Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tema II: Electrostática en el vacío

Electromagnetismo I

2º Curso Grado Física

Curso 2021-2022 (2º semestre)

Universidad de Alicante – Departamento de Física Aplicada

Índice

1. Introducción: perspectiva histórica

- Civilización Griega: Ámbar (elektron)
- 1600 William Gilbert: Materiales eléctricos
- XVIII S. Gray, C. du Fay y B. Franklin: La electricidad se transfiere, interacción atractiva y repulsiva, electricidad positiva y negativa
- 1785 Charles A. Coulomb: Ley de Coulomb
- XIX Michael Faraday: pequeños corpúsculos cargados
- 1897 J.J. Thomson: descubrimiento del electrón

1. Introducción: La carga eléctrica

Propiedades fundamentales de la materia:

- Masa
- **Carga eléctrica** (origen en la estructura atómica: electrones, protones y neutrones)
- Spin

$\Rightarrow$ Principio de conservación de la carga | Neutralidad

Carga eléctrica neta (electrización)

$\Rightarrow$ La carga eléctrica está cuantizada | Múltiplo entero del valor absoluto de la carga del electrón

$$q = \pm\, n\, |e|; \qquad |e| \text{ (unidad de carga fundamental)}$$

Unidad SI: Culombio (C)

$1\ e = 1.60 \times 10^{-19}$ C

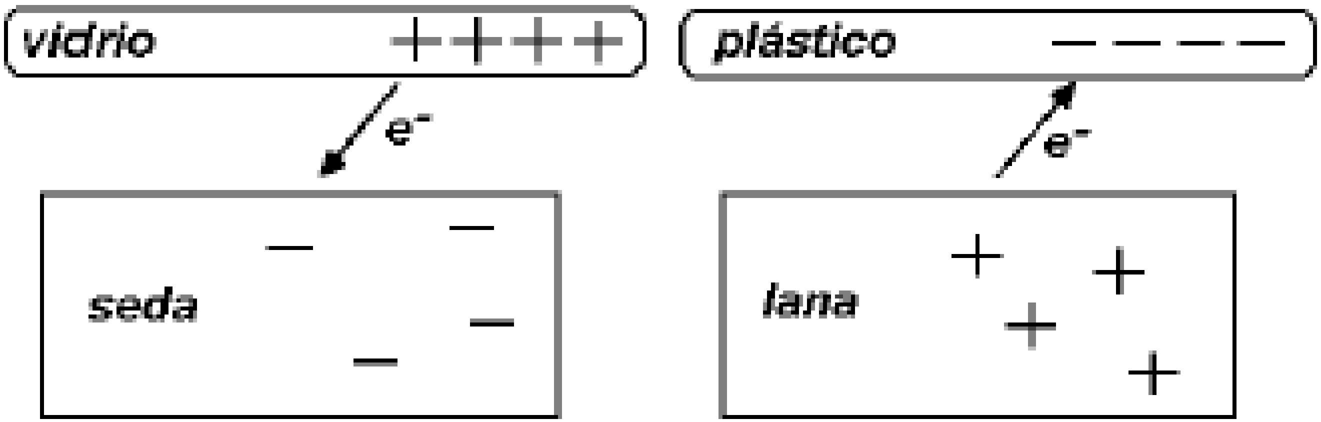
$1\ \mathrm{C} = 6.25 \times 10^{18}\ e$

Electrización normal

1μC-1nC

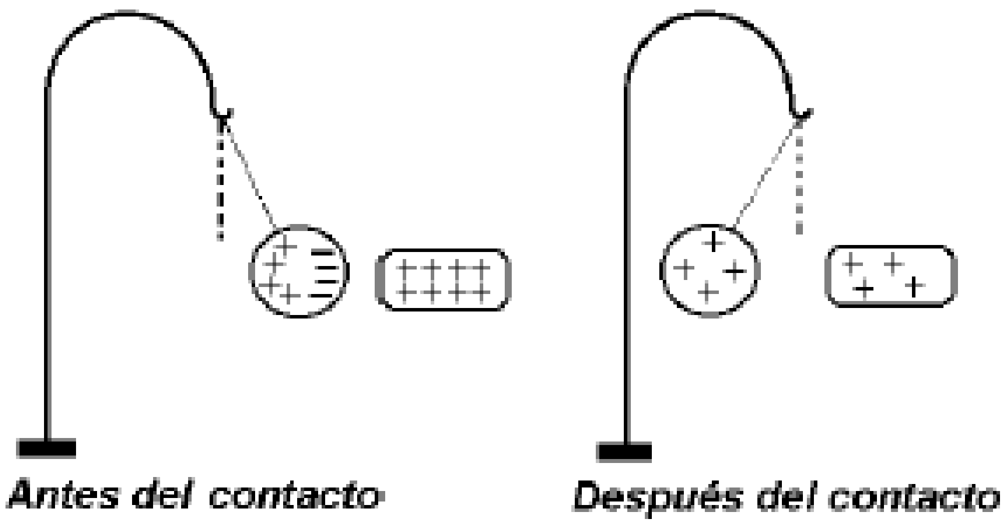
Electrización

<u>Electrización por frotamiento</u>



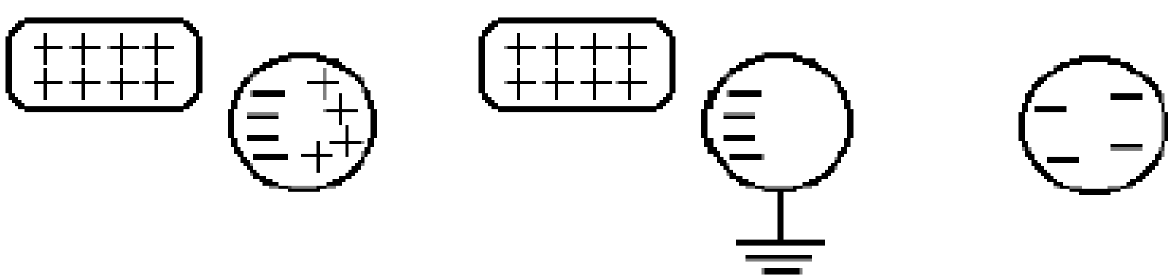
Materiales conductores
Materiales aislantes o dieléctricos
Materiales semiconductores

Electrización por contacto



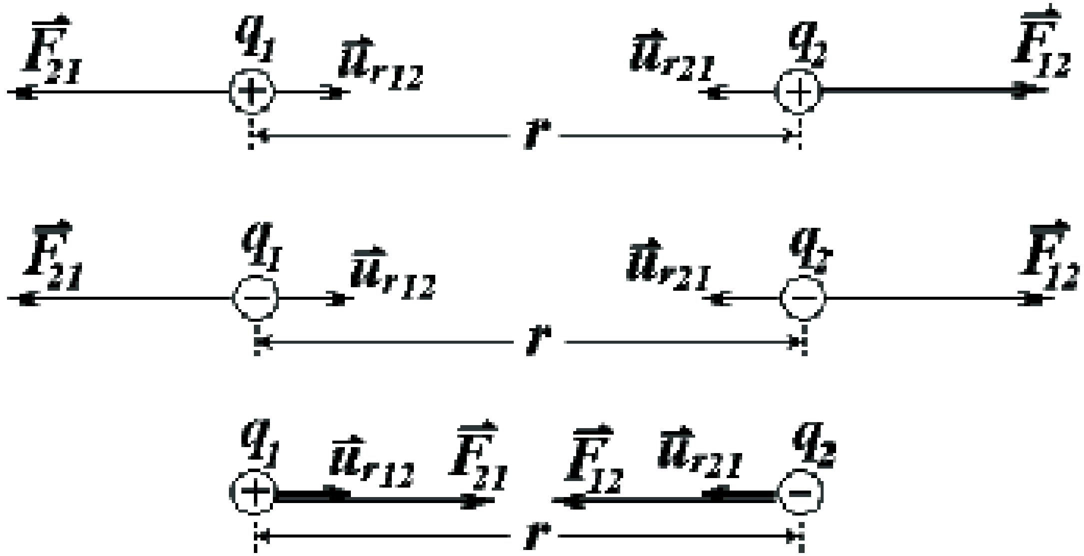
Fenómeno de polarización

Electrización por inducción en materiales conductores



2. Ley de Coulomb: Fuerza electrostática entre dos cargas discretas.

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$



Módulo $\quad F = K \dfrac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}$

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

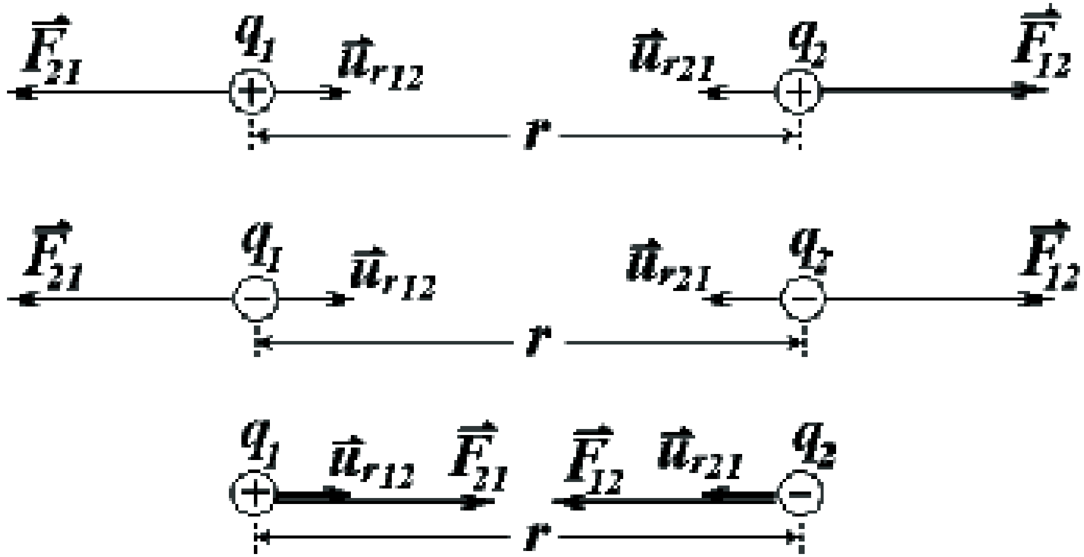
- $\vec{u}_{12}$ es un vector unitario dirigido según la recta que une las cargas y de sentido de la carga que ejerce la fuerza hacia la carga que experimenta dicha fuerza.

NOTACIÓN del libro Wangsness: Vector que une las dos cargas $\quad \vec{R} = \boldsymbol{R}$

$$\vec{F} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

Módulo $$F = K \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}$$

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$



- La fuerza ejercida entre cargas distribuidas en cuerpos voluminosos es la misma que actuaría si los cuerpos tuvieran su carga concentrada en su centro y la distancia fuera entre ambos puntos (carga puntual).

