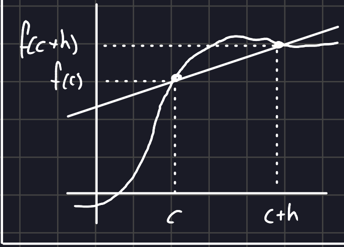
Definición Derivada

Sea I un intervalo abierto, $c\in I$, $f: I\to\mathbb{R}$. f es derivable en c si $\exists \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\text{cociente incremental}} = f'(c)$

$(c, f(c))$; $(c+h, f(c+h))$



$y = f(c) + m(x-c)$ con $m = f'(c)$

$f'(c) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

Llamaremos derivada lateral a $f'(a^+)$ ó $f'(b^-)$

$$\begin{cases} f'(a^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ f'(b^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \end{cases}$$

$$\left[\alpha(h) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h} - f(c) \iff \lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0\right] \iff f(c+h) = \underbrace{f(c)+f'(c)h}_{\text{ec. recta tang.}} + \underbrace{h\,\alpha(h)}_{\text{error}}$$

f derivable en $c \iff \exists \alpha: I\to\mathbb{R}$ con $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h) = 0$: $f(c+h) = f(c) + \underbrace{f'(c)h}_{mh} + \underbrace{h\,\alpha(h)}_{=o(h)}$ 'o pequeña'

$\iff f(c+h) = f(c) + mh + o(h) \qquad m = f'(c)$

Definición o pequeña

Una función $o: I\to\mathbb{R}$ se dice que es la o pequeña de h en $c\in I$ si $\lim\limits_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0$

Definición diferencial

$f: I\to\mathbb{R}$ es diferenciable en $c\in I$ si existe una aplicación lineal $L: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, llamada diferencial de f en c y denota por $Df(c)$ tal que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)-L(h)}{h} = 0$ aka $f(c+h)-f(c)-L(h) = o(h)$

Corolario

f es derivable en $I^* \iff f$ es diferenciable en I^* $\qquad$ *en $\mathbb{R}$

Álgebra de funciones derivables

Si $f: I\to\mathbb{R}$, $g: I\to\mathbb{R}$, $c\in I$, f y g derivables en I entonces:

1. $f+g$ es derivable en c y $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$
2. $f\cdot g$ es derivable en c y $(f\cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + g'(c)f(c)$
3. f/g es derivable en c y $(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - g'(c)f(c)}{g(c)^2}$

Regla de la cadena

Sea $f_1: I_1\to\mathbb{R}$, $f_2: I_2\to\mathbb{R}$, $f_1(I_1)\subseteq I_2$, $c\in I_1$, f_1 derivable en c y f_2 derivable en $f_1(c)$:

$(f_2\circ f_1)$ es derivable en c y $(f_2\circ f_1)'(c) = f_2'(f_1(c))\,f_1'(c)$

$f(x) = x^x$ en $c>0$

$f(x) = x^x = e^{x\ln x} = (f_2\circ f_1)(x)$

$\left.\begin{array}{l} f_1 = x\ln x \\ f_2 = e^x \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} f_1'(x) = \log(x) + 1 \\ f_2'(x) = e^x \end{array}\right\} \to f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

Monotonía

- **Puntual**

f creciente en $c \in I$ $\quad (f: I \to \mathbb{R})$ si $\exists \varepsilon > 0: \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ ¡Abierto!

f decreciente en $c \in I$ si $\exists \varepsilon > 0: \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \quad \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

f estrictamente creciente en $c \in I$ si $\exists \varepsilon > 0: \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0 \quad \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

f estrictamente decreciente en $c \in I$ si $\exists \varepsilon > 0: \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0 \quad \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

- **General**

$f: I \to \mathbb{R}$ monótona creciente $\iff$ es creciente en cada $c \in I$ ídem con decreciente

