Grado en Física. Mecánica Analítica. Problemas Tema 4: Transformaciones canónicas.

Curso 2022-2023

1. En un sistema hamiltoniano con un grado de libertad se realiza una *transformación de escala* $Q = \alpha\, q$, $P = \beta\, p$, donde α y β son constantes. Obtener las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables y la nueva hamiltoniana. ¿Y si además cambiamos t por $T = \gamma\, t$, con γ constante?

2. Probar que la transformación $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$ dada por $Q = q\, t$, $P = p\, t$ no es canónica, usando como hamiltoniana, H, la correspondiente al oscilador armónico.

3. Probar que la transformación afín

$$\begin{aligned} Q &= a_{11}\, q + a_{12}\, p \\ P &= a_{21}\, q + a_{22}\, p, \end{aligned}$$

donde $\det(a_{ij})=1$, es una transformación canónica de valencia unidad. ¿Bajo qué condiciones podemos encontrar funciones generatrices de los diferentes tipos? Obtenerlas en los casos posibles. Comprobar que podemos cambiar el tipo de función generatriz mediante la transformada de Legendre.

4. Demostrar que las siguientes transformaciones son canónicas y obtener, si es posible, funciones generatrices de tipo F_1 y F_2.

   (a)
$$\begin{aligned} Q &= q^2/2 + (p/q)^2 \\ P &= p/q \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} Q &= q^2 + p \\ P &= -q \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} Q &= q\, t \\ P &= p/t - 3q^2\, t^3 \end{aligned}$$

5. Para un oscilador armónico unidimensional la posición x y el momento p en función del tiempo vienen dados por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega\, t) + (p_0/m\omega) \sin(\omega\, t) \\ p(t) &= -m\, \omega\, x_0 \sin(\omega\, t) + p_0 \cos(\omega\, t) \end{aligned}$$

donde x_0 y p_0 son, respectivamente, la posición y el momento en el instante $t = 0$. Demostrar que la transformación $(x, p) \longrightarrow (x_0, p_0)$ es canónica para cualquier t. Obtener la función generatriz de tipo F_1, comprobando que la nueva hamiltoniana es nula.

6.

7. En el instante $t_0 = 0$ un gran número de partículas de masa m ocupan el segmento del eje x comprendido entre $x_0 = 0$ y $x = x_0 + \Delta x$, con momentos $p_x \in [p_0, p_0 + \Delta p]$. Representar en el espacio fásico x, p_x la región ocupada por las partículas. Si éstas se mueven libremente, representar en el espacio fásico la región ocupada en un instante $t_1 > m\, \Delta x/p_0$. Obtén el área en el espacio fásico ocupado por las partículas en los instantes t_0 y t_1, comprobando que son iguales. Interpreta el resultado.

1. En un sistema hamiltoniano con un grado de libertad se realiza una *transformación de escala* $Q = \alpha\, q$, $P = \beta\, p$, donde α y β son constantes. Obtener las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables y la nueva hamiltoniana. ¿Y si además cambiamos t por $T = \gamma\, t$, con γ constante?

$Q = \alpha q \qquad P = \beta p$

Busco una K tal que: $\begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial P} = \dot{Q} = \alpha \dot{q} \\ \dfrac{\partial K}{\partial Q} = -\dot{P} = -\beta \dot{p} \end{cases}$

$$\bar{H}(Q, P, t) = H\left(\frac{Q}{\alpha}, \frac{P}{\beta}, t\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P}\beta = \dot{q} = \frac{\dot{Q}}{\alpha}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q}\alpha = -\dot{p} = -\frac{\dot{P}}{\beta}$$

$$\begin{cases} \dot{Q} = \alpha \cdot \beta \cdot \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial P} = \dfrac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{P} = -\beta\alpha \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial q} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} \end{cases} \Rightarrow K = \alpha\beta \bar{H}(P, Q)$$

2. Probar que la transformación $(q,p) \longrightarrow (Q,P)$ dada por $Q = q\,t$, $P = p\,t$ no es canónica, usando como hamiltoniana, H, la correspondiente al oscilador armónico.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$ hamiltoniano oscilador armónico

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \qquad q = \frac{Q}{t} \qquad p = \frac{P}{t}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial k}{\partial Q}$$

$$\dot{Q} = q + \dot{q}t \qquad \dot{P} = p + \dot{p}t$$

donde
$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ \dot{p} = \dfrac{-\partial H}{\partial q} = kq \end{cases}$$

$$\dot{Q} = \frac{Q}{t} + \frac{p}{m} = \frac{Q}{t} + \frac{P}{tm} = \frac{\partial K}{\partial P}$$

$$\dot{P} = \frac{P}{t} + kqt = \frac{P}{t} + KQ = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial Q \partial P} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial P \partial Q} = \frac{-1}{t}$$

$\Rightarrow$ no trans. canónica
no existe K que cumpla ambas ecuaciones

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t^2 \neq 1.$$

3. Probar que la transformación afín

$$Q = a_{11}\, q + a_{12}\, p$$
$$P = a_{21}\, q + a_{22}\, p,$$

donde $\det(a_{ij})=1$, es una transformación canónica de valencia unidad. ¿Bajo qué condiciones podemos encontrar funciones generatrices de los diferentes tipos? Obtenerlas en los casos posibles. Comprobar que podemos cambiar el tipo de función generatriz mediante la transformada de Legendre.

