TEMA 2. TAMAÑO Y FORMA NUCLEAR

¿Qué queremos decir con "tamaño"?

Para objetos macroscópicos, todos comprendemos lo que quiere decir. En el caso microscópico, no está tan claro.

Supongamos que podemos resolver la ec. de Schrödinger para un e^- en un átomo. Entonces, determinando $\Psi(\vec{r})$ (del e^-), podemos encontrar la densidad de probabilidad, $P(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|^2$. De esta forma, el tamaño atómico es aquella distancia desde el núcleo más allá de la cual $P(\vec{r}) \to 0$.

Con más precisión, definimos el radio atómico, R, como

$$R \equiv \int r\,|\Psi(\vec{r})|^2\, d^3\vec{r}$$

(valor esperado de la coord. radial de Ψ).

Como ejemplo (único resoluble de manera exacta!) tomemos el átomo de hidrógeno:

$$\Psi_{g.s.}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

a_0 (radio de Bohr) $= 5.292 \cdot 10^{-11}$ m.

Resulta que $\quad R = \frac{3}{2} a_0$

Además $\quad P(\vec{r})\,(r \lesssim R) = 58\%$

$\quad P(\vec{r})\,(r \lesssim 2R) = 94\%$

Núcleo $\equiv$ nucleones → protones (+)
↳ electrones (−).

↳ Su tamaño se definiría como el radio atómico pero usando las Ψ_s de ambos nucleones.

↳ También hay un "radio de carga" que se calcula usando únicamente $\Psi_{\text{protón}}$.

(Sería una medida de encontrar un protón y, por lo tanto, una medida del rango sobre el cual la densidad eléctrica de carga es apreciable).

$R_{nuclear}$ depende del nº atómico, A, que es el número total de nucleones, $A = Z + N$.

En primera aproximación, Volumen $\sim A$, luego

$R \sim A^{1/3}$ o bien $\boxed{R = r_0 A^{1/3}}$ (núcleo esférico)

(*)

Para el radio de carga, funciona bien con $r_0 = 1.22$ fm. En realidad se ajusta mejor a

$$R = r_A \left(1 + \beta \frac{Z}{A}\right) A^{1/3}$$

$r_A = 0.718$ fm

$\beta = 0.556$

(hay mejores y más sofisticados ajustes)

Usaremos (*) como una aproximación válida.

Limitaciones del scattering Rutherford

- Recordemos que una de las suposiciones era núcleo puntual

- Si E part. incidente ↑↑, penetrará la barrera Coulombiana y sondeará el tamaño nuclear.

- Es difícil hacerlo con αs, así que usaremos electrones. ($Z_\alpha = 2$, $Z_e = 1$ en la fórmula de Ruth.).

Para un proyectil de masa m, spin 1/2 y cargado, se obtiene la sección eficaz diferencial de Mott:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{(Mott)} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{p^2}\right)^2 \frac{1}{4\sin^4(\theta/2)} \left(m^2 + \frac{p^2}{c^2}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

no relativista

Lo ultrarelativista (si m = 0)

¿Cómo tendremos en cuenta la distribución de carga nuclear?

De la anterior figura se deduce

$$q = 2p \sin(\theta/2)$$

Para entender $F(q)$ necesitamos apelar a conceptos cuánticos:

