PROBLEMA 3.4. Determina bajo qué condiciones en $a,b \in \mathbb{R}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & ib \\ a & 0 & ib & 0 \\ 0 & ib & 0 & a \\ ib & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ es unitaria

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & -ib \\ a & 0 & -ib & 0 \\ 0 & -ib & 0 & a \\ -ib & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{\dagger}A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & ib \\ a & 0 & -ib & 0 \\ 0 & -ib & 0 & a \\ -ib & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & ib \\ a & 0 & ib & 0 \\ 0 & ib & 0 & a \\ ib & 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 4.1 Encuentra la base dual de $D = \{v_1 = (1\ 2\ 1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,1,1)\}$ en $\mathbb{R}^3$. Si $\beta \in (x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + x_3$, calcula las coordenadas de β en la base dual de D

$D = \mathrm{Env}(\{(1,2,1),(0,1,1),(1,1,1)\})$ sean $e^1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $e^2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $e^3: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$D^* = \mathrm{Env}(\{e^1, e^2, e^3 : e^i(v_j) = \delta_{ij} \ \forall v_j \in D\})$

$$(x,y,z) = \alpha(1,2,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,1) = (\alpha+\gamma, 2\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta+\gamma)$$

$$\begin{cases} x = \alpha+\gamma \\ y = 2\alpha+\beta+\gamma \\ z = \alpha+\beta+\gamma \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - \gamma \\ y = 2x - \gamma + z - x \\ \beta = z - x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - \gamma \\ \gamma = x + z - y \\ \beta = y - x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = y - z \\ \beta = z - x \\ \gamma = x - y + z \end{cases}$$

- $e^1(x,y,z) = e^1(\alpha e_1, \beta e_2, \gamma e_3) \overset{\text{linearidad}}{=} \alpha \cancel{e^1 e_1}^{1} + \beta \cancel{e^1 e_2}^{0} + \gamma \cancel{e^1 e_3}^{0} = \alpha = y - z$
- $e^2(x,y,z) = e^2(\alpha e_1, \beta e_2, \gamma e_3) = \alpha \cancel{e^2 e_1}^{0} + \beta \cancel{e^2 e_2}^{1} + \gamma \cancel{e^2 e_3}^{0} = \beta = z - x$
- $e^3(x,y,z) = e^3(\alpha e_1, \beta e_2, \gamma e_3) = \alpha \cancel{e^3 e_1}^{0} + \beta \cancel{e^3 e_2}^{0} + \gamma \cancel{e^3 e_3}^{1} = \gamma = x - y + z$

$$\Rightarrow \boxed{D^* = \mathrm{Env}(\{(0,1,-1),(-1,0,1),(1,-1,1)\})}$$

$$\beta^* = (P_{D^*}^{D})^T \beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2x_1 - x_3 \qquad \boxed{\beta^*(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_3}$$

PROBLEMA 4.2 Encuentra la base dual de $D = \{1, x+1, x^2-2, x^3-x^2\}$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$

$D^* = \mathrm{Env}(\{e^1, e^2, e^3, e^4 : e^i(v_j) = \delta_{ij} \ \forall v_j \in D\})$ sean $e^1: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ $e^2: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$

$a + bx + cx^2 + dx^3 = \alpha \cdot 1 + \beta(x+1) + \gamma(x^2-2) + \psi(x^3 - x^2)$ $\quad e^3: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ $e^4: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta - 2\gamma \\ b = \beta \\ c = \gamma - \psi \\ d = \psi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = b \\ \psi = d \\ c = \gamma - d \\ a = \alpha + b + 2d - 2c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = a - b + 2c - 2d \\ \beta = b \\ \gamma = c + d \\ \psi = d \end{cases}$$

$e^1(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^1(\alpha e_1, \beta e_2, \gamma e_3, \psi e_4) = \alpha \cancel{e^1 e_1}^{1} + \beta \cancel{e^1 e_2}^{0} + \gamma \cancel{e^1 e_3}^{0} + \psi \cancel{e^1 e_4}^{0} = \alpha = x_1 - x_2 x + 2x_3 x^2 - 2x_4 x^3$

