

Apuntes de Mecánica Analítica
Grado en Física

Juan Antonio Miralles

curso 2023-2024

Tema 1

Mecánica Lagrangiana

1.1. Mecánica Newtoniana

1.1.1. Dinámica de una partícula

Si sobre una partícula actúa una fuerza \vec{F} , la segunda ley de Newton nos dice que esta fuerza le produce una aceleración \vec{a} que viene dada por la relación

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1.1)$$

donde m es la masa de la partícula y

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (1.2)$$

con \vec{v} y \vec{r} la velocidad y el vector posición de la partícula respectivamente.

En general, \vec{F} puede ser función de la posición, velocidad y del tiempo. Matemáticamente se tiene entonces la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}). \quad (1.3)$$

Conocida la función $\vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$, la ecuación diferencial anterior es una ecuación diferencial de segundo orden. En ese caso, si conocemos la posición y la velocidad en un instante t_0 , $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$, la ecuación anterior tendrá solución única. La segunda ley también puede escribirse como

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1.4)$$

donde $\vec{p} = m\vec{v}$ es el momento lineal (o simplemente momento) de la partícula y de aquí se deduce inmediatamente que \vec{p} es constante si y sólo si $\vec{F} = \vec{0}$.

Si la segunda ley la escribimos como

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (1.5)$$

es fácil demostrar que el incremento de energía cinética que experimenta la partícula entre los instantes de tiempo t_1 y t_2 :

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv^2(t_2) - \frac{1}{2}mv^2(t_1) \quad (1.6)$$

es igual al trabajo que realiza la fuerza \vec{F} sobre la partícula a lo largo de la trayectoria de ésta entre los instantes t_1 y t_2

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt. \quad (1.7)$$

Un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo si el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de cualquier curva sólo depende del punto inicial y final pero no de la curva seguida para ir del punto inicial al final. En ese caso existirá una función $U(\vec{r})$ tal que el trabajo a lo largo de una curva que va desde \vec{r}_1 a \vec{r}_2 se podrá expresar como

$$W_{12} = \Delta U = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1). \quad (1.8)$$

La función $U(\vec{r})$ se denomina energía potencial y está definida salvo constante aditiva. Se tiene que

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_O}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.9)$$

donde \vec{r}_O es el vector posición del origen de energía potencial y

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U, \quad (1.10)$$

siendo $\vec{\nabla}$ el operador gradiente.

Si sobre una partícula sólo actúa una fuerza conservativa se tiene que la energía mecánica de la partícula $E = T + U$ se mantiene constante en su movimiento

$$E(t) = \text{cte.} \quad (1.11)$$

Un campo de fuerzas se dice central si lo podemos escribir como

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}, \quad (1.12)$$

donde hemos elegido, por comodidad, el origen de coordenadas en el centro de fuerzas. Es fácil demostrar que todo campo central es conservativo y su energía potencial viene dada por

$$U(r) = - \int_{r_0}^r f(\xi)\xi \, d\xi, \quad (1.13)$$

donde r_0 es una constante arbitraria que nos permite elegir dónde situamos el origen de potenciales.

En un campo central, además de conservarse la energía mecánica de la partícula, se conserva también el momento angular de la misma respecto al centro de fuerzas. Veámoslo

$$\vec{\ell} = m\vec{r} \times \vec{v}, \quad (1.14)$$

si derivamos respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}, \quad (1.15)$$

lo cual implica que $\vec{\ell} = \text{cte.}$

1.1.2. Problema unidimensional conservativo

Este problema consiste en obtener el movimiento de una partícula de masa m que se mueve sobre una recta (eje x) bajo la acción de una fuerza en esa dirección que depende sólo de la posición (x). La ecuación de Newton se reduce a

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x), \quad (1.16)$$

o bien

$$m\ddot{x} = F(x). \quad (1.17)$$

Podemos definir la función energía potencial como

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(\xi) \, d\xi, \quad (1.18)$$

y, de aquí,

$$F(x) = - \frac{dU}{dx}. \quad (1.19)$$

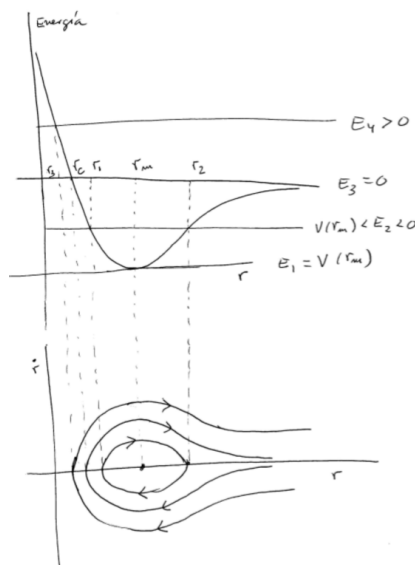


Figura 1.1: Diagrama energético y curvas de nivel de energía.

Es inmediato demostrar que

$$E = \frac{1}{2}v^2 + U(x), \quad (1.20)$$

con $v = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$, es una constante del movimiento, es decir, si $x(t)$ es solución de la ecuación de Newton, entonces

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t) + U(x(t)) \quad (1.21)$$

es constante, independiente de t .

Para estudiar cualitativamente los posibles movimientos es útil representar la función $U(x)$ y tener en cuenta que, en su movimiento, la partícula mantendrá constante el valor de E . Sea la gráfica siguiente

Hay que tener en cuenta que, al ser $\frac{1}{2}mv^2 \geq 0$, tendremos siempre que $E \geq U(x)$, lo cual significa que una partícula no puede estar en un nivel de energía que no cumpla esta condición para algún valor de x . Por otra parte, dado el nivel de energía posible E , los únicos valores posibles de x son aquellos que cumplen $U(x) \leq E$.

