Una carga puntual q describe un movimiento hiperbólico a lo largo del eje x que viene dado por la ecuación:

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}\,\hat{\mathbf{u}}_x \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

[en relatividad especial, ésta es la trayectoria de una partícula sometida a una fuerza constante a lo largo del eje x y cuyo valor es $F = mc^2/b$; se denomina "movimiento hiperbólico" pues representa una rama de hipérbola en el plano $x - ct$].

Determinar, para un punto P situado en el eje x a la derecha de la carga:

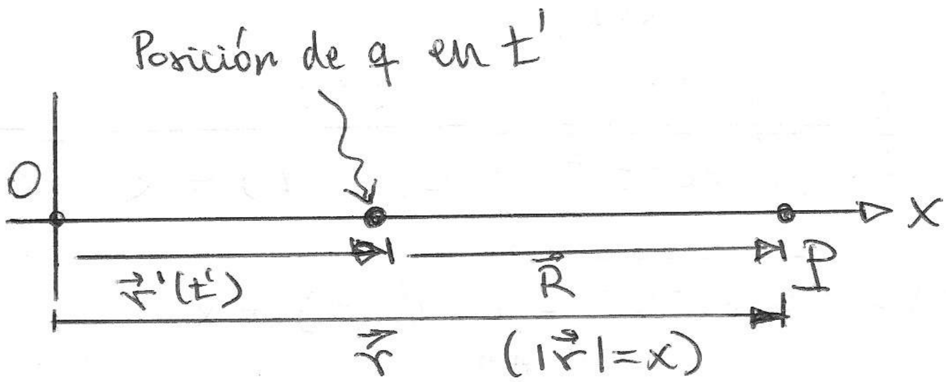
(a) El tiempo retardado t' en función de la coordenada x y del tiempo "actual" t.

(b) La velocidad de la carga v en función del tiempo retardado t', así como en función de la coordenada x y del tiempo "actual" t. ¿Cuánto vale la velocidad v para $t' = 0$ y para $t' \to \infty$?

(c) Demostrar que la potencia radiada es constante y calcular su valor, teniendo en cuenta que la velocidad es relativista.

(d) ¿Cuánto vale la aceleración inicial de la partícula (para $t' = 0$)? Expresar la potencia radiada tanto en función de la aceleración inicial como de la fuerza F aplicada y comprobar que conduce a la expresión familiar de la potencia de Larmor (en reposo o $v \ll c$, no relativista).

(a)



$$t' = t - \frac{R}{c} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}(t')|}{c}$$

$$-c(t'-t) = |\vec{r} - \vec{r}\,'(t')|$$

$$-c(t'-t) = x - \sqrt{b^2 + c^2 t'^2}$$

$$\underline{\underline{c(t'-t) + x = \sqrt{b^2 + c^2 t'^2}}} \quad (1)$$

$$[c(t'-t) + x]^2 = b^2 + c^2 t'^2$$

$$\cancel{c^2 t'^2} - 2c^2 t' t + c^2 t^2 + 2xct' - 2xct + x^2 = b^2 + \cancel{c^2 t'^2}$$

$$2ct'(x-ct)+\overbrace{(x^2-2xct+c^2t^2)}^{(x-ct)^2}=b^2$$

$$2ct'(x-ct)=b^2-(x-ct)^2$$

y despejando t':

$$\boxed{t'=\frac{b^2-(x-ct)^2}{2c(x-ct)}} \qquad (2)$$

(b) $\vec{v}(t')=\dfrac{d\vec{r}(t')}{dt'}$

$$v=\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}c^2t'}{\sqrt{b^2+c^2t'^2}}=\frac{c^2t'}{c(t'-t)+x}=\frac{c^2t'}{ct'+(x-ct)}$$

De (1): $\sqrt{b^2+c^2t'^2}=c(t'-t)+x$

Usando (2):

$$v=\frac{c^2t'}{ct'+(x-ct)}=\frac{c^2\left[\dfrac{b^2-(x-ct)^2}{2c(x-ct)}\right]}{c\left[\dfrac{b^2-(x-ct)^2}{2c(x-ct)}\right]+(x-ct)}=$$

$$=\frac{\dfrac{c[b^2-(x-ct)^2]}{2(x-ct)}}{\dfrac{b^2-(x-ct)^2+2(x-ct)^2}{2(x-ct)}}=\frac{c[b^2-(x-ct)^2]}{b^2+(x-ct)^2}$$

de donde:

$$\boxed{v(x,t)=\frac{c[b^2-(x-ct)^2]}{b^2+(x-ct)^2}}$$

$$\boxed{v(t') = \frac{c^2 t'}{\sqrt{b^2 + c^2 t'^2}}}$$

Para $t' = 0$:

$$v(0) = \frac{c^2 \cdot 0}{\sqrt{b^2 + c^2 0^2}} = 0$$

Para $t' \to \infty$

$$\lim_{t' \to \infty} v(t') = \lim_{t \to \infty} \frac{c^2 t'}{\sqrt{b^2 + c^2 t'^2}} = c$$

$$\boxed{v(0) = 0 \,; \quad \lim_{t' \to 0} v(t') = c}$$

(c) Potencia radiada para $\vec{v} \parallel \dot{\vec{v}}$

$$P_{rad} = \frac{q^2 |\dot{\vec{v}}|^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \gamma^6$$

