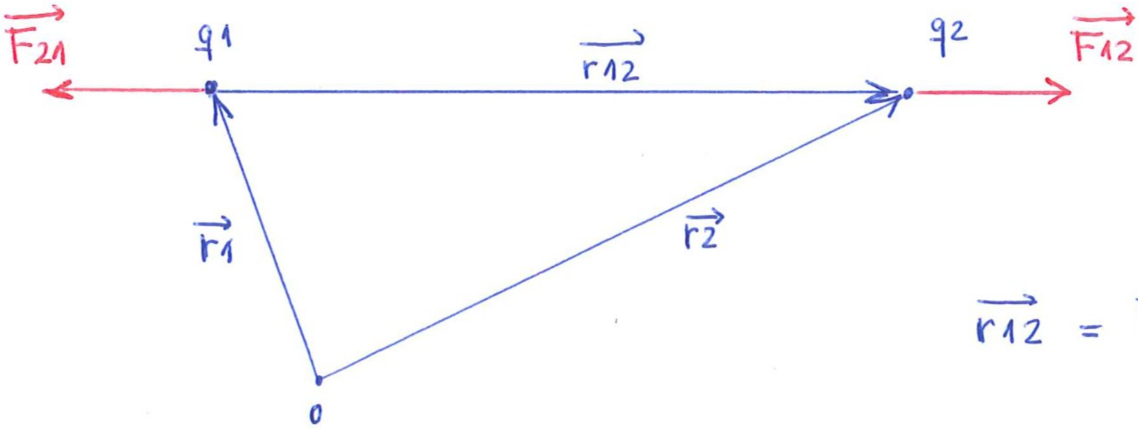
Clase 1 Tema 1

Distribuciones discretas de carga (cargas puntuales)



$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

fuerza que ejerce carga 1 sobre carga 2

$$\vec{F}_{12} = \frac{k\, q_1 q_2}{r_{12}^2}\, \hat{r}_{12} \qquad \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$= \frac{k\, q_1 \cdot q_2}{r_{12}^3}\, \vec{r}_{12} \qquad k = 9\times 10^9 \ \frac{N m^2}{C^2}$$

$$\vec{E}_{12} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_2} = \frac{k q_1}{r_{12}^2}\, \hat{r}_{12}$$

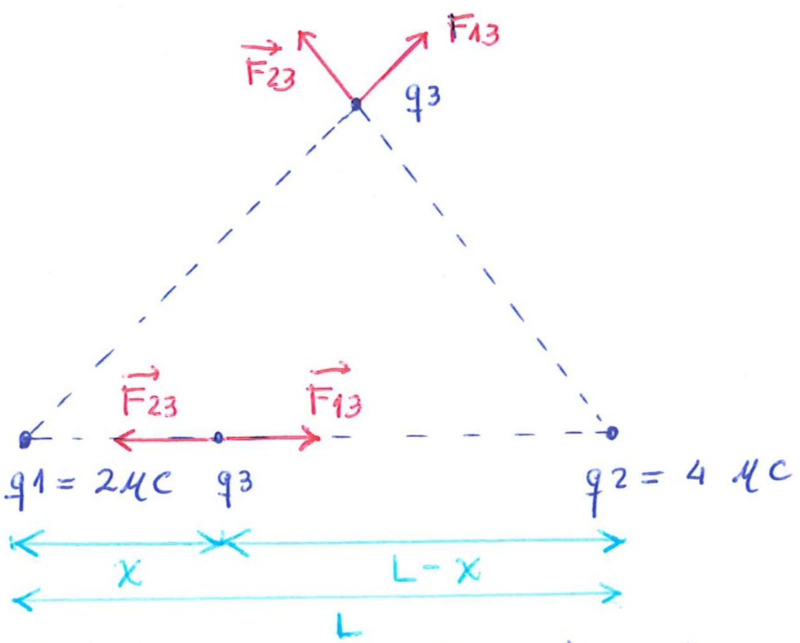
campo eléctrico que crea carga 1 en la posición de la carga 2

Si hay más cargas se suman los vectores fuerza o campo eléctrico

Problema 2 Tema 3

2. @ Dos cargas puntuales de 2 y 4 μC, respectivamente, están separadas una distancia *L*. ¿Dónde se debería poner una tercera carga para que la fuerza eléctrica sobre ella fuera nula?

Resultado: A una distancia 0.414 *L* de la primera carga



Si la carga q_3 (independientemente de su signo) está fuera de la línea que une a q_1 y q_2, la fuerza sobre q_3 nunca se anulará. Dado que se anula podemos decir que q_3 se encuentra en el segmento que une q_1 y q_2 y además las fuerzas $\vec{F_{13}}$ y $\vec{F_{23}}$ son de igual módulo y opuestas

$$\vec{F_3} = 0 = \vec{F_{13}} + \vec{F_{23}} \Rightarrow \vec{F_{13}} = -\vec{F_{23}}$$

$$F_{13} = F_{23} \quad \text{módulos}$$

$$F_{13} = F_{23}$$

$$\frac{\cancel{k}\, q_1 \cancel{q_3}}{r_{13}^2} = \frac{\cancel{k}\, q_2 \cancel{q_3}}{r_{23}^2}$$

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(L-x)^2}$$

$$\overset{2}{\cancel{4 \times 10^{-6}}}\, x^2 = \cancel{2 \times 10^{-6}}\, (L-x)^2$$