Diremos que x_e es un punto de equilibrio si $x(t) = x_e$ es solución de la ecuación de Newton, lo cual implica que $F(x_e) = 0$, o bien, $\frac{dU}{dx}(x_e) = 0$, es

decir, x_e es un punto crítico de $U(x)$. Si x_e es un mínimo relativo de $U(x)$ este punto de equilibrio es estable y será inestable en caso contrario.

Los puntos de retorno asociados a una solución $x(t)$ son aquellos que no siendo de equilibrio se cumple que $U(x) = E$. En esos puntos la velocidad de la partícula se hace cero.

Para un estudio cualitativo es muy útil representar en el plano (x, \dot{x}) los puntos que cumplen la condición $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E$, con E dado. Lo que obtenemos son las llamadas curvas de nivel de energía y sabemos que, en su movimiento, los puntos $(x(t), \dot{x}(t))$ han de estar siempre en la misma curva de nivel. En la gráfica inferior de la Fig. (1.1) se muestran varias curvas de nivel para el potencial que se representa en la gráfica superior de la misma figura.

Dado el problema unidimensional conservativo

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) = -\frac{dU}{dx}, \quad (1.22)$$

podemos hacer uso de que existe una integral primera, es decir, una magnitud que se conserva

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x), \quad (1.23)$$

a fin de obtener la solución $x(t)$ dadas las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$. Se tendrá que

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \frac{2}{m}(E - U(x)) \Rightarrow \\ \dot{x} &= \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \Rightarrow \\ \frac{dx}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \Rightarrow \\ dt &= \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \Rightarrow \\ t &= t_0 \pm \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\xi))}}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

y su inversa $x(t)$ será la solución buscada. Hemos podido escribir ésta en forma de cuadraturas. Se dice que el problema es integrable. El signo \pm depende de si v_0 es mayor o menor que cero respectivamente.

1.1.3. Dinámica de un sistema de partículas

Consideremos ahora un sistema formado por N partículas. La segunda ley de Newton aplicada a cada partícula del sistema nos dirá que

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i, \quad \text{con } i = 1, \dots, N, \quad (1.25)$$

siendo \vec{F}_i la fuerza que actúa sobre la partícula i . Admitamos que estas fuerzas pueden descomponerse de la siguiente manera

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji}, \quad (1.26)$$

donde $\vec{F}_i^{(e)}$ denota la fuerza que actúa sobre la partícula i y que no es debida a la interacción con las demás partículas del sistema (fuerza externa), mientras que \vec{F}_{ji} denota la fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula i , que supondremos totalmente independiente de la presencia de las otras partículas. Admitiremos también que $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ (principio de acción y reacción) y que \vec{F}_{ji} tiene la dirección del vector $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

En ese caso se tiene que el momento lineal del sistema

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \quad (1.27)$$

obedece la ecuación

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)}, \quad (1.28)$$

donde $\vec{F}^{(e)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)}$ es la suma de las fuerzas externas sobre todo el sistema.

El momento angular del sistema

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad (1.29)$$

obedece la ecuación

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)}, \quad (1.30)$$

con $\vec{M}^{(e)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{(e)}$ la suma de los momentos de las fuerzas externas sobre todo el sistema.

De aquí se deduce que \vec{P} se conserva si y sólo si $\vec{F}^{(e)} = \vec{0}$, y \vec{L} se conserva si y sólo si $\vec{M}^{(e)} = \vec{0}$.

Si todas las fuerzas, tanto internas como externas, son conservativas, se tiene que

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla} U_i^{(e)}(\vec{r}_i) \quad (1.31)$$

y

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i U_{ji}(|\vec{r}_{ji}|). \quad (1.32)$$

Definiendo la energía potencial del sistema

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N U_i^{(e)}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ji}(|\vec{r}_{ji}|), \quad (1.33)$$

se tiene que

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U. \quad (1.34)$$

De esta manera, el trabajo realizado por las fuerzas cuando pasamos de una configuración $A: (\vec{r}_{1A}, \vec{r}_{2A}, \dots, \vec{r}_{NA})$ a una configuración $B: (\vec{r}_{1B}, \vec{r}_{2B}, \dots, \vec{r}_{NB})$ siguiendo una curva cualquiera es

$$W_{AB} = \sum_i \int_A^B (\vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji}) \cdot d\vec{r}_i = -\Delta U = U_A - U_B. \quad (1.35)$$

En este sistema conservativo, la energía mecánica

$$E = T + U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U \quad (1.36)$$

se conserva.

1.2. Fuerzas de ligadura y principio de D'Alembert

1.2.1. Fuerzas de ligadura

Con lo que acabamos de ver podríamos pensar que obtener el movimiento de cualquier sistema de partículas se reduce a resolver las ecuaciones de movimiento

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} \quad (1.37)$$

(denotamos por $\dot{} \equiv \frac{d}{dt}$). Aunque formalmente esto es absolutamente cierto, la situación no es sencilla en muchos casos porque las fuerzas que aparecen en las ecuaciones no son todas conocidas *a priori*. Esto es debido a que hay ligaduras que restringen el movimiento del sistema y estas ligaduras conducen a la aparición de fuerzas, que llamaremos fuerzas de ligadura. Uno de los ejemplos más sencillos que ilustra este hecho es el plano inclinado.

fig

Sobre el cuerpo situado en un plano inclinado actúa el peso, que es una fuerza conocida, pero el hecho de que el cuerpo esté restringido a moverse sobre el plano provoca la aparición de fuerzas que son desconocidas *a priori*.

1.2.2. Principio de los trabajos virtuales

Una manera de eliminar las fuerzas de ligadura comenzó a utilizarse en situaciones estáticas. Así, en 1717 Jean Bernoulli planteó el principio de los trabajos virtuales, que desarrollamos a continuación.

