Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tema II: Electrostática en el vacío

Electromagnetismo I

2º Curso Grado Física

Curso 2022-2023 (2º semestre)

Universidad de Alicante – Departamento de Física Aplicada

Índice

1. Introducción: La carga eléctrica

Propiedades fundamentales de la materia:

- Masa
- **Carga eléctrica** (origen en la estructura atómica: electrones, protones y neutrones)
- Spin

$\Rightarrow$ Principio de conservación de la carga | Neutralidad / Carga eléctrica neta (electrización)

$\Rightarrow$ La carga eléctrica está cuantizada | Múltiplo entero del valor absoluto de la carga del electrón

$$q = \pm n\,|e|; \qquad |e|$$ (unidad de carga fundamental)

Unidad SI: Culombio (C)

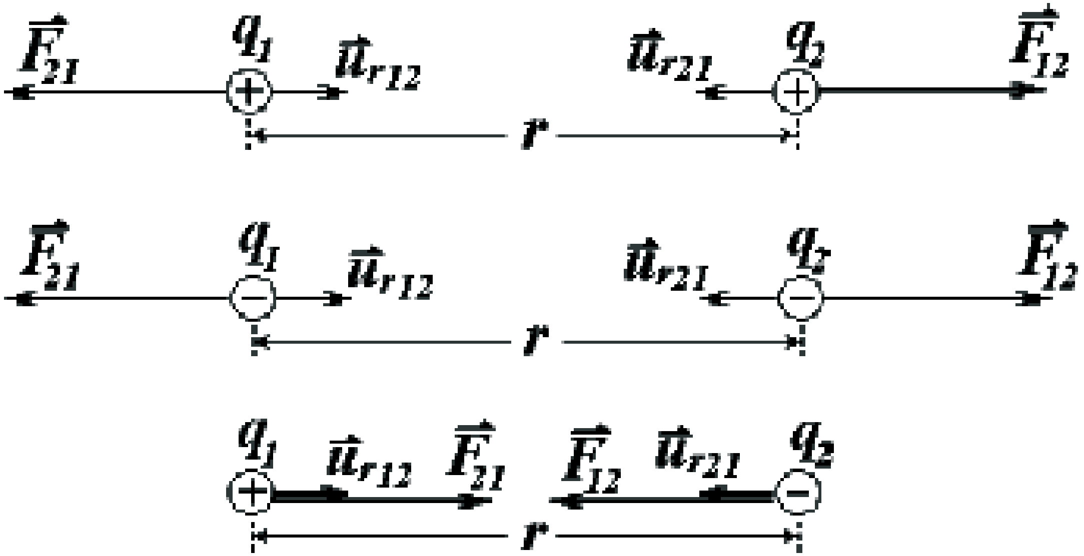
$1\ e = 1.60 \times 10^{-19}$ C

1 C $= 6.25 \times 10^{18}\ e$

| Electrización normal
1µC-1nC

2. Ley de Coulomb: Fuerza electrostática entre dos cargas discretas.

$$\vec{F}_{12} = K\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2}\,\vec{u}_{12}$$



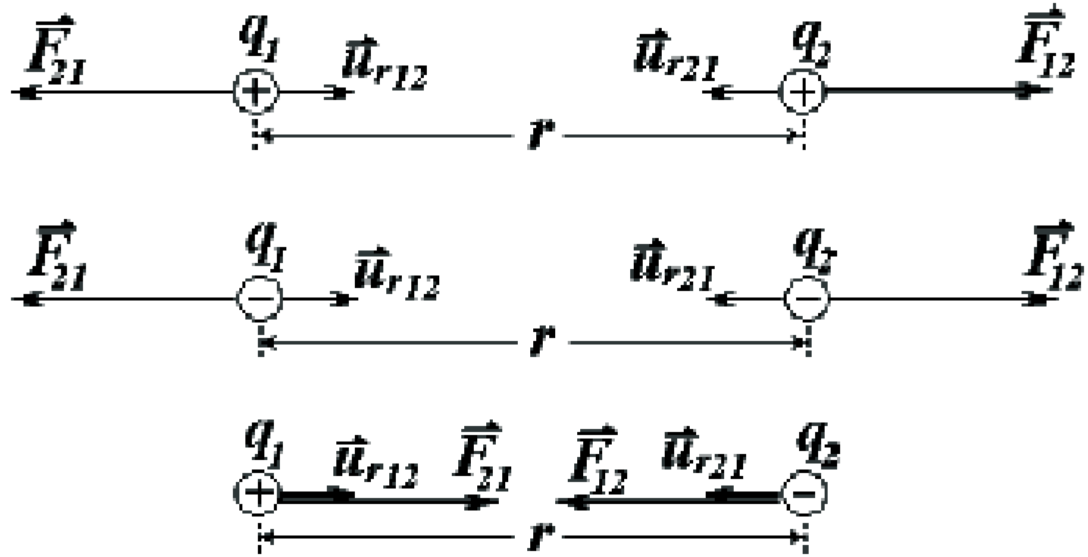
Módulo $\quad F = K\,\dfrac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}$

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

- $\vec{u}_{12}$ es un vector unitario dirigido según la recta que une las cargas y de sentido de la carga que ejerce la fuerza hacia la carga que experimenta dicha fuerza.

NOTACIÓN del libro Wangsness: Vector que une las dos cargas $\quad \vec{R} = \boldsymbol{R}$

$$\vec{F} = K\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\,\vec{u}_r$$



Módulo $\quad F = K\,\dfrac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}$

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

- La fuerza ejercida entre cargas distribuidas en cuerpos voluminosos es la misma que actuaría si los cuerpos tuvieran su carga concentrada en su centro y la distancia fuera entre ambos puntos (carga puntual).

- Las fuerzas electrostáticas que actúan sobre cada una de las partículas cargadas, $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$, forman un par de fuerzas de acción y reacción, por lo que su dirección es la de la recta que une sus centros y su sentido es de atracción si las cargas tienen distinto signo y de repulsión si las cargas tienen el mismo signo

$$\vec{F} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

- *K* es la cte eléctrica que depende del medio en el que se sitúan las cargas. A veces esta cte se define en función de otra cte ε, llamada permitividad o cte dieléctrica del medio. El valor de *K* más alto corresponde al vacío. Su menor valor en cualquier otro medio indica que el en medio material disminuye la interacción eléctrica entre cargas.

$$K = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}$$

Valores de ε y K para distintos medios a 20°C (unidades SI).		
Medio	ε $(C^2N^{-1}m^{-2})$	$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ (Nm^2C^{-2})
Vacío	$8{,}854\cdot10^{-12}$	$9\cdot10^{9}$
Aire	$8{,}859\cdot10^{-12}$	$\approx 9\cdot10^{9}$
Poliestireno	$2{,}267\cdot10^{-11}$	$3{,}5\cdot10^{9}$
Papel	$3{,}276\cdot10^{-11}$	$\approx 2{,}4\cdot10^{9}$
Vidrio pirex	$4{,}958\cdot10^{-11}$	$1{,}6\cdot10^{9}$
Porcelana	$6{,}198\cdot10^{-11}$	$\approx 1{,}3\cdot10^{9}$
Agua	$7{,}083\cdot10^{-10}$	$1{,}1\cdot10^{8}$

Principio de superposición para cargas discretas:

Fuerza ejercida sobre una carga q por un sistema de N cargas q_i, con i = 1….N

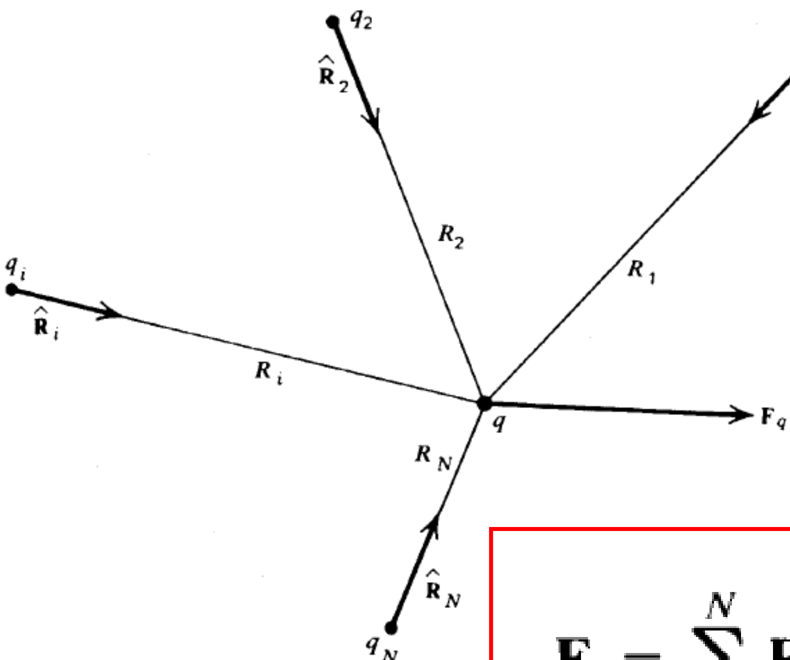
NOTACIÓN del libro Wangsness:

El **vector** que une la carga que experimenta la fuerza *q* con la carga que la crea q_i, donde i = 1….N

$$\vec{R}_i = \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_i}$$

Vector de posición de la carga q_i

Vector de posición de la carga *q*



Módulo $\left|\vec{R}_i\right| = R_i = \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_i}\right|$

Vector unitario $\hat{\boldsymbol{R}}_i = \dfrac{\boldsymbol{R}_i}{R_i}$

$$\boxed{\mathbf{F}_q = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{q_i \to q} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q q_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q q_i \mathbf{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3}}$$

Coordenadas cartesianas: Se puede obtener una fórmula explicita para la fuerza

$$\mathbf{F}_q = \sum_{i=1}^{N} \frac{qq_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x-x_i)\hat{\mathbf{x}} + (y-y_i)\hat{\mathbf{y}} + (z-z_i)\hat{\mathbf{z}}]}{\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right]^{3/2}}$$

Con ella se puede calcular la fuerza si se conocen las cargas y sus posiciones en un sistema de coordenadas cartesiano.