$$2x^2 = L^2 + x^2 - 2Lx$$

$$x^2 + 2xL - L^2 = 0$$

$$\boxed{0{,}414\ L}$$

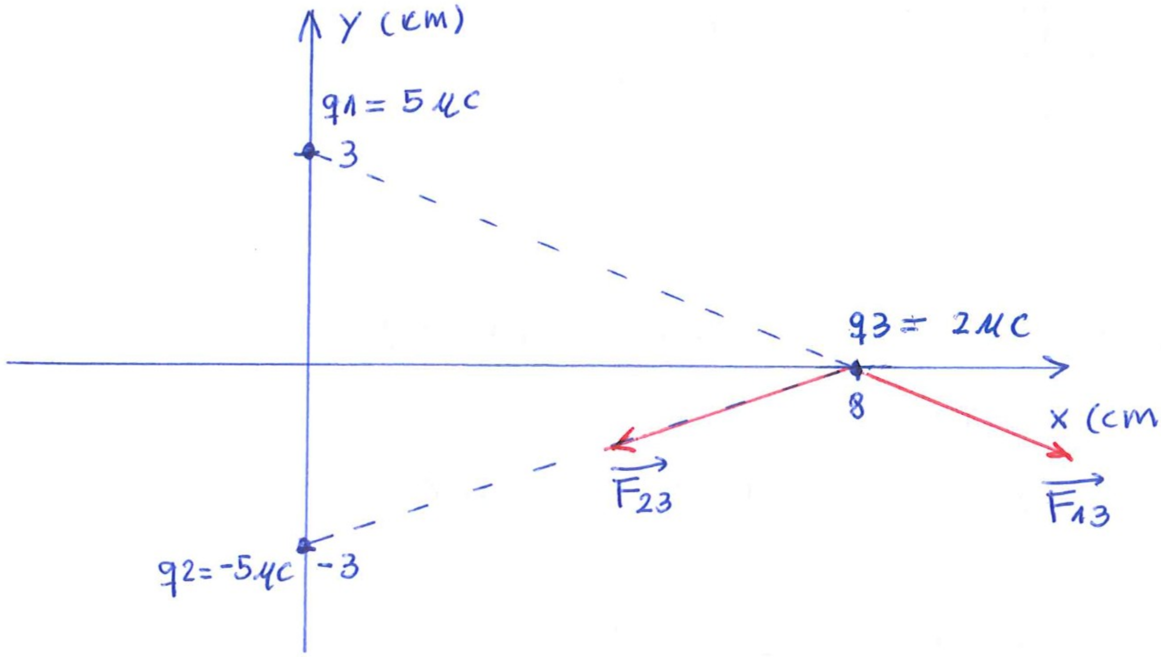
$$x_{1,2} = \frac{-2L \pm \sqrt{4L^2 + 4L^2}}{2} = \frac{-2L \pm \sqrt{8}\, L}{2}$$

$$-2{,}414\ L$$

Problema 3 Tema 1

3. @ Una carga de 5μC se encuentra sobre el eje y en y = 3cm y una segunda carga de -5.0μC está sobre el eje y en y = -3cm. Determinar la fuerza ejercida sobre una carga de 2μC situada sobre el eje x en x = 8cm.

Resultado: $\vec{F}_3 = -8.66\,\hat{j}\,N$



$$\vec{F}_{13} = \frac{k\,q_1 q_3}{r_{13}^2}\,\hat{r}_{13} \qquad \vec{F}_{23} = \frac{k\,q_2 q_3}{r_{23}^2}\,\hat{r}_{23}$$

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (8\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})\,cm \qquad \vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = (8\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})\,cm$$

$$r_{13} = \sqrt{8^2+3^2}\,cm = \sqrt{73}\,cm \qquad r_{23} = \sqrt{8^2+3^2}\,cm = \sqrt{73}\,cm$$

$$\hat{r}_{13} = \frac{8\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}}{\sqrt{73}} \qquad \hat{r}_{23} = \frac{8\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}}{\sqrt{73}}$$

$$\vec{F_3} = \vec{F_{13}} + \vec{F_{23}} = k q_3 \left[\frac{q_1}{r_{13}^2} \hat{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}^2} \hat{r_{23}} \right]$$

$$\underset{\text{SI}}{\vec{F_3} =} \frac{9 \times 10^{9} \frac{N \cancel{m^2}}{\cancel{C^2}} \cdot 2 \times 10^{-6} \cancel{C} \cdot 5 \times 10^{-6} \cancel{C}}{73 \times 10^{-4} \cancel{m^2}} \left[\frac{\cancel{8\hat{i}} - 3\hat{j} - \cancel{8\hat{i}} - 3\hat{j}}{\sqrt{73}} \right]$$

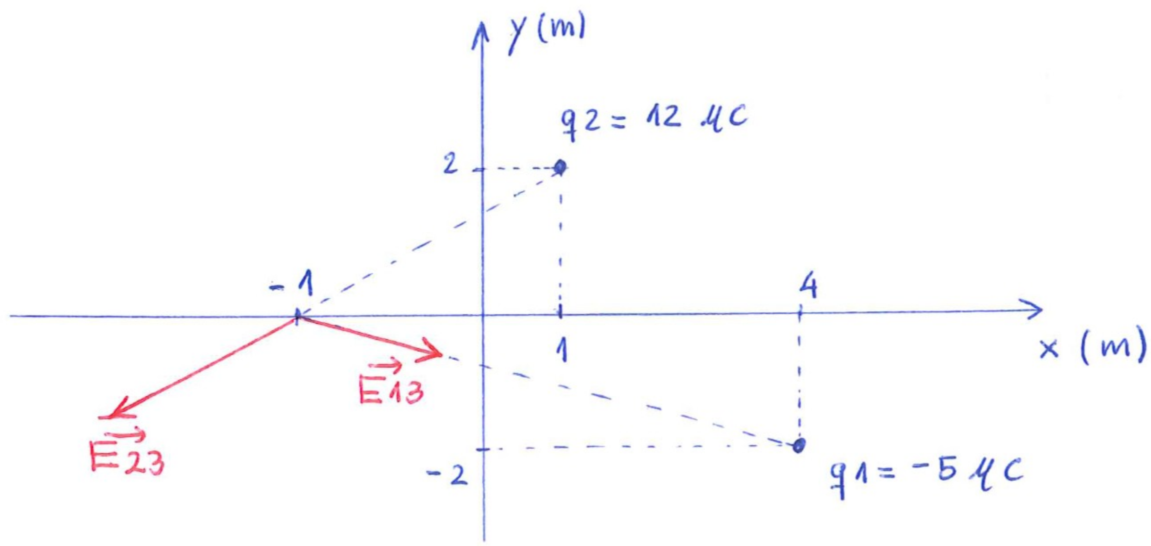
$$\boxed{\vec{F_3} = -8{,}66 \text{ N } \hat{j}}$$

Problema 7 Tema 1

7. @ Una carga puntual de -5 μC está localizada en x = 4m, y = -2m. Una segunda carga puntual de 12 μC está localizada en x = 1m, y = 2m. a) Determinar el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en x = -1m, y =0. b) Calcular el módulo, la dirección y el sentido de la fuerza sobre un electrón situado en x = -1m, y = 0.

