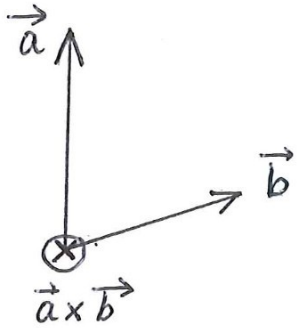
Clase 1 Tema 3

Fuerza de un campo magnético sobre una carga puntual

$$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}}$$



$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

sentido → regla mano derech

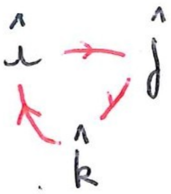
$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\theta$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$



$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$

$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

$\hat{i} \times \hat{i} = 0$

$\hat{j} \times \hat{j} = 0$

$\hat{k} \times \hat{k} = 0$

Problema 5 Tema 1

5. @ ¿Cuál es la fuerza (módulo, dirección y sentido) de un electrón con velocidad en $\vec{v}=(2\hat{i}-3\hat{j}).10^6 m/s$ un campo magnético $\vec{B}=0.80\,T\,\hat{i}+0.60\,T\,\hat{j}-0.40\,T\,\hat{k}$?

Resultado: $\vec{F}=(-0.192\hat{i}-0.128\hat{j}-0.576\hat{k})\,pN$ $F=0.621\,pN$

$$\vec{v} = (2\hat{i}-3\hat{j}) \times 10^{6}\ m/s$$

$$\vec{B} = 0{,}8\ T\ \hat{i} + 0{,}6\ T\ \hat{j} - 0{,}4\ T\ \hat{k}$$

$$q_e = -1{,}6 \times 10^{-19}\ C$$

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = -1{,}6 \times 10^{-19} \cdot 10^{6}\ (2\hat{i}-3\hat{j}) \times (0{,}8\ \hat{i} + 0{,}6\ \hat{j} - 0{,}4\ \hat{k})$$

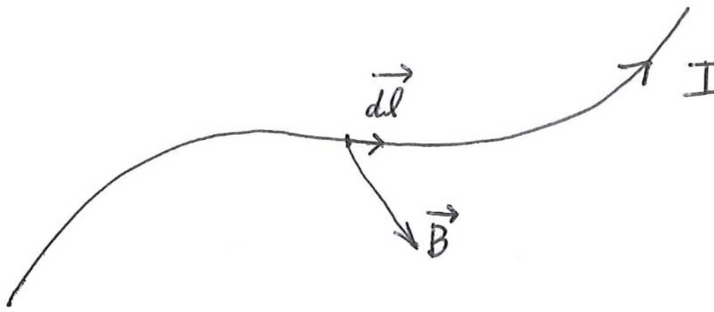
$$\vec{F} = -1{,}6 \times 10^{-13}\ (2 \times 0{,}6\ \hat{k} + 2 \times 0{,}4\ \hat{j} + 3 \times 0{,}8\ \hat{k} + 3 \times 0{,}4\ \hat{i})$$

$$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$
$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

$$\vec{F} = \boxed{(-1{,}92 \times 10^{-13}\ \hat{i} - 1{,}28 \times 10^{-13}\ \hat{j} - 5{,}76 \times 10^{-13}\ \hat{k})\ N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \boxed{6{,}205 \times 10^{-13}\ N}$$

Fuerza magnética sobre una corriente



$I = n q A v_d$

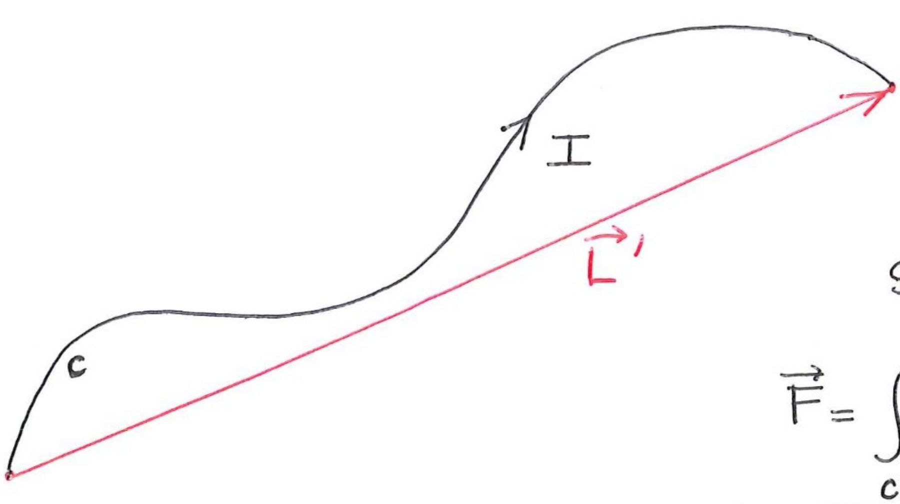
$Q = n A dl \cdot q$

$\vec{v} = v_d \, \hat{dl}$

$Q \vec{v} = I \, \vec{dl}$

$$\boxed{\vec{dF} = I \, \vec{dl} \times \vec{B}}$$

$\vec{F} = \int \vec{dF}$

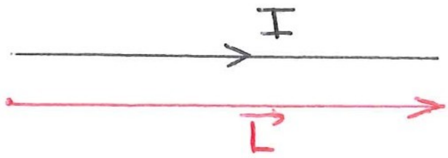


Si $\vec{B}$ es uniforme

$$\vec{F} = \int_c \vec{dF} = \int_c I \, \vec{dl} \times \vec{B} = I \left[\int_c \vec{dl} \right] \times \vec{B}$$