$$\dot{v}(t') \equiv a(t') = \frac{dv(t')}{dt'} = \frac{c^2 \sqrt{b^2 + c^2 t'^2} - \frac{c^4 t'^2}{\sqrt{b^2 + c^2 t'^2}}}{b^2 + c^2 t'^2} =$$

$$= \frac{c^2 b^2 + \cancel{c^4 t'^2} - \cancel{c^4 t'^2}}{(b^2 + c^2 t'^2)^{3/2}} = \frac{c^2 b^2}{(b^2 + c^2 t'^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{a(t') \equiv \dot{v}(t') = \frac{c^2 b^2}{(b^2 + c^2 t'^2)^{3/2}}}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \frac{c^2 t'^2}{b^2 + c^2 t'^2}} = \frac{1}{\frac{b^2 + \cancel{c^2 t'^2} - \cancel{c^2 t'^2}}{b^2 + c^2 t'^2}} =$$

$$= \frac{b^2 + c^2 t'^2}{b^2}$$

Sustituyendo en P_{rad}:

$$P_{rad} = \frac{q^2 a^2(t')}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \gamma^6 =$$

$$= \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{c^4 b^4}{(b^2 + c^2 t'^2)^3} \frac{(b^2 + c^2 t'^2)^3}{(b^2)^3} =$$

$$= \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{c^4 b^4}{b^6} = \frac{q^2 c}{6\pi\varepsilon_0 b^2}$$

$$\boxed{P_{rad} = \frac{q^2 c}{6\pi\varepsilon_0 b^2}} \text{ (constante)}$$

que nos muestra que la partícula siempre radia la misma potencia, aún siendo su aceleración variable.

(d) $$a(t') = \frac{c^2 b^2}{(b^2 + c^2 t'^2)^{3/2}}$$

Para $t' = 0$:

$$a_0 \equiv a(0) = \frac{c^2 b^2}{b^3} = \frac{c^2}{b}$$

$$\boxed{a_0 \equiv a(0) = \frac{c^2}{b}}$$

Prad se puede esribir:

$$P_{rad} = \frac{q^2 c}{6\pi \varepsilon_0 b^2} = \frac{q^2 c^4}{6\pi \varepsilon_0 c^3 b^2} = \frac{q^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}\left(\frac{c^2}{b}\right)^2$$

$$\boxed{P_{rad} = \frac{q^2 a^2(0)}{6\pi \varepsilon_0 c^3}}$$

que es la fórmula de Larmor ($v \ll c$).

Como del enunciado:

$$F = \frac{mc^2}{b} = m\,a(0)$$

luego:

$$\boxed{P_{rad} = \frac{q^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}\left(\frac{F}{m}\right)^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b^4 - 4b^2 x(x-ct) - (x-ct)^4}{(x-ct)^2 (x^2 - c^2t^2 - b^2)^2}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{2}{x^2 - c^2t^2 - b^2} - \frac{2ct\,(b^2 - (x-ct)^2)}{(x-ct)(x^2 - c^2t^2 - b^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2 - (x-ct)^2}{(x-ct)^2 (x^2 - c^2t^2 - b^2)} \right] \hat{u}_x =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x-ct)^4 + 4b^2 ct(x-ct) - b^4}{(x-ct)^2 (x^2 - c^2t^2 - b^2)^2} \hat{u}_x$$

De donde:

$$\vec{E}(x,t) = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{u}_x - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4b^2}{(x^2 - c^2t^2 - b^2)^2} \hat{u}_x$$

Campo a lo largo del eje x:

$$\boxed{\vec{E}(x,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4b^2}{(x^2 - c^2t^2 - b^2)} \hat{u}_x} \quad (*)$$

Antes hemos calculado $(c-v)$ y R. Ahora podemos calcular $(c+v)$:

$$c + v = c + \frac{c\,[b^2 - (x-ct)^2]}{b^2 + (x-ct)^2} = \frac{2b^2 c}{b^2 + (x-ct)^2}$$

En el problema 9 del tema 7 se vió que si q se mueve a lo largo del eje x, el campo $\vec{E}$ en el eje x a la derecha de la carga es:

$$\vec{E}(x,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\left(\frac{c+v}{c-v}\right)\hat{u}_x$$

Sustituyendo R, $(c-v)$ y $(c-v)$:

$$\vec{E}(x,t) = \frac{q\,\hat{u}_x}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[\frac{x^2-c^2t^2-b^2}{2(x-ct)}\right]^2}\frac{\frac{2cb^2}{b^2+(x-ct)^2}}{\frac{2c(x-ct)}{b^2+(x-ct)^2}} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4b^2}{(x^2-c^2t^2-b^2)^2}\hat{u}_x$$

¡Qué coincide con el valor calulado antes (✲)!

El campo $\vec{B}$ a lo largo del eje x es nulo:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{sólo es función de } x}}{A}\hat{u}_x) = \vec{0}$$

lo que está de acuerdo con la ecuación:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{n}\times\vec{E}(x,t) = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}(x,t) =$$

$$= \frac{1}{c}\hat{u}_x\times(E\hat{u}_x) = \frac{E}{c}\hat{u}_x\times\hat{u}_x = 0 \quad /\!/\!/$$