Grado en Física. Mecánica Newtoniana y Relatividad.
Relatividad.
Curso 2022-2023
Los problemas marcados con (*) son de mayor dificultad.

1. Considera dos sistemas de referencia inerciales, S y S', con S' moviéndose con velocidad constante V a lo largo del eje x de S. Supongamos que en el instante inicial el origen de los dos sistemas de referencia coinciden y que en ese instante se produce un destello en este origen común. Según el observador en S, un frente de onda esférico se expande desde el origen con velocidad c. Muestra que un observador en S' verá un frente de onda similar expandiéndose desde su origen. (Considera que la ecuación para el frente de onda es: $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$)

2. Un suceso tiene lugar en $x = 60m$, $t = 8x10^{-8}s$ en un sistema S ($y = 0$, $z = 0$). El sistema S' posee una velocidad $3c/5$ según el eje de las x con relación al sistema S. Los orígenes de S y S' coinciden para t = 0, $t' = 0$. ¿Cuáles son las coordenadas espacio-tiempo del suceso S'?. Obténlas también en forma gráfica.

3. Las coordenadas espacio-tiempo de dos sucesos medidas en un sistema S son las siguientes: Suceso 1: $x_1 = x_0, t_1 = x_0/c$ ($y_1 = 0, z_1 = 0$) Suceso 2: $x_2 = 2x_0, t_2 = x_0/2c$ ($y_2 = 0, z_2 = 0$) (a) Existe un sistema en el cual estos sucesos tienen lugar en el mismo instante. Hallar la velocidad de este sistema respecto a S. (b) ¿Cuál es el valor del tiempo para el que ambos sucesos tienen lugar en el nuevo sistema de referencia?

4. A las $14h\,0m\,0s$, cae un rayo en un cierto lugar. A 1760 km de distancia y a las $14h\,0m\,0{,}003s$ cae un segundo rayo.¿Qué velocidad debe tener una nave espacial que observa el orden de las caídas invertido? Razónalo gráficamente.

5. Muestra que una transformación de Lorentz de velocidad V a lo largo del eje x puede escribirse como:

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh\theta - ct \sinh\theta \\ ct' &= -x \sinh\theta + ct \cosh\theta \end{aligned}$$

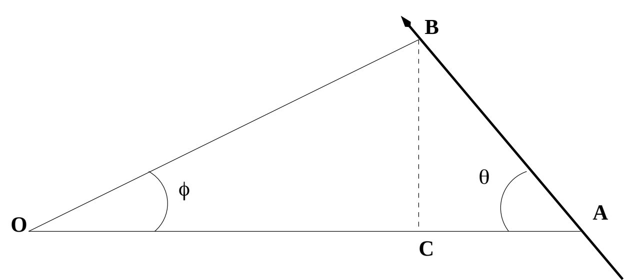
Donde θ está definido por $\tanh\theta = \dfrac{V}{c}$. Si definimos la coordenada temporal como $y = ict$, entonces la transformación de Lorentz es como una 'rotación' en un espacio bidimensional:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos i\theta + y \sin i\theta \\ y' &= -x \sin i\theta + y \cos i\theta \end{aligned}$$

Muestra que dos transformaciones consecutivas de ángulos θ_1 y θ_2 equivalen a un transformación de ángulo $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

6. La velocidad de propagación del sonido en un cable metálico es $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, donde μ es su masa por unidad de longitud. ¿Cuál es la restricción sobre los valores de tensión que puede soportar un cable de acero de 1 mm de radio de acuerdo con la relatividad? La densidad del acero es $7{,}8\,10^3\ Kg/m^3$. Compara con la tensión de rotura de ese mismo cable, que es $1{,}6\,10^3$ N.

7. Un objeto situado en una galaxia distante se mueve a lo largo de la dirección AB con velocidad v, como muestra la figura de debajo. A tiempo t_1 parte desde A y emite un fotón en la dirección de O. A tiempo t_2 ha llegado a B y emite un segundo fotón en la dirección de O. Los fotones son recibidos en O a tiempos $t_1^{'}$ y $t_2^{'}$. Supón que el ángulo ϕ es suficientemente pequeño y calcula la velocidad transversal, debida al desplazamiento aparente en la dirección BC, que percibe el observador en O. Encuentra el valor máximo de dicha velocidad respecto a θ y muestra que puede ser mayor que c. ¿Qué es lo que ocurre?.



