

Tècniques Experimentals I

PRÀCTIQUES DE MECÀNICA I ONES (M)

M1 Roda de Maxwell

M2 Oscil·lacions acoblades: Freqüències pròpies de vibració

M3 Pèndol de Kater

M4 Pràctiques de demostració i il·lustratives de mecànica i ones

M1 RODA DE MAXWELL

OBJECTIUS

Estudiar les equacions de la dinàmica d'un sòlid rígid i la conservació de l'energia mecànica.

Mesurar l'acceleració de caiguda de la roda de Maxwell i del seu moment d'inèrcia.

MATERIAL

Roda de Maxwell, suport de ferro, regle graduat, balança, peu de rei, trípode.

FONAMENT TEÒRIC

La roda de Maxwell és un sistema compost per un disc rígid, de massa m i radi R , solidàriament unit a un eix (de radi r) perpendicular al seu pla i que passa pel seu centre de massa. Aquest disc està suspès mitjançant dues cordes dels extrems del seu eix, de manera que pot descendir (o ascendir), mentre les cordes es desenrotllen (o s'enrotllen), mantenint l'eix perpendicular a la vertical, tal com es pot veure en la figura 1. Suposem que les cordes són inextensibles i de massa negligible i s'enrotllen entorn de l'eix del disc.



Figura 1.- Dispositiu experimental: Roda de Maxwell

Quan es deixa lliure el disc de Maxwell, aquest cau a mesura que es van desenrotllant les cordes que el subjecten, i el seu centre de massa descriu un moviment de translació (caiguda) simultani amb la rotació del disc entorn de l'eix que passa pel seu centre de massa. La figura 2 mostra un esquema de les forces que actuen sobre el disc durant el seu moviment de descens. El disc descendeix sota l'acció del seu pes (mg) i de la tensió en els fils (T), de manera que roda sense lliscar, amb el centre instantani de rotació en el punt C, de contacte del fil amb l'eix.

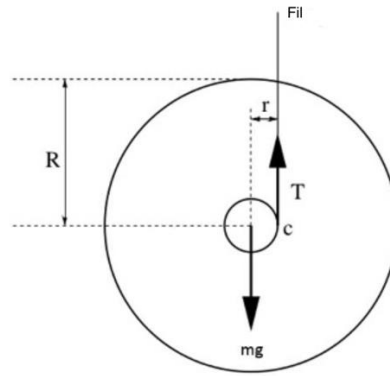


Figura 2. Esquema de les forces que actuen sobre la roda de Maxwell.

En general, les equacions fonamentals de la dinàmica de la rotació per a un sòlid rígido són:

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{M}_O = I_O \vec{\alpha} \quad (2)$$

en què \vec{a} és l'acceleració del centre de massa del sòlid, M_O el moment de la força respecte del punt O, $\vec{\alpha}$ l'acceleració angular i I_O és el moment d'inèrcia del sòlid respecte del punt O, que pot ser un punt fix o el centre de massa del sòlid. El moment d'inèrcia $I_O = \int r^2 dm$, només depèn de la massa i la geometria del cos rígido.

Si comparem la segona llei de Newton, eq. (1), amb l'eq. (2), veiem que són formalment anàlogues, motiu pel qual se sol denominar *equació fonamental de la dinàmica de rotació*. Veiem que, en el cas de les rotacions, el moment d'inèrcia té un paper anàleg a la massa inercial en el moviment de translació, i representa la inèrcia del cos a la rotació.

Si apliquem les equacions del moviment al descens de l disc de Maxwell, tal com es representa esquemàticament en la figura 2, tindrem:

$$\Sigma F = mg - T = ma \quad (3)$$

$$\Sigma M_{CM} = r \times T = rT = I_{CM} \alpha \quad (4)$$

en què M_{CM} és el moment de la força respecte del centre de masses (CM), I_{CM} el moment d'inèrcia del disc respecte del centre de masses i g l'acceleració de la gravetat. Hem considerat que el moviment del centre de masses és rectilini i que la rotació es realitza entorn d'un eix perpendicular a la vertical, amb orientació fixa. Com que el disc efectua un redolament entorn del punt C, hi ha una lligadura entre l'acceleració del centre de masses, a , i l'acceleració angular α , donada per:

$$a = \alpha r \quad (5)$$

on r és el radi de l'eix sobre el qual gira el disc. Resolent el sistema d'equacions (3), (4) i (5), podem obtenir l'acceleració a amb què cau el centre de masses del disc:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{m r^2}} \quad (6)$$

veiem que l'acceleració és constant i paral·lela al desplaçament, cosa que indica que el moviment de baixada del disc de Maxwell és uniformement accelerat. El valor de l'acceleració a és menor que l'acceleració de la gravetat i només seria igual a g si el disc no girara.

En l'experiment deixarem caure el disc de Maxwell en repòs des d'una certa altura, que triem com a origen, per la qual cosa l'altura descendida $h(t)$ i la velocitat instantània del centre de masses $v(t)$ tindran aquesta dependència temporal:

$$h = \frac{1}{2} a t^2 \quad (7)$$

$$v = a t \quad (8)$$

hem de recordar que a és l'acceleració del centre de massa del disc de Maxwell, donada per l'eq. (6).

L'energia total E del disc de Maxwell, si negligim les pèrdues per fregament, serà donada per la suma de l'energia potencial gravitatòria, $E_p = -mgh$, de l'energia cinètica de translació del centre de massa, $E_{c,t} = \frac{1}{2} m v^2$, i de l'energia cinètica de rotació entorn de l'eix que passa pel seu centre de massa, $E_{c,r} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$:

$$E = E_p + E_{c,t} + E_{c,r} = -mgh + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \quad (9)$$

on ω és velocitat angular de gir del disc. Hem pres com a origen de l'energia potencial gravitatòria (i, per tant, d'altures) el punt més alt des d'on comença la caiguda del disc. En aquest punt inicial $t = 0$, tindrem que $h(t = 0) = 0$, i $E_p(t = 0) = 0$, i per davall del punt inicial l'energia potencial serà menor, és a dir, negativa. Si tenim en compte la relació existent entre la velocitat lineal del centre de massa i l'angular: $v(t) = r\omega(t)$, podem expressar l'energia total del sistema, equació (9), de la forma:

$$E(t) = -mgh(t) + \frac{1}{2} \left(m + \frac{I_{CM}}{r^2} \right) [v(t)]^2 \quad (10)$$

D'altra banda, l'energia del sistema és una constant del moviment, per la qual cosa la seua derivada temporal ha de ser nul·la, de manera que:

$$0 = -mgv(t) + \left(m + \frac{I_{CM}}{r^2} \right) v(t) \frac{dv(t)}{dt} \quad (11)$$





Per a comprovar experimentalment la llei de conservació de l'energia mecànica és convenient fer explícites les dependències temporals de la distància recorreguda pel disc en la seua caiguda i la seua velocitat. A partir de l'expressió (11) podem comprovar que el valor de l'acceleració lineal del centre de masses, a , quan cau el disc que coincidirà amb el valor obtingut per l'equació (6).


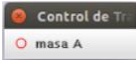
METODOLOGIA

El muntatge experimental de la roda de Maxwell consta d'una estructura de suport (varetes) de la qual se subjecta el disc. Per a efectuar els mesurament, en primer lloc i si és necessari, cal alinear horitzontalment el disc amb el fil completament desenrotllat, mitjançant l'ajust del caragol situat en la barra horitzontal del qual penja. A continuació s'enrotlla el fil a banda i banda del disc, procurant que el debanat siga homogeni i compacte a banda i banda de l'eix. És important que es realitzi un desenrotllat del disc de prova, i que es verifiqui que el disc no oscil·la quan cau. S'ha de determinar el valor de la massa del disc m , així com el radi de l'eix r (no del disc).

La realització de l'experiment consisteix a gravar amb el mòbil la caiguda del disc de Maxwell. Aquest enregistrament serà analitzada posteriorment amb el programa Tracker, que permetrà conèixer la distància recorreguda pel disc en funció del temps $h(t)$, així com la seua velocitat $v(t)$. És recomanable que s'enrotlle la corda del disc de manera que es dispose en la part més alta del recorregut amb l'eix paral·lel a l'horitzontal. S'ha de col·locar i gravar un regle graduat que servirà per a calibrar la distància. Hem de gravar els tres primers rebots del disc i utilitzar en el programa Tracker la caiguda del disc després del seu primer rebot.

Per a utilitzar el programa Tracker, de programari lliure, creat específicament per a analitzar experiments de física, s'han de seguir els passos següents:

1. Obrir el programa Tracker i triar el vídeo que volem analitzar amb l'opció , o arrossegant el vídeo.
2. La rotació del vídeo es realitza en «Vídeo», «Filtres», «Nou» i «Rotate». La visió de la caiguda del disc ha de ser vertical.
3. Visualitzar el vídeo i triar el número de fotograma en el qual el disc just comença a descendir després del primer rebot, això em fixa el temps inicial. A continuació es tria el fotograma de la situació final de l'experiment, abans que el disc rebote (temps final).
4. Amb la icona  es trien els fotogrames inicial i final del nostre experiment.
5. En la icona  «Nou» i «Vara de calibratge» es realitza el calibratge de la distància; per a fer-ho s'utilitza el regle graduat i s'especifica el valor de la distància triada (en les unitats que vulguem).
6. En la icona  es defineixen la inclinació dels eixos X i Y. És útil utilitzar el regle, i triar l'eix Y paral·lel a aquesta.

7. Accionar la icona  i triar l'opció «Massa puntual». Apareix la icona , es fa clic en la icona «Massa A», i es tria l'opció «Trajectòria automàtica». Això fa que s'obriga una finestra nova «Autotracker: massa A posició».

8. Seguidament es tria la massa que vull que analitzi el programa. És convenient que es trii el pivot roig del final de l'eix del disc. Per fer-ho, prem les tecles Control+Majúscula i fes clic amb el ratolí en el lloc on hi ha la massa a analitzar. Apareix un cercle vermell que ha d'envoltar tot el pivot roig.

9. Per a començar l'anàlisi del moviment es pressiona el botó «Search» i automàticament apareix en la pantalla un gràfic i una sèrie de dades. Per defecte, en el gràfic apareix el valor de la component X de la posició en funció del temps, però nosaltres podem canviar la variable que es representa en el gràfic, punxant sobre l'eix X. També podem triar la taula de dades que volem que ens generi el programa, amb només fent clic en la icona «Dades». En el nostre problema específic estem interessats a conèixer la distància vertical i la velocitat de caiguda de la roda.

10. Una vegada triades les dades d'interès podem copiar aquestes dades a qualsevol arxiu i analitzar-lo mitjançant un programa gràfic, així com realitzar els càlculs o representacions gràfiques que considerem oportunes.

RESULTATS

Representeu gràficament l'espai recorregut pel disc en funció del temps. Realitzeu la representació gràfica adequada que us permeti obtenir l'acceleració del centre de masses de la caiguda del disc.

Calculeu l'acceleració lineal i el moment d'inèrcia del disc de Maxwell amb el seu corresponent error.

Representeu gràficament la velocitat de caiguda del disc en funció del temps. Obtingueu a partir d'aquesta representació l'acceleració lineal. Compareu el resultat amb l'obtingut anteriorment. Determineu quina mesura és més precisa.

Representeu gràficament l'energia potencial gravitatòria, l'energia cinètica de translació, l'energia cinètica de rotació en funció del temps.

Representeu en una mateixa gràfica l'energia potencial gravitatòria, l'energia cinètica total i l'energia total del sistema.

Comproveu si l'energia total del sistema és una constant del moviment.

Discutiu a partir dels resultats obtinguts, la validesa del teorema de conservació de l'energia mecànica.

QÜESTIONS

1. Si feu el gràfic en paper logarítmic de l'altura recorreguda pel disc en funció del temps de caiguda, per a què serveix el pendent de la recta resultant? Com podeu determinar el moment d'inèrcia del disc?
2. Quan es representa el valor de cada energia (potencial gravitatòria, cinètica de translació i cinètica de rotació) en funció del temps, quin tipus de corbes s'obtenen?
3. Expliqueu el significat que el camp gravitatori és conservatiu. Relacioneu-ho amb el principi de conservació de l'energia mecànica.
4. És possible definir sempre l'energia potencial d'una interacció? Esmenteu alguns exemples.
5. En quin tipus d'energia es converteix la major part de l'energia potencial gravitacional durant la caiguda del disc de Maxwell?

M2 OSCIL·LACIONS ACOBLADES: FREQÜÈNCIES PRÒPIES DE VIBRACIÓ

OBJECTIUS

Avaluar experimentalment els fenòmens que apareixen quan interaccionen diversos oscil·ladors acoblats en un sistema.

Analitzar els modes normals i les freqüències pròpies de vibració d'oscil·ladors acoblats amb dos graus de llibertat.

Entendre el concepte de mode normal de vibració i aprendre com s'aconsegueix que un sistema oscil·le en aquest mode.

MATERIAL

Carril d'aire, carrets lliscants, molls (de dues classes), cronòmetre, balança, regle graduat, pesos.

FONAMENT TEÒRIC

En aquesta pràctica estudiarem les oscil·lacions acoblades d'un sistema, que es produeixen quan es connecten diversos oscil·ladors de manera que l'energia es pugui transmetre dels uns als altres, en qualsevol sentit. Quan els diferents graus de llibertat del sistema interaccionen, ens trobem amb una situació complexa, i el moviment que es genera pot ser summament complicat, fins i tot, no periòdic.

