Geometría → Bibliografía:

- apuntes de clase
- notas de Ernesto Girondo (UAM)
- apuntes de geometría III — Miguel Ortega, Manuel Ritoré (UGR)
- Ángel Montesinos (ULL)

Teléfono despacho 965903400 x 2930

Espacio afín: Homogéneo
Isótropo
No existe origen
Estructura lineal asociada
Propiedades afines independientemente del origen

Estructuras Algebraicas

- **Grupo:** $(G,+)$

1) $+ : G\times G \longrightarrow G$, $(g_1, g_2) \to g_1+g_2$ } Ley de descomposición interna

2) Asociativa: $(g_1+g_2)+g_3 = g_1+(g_2+g_3)$ $\forall g_1,g_2,g_3 \in G$

3) $\exists$ elemento neutro: $g_1+g_2+g_3$ $\exists e\in G : g_1+e = e+g_1 = g_1$

4) $\exists$ elemento inverso: $g_1 \in G$ $\exists g_1^{-1} \in G$, $g_1+g_1^{-1} = e$

Si además se verifica que $\forall g_1, g_2 \in G$ $g_1+g_2 = g_2+g_1$, se dice que el grupo es conmutativo o abeliano.

Ejemplo: $(\mathbb{Z}, +)$ $Gl(2;\mathbb{R})$: {matrices cuadradas de orden 2 con $\det \neq 0$}
$(Gl(2;\mathbb{R}), \times)$ es un grupo pero no es un grupo abeliano

[clases de resto módulo 4] → un entero que, dividido entre 4, puede dar 4 restos
↳ $(\{\bar 0, \bar 1, \bar 2, \bar 3\}, +)$ es un grupo finito

	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$
$\bar 1$	$\bar 1$	2	$\bar 3$	$\bar 0$
$\bar 2$	$\bar 2$	3	$\bar 0$	$\bar 1$
$\bar 3$	$\bar 3$	0	$\bar 1$	$\bar 2$

↳ $_4(m+n)$ los restos

- **Anillo:** $(A,+,\cdot)$ es un anillo

1) $(A,+)$ es un grupo conmutativo
2) $\forall a,b,c \in A \mid a(b+c) = ab+ac$ → distributividad
3) $\exists$ elemento neutro: $\exists 1$: $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$ $\forall a \in A$

Si además $\forall a,b\in A$, $a\cdot b = b\cdot a$, se dice que el anillo es CONMUTATIVO o ABELIANO

- **Cuerpo:** $(K,+,\cdot)$

1) $(K,+)$ es un grupo conmutativo
2) $\forall k, l, m \in K$, $k(l+m) = kl + km$
3) $(K^*, \cdot)$ es un grupo (no necesariamente abeliano) → K^* es K quitando el e. neutro

Ejemplo
- $(\mathbb{R},+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo
- $(\mathbb{C},+,\cdot)$ " " " "
- $(\mathbb{H},+,\cdot)$ " " " no conmutativo

$a+bi$
$a+bi+cj+dk$

resto 5

$+\ \mathbb{Z}_5$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$
$\bar 1$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 0$
$\bar 2$	2	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 0$	$\bar 1$
$\bar 3$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$
$\bar 4$	$\bar 4$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$

$\cdot$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$
$\bar 1$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$
$\bar 2$	$\bar 2$	$\bar 4$	$\bar 1$	$\bar 3$
$\bar 3$	$\bar 3$	$\bar 1$	$\bar 4$	$\bar 2$
$\bar 4$	$\bar 4$	$\bar 3$	$\bar 2$	$\bar 1$

$\mathbb{K}$ · espacio vectorial

Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo

Se dice que un conjunto V tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$

1) $\exists$ una ley de descomposición interna $+$ en V tq

2) $\exists$ una operación externa ·

VARIEDADES LINEALES

DEFINICIÓN

Sea (A, V, φ) un espacio afín sobre un cuerpo K, sea $a \in A$ y sea F un subespacio vectorial de V, llamaremos variedad lineal que pasa por a y tiene como subespacio director F al conjunto:

$$a+F = \{b \in A : \varphi((a,b)) \in F\} \Leftrightarrow \{b \in A : \vec{ab} \in F\} \Leftrightarrow \{a+\vec{v} ; \vec{v} \in F\}$$

$$\varphi : A \times A \longrightarrow V$$
$$(a,b) \longrightarrow \varphi((a,b)) = \vec{ab}$$

Se llama dimensión de la variedad lineal a la dimensión de F

$\dim F = 0$	punto	$\dim F = n-1$	hiperplano
$\dim F = 1$	vector	$\dim F = n$	$a+V = V$
$\dim F = 2$	plano (2-plano)		$\dim V = n$
$\dim F = 3$	3-plano		
$\dim F = p$	p-plano		

PROPOSICIÓN

Sea (A, V, φ) un espacio afín, y sea $a+F$ una variedad lineal cualquiera, Si $b \in a+F$, entonces $a+F = b+F$