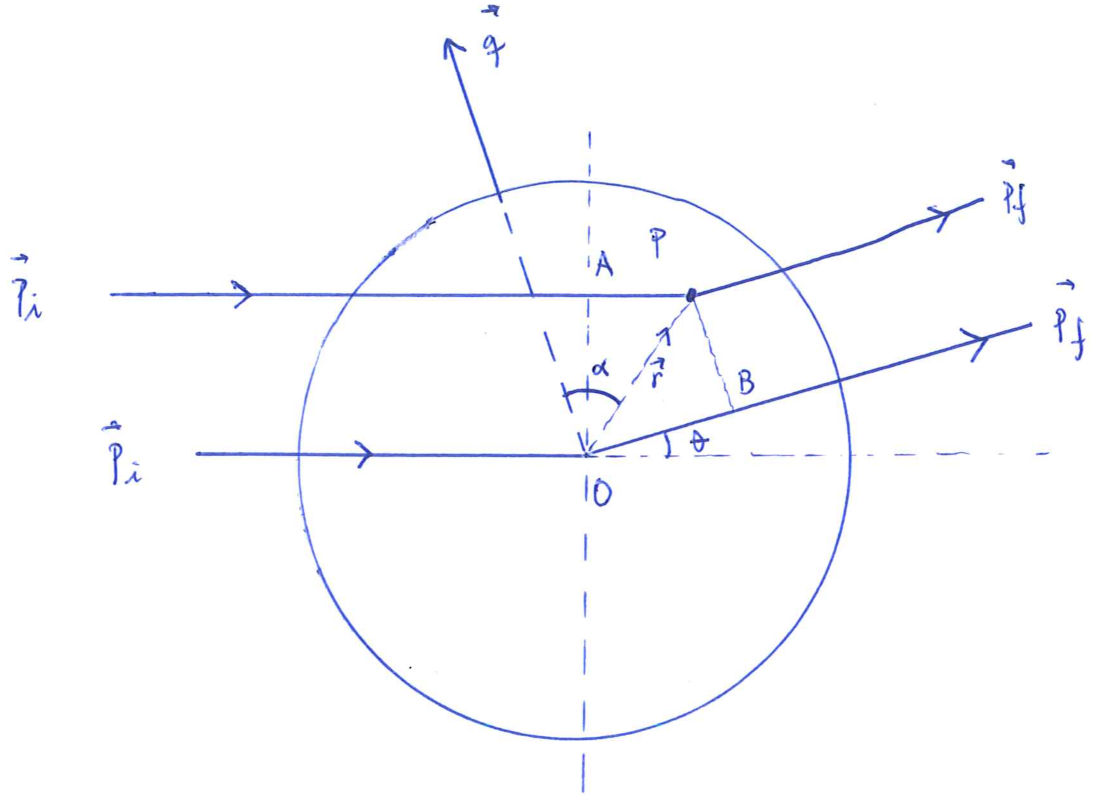
$$p_e \longrightarrow \lambda_e = \lambda = h/p$$

$p_e = p$

y, además, el mento $\vec{p}$ se relaciona con el vector de onda, $\vec{k}$, mediante $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, con

$k = 2\pi/\lambda$ y su dirección es la de propagación de la onda asociada.

- Cuando $\lambda \approx R_{nucleo} \Rightarrow$ patrón de difracción y $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ tiene máximos y mínimos dependiendo de fase-desfase de ondas.



Comparemos la fase de la onda que pasa por el centro del núcleo (O), con la que pasa por P.

En el frente de onda OA, ambas ondas están en fase.

En el frente de onda difractado, PB, tenemos:

- la onda que pasa a través de O ha viajado una distancia $OB \equiv \hat{p}_f \cdot \vec{r}$ (componente de $\vec{p}_f$ en dirección de $\vec{r}$). Entre el origen O y el punto B, la fase de la onda ha incrementado en

$$\Delta\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{p}_f \cdot \vec{r} = \frac{\vec{p}_f \cdot \vec{r}}{\hbar}$$

$\hookrightarrow \vec{p} = \hbar\vec{k}$

- La onda que pasa a través de P ha viajado la distancia $AP = \hat{p}_i \cdot \vec{r}$ y el incremento de su fase es

$$\Delta\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{p}_i \cdot \vec{r} = \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{r}}{\hbar}$$

La diferencia de fase es

$$\Delta\phi = \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i)\cdot\vec{r}}{\hbar} = \frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}$$

- La amplitud de la componente de la onda difractada desde P es proporcional a la densidad de carga en P $\rho_p(\vec{r})$
  $\hookrightarrow$ (densidad de protones en el núcleo)

- La onda total difractada (a un ángulo de scattering θ) es la suma de las ondas difractadas para cada punto, cada una con su fase relativa, $e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}$. De esta manera, sumando sobre todos los puntos obtenemos el factor de forma eléctrico:

$$\boxed{F(q^2) = \frac{1}{Ze}\int d^3\vec{r}\,\rho_q(\vec{r})\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}}$$

(es la TF de la distribución de carga).

