1)

a) $L_0 = \sqrt{mkd}$, órbita circular.

$U_{eff} = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$. La órbita corresponde al

mínimo de U_{eff} $\Rightarrow$ $\frac{\partial U}{\partial r} = 0 = -\frac{L_0^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} = 0$

$\Rightarrow \boxed{r = \frac{L_0^2}{km} = d}$

La energía que tiene es $E = U_{eff}(d) = \frac{L_0^2}{2md^2} - \frac{k}{d} = -\frac{k}{2d}$

Cuando se le imprime $\vec{v_0} = v_0 \hat{r}$ el J no cambia pues una v en la dirección $\hat{r}$ no contribuye al momento angular $\Rightarrow J' = J$. Entonces la nueva energía será $\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{J^2}{2md^2} - \frac{k}{d} = -\frac{k}{4d} < 0$

b)

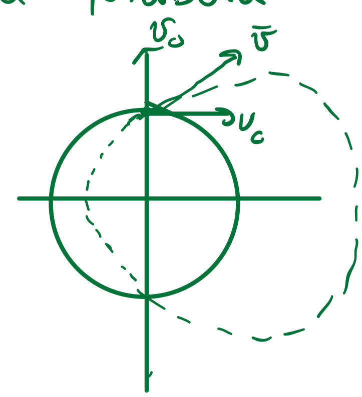
Entonces la nueva trayectoria será una elipse.

La fórmula de la elipse es $r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos\theta}$

Entonces el peri-eje y el apo-eje serán :
(r_1) (r_2)

$$r_1 = \frac{P}{1+\varepsilon} \quad ; \quad r_2 = \frac{P}{1-\varepsilon} \quad \text{con } P = \frac{J^2}{km} = d \quad y \quad \varepsilon = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

c) Para que la trayectoria sea una parábola debe ser $E = 0$. Entonces :



$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{K}{2d} = 0 \Rightarrow v_0^2 = \frac{K}{md}$$

Si $v_0 > \left(\frac{K}{md}\right)^{1/2} \Rightarrow E > 0$ y la trayectoria será una hipérbola.

2) a)

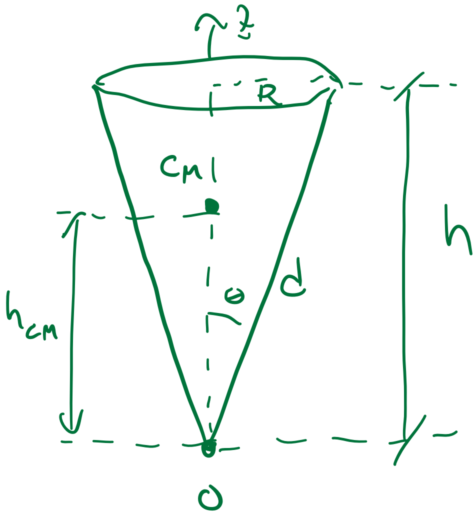
Dado que el cono tiene simetría de revolución entorno a su altura una terna de ejes principales de inercia serán el eje de su altura (z) y cualquier dos en un plano perpendicular a z y perpendiculares entre sí (x, y). Además por tener simetría de revolución en torno a z será $I_x = I_y = I_0$

Entonces

$$\mathbb{I}_O = \begin{pmatrix} I_0 & & 0 \\ & I_0 & \\ 0 & & I_z \end{pmatrix} \; ; \quad \mathbb{I}_{cm} = \begin{pmatrix} I_0' & & 0 \\ & I_0' & \\ 0 & & I_z' \end{pmatrix}$$

Como $\mathbb{I}_O$ e $\mathbb{I}_{cm}$ están relacionados por el teorema de Steiner con $\vec{R} = h_{cm}\,\hat{z}$ (el centro de masa está sobre el eje z por la simetría) $\Rightarrow I_z = I_z'$

$$\mathbb{I}_O = \mathbb{I}_{cm} + m\,|R|^2\,\mathbb{1} - m\,\vec{R} \otimes \vec{R}$$



$$d^2 = h^2 + R^2$$

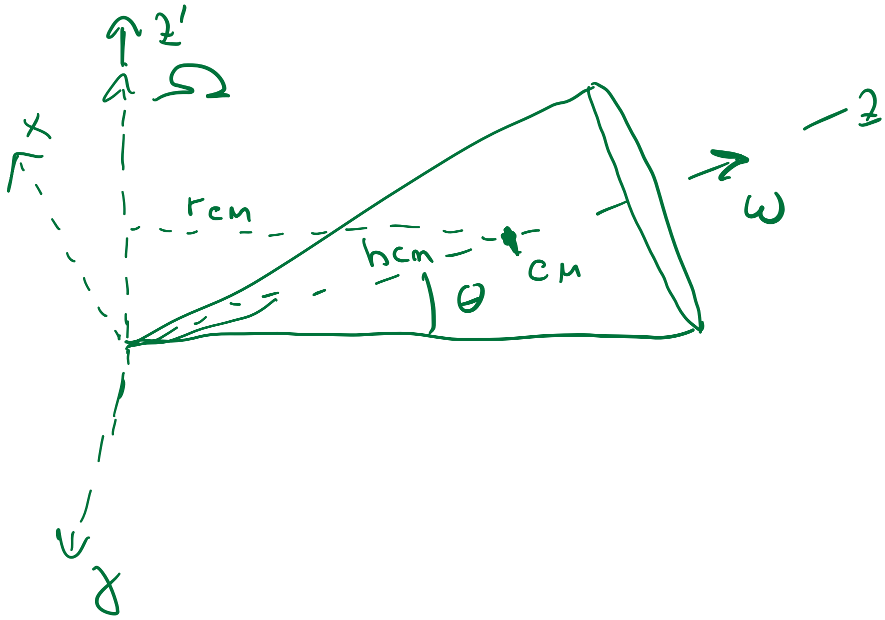
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{R}{h} \; ; \quad \cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{R}{\sqrt{h^2+R^2}}$$

