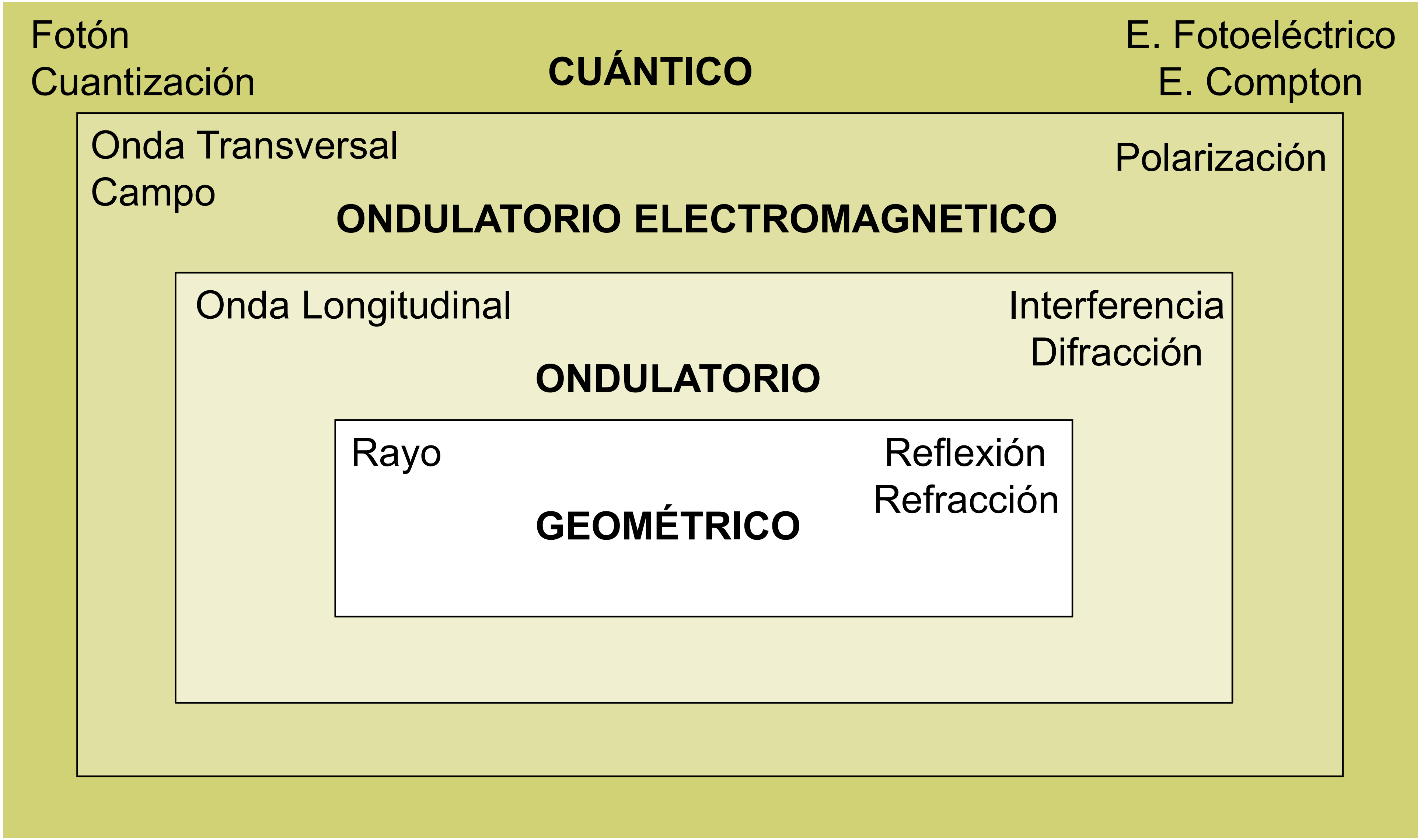
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

ÓPTICA I

ÓPTICA ELECTROMAGNÉTICA

Departamento de Óptica, Farmacología y Anatomía

MODELOS CIENTÍFICOS SOBRE LA NATURALEZA DE LA LUZ



"La óptica, una historia de conceptos y teorías"

Los modelos son representaciones de la naturaleza

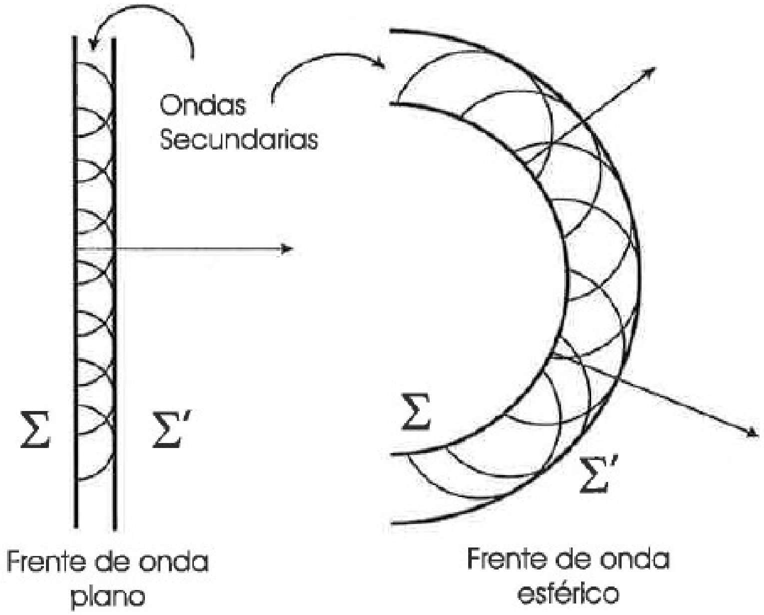
Principios de Óptica ondulatoria
Tema 5

- 1. Introducción
- 2. Ecuación diferencial de onda unidimensional
- 3. Ondas armónicas
- 4. Fase y velocidad de fase
- 5. Representación compleja de las ondas
- 6. Ecuación diferencial de onda tridimensional
- 7. Ondas planas, esféricas y cilíndricas
- 8. Ondas escalares y vectoriales
- 9. Superposición de ondas de igual frecuencia

1. Introducción

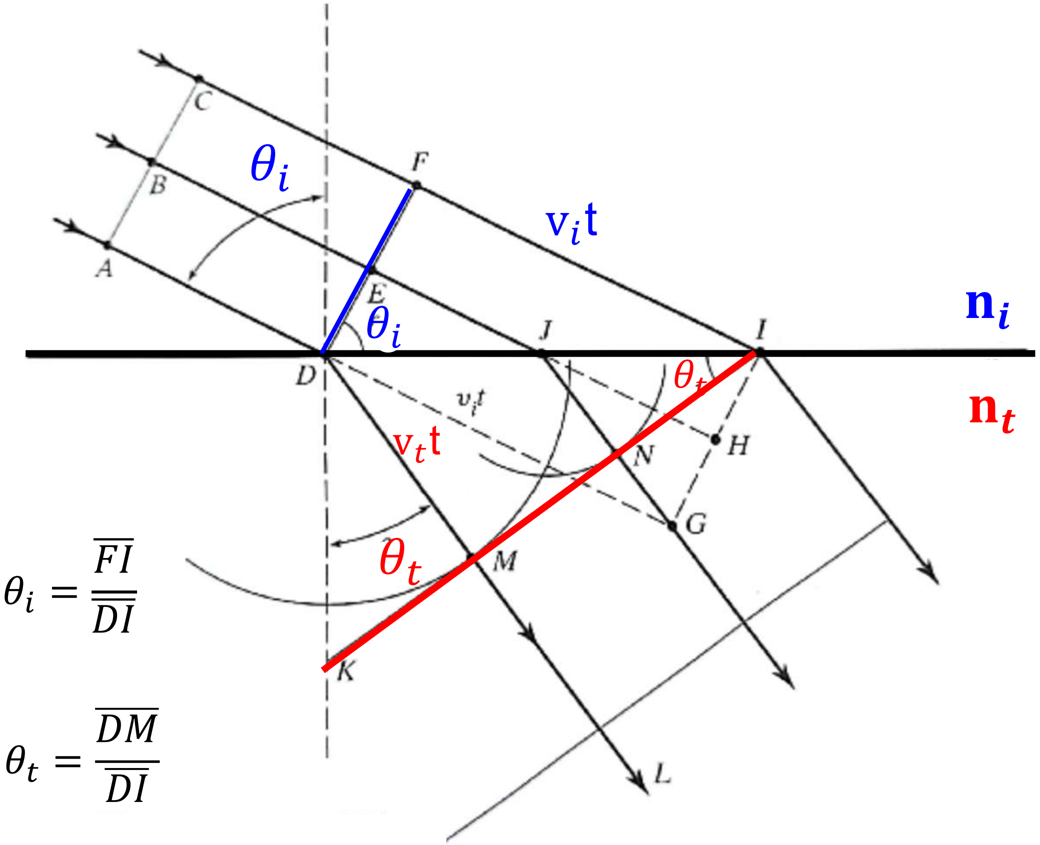
- Principio de Huygens: Propagación de la luz como onda

