Entregable 3.2

jueves, 19 de septiembre de 2024 17:37

- Que ocurre en la cadena de orden n

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \\[2ex] \dfrac{dN_i}{dt} = -\lambda_i N_i + \lambda_{i-1} N_{i-1} \qquad \forall i \geq 2 \end{cases}$$

Vamos a resolverlo por inducción, es decir, vamos a resolver los primeros N_i a ver si encontramos la recurrencia y después lo probamos por inducción.

Primero $\boxed{N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}}$

Ahora $N_2(t)$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t} \Rightarrow \frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

Para eso primero resolvemos la parte homogénea

$$N_2^H(t) = A e^{-\lambda_2 t}$$

Y ahora necesitamos una solución particular, que sera del tipo $N_2^P(t) = B e^{-\lambda_1 t}$

$$-B\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 B e^{-\lambda_1 t} = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t} \Rightarrow B = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_0$$

$$\Rightarrow N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_0 e^{-\lambda_1 t} + A e^{-\lambda_2 t}$$, y como $N_2(0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}\right)}$$

x

Ahora ahora $N_3(t)$

$$\frac{dN_3}{dt} = -\lambda_3 N_3 + \lambda_2 N_2$$

De igual forma tendremos una solución de la parte homogénea más una particular

$$N_3^H(t) = A e^{-\lambda_3 t}$$

Y una de la particular con forma $N_3^p(t) = Be^{-\lambda_2 t} + Ce^{-\lambda_1 t}$, veamos que cumpla la edo

$$-\lambda_2 B e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 C e^{-\lambda_1 t} = -\lambda_3 B e^{-\lambda_2 t} - \lambda_3 C e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} N_0 e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

Ahora igualamos lo términos con $e^{-\lambda_2 t}$ y los términos con $e^{-\lambda_1 t}$

$$\begin{cases} -\lambda_2 B = -\lambda_3 B + \dfrac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} N_0 \Rightarrow B = \dfrac{\lambda_2\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)} N_0 \\ -\lambda_1 C = -\lambda_3 B - \dfrac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} N_0 \Rightarrow C = \dfrac{-\lambda_2\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)} N_0 \end{cases}$$

Por tanto, si ajustamos A de forma que $N_3(0)=0$, $A \neq 0$

$$N_3(t) = Be^{-\lambda_2 t} + Ce^{-\lambda_1 t} + Ae^{-\lambda_3 t} \Rightarrow A+B+C=0 \Rightarrow A=-B-C$$

$$\frac{A}{N_0} = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}\right) = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\lambda_3-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\right) = \frac{\lambda_2\lambda_1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$$

Por tanto,

$$N_3(t) = N_0 \frac{\lambda_2\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\left[(\lambda_2-\lambda_3)e^{-\lambda_1 t} - (\lambda_1-\lambda_3)e^{-\lambda_2 t} + (\lambda_1-\lambda_2)e^{-\lambda_3 t}\right]$$

$$\boxed{N_3(t) = N_0\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)}e^{-\lambda_3 t}\right)}$$

Con esto podemos suponer una solución general y aplicar inducción

$$N_n(t) = N_0 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\prod_{k=1}^{n-1}\lambda_k}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)} e^{-\lambda_i t}\right), \text{ denoto } \alpha_{n,i} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}\lambda_k}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)}$$

Podemos ver que, si $i \neq n+1$

$$\alpha_{n+1,i} = \frac{\prod_{k=1}^{n}\lambda_k}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1}(\lambda_i-\lambda_k)} = \frac{\lambda_n}{(\lambda_i-\lambda_{n+1})}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{n-1}\lambda_k}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)} = \frac{\lambda_n}{(\lambda_i-\lambda_{n+1})}\alpha_{n,i} \Rightarrow \boxed{\lambda_n \alpha_{n,i} = \alpha_{n+1,i}(\lambda_i-\lambda_{n+1})}$$

$(*)$

Que se comprueba que concuerdan para $n=1,2,3$. Ahora supongamos que es cierto para n y veamos si se cumple para $n+1$. Es decir, veamos si sustituyendolo todo en la recurrencia obtenemos que se cumple la edo. La recurrencia es la siguiente

$$\frac{dN_{n+1}}{dt}+\lambda_{n+1}N_{n+1}-\lambda_n N_n=0$$

$$\frac{dN_{n+1}}{dt}=N_0\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{n+1,i}\cdot e^{-\lambda_i t}\right)=-N_0\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\alpha_{n+1,i}e^{-\lambda_i t}$$

Con esto

$$\frac{\frac{dN_{n+1}}{dt}+\lambda_{n+1}N_{n+1}-\lambda_n N_n}{N_0}=\left(\sum_{i=1}^{n+1}-\lambda_i\alpha_{n+1,i}e^{-\lambda_i t}+\lambda_{n+1}\alpha_{n+1,i}e^{-\lambda_i t}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_n\alpha_{n,i}e^{-\lambda_i t}\right)$$

$$=\left(\cancel{-\lambda_{n+1}\alpha_{n+1,n+1}e^{-\lambda_{n+1}t}+\lambda_{n+1}\alpha_{n+1,n+1}e^{-\lambda_{n+1}t}}+\sum_{i=1}^{n}\left(-\lambda_n\alpha_{n,i}+\lambda_{n+1}\alpha_{n+1,i}-\lambda_i\alpha_{n+1,i}\right)e^{-\lambda_i t}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(-\lambda_n\alpha_{n,i}+(\lambda_{n+1}-\lambda_i)\alpha_{n+1,i}\right)e^{-\lambda_i t}\overset{*}{=}\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_n\alpha_{n,i}-\lambda_n\alpha_{n,i}\right)e^{-\lambda_i t}=0$$

Por tanto, la solución general es

$$\boxed{N_n(t)=N_0\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\prod_{k=1}^{n-1}\lambda_k}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)}e^{-\lambda_i t}\right)}$$