Problema 9

8. Una nave espacial se mueve sobre el eje x hacia la derecha con velocidad $V = 0{,}3c$.

   a) Dibuja los ejes de coordenadas $(ct;x)$ y $(ct';x')$, respecto del laboratorio y la nave espacial respectivamente, en el mismo gráfico. Marca correctamente los ángulos de los ejes y calibra las escalas adecuadamente.

   b) Ubica el punto de coordenadas $(ct = 4;x = 2)$ y determina gráficamente sus coordenadas en el sistema de la nave espacial. Comprueba los valores calculándolos con las transformaciones de Lorentz.

   c) Dibuja la trayectoria de un electrón que se mueve, respecto del laboratorio, con velocidad $\frac{c}{2}$. Determina, gráficamente, su velocidad respecto de la nave espacial. Comprueba el resultado utilizando la ley de adición de velocidades.

9. Supón que se instalan espejos alrededor del ecuador terrestre, de tal manera que podemos hacer que un pulso de luz de la vuelta al planeta. Desde un punto dado del ecuador se envían dos pulsos de luz, uno hacia el este y otro hacia el oeste. Teniendo en cuenta la rotación terrestre, ¿cuál de los dos retorna primero al punto de partida? ¿Por qué este resultado cuestiona el principio de que la velocidad de la luz es independiente del sistema de referencia? ¿Se pueden sincronizar relojes mediante señales de luz en un sistema rotante ? Explica lo que ocurre.

10. En el laboratorio hay una rueda de radio R que rota con velocidad angular ω respecto del eje x. Considera ahora un observador que se mueve a lo largo del eje x con velocidad V respecto del laboratorio. ¿Cuánto vale la velocidad angular para este observador?

11. Considera dos ruedas unidas a los extremos de un eje de longitud L ubicado a lo largo del eje x. Las ruedas giran con velocidad angular ω de tal modo que los radios de cada una de ellas están siempre paralelos. Un observador se mueve con velocidad V hacia la derecha a lo largo del eje x. ¿Qué desfasaje angular observa entre los radios de las dos ruedas?. Explica lo que ocurre.

12. Muestra que una combinación de dos transformaciones de Lorentz sucesivas con velocidades V_1 y V_2 a lo largo del eje x equivalen a una única transformación de velocidad $V = \dfrac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}}$.

13. En un sistema de referencia que se mueve con velocidad V a lo largo de la dirección x y en sentido positivo, una partícula se mueve con velocidad $\mathbf{v}'$ formando un ángulo θ' con el eje x'. Muestra que su dirección de propagación en el laboratorio forma un ángulo θ con el eje x, tal que: $\tan\theta = \dfrac{v'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\sin\theta'}{v'\cos\theta' + V}$. Supón que hay una fuente que emite partículas en todas las direcciones en el origen del sistema de referencia móvil. ¿Cómo se ve esta emisión en el laboratorio cuando $V \to c$?.

14. Considera el fenómeno de aberración de la luz estelar, en la configuración de incidencia perpendicular. En el sistema de referencia x', y', z' centrado en el sol, la luz se emite a lo largo del eje y' perpendicularmente a la velocidad de traslación de la tierra respecto del sol. Muestra que en el sistema de referencia de la tierra la luz forma un ángulo ϕ con el eje y tal que: $\tan\phi = \gamma\,\dfrac{V}{c}$.

15. (*) Supón que un espejo plano se desplaza con velocidad V en la dirección horizontal hacia la derecha. El espejo está colocado perpendicularmente a la dirección de su movimiento.

