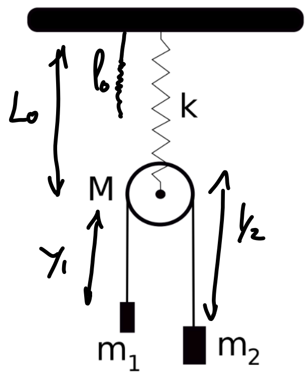
1. En el sistema de la figura, el muelle tiene una longitud de equilibrio ℓ_0. La cuerda es inextensible, de longitud ℓ y no desliza sobre la polea, cuyo radio, masa y momento de inercia son respectivamente R, M y $\frac{1}{2}MR^2$. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? Elige coordenadas generalizadas adecuadas y obtén la lagrangiana del sistema y las ecuaciones de Lagrange.



jajan't

$y_1+y_2=L$

Tomamos coordenadas cartesianas, solo hay un grado de libertad

Tendremos una ligadura holónoma $y_1+y_2=L$ de forma que $y_2=L-y$ si llamamos y a y_1

Todavía hemos de añadir L_0 para que represente al sistema

$$y_1+y_2+L_0=L+L_0 \iff y_1=y-L_0 \iff y=y_1+L_0 \iff$$
$$\iff y_2+y=L+L_0 \iff y_2=L+L_0-y$$

$$\begin{aligned} y_1&=y-L_0\\ y_2&=L+L_0-y\end{aligned} \Rightarrow T=\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2=\frac{1}{2}m_1\left(\frac{\partial}{\partial t}(y-L_0)\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{\partial}{\partial t}(L+L_0-y)\right)^2=\frac{1}{2}m_1\dot{y}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2=$$
$$=\frac{1}{2}\dot{y}^2(m_1+m_2)$$

$$U=m_1gy_1+m_2gy_2=m_1g(y-L_0)+m_2g(L+L_0-y)=gL_0(m_1+m_2)+gy(m_1-m_2)+gLm_2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}=T-U=\frac{1}{2}\dot{y}^2(m_1+m_2)+gy(m_2-m_1)-gL_0(m_1+m_2)-gLm_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}=\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2-gL_0\right)(m_1+m_2)+gy(m_2-m_1)-gLm_2$$

se me olvidó la potencial elastik

jaja qué es Δx

creo

$$U=gL_0(m_1+m_2)+gy(m_1-m_2)+gLm_2+\frac{1}{2}k(L_0-\ell_0)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L}=\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2-gL_0\right)(m_1+m_2)+gy(m_2-m_1)-gLm_2+\frac{1}{2}k(L_0-\ell_0)^2} \to \text{Euler-Lagrange}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=0 \iff \ddot{y}(m_1+m_2)-g(m_2-m_1) \iff \ddot{y}=-g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}$$

2. Dos partículas de masas m_1 y m_2 pueden deslizar sin rozamiento sobre sendas rectas paralelas como muestra la figura. Las partículas están unidas mediante un muelle de constante elástica k y longitud de equilibrio ℓ_0. La distancia entre las rectas es d.

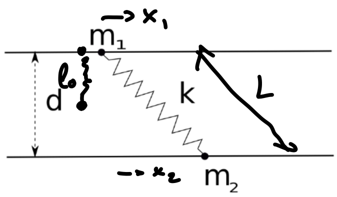
(a) ¿Cuántos grados de libertad tiene este sistema? Utiliza coordenadas generalizadas adecuadas y obtén la lagrangiana del sistema.

(b) Considera, **a partir de ahora**, que la longitud de equilibrio del muelle es cero, $\ell_0 = 0$. Obtén las ecuaciones de Lagrange.

(c) Obtén los momentos conjugados a las coordenadas. ¿Hay alguno que se conserva constante? Si es que no, aplica el teorema de Noether para obtener que el momento mecánico en la dirección de las rectas $(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)$ es conservado.

(d) Obtén la Hamiltoniana del sistema. Obtén su derivada total respecto al tiempo, dH/dt. ¿Se conserva H constante? ¿Es la Hamiltoniana igual a la energía? Justifica el porqué de estos resultados.

(e) Obtén la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del sistema alrededor de la posición de equilibrio.



