PROBLEMAS TEMA 3: Electrostática en medios materiales

Los vectores se indican usando letra **"negrita"**

1.(RESUELTO EN EL LIBRO WAGNESS, INTENTAR HACERLO SIN MIRAR) Una esfera de radio a está uniformemente polarizada siendo **P** el vector polarización. Encontrar la función densidad superficial de carga ligada y los valores del potencial y del campo eléctrico creado por esta distribución de carga en todos los puntos del eje de la esfera paralelo al vector polarización.

2. Un trozo de material tiene caras paralelas. Una de ellas coincide con el plano XY (z = 0) y la otra es el plano z = t. El material tiene una polarización no uniforme **P** = $P(1+\alpha z)\mathbf{u_z}$, donde P y α son constantes y $\mathbf{u_z}$ es un vector unitario en la dirección z. Encontrar las densidades superficiales en cada plano y la densidad volumétrica de carga ligada en el material. Encontrar la carga ligada total contenida en un cilindro del material de sección A y lados paralelos al eje z y explicar el resultado. RESUELTO EN CLASE

Uso del teorema de Gauss con sistemas que tienen dieléctricos IHL

3. Dentro de una esfera dieléctrica (de permitividad absoluta ε y constate dieléctrica κ_e) centrada en el origen y de radio r = b existe una cavidad esférica, centrada también en el origen y cuyo radio es r = a y que posee una carga libre q. Encontrar los vectores **D** y **E** en todas las regiones, la magnitud del vector polarización y las densidades superficiales de carga en las superficies r = a y r = b. RESUELTO EN CLASE

4. Calcular los campos **D** y **E** y el potencial creados en todo punto por una esfera dieléctrica (de permitividad absoluta ε y constate dieléctrica κ_e) cargada homogéneamente con una densidad de carga ρ (en coulomb/m^3). El radio de la esfera es R y ésta se encuentra rodeada por el vacío. Representar gráficamente la variación de los módulos de los campos y del potencial en función de la distancia al centro de la esfera. RESUELTO EN CLASE

5. Un cable coaxial está formado por un conductor interior cilíndrico hueco de radio a y otro exterior de radio b. Sobre el cilindro interior existe una densidad de carga lineal λ (en coulomb/m) y sobre el exterior una densidad $-\lambda$ (en coulomb/m). El espacio entre ambos conductores está relleno por dos dieléctricos de permitividades ε_1 hasta r = c (b>c>a) y de permitividad ε_2 entre r = c y r = b. Calcular los campos **D** y **E** en todos los puntos. Representar gráficamente los resultados. RESUELTO EN CLASE

6. Un condensador esférico de radios a y b tiene depositadas sobre sus placas cargas +Q y –Q Coulombios. Entre ambos conductores hay dos dieléctricos de permitividades absolutas ε_1 y ε_2 respectivamente, cuya superficie de separación es una esfera de radio c. Calcular el potencial y los campos **E** y **D** en todo punto, así como la capacidad del condensador. RESUELTO EN CLASE

7. Dos placas conductoras, paralelas e indefinidas están separadas a una distancia d. El espacio que hay entre ellas está ocupado por tres capas de dieléctrico, cada una de espesor d/3, cuyas constantes dieléctricas κ_e son 3, 1 y 2 respectivamente. Calcular los campos **D** y **E** cuando se aplica entre las placas una diferencia de potencial de V_0 voltios.

SOLUCIÓN: Suponemos que las placas son perpendiculares a la dirección x, ponemos el origen en una de las placas y suponemos que ésta es la que está conectada a tierra (potencial cero). La otra estará a potencial V_0. Así, las placas estarán cargadas con densidades superficiales de carga libre que llamamos σ1 y σ2, siendo σ1 = - σ2 (para la que está en el origen y la que está en x=d, respectivamente). Al resolver la σ1 debe salir negativa y la otra positiva.

Definimos 3 regiones: Región 1 (0 <x < d/3, donde $\kappa_e = 3$), Región 2 (d/3 <x < 2d/3, donde $\kappa_e = 1$), Región 3 (2d/3 <x < d, donde $\kappa_e = 2$). Los campos en esas zonas valen:

Región 1: $\vec{D} = \sigma 1\, \vec{i}$: $\vec{E} = (\frac{\sigma 1}{3\epsilon_0})\ \vec{i}$; Región 2: $\vec{D} = \sigma 1\, \vec{i}$: $\vec{E} = (\frac{\sigma 1}{\epsilon_0})\ \vec{i}$; Región 3: $\vec{D} = \sigma 1\, \vec{i}$: $\vec{E} = (\frac{\sigma 1}{2\epsilon_0})\ \vec{i}$;

Siendo $\sigma 1 = -\frac{18\, V_0\, \varepsilon_0}{11\, d}$; NÓTESE QUE AUNQUE EN LAS EXPRESIONES DE LOS CAMPOS APARECEN LAS DENSIDADES DE CARGA, ES NECESARIO DETERMINAR ÉSTAS EN FUNCIÓN DE LOS DATOS DEL PROBLEMA (V0, d)

En las zonas exteriores a las placas **D** y **E** son nulos.

8. Dos placas conductoras están separadas una distancia d. El espacio entre las placas se llena con dos dieléctricos, uno al lado del otro, cuyas constantes dieléctricas son κ_1 y κ_2, siendo A_1 y A_2 las áreas de las caras que cada dieléctrico enfrenta a las placas conductoras. Calcular: el potencial y la densidad superficial de carga de cada placa y la capacidad total del condensador resultante.

SOLUCIÓN: De nuevo, suponemos que las placas son perpendiculares al eje x, ponemos una placa en el origen y otra en x = d. Suponemos que se aplica una diferencia de potencial V_0, estando a tierra (potencial cero) la que está en el origen. Aquí, dentro de una placa, hay dos densidades de carga diferentes que llamamos σ1 (en la zona de placa que está en contacto con material de constante κ_1, y cuyo área es A_1) y σ2 (en la zona de placa que está en contacto con material de constante κ_2, y cuyo área es A_2). En la otra placa habrá también dos densidades de carga, iguales a esas pero de signos contrarios.

Región 1: $\vec{D} = \sigma 1\, \vec{i}$: $\vec{E} = (\frac{\sigma 1}{\kappa_1 \epsilon_0})\ \vec{i}$; Región 2: $\vec{D} = \sigma 2\, \vec{i}$: $\vec{E} = (\frac{\sigma 2}{\kappa_2 \epsilon_0})\ \vec{i}$

$\sigma 1 = -\frac{\kappa_1\ V_0\ \varepsilon_0}{d}$ $\sigma 2 = -\frac{\kappa_2\ V_0\ \varepsilon_0}{d}$

En la otra placa las densidades en zonas en contacto con medios 1 y 2 serán iguales a éstas pero con signos contrarios.

La diferencia de potencial entre las placas, estando en zona de material 1 o 2 es la misma. Es decir en este caso el campo E es el mismo en región 1 y en región 2, mientras que lo que es distinto es D (en el problema anterior era al contrario: D era el mismo en las diversas regiones y lo que cambia es E).

La capacidad del condensador será: $C = \frac{\kappa_1\ A_1\, \varepsilon_0}{d} + \frac{\kappa_2\ A_2\, \varepsilon_0}{d}$

Es equivalente a condensadores en paralelo. Cada sumando de la expresión corresponde a la capacidad de la zona de materiales 1 y 2 respectivamente

9. Dos placas conductoras de área A están separadas una distancia d. El espacio entre las placas se llena con dos láminas dieléctricas de espesores d_1 y d_2 y constantes dieléctricas κ_1 y κ_2. Calcular: a) el potencial y la densidad superficial de carga de cada placa y la capacidad total del condensador resultante; b) Si A = 1 m^2, d_1 = 3 mm, d_2 = 1 mm, κ_1 = 5 y κ_2 = 2 y se aplica una diferencia de potencial de 200 V entre las placas, determinar el campo eléctrico y la caída de potencia en cada una de las láminas.

SOLUCIÓN: Este problema es igual al problema 7, pero con dos materiales en lugar de 3. La situación es equivalente a condensadores en serie.

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\kappa_1 \ A \quad \varepsilon_0} + \frac{d}{\kappa_2 \ A \quad \varepsilon_0}$$

Uso de condiciones de contorno en interfases para cálculo de E (o D)

10. La superficie de contacto entre dos medios dieléctricos 1 y 2, cuyas constantes dieléctrica son κ_1 y κ_2, es el plano z = 0 y está libre de carga. El valor del campo eléctrico para z = 0 en el dieléctrico superior ($\kappa = \kappa_1$) es $\mathbf{E_1} = 2\ \mathbf{u_x} - 3\ \mathbf{u_y} + 5\ \mathbf{u_z}$ (V/m). Hallar el vector desplazamiento $\mathbf{D_2}$ en el dieléctrico inferior ($\kappa = \kappa_2$) y los ángulos θ_1 y θ_2 que forma el campo eléctrico con el eje z a ambos lados de la superficie de discontinuidad.

SOLLUCIÓN: Expresado con vectores unitarios **i, j, k,** (equivalentes a **ux, uy, uz**)

$$\overrightarrow{D_2} = 2\,\kappa_2\epsilon_0\,\vec{i} + 3\,\kappa_2\epsilon_0\,\vec{j} \quad + 5\,\kappa_1\epsilon_0\,\vec{k} : \cos\vartheta_1 = {}^{5}\!/_{\sqrt{38}} \qquad ; \cos\vartheta_2 = {}^{5(\kappa_1/\kappa_2)}\!\Big/_{\sqrt{13+25(\kappa_1^2/\kappa_2^2)}}$$

11. El semiespacio x<0 (zona 1) está vacío y el semiespacio x>0 (zona 2) está ocupado por un material dieléctrico de constante dieléctrica κ = 2.4. Si el desplazamiento eléctrico en la zona 1 vale $\mathbf{D_1} = 3\ \mathbf{u_x} - 4\ \mathbf{u_y} + 6\ \mathbf{u_z}$ (C/m^2), determinar el campo eléctrico en la zona 2 y los ángulos que forma el campo eléctrico con el eje x en ambas zonas.

SOLLUCIÓN: Expresado con vectores unitarios **i, j, k,** (equivalentes a **ux, uy, uz**)

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{3}{\kappa \ \ \epsilon_0}\,\vec{i} - \frac{4}{\epsilon_0}\,\vec{j} \quad + \frac{6}{\epsilon_0}\,\vec{k} : \cos\vartheta_1 = {}^{3}\!/_{\sqrt{61}} \qquad ; \cos\vartheta_2 = {}^{(3/\kappa\ \ )}\!\Big/_{\sqrt{52+(9/\kappa^2\ )}}$$

Resolución de la Ecuación de Laplace y Poisson

12. Los potenciales en dos potenciales esféricos concéntricos de radio r_1 = 2 cm y r_2 = 35 cm son V_1 = - 25 V y V_2 = 150 V. El espacio entre ambos conductores se rellena de un dieléctrico cuya constante dieléctrica es κ = 3,12. Determinar la densidad superficial de carga de cada uno de los conductores. NOTA. La forma general del tipo de soluciones para el potencial se obtuvo en el problema 3 de la hoja de problemas del Tema 2, parte B (resolución de la ecuación de Laplace).

SOLUCIÓN: Densidad de carga en esfera interior $\sigma 1 = -257.5\ nC/m^2$;

Densidad de carga en esfera exterior $\sigma 2 = 0.840\ nC/m^2$;

13. Una línea de transmisión coaxial está formada por un conductor cilíndrico perfectamente conductor cerrado por una de sus bases y cuyo radio es r = b y un cilindro concéntrico interior al anterior y de radio a (a < b). Ambos cilindros están unidos por sus bases. Entre los dos extremos libres de ambos conductores se aplica una diferencia de potencial V_1. Sabiendo que la longitud de la línea es L, calcular (resolviendo la ecuación de Laplace) el potencial ϕ en cualquier punto del espacio comprendido entre ambos conductores.

SOLUCIÓN . Hay que resolver la ecuación de Laplace en cilíndricas, existiendo independencia con la coordenada angular. El potencial pedido es de la forma:

$$\phi\ (\rho, z) = A \ln\rho + B\ z + C \ln\rho + D$$

Donde A, B, C y D son constantes de integración cuyo valor viene dado por:

C = D = 0;

$A = \frac{V_1}{L \ln(a/b)}$; $B = -\frac{V_1 \ln b}{L \ln(a/b)}$;

Nota: Las condiciones de contorno que debes ser capaz de deducir (no se darían como dato) son:

1) $\phi\,(\rho, 0) = 0$; 2) $\phi\,(b, z) = 0$; 3) Para z = L y $\rho \leq a$ $\phi = V_1$; 4) Para $\rho = a$ y z arbitrario $(\partial\phi/\partial z)$ = cte

La última condición es la primera que se utiliza, justo al hacer la separación de variables. Esta condición implica que la constante a la que se igualan las dos ecuaciones diferenciales al hacer separación de variables sea nula. Esto implica que la parte de la solución dependiente de z tenga forma de una constante + otra constante * z (si esa constante, al resolver la ecuación diferencial de la parte z no fuera cero, sería de la forma típica a las soluciones en cartesianas, es decir suma de dos exponenciales, una con exponente positivo y otro negativo). Así la solución general a que se llega (antes de obtener A,B,C y D) es gracias a ella. Estas 4 ctes. se sacan con las otras tres condiciones.

14. Sea una esfera de material dieléctrico IHL de permitividad absoluta ε_1 y radio a, que se carga con densidad de carga uniforme ρ. Obtener el potencial en todos los puntos del espacio mediante la resolución de la ecuación del Poisson o de Laplace según corresponda. Suponed que en el exterior de la esfera hay vacío. RESUELTO EN CLASE