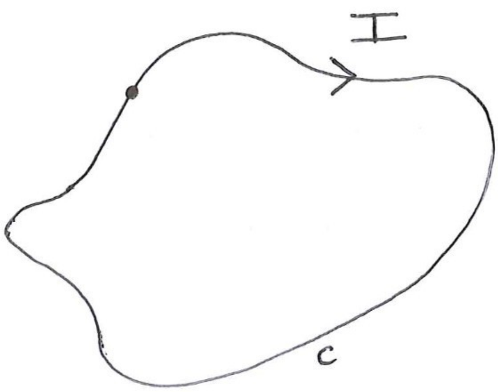
$$\boxed{\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}}$$

Si $\vec{B}$ es uniforme y la corriente es rectilínea



$$\vec{F} = I\,\vec{L} \times \vec{B}$$

Si $\vec{B}$ es uniforme y la corriente es cerrada

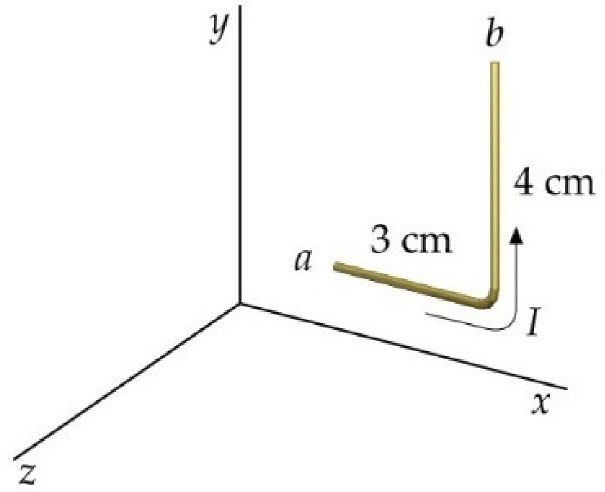


$$\vec{L}' = \int_c d\vec{l} = \vec{0}$$

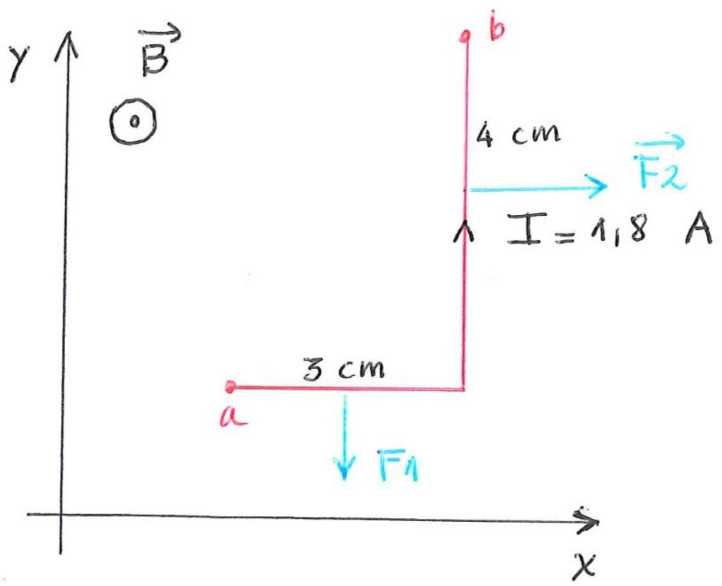
$$\vec{F} = 0$$

Problema 6 Tema 3

6. @ El segmento conductor de la figura transporta una corriente de 1.8A de a hasta b y se encuentra en el interior de un campo magnético $\vec{B}=1.2\,T\,\hat{k}$. Determinar la fuerza total que actúa sobre el conductor y demostrar que es la misma que actuaría si se tratara de un segmento recto de a a b.



Resultado: $\vec{F}=0.0864\,N\,\hat{\imath}-0.0648\,N\,\hat{\jmath}$



$\vec{F_1} = I\,\vec{L_1} \times \vec{B}$

$\vec{F_2} = I\,\vec{L_2} \times \vec{B}$

$\vec{B} = 1{,}2\ T\ \hat{k}$

$\vec{L_1} = 3\ cm\ \hat{\imath}$

$\vec{L_2} = 4\ cm\ \hat{\jmath}$

$$\vec{F_1} = I\,\vec{L_1} \times B = 1{,}8 \times \left(3 \times 10^{-2}\,\hat{\imath}\right) \times 1{,}2\,\hat{k}$$

$$= 1{,}8 \times 3 \times 10^{-2} \times 1{,}2 \quad \hat{\imath} \times \hat{k}$$

$$= 0{,}0648 \quad -\hat{j}$$

$$= -0{,}0648 \text{ N} \quad \hat{j}$$

$$\vec{F_2} = I\,\vec{L_2} \times \vec{B} = 1{,}8 \times \left(4 \times 10^{-2}\,\hat{j}\right) \times 1{,}2\,\hat{k}$$

$$= 0{,}0864 \text{ N}\ \hat{\imath}$$

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \boxed{\left(-0{,}0648\,\hat{j} + 0{,}0864\,\hat{\imath}\right) \text{N}}$$

