

TEMA 1: PROBABILIDAD

- COMBINATORIA: n objetos en grupos de r , sin orden $C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
- VALOR MEDIO: $\langle x \rangle = \sum p_i x_i$ ó $\langle x \rangle = \int_0^1 p(x) dx$
- NÉSIMO MOMENTO: valor esperado de la potencia enésima
- SUCEOS INDEPENDIENTES: $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$
- DESVIACIÓN: $\Delta x = x - \langle x \rangle \Rightarrow$ VARIANZA / DISPERSIÓN: $\langle (\Delta x)^2 \rangle$
Relación con la desviación estándar (ancho de la distribución): $\sigma = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}$
- CAMINO ALEATORIO: partimos de un punto y damos un salto de longitud l en dirección aleatoria ¿Probabilidad de estar en un sitio dado después de N pasos?
 - u_1 : pasos a la dcha, probabilidad p
 - u_2 : pasos a la izq, probabilidad $q = 1 - p$

EXCESO PASOS

$$\begin{aligned} m &= 2u_1 - N = u_1 - u_2 \\ N &= u_1 + u_2 \end{aligned}$$

① DISTRIBUCIÓN BINOMIAL \rightarrow VALORES MEDIOS *

$$P(u_1) = \frac{N!}{u_1!(N-u_1)!} \cdot p^{u_1} \cdot q^{N-u_1}$$

$$\langle u_1 \rangle = Np \quad \langle u_1^2 \rangle = p^2 N^2 + Np(1-p)$$

$$\langle u_2 \rangle = Nq \quad \langle m \rangle = N(p-q), \quad \Delta m^* = \sqrt{N}$$

$B_n(N, p) \sim X =$ "nº éxitos en N realizaciones"

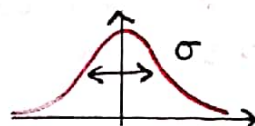
② DISTRIBUCIÓN POISSON: "nº de cosas en una cantidad"

Se ha considerado $p \ll 1, u_1 \ll N$

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \text{ con } \lambda \text{ la tasa de incidencia}$$

③ DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA: $N \gg u_1 \gg 1$, pasamos a continuo

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ donde } \langle x \rangle = \mu \text{ y } \sigma^2 = \langle \Delta x^2 \rangle$$



TRUCOS

- VALOR MEDIO
 - $\langle a \rangle = a$ si $a = \text{cte}$
 - $\langle a+b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$
 - $\langle ax \rangle = a \langle x \rangle, a = \text{cte}$

• DESARROLLOS *

$$u_1 p^{u_1} = p \frac{\partial}{\partial p} p^{u_1}$$

• BINOMIO NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$\text{• SUMATORIOS: } (\sum x_i)^2 = \sum_i x_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j$$

• APROXIMACIÓN STIRLING

$$\ln N! \approx N \cdot \ln N - N (+ \ln \sqrt{2\pi N})$$

• INTEGRALES

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n! \Rightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

$$\text{erf}(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx \Rightarrow \text{erf}(\infty) = 1, \text{erf}(0) = 0$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} \sqrt{\pi} \quad \left| \begin{array}{l} \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha) \\ \Gamma(n+1) = n! \\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \end{array} \right.$$

TEMA 2: COLECTIVIDADES

- ① COLECTIVIDAD MICROCANÓNICA: energía constante, n^o partículas de la probabilidad está relacionada con el n^o de microestados accesibles Ω . Se suele usar combinatoria (2 problemas T1).

A_1	A_2
-------	-------

$$A^0 \quad \Omega(A^0) = \Omega(A_1) \cdot \Omega(A_2) \Leftrightarrow \Omega_0(E) = \Omega(E) \cdot \Omega'(E_0 - E)$$

PROBABILIDAD: $P(E) = C \cdot \Omega_0(E)$, $C = \frac{1}{\Omega_T}$

CONDICIÓN EQUILIBRIO ENERGÍA

$$\beta(\tilde{E}) = \beta'(E_0 - \tilde{E}) \Leftrightarrow \frac{\partial \ln \Omega(E_1)}{\partial E_1} - \frac{\partial \ln \Omega(E_2)}{\partial E_2} = 0$$

A partir de esta condición definimos:

$$\beta = \frac{\partial \ln \Omega(E)}{\partial E} = \frac{1}{kT}, \text{ con } k \text{ la constante de Boltzmann}$$

Introducimos la ENTROPÍA como una medida de desconocimiento del sistema:

- ENTROPÍA DE BOLTZMANN: $S = k \ln \Omega$
- ENTROPÍA DE GIBBS: $S = -kN \sum_{i=1}^r P_i \ln P_i$

- ② COLECTIVIDAD CANÓNICA: $E_{\text{total}} \neq \text{cte}$, $N = \text{cte}$

Un sistema en un baño térmico (cuando nos hablen de temperatura, usamos la colectividad canónica).

