
LIBRETA DE LABORATORIO

Técnicas Experimentales II

Autor

Jose Enrique Vizcaya Molina

Universidad de Alicante

Curso 2023/2024

1. Práctica 1A: Efecto fotoeléctrico y determinación de la constante de Planck

1.1. Introducción

En esta práctica, el objetivo fundamental es entender, experimentalmente, el fenómeno del efecto fotoeléctrico y la necesidad de utilizar la Mecánica Cuántica para su interpretación.

El efecto fotoeléctrico, entendido desde la teoría, es el fenómeno por el que unos electrones escapan de un cierto metal tras absorber energía electromagnética. Existe una relación entre dicha energía (E) y la frecuencia de radiación (ν), que es constante y recibe el nombre de constante de Planck: $h = \frac{E}{\nu}$.

Si denotamos ϕ la energía necesaria para que un electrón escape del metal, entonces $E_c = h\nu - \phi$ es la energía cinética que tendrá el electrón. Denotaremos ϕ_0 al mínimo valor de ϕ y recibirá el nombre de energía de arranque.

La práctica se basa en utilizar un fototubo, cuyo interior posee un cilindro recubierto con una capa metálica y el eje del cilindro es un hilo conductor. Trataremos de iluminar la superficie metálica, para que se emitan electrones que serán recogidos por el hilo conductor central. Como resultado, la superficie metálica se carga positivamente, permitiéndonos medir una diferencia de potencial entre el metal y el hilo. Finalmente, trataremos de encontrar el potencial de frenado para diferentes frecuencias y mediante un ajuste lineal obtendremos la constante de Planck.

Utilizaremos la ecuación de Einstein: $\nu_0 = \frac{\phi_0}{h}$.

1.2. Materiales

- Lámpara espectral de mercurio (con su fuente de alimentación)
- Lente de distancia focal 10cm.
- Filtros interferenciales (distintas longitudes de onda):
 - 578 nm (Amarillo)
 - 546 nm (Verde)
 - 436 nm (Violeta)
 - 405 nm (Violeta)
 - 365 nm (UV)
- Fototubo montado en el interior de una caja con obturador, banco óptico, caballetes, pantalla, amplificador, polímetro y cables de conexión.
- Filtros de densidad óptica para cambiar la intensidad y su respectivo soporte.

¿Cómo funciona la lámpara de mercurio?

Consta de un tubo de vidrio, relleno de Mercurio gas y que posee dos electrodos, en los cuáles se aplica un alto voltaje, de manera que el gas se ioniza. Los átomos de mercurio excitados volverán a su estado fundamental emitiendo en dicho proceso fotones, y de esta manera podemos utilizarla como fuente de luz que emite en el espectro del Mercurio.

¿Qué es un fototubo?

Es un dispositivo que transforma la luz en señal eléctrica. Consta de un ánodo y un cátodo. La luz incide en el cátodo y genera fotoeléctrico de manera que arranca electrones hacia el ánodo, midiendo así una diferencia de potencial (voltaje) entre cátodo y ánodo.

1.3. Desarrollo práctico

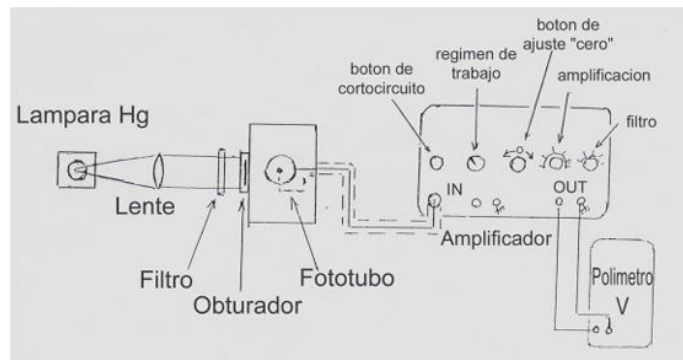
El desarrollo experimental de la práctica consiste en dos partes diferenciadas. En la primera de estas, se estudiará la dependencia con la frecuencia de la luz, mientras que en la segunda, se hará con su intensidad.

Dependencia con la frecuencia

Para comenzar, se conecta la lámpara y esperamos unos pocos minutos para que alcance su máxima intensidad de radiación. A continuación, se sitúa la lente en el banco óptico (a la distancia focal) de manera que se obtiene un haz de rayos paralelos.

Prosiguiendo con el montaje, se deben colocar los filtros interferenciales, de uno en uno, en el portafiltros entre la lente y el fototubo, de manera que quede todo alineado con el haz de luz.

Un esquema del montaje es el siguiente:



Para tomar las medidas correspondientes, debemos calibrar el amplificador con Electrometer (función que se usa para medir corrientes muy pequeñas), de manera

que se pueda medir la diferencia de potencial V_0 correctamente. Para comenzar a tomar la medida, provocamos un cortocircuito (pulsando un boton), de manera que el polímetro marque cero, para posteriormente abrir el obturador del fototubo y medir V_0 , varias veces para cada uno de los cinco filtros interferenciales.

De esta manera, como cada filtro deja pasar la luz que tenga una frecuencia determinada, se consiguen las medidas en función de la frecuencia. Con ello, podremos representar y obtener un valor experimental para la frecuencia umbral.

Dependencia con la intensidad

En esta segunda parte, repetiremos el procedimiento pero añadiendo una serie de filtros al banco óptico que modifican la intensidad del haz de luz. Para ello, se modifica el montaje de manera que, entre lente y el soporte con los filtros interferenciales, se añade otro soporte para filtros de densidad óptica.

Para cada filtro interferencial, volvemos a tomar medidas, poniendo cada vez un filtro de densidad óptica distinto, y de esta manera, tendremos los mismos datos que antes, pero esta vez dependiendo de la intensidad, haciendo algo más interesante el experimento, al poder comparar las medidas entre ellas y ver cómo afecta al valor de la frecuencia umbral obtenido.

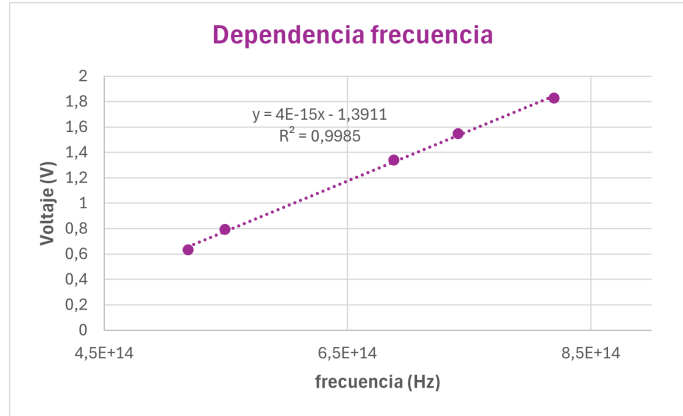
1.4. Resultados

Dependencia con la frecuencia

En la primera parte del desarrollo práctico hemos explicado la parte en la que estudiaremos la dependencia con la frecuencia. Los datos que medimos en el laboratorio son los siguientes:

| λ (nm) | V_1 | V_2 | V_3 | \bar{V} (V) | Frecuencia (Hz) |
|----------------|-------|-------|-------|--------------------|-----------------------|
| 578 | 0,631 | 0,65 | 0,624 | $0,6350 \pm 0,013$ | $5,19 \times 10^{14}$ |
| 546 | 0,789 | 0,785 | 0,81 | $0,7945 \pm 0,013$ | $5,49 \times 10^{14}$ |
| 436 | 1,344 | 1,32 | 1,359 | $1,34 \pm 0,02$ | $6,88 \times 10^{14}$ |
| 405 | 1,523 | 1,541 | 1,578 | $1,54 \pm 0,03$ | $7,41 \times 10^{14}$ |
| 366 | 1,833 | 1,813 | 1,835 | $1,8270 \pm 0,012$ | $8,19 \times 10^{14}$ |

En la tabla, se pueden observar las tres medidas sobre cada longitud de onda distinta, además de la media de las tres. Además incluye la frecuencia de cada una. Para poder analizar mejor estos datos, vamos a visualizar una representación gráfica:



Una vez tenemos el valor de la pendiente y de la ordenada en el origen, podemos obtener experimentalmente la constante de Planck (multiplicando la pendiente por la carga del electrón $e = 1,6 \times 10^{-19}$, ya que la pendiente m que se obtiene al graficar el voltaje frente a la frecuencia es $m = h/e$) y la función de trabajo Φ_0 (obtenida sabiendo que la ordenada en el origen es exactamente $-\Phi_0$). Los resultados que obtenemos, en esta parte, los vemos reflejados en la siguiente tabla:

| Constante de Planck h ($J \cdot s$) | Función de trabajo Φ_0 (eV) |
|---|--------------------------------------|
| $(6,32 \pm 0,14) \times 10^{-34}$ | $1,39 \pm 0,06$ |

A raíz de esto, podemos calcular la frecuencia umbral, mediante la siguiente ecuación:

$$\nu_0 = \frac{1,39 \cdot 1,6 \times 10^{-19}}{6,32 \times 10^{-34}} = 3,5 \times 10^{14} Hz$$

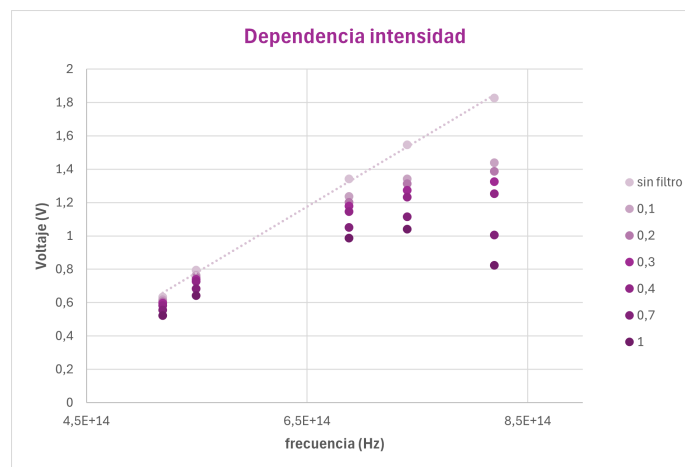
Por último, se pide que, buscando información en la bibliografía, averigüemos con los datos obtenidos de qué tipo de material estará hecho el cátodo. Para ello, vamos a buscar tiene una función de trabajo cercana a $1,39eV$, o equivalentemente, que tenga una frecuencia umbral de $3,5 \times 10^{14} Hz$. La función de trabajo que hemos obtenido es demasiado baja, y ningún metal tiene (teóricamente) ese valor asociado a la función de trabajo, por tanto estamos ante un claro error en nuestra medida, en la que, a pesar de obtener bien la pendiente (valor de la constante de Planck), no hemos obtenido correctamente el valor de la ordenada en el origen. Esto puede ser debido a la imprecisión de la medida generada por la luz de fondo que había en el laboratorio. Podemos asumir que el material del que está hecho el cátodo es el Cesio (Cs), que tiene la función de trabajo más baja y que normalmente ronda los $2eV$, pero no lo afirmaremos con total seguridad.

Si pretendemos entender qué ocurriría si utilizásemos otros metales para observar el efecto fotoeléctrico, debemos tener en cuenta que la función de trabajo cambiará, es decir, la cantidad mínima de energía requerida por un electrón para escapar de una superficie metálica va a ser distinta dependiendo del metal.