Resultado: a) $\vec{E}_3=(-8.1\,\hat{i}-10.1\,\hat{j})\,N/C$, $E_3=12.9\,kN/C\,,\alpha=231^0$

b) $F_3=2.06.10^{-15}\,N\,,\alpha=51^0$



$$\vec{E_3} = \vec{E_{13}} + \vec{E_{23}} \qquad \vec{E_{13}} = \frac{k\,q_1}{r_{13}^2}\,\hat{r}_{13} \qquad \vec{E_{23}} = \frac{k\,q_2}{r_{23}^2}\,\hat{r}_{23}$$

$$\vec{r_{13}} = \vec{r_3} - \vec{r_1} = (-\hat{i}) - (4\hat{i} - 2\hat{j}) = (-5\hat{i} + 2\hat{j})\ m$$

$$r_{13} = \sqrt{25+4}\ m = \sqrt{29}\ m$$

$$\hat{r}_{13} = \frac{-5\hat{i}+2\hat{j}}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{r_{23}} = \vec{r_3} - \vec{r_2} = (-\hat{i}) - (\hat{i}+2\hat{j}) = (-2\hat{i} - 2\hat{j})\ m$$

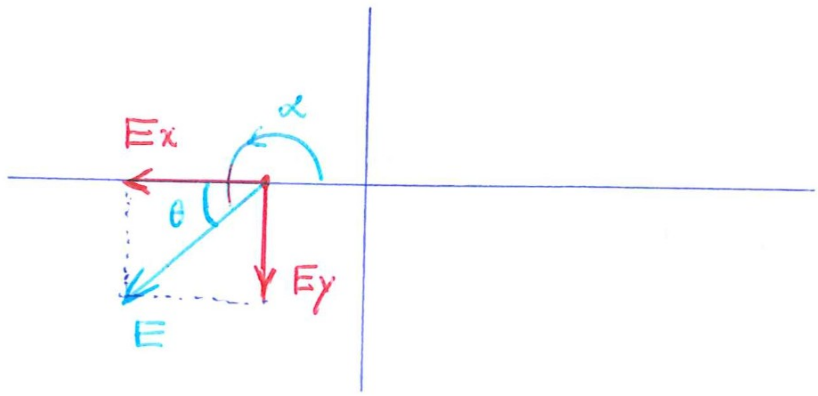
$$r_{23} = \sqrt{4+4}\ m = \sqrt{8}\ m$$

$$\hat{r}_{23} = \frac{-2\hat{i}-2\hat{j}}{\sqrt{8}}$$

$$\vec{E_3} = 9\times10^{9}\left[\frac{-5\times10^{-6}}{29}\,\frac{(-5\hat{\imath}+2\hat{\jmath})}{\sqrt{29}} + \frac{12\times10^{-6}}{8}\,\frac{(-2\hat{\imath}-2\hat{\jmath})}{\sqrt{8}}\right]$$

$$\vec{E_3} = (-8105\,\hat{\imath} - 10122\,\hat{\jmath})\ \frac{N}{C}$$

$$E_3 = \sqrt{(8105)^2+(10122)^2} = 12967\ \frac{N}{C}$$



$$\theta = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \arctan\left(\frac{10122}{8105}\right) = 51^\circ$$

$$\alpha = \theta + 180^\circ = 231^\circ$$ (3= cuadrante)

Problema 9 Tema 1

9. @ La aceleración de una partícula en un campo eléctrico depende de la relación carga/masa de la partícula. a) Calcular e/m para un electrón. b) ¿Cuál es el módulo y dirección de la aceleración de un electrón en un campo eléctrico uniforme de valor 100 N/C? c) Cuando la velocidad de un electrón se aproxima a la velocidad de la luz c, debe de utilizarse la mecánica relativista para determinar su movimiento; sin embargo, a velocidades bastante menores que c puede utilizarse la mecánica newtoniana. Calcular, con la mecánica de Newton, el tiempo que tarda un electrón, partiendo del reposo en el interior de un campo eléctrico de valor 100 N/C, en alcanzar una velocidad de 0.01 c. d) ¿Qué distancia recorrerá el electrón en ese tiempo?

Resultado: a) $e/m = 1.76.10^{11}\, C/kg$ b) $a = 1.76.10^{13}\, m/s^2$ en la dirección opuesta al campo eléctrico c) $t \approx 0.2\,\mu s$ d) $x = 0.25\, m$

a) $$\frac{q}{m} = \frac{1{,}6 \times 10^{-19}\ C}{9{,}11 \times 10^{-31}\ kg} = \boxed{1{,}76 \times 10^{11}\ \frac{C}{kg}}$$

b)

$$\vec{E} = 100\ \frac{N}{C}$$

$\bar{e}$

$\vec{F} = q\vec{E}$

$$F = qE = m\,a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{q}{m}E$$

$$a = 1{,}76 \times 10^{11}\ \frac{\cancel{C}}{kg} \times 100\ \frac{N}{\cancel{C}}$$

$$\boxed{a = 1{,}76 \times 10^{13}\ m/s^2}$$

dirección opuesta a $\vec{E}$

c) como la aceleración es constante podemos aplicar las fórmulas de mov. uniformemente acelerado

MUA

$v = v_0 + a t$

$d = d_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$v^2 = v_0^2 + 2ad$

$c = 3 \times 10^8$ m/s

$v = 0{,}01\ c = 3 \times 10^6$ m/s

$v_0 = 0$ m/s reposo

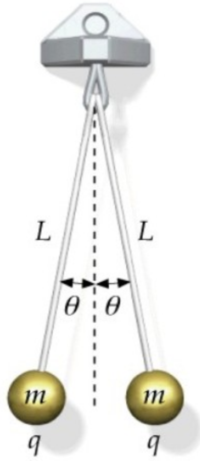
$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{3 \times 10^6}{1{,}76 \times 10^{13}} = \boxed{\begin{array}{l} 1{,}7 \times 10^{-7}\ s \\ = 0{,}17\ \mu s \end{array}}$$

$$d = \cancel{d_0} + \cancel{v_0} t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$d = \frac{1}{2} \cdot 1{,}76 \times 10^{13} \times (1{,}7 \times 10^{-7})^2 = \boxed{0{,}255\ m}$$