- Las fuerzas electrostáticas que actúan sobre cada una de las partículas cargadas, $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$, forman un par de fuerzas de acción y reacción, por lo que su dirección es la de la recta que une sus centros y su sentido es de atracción si las cargas tienen distinto signo y de repulsión si las cargas tienen el mismo signo

$$\vec{F} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

- *K* es la cte eléctrica que depende del medio en el que se sitúan las cargas. A veces esta cte se define en función de otra cte ε, llamada permitividad o cte dieléctrica del medio. El valor de *K* más alto corresponde al vacío. Su menor valor en cualquier otro medio indica que el en medio material disminuye la interacción eléctrica entre cargas.

$$K = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}$$

Valores de ε y K para distintos medios a 20°C (unidades SI).		
Medio	ε $(C^2N^{-1}m^{-2})$	$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ (Nm^2C^{-2})
Vacío	$8{,}854\cdot10^{-12}$	$9\cdot10^{9}$
Aire	$8{,}859\cdot10^{-12}$	$\approx9\cdot10^{9}$
Poliestireno	$2{,}267\cdot10^{-11}$	$3{,}5\cdot10^{9}$
Papel	$3{,}276\cdot10^{-11}$	$\approx2{,}4\cdot10^{9}$
Vidrio pirex	$4{,}958\cdot10^{-11}$	$1{,}6\cdot10^{9}$
Porcelana	$6{,}198\cdot10^{-11}$	$\approx1{,}3\cdot10^{9}$
Agua	$7{,}083\cdot10^{-10}$	$1{,}1\cdot10^{8}$

Principio de superposición para cargas discretas:

Fuerza ejercida sobre una carga q por un sistema de N cargas q_i, con i = 1….N

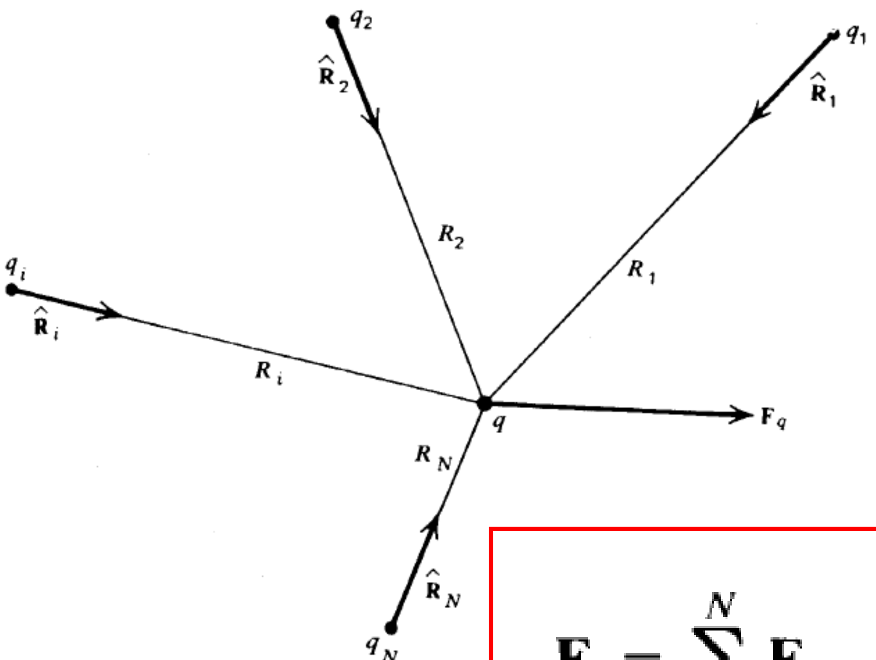
NOTACIÓN del libro Wangsness:

El **vector** que une la carga que experimenta la fuerza *q* con la carga que la crea q_i, donde i = 1….N

$$\vec{R}_i = \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i$$

$\boldsymbol{r}_i$ → Vector de posición de la carga q_i

$\boldsymbol{r}$ → Vector de posición de la carga *q*



Módulo $\left|\vec{R}_i\right| = R_i = \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i\right|$

Vector unitario $\hat{\boldsymbol{R}}_i = \dfrac{\boldsymbol{R}_i}{R_i}$

$$\boxed{\mathbf{F}_q = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{q_i \to q} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q q_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q q_i \mathbf{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3}}$$

Coordenadas cartesianas: Se puede obtener una fórmula explicita para la fuerza

$$\mathbf{F}_q = \sum_{i=1}^{N} \frac{q q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[(x-x_i)\hat{\mathbf{x}} + (y-y_i)\hat{\mathbf{y}} + (z-z_i)\hat{\mathbf{z}}\right]}{\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right]^{3/2}}$$

Con ella se puede calcular la fuerza si se conocen las cargas y sus posiciones en un sistema de coordenadas cartesiano.

Distribución continua de cargas:

Si las cargas están tan juntas en comparación a las distancias de interés, se puede considerar que están distribuidas homogéneamente. La cantidad contenida en un elemento diferencial de espacio será *dq´* se puede suponer como puntual. En este caso la fuerza se puede obtener:

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq' \hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

Según sea la región del espacio en la que se encuentra distribuida la carga: un volumen V´, en 3D; una superficie S´, en 2D; o una línea L´, en 1D. Podemos definir densidades de carga

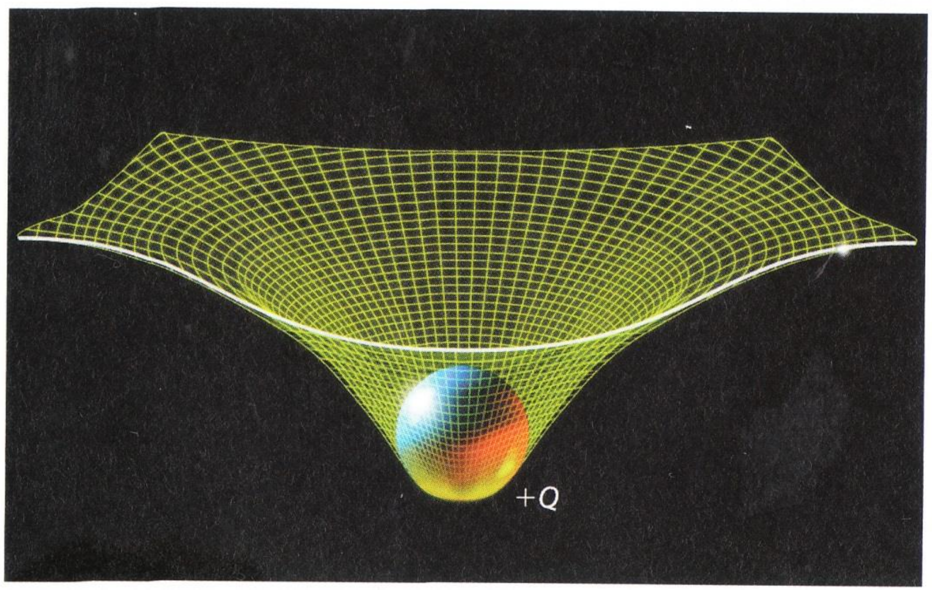
Densidad de carga volúmica $\rho = \frac{dq'}{d\tau'}$ $\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\, d\tau'}{R^2}$

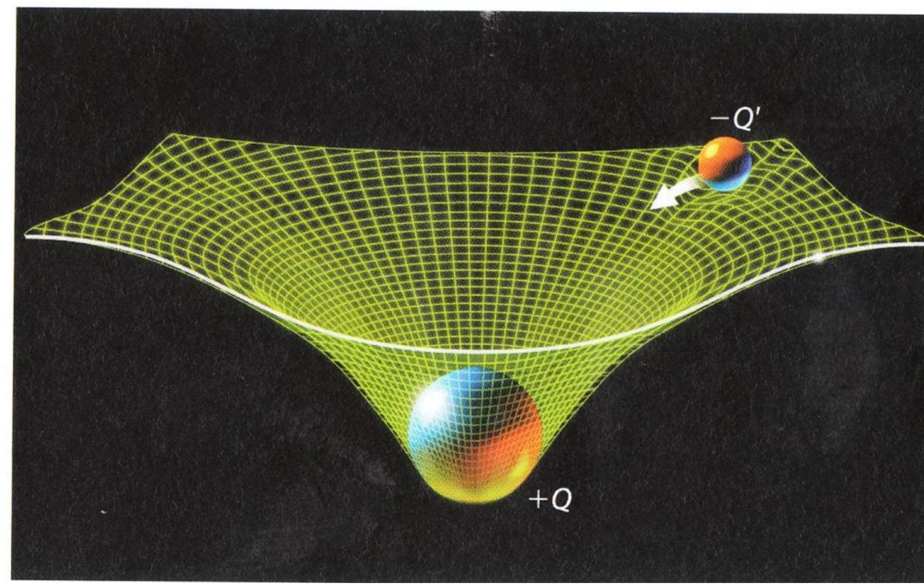
Densidad de carga superficial $\sigma = \frac{dq'}{da'}$ $\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\, da'}{R^2}$

Densidad de carga lineal $\lambda = \frac{dq'}{ds'}$ $\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\, ds'}{R^2}$

3. Campo eléctrico y potencial electrostático

Una carga *Q* modifica de algún modo el espacio. A este espacio perturbado por la carga se llama campo eléctrico, y se considera que actúa sobre cualquier otra carga eléctrica, *q*, ejerciendo la fuerza electrostática sobre ella, según establece la ley de Coulomb.





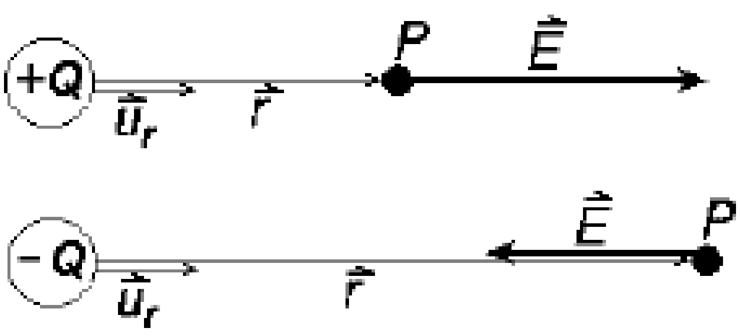
Descripción del campo eléctrico en distribuciones discretas de carga

3.1 Perspectiva dinámica: fuerza e intensidad de campo

La fuerza electrostática no sirve para caracterizar el campo, pues su valor en un punto depende de la carga *q* colocada en el mismo.

La intensidad de campo eléctrico creado por una carga eléctrica Q en un punto representa la fuerza que actuaría sobre la unidad de carga colocada en dicho punto.

Cada punto del espacio queda caracterizado por el valor de



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r; \qquad \vec{F} = q \cdot \vec{E};$$

(Unidad Si: N/C ó V/m)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r; \quad \vec{F} = q \cdot \vec{E};$$

- Independiente de la carga que se coloque en el punto.
- Dependiente de la carga, *Q*, que lo crea y de la distancia *r* al punto.
- El sentido del campo depende del signo de la carga *Q* que lo crea. El campo se aleja de carga positiva y va hacia la carga negativa.

Principio de superposición: al ser un vector, el campo eléctrico creado en un punto por varias cargas es la composición vectorial de los campos individuales generados en ese punto por cada una de ellas.

