**6.-** (1.25 puntos) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |a| < 1$. Considerar la ecuación $(z-1)^n = ae^{-z}$, $z \in \mathbb{C}$. Calcular el número de soluciones (contando multiplicidad) en el conjunto $D(1,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$.

T$^{ma}$ de Rouché: $g, h : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfas en $A$ simplemente conexo tal que $|g(z)| > |h(z)|$ en $\partial A$, entonces $g(z)$ y $g(z)+h(z)$ tienen el mismo número de ceros en $A$

Sea $D$ el disco $D(1,1)$, radio 1 centrado en 1: $(z-1)^n = ae^{-z} \iff (z-1)^n - ae^{-z} = 0$ con $a, z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

si llamamos $g(z) = (z-1)^n$ y $h(z) = -ae^{-z}$

$$|g(z)| = |(z-1)^n| \underset{\partial D}{<} 1 \qquad |h(z)| = |-ae^{-z}| = |ae^{-z}| = |a| \cdot |e^{-z}| < |e^{-z}| = e^{-\mathrm{Re}(z)} \underset{\partial D}{<} e^{-2}$$

y como $1 > e^{-2} \Rightarrow |g(z)| > |h(z)|$ en $D \Rightarrow g(z)$ y $g(z)+h(z)$ tienen el mismo número de ceros en $D \Rightarrow$

$\Rightarrow$ como $g(z) = (z-1)^n$ solo tiene un cero en $\mathbb{C}$ (de multiplicidad $n$) y éste está dentro de $D \Rightarrow$
$\Rightarrow f(z) = g(z) + h(z) = (z-1)^n - ae^{-z}$ tiene $n$ ceros en $D$

**1.-** Sea $f : U \to \mathbb{C}$, con $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ($z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$), una función holomorfa en un conjunto abierto $U$.

a) (0.75 puntos) Probar que $f$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann si, y solo si, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, donde $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ (llamada derivada de Wirtinger de $f$ con respecto a $\bar{z}$).

$$* \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \overset{*}{=} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \quad (1)$$

$$\text{Cauchy-Riemann} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

$(\Rightarrow)$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left[\cancelto{0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)} + i\cancelto{0}{\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)}\right] = 0$$

$(\Leftarrow)$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{C.R. } (2)$$

$\square$

b) (0.75 puntos) Probar que $f(x+iy) = \dfrac{2024e^{-x}}{\cos y + i \operatorname{sen} y}$, $x, y \in \mathbb{R}$, es una función entera;

$$\cos y + i\sin y = e^{iy} \Rightarrow f(x+iy) = \frac{2024e^{-x}}{e^{iy}} = 2024e^{-x}e^{-iy} = 2024e^{-(x+iy)} = 2024e^{-z} = \frac{2024}{e^z}$$

Y como $e^z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \Rightarrow f(z)$ holomorfa en $\mathbb{C} \Rightarrow f$ entera
$\left(\frac{d}{dz}e^z = e^z\right)$ ✓

**2.-** 2.1) (0.75 puntos) Demostrar que $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por definición $\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{1}{2}(e^{-z} + e^{z})\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})\right)^2 = \frac{1}{4}\left[(\cancel{e^{-2z}} + \cancel{e^{2z}} + 2) - (\cancel{e^{2z}} + \cancel{e^{-2z}} - 2)\right] =$
$= \frac{1}{4}(2-(-2)) = \frac{4}{4} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ $\square$

2.2) (1.25 puntos) Calcular $\int_C \frac{\cosh^2(\pi z)}{(z^2-4)^2}\,dz$, donde $C$ es el camino $C(2,3) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 3\}$ recorrido en sentido positivo.

$$\int_C \frac{\cosh^2(\pi z)}{(z^2-4)^2}dz \text{ con } C(2,3)=\{z\in\mathbb{C}: |z-2|=3\} = \quad \left( (z^2-4)^2=0 \iff z^2-4=0 \iff z^2=4 \iff z=\pm 2 \right)$$

$$= \int_C \frac{\cosh^2(\pi z)}{(z-2)^2(z+2)^2}dz$$

y como $2 \in C(2,3)$ pero $2 \notin C(2,3)$, vamos a calcular la integral con el T^ma de los Residuos ($C(2,3)$ es simplemente conexo y recorremos $\partial C$ en sentido positivo y $\gamma = \partial C$ es regular simple y cerrada, conteniendo a $z_0 = 2$)

$$\Rightarrow \int_C \frac{\cosh^2(\pi z)}{(z-2)^2(z+2)^2}dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}\left(\frac{\cosh^2(\pi z)}{(z-2)^2(z+2)^2}, 2\right)$$

y como $z_0 = 2$ es un polo de orden 2, para calcular su residuo usamos la fórmula

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left((z-z_0)^N f(z)\right)$$ donde $N$ es el orden. En nuestro caso $N=2 \Rightarrow$

$$\mathrm{Res}(f,2) = \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-2)^2}\frac{\cosh^2(\pi z)}{\cancel{(z-2)^2}(z+2)^2}\right) = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left(\frac{\cosh(\pi z)}{z+2}\right)^2 = \lim_{z\to 2} 2\frac{\cosh(\pi z)}{z+2}\frac{d}{dz}\left(\frac{\cosh(\pi z)}{z+2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 2}\left[2\frac{\cosh(\pi z)}{z+2}\cdot\frac{\pi\sinh(\pi z)(z+2)-\cosh(\pi z)}{(z+2)^2}\right] = 2\lim_{z\to 2}\frac{\pi\sinh(\pi z)\cosh(\pi z)(z+2)-\cosh^2(\pi z)}{(z+2)^3} =$$

$$= \frac{2}{4^3}\left(4\pi\sinh(2\pi)\cosh(2\pi)-\cosh^2(2\pi)\right) = \cosh^2(2\pi)\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{32}\right) \Rightarrow \int_C \frac{\cosh^2(\pi z)}{(z^2-4)^2}dz = \frac{\pi i}{4}\cosh^2(2\pi)\left(\pi - \frac{1}{16}\right) //$$

$\sinh(2\pi) \approx \cosh(2\pi)$

4.- (1.5 puntos) Calcular y clasificar las singularidades (incluyendo el caso $z=\infty$) de la función $f(z) = z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$.