Si un sistema está en equilibrio se tiene que, para cada partícula, i , del sistema

$$\vec{F}_i = \vec{0}. \quad (1.38)$$

Consideraremos ahora que las partículas, a partir de la posición de equilibrio, sufren desplazamientos *virtuales*, que denotaremos por $\delta\vec{r}_i$, y definiremos como aquellos que a) son compatibles con las ligaduras del sistema, b) son infinitesimales y c) se producen en un instante dado. De la condición de equilibrio del sistema se sigue que

$$\vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{0}. \quad (1.39)$$

Descompongamos las fuerzas que actúan sobre las partículas como

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{R}_i, \quad (1.40)$$

donde $\vec{F}_i^{(a)}$ corresponde a la fuerza aplicada (que será conocida) y \vec{R}_i es la fuerza de ligadura. Se tendrá que

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{0}. \quad (1.41)$$

En muchos casos de interés las fuerzas de ligadura son perpendiculares a los desplazamientos compatibles con las ligaduras. Se tendrá entonces que

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{0}, \quad (1.42)$$

siendo, en general, cada sumando distinto de cero.

Este resultado se conoce como principio de los trabajos virtuales y vamos a ver un ejemplo de aplicación del mismo. Consideremos un bolita ensartada en un alambre en forma de parábola vertical, con ecuación $y = c x^2$, con $c > 0$ y el eje y es el eje vertical orientado hacia arriba. La bolita, de masa m , puede deslizar por el alambre sin rozamiento y sobre ella actúa la fuerza de la gravedad. Se trata de encontrar la posición de equilibrio de la bolita en el alambre. Aunque este problema es elemental, nos ilustra claramente el procedimiento de principio de los trabajos virtuales. Sobre la bolita actúan dos fuerzas; el peso \vec{P} (fuerza aplicada) y la fuerza que le ejerce el alambre \vec{R} (fuerza de ligadura). Se tiene que

$$(\vec{P} + \vec{R}) \cdot \delta \vec{r} = \vec{P} \cdot \delta \vec{r} = (0, -mg) \cdot (\delta x, \delta y) = -mg \delta y = 0 \Rightarrow \delta y = 0. \quad (1.43)$$

Como $y = c x^2$, se tiene que $\delta y = 2cx \delta x$, con lo que $\delta y = 0 \Rightarrow x = 0$. La partícula estará en equilibrio si $x = 0$.

1.2.3. Principio de D'Alembert

La generalización del principio de los trabajos virtuales al caso dinámico se conoce con el nombre de *principio de D'Alembert*, ya que fue éste el que lo introdujo en 1742. Damos aquí la versión del principio utilizada por Lagrange para deducir las ecuaciones.

Para un sistema de partículas sobre el que actúan fuerzas se tiene que

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad (1.44)$$

o bien

$$\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{0}. \quad (1.45)$$

Si $\delta \vec{r}_i$ denota el desplazamiento virtual de la partícula i se tiene

$$\left(\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (1.46)$$

y, de aquí,

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.47)$$

Al igual que antes, si descomponemos la fuerza que actúa sobre la partícula i en fuerza aplicada más fuerza de ligadura

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{R}_i, \quad (1.48)$$

se tiene que

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{(a)} - \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{0}, \quad (1.49)$$

donde hemos eliminado las fuerzas de ligaduras ya que sus trabajos virtuales son nulos.

1.3. Ligaduras y coordenadas generalizadas

El principio de D'Alembert, tal y como lo hemos escrito, sería extremadamente útil si los desplazamientos virtuales $\delta \vec{r}_i$ fueran independientes. En ese caso, la expresión entre paréntesis debería anularse y podríamos determinar el movimiento del sistema sólo a partir de las fuerzas aplicadas (conocidas). Sin embargo, como ya hemos comentado, los desplazamientos de las partículas no son independientes. El sistema está restringido a moverse bajo ciertas ligaduras y esto hace que los desplazamientos virtuales tienen que cumplir determinadas restricciones. Distinguiremos diferentes tipos de ligaduras. Llamaremos ligaduras holónomas a aquellas que podemos expresar mediante ecuaciones del tipo

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \quad (1.50)$$

En general, para un sistema formado por N partículas que pueden moverse en el espacio se necesitarán $3N$ números reales para conocer la posición del sistema. Decimos que este sistema tiene $3N$ grados de libertad. El conjunto 3N representa el espacio de configuración del sistema ya que un punto de dicho espacio nos da la posición del sistema. Sin embargo, si hay ligaduras, el espacio de configuración resulta ser un subconjunto de 3N de dimensión menor. De hecho, si el sistema tiene ℓ ligaduras holónomas el espacio de configuración resultará ser de dimensión $3N - \ell$, queriendo esto decir que conociendo sólo $3N - \ell$ números reales y las ecuaciones de ligadura queda completamente determinada la posición del sistema. Es decir, las posiciones de las partículas $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ pueden expresarse en función de unas nuevas coordenadas $q_1, q_2, \dots, q_{3N - \ell}$ que son independientes y que llamaremos *coordenadas generalizadas*. Así,

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N - \ell}, t) \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N - \ell}, t) \\ &\vdots \\ \vec{r}_N &= \vec{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N - \ell}, t). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Además del carácter holónomo o no de las ligaduras, hay otra característica importante que nos permite distinguir entre dos tipos de ligaduras: aquellas que dependen del tiempo, y que llamaremos *reonomas* y aquellas que no dependen del tiempo, y que llamaremos *escleronomas*.