Propagación de un frente de onda:
"Principio de Huygens"



"Cada uno de los puntos de Σ emite ondas esféricas elementales. Al cabo de un cierto tiempo, la envolvente de dichas ondas elementales es Σ´ "

Ley de la refracción:
"Construcción de Huygens"



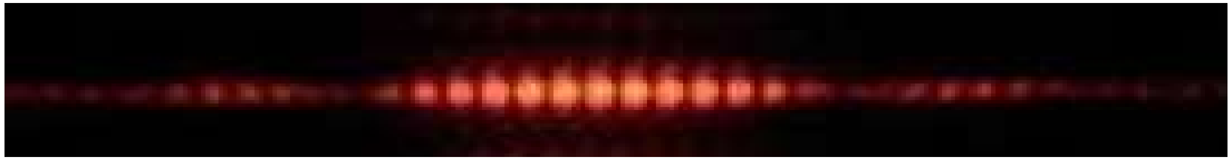
$$sen\,\theta_i = \frac{\overline{FI}}{\overline{DI}}$$

$$sen\,\theta_t = \frac{\overline{DM}}{\overline{DI}}$$

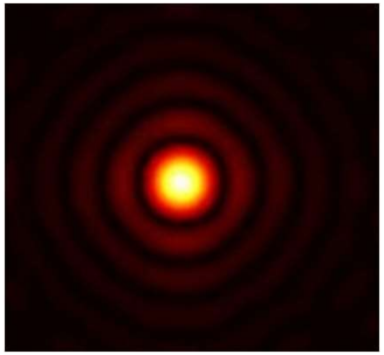
$$\boxed{\frac{\mathrm{sen}\theta_i}{\mathrm{sen}\theta_t} = \frac{\overline{FI}}{\overline{DM}} = \frac{\mathrm{v}_i\mathrm{t}}{\mathrm{v}_t\mathrm{t}} = \frac{c/n_i}{c/n_t} = \frac{n_t}{n_i}}$$

Aplicaciones de la Teoría ondulatoria

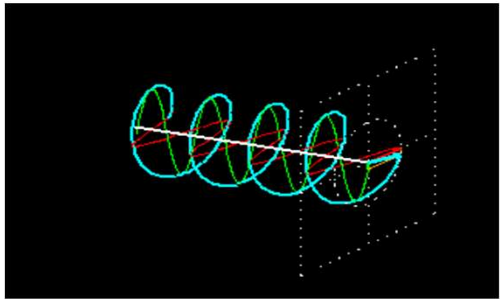
- Young ⟶ ondas periódicas, λ ⟶ Interferencias



- Fresnel ⟶ interf. ondas elementales ⟶ Difracción



- Maxwell ⟶ luz como onda e.m. ⟶ Polarización



Objetivos

- Introducir los conceptos básicos de la teoría ondulatoria.

- Clasificar los diferentes tipos de onda según:
  - Fase
  - Vector de propagación
  - Frente de onda
  - Dirección de vibración respecto a propagación

- Estudiar la superposición de ondas de igual frecuencia

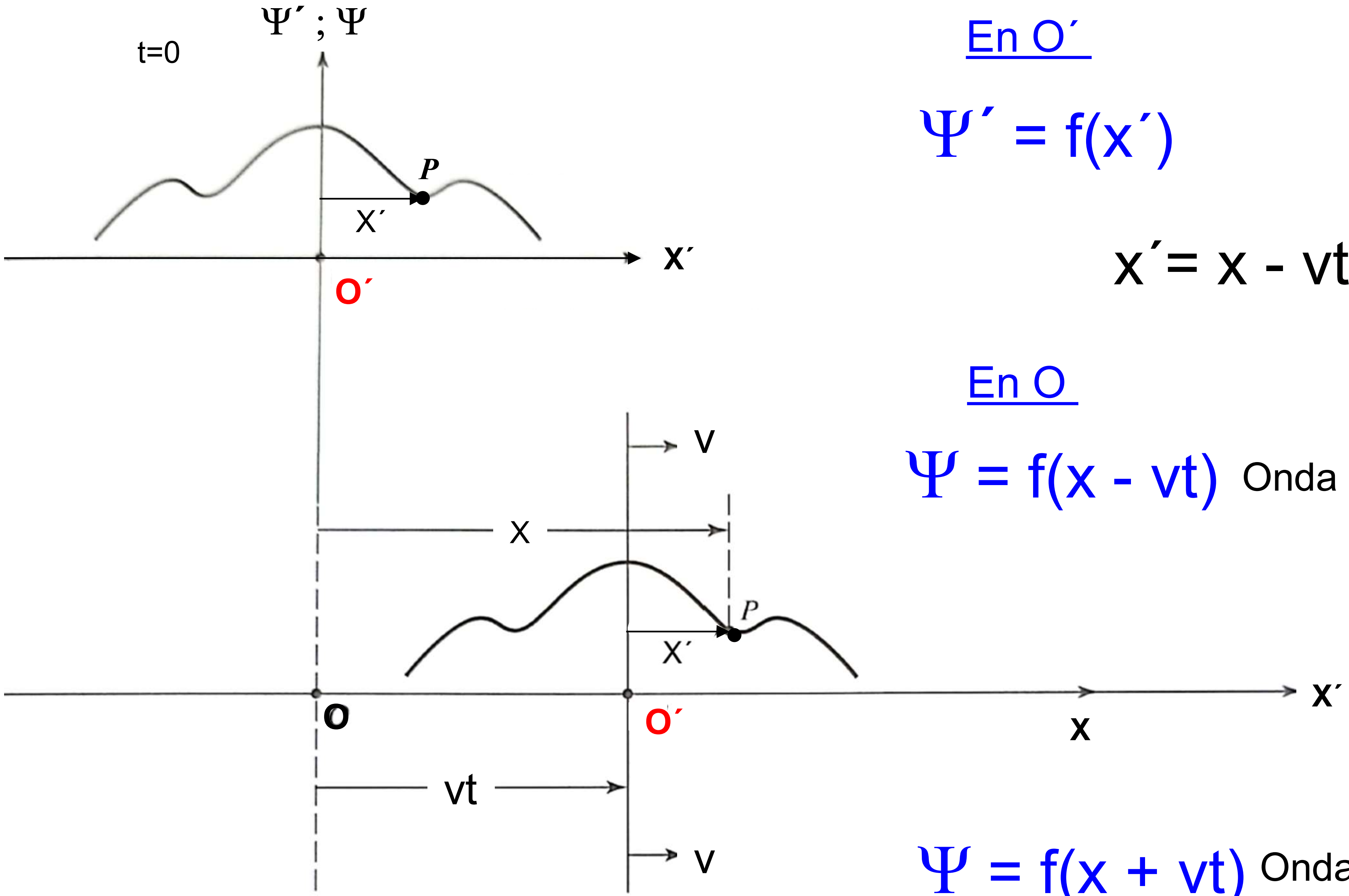
2. Ecuación diferencial de onda unidimensional

