GRADO EN FÍSICA, CURSO 2022-2023

MECÁNICA ESTADÍSTICA

Control (04/11/2021)

1. (3 puntos) Considera el problema del camino aleatorio en una dimensión con distinta probabilidad de ir a la izquierda o a la derecha, p y $q = 1-p$ y considera $m = n_1 - n_2$ como el desplazamiento neto a la derecha, donde n_1 es el número de saltos a la derecha y n_2 el número de saltos a la izquierda. Después de un total de N pasos, calcula: (a) $\langle m \rangle$, (b) $\langle \Delta m^2 \rangle$.

2. (4 puntos) Considera un gas clásico aislado en un recipiente con energía E y N partículas, y dos subsistemas 1 y 2 dentro de él, cada uno con energía, número de partículas y número de estados E_1, N_1, Ω_1 y E_2, N_2, Ω_2 respectivamente (donde $E = E_1 + E_2$ y $N = N_1 + N_2$). Los subsistemas están en contacto de forma tal que pueden intercambiar energía entre ellos solamente (pero no partículas).

   (a) Escribe el número de estados del sistema (Ω) en función de la energía E_1 y encuentra la ecuación que define el valor de E_1 cuando el sistema llega al equilibrio.

   (b) Si llamamos E_1^* al valor de E_1 en equilibrio, demuestra que. cerca de del equilibrio es

   $$\Omega(E, E_1) = \Omega_1(E_1^*)\,\Omega_2(E - E_1^*)\,e^{-\frac{(E_1-E_1^*)^2}{2\sigma^2}}$$

   donde
   $$\sigma^2 = -\frac{1}{\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial E^2}(E_1^*) + \frac{\partial^2\Omega_2}{\partial E^2}(E - E_1^*)}.$$

   Ayuda: desarrolla el logaritmo de la expresión hallada en el primer punto en torno a E_1^* hasta segundo orden.

3. (3 puntos) Considera un volumen V con un gas ideal de partículas relativistas (masa despreciable frente a su energía), cuya energía vendrá dada por $E = pc$, con c siendo la velocidad de la luz, y p es el módulo del momento lineal.

   (a) Calcula la función de partición para una partícula, y obtén la energía media y el calor específico por partícula.

   (b) Discute el resultado comparándolo con la predicción del principio de equipartición.

PARCIAL 2022-2023

EJERCICIO 1: considera el problema del camino aleatorio en una dimensión con ~~1~~ probabilidad de ir a la izq o a la dcha, p y $q = 1-p$ y considera $m = n_1 - n_2$ como el desplazamiento neto a la dcha, donde n_1 es el nº saltos a la dcha y n_2 el nº saltos izq. Después de N pasos, calcula:

a) $\langle m \rangle$

b) $\langle \Delta m^2 \rangle$

a) $n_1 =$ "nº pasos dcha" $\longrightarrow$ probabilidad $q = 1-p$ | $m = n_1 - n_2$

$n_2 =$ "nº pasos izq" $\longrightarrow$ probabilidad p | $N = n_1 + n_2 \Leftrightarrow n_2 = N - n_1$

Escribimos m en función únicamente de n_1:

$$m = n_1 - N + n_1 = 2n_1 - N$$

Como no tenemos $p = q$, no podemos decir que siga una binomial. Vamos a calcular el valor medio de n_1:

$$\langle n_1 \rangle = \sum_{n_1=0}^{N} n_1 \cdot P(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N} n_1 \cdot \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \cdot q^{n_1} \cdot p^{N-n_1} =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N} n_1 \cdot \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \cdot (q)^{n_1} \cdot p^{N-n_1} =$$

$\boxed{\text{TRUCO! } n_1 p^{n_1} = p \frac{\partial p^{n_1}}{\partial p}}$

conmutamos derivada

$$= \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \cdot (q) \cdot \frac{\partial q^{n_1}}{\partial q} \cdot p^{N-n_1} =$$

$$= (q) \cdot \frac{\partial}{\partial q}\left[\sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \cdot q^{n_1} \cdot p^{N-n_1}\right] = q \cdot \frac{\partial}{\partial q}(q+p)^N =$$

BINOMIO NEWTON

$$= q \cdot N(q+p)^{N-1} = qN = (1-p)N$$

$q + p = 1$

(probabilidad normalizada)

Por tanto, usando que la media es lineal:

$$\langle m \rangle = \langle 2n_1 - N \rangle = 2\langle n_1 \rangle - N = 2(1-p)N - N = 2N - 2pN - N = N(1-2p)$$

b) $\langle \Delta m^2 \rangle$

$\langle \Delta m^2\rangle = \langle (m - \langle m\rangle)^2\rangle \longrightarrow \Delta m = m - \langle m\rangle$

$\Delta m = m - \langle m\rangle = m - N(1-2p) = 2n_1 - N - N(1-2p) = 2n_1 + 2Np$