1.4. Ecuaciones de Lagrange

Partimos del principio de d'Alembert, que podemos escribir como

$$\sum_a \left(m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} - \vec{F}_a \right) \cdot \delta \vec{r}_a = 0. \quad (1.52)$$

Introduzcamos ahora las coordenadas generalizadas en el caso de ligaduras holónomas. Se tiene que

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (1.53)$$

y

$$\delta \vec{r}_a = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \delta q_i \Rightarrow \quad (1.54)$$

$$\sum_a m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} \cdot \sum_i \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_a \vec{F}_a \cdot \sum_i \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \Rightarrow \quad (1.55)$$

$$\sum_i \left(\sum_a m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} - \sum_a \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0. \quad (1.56)$$

Si llamamos $\mathcal{F}_i = \sum_a \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}$ fuerzas generalizadas, tendremos que

$$\sum_i \left(\sum_a m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} - \mathcal{F}_i \right) \delta q_i = 0. \quad (1.57)$$

Como ahora los δq_i son independientes se tendrá que los coeficientes deben ser nulos,

$$\sum_a m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i. \quad (1.58)$$

Desarrollando el término de la izquierda podemos escribir esta ecuación como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i, \quad (1.59)$$

donde T es la energía cinética

$$T = \sum_a \frac{1}{2} m_a \frac{d\vec{r}_a}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \dot{\vec{r}}_a. \quad (1.60)$$

Probémoslo. Se tiene que

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_a}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.61)$$

pero, como $\dot{\vec{r}}_a = \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \dot{q}_i$ se tiene que $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_a}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}$, con lo que

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}, \quad (1.62)$$

y derivando respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_a m_a \ddot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} + \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = \\ &= \sum_a m_a \ddot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} + \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_a}{\partial t \partial q_i} + \sum_j \frac{\partial^2 \vec{r}_a}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j \right). \end{aligned} \quad (1.63)$$

El otro término es

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_a}{\partial q_i} = \\ &= \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \\ &= \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_a}{\partial q_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial^2 \vec{r}_a}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j \right) \end{aligned} \quad (1.64)$$

Si las restamos y aplicamos el teorema de Schwarz obtenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_a m_a \ddot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}, \quad (1.65)$$

que es lo que queríamos probar.

Las n ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.66)$$

constituyen las ecuaciones de Lagrange y sustituyen a las ecuaciones de Newton.

En el caso en que las fuerzas \vec{F}_a deriven de un potencial: $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$, se tiene que $\vec{F}_a = -\vec{\nabla}_a U$ y

$$\mathcal{F}_i = - \sum_a \vec{\nabla}_a U \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (1.67)$$

con lo que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (1.68)$$

Como U no depende de \dot{q}_i , las ecuaciones pueden escribirse de la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (1.69)$$

donde L , llamada lagrangiana del sistema, viene dada por

$$L = T - U. \quad (1.70)$$

1.4.1. Discusión sobre las ecuaciones de Lagrange

Debemos destacar la importancia de la energía cinética (*vis-viva*) en estas ecuaciones frente a la fuerza en la formulación Newtoniana. Además, las ecuaciones de Lagrange son escalares: la lagrangiana es una función escalar. Las ecuaciones obtenidas son válidas para sistemas conservativos, en el sentido de que las fuerzas derivan de un potencial que no depende de velocidades. Si hay fuerzas no conservativas además de las conservativas habrá que añadir en las ecuaciones términos de la forma \mathcal{F}_i que den cuenta de las fuerzas no conservativas.

Las ecuaciones de Lagrange son invariantes bajo transformaciones de coordenadas, $q_i = q_i(\underline{q}', t)$ ¹, con $\det \left(\frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \right) \neq 0$. Es decir, si con las coordenadas \underline{q} las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (1.71)$$

¹Por brevedad, denotaremos por \underline{q} el conjunto de coordenadas q_1, q_2, \dots, q_n .

con las coordenadas \underline{q}' las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} - \frac{\partial L'}{\partial q'_i} = 0, \quad (1.72)$$

donde $L'(\underline{q}', \dot{\underline{q}}', t) = L(\underline{q}(\underline{q}', t), \dot{\underline{q}}(\underline{q}', \dot{\underline{q}}', t), t)$. La función L se transforma como un escalar.

Otra propiedad importante es que la lagrangiana es aditiva, es decir, la lagrangiana de un sistema formado por varios subsistemas que no interactúan es la suma de las lagrangianas de cada subsistema.

Si a la lagrangiana de un sistema le sumamos la derivada total respecto al tiempo de una función Λ de las coordenadas y del tiempo,

$$L \rightarrow L + \frac{d}{dt} \Lambda(\underline{q}, t), \quad (1.73)$$

las ecuaciones de Lagrange para esta nueva lagrangiana son las mismas.

Las ecuaciones de Lagrange constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 2. Esta propiedad es compartida con las ecuaciones de Newton con la diferencia de que el número de ecuaciones es diferente ya que en las ecuaciones de Lagrange las coordenadas generalizadas son independientes y en las ecuaciones de Newton no, al haber relaciones de ligadura entre ellas. Debido a esto, en las ecuaciones de Newton aparecen explícitamente fuerzas de ligadura que no aparecen en las ecuaciones de Lagrange.

1.4.2. Fuerzas de ligadura y multiplicadores de Lagrange

Para obtener las fuerzas de ligadura en la formulación newtoniana, Lagrange propone el método de los multiplicadores de Lagrange. Si las ecuaciones de Newton son

$$m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} = \vec{F}_a + \vec{R}_a, \quad (1.74)$$

escribiremos

$$\vec{R}_a = \sum_{m=1}^{\ell} \lambda_m \vec{\nabla}_a f_m(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t), \quad (1.75)$$

donde ℓ es el número de ligaduras (holónomas)

$$f_m(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (1.76)$$

y $\vec{\nabla}_a$ denota el operador gradiente respecto a las coordenadas de la partícula a , $\vec{r}_a = (x_a, y_a, z_a)$.

Se tendrán en total $3N + \ell$ ecuaciones:

- $3N$ ecuaciones escalares diferenciales

$$m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} = \vec{F}_a + \sum_{m=1}^{\ell} \lambda_m \vec{\nabla}_a f_m(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t), \quad (1.77)$$

- ℓ ecuaciones algebraicas de ligadura

$$f_m(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \quad (1.78)$$

Y el número de incógnitas será también $3N + \ell$ ya que tenemos $3N$ coordenadas cartesianas más ℓ multiplicadores de Lagrange.