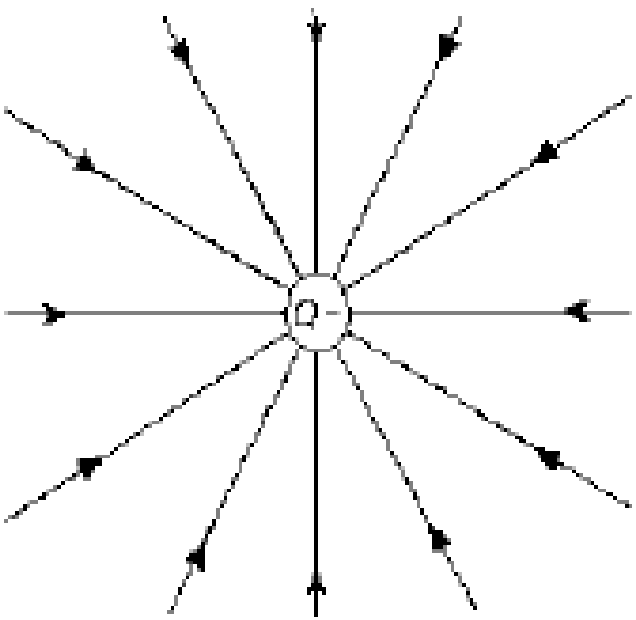
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

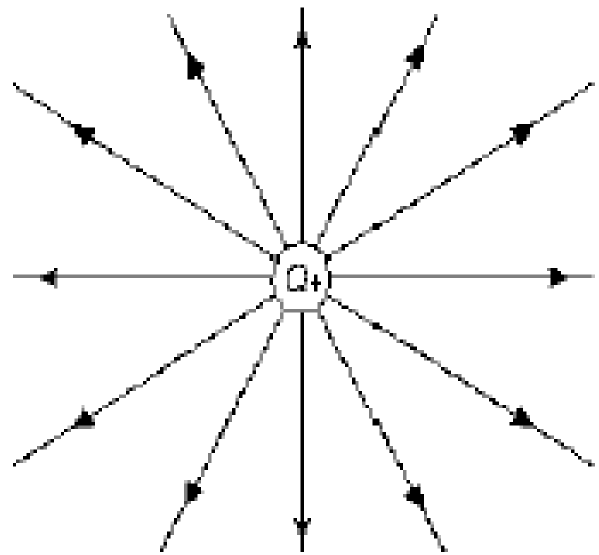
Representación del campo eléctrico mediante líneas de campo

- Dirección: radial, su dirección coincide con la dirección de $\vec{E}$ en cada punto. No se cortan.

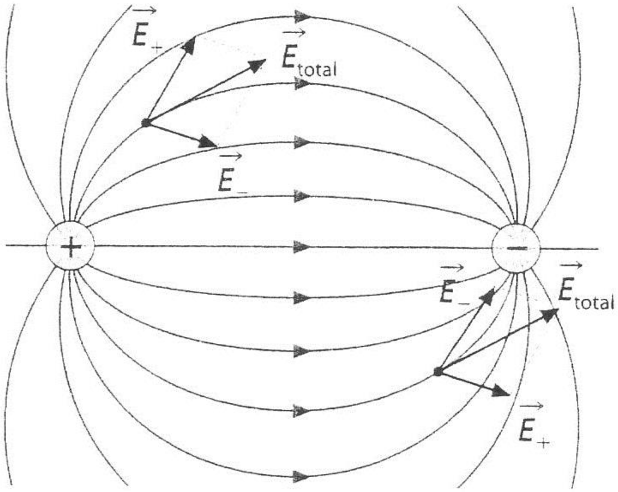
- Sentido: Si +Q hacia fuera, si –Q hacia la carga

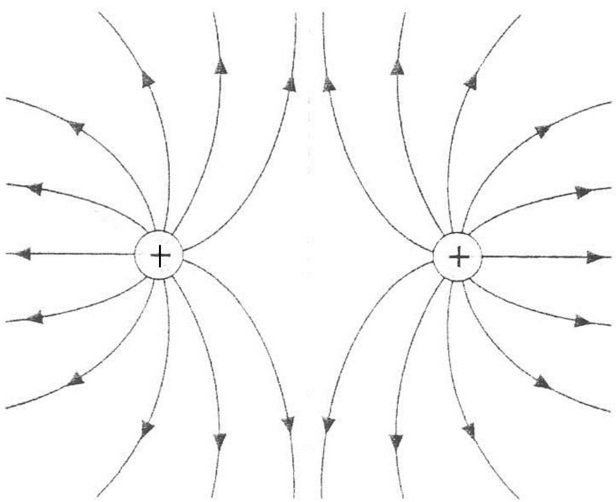
- Módulo: el número de líneas es proporcional al $\left|\vec{E}\right|$ y por tanto proporcional a *Q*





- Si hay más de una carga, el campo en un punto surge de la aplicación del principio de superposición. Las líneas dejan de ser simétricas y radiales





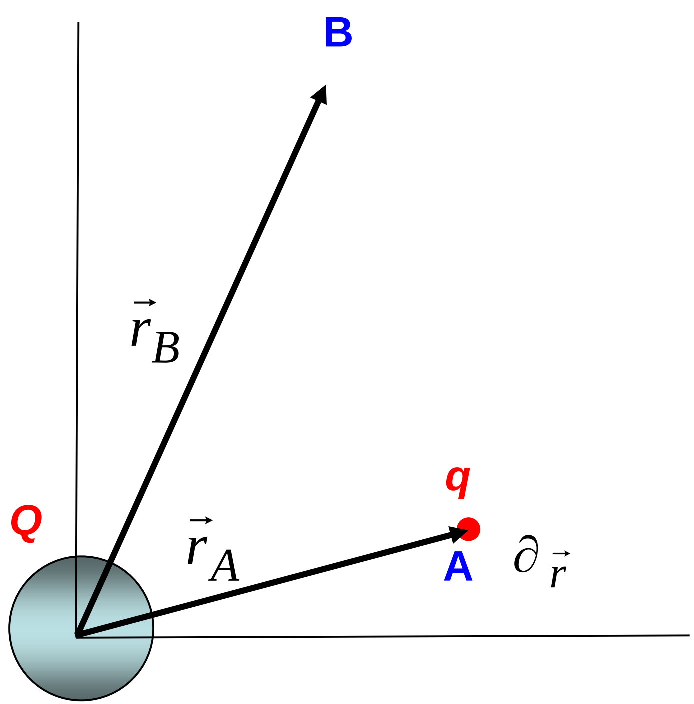
Campos eléctricos en la Naturaleza

	E, N/C
En los cables domésticos	10^{-2}
En las ondas de la radio	10^{-1}
En la atmósfera	10^{2}
En la luz solar	10^{3}
Bajo una nube tormentosa	10^{4}
En la descarga de un relámpago	10^{4}
En un tubo de rayos X	10^{6}
En el electrón de un átomo de hidrógeno	6×10^{11}
En la superficie de un núcleo de uranio	6×10^{21}

3.2 Perspectiva energética: energía potencial y potencial

<u>Ley de la energía potencial</u>

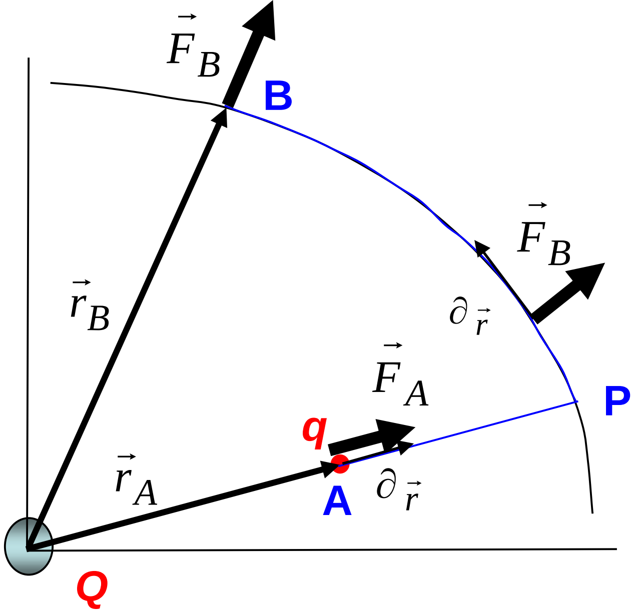
Fuerza electrostática (Central y conservativa)	$\Rightarrow$	Energía potencial electrostática (Magnitud escalar que solo depende de la posición)



El trabajo realizado por la fuerza electrostática para trasladar una carga *q* desde un punto A a otro B del campo creado por otra carga *Q* es igual a la diferencia de valores que toma dicha función escalar entre dichos puntos

$$W_{A\to B} = -\nabla E_p = -\left(E_{pB} - E_{pA}\right) =$$

$$= -E_{pB} + E_{pA} = E_{pA} - E_{pB}$$



El trabajo realizado por la fuerza es independiente del camino seguido

$$W_{A\rightarrow B} = W_{A\rightarrow P} + W_{P\rightarrow B} = W_{A\rightarrow P} =$$

$$\int_A^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^P K \frac{Qq}{r^2}\, dr\, \cos(0^\circ) =$$

$$\left[-K \frac{Qq}{r} \right]_A^P = -K \frac{Qq}{r_P} + K \frac{Qq}{r_A};$$

Tramo $A \rightarrow P$ ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{r}$ 180°

Tramo $P \rightarrow B$ ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{r}$ 90°

$r_P = r_B$

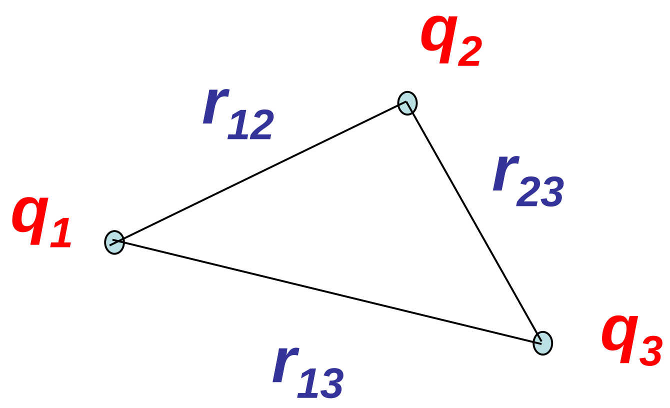
$$-K \frac{Qq}{r_B} + K \frac{Qq}{r_A} = -E_{pB} + E_{pA}$$

La energía potencial electrostática de una carga q colocada a una distancia r de la carga Q creadora del campo eléctrico es igual a:

$$E_p = K \frac{Qq}{r}$$ (unidad SI: J, eV)

Energía potencial para un sistema de varias cargas

La energía potencial del sistema es la suma de las energías potenciales de todos los pares distintos de cargas que se puedan formar.



$$E_{Ptotal} = E_{P12} + E_{P23} + E_{P13} = -K\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}}\right)$$

La energía potencial no caracteriza el campo, pues su valor en un punto depende de la carga *q* colocada en el mismo.

$$V = \frac{E_p}{q} = K \frac{Q}{r}$$

Unidad SI: J/C ó V

NOTACIÓN EN WANGSNESS

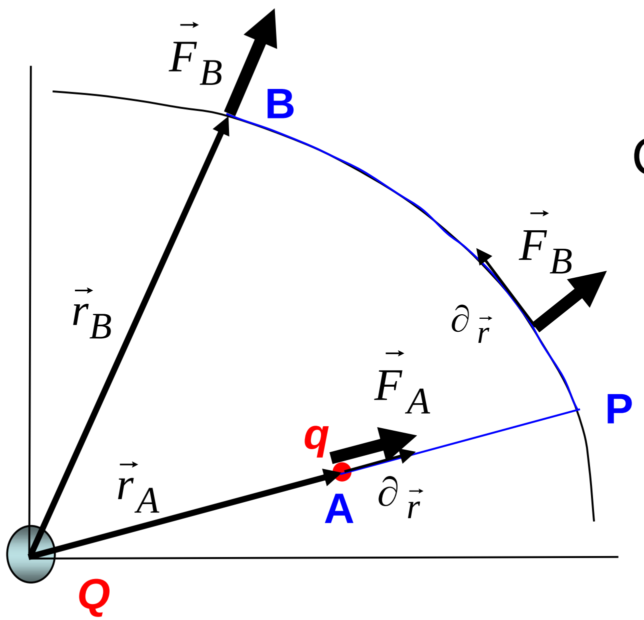
A V se le llama ϕ

El potencial del campo en un punto será la energía potencial que corresponde a la unidad de carga testigo positiva colocada en ese punto.