• PROBABILIDAD: $P_r = \underbrace{C}_{\text{FACTOR BOLTZMANN}} e^{-\beta E_r} \Rightarrow C = \frac{1}{\sum_r e^{-\beta E_r}} = \frac{1}{Z}$: Z FUNCIÓN DE PARTICIÓN

• ENTROPÍA: GIBBS ó $S = NK(\ln Z + \beta \langle E \rangle)$

- ③ COLECTIVIDAD MACROCANÓNICA: $N \neq \text{cte}$, $E_{\text{total}} \neq \text{cte}$

• PROBABILIDAD: $P_r = \frac{e^{-\beta(E_r - \mu N_r)}}{\sum_r e^{-\beta(E_r - \mu N_r)}} = \mathcal{Z} = Z_{GC}$ FUNCIÓN PARTICIÓN GRAN CANÓNICA

• RELACIONES TERMODINÁMICAS

COL. CANÓNICA

$$\langle E \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad \langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \quad \langle \Delta E^2 \rangle = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = - \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta}$$

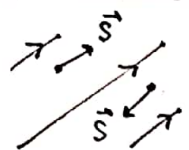
$$C_V = - \frac{\partial}{\partial \beta} \langle E \rangle = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \quad P = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \quad T = \left(\frac{\partial F}{\partial S} \right)_V \quad F = \frac{\partial S}{\partial E}$$

$$T dS = dE + dW \Rightarrow \text{si } V = \text{cte}, \quad \frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} \quad S = k \frac{\partial}{\partial T} (T \ln Z)$$

COL. MACROCANÓNICA

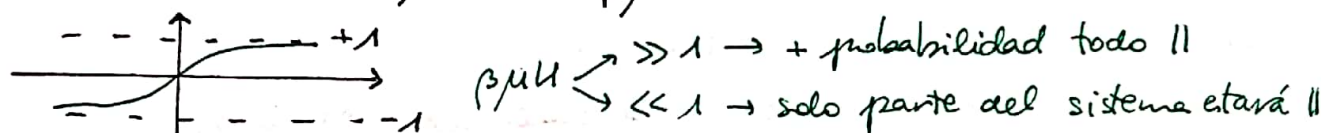
$$S = k \frac{\partial}{\partial T} (T \ln Z) \quad \langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z \quad \langle E \rangle = - \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z + \mu \langle N \rangle$$

• PARAMAGNETISMO: N átomos con spin $\pm 1/2$ sometidos a \vec{H}


 - Spin alineado: $E_+ = -\mu H$ ($S = +1/2$)
 - Spin antialineado: $E_- = +\mu H$ ($S = -1/2$)

MAGNETIZACIÓN TOTAL: $M = \langle \mu H \rangle N = N \mu \tanh(\beta \mu H)$

ENERGÍA MEDIA: $\langle E \rangle = -\mu H \tanh(\beta \mu H)$



TRUCOS

• DESARROLLO TAYLOR: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n f(x)}{dx^n} \bigg|_{x=x_0} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{df(x)}{dx} \bigg|_{x=x_0} (x-x_0) + \dots$

• DESARROLLO LOGARITMO: $\ln \Omega(E^0 - E') = \ln \Omega(E^0) - \left(\frac{\partial \ln \Omega}{\partial E'} \right)_{E^0} E' + \dots$

• ECUACIÓN ELIPSE: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow A = \pi ab$

ECUACIÓN CÍRCULO: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Rightarrow A = \pi R^2$

• MÉTODO MULTIPLICADORES LAGRANGE

$f(x, y, z) \rightarrow \text{función objetivo}$
 $h(x, y, z) \rightarrow \text{restricción}$
 $\nabla f + \lambda \nabla h = 0$