Obviamente

$$\vec{F} = I\,\vec{L_1} \times \vec{B} + I\,\vec{L_2} \times \vec{B} = I\,(\vec{L_1} + \vec{L_2}) \times \vec{B}$$

$$= I\ \vec{L} \times \vec{B}$$

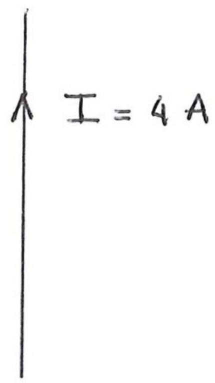
donde $\vec{L}$ es un vector que va de a hasta b

$$\vec{L} = (3\hat{\imath} + 4\hat{j}) \times 10^{-2} \text{ m}$$

Problema 9 Tema 3

9. @ Sea un hilo recto de 10cm paralelo al eje z por el que circula una corriente de 4.0A en la dirección +z. La fuerza sobre el hilo debido a un campo $\vec{B}$ es $-0.2N\,\hat{i}+0.2N\,\hat{j}$. Si el hilo gira de forma que queda paralelo al eje x con la corriente circulando en la dirección $+x$, la fuerza sobre el hilo viene a ser $0.20\,N\,\hat{k}$. Determinar el campo $\vec{B}$.

Resultado: $\vec{B}=(0.5\hat{i}+0.5\hat{j})T$



Si $\vec{L} = 0{,}1\,\vec{k} \rightarrow \vec{F} = (-0{,}2\,\hat{i} + 0{,}2\,\hat{j})\ N$

Si $\vec{L} = 0{,}1\,\hat{i} \rightarrow \vec{F} = 0{,}2\,\hat{k}\ N$

$\vec{B} = ?$

$$\vec{F} = I\,\vec{L} \times \vec{B}$$

$$-0{,}2\,(\hat{i} - \hat{j}) = 4 \times 0{,}1 \quad (\vec{k} \times (B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k}))$$

componente x $\quad -0{,}2 = -4 \times 0{,}1 \times B_y \qquad \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$

$$B_y = 0{,}5\ T$$

componente y $\quad +0{,}2 = 4 \times 0{,}1 \times B_x$

$$B_x = 0{,}5\ T \qquad B_z = ?$$

$$0{,}2\,\hat{k} = 4 \times 0{,}1 \left(\hat{\imath} \times \left(B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath} + B_z\,\hat{k}\right)\right)$$

componente z $\quad 0{,}2 = 4 \times 0{,}1 \times B_y \quad \Rightarrow \quad B_y = 0{,}5\ \mathrm{T}$