$e^2(x_1 x_2 x_3 x_4) = \beta = x_2 x$ $\qquad e^3(x_1 x_2 x_3 x_4) = \gamma = x_3 x^2 + x_4 x^3$ $\quad e^3(x_1 x_2 x_3 x_4) = x_4 x^3$

$D^* = \mathrm{Env}(\{(1,-1,2,-2),(0,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\})$

PROBLEMA 4.3 Sea $V=\mathbb{R}^3$, U la base canónica de V, se consideran las aplicaciones lineales:

$f_1(x_1x_2x_3)=x_1+x_2+x_3$ $\quad f_2(x_1x_2x_3)=x_2$ $\quad f_3(x_1x_2x_3)=x_1+x_2$ $\quad$ Se pide:

1. Demuestra que $\{f_1,f_2,f_3\}$ es una base de V^*.

$\{f_1,f_2,f_3\}=Env(\{(1\,1\,1),(0\,1\,0),(1\,1\,0)\})$ $\quad Dim(V)=Dim(V^*)=3=Dim(\{f_1,f_2,f_3\})\Rightarrow\{f_1,f_2,f_3\}$ es un conjunto generador de todo el espacio de $\mathbb{R}^3\Rightarrow$ Basta mostrar que f_1, f_2 y f_3 son LI para demostrar que forman una base del dual del espacio $V=\mathbb{R}^3$

$\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\alpha_3f_3=0\Rightarrow\alpha_1(1\,1\,1)+\alpha_2(0\,1\,0)+\alpha_3(1\,1\,0)=0\Rightarrow\alpha_1+\alpha_3=0;\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0;\ \alpha_1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0\Rightarrow f_1,f_2$ y f_3 son linealmente independientes $\Rightarrow\{f_1,f_2,f_3\}$ es base de V^*

2. Calcula las coordenadas de f_1,f_2,f_3 respecto de la base U^* dual de U.

Las coordenadas de f_1,f_2,f_3 que tenemos son respecto de V^*, por lo que tenemos que hacer un cambio de base: $\quad f_{iU^*}=(P_{U^*}^{V^*})^T f_{iV^*}$ $\quad$ y $\quad P_{U^*}^{V^*}=(P_{V^*}^{U^*})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow f_{1U^*}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad f_{2U^*}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad f_{3U^*}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$f_{1U^*}(x_1x_2x_3)=(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=x_2$ $\quad f_{2U^*}(x_1x_2x_3)=(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=x_2-x_1$ $\quad f_{3U^*}(x_1x_2x_3)=(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=x_2+x_3-x_1$

3. Halla la base de V respecto a la cual $\{f_1,f_2,f_3\}$ es base dual.

Hemos de hallar la base D de V tal que $V=Env(\{(a_1a_2a_3),(b_1b_2b_3),(c_1c_2c_3)\})=Env(\{v_1v_2v_3\})$ y $\{f_1,f_2,f_3\}$ sea base de $V^*\Rightarrow f_i(v_j)=\delta_{ij}\Rightarrow$

$\begin{cases}f_1(a_1a_2a_3)=1\Leftrightarrow a_1+a_2+a_3=1\Rightarrow\boxed{a_3=1}\\ f_2(a_1a_2a_3)=0\Leftrightarrow\boxed{a_2=0}\Rightarrow v_1=(0,0,1)\\ f_3(a_1a_2a_3)=0\Leftrightarrow a_1+a_2=0\Rightarrow\boxed{a_1=0}\end{cases}$ $\quad\begin{cases}f_1(b_1b_2b_3)=0\Leftrightarrow b_1+b_2+b_3=0\\ f_2(b_1b_2b_3)=1\Leftrightarrow\boxed{b_2=1}\Rightarrow v_2=(-1\,1\,0)\\ f_3(b_1b_2b_3)=0\Leftrightarrow b_1+b_2=0\Rightarrow\boxed{b_1=-1}\end{cases}$

