Práctica 10

Métodos Numéricos y Computación

I. Sistemas de ecuaciones no lineales *(Tema 6)*

Las ecuaciones no lineales del tipo $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ se pueden escribir en una forma equivalente del tipo $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$. De esta forma, el punto fijo de $\mathbf{G}$ coincide con la solución de $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Existen muchas formas de realizar esta transformación. Una de ellas es, por ejemplo, tomar una matriz cuadrada no singular de orden n cualquiera, $A(\mathbf{x})$, y considerar

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}). \tag{1}$$

En el *método de Newton* para sistemas de ecuaciones no lineales se considera $A(\mathbf{x}) = JF(\mathbf{x})^{-1}$ donde JF denota la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$. Más concretamente, $\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} - JF\left(\mathbf{p}^{(k)}\right)^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{p}^{(k)}\right)$, para $k = 0, 1, \ldots$. Este método converge siempre que el punto semilla sea próximo a $\mathbf{p}$ y que $JF^{-1}(\mathbf{p})$ exista. Un inconveniente de este método es que el cálculo de la matriz jacobiana y de su inversa no es, en general, un proceso muy eficiente desde el punto de vista numérico. Por ello, a la hora de implementar el método se procede en dos etapas: en la primera se encuentra un vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $JF(\mathbf{p}^{(k)})\mathbf{y} = -F(\mathbf{p}^{(k)})$ (sistema lineal); y, en la segunda, se obtiene $\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + \mathbf{y}$.

Ejercicio 1 *Implementa una función* `newton_sist` *que, dada una función vectorial* `F`*, su jacobiano* `JF`*, un punto inicial* `p0`*, la tolerancia* `tol` *y el número máximo de iteraciones* `maxiter`*, devuelva la solución de* $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ *mediante el método de Newton, y el número de pasos que han sido necesarios.*

Ejercicio 2 *Aplica dos veces la función* `newton_sist` *para resolver el siguiente sistema no lineal, tomando* $\mathbf{p}^{(0)} = (1, 1)$ *y* $\mathbf{p}^{(0)} = (-1, -1)$ *como puntos semilla, una tolerancia de* 10^{-4} *y un máximo de 50 iteraciones:*

$$\left.\begin{array}{r} 3x^2 - y^2 = 0 \\ 3xy^2 - x^3 - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Una alternativa para evitar el cálculo de la matriz jacobiana es aproximar las derivadas parciales según las fórmulas vistas en el tema 4. A continuación, se muestran dos posibilidades:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p}^{(0)}) \approx \frac{f_i(\mathbf{p}^{(0)} + h\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{p}^{(0)})}{h} \tag{2}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p}^{(0)}) \approx \frac{f_i(\mathbf{p}^{(0)} - 2h\mathbf{e}_j) - 8f_i(\mathbf{p}^{(0)} - h\mathbf{e}_j) + 8f_i(\mathbf{p}^{(0)} + h\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{p}^{(0)} + 2h\mathbf{e}_j)}{12h} \tag{3}$$

para $i, j = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots,$ donde h es un escalar pequeño en valor absoluto y $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ es el vector cuyo único elemento distinto del cero es 1 en la coordenada j-ésima.

Ejercicio 3 *En base a la función* `newton_sist`*, implementa la función* `newton_approx1` *usando* `JF_approx1` *de forma que el jacobiano se aproxime mediante* (2) *con* $h = 10^{-2}$*. Implementa* `JF_approx2` *usando* (3) *para aproximar el jacobiano y úsalo para construir* `newton_approx2`*. Aplica estas funciones al sistema dado en el ejercicio anterior, compara los resultados y represéntalo gráficamente.*

II. Ecuaciones diferenciales *(Tema 7)*

El objetivo de una ecuación diferencial ordinaria (de primer orden) con valor inicial consiste en obtener una función $y(t)$ (definida en un intervalo) de forma que satisfaga cierta ecuación en la que aparece su primera derivada, y tome un valor dado en un instante dado (inicial), es decir,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(a) = \alpha,$$

donde t es la variable independiente con valores $a \leq t \leq b$.

Entre los métodos numéricos más frecuentes para resolver este problema se encuentran los llamados métodos de discretización, que consisten en encontrar los valores aproximados de la función y en $n + 1$ puntos equidistantes $\{t_k\}$ del intervalo $[a, b]$ (llamaremos h a la longitud de cada subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$). Recuerda que $y(t_k)$ representa el valor exacto de la solución en t_k, mientras que y_k es el valor aproximado de la solución al aplicar un método numérico. El método más simple es el método de Euler según el cual

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Ejercicio 4 *Implementa una función* **`euler`** *que, dada una función* **`f(t,y)`**, *un intervalo definido por sus extremos* **`a`** *y* **`b`**, *un valor $n \in \mathbb{N}$ (de forma que consideraremos $n + 1$ puntos esquiespaciados) y un valor inicial* **`y0`**, *devuelva las secuencias $\{t_k\}$ e $\{y_k\}$ que generan la poligonal que aproxima la solución de la ecuación diferencial ordinaria con valor inicial. Aplica esta función para aproximar la solución del siguiente problema:*

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

sobre el intervalo $[1, 2]$ con $n = 50$.

El error verdadero al aplicar un método de discretización es el máximo de los errores de truncatura, esto es, $\max\limits_k |y(t_k) - y_k|$.

Ejercicio 5 *La solución exacta del ejercicio anterior es $y(t) = \frac{t}{1+\ln t}$. Calcula el error verdadero y representa gráficamente la solución exacta y la aproximada.*