- Si la carga que origina el campo es positiva, el potencial en cualquier punto es positivo
- Si la carga que origina el campo es negativa, el potencial en cualquier punto es negativo

En el caso de varias cargas puntuales, el potencial en un punto debido a todas ellas es la suma algebraica de todos los potenciales

Diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico



$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Como el campo es conservativo

$$W_{A\to B} = -\nabla E_p = -\left(E_{pB} - E_{pA}\right)$$

Si igualamos

$$q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\left(E_{pB} - E_{pA}\right)$$

$$-\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{\left(E_{pB} - E_{pA}\right)}{q} = V_B - V_A$$

La diferencia de potencial es el trabajo realizado en contra del campo para desplazar la carga desde el punto A al B sin variar su energía cinética

3.3 Relaciones fuerza-energía potencial e intensidad de campo-potencial

Magnitudes que definen el campo

- Intensidad del campo en un punto (perspectiva dinámica)
- Potencial del campo en un punto (perspectiva energética)

Magnitudes inherentes a la interacción del campo con una partícula de una determinada carga

- Fuerza que actúa sobre el cuerpo como medida de la interacción (perspectiva dinámica)
- Energía potencial del cuerpo asociada a su posición relativa en el campo (perspectiva energética)

Relaciones fuerza-energía potencial e intensidad de campo-potencial

FUERZA
Magnitud vectorial

$$\boxed{\vec{F} = K\vec{E}} = K\frac{qQ}{r^2}\vec{u}_r = q\left(K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -gradE_P = -\nabla E_P}$$

ENERGÍA POTENCIAL
Magnitud ESCALAR

$$\boxed{E_p = qV} = K\frac{qQ}{r} = q\left(K\frac{Q}{r}\right)$$

INTENSIDAD de CAMPO
Magnitud vectorial

Se representa con líneas de campo

$$\boxed{\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r}$$

$$\boxed{\vec{E} = -gradV = -\nabla V}$$

POTENCIAL
Magnitud ESCALAR

Se representa con superficies equipot.

$$\boxed{V = K\frac{G}{r}}$$

MAGNITUDES QUE DESCRIBEN LA INTERACCIÓN DE UNA CARGA *q* CON EL CAMPO CREADO POR *Q*

MAGNITUDES QUE DEFINEN EL CAMPO DE FUERZAS CREADO POR *Q*

Magnitudes vectoriales: Fuerza electrostática e intensidad del campo eléctrico
Magnitudes escalares: Energía potencial eléctrico y potencial eléctrico

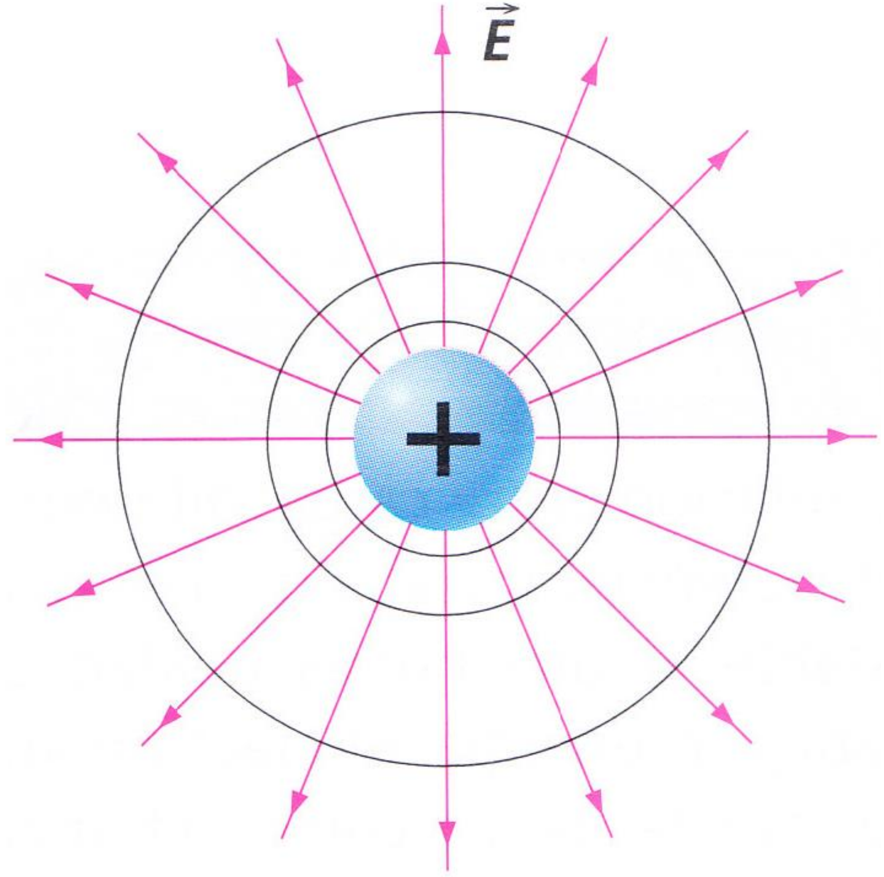
$$\vec{F} = -\left(\frac{\delta Ep}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta Ep}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta Ep}{\delta z}\vec{k} \right) = -\,grad\;\, E_P = -\nabla\, E_P$$

$$dE_P = -F\;\, dr\,, \qquad \int_A^B dE_P = -\int_A^B \vec{F}\;\, d\vec{r} = -W_{A\to B}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\delta V}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta V}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta V}{\delta z}\vec{k} \right) = -\,grad\;\, V = -\nabla\, V$$

$$dV = -\vec{E}\;\, d\vec{r}\,, \qquad \int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E}\;\, d\vec{r} = -\frac{W_{A\to B}}{q}$$

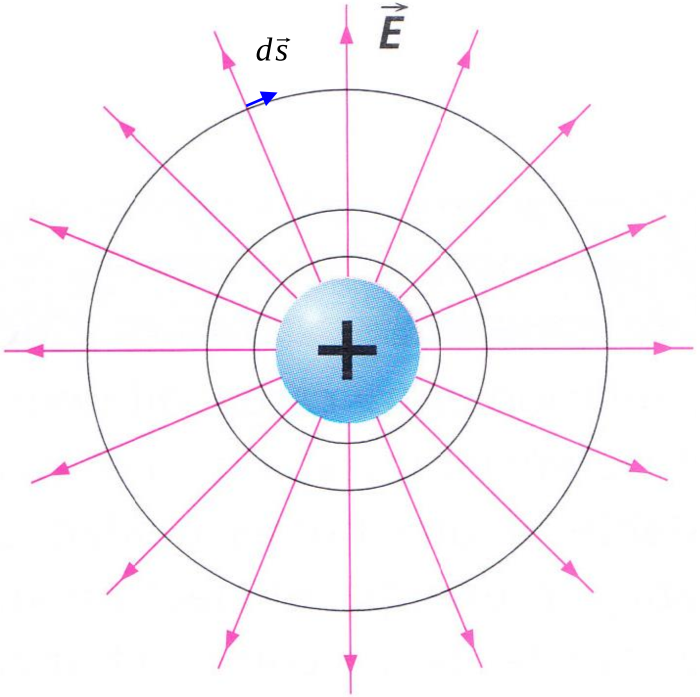
- Si la carga está distribuida uniformemente y es esférica las superficies equipotenciales son esferas concéntricas centradas en la carga.



- El vector campo eléctrico tiene el sentido de los potenciales decrecientes.

$$\vec{E} = -\nabla V$$

- El vector campo es perpendicular a las superficies equipotenciales



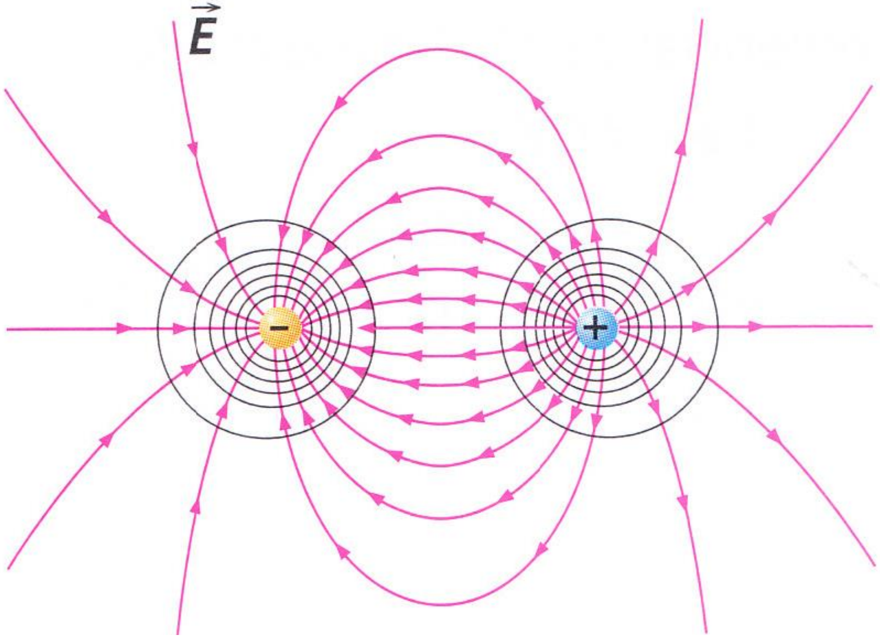
$$dV = -\vec{E}\ d\vec{s}$$

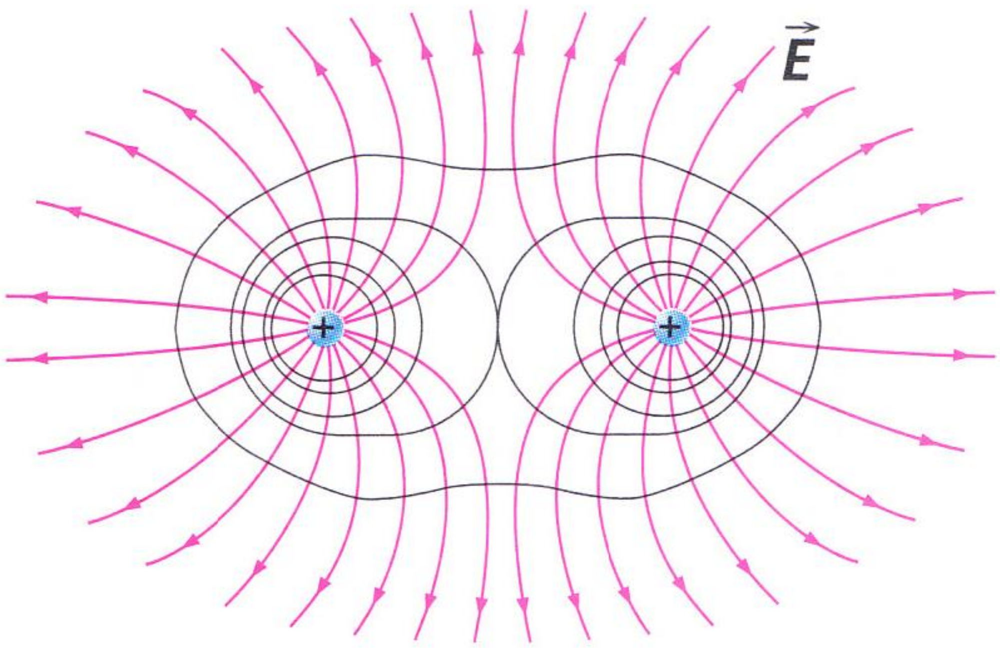
Al desplazar una carga a lo largo de una superficie equipotencial una distancia *ds* la variación de potencial es nula.

$$dV = 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp d\vec{s}$$

El vector posición tiene la misma dirección que las líneas del campo y éstas la misma dirección que el vector campo.

