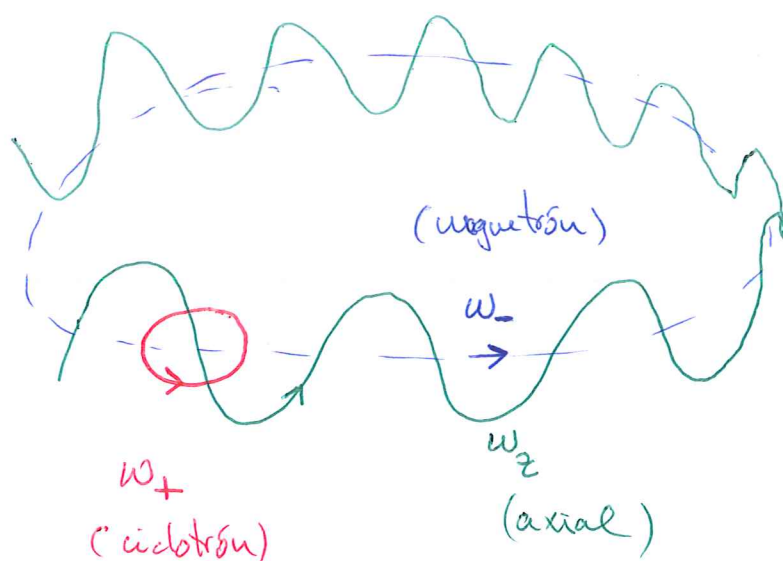


### TEMA 3. MASAS NUCLEARES, EL MODELO DE LA GOTA LÍQUIDA Y LA FÓRMULA SEMI-EMPÍRICA DE LAS MASAS

Las masas nucleares pueden ser medidas con gran precisión ( $10^{-8}$  en algunos núcleos). Hay principalmente tres métodos de medida:

1. Trampa de Penning. Se atrapan iones con una combinación de  $\vec{B}$  axial uniforme y  $\vec{E}$  cuadrupolar no uniforme en un dispositivo cilíndrico. Los iones tienen tres modos de vibración:



Se encuentra que

$$\omega_+ + \omega_- = qB/m$$

(parecido a la ciclotrón usual).

2. Espectrómetro de masas con atrapamiento anular  
la diferencia de frecuencia de rotación alrededor del anillo para dos nucleidos es

$$\frac{\Delta f}{f} \approx - \frac{\Delta m}{m}$$

$\hookrightarrow \frac{A}{Z} X$  con  $A$  y  $Z$  especificados

Conociendo una  $m_{ref}$ , se mide  $m$ .

3. Espectrómetro de masas con reflexión múltiple.

los iones se reflejan entre dos espejos de forma que su tiempo de vuelo,  $T$ , es incrementado y se puede medir con mucha precisión.

$$T = \alpha \sqrt{\frac{m}{q}} + \beta \quad (\alpha, \beta \text{ parámetros calibrables con referencia})$$

pasamos ahora a una sección muy importante:

### Energía de ligadura:

Una podría pensar que la masa de un nucleido es

$$Zm_p + Nm_n$$

En realidad es ligeramente menor, por una cantidad llamada defecto de masa,  $\Delta m_r$ .

Existe una energía de ligadura,  $B(A, Z)$ , que es la energía que se requeriría para separar los nucleones en el núcleo.