~~1 grado de libertad (x)~~ $\to$ 2 grados de libertad

$$\cancel{T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2}$$

Hemos de hallar la relación entre x_1, x_2 para conseguir 1 grado de libertad (x) (ligadura)

$$L^2=(x_2-x_1)^2+d^2 \xrightarrow{\text{en equilibrio}} L^2=\ell_0^2 \Rightarrow$$

$$\ell_0^2=(x_2-x_1)^2+d^2 \iff (x_2-x_1)=\sqrt{\ell_0^2-d^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2=x_1+\sqrt{\ell_0^2-d^2}$$ si llamamos x a x_1:

$$\begin{aligned} x_1&=x\\ x_2&=x+\sqrt{\ell_0^2-d^2}\end{aligned} \Rightarrow T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2=\frac{1}{2}m_1\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(x+\sqrt{\ell_0^2-d^2}\right)\right]^2=\frac{1}{2}\dot{x}^2(m_1+m_2)$$

$$U=\frac{1}{2}k\Delta L=\frac{1}{2}k(L-\ell_0)=\frac{1}{2}k\left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+d^2}-\ell_0\right)^2 \overset{*}{=} \frac{1}{2}k\left(\sqrt{\ell_0^2-d^2+d^2}-\ell_0\right)^2=0 \quad \text{lol}$$

$$\mathcal{L}=\cancel{\frac{1}{2}\dot{x}^2(m_1+m_2)-\frac{1}{2}k\left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+d^2}-\ell_0\right)^2}$$

$$\mathcal{L}'=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2m_1+\frac{1}{2}\dot{x}_2^2m_2-\frac{1}{2}k\left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+d^2}-\ell_0\right)^2$$

Si $l_0=0 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2(m_1+m_2) - \frac{1}{2}k \longrightarrow$

Nada más por la pregunta ya se que hay 2GdL y no 1 → X mal

Sigo con $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2 m_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2 m_2 - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+d^2} - l_0\right)^2 \xrightarrow{l_0=0}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}' = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2 m_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2 m_2 - \frac{1}{2}k\left[(x_2-x_1)^2+d^2\right] \longrightarrow \text{Euler-Lagrange:}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x_1} = 0 \Longleftrightarrow \ddot{x}_1 m_1 - 2kx_1 - 2x_2k = 0 \Longleftrightarrow \ddot{x}_1 = \frac{2k}{m_1}(x_1+x_2) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x_2} = 0 \Longleftrightarrow \ddot{x}_2 m_2 - 2kx_2 - 2x_1k = 0 \Longleftrightarrow \ddot{x}_2 = \frac{2k}{m_2}(x_2+x_1) \end{cases}$$

Los Momentos conjugados no se conservan por lo que probamos que el momento mecánico total $p = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2$ sí lo hace.

$$\frac{d}{dt}p = \frac{d}{dt}(p_{x_1}+p_{x_2}) = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 m_1 + m_2\dot{x}_2) = \ddot{x}_1 m_1 + \ddot{x}_2 m_2 = 2k(x_1+x_2) + 2k(x_2+x_1) = 4k(x_1+x_2)$$

Por Euler-Lagrange:

→ Esto no es una prueba pero weno

$$\frac{d}{dt}p - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x_2} = 0 \Longleftrightarrow 4k(x_1+x_2) - kx_1 - 2kx_2 - kx_2 - 2kx_1 = 4kx_1 - 4kx_1 + 4kx_2 - 4kx_2 = 0_{\text{II}}$$

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = p_{x_1}\dot{x}_1 + p_{x_2}\dot{x}_2 - \mathcal{L} = \dot{x}_1^2 m_1 + \dot{x}_2^2 m_2 - \frac{1}{2}\dot{x}_1 m_1 - \frac{1}{2}\dot{x}_2 m_2 + \frac{1}{2}k\left[(x_2-x_1)^2+d^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{x}_1^2 m_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2 m_2 + \frac{1}{2}k\left[(x_2-x_1)^2+d^2\right] = \mathcal{L} + k\left[(x_2-x_1)^2+d^2\right] \neq \mathcal{L} \longrightarrow H \neq E$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_1}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_2}\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_1}\ddot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_2}\ddot{x}_2 + \frac{\partial H}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2}\dot{x}_2 =$$

$$= \ddot{x}_1^2 m_1 + \ddot{x}_2^2 m_2 + 2(x_1-x_2)\dot{x}_1 + 2(x_1-x_2)\dot{x}_2 \neq 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 2kx_1 + 2kx_2 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 2k \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = 2k \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2} = m_1 \quad \Rightarrow U = \begin{pmatrix} 2k & 2k \\ 2k & 2k \end{pmatrix}$$