ya lo sabía

componente y $\quad 0 = 4 \times 0{,}1 \times B_z$

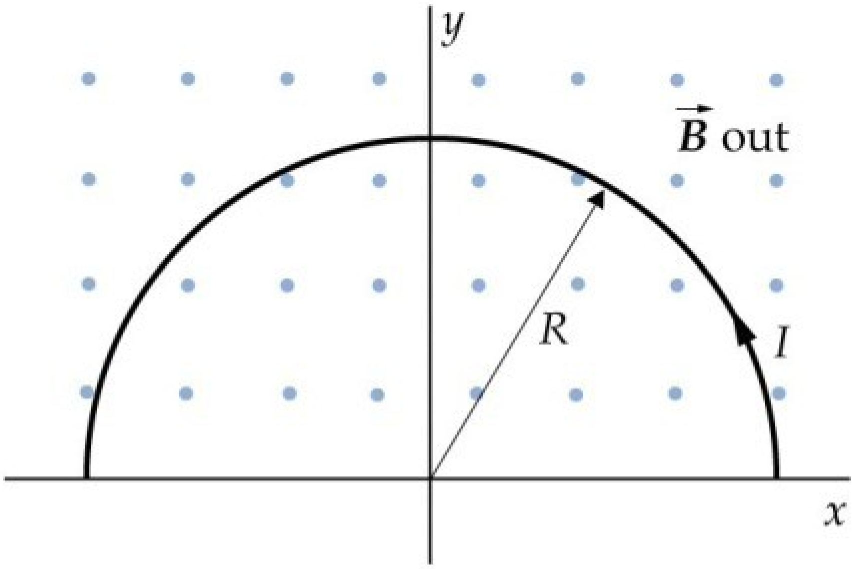
$$\Downarrow$$

$$B_z = 0$$

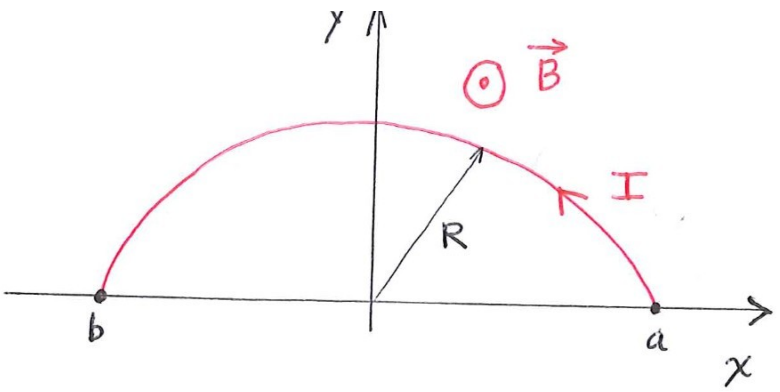
$$\boxed{\vec{B} = (0{,}5\ ,\ 0{,}5\ ,\ 0)\ \mathrm{T}}$$

Problema 10 Tema 3

10. @ Un cable conductor por el que circula una corriente I tiene la forma de una espira semicircular de radio R situada sobre el plano *xy*. El hilo está inmerso en un campo magnético uniforme cuya dirección es +z. Calcular la fuerza que actúa sobre la espira.



Resultado: $\vec{F}=2IBR\,\hat{j}$



Como $\vec{B}$ es uniforme $\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B}$

donde $\vec{L}$ es un vector que va de a hasta b

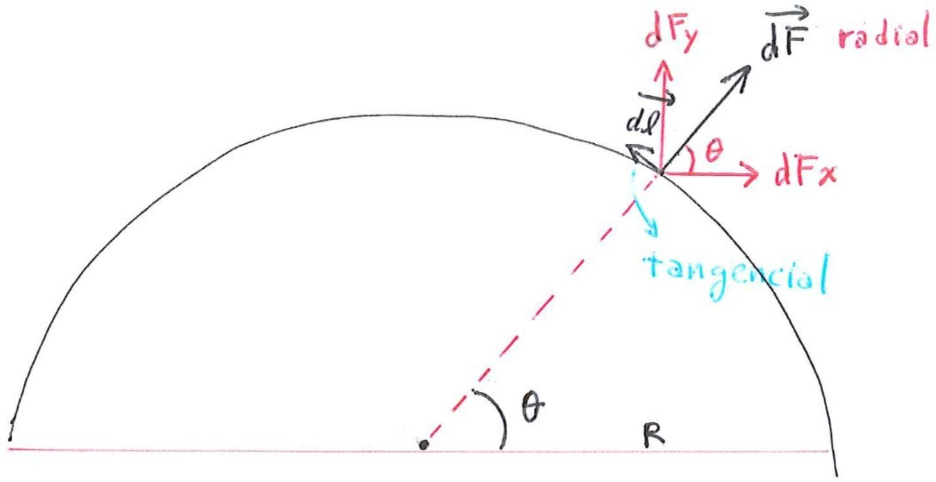
$\vec{L} = -2R\,\hat{i}$

$\vec{B} = B\,\hat{k}$

$\vec{F} = I\,\vec{L}\times\vec{B} = I\,(-2R\,\hat{i})\times(B\times\hat{k})$

$$\boxed{\vec{F} = 2IBR\,\hat{j}}$$

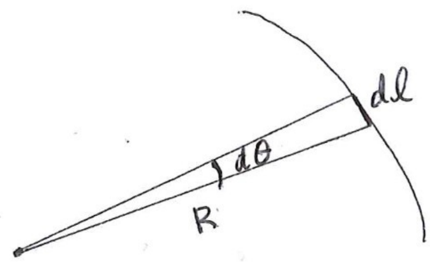
Podemos hacer el cálculo de $\vec{F}$ con la expresion $\vec{F} = \int I \, \vec{dl} \times \vec{B}$ y comprobar que da lo mismo



$dF = I \, dl \, B$ → módulo

$dF_y = dF \sin\theta$

$dF_x = dF \cos\theta$



$dl = R \, d\theta$

$$F_y = \int dF_y = \int_c I \, dl \, B \sin\theta = \int_c IRB \sin\theta \, d\theta$$

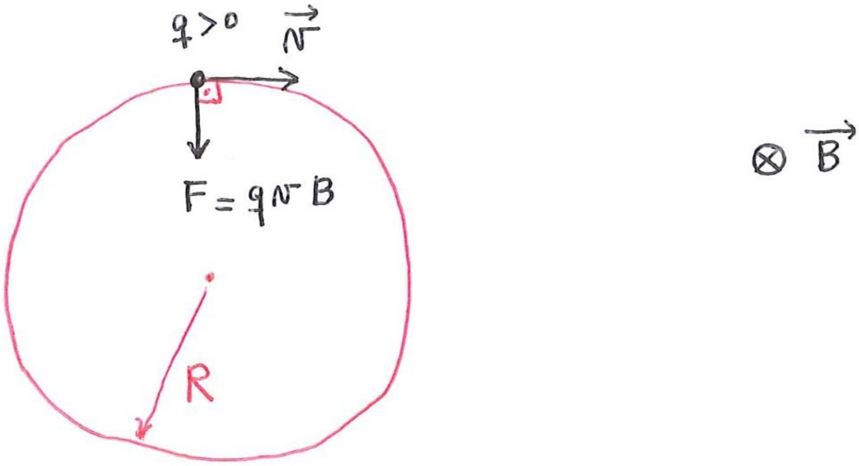
$$= \int_0^{\pi} IRB \sin\theta \, d\theta = IRB \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{-\cos\theta \Big|_0^{\pi} = (1-(-1)) = 2} = 2 IRB$$