El método de los multiplicadores de Lagrange adaptado a la ecuación de Lagrange consistiría en lo siguiente. Supongamos que hemos elegido un conjunto de coordenadas \underline{q} que no son todas independientes sino que hay relaciones de ligadura entre ellas. Estas ligaduras provocan la aparición de fuerzas de ligadura que determinaremos mediante este procedimiento. Sea m el número de coordenadas y ℓ el número de ligaduras. Si partimos de la ecuación

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad \mathcal{F}_i \right) \delta q_i = 0, \quad (1.79)$$

donde no todos los desplazamiento virtuales δq_i son independientes sino que hay ligaduras. Supongamos que las ligaduras las podemos escribir de la forma²

$$\sum_{i=1}^m b_{si} \dot{q}_i + c_s = 0, \quad \text{con } b_{si} = b_{si}(q, t), \quad c_s = c_s(q, t), \quad s = 1, \dots, \ell, \quad (1.80)$$

o bien

$$\sum_{i=1}^m b_{si} dq_i + c_s dt = 0, \quad (1.81)$$

que para los desplazamientos virtuales (a t constante) conduce a

$$\sum_{i=1}^m b_{si} \delta q_i = 0. \quad (1.82)$$

Introducimos ahora los ℓ multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$

$$\sum_{s=1}^{\ell} \lambda_s \sum_{i=1}^m b_{si} \delta q_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{\ell} \lambda_s b_{si} dq_i = 0, \quad (1.83)$$

²Las ligaduras holonomas pueden expresarse de esta forma ya que una ligadura de la forma $f(q_1, \dots, q_m, t) = 0$ conduce a $df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$.

con lo que

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \mathcal{F}_i - \sum_{s=1}^{\ell} \lambda_s b_{si} \right) \delta q_i = 0. \quad (1.84)$$

Hay $n = m - \ell$ desplazamientos virtuales independientes y ℓ desplazamientos virtuales dependientes. Podemos elegir los ℓ multiplicadores de Lagrange de manera que se anule la expresión entre paréntesis para los ℓ desplazamientos virtuales dependientes. Con esta elección, la suma queda reducida a sólo los $n = m - \ell$ desplazamientos virtuales independientes, lo que implica que la expresión entre paréntesis también debe anularse para estos desplazamientos virtuales. Se llega, por tanto, a que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \mathcal{F}_i - \sum_{s=1}^{\ell} \lambda_s b_{si} = 0 \quad (1.85)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$, que junto con las ℓ ecuaciones de ligadura nos conducen a $m + \ell$ ecuaciones que nos permitirán obtener las $m + \ell$ incógnitas: m coordenadas q_i y ℓ multiplicadores de Lagrange λ_s . Las fuerzas de ligadura son $\mathcal{R}_i = \sum_{s=1}^{\ell} \lambda_s b_{si}$.

Si las fuerzas son conservativas tendremos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^{\ell} \lambda_s b_{si}. \quad (1.86)$$

Se observa que en el caso de ℓ ligaduras holónomas de la forma

$$f_s(q_1, \dots, q_m, t) = 0,$$

con $s = 1, \dots, \ell$, este procedimiento es equivalente a sustituir la lagrangiana habitual $L = T - U$ por

$$L - \sum_{s=1}^{\ell} \lambda_s f_s(q_1, \dots, q_m, t).$$

Al aplicar la ecuación de Lagrange a esta lagrangiana modificada obtendremos m ecuaciones, una para cada coordenada. Y las ecuaciones de ligadura se obtienen al aplicar la ecuación de Lagrange a cada uno de los ℓ multiplicadores de Lagrange.

1.4.3. Ecuaciones de Lagrange con fuerzas dependientes de velocidades

Señalar también que las ecuaciones de Lagrange derivadas anteriormente se han obtenido suponiendo que las fuerzas conservativas son independientes de las velocidades y derivan de un potencial que, claro está, no depende de las velocidades. Así hemos obtenido

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (1.87)$$

con $L = T - U$ y U una función sólo de las coordenadas y del tiempo.

Hay situaciones, sin embargo, en que el mismo formalismo puede usarse aun cuando las fuerzas dependen de velocidades. Partiendo de las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i, \quad (1.88)$$

observamos que si \mathcal{F}_i puede escribirse de la forma

$$\mathcal{F}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (1.89)$$

podemos definir la lagrangiana como $L = T - U$ y obtener las mismas ecuaciones de Lagrange que en el caso anterior.

Un ejemplo paradigmático de esta situación es el movimiento de una carga e en un campo electromagnético. La ecuación de inducción de Faraday nos dice que

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad (1.90)$$

y la ley de Gauss para el campo magnético establece que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.91)$$

De esta última ecuación se deduce que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.92)$$

siendo \vec{A} el potencial vector. Sustituyendo en la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E} \right) = 0, \quad (1.93)$$

con lo que

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi, \quad (1.94)$$

y, de aquí,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.95)$$

La fuerza que actúa sobre una carga viene dada por la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) = e \left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} \right), \quad (1.96)$$

que puede escribirse como

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U + \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}}U, \quad (1.97)$$

con

$$U = e \left(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A} \right), \quad (1.98)$$

y la lagrangiana sería

$$L = \frac{1}{2}m \vec{v} \cdot \vec{v} - e \left(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A} \right). \quad (1.99)$$

1.5. Principios variacionales y ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange se pueden deducir a partir de un principio variacional, el principio de Hamilton. Pero antes de enunciar este principio describiremos algunos problemas variacionales clásicos a fin de familiarizarse con el llamado cálculo variacional.

1.5.1. Principio de Fermat

En el año 1662 Fermat propuso, para explicar la refracción de la luz, que el camino seguido por el rayo era tal que el tiempo en recorrerlo se hacía mínimo. Esta condición la podemos expresar de la siguiente forma

$$t = \int_C \frac{ds}{v} \rightarrow \text{minimo} \quad (1.100)$$

En el caso en que tengamos dos medios homogéneos separados por un plano esta condición se reduce a hallar un punto C sobre el plano tal que

$$\frac{s_{AC}}{v_1} + \frac{s_{CB}}{v_2} \quad (1.101)$$

sea mínimo. Es muy fácil demostrar que esto conduce a la ley de Snell $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. El problema resulta tan simple porque lo que hay que minimizar es una función ya que las trayectorias son líneas rectas en cada medio, al ser éstos homogéneos.