Dependencia con la intensidad

En esta segunda parte de la práctica, repetimos el mismo procedimiento pero añadiendo filtros de densidad óptica, para poder estudiar la dependencia con la intensidad de la luz. Veamos los datos obtenidos, y la gráfica correspondiente:

| | Diferencia de potencial (V) | | | | | |
|-----------------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frecuencia (Hz) | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,7 | 1 |
| $5,19 \times 10^{14}$ | 0,618 | 0,606 | 0,598 | 0,583 | 0,555 | 0,522 |
| $5,49 \times 10^{14}$ | 0,764 | 0,751 | 0,739 | 0,728 | 0,683 | 0,643 |
| $6,88 \times 10^{14}$ | 1,236 | 1,202 | 1,179 | 1,146 | 1,05 | 0,987 |
| $7,41 \times 10^{14}$ | 1,343 | 1,313 | 1,273 | 1,232 | 1,116 | 1,041 |
| $8,19 \times 10^{14}$ | 1,438 | 1,387 | 1,325 | 1,253 | 1,005 | 0,825 |



En la gráfica, se puede observar con un degradado de color, los valores del voltaje en función de la frecuencia para cada filtro (podemos ver cuál es cada uno en la leyenda). Podemos observar fácilmente que, a medida que la luz tiene frecuencias más altas, los filtros de densidad óptica modifican más la medida, comparándolo con frecuencias más bajas. Este fenómeno se observa más en aquellos filtros más densos. La gráfica claramente lineal que obteníamos sin filtro se pierde completamente al subir la densidad del filtro.

Lo que ocurre es que para longitudes de onda más bajas, es decir, frecuencias más altas, el filtro va a modificar la frecuencia de la luz que lo atraviesa (no solo modifica la intensidad), y por esto obtenemos esta medida, que nos dice que si la opacidad es mayor, el resultado de la medida es menos fiable.

La frecuencia umbral que obtenemos es similar a la que obteníamos sin filtros de densidad, ya que esta función no depende de la intensidad de luz recibida, sino que únicamente depende de la frecuencia de la misma. Esta debería ser igual pero no llega a serlo por lo ya explicado en el párrafo anterior.

2. Práctica 1C: Determinación de la constante de Planck con diodos emisores de luz

2.1. Introducción

Esta práctica es similar a la anterior en cuanto a que tiene por objetivo calcular experimentalmente la constante de Planck, y en este caso vamos a obtenerla mediante el estudio de la luz emitida por unos diodos (LED).

Los conceptos teóricos fundamentales en esta prácticas son el concepto de semiconductor y el de LED.

2.1.1. ¿Qué es un semiconductor?

En primer lugar, diremos que un material es un semiconductor cuando puede comportarse como conductor o como aislante según las condiciones de su entorno. Los clasificamos en semiconductores intrínsecos, los cuales tienen una estructura electrónica fija, sin falta ni exceso de electrones; y en semiconductores extrínsecos, que sí son dopados con electrones (tipo N) o con huecos (tipo P).

En general, excitaremos un electrón que se encuentra en la capa de valencia para que este salte a la capa de conducción, absorbiendo una energía $E = qV$.

¿Qué es un LED?

En segundo lugar, los LED son elementos que están formados por dos terminales, ánodo y cátodo, que determinan el sentido de circulación permitido. El funcionamiento de un LED se basa en el comportamiento de los semiconductores que lo componen. El semiconductor estará compuesto por una capa de valencia P , dopada con huecos, y una capa de conducción N , dopada con electrones. En dicho semiconductor, los electrones no podrán tener cualquier energía. Estos ocuparán la banda de conducción (N) o la banda de valencia (P), pero nunca la banda prohibida (que las separa). Al aplicar (en primer lugar) un voltaje, los electrones llenan la banda de conducción y (posteriormente) son capaces de pasar la interfase hacia la capa de valencia (con menor energía). En este proceso se libera energía en forma de luz.

Llamamos *Gap de energía* a la diferencia de energía entre la banda de valencia y la de conducción. Esta varía en función del tipo de material del LED, y esto influye en la frecuencia (y por tanto en el color de la luz).

Durante la práctica, vamos a calcular la energía de los electrones que pasan cuando el voltaje es el mínimo (umbral), cuyo valor teórico es $E = qV_{th}$. Además, esta diferencia de energía se corresponde con la del fotón emitido, que guarda una dependencia lineal con su frecuencia, obteniendo así la constante de Planck, al igual que antes, ya que $E = h\nu$.

2.2. Materiales

- LEDs (Diodos emisores de luz) con longitudes de onda :
 - 399 nm (UV)
 - 463 nm (Azul)
 - 530 nm (Verde)
 - 632 nm (Rojo)
 - 921 nm (IR)
- Tubo protector para LED
- 2 Multímetros
- Cables
- Fuente de alimentación:

2.3. Desarrollo práctico

El desarrollo de esta práctica se subdivide en 3 actividades.

Actividad 1:

En esta primera parte, se conecta uno de los LEDs a la fuente de alimentación, y montamos un circuito de forma que el LED se encuentre en polarización directa los dos multímetros midan la caída de potencial del LED y la intensidad de corriente.

El objetivo será calcular el potencial umbral V_t , es decir, el potencial a partir del que se empieza a medir corriente. La realización es sencilla, ya que debemos aumentar manualmente (despacio) el potencial hasta que el amperímetro mida 0,01 mA. Con esto seremos capaces de calcular la energía de los fotones emitidos y, representando en función de ν , obtendremos la constante de Planck.

Actividad 2:

El montaje necesario para esta actividad es el mismo que para la primera actividad. Ahora, para cada LED, vamos a medir la intensidad de corriente, variando entre diversos valores de voltaje. A raíz de esto, podremos obtener una gráfica de Intensidad frente a Voltaje (Curva I-V). Posteriormente, debemos ajustar con la curva teórica y discutir los resultados.

El valor teórico aproximado para dicha curva viene dado por:

$$I(V) = I_S \cdot e^{(qV-E)/\eta K_B T}$$

donde I_S es la intensidad de saturación y η una constante que depende del LED.

Actividad 3:

Esta tercera actividad es muy semejante a la primera, y es que se pide volver a medir los voltajes umbrales, pero esta vez trataremos de observar con el ojo cuando el LED comienza a emitir luz. Por ello, el montaje puede ser simplificado, ya que no haremos uso del amperímetro.

De nuevo, se va aumentando el voltaje lentamente hasta que se comienza a observar que el LED emite luz. En este caso no se puede utilizar el LED que emite luz IR puesto que el ojo no es sensible. Una vez obtenido el V_{th} para cada LED, debemos representar la energía de los fotones en función de la frecuencia de la luz y determinar la constante de Planck, tal y como se hacía en la primera parte.

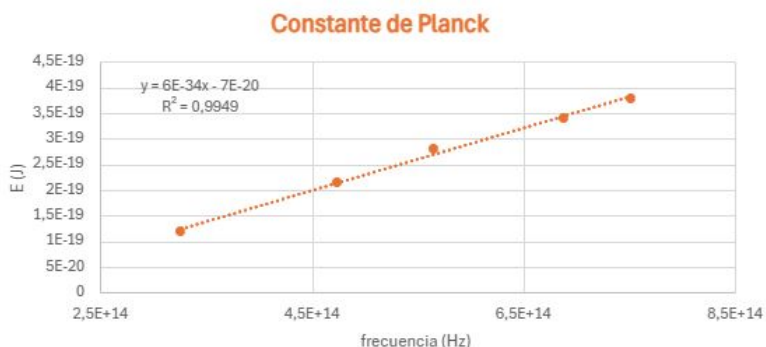
2.4. Resultados

Actividades 1 y 3:

En esta primera parte, para cada uno de los LEDs, hemos medido los potenciales umbrales V_{th} , obteniendo así la energía $E = qV_{th}$. En la primera de las actividades se pide hacerlo utilizando el material adecuado del laboratorio para medir cuándo empieza a emitir un mínimo de intensidad. Por el otro lado, en la tercera actividad se pide realizar lo mismo pero viendo a ojo cuando se comienza a encender el LED. Veamos primero los datos de la Actividad 1:

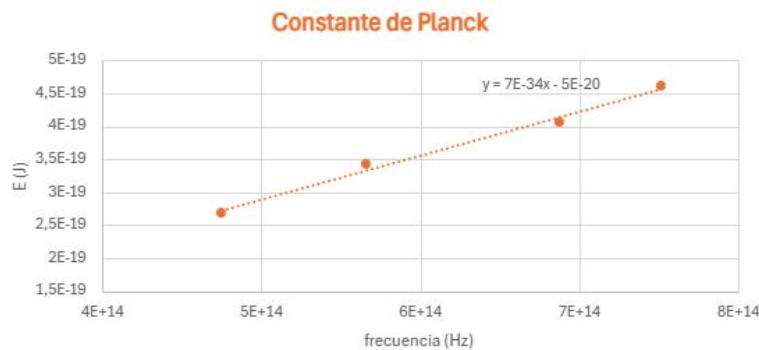
| Color (λ nm) | Frecuencia (Hz) | V_{th} (V) | E (J) |
|-----------------------|--------------------------|--------------|-------------------------|
| UV (399) | $7,5188 \times 10^{14}$ | 2,36 | $3,776 \times 10^{-19}$ |
| Azul (463) | $6,88073 \times 10^{14}$ | 2,12 | $3,392 \times 10^{-19}$ |
| Verde (530) | $5,66038 \times 10^{14}$ | 1,76 | $2,816 \times 10^{-19}$ |
| Rojo (632) | $4,74684 \times 10^{14}$ | 1,35 | $2,16 \times 10^{-19}$ |
| IR (921) | $3,25733 \times 10^{14}$ | 0,74 | $1,184 \times 10^{-19}$ |

Representamos los datos obtenidos en la primera de las actividades:



Ahora, en la otra actividad, hemos medido lo mismo pero limitando la precisión a la apreciación de nuestro ojo. Evidentemente, para esta parte hemos omitido el LED que emite en Infrarrojo, ya que nuestros ojos no son sensibles a estas longitudes de onda, por tanto medimos sólo los otros cuatro. Estos son los datos que anotamos tras la realización de la práctica:

| Color (λ nm) | Frecuencia (Hz) | V_{th} (V) | E (J) |
|-----------------------|--------------------------|--------------|-------------------------|
| UV (399) | $7,5188 \times 10^{14}$ | 2,88 | $4,608 \times 10^{-19}$ |
| Azul (463) | $6,88073 \times 10^{14}$ | 2,53 | $4,048 \times 10^{-19}$ |
| Verde (530) | $5,66038 \times 10^{14}$ | 2,14 | $3,424 \times 10^{-19}$ |
| Rojo (632) | $4,74684 \times 10^{14}$ | 1,67 | $2,672 \times 10^{-19}$ |



Tras representar las gráficas, ya podemos obtener la constante de Planck, ya que sabemos que es la pendiente de la gráfica, porque $E = h\nu$. Por tanto, en el primer caso obtener $h = 6,1 \times 10^{-34}$, mientras que en la segunda parte, a ojo, hemos obtenido $h = 7 \times 10^{-34}$. El valor teórico es $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, y por tanto podemos verificar que nuestros valores experimentales se aproximan bastante a este (teniendo en cuenta que es un número extremadamente pequeño).