- Ψ Perturbación (E, B, y , x , z , P, ρ) que se propaga en x con velocidad v

- Función de onda $\Psi = f(x,t)$

- Perfil de la onda $\Psi = f(x,t)_{t=cte=0} = f(x)$

Una onda de tipo pulso se desplaza con velocidad constante v



En O´

$$\Psi' = f(x')$$

$$x' = x - vt$$

En O

$$\Psi = f(x - vt)$$ Onda viajera +x

$$\Psi = f(x + vt)$$ Onda viajera - x

Tomando $\Psi = f(x')$ donde x´= x ± vt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \longrightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} = \pm \mathrm{v}\frac{\partial f}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\pm \mathrm{v}\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\pm \mathrm{v}\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} = \mathrm{v}^2\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$$

Ecuación diferencial de onda unidimensional

$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n\ m\acute{a}s\ general}$: $\Psi = C_1 f_1(x - \mathrm{v}t) + C_2 f_2(x + \mathrm{v}t)$

Principio de superposición

La ecuación diferencial de onda es una ecuación lineal.

Si Ψ_1 y Ψ_2 son soluciones de la ecuación, $\Psi_1 + \Psi_2$ es también solución.

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 (\Psi_1 + \Psi_2)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} + \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 (\Psi_1 + \Psi_2)}{\partial t^2}$$

Cuando se superponen dos ondas la resultante también es una onda

Este principio supone la base para estudiar tanto la <u>interferencia</u> como la <u>difracción</u>

3. Ondas armónicas

- Ondas de perfil sinusoidal (f = seno ó coseno)

  Perfil $\Psi(x,t=0) = A \text{ sen } kx$

  k "número de propagación"

  A =Amplitud =Máximo valor de $|\Psi(x,t)|$

- Onda viajera armónica $\Psi(x,t) = A \text{ sen } k(x-vt)$

- *Periódica en el espacio* "λ" $\rightarrow \Psi(x,t)= \Psi(x\pm\lambda,t) \rightarrow k=\frac{2\pi}{\lambda}$

- *Periódica en el tiempo* "T" $\rightarrow \Psi(x,t)= \Psi(x,t\pm T) \rightarrow v =\frac{\lambda}{T}$

Periodicidad espacial

$$\Psi(x,t) = \Psi(x \pm \lambda, t)$$

$$\text{sen k}\,(x - \text{v}t) = \text{sen k}\,[(x \pm \lambda) - \text{v}t] = sen[k(x - \text{v}t) \pm k\lambda] = sen[k(x - \text{v}t) \pm 2\pi]$$

$$|k\lambda| = 2\pi$$

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Periodicidad temporal

$$\Psi(x,t) = \Psi(x, t \pm T)$$

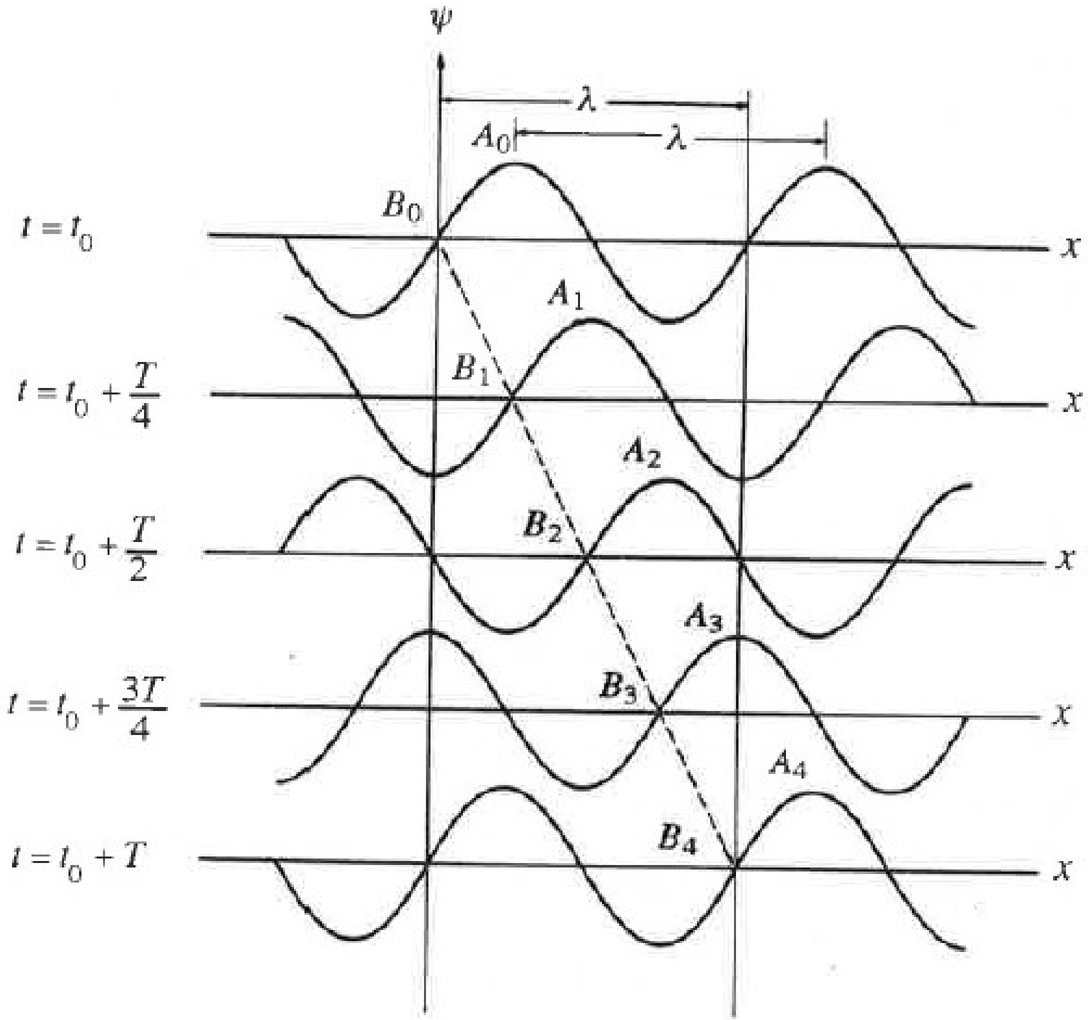
$$\text{sen k}\,(x - \text{v}t) = \text{sen k}\,[x - \text{v}(t \pm T)] = sen[k(x - \text{v}t) \pm k\text{v}T] = sen[k(x - \text{v}t) \pm 2\pi]$$

$$|k\text{v}T| = 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\text{v}T = 2\pi$$

$$\boxed{\text{v} = \frac{\lambda}{T}}$$

La onda armónica recorre una distancia λ en un tiempo T



$$\boxed{\Psi(x,t) = A \text{ sen } k(x-vt)}$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = A \text{ sen } (kx-wt)}$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = A \text{ sen } 2\pi(x/\lambda - t/T)}$$

4. Fase y velocidad de fase

$\Psi(x,t)$= Asen φ =Asen($kx \pm wt + \varphi_0$) ; φ "Fase de la onda"

"Velocidad de fase" $\left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\right)_{\varphi}$

