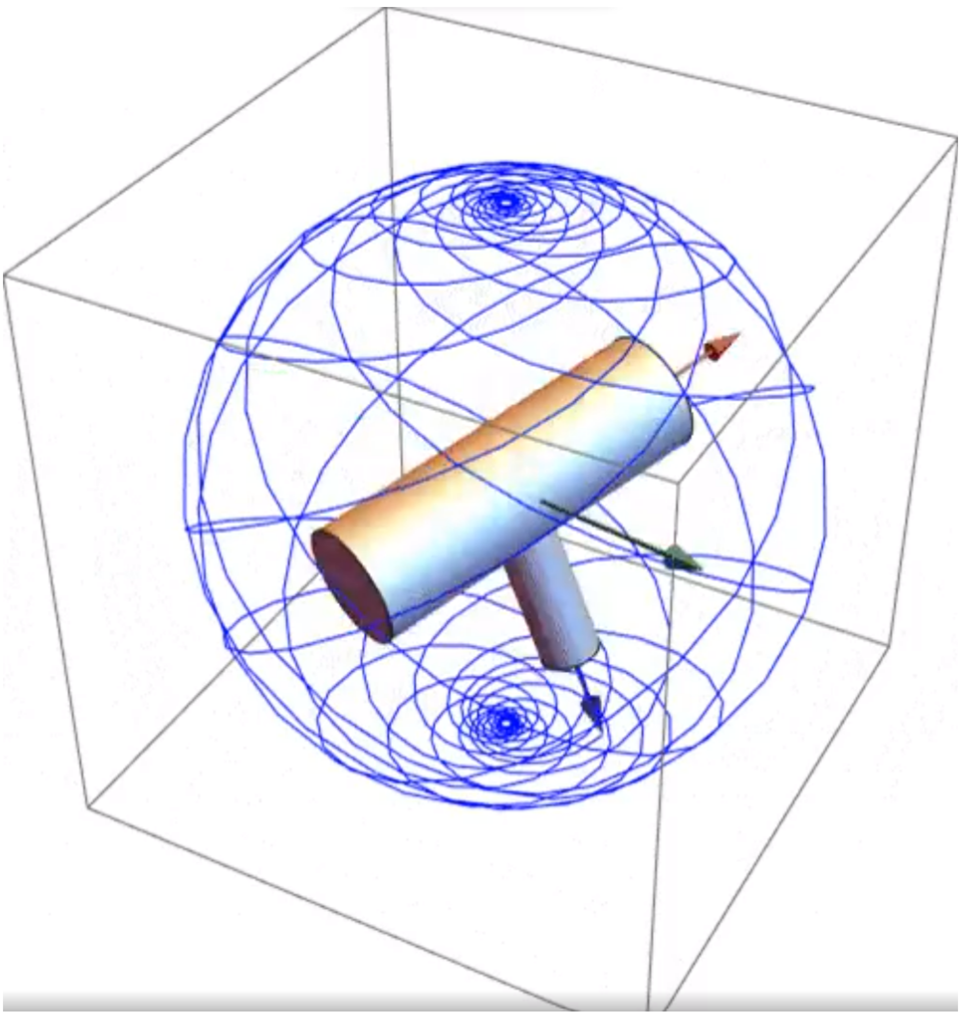
Mecánica Newtoniana
Curso 2023 - 2024

Práctica I

Teorema de la raqueta de tenis



Inés Rufete Pastor
Grupo 1

Índice

1. Introducción

El objetivo de esta práctica es el estudio del teorema de la raqueta de tenis. Nos centraremos en el análisis del momento angular y la velocidad angular del cuerpo.

2. Marco teórico

El teorema de la raqueta de tenis, o del eje intermedio fue estudiado por Mark S. Ashbaugh, Carmen C. Chicone and Richard H. Cushman en 1989. Describe el movimiento de un cuerpo rígido con tres momentos de inercia principales diferentes. Los nada intuitivos resultados también se conocen como el efecto Dzhanibekov, en honor al cosmonauta que lo describió.

Si diagonalizamos el tensor de inercia, tenemos:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Suponiendo que el cuerpo no está sometido a ninguna fuerza externa, llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$(\frac{d\vec{L}}{dt})_{rot} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M}$$

$$I_1\dot{\omega_1} = -(I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \tag{2}$$

$$I_2\dot{\omega_2} = -(I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \tag{3}$$

$$I_3\dot{\omega_3} = -(I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 \tag{4}$$

Derivando y sustituyendo estas expresiones, llegamos a las expresiones para cada uno de los ejes.