- Si hay más de una carga, el potencial en un punto surge de la aplicación del principio de superposición. En este caso, la superficie equipotencial deja de ser concéntrica con las cargas.





- Las superficies equipotenciales no se pueden cortar. Si lo hicieran en el punto de corte habría dos vectores campo.

Campo eléctrico creado por una distribución continua de carga

Si tenemos una región del espacio (un volumen V´, en 3D; una superficie S´, en 2D; o una línea L´, en 1D) en la que la carga está distribuida homogéneamente, podemos aplicar todo lo anterior considerando

Densidad de carga volúmica $\rho = \frac{dq´}{d\tau´}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\,d\tau'}{R^2}$$

Densidad de carga superficial $\sigma = \frac{dq´}{da´}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\,da'}{R^2}$$

Densidad de carga lineal $\lambda = \frac{dq´}{ds´}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\,ds'}{R^2}$$

La realización de estas integrales puede a veces ser muy complejo. En todo caso, incluso aunque pueda hacerse, suele ser más sencillo utilizando el teorema de Gauss.

4. Teorema de Gauss y aplicaciones

Relaciona el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga contenida en su interior.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{dentro}} q_i = \frac{Q_{\text{en}}}{\epsilon_0}$$

Donde Q_{en} es la carga neta contenida dentro del volumen limitado por la superficie arbitraria S.

Este teorema se puede demostrar expresando el campo y considerando dos casos, que la qi esté dentro o fuera del recinto de volumen delimitado por la superficie. Ello permite ver que solo las cargas que están dentro producen flujo neto. Las que están fuera producen líneas de campo que entran dentro del recinto delimitado por S por un lado y salen por el otro, de manera que las contribuciones se cancelan.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2}$$

La ley de Gauss es útil para calcular de forma sencilla el campo cuando el sistema tiene una elevada simetría

1. Se elige la superficie cerrada de área conocida, de modo que el campo sea perpendicular o paralelo a ella. Esta superficie se denomina gaussiana.

2. Se determina el flujo a través de ella mediante la expresión:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

3. Se iguala el flujo obtenido a la expresión de la ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi\ K\ Q_{en} = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_o}$$

Si las cargas dentro del volumen englobado por la superficie están distribuidas de forma continua con densidad de carga ρ

$$Q_{\text{en}} = \int_V \rho \, d\tau$$

Donde V es el volumen contenido dentro de la superficie S

Utilizando el Teorema de la divergencia que vimos en el tema 1, aplicado al campo eléctrico, que decía (allí al diferencial de volumen lo llamábamos dV)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V div\, \vec{E}\, d\tau = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) d\tau$$

El Teorema de Gauss se puede escribir:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, d\tau$$

Como el resultado se aplica a cualquier volumen arbitrario, también serviría para uno infinitamente pequeño

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

1ª ECUACIÓN DE MAXWELL
(forma diferencial)
EQUIVALENTE A LA LEY DE COULOMB

El potencial electrostático

Puesto que el campo eléctrico es conservativo, existe una función escalar (llamada potencial electrostático o potencia escalar) ϕ que cumple:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

Sabiendo que el campo viene dado por $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2}$

Esa expresión se verifica si el potencial se define $\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$

Tomando rotacional en ambos miembros de $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \longrightarrow \boxed{\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0}$$

Aplicando el T. de Stokes

Demuestra que E es un campo conservativo

A continuación se ven varios ejemplos sencillos en los que se obtiene el **campo eléctrico a partir de la ley de Gauss**

En estos casos se obtiene también el potencial electrostático utilizando la expresión del **campo eléctrico** obtenida a partir de la relación

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

MUY IMPORTANTE: En la práctica determinar el potencial de este modo no es lo habitual. En realidad suele ser más fácil calcular primero el potencial (a partir de su definición) dado que es una función escalar, y luego a partir de él el campo.

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

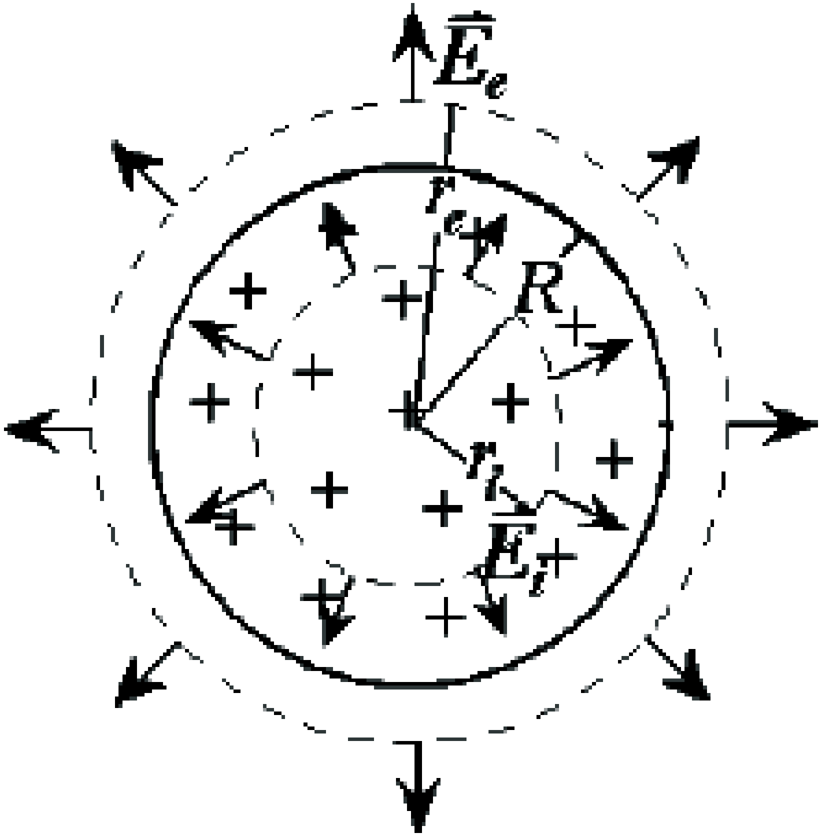
Aunque a veces hacer el cálculo de este modo no es posible o es muy complejo. En esos casos se usan otros métodos (resolver la ecuación de Poisson).

Cálculo de campos eléctricos mediante la ley de Gauss

SIMETRÍA ESFÉRICA

Campo y potencial creados por una esfera aislante uniformemente cargada

Tengamos una esfera de radio *R* y volumen *V* cuya densidad cúbica de carga sea ρ. La carga total de la esfera es q = ρ V.

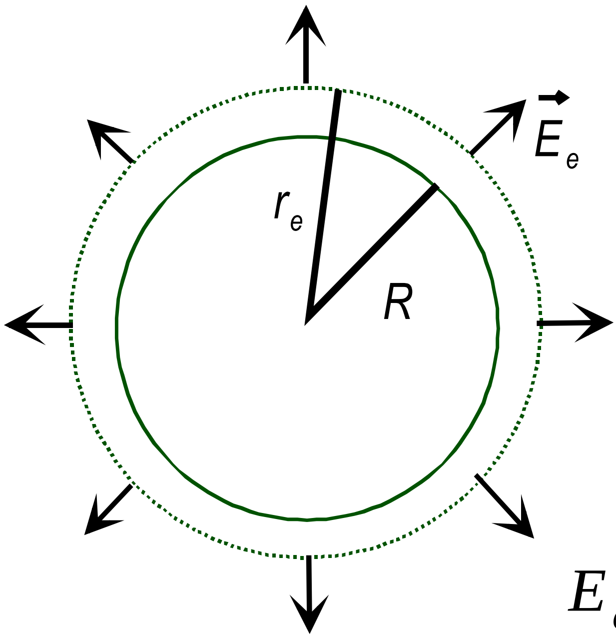


Las líneas de campo son perpendiculares a la superficie de la esfera. Se dirigen hacia fuera de la esfera si la carga que contiene es positiva y hacia dentro de ella si la carga es negativa.

Las superficies equipotenciales son esferas concéntricas a la superficie de la esfera dada.

Campo en el exterior

Superficie gaussiana: esfera mayor y concéntrica con ella de radio r_e de modo que $r_e \geq R$



Aplicando la definición de flujo y la ley de Gauss

Como el campo de la esfera es central

$$\Phi = E_e \cdot S \cdot \cos\alpha = E_e \cdot 4\pi r_e^2$$

$$\Phi = \frac{q_{\text{interior}}}{\varepsilon}$$

$$E_e(r_e) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r_e^2} = K\frac{q}{r_e^2}; \quad \vec{E}_e(r_e) = K\frac{q}{r_e^2}\vec{u}_r$$

El resultado es equivalente al de una carga puntual localizada en el centro de la esfera

Potencial en el exterior. Calculado una vez se conoce el campo a partir de la relación)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

$$\int_{r_e}^{\infty} dV_e = -\int_{r_e}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r}_e = -\int_{r_e}^{\infty} E\; dr_e \cos\left(0^{\text{o}}\right)$$

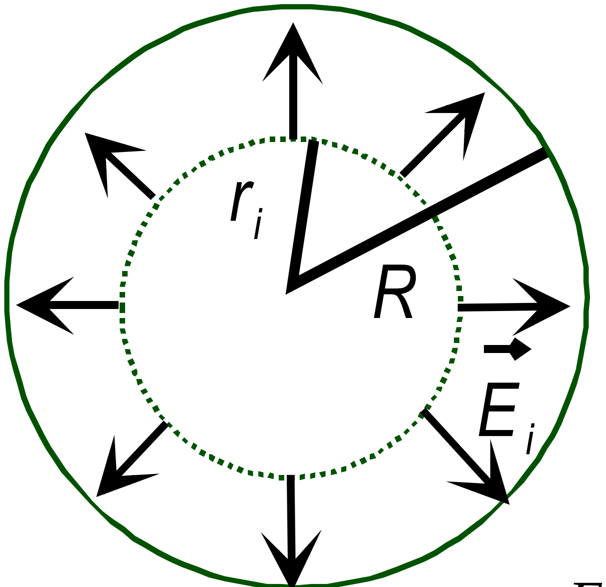
$$V_e(\infty) - V(r_e) = -K\; q\int_{r_e}^{\infty} \frac{1}{r_e^2} dr_e = Kq\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_e}\right)$$

Si $V(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_e(r_e) = K\; q\,\dfrac{1}{r_e}$

El resultado es equivalente al de una carga puntual localizada en el centro de la esfera

Campo en el interior

Superficie gaussiana: esfera menor y concéntrica con ella de radio r_i de modo que $r_i < R$