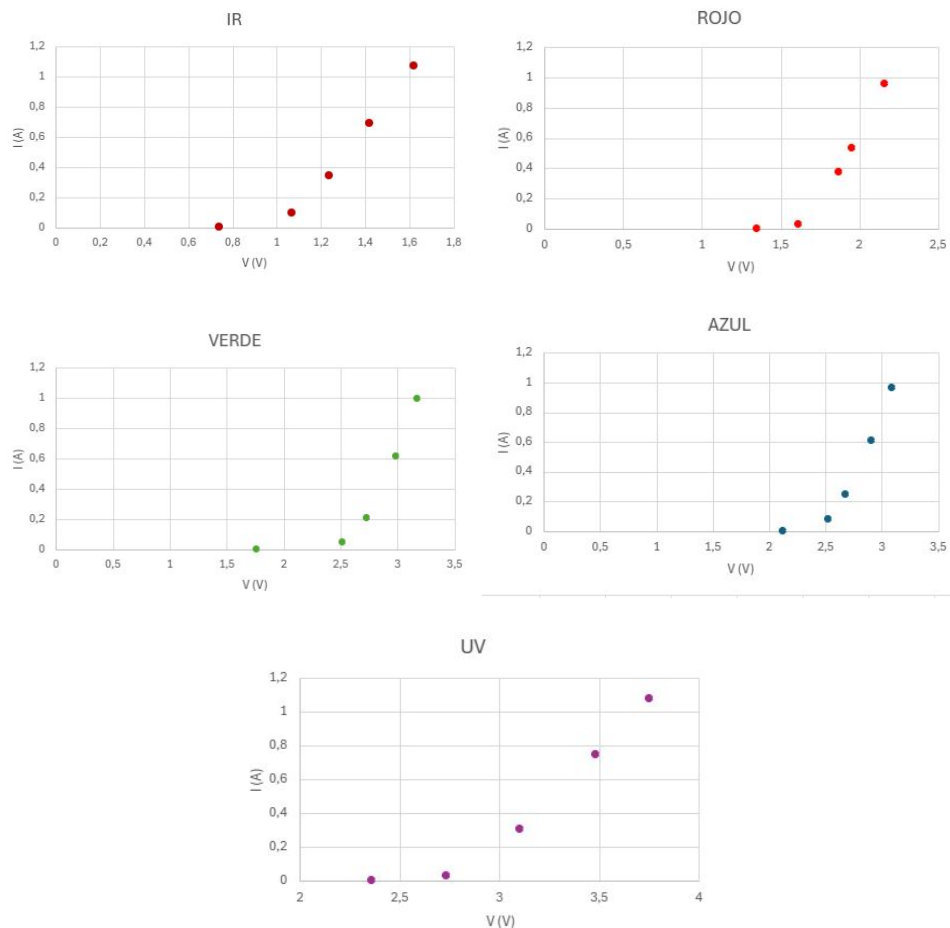
Actividad 2:

En esta actividad, para cada LED, vamos a medir la intensidad de corriente con diversos valores de voltaje. Con estos datos podremos obtener la curva I-V.

Vamos a ver los resultados que hemos obtenido para cada LED, representándolos

| UV | | Azul | | Verde | | Rojo | | IR | |
|------|-------|------|-------|-------|-------|------|-------|------|-------|
| V | I | V | I | V | I | V | I | V | I |
| 2,36 | 0,001 | 2,12 | 0,001 | 1,76 | 0,001 | 1,35 | 0,001 | 0,74 | 0,001 |
| 2,73 | 0,030 | 2,52 | 0,082 | 2,51 | 0,047 | 1,61 | 0,031 | 1,07 | 0,096 |
| 3,10 | 0,309 | 2,67 | 0,249 | 2,73 | 0,211 | 1,87 | 0,378 | 1,24 | 0,343 |
| 3,48 | 0,749 | 2,91 | 0,614 | 2,98 | 0,62 | 1,95 | 0,539 | 1,42 | 0,689 |
| 3,75 | 1,080 | 3,09 | 0,964 | 3,17 | 1,002 | 2,16 | 0,964 | 1,62 | 1,073 |

Vamos a graficar los datos para poder visualizar su tendencia. Lo haremos de cada LED por separado, de modo que tenemos 5 gráficas:



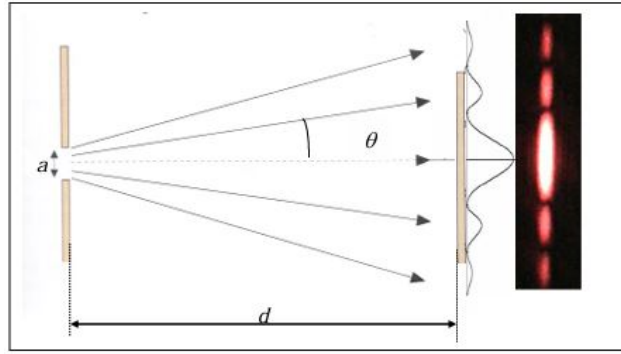
3. Práctica 2: Difracción de luz por una rendija y relación con el principio de incertidumbre

3.1. Introducción

Esta práctica tiene por objetivo analizar la distribución de intensidad de la luz difractada por una rendija. Además, lo usaremos para comprobar el principio de incertidumbre de Heisenberg.

El fundamento teórico de la práctica es el clásico experimento de la difracción de la luz en una rendija. Sabemos, teóricamente, que la onda, al atravesar dicha rendija (de anchura a), se desvía dando lugar a un patrón sobre una pantalla (situada a una distancia de la rendija suficientemente grande) cuya distribución contiene un máximo de luz principal y varios máximos secundarios. Estudiaremos la dependencia de la intensidad de la luz con el ángulo de incidencia sobre la rendija θ , que teóricamente sabemos que viene dada por $I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2$ donde $\beta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin(\theta)$.

El otro concepto fundamental que debemos entender bien para la realización de la práctica es el Principio de incertidumbre de Heisenberg. Este, establece que la posición x y el momento p_x de una partícula no pueden determinarse simultáneamente con precisión exacta. Además, nos dice que la precisión máxima con la que podemos medir es $\Delta x \cdot \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}$.



3.2. Materiales

- Láser de He-Ne ($\lambda = 633nm$)
- Rendija (con su soporte)
- Pantalla blanca
- Microscopio
- Fotorresistencia (con su soporte)
- Polímetro
- Cinta métrica, gato y listón graduado.

3.3. Desarrollo práctico

La realización del experimento consta de dos partes.

Una primera en la que vamos a medir la anchura de la rendija, utilizando el microscopio, que cuenta con una regla interna incorporada, la cuál deberemos calibrar usando una regla métrica para sacar el factor de escala y después poder medir correctamente la anchura de la rendija.

La segunda parte del experimento consta del montaje del láser, que debemos alinear con la rendija, colocando a cierta distancia la fotorresistencia junto a un multímetro para poder tomar medidas sobre el patrón que veremos reflejado en la pantalla.

Para la medida de los datos, tomaremos valores desde el segundo mínimo de un lado hasta el otro, incluyendo así 3 máximos (el absoluto y los dos secundarios).

El valor numérico en cada caso se verá en el polímetro. Además deberemos calcular el ángulo θ formado por la desviación con el centro del rayo del láser, el cual aproximaremos por $\arctg(\frac{d}{D})$, donde D es la distancia del láser a la resistencia.

Una vez tengamos medidos todos los datos, y obtengamos las gráficas correspondientes, podemos pasar a comprobar si se cumple el principio de incertidumbre. Esto lo haremos con las fórmulas explicadas en la parte teórica y sustituiremos los datos obtenidos. Podremos comprobar que a medida que aumentamos el ángulo θ , aumentará la incertidumbre sobre el momento lineal y podremos verificar que se cumple $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$, en realidad $\Delta x \cdot \Delta p_x \sim h$. Todo esto lo veremos con más profundidad en los resultados.

3.4. Resultados

Análisis de los fundamentos teóricos de la práctica

En la primera parte de los resultados, resolveremos la primera parte de la realización práctica, que es más bien teórica, referida al análisis de los fundamentos físicos de la práctica. En este apartado responderemos unas cuantas preguntas acerca de conceptos necesarios para el entendimiento de la práctica, y cabe destacar que está incluido en el Informe de esta práctica:

¿Qué diferencia hay entre la difracción de Fresnel y la de Fraunhofer?

La difracción de Fraunhofer y la difracción de Fresnel son dos tipos de difracción que se producen en diferentes condiciones y se caracterizan por distintas propiedades.

Una de las diferencias principales es que la difracción de Fraunhofer se produce cuando la fuente de luz, la rendija y la pantalla de observación están a distancias considerables una de otra. En contraparte, la de Fresnel se da cuando la fuente de luz se encuentra relativamente cerca de la rendija difractante o la pantalla de observación. En el caso de la difracción de Fraunhofer, los rayos de luz incidirán de manera casi paralela y la curvatura de las ondas será insignificante, mientras que en la de Fresnel, los rayos incidentes divergen y convergen en el punto de difracción, causando una curvatura de las ondas.

Si definimos como número de Fresnel a la ecuación: $F = \frac{a^2}{d\lambda}$ donde a es la anchura de la rendija, d la distancia del obstáculo y λ es la longitud de onda de la luz, entonces podemos asociar la difracción de Fresnel a $F \geq 1$ y la de Fraunhofer a los casos donde $F \ll 1$.

Otra diferencia significativa entre ambas difracciones es el patrón de difracción. En la difracción de Fraunhofer se produce un patrón de difracción bidimensional en la pantalla de observación, caracterizado por franjas claras y oscuras. Por otro lado, la difracción de Fresnel produce un patrón de difracción tridimensional en la región de la sombra de la abertura, con franjas de intensidad que varían en todas las direcciones alrededor del punto de difracción.

Por último, otra diferencia entre ellas es la difusión de la luz. El hecho de que, en la difracción de Fraunhofer, hay una gran distancia entre la fuente de luz y la pantalla de observación, provoca que la difusión lumínica sea muy poco pronunciada. Mientras tanto, en la difracción de Fresnel, la difusión de la luz es más evidente, debido a la proximidad entre los elementos.

¿Cómo se deduce matemáticamente la expresión de la difracción?

Para la deducción de la fórmula que aparece en el contexto teórico referido a la difracción de la luz, debemos partir definiendo la diferencia de camino como $asen(\theta)$, (que es la distancia entre el rayo que pasa por el origen y el que pasa por x), y la diferencia de fase $\gamma = 2\pi \frac{asen(\theta)}{\lambda}$, (que es el ángulo que forma el vector situado en un punto x con la horizontal). Entonces la amplitud de la onda resultante en función del ángulo sabemos que será $A = 2Rsen(\gamma/2)$. En el eje, donde θ y γ tienden a cero, podemos aproximar la amplitud (que será máxima) por $A_0 = R\gamma$.

Como sabemos que la intensidad es proporcional al cuadrado de la intensidad, tenemos que $I = A^2 = I_0 \left(\frac{sen(\gamma/2)}{\gamma/2} \right)^2$.

Sólo nos queda definir el parámetro $\beta = \frac{\pi a}{\lambda} sen(\theta) = \frac{\gamma}{2}$ y obtenemos la ecuación que buscamos:

$$I(\theta) = I(0) \cdot \left(\frac{sen(\beta)}{\beta} \right)^2$$

que únicamente depende del valor del parámetro $\beta(\theta)$

¿Para qué valor angular se observa el primer mínimo? ¿Y el segundo?