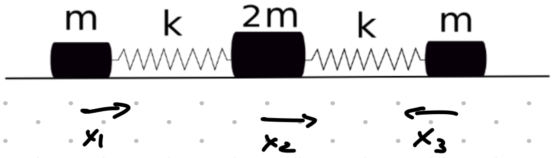
$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = 2kx_2 + 2kx_1 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 2k \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} = 2k \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2} = m_2 \quad T' = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$|U - \omega^2 T'| = \begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m_1 & 2k \\ 2k & 2k-\omega^2 m_2 \end{vmatrix} = (2k-\omega^2 m_1)(2k-\omega^2 m_2) - 4k^2 = 0 \Longleftrightarrow \omega^2(\omega^2 m_1 m_2 - 4k^2 m_1 m_2) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \omega^2 m_1 m_2 = 4k^2 m_1 m_2 \Longleftrightarrow \omega^2 = 4k^2 \Longleftrightarrow \boxed{\omega = 2k}$$

$\boxed{\omega=0}$ (no oscilatorio)

4. Obtén razonadamente las frecuencias y los modos de vibración (no hace falta normalizar) del sistema de la figura, sabiendo que los bloques pueden deslizar sin rozamiento a lo largo de la recta. Explica cómo se moverían los bloques en cada uno de los modos.



$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2 + 2\dot{x}_2^2)$$

$$U = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k(x_1 + x_3)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) + \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 2k \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = k = \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} = -k \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_1} = k \Rightarrow U = \begin{pmatrix} 2k & -k & k \\ -k & k & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix} T' = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$|U - \omega^2 T'| = \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k & k \\ -k & k - 2\omega^2 m & 0 \\ k & 0 & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = (2k - \omega^2 m)(k - 2\omega^2 m)(k - \omega^2 m) - k^2(k - 2\omega^2 m) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$x = \omega^2$$

$$\Longleftrightarrow \omega^6 \cdot 4km^3 - \omega^4 \cdot 6k^2m^2 + \omega^2 \cdot 2m(k^2 + k^3) - k^3 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^3 \cdot 4km^3 - x^2 \cdot 6k^2m^2 + x \cdot 2m(k^2 + k^3) - k^3 = 0 \Longleftrightarrow 4km^3 \cdot x^2 - 4k^2m^2 \cdot x + 2mk^2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4km^3 & -6k^2m^2 & 2m(k^2+k^3) & -k^3 \\ \frac{k}{2m} & & 2k^2m^2 & -2k^3m & +k^3 \\ \hline & 4km^3 & -4k^2m^2 & 2mk^2 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow$$

$$x = \frac{4k^2m^2 \pm \sqrt{16k^4m^4 - 32k^3m^4}}{8km^3} =$$

$$= \frac{4k^2m^2(1 \pm \sqrt{k^2 - 2k})}{8km^3} = \frac{k}{2m}(1 \pm \sqrt{k^2 - 2k})$$

$$\to \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}(1 + \sqrt{k^2 - 2k})}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{2m}(1 - \sqrt{k^2 - 2k})}$$

$$\boxed{A_1 = \mathrm{Ker}(U - \omega_1^2 T') = \{0\}}$$ → Esto huele a turro

$$(U - \omega_1^2 T')\bar{x} = \begin{pmatrix} 2k - \frac{k}{2} & -k & k \\ -k & 0 & 0 \\ k & 0 & k - \frac{k}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (2k - \frac{k}{2})x_1 - kx_2 + kx_3 = 0 \\ -kx_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0} \\ kx_1 + (k - \frac{k}{2})x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = 0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$$

(o lo)

$$\boxed{A_2 = \mathrm{Ker}(U - \omega_2^2 T') = \mathrm{Env}\{(\sqrt{k^2 - 2k} - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sqrt{k^2 - 2k}} - 1, 1)\}}$$

$$(U - \omega_2^2 T')\bar{x} = \begin{pmatrix} k(\frac{3}{2} - \sqrt{k^2 - 2k}) & -k & k \\ -k & -k\sqrt{k^2 - 2k} & 0 \\ k & 0 & k(\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 - 2k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 k(\frac{3}{2} - \sqrt{k^2 - 2k}) - x_2 k + x_3 k = 0 \\ -x_1 k - k\sqrt{k^2 - 2k}\, x_2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = -\overbrace{\sqrt{k^2 - 2k}}^{A}\, x_2 \\ kx_1 + k(\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 - 2k})x_3 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = -(\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 - 2k})x_3 \end{cases}$$

$$x_1 = -Ax_2 = (A - \tfrac{1}{2})x_3 \Rightarrow x_2 = \left(\frac{1}{2A} - 1\right)x_3$$

