T.D. 1 : Espacio Euclídeo n-dimensional.

Ejercicio 1

Si $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ probar que :

$$\max\{|x_i| : i = 1, ..., n\} \leq \|\mathbf{x}\| \leq |x_1| + ... + |x_n| \leq n.\max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}.$$

¿Qué interpretación geométrica se puede dar al resultado anterior en el caso $n = 2$?

Ejercicio 2

Probar que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que :

$$|\, \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \,| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Ejercicio 3

Si $\mathbf{y} \in E(\mathbf{x}, \delta)$ encontrar δ' de modo que $E(\mathbf{y}, \delta') \subseteq E(\mathbf{x}, \delta)$.

Ejercicio 4

Se denomina **distancia** entre dos puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ al número real

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Probar las siguientes propriedades :

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si, y sólo si, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
4. $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.
5. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z})$
6. $d(\mathbf{tx}, \mathbf{ty}) = |t| d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5

Sean x, y, z números reales tales que $2x + 3y + 7z = 14$. Determinar el mínimo valor de $w = x^2 + y^2 + z^2$.

Ejercicio 6

1. Sean x, y, z números reales tales que $4x^2 + 5y^2 + 9z^2 = 100$. Determinar el máximo valor de $v = 2x + \sqrt{5}y + 3z$.
2. Sean $x, y, z > 0$ y $x + y + z = 3$. Determinar el mínimo absoluto de

$$\sigma = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}.$$

Ejercicio 7

Probar que :

1. $E(\mathbf{a}, \delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta\}$ es un abierto.
2. $\overline{E}(\mathbf{a}, \delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta\}$ es un cerrado.
3. $S(\mathbf{a}, \delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \delta\}$ es la frontera de $\overline{E}(\mathbf{a}, \delta)$ y de $E(\mathbf{a}, \delta)$, y que, por tanto, es un cerrado.

Ejercicio 8

Hallar $\text{int}(A), \text{ext}(A)$ y $\text{fr}(A)$ del conjunto $A = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, indicando si es abierto o cerrado.

Ejercicio 9

Encontrar una sucesión de abiertos, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, decreciente : $A_{n+1} \subseteq A_n$, tal que $C = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ sea un cerrado.

Ejercicio 10

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Se define

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}.$$

Probar que :

1. $A + B = \cup_{\mathbf{a}\in A}(\{\mathbf{a}\} + B)$.
2. Si B es abierto, entonces $\{\mathbf{a}\} + B$ también lo es.
3. Si B es abierto, entonces $A + B$ también lo es.

Ejercicio 11

Probar que los siguientes conjuntos son compactos :

1. $\overline{E}(\mathbf{a}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta\}$.
2. $S(\mathbf{a}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \delta\}$.

Ejercicio 12

Se dice que un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si es vacío o si contiene a todos los segmentos cuyos extremos están en S, es decir, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces $t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y} \in S$.
Probar que :

1. La intersección finita o infinita de convexos es otro convexo.
2. ¿La unión de dos convexos es, también, otro convexo? Justificar la respuesta.