Para minimizar una función debemos derivar respecto del parámetro que estamos minimizando, que en este caso es β :

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = I_0 \frac{2sen(\beta)cos(\beta) \cdot \beta^2 - sen^2(\beta) \cdot 2\beta}{\beta^4} = 2I_0 sen(\beta) \cdot \frac{(\beta cos(\beta) - sen(\beta))}{\beta^3}$$

Procedemos viendo cuándo se anula la derivada, para obtener los valores de β que son candidatos a máximo o mínimo relativo:

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow sen(\beta) \cdot (\beta cos(\beta) - sen(\beta)) = 0$$

Entonces tenemos dos casos posibles. En primer lugar, si $sen(\beta) = 0$, es decir cuando $\beta = \pm k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. En segundo lugar, los puntos donde $\beta cos(\beta) = sen(\beta)$, o equivalentemente $\beta = tg(\beta)$, que no tiene solución analítica, pero se aproximan por los puntos de intersección, que en el intervalo $(0, 2\pi)$ es $\beta \simeq 1,43\pi$.

Hacemos la segunda derivada para estudiar su signo y así ver en cuales de estos puntos nuestra función es mínimo:

$$\frac{d^2I(\beta)}{d\beta^2} = 2I_0 \frac{\beta cos(\beta) \cdot (\beta cos(\beta) - sen(\beta)) - \beta^2 sen^2(\beta) cos(\beta) - 3sen(\beta)(\beta cos(\beta) - sen(\beta))}{\beta^4}$$

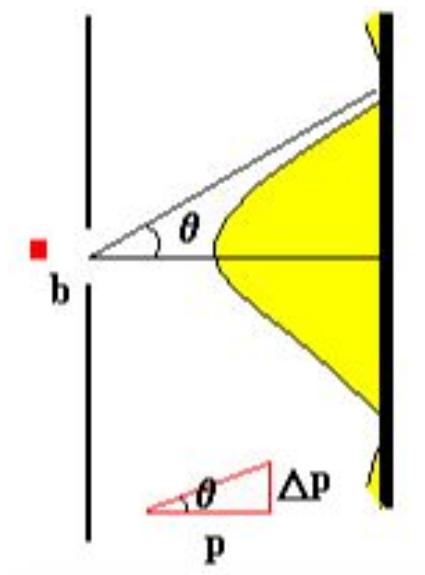
Estudiando el signo de esa expresión en los puntos candidatos, y seleccionando aquellos en los que la segunda derivada es estrictamente positiva, obtenemos que el conjunto de mínimos (relativos) es $\{\beta = \pm k\pi : k \in \mathbb{N}\}$. Además, viendo el valor que toman esos puntos en la expresión de $I(\beta)$, podemos llegar a la conclusión de que el primer mínimo se da en los puntos $\beta = \pm\pi$ mientras que el segundo se dará en $\beta = 2\pi$. (Cabe destacar que la función no está definida para $\beta = 0$, que es cuando se alcanza la intensidad máxima I_0).

¿Cuánto vale la relación entre la intensidad del máximo principal y del secundario?

Del desarrollo anterior, hemos obtenido que un valor de β será máximo si anula la primera derivada y hace que la segunda derivada sea estrictamente negativa. Estos puntos son, en primer lugar, $\beta = 0$ que es el máximo principal, donde la intensidad toma su máximo valor I_0 , y en segundo lugar los puntos que verifican $\beta = tg(\beta)$ como hemos razonado ya antes, los cuales tomaremos en nuestro caso $\beta = \pm 1,43\pi$, que son los dos más cercanos al máximo principal y son los que usaremos de referencia a la hora de tomar medidas.

Con tal de responder a la pregunta que se propone, sustituimos $\pm\beta_m = \pm 1,43\pi$ en la fórmula de la intensidad y obtenemos $I(\pm\beta_m) = 0,0047I_0$, por tanto la relación entre ambas es $\frac{I_0}{0,0047I_0} = 21,2$, lo que implica que el máximo principal es 21 veces más luminoso que el máximo secundario.

¿Cómo se puede verificar el principio de incertidumbre a partir del experimento?



La manera en que se verifica el principio de incertidumbre que hemos explicado antes, a través del experimento de difracción por una rendija es la siguiente:

En primer lugar, sabemos que el momento lineal que poseen los fotones cuando viajan en paralelo cambia de dirección, y dicha desviación vendrá dada como $\Delta p \simeq p \cdot \sin(\theta)$, donde θ es el grado de inclinación con el eje principal.

Por otra parte, la incertidumbre en la posición es directamente la anchura de la rendija $\Delta x = a$.

Ahora, la diferencia de camino óptico viene dada por $\Delta = a \cdot \text{sen}(\theta) = m\lambda$. Tomamos $m = 1$ ya que porque estamos considerando el primer máximo (orden 1), y entonces podemos despejar $a = \Delta x = \frac{\lambda}{\text{sen}(\theta)}$.

Juntando ambas cosas, y utilizando la longitud de onda de De Broglie, que nos dice que $h = \lambda \cdot p$ obtenemos que:

$$\Delta p \cdot \Delta x \sim p \cdot \lambda = h$$

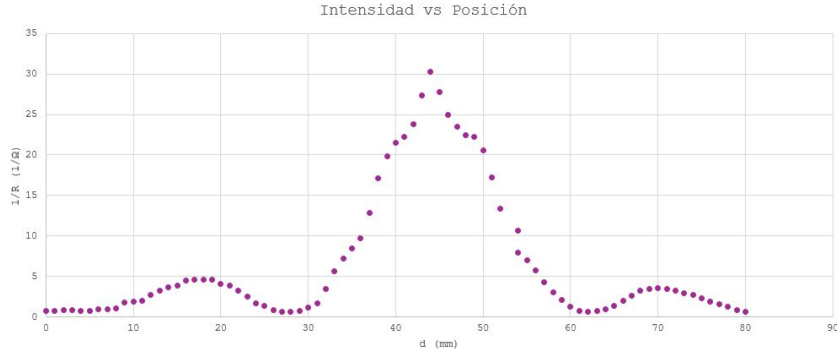
que nos justifica la imposibilidad de conocer con absoluta certeza la posición y el momento al mismo tiempo, tal y como se enuncia en el principio de incertidumbre.

Realización práctica

Tras la realización práctica, hemos recogido los datos en una tabla de excel, que adjunto a continuación:

| d | R1 | R2 | R | d | 1/R |
|----|-------|-------|--------|----|--------|
| 0 | 1,25 | 1,43 | 1,34 | 0 | 0,7463 |
| 1 | 1,2 | 1,32 | 1,26 | 1 | 0,7937 |
| 2 | 1,17 | 1,19 | 1,18 | 2 | 0,8475 |
| 3 | 1,15 | 1,29 | 1,22 | 3 | 0,8197 |
| 4 | 1,1 | 1,61 | 1,355 | 4 | 0,738 |
| 5 | 1,09 | 1,42 | 1,255 | 5 | 0,7968 |
| 6 | 0,655 | 1,36 | 1,0075 | 6 | 0,3926 |
| 7 | 0,62 | 1,48 | 1,05 | 7 | 0,3524 |
| 8 | 0,585 | 1,3 | 0,3425 | 8 | 1,061 |
| 9 | 0,34 | 0,75 | 0,545 | 9 | 1,8349 |
| 10 | 0,334 | 0,742 | 0,518 | 10 | 1,3305 |
| 11 | 0,316 | 0,676 | 0,496 | 11 | 2,0161 |
| 12 | 0,296 | 0,43 | 0,363 | 12 | 2,7548 |
| 13 | 0,268 | 0,341 | 0,3045 | 13 | 3,2841 |
| 14 | 0,186 | 0,364 | 0,275 | 14 | 3,6364 |
| 15 | 0,204 | 0,306 | 0,255 | 15 | 3,9216 |
| 16 | 0,226 | 0,215 | 0,2205 | 16 | 4,5351 |
| 17 | 0,211 | 0,222 | 0,2165 | 17 | 4,6189 |
| 18 | 0,185 | 0,249 | 0,217 | 18 | 4,6083 |
| 19 | 0,205 | 0,232 | 0,2185 | 19 | 4,5767 |
| 20 | 0,292 | 0,198 | 0,245 | 20 | 4,0816 |
| 21 | 0,29 | 0,231 | 0,2605 | 21 | 3,8388 |
| 22 | 0,312 | 0,296 | 0,304 | 22 | 3,2895 |
| 23 | 0,438 | 0,348 | 0,393 | 23 | 2,5445 |
| 24 | 0,855 | 0,351 | 0,603 | 24 | 1,6584 |
| 25 | 1,03 | 0,448 | 0,739 | 25 | 1,3532 |
| 26 | 1,5 | 0,812 | 1,156 | 26 | 0,8651 |
| 27 | 1,66 | 1,44 | 1,55 | 27 | 0,6452 |
| 28 | 1,26 | 1,86 | 1,56 | 28 | 0,641 |
| 29 | 0,777 | 1,39 | 1,3835 | 29 | 0,7228 |
| 30 | 0,365 | 1,29 | 0,8275 | 30 | 1,2085 |
| 31 | 0,213 | 0,37 | 0,5915 | 31 | 1,6906 |
| 32 | 0,125 | 0,451 | 0,288 | 32 | 3,4722 |
| 33 | 0,134 | 0,219 | 0,1765 | 33 | 5,6657 |
| 34 | 0,102 | 0,175 | 0,1385 | 34 | 7,2202 |
| 35 | 0,071 | 0,166 | 0,1185 | 35 | 8,4388 |
| 36 | 0,053 | 0,152 | 0,1025 | 36 | 9,7561 |
| 37 | 0,045 | 0,111 | 0,078 | 37 | 12,821 |
| 38 | 0,043 | 0,074 | 0,0585 | 38 | 17,094 |
| 39 | 0,045 | 0,056 | 0,0505 | 39 | 19,802 |
| 40 | 0,039 | 0,054 | 0,0465 | 40 | 21,505 |
| 41 | 0,031 | 0,059 | 0,045 | 41 | 22,222 |
| 42 | 0,028 | 0,056 | 0,042 | 42 | 23,81 |
| 43 | 0,027 | 0,046 | 0,0365 | 43 | 27,397 |
| 44 | 0,025 | 0,041 | 0,033 | 44 | 30,303 |
| 45 | 0,041 | 0,031 | 0,036 | 45 | 27,778 |
| 46 | 0,042 | 0,038 | 0,04 | 46 | 25 |
| 47 | 0,04 | 0,045 | 0,0425 | 47 | 23,529 |
| 48 | 0,038 | 0,051 | 0,0445 | 48 | 22,472 |
| 49 | 0,04 | 0,05 | 0,045 | 49 | 22,222 |
| 50 | 0,048 | 0,049 | 0,0485 | 50 | 20,619 |
| 51 | 0,062 | 0,054 | 0,058 | 51 | 17,241 |
| 52 | 0,084 | 0,065 | 0,0745 | 52 | 13,423 |
| 54 | 0,108 | 0,08 | 0,094 | 54 | 10,638 |
| 54 | 0,125 | 0,125 | 0,125 | 54 | 8 |
| 55 | 0,146 | 0,139 | 0,1425 | 55 | 7,0175 |
| 56 | 0,177 | 0,173 | 0,175 | 56 | 5,7143 |
| 57 | 0,241 | 0,22 | 0,2305 | 57 | 4,3384 |
| 58 | 0,378 | 0,275 | 0,3265 | 58 | 3,0628 |
| 59 | 0,566 | 0,378 | 0,472 | 59 | 2,1186 |
| 60 | 0,375 | 0,659 | 0,817 | 60 | 1,224 |
| 61 | 1,31 | 1,26 | 1,285 | 61 | 0,7782 |
| 62 | 1,27 | 1,76 | 1,515 | 62 | 0,6601 |
| 63 | 0,84 | 1,83 | 1,335 | 63 | 0,7431 |
| 64 | 0,64 | 1,42 | 1,03 | 64 | 0,9709 |
| 65 | 0,45 | 0,98 | 0,715 | 65 | 1,3986 |
| 66 | 0,34 | 0,639 | 0,4895 | 66 | 2,0429 |
| 67 | 0,29 | 0,465 | 0,3775 | 67 | 2,649 |
| 68 | 0,25 | 0,368 | 0,309 | 68 | 3,2362 |
| 69 | 0,235 | 0,341 | 0,288 | 69 | 3,4722 |
| 70 | 0,238 | 0,317 | 0,2775 | 70 | 3,6036 |
| 71 | 0,26 | 0,31 | 0,285 | 71 | 3,5088 |
| 72 | 0,292 | 0,323 | 0,3075 | 72 | 3,252 |
| 73 | 0,327 | 0,342 | 0,3345 | 73 | 2,9895 |
| 74 | 0,362 | 0,372 | 0,367 | 74 | 2,7248 |
| 75 | 0,42 | 0,437 | 0,4285 | 75 | 2,3337 |
| 76 | 0,535 | 0,54 | 0,5375 | 76 | 1,8605 |
| 77 | 0,625 | 0,638 | 0,6315 | 77 | 1,5835 |
| 78 | 0,802 | 0,753 | 0,7775 | 78 | 1,2862 |
| 79 | 1,23 | 0,985 | 1,1075 | 79 | 0,9029 |
| 80 | 1,88 | 1,26 | 1,57 | 80 | 0,6369 |

