Páctica 1.

1. ¿Existe algún valor real del parámetro α tal que e^x es solución de la edo $y' = y^2 + \alpha e^x y + e^{2x} + e^x$?

2. Consideramos la edo $y' = 2xy^2 - 2xy$. Se pide

   a) Obtener las soluciones constantes.

   b) Sin calcular la solución explícitamente y suponiendo que por cada punto del plano pasa una única solución, determinar las regiones del plano donde las soluciones son crecientes. Lo mismo para decrecientes y además encontrar los puntos donde las soluciones tendrán un máximo o un mínimo.

   c) Calcular la solución y comprobar el resultado obtenido en el apartado anterior.

3. Dar la solución de $y' = e^{x^2}\cos(y^2)$ que verifica $y(0) = \sqrt{\frac{7\pi}{2}}$.

Páctica 2. Dar la solución general y las soluciones singulares de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y'(z) = z\cos(y^2)$.
2. $y'(x) = 3xy + 2x - 2 - 3y$.
3. $y'(t) = \frac{2ty}{3t^2 - y^2}$.

Páctica 3.

1. Demostrar que las soluciones de $y' = y^4 + 1$ son monótonas crecientes.

2. Dar las soluciones de la edo $y' = \frac{2x^2+xy+y^2}{2x^2+3xy-y^2}$ que pasan por los puntos $(1,1)$, $(1,-2)$ y $(1,-1)$.

3. Dada la ecuación $y' = g(y)$ con g continua, demostrar que cualquier solución de dicha ecuación es monótona en cualquier intervalo (x_0, x_1), donde x_0 y x_1 son dos ceros consecutivos y distintos de g.

1. Clasificar las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y' = \frac{2xy}{3x^2-y^2}$.

b) $y'(x) = (x-y)^2 + 1$.

c) $xy^2 + 2 = (3 - x^2y)y'$.

d) $y' = \pi^{t+y}$.

e) $t^2y' + 2t^3y = y^2 + 2t^2y^2$.

f) $y = xy' + \sqrt{a^2(y')^2 + b^2}$.

g) $(x + 3y + 1)y' = 3x + y - 1$.

h) $x^2y' = x^2y^2 - xy - 1$.

2. Dar una solución del apartado g) que verifica $y(1) = 0$.

3. Dar una solución del apartado h) que verifica $y(1) = 1$.

Sea $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\infty < x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ Estudiar la existencia y unicidad de soluciones del PVI

¿existe alguna solución definida en todos los reales?

2. $\begin{cases} y'(x) = -x\sqrt{|y|} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ Estudiar la unicidad local de soluciones. Si y_0 es la solución que pasa por (x_0, y_0) con $y_0 > 0$ demostrar que dicha sol corta a la sol constante.

Dar el intervalo de definición de y_0 donde dicha solución es única.

1: $f_n(x) = \sin(nx)$, $n \geq 1$ no es equicontinua en $[-\Pi, \Pi]$

función equicontinua $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta, |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \ \forall n \geq 1$ con $x \in [-\Pi, \Pi]$

$\left.\begin{array}{l} \bullet |x-y| < \delta \\ \bullet |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \end{array}\right\}$ si tomamos $x = \frac{\Pi}{2n}$, $y = 0$ $\quad \left\{\begin{array}{l} 1.\ |x-y| = \frac{\Pi}{2n} < \delta \text{ para cierto } n \geq n_0 \\ 2.\ |f_n(x) - f_n(y)| = |\sin(n\frac{\Pi}{2n}) - \sin(0)| = 1 > \varepsilon \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ No es equicontinua ya que podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon = 1)$ tal que no se cumpla la definición de equicontinuidad $\square$

2- $\frac{x^n}{n} = f_n(x)$ es equicontinua en $[0, 1]$

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| = |\frac{x^n}{n} - \frac{y^n}{n}| = \frac{1}{n}|x^n - y^n| \overset{**}{\leq} \frac{1}{n} = \delta < \varepsilon$ $\Rightarrow$ Basta tomar $\varepsilon > \frac{1}{n}$ para que $f_n(x)$ sea equicontinua