Un rayo de luz que forma un ángulo θ con el eje x en el sistema del laboratorio incide sobre el espejo. Calcula el ángulo con que el rayo se refleja en el laboratorio. Repite el calculo suponiendo que el espejo se desplaza paralelamente a su superficie con velocidad V. En todos los casos analiza todas las posibles configuraciones entre sentido de propagaci?ndel haz y sentido de movimiento del espejo. ¿Existe siempre un rayo reflejado?. ¿Es reversible el proceso?.

16. Considera una nave espacial que acelera con aceleración a'_x constante en el sistema de referencia propio, partiendo del reposo. Muestra que: $x = \frac{c^2}{a'_x}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{v_x^2}{c^2})}} - 1\right)$. Muestra que para velocidades bajas esta expresión se reduce a $v_x^2 = 2\,a'_x\,x$.

17. La velocidad orbital de la tierra alrededor del sol es de 30 km/s. Calcula cuántos segundos pierde en un año un reloj que orbita con la tierra (sin participar de la rotación sobre su eje) respecto de uno que se halla fijo al sol.

18. Las partículas inestables tienen una probabilidad de no decaer al cabo de un tiempo t dada por la ley $P = \exp(-\frac{t}{\tau})$, donde τ es el tiempo de vida media de la partícula. Los muones tienen un tiempo de vida media de $2{,}2\,10^{-6}$ s. Supón que el impacto de un rayo cósmico en la átmosfera, a 40 km de la superficie terrestre, genera un muón que se mueve hacia abajo con velocidad $0{,}99c$. Calcula la probabilidad de que ese muón llegue a la superficie sin tener en cuenta la dilatación temporal, y luego teniéndola en cuenta. ¿Cómo sería este último cálculo en el sistema de referencia del muón?.

19. Se construye un reloj constituido por una partícula que rebota elásticamente entre dos paredes rígidas separadas por una distancia L. Supón que estas paredes están en reposo en un sistema de referencia que se mueve con velocidad V a lo largo del eje x del laboratorio. La partícula rebota con velocidad $\pm v'_y$ a lo largo de la dirección y'. ¿Cuál es el tiempo que transcurre entre rebotes en el sistema móvil y en el laboratorio?. ¿Se cumple la ley de dilatación temporal?.

20. Una barra horizontal de longitud 1 m se mueve con velocidad v_x en la dirección x al tiempo que cae con velocidad v_y constante. La barra se aproxima a un orificio cuyo ancho es 0,6 m. Si v_x es suficientemente grande, la contracción relativista permitirá que pase por el orificio. Desde el punto de vista de un sistema de referencia que se mueve con $V = v_x$, sin embargo, el que sufre el efecto de la contracción relativista es el orificio, y entonces la barra no pasará. ¿Cómo se explica esta paradoja?

21. (*) Supón que estás en una nave espacial en reposo respecto de una estrella lejana de masa M y que puedes ignorar cualquier campo gravitatorio. Para facilitar los cálculos considera

c = 1 y por tanto $\beta = v$, y ten en cuenta la igualdad: $v^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$. Utiliza la notación matricial.

a) Comprueba que el cuadrivector momento de la estrella no cambia si aplicamos una transformación de Lorentz a lo largo de la dirección x ($L_x(v_0)$) y seguidamente otra $L_x(-v_0)$. Repite el cálculo para la dirección y. Comprueba que la norma del cuadrivector momento es igual a M^2.

b) Aplica ahora esas transformaciones en el siguiente orden: $L_x(v_0)$; $L_y(v_0)$;$L_x(-v_0)$; $L_y(-v_0)$. Comprueba que la norma del cuadrivector ha permanecido invariante. ¿ Vuelves a la situación inicial?.

c) Para entender lo que ha ocurrido en b) haz lo siguiente. Primero una transformación $L_x(v_0)$ y luego $L_y(v_1)$. Calcula cuál debe ser el valor de v_1 para que el momento de la estrella después de estas dos transformaciones sea el mismo en las direcciones x e y. Aplica una transformación $L_x(-v_2)$ y calcula el valor de v_2 que hace que el momento en x sea cero. Finalmente, realiza una transformación $L_y(-v_3)$ y calcula el valor de v_3 que hace que el momento en la dirección y sea 0. Con estos valores de las velocidades hemos vuelto al punto de partida.

d) Cuando comenzamos el viaje descrito en c) observamos que fuera de la nave había un astronauta de masa M_a moviéndose en la dirección x con velocidad v_a. Calcula el cuadrivector momento del astronauta al terminar el viaje de c). ¿Por qué no es el mismo que al comienzo?.

e) Supón que la nave espacial tiene masa M_n y describe un círculo de radio R con velocidad v. Inicialmente hay un astronauta fuera como en d). Calcula el momento que tiene el astronauta respecto de la nave cuando esta vuelve a pasar por el punto de partida.

