]$, so $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2 \mathbf{p}$, and hence $(\ddot{\mathbf{p}})^2 = \omega^4 p_0^2$. Therefore (Eq. 11.60) $P = \dfrac{\mu_0}{6\pi c}\omega^4 (\pi b^2 \lambda_0)^2 = \boxed{\dfrac{\pi \mu_0 \omega^4 b^4 \lambda_0^2}{6c}}.$

1

## Tema 7 – EXAMEN ANTERIOR

Una partícula de masa $m$ y carga $q$ se desplaza en el vacío con movimiento rectilíneo e incide en un material con velocidad inicial $v_0$ ($v << c$), de modo al interaccionar con el medio la partícula se va frenando hasta detenerse. Podemos modelizar el frenado de la partícula suponiendo que la fuerza de frenado es proporcional a la velocidad de la partícula en cada instante, siendo $\lambda$ la constante de proporcionalidad, y que la trayectoria dentro del medio es aproximadamente rectilínea (por ejemplo, a lo largo del eje $x$). Si se ignoran los efectos de la reacción de radiación sobre el movimiento de la partícula, determinar:

(a) La velocidad $v$, la aceleración $a$, y la posición $x$ de la partícula en función del tiempo $t$, así como la velocidad $v$ y la aceleración $a$ en función de $x$.

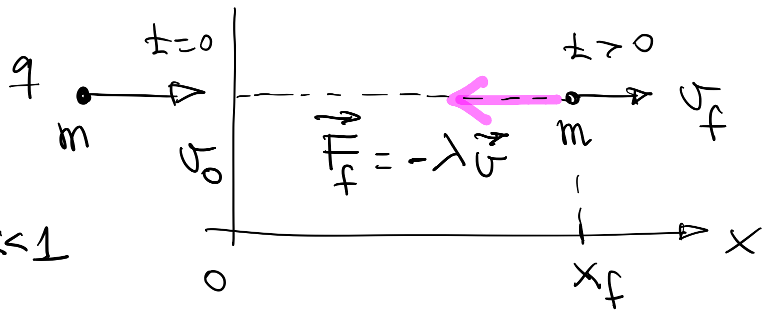
(b) La profundidad de penetración (o alcance) de la partícula en el material (distancia que recorre antes de detenerse) expresado en función de la velocidad inicial $v_0$ y de energía cinética inicial $E_0$.

(c) La energía total radiada por la partícula hasta detenerse.

(d) La fracción $f$ de la energía inicial que es radiada. ¿Depende el valor de $f$ de la velocidad inicial de la partícula $v_0$? ¿Por qué? ¿Cuál debería ser el valor de $\lambda$ para que $f << 1$ como se ha supuesto inicialmente?

[Este modelo no es precisamente muy realista. Por ejemplo, el alcance para partículas alfa con energías entre 4 y 9 MeV en aire (a 0ºC y presión atmosférica) es proporcional a su energía elevada a 3/2.]

(a)




$\frac{v_0}{c} << 1$

Si $v_f = 0$ se para

$v_f < v_0$

2ª Ley de Newton

$$\sum F = ma = m\frac{dv}{dt} \rightarrow \boxed{m\frac{dv}{dt} = -\lambda v} \rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\lambda}{m}dt$$

$$\sum F = F_f = -\lambda v$$

$$\int_{v_0}^{v_f} \frac{dv}{v} = -\frac{\lambda}{m}\int_0^t dt \rightarrow \ln v \Big|_{v_0}^{v_f} = -\frac{\lambda}{m}t$$

$$\ln v_f - \ln v_0 = -\frac{\lambda}{m}t \rightarrow \ln\frac{v_f}{v_0} = -\frac{\lambda}{m}t \rightarrow \frac{v_f}{v_0} = e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

$$\boxed{v_f(t) = v_0\, e^{-\frac{\lambda}{m}t}} \quad \begin{cases} v_f \to 0 \\ t \to \infty \end{cases}$$

$x(t) \to$ integrando

$a(t) \to$ derivando

$$a(t) = \frac{dv_f}{dt} = -\frac{\lambda}{m} v_0\, e^{-\frac{\lambda}{m}t} \to \boxed{a(t) = -\frac{\lambda}{m} v_0\, e^{-\frac{\lambda}{m}t}}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \to \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v\, dt$$

$$x - \underbrace{\cancel{x_0}}_{=0} = v_0 \int_0^t e^{-\frac{\lambda}{m}t} = -\frac{v_0 m}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

$$\cancel{\boxed{x = x_0 - \frac{v_0 m}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{m}t}}}$$

ERROR

$$\boxed{x = -\frac{v_0 m}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{m}t}\Big|_0^t = \frac{v_0 m}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)}$$

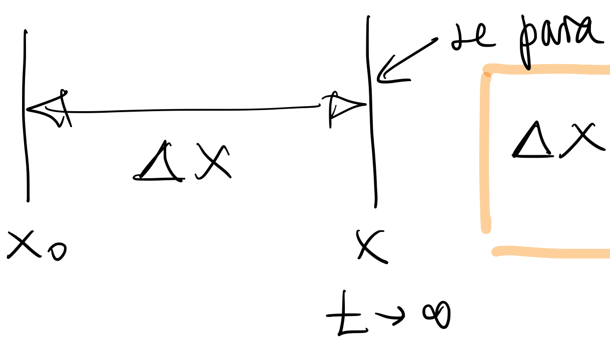
CORRECTO

$$\cancel{v_f(x) = -\frac{\lambda}{m}x}$$

$$\cancel{a(x) = -\frac{\lambda}{m}v = \frac{\lambda^2}{m}x}$$

(b) $\Delta x$ hasta pararse $(t \to \infty)$

$$\Delta x = x(t \to \infty) - x(t = 0)$$




$$\boxed{\Delta x = \frac{v_0 m}{\lambda}}$$

aquí $v_f = 0$ se para

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{\lambda}\sqrt{2mE_0}}$$

(c) Fórmula de Larmor ($v_0 \ll c$)

$$\frac{dW_{rad}}{dt} = P_{rad} = \frac{q^2 |\dot{\vec{v}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\lambda^2 v_0^2}{m^2} e^{-\frac{2\lambda}{m}t}$$

$$|\dot{\vec{v}}| = a(t)$$

hasta que se para

$$W_{rad} = \int_0^\infty P_{rad}\, dt = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\lambda^2 v_0^2}{m^2}\int_0^\infty e^{-\frac{2\lambda}{m}t} dt =$$

$$= \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\lambda^2 v_0^2}{m^2}\left(-\frac{m}{2\lambda}\right)\left[e^{-\frac{2\lambda}{m}t}\right]_0^\infty =$$

se para

$$= \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\lambda^2 v_0^2}{m^2}\left(-\frac{m}{2\lambda}\right)(0-1) = \boxed{\frac{q^2 \lambda v_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3 m}}$$

Energía total radiada hasta detenerse.

(d)

$$f = \frac{\text{Energía total radiada}}{\text{Energía cinética inicial}} = \frac{W_{rad}}{E_0} = \frac{\frac{q^2\lambda \cancel{v_0^2}}{12\pi\varepsilon_0 c^3 m}}{\frac{1}{2}m\cancel{v_0^2}}$$

$$\boxed{f = \frac{q^2\lambda}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^3}} \lll 1 \quad \text{despejamos } \lambda$$

$$\boxed{\lambda \ll \frac{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}{q^2}}$$

$$\vec{F}_{frenado} = -\lambda \vec{v}$$

$\dfrac{W_{rad}}{E_0}$ no depende de $v_0$ $(v_0 \ll c)$