Grado en Física

Mecánica Cuántica I

Problemas

Tema 4: Formalismo

1. Calcula las siguientes relaciones de conmutación entre operadores:

   (a) $[\hat{a}_+, \hat{a}_-]$ y $[\hat{a}_-, \hat{a}_+]$
   con $\hat{a}_+$ y $\hat{a}_-$ los operadores creación y destrucción respectivamente
   (b) $[\hat{p}_x, \hat{x}]$
   (c) Considerando un sistema de 2 dimensiones (x,y) calcula $[\hat{x}, \hat{p}_y]$

2. Para el oscilador armónico unidimensional el operador Hamiltoniano puede escribirse como:
$$\hat{H} = \hbar\,\omega\,(\hat{a}_-\hat{a}_+ - 1/2)$$
   donde los operadores creación y destrucción vienen dados por:
$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\,\hbar\,m\,\omega}}\,(\mp i\,\hat{p} + m\,\omega\,\hat{x})$$
   Comprueba que al aplicar el operador Hamiltoniano $\hat{H}$ sobre la función $\hat{a}_-\psi$, se reduce la energía en $\hbar\omega$

3. Construye la función para el segundo estado excitado de una partícula de masa m en un potencial armónico, $\Psi_2(x)$, partiendo del estado fundamental y utilizando el operador creación.

4. Para el oscilador armónico se cumple que:
$$\hat{a}_-\Psi_n = d_n\Psi_{n-1}$$
   donde $\hat{a}_-$ es el operador destrucción definido en el problema anterior.
   Calcula el factor d_n.

5. Demuestra las siguientes identidades para los operadores $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$:

   (a)
$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$$
   (b)
$$[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$$

(c)

$$[\hat{A}, \hat{B}\,\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\,\hat{C} + \hat{B}\,[\hat{A}, \hat{C}]$$

6. Supongamos que los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan con su conmutador, es decir, $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ y $[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] =$. Muestra que:

   (a) $[\hat{A}, \widehat{B^n}] = n\,\widehat{B^{n-1}}\,[\hat{A}, \hat{B}]$

   (b) $[\widehat{A^n}, \hat{B}] = n\,\widehat{A^{n-1}}\,[\hat{A}, \hat{B}]$

7. Calcula las relaciones de conmutación entre distintas componentes del operador momento angular $\hat{L_x}, \hat{L_y}, \hat{L_z}$, considerando un sistema en 3 dimensiones:

   (a) $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ (b) $[\hat{L}_x, \hat{L}_x]$ (c) $[\hat{L}_x, \hat{L}_z]$

8. Muestra que para el oscilador armónico se cumple:

$$[\hat{H}, \hat{a}_+] = +\hbar\,\omega\hat{a}_+$$

   si $\hat{a}_+$ es el operador de creación y $[\hat{H}, \hat{a}_-] = -\hbar\,\omega\,\hat{a}_-$ si $\hat{a}_-$ es el operador de destrucción.

9. Prueba que el operador momento es un operador Hermítico: $\hat{p} = \hat{p}^\dagger$
   Para ello prueba que:

$$< \Psi|\,\hat{p}\,|\Phi >=< \Phi|\,\hat{p}\,|\Psi >^*$$

   con $|\Psi >$ and $|\Phi >$ dos estados normalizados.

10. Supongamos un sistema que tiene dos estados linealmente independientes:

$$|\,1 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad |\,2 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   cuyo Hamiltoniano toma la forma específica:

$$H = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

   donde g y h son constantes reales. Teniendo en cuenta que la forma más general de un estado es una combinación lineal de los dos estados anteriores, y el sistema en $t = 0$ se encuentra en el estado 1, calcula cuál será su estado en un tiempo t.