Si φ=cte $\rightarrow$ $$\frac{d\varphi(x,t)}{dt} = 0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\varphi}$$

$$v_{fase} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\varphi} = \frac{-\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x}{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t} = -\frac{\pm w}{k} = \pm v$$

$v_{fase} = v_{propagación\ onda}$

5. Representación compleja de las ondas

$$\boxed{\Psi = Ae^{i(kx-wt+\varphi_o)} = \mathrm{A}e^{i\varphi}}$$

Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,sen\theta$

$$\Psi = Ae^{i(kx-wt+\varphi_o)} = \underbrace{\mathrm{A}\cos(kx - wt + \varphi_o)}_{Real\left[Ae^{i(kx-wt+\varphi_o)}\right]} + \mathrm{i}\,\underbrace{\mathrm{A}sen(kx - wt + \varphi_o)}_{Img\left[Ae^{i(kx-wt+\varphi_o)}\right]}$$

Simplifica los cálculos en problemas lineales de superposición, suma o integración de funciones: Interferencias , difracción

En el resultado final se suele tomar la parte real para interpretar la onda

$$\Psi_{final} = Real\left[A_{total}e^{i\varphi_{total}}\right]$$

6. Ecuación difer. de onda tridimensional

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\nabla^2\Psi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}}$$

Vector de propagación: $\vec{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\hat{u}_k \quad |\vec{k}|=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$

$\hat{u}_k$ indica la dirección y sentido de propagación de la onda

Frente de onda: Superficie que une todos los puntos de igual fase en un instante de tiempo dado

$$v_{\text{frente de onda}} = v_{\text{fase}} = v_{\text{propag. onda}} = v$$

Onda tridimensional: Una solución de la ec. dif. de onda tridim.

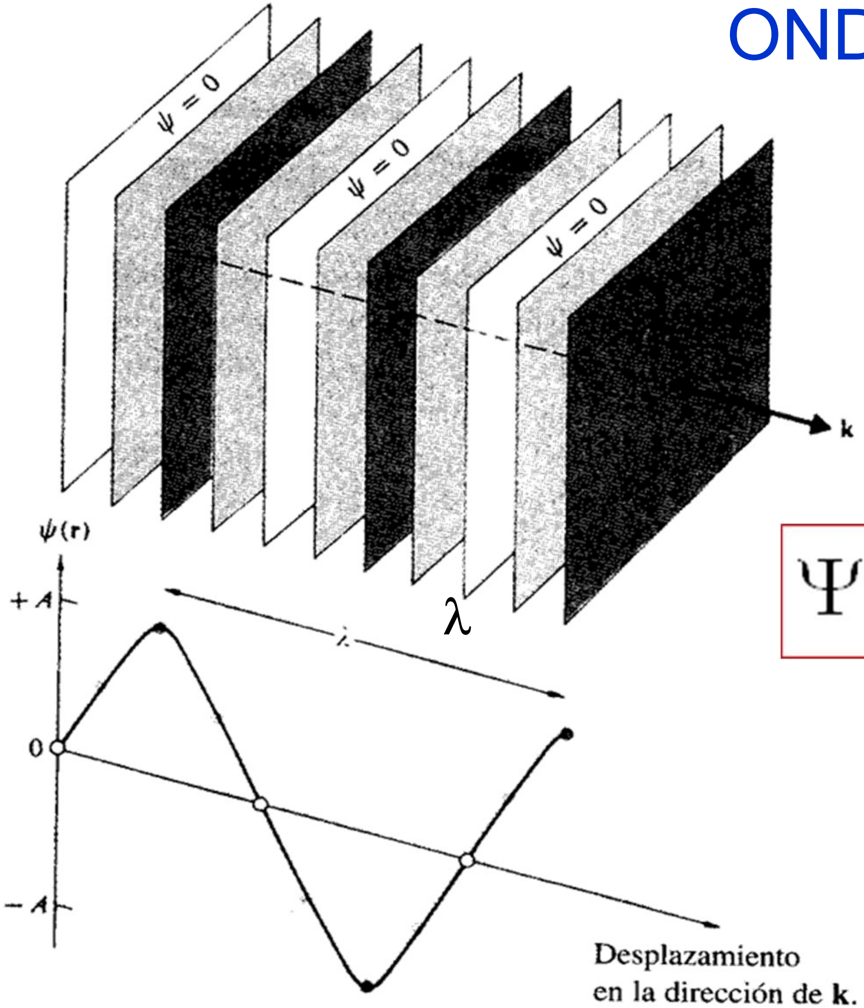
$$\Psi(x,y,z,t) = A\cos(k_x x + k_y y + k_z z - wt + \varphi_o)$$

7. Ondas planas, esféricas y cilíndricas

Frente de onda

Superficie que une todos los puntos de igual fase en un instante de tiempo dado

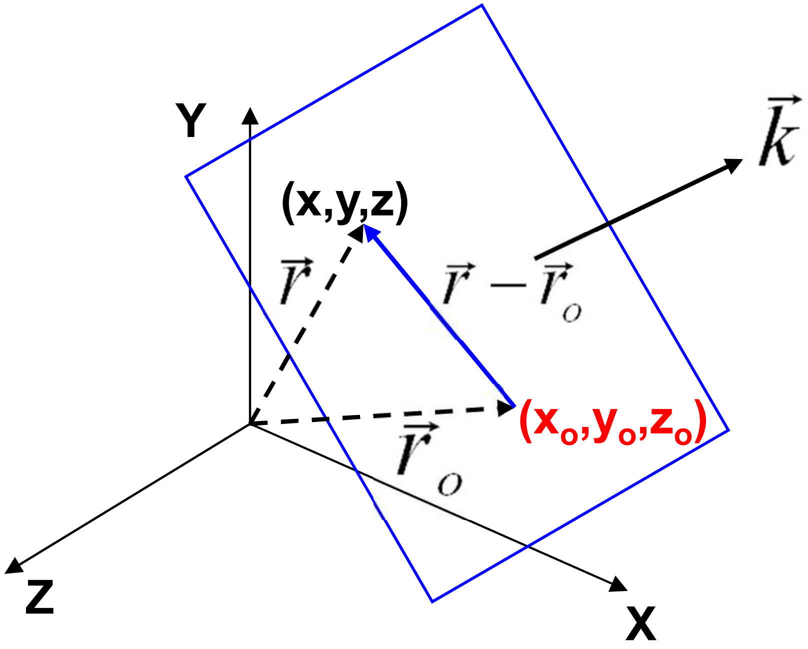
ONDAS PLANAS



$$\Psi(\vec{r},t) = A sen\,(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm wt + \varphi_0)$$

Fase = cte $\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = cte \Rightarrow$ Plano $\perp \vec{k}$

Ecuación de un plano que pasa por un punto de coordenadas (x_o, y_o, z_o) y es perpendicular al vector $\vec{k}$



Sea $\vec{r} = (x, y, z)$ el vector de posición de un punto cualquiera del espacio.