$\Delta m^2 = (2n_1 + 2Np)^2 = 4n_1^2 + 4N^2p^2 + 8n_1Np$

Falta dar el valor medio de n_1^2:

$$\langle n_1^2\rangle = \sum_{n_1=0}^{N} n_1^2 P(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N} n_1^2 \cdot \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\cdot q^{n_1} p^{N-n_1} =$$

TRUCO! $n_1^2 \cdot p_1^{n_1} = p\left[\frac{\partial p^{n_1}}{\partial p}\left(p\frac{\partial}{\partial}\dots\right)\right]$

$$= \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\cdot p^{N-n_1}\cdot q \qquad = q^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}\sum_{n_1=0}^{N}\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}p^{N-n_1}q^{n_1} =$$

$$= q^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}(p+q)^N = q^2\frac{\partial}{\partial q}N(p+q)^{N-1} = q^2N(N-1)\underbrace{(p+q)^{N-2}}_{=1\,(\text{normalización})} =$$

BINOMIO NEWTON

$$= q^2N(N-1) =$$

$\boxed{\text{LIMPIO}}$

$n_1^2 \cdot p^{n_1} = p\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial p^{n_1}}{\partial p}\right)\right]$ TRUCO

$$\langle n_1^2\rangle = \sum_{n_1=0}^{N} n_1^2 P(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N} n_1^2 \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} q^{n_1}p^{N-n_1} =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N}\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\cdot p^{N-n_1}\cdot q\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(q\frac{\partial q^{n_1}}{\partial q}\right)\right] =$$

$$= q\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(q\frac{\partial}{\partial q}\right)\right]\sum_{n_1=0}^{N}\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}p^{N-n_1}\cdot q^{n_1} = q\frac{\partial}{\partial q}\left(q\frac{\partial}{\partial q}(q+p)^N\right) =$$

BINOMIO NEWTON

$$= q\frac{\partial}{\partial q}q\cdot N(q+p)^{N-1} = qN(q+p)^N + q^2N(N-1)(p+q)^{N-2} =$$

$$= qN + q^2N(N-1) = q^2N^2 + Nq(q-1)$$

$p+q=1$ (normalización)

me gusta más darlo en función de q

Por tanto:

PROPIEDADES MEDIA

$(1-q)^2 = 1+q^2-2q$

$$\langle \Delta m^2\rangle = \langle (m-\langle m\rangle)^2\rangle = \langle 4n_1^2 + 4N^2p^2 + 8n_1Np\rangle =$$

$$= 4\langle n_1^2\rangle + 4N^2p^2 + 8Np\langle n_1\rangle = 4q^2N^2 + 4Nq(q-1) + 4N^2p^2 +$$

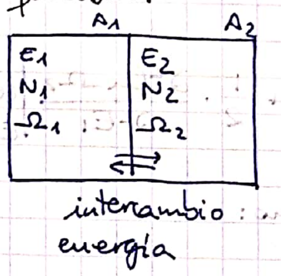
$$+ 8NpqN = 4q^2\cancel{N^2} + 4Nq^2 - 4Nq + 4N^2 + 4N^2q^2 - 8N^2q +$$

$$+ 8N^2q - 8N^2q^2 = 4Nq(q-1) + 4N^2 - 8N^2q^2$$

$\Rightarrow$ no creo que esté bien pero es lo que hay!

EJERCICIO 2: considera un gas clásico aislado en un recipiente con energía E y N partículas, y dos subsistemas 1 y 2 dentro de él, cada uno con energía, nº partículas y nº estados E_1, N_1, Ω_1 y E_2, N_2 y Ω_2 respectivamente (donde $E = E_1 + E_2$ y $N = N_1 + N_2$). Los subsistemas están en contacto de forma tq pueden intercambiar energía (pero no partículas) entre ellos.

a) Escribe el nº de estados del sistema (Ω) en función de la energía E_1 y encuentra la ecuación que define el valor de E_1 cuando el sistema llega al equilibrio.



- $N = N_1 + N_2$
- $E = E_1 + E_2$

$\Longrightarrow$ colectividad microcanónica

$$\Omega(E) = \Omega_1(E_1)\Omega_2(E_2) = \Omega_1(E_1)\Omega_2(E - E_1)$$

¿Cómo damos la condición de equilibrio? Retomamos el parámetro β tal y como hemos definido en clase:

$$\beta = \frac{\partial \ln \Omega(E)}{\partial E} \longrightarrow \text{EQUILIBRIO} \quad \beta_1(\tilde{E}_1) = \beta_2(E - \tilde{E}_1)$$ donde $\tilde{E}$ es la energía en el equilibrio.

$$\beta_1(\tilde{E}_1) = \beta_2(E - \tilde{E}_1) \Longrightarrow \frac{\partial \ln \Omega_1(E_1)}{\partial E} = \frac{\partial \ln \Omega_2(E - E_1)}{\partial E} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\Omega_1'}{\Omega_1} = \frac{\Omega_2'}{\Omega_2}$$

b) Si llamamos E_1^* al valor de E_1 en el equilibrio, demuestra que cerca del equilibrio es

$$\Omega(E, E_1) = \Omega_1(E_1^*)\Omega_2(E - E_1^*)\, e^{-\frac{(E_1 - E_1^*)^2}{2\sigma^2}}$$

donde $$\sigma^2 = -\frac{1}{\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial E^2}(E_1^*) + \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial E^2}(E - E_1^*)}$$

Ayuda: desarrolla el logaritmo de la expresión hallada en el primer punto en torno a E_1^* hasta segundo orden.