Eje 1:

$$I_2I_3\ddot{\omega_2} = (I_2 - I_1)(I_1 - I_3)\omega_1^2\omega_2 \tag{5}$$

$$I_2I_3\ddot{\omega_3} = (I_2 - I_1)(I_1 - I_3)\omega_1^2\omega_3 \tag{6}$$

Eje 2:

$$I_1I_3\ddot{\omega_1} = (I_3 - I_2)(I_2 - I_1)\omega_2^2\omega_1 \tag{7}$$

$$I_1I_3\ddot{\omega_3} = (I_3 - I_2)(I_2 - I_1)\omega_2^2\omega_3 \tag{8}$$

Eje 3:

$$I_1I_3\ddot{\omega_1} = (I_3 - I_2)(I_1 - I_3)\omega_3^2\omega_1 \tag{9}$$

$$I_2I_3\ddot{\omega_2} = (I_3 - I_2)(I_1 - I_3)\omega_3^2\omega_2 \tag{10}$$

En los casos de los ejes 1 y 3 el factor que multiplica a la componente velocidad angular es negativa, así que como la derivada segunda de la velocidad angular es negativa, la rotación alrededor de estos ejes es estable para el cuerpo. Por otra parte, para el eje 2, que llamaremos eje intermedio, el factor que multiplica a ω_1 es positivo por lo que la rotación sobre el segundo eje ya no es estable, sino que inicialmente presentará un comportamiento de tipo exponencial. Así que cualquier pequeña perturbación a lo largo de los otros ejes provoca que el cuerpo haga "giros inesperados".

Para este movimiento, la energía cinética se define con la siguiente expresión

$$K = \frac{1}{2}(I_1{\omega_1}^2 + I_2{\omega_2}^2 + I_3{\omega_3}^2) \tag{11}$$

Y el momento angular:

$$L = \sqrt{{I_1}^2{\omega_1}^2 + {I_2}^2{\omega_2}^2 + {I_3}^2{\omega_3}^2} \tag{12}$$

3. Cuestiones

3.1. Cuestión 1

Ejes mayor y menor

Comprueba en los casos estables si las variaciones de las componentes angulares no principales cumplen el comportamiento armónico predicho. Es decir, que su oscilaciones tienen una frecuencia angular que para el primer eje será

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3}}\omega_1$$

Eje intermedio

Comprueba en el caso del eje intermedio cuál es el comportamiento de las componentes de la velocidad angulares. ¿Es periódico el proceso o caótico? En el caso que sea periódico intenta estimar el valor del periodo para un caso e intenta ver de qué dependencia parece tener con ω_2.

Las condiciones inciiales para nuestra representación de las velocidades angulares son $I_1 = 4'0, \quad I_2 = 2'0, \quad I_3 = 1'0, \quad \omega_1 = 0'1 rad/s, \quad \omega_2 = 2'0 rad/s, \quad \omega_3 = 0'1 rad/s$.

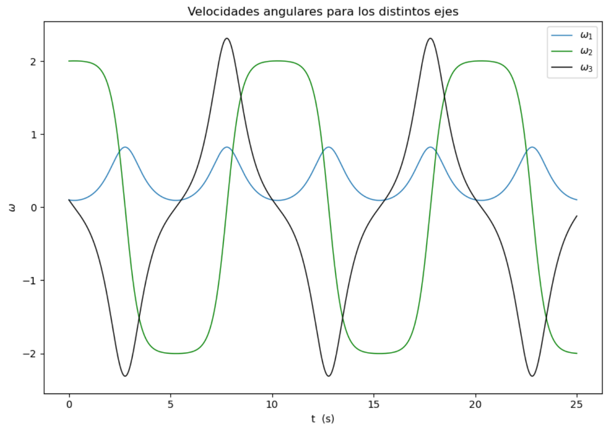


Figura 1: Velocidad angular para ejes mayor, menor e intermedio.

En esta gráfica vemos la variación de las componentes angulares, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Podemos observar que el periodo del movimiento es aproximadamente, T = 5 segundos. Para comprobar si es un movimiento armónico sabemos que su frecuencia angular debe obedecer la ecuación $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5} = 1{,}256 rad/s$$

Ahora calculando la frecuencia angular mediante la expresión dada en el enunciado,

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3}} \omega_1 = \sqrt{\frac{(1-2)(4-1)}{21}} 0{,}1 = 1{,}225$$

La frecuencias frecuencias se diferencian por un error de $\epsilon = 0{,}01$.