Si imponemos la condición: $\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o) = 0$

Se cumple que $\vec{k} \perp (\vec{r} - \vec{r}_o)$

El vector $\vec{r} = (x, y, z)$ representaría a puntos que están sobre ese plano perpendicular a $\vec{k}$

$$\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o) = 0$$

$$k_x(x-x_o) + k_y(y-y_o) + k_z(z-z_o) = 0$$

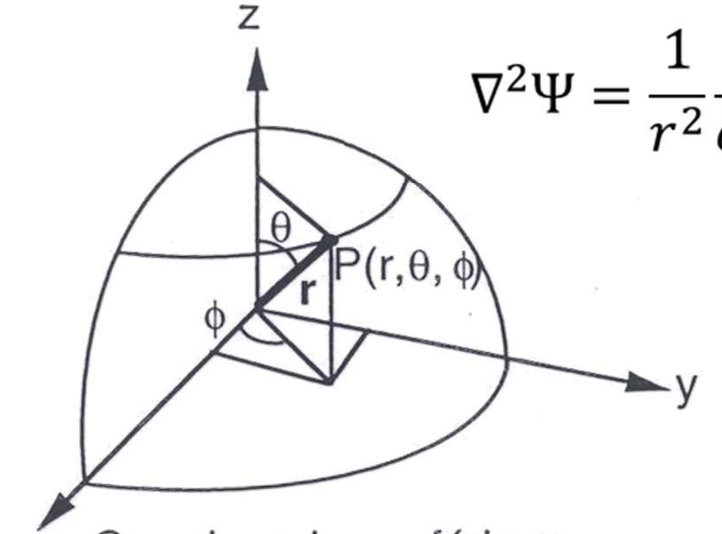
$$k_x x+k_y y+k_z z = k_x x_o+k_y y_o+k_z z_o= a =cte$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}_o = a = cte$$

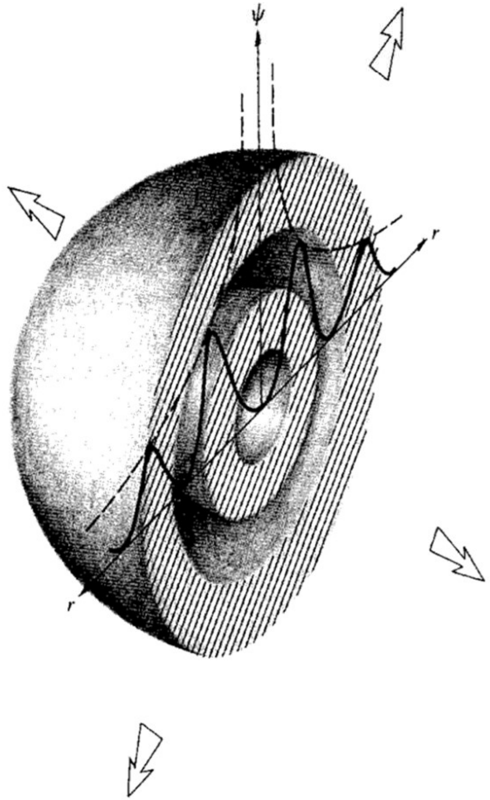
Ecuación de un plano $\perp$ $\vec{k}$

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{r} = cte}$$

ONDAS ESFÉRICAS



Coordenadas esféricas



$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}$$

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi(r,\theta,\phi,t) = \Psi(r,t)$$

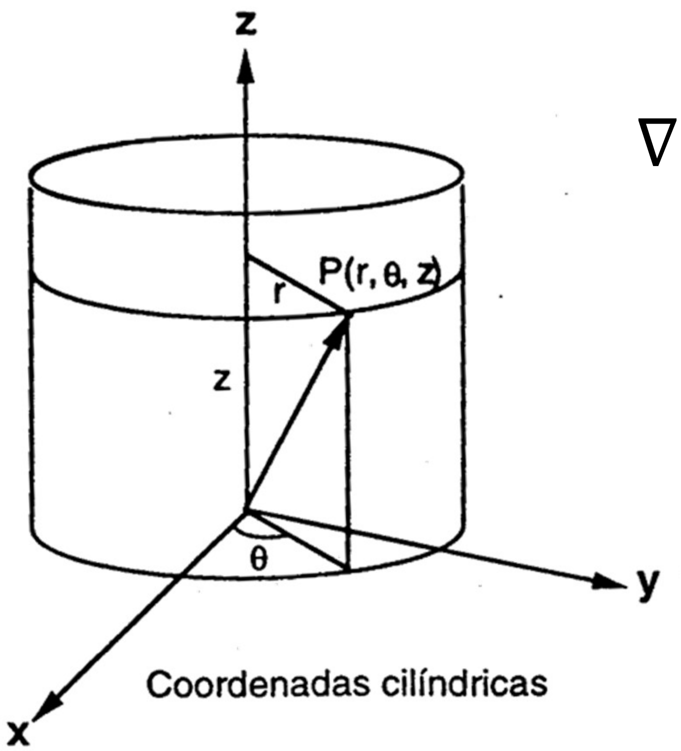
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2(\mathrm{r}\Psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2(\mathrm{r}\Psi)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Psi(r,t) = \frac{\mathcal{A}}{r}cosk(r \pm \mathrm{v}t)}$$

Fase= cte ⇒ kr = cte ⇒ Esfera

ONDAS CILÍNDRICAS

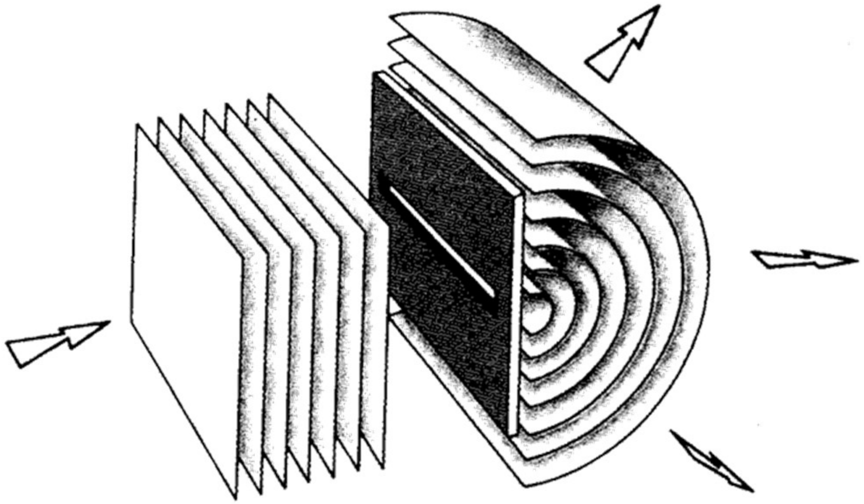


Coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi(r,\theta,z,t) = \Psi(r,t)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$



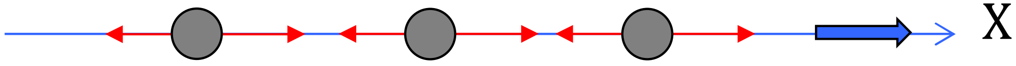
$$\boxed{\Psi(r,t) \approx \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{r}} cos k(r \pm \mathrm{v}t)}$$

Fase= cte $\Rightarrow$ kr = cte $\Rightarrow$ Cilindro

8. Ondas escalares y vectoriales

- Onda escalar o longitudinal:

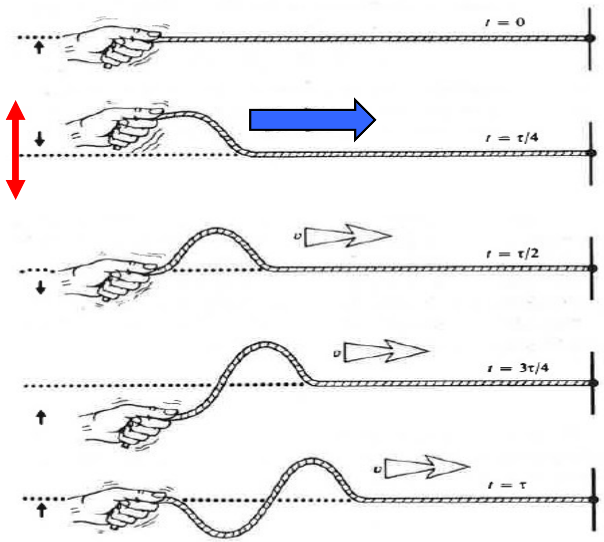
Dirección de vibración = Dirección de propagación