En general, el moviment de qualsevol sistema oscil·lant es pot estudiar en funció de les coordenades normals. Cadascuna d'aquestes coordenades té associat un mode normal de vibració caracteritzat per oscil·lar a una freqüència ben definida, la seua freqüència *pròpia* o *característica*. El moviment del sistema, per complicat que siga, es pot descriure com una superposició dels modes normals de vibració.

Les condicions inicials del sistema es poden establir sempre de manera que en el moviment només una de les coordenades normals varí amb el temps; en aquestes circumstàncies direm que s'ha excitat només un dels modes normals del sistema. La identificació de cadascun dels modes normals permet entendre el comportament del sistema en situacions més complicades, com, per exemple, sota l'acció d'una pertorbació externa (vibracions forçades).

Si el sistema té n graus de llibertat (per exemple, està format per n oscil·ladors monodimensionals) hi haurà en general n modes normals de vibració, alguns dels quals poden ser idèntics. El mètode dels modes normals per a estudiar sistemes oscil·lants té utilitat en nombrosos camps de la física com ara el moviment microscòpic en els sòlids cristal·lins o les oscil·lacions del camp electromagnètic.

La teoria general del moviment oscil·latori d'un sistema de partícules amb un nombre finit de graus de llibertat la va formular Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) entre els anys 1762 i 1765, encara que el predecessor va ser Daniel Bernoulli (1700-1782) amb un treball publicat el 1753.

Comencem l'estudi de sistemes amb graus de llibertat acoblats a través d'un cas senzill, un sistema format per dos oscil·ladors mecànics connectats. Suposem que tenim un sistema oscil·lant compost per dos cossos de masses m_1 i m_2 unides per molls de constants elàstiques, k_1 , k_{12} , k_2 , tal com mostra la figura 1. En la posició d'equilibri les longituds dels molls són L_1 , L i L_2 que corresponen a la situació en què l'energia potencial és mínima. Quan el moviment es produeix en una dimensió, el sistema resultant tindrà dos graus de llibertat, representats per les coordenades y_i ($i = 1,2$) de les masses m_1 i m_2 , que mesurem a partir de la posició $y = 0$, que es troba en la part esquerra de la figura 1.

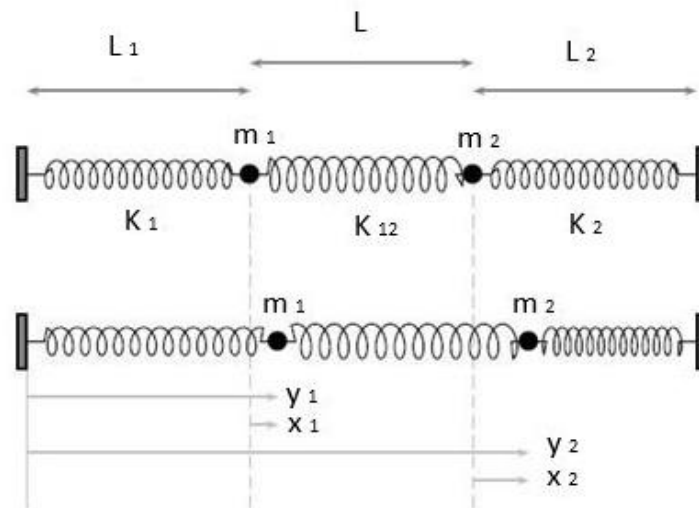


Fig.1. Sistema de dos oscil·ladors acoblats amb tres molls

Per a obtenir les equacions de moviment d'aquest sistema aplicarem la Mecànica Analítica en comptes d'utilitzar la segona llei de Newton (encara que, per descomptat, s'obtenen els mateixos resultats).

La mecànica lagrangiana és una reformulació de la mecànica newtoniana, introduïda per Joseph-Louis de Lagrange, en què la trajectòria d'un objecte s'obté determinant la trajectòria que minimitza l'acció, que és la integral del lagrangiana amb el temps; en què el lagrangiana és l'energia cinètica de l'objecte menys la seua energia potencial. L'avantatge d'aquesta nova formulació de les equacions del moviment de Newton és que simplifica considerablement molts problemes físics, ja que la seua formulació es basa en raonaments energètics, al contrari que Newton, que basava els seus raonaments en forces, a més de no dependre del sistema de referència triat.

Per al sistema que estudiarem en el laboratori de dos oscil·ladors acoblats, tal com es representen en la figura 1, el lagrangiana \mathcal{L} corresponent està donat per l'expressió:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 - \frac{1}{2}k_1(y_1 - L_1)^2 - \frac{1}{2}k_{12}(y_2 - y_1 - L)^2 - \frac{1}{2}k_2(y_2 - L - L_1)^2 \quad (1)$$

en què hem tingut en compte que el lagrangià està donat per l'energia cinètica menys l'energia potencial del sistema.

Si com a coordenades generalitzades utilitzem les coordenades relatives a la posició de les masses m_1 i m_2 a partir de la seua posició d'equilibri del sistema (x_1 i x_2), simplifiquem el lagrangià, que estarà donat per:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_{12}(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 \quad (2)$$

havent definit $x_1 \equiv y_1 - L_1$ i $x_2 \equiv y_2 - L_1 - L$.

Les equacions del moviment del sistema s'obtenen a partir de les equacions d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

en què x_i ($i = 1,2$) són les coordenades generalitzades relatives a la posició d'equilibri de les masses.

Així doncs, a partir de l'eq. (3), obtenim les equacions de moviment del sistema, que seran:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_{12}(x_1 - x_2) = 0 \quad (4a)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 + k_{12}(x_2 - x_1) = 0 \quad (4b)$$

que són dues equacions diferencials lineals de segon ordre acoblades.

Les equacions del moviment (4a) i (4b) es poden escriure matricialment de la forma:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_1 + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Hem de notar que la matriu és simètrica, i que l'equació anterior té la forma típica de l'equació del moviment d'un oscil·lador harmònic simple ($m\ddot{x} + kx = 0$) amb la significativa diferència que els "coeficients" de cada terme de l'equació diferencial han passat a ser matrius i el grau de llibertat ha passat a ser un conjunt de graus de llibertat, un vector.

Podem concloure que en l'acoblament de dos oscil·ladors mecànics hi ha determinats moviments col·lectius del sistema, els modes normals, que es comporten com a simples oscil·ladors harmònics. Per tant, a l'hora de calcular les freqüències pròpies del sistema provarem una solució de la forma:

$$x_1(t) = Ae^{i\omega t} \quad (6a)$$

$$x_2(t) = Be^{i\omega t} \quad (6b)$$

Si substituïm en les equacions del moviment (4a) i (4b), s'obté el següent sistema d'equacions:

$$(k_1 + k_{12} - m_1\omega^2)A - k_{12}B = 0 \quad (7a)$$

$$-k_{12}A + (k_{12} + k_2 - m_2\omega^2)B = 0 \quad (7b)$$

Perquè aquest sistema homogeni tinga una solució diferent de la trivial ($A = B = 0$), una equació haurà de ser combinació lineal de l'altra, de manera que el determinant dels coeficients A i B ha de ser nul:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_{12} - m_1\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} + k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Resolent l'equació resultant s'obtenen les freqüències pròpies del sistema, ω_1 i ω_2 ,

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k_1}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} + \frac{k_{12}}{2\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1+k_{12}}{2m_1} - \frac{k_2+k_{12}}{2m_2}\right)^2 + \frac{k_{12}^2}{m_1m_2}}} \quad (9)$$

on $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ és la massa reduïda del sistema. Com que el sistema analitzat té dos graus de llibertat, hem obtingut dues freqüències pròpies d'oscil·lació, ω_1 i ω_2 , corresponents al signe + i al signe – en l'equació (9).

Finalment, és necessari determinar la relació entre els coeficients (amplituds) A i B (vegeu equacions (6a) i (6b)), que serà diferent per a cadascuna de les freqüències pròpies del sistema obtingudes en l'eq. (9).

Substituint el valor de ω_1 i ω_2 en qualsevol de les equacions (7), obtenim:

$$B = \frac{k_1+k_{12}-m_1\omega_i^2}{k_{12}} A \quad (10)$$

per a $i=1,2$. Aquesta relació entre les amplituds A i B ens permet obtenir una relació entre els desplaçaments de les masses m_1 i m_2 en cada instant, a partir de les equacions. (6):

$$\frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \frac{k_1+k_{12}-m_1\omega_i^2}{k_{12}} \quad (11)$$

Seguidament calcularem les freqüències pròpies i les amplituds en alguns casos particulars, on se simplifica el càlcul presentat anteriorment, i que realitzarem experimentalment en el laboratori.

CAS 1.- Les masses oscil·lants són iguals $m_1 = m_2 = m$, i els tres molls són iguals $k_1 = k_{12} = k_2$.

A partir de l'eq. (9) obtenim les freqüències pròpies ω_1 i ω_2 , i la relació entre amplituds per als dos modes d'oscil·lació, que es calculen a partir de l'eq. (10),

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \rightarrow B = -A \quad \text{Mode antisimètric} \quad (12a)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow B = A \quad \text{Mode simètric} \quad (12b)$$

De l'eq. (12a) se'n dedueix que les dues masses oscil·len en oposició de fase amb freqüència ω_1 , tal com es representa en la figura 2a. A aquest mode d'oscil·lació se'l coneix com a *mode antisimètric*.

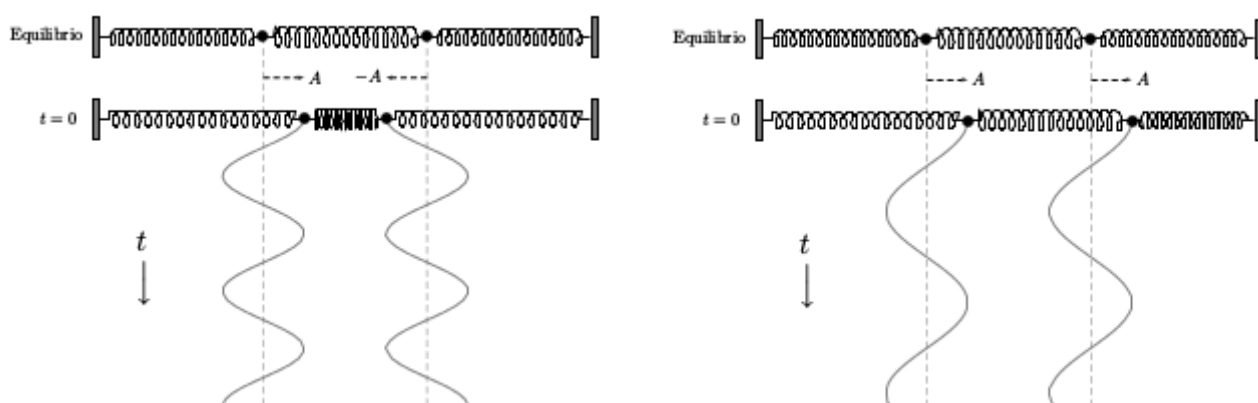


Figura 2. Evolució temporal de (a) mode antisimètric de vibració i (b) mode simètric de vibració

El mode de vibració donat per l'eq. (12b) correspon a dues masses que vibren en fase, tal com s'observa en la fig. 2(b) i se'l coneix com a mode de vibració simètric. Si volem excitar només el mode simètric, triarem que les condicions inicials siguin $x_1(t=0) = x_2(t=0) = A$ abans de començar la vibració, i si volem excitar el mode antisimètric, triarem que $x_1(t=0) = A$ i que $x_2(t=0) = -A$. Qualsevol moviment més general del sistema serà una combinació lineal dels modes simètrics i antisimètrics.

El fet que el mode antisimètric tinga una freqüència d'excitació més elevada que el mode simètric és una conclusió de caràcter general. En un sistema complex, format per oscil·ladors linealment acoblats, el mode que tinga el grau de simetria més alt tindrà la freqüència més baixa. Quan la simetria desapareix, els molls hauran de "treballar més intensament" en els modes de vibració antisimètric, i aquesta circumstància dona lloc a una elevació de la freqüència de vibració.

CAS 2.- Les masses són iguals $m_1 = m_2 = m$, els molls dels extrems són iguals $k_1 = k_2 = k$, i el moll central és diferent $k_{12} \neq k$.

En aquest cas tenim dos oscil·ladors idèntics acoblats per mitjà d'un moll de constant elàstica diferent k_{12} . Les freqüències pròpies i els modes d'oscil·lació seran:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \rightarrow B = -A \quad (13a)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow B = A \quad (13b)$$

en què s'ha obtingut un mode antisimètric (eq.(13a)) de vibració i un mode simètric (eq.(13b)) amb una freqüència més baixa.