Aplicando la definición de flujo y la ley de Gauss

$$\Phi = E_i \cdot S \cdot \cos\alpha = E_i \cdot 4\pi r_i^2$$

$$\Phi = \frac{q_{\text{interior}}}{\varepsilon} = \frac{\rho V'}{\varepsilon} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r_i^3}{\varepsilon}$$

$$E_i(r_i) = \frac{\rho}{3\varepsilon} r_i \underset{\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon R^3} r_i = K\frac{q}{R^3} r_i$$

$$\vec{E}_i(r_i) = K\frac{q}{R^3} r_i \vec{u}_r$$

Potencial en el interior

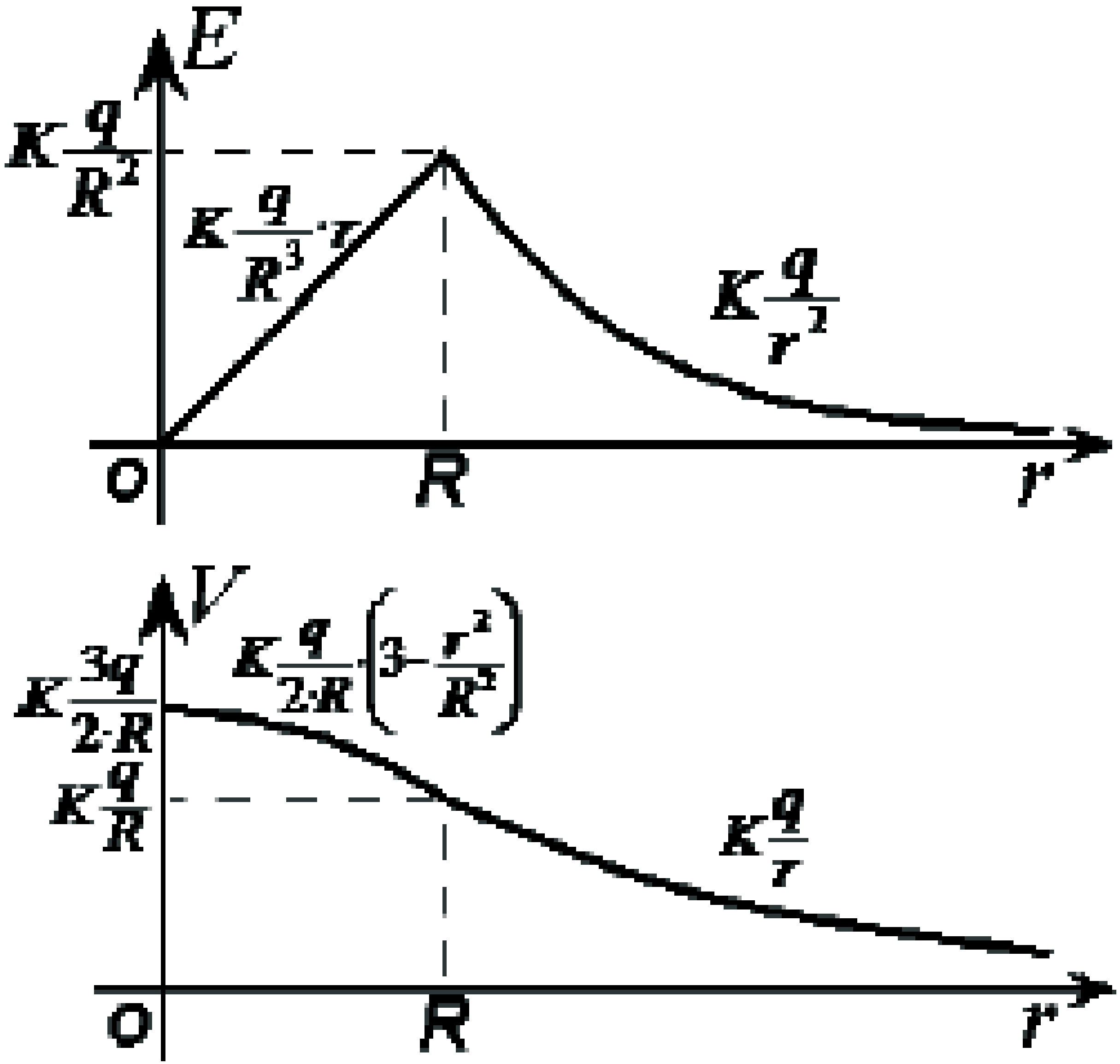
Diferencia de potencial entre un punto situado en el interior de la esfera y la distancia *R*

$$\int_{r_i}^{R} dV_i = -\int_{r_i}^{R} \vec{E}_i \cdot d\vec{r}_i = -\int_{r_i}^{R} E_i \; dr_i \cos\left(0^o\right)$$

$$V(R) - V_i(r_i) = -\frac{Kq}{R^3}\int_{r_i}^{R} r_i \; dr_i = -\frac{Kq}{R^3}\left[\frac{r_i^2}{2}\right]_{r_i}^{R} = -\frac{Kq}{2R} + \frac{Kqr_i^2}{2R^3}$$

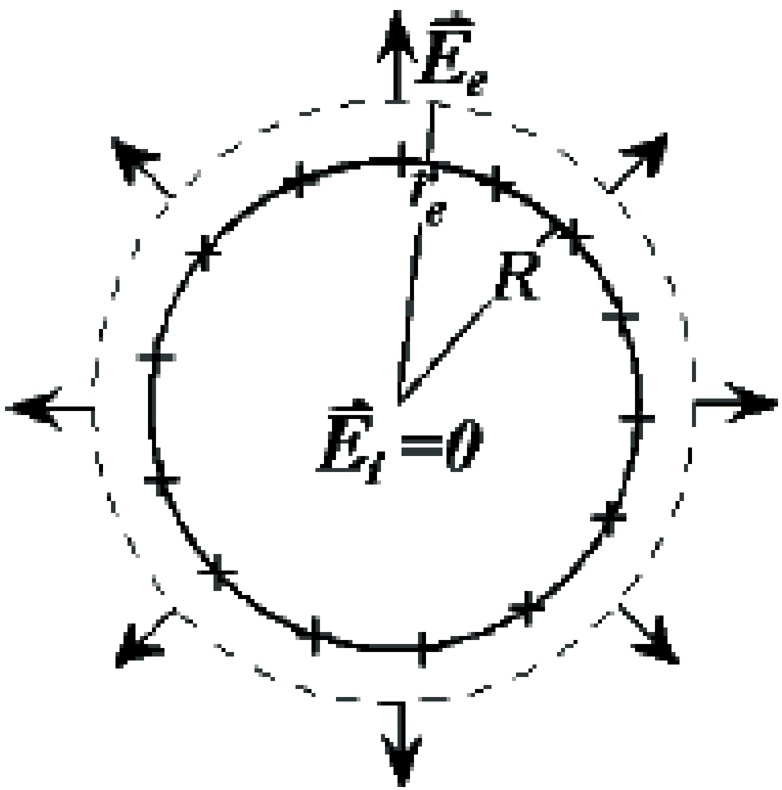
Si $\quad V(R) = \dfrac{Kq}{R} \quad \Rightarrow \quad V_i(r_i) = \dfrac{Kq}{2R} - \dfrac{Kqr_i^2}{2R^3} + \dfrac{Kq}{R} = \dfrac{Kq}{2R}\left(3 - \dfrac{r_i^2}{R^2}\right)$

En el centro de la esfera $\quad V_0 = \dfrac{3}{2}\dfrac{Kq}{R}$


E
$K\frac{q}{R^2}$
$K\frac{q}{R^3}\cdot r$
$K\frac{q}{r^2}$
O
R
r
V
$K\frac{3q}{2\cdot R}$
$K\frac{q}{2\cdot R}\cdot\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)$
$K\frac{q}{R}$
$K\frac{q}{r}$
O
R
r

Campo y potencial creados por una corteza esférica aislante uniformemente cargada

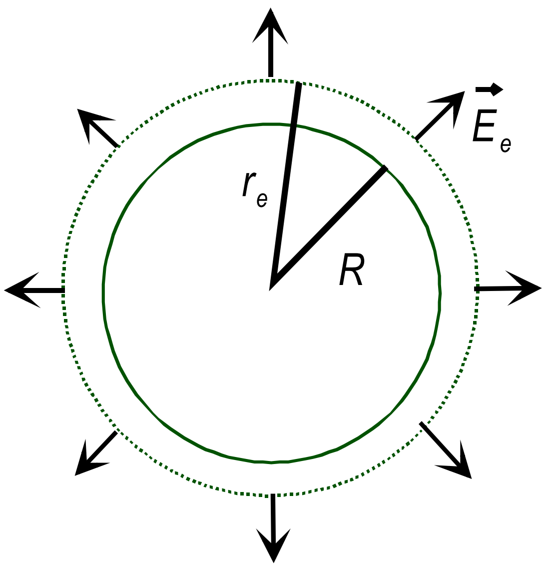
Tengamos una corteza esférica de radio *R* y grosor despreciable cuya densidad de carga superficial sea σ. Su carga total es $q = \sigma S$.



Situación análoga a la descrita para la esfera aislante uniformemente cargada, pero aquí el campo es nulo en el interior y, por tanto, el potencial es constante.

Campo en el exterior

Superficie gaussiana: esfera mayor y concéntrica con ella de radio r_e de modo que $r_e \geq R$



Aplicando la definición de flujo y la ley de Gauss

Como el campo de la esfera es central

$$\Phi = E_e \cdot S \cdot \cos\alpha = E_e \cdot 4\pi\, r_e^2$$

$$\Phi = \frac{q_{\text{interior}}}{\varepsilon}$$

$$E_e(r_e) = Kq\,\frac{1}{r_e^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{q}{r_e^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{\sigma\, 4\pi\, R^2}{r_e^2} = \frac{\sigma\, R^2}{\varepsilon}\,\frac{1}{r_e^2}$$

$$\vec{E}_e(r_e) = Kq\,\frac{1}{r_e^2}\,\vec{u}_r$$

Potencial en el exterior

$$\int_{r_e}^{\infty} dV_e = -\int_{r_e}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}_e = -\int_{r_e}^{\infty} E \; dr_e \cos\left(0^{\circ}\right)$$

$$V_e(\infty) - V(r_e) = -K \; q \int_{r_e}^{\infty} \frac{1}{r_e^{2}} dr_e = K \; q \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_e} \right)$$

$$\text{Si} \;\; V(\infty) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_e(r_e) = K \; q \; \frac{1}{r_e}$$

$$V_e(r_e) = K \; q \; \frac{1}{r_e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r_e} = \frac{\sigma \; R^{2}}{\varepsilon} \frac{1}{r_e}$$

El resultado es equivalente al de una masa puntual localizada en el centro de la esfera