$$\boxed{\Psi_x = Af(x,t)}$$

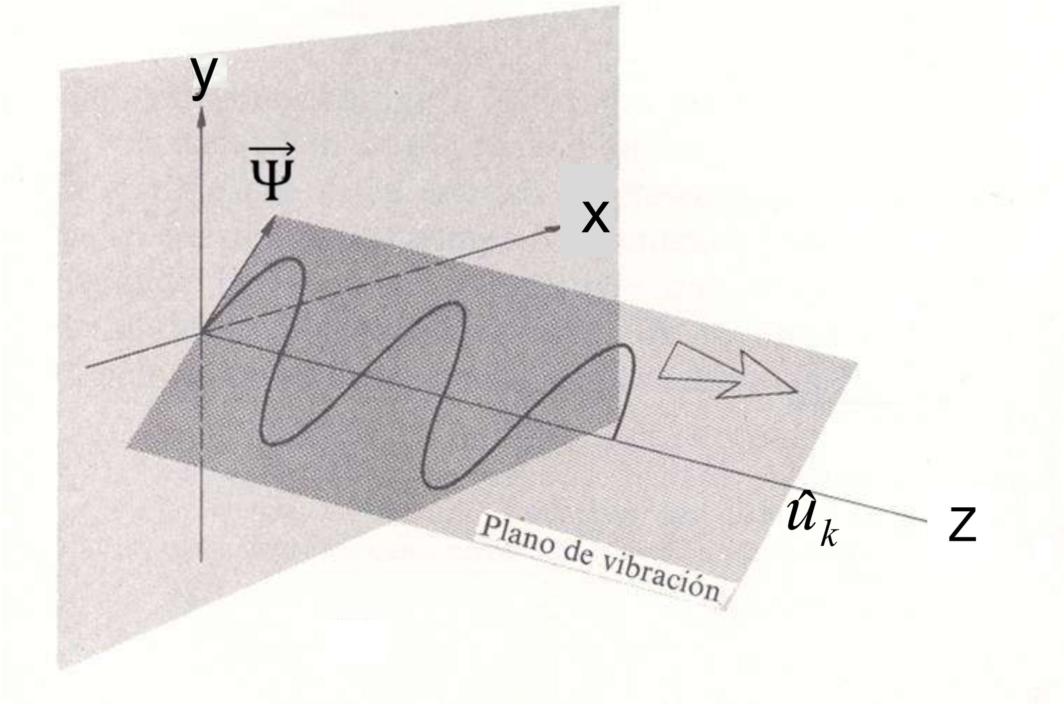
- Onda vectorial o transversal:

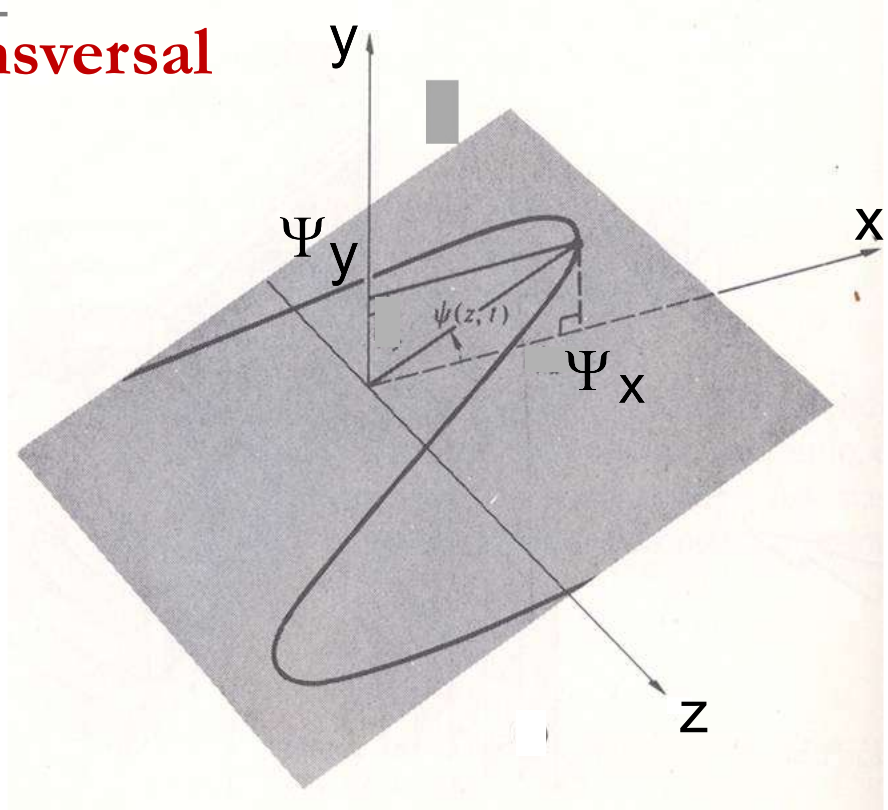
Dirección de vibración $\perp$ Dirección de propagación



$$\boxed{\vec{\Psi} = \vec{A}f(x,t)}$$

Perfil de una onda transversal





Dirección de vibración: la de $\vec{\Psi}$

Plano de vibración: el que forma $\vec{\Psi}$ con la dirección de propagación $\hat{u}_k$

$$\vec{\Psi}(z,t) = \Psi_x(z,t)\hat{i} + \Psi_y(z,t)\hat{j}$$

Onda viajera armónica tridimensional plana vectorial y polarizada linealmente

$$\vec{\Psi}(r,t) = \vec{A}\exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm wt)$$

$$\vec{\Psi}(x,y,z,t) = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\exp i(k_x x + k_y y + k_z z \pm wt)$$

9. Superposición de ondas de igual frecuencia

Sean Ψ_1 , Ψ_2 dos funciones de onda paralelas, de la misma naturaleza.

Se superponen en un punto P, que está a una distancia x_1 de una fuente y a x_2 de la otra.

$$\Psi_1(x_1,t)= A_1\cos(kx_1-wt+\varphi_{01}) = A_1\cos(\alpha_1- wt) \qquad ; \quad \alpha_1= kx_1 +\varphi_{01}$$

$$\Psi_2(x_2,t)= A_2\cos(kx_2 -wt+\varphi_{02}) = A_2\cos(\alpha_2-wt) \qquad ; \quad \alpha_2= kx_2 +\varphi_{02}$$

$$\Psi=\Psi_1 + \Psi_2 =A_1(\cos\alpha_1\cos wt + \mathrm{sen}\alpha_1\mathrm{sen} wt)+ A_2(\cos\alpha_2\cos wt+ \mathrm{sen}\alpha_2\mathrm{sen} wt)=$$

$$=\underbrace{(A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2)}_{A\cos\alpha} \cos wt + \underbrace{(A_1 \mathrm{sen}\alpha_1 + A_2 \mathrm{sen}\alpha_2)}_{A\,\mathrm{sen}\,\alpha} \mathrm{sen}\, wt =*$$

$$*=A \cos\alpha \cos wt + A\, \mathrm{sen}\alpha\, \mathrm{sen}\, wt = A \cos (\alpha - wt)$$

Incognitas A y α

$A \cos \alpha = A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2$ (1)

$A \operatorname{sen} \alpha = A_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + A_2 \operatorname{sen}\alpha_2$ (2)

$A^2 \cos^2 \alpha = A_1{}^2 \cos^2 \alpha_1 + A_2{}^2 \cos^2\alpha_2 + 2 A_1 A_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2$ $(1)^2$

$A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = A_1{}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + A_2{}^2 \operatorname{sen}^2\alpha_2 + 2 A_1 A_2 \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2$ $(2)^2$

$$A^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad (1)^2 + (2)^2$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{A_1 \mathrm{sen}\alpha_1 + A_2 \mathrm{sen}\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2} \qquad \frac{(2)}{(1)}$$

Sustitución correcta puesto que hemos despejado las incógnitas A y α poniéndolas en función de datos conocidos.