És interessant remarcar que si en el sistema mantenim quieta la massa m_2 i deixem que només oscil·le la massa m_1 , la freqüència d'oscil·lació serà $\omega_0 = \sqrt{\frac{k+k_{12}}{m}}$, i quan mantenim quieta la massa m_1 i oscil·la només la massa m_2 , ho farà a la mateixa freqüència ω_0 . Per tant, l'efecte de l'acoblament és separar en dos la freqüència ω_0 (sense acoblament), fent-se una de les freqüències característiques més alta que la corresponent al moviment no acoblat i l'altra més baixa, $\omega_1 > \omega_0 > \omega_2$. Si tinguérem tres masses idèntiques acoblades, tindríem novament un desdoblament de les freqüències pròpies del sistema, amb una freqüència més alta, una altra igual i una altra més baixa que ω_0 . La regla general és que per a un nombre parell de n oscil·ladors iguals acoblats hi haurà $\frac{n}{2}$ freqüències pròpies més altes que ω_0 i $\frac{n}{2}$ freqüències pròpies més baixes que ω_0 ; si n és imparell, una freqüència pròpia serà igual a ω_0 i les $n - 1$ freqüències pròpies restants es distribuïran simètricament per damunt i per davall de ω_0 . És suggeridor apreciar l'analogia que existeix amb l'efecte Zeeman en els espectres atòmics. En tots dos casos apareix un desdoblament simètric de la freqüència produït per una interacció, en un cas per l'aplicació d'un camp magnètic i en l'altre per l'acoblament de partícules per mitjà de molls.

METODOLOGIA

Per a realitzar aquest experiment utilitzem un carril d'aire, que és un perfil d'alumini en el qual s'introdueix aire a pressió, per a minimitzar el fregament. El moviment dels lliscadors o carrets (les masses del nostre sistema) es desplacen sobre ell en una dimensió. Els carrets estan compostos per un perfil triangular d'alumini amb dos orificis en els extrems que permeten acoblar els molls (tal com mostra la figura 3). És possible apilar diversos carrets per a duplicar-ne la massa. Heu d'utilitzar sempre el carril d'aire a la màxima potència.

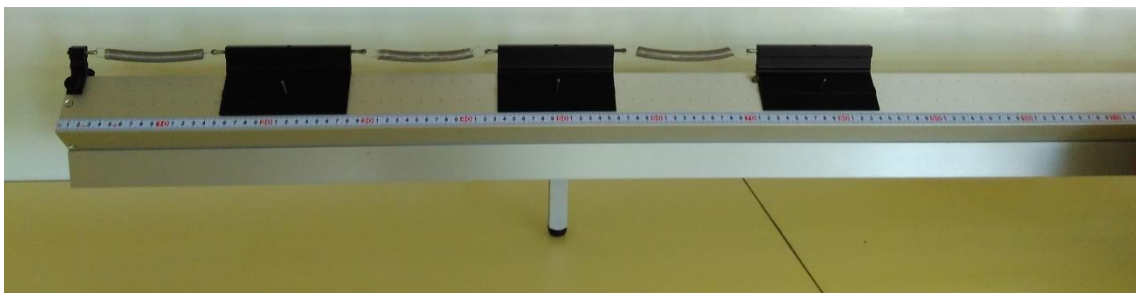


Figura 3.- Dispositiu experimental

La realització d'aquesta pràctica consisteix en la realització dels apartats següents, en els quals es determinarà la freqüència pròpia de vibració quan els molls estan aïllats i quan estan acoblats entre si.

1. Determineu la constant elàstica de cadascun dels molls per separat (mètode dinàmic). Per a fer-ho subjecteu un dels carrets als suports fixos per mitjà de dos molls iguals. Els molls s'han d'estirar amb moderació per a evitar que la deformació siga permanent. Desplaceu el carret lleugerament de la seua posició d'equilibri i

mesureu el període de les seues oscil·lacions utilitzant un cronòmetre. Per a disminuir l'error de la mesura és convenient mesurar el temps transcorregut durant almenys deu oscil·lacions completes. Realitzeu l'experiment diverses vegades per a reduir l'error en el mesurament. La freqüència pròpia de vibració us permetrà conèixer la constant elàstica del moll. Realitzeu aquest apartat per als dos molls que utilitzareu.

2. Determineu la constant elàstica de cadascun dels molls per un mètode alternatiu (mètode estàtic). Col·loqueu el moll verticalment en un suport, aneu afegint pesos i mesureu quant s'allarga el moll respecte de la posició inicial (posició d'equilibri). Representeu gràficament el pes davant de l'allargament, i aplicant la llei de Hooke, calculeu la constant elàstica del moll. Realitzeu aquest apartat per als dos molls.

3. Oscil·ladors acoblats. Cas de dues masses iguals unides per tres molls iguals. Munteu experimentalment el sistema representat en la figura 1. La massa serà la del planador sense pesos. Feu que el sistema oscil·le en cadascun dels dos maneres modes de vibració per separat. Per tal fi heu de col·locar al sistema amb les condicions inicials adequades, és a dir, heu de fixar les posicions inicials de les masses de tal manera que es verifiquen les equacions. (12a) i (12b). Realitzeu l'experiment amb els tres molls llargs o amb els tres molls curts. Quan us assegureu que el sistema oscil·la en un mode determinat (simètric i antisimètric), determineu la freqüència pròpia de vibració experimentalment. Per a fer-ho mesureu el temps que tarda a donar un nombre determinat d'oscil·lacions ($n > 15$). Feu el mesurament diverses vegades i calculeu la freqüència pròpia amb el seu error.

5. Oscil·ladors acoblats. Repetiu l'apartat anterior per al cas de dues masses iguals unides per tres molls, en què els dels extrems són iguals i el moll central té una constant elàstica diferent.

RESULTATS

Per al cas en què tingueu només una única massa, realitzeu una taula amb les dades del temps que tarda a oscil·lar almenys deu vegades, calculeu el període amb el seu error. Obtingueu la freqüència de vibració i la constant elàstica de cadascun dels molls.

Compareu la constant elàstica del moll gran i xicotet obtingut a partir de les mesures realitzades pel mètode estàtic i el mètode dinàmic. La concordança entre tots dos resultats és bona? Discuteix i justifica la discrepància obtinguda.

Per al sistema d'oscil·ladors acoblats, realitzeu una taula amb els valors del temps d'almenys deu oscil·lacions per a cada mode propi del sistema. Calculeu la freqüència de vibració. Realitzeu aquesta taula per als casos 3 i 4 de l'apartat de metodologia.

Compareu en tots els casos analitzats els resultats experimentals amb els càlculs teòrics. En quins modes s'assemblen més les freqüències experimentals a les teòriques, en els simètrics o en els antisimètrics? Per què creieu que ocorre això?

Raoneu les possibles causes d'error més importants en aquest experiment.

Indiqueu si l'acoblament del sistema dona lloc a un desdoblament de les freqüències. Hi ha diferències significatives entre les freqüència natural, simètrica i antisimètrica?

Indiqueu si heu trobat diferències en la constant elàstica del moll a partir dels mesuraments realitzats pel mètode estàtic i dinàmic. A què creieu que es deu? Com ho podríeu solucionar?

QÜESTIONS

1. A què es denomina *mode pròpia d'oscil·lació d'un sistema*?
2. Expliqueu en què consisteix el fenomen físic de la ressonància. Indiqueu exemples de ressonància en la vida quotidiana.
3. Per què alguns cantants són capaços de trencar amb els seus aguts el vidre d'una copa?
4. Per què la freqüència pròpia de el mode antisimètric és més alta que la del mode simètric? Justifiqueu la resposta.
5. Expliqueu en què consisteix l'efecte Zeeman i quines analogies trobeu amb les oscil·lacions acoblades.
6. Les molècules tenen els àtoms lligats entre si per mitjà de l'enllaç químic. Aquest enllaç no és completament rígid, sinó que cada àtom pot vibrar al voltant de la seua posició d'equilibri. Des del punt de vista vibracional, l'enllaç s'assembla a un moll, i el moviment dels àtoms es pot descriure estudiant els modes de vibració de la molècula. Supposeu que en una molècula formada pels àtoms A i B substituïm l'àtom B per un isòtop, C, més pesat però amb les mateixes característiques químiques. A la vista de la vostra experiència en aquesta pràctica, com creieu que canviarà la freqüència de vibració dels modes normals?

M3 PÈNDOL DE KATER

OBJECTIUS

Analitzar el moviment oscil·latori d'un pèndol físic.

Determinar l'acceleració de la gravetat amb el pèndol reversible de Kater .

MATERIAL

Pèndol de Kater, cinta mètrica, cronòmetre, regla sobre suport horitzontal.

FONAMENT TEÒRIC

El pèndol de Kater és un pèndol físic reversible, ideat per Henry Kater en 1817 com un encàrrec de la Royal Society de Londres, destinat a mesurar la acceleració de la gravetat local. Aquest pèndol va ser dissenyat per la necessitat de fer mesuraments gravimètrics precisos que permeteren un bon coneixement del terreny, cosa que era d'extremada utilitat en cartografia, topografia i prospecció minera.

En primer lloc estudiarem el pèndol físic, que consisteix en un cos rígid de massa m , suspès d'un punt de suspensió (O) que dista una distància d_{cm} del seu centre de massa (cm) i que pot girar lliurement al voltant d'un eix fix horitzontal, en un pla vertical, tal com mostra la figura 1.

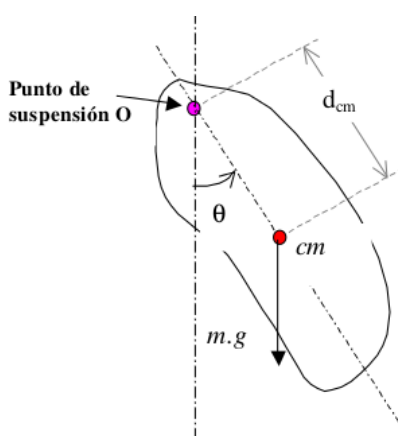


Figura 1. Esquema d'un pèndol físic

Quan el cos se separa de la posició d'equilibri i se solta, presentarà un moviment oscil·latori. Per a obtenir l'equació del moviment del cos, ens basem en l'equació de la dinàmica rotacional:

$$\vec{M}_O = I_O \vec{\alpha} \quad (1)$$

en què M_O és el moment de la força respecte del punt O, I_O el moment d'inèrcia del cos al voltant del punt O, i α l'acceleració angular del cos. Aquestes tres magnituds són, respectivament, l'anàleg rotacional de la força, la massa i l'acceleració lineal del moviment lineal o de translació.

El pes del cos $m\vec{g}$, aplicat en el centre de massa produeix un moment respecte d'un eix de rotació que passa pel punt O, donat per:

$$\vec{M}_O = \vec{d}_{cm} \times m\vec{g} \quad (2)$$

Utilitzant la definició de producte vectorial, prenent com a positiu el moviment de rotació en sentit contrari al de les manetes del rellotge, i tenint en compte que el moment del pes té signe contrari al desplaçament, s'obté:

$$M_O = -mgd_{cm} \sin \theta \quad (3)$$

en què θ és l'angle entre els vectors \vec{d}_{cm} i $m\vec{g}$, tal com mostra la figura 1. La definició d'acceleració angular, $\alpha = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, juntament amb les anteriors equacions, permet escriure:

$$\ddot{\theta} = - \frac{mgd_{cm} \sin \theta}{I_O} \quad (4)$$

Per a oscil·lacions xicotetes suposem vàlida l'aproximació $\sin \theta \cong \theta$, i obtenim l'equació del moviment del pèndol físic:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd_{cm}}{I_O} \theta = 0 \quad (5)$$

I si definim $\omega^2 \equiv \frac{mgd_{cm}}{I_O}$, s'obté l'equació del moviment:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (6)$$

que té la mateixa estructura de l'equació de l'oscil·lador harmònic, en què ω és la freqüència angular d'oscil·lació, i tindrà un període ($\omega = 2\pi/T$),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgd_{cm}}} \quad (7)$$

D'altra banda, si utilitzem el teorema de Steiner, podem relacionar el moment d'inèrcia del sòlid respecte del punt de suspensió (O) amb el moment d'inèrcia respecte d'un eix que passa pel centre de masses, de la forma:

$$I_O = I_{cm} + md_{cm}^2 = mK_{cm}^2 + md_{cm}^2 \quad (8)$$

on hem definit $I_{cm} = mK_{cm}^2$, en què K_{cm} és el radi de gir respecte d'un eix paral·lel al de suspensió que passa pel centre de masses del pèndol.

D'aquesta manera podem escriure el període del pèndol, de la forma

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + md_{cm}^2}{mgd_{cm}}} = 2\pi \sqrt{\frac{K_{cm}^2 + d_{cm}^2}{gd_{cm}}} \quad (9)$$

que expressa el període del pèndol en termes de la geometria del cos, i mostra que és independent de la massa, depenent únicament de la distribució de massa donada per K_{cm} i de la localització de l'eix de suspensió respecte

del centre de massa, especificat per d_{cm} . Ja que K_{cm} per a qualsevol cos rígid és una constant, el període T de qualsevol pèndol físic és funció solament d_{cm} .

A vegades es parla de la longitud equivalent d'un pèndol físic, que es defineix com la longitud que tindria un pèndol simple que oscil·lara amb el mateix període que el pèndol físic. Tenint en compte que l'equació d'un pèndol simple de longitud L ve donada per la relació

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (10)$$

si comparem amb l'equació (7), s'observa que el període d'un pèndol físic suspès d'un eix a una distància d_{cm} del centre de gravetat és igual al període d'un pèndol simple, de longitud donada per:

$$L = \frac{I_O}{md_{cm}} = \frac{K_{cm}^2 + d_{cm}^2}{d_{cm}} \quad (11)$$

El pèndol simple amb un període que és el mateix que el donat per un pèndol físic és anomenat *pèndol simple equivalent*. Si reorganitzem l'eq. (11), obtenim una equació de segon grau en d_{cm} , de la forma:

$$d_{cm}^2 - Ld_{cm} + K_{cm}^2 = 0 \quad (12)$$

en què anomenarem h i h' els valors (solucions) que verifiquen aquesta equació.