$$\boxed{A_3 = \mathrm{Ker}(U - \omega_3^2 T') = \mathrm{Env}\{(-\tfrac{1}{2} + \sqrt{k^2 - 2k}, -\tfrac{1}{2\sqrt{k^2 - 2k}} - 1, 1)\}}$$

$$(U - \omega_3^2 T')\bar{x} = \begin{pmatrix} k(\frac{3}{2} + \sqrt{k^2 - 2k}) & -k & k \\ -k & k\sqrt{k^2 - 2k} & 0 \\ k & 0 & k(\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 - 2k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 k\left(\frac{3}{2}+\sqrt{k^2-2k}\right) - kx_2 + kx_3 = 0 \\ -x_1 k + k\sqrt{k^2-2k}\, x_2 = 0 \\ x_1 k + k\left(\frac{1}{2}+\sqrt{k^2-2k}\right)x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{matrix} x_1 = Ax_2 \\ x_1 = -\left(\frac{1}{2}+A\right)x_3 \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} Ax_2 = -\left(\frac{1}{2}+A\right)x_3 \\ x_2 = -\left(\frac{1}{2A}+1\right)x_3 \end{matrix} \Longleftrightarrow$$

5. Un trompo simétrico tiene los siguientes momentos principales de inercia respecto a su centro de masas: $I_1 = I_2 = I$, $I_3 = 2I$.

   (a) Si el trompo gira **libremente** con una velocidad angular de módulo Ω y que forma un ángulo de 30° con el eje de simetría (tercer eje principal de inercia), obtén el módulo del momento angular y el ángulo entre éste y el eje de simetía.

   (b) Obtén la velocidad angular de precesión (Ω_{pre}) del eje de simetía alrededor del momento angular.

   (c) Obtén el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masas y forma un ángulo $\alpha = 30°$ con el eje de simetría.

   (d) Si forzamos a que el trompo gire respecto a un eje **fijo** que pasa por su centro de masas y forma un ángulo de 30° con el eje de simetría, el trompo ya no será libre y debemos aplicar un momento externo para que realice este movimiento. Usa las ecuaciones de Euler y obtén el módulo del momento externo en función del módulo de la velocidad angular Ω.

   Nota: Los resultados se expresarán en función de I y de Ω.

Qué es un trompo

6. Dada la transformación

$$q = e^Q \qquad\qquad\qquad\qquad q = e^Q$$
$$p = f(P)\, e^{-Q}, \quad \Longleftrightarrow \quad p = (P - g(Q))e^{-Q} \longleftrightarrow P = e^Q p + g(Q)$$

   (a) Encuentra una función $f(P)$ para que la transformación sea canónica, justificando los pasos realizados.

   (b) Obtén una función del tipo $F_2(q, P)$ generadora de la transformación.

Para que la transformación sea canónica y de valencia 1, $[q,q]=[p,p]=0$; $[q,p]=1$

$$[q,q] = \frac{\partial}{\partial Q}(e^Q)\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial P}(e^Q)} - \frac{\partial}{\partial Q}(e^Q)\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial P}(e^Q)} = 0$$

$$[p,p] = \frac{\partial}{\partial Q}(f(P)e^{-Q})\frac{\partial}{\partial P}(f(P)e^{-Q}) - \frac{\partial}{\partial Q}(f(P)e^{-Q})\frac{\partial}{\partial P}(f(P)e^{-Q}) = 0$$

$$[q,p] = \frac{\partial}{\partial Q}(e^Q)\frac{\partial}{\partial P}(f(P)e^{-Q}) - \frac{\partial}{\partial Q}(f(P)e^{-Q})\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial P}(e^Q)} = \frac{\partial}{\partial Q}e^Q \cdot \frac{\partial}{\partial P}(f(P)e^{-Q}) = e^Q \frac{\partial f}{\partial P} e^{-Q} = 1 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial P} = 1 \Leftrightarrow f(P) = P + g(Q)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p} = q \quad \frac{\partial F_2}{\partial Q} = P \quad \Rightarrow \quad F_2 = \int P\, dQ = \int (e^Q p + g(Q))\, dQ = e^Q p + G(Q) + h(p)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p} = \int \frac{\partial}{\partial p} P\, dQ = \int \frac{\partial}{\partial p}(e^Q p + g(Q))\, dQ = \int e^Q dQ = e^Q$$

$\left.\right\} \to h(p) = 0$ y tomamos $g(Q) = G(Q) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{F_2 = e^Q p}$$

comprobamos: $\frac{\partial F_2}{\partial Q} = e^Q p = P$ ✓ $\quad \frac{\partial F_2}{\partial p} = e^Q = q$ ✓