Ejercicio 1

Justificar la existencia de las derivadas parciales de las funciones siguientes y calcularlas :

1. $f(x,y) = e^x \cos(y)$
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$
3. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$

$f(x,y)$ 1, 2, y 3 continuas en $\mathbb{R}^2$ y derivables $\Rightarrow$

$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin(y)$

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$

3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2x}{\sqrt{1+x^2y^2}}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y^2}}$

Ejercicio 3

Para las funciones siguientes, demostrar que admiten una derivada en toda dirección en $(0,0)$ sin ser continuas en este punto.

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x|, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2.
$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2\ln|x| & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Sea $M_0 = (0,0)$, $h = (h_1, h_2)$ y $v = (a,b)$

$$\vec{\text{grad}}\, f(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+ta, 0+tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} t b^2 \ln|ta| = 0$$ $\Rightarrow$ La derivada direccional de f en $(0,0)$ existe $\forall v$

$\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2\ln|x|$ $\Rightarrow$ No es continua en $(0,0)$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\vec{\text{grad}}\, g(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(M_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sea $M_0 = (0,0)$ y $h = (h_1, h_2)$

$$\lim_{(x,ax^2)\to(0,0)} \frac{a^2x^4}{x^4+a^2x^4} = \lim_{(x,ax^2)\to(0,0)} \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x^4}{x^4} = \frac{a^2}{2}$$ $\Rightarrow$ Depende de a $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \Rightarrow$ g no es continua en $(0,0)$

$$(0,0)\cdot(x,y) = 0x + 0y = 0,$$

Ejercicio 8

Dada la función :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{yx^2-y^3}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Se pide :

a) Determinar la continuidad de f.

b) Estudiar la continuidad de las derivadas parciales de f.
Se puede deducir, sin calcularlas, que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0$? .

Como estamos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la función f es continua por ser un cociente de polinomios (es decir, funciones continuas)

Estudiamos la continuidad en $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\sin\theta\cos^2\theta - r^3\sin^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\theta =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} r\cos(2\theta)\sin\theta = 0 = f(0,0),$$ entonces f es continua en $(0,0)$

$\Rightarrow f$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$

Estudiamos la continuidad de las derivadas parciales de f en $(0,0)$

Cambio a polares
$$\begin{cases} x = r\cos\theta & r\in\mathbb{R} \\ y = r\sin\theta & \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$$

1. $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{4r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^4} = \lim_{r\to 0^+} 4\cos\theta\sin^3\theta \nexists \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ no es continua en } (0,0)$$

2. $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = -1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^4(\cos^4\theta-4\cos^2\theta\sin^2\theta-\sin^4\theta)}{r^4} \nexists \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \text{ no es continua en } (0,0)$$

No podemos aplicar el teorema de Clairaut-Swartz para deducirlo ya que las derivadas parciales no son continuas y por tanto f no es de clase $\mathcal{C}_1$