Campo en el interior

La carga neta en el interior es cero

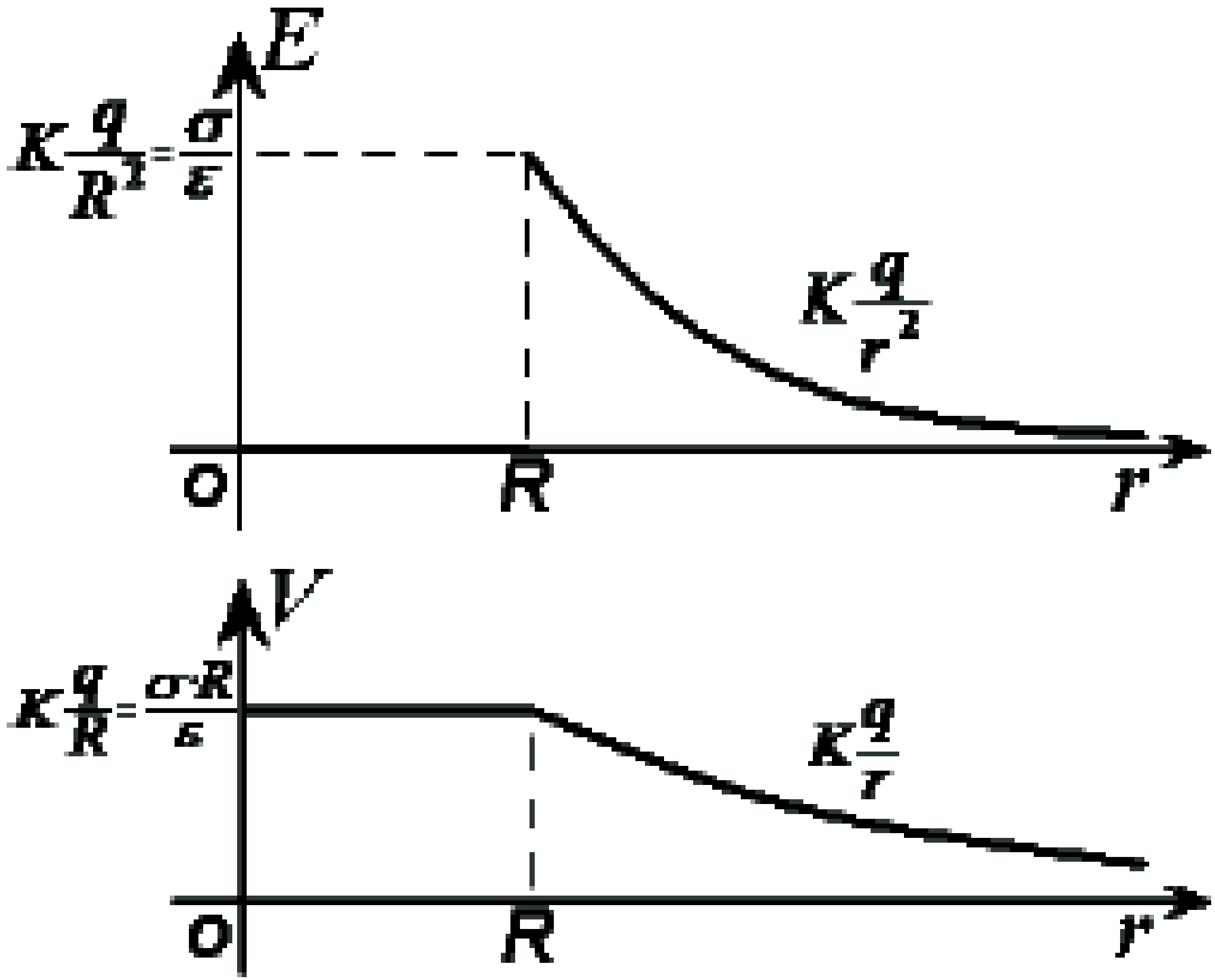
$$\Phi = \frac{q_{\text{interior}}}{\varepsilon} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_i = 0$$

Potencial en el interior

$$\int_{r_i}^{R} dV_i = -\int_{r_i}^{R} E_i \, d\vec{r}_i = -\int_{r_i}^{R} 0 \, dr_i$$

$$V(R) - V_i(r_i) = 0$$

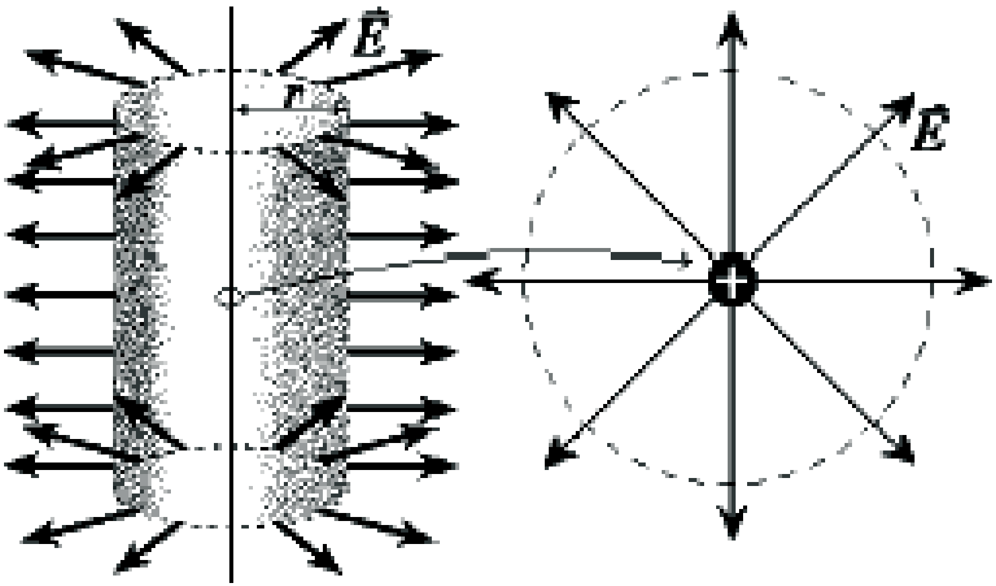
Si $\quad V(R) = \dfrac{Kq}{R} \qquad \Rightarrow \qquad V_i(r_i) = \dfrac{Kq}{R}$


E
$K\frac{q}{R^2}=\frac{\sigma}{\varepsilon}$
$K\frac{q}{r^2}$
O
R
r
V
$K\frac{q}{R}=\frac{\sigma R}{\varepsilon}$
$K\frac{q}{r}$
O
R
r

SIMETRÍA CILÍNDRICA

Campo y potencial creados por un hilo infinito uniformemente cargado

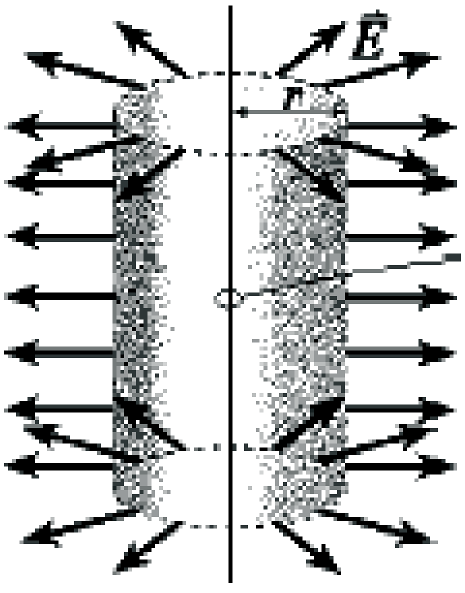
Tengamos un hilo de longitud infinita cargado con una densidad de carga lineal λ



Las líneas de campo son rectas perpendiculares al hilo en todos los puntos y presentan simetría radial. Se dirigen hacia fuera del hilo si la carga que contiene es positiva y hacia dentro si la carga es negativa.

Las superficies equipotenciales son superficies cilíndricas concéntricas en torno al hilo, tanto más alejadas cuanto menor sea el potencial.

Campo



Superficie gaussiana: cilindro centrado en el hilo de altura *h* y radio *r*

Carga en el interior del cilindro

$$q = \lambda \cdot h$$

Solamente hay flujo en la superficie lateral del cilindro

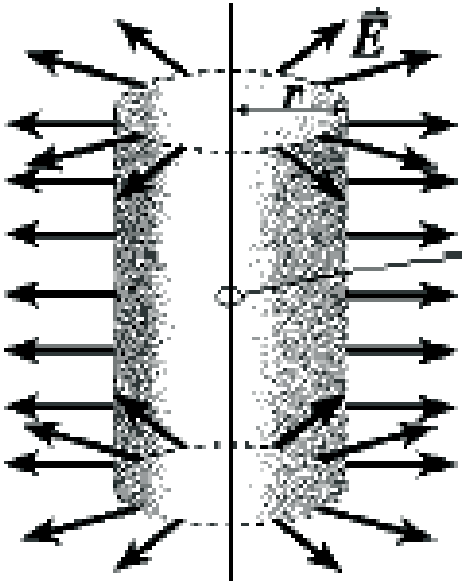
Aplicando la definición de flujo y la ley de Gauss

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= E\,S = E\,2\pi\,r\,h \\ \Phi &= \frac{q_{\text{interior}}}{\varepsilon} = \frac{\lambda\,h}{\varepsilon}; \end{aligned}\right\} E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r} = 2K\lambda\frac{1}{r}$$

$$\vec{E}(r) = 2K\lambda\frac{1}{r}\vec{u}_r$$

Potencial

Para distribuciones de carga que se extienden hasta el infinito, se elige $V = 0$ en algún punto finito y no en el infinito



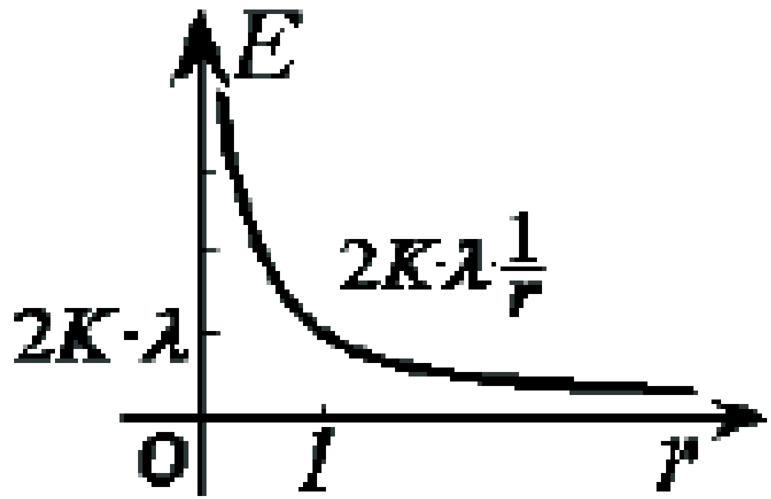
$$\int_{r_{ref}}^{r} dV = -\int_{r_{ref}}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_{ref}}^{r} E \; dr \; \cos\left(0^o\right)$$

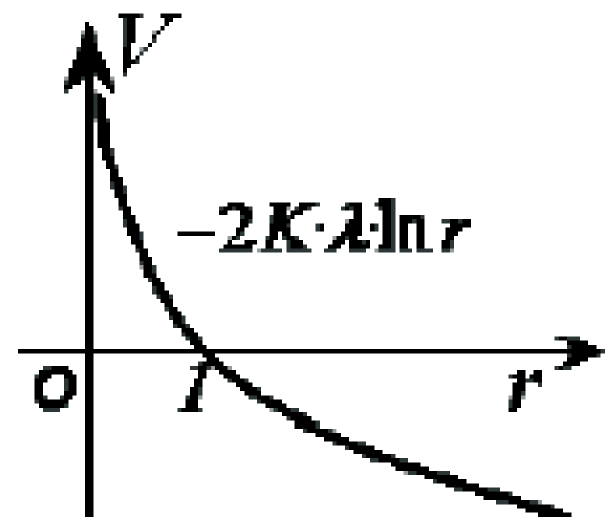
$$V(r) - V(r_{ref}) = -2 \; K \; \lambda \int_{r_{ref}}^{r} \frac{1}{r} dr =$$