Los datos, así, en la tabla, no nos dan demasiada información, por ello procedemos a graficarlos para poder entender el comportamiento y sacar conclusiones:



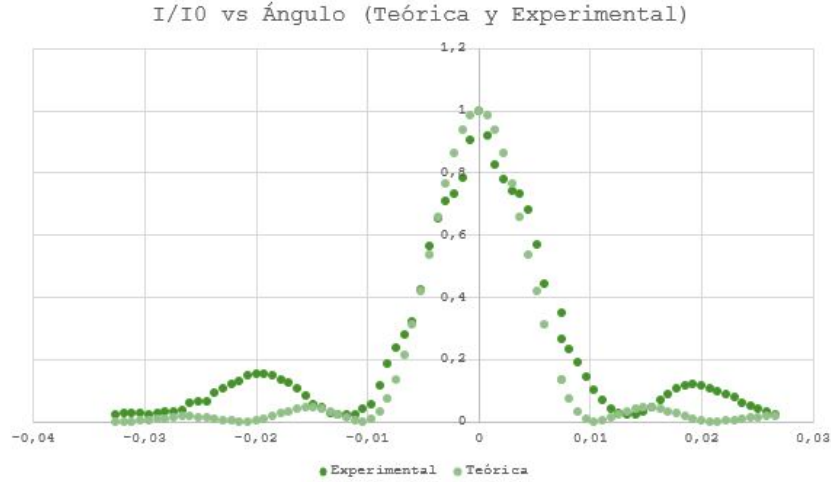
Además de estos datos, tomamos las medidas de D y a , que se corresponden con la distancia entre el láser y la fotorresistencia y la anchura de la rendija, respectivamente. Los datos obtenidos son $D = 150 \pm 0,1\text{cm}$ y $a = 0,06 \pm 0,01\text{mm}$. Con estos datos, podemos calcular el ángulo de desviación, centrando las medidas de d en el máximo absoluto y normalizando la intensidad medida. Representamos:



Tras observar ambas gráficas, pudimos extraer algunas conclusiones. Una de ellas es que se aprecia claramente el patrón de interferencia que esperábamos, con un máximo absoluto, que se encuentra en $I_0 = 30.3 \Omega^{-1}$, y dos máximos secundarios a los lados, siguiendo una distribución bastante simétrica, ya que se sitúan a 27 y 26 milímetros del máximo principal. La intensidad en dichos puntos es de 4,61 y 3,67 Ω^{-1} . Teóricamente, ese valor debería coincidir, sin embargo, difiere un poco, y esto es debido a que cometeríamos un error de medida, posiblemente a la hora de alinear el sistema. A pesar de ello no creemos que sea una diferencia tan significativa.

En la segunda gráfica podemos ver el ángulo de desviación en el que se alcanza los máximos secundarios, con respecto al máximo principal. Este es aproximadamente 0.02 radianes.

Podemos además comparar la curva experimental con la teórica:



Aquí podemos ver el valor que se espera teóricamente para cada uno de los ángulos de dispersión para los que tenemos datos medidos. Se ve claramente que los máximos secundarios experimentales se nos disparan, en comparación con los teóricos, que son mucho más suaves, como ya hemos explicado.

Nos inclinamos en pensar que un posible error cometido en el laboratorio a la hora de medir dicha intensidad es la gran cantidad de luz de fondo que había, puesto que el resto de compañeros estaban trabajando. Creemos firmemente que si se repitiese la práctica con la habitación completamente a oscuras, salvo el láser, estos mínimos se asemejarían más a los teóricos. A pesar de ello, consideramos que este error cometido no es muy grande, y se puede comprender perfectamente la curva que delimita el patrón de la interferencia causado por la difracción, por tanto creemos aceptaremos nuestros resultados.

Para terminar, veamos que con estos datos se puede verificar el principio de incertidumbre. Consideramos nuestros valores de a y λ , que son $0,06mm$ y $633nm$ respectivamente, y el valor que toma el parámetro β es $\text{sen}(\theta) \frac{\pi a}{\lambda}$. Si buscamos $\beta = \pi$, entonces podemos despejar el valor de θ y se obtiene que $\theta = \arcsen(0,5679) = 0,603rad$.

Aplicamos lo demostrado previamente, tenemos $\Delta p = p \cdot \text{sen}(\theta)$ y $\Delta x = a$. Si hacemos el producto de ambas incertidumbres, se tiene $\Delta p \cdot \Delta x = p \cdot \text{sen}(\theta) \cdot a \approx h$, por tanto, se verifica que $\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}$. Además, como $\beta = \pi$ es el punto de mínima incertidumbre, entonces, para todo ángulo θ , se verificará dicho principio.

3.5. Cálculo de errores

Ya que realizaré el informe acerca de esta práctica, incluiré aquí el cálculo de errores que he incluido también en el propio informe.

Procedemos con el cálculo de propagación de errores, a raíz de derivar la expre-

sión correspondiente, que en el caso del ángulo es $\theta = \arctg(\frac{d}{D})$, por tanto:

$$\Delta\theta^2 = \left(\frac{\partial\theta}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial D}\Delta D\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{D}}{1 + \frac{d^2}{D^2}} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\frac{-d}{D^2}}{1 + \frac{d^2}{D^2}} \cdot \Delta D\right)^2$$

Entonces, sustituyendo los errores (incertidumbre en la medida) de ambas medidas: $\Delta d = \pm 0,1cm$ y $\Delta D = \pm 0,1cm$, se obtiene que $\Delta\theta = \pm 6,6 \times 10^{-4}cm$.

Repetimos el proceso para la intensidad, utilizando la expresión que depende del parámetro que hemos medido, es decir, la resistencia R , que tiene un error de medida tal que $\Delta R = \pm 0,001\Omega$. Derivando la expresión $\frac{1}{R}$, se tiene que:

$$\Delta I^2 = \left(\frac{dI}{dR}\Delta R\right)^2 = \left(\frac{-1}{R^2}\Delta R\right)^2$$

De nuevo, sustituimos el valor experimental y obtenemos un error sobre la medida de la intensidad de $\Delta I = \pm 1,23 \times 10^{-7}\Omega^{-1}$.

4. Práctica 3B: Medida de la velocidad de la luz

4.1. Introducción

El objetivo principal de esta práctica es determinar la velocidad de la luz en el aire y otros medios (agua, resina sintética) por el método de modulación optoelectrónica.

El hecho de medir la velocidad de la luz es algo difícil, ya que no se puede medir como lo haríamos con un objeto cualquiera moviéndose a velocidad constante, mediante un experimento sencillo, sino que se necesita diseñar un experimento distinto. En nuestro caso, el experimento se basa en emitir luz y hacerla rebotar, recorriendo un espacio pequeño y midiendo desfases, lo cual es posible utilizando un haz de luz cuya intensidad esté modulada, es decir que varíe de forma periódica.

La fórmula que se utiliza es $c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta S}{\Delta \varphi}$ donde $\omega = 2\pi f$.

Posteriormente, se introducirá un tubo de otro material, que medirá ΔL , y de esta manera, el espacio recorrido por la luz constará de dos tramos, uno de longitud $\Delta S - 2\Delta x - 2\Delta L$ en el cual el medio es el aire; y otro de longitud $2\Delta L$ durante el cual viaja por el otro medio, siendo Δx la diferencia entre el punto donde el desfase es π con aire y con el medio intercalado.

Posteriormente, utilizaremos un osciloscopio para ver gráficamente los resultados, y añadiremos dos generadores de ondas con los que experimentaremos con las figuras de Lissajous.

4.2. Materiales

- Unidad emisora-receptora de luz modulada con frecuencia $f = 50MHz$

- Banco óptico
- Reflector
- Tubo cilíndrico de agua
- Tubo cilíndrico con resina artificial
- Osciloscopio y cables blindados
- 2 generadores de onda para generar figuras de Lissajous

¿Cómo funciona la unidad emisora-receptora?

Es un aparato que posee una fuente de luz que emite un haz de luz láser con frecuencia constante conocida, y además posee un fotodetector que recibe la señal luminosa y la convierte en señal eléctrica, que posee la información acerca de la modulación del haz. El aparato inicia un proceso de demodulación para medir el tiempo que ha tardado la onda en volver, o la diferencia de fase con la que ha llegado.

¿Cómo funciona un osciloscopio?

Es un aparato que representa gráficamente señales eléctricas y su variación en el tiempo. Puede ser útil para visualizar cómo varían las ondas, además de la interacción que tienen (superponiéndolas).

Generalmente representa voltaje frente a tiempo aunque tiene múltiples funciones incorporadas.

4.3. Desarrollo práctico

La realización práctica del experimento se divide en 3 partes: una primera en la que mediremos la velocidad de la luz en el aire, la segunda en la que utilizaremos los distintos medios intercalados y por último una tercera parte en la que experimentaremos con las figuras de Lissajous.

Velocidad de la luz en el aire

Procedemos con la realización de la práctica, comenzando por conectar la unidad emisora-receptora de luz. Esta dispone de distintos modos (mide distintas cosas), y para la primera parte utilizaremos el modo que mide el desfase $\Delta\phi$. Lo calibramos en una posición inicial y vamos moviendo el reflector, anotando el desfase en cada caso, hasta que lleguemos a un desfase de π .

Con los datos obtenidos, construimos una gráfica con la que calcularemos la velocidad de la luz en el aire.

