DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE.
Asignatura: ELECTROMAGNETISMO I - 2º Curso Grado en Física Curso 2019-20

CONTROL MITAD SEMESTRE

PROBLEMAS/CUESTIONES

Las magnitudes en negrita son vectoriales

1. (7 puntos) Considera un cilindro de longitud L de un material conductor de radio R1 = 1 m (R1<< L) que está envuelto por otro cilindro hueco de longitud L y de grosor despreciable y hecho del mismo material conductor y cuyo radio R3 (siendo R3 = 10 R1). Entre ambos conductores hay dos tipos de material aislante distinto: uno de constante dieléctrica k = 1.5, en la zona de R1 < r < R2 (R2 = 5 R1), siendo r la distancia desde un punto dado al eje del cilindro macizo; y otro de constante dieléctrica k = 2, en la zona de R2 < r < R3. Entre los dos materiales conductores se aplica una diferencia de potencial V = 100 V, estando el cilindro interior conectado a tierra.
a) Determina los campos **E** y **D** a partir del Teorema de Gauss, en las distintas regiones del espacio, en puntos alejados de los bordes del cilindro. Dibuja esquemáticamente el módulo de **E** y **D** en función de la distancia.
b) A partir del campo **E** obtén el potencial electrostático en cada región y dibújalo esquemáticamente en función de r.
c) ¿En qué regiones hay densidades de carga libre? Di si son volumétricas o superficiales y calcúlalas.
d) CUESTIONES:
i) Indica en qué regiones hay densidad de carga ligada superficial y deduce de qué signo serán. Explica (sin desarrollar todo el cálculo para que no sea muy largo) cómo obtendrías estas densidades.
ii) Indica si en alguna región existe densidad de carga ligada volumétrica y como la calcularías.

2. (3 puntos) Para el mismo sistema del problema anterior:

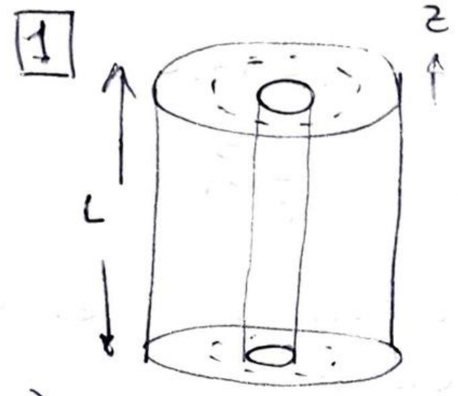
a) Determina el potencial en las distintas regiones del espacio, en puntos alejados de los bordes del cilindro, resolviendo la ecuación de Poisson o de Laplace según corresponda.

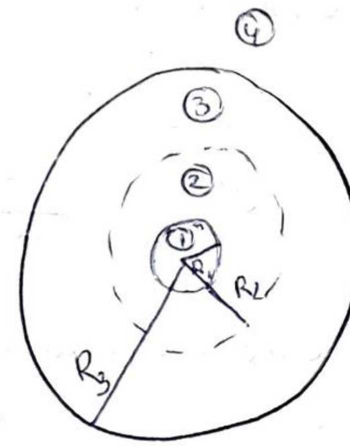
b) Escribe las condiciones de contorno necesarias para obtener las distintas constantes de integración del apartado anterior. Si te da tiempo, obtén estas constantes y verifica que te sale el mismo resultado que en el problema anterior.

NOTA FINAL: Si al finalizar todo lo anterior te sobrara tiempo, calcula numéricamente las densidades de carga del apartado d) del problema 1.
En todo caso, se anima a los alumnos a que terminen en su casa aquello que no les haya dado tiempo durante el examen y que lo envíen el lunes 6 Abril.