Respondiendo a la cuestion referente al eje intermedio, vemos que ω_2 es periódico.

3.2. Cuestión 2

Eje intermedio

Representa las componentes ω_1 frente a ω_3 , ¿qué se observa?

Ahora para estudiar el comportamiento del eje intermedio, que será el causante del movimiento irregular del cuerpo, representamos la velocidad angular del eje 1 frente a la del eje 2.

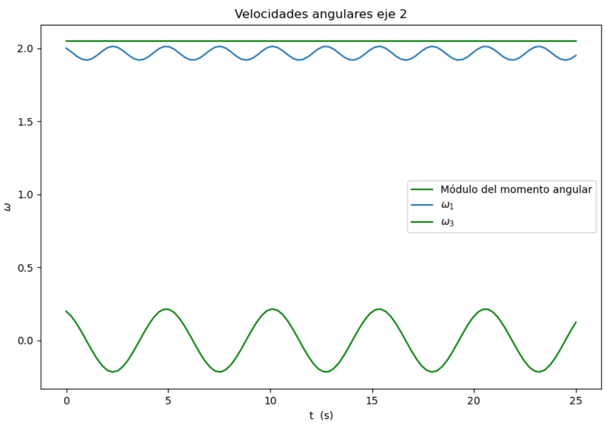


Figura 2: Componente ω_1 frente a ω_3.

Vemos que el comportamiento de las gráficas es de nuevo propio de un movimiento armónico.

3.3. Cuestión 3

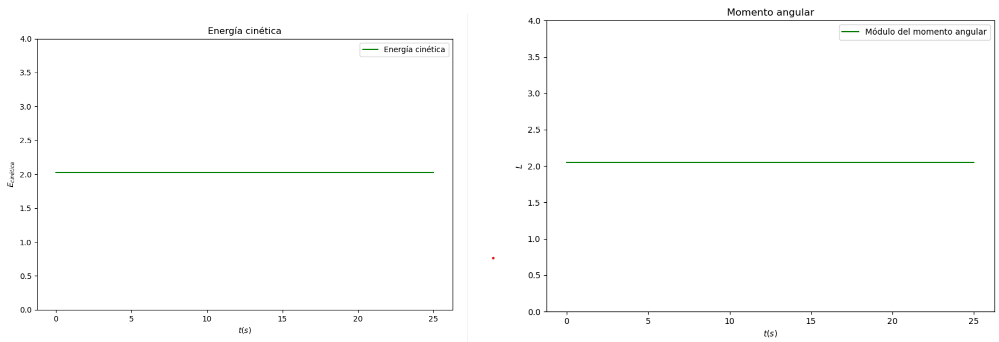
Ejes mayor y menor

Comprueba que la energía cinética y que el módulo del momento angular se conservan en este caso.

Eje intermedio

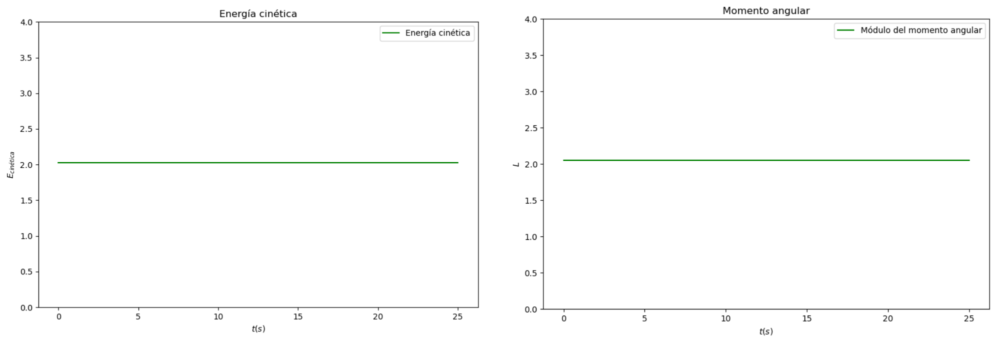
Comprueba que la energía cinética y que el módulo del momento angular se conservan en el caso del eje intermedio.

