Hoja 5 MAEDO.

Ejercicio 1. *Dar un conjunto fundamental de soluciones en* $\mathbb{R}$ *del sistema*

$$\begin{cases} (3+x^2)y_1' = 4xy_1 + (1-x^2)y_2 \\ (3+x^2)y_2' = 6y_1 - 2xy_2 \end{cases},$$

sabiendo que $Y(x) = \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ *es solución.*

Ejercicio 2. *Dar un conjunto fundamental de soluciones en* $\mathbb{R}$ *del sistema*

$$\begin{cases} (3x-2)y_1' = (2-x)y_1 + y_2 \\ (3x-2)y_2' = (4x-x^2)y_1 + (1+x)y_2 \end{cases},$$

sabiendo que $Y(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-x \end{pmatrix}$ *es solución.*

Ejercicio 3. *Resolver el sistema lineal no homogéneo*

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 2y_2 + \frac{1}{x} \\ y_2' = 2y_1 - y_2 + 4 + \frac{2}{x} \end{cases},$$

comprobando previamente que $Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $Y_2(x) = \begin{pmatrix} -2e^{-5x} \\ e^{-5x} \end{pmatrix}$ *forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo correspondiente.*

Ejercicio 4. *Dar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas*

1. $3y'' - y = 0$
2. $y'' - 16y = 0$
3. $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y(0) = -1, y'(0) = 2$
4. $y'' + 4y' - y = 0$
5. $2y'' - 3y' - 4y = 0,\ y(1) = -1, y'(1) = 2$
6. $y'' - y' - 6y = 0$
7. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$
8. $y''' - 7y'' - 25y - +175y = 0$
9. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = 0$
10. $y'' + 2y' + y = 0$
11. $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = -1, y'(0) = 2$
12. $y'' + 8y' + 16y = 0$
13. $y''' - y'' - y' + y = 0$
14. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$
15. $y'' + 9y = 0,\ y(0) = -1, y'(0) = 2$
16. $y'' - 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 2$
17. $y''' - y'' + 3y' + 5y = 0$
18. $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$
19. $x^2y'' + xy' - y = 0$
20. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
21. $x^2y'' - xy' + y = 0$
22. $x^2y'' + 3xy' - y = 0$

Ejercicio 5. *Se considera la ecuación diferencial* $y'' + 2by' + a^2y = 0$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ *y se pide estudiar el límite de* $y(x)$*, solución de la ecuación anterior.*

Ejercicio 6. *Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:*

1. $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$
2. $y'' - 3y' = 8e^{3x}$
3. $y'' - 3y' = 4\sin x$
4. $y'' + 8y = 5x$

5. $y'' + 8y = 2e^{-x}$
6. $y'' + y = x\cos x$
7. $y'' + y = \cos x$
8. $y'' - 2y' + y10e^{-2x}\cos x$
9. $y'' + y = \sec x$
10. $y'' + y = \tan x$
11. $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$
12. $y'' + 3y' + 2y = (1+e^x)^{-1}$
13. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x$
14. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3\ln x$

Ejercicio 7. *Indicar la solución general de $y'''(x) - ay''(x) - y' + ay = e^{ax}$ en función del parámetro real a.*

Ejercicio 8. *Sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, donde a y b son funciones continuas en un intervalo I. Demostrar que no existe $x_0 \in I$ tal que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$.*

Ejercicio 9. *Dar la solución general de*

$$x^2y'' + \alpha xy' - \alpha y = x^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

Ejercicio 10. *Dar la solución general de*

$$x^2y'' - nxy' + ny = x^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

Ejercicio 11. *Sea f una función continua y definida en todo $\mathbb{R}$. Para cada valos del parámetro α se considera la ecuación diferencial*

$$y'''(x) - (2\alpha+4)y''(x) + (\alpha^2+6\alpha+4)y'(x) - 2\alpha(\alpha+2)y(x) = f(x), \tag{1}$$

se pide

1. *Dar la solución de la parte homogénea de (1), en funcón de α.*
2. *Para $\alpha = 0$ y $f(x) = 4e^{2x}$ dar la solución particular de (1) usando el método de coeficientes indeterminados.*
3. *Para $m \neq 2$ y $f(x) = e^{mx}$, deducir si existe o no una solución particular de (1) de la forma $y_p(x) = x^2e^{mx}$.*