Resolución Control EM - Abril 2020

$\boxed{1}$





Regiones 1 a 4

① $0 < r < R_1$ conductor

② $R_1 < r < R_2$ Dielec 1 $k_1 = 1.5$

③ $R_2 < r < R_3$ Dielec 2 $k_2 = 2$

$R_1 = 1m$; $R_2 = 5R_1$; $R_3 = 10R_1$

a) Calculemos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ aplicando T de Gauss en $\vec{D}$ y a partir de él $\vec{E}$ en cada región usando $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

Dicen que se aplica dif. de pot $\Delta V = 100V$ y que el conductor interior está a tierra $\Rightarrow \phi(r=R_1) = 0$; $\phi(r=R_3) = 100V$

Esto implica que en los conductores habrá cargas iguales de signo contrario en cada cilindro. Como son conductores esa carga estará situada en la superficie, es decir, en $r = R_1$ por el conductor interior y en $r = R_3$ en el exterior y en forma de densidad superficial de carga libre σ_1 (en R_1) y σ_2 (en R_2)

Como $Q_1(\text{en } R_1) = -Q_2(\text{en } R_2)$ $\quad \sigma_1 2\pi R_1 L = \sigma_2 2\pi R_3 L$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \frac{R_3}{R_1} = -\sigma_2 \frac{10 \cancel{R_1}}{\cancel{R_1}} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = -\sigma_2 10}$$

Densidades de carga de signos contrarios, aún no sabemos cuál será positiva, lo calcularemos después.

T. Gauss $\oint_S \vec{D} d\vec{a} = Q_{enc}$ → Elijo cilindros concéntricos

① $0 < r < R_1$

$\oint_S \vec{D}_1 d\vec{a} = D_1 2\pi r L$

$Q_{enc} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{D}_1 = 0 \\ \vec{E}_1 = 0 \end{array}}$$

→ Este resultado vale para todas las regiones

② $R_1 < r < R_2$
③ $R_2 < r < R_3$ } $Q_{enc} = \sigma_1 \, 2\pi R_1 L$

T. Gauss: $D \, 2\pi r L = \sigma_1 \, 2\pi R_1 L$

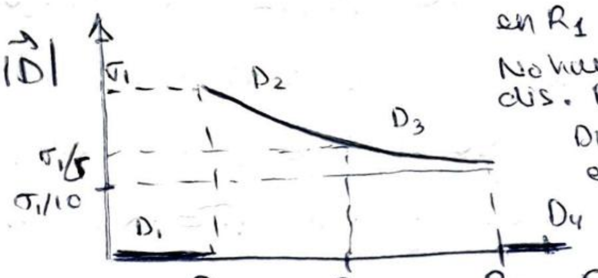
$$\boxed{\vec{D}_{2,3} = \frac{\sigma_1 R_1}{r} \vec{u}_r} \overset{\text{Sust } R_1=1}{=} \frac{\sigma_1}{r} \vec{u}_r$$

$$\boxed{\begin{matrix} \vec{E}_2 = \dfrac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_1 r} \vec{u}_r \\ \vec{E}_3 = \dfrac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_2 r} \vec{u}_r \end{matrix}}$$

} Nótese que aún no sabemos si σ_1 es (+) o (−). Eso determinará si los vectores van hacia fuera o hacia dentro.

④ $R_3 < r \Rightarrow Q_{enc} = Q_1 + Q_2 = 0$ $\quad \boxed{\vec{E}_4 = \vec{D}_4 = 0}$

Para dibujar los módulos de los campos podemos calcular sus valores en las interfases

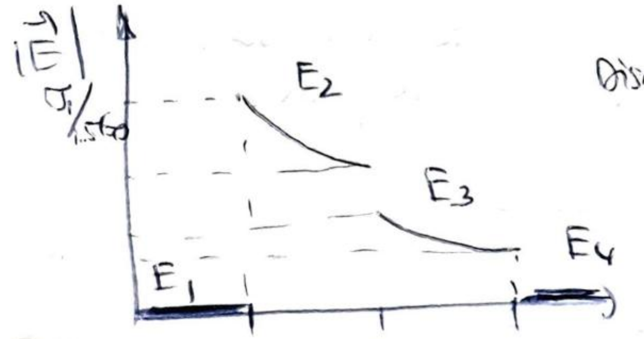


Atención: No está dibujado a escala $R_2 = 5R_1$, $R_3 = 10R_1$

Discont en R_1 ($D_2(r = R_1 = 1) = \sigma_1$
$D_2(r = R_2 = 5R_1) = \sigma_1/5$] continuo en interfase $r = R_2$
No hay dis. R_2 ($D_3(r = R_2) = \sigma_1/5$
Discont en R_3 ($D_3(r = R_3) = \sigma_1/10$