Distribución continua de cargas:

Si las cargas están tan juntas en comparación a las distancias de interés, se puede considerar que están distribuidas homogéneamente. La cantidad contenida en un elemento diferencial de espacio será *dq´* se puede suponer como puntual. En este caso la fuerza se puede obtener:

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq' \hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

Según sea la región del espacio en la que se encuentra distribuida la carga:
un volumen V´, en 3D; una superficie S´, en 2D; o una línea L´, en 1D.
Podemos definir densidades de carga

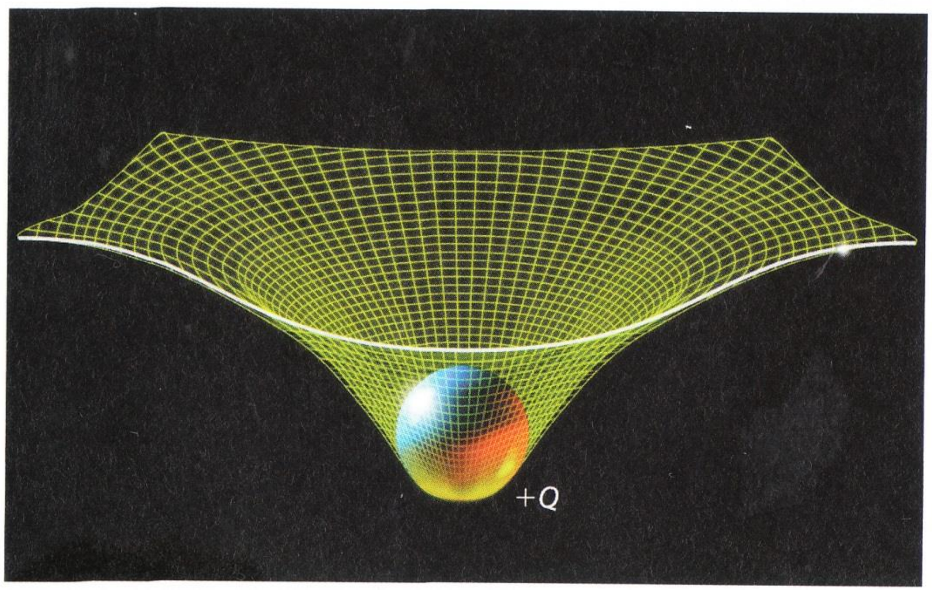
Densidad de carga volúmica $\rho = \frac{dq´}{d\tau´}$ $\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\, d\tau'}{R^2}$

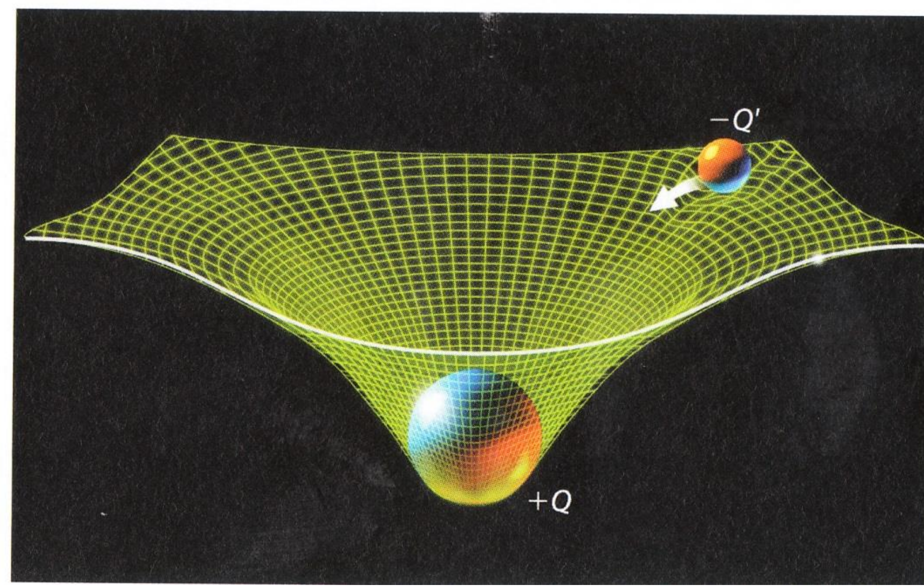
Densidad de carga superficial $\sigma = \frac{dq´}{da´}$ $\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\, da'}{R^2}$

Densidad de carga lineal $\lambda = \frac{dq´}{ds´}$ $\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\, ds'}{R^2}$

3. Campo eléctrico y potencial electrostático

Una carga *Q* modifica de algún modo el espacio. A este espacio perturbado por la carga se llama campo eléctrico, y se considera que actúa sobre cualquier otra carga eléctrica, *q,* ejerciendo la fuerza electrostática sobre ella, según establece la ley de Coulomb.





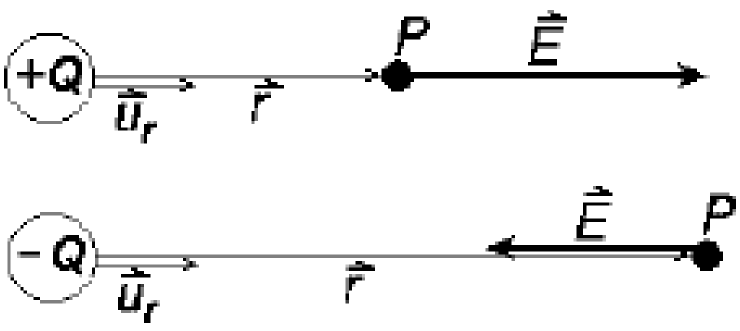
Descripción del campo eléctrico en distribuciones discretas de carga

3.1 Perspectiva dinámica: fuerza e intensidad de campo

La fuerza electrostática no sirve para caracterizar el campo, pues su valor en un punto depende de la carga *q* colocada en el mismo.

La intensidad de campo eléctrico creado por una carga eléctrica Q en un punto representa la fuerza que actuaría sobre la unidad de carga colocada en dicho punto.

Cada punto del espacio queda caracterizado por el valor de



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K\,\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}_r; \quad \vec{F} = q \cdot \vec{E};$$

(Unidad Si: N/C ó V/m)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K\,\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r; \quad \vec{F} = q \cdot \vec{E};$$

- Independiente de la carga que se coloque en el punto.
- Dependiente de la carga, *Q*, que lo crea y de la distancia *r* al punto.
- El sentido del campo depende del signo de la carga *Q* que lo crea. El campo se aleja de carga positiva y va hacia la carga negativa.

Principio de superposición: al ser un vector, el campo eléctrico creado en un punto por varias cargas es la composición vectorial de los campos individuales generados en ese punto por cada una de ellas.