$\begin{cases}f_1(c_1c_2c_3)=0\Leftrightarrow c_1+c_2+c_3=0\Rightarrow\boxed{c_3=-1}\\ f_2(c_1c_2c_3)=0\Leftrightarrow\boxed{c_2=0}\Rightarrow v_3=(1\,0\,-1)\\ f_3(c_1c_2c_3)=1\Leftrightarrow c_1+c_2+c_3=1\Rightarrow\boxed{c_1=1}\end{cases}$ $\quad D=\{(0\,0\,1),(-1\,1\,0),(1\,0\,-1)\}$

PROBLEMA 4.4 Sea V un espacio vectorial real de dimensión 2. Sea $\mathcal{V}=\{\bar{v}_1,\bar{v}_2\}$ una base de V y sea $\mathcal{V}^*=\{\gamma^1,\gamma^2\}$ la base dual de $\mathcal{V}$. Consideremos $\beta^1=\gamma^1-\gamma^2$ y $\beta^2=2\gamma^1$

1. Calcula el producto tensorial $\beta^1\otimes\beta^2$

$$\beta^1\otimes\beta^2=(\gamma^1-\gamma^2)\otimes 2\gamma^1=\gamma^1\otimes 2\gamma^1-\gamma^2\otimes 2\gamma^1=2(\gamma^1\otimes\gamma^1-\gamma^2\otimes\gamma^1)=$$
$$=2\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\-2&0\end{pmatrix}$$

2. Calcula el producto tensorial $\beta^2\otimes\beta^1$

$$\beta^2\otimes\beta^1=(2\gamma^1)\otimes(\gamma^1-\gamma^2)=2\gamma^1\otimes\gamma^1-2\gamma^1\otimes\gamma^2=2(\gamma^1\otimes\gamma^1-\gamma^1\otimes\gamma^2)=$$
$$=2\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\0&0\end{pmatrix}$$

3. Compara los resultados de los apartados anteriores

Lo que varía entre $\beta^1\otimes\beta^2$ y $\beta^2\otimes\beta^1$ es la componente que va con γ^2 ya que en la primera tenemos $\gamma^1\otimes\gamma^2$ y en la segunda $\gamma^2\otimes\gamma^1$ por lo que las matrices resultantes son iguales siempre que se transponga una de ellas.

PROBLEMA 4.5 Sea $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f((x_1x_2x_3),(y_1y_2y_3))=x_1y_1$

1. ¿Es f un tensor?

Un tensor de tipo (p,q) es una aplicación multilineal $T:\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{p}\times\overbrace{V\times\cdots\times V}^{q}\longrightarrow\mathbb{R}$ lineal en cada uno de sus argumentos. Vamos a verificar la linealidad:

$f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y},\bar{z})=(\alpha x_1+\beta y_1)z_1=\alpha x_1z_1+\beta y_1z_1=\alpha f(\bar{x},\bar{z})+\beta f(\bar{y},\bar{z})\Rightarrow$ es lineal en la 1ª comp

y como $f(\bar{x},\bar{y})=x_1y_1=f(\bar{y},\bar{x})$ f es bilineal $\Rightarrow$ f es lineal en todas sus componentes $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f es un tensor.

2. ¿De qué tipo?

Al ser un tensor de tipo (p,q) una aplicación multilineal que toma p vectores contravariantes y q vectores covariantes y se los lleva a $\mathbb{R}$, podemos afirmar que este tensor es de tipo $(0,2)$ y por tanto es una aplicación bilineal.

3. Halla sus coordenadas respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$

sea $U=\{e_1,e_2,e_3\}=\{(100),(010),(001)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{matrix}f(e_1e_1)=1 & f(e_1e_2)=0 & f(e_1e_3)=0\\ f(e_2e_1)=0 & f(e_2e_2)=0 & f(e_2e_3)=0\\ f(e_3e_1)=0 & f(e_3e_2)=0 & f(e_3e_3)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow M_f(\mathbb{R}^3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

PROBLEMA 4.6 Sea $f:(\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\bar\beta,\bar v)=\beta_2 v_2$

1. ¿Es f un tensor?

Un tensor (p,q) es una aplicación multilineal $T: \overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{p}\times\overbrace{V\times\cdots\times V}^{q}\to\mathbb{R}$ lineal en todos sus argumentos.