Nótese que de momento todo está en función de σ_1, pero para completar el problema, hay obtener su valor en función datos del problema: la dif. de pot de 100 V

Esto se hace en el apdo. b)



Discont ($E_2(r = R_1) = \dfrac{\sigma_1}{\epsilon_0 k_1} = \dfrac{\sigma_1}{1.5\epsilon_0}$

$E_2(r = R_2) = \dfrac{\sigma_1}{5\epsilon_0 k_1} = \dfrac{\sigma_1}{7.5\epsilon_0}$] Discontinuidad en R_2

$E_3(r = R_2) = \dfrac{\sigma_1}{5\epsilon_0 k_2} = \dfrac{\sigma_1}{10\epsilon_0}$

(Discont
$E_3(r = R_3) = \dfrac{\sigma_1}{10\epsilon_0 k_2} = \dfrac{\sigma_1}{20\epsilon_0}$

b) Calculo el potencial a partir de $\vec{E}$: $\vec{E} = -\nabla\phi$ en coor. cilíndricas

$\vec{E}$ sólo tiene componente radial

1) $0 < r < R_1$ $\quad \vec{E}_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = C_1$

2) $R_1 < r < R_2$ $\quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_1 r}\vec{u}_r \Rightarrow \phi_2 = -\int E_2 dr = -\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_1}\ln r + C_2$

3) $R_2 < r < R_3$ $\quad \vec{E}_3 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_2 r}\vec{u}_r \Rightarrow \phi_3 = -\int E_3 dr = -\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_2}\ln r + C_3$

4) $r > R_4$ $\quad \vec{E} = 0 \Rightarrow \phi_4 = C_4$

Para calcular las 4 ctes. necesito 4 c.c:

1) En conductor interior $\phi = 0$ porque está conectado a tierra

$\Rightarrow \boxed{\phi_1 = 0} \quad C_1 = 0$

2) En conductor exterior $\phi = 100\,V$ porque es la dif. de pot. entre ambos

$\boxed{\phi_4 = 100}$, $C_4 = 100$

Nótese que aún tengo 3 c.c. (continuidad de ϕ en las 3 interfases). Hay 3 (una más que las 2 ctes que tengo que obtener) porque σ_1 no está determinada. Mediante eso lo puedo calcular

3) $\phi_1(R_1) = \phi_2(R_1)$ $\quad$ Si $R_1 = 1$

$$0 = -\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_1}\ln R_1 + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_1}\ln R_1} \rightarrow C_2 = 0$$

$$\phi_2 = -\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_1}\ln r + \underbrace{\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_1}\ln R_1}_{\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_1}\ln\left(\frac{R_1}{r}\right)} \xrightarrow{\text{Sustituyo}} \boxed{\phi_2 = -\frac{\sigma_1}{1.5\epsilon_0}\ln r}$$

Para que $\phi_2 > 0$ σ_1 debería ser (-)

4) $\phi_2(R_2) = \phi_3(R_2)$

$$-\frac{\sigma_1 \ln 5}{1.5\epsilon_0} = -\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}\ln 5 + C_3 \Rightarrow C_3 = \left[\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_1}{1.5\epsilon_0}\right]\ln 5$$

$$C_3 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1.5}\right]\frac{\sigma_1 \ln 5}{\epsilon_0}$$

$$C_3 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_2}\ln R_2 + \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_1}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$ (expresión General sin sustituir)

$$\phi_3 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 \kappa_1} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 \kappa_2} \ln\left(\frac{R_2}{r}\right)$$

$$\boxed{\phi_3 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 1.5} \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 2}\left(\frac{5}{r}\right)}$$

