Efectos de la atribución de masa al fotón: lagrangiano de Proca y consecuencias

La partícula asociada con el campo e.m. es el fotón. ¿Hasta que punto estamos seguros de que la masa del fotón es cero? Las ecuaciones de Maxwell habituales y la expresión para $\mathcal{L}$ que hemos visto están basados en la hipótesis de que el fotón tiene masa nula.

Podemos considerar una masa para el fotón y al considerarlo en el lagrangiano de Maxwell obtenemos el **lagrangiano de Proca** (Alexandru Proca (1897-1955)):

$$\mathcal{L}_{Proca} = \mathcal{L}_{Maxwell} + \frac{1}{2}\epsilon_0 c^2 \mu^2 A_\mu A^\mu$$

μ tiene dimensiones inversas de una longitud y es el recíproco de la longitud de onda Compton ($\mu = m_\gamma c/\hbar$, $m_\gamma \equiv$ masa fotón).

Vemos que $\mathcal{L}_{Proca}$ no es invariante gauge porque el término de masa hace que cuando A^μ sufra una transformación de gauge no desaparezca. Es decir, si $m_\gamma \neq 0$ no hay invariancia bajo transformaciones gauge del electromagnetismo.

La presencia del término de masa se traducen en las ecuaciones de movimiento (en el gauge de Lorentz):

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \Box A^\nu = \mu_0 J^\nu \rightarrow \boxed{(\Box + \mu^2) A^\nu = \mu_0 J^\nu}$$

(Campo de Klein-Gordon, asociado a una partícula con masa sin spin, $(\Box + m^2)\Phi = 0$, caso libre).

Consideremos $A^0 = \phi/c$ y sea el caso estático ($\neq f(x^0)$)

$$(\Box + \mu^2) A^\nu = \mu_0 J^\nu$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \vec{\partial}^2$$

1. $A^0 = \phi/c$
2. Caso estático ($\neq f(x^0)$)
3. Carga puntual en $\vec{x} = 0$ ($\rho = q\delta(\vec{x})$)

luego, si la fuente es una carga puntual en el origen:

$$(-\nabla^2+\mu^2)\frac{\phi}{c} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} c q \delta(\vec{x}) \longrightarrow \boxed{(-\nabla^2+\mu^2)\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x})}$$

siendo la fuente una carga puntual q en $\vec{x}=0$. Si $\mu=0$ ($m_\gamma=0$), la solución de la ecuación sería:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \quad \text{(Potencial de Coulomb)}$$

ya que:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{x})$$

Si $m_\gamma \neq 0$, ¿en qué medida se modificaría el Potencial de Coulomb si se considera que el campo e.m. tiene una masa? Éste toma la forma esféricamente simétrica de Yukawa:

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\mu r}}$$

Así pues:

en $\vec{x}=0$ se reduce al caso anterior.

en $\vec{x}\neq 0$ $\quad \nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(e^{-\mu r}) =$

$$= \mu^2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\mu r} = \mu^2\phi$$

Yu Kobzarev y L.B. Okun' (1968) y A.S. Goldhaber y M.M. Nieto (1971) han obtenido:

$$m_\gamma < 4\cdot 10^{-48}\ \text{g}$$

que nos permite concluir que la masa del fotón es nula.