Demostración
1) $a+F \subset b+F$
2) $b+F \subset a+F$

$c \in a+F \overset{?}{\Rightarrow} c \in b+F$

$\vec{ac} \in F$, $b \in a+F$, $\vec{ab} \in F$, $\vec{ba} = -\vec{ab} \in F$ $\Rightarrow \vec{ba} + \vec{ac} \in F$ $\quad \vec{bc} \in F \Leftrightarrow c \in b+F$

↳ COROLARIO

Sea (A, V, φ) un espacio afín y sea $a+F$ una variedad lineal de (A, V, φ), entonces si $p, q \in a+F \Rightarrow \vec{pq} = \varphi((p,q)) \in F$

Demostración
$p \in a+F \quad \vec{ap} \in F$
$q \in a+F \quad \vec{aq} \in F \quad \vec{qa} \in F$

$\Rightarrow \underbrace{\vec{qa} + \vec{ap}}_{\vec{qp}} \in F \qquad \vec{pq} = -\vec{qp} \in F \qquad (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$

DEFINICIÓN

Sea (A, V, φ) un espacio afín cualquiera, y sean $a+F$ y $b+G$ dos variedades lineales de (A, V, φ). Se dice que $a+F$ y $b+G$ se cortan si $(a+F) \cap (b+G) \neq \emptyset$ $\qquad (\mathbb{Z}_p^n, \mathbb{Z}_p^n, \varphi)$

PROPOSICIÓN

Dos variedades lineales $a+F$ y $b+G$ de un mismo espacio afín (A, V, φ) se cortan si y sólo si $\vec{ab} \in F+G$

Demostración

- $(a+F) \cap (b+G) \neq \emptyset \Rightarrow \vec{ab} \in F+G$

$\exists c \in (a+F) \cap (b+G) \quad c \in a+F \quad \vec{ac} \in F$
$c \in b+G \quad \vec{bc} \in G \Rightarrow \vec{cb} = -\vec{bc} \in G$

$\Rightarrow \underbrace{\overset{F}{\vec{ac}} + \overset{G}{\vec{cb}}}_{\vec{ab}} \in F+G$

- $\vec{ab} \in F+G \Rightarrow (a+F) \cap (b+G) \neq \emptyset$

$\vec{ab} \in F+G$
$\vec{ab} \in \underset{F}{\vec{f}} + \underset{G}{\vec{g}}$

$\vec{f} = \vec{ab} - \vec{g} \qquad c = a + \vec{f} = a + \vec{ab} - \vec{g} = b - \underbrace{\vec{g}}_{\vec{g}} \in b+G \quad c \in b+G$

$\vec{ab} \in F+G \quad \exists \vec{f} \in F \quad \exists \vec{g} \in G \quad \vec{ab} = \vec{f} + \vec{g} \Rightarrow a + \vec{f} \in a+F \qquad a + \vec{f} = a + (\vec{ab} - \vec{g}) = b + (\vec{g}) \in b+G$

$a + \vec{f} \in (a+F) \cap (b+G) \neq \emptyset$

*$\subseteq$ significa que mantiene la estructura de EV (subespacio vectorial)

Definición

Sea un espacio afín (A,V,φ) y sean $a+F$ y $b+G$ dos variedades lineales de (A,V,φ), se dice que $a+F$ y $b+G$ son **paralelas** si $F\subseteq G$ ó $G\subseteq F$. Si se dan ambas inclusiones, $F\equiv G$

Definición

Si (A,V,φ) es un espacio afín y $a+F$ o $b+G$ son dos variedades lineales, se dice que $a+F$ y $b+G$ se **cruzan** ni son paralelas ni se cortan

- cortan: contenido, cortan
  - no se cortan: paralelas y ≠, cruzarse
- paralelas: contenido, paralelas
  - no paralelas: cortan, cruzan

"vamoh a suponeh"

$a+F=\{b\in A \quad b=a+\vec{f},\ \vec{f}\in F\}$

$L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y-1=0\}$ $\quad a=(0,1)\quad a+(x,-x)$

$\{(x,-x)\}=Env(\{(1,-1)\})=\langle(1,-1)\rangle$ $\quad (x,y)=(x,1-x)$

↳ su notación de Env

En $(\mathbb{Z}_3)^2$ ¿Cuántos puntos hay? $\quad (\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^n,\varphi)$ espacio afín estándar

$\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$

$(\bar{0},\bar{0})\quad(\bar{0},\bar{1})\quad(\bar{0},\bar{2})$

$(\bar{1},\bar{0})\quad(\bar{1},\bar{1})\quad(\bar{1},\bar{2})$

$(\bar{2},\bar{0})\quad(\bar{2},\bar{1})\quad(\bar{2},\bar{2})$

$(\bar{a},\bar{b})+\bar{\alpha}(\bar{1},\bar{1})$

$(\bar{0},\bar{1})+\bar{\alpha}(\bar{1},\bar{1})$

¿Cuántos vectores hay?

¿Cuántos puntos tiene la recta?