13: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$ con $a,b>0$

Sea $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$:

$$\log(L)=\log\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n\log\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^{1/n}+b^{1/n}-2}{2}\cdot n\cdot\frac{\log\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}+2-2\right)}{\frac{a^{1/n}+b^{1/n}-2}{2}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^{1/n}+b^{1/n}-2}{2}\cdot n\cdot\underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{a^{1/n}+b^{1/n}-2}{2}\right)}{\frac{a^{1/n}+b^{1/n}-2}{2}}}_{①}\right]\overset{\bullet}{=}\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\frac{a^{1/n}+b^{1/n}-2}{2}\cdot 1\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}n\left(a^{1/n}+b^{1/n}-1-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\lim_{n\to\infty}n\left(a^{1/n}-1\right)}_{②}+\underbrace{\lim_{n\to\infty}n\left(b^{1/n}-1\right)}_{②}\right]\overset{\bullet}{=}\frac{1}{2}(\log a+\log b)=\frac{1}{2}\log(ab)=\log(ab)^{1/2}=\log\sqrt{ab}\implies\boxed{L=\sqrt{ab}}\ \square$$

$\forall a,b>0$

① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\log(1+n)^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\log\left(1+\dfrac{1}{1/n}\right)^{1/n}\overset{\bullet}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\log(e)=1$ $\longrightarrow$ 25.4

② $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a^{1/n}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\log a^x}-1}{x}=\log a\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\log a}-1}{x\ln a}\overset{\bullet}{=}\log a\log e=\log a$ $(\forall a>0)$

$x=\frac{1}{n}$ Cuando $n\rightsquigarrow\infty$, $x\rightsquigarrow0$

$a=e^{\ln a}$

definición del logaritmo neperiano: • $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\log a$ $\forall x\in\mathbb{R}$

definición del número de Euler: • $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

↳ por definición $\log(e)=1$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log(n^3+3n^2+2n+1)}{\log(n^2+3n+2)}$.

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+3n+2)(3n^2+6n+2)}{(n^3+3n^2+2n+1)(2n+3)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4}{2n^4}=\dfrac{3}{2}$ $\square$

↑ L'Hôp

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}-1\right|\le\left|\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}-\frac{n-(-1)^n}{n-(-1)^n}\right|=\left|\lim_{n\to\infty}\frac{2(-1)^n}{n-(-1)^n}\right|=$$

$$=2\left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-(-1)^n}\right|=0\implies\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}=1\ \square$$

3. (1 punto). Sea $a=\lim_{n\to+\infty}x_n$. Calcular

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_1+2x_2+\ldots+nx_n}{n^2}$$

Criterio Stolz $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_1+\dots+nx_n+(n+1)x_{n+1})-(x_1+\dots+nx_n)}{(n+1)^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)x_{n+1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{1}{2}a$$

1.) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{x}{x^2-a^2}\right)^{\frac12}-\left(\frac{a}{x^2-a^2}\right)^{\frac12}+\left(\frac{1}{x+a}\right)^{\frac12}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac12}-a^{\frac12}}{(x^2-a^2)^{\frac12}}+$$

$$+\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{x+a}\right)^{\frac12}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac12}-a^{\frac12}}{(x^2-a^2)^{\frac12}}+\lim_{x\to a}\frac{1}{(x+a)^{\frac12}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac12}-a^{\frac12}}{(x^2-a^2)^{\frac12}}+(2a)^{-\frac12}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x^{-\frac12}}{2}}{\frac{x}{(x^2-a^2)^{\frac12}}}+(2a)^{-\frac12}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)^{\frac12}}{2x\sqrt{x}}+(2a)^{-\frac12}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\qquad\text{si } a\in(0,+\infty)$$

si $a=0$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}-0+\sqrt{x-0}}{\sqrt{x^2-0^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sqrt{x}}{x}=+\infty$

2.) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\arctan(\sqrt{x+x^2}))^2}{1-\cos(\sqrt{x^2+2x})}$.

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2}{\frac{x^2+2x}{2}}=1$ $\square$

$1-\cos x\underset{0}{\rightsquigarrow}\dfrac{x^2}{2}$

$\arctan x\underset{0}{\rightsquigarrow}x$

■ **Ejercicio 3 (2.25 puntos) Estudiar la existencia del límite $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(n!)^{1/n}}{n}$ dando, en su caso, su valor.**

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^{1/n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$ sea $x_n=\dfrac{n!}{n^n}$ criterio de la raíz $\left(\text{si }\exists\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lambda\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!/(n+1)^{(n+1)}}{n!/n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)}{(n+1)^n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^n}{(1+\frac1n)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac1n)^n}=\frac{1}{e}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{1/n}}{n}=\frac{1}{e}\ \square$$

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+2^n)}{n}}_{(1)}>\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{3+3^{\frac12}+3^{\frac13}+\cdots+3^{\frac1n}}{n}}_{(2)}$$

Criterio de Stolz $\to\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$

Criterio media aritm $\to\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=x$ si $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=x$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+2^n)-\log(1+2^{n-1})}{n-n-1}=\lim_{n\to\infty}\log(1+2^n)-\log(1+2^{n-1})=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{1+2^n}{1+2^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{1+2^n}{\frac{1+2^n}{2}}\right)=\log 2$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+3^{1/2}+\dots+3^{1/n}}{n}$ sea $x_n=3^{1/n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}3^{1/n}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+3^{1/2}+\dots+3^{1/n}}{n}=1$

como $\log 2<1$ la afirmación es falsa

EJERCICIO 4 **[1,25 puntos]**

Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales acotada por 2 y que verifica que

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|\le\frac18|x_{n+1}^2-x_n^2|,\quad\forall n\ge1.$$

Demostrar que $(x_n)_n$ es contractiva y por lo tanto convergente.

$(x_n)_n$ contractiva $\iff|x_{n+2}-x_{n+1}|\leqslant|x_{n+1}-x_n|$

$x_{n+2}\leqslant2$ $x_{n+1}<2$ $x_n<2$ …

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|\leqslant\frac18|x_{n+1}^2-x_n^2|=\frac18|x_{n+1}+x_n||x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac18(2+2)|x_{n+1}-x_n|=\frac12|x_{n+1}-x_n|\implies$$

$\implies|x_{n+2}-x_{n+1}|\leqslant|x_{n+1}-x_n|\implies(x_n)_n$ converge $\square$

5. (1'5 puntos). Estudiar la continuidaden el origen, en función del parámetro real α, de la función definida por

$$f(0)=0\quad\text{y } f(x)=|x|^\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)\text{ para } x\neq0.$$

Para que f sea continua en $0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

Por tanto calculamos el límite

$\lim\limits_{x\to0}\left||x|^\alpha\cos\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)\right|\leqslant\lim\limits_{x\to0}|x|^\alpha\cdot1=0$ $\forall\alpha>0$, si $\alpha=0$ $\lim\limits_{x\to0}|x|^\alpha=1$

$-\lim\limits_{x\to0}|x|^\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)\leqslant0\leqslant\lim\limits_{x\to0}|x|^\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\implies\lim\limits_{x\to0}|x|^\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)=0$ $\forall\alpha\in(0,+\infty)$

$-\lim\limits_{x\to0}|x|^\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)\leqslant1\leqslant\lim\limits_{x\to0}|x|^\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)$ con $\alpha=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}|x|^0\cos\left(\frac{0}{x}\right)=1$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}<0$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)}{|x|^{-\alpha}}\overset{\text{L'Hôp}}{=}$

$\Rightarrow f$ es continua $\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$