Grado en Física. Mecánica I. Problemas Tema 2: Movimiento en un campo central.

Curso 2021-2022

1. Demostrar que si una partícula, sometida a la acción de una fuerza central atractiva, describe una elipse con foco el centro de fuerzas, la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de fuerzas. La ecuación de la elipse en coordenadas polares con foco el origen es
$$r = \frac{p}{1 + e\, \cos\theta}.$$

2. Considera una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central. Si la órbita descrita por la partícula tiene como ecuación
$$r = \frac{p}{1 + e \cos[(1-\varepsilon)\theta]},$$
obtén la dependencia de la fuerza con la distancia. Analiza el resultado y obtén el ángulo de avance entre dos pericentros consecutivos en el caso en que $\varepsilon \ll 1$.

3. Demostrar que si una partícula, sometida a la acción de una fuerza central atractiva dirigida hacia un punto de su órbita, describe una circunferencia, la fuerza es inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia al centro de fuerzas.

4. Una partícula de masa m está sometida al campo de fuerzas $\vec{F} = -\frac{k}{r^4}\vec{r}$, $k > 0$. Se encuentra inicialmente a una distancia b del centro de fuerzas, con una velocidad $v_0^2 = \frac{k}{mb^2}$, formando un ángulo α con la dirección radial. a) Demuestra que la partícula caerá sobre el centro de fuerzas o se alejará indefinidamente según que $\alpha > \pi/2$ o $\alpha < \pi/2$. b) Si $\alpha > \pi/2$, ¿qué tiempo tardará en caer sobre el centro? c) Determina la ecuación de la trayectoria.

5. Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerzas central de magnitud $m\,c/r^3$ (c constante) y repulsivo. A una distancia muy grande del centro de fuerzas la partícula se mueve con una velocidad de módulo v_0. Si la partícula no fuera deflectada, pasaría a una distancia b del centro. ¿Cuál es, en el movimiento real de la partícula, la mínima distancia al centro de fuerzas?

6. Una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza central que proviene de una energía potencial de la forma $\mathbf{F} = -\frac{K}{r^n}\,\mathbf{e}_r$. ¿Para qué rango de valores de K y n existen órbitas circulares estables?.

7. Una partícula de masa m y momento angular L se mueve bajo la acción de una fuerza central $F = k\,r$. Encuentra el radio de las órbitas circulares. Encuentra el perído de pequeñas oscilaciones alrededor de la órbita cuando esa ŕbita es ligeramente perturbada. ¿Es la órbita perturbada abierta o cerrada?.

8. Una planeta de masa m y momento angular L se mueve en una órbita circular alrededor del sol. Encuentra el perído de pequeñas oscilaciones alrededor de la órbita cuando esa oŕbita es ligeramente perturbada. ¿Es la órbita perturbada abierta o cerrada?.

9. Un sistema de estrellas binario consiste de dos estrellas de masas m_1 y m_2 orbitando una en torno a la otra. Supón que la órbita de cada estrella es un círculo de radio $R_{1,2}$ en torno al centro de masa. Muestra que el período del movimiento orbital es $T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\,(r_1 + r_2)^3$.

10. Dos astronautas están en la misma órbita circular de radio R en torno a la tierra, en puntos opuestos de la misma. El astronauta A tiene un objeto que quiere hacer llegar al astronauta B. ¿Cómo puede lanzarlo para que le llegue?. ¿Cuánto tardará en llegar a B en términos del período de la órbita? ¿Cómo es la órbita que describe el objeto?.

11. En un sistema solar hipotético los planetas se mueven en órbitas circulares y la razún de sus períodos es como la razón de sus radios al cuadrado. ¿Cómo es la fuerza central en este caso?.

12. Se arroja una pelota con una velocidad paralela a la superficie de la tierra y a una distancia h de la misma. Describe la trayectoria que sigue la pelota antes de caer al piso.

13. A partir de la igualdad
$$\vec{A} \cdot \vec{r} = |\vec{A}|\, r\ \cos\theta,$$
donde $\vec{A}$ es el vector de Runge-Lenz, demuestra que las órbitas son cónicas. Relaciona el módulo del vector de Runge-Lenz con la excentricidad de la órbita.

14. Demostrar que la velocidad areolar de una partícula, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$, en el problema de Kepler (ritmo al cual el vector posición de la partícula barre áreas) es constante (ley de las áreas) e igual a
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell}{2m},$$
donde m es la masa de la partícula y ℓ es su momento angular.

15. Demostrar que para óbitas elípticas en el problema de Kepler el semieje mayor de la órbita es
$$a = -\frac{\alpha}{2E},$$
donde $\alpha = GMm$ y E es la energía de la partícula.

16. Haciendo uso de la ley de las áreas y de que el área de una elipse es πab (a y b los semiejes), demostrar que para óbitas elípticas en el problema de Kepler se cumple la tercera ley de Kepler
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2},$$
donde a es el semieje mayor de la elipse y T es el periodo de la órbita.

17. Se desea poner un satélite de masa m en órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de h sobre la superficie terrestre. Para ello se traslada mediante un cohete a esta altura y se le comunica una velcidad. a) Obtener esta velocidad. b) Si le hubieramos comunicado una velocidad un 20% mayor en la misma dirección, ¿qué tipo de órbita seguiría? c) ¿Y si hubiera sido un 20% menor? d) ¿En cuánto deberíamos aumentar la velocidad correspondiente a la órbita circular para que realizara una órbita parabólica? ¿En cuánto deberíamos disminuir la velocidad correspondiente a la órbita circular para que realizara una órbita que en el punto más cercano (perigeo) rozara la superficie de la Tierra?

18. Un haz de meteoritos se dirige hacia la Tierra. Cuando están a una distancia muy grande de ésta tienen todos la misma velocidad conocida v_0. Se llama parámetro de impacto a la distamcia entre la partícula incidente y la recta que pasa por el centro de fuerzas y es paralela a la velocidad inicial de la partícula. Demuestra que existe un valor del parámetro de impacto b_c tal que todo meteorito con parámetro de impacto $b < b_c$ caerá sobre la superficie de la Tierra. Obtén la sección del haz que incidirá sobre la Tierra (sección eficaz) en función de v_0.

19. Obtener el ángulo de desviación que experimentaría una partícula lanzada desde muy lejos del Sol con una velocidad v_0 de manera que pasa rozando el limbo solar. Suponer que $v_0 \gg \sqrt{GM_\odot/R_\odot}$.

20. Dos partículas, que interaccionan bajo la fuerza de la gravedad y de masas m_1 y m_2 respectivamente, están separadas una distancia d. Se le comunica una velocidad v a la primera partícula en dirección perpendicular al segmento que las une. Obtener, en función de v, d y las masas, las características de las órbitas (excentricidad, parámetro), tanto la relativa como las órbitas de cada partícula respecto al sistema centro de masas. ¿Qué debe valer v para que las órbitas sean circulares?