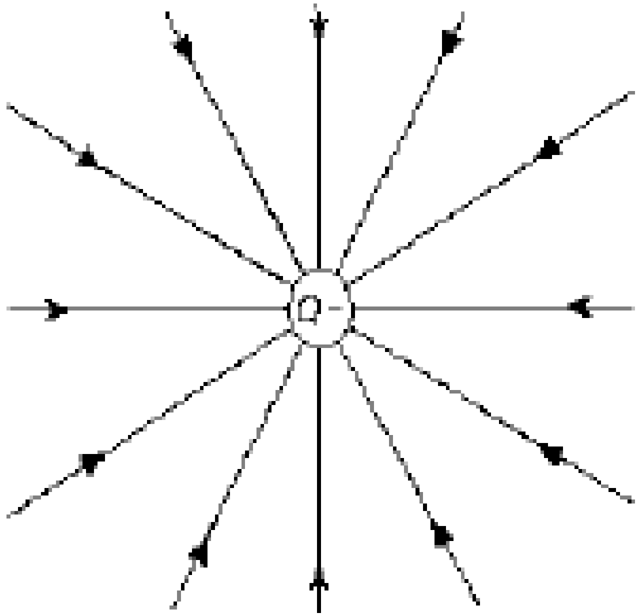
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

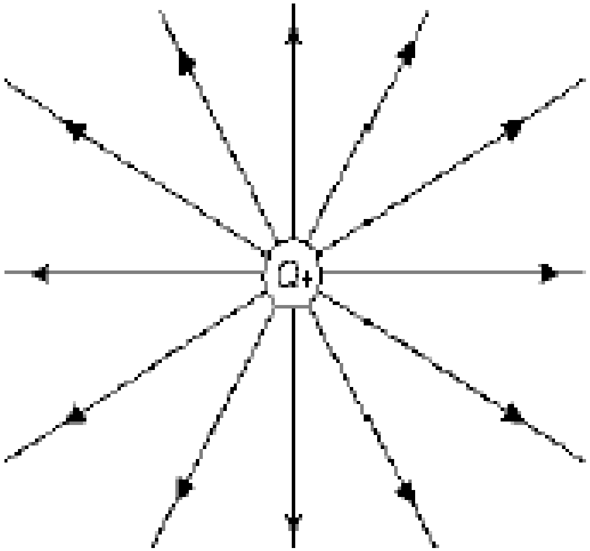
Representación del campo eléctrico mediante líneas de campo

- Dirección: radial, su dirección coincide con la dirección de $\vec{E}$ en cada punto. No se cortan.

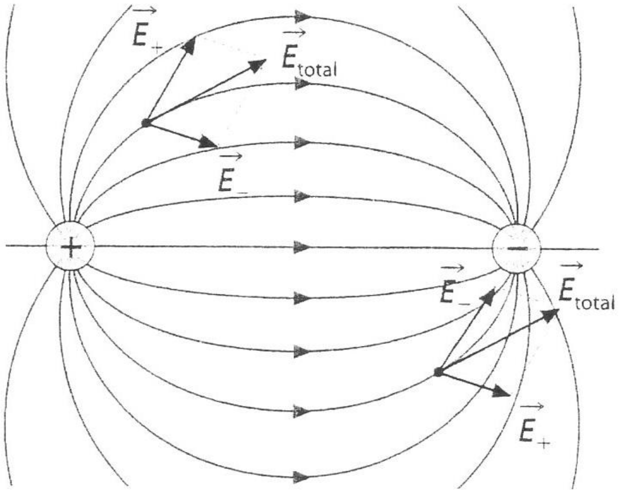
- Sentido: Si +Q hacia fuera, si –Q hacia la carga

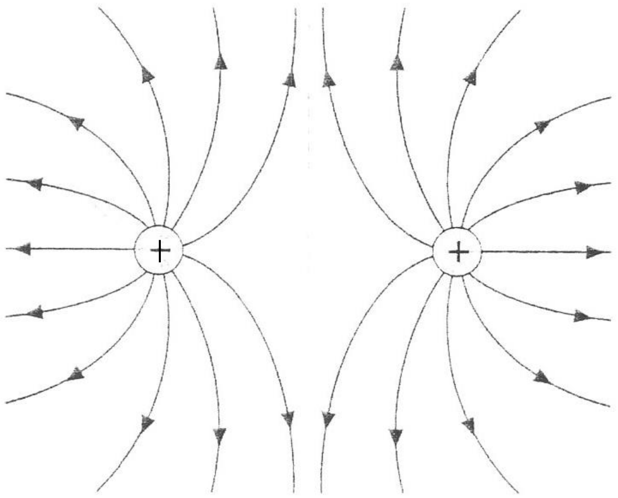
- Módulo: el número de líneas es proporcional al $\left|\vec{E}\right|$ y por tanto proporcional a *Q*





- Si hay más de una carga, el campo en un punto surge de la aplicación del principio de superposición. Las líneas dejan de ser simétricas y radiales





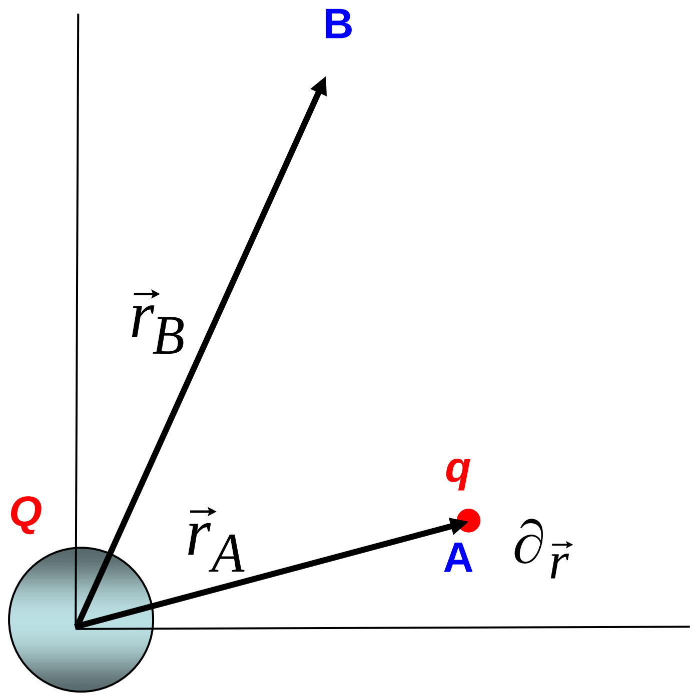
Campos eléctricos en la Naturaleza

	E, N/C
En los cables domésticos	10^{-2}
En las ondas de la radio	10^{-1}
En la atmósfera	10^{2}
En la luz solar	10^{3}
Bajo una nube tormentosa	10^{4}
En la descarga de un relámpago	10^{4}
En un tubo de rayos X	10^{6}
En el electrón de un átomo de hidrógeno	6×10^{11}
En la superficie de un núcleo de uranio	6×10^{21}

3.2 Perspectiva energética: energía potencial y potencial

<u>Ley de la energía potencial</u>

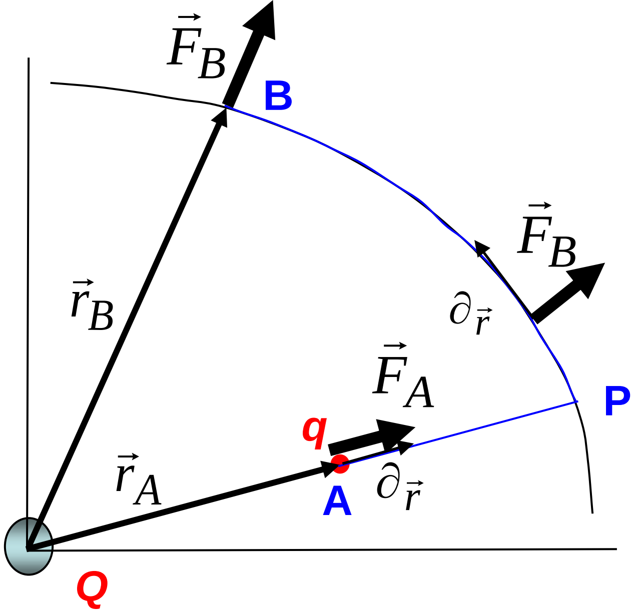
Fuerza electrostática (Central y conservativa)	$\Rightarrow$	Energía potencial electrostática (Magnitud escalar que solo depende de la posición)



El trabajo realizado por la fuerza electrostática para trasladar una carga *q* desde un punto A a otro B del campo creado por otra carga *Q* es igual a la diferencia de valores que toma dicha función escalar entre dichos puntos

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -\left(E_{pB} - E_{pA}\right) =$$

$$= -E_{pB} + E_{pA} = E_{pA} - E_{pB}$$



El trabajo realizado por la fuerza es independiente del camino seguido

$$W_{A\to B} = W_{A\to P} + W_{P\to B} = W_{A\to P} =$$

$$\int_A^P \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^P K\frac{Qq}{r^2}\,dr\cos(0^o) =$$

$$\left[-K\frac{Qq}{r}\right]_A^P = -K\frac{Qq}{r_P} + K\frac{Qq}{r_A};$$

Tramo $A \to P$ ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{r}$ 180^o

Tramo $P \to B$ ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{r}$ 90^o

$r_P = r_B$

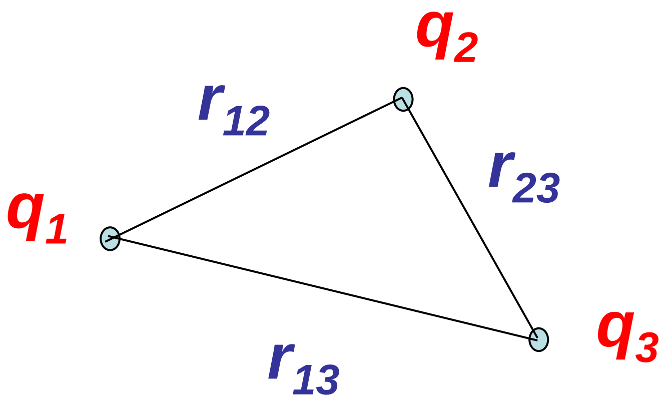
$$-K\frac{Qq}{r_B} + K\frac{Qq}{r_A} = -E_{pB} + E_{pA}$$

La energía potencial electrostática de una carga q colocada a una distancia r de la carga Q creadora del campo eléctrico es igual a:

$$E_p = K\frac{Qq}{r}$$ (unidad SI: J, eV)

Energía potencial para un sistema de varias cargas

La energía potencial del sistema es la suma de las energías potenciales de todos los pares distintos de cargas que se puedan formar.



$$E_{Ptotal} = E_{P12} + E_{P23} + E_{P13} = -K\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}}\right)$$

La energía potencial no caracteriza el campo, pues su valor en un punto depende de la carga *q* colocada en el mismo.

$$V = \frac{E_p}{q} = K\frac{Q}{r}$$

Unidad SI: J/C ó V

NOTACIÓN EN WANGSNESS
A V se le llama ϕ

El potencial del campo en un punto será la energía potencial que corresponde a la unidad de carga testigo positiva colocada en ese punto.