Velocidad de la luz en agua y en resina

Ahora, con el reflector colocado en el punto donde el desfase era π con el aire, introducimos entre medias un tubo cilíndrico de otro material (agua o resina). A continuación, debemos mover el reflector (una distancia Δx sobre el banco) hasta recuperar un desfase en la onda de 180° . Con las expresiones teóricas, podemos averiguar el índice de refracción del medio y la velocidad de la luz en el mismo.

Repetimos el procedimiento dos veces, una con el tubo de agua y otra con el de resina.

Osciloscopio: Curvas de Lissajous

El osciloscopio es un aparato que, si lo conectamos a la unidad emisora-receptora, nos permite visualizar el desfase en dichas ondas. Además, lo podemos utilizar conectándolo a dos generadores de onda y así visualizar en él dos señales distintas sinusoidales. Componiéndolas, conseguimos formar las conocidas como Figuras de Lissajous. Podemos experimentar variando las frecuencias de las dos ondas para conseguir formar figuras de distinto tipo. Veremos que ocurre para el caso de señales con la misma frecuencia y de frecuencias distintas. En este segundo caso es interesante ver cómo varían las figuras en función a la diferencia entre dichas frecuencias.

4.4. Resultados

Análisis de los fundamentos físicos de la práctica

En primer lugar, vamos a investigar más acerca de los conceptos necesarios para la realización correcta de la práctica, como la velocidad de una onda electromagnética en diversos medios y su relación con el índice de refracción. En base a ello, vamos a contestar una serie de preguntas propuestas.

La primera de ellas es acerca de cómo obtener la expresión matemática que se debe utilizar para obtener la velocidad de la luz en medios diferentes del aire, además de cómo obtener el índice de refracción de cada medio con ello. Existe una relación fundamental entre la velocidad de la luz en el vacío ($c = 3 \times 10^8 m/s$) y la velocidad de la luz en cierto medio (v), que se relaciona con el índice de refracción del medio (n). Es la siguiente:

$$v = \frac{c}{n}$$

Además, el índice de refracción de un medio depende de las siguientes constantes (características de cada material):

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

donde ϵ_r es la permitividad relativa del material y μ_r es la permeabilidad electro-

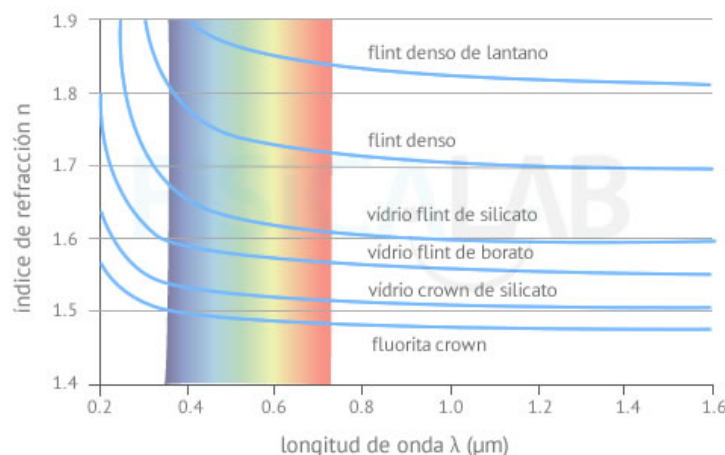
magnética relativa.

Otras preguntas acerca de los mismos conceptos son: ¿El índice de refracción obtenido depende de la frecuencia de la luz? ¿y de la longitud de onda?

Para responder a esta pregunta debemos comprender que el índice de refracción se entiende como el factor por el cual la velocidad y la longitud de onda de la radiación se reducen con respecto a sus valores de vacío.

$$v = \frac{c}{n}, \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Esto implica que el vacío tiene un índice de refracción de $n = 1$ y que la frecuencia de la onda ($f = \frac{v}{\lambda}$) no se ve afectada por el índice de refracción. Sin embargo, el índice de refracción sí que varía con la longitud de onda, y esto provoca que la luz blanca se divida en los colores del arcoiris cuando se refracta, produciendo un fenómeno de dispersión. Este efecto se puede observar fácilmente en prismas.



En esta gráfica, podemos ver representados diferentes índices de refracción en función de la longitud de onda. Para obtener esta curva experimentalmente se pueden utilizar diferentes métodos de espectroscopía. Por ejemplo, mediante un espectrogoniómetro con un prisma y distintas lámparas (de H, He, \dots). El prisma descompone la luz emitida en diferentes longitudes de onda, con el anteojo del espectrogoniómetro observamos el espectro visible del componente utilizado. Mediante la siguiente fórmula que relaciona el índice de refracción y el ángulo de desviación mínima, obtenemos los diferentes valores de n :

$$n = \frac{\text{sen}\left(\frac{\delta_m + \alpha}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Conocidas las longitudes de onda que componen el espectro atómico que estemos observando, se pueden representar los índices obtenidos en función de dichas longitudes de onda.

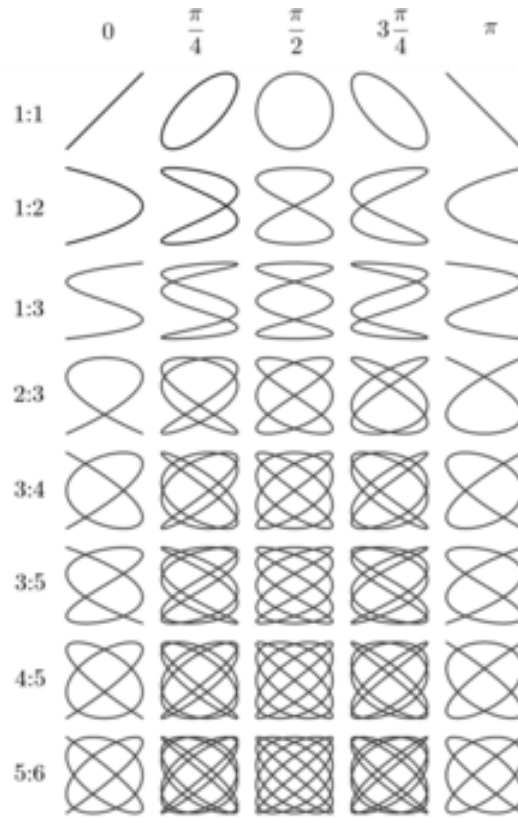
A continuación, buscaremos algo de información acerca de las curvas de Lissajous para poder responder a las siguientes cuestiones que se nos plantean: ¿Qué figuras de Lissajous se forman cuando la frecuencia de las ondas es la misma, para distintos valores de desfase?

A modo de introducción, cabe explicar que las curvas de Lissajous son el resultado del movimiento de dos osciladores armónicos simples cuyas direcciones son perpendiculares.

Ahora, cuando la frecuencia de las ondas es la misma, pero varían los valores de desfase, se forman diferentes figuras geométricas según la relación entre las frecuencias relativas de las ondas en cada dirección. Las figuras de Lissajous resultantes pueden ser elipses, círculos, líneas rectas,...Estas figuras se formarán dependiendo de la relación entre los valores de desfase, y en general dependiendo de las frecuencias (en este caso nos dicen misma frecuencia).

Cuando las ondas tienen la misma fase, o el desfase entre ondas es un múltiplo entero de π , entonces la figura resultante es un círculo. Por otro lado, si el desfase no es un múltiplo entero de π , entonces se formarán elipses. Las líneas rectas aparecen cuando las ondas tienen un desfase de $\frac{\pi}{2} + 2K\pi$ con K entero.

La apariencia de la figura es, sobre todo, muy sensible a la relación entre frecuencias. Si esta relación es conmensurable, entonces aparecen figuras cerradas con una serie de nodos (cruces). Dependiendo del desfase serán de una manera o de otra. Podemos ver las más básicas en la siguiente tabla:



Además, nos podemos preguntar cómo afecta la amplitud de las ondas en la figura formada. La respuesta es que la amplitud va a determinar el tamaño y la forma de la figura, así como la densidad de las líneas en el patrón.

Realización práctica

Dividiremos la práctica en tres partes, dependiendo del medio en el que midamos la velocidad de la luz.

- Velocidad de la luz en Aire:

Seguimos los pasos que nos indica el desarrollo práctico del experimento y los datos que obtenemos son los siguientes:

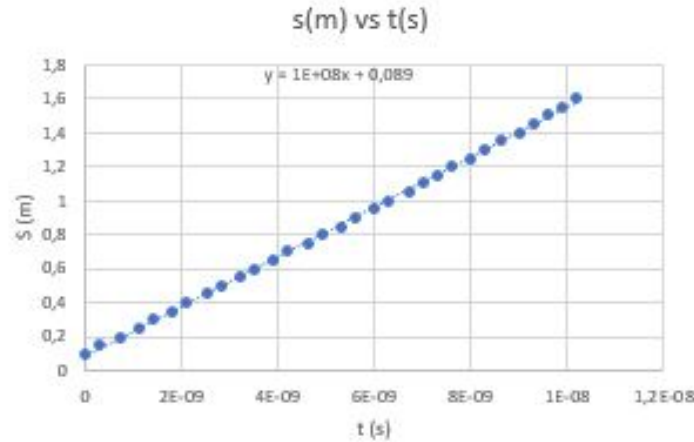
| S | T | fase | T | t(s) | s(m) |
|-----|------|------|------|----------|------|
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 |
| 15 | 0,3 | 6 | 0,3 | 3E-10 | 0,15 |
| 20 | 0,7 | 13 | 0,7 | 7E-10 | 0,2 |
| 25 | 1,1 | 19 | 1,1 | 1,1E-09 | 0,25 |
| 30 | 1,4 | 25 | 1,4 | 1,4E-09 | 0,3 |
| 35 | 1,8 | 32 | 1,8 | 1,8E-09 | 0,35 |
| 40 | 2,1 | 38 | 2,1 | 2,1E-09 | 0,4 |
| 45 | 2,5 | 44 | 2,5 | 2,5E-09 | 0,45 |
| 50 | 2,8 | 51 | 2,8 | 2,8E-09 | 0,5 |
| 55 | 3,2 | 57 | 3,2 | 3,2E-09 | 0,55 |
| 60 | 3,5 | 64 | 3,5 | 3,5E-09 | 0,6 |
| 65 | 3,9 | 70 | 3,9 | 3,9E-09 | 0,65 |
| 70 | 4,2 | 77 | 4,2 | 4,2E-09 | 0,7 |
| 75 | 4,6 | 83 | 4,6 | 4,6E-09 | 0,75 |
| 80 | 4,9 | 89 | 4,9 | 4,9E-09 | 0,8 |
| 85 | 5,3 | 95 | 5,3 | 5,3E-09 | 0,85 |
| 90 | 5,6 | 101 | 5,6 | 5,6E-09 | 0,9 |
| 95 | 6 | 108 | 6 | 6E-09 | 0,95 |
| 100 | 6,3 | 115 | 6,3 | 6,3E-09 | 1 |
| 105 | 6,7 | 120 | 6,7 | 6,7E-09 | 1,05 |
| 110 | 7 | 126 | 7 | 7E-09 | 1,1 |
| 115 | 7,3 | 132 | 7,3 | 7,3E-09 | 1,15 |
| 120 | 7,6 | 137 | 7,6 | 7,6E-09 | 1,2 |
| 125 | 8 | 144 | 8 | 8E-09 | 1,25 |
| 130 | 8,3 | 150 | 8,3 | 8,3E-09 | 1,3 |
| 135 | 8,6 | 155 | 8,6 | 8,6E-09 | 1,35 |
| 140 | 9 | 162 | 9 | 9E-09 | 1,4 |
| 145 | 9,3 | 167 | 9,3 | 9,3E-09 | 1,45 |
| 150 | 9,6 | 173 | 9,6 | 9,6E-09 | 1,5 |
| 155 | 9,9 | 180 | 9,9 | 9,9E-09 | 1,55 |
| 160 | 10,2 | 185 | 10,2 | 1,02E-08 | 1,6 |

En la tabla se observan los valores de S (superficie recorrida por el haz de luz) tanto en centímetros como en metros. Además aparece reflejada la desfase de la onda emitida-recibida, y también el tiempo que ha tardado en recorrer ese espacio. Ahora con estos valores podemos representar gráficamente la velocidad de la luz en el aire.