Si $\vec{r} = (r, \alpha, \phi)$ en esféricas y

$d^3\vec{r} = r^2 \sin\alpha\, dr\, d\alpha\, d\phi$

y tomando el eje polar en la dirección de $\vec{q}$, queda $\vec{q}\cdot\vec{r} = qr\cos\alpha$ y, finalmente, en simetría esférica:

$$\boxed{F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Zeq}\int r\rho_p(r)\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)dr}$$

→ La idea es medir $d\sigma/d\Omega$ y sacar $\rho_p(r)$

Ejemplos: (hacerlos con detalle)

1. Núcleo puntual (como en scattering Rutherford o Mott)

$$\rho_p(\vec{r}) = Ze\,\delta^{(3)}(\vec{r})$$

Se obtiene $F(q^2)=1$, como es de esperar.

2. Esfera impenetrable de radio R

$$\rho_p(r) = \frac{Ze}{4\pi R^2}\,\delta(r-R)$$

Se obtiene $$F(q^2) = \frac{\hbar}{qR}\sin(qR/\hbar)$$

3. Unif. cargada esfera constante y cero fuera

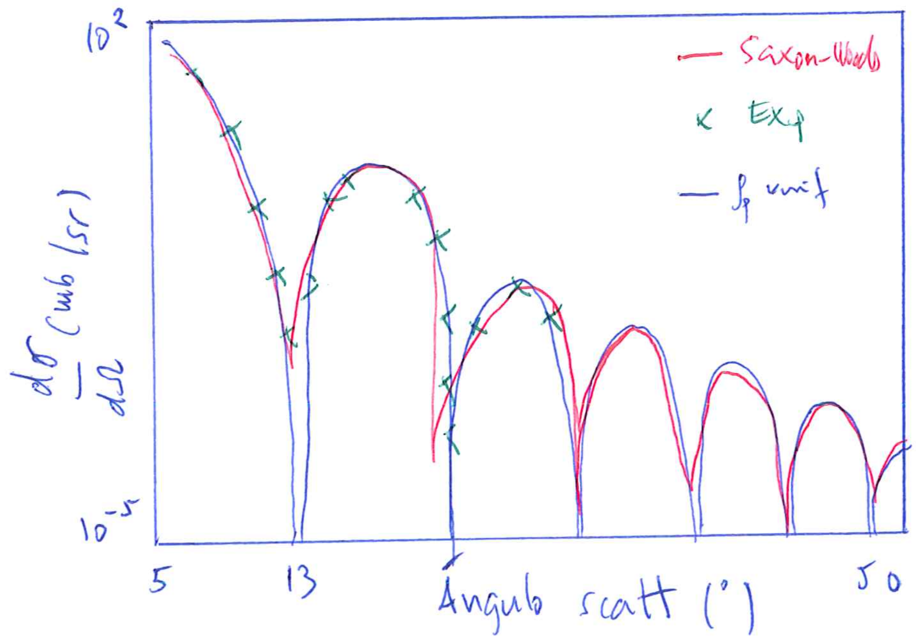
$$\rho_p(r) = \begin{cases} \dfrac{3Ze}{4\pi R^3} & r<R \\ 0 & r>R \end{cases}$$

Integrando por partes:

$$F(q^2) = 3\left(\frac{\hbar}{qR}\right)^3\left[\sin\left(\frac{qR}{\hbar}\right) - \frac{qR}{\hbar}\cos\left(\frac{qR}{\hbar}\right)\right]$$

Si sustituimos en

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{Mott} |F(q)|^2$$ sale algo como



× experimento $e + {}^{40}_{20}Ca$ (1040 MeV)

× no se anula nunca porque $\rho(r)$ no es realista.

Un estimado razonable del R nuclear puede sacarse así:

El primer mínimo del patrón de difracción ocurre en $\frac{qR}{\hbar} \simeq \pi$

como $q = 2p \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

$$R \simeq \frac{\pi\hbar}{2p\sin(\theta_1/2)}$$

$\theta_1 \simeq 10°$

$p = 1040\ \mathrm{MeV}/c$ (ultrarelativista)

$\hbar c = 197\ \mathrm{MeV\ fm}$

$\Rightarrow R({}^{40}_{20}\mathrm{Ca}) \simeq 3.4\ \mathrm{fm}$. (bastante bien).

