Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

ANÁLISIS DE UNA VARIABLE REAL I
GRADO EN FÍSICA
Derivación
Hoja de ejercicios
CURSO 2022-2023

1. Estudiar la derivabilidad en el punto $x = 0$ de las funciones:

1. $f(x) = (x^3 + x^2)^{\frac{1}{2}}$,
2. $f(x) = \sqrt{|x|}$,
3. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \ln(|x|) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

2. Estudiar, en $x = 1/2$ y en $x = 1$, la derivabilidad de la función $f(x) = [x] \sin^2(\pi x)$

3. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular las derivadas en los puntos que exista.

1. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$,
2. $f(x) = \arccos x$,
3. $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|}$,
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$,
5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$,
6. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.
7. $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$,

4. Hallar los valores de a, b y c para los cuales son derivables, en su dominio, las funciones

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$
2. $h(x) = \begin{cases} a \cos x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ b - x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ c \arctan x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$
3. $t(x) = \begin{cases} a + \sin \pi x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ a + bx & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ ce^{x^2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

5. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \arctan \sqrt{x-1} + \arccos \sqrt{\frac{x-1}{x}} \quad x > 1$,
2. $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad x \in (0, \pi)$,
3. $f(x) = x^{x^x} \quad x > 0$,
4. $f(x) = (\sin x)^{\cos x} \quad x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$,
5. $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}\right)$, $x > 1$.
6. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{4x^2}{\pi^2} & \text{si} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si} \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
8. $f(x) = \sin(\ln x)$
9. $f(x) = \ln\left(x^2 \ln^3 x\right)$
10. $f(x) = x^{\tan(2\pi x)}$
11. $f(x) = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$
12. $f(x) = x^{\ln x}$
13. $f(x) = \log_x e^x$
14. $f(x) = \tan(x^2 + \log x + \arctan x)$

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$, para cada par de números reales x,y. Demostrar que f es constante.

7. Sea f una función derivable en $x \in (a, b)$. Probar que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Dar un ejemplo de una función para la que exista el límite anterior sin ser la función derivable en dicho punto.

8. Encontrar justificadamente los puntos de $\mathbb{R}$ donde las siguientes funciones son continuas y derivables. Calcular también la derivada en los puntos donde exista.

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sin|x| & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$;
2. $f(x) = \sqrt{|x|}$.

9. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}.$$

a) Estudiar la continuidad de f.

b) Estudiar la derivabilidad de f y calcular la derivada cuando se pueda.

10. Sean $f, g, \ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tres funciones tales que $g(x) \leq f(x) \leq \ell(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Supongamos, además, que $g(x_0) = \ell(x_0)$ y que existen $g'(x_0)$ y $\ell'(x_0)$ con $g'(x_0) = \ell'(x_0)$ para un cierto $x_0 \in \mathbb{R}$. Probar que existe $f'(x_0)$ y que $f'(x_0) = g'(x_0) = \ell'(x_0)$.

11. Estudiar la derivabilidad en el origen de $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -x^2 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

12. Sea $f(x) = x^2 - 2$ y sea x_0 un número racional mayor que $\sqrt{2}$. Obtener una fórmula para la intersección de la recta tangente a la gráfica de f en el punto x_0 con el eje de abscisas.

Denotemos este punto como $(x_1, 0)$. Probar que $\sqrt{2} < x_1 < x_0$ y comprobar con una calculadora que iteraciones sucesivas de esta fórmula llevan rápidamente a una aproximación de $\sqrt{2}$ mediante números racionales. Explicar lo que ocurre geométricamente.

13. Sea $f(x) = x - \sin x$. Demostrar que f es creciente y utilizar este resultado para demostrar que $\sin x < x$ si $x > 0$ y $\sin x > x$ si $x < 0$. Deducir que $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$, para todo x no nulo.

14. Separar las raíces de las ecuaciones siguientes:

1. $2x^3 + 3x^2 - 12x + 12 = 0$
2. $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12 = 0$
3. $x - x^2 - \ln(x+1) = 0$
4. $x^3 - 3x + m = 0$

15. Establecer las siguientes desigualdades:

1. $\tanh x \leq x \leq \sinh x \qquad x \in [0, \infty)$
2. $\dfrac{1}{1+x} < e^x \qquad x \in (0, \infty)$
3. $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < \tan x \qquad x \in (0, 1)$
4. $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad x > -1$

16. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x(x-1)(x-2)$.

17. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos relativos y absolutos (si existen) en el conjunto de definición de las siguientes funciones

1. $f_1(x) = x^3 + ax + b \quad x \in \mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \ln(x^2 - 9) \quad |x| > 3$
3. $f_3(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^4 \quad x \in [0,1]$
4. $f_4(x) = \ln|x^3 + x + 1| \quad x \in [-1,0]$
5. $f_5(x) = \ln|x^3 + x + 1| \quad x \in [0,1]$

18. Estudiar los extremos relativos de una función f tal que

1. $f'(x) = x^4(x-1)^2(x-2)^3(x+5)$.
2. $f'(x) = x^3(x-1)^4(x+1)^3(x-4)$.