$$F_x = \int dF_x = \int_c I \, dl \, B \cos\theta = \int_c IRB \cos\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} IRB \cos\theta \, d\theta = IRB \underbrace{\left[\sin\theta \Big|_0^{\pi}\right]}_{(0-0)=0} = 0$$

Movimiento de cargas puntuales en presencia de $\vec{B}$

Si una carga q se mueve con velocidad $\vec{v} \perp \vec{B}$ describe una trayectoria circular de radio R

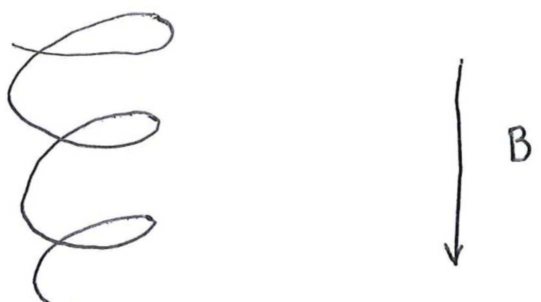


$$q \cancel{v} B = \frac{m v^{\cancel{2}}}{R} \Rightarrow R = \frac{m v}{q B}$$

período

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{q B}$$

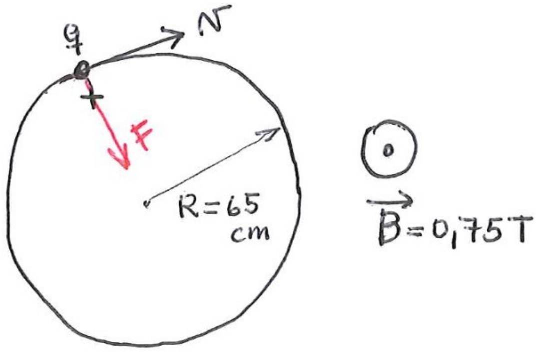
Si la velocidad tiene una componente // a $\vec{B}$, la fuerza en esa dirección es 0 y por tanto realiza un movimiento espiral (circular en plano $\perp B$ y uniforme en dirección $\vec{B}$



Problema 11 Tema 3

11. @ Un protón se mueve en una órbita circular de radio 65cm perpendicular a un campo magnético uniforme de valor 0.75T. a) ¿Cuál es el periodo correspondiente a este movimiento? b) Hallar el módulo de la velocidad del protón. c) Hallar la energía cinética del protón.

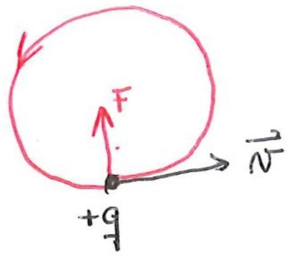
Resultado: a) $T=87.4\,ns$ b) $v=4.67.10^{7}\,m/s$ c) $E_c=1.82.10^{-12}\,J=11.4\,MeV$



$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

$q_p = +1{,}6 \times 10^{-19}$ C

Si fuera ⊗



a) $T = \dfrac{2\pi R}{v}$

$F = q\cancel{v}B = \dfrac{m v^{\cancel{2}}}{R}$

$T = \dfrac{2\pi \cdot 0{,}65}{4{,}67\times 10^{7}} = \boxed{8{,}74\times 10^{-8}\ s}$

$v = \dfrac{RqB}{m} = \dfrac{0{,}65 \cdot 1{,}6\times 10^{-19} \times 0{,}75}{1{,}67\times 10^{-27}}$

$$\boxed{v = 4{,}67 \times 10^{7}\ m/s}$$

c) $E_c = \dfrac{1}{2} m v^2 = \dfrac{1}{2} \times 1{,}67 \times 10^{-27} \times (4{,}67\times 10^{7})^2$

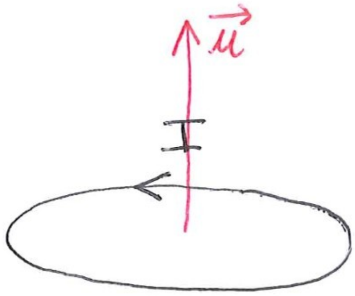
$= 1{,}82 \times 10^{-12}\ J = 11{,}4\ MeV$

$1\ eV — 1{,}6\times 10^{-19}\ J$

Momento magnético

Si se tiene una espira de corriente cerrada ya vimos que si el $\vec{B}$ es uniforme la fuerza neta es 0. Sin embargo puede aparecer un momento de fuerza sobre la espira.