$^{**} |x^n - y^n| \left\{\begin{array}{l} x^n - y^n \leq 1 - (0) = 1 \\ y^n - x^n \leq 1 - (0) = 1 \end{array}\right. \Rightarrow |x^n - y^n| \leq 1$

3- Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones continuas en $[a,b]$ que no converge uniformemente en $[a,b]$ $\forall n \geq 1$, Sea $F_n(x) = \int_a^x \sin(f_n(t))dt$ donde $x \in [a,b]$, ¿Existe una subsucesión uniformemente convergente de $(f_n)_n$?

TEOREMA ASCOLI-ARCELÀ

1. ¿Equicontinua? $|F_n(x) - F_n(x_0)| = \left|\int_a^x \sin(f_n(t))dt - \int_a^{x_0} \sin(f(t))dt\right| \overset{(x > x_0)}{=}$

$= \left|\int_{x_0}^x \sin(f_n(t))dt\right| \underset{\text{Acotando por } 1}{\leq} \left|\int_{x_0}^x dt\right| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ ✓

2. ¿Uniformemente acotada? $|F_n(x)| = \left|\int_x^a \sin(f_n(t))dt\right| \leq \left|\int_a^x dt\right| = |x-a| \leq |b-a| = K$ ✓

$\Rightarrow$ Por el Tma. Ascoli-Arcelà concluyo que existirá una subsucesión de $(f_n)_n$ uniformemente convergente $\square$

1. Sea $f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ Estudiar la existencia y la unicidad de soluciones del PVI

¿Existe alguna solución definida en todo $\mathbb{R}$?

Por el corolario 1.38 "romántico", sabemos que si $f(x,y)$ es continua y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ es continuo, podemos garantizar la existencia y unicidad de soluciones en un intervalo $[x_0-r, x_0+r]$

Sea (t_0,y_0) un punto de $D\subset\mathbb{R}^2$ y f continua en $D \Rightarrow \exists r>0$: PVI tiene solución en $[t_0-r, t_0+r]$
Si además $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(t_0,y_0)$ y es continua en $(t_0,y_0) \rightarrow \exists r'$: $0<r'\leq r \rightarrow$ tenemos unicidad en $[t_0-r', t_0+r']$

Observamos una discontinuidad en $x_0=1$ por lo que tratamos 3 casos:

- Caso 1 $x_0>1$

$\left.\begin{array}{l} f(x,y) \text{ continua en } \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x_0\in\mathbb{R}: x_0>1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \rightarrow \text{continua en } \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Por el corolario 'romántico' $\Rightarrow \exists!$ Solución del PVI en el intervalo $[x_0-r', x_0+r']$

- Caso 2 $x_0<1$

$\left.\begin{array}{l} f(x,y) \text{ continua en } \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x_0\in\mathbb{R}: x_0<1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \rightarrow \text{continua en } \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Por el corolario 'romántico' $\Rightarrow \exists!$ Solución del PVI en el intervalo $[x_0-r', x_0+r']$

- Caso 3 $x_0=1$

Estudiamos si es localmente Lipschitz en $x_0=1$

$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|=0\leq L|y_1-y_2| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x,y) \text{ es localmente Lipschitz en } x_0=1 \\ f(x,y) \text{ no es continua en } x_0=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ No puedo aplicar el Tma. Picard ni Tma. Peano

Resolviendo la edo por variables separables:

- Para $x_0\leq 1$

$f(x,y)=0$ si $x\leq 1$

$y'=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow dy=0 \Leftrightarrow y(x)=0 \rightarrow$ Solución Singular

- Para $x_0>1$

$y'=1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=1 \Leftrightarrow dy=dx \Leftrightarrow y(x)=x+C$

$$\boxed{y(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 1 \\ x+C & \text{si } x>1 \end{cases}}$$

Podemos garantizar la existencia en todos los reales, pero la unicidad solo es garantizable en $x_0\neq 1$

2. Sea el PVI $\begin{cases} y'(x)=-x\sqrt{|y|} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ Estudiar la unicidad local de soluciones. Si y_0 es la solución que pasa por (x_0,y_0) con $y_0>0$, demostrar que dicha solución corta a la solución constante. Dar el intervalo de definición de y_0 donde dicha solución es única.