De esta forma, como masa y energía son equivalentes,

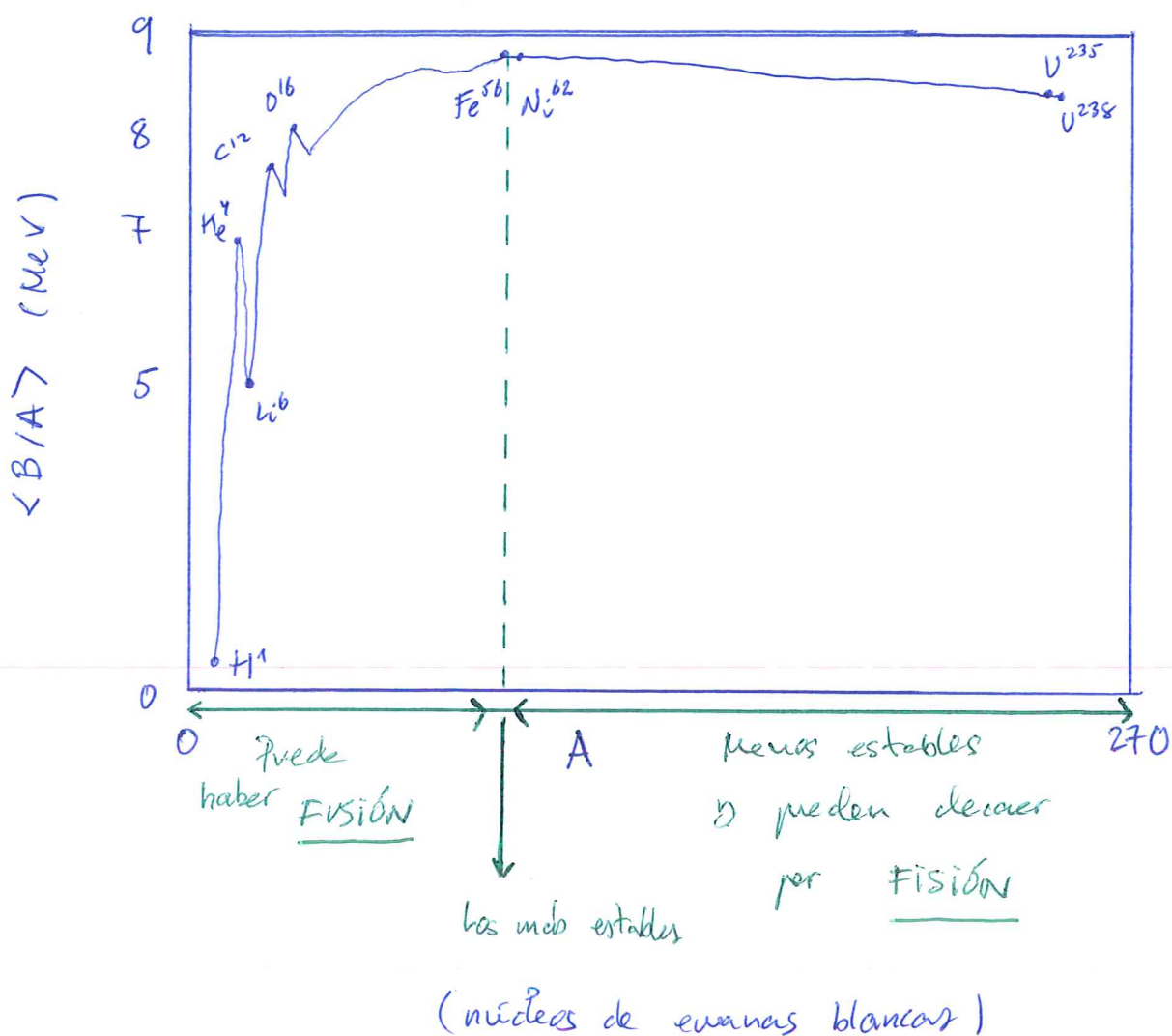
$$\Delta m_r = \frac{B(A, Z)}{c^2}$$

y la masa de un nucleido es

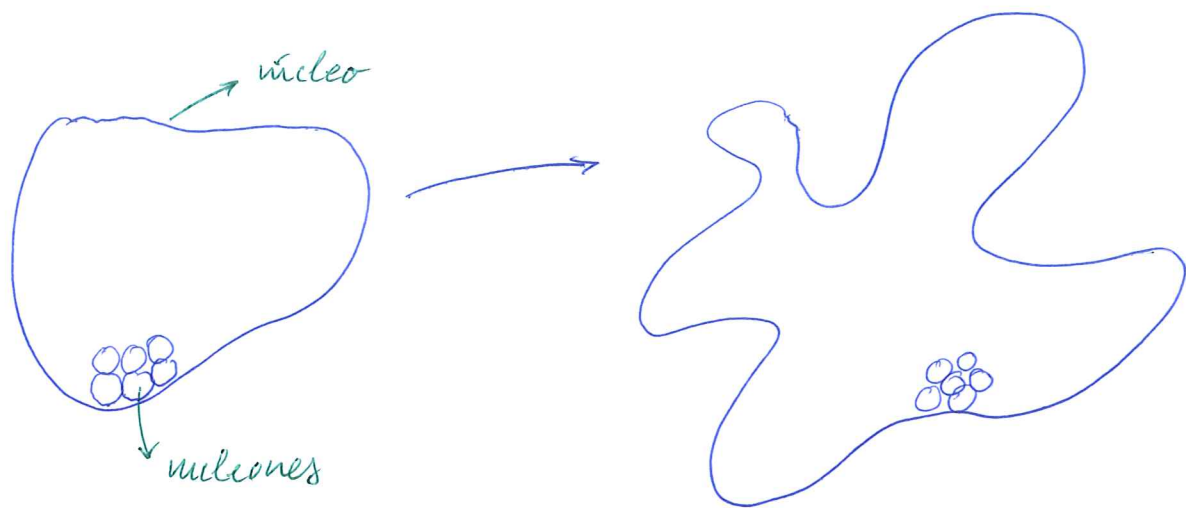
$$m_r = Zm_p + Nm_n - \frac{B(A, Z)}{c^2}$$

la energía de ligadura tiene una componente de corto alcance (nuclear) y una de largo alcance (electromagnética).

