ANÁLISIS DE UNA VARIABLE REAL I
GRADO EN FÍSICA
Límites y funciones continuas
Ejercicios de calentamiento
CURSO 2022-2023

1. Estudiar la continuidad y esbozar la gráfica de las funciones determinadas por las siguientes expresiones

- $[x]$.
- $x - [x]$.
- $\sqrt{x - [x]}$.
- $[x] + \sqrt{x - [x]}$.
- $[\frac{1}{x}]$.
- $\frac{1}{[\frac{1}{x}]}$.
- $[\sin x]$.
- $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.
- $\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [a-1, a) \\ x + a & \text{si} \quad x \in [a, a+1] \end{cases}$

2. Se consideran las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$ y $h(x) = \cos x$.

1. Escribir la expresión analítica de las funciones $f \circ g$, $f \circ h + h \circ g$, $f \circ g \circ h$.

2. Escribir en términos de operaciones con las funciones f, g y h, las expresiones siguientes:

$$y = e^{\cos x} \quad , y = \cos(e^x + e^{x^2}), \quad y = e^{2x}.$$

3. Demostrar que no existe $\lim_{x \to +\infty} (x - [x])$.

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Si son ciertas hay que probarlas, si son falsas hay que dar un contraejemplo.

1. Si dos funciones continuas $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ satisfacen que $f(x) < g(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, entonces $\inf(\text{Imag }(g)) < \sup(\text{Imag }(f))$.
2. Si dos funciones continuas $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ satisfacen que $f(x) < g(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, entonces $\inf(\text{Imag }(f)) < \inf(\text{Imag }(g))$.
3. Si dos funciones continuas $f, g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ satisfacen que $f(x) < g(x)$, $\forall x \in (0, 1)$, entonces $\sup(\text{Imag }(f)) < \sup(\text{Imag }(g))$.
4. Toda función continua en el intervalo $(0, 1]$ es acotada.

5. Discutir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, demostrándolas o dando un contraejemplo.

1. Si existen los límites de f y $f + g$ en un punto a, entonces existe el límite de g en a.
2. Si no existen los límites de f y g en un punto a, entonces no existe el límite de $f + g$ en a.

6. Discutir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, demostrándolas o dando un contraejemplo.

1. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que alcanza un máximo y un mínimo en todo intervalo cerrado entonces f es continua.
2. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ en todo intervalo $[a, b]$ entonces f es continua.
3. Si f es continua en 0 y $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.

7. i) Probar utilizando ε y δ que dada $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ una función continua en $x_0 \in (0, 1)$ con $f(x_0) > 0$, entonces existe $\gamma > 0$ tal que

$$f(x) > 0, \qquad \forall x \in (x_0 - \gamma, x_0 + \gamma).$$

ii) Sean $h, g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas positivas y distintas. Deducir que dado $x_0 \in (0, 1)$, existe $\rho > 0$ tal que

$$\left| \frac{h(x) - g(x)}{g(x)} \right| > 0, \qquad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho).$$

8. ¿Qué se puede decir de una función real continua que sólo toma valores racionales?

9. Supongamos que $h(x) = f(x)g(x)$, donde f es una función con límite 0 en x_0 y g es una función acotada en un entorno de x_0, entonces

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = 0.$$

10. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Probar que la ecuación $f(x) = x$ tiene solución en $[0, 1]$.

11. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas verificando $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Probar que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene solución en $[a, b]$.

12. Sea f una función real, continua y definida en el intervalo I, sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n puntos cualesquiera del intervalo I. Probar que existe un punto $c \in I$ tal que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

13. Demostrar que si f es una función real, continua, definida en el intervalo compacto I y verificando $f(x) > 0 \; \forall x \in I$ entonces existe una constante positiva K tal que $f(x) > K \; \forall x \in I$.

14. Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Demostrar que f está acotada. ¿Es cierto el recíproco?.

15. Dar un ejemplo de una función real definida en todo $\mathbb{R}$ y que sólo sea continua en un punto. ¿Existen funciones continuas en dos puntos?

16. Probar que el polinomio $6x^3 - 8x^2 + x + 0.5$ tiene sus tres raíces reales y que sólo una de ellas está en el intervalo $[0, 1]$.

17. Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución:

1. $x - \sin x - 5 = 0$,

2. $x^7 + \dfrac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 12,$

3. $\dfrac{x}{4} = x - [x]$

18. Consideramos la función definida por $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

1. Estudiar la continuidad de la función f en el origen.
2. Demostrar que f satisface la condici´n del teorema de los valores intermedios en el intervalo $[-1, 1]$.

19. Demostrar que no existe ninguna función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que tome exactamente dos veces cada valor.

20. Sean $a < b$ dos números reales y $f : [a, b] \to [a, b]$ una función tal que $\forall x, y \in [a, b],\ x \neq y$, se cumple $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

a) Demostrar que f es continua;

b) Fijado $z \in [a, b]$, se define por recurrencia la sucesión $x_1 = z$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. Si suponemos que f es creciente, demostrar que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente.

21. Sea f una función real, definida en todo $\mathbb{R}$ que satisface la relación $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$ y que además es continua en cero. Demostrar que f es continua en todo $\mathbb{R}$ y determinar explícitamente la función f.

22. Estudiar la existencia de los límites (laterales) y calcular su valor cuando existan:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} (2 + \sin(\dfrac{1}{x}))$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{2 + \sin(\dfrac{1}{x})}$

23. Calcular $f(0)$ para que la función f sea continua en 0.

1. $f(x) = \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1 - x)}{x}$

24. Sea f una función no nula con límite 0 en x_0. Probar que

$$\lim_{x \to x_0} (1 + f(x))^{\dfrac{1}{f(x)}} = e.$$

25. Calcular "a" para que

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2}}\,\right]^{\dfrac{ax^2 + 1}{x}} = e^2.$$

26. Encontrar las constantes a y b para las cuales

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x +} - ax - b \right) = 1.$$

27. Sean $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas por $f(x) = \frac{x}{a}[\frac{b}{x}]$ y $g(x) = \frac{b}{x}[\frac{x}{a}]$ con a y b constantes positivas y donde $[x]$ denota la parte entera de x. ¿Existen los límites de f y g en el origen?