Por el corolario 1.38 "romántico", sabemos que si $f(x,y)$ es continua y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ es continuo, podemos garantizar la existencia y unicidad de soluciones en un intervalo $[x_0-r, x_0+r]$

Sea (t_0,y_0) un punto de $D\subset\mathbb{R}^2$ y f continua en $D \Rightarrow \exists r>0$: PVI tiene solución en $[t_0-r, t_0+r]$
Si además $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(t_0,y_0)$ y es continua en $(t_0,y_0) \rightarrow \exists r'$: $0<r'\leq r \rightarrow$ tenemos unicidad en $[t_0-r', t_0+r']$

$\left.\begin{array}{l} \text{Puesto que } f(x,y) \text{ es continua en } \mathbb{R}^2 \text{ estudiamos } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ y su respectiva continuidad:} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{x_0 y_0}{2(\sqrt{|y_0|})^3} \rightarrow \text{Continua en } \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y_0\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Por el corolario 'romántico' $\exists!$ solución en el intervalo $[x_0-r', x_0+r']$ si $y_0\neq 0$

Si $y_0=0$, tendremos la solución singular, es decir, la solución constante. Observamos como la solución dada por el corolario UP está definida en $y_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ya que en 0 una solución posible es la solución singular

Esta solución debe, por tanto, cortar a la solución dada por el corolario.

Corolario "Romántico" 1.38 $\rightarrow$ (Antiguo Corolario 2.4)

> Sea $D\subset\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) un punto de D y $f(x,y)$ una función continua en $D \Rightarrow \exists$ sol del PVI en $[x_0-r, x_0+r]$ con $r>0$
> Si $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ y es continua en $(x_0,y_0) \Rightarrow \exists r'$: $0<r'\leq r$ donde $\exists!$ sol del PVI en $[x_0-r', x_0+r']$

Práctica 8.

1. Supongamos que $f(x,y)$ es una función continua en $\Re^2$ y decreciente en la segunda variable. Demostrar si y_1 e y_2 son soluciones del Problema de Valor Inicial $y' = f(x,y)$ con $y(x_0) = y_0$ en $[x_0, x_0+\delta]$ entonces $y_1(x) = y_2(x)$ para todo $x \in [x_0, x_0+\delta]$.

2. Se considera el problema de Cauchy

$$(1)\begin{cases} y'(x) & = & f(x,y) \\ y(0) & = & 0 \end{cases}.$$

donde

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \quad e \quad y \in \Re \\ 2x & si \quad 0 < x < 1 \quad e \quad y < 0 \\ 2x - \frac{4y}{x} & si \quad 0 < x < 1 \quad y \quad 0 \leq y \leq x^2 \\ -2x & si \quad 0 < x < 1 \quad y \quad x^2 \leq y \end{cases},$$

a) Demostrar que (1) tiene solución única.

b) Calcular las iteradas de Picard y observar que no hay convergencia.

Práctica 8.

1. Sea f una función real y continua definida en $(a,b)\times\mathbb{R}$, verificando que existen f_1 y f_2 funciones continuas definidas en (a,b) tales que

$$f_1(x) \leq f(x,y) \leq f_2(x), \quad \forall (x,y) \in (a,b)\times\mathbb{R}.$$

Demostrar que toda solución maximal de $y' = f(x,y)$ está definida en todo (a,b).

2. Usar el ejercicio anterior para demostrar que todas las soluciones maximales de $y' = x^3\sin(\cos(\sin(e^{xy})))$ están definidas en todo $\mathbb{R}$.