$\forall\, r > 5$

Nótese que el ln de un nº menor que 1 es negativo, luego para que ϕ_3 sea > 0 es σ_1 debería ser (−)

5) $\phi_3(R_3) = \phi_4(R_3) = 100$

Con esta condición determinamos σ

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_0 1.5} \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 2} \ln\left(\frac{5}{2}\right) = 100$$

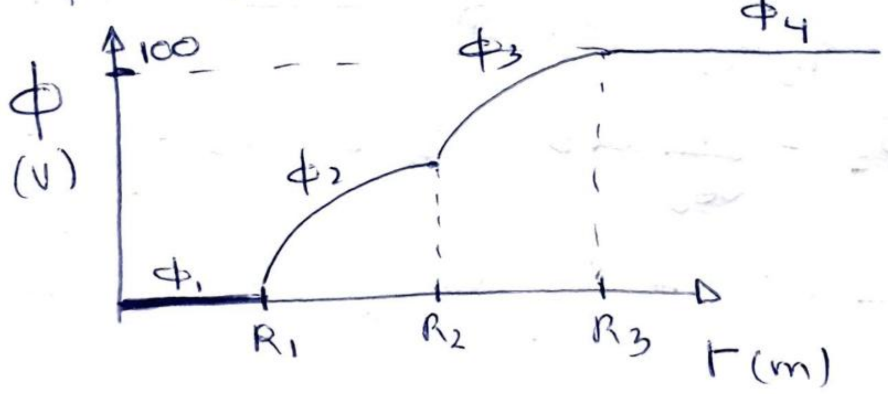
$\Rightarrow$ Despejo $\sigma_1 \Rightarrow$ $\boxed{\sigma_1 = -70.4\, \epsilon_0}$

Este es la densidad de carga superficial libre en R_1 (NEGATIVA)

En la pag. 1 vimos que $\sigma_1 = -10\sigma_2 \Rightarrow$ $\boxed{\sigma_2 = 7.4\, \epsilon_0}$

POSITIVA

Así, ya podríamos obtener las expresiones numéricas de $\vec{E}$, $\vec{D}$ y ϕ. Vemos que $\vec{E}$ y $\vec{D}$ van en sentido contrario a $\vec{u_r}$ (es decir hacia adentro) siempre van de potenciales mayores a menores (V=100 fuera y V=0 dentro); Vemos que $\phi > 0$



Scanned by TapScanner

c) Solo hay densidad de carga libre superficial en R_1 y R_3. en el material conductor y se han calculado ya.
No hay densidad de carga libre volumétrica $\Rightarrow \rho_f = 0$ en ninguna de las regiones (se comprueba porque $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f = 0$)
~~Todo~~ Esto se comprueba con las condiciones de contorno de $\vec{D}$ en las interfases. (las interfases)

Si hacemos la divergencia de $\vec{D} \sim \frac{1}{r}$ hay que usar ∇ en cilíndricos $\left[\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r} r D_r\right]\right]$

CUESTIÓN

(i) d) Hay densidad de carga ligada en los materiales dieléctricos 1 y 2. Para el dielec. 1 $\begin{cases} \text{en } r = R_1 \\ \text{en } r = R_2 \end{cases}$

Para el dielec. 2 $\begin{cases} \text{en } r = R_2 \\ \text{en } r = R_3 \end{cases}$. Se pueden calcular

de dos formas:

MET 1 $\Rightarrow$ A partir de las condiciones de contorno del campo $\vec{E}$ (comp. normal) en cada interfase

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_f + \sigma_b)$$

MET 2 $\Rightarrow$ A partir del vector polarización de cada medio:

$\vec{D} = \vec{P} - \epsilon_0 \vec{E}$ en medios IHL $\vec{P} = \frac{k-1}{k_1}\vec{D}$