T^ma de Clasificación de Singularidades

- Decimos que una singularidad es aislada si existe un entorno en el plano complejo que la contiene únicamente
- Decimos que una singularidad es esencial si $\lim_{z\to z_0} \neq \infty$ y $\lim_{z\to z_0} \neq k$
- Decimos que una singularidad es un polo si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ y su orden es el exponente de crecimiento en este límite
- Decimos que una singularidad aislada es evitable si $f$ es extensible analíticamente a $z_0$, es decir, que $\exists g$ definida en un entorno de $z_0$ tal que $f(z) = g(z)$ si $z \neq z_0$

No es un T^ma de clase

- En este caso, tendremos una singularidad en $z=0$ $\lim_{z\to 0} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0} z^2\frac{e^{\frac{i}{z}}-e^{-\frac{i}{z}}}{2i} = \lim_{z\to 0} z^2\frac{e^{i/z}}{2i}$

  Serie de Laurent del seno $\sin(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}w^{2n+1} \to z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}} =$

  $$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-(2n-1)} = \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(-1)^{-n}}{(1-2n)!}z^{2n+1}$$

  y como los $a_n$ los evaluamos en $n<0$ y hay infinitos términos $\Rightarrow$ la singularidad es esencial.

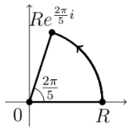
- En $z=\infty$ nos definimos $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^2}$; $\lim_{z\to 0} z\frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} =$

  $= \lim_{z\to 0}\frac{z}{z} = 1$

  ($\sin z \underset{0}{\rightsquigarrow} z$ por Taylor)

  $\Rightarrow z=\infty$ es un polo de orden 1

**5.-** (2.25 puntos) Analizar el valor de la integral $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^5}$ a partir del teorema de los residuos utilizado con el camino cerrado que aparece representado en la figura.




$\gamma$ curva cerrada, regular y simple,

$1+z^5=0 \iff z=(-1)^{1/5} \iff$

$z = e^{\frac{1}{5}(\ln|-1| + i(-\pi+2\pi n))} = e^{\frac{1}{5}i\pi(2n-1)} \iff$

$\iff z_1 = e^{-\frac{\pi i}{5}} \quad z_2 = e^{\frac{\pi i}{5}} \quad z_3 = e^{\frac{3}{5}\pi i} \quad z_4 = e^{i\pi} \quad z_5 = e^{\frac{7}{5}\pi i}$

y como el arco que describe $\gamma$ va de 0 a $\frac{2}{5}\pi i$, sabemos que sob $z_2$ queda dentro.

Como el orden de $z_2$ es 1, $\text{Res}(f, z_2) = \lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{5}}} (z - e^{\frac{\pi}{5}i}) \frac{1}{\prod_{n=0}^{4}(z-z_n)} =$

$$= \lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{5}}} \frac{1}{(z-e^{-\frac{\pi i}{5}})(z-e^{\frac{3}{5}\pi i})(z-e^{i\pi})(z-e^{7/5\pi i})} = L \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^5} = 2\pi i L$$

**3.-** i) (0.75 puntos) Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(z+2024)^n}{n}$. Calcular su radio de convergencia.

Criterio de la raíz: $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$L<1 \Rightarrow$ converge absolutamente

$L>1 \Rightarrow$ diverge

$L=1 \Rightarrow$ no concluye

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{(z+2024)^n}{n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \left|\left(\frac{z+2024}{n^{1/n}}\right)^n\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|z+2024|}{n^{1/n}} = |z+2024| < 1$$

$\Rightarrow$ la serie converge cuando $z \in D(-2024, 1) \Rightarrow$ El radio de convergencia es

$$r = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1} = \frac{1}{|z+2024|} \overset{\downarrow}{=} 1$$

ii) (0.75 puntos) Probar que $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nz)}{n}$ no converge absolutamente si $z$ no es real.

$(z = x+iy \in \mathbb{C})$

Hemos de probar que $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{\cos(nz)}{n}\right|$ diverge si $y \neq 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\cos(nz)}{n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{e^{in(x+iy)} - e^{-in(x+iy)}}{2n}\right|^{1/n} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{e^{n(ix-y)} - e^{-n(ix-y)}}{2n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{e^{inx}e^{-ny} - e^{-inx}e^{ny}}{2n}\right|^{1/n} \overset{\nearrow}{=} \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{e^{|ny|}}{2n}\right|^{1/n} =$$

Vemos que en $n\to\infty$ ni $e^{-ny}$ ni $e^{ny}$ domina, para $y<0$ $e^{-ny}$ lo hará y viceversa para $y>0 \Rightarrow$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left|\left(\frac{e^{|y|}}{\sqrt[n]{2n}}\right)^n\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{e^{|y|}}{\sqrt[n]{2n}}\right| = \infty \quad \square$$