1.5.2. Problema de la braquistócrona

El problema que dio origen al cálculo variacional fue el problema de la braquistócrona: curva de menor tiempo. Este problema ya fue considerado por Galileo en 1638. El objetivo era determinar la curva que une dos puntos a diferente dados de manera que si una partícula desliza por esa curva al actuar la fuerza de la gravedad, el tiempo que tarda la partícula en ir de un punto a otro es mínimo. La respuesta que dió Galileo no fue la correcta. En esa época todavía no se había desarrollado el cálculo lo suficiente.

El problema de la braquistócrona cobra relevancia cuando Jean Bernoulli en 1696 obtiene una solución y propone a la comunidad científica el reto de obtener la solución del problema. Varios fueron los que resolvieron el problema, Newton, Leibniz, L'Hôpital, Jacob Bernoulli, pero la generalización a problemas similares no llegó hasta 1744 de la mano de Euler.

1.5.3. Ecuación de Euler

El problema general que se planteó Euler es obtener la función $y(x)$ tal que el funcional $I[y]$

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) dx \quad (1.102)$$

sea extremal. Para que el problema esté bien definido debemos imponer además que los valores de la función y en x_0 y en x_1 estén fijados, es decir, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. A la función $y(x)$ se le exige también que sea 'suave' (diferenciable).

Euler obtuvo que la función $y(x)$ que hace que $I[y]$ sea extremal satisface la llamada ecuación de Euler, que es la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (1.103)$$

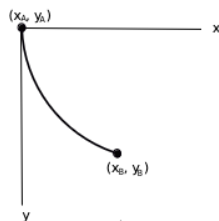


Figura 1.2: Braquistócrona.

Para obtener la ecuación de Euler procedemos como sigue. Consideremos una familia de funciones de x que dependen de un parámetro ε de manera que la función que hace que el funcional sea extremal corresponde al valor del parámetro $\varepsilon = 0$. Es decir $y(x, \varepsilon)$. Tomemos esta familia como $y(x, \varepsilon) = y(x, 0) + \varepsilon \eta(x)$, con $\eta(x)$ una función diferenciable arbitraria pero que se anule en los extremos. El funcional ahora depende de ε :

$$I[y(x, \varepsilon)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y(x, 0) + \varepsilon \eta(x), y'(x, 0) + \varepsilon \eta'(x), x) dx. \quad (1.104)$$

A primer orden se tendrá

$$\delta I = \left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (1.105)$$

Si imponemos que sea extremal

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \quad (1.106)$$

con lo que

$$\begin{aligned}
 \frac{dI}{d\varepsilon} &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \varepsilon} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx = \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx \quad (1.107)
 \end{aligned}$$

que debe ser cero si queremos que I sea extremal. Como esta condición se debe cumplir para cualquier $\eta(x)$ se tendrá que

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad (1.108)$$

o bien

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (1.109)$$

Aplicamos esta ecuación de Euler a la obtención de la curva braquistócrona. Se tiene

$$\delta \int_A^B \frac{ds}{v} = 0. \quad (1.110)$$

Como $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ y, por conservación de la energía, si la partícula parte del reposo desde el punto $(0, 0)$, $\frac{1}{2} m v^2 - mgy = 0$, donde hemos tomado el sentido positivo del eje y hacia abajo se tiene $v = \sqrt{2gy}$. Sustituyendo

$$\delta \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx = 0. \quad (1.111)$$

Haciendo el cambio de variable $x = x(y)$, $dx = x' dy$ obtenemos

$$\delta \int_0^{y_B} \frac{\sqrt{1 + (x')^2}}{\sqrt{2gy}} dy = 0, \quad (1.112)$$

y así F no depende de x ,

$$F(x, x', y) = \frac{\sqrt{1 + (x')^2}}{\sqrt{2gy}}. \quad (1.113)$$

La ecuación de Euler será

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x'} = C \Rightarrow \\ &\frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}} \frac{1}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\sqrt{2g}} \Rightarrow \\ \frac{(x')^2}{(1+(x')^2)y} = \frac{1}{2a} &\Rightarrow x' = \sqrt{\frac{y}{2a}} \Rightarrow dx = \frac{y}{\sqrt{2ay}} \frac{1}{y^2} dy. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Si hacemos el cambio de variable $y = a(1 - \cos \theta)$ se tiene

$$dx = \frac{a(1 - \cos \theta)}{a \sin \theta} a \sin \theta d\theta = a(1 - \cos \theta) d\theta \Rightarrow x = a(\theta - \sin \theta), \quad (1.115)$$

es decir, la solución es un cicloide, cuya ecuación parametrizada es

$$\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin \theta) \\ y &= a(1 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (1.116)$$

1.5.4. Principio variacional de Hamilton

Las ecuaciones de Lagrange para un sistema conservativo se pueden obtener a partir de un principio variacional. Este principio fue enunciado por Hamilton en 1834-1835. Establece que el movimiento de un sistema conservativo entre dos puntos dados en los instantes t_1 y t_2 es tal que el funcional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.117)$$

toma un valor extremal, es decir

$$\delta S = 0, \quad (1.118)$$

a primer orden.

A partir de la ecuación de Euler resulta inmediato probar que $\delta S = 0$ implica que

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (1.119)$$

y a la inversa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \delta S = 0. \quad (1.120)$$

Por esta razón, las ecuaciones de Lagrange se llaman en muchos textos ecuaciones de Euler-Lagrange.