Estudairemos la energía cinética y el momento angular mediante las ecuaciones (11) y (12) respectivamente.



(a) Energía cinética (b) Momento angular

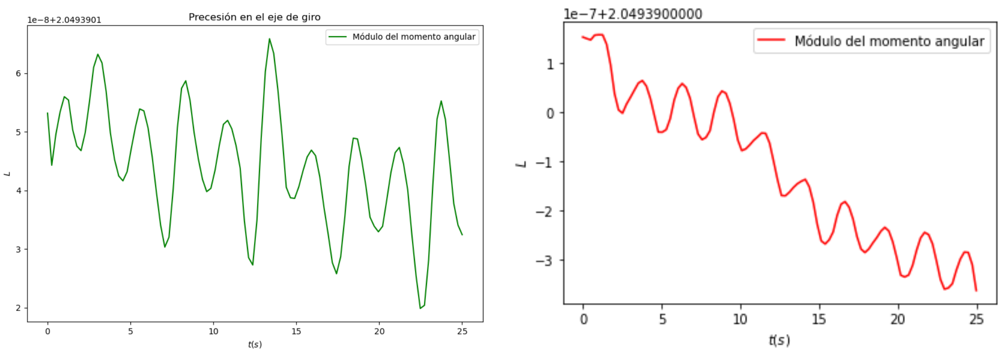
Figura 3: Eje 1.



(a) Energía cinética (b) Momento angular

Figura 4: Eje 3.

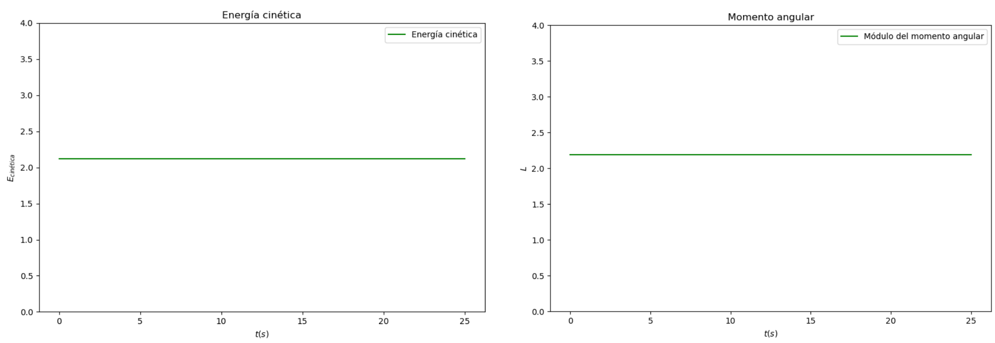
Podemos ver que en ambos casos, para el eje 1 y 3 el módulo de las funciones son constnates en el tiempo. Podemos estudiar ahora la inclinación en el eje de giro. el momento angular no es exactamente constante sino que se da una pequeña variación.



(a) Eje 1 (b) Eje 3

Figura 5: Precisión de los ángulos de giro en los ejes mayor y menor.

A continuación graficamos las mismas magnitudes para el eje intermedio:



(a) Energía cinética (b) Momento angular

Figura 6: Eje 2 (intermedio).

3.4. Cuestión 4

Ejes mayor y menor

Comprueba cuál es la evolución del vector velocidad angular y momento angular.

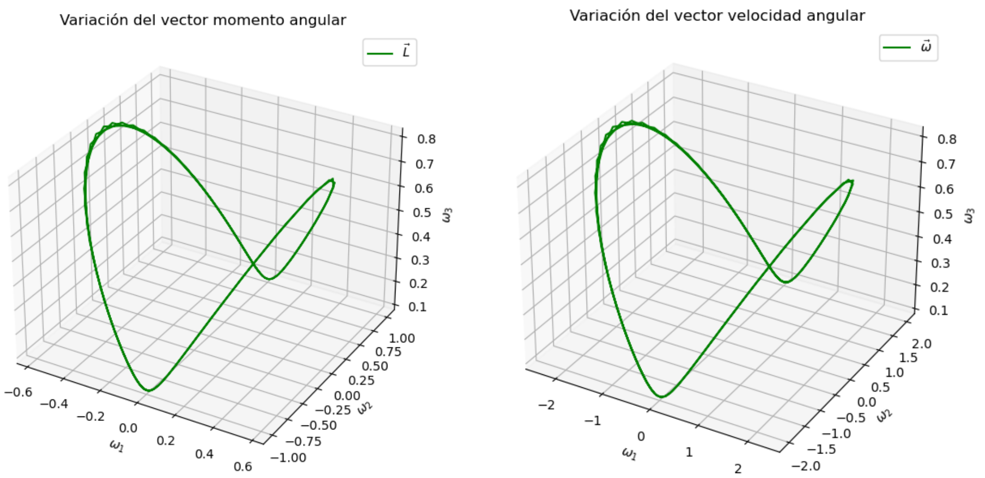
Eje intermedio

Dibuja la trayectoria del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$.