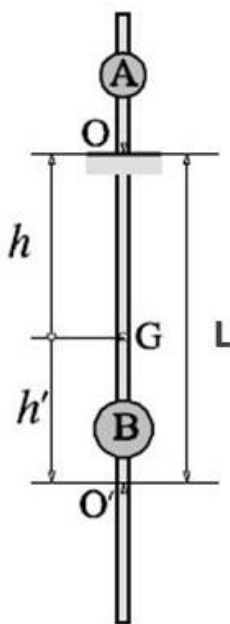


Figura 2. Esquema del pèndol de Kater

I això indica que hi ha dos valors de d_{cm} , o més ben dit, dos punts de suspensió del pèndol (O i O'), que distaran del centre de gravetat les distàncies h i h' (segons podem veure en la figura 2), i que, constituïts en centres de suspensió del pèndol, donaran lloc al mateix període d'oscil·lació.

A més, es pot comprovar que es verifica que:

$$h + h' = L \quad (13a)$$

$$h h' = K_{cm}^2 \quad (13a)$$

en què L és la distància entre els dos punts de suspensió del pèndol (OO'). De manera que la suma de les dues distàncies des de cada punt de suspensió del pèndol fins al centre de massa és igual a la longitud del pèndol simple que oscil·la amb el mateix període.

Aquesta propietat de reversibilitat del pèndol físic va conduir al científic Kater a construir el pèndol reversible, que ha sigut la base d'un mètode molt precís per a mesurar l'acceleració de la gravetat g . Ja que l'eq.(9) relaciona la duració de les oscil·lacions amb l'acceleració de la gravetat, g , i amb factors geomètrics, que una vegada coneguts, permeten obtenir g simplement coneixent el període del pèndol.

METODOLOGIA

El pèndol de Kater que utilitzarem en aquesta pràctica (vegeu figura 3) està format per una barra metàl·lica rígida proveïda de dues fulles, amb les seues vores enfrontades. Les fulles, recolzades per les seues vores sobre un suport rígid i robust, serveixen d'eixos de suspensió. Consta també de dos discos metàl·lics que poden desplaçar-se al llarg de la barra del pèndol. El disc de menys massa està situat en un dels extrems de la barra, fora de la zona de les fulles; l'altre disc, més pesat, està col·locat entre elles. D'aquesta manera s'obtingran dos períodes d'oscil·lació segons la fulla que s'utilitze com a eix de suspensió.

Quan el pèndol reversible de Kater oscil·le al voltant del punt O (O'), el període d'oscil·lació serà T_1 (T_2), que dependrà de la distància h_1 (h_2) des del punt d'oscil·lació fins al centre de masses del sistema, i de cada moment d'inèrcia I_1 (I_2) del cos respecte de l'eix d'oscil·lació O (O').

Segons l'eq.(7) es verificarà que: $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{mgh_1}}$ i $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{mgh_2}}$, i a partir del teorema de Steiner, que permet expressar els moments d'inèrcia en funció del moment d'inèrcia del centre de masses, de la forma: $I_1 = I_{cm} + mh_1^2$ i $I_2 = I_{cm} + mh_2^2$, si substituïm els valors de I_1 i I_2 en les expressions dels períodes d'oscil·lació, i operem, obtindrem la relació:

$$h_1^2 - h_2^2 = \frac{g}{4\pi^2} (T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2) \quad (14)$$

que permet obtenir el valor de l'acceleració de la gravetat, variant la distància des del punt de suspensió del pèndol al centre de massa, fent oscil·lar el pèndol alternativament respecte dels punts de suspensió O i O' , i mesurant els valors respectius del seu període.



Figura 3. Pèndol de Kater

Començarem aquest experiment anivellant la base del suport del pèndol de Kater. Per a fer-ho col·locarem el nivell de bombolla en la base i l'anivellarem movent els caragols del suport. A continuació, s'identificarà el centre de massa de la barra del pèndol de Kater suspent-la sobre un objecte prim (regle sobre un suport) com si d'una balança es tractara. Una vegada conegut el centre de massa del pèndol, es mesuren les distàncies h_1 i h_2 , des del centre de masses a cadascun dels punts d'oscil·lació del pèndol O i O'. Seguidament, es farà oscil·lar el pèndol respecte al punt d'oscil·lació O i es mesurarà el temps (t_1) que tarda a realitzar almenys 10 oscil·lacions. Posteriorment s'inverteix la barra del pèndol i es fa oscil·lar almenys altres 10 vegades des del punt d'oscil·lació O', mesurant el temps emprat (t_2). D'aquesta manera coneixerem els períodes d'oscil·lació T_1 i T_2 .

Variant la posició dels discos mòbils del pèndol, modificarem la seua distribució de massa, el seu centre de massa, i per tant, les distàncies h_1 i h_2 . Per a aquestes noves distàncies es mesuraran els períodes d'oscil·lació del pèndol respecte dels punts O i O'. Aquest procés es repetirà diverses vegades, procurant que la diferència entre les distàncies h_1 i h_2 siga el més àmplia possible.

RESULTATS

Realitzeu una taula amb els diferents valors de h_1 i h_2 , juntament amb els valors del temps d'oscil·lació t_1 i t_2 i dels períodes del pèndol T_1 i T_2 .

Realitzeu la representació gràfica adequada perquè pugues obtenir l'acceleració de la gravetat, g .

Expresseu el valor de l'acceleració de la gravetat al costat del seu error. Estimeu la validesa del vostre resultat comparant-lo amb el valor de l'acceleració de la gravetat en el laboratori.

Indiqueu les possibles fonts d'error i la manera de minimitzar-les.

QÜESTIONS

- 1.- Expliqueu l'interès pràctic que representa el pèndol de Kater.
- 2.- Expliqueu el significat físic del radi de gir, i relacioneu-lo amb el moment d'inèrcia del sistema respecte d'un eix que passa pel centre de masses.
- 3.- Què s'entén per longitud reduïda d'un pèndol físic o compost?
- 4.- Com varia el període d'oscil·lació del pèndol a mesura que el punt de suspensió s'acosta al centre de masses? Justifiqueu la resposta.

M4 EXPERIÈNCIES DE DEMOSTRACIÓ DE MECÀNICA I ONES

OBJECTIUS

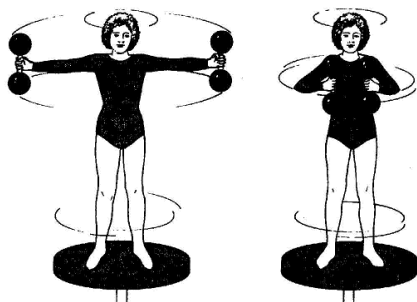
Realitzar experiments senzills que ens servisquen per a reforçar conceptes i idees de mecànica i ones. Efectuar un procés d'investigació i consulta bibliogràfica per a comprendre i explicar el fonament físic de cada experiència.

MD1.- Bola i barra que gira



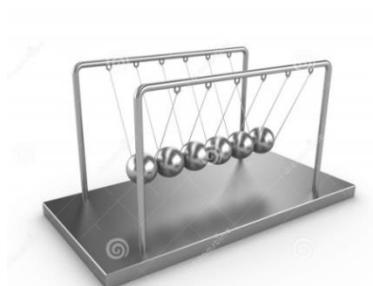
Col·loqueu una bola en la vora d'una barra que gira sobre el seu eix i solteu el conjunt, què passa amb la bola? Realitzen aquest experiment en diferents angles de gir de la barra. Expliqueu el fonament físic d'aquest experiment.

MD2.- Gir amb manuelles



Pugeu a la plataforma giratòria i agafeu unes manuelles. Amb els braços estesos, que un company us faça girar; a continuació, contraieu els braços ràpidament, i discutiu què us succeeix.

MD3.- Pèndol de Newton



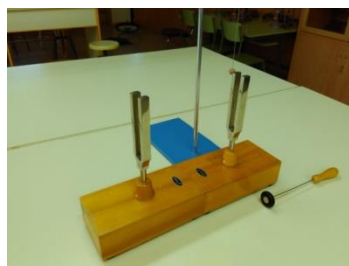
Alceu la bola d'un extrem del pèndol i deixeu-la caure, què observeu? I si ara deixeu caure dues boletes alhora, què succeeix? Raoneu la resposta.

MD4.- Llum i so en el buit



Col·loqueu un timbre i una llanterna dins d'una campana de buit. Observeu i expliqueu què passa quan disminueix la pressió amb la llum i el so.

MD5.- Ressonància amb diapasons



Analitzeu el fenomen de ressonància utilitzant dos diapasons. Discutiu altres experiments que posen de manifest el fenomen de ressonància.

MD6.- Escalfeu un pot amb forats



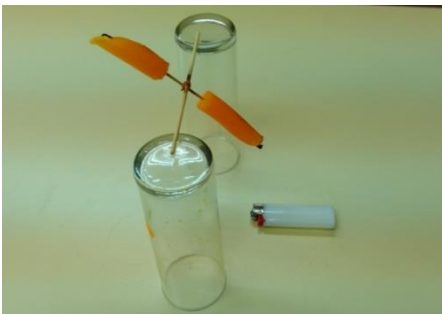
Tenim un pot de refresc en el qual hem fet uns forats a meitat d'altura, que penja d'un fil. Observeu i expliqueu què succeeix quan escalfem el pot amb una mica d'aigua.

MD7.- Equilibri en el buit



Equilibreu la balança que té una bola gran en un extrem. Introduïu la balança en la campana de buit i observeu què succeeix quan disminueix la pressió, a què pot ser degut?

MD8.- Gronxador amb espelmes



Realitzeu el muntatge de la figura. Enceneu els ciris i observeu atentament què va succeint a mesura que transcorre el temps; ho podeu explicar?

MD9.- Tub de Newton



Dins d'un tub tenim diferents materials, com paper, fusta o ferro. Observeu què succeeix quan donem ràpidament la volta al tub. A continuació fem buit en el tub, i el tornem a girar; hi ha alguna diferència? Raoneu la teua resposta.

MD10.- Ones en una corda



Connecteu el vibrador a la corda i visualitzeu les ones que s'hi generen. Descriviu el fenomen que es produeix. Realitzeu un estudi en funció de la freqüència de vibració i de la tensió de la corda.

MD11.- Botella, aigua i canyetes



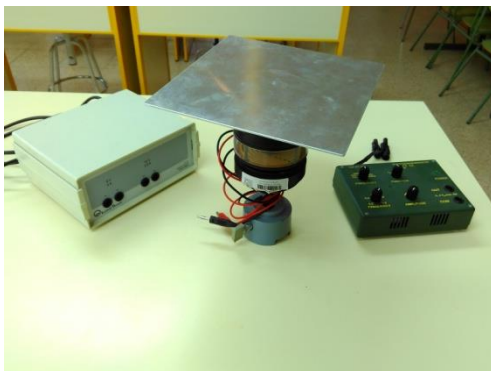
Ompliu d'aigua la botella que penja d'un suport amb un fil. La botella té uns forats on s'han col·locat unes canyetes doblegades. Observeu i expliqueu què succeeix.

MD12.- Roda de bicicleta que gira



Feu rodar una roda de bicicleta i suspeneu-la del mànec amb una corda. Comenteu què succeeix. Situeu-vos damunt d'una plataforma giratòria, i subjecteu amb les mans la roda que gira, dobleu-la suaument i expliqueu què experimenteu; a què és degut?

MD13.- Placa de Chladni



Col·loqueu arena en la superfície de la placa i connecteu-la a un vibrador. Expliqueu el significat físic dels patrons que es formen.

MD14.- Voltejar perdigons



/

Es tracta d'obtenir la calor específica del plom voltejant perdigons moltes vegades i mesurant la seua temperatura. Creus que és possible? Explica els fenòmens físics en què t'has de basar.

MD15.- Llançament i eixos de simetria



Llança una caixa a l'aire en la direcció dels seus diferents eixos de simetria i observa com és el moviment de baixada de l'objecte. Observes alguna diferència en el seu moviment? A quin fenomen pot ser degut? Ara llança una raqueta a l'aire segons els seus eixos de simetria, què observes experimentalment?

MD16.- Giròscopo



Subjecta la baldufa amb la mà i tira forta de la corda. Col·loca-la damunt de la peanya. Analitza el seu comportament en girar i comenta les seues aplicacions.

MD17.- Baldufa lluminosa



Per a posar en funcionament la baldufa frega la seua base diverses vegades sobre una superfície. Explica el seu moviment i el seu comportament.

MD18.- Moviment i pèndol



Mou la vareta que connecta els pèndols formats per les dues pilotes. Eres capaç de fer que només es moga una de elles? A què pot ser degut?

D19.- Raspall i moneda



Col·loca la moneda damunt del palmell de la teua mà. Intenta moure la moneda amb la part central del raspall. Què succeeix i perquè?

