$m_\gamma = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

2 valores propios, (autovalores) $-1, +1$ (A, V, φ) donde φ es un EV sobre $\mathbb{K}$. Suponemos que característica$(\mathbb{K}) \neq 2$ si: $a \in A$ $a \neq g(a)$ entonces:

$m = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}g(a)$ donde m es un punto fijo de g $(g(m) = m) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall p \in A$ $\vec{pm} = \frac{1}{2}\vec{pa} + \frac{1}{2}\overrightarrow{pg(a)}$.

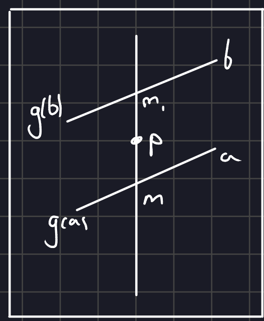
Tomando $p = a$

$\vec{am} = \frac{1}{2}\vec{aa} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ag(a)}$, $\overrightarrow{g(a)g(m)} = \gamma(\vec{am}) = \gamma\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{ag(a)}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{g(a)\underbrace{g^2(a)}_{=a}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{g(a)a}$

$g(m) = g(a) + \frac{1}{2}\overrightarrow{g(a)a} = g(a) + \frac{1}{2}\overrightarrow{g(a)a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{g(a)g(a)} = \frac{1}{2}g(a) + \frac{1}{2}g(a) + \frac{1}{2}\overrightarrow{g(a)a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{g(a)g(a)} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}g(a) = m$ ∎

> Como consecuencia tenemos que si característica de $\mathbb{K} \neq 2$, entonces un singletón siempre tiene como punto fijo al punto medio entre cualquier punto a y su imagen $g(a)$

$m = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}g(a)$
$g(a) = m + \vec{am}$



Sea g una simetría:

$\gamma(\vec{ab}) = \overrightarrow{g(a)g(b)} = 1\vec{ab}$ $\vec{ab} \in V$. Si g tiene al menos 2 puntos fijos

Sabemos además que el conjunto de puntos fijos es una variedad lineal

$V = V_1 \oplus V_{-1}$ Los subespacios propios "Sabemos de Álgebra 2" $\longrightarrow$ Nos dan la dirección de la simetría

Al ser una suma directa, sabemos que: sea $\bar{v} \in V$ $\bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{u}_{-1}$

Si p es un punto fijo de g y $c \in A$: $g(c) \overset{??}{=} g(p + \vec{pc}) = g(p) + \gamma(\vec{pc}) = p + \gamma(\bar{u}_1 + \bar{u}_{-1}) \overset{\text{linealidad}}{=} p + \gamma(\bar{u}_1) + \gamma(\bar{u}_{-1}) =$
$= p + \bar{u}_1 - \bar{u}_{-1}$

Se tiene que c es fijo $\Longleftrightarrow g(c) = c$

$c = p + \vec{pc} = p + \bar{u}_1 + \bar{u}_{-1}$

$g(c) = g(p) + \gamma(\vec{pc}) = p + \bar{u}_1 - \bar{u}_{-1}$ $\longrightarrow \bar{u}_{-1} = \bar{0} \Rightarrow c \in p + V_1$

Se ha rayado muxo

Borra escribe borra escribe

• $\forall c \in A$ (no es necesario que p pto fijo) $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}g(c) \in p + V_1$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{cg(c)} = -2\bar{u}_{-1} \in V_1$

$c = p + \bar{u}_1 + \bar{u}_{-1}$ $g(c) = p + \gamma(\bar{u}_1 + \bar{u}_{-1}) = p + \bar{u}_1 - \bar{u}_{-1}$

Dadas las ecuaciones de una afinidad

Preguntan casos:

1) Si es o no isomorfismo afín
2) Calculamos los puntos fijos
3) Si g es una afinidad conocida (tipo)
4) Variedades lineales invariantes: sentido fuerte $(\gamma(L) = L)$; sentido débil $(\gamma(L) \subset L)$

¿Cuáles son las variedades lineales invariantes?
Traslaciones, Proyecciones, Homotecias, Simetrías y Strains

Dadas datos sobre la afinidad

Preguntan calcular las ecuaciones de la afinidad

Ejercicios parcial 2021-22

1. Sea el espacio afín standard de $\mathbb{R}^3$, considérese la aplicación $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(x,y,z) = (x, y, 1-x-y)$

2p. a) Demostrar que g es una afinidad
2p. b) ¿Es un isomorfismo afín?
2p. c) Determinar sus puntos fijos
2p. d) ¿Qué + puedes decir de g? - 61

$$\text{Ref.}_{\text{cartesiana}} = \{\underset{(0,0,0)}{O}, \overset{(1,0,0)}{\bar{e}_1}, \underset{(0,1,0)}{\bar{e}_2}, \overset{(0,0,1)}{\bar{e}_3}\}$$

a) $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\gamma} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

↳ El origen que hemos tomado

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ No es isomorfismo afín

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad \begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ -y-y+1 &= z \end{aligned} \quad x+y+z=1$

d) $g^2 = g \Longleftrightarrow \gamma^2 = \gamma \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ g es una proyección

2. Sea (A, V, φ) un espacio afín y sea $g: A \to A$ una afinidad, demostrar que si $\bar{g}$ tiene un punto fijo, entonces g tiene un punto fijo (2p.)

$\exists p \in A : g^2(p) = p \Leftrightarrow g(g(p)) = p$ ¡punto medio entre $g(p)$ y p! $\to \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}g(p) \quad g(m) = m$

$g(m) = \frac{1}{2}g(p) + \frac{1}{2}g^2(p) = \frac{1}{2}g(p) + \frac{1}{2}p = m$

7.1 Hallar la matriz de simetría en $\mathbb{R}^3$ de eje plano $\Pi \equiv 2x + y - z = 3$ y dirección vectorial generada por el vector $(1, 1, 2)$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \Pi \quad (2x+y-z=3)$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ ? \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} \\ \frac{y+y'}{2} \\ \frac{z+z'}{2} \end{pmatrix} \in \Pi$

$\cancel{2}\left(\frac{x+x'}{\cancel{2}}\right) + \frac{y+y'}{2} - \frac{z+z'}{2} = 3$

$x + x' + \frac{y}{2} + \frac{y'}{2} - \frac{z}{2} - \frac{z'}{2} = 3$

$2x + 2x' + y + y' - z - z' = 6$

$\begin{aligned} x' - x &= \alpha \\ y' - y &= \beta \\ z' - z &= 2\alpha \end{aligned}$

$x' - x = y' - y = \frac{z' - z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' - x - y' + y = 0 \\ 2y' - 2y - z' + z = 0 \end{cases}$