FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY PARA EL CÍRCULO DE LAS DERIVADAS

J.M. SEPULCRE

Teorema 1 (Fórmula integral de Cauchy para el círculo)**.** *Sea $f(z)$ analítica en un conjunto abierto U que contiene a un disco $\overline{D}(z_0, r)$ para algún $r > 0$. Entonces para cualquier $z \in D(z_0, r)$ se tiene que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

donde $C := C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$.

Teorema 2 (Fórmula integral de Cauchy para el círculo de las derivadas)**.** *Sea $f(z)$ analítica en un conjunto abierto U que contiene a un disco $\overline{D}(z_0, r)$ para algún $r > 0$. Entonces para cualquier $z \in D(z_0, r)$ existen las derivadas de cualquier orden de f en z y se tiene, para cada $n \in \mathbb{N}$, que*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

donde $C := C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$.

Demostración. Sea $z \in D(z_0, r)$. Probaremos en primer lugar que $f'(z)$ existe y $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw$. En efecto, dado $h \neq 0$ suficientemente pequeño, por la fórmula integral de Cauchy para el círculo, se tiene que $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw$ y $f(z + h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - (z + h)} dw$. Por tanto,

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i h} \int_C f(w) \left[\frac{1}{w - (z + h)} - \frac{1}{w - z} - \frac{h}{(w - z)^2} \right] dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i h} \int_C \frac{f(w)h^2}{(w - z - h)(w - z)^2} dw = \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z - h)(w - z)^2} dw.$$

Ahora, dado que $|f(w)|$ está acotada en C (por ser $f(w)$ continua y C compacto) y $\frac{1}{|w - z - h||w - z|^2}$ está acotado para h suficientemente pequeño, es claro que $\frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z - h)(w - z)^2} dw$ tiende a 0 cuando $h \to 0$ y, por tanto, queda probada la fórmula para $n = 1$ (notar que la existencia de $f'(z)$ estaba asegurada de antemano por la hipótesis de analiticidad de f). Ahora, repitiendo el proceso anterior, demostraremos la existencia de $f''(z)$ y la validez de la fórmula para $n = 2$. En efecto, utilizando la fórmula ya probada en el caso $n = 1$, observar que

$$\frac{f'(z + h) - f'(z)}{h} - \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^3} dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i h} \int_C f(w) \left[\frac{1}{[w - (z + h)]^2} - \frac{1}{(w - z)^2} - \frac{2h}{(w - z)^3} \right] dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i h}\int_C f(w)\left[\frac{3h^2(w-z)-2h^3}{[w-(z+h)]^2(w-z)^3}\right]dw,$$

que, como antes, tiende a 0 cuando $h\to 0$, lo que conduce a la fórmula en el caso $n=2$. Finalmente, empleando el mismo procedimiento, se puede demostrar por inducción la fórmula en el caso general, ya que si la suponemos cierta para $n=k$ entonces

$$\frac{f^{(k)}(z+h)-f^{(k)}(z)}{h}-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{k+2}}dw=$$

$$\frac{k!}{2\pi i h}\int_C f(w)\left[\frac{1}{[w-(z+h)]^{k+1}}-\frac{1}{(w-z)^{k+1}}-\frac{(k+1)h}{(w-z)^{k+2}}\right]dw=$$

$$\frac{k!}{2\pi i h}\int_C f(w)\left[\frac{h^2\left(-\binom{k+1}{2}+(k+1)\binom{k+1}{1}\right)(w-z)^k+}{[w-(z+h)]^{k+1}(w-z)^{k+2}}\right.$$

$$\left.\frac{+h^3\left(\binom{k+1}{3}-(k+1)\binom{k+1}{2}\right)(w-z)^{k-1}+\ldots-h^{k+2}(k+1)}{[w-(z+h)]^{k+1}(w-z)^{k+2}}\right]dw,$$

que tiende igualmente a 0. □

E-mail address: `JM.Sepulcre@ua.es`. *Twitter*: `@JMSepulcre`