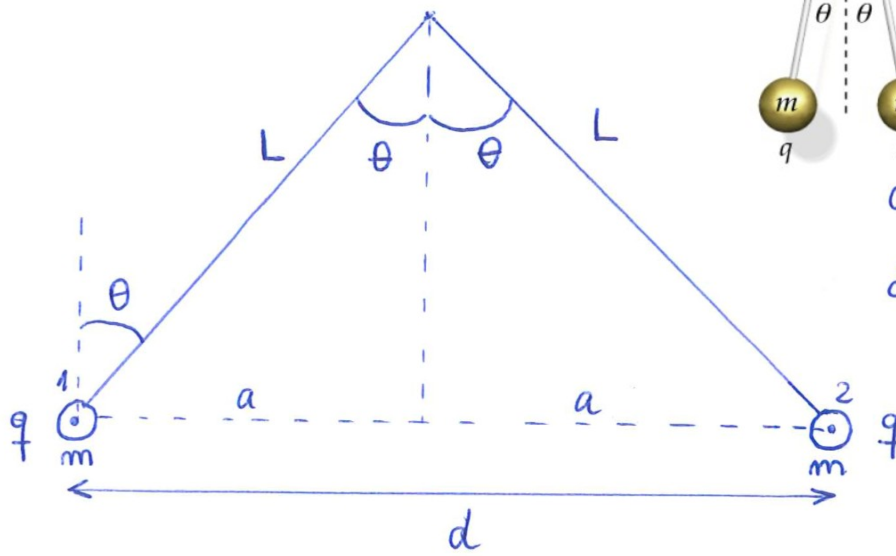
Problema 14 Tema 1

14. @ Dos pequeñas esferas de masa m están suspendidas de un punto común mediante cuerdas de longitud *L*. Cuando cada una de las esferas tiene una carga *q*, cada cuerda forma un ángulo θ con la vertical. a) Obtén la expresión de la carga *q* de cada esfera en función de los demás datos. b) Determinar *q* si *m* = 10g, *L* = 50cm, y θ = 10º.



Resultado:

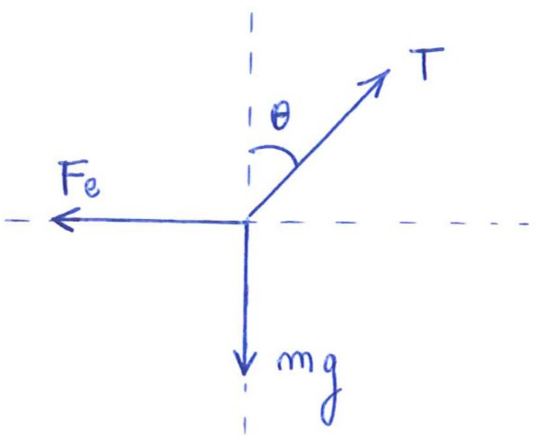
a) $q=2L\sin(\theta)\sqrt{\frac{m\,g\tan(\theta)}{k}}$ b) q=2.4.10^{-7} C



$$a = L \sin\theta$$

$$d = 2a = 2L\sin\theta$$

Como tienen la misma carga la fuerza ha de ser repulsiva



Si la masa está en equilibrio

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$\Sigma F_x = 0 \qquad F_e = T \sin\theta$

$\Sigma F_y = 0 \qquad T\cos\theta = mg \Rightarrow T = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

$$F_e = \frac{kq^2}{d^2} = T\sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta}\cdot\sin\theta = mg\tan\theta$$

$$\frac{kq^2}{(2L\sin\theta)^2} = mg\tan\theta$$

$$\boxed{q = 2L\sin\theta\sqrt{\frac{mg\tan\theta}{k}}}$$

Si $m = 10\ g$ $\quad L = 50\ cm$ $\quad$ y $\quad \theta = 10^\circ$

$$q = 2\times 0{,}5\cdot\sin(10^\circ)\sqrt{\frac{0{,}01\times 9{,}8\ \tan(10^\circ)}{9\times 10^9}}$$

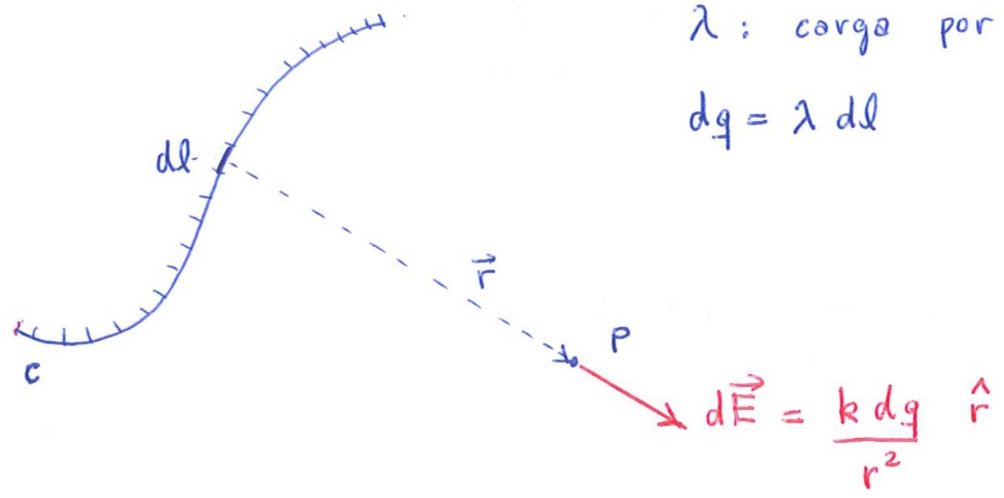
$$\boxed{q = 2{,}4\times 10^{-7}\ C}$$

Campo eléctrico de una distribución continua de carga

Supongamos que tenemos una distribución lineal de carga y queremos saber el campo $\vec{E}$ que produce en un punto

