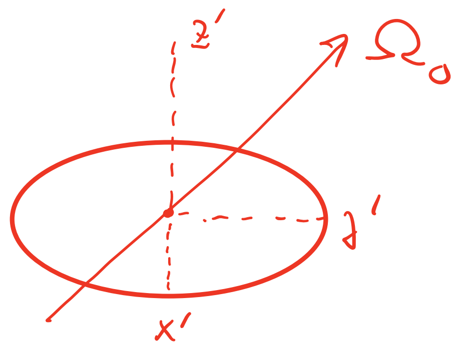
momento de inercia del disco:

$$I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{MR^2}{4} = I$$

$$I_{z'z'} = \frac{MR^2}{2} = I_z$$



Ω forma $45°$ con z'

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}' + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}'\right)\Omega_0 \qquad \left(\vec{\Omega} \text{ en la base fija al cuerpo}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \mathbb{I}'\vec{\Omega}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Omega_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

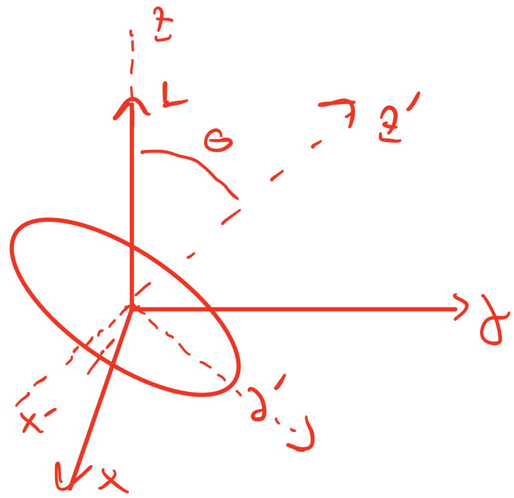
$$= \Omega_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\left(I\hat{y}' + I_z\hat{z}'\right)$$

$$\Rightarrow |\vec{L}| = L = \Omega_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{I^2 + I_z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{L}}{|L|} \cdot \hat{z}' = \cos\theta \qquad (\theta \text{ es el ángulo entre } z' \text{ y } \vec{L})$$

$$\cos\theta = \frac{\Omega_0 \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} I_z}{\Omega_0 \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{I^2+I_z^2}} = \frac{I_z}{\sqrt{I^2+I_z^2}}$$

$\Rightarrow$ tomo el eje $\hat{z}$ en la misma dirección y sentido que $\vec{L}$.



α es constante:

Según las ecuaciones de Euler

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{z'} = \frac{dL_{z'}}{dt} + \underbrace{\Omega_{x'}\Omega_{y'}(I-I)}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d(I_z\Omega_{z'})}{dt} = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} \Omega_{z'} &= cte \\ L_{z'} &= cte \end{aligned}\right\} \cos\theta = \frac{L_{z'}}{|\vec{L}|} = cte.$$

(a) $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi \\ \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta \cos\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$ en la base fija al cuerpo $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$

$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$ en la base del laboratorio $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

De las fórmulas de arriba deducimos que:

1) La componente de $\vec{L}$ en el plano x'-y' es $L \operatorname{sen}\theta$ (en módulo)

De la fórmula (a) vemos que también es $\dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta\, I$

$\Rightarrow L \operatorname{sen}\theta = \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta\, I \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{I} \Rightarrow \dot{\varphi}$ cte.

Además, como $\Omega_{z'}$ es cte $\Rightarrow \dot{\psi} =$ cte, a partir de la fórmula (a) $\Rightarrow \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \Omega_{z'} = \frac{L\cos\theta}{I_z}$

$\Rightarrow \dot{\psi} = L\cos\theta\left(\frac{1}{I_z} - \frac{1}{I}\right) = L\cos\theta\left(\frac{I - I_z}{I \cdot I_z}\right)$

Si analizamos las componentes x-y de ω (en el plano x-y del sistema del laboratorio)

Vemos que $\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta \underbrace{(\cos\varphi\,\hat{x} + \text{sen}\,\varphi\,\hat{y})} + \omega_z \hat{z}$

ω_z es cte. y en el plano x-y sus componentes giran con $\dot{\varphi}$

Por lo tanto $\vec{\omega}$ gira en torno a $\vec{L}\,(\hat{z})$ con $\dot{\varphi}$.

Como además $\omega_{z'}$ es cte, esto significa que el eje z' gira en torno a z junto con $\vec{\omega}$.

Además vemos que, si analizamos las componentes de $\vec{\omega}$ en el plano $x'-y'$ es:

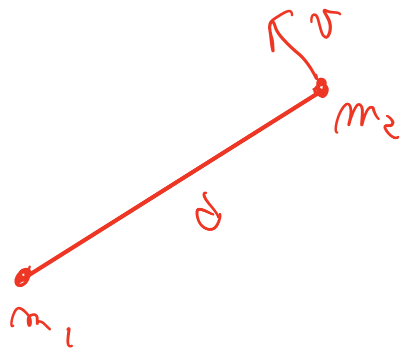
$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta \underbrace{(\text{sen}\,\psi\,\hat{x}' + \cos\psi\,\hat{y}')} + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\hat{z}'$$

Significa que los ejes $\hat{x}'$, $\hat{y}'$, giran, vistos desde el laboratorio, con $\dot{\psi}$ respecto del eje z'

Escribamos la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}\,\Omega^T\,\mathbb{I}\,\Omega = \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi,\ \dot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta\cos\psi,\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) \begin{pmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi \\ \dot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta\cos\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(I \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + I_z (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 \right)$$



$$R_{CM} = \frac{m_2\, d}{m_1 + m_2} \quad , \quad v_{cm} = \frac{m_2\, v}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = v \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_1' = -v \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$L' = v \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{d\, m_1}{m_1 + m_2} m_2 + v \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d\, m_2}{(m_1 + m_2)} m_1$$

$$= v \frac{m_2\, m_1\, d}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{m_1 \vec{r}_1}{m_1+m_2} = -\frac{m_2 \vec{r}_2}{m_1+m_2} \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + r_1 = \vec{r} - \vec{r}_2 \frac{m_2}{m_1}$$

$$\underbrace{\vec{r}_2}_{r_2 \hat{r}} = \vec{r}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) = r\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\hat{r}$$

$$r_2 = r\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) = \qquad (\theta_2 = \theta)$$

$$\underbrace{\vec{r}_1}_{-r_1 \hat{r}} = -\bar{r}_2 \frac{m_2}{m_1} = -r\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{m_2}{m_1}\hat{r} \qquad (\theta_1 = \theta+\pi)$$

$$+ \frac{p\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{m_2}{m_1}}{1 \mp \varepsilon \cos\theta_1}$$