$f(\alpha\bar u+\beta\bar v,\bar w)=(\alpha u_2+\beta v_2)w_2=\alpha u_2 w_2+\beta v_2 w_2=\alpha f(\bar u,\bar w)+\beta f(\bar v,\bar w) \Rightarrow$ f es lineal en la 1ª comp.

Y como $f(\bar u,\bar v)=u_2 v_2=f(\bar v,\bar u) \Rightarrow$ f es lineal en todas sus componentes $\Rightarrow$ f es un tensor □

2. ¿De qué tipo?

Como un tensor de tipo (p,q) toma p vectores contravariantes y q vectores covariantes, y los lleva a $\mathbb{R}$, entonces nuestro tensor f es de tipo (1,1).

3. Halla sus coordenadas respecto a la base $D=\{(1,1),(0,1)\}=\{v_1,v_2\}$

Dual de $D=\{(1,1),(0,1)\}$ si $\beta^i(v_j)=\delta_{ij}$ $\qquad \beta^1=(a\ b) \quad \beta^2=(c\ d)$

$\beta^1(v_1)=1 \Rightarrow (a\ b)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1 \Rightarrow a+b=1 \Rightarrow \boxed{a=1}$ $\qquad \Rightarrow \beta^1=(1\ 0) \quad \beta^2=(-1\ 1)$

$\beta^1(v_2)=0 \Rightarrow (a\ b)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$

$\beta^2(v_1)=0 \Rightarrow (c\ d)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow c+d=0 \Rightarrow \boxed{c=-1}$ $\qquad M_f(D)=\begin{pmatrix} f(\beta^1,v_1) & f(\beta^1,v_2)\\ f(\beta^2,v_1) & f(\beta^2,v_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$

$\beta^2(v_2)=1 \Rightarrow (c\ d)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1 \Rightarrow \boxed{d=1}$

PROBLEMA 4.7 Sea $T:(\mathbb{R}^3)^*\times(\mathbb{R}^3)^*\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(\alpha,\beta,\bar v)=\alpha(\beta(\bar v),\beta(\bar v),2\beta(\bar v))$

1. ¿Es T un tensor?

Un tensor (p,q) es una aplicación multilineal $T: \overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{p}\times\overbrace{V\times\cdots\times V}^{q}\to\mathbb{R}$ que es lineal en todas sus componentes. $T(\alpha u+\beta v, w, a)=(\alpha u+\beta v)(w(a),w(a),2w(a))=$

$=\alpha u(w(a),w(a),2w(a))-\beta v(w(a),w(a),2w(a))=\alpha T(u,w,a)-\beta T(v,w,a)\Rightarrow$

T es lineal en la 1ª componente $\quad T(u,\alpha v+\beta w,a)=u((\alpha v+\beta w)(a),(\alpha v+\beta w)(a),2(\alpha v+\beta w)(a))=$

$=u(\alpha v(a)+\beta w(a),\alpha v(a)+\beta w(a),2\alpha v(a)+2\beta w(a))=u(\alpha v(a),\alpha v(a),2\alpha v(a))+$

$+u(\beta w(a),\beta w(a),2\beta w(a))-\alpha u(v(a),v(a),2v(a))+\beta u(w(a),w(a),2w(a))=$

$=\alpha T(u,v,a)+\beta T(u,w,a) \Rightarrow$ T es lineal en la 2ª componente.

$T(u,v,\alpha a+\beta b)=u(v(\alpha a+\beta b),v(\alpha a+\beta b),2v(\alpha a+\beta b))=u(\alpha v(a)+\beta v(b),\alpha v(a)+\beta v(b),2\alpha v(a)+\dots)$

$=\alpha u(v(a),v(a),2v(a))+\beta u(v(b),v(b),2v(b))=\alpha T(u,v,a)+\beta T(u,v,b) \Rightarrow$ T es lineal en la 3ª componente $\Rightarrow$ T es un tensor □

2. ¿De qué tipo?

Como un tensor de tipo (p,q) tiene p vectores contravariantes y q vectores covariantes de entrada y los lleva a $\mathbb{R}$, podemos decir que T es de tipo (2,1).