1. Escribir restricciones como $f(x) = 0$

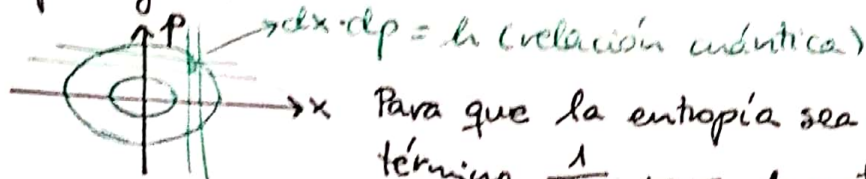
2. Derivar las funciones que tengamos y multiplicar la restricción por un parámetro.

3. Resolver el sistema.

• $\frac{1}{Z} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$

TEMA 3: GASES IDEALES NO INTERACTÚAN

- FUNCIÓN DE PARTICIÓN: relacionada con el volumen disponible de espacio fásico



Para que la entropía sea extensiva, introducimos el término $\frac{1}{N!}$ para descontar permutaciones:

$$Z = \frac{1}{N! h^3} \int d^3x d^3p e^{-\beta E(x,p)} = \frac{V^N}{N!} \left[\frac{2\pi m}{h^2 \beta} \right]^{3N/2}$$

gas ideal lo consideramos distinguible

para N partículas con $E = \frac{1}{2m} p^2$

- ENTROPÍA: ECUACIÓN DE SACKUR-TETRODE

$$S = Nk \left[\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right) + \frac{3}{2} + 1 - \frac{3}{2} \ln \beta \right]$$

constante σ' asociada al gas

- PRINCIPIO DE EQUIPARTICIÓN: sea D el número de grados de libertad asociados a una energía cuadrática, esta energía aporta al valor medio total de la energía en:

$$\langle E \rangle = D \cdot \frac{1}{2} kT \Rightarrow D \text{ relacionado con tipo gas}$$

- CLÁSICO VS CUÁNTICO: ¿cómo sabemos a partir de dónde usar una distribución u otra?

- Distancia media entre partículas: $l = \left[\frac{V}{N} \right]^{1/3}$
 - Longitud de onda térmica: $\lambda_{DB} \sim \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$
- CUÁNTICO: $l \approx \lambda_{DB}$
CLÁSICO: $l \gg \lambda_{DB}$

- DISTRIBUCIÓN VELOCIDADES MAXWELL

- EN FUNCIÓN DEL MÓDULO $|\vec{v}|$

$$Z = \frac{V}{h^3} m^3 4\pi \int_0^\infty v^2 dv e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} \Rightarrow F(v) dv = 4\pi \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

este término se suele considerar = 1

- EN FUNCIÓN DE LAS COMPONENTES

$$Z = \frac{V}{h^3} m^3 \left[\int_{-\infty}^\infty dv_x e^{-\beta \frac{mv_x^2}{2}} \right]^3 \Rightarrow f(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{N}{V} \cdot e^{-\frac{\beta mv^2}{2}}$$

- Relación entre ambas: $F(v) dv = 4\pi v^2 f(v) dv$

- Si tenemos una energía cinética formada por la suma de varias energías, la función de partición será la multiplicación de las distintas funciones.
- Cuando calculemos el valor medio de una velocidad, en la distribución se suele no considerar N/V por la siguiente justificación:

$$* \langle v \rangle = \frac{\int v F(v) dv}{\int F(v) dv} = \frac{\int v F(v) dv}{N/V} \rightarrow \text{normalización}$$

- RELACIONES TERMODINÁMICAS: a partir de la función de partición que hemos definido vamos a deducir la ley de los gases ideales

$$\text{PRESIÓN: } \langle P \rangle = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{N}{V} \Leftrightarrow \langle P \rangle V = NKT \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \frac{N}{N_A} & NKT = nRT \end{matrix}$$

$$k \cdot N_A = R \quad \text{NÚMERO MOLES } n = \frac{N}{N_A}$$

$$\text{ENERGÍA: } \langle E \rangle = \frac{3}{2} NKT = \frac{3}{2} nRT$$

$$\text{CALOR ESPECÍFICO: } C_V = \frac{3}{2} NK = \frac{3}{2} nR \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{considerando} \\ \text{gas monoatómico} \end{array} \right.$$