La <u>intensidad</u> de la onda es proporcional a A^2

$$\boxed{A^2 = A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2\,A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

Término de interferencia

$$2\,A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 2\,A_1 A_2 \cos\delta$$

Diferencia de fase $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = k(x_2 - x_1) + (\varphi_{02} - \varphi_{01})$

Ondas coherentes: Cuando $(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \text{cte}$

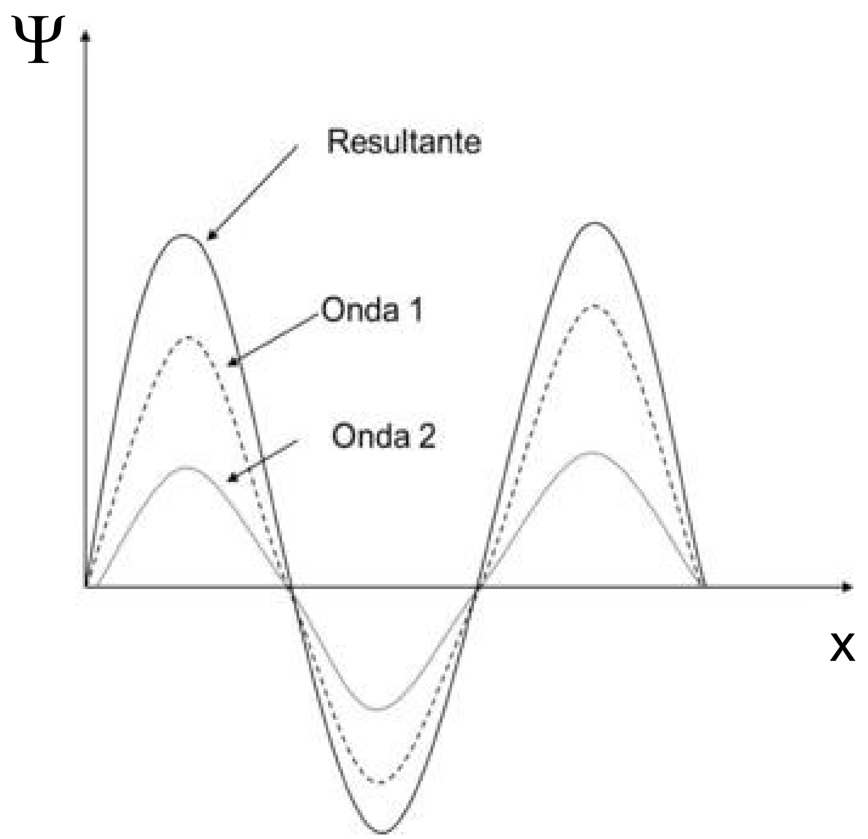
Si $\varphi_{02} = \varphi_{01} \Rightarrow \delta = k(x_2 - x_1) = \dfrac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1) = \dfrac{2\pi}{\lambda_o} n(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1) = \dfrac{2\pi}{\lambda_o}\Delta$

Diferencia de camino óptico: $\Delta = n(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)$

Ondas en fase

$\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

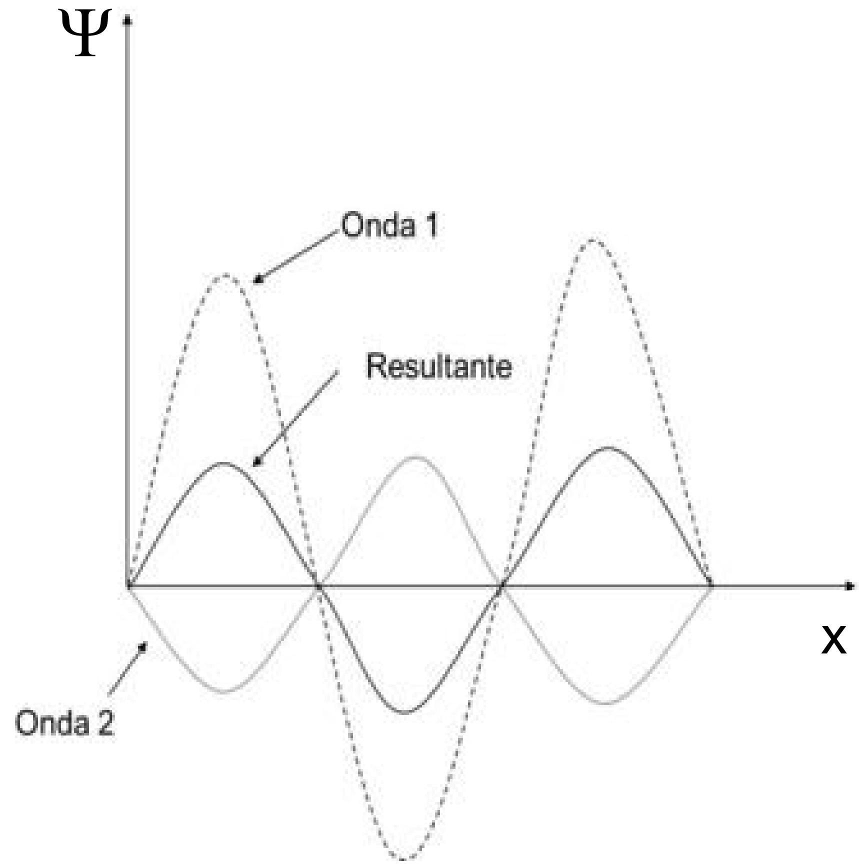
Máx. Amplitud $A^2 = (A_1 + A_2)^2$



Ondas en opos. fase

$\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$

Mín. Amplitud $A^2 = (A_1 - A_2)^2$



Generalización: Superposición de N-ondas

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(\alpha_i - wt) = A\cos(\alpha - wt)$$

Onda resultante de la misma frecuencia que la de las ondas componentes

$$\boxed{A^2 = \sum_{i=1}^{N} {A_i}^2 + 2\sum_{j>i}^{N} A_j \sum_{i}^{N} A_i \cos(\alpha_j - \alpha_i)}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \mathrm{sen}\alpha_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i \cos\alpha_i}}$$

Ejemplo: Ondas estacionarias

Se superponen dos ondas de la misma frecuencia, que se propagan en la misma dirección, pero en sentidos opuestos.

Una onda incidente se refleja y se superpone con la onda reflejada.

<u>Onda incidente</u> $\Psi_I = A_I$ sen $(kx+wt+\varphi_{0I})$ llega a superficie reflectante en x=0

<u>Onda reflejada</u> $\Psi_R = A_R$ sen $(kx-wt+\varphi_{0R})$

<u>Solución general</u>: Onda resultante $\Psi = \Psi_I + \Psi_R$

<u>Solución particular</u>:

Tomemos $\varphi_{0I} = 0$; $A_I = A_R$

En x=0 $\Psi=0 \Rightarrow \Psi = \Psi_I + \Psi_R = A_I$ (sen wt + sen (- wt+φ_{0R}))=0 $\Rightarrow \varphi_{0R}=0$

Por tanto: $\Psi = A_I$ [sen (kx+wt) + sen (kx-wt)]

Aplicando senα + senβ = 2 sen $[(\alpha+\beta)/2]$ cos $[(\alpha-\beta)/2]$

$$\boxed{\Psi(x,t) = 2A_I \,\text{senkx coswt} = A(x)\,\text{coswt}}$$ Onda estacionaria

a) Es una onda porque satisface la ecuación diferencial de onda pero no es una onda viajera porque no es una función f(x±vt)

b) La amplitud tiene dependencia espacial: $A(x)=2A_I$ sen kx

Puntos nodales A=0 $\Rightarrow \Psi = 0$ en todo instante de tiempo

sen kx=0 $\Rightarrow$ kx = mπ $\Rightarrow (2\pi/\lambda)$x =m$\pi$ $\Rightarrow$ x= m$\lambda/2$; x= 0, $\lambda/2$, $2\lambda/2$, $3\lambda/2$...