22. Cuando se mueve a velocidad de $0,9c$ respecto del laboratorio un mesón K decae en dos piones de masa 140 MeV/c^2 y energía cinética de 110 MeV que se mueven en direcciones opuestas en el sistema de referencia del mesón. ¿Cuál es la energía cinética y el impulso de cada pion en el sistema del laboratorio? Calcula el impulso inicial del mesón K en el laboratorio de dos maneras distintas.

23. Muestra que la cantidad $E\,t\,-\,x\,p_x$ es invariante por transformaciones de Lorentz. La cantidad $\omega\,t - k_x\,x$ es la fase de una onda luz, que determina dónde ocurren los máximos y mínimos de la onda, y por lo tanto también debe ser un invariante por transformaciones de Lorentz (ω es la pulsación y k_x el vector de onda de la onda de luz). ¿Qué relación debe haber entre E y ω y entre k_x y p_x?.

24. Para una partícula sin masa que se mueve a lo largo de la dirección x se cumple que $p_x = \pm\dfrac{E}{c}$, donde p_x y E son el impulso y la energía de la partícula. Calcula la energía E' en

un sistema que se mueve con velocidad V hacia la derecha y muestra que $E' = E\sqrt{\left(\frac{1\mp\frac{V}{c}}{1\pm\frac{V}{c}}\right)}$. Compara esta relación con la del problema anterior y obtén la fórmula del efecto Doppler relativista. ¿Qué ocurre si el sistema se mueve con velocidad V en la dirección y?.

25. En un sincrotrón, los electrones son mantenidos en una órbita circular de radio 15 cm. Los electrones son acelerados desde una energía cinética de 2 MeV hasta 40 MeV. ¿Cuánto vale el campo magnético al comienzo y al final?. ¿Cuánto vale la frecuencia del campo eléctrico que acelera las partículas al comienzo y al final?. Explica por qué estas frecuencias son muy parecidas.

Soluciones

2. $x' = 57m, t' = -5\,10^{-8}s$

3. $v = -c/2$, $t' = \frac{\sqrt{3}x_0}{c}$

4. $\frac{V}{c} \geq$ 0,51

6. T_{max} = 2,2 10^{15} N.

7. $V_{BC} = v\,\dfrac{\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}$; $\cos\theta_{max} = \beta$

8. a) ángulo xOx' = 17^o; b) x' = 0,84, ct' =3,6; c) v'_x = 0,23c

10. $\omega' = \dfrac{\omega}{\gamma}$

11. $\Delta\phi = -\dfrac{VL\omega}{c^2}$

13. Todas las partículas salen hacia adelante muy cerca del eje x, excepto aquellas que salen con $(\theta' \to \pi)$ y con $v' > V$, que salen hacia atrás y cerca del eje x.

15. $\sin\theta_r = \dfrac{\sin\theta_i}{\gamma^2\,(\beta^2 \pm 2\beta\cos\theta_i + 1)}$; $\sin\theta_r = \dfrac{\sin\theta_i}{(1 \pm \beta\sin\theta_i)}$

17. 0,1577 s

18. 2,2 10^{-27}; 1,7 10^{-4}

19. En el sistema móvil $\Delta\tau = \dfrac{2L}{v'_y}$; En el laboratorio $\Delta t = \gamma\,\dfrac{2L}{v'_y}$; Sí.

22. p_1 = 991 MeV/c, p_2 = 41 MeV/c, p_K = 1032 MeV/c, E_{c1} = 861 MeV, E_{c2} = 5,89 MeV.