- Si la carga que origina el campo es positiva, el potencial en cualquier punto es positivo
- Si la carga que origina el campo es negativa, el potencial en cualquier punto es negativo

En el caso de varias cargas puntuales, el potencial en un punto debido a todas ellas es la suma algebraica de todos los potenciales

3.3 Relaciones fuerza-energía potencial e intensidad de campo-potencial

Magnitudes que definen el campo

- Intensidad del campo en un punto (perspectiva dinámica)
- Potencial del campo en un punto (perspectiva energética)

Magnitudes inherentes a la interacción del campo con una partícula de una determinada carga

- Fuerza que actúa sobre el cuerpo como medida de la interacción (perspectiva dinámica)
- Energía potencial del cuerpo asociada a su posición relativa en el campo (perspectiva energética)

Relaciones fuerza-energía potencial e intensidad de campo-potencial

FUERZA

Magnitud vectorial

$$\boxed{\vec{F} = K\vec{E}} = K\frac{qQ}{r^2}\vec{u}_r = q\left(K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -gradE_P = -\nabla E_P}$$

ENERGÍA POTENCIAL

Magnitud ESCALAR

$$\boxed{E_p = qV} = K\frac{qQ}{r} = q\left(K\frac{Q}{r}\right)$$

INTENSIDAD de CAMPO

Magnitud vectorial

Se representa con líneas de campo

$$\boxed{\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r}$$

$$\boxed{\vec{E} = -gradV = -\nabla V}$$

POTENCIAL

Magnitud ESCALAR

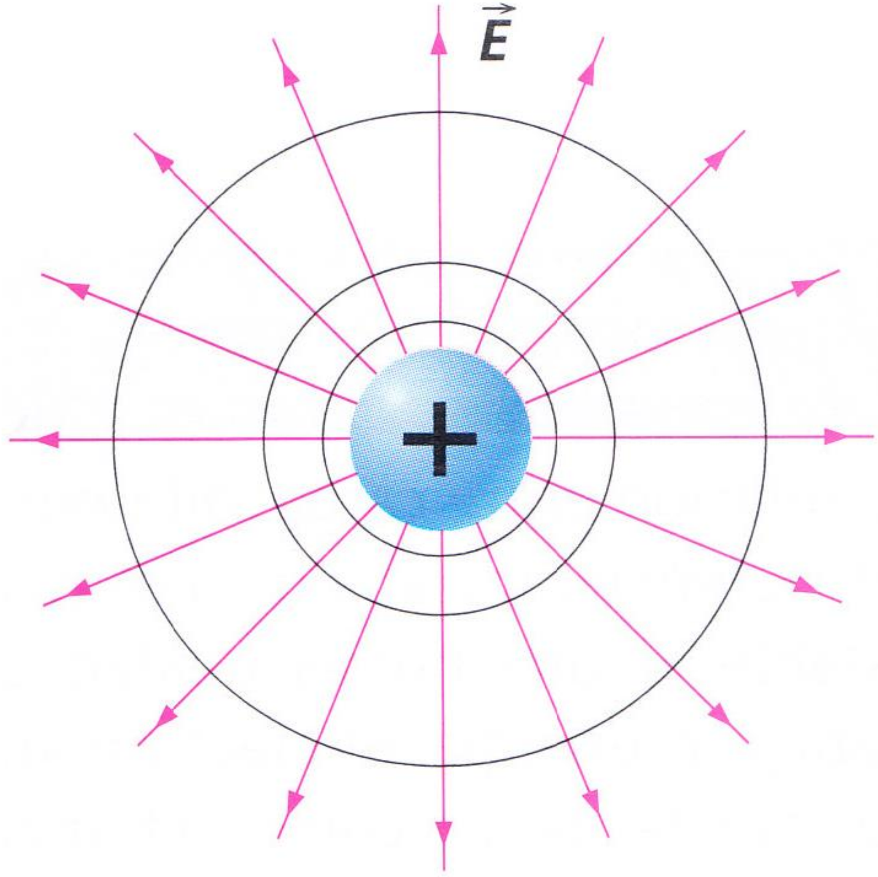
Se representa con superficies equipot.

$$\boxed{V = K\frac{G}{r}}$$

MAGNITUDES QUE DESCRIBEN LA INTERACCIÓN DE UNA CARGA *q* CON EL CAMPO CREADO POR *Q*

MAGNITUDES QUE DEFINEN EL CAMPO DE FUERZAS CREADO POR *Q*

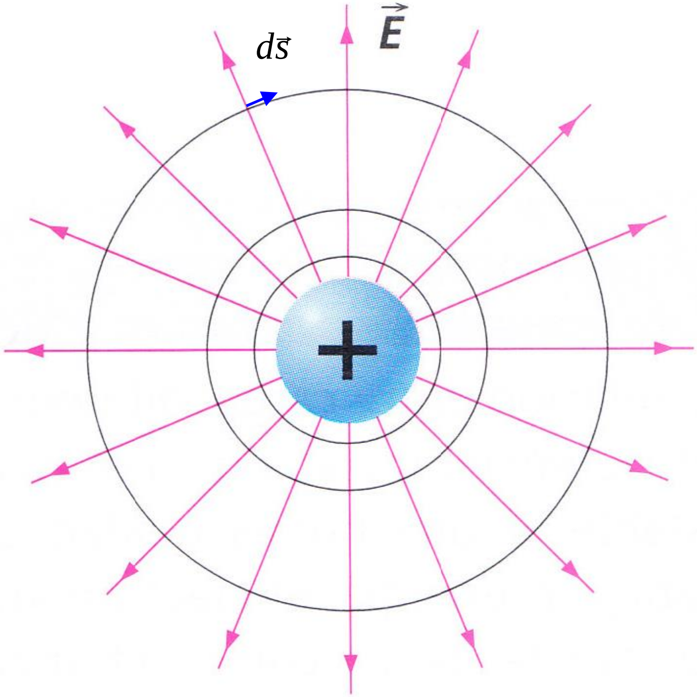
- Si la carga está distribuida uniformemente y es esférica las superficies equipotenciales son esferas concéntricas centradas en la carga.



- El vector campo eléctrico tiene el sentido de los potenciales decrecientes.