$$= -2 \; K \; \lambda \left(\ln r - \ln r_{ref}\right)$$

Si $V(r_{ref}) = 0$ en $r_{ref} = 1$

$$\Rightarrow \quad V(r) = -2 \; K \; \lambda \; \ln \; r$$

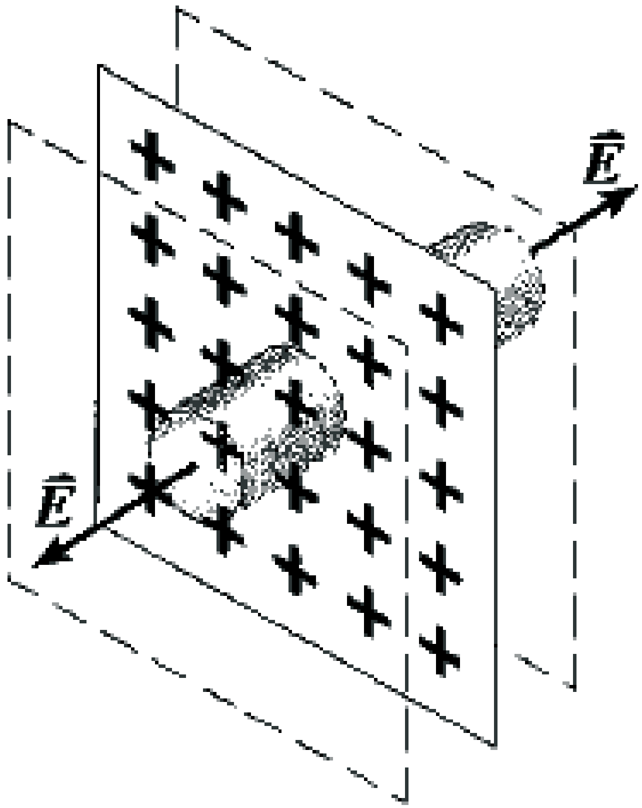

E
2K·λ·1/r
2K·λ
O
1
r


V
−2K·λ·ln r
O
1
r

SIMETRÍA PLANA

Campo y potencial creados por un plano infinito uniformemente cargado

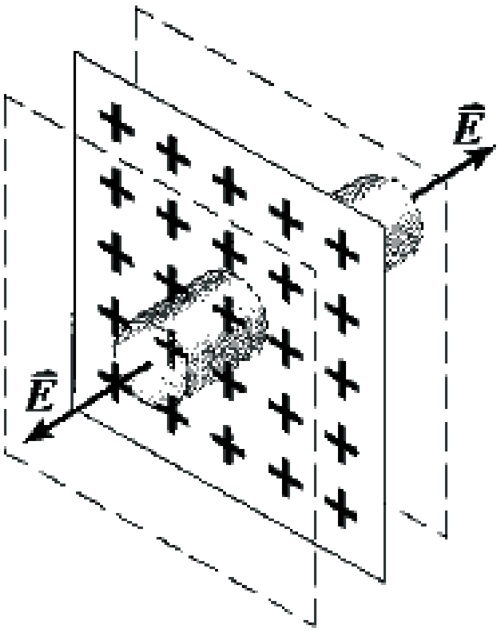
Tengamos un plano de dimensiones infinitas cargado con una densidad superficial σ.



Las líneas de campo son perpendiculares al plano, paralelas entre sí y uniformemente espaciadas. Se dirigen hacia fuera del plano si la carga que contiene es positiva y hacia dentro del mismo si la carga es negativa.

Las superficies equipotenciales son paralelas al plano y uniformemente espaciadas.

<u>Campo</u>

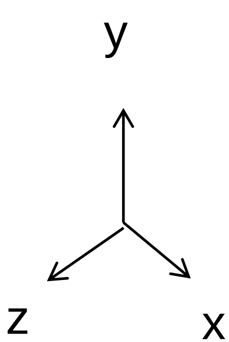


Superficie gaussiana: cilindro de altura arbitraria y sección transversal de área *S* con su eje perpendicular al plano y cortándolo simétricamente

La carga en el interior del cilindro es

$$q = \sigma \; S$$

Solo hay flujo a través de las bases del cilindro (en las paredes $\bar{E}$ y $\bar{S}$ forman un ángulo de 90º). Aplicando la definición de flujo y la ley de Gauss

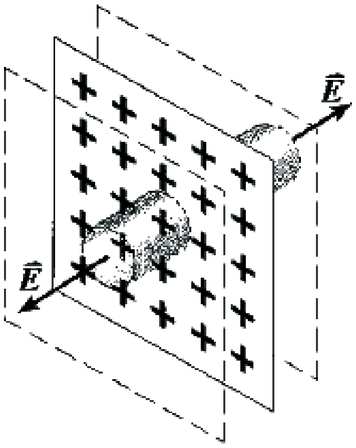


$$\left.\begin{array}{l} \Phi = 2\; E \cdot S \cdot \cos\; 0^{\mathrm{o}} = 2 E \pi \; r^{2} \\ \Phi = \dfrac{q_{\mathrm{interior}}}{\varepsilon} = \dfrac{\sigma \;\pi\; r^{2}}{\varepsilon} \end{array}\right\} \quad E(z) = \frac{\sigma}{2\;\varepsilon}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\;\varepsilon}\vec{u}_{z}$$

El campo es constante: no depende de la distancia al plano (z)

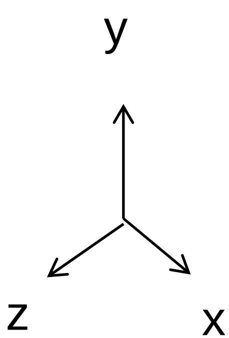
Potencial



$$\int_{z_{ref}}^{z} dV = -\int_{r_{ref}}^{z} E \cdot dz;$$

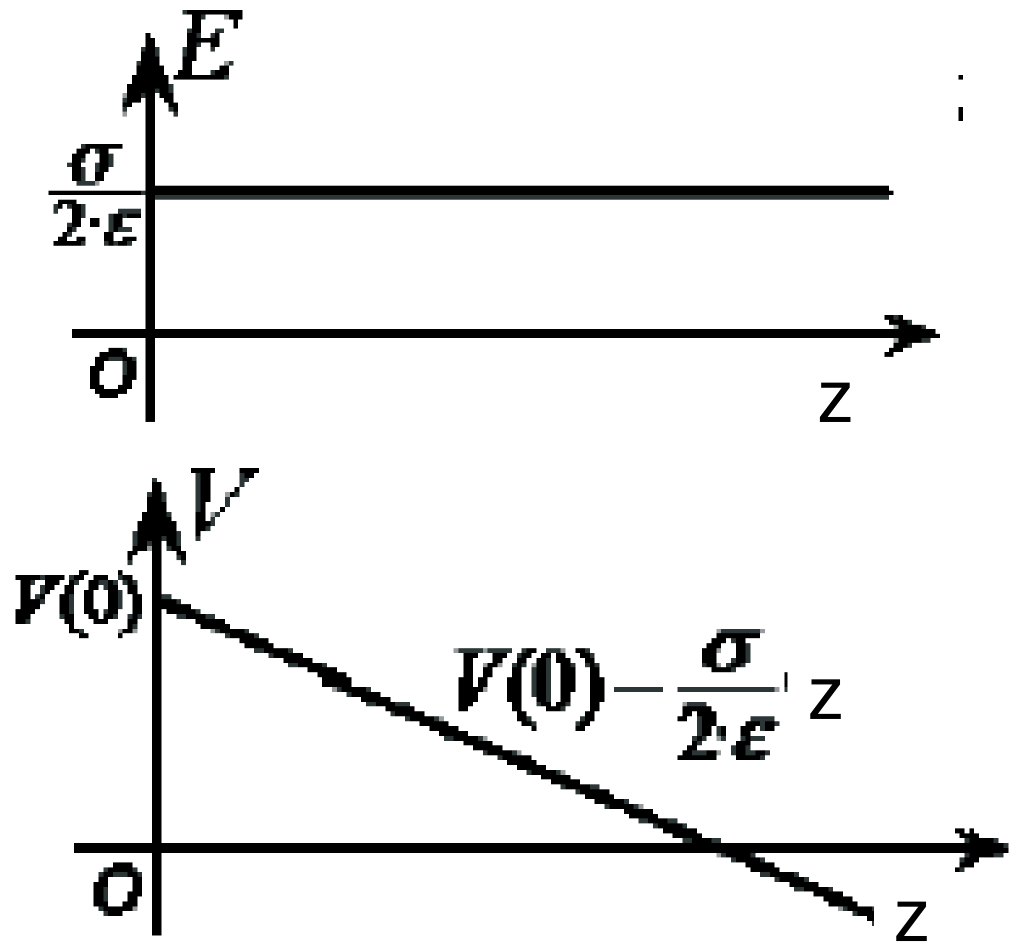
$$V(z) - V(z_{ref}) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon}\int_{z_{ref}}^{z} dz =$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(z - z_{ref}\right)$$



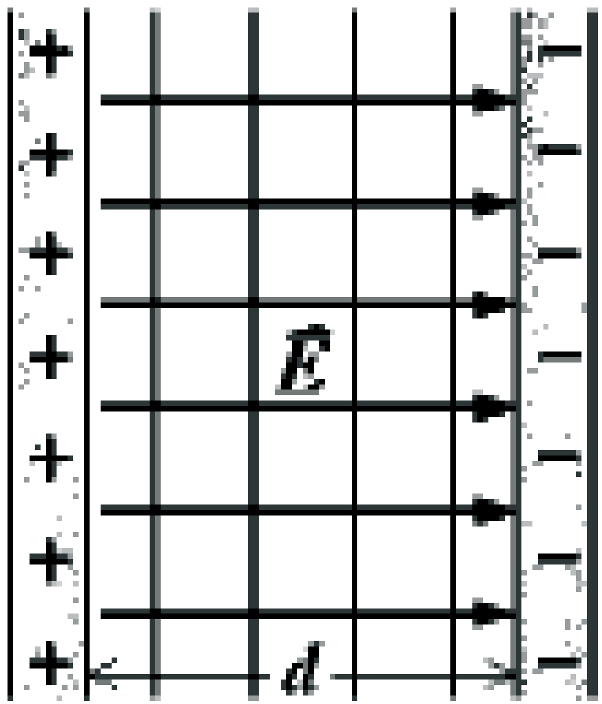
Si $V(z_{ref}) = V(0)$ en $z_{ref} = 0$

$$\Rightarrow \quad V(z) = V(0) - \frac{\sigma}{2\varepsilon} z$$


E
$\frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon}$
O
z
V
V(0)
$V(0)-\frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon}z$
O
z

Campo y potencial creados por dos planos paralelos, uniformes y opuestamente cargados

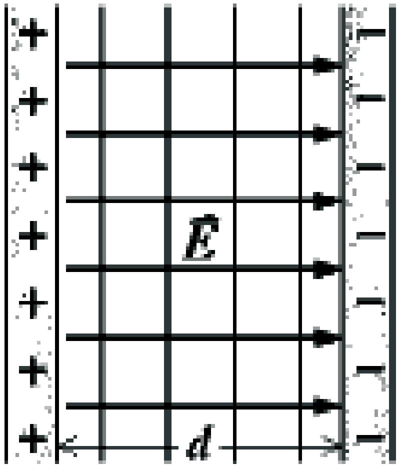
Tengamos dos planos de dimensiones infinitas separados una distancia *d*, con igual densidad de carga superficial, pero de diferente signo ($+\sigma$ y - σ).



Las líneas de campo son rectas paralelas entre sí y perpendiculares a los planos, uniformemente espaciadas. Se dirigen del plano positivo al negativo.

Las superficies equipotenciales son paralelas al plano y uniformemente espaciadas.

Campo



La superposición de campos entre los planos da lugar a un campo total doble al creado por un solo plano

$$E(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Dirigido desde el plano positivo hacia el negativo. En la región exterior a los planos ambos campos se neutralizan y no hay campo neto.

Potencial

Para $z < d \quad V(z) = V_+(0) - \frac{\sigma}{\varepsilon} z$

El potencial disminuye linealmente con la distancia desde el plano positivo al negativo