MD20.- Pèndol compost



Mou una bola del pèndol solament i observa el que succeeix, com pots explicar aquest comportament?

MD21.- Pèndol de Wilberforce



Aquest és un pèndol molt curiós. Realitza alguna hipòtesi sobre el que succeirà abans d'estirar del moll. Observa amb cura el que succeeix i explica-ho.

C

PRÁCTICAS DE MECÁNICA Y ONDAS (M)

M1 Rueda de Maxwell.

M2 Oscilaciones acopladas: Frecuencias propias de vibración.

M3 Péndulo de Kater.

M4 Prácticas de demostración e ilustrativas de Mecánica y Ondas.

M1 RUEDA DE MAXWELL

OBJETIVOS

Estudiar las ecuaciones de la dinámica de un sólido rígido y la conservación de la energía mecánica.

Medida de la aceleración de caída de la rueda de Maxwell y de su momento de inercia.

MATERIAL

Rueda de Maxwell, soporte de hierro, regla graduada, balanza, pie de rey, tripode.

FUNDAMENTO TEÓRICO

La rueda de Maxwell es un sistema compuesto por un disco rígido, de masa m y radio R , solidariamente unido a un eje (de radio r) perpendicular a su plano y que pasa por su centro de masa. Este disco está suspendido mediante dos cuerdas de los extremos de su eje, de manera que puede descender (o ascender), mientras las cuerdas se desenrollan (o enrollan), manteniendo el eje perpendicular a la vertical, tal y como se puede ver en la figura 1. Suponemos que las cuerdas son inextensibles y de masa despreciable y se enrollan en torno al eje del disco.



Figura 1.- Dispositivo experimental: Rueda de Maxwell

Cuando se deja libre el disco de Maxwell, éste cae a medida que se van desenrollando las cuerdas que lo sujetan, describiendo su centro de masa un movimiento de traslación (caída) simultáneo con la rotación del disco en torno al eje que pasa por su centro de masa. En la figura 2 se muestra un esquema de las fuerzas que actúan sobre el disco durante su movimiento de descenso. El disco desciende bajo la acción de su peso (mg) y de la tensión en los hilos (T), de manera que rueda sin deslizar, con el centro instantáneo de rotación en el punto C, de contacto del hilo con el eje.

En general, las ecuaciones fundamentales de la dinámica de la rotación para un sólido rígido son:

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{M}_O = I_O \vec{\alpha} \quad (2)$$

siendo \vec{a} la aceleración del centro de masa del sólido, M_O el momento de la fuerza con respecto al punto O, $\vec{\alpha}$ la aceleración angular y I_O es el momento de inercia del sólido con respecto al punto O, que puede ser un punto fijo o el centro de masa del sólido. El momento de inercia $I_O = \int r^2 dm$, solo depende de la masa y la geometría del cuerpo rígido.

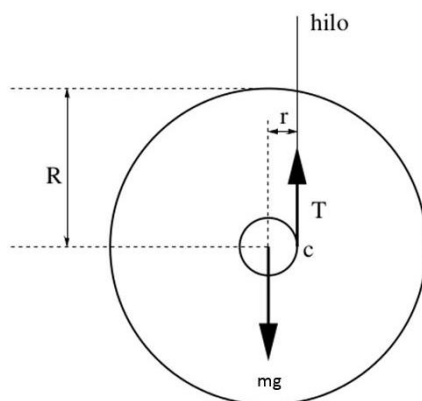


Figura 2.- Esquema de las fuerzas que actúan sobre la rueda de Maxwell

Si comparamos la segunda ley de Newton, ec. (1), con la ec. (2), vemos que son formalmente análogas, por lo que se le suele denominar ecuación fundamental de la dinámica de rotación. Vemos que, en el caso de las rotaciones, el momento de inercia juega un papel análogo a la masa inercial en el movimiento de traslación, y representa la inercia del cuerpo a la rotación.

Si aplicamos las ecuaciones del movimiento al descenso del disco de Maxwell, tal y como se representa esquemáticamente en la figura 2, tendremos:

$$\Sigma F = mg - T = ma \quad (3)$$

$$\Sigma M_{CM} = r \times T = rT = I_{CM} \alpha \quad (4)$$

siendo M_{CM} el momento de la fuerza con respecto al centro de masas (CM), I_{CM} el momento de inercia del disco con respecto al centro de masas y g la aceleración de la gravedad. Hemos considerado que el movimiento del centro de masas es rectilíneo y que la rotación se realiza en torno a un eje perpendicular a la vertical, con orientación fija. Como el disco efectúa una rodadura en torno al punto C, existe una ligadura entre la aceleración del centro de masas, a , y la aceleración angular α , dada por:

$$a = \alpha r \quad (5)$$

donde r es el radio del eje sobre el que gira el disco. Resolviendo el sistema de ecuaciones (3), (4) y (5), podemos obtener la aceleración a con la que cae el centro de masas del disco:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{m r^2}} \quad (6)$$

vemos que la aceleración es constante y paralela al desplazamiento, lo cual indica que el movimiento de bajada del disco de Maxwell es uniformemente acelerado. El valor de la aceleración a es menor que la aceleración de la gravedad y sólo sería igual a g si el disco no girara.

En el experimento dejaremos caer el disco de Maxwell en reposo desde una cierta altura, que elegimos como origen, por lo que la altura descendida $h(t)$ y la velocidad instantánea del centro de masas $v(t)$ tendrán la siguiente dependencia temporal:

$$h = \frac{1}{2} a t^2 \quad (7)$$

$$v = a t \quad (8)$$

hemos de recordar que a es la aceleración del centro de masa del disco de Maxwell, dada por la ec.(6).

La energía total E del disco de Maxwell, si despreciamos las pérdidas por rozamiento, vendrá dada por la suma de la energía potencial gravitatoria, $E_p = -mgh$, de la energía cinética de traslación del centro de masa, $E_{c,t} = \frac{1}{2}mv^2$, y de la energía cinética de rotación en torno al eje que pasa por su centro de masa, $E_{c,r} = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$:

$$E = E_p + E_{c,t} + E_{c,r} = -mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \quad (9)$$

donde ω es velocidad angular de giro del disco. Hemos tomado como origen de la energía potencial gravitatoria (y por tanto, de alturas) el punto más alto desde el que empieza la caída del disco. En este punto inicial $t = 0$, tendremos que $h(t = 0) = 0$, y $E_p(t = 0) = 0$, y por debajo del punto inicial la energía potencial será menor, es decir, negativa. Si tenemos en cuenta la relación existente entre la velocidad lineal del centro de masa y la angular: $v(t) = r\omega(t)$, podemos expresar la energía total del sistema, ecuación (9), de la forma:

$$E(t) = -mgh(t) + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{CM}}{r^2}\right)[v(t)]^2 \quad (10)$$

Por otra parte, la energía del sistema es una constante del movimiento, por lo que su derivada temporal debe de ser nula, de modo que:

$$0 = -mgv(t) + \left(m + \frac{I_{CM}}{r^2}\right)v(t)\frac{dv(t)}{dt} \quad (11)$$

Para comprobar experimentalmente la ley de conservación de la energía mecánica es conveniente hacer explícitas las dependencias temporales de la distancia recorrida por el disco en su caída y su velocidad. A partir de la expresión (11) podemos comprobar que el valor de la aceleración lineal del centro de masas, a , al caer el disco que coincidirá con el valor obtenido por la ecuación (6).

METODOLOGÍA

El montaje experimental de la rueda de Maxwell consta de una estructura de soporte (varillas) de la que se sujeta el disco. Para efectuar las medidas, en primer lugar y si es necesario, hay que alinear horizontalmente el disco con el hilo completamente desenrollado, mediante el ajuste del tornillo situado en la barra horizontal del que cuelga. A continuación se enrolla el hilo a ambos lados del disco, procurando que el devanado sea homogéneo y compacto a ambos lados del eje. Es importante que se realice un desenrollado del disco de prueba, y que se verifique que el disco no oscile en su caída. Se ha de determinar el valor de la masa del disco m , así como el radio del eje r (no del disco).

La realización del experimento consiste en grabar con el móvil la caída del disco de Maxwell, dicha grabación será analizada posteriormente con el programa Tracker, que permitirá conocer la distancia recorrida por el disco en función del tiempo $h(t)$, así como su velocidad $v(t)$. Es recomendable que se enrolle la cuerda del disco de manera que se disponga en la parte más alta del recorrido con el eje paralelo a la horizontal. Se debe de colocar y grabar una regla graduada que servirá para calibrar la distancia. Hemos de grabar los tres primeros rebotes del disco y utilizar en el programa Tracker la caída del disco después de su primer rebote.


Para utilizar el programa Tracker, de software libre, creado específicamente para analizar experimentos de física, se han de seguir los siguientes pasos:


1.- Abrir el programa Tracker y elegir el video que queremos analizar con la opción , o arrastrando el video.



2.- La rotación del video se realiza en "Video", "Filtros", "Nuevo" y "Rotate". La visión de la caída del disco debe de ser vertical.

3.- Visualizar el video y elegir el número de fotograma en el cual el disco justo comienza a descender después del primer rebote, esto me fija el tiempo inicial. A continuación se elige el fotograma de la situación final del experimento, antes de que el disco rebote (tiempo final).

4.- Con el icono  se eligen los fotogramas inicial y final de nuestro experimento.

5.- En el icono  “Nuevo” y “Vara de calibración” se realiza la calibración de la distancia, para ello se utiliza la regla graduada, y se especifica el valor de la distancia elegida (en las unidades que deseemos).

6.- En el icono  se definen la inclinación de los ejes X e Y. Es útil utilizar la regla, y elegir el eje Y paralelo a ésta.

7.- Accionar el icono  y elegir la opción “masa puntual”. Aparece el icono , se pulsa el icono “masa A”, y se elige la opción “trayectoria automática”, ello hace que se abra una ventana nueva “Autotracker: masa A posición”.

8.- Seguidamente se elige la masa que quiero que me analice el programa. Es conveniente que se elija el pivote rojo del final del eje del disco. Para ello, pulso las teclas control+mayúscula y pulso con el ratón el lugar donde se encuentra la masa a analizar. Aparece un círculo rojo que debe rodear todo el pivote rojo.

9.- Para comenzar el análisis del movimiento se presiona el botón “Search” y automáticamente aparece en la pantalla un gráfico y una serie de datos. Por defecto, en el gráfico aparece el valor de la componente X de la posición en función del tiempo, pero nosotros podemos cambiar la variable que se representa en el gráfico, pinchando sobre el eje X. También podemos elegir la tabla de datos que queremos que nos genere el programa, con sólo pinchar el icono “Datos”. En nuestro problema específico estamos interesados en conocer la distancia vertical y la velocidad de caída de la rueda.

10.- Una vez elegidos los datos de interés, podemos copiar estos datos a cualquier archivo, y analizarlo mediante un programa gráfico, así como realizar los cálculos o representaciones gráficas que consideremos oportunas.

RESULTADOS

Representar gráficamente el espacio recorrido por el disco en función del tiempo. Realiza la representación gráfica adecuada que te permita obtener la aceleración del centro de masas de la caída del disco.

Calcula la aceleración lineal y el momento de inercia del disco de Maxwell con su correspondiente error.

Representa gráficamente la velocidad de caída del disco en función del tiempo. Obtén a partir de esta representación la aceleración lineal. Compara el resultado con el obtenido anteriormente. Discute qué medida es más precisa.

Representa gráficamente la energía potencial gravitatoria, la energía cinética de traslación, la energía cinética de rotación en función del tiempo.

Representa en una misma gráfica la energía potencial gravitatoria, la energía cinética total y la energía total del sistema.

Comprueba si la energía total del sistema es una constante del movimiento.

Discute a partir de los resultados obtenidos, la validez del teorema de conservación de la energía mecánica.

CUESTIONES

1.- Si graficas en papel logarítmico la altura recorrida por el disco en función del tiempo de caída ¿para qué sirve la pendiente de la recta resultante? ¿Cómo puedes determinar el momento de inercia del disco?

- 2.- Al representar el valor de cada energía (potencial gravitatoria, cinética de traslación y cinética de rotación) en función del tiempo, ¿qué tipo de curvas se obtienen?
- 3.- Explica el significado de que el campo gravitatorio es conservativo. Relaciónalo con el principio de conservación de la energía mecánica.
- 4.- ¿Es posible definir siempre la energía potencial de una interacción? Discute algunos ejemplos.
- 5.- ¿En qué tipo de energía se convierte la mayor parte de la energía potencial gravitacional durante la caída del disco de Maxwell?

M2 OSCILACIONES ACOPLADAS: FRECUENCIAS PROPIAS DE VIBRACIÓN

OBJETIVOS

Evaluar experimentalmente los fenómenos que aparecen al interaccionar varios osciladores acoplados en un sistema.

Analizar los modos normales y las frecuencias propias de vibración de osciladores acoplados con dos grados de libertad.

Entender el concepto de modo normal de vibración y aprender cómo se consigue que un sistema oscile de ese modo.

MATERIAL

Carril de aire, carritos deslizantes, muelles (de dos clases), cronómetro, balanza, regla graduada, pesas.