3. Halla sus coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$

Sea $\mathcal{D}$ base de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{D} = \{(1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,1\,0)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$

entonces $\alpha^i(v_j) = \delta_{ij}$ y $\beta^i(v_j) = \delta_{ij} \longrightarrow$

$$\alpha^1 = (a_1\, b_1\, c_1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha^1(v_1) = 1 \Leftrightarrow (a_1, b_1, c_1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1} \\ \alpha^1(v_2) = 0 \Leftrightarrow (a_1, b_1, c_1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = 0} \\ \alpha^1(v_3) = 0 \Leftrightarrow (a_1, b_1, c_1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha^1 = (1\,0\,0)$$

$$\alpha^2 = (a_2\, b_2\, c_2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha^2(v_1) = 0 \Leftrightarrow (a_2\, b_2\, c_2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0} \\ \alpha^2(v_2) = 1 \Leftrightarrow (a_2\, b_2\, c_2)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \boxed{b_2 = 1} \\ \alpha^2(v_3) = 0 \Leftrightarrow (a_2\, b_2\, c_2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = 0} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha^2 = (0\,1\,0)$$

$$\alpha^3 = (a_3\, b_3\, c_3) = (0\,0\,1)$$

$$\beta^1 = (d_1\, e_1\, f_1) = (1\,0\,0) \quad \beta^2 = (d_2\, e_2\, f_2) = (0\,1\,0) \quad \beta^3 = (d_3\, e_3\, f_3) = (0\,0\,1)$$

$$\cancel{M_T(b) = \begin{pmatrix} T(\alpha^1,\beta^1,v_1) & T(\alpha^1,\beta^2,\ ) & T(\alpha^1,\beta^3,\ ) \\ T(\alpha^2,\beta^1,\ ) & T(\alpha^2,\beta^2,v_2) & T(\alpha^2,\beta^3,\ ) \\ T(\alpha^3,\beta^1,\ ) & T(\alpha^3,\beta^2,\ ) & T(\alpha^3,\beta^3,v_3) \end{pmatrix}}$$

$$T^{ij}{}_k = \left(\begin{pmatrix} T(\alpha^1,\beta^1,v_1) & T(\alpha^1,\beta^1,v_2) & T(\alpha^1,\beta^1,v_3) \\ T(\alpha^1,\beta^2,v_1) & T(\alpha^1,\beta^2,v_2) & T(\alpha^1,\beta^2,v_3) \\ T(\alpha^1,\beta^3,v_1) & T(\alpha^1,\beta^3,v_2) & T(\alpha^1,\beta^3,v_3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T(\alpha^2,\beta^1,v_1) & T(\alpha^2,\beta^1,v_2) & T(\alpha^2,\beta^1,v_3) \\ T(\alpha^2,\beta^2,v_1) & T(\alpha^2,\beta^2,v_2) & T(\alpha^2,\beta^2,v_3) \\ T(\alpha^2,\beta^3,v_1) & T(\alpha^2,\beta^3,v_2) & T(\alpha^2,\beta^3,v_3) \end{pmatrix}, T(\alpha^3,\beta^3,v_3) \right)$$

$$\cancel{= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

4. Halla las coordenadas de T respecto de la base $\mathcal{D} = \{(1\,1\,0), (0\,1\,-1), (1\,-1\,0)\}$

$$T^{ij}{}_{k\mathcal{D}} = \left((P_{\mathcal{D}}^{\mathbb{R}^3})^T T^{1j}{}_{k\mathbb{R}^3} P_{\mathcal{D}}^{\mathbb{R}^3}, (P_{\mathcal{D}}^{\mathbb{R}^3})^T T^{2j}{}_{k\mathbb{R}^3} P_{\mathcal{D}}^{\mathbb{R}^3}, (P_{\mathcal{D}}^{\mathbb{R}^3})^T T^{3j}{}_{k\mathbb{R}^3} P_{\mathcal{D}}^{\mathbb{R}^3} \right) \text{ con}$$

$$P_{\mathcal{D}}^{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{ij}{}_{k\mathcal{D}} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$