Como ya razonamos en la teoría, medir el tiempo que tarda la onda en ir y venir es muy complicado puesto que el espacio con el que contamos es bastante pequeño, y la velocidad de la luz es extremadamente alta. No podemos tratar de medir la velocidad de la luz y obtener precisión mediante un experimento clásico en el que se mide la velocidad (constante) de un objeto. Por ello, la manera más correcta de realizar la medición, y con la que obtendremos una mayor precisión es mirando el desfase que tiene la onda que recibimos tras ser reflejada en comparación con la que se ha emitido. Esto lo medirá el aparato emisor-receptor del haz de luz sin necesidad de calcular nada. Posteriormente,

con ese desfase podemos extraer el valor de la velocidad de la luz como hemos visto.

Veamos en primer lugar el espacio recorrido en función del tiempo:



Como se puede apreciar en el valor que nos da de la pendiente, 1×10^8 no aproxima correctamente la velocidad de la luz en el aire, que sabemos teóricamente que es 3 veces más que dicho valor. Es una primera aproximación ya que acierta en el orden de magnitud de 10^8 , pero como hemos dicho veamos que ocurre en función de la fase:



En esta gráfica, en el eje Y, en lugar de representar directamente el espacio recorrido, se ha aplicado la corrección, que sale de la fórmula $v = \omega \frac{\Delta S}{\Delta t}$ donde $\omega = 2\pi f$, para que la pendiente que aparece sea directamente el valor experimental de la velocidad de la luz en el aire, que se corresponde en este caso con el valor teórico $c = 3 \times 10^8$. Esto lo hacemos siguiendo la fórmula $2\pi f \Delta S = c \cdot \Delta \phi$. Con esto podemos aproximar el índice de refracción del aire como $n = 1$, igual que en el vacío.

Un dato relevante que vamos a necesitar en las dos siguientes partes del experimento es que el desfase de 180 grados se alcanza en la posición $S = 155cm$.

■ Velocidad de la luz en Agua:

En esta segunda parte, introduciremos un tubo cilíndrico relleno de agua, de manera que el haz de luz que antes recorría un espacio $2S$ de aire, ahora recorrerá $2S - 2L$ en aire y $2L$ en agua, siendo L la longitud del tubo.

Introducimos el tubo, que tiene una longitud $L = 0,5m$, en el espacio intermedio entre el aparato emisor-receptor de luz y el reflector. Ahora teniendo en cuenta el espacio que necesitaba recorrer la onda en aire para tener un desfase de 180° , buscamos ahora el punto en el que tiene un desfase de 180° , que será en menos espacio, ya que el índice de refracción del agua es mayor que el del aire. El punto en el que el desfase, con agua, vale exactamente π es en $S = 1,33m$, lo que implica que hemos movido $\Delta x = 22cm$ el reflector sobre el banco, acercándolo.

El procedimiento para obtener la velocidad de la luz en un medio distinto del aire es el siguiente. Definiremos la velocidad como $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, donde ΔS es la longitud del medio, y Δt el tiempo que tarda en recorrer dicho medio. Podemos obtener Δt mediante la siguiente expresión:

$$\Delta t_{total} = \Delta t_{aire} + \Delta t_{medio}$$

Como ya conocemos la velocidad de la luz en el aire (c) y la distancia recorrida se puede saber Δt_{aire} . De esta manera la velocidad será:

$$v_{medio} = \frac{2\Delta L}{\Delta t_{medio}}$$

$$v_{medio} = \frac{2\Delta L}{\Delta t_{total} - \Delta t_{aire}} = \frac{2\Delta L}{\Delta t_{total} - \frac{(\Delta S - 2\Delta x - 2\Delta L)}{c}} \quad (1)$$

donde hemos sustituido el hecho de que ya hemos calculado que $c = \frac{\Delta S_{aire}}{\Delta t_{aire}}$ y que $\Delta S_{aire} = \Delta S - 2\Delta x - 2\Delta L$, como hemos explicado antes.

Procediendo de esta manera, la velocidad de la luz en el agua que hemos obtenido es:

$$v_{agua} = 2,41 \times 10^8 m/s$$

Ahora, con este valor, se obtiene el índice de refracción del agua:

$$n = \frac{c}{v_{agua}} = \frac{3 \times 10^8}{2,41 \times 10^8} = 1,25$$

- Velocidad de la luz en Resina:

Repetimos el mismo proceso, pero esta vez introduciendo el tubo que está relleno de resina artificial, que tiene una longitud de $L = 0,45m$. Tomando las mismas medidas y teniendo en cuenta el punto que tenía desfase de 180° con aire, medimos nuestro nuevo punto de desfase 180° con resina y obtenemos el punto $S = 1,29m$, por tanto $\Delta x = 26cm$ es el desplazamiento del reflector sobre el banco, acortando la distancia que recorrerá la luz. De nuevo podemos obtener con esto la velocidad de la luz en la resina y su índice de refracción.

Procediendo de manera idéntica, se obtienen los siguientes datos para la resina. La velocidad de la luz en dicho medio será:

$$v_{resina} = 2,11 \times 10^8 m/s$$

y el índice de refracción es:

$$n = \frac{c}{v_{resina}} = \frac{3 \times 10^8}{2,11 \times 10^8} = 1,42$$

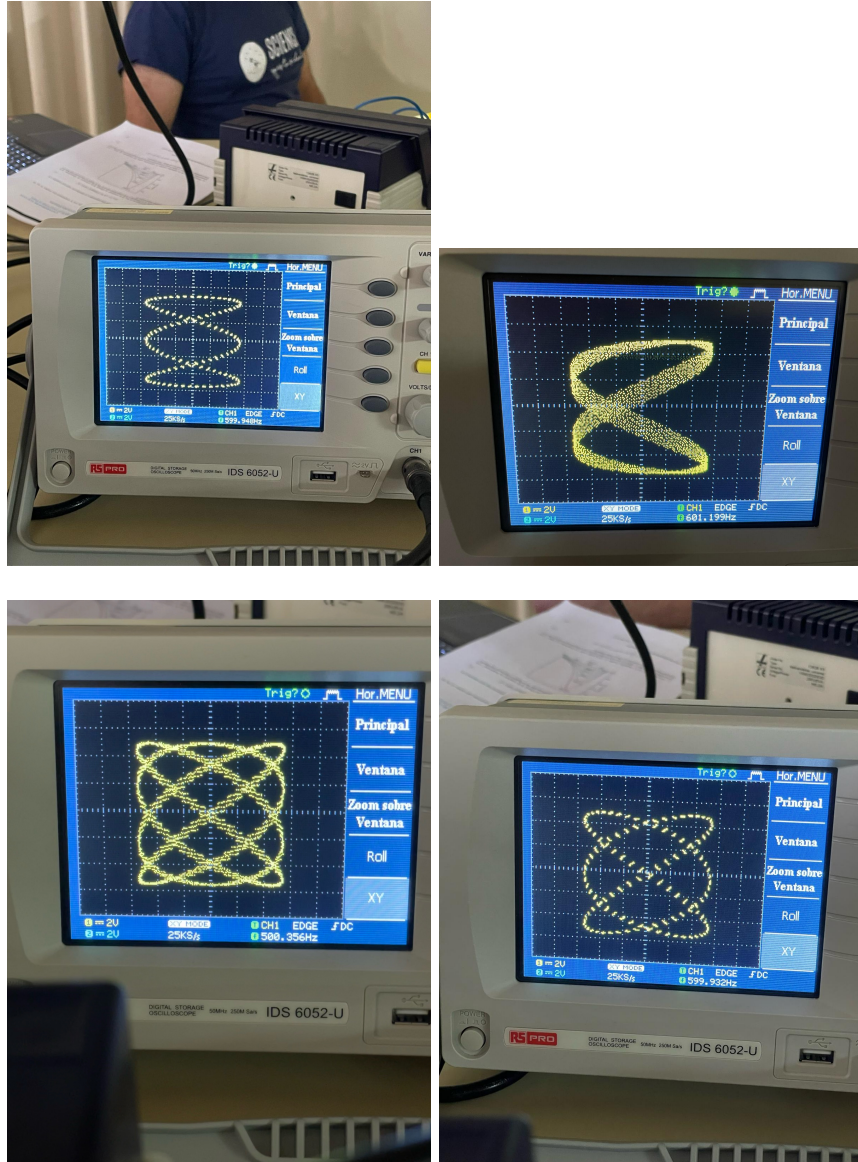
- Comparación con los datos reales:

Los datos teóricos del índice de refracción en agua y en resina son $n_{agua} = 1,330$ y $n_{resina} = 1,56$

Visualización de ondas con el Osciloscopio

En esta parte, conectamos los dos generadores de ondas al osciloscopio y tratamos de jugar, modificando las frecuencias de las ondas, para conseguir distintas figuras de Lissajous.

Algunas de las muchas que obtuvimos las fotografiamos, y por ello las incluyo a continuación:



5. Práctica 8: Análogo clásico de la distribución de Fermi-Dirac

5.1. Introducción

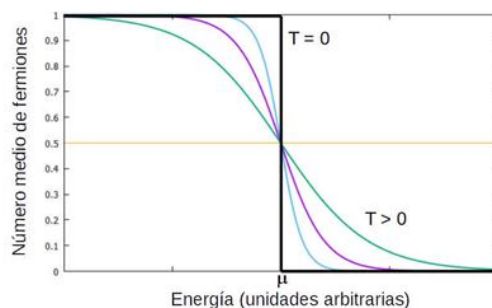
Esta práctica tiene como objetivo visualizar un fenómeno de la mecánica estadística que ocurre con fermiones, mediante un experimento (evidentemente con mecánica clásica) que consta de un conjunto de esferas pequeñas que vibran dentro de un recipiente. Realizaremos un estudio sobre ellas con tal de obtener una distribución de densidad en altura de estas esferas, como análogo clásico de la función de distribución de Fermi-Dirac.

El número medio de fermiones en un estado de energía dado ε , para una de-

terminada temperatura T y potencial químico μ , viene dado por la distribución de Fermi-Dirac:

$$\bar{n}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1}$$

donde k es la constante de Boltzman.



En nuestro caso, realmente estudiaremos el cambio de la densidad de esferas en función de la altura. En este caso, la vibración hace el papel de la temperatura. Por tanto, en este caso lo que podemos determinar es el número medio de partículas en función de la altura. Así podremos ver que distribución se obtiene y comprobar si existen similitudes con el resultado teórico.