FUNDAMENTO TEÓRICO

En esta práctica estudiaremos las oscilaciones acopladas de un sistema, que se producen cuando se conectan varios osciladores de forma que la energía pueda transmitirse de unos a otros, en cualquier sentido. Cuando los distintos grados de libertad del sistema interaccionan, nos encontramos con una situación compleja, y el movimiento que se genera puede ser sumamente complicado incluso no periódico.

En general, el movimiento de cualquier sistema oscilante puede estudiarse en función de las coordenadas normales. Cada una de estas coordenadas tiene asociado un modo normal de vibración caracterizado por oscilar a una frecuencia bien definida, su frecuencia *propia* o *característica*. El movimiento del sistema, por complicado que sea, puede describirse como una superposición de los modos normales de vibración.

Las condiciones iniciales del sistema pueden establecerse siempre de forma que en el movimiento sólo una de las coordenadas normales varíe con el tiempo; en estas circunstancias diremos que se ha excitado sólo uno de los modos normales del sistema. La identificación de cada uno de los modos normales permite entender el comportamiento del sistema en situaciones más complicadas, como por ejemplo, bajo la acción de una perturbación externa (vibraciones forzadas).

Si el sistema posee n grados de libertad (por ejemplo, está formado por n osciladores monodimensionales) habrá en general n modos normales de vibración, algunos de los cuales pueden ser idénticos. El método de los modos normales para estudiar sistemas oscilantes tiene utilidad en numerosos campos de la física tales como el movimiento microscópico en los sólidos cristalinos o las oscilaciones del campo electromagnético.

La teoría general del movimiento oscilatorio de un sistema de partículas con un número finito de grados de libertad fue formulada por Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) entre los años 1762 y 1765, aunque el predecesor fue Daniel Bernouilli (1700-1782) con un trabajo publicado en 1753.

Iniciamos el estudio de sistemas con grados de libertad acoplados a través de un caso sencillo, un sistema formado por dos osciladores mecánicos conectados. Supongamos que tenemos un sistema oscilante compuesto por dos cuerpos de masas m_1 y m_2 unidas por muelles de constantes elásticas, k_1 , k_{12} , k_2 , tal y como se muestra en la figura 1. En la posición de equilibrio las longitudes de los muelles son L_1 , L y L_2 que corresponden a la situación en que la energía potencial es mínima. Cuando el movimiento se produce en una dimensión, el sistema resultante tendrá dos grados de libertad, representados por las coordenadas y_i ($i = 1,2$) de las masas m_1 y m_2 , que medimos a partir de la posición $y = 0$, que se encuentra en la parte izquierda de la figura 1.

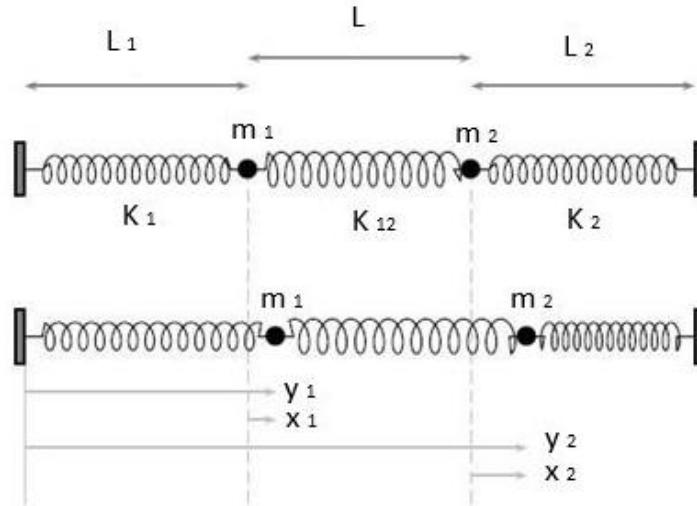


Fig.1.- Sistema de dos osciladores acoplados con tres muelles

Para obtener las ecuaciones de movimiento de este sistema aplicaremos la Mecánica Analítica en vez de utilizar la segunda ley de Newton (aunque, por supuesto, se obtienen los mismos resultados).

La mecánica lagrangiana es una reformulación de la mecánica Newtoniana, introducida por Joseph-Louis de Lagrange, donde la trayectoria de un objeto se obtiene encontrando la trayectoria que minimiza la acción, que es la integral del lagrangiano con el tiempo; siendo el lagrangiano la energía cinética del objeto menos su energía potencial. La ventaja de esta nueva formulación de las ecuaciones del movimiento de Newton es que simplifica considerablemente muchos problemas físicos, ya que su formulación se basa en razonamientos energéticos, al contrario que Newton cuyos razonamientos están basados en fuerzas, además de que no dependen del sistema de referencia elegido.

Para el sistema que vamos a estudiar en el laboratorio de dos osciladores acoplados, tal y como se representan en la figura 1, el lagrangiano \mathcal{L} correspondiente viene dado por la expresión:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 - \frac{1}{2}k_1(y_1 - L_1)^2 - \frac{1}{2}k_{12}(y_2 - y_1 - L)^2 - \frac{1}{2}k_2(y_2 - L - L_1)^2 \quad (1)$$

donde hemos tenido en cuenta que el lagrangiano viene dado por la energía cinética menos la energía potencial del sistema.

Si utilizamos como coordenadas generalizadas, las coordenadas relativas a la posición de las masas m_1 y m_2 a partir de su posición de equilibrio del sistema (x_1 y x_2), simplificaremos el lagrangiano, que vendrá dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_{12}(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 \quad (2)$$

habiendo definido $x_1 \equiv y_1 - L_1$ y $x_2 \equiv y_2 - L_1 - L$.

Las ecuaciones del movimiento del sistema se obtienen a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

siendo x_i ($i = 1, 2$) las coordenadas generalizadas relativas a la posición de equilibrio de las masas.

Así pues, a partir de la ec.(3), obtenemos las ecuaciones de movimiento del sistema que serán:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_{12}(x_1 - x_2) = 0 \quad (4a)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 + k_{12}(x_2 - x_1) = 0 \quad (4b)$$

que son dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden acopladas.

Las ecuaciones del movimiento (4a) y (4b), se pueden escribir matricialmente de la forma:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_1 + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Hemos de notar que la matriz es simétrica, y que la ecuación anterior tiene la forma típica de la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple ($m\ddot{x} + kx = 0$) con la significativa diferencia de que los “coeficientes” de cada término de la ecuación diferencial han pasado a ser matrices y el grado de libertad ha pasado a ser un conjunto de grados de libertad, un vector.

Podemos concluir que en el acoplamiento de dos osciladores mecánicos existen determinados movimientos colectivos del sistema, los modos normales, que se comportan como simples osciladores armónicos. Por ello, para calcular las frecuencias propias del sistema probaremos una solución de la forma:

$$x_1(t) = Ae^{i\omega t} \quad (6a)$$

$$x_2(t) = Be^{i\omega t} \quad (6b)$$

Si sustituimos en las ecuaciones del movimiento (4a) y (4b), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(k_1 + k_{12} - m_1\omega^2)A - k_{12}B = 0 \quad (7a)$$

$$-k_{12}A + (k_{12} + k_2 - m_2\omega^2)B = 0 \quad (7b)$$

Para que este sistema homogéneo tenga una solución distinta de la trivial ($A = B = 0$), una ecuación deberá ser combinación lineal de la otra, con lo que el determinante de los coeficientes A y B tiene que ser nulo:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_{12} - m_1\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} + k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Resolviendo la ecuación resultante se obtienen las frecuencias propias del sistema, ω_1 y ω_2 ,

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k_1}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} + \frac{k_{12}}{2\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_{12}}{2m_1} - \frac{k_2 + k_{12}}{2m_2}\right)^2 + \frac{k_{12}^2}{m_1 m_2}}} \quad (9)$$

donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida del sistema. Como el sistema analizado tiene dos grados de libertad, hemos obtenido dos frecuencias propias de oscilación, ω_1 y ω_2 , correspondientes al signo + y al signo – en la ecuación (9).

Por último, es necesario determinar la relación entre los coeficientes (amplitudes) A y B (ver ecuaciones (6a) y (6b)), que será diferente para cada una de las frecuencias propias del sistema obtenidas en la ec. (9). Sustituyendo el valor de ω_1 y ω_2 en cualquiera de las ecs. (7), obtenemos:

$$B = \frac{k_1 + k_{12} - m_1\omega_i^2}{k_{12}} A \quad (10)$$

para $i = 1, 2$. Esta relación entre las amplitudes A y B , nos permite obtener una relación entre los desplazamientos de las masas m_1 y m_2 en cada instante, a partir de las eqs. (6):

$$\frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \frac{k_1 + k_{12} - m_1\omega_i^2}{k_{12}} \quad (11)$$

Seguidamente vamos a calcular las frecuencias propias y las amplitudes en algunos casos particulares, donde se simplifica el cálculo presentado anteriormente, y que realizaremos experimentalmente en el laboratorio.

CASO 1.- Las masas oscilantes son iguales $m_1 = m_2 = m$, y los tres muelles son iguales $k_1 = k_{12} = k_2$.

A partir de la eq.(9) obtenemos las frecuencias propias ω_1 y ω_2 , y la relación entre amplitudes para los dos modos de oscilación, que se calculan a partir de la ec.(10),

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \rightarrow B = -A \quad \text{Modo antisimétrico} \quad (12a)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow B = A \quad \text{Modo simétrico} \quad (12b)$$

De la ec.(12a) se deduce que las dos masas oscilan en oposición de fase con frecuencia ω_1 , tal y como se representa en la figura 2a. A este modo de oscilación se conoce como modo antisimétrico.

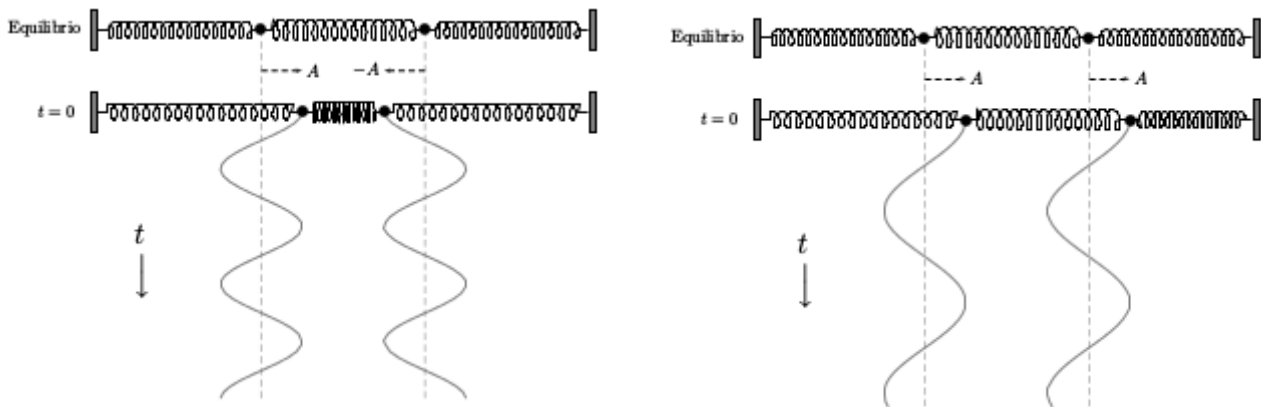


Figura 2.- Evolución temporal de (a) modo antisimétrico de vibración y (b) modo simétrico de vibración

El modo de vibración dado por la ec.(12b) corresponde a dos masas que vibran en fase, tal como se observa en la fig.2(b) y se le conoce como modo de vibración simétrico. Si queremos excitar sólo el modo simétrico, elegiremos que las condiciones iniciales sean $x_1(t=0) = x_2(t=0) = A$ antes de comenzar la vibración, y si queremos excitar el modo antisimétrico, escogeremos que $x_1(t=0) = A$ y que $x_2(t=0) = -A$. Cualquier movimiento más general del sistema será una combinación lineal de los modos simétricos y antisimétricos.

El hecho de que el modo antisimétrico posea una frecuencia de excitación mayor que el modo simétrico es una conclusión de carácter general. En un sistema complejo, formado por osciladores linealmente acoplados, el modo que posea el mayor grado de simetría tendrá la frecuencia más baja. Cuando la simetría desaparece, los muelles deberán “trabajar más intensamente” en los modos de vibración antisimétrico, dando lugar a una elevación de la frecuencia de vibración.

CASO 2.- Las masas son iguales $m_1 = m_2 = m$, los muelles de los extremos son iguales $k_1 = k_2 = k$, y el muelle central es diferente $k_{12} \neq k$.

En este caso tenemos dos osciladores idénticos acoplados por medio de un muelle de constante elástica diferente k_{12} . Las frecuencias propias y los modos de oscilación serán:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \rightarrow B = -A \quad (13a)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow B = A \quad (13b)$$

donde se ha obtenido un modo antisimétrico (ec.(13a)) de vibración y un modo simétrico (ec.(13b)) con una frecuencia menor.