Es interesante ver el comportamiento de la energía de ligadura por nucleón,  $B(A, Z)/A$ :



¿Cómo podemos calcular la energía de ligadura?  
 con el modelo de la gota líquida



Como en una gota líquida, el núcleo puede cambiar de forma pero no de densidad.

La densidad nuclear la podemos estimar así:

$$\rho = \frac{m}{V} \sim \frac{Zm_p + Nm_n}{R^3} \sim \frac{Am_p}{(r_0 A^{1/3})^3} = \frac{Am_p}{r_0^3 A} = \frac{m_p}{r_0^3}$$

$m_p \approx m_n$

y sale  $\rho \sim 10^{17} \text{ kg/m}^3$

( Hemos despreciado  $B$  porque  $B_{\text{máx}} \sim 9 \text{ MeV}$

y  $m_p \sim 940 \text{ MeV}$  ).

Podemos describir la fórmula semiempírica de las masas (Bethe-Weizsäcker) :



Hay cinco términos, algunos clásicos y otros cuánticos:

### 1. Término de volumen

En primera instancia,  $B$  es proporcional al número de nucleones. Cada nucleón solo está ligado a los que le rodean. Recordemos que  $R \sim A^{1/3}$  y  $V \sim A$ ; por lo tanto, la primera contribución es:

$$a_v A \quad (a_v \text{ es un coeficiente})$$

### 2. Término de superficie

Mediante el primer término estamos sobrestimando  $B$  porque los nucleones superficiales solo interactúan con los del interior. De esta manera,  $B$  se reduce proporcionalmente a la superficie de la gota.

$$- a_s A^{2/3}$$

### 3. Término de Coulomb

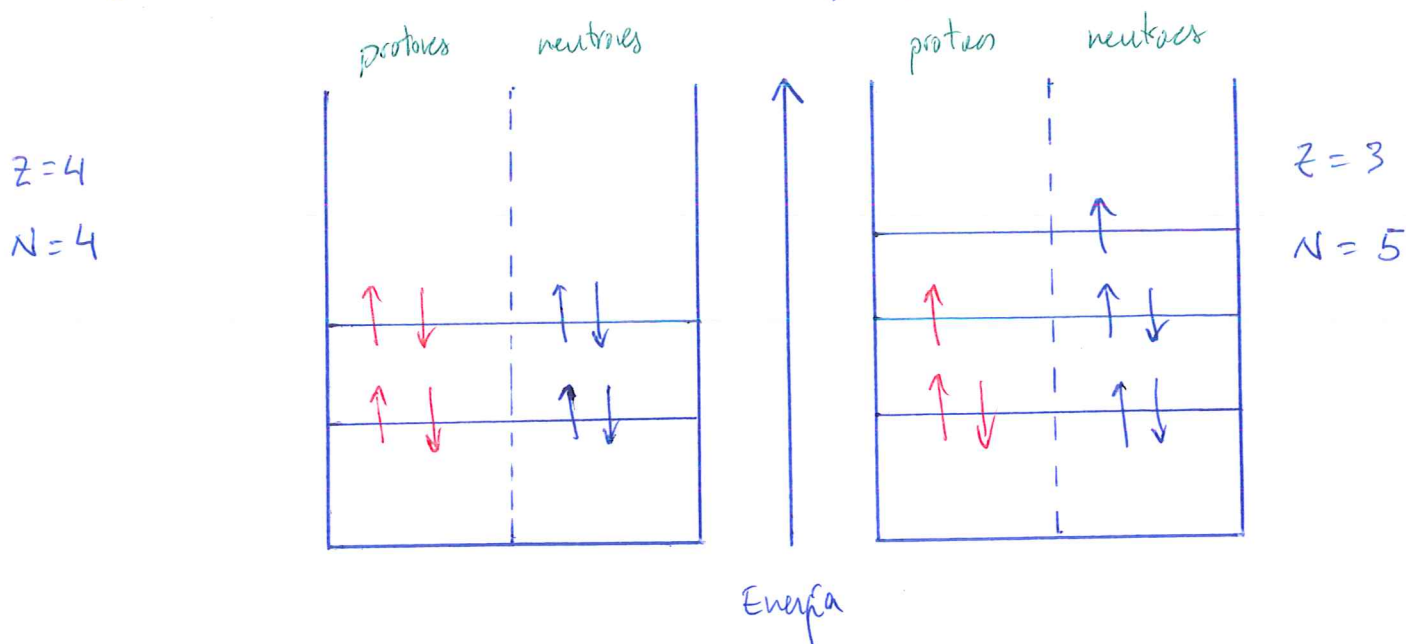
La B anterior (1, 2), principalmente de corto alcance, se reduce todavía más debido a la repulsión Coulombiana entre los protones.