Extremos Relativos

f presenta en $c \in I$ un máximo relativo si $\exists \varepsilon > 0$ tq $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap I$

f presenta en $c \in I$ un mínimo relativo si $\exists \varepsilon > 0$ tq $f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap I$

Idem con máximo/mínimo estricto o absoluto con $>$ y $<$ respectivamente

Proposición

$f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$, I intervalo abierto, f derivable en c

1. $f'(c) \geq 0 \iff f$ es estricta. creciente en c $(f'(c) > 0 \Rightarrow f$ estricta. creciente en $c)$
2. $f'(c) \leq 0 \iff f$ es estricta. decreciente en c $\shortparallel$
3. Si f tiene un extremo relativo en $c \Longrightarrow f'(c) = 0$
   ¿$\Longleftarrow$?

$x \to c$

$f'(c) > 0$

Demostración

1. f derivable en $c \Rightarrow f'(c) = f(c) + f'(c)(x-c) - o(x-c) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) + \dfrac{o(x-c)}{x-c} > 0$ ¿en $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$? ?

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x\sin\frac{1}{x} + 2x^2\cos\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 1 + 4x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + 2h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(1 + 2h\sin\left(\tfrac{1}{h}\right)\right) = 1 \Longrightarrow$$

f es estrictamente creciente en cero y además f no es creciente en $(-\varepsilon, \varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$

- ¿Qué tipos de discontinuidad puede tener la derivada de una función?
- Sea $f [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ Calcula los máximos y mínimos de f

Teorema de Rolle

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in [a,b] : f'(c) = 0$

Teorema del valor medio de Cauchy

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). $\exists c \in (a,b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$

Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). $\exists c \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Corolario

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b), entonces:

1. $f'(x) = 0$ en $[a,b] \Rightarrow f$ es constante en (a,b)
2. $f'(x) \geq 0$ en $[a,b] \Rightarrow f$ es creciente en (a,b)
3. $f'(x) \leq 0$ en $[a,b] \Rightarrow f$ es decreciente en (a,b)
4. $f'(x) > 0$ en $(a,b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a,b]$
5. $f'(x) < 0$ en $(a,b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a,b]$

Corolario T^{ma} de los incrementos finitos

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, derivable en (a,b)

Si $|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in (a,b)$ entonces $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \quad \forall x, y \in [a,b]$

Corolario

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b)

Si $f'(c) = 0$ y $\exists \delta > 0: f'(x) > 0$ si $x \in (c-\delta, c) \cap (a,b)$ y $f'(x) \leq 0$ si $x \in (c, c+\delta) \cap (a,b) \Rightarrow f$ tiene máximo relativo en c

El desarrollo de orden n-1 de f' se puede obtener derivando el desarrollo de orden n de f y bajando una unidad el orden del resto de Landau

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$
$$\hookrightarrow f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1})$$

Condición suficiente de extremo

$f: I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I, $x_0 \in I$, existe la derivada n-1 de f en I, y la derivada n-ésima de f en x_0 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

a) Si n es par en x_0 hay un máximo relativo si $f^{(n)}(x_0) < 0$ o un mínimo relativo si $f^{(n)}(x_0) > 0$

b) Si n es impar, no hay extremo relativo en x_0

ejemplo: extremos relativos de $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos(x)$

$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin(x)$ $\qquad x_0 = 0$

$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos(x)$ $\qquad f''(x_0) = 0$

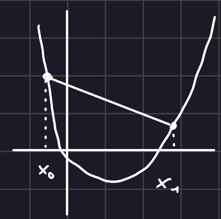
$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin(x)$ $\qquad f'''(x_0) = 0$

$f''''(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos(x)$ $\qquad f^{IV}(x_0) = 4 > 0 \Rightarrow$ min rel.