b) Como rueda sin deslizar, el arco que barre d debe coincidir con el arco que barre R durante el movimiento $\Rightarrow d\,\Delta\varphi = R\,\Delta\theta$

$$\Rightarrow d\,\Omega = R\,\omega \qquad (\omega \text{ rotación alrededor de } \hat{z})$$

$$\omega = \frac{d}{R}\,\Omega = \frac{\sqrt{h^2+R^2}}{R}\,\Omega$$



(x, y ⊥ a z)
x en el plano de Ω y z

El centro de masa gira con Ω y $r_{cm} = h_{cm} \cos\theta$

$\Rightarrow \quad V_{cm} = \Omega \cdot r_{cm} = \Omega \, h_{cm} \cos\theta$

c)

$$\vec{L} = \mathbb{I}_0 \, \vec{\omega}_T \quad ; \quad \omega_T = \Omega \, \hat{z}' + \omega \, \hat{z}$$

$$= \Omega \cos\theta \, \hat{x} + \left(\Omega \operatorname{sen}\theta + \omega\right) \hat{z}$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_0 & & 0 \\ & I_0 & \\ 0 & & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \cos\theta \\ 0 \\ \Omega \operatorname{sen}\theta + \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \cos\theta \, I_0 \\ 0 \\ \left(\Omega \operatorname{sen}\theta + \omega\right) I_z \end{pmatrix}$$

$$L_{cm} = \mathbb{I}_{cm} \, \omega_T = \begin{pmatrix} I_0' & & 0 \\ & I_0' & \\ 0 & & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \cos\theta \\ 0 \\ \left(\Omega \operatorname{sen}\theta + \omega\right) \end{pmatrix}$$

$$= \Omega \cos\theta \, I_0' \, \hat{x} + \left(\Omega \operatorname{sen}\theta + \omega\right) I_z \, \hat{z}$$

$\vec{L} = M\,\vec{R} \times \vec{V}_{cm} + \vec{L}_{cm}$.

Además $T = \breve{\omega}_T^t\, \mathbb{I}_0\, \breve{\omega}_T = \frac{1}{2} m V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \breve{\omega}_T^t\, \overline{\mathbb{I}}_{cm}\, \breve{\omega}_T$

3)

Las ruedas están en reposo en S. y se mueve con $-V$ a S'.

Cada rueda gira un ángulo $\Delta\theta = \frac{\Delta S}{R}$ en un tiempo

$\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega = \frac{\Delta S}{\Delta t\, R}$. ΔS y R son longitudes en

direcciones perpendiculares a $V \Rightarrow \Delta S' = \Delta S$ y $R' = R$.

Δt es un tiempo propio (intervalo de tiempo en un mismo lugar en S) $\Rightarrow$ $\Delta t' = \gamma\, \Delta t \Rightarrow \omega' = \frac{\Delta S}{\Delta t' R} = \frac{\omega}{\gamma}$

La longitud L_0 está en reposo en S $\Rightarrow L_0' = \frac{L_0}{\gamma}$

Las ruedas están sincronizadas en S (desfasaje $\varphi = 0$)

La posición de las ruedas es la misma simultáneamente en S, en el instante t.

Esos dos eventos en S' no serán simultáneos:

$ct'_1 = \gamma(ct - \beta x_1)$ x_1 locación de la rueda 1 en S

$ct'_2 = \gamma(ct - \beta x_2)$ x_2 locación de la rueda 2 en S.

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \beta \frac{(x_1 - x_2)}{c} = \beta \frac{L_0}{c}$$

Por lo tanto el desfasaje que tendrán los radios en S' es

$$\Delta\varphi' = \omega' \Delta t' = \frac{\omega}{\gamma} \beta \frac{L_0}{c}$$

4)

Las ecuaciones a resolver son

Euler continuidad.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla \vec{p} \quad \text{y} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Solo hay dependencia con x y t. ρ es constante

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (1)$$

Entonces $\rho \dfrac{\partial v_x}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$

$$\Rightarrow \rho \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t \partial x}}_{0 \text{ lm } (1)} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow P = Ax + B \Rightarrow P = \left(\frac{P_2 - P_1}{L} \right) x + P_1$$

Para satisfacer las condiciones de contorno.

$$\text{Entonces } \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \left(\frac{P_2 - P_1}{L} \right) \Rightarrow \boxed{v_x = \left(\frac{P_2 - P_1}{L\rho} \right) t + C}$$

La velocidad aumenta linealmente con t, sin límite.

Análoga a un movimiento uniformemente acelerado.

Cuando en ese caso tomemos una fuerza de roce proporcional a v_x, a medida que v_x aumenta

; aumentará la fuerza de roce, hasta que esta compense a la fuerza impulsora constante.
A partir de ese momento el movimiento quedará con esa v_x constante.