Basándose en este principio de Hamilton podemos ver muy fácilmente que

- Las ecuaciones de Lagrange son invariantes: son las mismas al cambiar de coordenadas generalizadas ya que la condición $\delta S = 0$ no depende de las coordenadas

$$\delta S = \sum_i \frac{\delta S}{\delta q_i} \delta q_i = \sum_j \sum_i \frac{\delta S}{\delta q_i} \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \delta q'_j. \quad (1.121)$$

Entonces si

$$\det \left(\frac{\delta q_i}{\delta q'_j} \right) \neq 0 \quad \text{entonces}$$

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0, \forall i \Leftrightarrow \frac{\delta S}{\delta q'_j} = 0, \forall j \quad (1.122)$$

- Si a la lagrangiana le sumamos la derivada total respecto al tiempo de una función de las coordenadas y del tiempo, las ecuaciones de Lagrange son las mismas.

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L' = L + \frac{d}{dt} \Lambda(q, t) \\ S &\rightarrow S' = S + \Lambda(q, t)|_{t_1}^{t_2} \\ \delta S &\rightarrow \delta S' = \delta S + \delta \Lambda(q, t)|_{t_1}^{t_2} = \delta S \end{aligned} \quad (1.123)$$

El principio de Hamilton puede generalizarse de manera que incluya fuerzas no conservativas. Entonces se tendrá

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + W') dt = 0, \quad (1.124)$$

donde $\delta W' = \sum \mathcal{F}_i \delta q_i$ representa el trabajo (virtual) realizado por las fuerzas no conservativas cuando se producen los desplazamiento virtuales δq_i . De este principio se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i. \quad (1.125)$$

1.6. Leyes de conservación

En esta sección veremos cómo se pueden deducir las leyes de conservación en el formalismo lagrangiano.

1.6.1. Conservación del momento

Dada la lagrangiana de un sistema

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t), \quad (1.126)$$

definimos el momento canónico conjugado a la coordenada q_i como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.127)$$

Las ecuaciones de Lagrange para un sistema conservativo las escribimos como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (1.128)$$

Si una coordenada no aparece en la lagrangiana diremos que es una coordenada cíclica o ignorable. Se tendrá entonces que la derivada parcial de L respecto a una coordenada cíclica es cero y de ahí que su momento canónico conjugado se conserva constante.

De este resultado radica la importancia de elegir las coordenadas generalizadas más adecuadas, es decir, es conveniente elegir el máximo número de coordenadas cíclicas. De ese modo obtendríamos relaciones entre las coordenadas generalizadas, velocidades generalizadas y el tiempo de la forma

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = \text{cte}, \quad (1.129)$$

que nos permiten reducir la dimensión del sistema de ecuaciones diferenciales a integrar. Notar también que los momentos canónicos conjugados no tienen, en general, dimensiones de momento lineal ya que la coordenada generalizada no tiene por qué tener dimensiones de longitud. Y, aunque la coordenada generalizada tenga dimensiones de longitud, el momento canónico no tiene por qué ser igual al momento mecánico. Un ejemplo paradigmático de esta situación es el caso de una carga en un campo electromagnético dado por los potenciales Φ y \vec{A} . Si elegimos coordenadas cartesianas

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e \Phi - A_x \dot{x} + A_y \dot{y} + A_z \dot{z}. \quad (1.130)$$

Si Φ y \vec{A} son independientes de x se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m v_x + e A_x = \text{cte}, \quad (1.131)$$

luego es $m v_x + e A_x(y, z)$ lo que se mantiene constante y no el $m v_x$.

Hemos comentado la conveniencia de elegir coordenadas generalizadas adecuadas al problema ya que así podemos tener magnitudes conservadas. Si hay una coordenada cíclica, el momento canónico conjugado a esa coordenada se conserva. Pero aunque no se elija esta coordenada para describir el sistema se debe seguir cumpliendo que el momento conjugado a ella se debe conservar. ¿Cómo podemos obtener esta ley de conservación si no hemos elegido adecuadamente las coordenadas? Aclaremos con un ejemplo lo que queremos decir. Consideremos dos partículas de masas m_1 y m_2 moviéndose en el eje x bajo la acción de una fuerza cuyo potencial depende de la distancia entre ellas. Tomemos como coordenadas generalizadas las coordenadas x_1 y x_2 de las partículas. La lagrangiana será

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - U(|x_1 - x_2|). \quad (1.132)$$

Se observa que ninguna coordenada es cíclica. Podemos, sin embargo, usar como coordenadas generalizadas las siguientes

$$x = x_1, \quad x_r = x_1 - x_2 \Rightarrow x_1 = x, \quad x_2 = x - x_r \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}, \quad \dot{x}_2 = \dot{x} - \dot{x}_r, \quad (1.133)$$

con lo que la lagrangiana sería

$$L(x, x_r, \dot{x}, \dot{x}_r) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x} - \dot{x}_r)^2 - U(|x_r|), \quad (1.134)$$

y al no depender de x , se tiene que

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} + m_2(\dot{x} - \dot{x}_r) = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 \quad (1.135)$$

es una magnitud conservada (el momento total).

Partiendo de

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - U(|x_1 - x_2|) \quad (1.136)$$

observamos que si hacemos la transformación

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_1 + \epsilon \\ x_2 &\rightarrow x_2 + \epsilon \end{aligned} \quad (1.137)$$

con ϵ una constante, se tiene que $\dot{x}_1 \rightarrow \dot{x}_1$, $\dot{x}_2 \rightarrow \dot{x}_2$ y la lagrangiana no varía, es decir,

$$L(x_1 + \epsilon, x_2 + \epsilon, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2). \quad (1.138)$$

Si consideramos ϵ infinitesimal tendremos que, a primer orden,

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial x_1} \epsilon + \frac{\partial L}{\partial x_2} \epsilon = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} \epsilon + \frac{\partial L}{\partial x_2} \epsilon &= 0,\end{aligned}\tag{1.139}$$

y, usando las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} (p_1 + p_2) &= 0 \Rightarrow p_1 + p_2 = \text{cte.} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{cte.}\end{aligned}\tag{1.140}$$

Generalicemos lo que acabamos de ver. Sea un sistema de n partículas con lagrangiana