19. Calcular los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

20. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2$, determinar en qué intervalos la función f es inyectiva.

21. Dados $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, encontrar el mínimo valor de

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} (x - a_j)^2 \right)^{1/2}.$$

22. Si $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots \frac{a_n}{n+1} = 0$, probar que el polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ tiene una raíz en $[0,1]$.

23. Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua, derivable en (a, ∞) y con $f(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Probar que existe un punto $c \in (a, \infty)$ donde se anula la derivada.

24. Sea f una función real definida en $(0,1)$ verificando que $|f'(x)| < 1$ si $x \in (0,1)$. Probar que f es uniformemente continua en $(0,1)$.

25. Estudiar si se puede aplicar el Teorema de Rolle a la función $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ en su dominio de definición.

26. Estudiar si existe algún valor de x para el que la tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{x}{1+x}$ sea paralela a la recta que conecta los puntos $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$.

27. Hallar el área del triángulo determinado por el eje de abscisas y las rectas tangentes y normal a la gráfica de $f(x) = 9 - x^2$ en el punto $(2,5)$.

28. Consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Si $a = -1$ y $b = 1$, comprobar que no existe ningún valor $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y explicar por qué esto no contradice el teorema de los valores intermedios de Lagrange.

29. Demostrar que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

30. Haciendo uso del teorema de los valores intermedios de Lagrange, establecer las siguientes desigualdades:

1. $1 + x \leq e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $\ln(1 + x) < x$, para todo $x > 0$.

31. Sea $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \left(\frac{4}{\pi}x\right)^3 \tan x$. Se pide

1. Probar que f es una función estrictamente creciente.
2. Deducir que existe la función inversa de f.
3. Decidir, justificadamente, si existe $(f^{-1})'(1)$. Calcularla en caso de existencia.

32. Sea f una función derivable en todo punto de su dominio que cumple $f'(x) = (1 + x^3)^{-1/2}$.

1. Probar que existe f^{-1}. Escribir el conjunto imagen de f^{-1}.
2. Si $g = f^{-1}$, probar que $g''(x) = \dfrac{3g^2(x)}{2}$.

33. Hallar dos números positivos cuya suma sea 120 y de forma que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

34. Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y

1. Su producto sea máximo.
2. La suma de sus cuadrados sea mínima.
3. El producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

35. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una elipse de semiejes a y b.

36. Demostrar que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

37. Una empresa quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo V. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base R y la altura de la lata h, para que su construcción requiera el mínimo gasto de material?

38. En un trozo de cartón rectangular de 8×5 centímetros se han quitado cuatro cuadrados iguales de las esquinas, de manera que con la figura restante se puede construir una caja sin tapa. Hallar el lado de los cuadrados cortados para que el volumen sea máximo.

39. Una hoja de papel debe tener 18cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior tienen que ser de 2cm cada uno y los laterales de 1cm. Hallar las dimensiones de la hoja para las cuales el gasto de papel sea mínimo.

40. Encontrar el punto de la curva $y^2 = x$ más próximo al punto $(2, 0)$.

41. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$, tiene como mucho una solución en el intervalo $[-1, 1]$. Dar los valores de k para los cuales la ecuación anterior tiene exactamente 1 solución en dicho intervalo.

42. Demostrar que la ecuación $6x^4 - 7x + 1 = 0$ no tiene más de dos raíces reales distintas.

43. Sea $a > 0$. Demostrar que existen al menos dos soluciones reales de la ecuación $a^x + a^{-x} = a$.

44. Sea $f : (-10, 10) \to \mathbb{R}$ una función derivable con $f(-8) = f(8) = 7$. Demostrar que existe $\xi \in (-10, 10)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

45. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b) = 0$ entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$\alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0.$$

46. Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin(x) - e^x}{\arctan^2 x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x((1+\frac{1}{x})^x - e)$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - \sqrt{x}}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \; \ln x$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\sin x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 x}{x^4 + x^3}$;
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$;
10. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$;
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(2+\cos x) - 3\sin x}{x^5}$;
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - \tan x}{x^3}$;
13. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2(1-\cosh x)}{x^3}\right)$;
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)^2 \sin^2 x}{\tan^3 x}$;
15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{3\sin^4 x + \sin^5 x}$;
16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x) + x^2)^2}{2x^2}$;
17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{|x|}}$;
18. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^4 + x^2 + 1)}{\ln(x^{10} + x^7 + 100)}$;
19. $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^5 - 2x^4 + 3)^{\frac{-2}{(x-1)^2}}$;
20. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2 + x2^x}{2 + x3^x}\right)^{\frac{1}{x}}$;
21. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x-1}$;
22. $\lim\limits_{x\to 0^+} |\sin x|^{\frac{1}{\ln x}}$;
23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin(\sin(\sin x)))}{\sin(\sin(\sin x))}$;

47. Sean $h, k \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, calcular $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^h - a^h}{x^k - a^k}$.