λ : carga por unidad de longitud

$dq = \lambda\, dl$



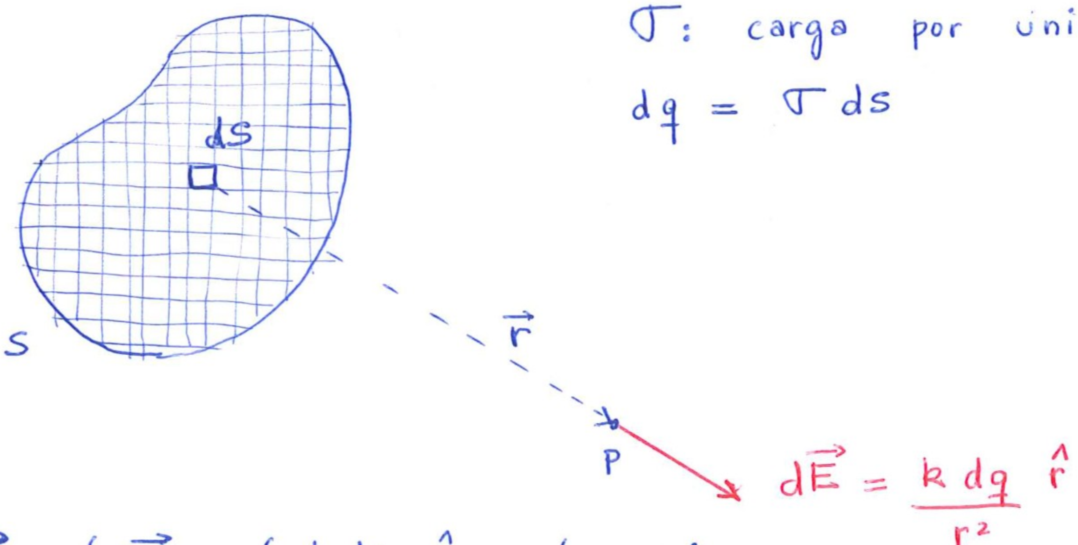
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_c \frac{k\,dq}{r^2}\,\hat{r} = \int_c \frac{k\,\lambda\,\hat{r}}{r^2}\,dl$$

Podemos aplicar Coulomb para el campo de c/ elemento infinitesimal e integrar

Si lo que tenemos es una superficie cargada

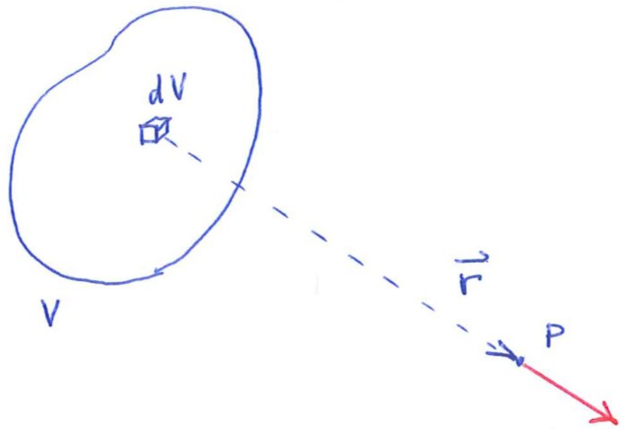
σ: carga por unidad de área

$dq = \sigma\, ds$



$$\vec{E} = \int_S d\vec{E} = \int_S \frac{k\,dq}{r^2}\,\hat{r} = \int_S \frac{k\,\sigma\,\hat{r}}{r^2}\,ds$$

lo mismo si tenemos un volumen cargado



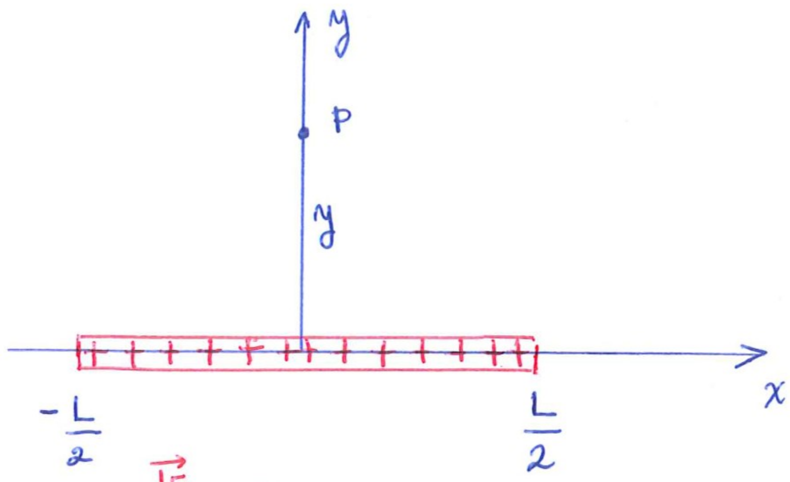
ρ : carga por unidad de volumen

$$dq = \rho \, dV$$

$$d\vec{E} = \frac{k\, dq}{r^2} \hat{r}$$

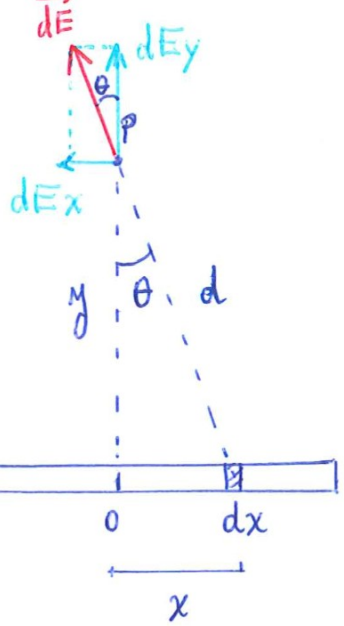
$$\vec{E} = \int_V d\vec{E} = \int_V k \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \int_V \frac{k \rho}{r^2} \hat{r} \, dV$$