Ejercicio 12. *Sea f una función continua y definida en todo $\mathbb{R}$. Para cada valos del parámetro α se considera la ecuación diferencial*

$$4y'''(x) - (4+\alpha)y'(x) - \alpha y(x) = f(x), \tag{2}$$

se pide

1. *Dar la solución de la parte homogénea de (2), en funcón de α.*
2. *Para $\alpha = 8$ y $f(x) = xe^{-x}$ dar la solución particular de (2) usando el método de coeficientes indeterminados.*
3. *Para $\alpha = 0$ y $f(x) = 4$, dar la solución particular de (2) usando el método de variación de parámetros.*

Ejercicio 13. *Para cada valos del parámetro α se considera la ecuación diferencial*

$$y''(x) - (\alpha+\alpha^2)y'(x) + \alpha^3y(x) = 6xe^x, \tag{3}$$

se pide

1. *Dar la solución de la parte homogénea de (3), en funcón de α.*

2. Para $\alpha = 1$ dar la solución particular de (3) usando el método de coeficientes indeterminados.

Ejercicio 14. *Dada la ecuación diferencial*

$$xy''(x) + 2y' + xy(x) = 1, \tag{4}$$

se pide

1. *Demostrar que en $(0, +\infty)$, $\{\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la parte homogénea de (4).*

2. *Dar la solución general con las condiciones iniciales $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_0 = y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.*

Ejercicio 15. *Probar que el método de variación de parámetros aplicado a la ecuación diferencial $y'' + y = f(x)$ conduce a la solución particular*

$$y_p(x) = \int_0^x f(t)\sin(x - t)dt.$$

Ejercicio 16. *Consideremos la ecuación diferencial con coeficientes continuos sobre un intervalo I*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{5}$$

de la que conocemos una solución particular no nula en I, $y_1(x)$. Demostrar que el cambio de variable $y(x) = y_1(x)z(x)$ reduce la ecuación a una ecuación lineal homogénea de orden $n-1$ en la variable $w(x) = z'(x)$. Si la ecuación en $w(x)$ tiene un conjunto fundamental de soluciones $\{w_2(x), \ldots, w_n(x)\}$, probar que el conjunto

$$\{y_1(x), z_2(x)y_1(x), z_3(x)y_1(x), \ldots, z_n(x)y_1(x)\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación (5), siendo $z_i = \int w_i(x)dx$ para $i = 2, \ldots, n$.

Este resultado, en su versión $n = 2$ queda ampliado de la siguiente manera. Si $y_1(x)$ es una solución particular no nula en I de

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{6}$$

entonces

$$\{y_1(x), y_1(x)\int \frac{1}{y_1(x)^2}\exp\left(-\int a_1(x)dx\right)dx\},$$

son un conjunto fundamental de soluciones en I de la ecuación (6).

Ejercicio 17. *Dar la solución general de*

1. $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 6(x^2 + 1)^2$.

2. $(1 + x^2)y'' + (x - 2\sqrt{x^2 + 1})y' + y = 0$.

Ejercicio 18. *Dar, en caso de que exista, una ecuación diferencial lineal que tenga a $\{e^x, \sin x\}$ como conjunto fundamental de soluciones en todo $\mathbb{R}$.*

Ejercicio 19. *Sea $\{y_1(x), y_2(x)\}$ un conjunto fundamental en un I de la ecuación diferencial lineal con coeficientes continuos en I, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Demostrar que entre dos ceros consecutivos de y_1 debe existir un cero de y_2.*