Luego $\vec{P}_2 = \frac{k_1 - 1}{k_1}\vec{D}_2$ y $\vec{P}_3 = \frac{k_2 - 1}{k_2}\vec{D}_3$

Los vectores $\vec{D}_2$ y $\vec{D}_3$ los tenemos y dependen de r

Las densidades sup. ligadas se obtienen $\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n}$

vector normal a la superficie hacia afuera del dieléctrico

Dielec 1 $\vec{P}_2$ $\begin{cases} \sigma^1_{b,R_1}(\text{en } R_1) = \vec{P}_2^{R_1} \cdot (-\vec{u}_r) \\ \sigma^1_{b,R_2}(\text{en } R_2) = \vec{P}_2^{R_2} \cdot \vec{u}_r \end{cases}$

Región 2

Dielec 2 $\vec{P}_3$ $\begin{cases} \sigma^2_b(\text{en } R_2) = \vec{P}_3^{R_2} \cdot (-\vec{u}_r) \\ \sigma^2_b(\text{en } R_3) = \vec{P}_3^{R_3} \cdot \vec{u}_r \end{cases}$

Región 3

Lo siguiente no era necesario calcularlo en detalle para tener la máxima nota del problema.

MET. 1 Por ejemplo: • En $r = R_2$ Interfase ~~Conductor~~ Diel 1 Dielec 1 - Dielec 2

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_f + \sigma_b)$$

Dielec. 2 — Dielec 1 — $\sigma_f = 0$

$$E_3(r=R_2) - E_2(r=R_2) = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_2 R_2} - \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 k_1 R_2} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma_b$$

Expresiones apartado d)

$\frac{1}{3/2}$ $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_1 R_1}{R_2}\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) \underset{\text{Cust}}{=} \frac{\sigma_1 \cancel{R_1}}{5\cancel{R_1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1.5}\right) = -0.0333\sigma_1$$

$(-70.4\epsilon_0)$

$\boxed{\sigma_b = 2.35\epsilon_0}$ POSITIVA [Nótese que por este método solo se obtiene una σ_b que es la suma de la que hay en el borde de dielec. 1 y la del borde de dielec. 2]

• En $r = R_1$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_{f_1} + \sigma_b)$$

Dielec 1 — Conductor interior $E=0$ — $\sigma_1 = -70.4\epsilon_0$

$$\frac{\sigma_1}{R_1 \epsilon_0 k_1} - 0 = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_{ba}^{(r=R_1)}) \Rightarrow \sigma_b^{(r=R_1)} = \sigma_1\left(\frac{1}{k_1} - 1\right)$$

$\boxed{\sigma_b(r=R_1) = 23.5\ \epsilon_0}$

POSITIVA

• En $r = R_3$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_{f_2} + \sigma_b^{r=R_3})$$

vacío — Dielec. 2

$$0 - \frac{\sigma_1 R_1^{=1}}{k_2 R_3 \epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_{f_2} + \sigma_b^{r=R_3})$$

$k_2 = 2$, $R_3 = 10$

obtenido antes, en el conduc. exterior σ_2

$$\sigma_b(r=R_3) = -\sigma_{f_2} - \frac{\sigma_1}{20} = -7.4\epsilon_0 + \frac{70.4\epsilon_0}{20} = -3.7\epsilon_0$$

$\boxed{\sigma_b(r=R_3) = -3.7\epsilon_0}$

NEGATIVA

Si se hace con el método 2 (con $\vec{P}$) sale lo mismo. Pero CUIDADO! aquí en $\underline{r = R_2}$ hay dos σ_b diferentes, una en el borde del dielec 1 y otra en el borde del dielec 2. La suma de ambas es la σ_b efectiva en esa interfase, que es lo que se calcula por el otro método. Se insta a los alumnos a comprobarlo.