Es interesante resaltar que si en el sistema mantenemos quieta la masa m_2 y dejamos que sólo oscile la masa m_1 , la frecuencia de oscilación será $\omega_0 = \sqrt{\frac{k+k_{12}}{m}}$, y cuando mantenemos quieta la masa m_1 y oscila sólo la masa m_2 , lo hará a la misma frecuencia ω_0 . Por tanto, el efecto del acoplamiento es separar en dos la frecuencia ω_0 (sin acoplamiento), haciéndose una de las frecuencias características mayor que la correspondiente al movimiento no acoplado y la otra inferior, $\omega_1 > \omega_0 > \omega_2$. Si tuviéramos 3 masas idénticas acopladas, tendríamos nuevamente un desdoblamiento de las frecuencias propias del sistema, con una frecuencia mayor, otra igual y otra menor que ω_0 . La regla general es que para un número par de n osciladores iguales acoplados habrá $\frac{n}{2}$ frecuencias propias mayores que ω_0 y $\frac{n}{2}$ frecuencias propias menores que ω_0 ; si n es impar, una frecuencia propia será igual a ω_0 y las $n - 1$ frecuencias propias restantes se distribuirán simétricamente por encima y por debajo de ω_0 . Es sugerente apreciar la analogía que existe con el efecto Zeeman en los espectros atómicos. En ambos casos aparece un desdoblamiento simétrico de la frecuencia producido por una interacción, en un caso por la aplicación de un campo magnético y en el otro por el acoplamiento de partículas por medio de muelles.

METODOLOGÍA

Para realizar este experimento utilizamos un carril de aire, que es un perfil de aluminio donde se introduce aire a presión, para minimizar el rozamiento. El movimiento de los deslizadores o carritos (las masas de nuestro sistema) se desplazan sobre él en una dimensión. Los carritos están compuestos por un perfil triangular de aluminio con dos orificios en los extremos que permiten acoplar los muelles (tal y como se muestra en la figura 3. Es posible apilar varios carritos para duplicar su masa. Tenéis que utilizar siempre el carril de aire a su potencia máxima.

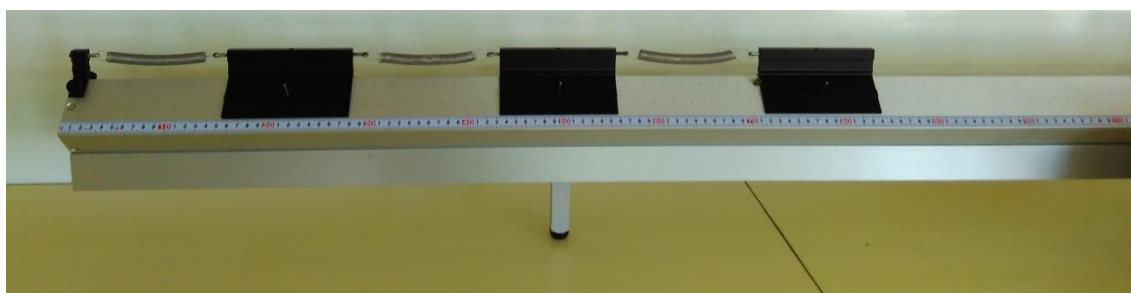


Figura 3.- Dispositivo experimental

La realización de esta práctica consiste en la realización de los siguientes apartados, en los cuales se determinará la frecuencia propia de vibración cuando los muelles están aislados y cuando están acoplados entre sí.

- 1.- Determina la constante elástica de cada uno de los muelles por separado (método dinámico). Para ello sujeta uno de los carritos a los soportes fijos por medio de dos muelles iguales. Los muelles deben estirarse con moderación para evitar que la deformación sea permanente. Desplaza el carrito ligeramente de su posición de equilibrio y mide el período de sus oscilaciones utilizando un cronómetro. Para disminuir el error de la medida es conveniente medir el tiempo transcurrido durante al menos diez oscilaciones completas. Realizar el experimento varias veces para reducir el error en la medida. La frecuencia propia de vibración te permitirá conocer la constante elástica del muelle. Realiza este apartado para los dos muelles que vas a utilizar.
- 2.- Determina la constante elástica de cada uno de los muelles por un método alternativo (método estático). Coloca el muelle verticalmente en un soporte, ve añadiendo pesas y mide lo que se alarga el muelle respecto de su posición inicial (posición de equilibrio). Representa gráficamente el peso frente al alargamiento, y aplicando la ley de Hooke, calcula la constante elástica del muelle. Realiza este apartado para los dos muelles.

3.- Osciladores acoplados. Caso de dos masas iguales unidas por tres muelles iguales. Monta experimentalmente el sistema representado en la Figura 1. La masa será la del planeador sin pesas. Haz que el sistema oscile en cada uno de los dos modos normales de vibración por separado. Para ello debes colocar al sistema con las condiciones iniciales adecuadas, es decir, debes fijar las posiciones iniciales de las masas de tal forma que se verifiquen las ecs. (12a) y (12b). Realiza el experimento con los tres muelles largos o con los tres muelles cortos. Cuando te asegures que el sistema oscila en un determinado modo (simétrico y antisimétrico), determina la frecuencia propia de vibración experimentalmente. Para ello mide el tiempo que tarda en dar un número determinado de oscilaciones ($n > 15$). Haz la medida varias veces y calcula la frecuencia propia con su error.

4.- Osciladores acoplados. Repite el apartado anterior para el caso de dos masas iguales unidas por tres muelles, siendo los de los extremos iguales y el muelle central con una constante elástica diferente.

RESULTADOS

Para el caso en que tengas sólo una sola masa, realiza una tabla con los datos del tiempo que tarda en oscilar al menos 10 veces, calcula el periodo con su error. Obtén la frecuencia de vibración y la constante elástica de cada uno de los muelles.

Compara la constante elástica del muelle grande y pequeño obtenido a partir de las medidas realizadas por el método estático y el método dinámico. ¿La concordancia entre ambos resultados es buena? Discute y justifica la discrepancia obtenida.

Para el sistema de osciladores acoplados, realiza una tabla con los valores del tiempo de al menos 10 oscilaciones para cada modo propio del sistema. Calcula la frecuencia de vibración. Realiza esta tabla para los casos 3 y 4 del apartado de metodología.

Compara en todos los casos analizados los resultados experimentales con los cálculos teóricos. En qué modos se asemejan más las frecuencias experimentales a las teóricas, en los simétricos o en los antisimétricos? ¿por qué crees que ocurre esto?

Razona las posibles causas de error más importantes en este experimento.

Indica si el acoplamiento del sistema da lugar a un desdoblamiento de las frecuencias. ¿Hay diferencias significativas entre las frecuencia natural, simétrica y antisimétrica?

Indica si has encontrado diferencias en la constante elástica del muelle a partir de las medidas realizadas por el método estático y dinámico. ¿A qué crees que se debe? ¿Cómo lo podrías solucionar?

CUESTIONES

1.- ¿A qué se denomina modo propio de oscilación de un sistema?

2.- Explica en qué consiste el fenómeno físico de la resonancia. Indica ejemplos de resonancia en la vida cotidiana.

3.- ¿Por qué algunos cantantes son capaces de romper con sus agudos el cristal de una copa?

4.- ¿Por qué la frecuencia propia del modo antisimétrico es mayor que la del modo simétrico? Justifica tu respuesta.

5.- Explica en qué consiste el efecto Zeeman y qué analogías encuentras con las oscilaciones acopladas.

6.- Las moléculas tienen sus átomos ligados entre sí por medio del enlace químico. Este enlace no es completamente rígido, sino que cada átomo puede vibrar alrededor de su posición de equilibrio. Desde el punto de vista vibracional, el enlace se asemeja a un muelle, y el movimiento de los átomos puede describirse estudiando los modos de vibración de la molécula. Supón que en una molécula formada por los átomos A y B sustituimos el átomo B por un isótopo, C, más pesado pero con las mismas características químicas. A la vista de tu experiencia en esta práctica, ¿cómo crees que cambiará la frecuencia de vibración de los modos normales?

M3 PÉNDULO DE KATER

OBJETIVOS

Analizar el movimiento oscilatorio de un péndulo físico.

Determinar la aceleración de la gravedad con el péndulo reversible de Kater.

MATERIAL

Péndulo de Kater, cinta métrica, cronómetro, regla sobre soporte horizontal.

FUNDAMENTO TEÓRICO

El péndulo de Kater es un péndulo físico reversible, ideado por Henry Kater en 1817 como un encargo de la Royal Society de Londres, destinado a medir la aceleración de la gravedad local. Este péndulo fue diseñado por la necesidad de realizar medidas gravimétricas precisas que permitiesen un buen conocimiento del terreno, lo cual era de extrema utilidad en cartografía, topografía y prospección minera.

En primer lugar vamos a estudiar el péndulo físico, que consiste en un cuerpo rígido de masa m , suspendido de un punto de suspensión (O) que dista una distancia d_{cm} de su centro de masa (cm) y que puede girar, libremente alrededor de un eje fijo horizontal, en un plano vertical, tal como se muestra en la figura 1.

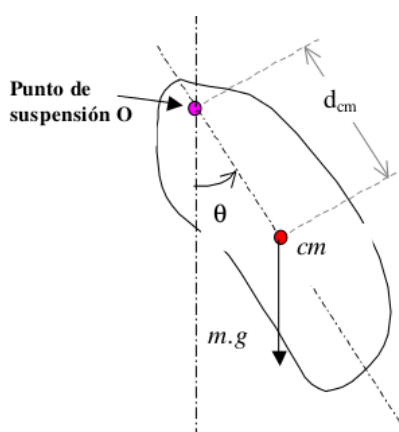


Figura 1.- Esquema de un péndulo físico

Cuando el cuerpo se separa de la posición de equilibrio y se suelta, presentará un movimiento oscilatorio. Para obtener la ecuación del movimiento del cuerpo, nos basamos en la ecuación de la dinámica rotacional:

$$\vec{M}_O = I_O \vec{\alpha} \quad (1)$$

siendo M_O el momento de la fuerza con respecto al punto O, I_O el momento de inercia del cuerpo alrededor del punto O, y α la aceleración angular del cuerpo. Estas tres magnitudes son, respectivamente, el análogo rotacional a la fuerza, masa y aceleración lineal del movimiento lineal o de traslación.

El peso del cuerpo $m\vec{g}$, aplicado en el centro de masa, produce un momento respecto a un eje de rotación que pasa por el punto O, dado por:

$$\vec{M}_O = \vec{d}_{cm} \times m\vec{g} \quad (2)$$

Utilizando la definición de producto vectorial, tomando como positivo el movimiento de rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y teniendo en cuenta que el momento del peso tiene signo contrario al desplazamiento, se obtiene:

$$M_O = -mgd_{cm} \sin \theta \quad (3)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores \vec{d}_{cm} y $m\vec{g}$, tal y como se muestra en la figura 1. La definición de aceleración angular, $\alpha = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, junto con las anteriores ecuaciones, permite escribir:

$$\ddot{\theta} = - \frac{mgd_{cm} \sin \theta}{I_O} \quad (4)$$

Para pequeñas oscilaciones, suponemos válida la aproximación $\sin \theta \cong \theta$, obteniendo la ecuación del movimiento del péndulo físico:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd_{cm}}{I_O} \theta = 0 \quad (5)$$

Y si definimos $\omega^2 \equiv \frac{mgd_{cm}}{I_O}$, se obtiene la ecuación del movimiento:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (6)$$

que tiene la misma estructura de la ecuación del oscilador armónico, donde ω es la frecuencia angular de oscilación, y tendrá un periodo ($\omega = 2\pi/T$),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgd_{cm}}} \quad (7)$$

Por otra parte, si utilizamos el teorema de Steiner, podremos relacionar el momento de inercia del sólido con respecto al punto de suspensión (O) con el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masas, de la forma:

$$I_O = I_{cm} + md_{cm}^2 = mK_{cm}^2 + md_{cm}^2 \quad (8)$$

donde hemos definido $I_{cm} = mK_{cm}^2$, siendo K_{cm} el radio de giro con respecto a un eje paralelo al de suspensión que pase por el centro de masas del péndulo.

De esta forma, podemos escribir el periodo del péndulo, de la forma

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + md_{cm}^2}{mgd_{cm}}} = 2\pi \sqrt{\frac{K_{cm}^2 + d_{cm}^2}{gd_{cm}}} \quad (9)$$

que expresa el período del péndulo en términos de la geometría del cuerpo, y muestra que es independiente de la masa, dependiendo únicamente de la distribución de masa dada por K_{cm} y de la localización del eje de suspensión con respecto al centro de masa, especificado por d_{cm} . Ya que K_{cm} para cualquier cuerpo rígido es una constante, el período T de cualquier péndulo físico es función sólo de d_{cm} .

A veces se habla de la longitud equivalente de un péndulo físico, que se define como la longitud que tendría un péndulo simple que oscilase con el mismo período que el péndulo físico. Teniendo en cuenta que la ecuación de un péndulo simple de longitud L viene dado por la relación

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (10)$$

si comparamos con la ecuación (7), se observa que el período de un péndulo físico suspendido de un eje a una distancia d_{cm} del centro de gravedad, es igual al período de un péndulo simple, de longitud dada por:

$$L = \frac{I_O}{md_{cm}} = \frac{K_{cm}^2 + d_{cm}^2}{d_{cm}} \quad (11)$$

El péndulo simple cuyo período es el mismo que el dado por un péndulo físico, es llamado péndulo simple equivalente. Si reorganizamos la ec. (11), obtenemos una ecuación de segundo grado en d_{cm} , de la forma:

$$d_{cm}^2 - Ld_{cm} + K_{cm}^2 = 0 \quad (12)$$

donde llamaremos h y h' a los valores (soluciones) que verifican esta ecuación.