$$-a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

### 4. Término de asimetría

En una contribución cuántica debida al principio de exclusión de Pauli. (Solo permite dos p o dos n con spin opuesto en cada estado de energía)

Veamos la idea con un ejemplo.



Si esos diagramas representan el estado fundamental de dos nucleidos, la energía del de la derecha es superior.

Recordemos de Mecánica Estadística que la energía del estado fundamental de partículas de spin  $1/2$  no interactuantes y confinadas en un volumen  $V$  es

$$E_0 = \pi^{4/3} \frac{\hbar^2}{20m} \frac{(3n)^{5/3}}{V^{2/3}}$$

(no es correcto pero sirve para la estimación)

Por lo tanto, como  $m_p \approx m_n$ , queda algo proporcional a

$$\frac{Z^{5/3} + N^{5/3}}{V^{2/3}}$$

Si  $Z=N$  tendríamos

$$Z = \frac{1}{2} A$$

$$N = \frac{1}{2} A$$



Consideremos correcciones a lo anterior en  
 $x \equiv z - N$ .

Escribimos

$$z = \frac{1}{2} [A + (z - N)]$$

$$N = \frac{1}{2} [A - (z - N)]$$

y desarrollamos en serie alrededor de  $x = 0$ .

$$\frac{z^{5/3} + N^{5/3}}{V^{2/3}} \approx \left( A^{5/3} + \frac{(z - N)^2}{A^{1/3}} \right) \frac{1}{A^{2/3}}$$

$$= A + \frac{(z - N)^2}{A}$$

⏟

1ª corrección debido  
a la discrepancia entre  
 $z$  y  $N$ .

Obtenemos entonces

$$- a_A \frac{(z - N)^2}{A}$$

## 5. Término de apareamiento

La idea es que partículas idénticas de spin  $1/2$  están más fuertemente ligadas en pares con spins opuestos.

$$B(Z_{\text{par}} \text{ o } N_{\text{par}}) > B(Z_{\text{impar}} \text{ o } N_{\text{impar}})$$

Esto da lugar a un nuevo término que es

- positivo si  $Z_{\text{par}}$  y  $N_{\text{par}}$
- negativo si  $Z_{\text{impar}}$  y  $N_{\text{impar}}$
- cero si uno es par y otro impar

lo expresamos de la forma

$$a_p \frac{[(-1)^Z + (-1)^N]}{2} A^{K_p}$$

donde  $K_p$  se fija con el experimento.

Actualmente, tenemos

$$a_p \frac{[(-1)^Z + (-1)^N]}{2 A^{1/2}}$$

Resumiendo, la fórmula semiempírica de las masas es

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(Z-N)^2}{A} + a_p \frac{[(-1)^Z + (-1)^N]}{2A^{1/2}}$$

con  $N = A - Z$ .

los parámetros con los que se obtiene una buena comparación (mejor del 1% para núcleos  $A > 20$ )

son

$$a_v = 15.78 \text{ MeV}$$

$$a_s = 17.90 \text{ MeV}$$

$$a_c = 0.724 \text{ MeV}$$

$$a_A = 23.72 \text{ MeV}$$

$$a_p = 11.0 \text{ MeV}$$

Todo lo anterior era para el estado fundamental de los núcleos.

¿Qué ocurre con los estados excitados?

Aparecen niveles colectivos de rotación y de vibración.

$E_R = E_{rot} = \frac{1}{2} K \omega^2$  y aproximamos el momento por

$$K = \frac{1}{2} M R^2$$

Como  $L = K \omega = \hbar \sqrt{l(l+1)}$ , entonces

$$E_R \sim \frac{\hbar^2}{MR^2} l(l+1) \sim \frac{\hbar^2}{A^{2/3}} l(l+1)$$

Para los niveles vibratorios hacemos lo siguiente.