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t).\tag{1.141}$$

Supongamos que realizamos la transformaci'on

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &\rightarrow \vec{r}_1 + \delta \vec{r}, & \dot{\vec{r}}_1 &\rightarrow \dot{\vec{r}}_1 \\ \vec{r}_2 &\rightarrow \vec{r}_2 + \delta \vec{r}, & \dot{\vec{r}}_2 &\rightarrow \dot{\vec{r}}_2 \\ &\dots & \dots & \\ \vec{r}_n &\rightarrow \vec{r}_n + \delta \vec{r}, & \dot{\vec{r}}_n &\rightarrow \dot{\vec{r}}_n\end{aligned}\tag{1.142}$$

con $\delta \vec{r}$ constante. Esto no es más que una traslación infinitesimal de todo el sistema. Si la lagrangiana no varía

$$L(\vec{r}_1 + \delta \vec{r}, \vec{r}_2 + \delta \vec{r}, \dots, \vec{r}_n + \delta \vec{r}, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) = L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t)\tag{1.143}$$

decimos que presenta una simetría. En este caso una simetría bajo traslación. Entonces,

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r} = 0 \Rightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \Rightarrow \\ \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} &= \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \vec{0},\end{aligned}\tag{1.144}$$

luego el momento total $\sum_i \vec{p}_i$ se conserva.

1.6.2. Conservación del momento angular

Si la lagrangiana fuera invariante bajo una rotación global infinitesimal

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i, \quad (1.145)$$

donde $\delta\vec{\phi} = \delta\phi\vec{n}$ representa una rotación de ángulo $\delta\phi$ alrededor del eje \vec{n} que pasa por el origen. Se tiene

$$\dot{\vec{r}}_i \rightarrow \dot{\vec{r}}_i + \delta\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_i, \quad (1.146)$$

y, al ser la lagrangiana invariante,

$$\begin{aligned} & L(\vec{r}_1 + \delta\vec{\phi} \times \vec{r}_1, \vec{r}_2 + \delta\vec{\phi} \times \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n + \delta\vec{\phi} \times \vec{r}_n, \\ & \dot{\vec{r}}_1 + \delta\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2 + \delta\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n + \delta\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_n, t) = \\ & L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t). \end{aligned} \quad (1.147)$$

Aplicando Taylor

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot (\delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (\delta\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}_i) = \\ & \sum_i \delta\vec{\phi} \cdot \left(\vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right) + \sum_i \delta\vec{\phi} \cdot \left(\dot{\vec{r}}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.148)$$

Usando las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \Rightarrow \delta\vec{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = 0 \Rightarrow \\ & \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \text{cte}, \end{aligned} \quad (1.149)$$

que es la conservación del momento angular total.

Todas estas leyes de conservación se obtienen a partir de simetrías que presenta la lagrangiana: simetría bajo traslación y rotación. Veremos más adelante el teorema de Noether que engloba lo que hemos estudiado.

1.6.3. Hamiltoniana. Conservación de la energía

Veamos ahora qué ocurre si la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo. Se tiene que

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n), \quad (1.150)$$

con lo que

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i, \quad (1.151)$$

y, usando las ecuaciones de Lagrange y la definición del momento canónico, obtenemos

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i (\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i) = \frac{d}{dt} \sum_i p_i \dot{q}_i, \quad (1.152)$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = 0. \quad (1.153)$$

Se tiene, entonces, que

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - L \equiv H \quad (1.154)$$

es una función, que llamaremos hamiltoniana del sistema, que se mantiene constante.

La función hamiltoniana tiene una interpretación sencilla en el caso en que la energía potencial no dependa de velocidades y las ligaduras no dependan del tiempo, es decir, la relación entre \vec{r}_i y las coordenadas generalizadas q_j sean de la forma

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (1.155)$$

es decir, ligaduras holónomas esclerónomas.

En ese caso

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - U) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.156)$$

Además

$$\begin{aligned} T &= \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\vec{r}}_a^2 = \sum_a \frac{1}{2} m_a \left(\sum_i \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 = \\ &= \sum_a \frac{1}{2} m_a \sum_{i,j} \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \\ &= \sum_{i,j} \left(\sum_a \frac{1}{2} m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = \\ &= \sum_{i,j} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{j,k} b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (1.157)$$

A partir de esta expresión podemos obtener el momento canónico conjugado p_i

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j,k} b_{jk} \delta_{ij} \dot{q}_k + \sum_{j,k} b_{jk} \dot{q}_j \delta_{ik} = \sum_k b_{ik} \dot{q}_k + \sum_j b_{ji} \dot{q}_j = \sum_j b_{ij} \dot{q}_k + \sum_j b_{ji} \dot{q}_j = \sum_j (b_{ij} + b_{ji}) \dot{q}_j = 2 \sum_j b_{ji} \dot{q}_j, \quad (1.158)$$

donde hemos usado el hecho de que $b_{ij} = b_{ji}$ que se deduce inmediatamente a partir de la definición de b_{ij} . Hemos usado también la ‘delta de Kronecker’, δ_{ij} , que toma el valor 1 si $i = j$ y 0 en el caso en que $i \neq j$. Si ahora calculamos $\sum_i p_i \dot{q}_i$ se obtiene

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i 2 \sum_j b_{ji} \dot{q}_j \dot{q}_i = 2 \sum_{ij} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T, \quad (1.159)$$

con lo que

$$H = 2T \quad L = 2T \quad (T + U) = T + U, \quad (1.160)$$

es decir, en este caso la hamiltoniana coincide con la energía total del sistema y se conserva.

1.6.4. Teorema de Noether

Sea un sistema cuya lagrangiana es la función

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t), \quad (1.161)$$

y consideremos la transformación

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \delta q_i. \quad (1.162)$$

Entonces, la variación en la lagrangiana es

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i. \quad (1.163)$$

Si ahora usamos las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.164)$$

obtenemos

$$\delta L = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right). \quad (1.165)$$