(ii) (e) Sobre la densidad de carga volumétrica. Solo podría haberla en los dieléctricos y se obtendría con $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$

$\vec{P} \neq cte$, por lo que a priori podría no ser cero. Tenemos las expresiones de $\vec{P}$ en las regiones 2 y 3. Si calculamos la divergencia (usando el operador nabla en cilíndricas) vemos que es cero pues $\vec{P} \sim \frac{1}{r}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\cancel{r} \cdot \underbrace{P_r}_{\frac{1}{\cancel{r}}}) = 0$$

No hay densidades volumétricas ligadas, lo cual era de esperar pues en los materiales LHI se cumple que $\rho_b = -\frac{(\kappa_e - 1)}{\kappa_e} \cdot \rho_f$

Sabemos que es cero, aunque se puede comprobar haciendo $\nabla \cdot \vec{D}$ en cilíndricas.

2 Hay que resolver la Ec. de Laplace en los distintos zonas
~~En los dieléctricos se puede~~ pues no hay densidades volum. de carga libre. Atención que en los dieléctricos podemos hacer esto porque son materiales IHL y por tanto tenemos una Ec. de Poisson en la que a la derecha de la ecuación está sólo la densidad de carga libre

~~en~~ Zonas 1 y Zona 4 $\Rightarrow \nabla^2\phi = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} \to 0$ (vacío)

Zonas 2 y 3 $\Rightarrow$ Hay dielec. IHL $\nabla^2\phi = \frac{\rho_f}{\epsilon} \to 0$

~~Las solu~~ La ec. sólo depende de la coord. r en cilíndricas. Las soluciones son de la forma $\phi_i = A_i + B_i \ln r$
$i = 1, 2, 3, 4$
$\hookrightarrow$ Medios.

Necesitaremos 8 c.c. para resolverlo

1) $\phi_1(r = R_1) = 0$ (está conectado a tierra) $\Rightarrow$ $B_1 = 0$

2) $\phi_1(0 < r < R_1) = 0$ $\Rightarrow$ $A_1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\phi_1 = 0}$

3) $\phi_4(r = R_3) = 100$ (Dif. de pot. entre los 2 conductores)

4) $\phi_4(r > 3) = 100 \Rightarrow B_4 = 0 \rightarrow A_4 = 100$

$\boxed{\phi_4 = 100}$

5) Continuidad de ϕ en R_1 : $\phi_1(r=R_1) = \phi_2(r=R_1) = 0$

6) " " " " R_2 : $\phi_2(r=R_2) = \phi_3(r=R_2)$

7) " " " " R_3 : $\phi_3(r=R_3) = \phi_4(r=R_3) = 100$

~~8) Continuidad del la derivada del poten gradiente del potencial~~

8) Condición de contorno para la derivada del potencial (es decir para las componentes normales de E) en $r=R_2$

Como los medios son IHL es válida la expresión

$$\vec{u}_n \cdot (\epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_1 \vec{E}_1) = \sigma_{\ell} \quad \text{y} \quad \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = 0$$

→ libre ~~sólo~~

En $r = R_2$ $\quad \sigma_{\ell} = 0$ y $\vec{E}_2 = -\nabla \phi$

Luego aplicado a este caso

→ Derivo en las expresiones de antes

$$E_{2n} \overset{(r=R_2)}{=} -\nabla \phi_3 \Big|_{r=R_2} = -B_3 \frac{1}{r}\Big|_{r=R_2} = -\frac{B_3}{R_2}$$

Medio 3

$$E_{1n} \overset{(r=R_2)}{=} -\nabla \phi_2 \Big|_{r=2} = -B_2 \frac{1}{r}\Big|_{r=R_2} = -\frac{B_2}{R_2}$$

Medio 2

$$\epsilon_0 k_2 \frac{B_3}{R_2} = \epsilon_0 k_1 \frac{B_2}{R_2} \Rightarrow k_2 B_3 = k_1 B_2$$

indicadas antes $\boxed{B_3 = \frac{k_1}{k_2} B_2}$

Aplicando las diversas c.c debe llegarse a las mismas soluciones obtenidas en el problema 1 apartado b)

Se insta a los alumnos a comprobarlo, calculando las constantes que faltan.