$$\vec{E} = -\nabla V$$

- El vector campo es perpendicular a las superficies equipotenciales



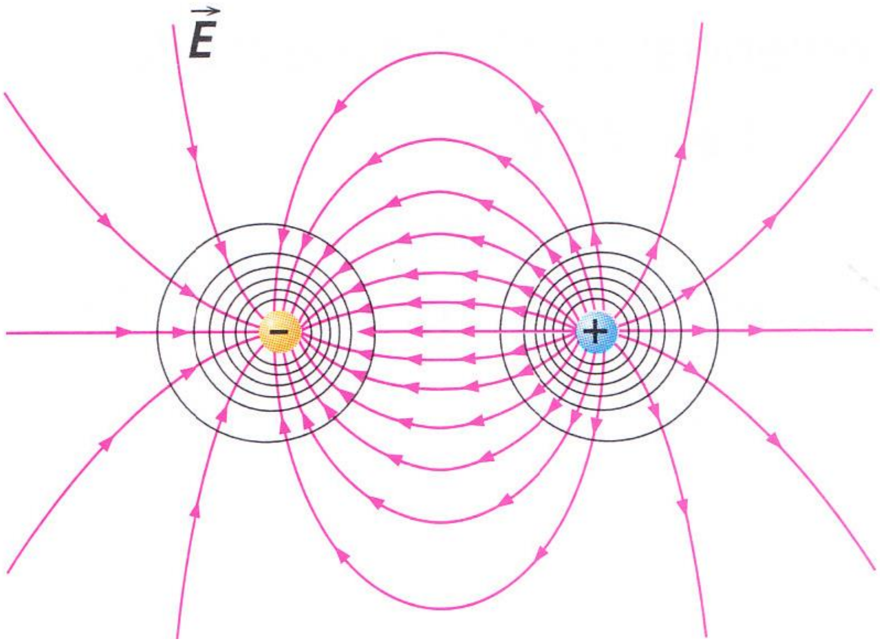
$$dV = -\vec{E}\, d\vec{s}$$

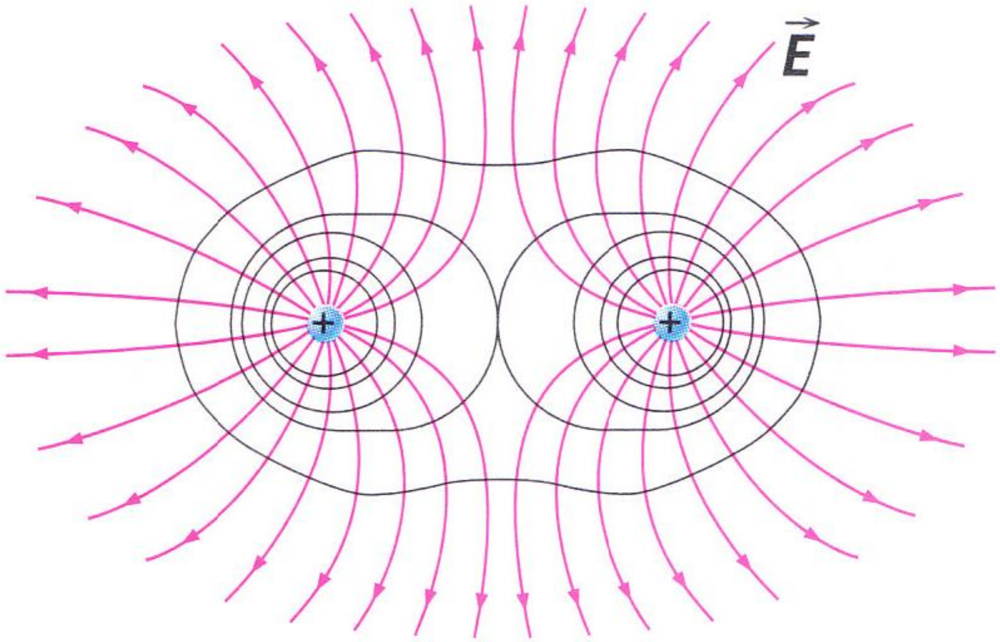
Al desplazar una carga a lo largo de una superficie equipotencial una distancia *ds* la variación de potencial es nula.

$$dV = 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp d\vec{s}$$

El vector posición tiene la misma dirección que las líneas del campo y éstas la misma dirección que el vector campo.

- Si hay más de una carga, el potencial en un punto surge de la aplicación del principio de superposición. En este caso, la superficie equipotencial deja de ser concéntrica con las cargas.





- Las superficies equipotenciales no se pueden cortar. Si lo hicieran en el punto de corte habría dos vectores campo.

Campo eléctrico creado por una distribución continua de carga

Si tenemos una región del espacio (un volumen V´, en 3D; una superficie S´, en 2D; o una línea L´, en 1D) en la que la carga está distribuida homogéneamente, podemos aplicar todo lo anterior considerando

Densidad de carga volúmica $\rho = \frac{dq'}{d\tau'}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\,d\tau'}{R^2}$$

Densidad de carga superficial $\sigma = \frac{dq'}{da'}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\,da'}{R^2}$$

Densidad de carga lineal $\lambda = \frac{dq'}{ds'}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\,ds'}{R^2}$$

La realización de estas integrales puede a veces ser muy complejo.
En todo caso, incluso aunque pueda hacerse, suele ser más sencillo utilizando el teorema de Gauss.

4. Teorema de Gauss y aplicaciones

Relaciona el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga contenida en su interior.

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{\text{dentro}} q_i = \frac{Q_{\text{en}}}{\epsilon_0}}$$

Donde Q_{en} es la carga neta contenida dentro del volumen limitado por la superficie arbitraria S.

Este teorema se puede demostrar expresando el campo y considerando dos casos, que la qi esté dentro o fuera del recinto de volumen delimitado por la superficie. Ello permite ver que solo las cargas que están dentro producen flujo neto. Las que están fuera producen líneas de campo que entran dentro del recinto delimitado por S por un lado y salen por el otro, de manera que las contribuciones se cancelan.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2}$$

Si la carga está distribuida de forma contínua $$Q_{\text{en}} = \int_V \rho \, d\tau$$

La ley de Gauss es útil para calcular de forma sencilla el campo cuando el sistema tiene una elevada simetría

1. Se elige la superficie cerrada de área conocida, de modo que el campo sea perpendicular o paralelo a ella. Esta superficie se denomina gaussiana.

2. Se determina el flujo a través de ella mediante la expresión:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

3. Se iguala el flujo obtenido a la expresión de la ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi\ K\ Q_{en} = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_o}$$

Si las cargas dentro del volumen englobado por la superficie están distribuidas de forma continua con densidad de carga ρ

$$Q_{en} = \int_V \rho \, d\tau$$

Donde V es el volumen contenido dentro de la superficie S

Utilizando el Teorema de la divergencia que vimos en el tema 1, aplicado al campo eléctrico, que decía (allí al diferencial de volumen lo llamábamos dV)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V div\vec{E} d\tau = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) d\tau$$

El Teorema de Gauss se puede escribir:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, d\tau$$

Como el resultado se aplica a cualquier volumen arbitrario, también serviría para uno infinitamente pequeño

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

1ª ECUACIÓN DE MAXWELL
(forma diferencial)
EQUIVALENTE A LA LEY DE COULOMB

El potencial electrostático

Puesto que el campo eléctrico es conservativo, existe una función escalar (llamada potencial electrostático o potencia escalar) ϕ que cumple:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

Sabiendo que el campo viene dado por $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2}$

Esa expresión se verifica si el potencial se define $\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$

Tomando rotacional en ambos miembros de $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \xrightarrow{\text{Aplicando el T. de Stokes}} \boxed{\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0}$$

Demuestra que E es un campo conservativo

A continuación se ven varios ejemplos sencillos en los que se obtiene el **campo eléctrico a partir de la ley de Gauss**

En estos casos se obtiene también el potencial electrostático utilizando la expresión del **campo eléctrico** obtenida a partir de la relación

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

MUY IMPORTANTE: En la práctica determinar el potencial de este modo no es lo habitual. En realidad suele ser más fácil calcular primero el potencial (a partir de su definición) dado que es una función escalar, y luego a partir de él el campo.

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

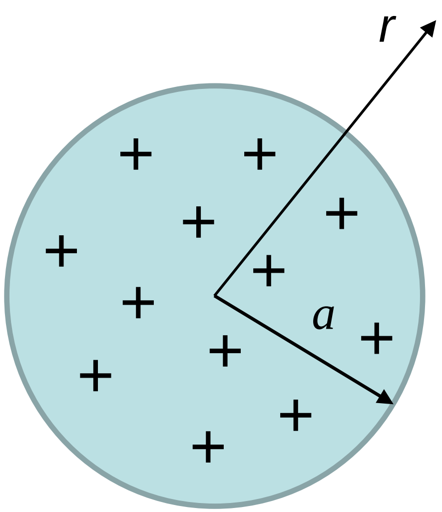
Aunque a veces hacer el cálculo de este modo no es posible o es muy complejo. En esos casos se usan otros métodos (resolver la ecuación de Poisson).

Cálculo de campos eléctricos mediante la ley de Gauss

SIMETRÍA ESFÉRICA

Campo y potencial creados por una esfera aislante cargada simétricamente

Radio a, volumen *V, carga total Q. Densidad volumétrica de carga* ρ



Carga Simétricamente distribuida (independiente del ángulo; $\rho = \rho\,(r)$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

E es radial y es independiente del ángulo

$$\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}.$$

COORD. ESFÉRICAS

Superficie gaussiana: esfera de radio r
En esta superficie:
-E tiene mismo valor en todos sus puntos.
-El diferencial de área va en dirección radial.