Sabemos que el coeficiente de tensión superficial

$\alpha$  es tal que

$$E_{sup} = \alpha S$$

$$E_{sup} = a_s A^{2/3}$$

$$S = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{sup} = \alpha S \\ E_{sup} = a_s A^{2/3} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{a_s}{4\pi r_0^2} \sim$$

$$\sim 1.13 - 0.70 \text{ MeV / fm}^2$$

pero sabemos que la tensión superficial es la frecuencia restauradora en la vibración (clásica) de una gota líquida, luego la frecuencia de vibración será del orden de  $\sqrt{\alpha/M}$  (típico)

Entonces

$$\omega^2 \propto \frac{\alpha}{\int R^3} = \frac{\alpha}{M} \quad y$$

$$E_v \sim \hbar \omega \sim \hbar \sqrt{\frac{\alpha}{M}} \sim \hbar \sqrt{\frac{\alpha}{A}}$$

Volviendo la fórmula semiempírica de las masas, es interesante preguntarse cuáles son (es) es isóbaros (un mismo  $A$  y distinto  $Z$ ) más estable para un  $A$  dado.

Derivando  $B(A, Z)$  respecto de  $Z$  ignorando el término de apareamiento, queda



$$\left. \frac{\partial B(A, z)}{\partial z} \right|_A = -2a_c \frac{z}{A^{1/3}} + 4a_A \frac{(A-2z)}{A}$$

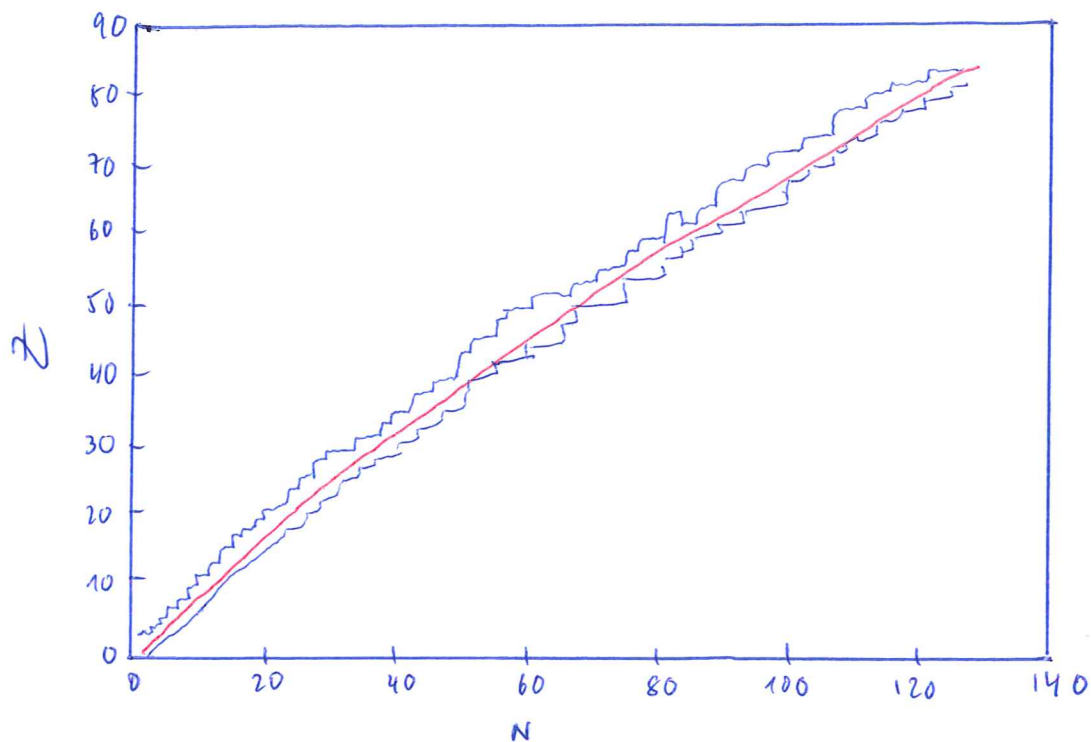
Imponiendo  $\left. \frac{\partial B(A, z)}{\partial z} \right|_A = 0$ , obtenemos

una energía de ligadura máxima en

$$Z_m = \frac{A}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} \frac{a_c}{a_A} A^{2/3}\right)} \quad (*)$$

- Si  $A$  impar, el término de pairing es cero y, por lo tanto, el isóbaro más estable para  $A$  impar es el dado por el entero más próximo al valor dado por (\*).
- Si  $A$  es par, la estabilidad ocurre para el entero par más próximo al dado por (\*).

Respecto a la estabilidad de isótopos, se encuentra lo siguiente:



la línea roja es la ecuación (•).

Si  $A < 20$   $Z \approx N$  para núcleos estables como resultado del término de simetría.

Si  $A > 20$ , se va acercando a estabilidad donde  $N > Z$ . El responsable es el término de Coulomb porque los p tienen que superar la