Para ver que es una transformación canónica:

$$[Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\cdot\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial p} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\, a_{12} =$$

$$= \det(a_{ij}) = 1$$ como es $=1$ es una transformación canónica

TIPO 1

$$F_1 = F_1(q,Q,t) = p\,dq - P\,dQ + (K-H)\,dt$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial q} = p = \dfrac{Q - a_{11} q}{a_{12}} \Rightarrow F_1 = \displaystyle\int \frac{Q - a_{11} q}{a_{12}}\, dq = \frac{Qq}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{q^2}{2} + f(Q) \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial Q} = -P = -a_{21} q - a_{22} p = \dfrac{q}{a_{12}} + \dfrac{\partial f(Q)}{\partial Q} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(Q)}{\partial Q} = -a_{21} q - a_{22} p - \frac{q}{a_{12}}$$

$$f(Q) = -a_{21} qQ - a_{22} pQ - \frac{qQ}{a_{12}}$$

$$\Rightarrow F_1 = \cancel{\frac{Qq}{a_{12}}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{q^2}{2} - a_{21} qQ - a_{22} pQ - \cancel{\frac{qQ}{a_{12}}}$$

$$= -\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{q^2}{2} - a_{21} qQ - a_{22} pQ$$

Condición tipo 1: $\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j \partial Q_i}\right) \neq 0$

$Q_j = Q_i = Q$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial F_1}{\partial Q}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(-P\right) = -a_{21}$$

4. Demostrar que las siguientes transformaciones son canónicas y obtener, si es posible, funciones generatrices de tipo F_1 y F_2.

(a)

$$\begin{aligned} Q &= q^2/2 + (p/q)^2 \\ P &= p/q \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Q &= q^2 + p \\ P &= -q \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} Q &= q\,t \\ P &= p/t - 3q^2 t^3 \end{aligned}$$

Son transformaciones canónicas $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = 1$

a) $$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \begin{vmatrix} q - 2p^2/q^3 & \frac{2p}{q^2} \\ -\frac{p}{q^2} & \frac{1}{q} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{q}\left(q - \frac{2p^2}{q^3}\right) + \frac{2p}{q^2}\frac{p}{q^2} = 1 - \frac{2p^2}{q^4} + \frac{2p^2}{q^4} = 1$$

TIPO 1:

condiciones: $\det\left(\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q}\right) \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial F_1}{\partial Q}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(-P\right) = +\frac{p}{q^2} \neq 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P = \frac{-p}{q} \Rightarrow F_1 = \int \frac{-p}{q}\, dQ = \frac{-p}{q} Q + f(q)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p = \frac{p}{q^2} Q + \frac{\partial f(q)}{\partial q} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial q} = p - \frac{p}{q^2} Q$$

$$f(q) = pq + \frac{p}{q} Q$$

$$F_1 = -\frac{P}{q} Q + pq + \frac{P}{q} Q = pq$$

Para hallar F_2: Transf. Legendre $(Q \to P)$

$$F_2 = Q \frac{\partial F_1}{\partial Q} - F_1 = -QP - F_1 \Rightarrow F_2 = QP + F_1$$

$$F_2 = \left(\frac{q^2}{2} + \left(\frac{P}{q}\right)^2 \right) \frac{P}{q} + pq = \frac{qP}{2} + \frac{P^3}{q^3} + pq = \frac{3}{2} pq + \frac{P^3}{q^3}$$

(b) $Q = q^2 + p$

$P = -q$

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial F_1}{\partial Q}\right) = \frac{\partial}{\partial q}(-P) = 1 \neq 0$$

$$\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2q \end{vmatrix} = 1 \checkmark$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P = q \Rightarrow F_1 = \int q \, dQ = qQ + f(q)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p = Q + \frac{\partial f}{\partial q} \Rightarrow f(q) = \int (p - Q)\, dq = pq - Qq$$

$$\boxed{F_1 = pq}$$

5. Para un oscilador armónico unidimensional la posición x y el momento p en función del tiempo vienen dados por

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + (p_0/m\omega)\sin(\omega t)$$
$$p(t) = -m\,\omega\, x_0 \sin(\omega t) + p_0 \cos(\omega t)$$

donde x_0 y p_0 son, respectivamente, la posición y el momento en el instante $t = 0$. Demostrar que la transformación $(x, p) \longrightarrow (x_0, p_0)$ es canónica para cualquier t. Obtener la función generatriz de tipo F_1, comprobando que la nueva hamiltoniana es nula.

$$[x, p] = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\partial p}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial p_0} \right) = \cos^2(\omega t) + \frac{m\omega}{m\omega} \text{sen}^2(\omega t) =$$

$$= \cos^2 \omega t + \text{sen}^2 \omega t = 1 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial F_1}{x} = p = -m\omega x_0 \text{sen}(\omega t) + p_0 \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_0} = -p_0$$

$$\Rightarrow F_1 = \int -m\omega x_0 \text{sen}(\omega t) + p_0 \cos(\omega t) \, dx =$$

$$= -m\omega x_0 x \,\text{sen}\, \omega t + p_0 x \cos(\omega t) + f(x_0)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_0} = -p_0 = -m\omega x \,\text{sen}(\omega t) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$$

$$f(x_0) = \int m\omega x \,\text{sen}(\omega t) + p_0 - p_0 \, dx = m\omega \frac{x^2}{2} \text{sen}(\omega t) - p_0 x$$

$$F_1 = -m\omega x_0 x \,\text{sen}(\omega t) + m\omega \frac{x^2}{2} \text{sen}(\omega t) + p_0 x \cos \omega t - p_0 x$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = K - H = -H \iff K = 0$$