5.2. Materiales

- Vibrador mecánico consisten de un pistón y un recipiente delgado
- Esferas metálicas de unos $3mm$ de diámetro
- Dispositivo de medición consistente en una horquilla que contiene un emisor y un receptor de luz
- Dispositivo contador (cuenta las veces que una esfera atraviesa el haz de luz)
- Cronómetro

5.3. Desarrollo práctico

Se sitúa el recipiente con las esferas entre medias de los brazos de la horquilla, de modo que el haz de luz atravesase las paredes transparentes del recipiente sin atravesar ninguna esfera. A continuación, se enciende el motor, ajustando frecuencia y amplitud, y se observa cómo se empiezan a mover las esferas. Se conecta el contador, que se encargará de contabilizar cada vez que una esfera atraviesa el haz de luz.

Para comenzar el experimento, se pone a 0 el contador a la vez que se activa el cronómetro. Entonces se contabilizan la cantidad de esferas que atraviesan el haz a una altura determinada. Seguidamente, se anota el dato y se vuelve a medir con una

altura menor, en nuestro caso bajando $1mm$ el haz de luz. Repetiremos esto todas la veces que sea posible y posteriormente se grafican.

Variaremos los diferentes parámetros para observar si se producen cambios en los resultados, como variar la frecuencia, la amplitud, el tiempo de medida, ...

5.4. Resultados

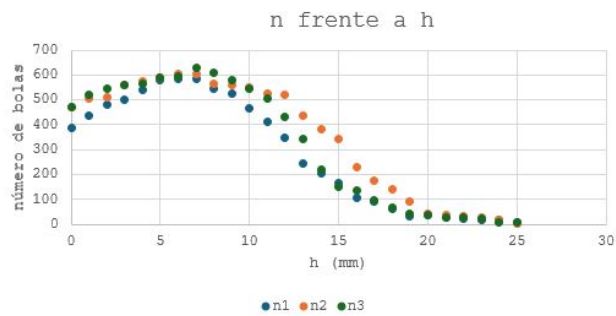
En primer lugar, vamos a analizar el análogo clásico del experimento que vamos a realizar, buscando equivalencias entre nuestras variables en la mecánica clásica y las teóricas en la mecánica estadística.

En primer lugar, el análogo del potencial químico (μ) va a ser la altura a la cuál las partículas dejan de vibrar, es decir, la altura a la que la densidad de esferas se reduce significativamente. Por otro lado, la vibración es lo que va a tomar el papel de la temperatura, que esta dependerá de la frecuencia y la amplitud que introduzcamos en el vibrador mecánico. Si aumentamos la frecuencia y la amplitud de vibración, vamos a simular que aumenta la temperatura del sistema, permitiendo que las bolitas alcancen niveles energéticos (alturas en nuestro caso clásico) más altos.

Ahora, para realizar el experimento procedemos con una amplitud y frecuencia fijas, y medimos en 3 ocasiones la bolitas que atraviesan el haz de luz en un tiempo fijo de 30 segundos, y variamos la altura a la que se sitúa el haz mediante el mecanismo que nos proporciona el propio emisor-receptor del haz, bajando de milímetro en milímetro hasta que el contador deje de contar correctamente. (El valor que escogimos para la frecuencia fue $f = 0,4Hz$). Los datos obtenidos fueron:

| h(mm) | n_1 | n_2 | n_3 |
|-------|-------|-------|-------|
| 25 | 6 | 4 | 6 |
| 24 | 17 | 20 | 6 |
| 23 | 20 | 27 | 24 |
| 22 | 24 | 32 | 27 |
| 21 | 26 | 39 | 29 |
| 20 | 38 | 45 | 36 |
| 19 | 35 | 93 | 41 |
| 18 | 60 | 140 | 69 |
| 17 | 93 | 177 | 95 |
| 16 | 105 | 228 | 134 |
| 15 | 167 | 342 | 149 |
| 14 | 205 | 381 | 219 |
| 13 | 245 | 435 | 342 |
| 12 | 349 | 519 | 432 |
| 11 | 413 | 525 | 508 |
| 10 | 468 | 548 | 545 |
| 9 | 524 | 560 | 582 |
| 8 | 547 | 564 | 610 |
| 7 | 584 | 603 | 629 |
| 6 | 585 | 606 | 594 |
| 5 | 579 | 591 | 588 |
| 4 | 539 | 576 | 565 |
| 3 | 502 | 558 | 558 |
| 2 | 483 | 510 | 543 |
| 1 | 436 | 507 | 521 |
| 0 | 387 | 470 | 469 |

A continuación, podemos ver los datos representados en una gráfica para poder visualizar el resultado obtenido:

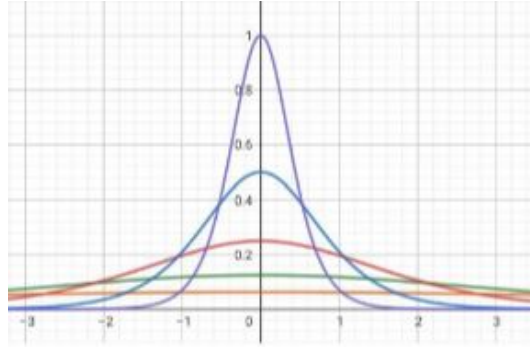


Podemos ver que el resultado no se parece en absoluto a la distribución que

esperabamos. Esto nos lleva a pensar acerca de qué estamos midiendo. Esta reflexión concluye con que en realidad lo que estamos midiendo nosotros, cómo varía el número de bolas en función de la altura, es en realidad análogo a la derivada de $n(\epsilon)$. Hagamos dicha derivada analíticamente:

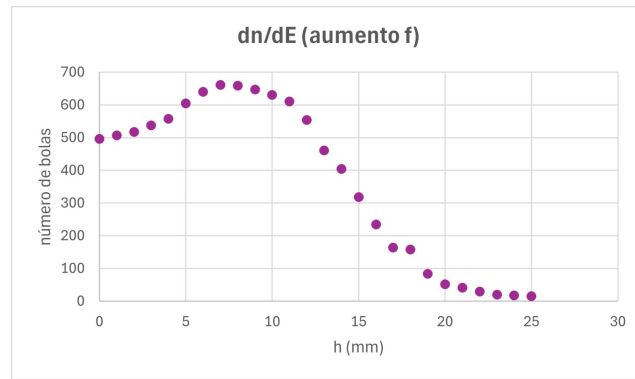
$$\frac{dn(\epsilon)}{d\epsilon} = -(e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1)^{-2} \cdot \frac{d}{d\epsilon}(e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1) = \frac{-\frac{1}{kT}e^{(\epsilon-\mu)/kT}}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1)^2}$$

Ahora, para ver la similitud de la gráfica experimental con la teórica, vamos a representar esta expresión de la derivada, dando valores constantes a μ y T :

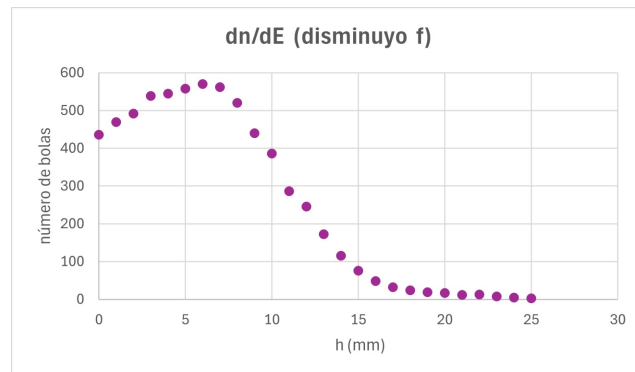


Ahora, vamos a variar tanto la frecuencia como la amplitud, por separado. Únicamente vamos a representar los únicamente las gráficas, ya que las tablas con todos los datos no aportan ningún valor extra. Veamos entonces las gráficas:

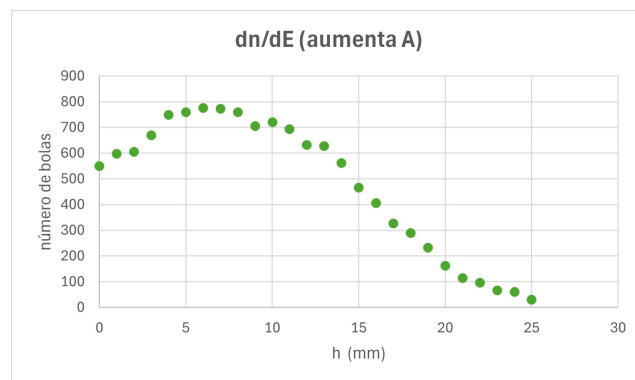
- Misma amplitud, mayor frecuencia



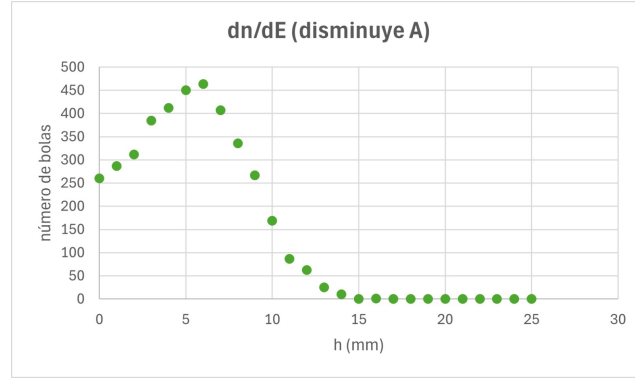
- Misma amplitud, menor frecuencia



- Misma frecuencia, mayor amplitud



- Misma frecuencia, menor amplitud



Las principales conclusiones que extraemos de estas gráficas es que, al fijar la amplitud y variar la frecuencia, se obtiene que a mayor frecuencia mayor es el número de bolas, y viceversa. Como podemos ver en las dos primeras gráficas, el máximo de bolas con más frecuencia se encuentra en $n_{max} = 570$ en 30 segundos, y en ese mismo tiempo, al disminuir la frecuencia hemos obtenido $n_{max} = 661$. Además, otra apreciación que podemos hacer es que si aumenta la frecuencia, las bolas vibrarán más alto, como es de esperar, y esto se ve reflejado en la gráfica.

Otra observación que era de esperar es que, al aumentar la frecuencia, las bolas alcanzan una mayor altura, y esto se ve traducido a que, a alturas relativamente altas, (cercanas a 15 o 20mm desde nuestro origen), se miden una mayor cantidad de bolas en la gráfica con mayor frecuencia.

Si ahora nos fijamos en las gráficas 3 y 4, lo que hemos variado es la amplitud, dejando una frecuencia fija, y se puede observar que a mayor amplitud más grande es n_{max} . Además podemos apreciar cómo cambia notoriamente la forma de la gráfica. Para una amplitud más pequeña, la gráfica se hace más estrecha, teniendo una subida y bajada más pronunciadas, mientras que en la de mayor amplitud pasa exactamente lo contrario.

Si repetimos el mismo proceso dejando fijas la amplitud y la frecuencia y lo que cambiamos es el tiempo, los resultados que obtenemos son completamente análogos. Evidentemente, a mayor tiempo mayor número de bolas se cuentan, pero eso no modifica en absoluto la forma de las gráficas ni las propiedades estudiadas hasta ahora. Cambiando el tiempo simplemente estamos cambiando la escala, pero no la forma que adquiere la distribución, por tanto no es un parámetro importante.