Método de las funciones de Green para la ecuación de ondas

En el gauge de Lorenz las ecuaciones de ondas para los potenciales ϕ y $\vec{A}$ tienen todas ellas la estructura fundamental:

$$\boxed{\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{r},t)}$$

Consideremos el potencial escalar $\phi(\vec{r},t)$:

$$\nabla^2\phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$$

Suponemos que no hay superficies límite y desarrollamos ϕ y ρ mediante sus desarrollos de Fourier:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\vec{r},t)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas con fuentes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\nabla^2\phi(\vec{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\phi(\vec{r},\omega) + \frac{\rho(\vec{r},\omega)}{\varepsilon_0}\right)e^{-i\omega t}\, d\omega = 0$$

que implica:

$$\nabla^2\phi(\vec{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\phi(\vec{r},\omega) = -\frac{\rho(\vec{r},\omega)}{\varepsilon_0}$$

que es la <u>ecuación de ondas de Helmholtz no homogénea</u>:

$$\left.\begin{aligned}(\nabla^2+k^2)\,\phi(\vec{r},\omega) &= -\frac{\rho(\vec{r},\omega)}{\varepsilon_0} \\ k &= \frac{\omega}{c}\end{aligned}\right\}$$

Función densidad de carga dependiente de la frecuencia ω (componente de Fourier para dicha frecuencia):

$$\rho(\vec{r},\omega) = \sum_i q_i(\omega)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

$q_i(\omega)$ es la carga, que oscila con frecuencia ω, y está situada en el punto $\vec{r}_i$.

Para resolver la ecuación de ondas consideramos la siguiente metodología basada en el principio de superposición:

1) Se resuelve la ecuación para una única carga de modo que si

$$q_i(\omega) = \varepsilon_0$$

la correspondiente ecuación será

$$\nabla^2\phi(\vec{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\phi(\vec{r},\omega) = -\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

La solución de esta ecuación se denomina <u>función de Green</u>, $G(\vec{r}, \vec{r}_i; \omega)$:

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_i; \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\vec{r}, \vec{r}_i; \omega) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

2) Aplicamos el principio de superposición, de modo que establecemos las siguientes relaciones

Para una carga unidad $q_i(\omega) = 1 \rightarrow \phi(\vec{r}, \omega) = \dfrac{G(\vec{r}, \vec{r}_i; \omega)}{\varepsilon_0}$

Para $\rho(\vec{r}, t) = \sum_i q_i(\omega)\delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \rightarrow \phi(\vec{r}, \omega) = \sum_i \dfrac{q_i(\omega)}{\varepsilon_0} G(\vec{r}, \vec{r}_i; \omega)$

Pasando al continuo el sumatorio en i, al considerar que los vectores de posición $\vec{r}_i$ son muy próximos y hay un número de cargas puntuales que tiende a infinito, es decir, considerando

$$q_i(\omega) = \rho(\vec{r}\,', \omega)\, d^3x'$$

resulta:

$$\phi(\vec{r}, \omega) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,', \omega)}{\varepsilon_0} G(\vec{r}, \vec{r}\,', \omega)\, d^3x'$$

Así pues, primero hay que resolver la ecuación de Green:

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_i, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\vec{r}, \vec{r}_i, \omega) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Podemos suponer $\vec{r}_i = 0$ (simple traslación del origen

de coordenadas al punto donde se localiza la carga).
Así la ecuación de Green queda:

$$\nabla^2 G(\vec{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\vec{r},\omega) = -\delta(\vec{r})$$

La ecuación que debe cumplir $G(\vec{r},\omega)$ para $\vec{r} \neq 0$ se transforma en

$$\nabla^2 G(\vec{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\vec{r},\omega) = 0$$

El sistema goza de simetría esférica (carga puntual en el origen), la solución solo dependerá de $r \equiv |\vec{r}|$ y no será función de los ángulos θ y φ de las coordenadas esféricas. Escribimos:

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rG)$$

y para $\vec{r} \neq 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rG) + \frac{\omega^2}{c^2} G = 0$$

es decir

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rG) + \frac{\omega^2}{c^2} (rG) = 0$$

que tiene como solución general

$$rG = K_1 e^{i\omega r/c} + K_2 e^{-i\omega r/c}$$

$$G(\vec{r},\omega) = K_1 \frac{e^{i\omega r/c}}{r} + K_2 \frac{e^{-i\omega r/c}}{r}$$

donde K_1 y K_2 son constantes a determinar por las condiciones de frontera.
Además, el sumando de K_2 es una función cuya transformada de Fourier no tiene sentido físico, pues viola la causalidad. Por lo que queda:

$$G(\vec{r},\omega) = K_1 \frac{e^{i\omega r/c}}{r} = K_1 \frac{e^{ikr}}{r}$$

donde $k = \omega/c$.

Para $\vec{r}=0$, $\nabla^2 G \gg \frac{\omega^2}{c^2} G$, ya que G tiende al infinito como r^{-1} y las derivadas segundas lo harán como r^{-3}, por lo tanto:

$$\nabla^2 G(\vec{r},\omega) = -\delta(\vec{r})$$

cuya solución es:

$$G(\vec{r},\omega) = \frac{1}{4\pi r} \qquad \vec{r}=0$$

Así pues, una solución particular de la ecuación

$$\nabla^2 G(\vec{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\vec{r},\omega) = -\delta(\vec{r})$$

para cualquier valor de r es

$$G(\vec{r},\omega) = \frac{e^{i\omega r/c}}{4\pi r} \equiv \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

Deshaciendo la traslación del origen de coordenadas de modo que la carga esté localizada en $\vec{r}_i$

$$G(\vec{r},\vec{r}_i,\omega) = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_i|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

y el potencial escalar será

$$\phi(\vec{r},\omega) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,',\omega)}{\varepsilon_0} G(\vec{r},\vec{r}\,',\omega)\, d^3x' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,',\omega)\, e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3x'$$

y haciendo la transformada de Fourier inversa

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,',\omega)\, e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3x'\right) e^{-i\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{d^3x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vec{r}\,',\omega)\, e^{-i\omega\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3x'$$