TRUCOS

- Distribuciones del tipo $\langle v_x^2 \rangle$: más fácil resolverlo desde $\langle E \rangle$ teniendo en cuenta que $\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$.
- Algunas cosas se demuestran desde el PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA:

$$TdS = d\langle E \rangle + \langle P \rangle dV$$

$$\cdot \text{Sea } f(x,y) \Rightarrow df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy$$

$$\cdot \text{DERIVADAS: } \frac{\partial A}{\partial B} = \frac{\partial A}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial B}$$

- Resolución integrales con cambio a diferencial ángulo sólido: para pasar de componentes a módulo (teniendo en cuenta que el ángulo sólido va de 0 a 4π)

$$d^3v = v^2 dv d\Omega \Rightarrow v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$$

TEMA 4: ESTADÍSTICAS CUÁNTICAS

• NÚMERO DE OCUPACIÓN: promedio de partículas que esperamos encontrar en el estado de energía s

$$\langle n_s \rangle = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial E_s} \ln Z \Rightarrow \langle \Delta n_s^2 \rangle = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \langle n_s \rangle}{\partial E_s}$$

Ahora hay que considerar las distintas combinaciones de las energías de cada estado que nos lleven a la misma energía total E_r .

→ CASO CLÁSICO

① PARTÍCULAS DISTINGUIBLES: ESTADÍSTICA MAXWELL-BOLTZMANN

$$Z_{MB} = \sum_{n_1, n_2, \dots}^r \frac{N!}{n_1! \dots n_r!} e^{-\beta(n_1 E_1 + \dots + n_r E_r)} \quad \begin{matrix} r \text{ n.º de estados} \\ \hookrightarrow n \text{ partículas en un estado } i \end{matrix}$$

$$\ln Z_{MB} = N \ln \left(\sum_r e^{-\beta E_r} \right) \Rightarrow Z_{MB} = \left(\sum_r e^{-\beta E_r} \right)^N \Rightarrow \text{se usa esta}$$

$$\langle n_s \rangle_{MB} = N \frac{e^{-\beta E_s}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} \Rightarrow \langle \Delta n_s^2 \rangle_{MB} = \langle n_s \rangle \left(1 - \frac{\langle n_s \rangle}{N} \right)$$

② PARTÍCULAS INDISTINGUIBLES

• BOSONES: Ψ simétrica, spin entero. Podemos tener $\langle n_s \rangle > 1$ (más de una partícula en el = estado. Si todos en el estado fundamental, CONDENSADO).

ESTADÍSTICA BOSE-EINSTEIN

$$\ln Z_{BE} = - \sum_r \ln (1 - e^{-(\beta E_r + \alpha)}), \text{ con } \alpha = -\beta \mu \text{ (}\mu \text{ POTENCIAL QUÍMICO)}$$

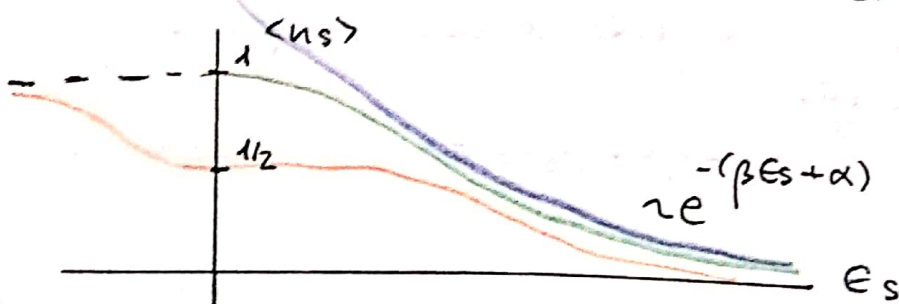
$$\langle n_s \rangle_{BE} = \frac{1}{e^{\beta E_s + \alpha} - 1}$$