ROUND 2 Esto no salió en los ejercicios! Pues va a salir ahora

DESARROLLO EN SERIE TAYLOR

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\cdot\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \dots$$

En este caso, tenemos $f(x) = \ln\Omega(E) = \ln\Omega_1(E_1)\Omega_2(E-E_1)$. Usando las propiedades de los logaritmos podremos dividir esto como $\ln\Omega(E) = \ln\Omega_1(E_1) + \ln\Omega_2(E-E_1)$. Lo que en Taylor es x_0 aquí es E_1^* (y $x=E$), así que:

$$\ln\Omega(E) = \ln\Omega_1(E_1^*)\Omega_2(E-E_1^*) + \overbrace{\left.\frac{\partial\ln\Omega_1}{\partial E_1}\right|_{E_1=E_1^*}(E-E_1^*) + \cancel{\frac{\partial\ln\Omega_2}{\partial E_1}}\Big|_{E_1=E_1^*}(E-E_1^*)}^{=0 \Rightarrow \text{equilibrio}} +$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\ln\Omega_1}{\partial E_1^2}\right|_{E_1=E_1^*}(E-E_1^*)^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\ln\Omega_2}{\partial E_1^2}\right|_{E_1=E_1^*}(E-E_1^*)^2 =$$

$$= \ln\Omega_1(E_1^*)\Omega_2(E-E_1^*) + \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\partial^2\ln\Omega_1}{\partial E_1^2}\right|_{E_1=E_1^*}(E-E_1^*)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\partial^2\ln\Omega_2}{\partial E_1^2}\right|_{E_1=E_1^*}(E-E_1^*)^2$$

$\Rightarrow$ Tomamos exponenciales para quitarnos sin logaritmo:

$$\Omega(E) = \Omega_1(E_1^*)\Omega_2(E-E_1^*) +$$

$$+ \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\partial^2\ln\Omega_1}{\partial E_1^2}(E-E_1^*)^2 + \frac{\partial^2\ln\Omega_2}{\partial E_1^2}(E-E_1^*)^2\right]}}_{}$$

uy este término qué raruno, vamos a ver qué se puede hacer con él

Comparamos con lo que nos da el enunciado (a lo que queremos llegar):

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{(E-E_1^*)^2}\left[\frac{\partial^2\ln\Omega_1}{\partial E_1^2} + \frac{\partial^2\ln\Omega_2}{\partial E_1^2}\right] = +\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{(E_1-E_1^*)^2}\left[\frac{\partial^2\ln\Omega_1}{\partial E_1^2}E_1^* + \frac{\partial^2\ln\Omega_2}{\partial E_1^2}(E-E_1^*)\right]^{-2}$$

$$\frac{\partial^2\ln\Omega_1}{\partial E_1^2} + \frac{\partial^2\ln\Omega_2}{\partial E_1^2} = \left[\frac{\partial^2\ln\Omega_1}{\partial E_1^2}E_1^* + \frac{\partial^2\ln\Omega_2}{\partial E_1^2}(E-E_1^*)\right]^{-2}$$

raruno iii

rpon0869

contraseña USYD @r0cio22

EJERCICIO 3: considera un volumen V con un gas ideal de partículas relativistas (masa despreciable frente a su energía), cuya energía vendrá dada por $E = pc$, con c siendo la velocidad de la luz y p es el módulo del momento lineal.

a) Calcula la función de partición para una partícula, y obtén la energía media y el calor específico por partícula.

b) Discute el resultado comparándolo con la predicción del principio de equipartición.

a) ~~La función de partición para una partícula la calcularemos a partir de la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, ya que la velocidad es lo que podemos relacionar a la energía.~~

Mentira cochina! Vamos a dar la función de partición de la siguiente forma:

$$Z = \frac{1}{h^3}\iint d^3x\, d^3p\, e^{-\beta E(x,p)} = \frac{1}{h^3}\int d^3x \int d^3p\, e^{-\beta pc} =$$

↑ volumen, 3 grados de libertad

$$= \frac{1}{h^3}\cdot V \int d^3p\, e^{-\beta\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}\,c} =$$

con el módulo de p así no podemos separar en 3 integrales iguales ⟹ $y = p^2$, $dy = 2p\,dp$

qué hago con esto? me lo como?

$$= \frac{1}{h^3} V \int \boxed{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\, d^3y}\, e^{-\beta y c} = \frac{1}{h^3} V \left[\int \frac{1}{8\sqrt{y}}\, e^{-\beta y c}\, dy\right]^3$$

⟸ esto es así? vamos

SOLUCIÓN ALEX: pasar a ESFÉRICAS y tomar d^3p como un diferencial de volumen