1er miembro
Teorema Gauss

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \oint_S E_r(r)\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}\, da = E_r(r)\oint_S da = 4\pi r^2 E_r(r)$$

Teorema Gauss

$$E_r(r) = \frac{Q_{\text{en}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Para calcular Q_{en}

$$Q_{\text{en}} = \int_{V(r)} \rho(r')\, d\tau'$$

V(r): volumen de la esfera gausiana

CASO 1: Puntos exteriores de la esfera de carga, r > *a*

$$\rho(r') = 0 \text{ si } r' > a \qquad Q_{\text{en}} = \int_{V(a)} \rho(r')\, d\tau' = Q$$

$$\boxed{E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r > a)}$$

CASO 2: Puntos interiores de la esfera de carga, r < *a*

$$Q_{in} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho(r') r'^2 \operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi' = 4\pi \int_0^{r} \rho(r') r'^2\, dr'$$

$$\boxed{E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2}\int_0^{r} \rho(r') r'^2\, dr' \qquad (r < a)}$$

Para poder seguir necesario
Conocer la forma de ρ(r)

CASO PARTICULAR: DISTRIBUCIÓN HOMOGÉNEA DE CARGA

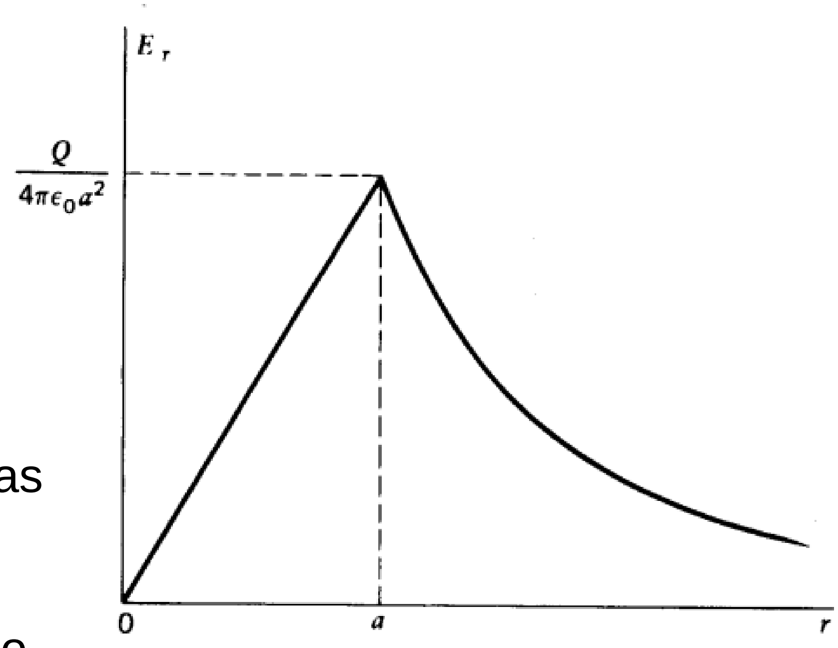
$\rho(r)$ = constante

$$\int_0^r \rho r'^2 dr' = \rho \int_0^r r'^2 dr' = \tfrac{1}{3}\rho r^3$$

$$\boxed{E_r(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \qquad (r<a)}$$

El cálculo para r = *a*
da el mismo valor con
ambas expresiones

El campo E es continuo en
la interfase: pero esto es porque
se supone que hay vacío en ambas
(no es realista porque si la esfera
es aislante no habría vacío….);
Veremos después que ocurre si no
se hace esta suposición



Potencial electrostático. Se calcula a partir de la expresión del campo **E** mediante la relación:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

$$\int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 -\nabla\phi\cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 d\phi = -(\phi_2-\phi_1) = -\left[\phi(\mathbf{r}_2)-\phi(\mathbf{r}_1)\right]$$

Necesario imponer condiciones (por ejemplo fijar arbitrariamente origen potencial)

CASO 1: **Puntos exteriores de la esfera de carga, para ρ = cte**, r > a

$$\boxed{\phi_o(r) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

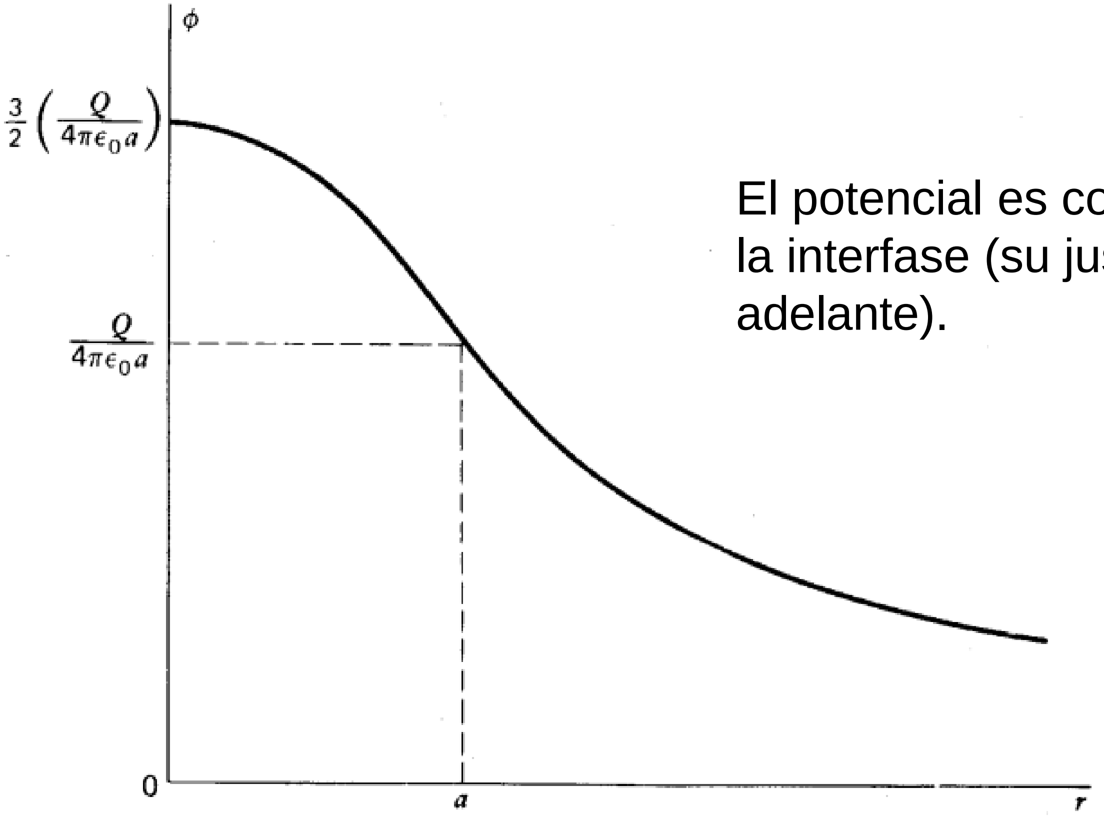
Equivalente a tener toda la carga en el centro de la esfera

CASO 2: **Puntos interiores de la esfera de carga**, **para ρ = cte**, r < a

$$\boxed{\phi_i(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3a^2-r^2) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right)}$$

Los detalles de como llegar a estos valores se hará en la pizarra

En este caso las condiciones impuestas son: origen de potencial en el infinito y continuidad del potencial en la interfase (r = a)



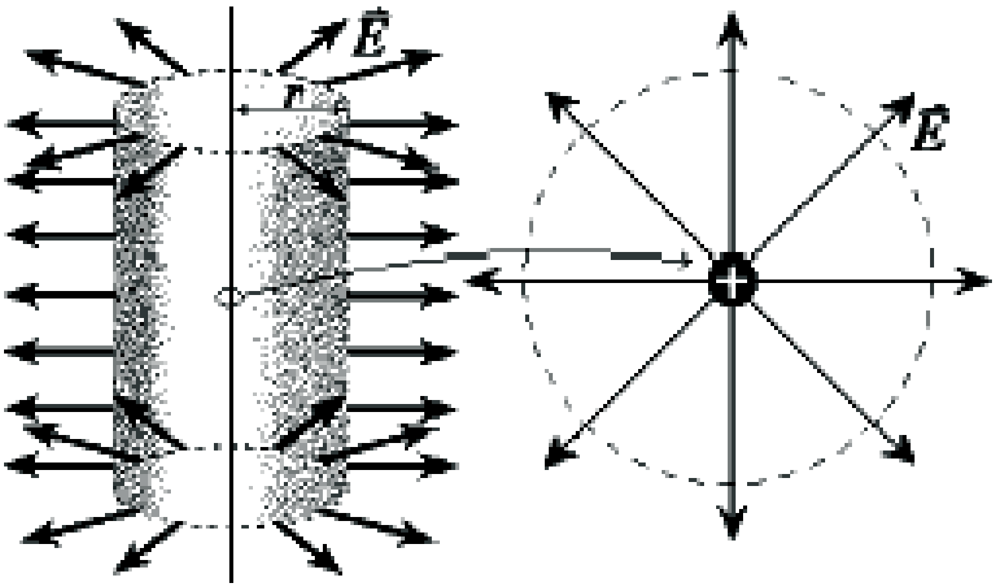
El potencial es continuo en
la interfase (su justificación se verá más
adelante).

Cuando las cargas están distribuidas en una región finita del espacio es habitual poner el origen de potencial en el infinito.