3. Sea f una función real, continua y localmente Lipschitz en la segunda variable, definida en un abierto $D\subset\mathbb{R}^2$. Sean y_1 e y_2 dos soluciones de $y' = f(x,y)$ definidas en un mismo intervalo (a,b). Demostrar que si para algún $x_0\in(a,b)$ se cumple que $y_1(x_0) < y_2(x_0)$ entonces se verifica que

$$y_1(x) < y_2(x), \quad \forall x\in(a,b).$$

4. Demostrar que el Problema de Valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) &= y^2+y-2 \\ y(0) &= 0 \end{cases},$$

tiene una única solución definida en todo $\mathbb{R}$, que existen los límites en $\pm\infty$ de dicha solución y calcularlos.

Práctica 10.

1. Sean $a \leq b$ dos números reales. Consideramos la ecuación diferencial

$$y''' - (a+b+2)y'' + (2a+2b+ab)y' - 2aby = f(x), \qquad (1)$$

   Se pide

   a) Dar la solución de la parte homogénea de la ecuación (1), en función de a y b.

   b) Indicar una solución particular de (1) cuando $-a = b = 2$ y $f(x) = x + x^2e^{2x}$.

   c) Dar la solución general de (1) cuando $-a = b = 2$ y $f(x) = 16e^{-2x}$.

2. Dar la solución general de

$$x^2y'' - 2y = 3x^2 - 1, \quad x > 0.$$

Práctica 11.

1. Consideremos la ecuación diferencial con coeficientes continuos sobre un intervalo I

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{2}$$

de la que conocemos una solución particular no nula en I, $y_1(x)$. Demostrar que el cambio de variable $y(x) = y_1(x)z(x)$ reduce la ecuación a una ecuación lineal homogénea de orden $n-1$ en la variable $w(x) = z'(x)$. Si la ecuación en $w(x)$ tiene un conjunto fundamental de soluciones $\{w_2(x), \ldots, w_n(x)\}$, probar que el conjunto

$$\{y_1(x), z_2(x)y_1(x), z_3(x)y_1(x), \ldots, z_n(x)y_1(x)\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación (2), siendo $z_i = \int w_i(x)dx$ para $i = 2, \ldots, n$.

Este resultado, en su versión $n = 2$ queda ampliado de la siguiente manera. Si $y_1(x)$ es una solución particular no nula en I de

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{3}$$

entonces

$$\{y_1(x), y_1(x)\int \frac{1}{y_1(x)^2}\exp\left(-\int a_1(x)dx\right)dx\},$$

son un conjunto fundamental de soluciones en I de la ecuación (3).

2. Dar la solución general de la ecuación

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2, \tag{4}$$

Práctica 12.

Indicar la solución general del sistema $Y' = AY$, donde

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $a \leq 1$.

2. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \Re$.

Práctica 13.

1. Consideremos dos muelles en posición vertical de constantes k_1 y k_2, unidos a dos partículas de masas m_1 y m_2 tal como se muestra en la figura. Supongamos que los cuerpos están en equilibrio. Tiramos del cuerpo m_2 hacia abajo, produciéndose también un desplazamiento de m_1. Suponiendo que no hay rozamiento, deducir que si denotamos por $x_1(t)$ y $x_2(t)$ la función que describe el desplazamiento desde la posición de equilibrio de la masa m_1 y m_2 respectivamente, deducir que dichas funciones verifican el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} m_1 x_1''(t) &= -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t) \\ m_2 x_2''(t) &= k_2 x_1(t) - k_2 x_2(t) \end{cases}$$

2. Dos grandes tanques, cada uno de 100 litros, se encuentran interconectados mediante varios tubos. El liquido del tanque A fluye hacia el tanque B, a razón de 3 litros por minuto y del tanque B hacia el tanque A, a razón de 1 litro por minuto. Supondremos que el líquido se mantienen bien agitado. Una solución de salmuera con una concentración de 2 kilogramos por litro fluye del exterior al tanque A a razón de 6 litros por minuto. La solución fluye del tanque A al exterior a razón de 4 litros por minuto y del tanque B al exterior a razón de 2 litros por minuto. Si inicialmente el tanque A contenía agua pura y el tanque B 200 kilogramos de sal, determinar la sal que contienen los tanques A y B en cualquier instante t.