Universitat d'Alacant Universidad de Alicante	**Facultad de Ciencias**	**Departamento de Matemáticas**
	Grado de Física	
	Análisis Funcional	
Segundo curso	**Prueba práctica**	**19 de abril de 2024**

Ejercicio 1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado.

(*i*) (2 punto). Probar que la aplicación norma $\|\cdot\| : x \in X \longrightarrow [0, +\infty)$ es continua.

(*ii*) (2 punto). Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de Cauchy en X. Probar que la sucesión $\alpha_n = \|a_n - b_n\|$ converge.

Ejercicio 2. Sea λ la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y

$$L_2([0,1]) := \big\{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ medibles, tales que } \ \|f\|_2 < \infty\big\}.$$

(*i*) (2 puntos). Probar que la aplicación $T : (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (L_2([0,1], \|\cdot\|_2)$ definida por

$$T(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})}$$

es lineal y continua.

(*ii*) (2 puntos). Calcular $\|T\|$.

Ejercicio 3. (2 puntos). Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$, tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, para todo $x \in [0,1]$, probar que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$