SIMETRÍA CILÍNDRICA

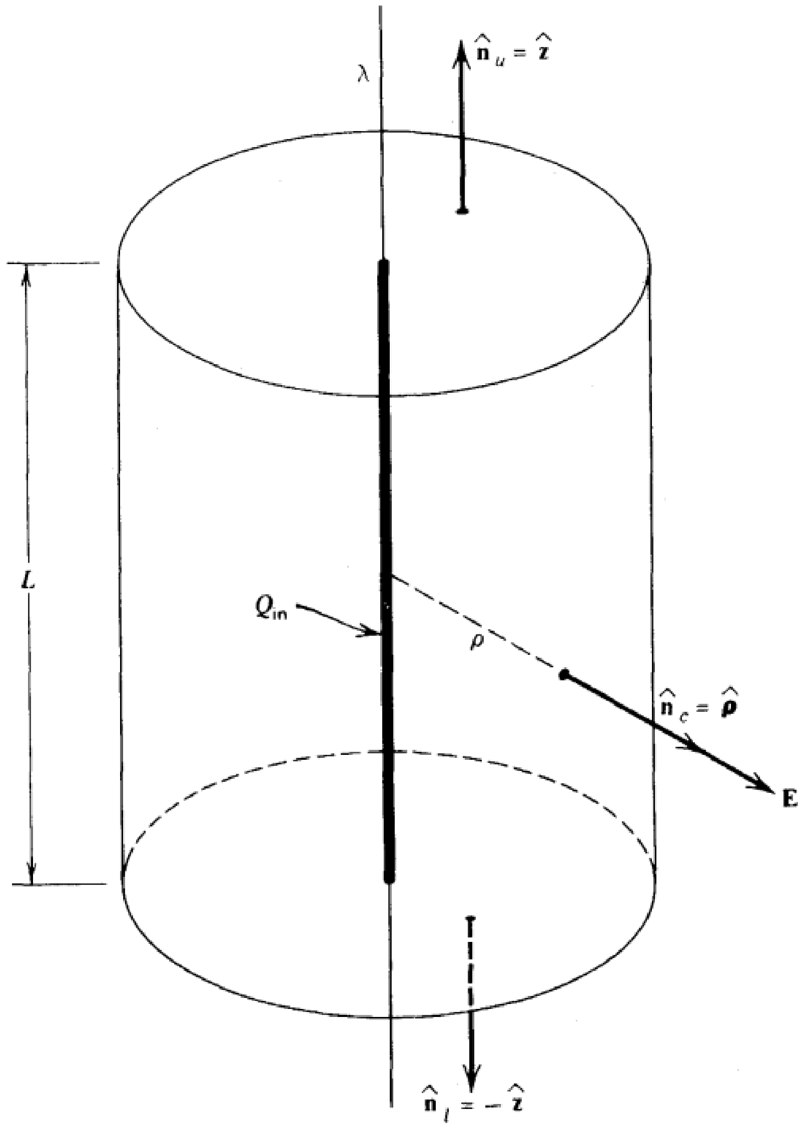
Campo y potencial creados por una línea infinita uniformemente cargada

Tengamos un hilo de longitud infinita cargado con una densidad de carga lineal λ = cte



Las líneas de campo son rectas perpendiculares al hilo en todos los puntos y presentan simetría radial. Se dirigen hacia fuera del hilo si la carga que contiene es positiva y hacia dentro si la carga es negativa.

Las superficies equipotenciales son superficies cilíndricas concéntricas en torno al hilo, tanto más alejadas cuanto menor sea el potencial.



COORDENADAS CILÍNDRICAS

Por simetría:

E sólo tiene componente radial, y ésta sólo depende del radio (independiente de z y del ángulo)

$$\mathbf{E} = E_\rho(\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

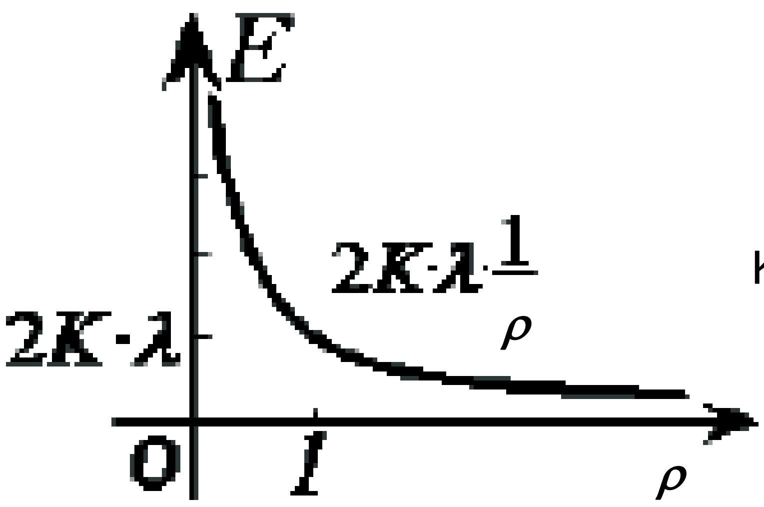
Teorema de Gauss:
Elegimos como superficie gaussiana un cilindro de longitud L concéntrico con el Hilo.

Aplicamos el T. Gauss:
El cilindro tiene 3 caras: curva (c), tapa superior(u, de “up”) y tapa inferior (“l” de “low”).

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_c E_\rho(\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\mathbf{n}}_c\, da + \int_u E_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\mathbf{n}}_u\, da + \int_l E_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\mathbf{n}}_l\, da$$

$$= E_\rho(\rho)\int_c da + 0 + 0 = E_\rho(\rho)2\pi\rho L = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}}$$



K = 1/4$\pi\varepsilon_0$

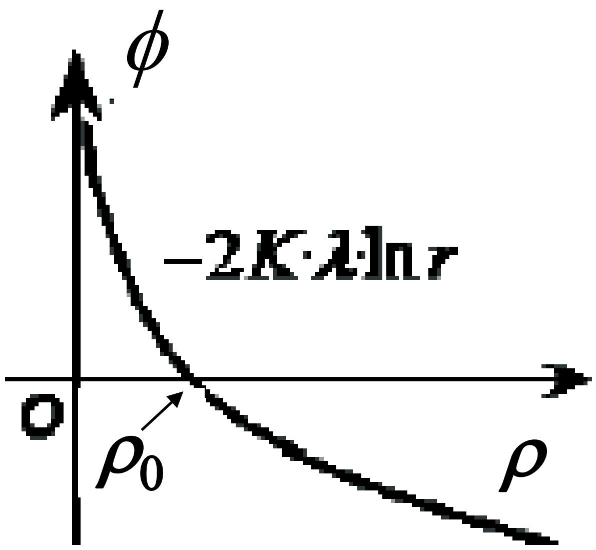
Potencial

$$\phi(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\rho + C$$

La constante C se determina fijando un origen para el potencial, por ejemplo en ρ_0

$$\rho = \rho_o,\ \phi(\rho_o) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \lambda \ln\rho_o / 2\pi\epsilon_o,$$

$$\boxed{\phi(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)}$$

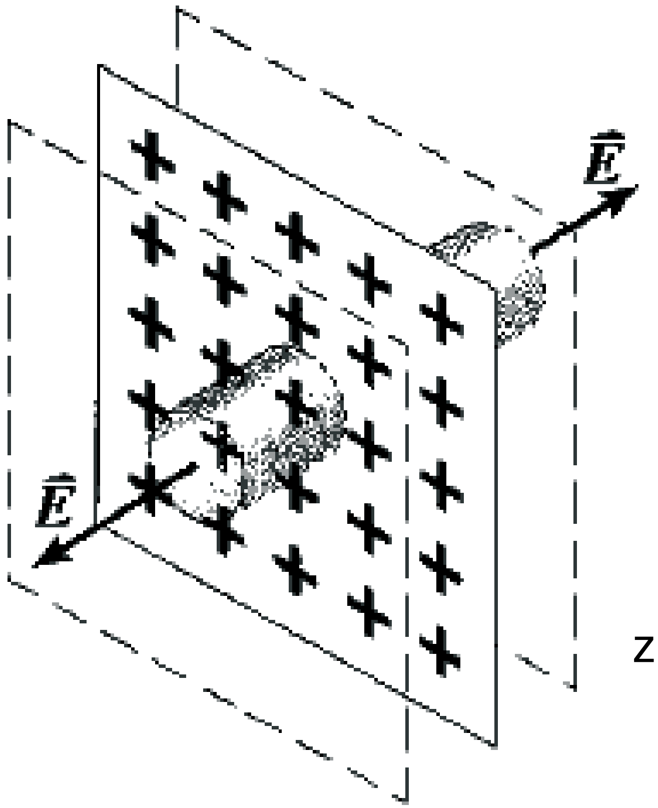


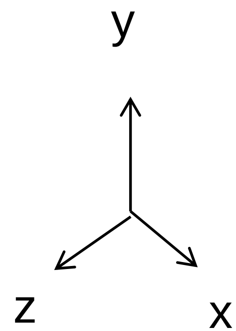
Para distribuciones de carga que se extienden hasta el infinito, el origen de potencial no se puede poner en el infinito. Se pone en un punto arbitrario.