↓ CASO PARTICULAR $\mu = 0$: FOTONES, DISTRIBUCIÓN DE PLANCK

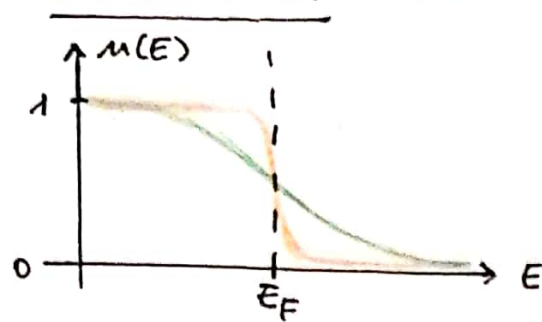
$$\ln Z_f = - \sum_r \ln (1 - e^{-\beta E_r}) \Rightarrow \langle n_s \rangle_f = \frac{1}{e^{\beta E_s} - 1}$$

• FERMIONES: Ψ antisimétrica, spin semientero. Siguen el Principio de Exclusión de Pauli, no podemos tener más de una en el = estado ($\langle n_s \rangle = 0, 1$).

$$\ln Z_{FD} = \sum_r \ln (1 + e^{-(\beta E_r + \alpha)}) \Rightarrow \langle n_s \rangle_{FD} = \frac{1}{1 + e^{\beta E_s + \alpha}}, \quad \langle \Delta n_s^2 \rangle_{FD} = \langle n_s \rangle (1 - \langle n_s \rangle)$$



• GAS DE FERMÍ: electrones de conducción en un metal, distribución continua



$$N = \frac{g_s}{h^3} \int d^3p d^3x n(p) \rightarrow \text{FACTOR DEGENERACIÓN: acenta grados libertad}$$

$$n(p) = \frac{1}{1 + e^{\beta(E - \mu)}}$$

LÍMITE DEGENERADO: cuando $T \rightarrow 0$, decimos

que es el mar de Fermi y la distribución es función escalón

$$n(p) = \begin{cases} 0 & E > E_F \\ 1 & E < E_F \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{ENERGÍA} \\ \text{FERMÍ} \end{matrix} \quad E_F = \mu = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}; \quad \langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F$$

DENSIDAD DE ESTADOS: partiendo de la cuantización de la energía podemos medir los estados disponibles

$$g(E) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} \Rightarrow \langle E \rangle = \int_0^\infty E g(E) n(E) dE \stackrel{T \rightarrow 0}{=} \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \cdot N$$

\hookrightarrow permite que la limitación de energías sea una capa esférica

• ECUACIONES CUERPO NEGRO

$$u(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\beta h \nu} - 1} d\nu \Rightarrow \text{usar relaciones para pasar a } \lambda, \omega \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu = \frac{c}{\lambda} \\ \omega = 2\pi \nu \end{array} \right.$$

$$\text{LEY STEFAN-BOLTZMANN: } \mathcal{F} = \frac{P}{A} = \sigma T^4, \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

$$\hookrightarrow u = \frac{\langle E \rangle}{V} = \frac{4\sigma}{c} T^4$$

$$\text{LEY DE WIEN: } \lambda_{\max} T = 0.2014 \frac{hc}{k}$$

$$\text{PRESIÓN DE RADIACIÓN: } \langle P \rangle = \frac{1}{3} \langle u \rangle = \frac{1}{3} \frac{\langle E \rangle}{V}$$

TRUCOS

• SERIE GEOMÉTRICA: $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}$

• PARA EL N° MICROESTADOS $\left\{ \begin{array}{l} \text{MB: } \Omega = (n^{\circ} \text{ estados})^{(n^{\circ} \text{ partículas})} \\ \text{BE: } \Omega = (n^{\circ} \text{ estados}) \cdot (n^{\circ} \text{ partículas}) \end{array} \right.$

• Resolución de integrales haciendo el desarrollo de Taylor dentro de la integral.

TEMA 5: SISTEMAS INTERACTUANTES

Vamos a añadir una energía potencial de interacción que normalmente será función de la distancia relativa entre partículas. La función de partición (que se calcula como en el T3) queda:

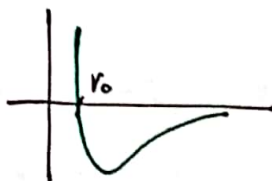
$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m}{h^2 \beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \cdot Z_{int} \Rightarrow Z_{int} = V^N \left(1 + \frac{N^2}{2V} I(\beta) \right), \text{ con } I(\beta) = 4\pi \int_0^\infty r^2 dr (\bar{e}^{\beta u} - 1)$$

Todo se reduce a conocer $u(\vec{r})$. Su valor medio se da como:

$$\langle u \rangle = - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{I(\beta)}{V} \right)$$