Ejemplo: Campo de un segmento cargado en un punto de su bisectriz



$$Q = \lambda L$$

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$



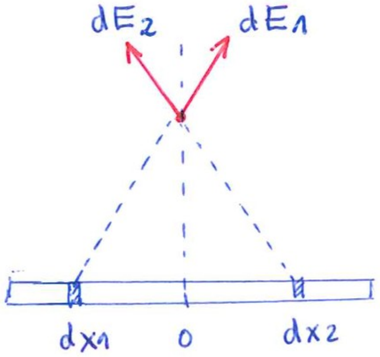
$$dE_y = dE \cdot \cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{y}{d}$$

$$dE_x = dE \cdot \sin\theta$$

$$d^2 = x^2 + y^2$$

$$E_x = \int dE_x = 0$$

las contribuciones dE_x de los elementos simétricos se cancelan entre sí



$$dq = \lambda \, dx$$

$$E_y = \int dE_y \qquad dE_y = dE \cos\theta = \frac{k\,dq}{d^2} \cdot \frac{y}{d} = \frac{k \lambda \, dx}{(y^2 + x^2)^{3/2}} \cdot y$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{k \lambda y \, dx}{(y^2+x^2)^{3/2}} = k \lambda y \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(y^2+x^2)^{3/2}} =$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= k \lambda y \left[\frac{x}{y^2 \sqrt{y^2+x^2}} \right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$E_y = \frac{k \lambda \cancel{y}}{y^{\cancel{2}}} \left[\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{y^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{y^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} \right] =$$

$$\boxed{E_y = \frac{k \lambda}{y} \frac{L}{\sqrt{y^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}}$$

si $y \to \infty$
muy alejado
del segmento

$$E_y \to \frac{k \lambda L}{y^2} = \frac{kQ}{y^2}$$

campo de
una carga
puntual

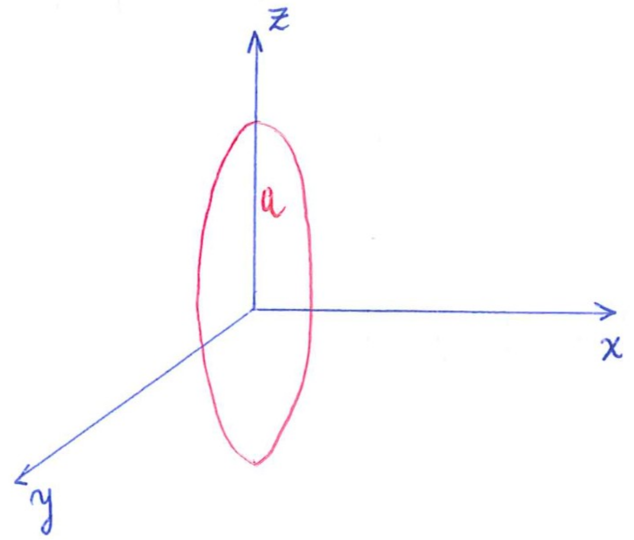
$$\sqrt{y^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2} \to y$$

Problema 17 Tema 1

17. @ Una carga de 2.75 μC está uniformemente distribuida sobre un anillo de radio 8.5 cm. Determinar el campo eléctrico generado sobre el eje a a) 1.2 cm, b) 3.6 cm, y c) 4.0 m del centro del anillo. d) Determinar el campo a 4.0 m con la aproximación de que el anillo es una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido en c).

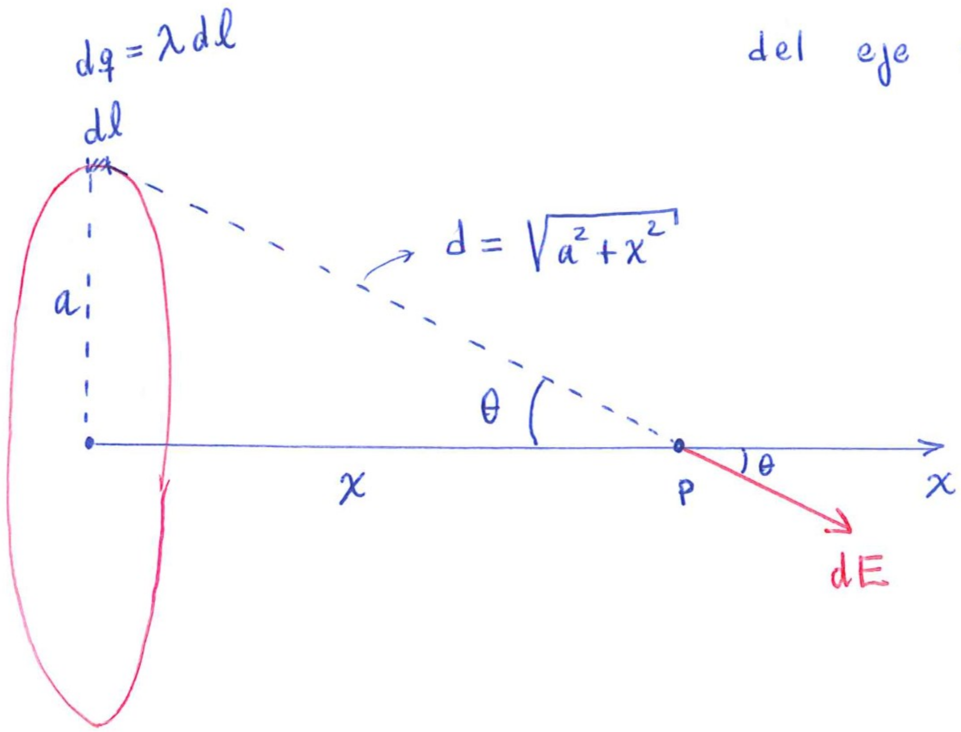
Resultado: a) $E_x = 4.695.10^5\, N/C$ b) $E_x = 1.13.10^6\, N/C$

