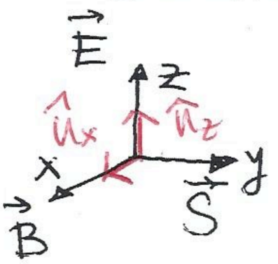
Una onda electromagnética plana de frecuencia ω se propaga a lo largo del eje y en un buen conductor de conductividad σ y permeabilidad μ.

(a) Calcular el valor medio del vector de Poynting en el plano $y = 0$ y en otro plano, paralelo al anterior, que está a una distancia igual a la profundidad de penetración δ ($y = \delta$). Obtener la diferencia de flujo a través de un cilindro de sección A y eje el de propagación.

(b) Comprobar que la potencia media disipada por efecto Joule en el cilindro conductor de sección A y espesor δ es igual a la diferencia entre los valores obtenidos en el apartado anterior, (a).

(a) Escribimos los campos en la forma:



$$\vec{E}(y,t) = E_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \delta_E)\,\cancel{\hat{u}_y}\ \hat{u}_z$$

$$\vec{B}(y,t) = B_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \delta_E + \phi)\,\cancel{\hat{u}_y}\ \hat{u}_x$$

donde hemos supuesto que $\vec{E}$ oscila en el eje z, mientras que $\vec{B}$ lo hace en el x. Además, hemos tenido en cuenta que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están desfasados:

$$\delta_B = \delta_E + \phi$$

Vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu} E_0 B_0 e^{-2\beta y} \cos(ky - \omega t + \delta_E) \cdot$$

$$\hat{u}_z \times \hat{u}_x = \hat{u}_y \qquad \cdot \cos(ky - \omega t + \delta_E + \phi)\,\hat{u}_y$$

Tenemos en cuenta la relación trigonométrica:

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} A = ky - \omega t + \delta_E + \phi \\ B = ky - \omega t + \delta_E \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A + B = 2(ky - \omega t + \delta_E) + \phi \\ A - B = \phi \end{array}$$