Se llama momento magnético de la espira $\vec{\mu}$ a



$$\vec{\mu} = I A \hat{m}$$

A: área encerrada por la espira

$\hat{m}$: vector unitario $\perp$ plano de la espira (sentido mano derecha)

I: corriente de la espira

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

este momento de fuerza tenderá a alinear $\vec{\mu}$ con $\vec{B}$ (igual que dipolo eléctrico con $\vec{E}$)

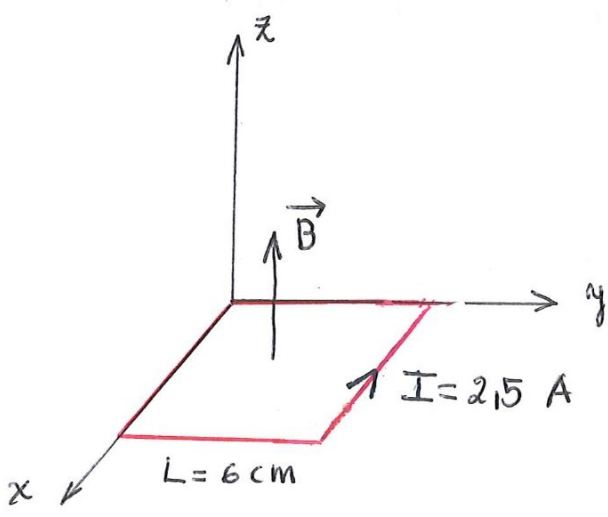
$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

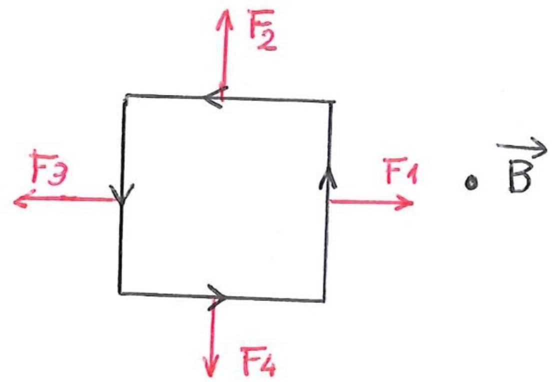
energía de dipolo magnético en presencia de campo

Problema 17 Tema 3

17. @ Un cable conductor se dobla en forma de un cuadrado de lado L = 6cm y se sitúa en el plano xy. El cable transporta una corriente I = 2.5A. ¿Cuál es el momento que actúa sobre el conductor si existe un campo magnético de 0.3T a) en la dirección z, b) en la dirección x?

Resultado: a) $\vec{\tau}=0$ b) $\vec{\tau}=\pm 2.7.10^{-3} N.m\,\hat{j}$





$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$

$F_1 = F_2 = F_3 = F_4$

a)

Con el sentido de corriente puesto en el dibujo

$\vec{\mu} = I A \hat{k}$ (sentido mano derecha)

$= 2{,}5 \times (6 \times 10^{-2})^2 \hat{k}$

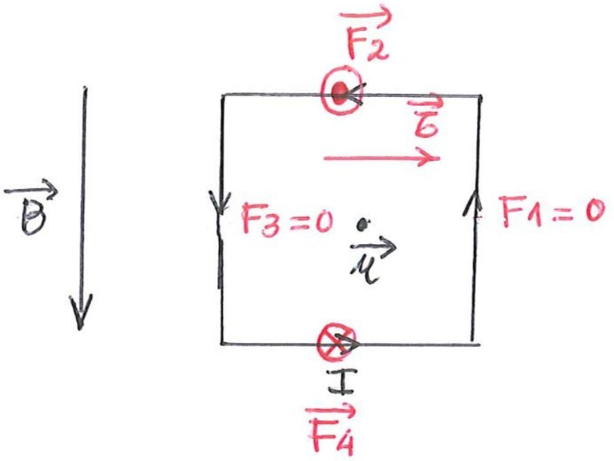
$\vec{\mu} = 9 \times 10^{-3}$ A.m^2 $\hat{k}$

$\vec{B} = 0{,}3$ T $\hat{k}$

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = 9 \times 10^{-3} \hat{k} \times 0{,}3 \hat{k} = 0$

$\vec{\mu} \parallel \vec{B}$ (ya está alineado)

b) Si $\vec{B} = 0{,}3\ \hat{i}$ T



$F_2 = F_4 = ILB$

$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$

$\sum F = 0$

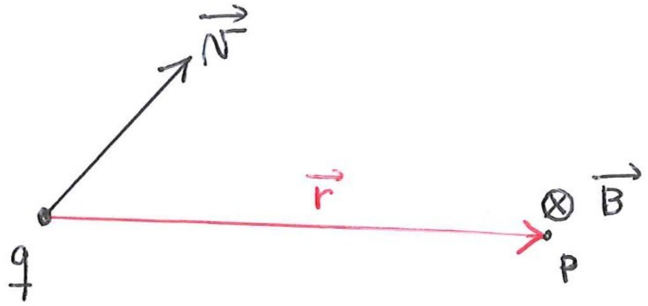
$\tau = F_2 \cdot L = I \cdot L^2 B$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = 9 \times 10^{-3}\ \hat{k} \times 0{,}3\ \hat{i} = \boxed{2{,}7 \times 10^{-3}\ \hat{j}\ \text{N.m}}$$