c) $E_x = 1.55.10^3\, N/C$ d) $E_x = 1.55.10^3\, N/C$

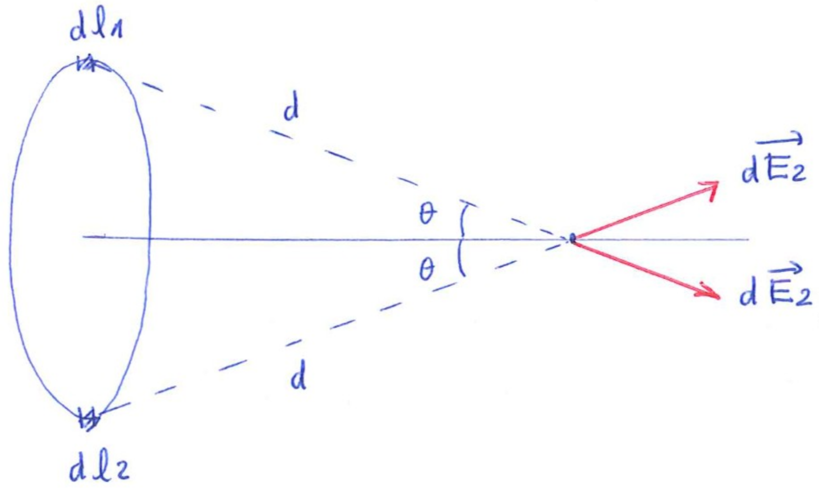


anillo de radio a con carga Q uniformemente distribuida

El anillo esta en el plano xz con su centro en el origen y queremos saber el campo en un punto del eje x (eje del anillo)



Al sumar (integrar) sobre todos los elementos diferenciales de longitud la componente $\perp$ al eje x se anulará (la contrib. de un elemento se cancela con el del elemento diametralmente opuesto)



Entonces solo debemos sumar la contribución de los componentes x

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \hat{\imath} \int dE_x$$

$$dE_x = dE \cdot \cos\theta \qquad\qquad d = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{d} \qquad\qquad dE = \frac{k\,dq}{d^2}$$

$$\vec{E} = \hat{\imath} \int \frac{k\,dq}{(a^2+x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \hat{\imath}\, \frac{k\,x}{(a^2+x^2)^{3/2}} \underbrace{\int dq}_{Q}$$

$$\boxed{\vec{E} = \hat{\imath} \quad \frac{kQx}{(a^2+x^2)^{3/2}}}$$

$Q = \lambda \cdot 2\pi a$

Si el punto está muy alejado $x \gg a$

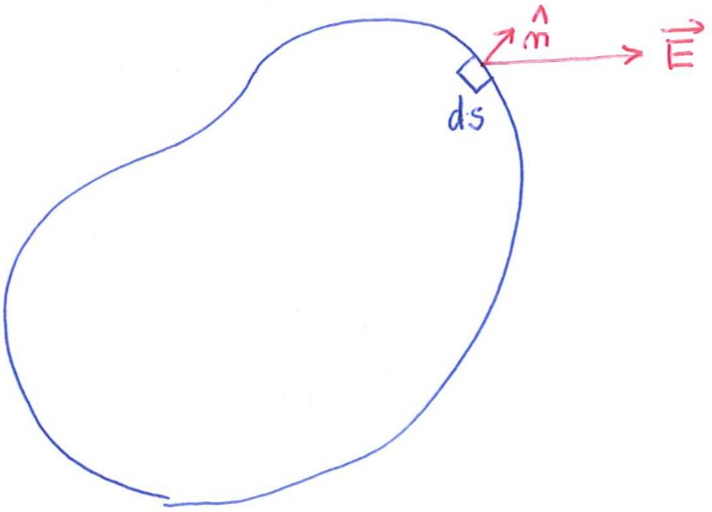
$$(a^2+x^2)^{3/2} \longrightarrow x^3$$

$$E \rightarrow \frac{kQ\cancel{x}}{x^{\cancel{3}\,2}} = \frac{kQ}{x^2}$$

campo de una carga puntual

Ley de gauss

Si se tiene una superficie cerrada S la ley de gauss dice



flujo eléctrico

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot\hat{m}\, ds = \frac{Q_s}{\varepsilon_0}}$$

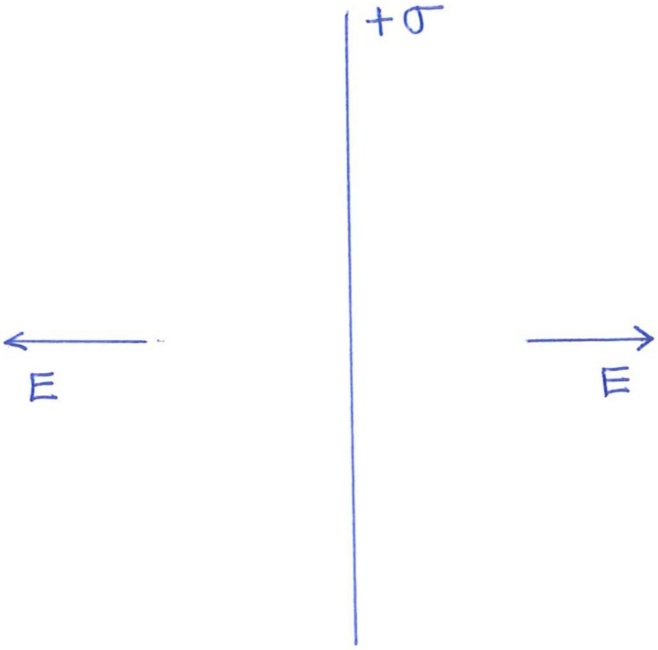
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{N\,m^2}$$