① POTENCIAL SUTHERLAND

$$u(r) = \begin{cases} \infty & \text{si } r < r_0 \\ -u_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^S & \text{si } r > r_0 \end{cases}$$

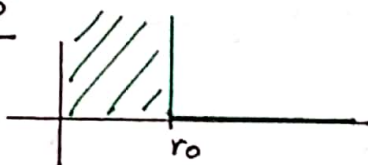


$$\langle E \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} NKT + \frac{N^2}{2} 2\pi u_0 r_0^3 \cdot \frac{1}{3-S} *$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{N}{V} + \frac{N^2}{V^2} \cdot \frac{2\pi r_0^3}{3} \left(1 + \beta u_0 \frac{3}{3-S} \right) \right] *$$

② POTENCIAL ESFERAS RÍGIDAS

$$u(r) = \begin{cases} \infty & \text{si } r < r_0 \\ 0 & \text{si } r \geq r_0 \end{cases}$$



$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} NKT$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\beta} \left[\frac{N}{V} + \frac{N^2}{V^2} \cdot \frac{2\pi r_0^3}{3} \right]$$

• MODELO DE ISING: red de espines donde se considera, además de la energía generada por H externo, la generada por la interacción con primeros vecinos:

$$E_r = - \sum_{i=1}^N \mu H s_i - J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j, \text{ con } s_i = \pm 1, J > 0 \text{ intensidad intercambio}$$

sumatorio primeros vecinos → ferromagnetismo

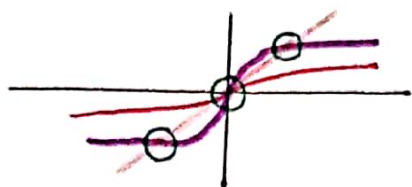
Este caso solo se puede resolver analíticamente en 1 y 2 dimensiones. En dimensiones superiores hay dos aproximaciones útiles:

1. MÉTODO MONTECARLO: prácticas ordenador. Se sortean espines de forma aleatoria y luego se cambia uno de ellos, también aleatoriamente. Se calcula ΔE y elegimos mediante probabilidades si se acepta el cambio o no.

2. APROXIMACIÓN CAMPO MEDIO: definimos un campo efectivo que nos permita usar los resultados calculados en el paramagnetismo.

$E_r = -\mu s_i \left(H + \frac{J}{2\mu} \sum_{k=1}^z s_k \right) = -\mu s_i H_{\text{eff}} \Rightarrow$ la solución para la magnetización media la conocemos y es:

$$\langle s_i \rangle = \tanh \left(\frac{H_{\text{eff}}}{kT} \mu \right) = \tanh \left(\frac{\mu H}{kT} + \frac{Jz}{2kT} \langle s_i \rangle \right)$$



este término altera la parte "lineal" de la tangente y nos da más o menos soluciones.

• Más fórmulas del Modelo de Ising-

$$\langle E \rangle = -\mu N H m - \frac{J}{2} N z m^2 ; E = -J N D \quad (D \equiv \text{dimensión})$$

$$Z = \sum_{s_1, s_2} \sum_{S_N = \pm 1} e^{\beta \left(\sum_{i=1}^N \mu H s_i + J \sum_{i,j} s_i s_j \right)}$$

$$E = -\mu N \sum_{i=1}^N s_i - J m z \sum_{i=1}^N s_i + \frac{J m^2 N z}{2} \Rightarrow Z = e^{-\beta \frac{J m^2 N z}{2}} [2 \cosh(\beta \mu H + \beta J m z)]^N$$

• Campo medio para el gas ideal

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \left(\int \int d^3p d^3r e^{-\beta(E+U)} \right)^N = \dots = \frac{1}{N! h^{3N}} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \cdot [(V - V_x) e^{-\beta \langle U \rangle}]^N$$

Aquí V_x es el volumen no accesible por ser $u \rightarrow +\infty$.

• ECUACIÓN DE VAN DER WAALS: $(p + \frac{a'}{V^2})(V - b') = kT$, $V = \frac{V}{N} = \frac{1}{n}$ VOLUMEN ESPECÍFICO
ENERGÍA LIBRE HELMHOLTZ: $F = -kT \ln Z$

TRUCOS

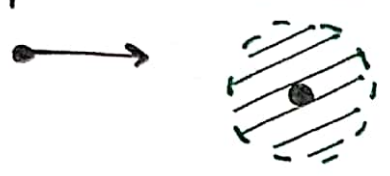
• Para llegar a * hay que suponer el denominador ≈ 1 .