Convexidad y concavidad

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo I se dice:

1. f es convexa en I si $\forall x_0, x_1 \in I$ $\forall t \in [0,1]$ se cumple $\underbrace{f((1-t)x_0 + tx_1)}_{\text{puntos en } [x_0,x_1]} \leq \underbrace{(1-t)f(x_0) + tf(x_1)}_{\text{segmento que une } (x_0,f(x_0)) \text{ con } (x_1,f(x_1))}$
2. f es cóncava en I si $\forall x_0, x_1 \in I$ $\forall t \in [0,1]$ se cumple $f((1-t)x_0 + tx_1) \geq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$



1. $f(x) = ax + b$ convexa y cóncava
2. $f(x) = x^2$ convexa
3. $f(x) = |x|$ convexa

Teorema

Si $f: I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo

f convexa en $I \Rightarrow$ f continua en el interior de I

Proposición

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ derivable en un abierto I es equivalente:

- f convexa en I
- Para cada punto de I la gráfica de I está por encima de la recta tangente en ese punto
- f' es creciente
- f derivable 2 veces $\Rightarrow f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$

Definición

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in I$, decimos que

1. f es convexa en x_0 si $\exists \delta > 0: f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{recta tang en } x_0}$ $\quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$
2. f es cóncava en x_0 si $\exists \delta > 0: f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$
3. x_0 es un punto de inflexión si $\exists \delta > 0$: $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\quad x \in (x_0-\delta, x)$
   $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\quad x \in (x, x_0+\delta)$

Proposición

Sea $f: I \to \mathbb{R}$, I intervalo abierto, f derivable en un entorno de x_0 y tal que existe $f''(x_0)$. Entonces:

1. Si $f''(x_0) > 0$ entonces f es convexa en x_0
2. Si $f''(x_0) < 0$ entonces f es cóncava en x_0
3. Si x_0 es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$
4. Si f es n-1 veces derivable en x_0, existe $f^{(n)}(x_0)$ y $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, Entonces:
   a) si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es convexa en x_0
   b) si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava en x_0
   c) si n es impar $\Rightarrow x_0$ es un punto de inflexión

Proposición

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto y derivable:

f es convexa en $I \iff f$ es convexa en cada punto de I

Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y convexa en $(a,b) \Rightarrow f$ es convexa en $[a,b]$ (aplicable a concavidad también)

Ejemplo: $x \log 2 \geq \log(1+x^2)$ $\forall x \in [0,1]$

Sea $f(x) = \log(1+x^2)$ $\quad f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} > 0$ $\forall x \in [0,1)$ en 1 se anula pero comprobándolo en *, la desigualdad se cumple

$\Rightarrow f(x)$ es convexa en $[0,1)$

$f(tx + (1-t)x') \leq tf(x) + (1-t)f(x')$ $\quad \forall x, x' \in I = [0,1]$ $\quad \forall t \in [0,1]$

$\log(1 + (1-t)^2) = f((1-t)) \leq tf(0) + (1-t)f(1) = (1-t)\log 2$ $\quad \forall t \in [0,1]$

si $x = 0$, $x' = 1$

de * $f(z) \leq z f(1) + (1-z) f(0)$ $\forall z \in [0,1]$

$f(1) = \log 2$ $\quad f(0) = \log(1) = 0$

Ejercicio: Comprueba si se cumple la desigualdad de Bernouilli generalizada $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ si $x > -1$, $x \neq 0$, $\alpha > 1$

$h(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x) > 0$ $\quad h'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\left[(1+x)^{\alpha-1} - 1\right] > 0$ si $x > 0$

$h'(x) > 0$ si $-1 < x < 0$ $\quad h'(0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} h \text{ estr. creciente en } (0, +\infty) \\ h \text{ estr. decreciente en } (-\infty, 0) \\ h(0) = 0 \end{array}\right| \quad h(x) > 0 \text{ si } x > -1 \text{ y } x \neq 0$$

Proposición

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b), $\quad x, y \in (a,b)$ y $f'(x) < \eta < f'(y) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = \eta$

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ $\forall y$

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I tal que:

$\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$. Entonces f^{-1} existe, es derivable en $f(I)$ y tenemos: $\forall x \in I$, $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$