Práctica 2 "Movimiento en un campo central"

Introducción

Llamamos campos centrales de fuerza a aquellos campos cuyo valor solo depende de la distancia y están dirigidos en esa dirección. En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), centradas en el punto tendríamos que

$$\vec{F} \equiv F_r \overrightarrow{u_r} + F_\theta \overrightarrow{u_\theta} + F_\phi \overrightarrow{u_\phi} = F_r \overrightarrow{u_r}$$

donde F_r es proporcional a una potencia de r. Ejemplos típicos de este tipo de campo son el gravitatorio, el eléctrico o el armónico.

Una propiedad de este tipo de campos es que son conservativos y se puede definir un potencial (V) asociado al campo de fuerzas.

$$\vec{F} = \vec{\nabla} V$$

Otra propiedad que tienen este tipos de campos es que conservan el momento angular, L, definido como

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

donde m es la masa del cuerpo y $\vec{v}$ su velocidad. Esta propiedad nos indica también que el movimiento se restringe a un plano, por comodidad y sin perdida de generalidad, supondremos que es el plano ecuatorial ($\theta=\pi/2$ o plano XY), así

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2 \dot{\phi}\, \overrightarrow{u_\theta} = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \overrightarrow{u_\theta}$$

Para esta práctica vamos estudiar la interacción gravitatoria entre 2 cuerpos, cuyas masas son M y m. La fuerza que se ejercen es en este caso

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \overrightarrow{u_r}$$

Para describir el movimiento relativo tenemos

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{d\,t^2} = -\frac{GMm}{r^2} \overrightarrow{u_r}$$

donde la masa reducida μ es igual a

$$\mu = \frac{M \cdot m}{M + m}$$

Si escribimos las ecuaciones de movimiento por componentes en coordenadas esféricas

$$\frac{d^2 r}{d\,t^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = -\frac{GMm}{\mu\ r^2}$$

$$r\ \frac{d^2\phi}{d\ t^2} + 2\ \frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} = 0$$

Esta ecuación nos lleva a la conservación del momento angular

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right) = 0 \Rightarrow r^2\frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{\mu}$$

Así podemos rescribir

$$\frac{d^2r}{d\ t^2} = \frac{L^2}{\mu^2r^3} - \frac{GMm}{\mu\ \ r^2}$$

Es posible rescribir esta ecuación como un gradiente

$$\frac{d^2r}{d\ t^2} = -\vec{\nabla}\left(\frac{L^2}{2\mu^2r^2} - \frac{GMm}{\mu\ r}\right)$$

a la función a la que aplicamos el gradiente se le llama potencial efectivo

$$V_{ef} = \frac{L^2}{2\mu^2r^2} - \frac{GMm}{\mu\ r}$$

No se conoce la integral general de esta función, tipo *r(t)* y $\phi\ (t)$ aunque si se puede llegar a escribir la ecuación de la trayectoria, en función de $r\ y\ \phi$. La solución son cónicas, la ecuación general es del tipo.

$$r = \frac{L^2/_{GMm\mu}}{1 +\ \varepsilon\cos\phi},$$

donde ε es la excentricidad.[1] Para una órbita elíptica, se cumple que

$$\varepsilon = \frac{r_{apogeo} - r_{perigeo}}{r_{apogeo} + r_{perigeo}}$$

A la hora de integrar numéricamente puede ser más sencillo trabajar con coordenadas cartesianes XY.

Cuestiones

Considera a la tierra como fuente de interacción gravitatoria (busca su masa y su radio). Busca también el rango de masa que suelen tener los satélites artificiales.

Testeamos el código.

[1] Si la órbita es circular ε=0, elípticasi 0<ε<1, parabólica si ε=1 e hiperbólica ε>1.

- ¿El código mantiene una órbita circular? ¿el valor del radio es constante? ¿el periodo es correcto?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\mu}}$$

2. Sitúa el satélite de forma que haga una órbita de perigeo aproximadamente 300 km sobre la superficie terrestre. Dibuja el potencial efectivo en ese caso e indica en el gráfico la distancia mínima y máxima al centro de la tierra. Obtén r(t) y v(t). ¿Los valores del apogeo son correctos? ¿Y el periodo?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\mu}}\ ,$$

donde *a* es el semieje mayor de la elipse.

$$a = \frac{r_{apogeo} + r_{perigeo}}{2}$$

Investiga

3. Varía las condiciones iniciales para representar los tres tipos de trayectoria que pueden darse en este problema. Siempre dibuja el potencial efectivo, situando la energía total en el gráfico.

4. Haz una animación de cada trayectoria, de tal manera que se vea la trayectoria del satélite a medida que avanza el tiempo.

5. En el caso de las órbitas acotadas, resuelve las ecuaciones considerando el potencial que obtuviste en el problema 3 del boletín 1 y haz una animación de lo que sucede en este caso.

$$V(r) = \frac{A}{r^5}$$

Donde para que se describa una circunferencia de radio *R* que acabe en la fuente de potencial se ha de cumplir que $A= 8(LR)^2/m^2$. Donde *L* es el momento angular del cuerpo y *m* la masa del cuerpo.

6. Repite el análisis para el potencial de un muelle. ¿Cuántos tipos de trayectoria hay en este caso? ¿Son cerradas?

7. Por último, agrega al potencial del muelle un término proporcional a r^3, es decir, un término de fuerza proporcional a r^2. Haz una animación de la trayectoria en este caso y explica lo que sucede.