• Sumatorio primeros vecinos: $\sum_{i,j} = \frac{z}{2} \sum_{i=1}^N$

TEMA 6: SISTEMAS NO EQUILIBRIO

COLISIONES

- Probabilidad de colisión entre $t, t+dt$: ωdt
- Probabilidad no colisión entre $t, t+dt$: $P(t) = e^{-\omega t}$
- Probabilidad si colisión entre $t, t+dt$ sin haber colisionado antes:
 $P(t)dt = \omega e^{-\omega t} dt$
- TIEMPO DE COLISIÓN: valor esperado tiempo entre colisiones
 $\tau = \langle t \rangle = \int_0^\infty t P(t) dt \Rightarrow P(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}, \langle t^2 \rangle = \frac{2}{\omega^2}, \sigma = \sqrt{\langle \Delta t^2 \rangle} = \tau$
- RECORRIDO LIBRE MEDIO: distancia media entre colisiones
 $l = \langle v \rangle \tau$ y también tenemos $t = N\tau$
- SECCIÓN EFICAZ: área donde si entramos, chocamos (relación con parámetro de impacto)



$$\sigma_0 = 4\pi a^2 = \frac{\dot{N}}{\mathcal{F}}$$

\uparrow
 radio partículas

$\dot{N} \rightarrow$ ritmo colisión
 $\mathcal{F} \rightarrow$ flujo partículas incidentes

RELACIONES IMPORTANTES

- Desplazamiento cuadrático medio: $\langle x^2 \rangle = 2dDt$, d la dimensión
- $\mathcal{F} = n_1 \langle v \rangle$, $\dot{N} = \sigma_0 n_1 \langle v \rangle$, $\frac{1}{\tau} = \sigma_0 n_2 \langle v \rangle$
- $l = \frac{1}{\sqrt{2} n_2 \sigma_0}$

• AUTODIFUSIÓN : gradientes de concentraciones

LEY DE FICK: $\vec{J} = -D \vec{\nabla} n$ COEFICIENTE DE DIFUSIÓN

Ecuación de difusión: $\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dz} \left[D \cdot \frac{dn}{dz} \right] \Rightarrow n(x, t) = \frac{n_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$

Ecuación de continuidad: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}$

LEY DE STOKES: $F_f = -6\pi\eta r v = -\alpha v \Rightarrow D = \frac{kT}{\alpha}$

A partir de esto y sabiendo que $N_A = \frac{R}{k}$ podemos encontrar experimentalmente N_A .

OTRAS FORMAS DE DAR D : $\langle l^2 \rangle = 6Dt$, $D = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle t$

ANOTACIONES EJERCICIOS

- La probabilidad está relacionada con el volumen del espacio fásico.
- Cuando algo está entre A y $A + dA$, lo que queremos calcular será $f(A) dA$.
- Que el $x\%$ de átomos tenga una característica \Leftrightarrow que 1 átomo tenga un $x\%$ de probabilidad de la característica.
- El calor específico en el caso cuántico es menor al del caso clásico como consecuencia de la cuantización de la energía.
- RECORDAR! En los valores medios si nos lo piden para N partículas, multiplicar por N .
- La entropía en el equilibrio se MAXIMIZA y en $T \rightarrow 0$ se anula (TERCER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA).
- TÉCNICA CUANDO EMPIECEN A PEDIR ENERGÍAS MEDIAS RARUNAS
 1. Buscar la función de partición, que suele ser lo más fácil de dar. No complicarse mucho, hacen $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$ y si luego hacen falta trucos y simplificaciones, pues ya se hacen.
 2. Tomamos logaritmos y derivamos: $\langle E \rangle = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$
- LÍMITE CLÁSICO : $T \rightarrow 0 \Leftrightarrow \beta \rightarrow +\infty$ (si estamos en el oscilador cuántico, nos dará la energía del estado fundamental)
- OSCILADOR ARMÓNICO DIMENSIÓN N : $E = \hbar \omega [(m_1 + \dots + m_N) + \frac{N}{2}]$, donde m_i es el nivel energético en el estado i