48. Una función f se dice que es *par* si $f(-x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y se dice que es *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

1. Calcular $f'(0)$ donde f es una función derivable par.
2. Sea f una función derivable en todo $\mathbb{R}$. Demostrar que
   (a) Si f es par entonces f' es una función impar.
   (b) Si f es impar entonces f' es una función par.
3. Encontrar un ejemplo de una función cuya función derivada, f', sea par y f no sea impar.

49. Demostrar que no existen funciones derivables f y g con $f(0) = g(0) = 0$ tales que para todo x se verifica que $x = f(x)g(x)$. ¿Y si únicamente exigimos continuidad?

50. En las siguientes afirmaciones, decir cuales son verdaderas y cuales son falsas. Probar las que sean verdaderas y proporcionar un contraejemplo para las que sean falsas.

1. Si f es derivable en un punto x_0 entonces f es continua en x_0.

2. Si f es derivable entonces f' es continua.
3. Si $f'(x) = x^4(x-1)^2(x-2)^3(x+5)$, entonces f tiene únicamente un mínimo relativo.

51. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ y a un punto del intervalo abierto I. Supongamos que f es dos veces derivable en I y que $f''(a) \neq 0$. Si para cada h, $\theta(h)$ representa el punto del intervalo $(0,1)$ dado por la Fórmula de Lagrange
$$f(a+h) - f(a) = f'(a + \theta(h)h)h,$$
demostrar que
$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}.$$

52. Determinar las constantes a y b para que el orden del infinitésimo $f(x) = x - (a + b\ \cos x)\sin x$ sea máximo.

53. Determinar las constantes a,b,c,d para que sea un infinitésimo de orden máximo en $x = 0$ la expresión:
$$f(x) = e^x - a\cos x - b\sin x - c\cos(2x) - d\sin(2x).$$

54. Consideremos la función $f(x) = xe^{x-1}$. Se pide

1. Obtener el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en el punto $a = 1$, denotado por $P_{2,1}$ y dar la expresión del resto de Lagrange y de Cauchy.
2. Acotar el error que se comete al aproximar $f(0'9)$ por $P_{2,1}(0'9)$.
3. Acotar el error que se comete al aproximar $f(x)$ por $P_{2,1}(x)$ cuando $x \in (0'9, 1'1)$.

55. Sea $f(x) = e^{2x}$. Encontrar el menor valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que al aproximar $f(1)$ por el polinomio de Maclaurin de f, el error cometido sea menor que $\frac{1}{1000}$.

56. Sean $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^{(n-1)}$ tal que $f^{(n-1)}$ es derivable en a. Si Q es un polinomio de grado menor o igual que n verificando que
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0,$$
entonces Q es el polinomio de Taylor de grado n de f centrado en a.

57. Obtener el desarrollo de Taylor de las funciones $f(x) = xe^{x-1}$ y $g(x) = x^3 \ln x$ en el punto $a = 1$ con los restos de Lagrange y de Cauchy.

58. Aproximar mediante el polinomio de Taylor de grado cuatro centrado en $\frac{\pi}{4}$ el valor de $\sin(70^o)$. Acotar el error.

59. Mediante el polinomio de MacLaurin obtener el número e con dos cifras decimales exactas.

60. Obtener la expresión del polinomio de McLaurin de orden n de $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ y aproximar el valor de $\ln 3$ tomando $n = 3$.

61. Calcular $\cos 1$ con un error menor que 10^{-7}.

62. Obtener el desarrollo limitado de MacLaurin de orden n de
$$f(x) = \arctan\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}.$$

63. Sea $f(x) = (\arcsin(x))^2$. Se pide para $-1 < x < 1$:

1. Comprobar que $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$
2. Hallar $f^{(n)}(0)$
3. Dar el polinomio de MacLaurin de $f(x)$ de orden n.

64. Dibujar la gráfica de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{x-4}{x^3}$;
2. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;
3. $f(x) = e^{-x^2}$;
4. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$;
5. $f(x) = \dfrac{x+e^x}{x-e^x}$;
6. $f(x) = e^{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$;
7. $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{1-x}$;
8. $f(x) = xe^{-x}$;
9. $f(x) = \dfrac{4x-x^3}{4+x^2}$;
10. $f(x) = \dfrac{4x^2-4x+1}{5x^2-6x+1}$;