La distribución de Saxon-Woods:

Un modelo más realista para la distribución de carga es

radio nuclear

profundidad superficie

$$\rho_p(r) = \rho_0\, f_{R,\delta}(r)$$

$$f_{a,b}(r) = \frac{1}{1+e^{(r-a)/b}} \quad \text{(potencial de Saxon-Woods)}$$

funciona muy bien con $A > 40$ con

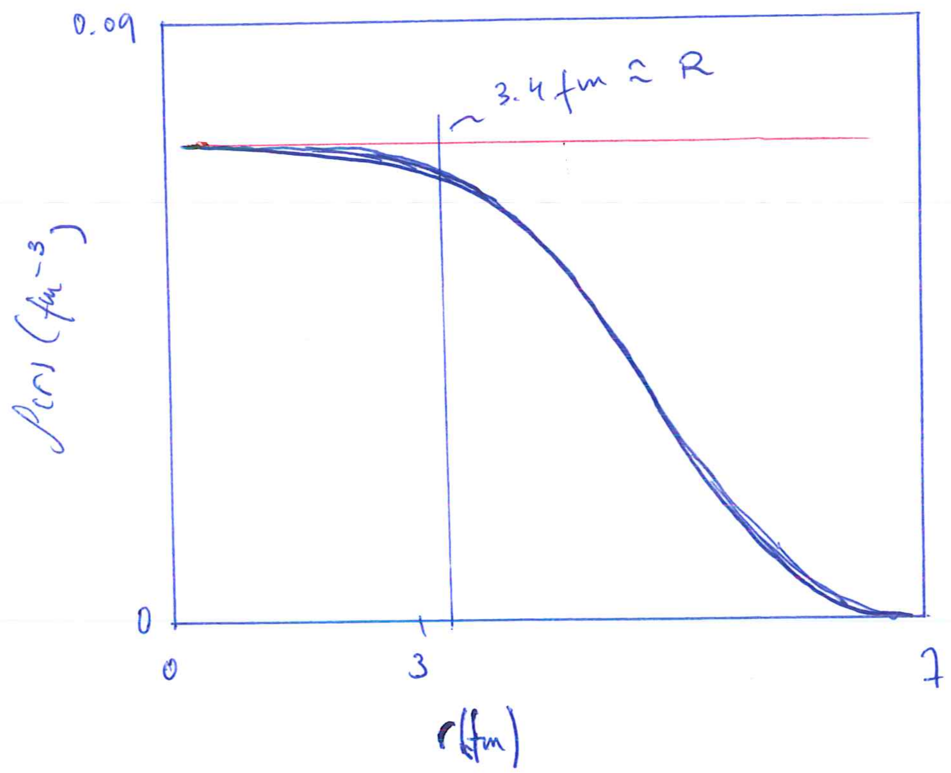
$R = r_A \left(1 + \beta \frac{Z}{A}\right) A^{1/3}$ y $\delta \in [0.4, 0.5]$ fm.

ρ_0 tal que la carga total sea

$$Ze = 4\pi \rho_0 \int r^2 dr \frac{1}{1 + e^{(r-R)/\delta}}$$

[ver figura anterior]

la forma de $\rho(r)$ es del tipo



(sacar $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ con Woods-saxon) ejercicio

¿Qué ocurre si el núcleo no es esférico?

Momentos eléctricos cuadrupolares

En simetría esférica,

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle \quad , \quad \text{con}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{Ze} \int x^2 \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

Si no hay simetría esférica, aparece un momento cuadrupolar eléctrico, (definido respecto al eje Z)

$$Q = 3\langle z^2 \rangle - \langle r^2 \rangle = \int (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

con $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle$

Un ejemplo: en coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ):

$$\rho(\vec{r}) = a(r) + b(r)|\cos\theta|$$

como $z = r\cos\theta$, tenemos

$$\langle z^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, r^2 \cos^2\theta \left[a(r) + b(r) |\cos\theta| \right]$$

$$= 4\pi \int dr \, r^4 \left[\frac{1}{3} a(r) + \frac{1}{4} b(r) \right]$$

Por otro lado, $x = r \sin\theta \cos\phi$, luego

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi \left[a(r) + b(r) |\cos\theta| \right]$$

$$= 4\pi \int dr \, r^4 \left[\frac{1}{3} a(r) + \frac{1}{8} b(r) \right],$$

luego $Q = \pi \int dr \, r^4 \, b(r)$

$[Q/e]$ = área (mb normalmente)

p. ej.: