Aroa Antón Samariego

ENTREGA 3

1- El campo eléctrico de una onda electromagnética plana en el vacío que se propaga a lo largo del eje z (por lo que ninguna magnitud es función ni de x ni de y) viene dado por la ecuación:

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos[\omega(t - z/c)]\,\hat{x}$$

y además se tiene que el potencial escalar es nulo ($\phi = 0$).

Determinar:

a) El valor del potencial vector $\vec{A}$ y el vector campo magnético $\vec{B}$ de la onda electromagnética.

Tenemos $\vec{E} = -\cancel{\nabla\phi}^{\to 0} - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{A}(z,t) = -\int_0^t \vec{E}\,dt$

$$\Rightarrow \vec{A}(z,t) = -\int_0^t E_0 \cos[\omega(t - z/c)]\,dt\,\hat{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(z,t) = -\frac{E_0}{\omega}\,\text{sen}[\omega(t - z/c)]\,\hat{x}}$$

Para hallar el campo magnético consideramos: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} = B_x \\[2ex] \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} = B_y \\[2ex] \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = B_z \end{array}\right. \underset{\substack{A_z = A_y = 0 \\ \vec{A} = \vec{A}(z,t)}}{\Longrightarrow} \left|\begin{array}{l} \vec{B} = (0, B_y, 0) \\[2ex] B_y = \dfrac{\partial A_x}{\partial z} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow B_y = \frac{E_0}{c}\cos[\omega(t - z/c)] \Rightarrow \boxed{\vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c}\cdot\cos[\omega(t - z/c)]\,\hat{y}}$$

b) Comprobar que los potenciales $\vec{A}$ y ϕ satisfacen el Gauge de Lorenz.

El gauge de Lorenz en forma vectorial viene dado por:

$$\cancel{\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}}^{\to 0\ (\phi=0)} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ A_z = A_y = 0}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0 \ \checkmark$$

Sí porque $\vec{A} = \vec{A}(z,t)$

$\Rightarrow$ Sí se satisface el gauge de Lorenz.

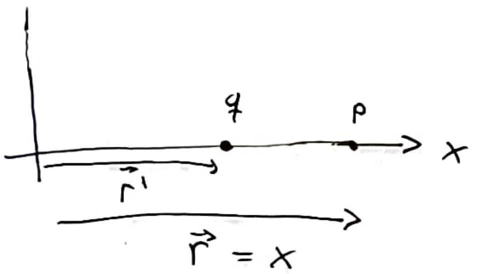
2- Una carga puntual q describe un movimiento hiperbólico a lo largo del eje x que viene dado por la ecuación

$$\vec{r}\,'(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}\ \hat{x} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Determinar, para un punto P situado en el eje x a la derecha de la carga:

a) El tiempo retardado t' en función de x y del tiempo "actual" t.

$$t' = t - \frac{|\vec{R}|}{c}$$



$$|\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$$

$$t' = t - \frac{x - \sqrt{b^2 + (ct')^2}}{c}$$

Queremos hallar $t' = t'(t,x)$ por lo que vamos a despejar t'

$$-c(t'-t) = x - \sqrt{b^2+(ct')^2} \quad ①$$

$$\left(c(t'-t)+x\right)^2 = \left(\sqrt{b^2+(ct')^2}\right)^2$$

$$c^2(t'-t)^2 + x^2 + 2xc(t'-t) = b^2 + (ct')^2$$

$$\cancel{(ct')^2} + (ct)^2 - 2c^2t't + x^2 + 2xct' - 2xct = b^2 + \cancel{(ct')^2}$$

$$\underbrace{(ct)^2 + x^2 - 2xct}_{(x-ct)^2} + 2ct'(x-ct) = b^2$$

$$\boxed{t' = \frac{b^2 - (x-ct)^2}{2c(x-ct)}}$$

b) La velocidad de la carga v en función del tiempo retardado t', así como en función de x y del tiempo "actual" t.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}c^2t'}{\sqrt{b^2+c^2t'^2}} = \frac{c^2t'}{\sqrt{b^2+c^2t'^2}}}$$

Ahora escribimos $\vec{v}$ en función de x y de t:

$$\vec{v} = \frac{c^2t'}{\sqrt{b^2+(ct')^2}} \underset{①}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{c^2t'}{c(t'-t)+x} = \frac{c^2t'}{ct'+(x-ct)} \overset{\uparrow}{=}$$

Sustituimos el valor de t'

$$= \frac{c^{\cancel{2}}\left[\frac{b^2-(x-ct)^2}{2\cancel{c}(x-ct)}\right]}{\cancel{c}\left[\frac{b^2-(x-ct)^2}{2\cancel{c}(x-ct)}\right]+x-ct} = \frac{c\cdot\frac{b^2-(x-ct)^2}{2\cancel{(x-ct)}}}{\frac{b^2-(x-ct)^2+2(x-ct)^2}{2\cancel{(x-ct)}}} = \boxed{c\cdot\frac{b^2-(x-ct)^2}{b^2+(x-ct)^2}}$$

c) Demostrar que la potencia radiada es constante y viene dada por la ecuación:

$$P_r = \frac{q^2 c}{6\pi\varepsilon_0 b^2} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{F}{m}\right)^2$$

Como la velocidad es relativista la potencia radiada viene dada por la fórmula de Lienard:

$$P_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2q^2}{3c}\gamma^6\left[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2\right]$$

Teniendo en cuenta que el movimiento es rectilíneo ($\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}} = 0$) y que $\dot{\vec{\beta}} = \frac{\dot{\vec{v}}}{c}$ tenemos:

$$P_r = \frac{q^2\,|\dot{\vec{v}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\gamma^6 \quad ; \quad \gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Hallamos la aceleración $\dot{\vec{v}}$:

$$\dot{\vec{v}} = \frac{dv(t')}{dt} = \frac{c^2\sqrt{b^2+c^2t'^2} - \frac{c^2t' \cdot \cancel{2}c^2t'}{\cancel{2}\sqrt{b^2+c^2t'^2}}}{b^2+c^2t'^2} =$$

$$= \frac{c^2b^2 + \cancel{c^4t'^2} - \cancel{c^4t'^2}}{(b^2+c^2t'^2)^{3/2}} = \frac{c^2b^2}{(b^2+c^2t'^2)^{3/2}}$$

Además, $\gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{c^2t'^2}{b^2+c^2t'^2}} = \frac{1}{\frac{b^2+\cancel{c^2t'^2}-\cancel{c^2t'^2}}{b^2+c^2t'^2}} = \frac{b^2-c^2t'^2}{b^2}$

Sustituimos los valores en la fórmula de la potencia:

$$P_r = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{c^4 b^4}{\left(\left(\cancel{b^2+c^2t^2}\right)^{3/\cancel{2}}\right)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\left(\cancel{b^2+c^2t^2}\right)^3}{b^6} \Rightarrow$$

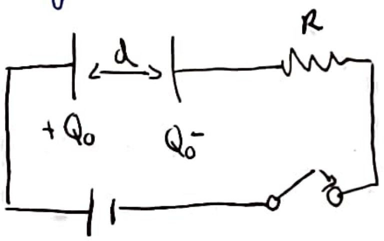
$$\Rightarrow \boxed{P_r = \frac{q^2 c}{6\pi\varepsilon_0 b^2} = \text{cte.}} \checkmark$$

Teniendo en cuenta que $F = \frac{mc^2}{b} \Rightarrow \frac{c^2}{b} = \frac{F}{m}$

$$\boxed{P_r = \frac{q^2 \cdot c \cdot c^3}{6\pi\varepsilon_0 b^2 c^3} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{c^2}{b}\right)^2 = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{F}{m}\right)^2}$$

3- Un condensador de láminas planoparalelas de capacidad C y separación entre las placas d, tiene una carga inicial $(\pm)\,Q_0$. Entonces se contacta a una resistencia R y se descarga de modo que la carga es $Q_0 e^{-t/RC}$.

a) ¿Qué fracción de su energía inicial $\left(\frac{Q_0^2}{2C}\right)$ es radiada?



$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

El momento dipolar eléctrico viene dado por: $p = Qd$

Tenemos que: $$\frac{dW_{rad}}{dt} = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

Entonces hallamos $\dot{p}(t)$ y $\ddot{p}(t)$:

$$p(t) = Q_0 d\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\dot{p}(t) = \frac{-Q_0}{RC} d\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\ddot{p}(t) = \frac{Q_0 d}{R^2 C^2} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Sustituimos en la fórmula:

$$\frac{dW_{rad}}{dt} = \frac{Q_0^2 d^2}{(RC)^4} \cdot \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{rad} = \frac{Q_0^2 d^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 (RC)^4} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = -\frac{Q_0^2 d^2 (RC)}{6\pi\varepsilon_0 c^3 (RC)^4 \cdot 2} \left[e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^\infty =$$

$$= \frac{Q_0^2 d^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3 (RC)^3}$$

$$\boxed{f = \frac{W_{rad}}{W_0} = \frac{\cancel{Q_0^2} d^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3 (RC)^3} \cdot \frac{2C}{\cancel{Q_0^2}} = \frac{d^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 R^3 C^2}}$$

$$W_0 = \frac{Q_0^2}{2C}$$

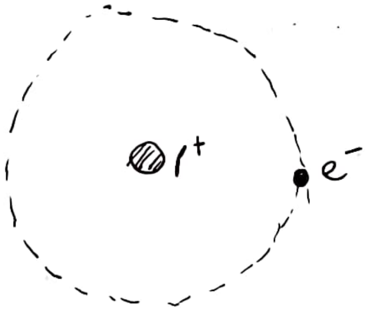
b) Si $C = 1$ pF, $R = 1000\ \Omega$, $d = 0'1$ mm. ¿Cuál es el valor de esta fracción? En electrónica normalmente no nos preocupamos sobre las pérdidas por radiación, ¿es esto razonable en este caso?

$$J = \frac{(0'1 \cdot 10^{-3})^2}{6\pi\,(8'85 \cdot 10^{-12}) \cdot (3 \cdot 10^{8})^3 \cdot (1000)^3 \cdot (1 \cdot 10^{-12})} = 2'22 \cdot 10^{-9}$$

Como vemos este valor es tan pequeño que no es necesario preocuparse por las pérdidas por radiación.

4.- En la teoría del átomo de Bohr para el hidrógeno, el electrón en su estado fundamental se supone que gira en una órbita circular de radio r_0 manteniendo su órbita por acción de la atracción culombiana del protón. De acuerdo con la electrodinámica clásica, este electrón radiaría, describiendo una trayectoria en espiral hasta caer sobre el protón. Suponiendo que cada revolución es esencialmente circular, que la aceleración tangencial es muy pequeña en comparación con la centrípeta y que la velocidad del electrón es no relativista ($v \ll c$), determinar:

a) La velocidad de la carga negativa en función de un radio genérico r.



$$\left.\begin{array}{l} F = \dfrac{k q^+ q^-}{r^2} \underset{q^+ = -q^-}{=} \dfrac{k q^2}{r^2} \\[2ex] F = ma = m\dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{kq^2}{r^{\cancel{2}}} = \frac{mv^2}{\cancel{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{kq^2}{rm}}} \quad ; \quad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

b) La energía total de la carga negativa en función del radio genérico r y la pérdida de energía por radiación entre los radios $r = r_0$ y $r = r_0/2$

La energía total del electrón será la suma de su energía cinética y potencial:

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m v^2 \\ U = -\frac{k q^2}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow W = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k q^2}{r} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{k q^2}{r \cancel{m}} - \frac{k q^2}{r} \Rightarrow$$

Sustituimos v

$$\Rightarrow \boxed{W = -\frac{1}{2} \frac{k q^2}{r}}$$

La velocidad a la que la partícula pierde energía por radiación viene dada por:

$$-\frac{dW_{rad}}{dt} = \frac{q^2 |\dot{\vec{v}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \Rightarrow W_{rad} = -\int \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{v^4}{r^2} \, dt$$

Para saber la energía perdida en función de los radios vamos a sustituir el dt:

Si consideramos la energía total del electrón:

$$-\frac{dW}{dt} = -\frac{dW}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{k q^2}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt}$$

Igualamos esta expresión a la fórmula de Larmor:

$$-\frac{1}{2}\frac{kq^2}{\cancel{r^2}}\frac{dr}{dt} = \frac{q^2 v^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3 \cancel{r^2}} \Rightarrow dt = \frac{6\pi\varepsilon_0 c^3}{v^4\, 2\cdot 4\pi\varepsilon_0}dr = -\frac{3c^3}{4v^4}dr$$

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Sustituimos el dt:

$$W_{rad} = -\int_{r_0}^{r_0/2}\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 \cancel{c^3}}\cdot\frac{\cancel{v^4}}{r^2}\cdot\frac{3\cancel{c^3}}{4\cancel{v^4}}dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r_0/2}-\frac{1}{r^2}dr =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r_0/2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{r_0}-\frac{1}{r_0}\right] = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

Por lo tanto la pérdida de energía por radiación entre r_0 y $r_0/2$ es : $\boxed{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}}$

c) El tiempo que tarda la órbita en disminuir su radio de $r=r_0$ a $r=r_0/2$

Del apartado anterior teníamos:

$$dt = \frac{3}{4}\frac{c^3}{v^4}dr \Rightarrow dt = -\frac{3}{4}c^3\cdot\frac{r^2m^2}{k^2q^4}dr \Rightarrow$$

$$v=\sqrt{\frac{kq^2}{rm}}$$

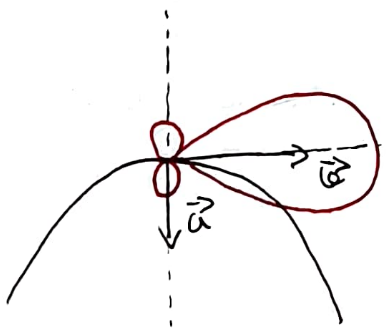
$$\int_0^t dt = \int_{r_0}^{r_0/2}-\frac{3}{4}c^3\frac{r^2m^2}{k^2q^4}dr \Rightarrow t = -\frac{3c^3m^2}{4k^2q^4}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r_0}^{r_0/2} =$$

$$= -\frac{3c^3m^2}{4k^2q^4}\left(\frac{r_0^3}{24}-\frac{r_0^3}{3}\right) = \frac{7\cdot 3c^3m^2r_0^3}{24\cdot 4\cdot k^2q^4} \underset{k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}{=}$$

$$= \frac{7}{2} \frac{c^3 \pi^2 \varepsilon_0^2 m^2 r_0^3}{q^4} \Rightarrow \boxed{t = \frac{7}{2} \frac{c^3 \pi^2 \varepsilon_0^2 m^2}{q^4} r_0^3}$$

d) Hacer un esquema de la distribución angular de la radiación dibujando los vectores velocidad y aceleración ¿Cómo sería esta distribución angular si el mov. del electrón fuera no relativista?

Relativista



No relativista