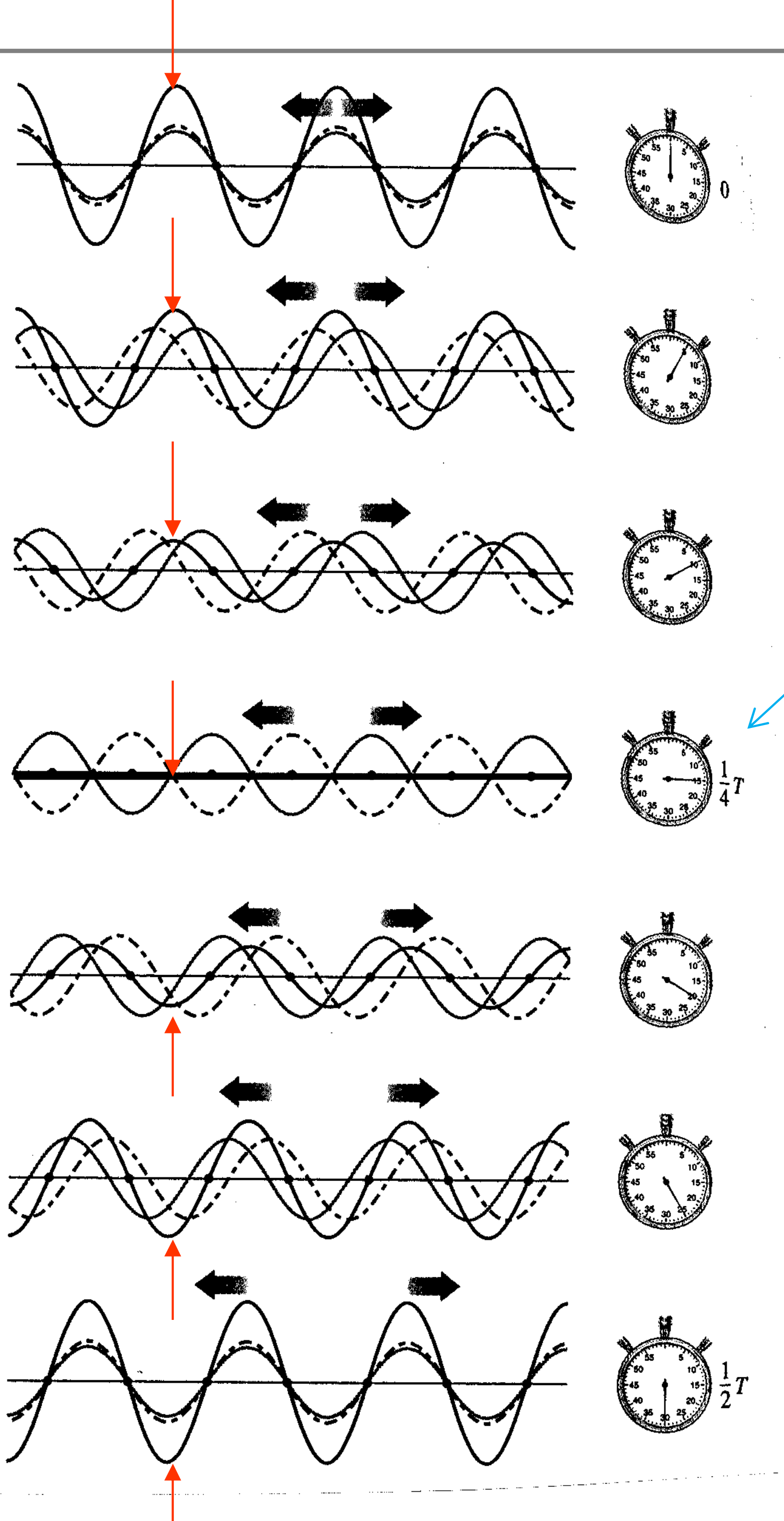
Puntos antinodales $|A(x)|$ = Máxima=$2A_I$

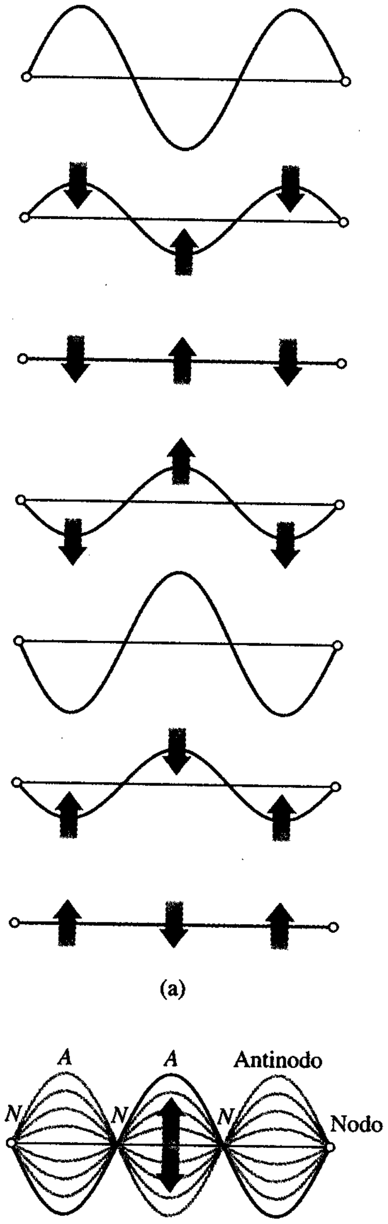
senkx=$\pm$1 $\Rightarrow$ kx=(2m+1)$\pi/2$ $\Rightarrow (2\pi/\lambda)$x =(2m+1) $\pi/2$ $\Rightarrow$ x=(2m+1) $\lambda/4$

x = $\lambda/4$, $3\lambda/4$, $5\lambda/4$,...

c) El valor de la perturbación Ψ varía armónicamente con el tiempo existiendo valores que hacen Ψ=0 en todos los puntos del espacio (perfil para ciertos valores "t" = línea coincidiendo con eje horizontal)

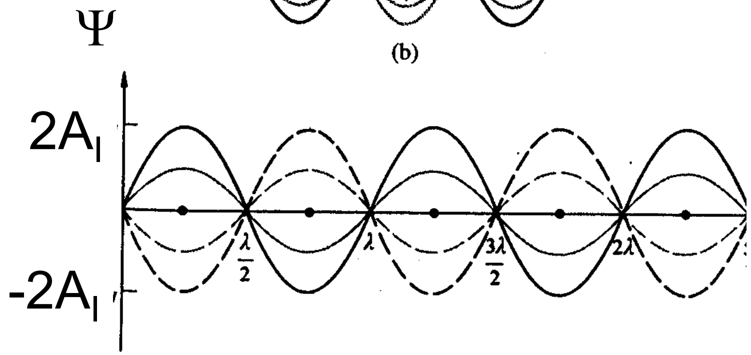
Ψ=0 para todo x si coswt = 0 $\Rightarrow$ wt= (2m+1)$\pi/2$ $\Rightarrow$ ($2\pi/T$) t = (2m+1)$\pi/2$ $\Rightarrow$ t = (2m+1)$T/4$ $\Rightarrow$ t= $T/4$, $3T/4$,...


0
$\frac{1}{4}T$
$\frac{1}{2}T$


A
A
Antinodo
N
N
N
Nodo

(a)

(b)


Ψ
$2A_I$
$-2A_I$
$\frac{\lambda}{2}$
λ
$\frac{3\lambda}{2}$
2λ

Simulación:

- https://es.wikipedia.org/wiki/Onda_estacionaria#/media/Archivo:Standing_wave_2.gif