$\vec{B} = 0{,}3\,\text{T}\ \hat{i}$

$= IL^2B\ \hat{j}$

Campo magnético creado por una carga en movimiento



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, q\, \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \qquad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ \frac{T.m}{A}$$

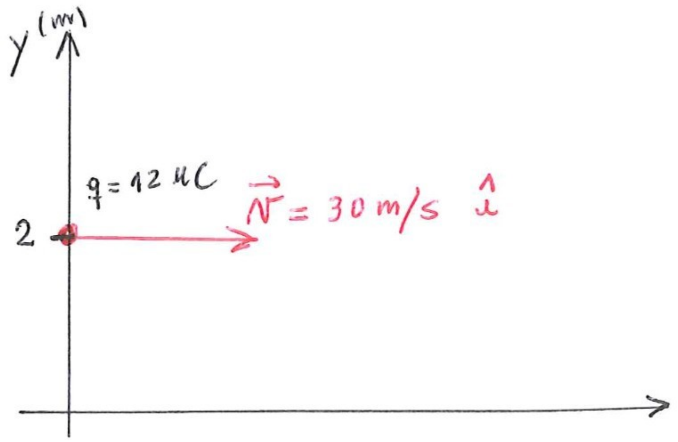
$\vec{v}$: velocidad carga

$\vec{r}$: vector que va de la posición de la carga hasta punto donde calculo el campo creado

Problema 28 Tema 3

28. @ En el tiempo $t = 0$, una partícula de carga $q=12\,\mu C$ está localizada en $x = 0$, $y = 2$m; su velocidad en ese instante es $\vec{v}=30\,m/s\,\hat{i}$. Determinar el campo magnético en a) $x = 1.0$m, $y = 3.0$m; b) $x = 2.0$m, $y = 2.0$m; y c) $x = 2.0$, $y = 3.0$.

Resultado: a) $\vec{B}=1.27.10^{-11}T\,\hat{k}$ b) $\vec{B}=0$ c) $\vec{B}=1.27.10^{-11}T\,\hat{k}$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, q\,\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

a) en $x = 1$ $y = 3$ m

$$\vec{r} = (1,3) - (0,2) = (1,1) = (\hat{i}+\hat{j})\ \text{m}$$

$$r = \sqrt{2}\ \text{m}$$

$$\hat{r} = \frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\,\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{10^{-7}\times 12\times 10^{-6}\,.\,30}{2}\ \hat{i}\times\frac{(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\vec{B} = 1{,}27\times 10^{11}\ T\ \hat{k}}$$

b) en $x=2 \quad y=2$

$$\vec{r} = (2,2) - (0,2) = 2\hat{\imath} \text{ m}$$

$$r' = 2 \text{ m} \qquad \hat{r} = \hat{\imath}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{10^{-7} \times 12 \times 10^{-6} \cdot 30}{2} \underbrace{\hat{\imath} \times \hat{\imath}}_{0} = 0 \text{ T}$$

c) en $x=2 \quad y=3$

$$\vec{r} = (2,3) - (0,2) = (2\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \text{ m}$$

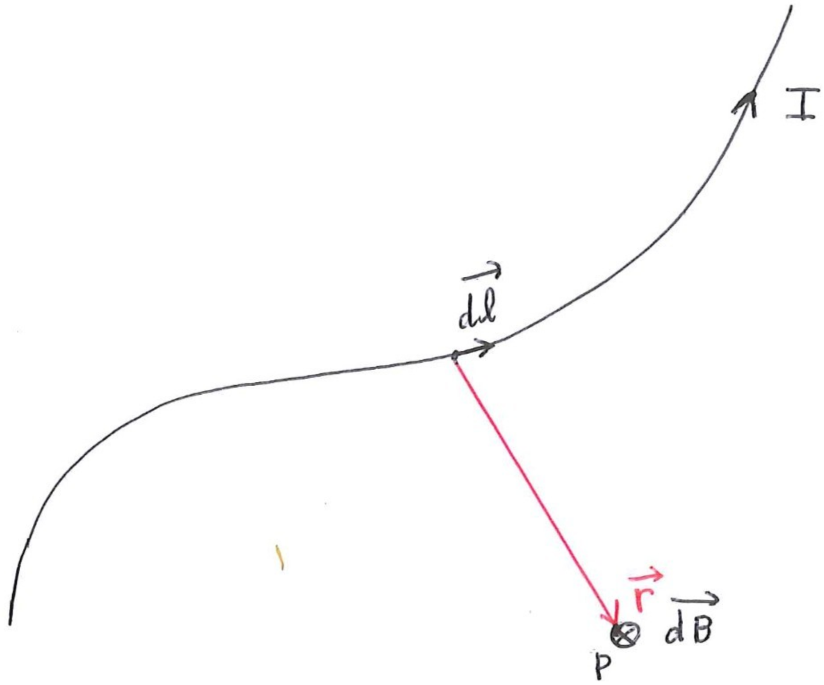
$$r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \text{ m}$$

$$\hat{r} = \frac{(2\hat{\imath} + \hat{\jmath})}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{10^{-7} \times 12 \times 10^{-6} \times 30}{5} \hat{\imath} \times \frac{(2\hat{\imath} + \hat{\jmath})}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\vec{B} = 3{,}22 \times 10^{-2} \text{ T} \quad \hat{k}}$$

