Demostración $\vec{J}_o = \vec{J}^* + \vec{R}\times\vec{P}$

Víctor Mira Ramírez

En este documento, voy a demostrar que el momento angular que ve un observador externo es siempre la suma del momento angular del centro de masas (considerado como un punto) más el momento angular intrínseco

Por definición de centro de masas, tenemos que:

1. $\vec{R} = \frac{1}{M_T}\sum m_i \vec{r}_i \Rightarrow \vec{R}\cdot M_T = \sum m_i \vec{r}_i$

2. $\vec{V} = \frac{1}{M_T}\sum m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{V}\cdot M_T = \sum m_i \vec{v}_i$

Defino algunas propiedades que usaré más adelante:

3. $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^* \Longrightarrow \vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{R}$

4. $\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_i^* \Longrightarrow \vec{v}_i^* = \vec{v}_i - \vec{V}$

5. $\vec{P}^* = \sum m_i \vec{v}_i^* = \sum m_i(\vec{v}_i - \vec{V}) = \sum m_i \vec{v}_i - \sum m_i \vec{V} \overset{2}{=} \vec{V}\cdot M_T - \vec{V}\sum m_i = \vec{0}$

6. $\sum m_i \vec{r}_i^* = \sum m_i \vec{r}_i - \sum m_i \vec{R} \overset{1}{=} M_T\cdot\vec{R} - \vec{R}\sum m_i = \vec{0}$

7. $\vec{P} = M_T\,\vec{V}$

Por definición de momento angular:

Por propiedades del producto vectorial

$$\vec{J}_o = \sum m_i\cdot(\vec{r}_i\times\vec{v}_i) \overset{3,4}{=} \sum m_i\cdot\left[(\overbrace{\vec{R}+\vec{r}_i^*}^{3})\times(\overbrace{\vec{v}+\vec{v}_i^*}^{4})\right] \Rightarrow \sum m_i(\vec{R}\times\vec{V}) + \sum m_i(\vec{r}_i^*\times\vec{V}) + \overbrace{\sum m_i(\vec{r}_i^*\times\vec{v}_i^*)}^{\vec{J}^*} =$$

$$= \vec{R}\times\left(\sum m_i\cdot\vec{V}\right) + \vec{R}\times\left(\overbrace{\sum m_i\cdot\vec{v}_i^*}^{5}\right) + \left(\overbrace{\sum m_i\cdot\vec{r}_i^*}^{6}\right)\times\vec{v} + \vec{J}^* = \vec{R}\times(M_T\cdot\vec{V}) + \vec{R}\times\cancelto{0}{\vec{P}^*} + \vec{0}\times\vec{v} + \vec{J}^* =$$

$$= \vec{R}\times(\overbrace{M_T\cdot\vec{V}}^{7}) + \vec{R}\times\vec{0} + \vec{J}^* = \vec{R}\times\vec{P} + \vec{J}^* = \vec{J}^* + \vec{R}\times\vec{P}$$

$\square$