$n(x_0) = y_0$ en $[x_0 - \frac{r}{n}, y_0]$

Demostración. Utilizaremos las Poligonales de Euler.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $h_n = \frac{r}{n}$. Dividimos el intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$ en $2n$ intervalos con los extremos en los puntos

$$x_{i,n} = x_0 + ih_n \quad i = -n, -n+1, \ldots -1, , 0, 1, \ldots, n-1, n.$$

Obtenemos la partición de $[x_0 - r, x_0 + r]$

$$x_0 - r = x_{-n,n} < x_{-n+1,n} < \ldots < x_{0,n} = x_0 < \ldots < x_{n-1,n} < x_{n,n} = x_0 + r.$$

Definimos ahora para cada n la poligonal con vértices en estas abcisas, prefijando su valor primero en x_0 y extendiendo sucesivamente su definición a derecha e izquierda de x_0, utilizando como pendientes los valores de f en los extremos de la poligonal ya construida. ES DECIR!!!!
Partimos de $P_n(x_{0,n}) = P_n(x_0) = y_0$. Ahora en

$$[x_{-1,n}, x_{0,n}], \text{ definimos } P_n(x) = P_n(x_{0,n}) + (x - x_{0,n})f(x_{0,n}, P_n(x_{0,n}))$$

y en

$$[x_{0,n}, x_{1,n}], \text{ definimos } P_n(x) = P_n(x_{0,n}) + (x - x_{0,n})f(x_{0,n}, P_n(x_{0,n})),$$

es decir en estos dos intervalos iniciales se define exactamente igual. Ahora en

$$[x_{-2,n}, x_{-1,n}], \text{ definimos } P_n(x) = P_n(x_{-1,n}) + (x - x_{-1,n})f(x_{-1,n}, P_n(x_{-1,n}))$$

y en

$$[x_{1,n}, x_{2,n}], \text{ definimos } P_n(x) = P_n(x_{1,n}) + (x - x_{1,n})f(x_{1,n}, P_n(x_{1,n})).$$

En general para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ se define:

- En $[x_{-i-1,n}, x_{-i,n}]$, como $P_n(x) = P_n(x_{-i,n}) + (x - x_{-i,n})f(x_{-i,n}, P_n(x_{-i,n}))$
- En $[x_{i,n}, x_{i+1,n}]$, como $P_n(x) = P_n(x_{i,n}) + (x - x_{i,n})f(x_{i,n}, P_n(x_{i,n}))$

Nota: Esta sucesión no siempre convergerá a una solución pero sí una subsucesión.
Veamos que la poligonal está siempre bien definida, o sea que todos los puntos que se definen están en D.
Nos centramos en el rectángulo $R \subset D$.
Como $(x_0, P_n(x_0)) = (x_0, y_0) \in R$ podemos definir:

Error

$$\hat{r} = \sup\{\rho \in [0, r] : \forall x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho](x, P_n(x)) \in R\}.$$

Consideremos para cada n la función escalonada y definida para $|x - x_0| < \hat{r}$ por

$$q_n(x) = \begin{cases} f(x_0, y_0) & \text{si} \quad x = x_0 = x_{0,n}, \; x \in [x_{-1,n}, x_{1,n}] \\ f(x_{-i,n}, P_n(x_{-i,n})) & \text{si} \quad x \in [x_{-i-1,n}, x_{-i,n}), \\ f(x_{i,n}, P_n(x_{i,n})) & \text{si} \quad x \in (x_{i,n}, x_{i+1,n}] \end{cases}$$

Son escalones de la misma longitud que los intervalos que marcan la poligonal. Los valores de q_n son los valores de f tomados en el rectángulo R, luego

$$|q_n(x)| \leq M, \quad \text{si } |x - x_0| < \hat{r}.$$

$M = \max\{|f(x,y)| \,/\, (x,y) \in R\}$

Se trata justamente de la derivada a trozos de la poligonal P_n. Como P_n es continua y con derivada continua a trozos, se verifica que

$$P_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} P_n'(t)dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} q_n(t)dt,$$

$* = \left|\int_{x_0}^{x} q_n(t)dt\right| \leq$
$\leq \left|\int_{x_0}^{x} |q_n(t)|dt\right| \leq M\,|x - x_0|$

Lo x los límites de integración

por lo tanto si $|x - x_0| < \hat{r}$ se tiene que $\rightarrow$ la tenemos acotada en abcisas

En ordenadas: $|P_n(x) - y_0| \overset{=*}{\leq} \text{máx}\{|q_n(x)||x - x_0|, |x - x_0| \leq \hat{r}\} \leq M\hat{r} \leq Mr \leq b.$

Si suponemos que $\hat{r} < r$ entonces $|P_n(x) - y_0| < b$ y $\hat{r} < r \leq a$, lo que contradice la propia definición de $\hat{r}$ ya que podriamos considerar un mayor trozo de poligonal contenida en el rectángulo. Así $\hat{r} = r$ y toda la poligonal está contenida en el rectángulo. Para poder aplicar el teorema de ASCOLI-ARCELA probaremos que la sucesión de poligonales está unformemente acotadas en $|x - x_0| < r$ y que es equicontinua.

1. Sabemos que para $|x - x_0| < r$ se tiene que $|P_n(x) - y_0| < b$ por lo que $|P_n(x) < |y_0| + b$, para todo $|x - x_0| < r$ y $\underbrace{\text{para todo } n \geq 1}$

2. Si $x, x' \in [x_0 - r, x_0 + r]$ se tiene

otra vez xq no sé si x>x' ó x'>x

$$|P_n(x) - P_n(x')| = |\int_x^{x'} q_n(t)| \leq M|x - x'|. \quad \delta = \frac{\varepsilon}{M}$$

⟹ CV a una Sucesión Continua

⟹ Equicontinuidad y Unif. acotado

AsÃ por el Teorema de Ascoli-Arcela, existe P_{n_j} una subsucesión de las poligonales que converge uniformemente a una función $y(x)$ continua en $[x_0 - r, x_0 + r]$. Vemoas que esta función es la solución buscada. La prueba la dividiremos en dos partes,

$\exists P_{n_{ij}} \xrightarrow[CV]{} y(x)$ continua en $[x_0 - r, x_0 + r]$

1. $q_{n_j}(x) \overset{\text{converge}}{\rightarrow} f(x, y(x))$ uniformemente en $[x_0 - r, x_0 + r]$

   Por lo tanto $(q_{n_j})_j \rightarrow f(x, y(x))$ uniformemente en $[x_0 - r, x_0 + r]$

2. $y(x)$ verifica la Ecuación diferencial.

   Sabemos que $P_{n_j}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} q_{n_j}(t)dt$, por lo que tomando límites obtenemos

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

y(x) es sol. de (1)