LA ECUACIÓN DE DIRAC.

¿Por qué es necesaria? Problemas con Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0$$

Solución: $\varphi(t,\vec{x}) = N e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} =$

$$= N e^{-ip\cdot x}$$

con $E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$

El problema es que, tomando

$$\vec{j}(x) = -i\left(\varphi^*(x)\vec{\nabla}\varphi(x) - \phi(x)\vec{\nabla}\varphi^*(x)\right)$$

como en Schrödinger, necesitamos

tomar

$$\rho(x) = i\left[\varphi^*(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial t}\phi(x)\right]$$

para que se satisfaga K-G.

Entonces, podríamos escribir

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \qquad \text{con}$$

$$j^\mu(x) = i\{\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x) - (\partial^\mu\varphi^*(x))\varphi(x)\}$$

Como $\varphi(x) = N e^{-ipx}$, obtenemos

$j^0 = \rho = 2|N|^2 E$ y tenemos problemas

con $E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$.

¿Podemos interpretar los estados con energía < 0?

(Feynman & Stuckelberg)

"partículas moviéndose hacia atrás en el tiempo"

$\updownarrow$

Antipartículas

Observemos que

$$m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = q F^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

obtenemos la misma ecuación cambiando

$$q \to -q \quad \text{o} \quad \tau \to -\tau$$

$\Rightarrow$ una partícula viajando hacia atrás en el tiempo $\simeq$ una antipartícula de carga opuesta viajando hacia el futuro.

Entonces, para eliminar estados con $E < 0$:

$$q \to -q$$

$$\vec{p} \to -\vec{p}$$

$$t \to -t$$

$$E \to -E$$

También podríamos usar un argumento de este estilo: consideremos la corriente electromagnética para un campo de Klein-Gordon.

Si $q>0$ y la partícula es entrante ($e^{-ip\cdot x}$) con $E>0$, tenemos:

$$J^{\mu}_{EM} = (+q)\,2|N|^2 p^{\mu}$$

$$= (+q)\,2|N|^2 (E, p^i)$$

Si $q>0$ y $E<0$:

$$J^{\mu}_{EM} = (+q)\,2|N|^2(-E, p^i)$$

no nos gusta el signo "$-$"

$$= (-q)\,2|N|^2(E, \bar{p}^i)$$

sale del argumento de la página anterior.

luego

"partícula entrante" $\longleftrightarrow$ "antipartícula saliente"

De esta manera, el campo $\varphi(x)$ lo expresamos como

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \text{partícula} \\ \text{entrante} \\ E>0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{antipartícula} \\ \text{saliente} \end{pmatrix}$$

$E>0$

$\overset{?}{e}{}^{-i(Et-\bar{p}\bar{x})}$ $\qquad$ $e^{+i(Et-\bar{p}\bar{x})}$

Como habíamos comentado, el problema es el signo $-$ en $E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$. Dirac se dio cuenta de que el problema radicaba en que la ecuación es de segundo orden en derivadas. Quiso hacer

$$(\Box + m^2) = (\partial^2 + m^2) = (\sqrt{\partial^2} + im)(\sqrt{\partial^2} - im)$$

¿Cómo definimos $\sqrt{\partial^2}$?

Dirac: definamos un cuadrivector γ^μ cuyas componentes son:

$$(\gamma^0)^2 = 1 \ ; \quad (\gamma^1)^2 = -1 \ ; \quad (\gamma^2)^2 = -1 \ ; \quad (\gamma^3)^2 = -1$$

Además, estas componentes no son números ordinarios.

Si $\mu \neq \nu$: $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0$.

Si vimos ésto al valor de las componentes de γ^μ, obtenemos

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_{4\times 4}$$

(Esta relación define un álgebra de Clifford)

La factorización anterior queda:

$$(\Box + m^2) = (\partial^2 + m^2) = (\gamma^\mu \partial_\mu + m^2)$$

$$= (\gamma^\mu \partial_\mu - im)(\gamma^\mu \partial_\mu + im)$$

Notación : $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$ (a-slash)

$$(\partial^2 + m^2) = (\not{\partial}^2 + m^2) = (\not{\partial} - im)(\not{\partial} + im)$$

Escojemos el paréntesis con signo positivo y tratémoslo como un operador actuando sobre la función de onda, $\Psi(x)$:

$$\boxed{(\not{\partial} + im)\Psi(x) = 0}$$, o bien,

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0}$$, que es la famosa

ecuación de Dirac.

Notemos que también podemos escribirla como

$\boxed{(\hat{\not{p}} - m)\Psi = 0}$, donde $\hat{\not{p}} = \gamma^\mu (i\partial_\mu)$ y

$\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$

Comentarios:

- hemos introducido los símbolos γ^μ (que anticonmutan). Los vamos a representar por matrices 4×4.

- Ésto implica que $\Psi(x)$ es una función de onda con 4 componentes. ¿Qué representan?

No hay una forma única de representar las matrices γ^μ. Vamos a escoger una.

Representación quiral de las matrices gamma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para simplificar la notación (e intuir qué es lo que va a pasar), hagamos:

$$I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$. Entonces

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix}$$

Además, puede demostrarse que γ^μ transforma como un cuadrivector. Motivados por éstos escribimos

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (\gamma^0, \vec{\gamma})\ , \text{ con}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\ , \text{ donde}$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)\ .$$

Finalmente, para escribir aún menos, definimos

$$\sigma^\mu = (I, \vec{\sigma})$$
$$\bar{\sigma}^\mu = (I, -\vec{\sigma})$$

y obtenemos

$$\boxed{\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ +\bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}}$$

Si sustituimos estas γ^μ en la ecuación de Dirac, queda:

$$(\gamma_0 \hat{p}^0 - \gamma_i \hat{p}^i - m)\, \psi(x) = 0\ ,$$

con $\hat{p}^0 = i\partial_0$ y $\hat{p}_i = -i\partial_i$

Ahora, vamos a escribir la función de onda como

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix},$$ donde $\psi_{L,R}$ son

matrices columna de dos componentes. Nuestra ecuación queda:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \hat{p}^0 \\ \hat{p}^0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0$$

O bien:

$$(\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\,\psi_R = m\,\psi_L$$

$$(\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\,\psi_L = m\,\psi_R$$

Simplifiquemos todavía más considerando partículas sin masa ($m = 0$).

$$(\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\,\psi_R = 0$$

$$(\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\,\psi_L = 0.$$

Entonces, en el caso de partículas sin masa, nuestro autoestado $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ se separa en dos componentes, ψ_L y ψ_R, que no se mezclan.

Conclusión: tenemos en la Naturaleza dos tipos de partículas de Dirac sin masa: zurdas (left-handed) (ψ_L) y diestras (right-handed) (ψ_R)

En la representación quiral que estamos considerando,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \text{ left-handed} \\ \} \text{ right-handed} \end{matrix}$$

Para ser más precisos con left-and right-handed, definimos el operador de quiralidad, γ^5,

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

(sólo en la repr. quiral)

De esta manera,

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = (+1) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

las partículas left-handed tienen quiralidad -1.
Las partículas right-handed " $+1$.

Para extraer las partes left- o right-handed de una función de onda, definimos los proyectores de quiralidad

$$\hat{P}_L = \frac{1-\gamma^5}{2} \quad ; \quad \hat{P}_R = \frac{1+\gamma^5}{2}$$

Conclusión: como ψ_L y ψ_R son autoestados de la ec. Dirac sin masa, entonces una partícula libre, sin masa y L, nunca se transformará en una R.