Apuntes de análisis de variable compleja

2023

Apuntes de las clases de *Análisis de variable compleja* dadas por *Juan Matías Sepulcre Martínez* y transcritos a LaTeX por *Víctor Mira Ramírez* durante el curso 2023-2024 del grado en Física de la *Universidad de Alicante*.

Índice

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1: Número complejo

Un **número complejo** z es un par ordenado de números reales a, b escrito como $\boxed{z = (a, b)}$ en coordenadas cartesianas. Existe una notación equivalente, la forma binómica: $\boxed{z = a + ib}$ siendo $i = (0, 1)$.

El conjunto de los número complejos se denota por: $C := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Comentario:

Siempre que $a = 0$ sea un número imaginario puro, y $b = 0$ sea un número real.

Definición 1.1.2: Conjugado

Llamamos conjugado de un número complejo al número denotado $\boxed{\bar{z} = a - ib}$, siendo $z = a + ib$. Geométricamente, podemos decir que el eje real actúa de 'espejo' del número en el plano.

Comentario:

Llamamos $\mathbb{C}$ al cuerpo de los numeros complejos. $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo, pero no totalmente ordenado. En cambio, cualquier ecuación algebraica tiene solución en los complejos. De todas formas, el teorema fundamental del álgebra nos asegura que tendrá n soluciones en los complejos

Comentario:

Cuando los coeficientes de una ecuación algebraica son reales, las soluciones complejas vienen por pares.

Teorema 1.1.1 Operaciones elementales

SUMA $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$

RESTA $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\, i$

PRODUCTO $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$ (teniendo en cuenta que $i^2 = -1$)

DIVISIÓN $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{a + bi}{c + di} \cdot \dfrac{c - di}{c - di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i$ (multiplicando por el conjugado)

Comentario:

El elemento unidad es $1 + 0i$ y el elemento inverso es $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$. Para que un número complejo tenga elemento inverso, debe ser distinto de cero. El producto de un número complejo por su elemento inverso es la unidad.

Definición 1.1.3: Componentes de los complejos

Llamamos **módulo** del número complejo $z = a + bi$ a la cantidad $\boxed{\sqrt{a^2 + b^2}}$ denotada $|z|$

Llamamos **argumento** del número complejo $z = a + bi$ al ángulo que forma el semieje positivo de abcisas con la recta que contiene el vector (a, b). Se denota Arg $z = \alpha$ y se expresa en radianes.

$\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$ si $a \neq 0$

Definición 1.1.4: Módulo

Llamamos **módulo** de un número complejo $z = a + bi$, y lo denotamos $|z|$, a la cantidad

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Definición 1.1.5: Argumento

Llamamos **argumento** de un número complejo $z = a + bi$ al ángula que forma el semieje positivo de abcisas con la recta que contiene al vector. El argumento de z se representa por Arg(z)= α, y se expresa normalmente en radianes.

$$\alpha = \arctan\frac{b}{a}, \text{si} a \neq 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{si} a = 0, b > 0$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}, \text{si} a = 0, b < 0$$

Si el ángulo se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi)$ lo llamaremos argumento principal.

Comentario:

lol

Comentario:

forma exponencial: el desarrollo en serie de la exponencial es: $e^x = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$ si introducimos un número complejo en la exponencial: $e^{iy} = 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \ldots$
Si analizamos el valor de i^n en función de n, entonces vemos como la exponencial compleja queda ahora como:
$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!}\right) = \cos(y) + i\sin(y)$
$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ con $z = x + iy$