Contestando en primer lugar a la cuestión del eje intermedio, representamos $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$,

$$\vec{\omega} = (\omega_1 \vec{e_1}, \omega_2 \vec{e_2}, \omega_3 \vec{e_3}) \qquad \vec{L} = \frac{1}{|L|}(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$$

Obtenemos las gráficas de estas magnitudes.

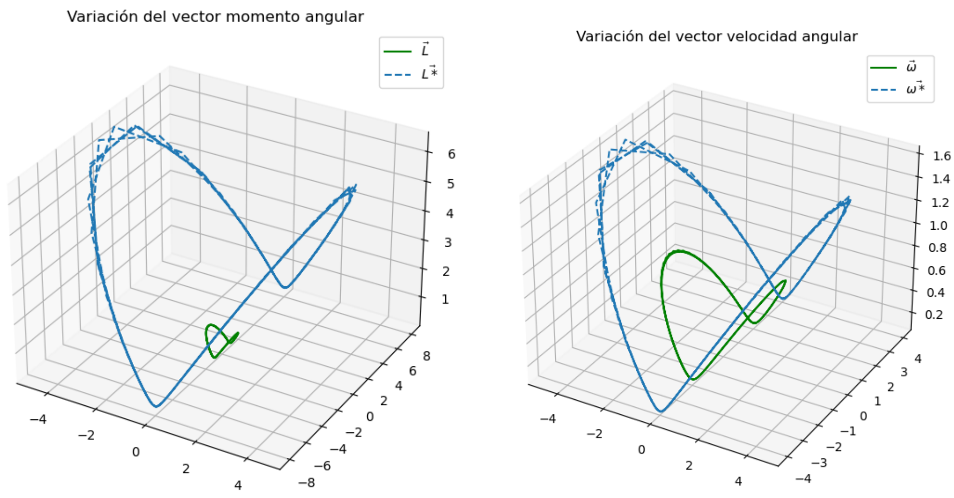


(a) Momento angular (b) Velocidad angular

Figura 7: Vector momento angular y velocidad angular.

Podemos observar que ambas gráficas son proporcionales, ya que $\vec{L}$ como vemos en las expresiones anteriores, es el vector ω multiplicado por constantes (escalares) I_1, I_2, I_3.

En referencia a la cuestión de los ejes mayor y menor, representamos la evolución de las magnitudes anteriores, de forma que únicamente tenemos que cambiar las ocndiciones iniciales de ω. Puesto que $\vec{L}$ depende de ω, y variando una, variará la otra.



(a) Momento angular (b) Velocidad angular

Figura 8: Comparación de los vectores velocidad angular y momento angular.

En esta gráfica, $\vec{L}$ coresponde a la magnitud original y $\vec{L'}$ a la modificada mediante los valores iniciales. Y las ω las hemos diferenciado de la misma forma.

3.5. Cuestión 5

Eje intermedio

Razona; Siempre se ha definido que la Tierra es una esfera achatada por los polos. Por lo que tendría dos ejes de simetría iguales y no se aplicaría el teorema. Pero, si no fuera exactamente así, ¿nos deberíamos preocupar por una posible inversión de la rotación del planeta?

El planeta tierra es un cuerpo con líquido y por ello la energía mecánica no se conserva, porque se disipa en medios como el calor. Es por eso que para alcanzar su estado de menor energía, rota sobre su eje de mayor momento de inercia. Además, para que se cumpla el teorema de la raqueta de tenis, el cuerpo debe tener una forma específica. Las esferas son una de las formas geométricas que no se ven afectadas por su simetría entorno a los ejes. En conclusión, la Tierra no es susceptible a posibles inversiones.

4. Bibliografía

- Guión de prácticas de ordenador. [Mecánica Newtoniana, Grado en Física].
- Código de Python.