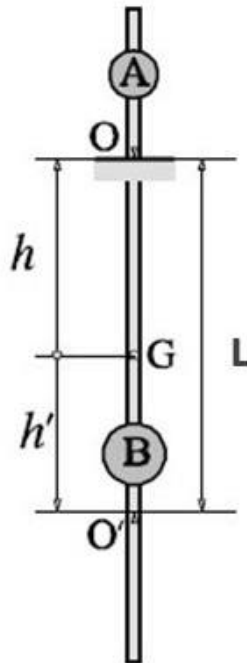


Figura 2.- Esquema del péndulo de Kater

Lo cual indica que existen dos valores de d_{cm} , o mejor dicho, dos puntos de suspensión del péndulo (O y O'), que distarán del centro de gravedad las distancias h y h' (según podemos ver en la figura 2), y que constituidos en centros de suspensión del péndulo darán lugar al mismo periodo de oscilación.

Además se puede comprobar que se verifica que:

$$h + h' = L \quad (13a)$$

$$h h' = K_{cm}^2 \quad (13a)$$

siendo L , la distancia entre los dos puntos de suspensión del péndulo (OO'). De manera que la suma de las dos distancias desde cada punto de suspensión del péndulo hasta el centro de masa es igual a la longitud del péndulo simple que oscila con el mismo periodo.

Esta propiedad de reversibilidad del péndulo físico condujo a Kater a construir el péndulo reversible que ha sido la base de un método muy preciso para medir la aceleración de la gravedad g . Ya que la ec.(9) relaciona la duración de las oscilaciones con la aceleración de la gravedad, g , y con factores geométricos, que una vez conocidos, permiten obtener g simplemente conociendo el periodo del péndulo.

METODOLOGÍA

El péndulo de Kater que utilizaremos en esta práctica (ver figura 3) está formado por una barra metálica rígida provista de dos cuchillas, con sus bordes enfrentados. Las cuchillas, apoyadas por sus bordes sobre un soporte rígido y robusto, sirven de ejes de suspensión. Consta también de dos discos metálicos que pueden desplazarse a lo largo de la barra del péndulo. El disco de menor masa está situado en uno de los extremos de la barra, fuera de la zona de las cuchillas; el otro disco más pesado, está colocado entre ellas. De esta forma, se obtendrán dos periodos de oscilación según la cuchilla que se utilice como eje de suspensión.

Cuando el péndulo reversible de Kater oscile alrededor del punto O (O'), el periodo de oscilación será T_1 (T_2) que dependerá de la distancia h_1 (h_2) desde el punto de oscilación hasta el centro de masas del sistema, y de cada momento de inercia I_1 (I_2) del cuerpo respecto al eje de oscilación O (O').

Según la ec.(7) se verificará que: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mgh_1}}$ y $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mgh_2}}$, y a partir del teorema de Steiner, que permite expresar los momentos de inercia en función del momento de inercia del centro de masas, de la forma: $I_1 = I_{cm} + mh_1^2$ y $I_2 = I_{cm} + mh_2^2$, si sustituimos los valores de I_1 y I_2 en las expresiones de los periodos de oscilación, y operamos, obtendremos la relación:

$$h_1^2 - h_2^2 = \frac{g}{4\pi^2} (T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2) \quad (14)$$

que permite obtener el valor de la aceleración de la gravedad, variando la distancia desde el punto de suspensión del péndulo al centro de masa, haciendo oscilar el péndulo alternativamente respecto de los puntos de suspensión O y O', y midiendo los valores respectivos de su periodo.



Figura 3.- Péndulo de Kater

Comenzaremos este experimento nivelando la base del soporte del péndulo de Kater. Para ello colocaremos el nivel de burbuja en la base y lo nivelaremos moviendo los tornillos del soporte. A continuación, se identificará el centro de masa de la barra del péndulo de Kater suspendiéndola sobre un objeto delgado (regla sobre un soporte) como si de una balanza se tratara. Una vez conocido el centro de masa del péndulo, se miden las distancias h_1 y h_2 , desde el centro de masas a cada uno de los puntos de oscilación del péndulo O y O'. Seguidamente, se hará oscilar el péndulo con respecto al punto de oscilación O y se medirá el tiempo (t_1) que tarda en realizar al menos 10 oscilaciones. Posteriormente se invierte la barra del péndulo y se hace oscilar al menos otras 10 veces desde el punto de oscilación O', midiendo el tiempo empleado (t_2). De esta manera conoceremos los periodos de oscilación T_1 y T_2 .

Variando la posición de los discos móviles del péndulo, modificaremos su distribución de masa, su centro de masa, y por tanto, las distancias h_1 y h_2 . Para estas nuevas distancias se medirán los periodos de oscilación del péndulo con respecto los puntos O y O'. Este proceso se repetirá varias veces, procurando que la diferencia entre las distancias h_1 y h_2 sea lo más amplia posible.

RESULTADOS

Realizar una tabla con los diferentes valores de h_1 y h_2 , junto con los valores del tiempo de oscilación t_1 y t_2 y de los periodos del péndulo T_1 y T_2 .

Realiza la representación gráfica adecuada para que puedas obtener la aceleración de la gravedad, g .

Expresa el valor de la aceleración de la gravedad junto a su error. Estima la validez de tu resultado comparándolo con el valor de la aceleración de la gravedad en el laboratorio.

Indica las posibles fuentes de error y la forma de minimizarlas.

CUESTIONES

- 1.- Explica el interés práctico que representa el péndulo de Kater.
- 2.- Explica el significado físico del radio de giro, y relacionalo con el momento de inercia del sistema con respecto a un eje que pase por el centro de masas.
- 3.- ¿Qué se entiende por longitud reducida de un péndulo físico o compuesto?
- 4.- ¿Cómo varía el periodo de oscilación del péndulo a medida que el punto de suspensión se acerca al centro de masas? Justifica tu respuesta.

M4 EXPERIENCIAS DE DEMOSTRACIÓN DE MECÁNICA Y ONDAS

OBJETIVOS

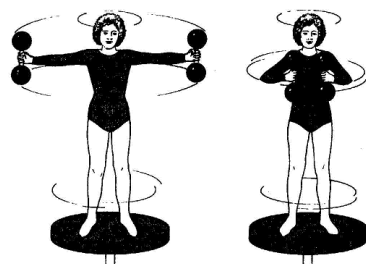
Realizar experimentos sencillos que nos sirvan para afianzar conceptos e ideas de mecánica y ondas. Efectuar un proceso de investigación y consulta bibliográfica para comprender y explicar el fundamento físico de cada experiencia.

MD1.- Bola y barra que gira



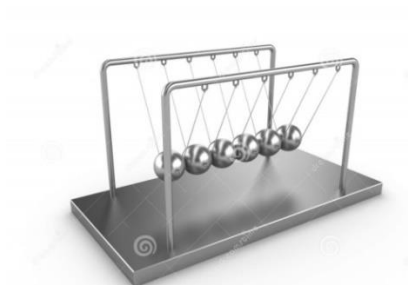
Coloca una bola en el borde de una barra que gira sobre su eje y suelta el conjunto, ¿qué sucede con la bola? Realiza este experimento a diferentes ángulos de giro de la barra. Explica el fundamento físico de este experimento.

MD2.- Giro con mancuernas



Súbete a la plataforma giratoria y coge unas mancuernas. Con los brazos extendidos, que un compañero te haga girar, a continuación contrae los brazos rápidamente, y discute lo que te sucede.

MD3.- Péndulo de Newton



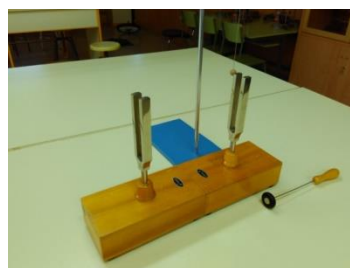
Despega la bola de un extremo del péndulo y déjala caer, ¿qué observas? Y si ahora dejas caer dos bolitas a la vez, ¿qué sucede? Razona tu respuesta.

MD4.- Luz y sonido en el vacío



Coloca un timbre y una linterna dentro de una campana de vacío. Observa y explica lo que sucede al disminuir la presión con la luz y el sonido.

MD5.- Resonancia con diapasones



Analiza el fenómeno de resonancia utilizando dos diapasones. Discute otros experimentos que pongan de manifiesto el fenómeno de resonancia.

MD6.- Calienta un bote con agujeros



Tenemos un bote de refresco donde hemos realizado unos agujeros a mitad de altura, que pende de un hilo. Observa y explica lo que sucede cuando calentamos el bote con un poco de agua.

MD7.- Equilibrio en el vacío



Equilibra la balanza que tiene una bola grande en un extremo. Introduce la balanza en la campana de vacío y observa lo que sucede al disminuir la presión, ¿a qué puede ser debido?

MD8.- Columpio con velas



Realiza el montaje de la figura. Enciende las velas y observa atentamente lo que va sucediendo al transcurrir el tiempo, ¿puedes explicarlo?

MD9.- Tubo de Newton



Dentro de un tubo tenemos diferentes materiales, como papel, madera o hierro. Observa lo que sucede cuando volteamos rápidamente el tubo. A continuación hacemos vacío en el tubo, y lo volvemos a voltear, ¿existe alguna diferencia? Razona tu respuesta.

MD10.- Ondas en una cuerda



Conecta el vibrador a la cuerda y visualiza las ondas que se generan. Describe el fenómeno que se produce. Realiza un estudio en función de la frecuencia de vibración y de la tensión de la cuerda.

MD11.- Botella, agua y pajillas



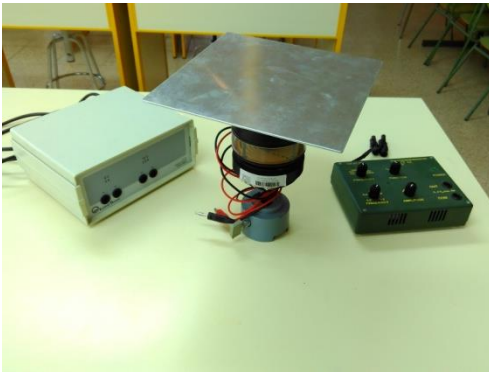
Llena de agua la botella que se encuentra colgada de un soporte por un hilo. La botella tiene unos agujeros donde se han colocado unas pajillas dobladas. Observa y explica lo que sucede.

MD12.- Rueda de bicicleta que gira



Haz rodar una rueda de bicicleta y suspéndela del mango con una cuerda. Comenta lo que sucede. Situate encima de una plataforma giratoria, y sujeta con las manos la rueda que gira, dóblala suavemente y explica lo que experimentas, ¿a qué es debido?

MD13.- Placa de Chladni



Coloca arena en la superficie de la placa y conéctala a un vibrador. Explica el significado físico de los patrones que se forman.

MD14.- Voltear perdigones



Se trata de obtener el calor específico del plomo volteando perdigones muchas veces y midiendo su temperatura, ¿crees que es posible? Explica los fenómenos físicos en que te tienes que basar y re resultado que has obtenido.

MD15.- Lanzamiento y ejes de simetría



Lanza una caja al aire en la dirección de sus distintos ejes de simetría y observa cual es el movimiento de bajada del objeto. ¿Observas alguna diferencia en su movimiento? ¿A qué fenómeno puede ser debido? Ahora lanza una raqueta al aire según sus ejes de simetría, ¿qué observas experimentalmente?

MD16.- Giróscopo



Sujeta la peonza con la mano y tira fuerte de la cuerda. Colócala encima de la peana. Analiza su comportamiento al girar y comenta sus aplicaciones.

MD17.- Peonza luminosa



Para poner en funcionamiento la peonza frota su base varias veces sobre una superficie. Explica su movimiento y su comportamiento.

MD18.- Movimiento y péndulo



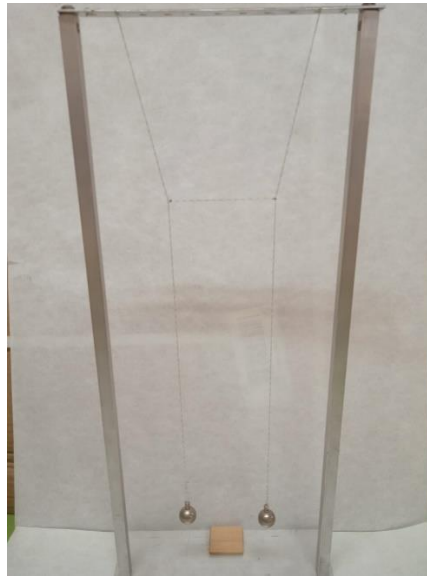
Mueve la varilla que conecta los péndulos formados por las dos pelotas. ¿Eres capaz de hacer que sólo se mueva una pelota? ¿A qué puede ser debido?

D19.- Cepillo y moneda



Coloca la moneda encima de la palma de la mano. Intenta mover la moneda con la parte central del cepillo. ¿Qué sucede y por qué?

MD20.- Péndulo compuesto



Mueve solamente una bola del péndulo y observa lo que sucede, ¿cómo puedes explicar este comportamiento?

MD21.- Péndulo de Wilberforce



Este es un péndulo muy curioso. Realiza alguna hipótesis sobre lo que creas que sucederá antes de estirar del muelle. Observa con cuidado lo que sucede y explícalo.