Q_s: carga neta encerrada por la superficie S

$\hat{m}$: vector unitario $\perp$ a la superficie

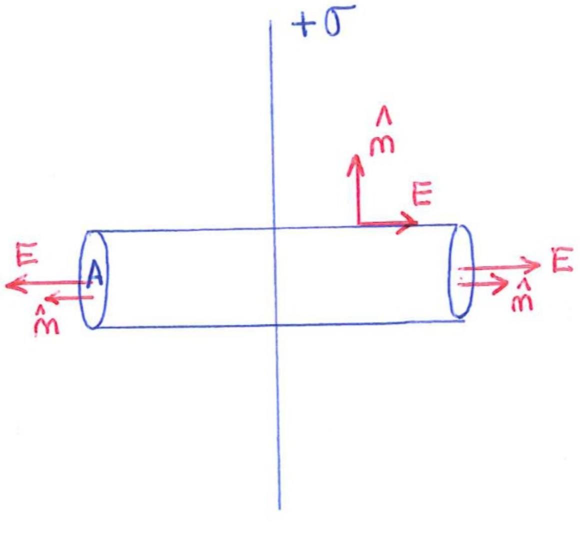
Hay que hacer $\vec{E}\cdot\hat{m}$ en cada elemento diferencial de area de la superficie y sumar (integrar). Eso que nos da se llama flujo y la ley de gauss nos asegura que es igual a la carga neta encerrada por S partido ε_0

Ejemplo : Campo de un plano cargado con densidad de carga σ



por simetría $\vec{E}$ es $\perp$ al plano , en principio su modulo podría depender de distancia al plano

Superficie gauss : Cilindro con eje $\perp$ al plano



$$\int_{\text{CIL}} \vec{E} \cdot \hat{m} \, ds = \int_{\substack{\text{SUP}\\ \text{LAT}}} \vec{E} \cdot \hat{m} \, ds + \int_{\text{BASE 1}} \vec{E} \cdot \hat{m} \, ds + \int_{\text{BASE 2}} \vec{E} \cdot \hat{m} \, ds$$

$$= 0 + \int_{\text{BASE 1}} E \, ds + \int_{\text{BASE 2}} E \, ds$$

$$= E \underbrace{\int_{BASE\,1} ds}_{A} + E \underbrace{\int_{BASE\,2} ds}_{A} = 2EA$$

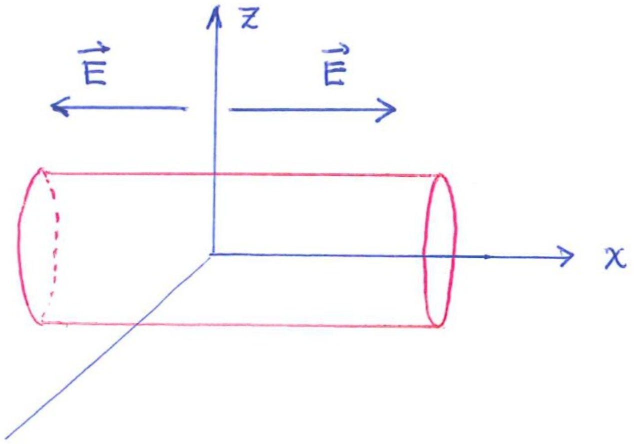
$$\int_{CIL} \vec{E} \cdot \hat{m}\, ds = 2E\cancel{A} = \frac{Q_{CIL}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cancel{A}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Problema 20 Tema 1

20. @ Un campo eléctrico dado por $\vec{E}=sign(x).300\,N/C\,\hat{\imath}$, donde *sign*(*x*) es igual a: -1 si x < 0, 0 si x = 0, y +1 si x >0. Un cilindro circular recto de 20cm de longitud y 4cm de radio tiene su centro en el origen y su eje está situado a lo largo del eje x de modo que una de las bases está en x = + 10cm y la otra en x = -10cm. a) ¿Cuál es el flujo saliente que atraviesa cada base? b) ¿Cuál es el flujo que atraviesa la superficie curvada (lateral) del cilindro? c) ¿Cuál es el flujo neto que atraviesa toda la superficie cilíndrica? d) ¿Cuál es la carga neta en el interior del cilindro?

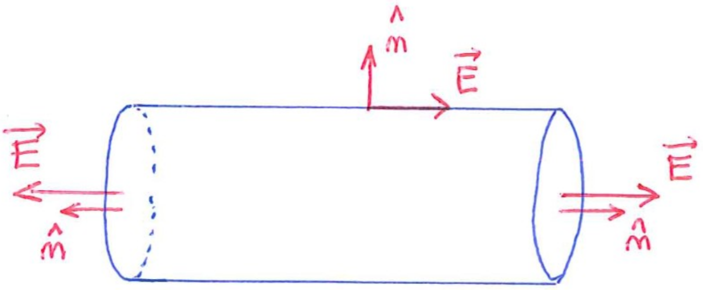
Resultado: a) $\Phi=1.508\,Nm^2/C$ b) $\Phi=0$
c) $\Phi_{neto}=3.016\,kNm^2/C$ d) $Q_{interior}=2.67.10^{-11}\,C$



20 cm longitud

4 cm de radio

$|\vec{E}| = 300\ \frac{N}{C}$



$$\phi_{BASE\ 1} = \int_{BASE\ 1} \vec{E}\cdot\hat{m}\ ds = \int_{BASE\ 1} E\ ds = E\int_{BASE\ 1} ds = E\cdot\pi R^2$$

$\vec{E} /\!/ \hat{m}$

$$= 300\cdot\pi\cdot(4\times10^{-2})^2$$

$$= 1{,}508\ \frac{Nm^2}{C}$$

$$\phi_{BASE\ 2} = \phi_{BASE\ 1} = 1{,}508\ \frac{Nm^2}{C}$$

$$\phi_{\substack{SUP\\LAT}} = \int_{\substack{SUP\\LAT}} \vec{E}\cdot\hat{m}\, dS = 0$$

$$\vec{E} \perp \hat{m} \Rightarrow \vec{E}\cdot\hat{m} = 0$$

$$\phi_{CILINDRO} = \phi_{BASE\,1} + \phi_{BASE\,2} + \phi_{SUP.\,LAT} = 1{,}508 + 1{,}508 + 0$$

$$= 3{,}016 \; \frac{N m^2}{C}$$

$$\phi_{CILINDRO} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{int} = \phi_{CILINDRO} \cdot \varepsilon_0$$

$$= 3{,}016 \; \frac{\cancel{N m^2}}{\cancel{C}} \cdot 8{,}85 \times 10^{-12} \; \frac{C^{\cancel{2}}}{\cancel{N m^2}}$$

$$= \boxed{2{,}669 \times 10^{-11} \; C}$$