Campo creado por una corriente (Ley Biot y Savart)



como ya hemos hecho con la fuerza sobre una carga hacemos el reemplazo en la fórmula de $\vec{B}$ de una carga puntual

$$q\vec{v} \longrightarrow I\,\vec{dl}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2}$$

Ley Biot y Savart

campo creado por el elemento infinitesimal de corriente $I\vec{dl}$ en el punto P

$\vec{r}$: vector del elemento de corriente hasta el punto P

el campo total creado por toda la corriente

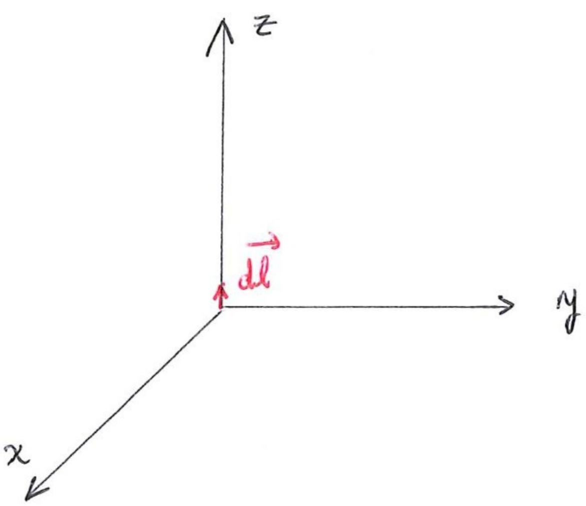
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2}$$

30. @ Por un elemento pequeño de corriente $I\,dl$, en el que $\vec{dl}=2.0\,mm\,\hat{k}$, circula una corriente $I=2.0\,A$. El elemento está centrado en el origen. Hallar el campo magnético dB en los puntos siguientes: a) en el eje x en x = 3.0m, b) en el eje x en x = -6.0m, c) en el eje z en z = 3.0m, d) en el eje y en y = 3.0m.

Resultado: a) $\vec{dB}=4.44.10^{-11}\,T\,\hat{j}$ b) $\vec{dB}=4.44.10^{-11}\,T\,\hat{j}$ c) $\vec{dB}=0$
d) $\vec{dB}=-4.44.10^{-11}\,T\,\hat{i}$

$\vec{dl} = 2\times 10^{-3}\ m\ \hat{k}$

$I = 2\,A$



a) en $x=3$ $y=0$ $z=0$

$\vec{r} = (3,0,0)-(0,0,0) = 3\hat{i}\ m$

$r = 3\ m$

$\hat{r} = \hat{i}$

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,\vec{dl}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{10^{-7}\times 2\times 2\times 10^{-3}}{9}\ \hat{k}\times\hat{i}$$

$$\boxed{\overrightarrow{dB} = 4{,}44 \times 10^{-11} \ T \ \hat{j}}$$

b) en $x = -6$ m $\quad y=0 \quad z=0$

$\vec{r} = (-6,0,0) - (0,0,0) = -6\,\hat{i}$ m

$r = 6$ m

$\hat{r} = -\hat{i}$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ \frac{I\,\overrightarrow{dl} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{10^{-7} \times 2 \times 2\times10^{-3}}{36} \ (\hat{k} \times -\hat{i})$$

$$\boxed{\overrightarrow{dB} = -1{,}11 \times 10^{-11} \ \hat{j}}$$

c) en $z = 3 \quad x=0 \quad y=0$

$\vec{r} = (0,0,3) - (0,0,0) = 3\,\hat{k}$ m

$r = 3$ m

$\hat{r} = \hat{k}$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ \frac{I\,\overrightarrow{dl} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{10^{-7} \times 2 \times 2\times10^{-3}}{9} \ \underbrace{\hat{k} \times \hat{k}}_{0} = \boxed{0}$$

d) en $y = 3$ m $x = 0 = z$

$$\vec{r} = (0,3,0) - (0,0,0) = 3\hat{j} \text{ m}$$

$$r = 3 \text{ m}$$

$$\hat{r} = \hat{j}$$

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{10^{-7} \times 2 \times 2\times 10^{-3}}{9} \underbrace{(\hat{k} \times \hat{j})}_{-\hat{i}}$$

$$\boxed{\vec{dB} = -4{,}44 \times 10^{-11} \text{ T } \hat{i}}$$