SIMETRÍA PLANA

Campo y potencial creados por un plano infinito uniformemente cargado

Tengamos un plano de dimensiones infinitas cargado con una densidad superficial $\sigma = cte.$



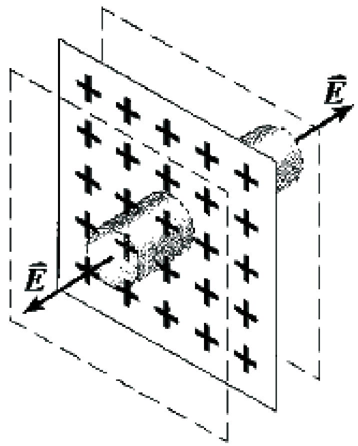


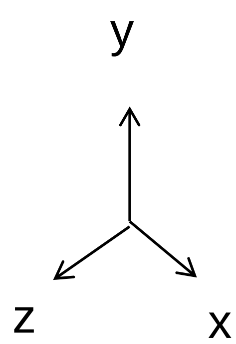
Por simetría:

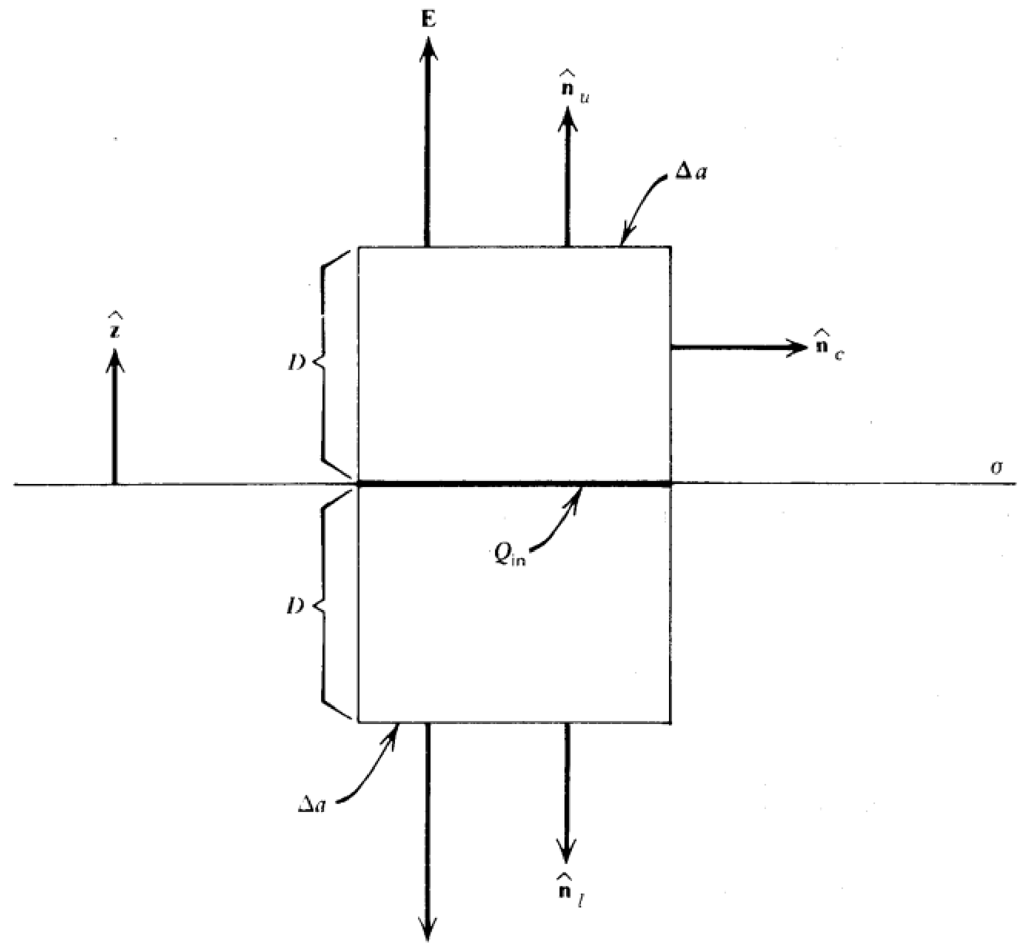
E sólo tiene componente perpendicular al plano (dirección z), y ésta depende sólo de la distancia a éste

Campo

Superficie gaussiana: cilindro de altura arbitraria 2D y sección transversal de área Δa con su eje (z) perpendicular al plano de carga y cortándolo simétricamente







¿Se podría usar un paralelepípedo como superficie gaussiana, en lugar de un cilindro?

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_u E(D)\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}\,da + \int_l E(D)(-\hat{\mathbf{z}})\cdot(-\hat{\mathbf{z}})\,da + \int_c E(z)\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}_c\,da$$

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_u E(D)\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}\,da + \int_l E(D)(-\hat{\mathbf{z}})\cdot(-\hat{\mathbf{z}})\,da + \int_c E(z)\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}_c\,da$$

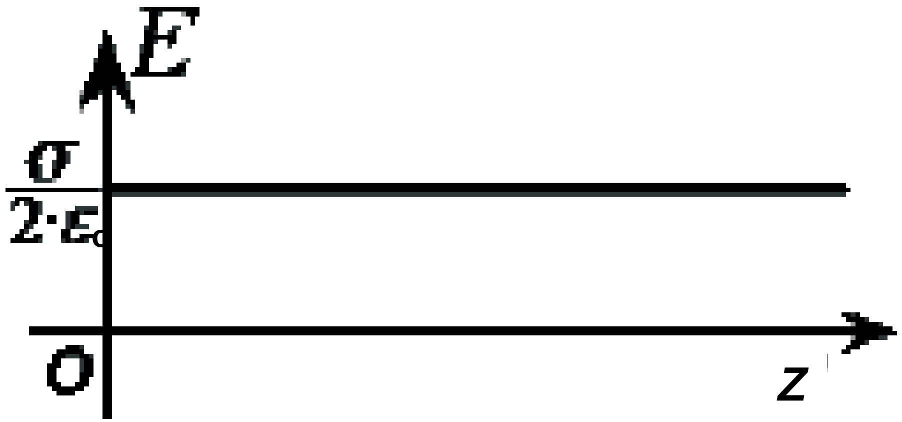
Cara arriba Cara abajo Cara curva

$$= E(D)\Delta a + E(D)\Delta a + 0 = 2E(D)\Delta a = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma\Delta a}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}}$$

Signo + para z > 0
Signo - para z < 0

El campo es constante:
no depende de la distancia al plano (z)

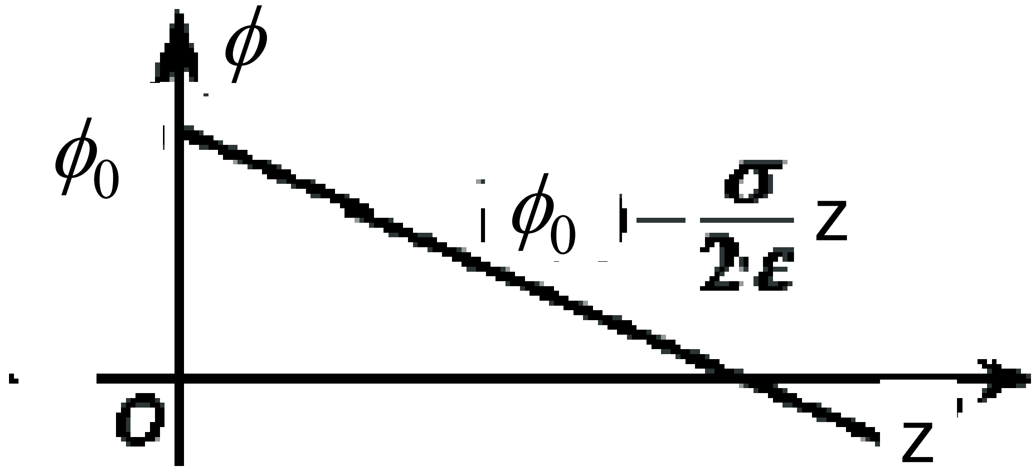


Potencial

$$\phi(z) = -\int E(z)dz = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + C$$

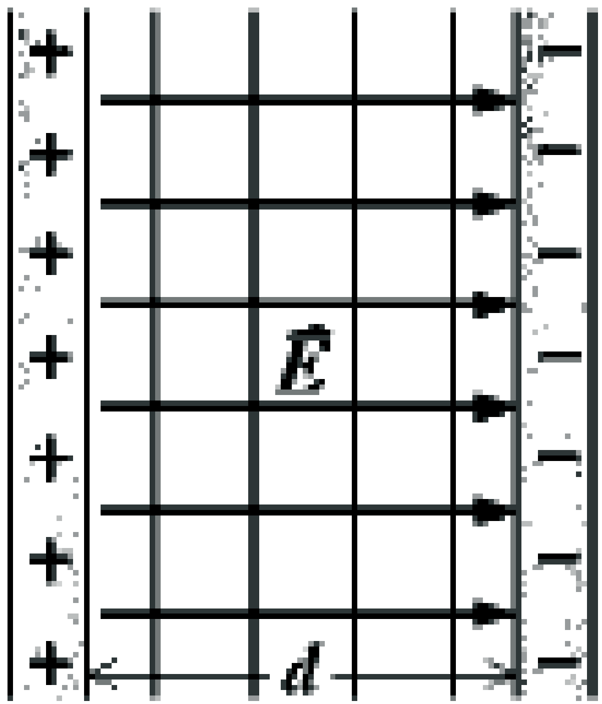
Para determinar la constate C es necesario conocer el valor del potencial para algún valor determinado (z referencia)

Por ejemplo, $\phi(z_{ref}) = \phi_0$, con z_{ref} = 0



Campo y potencial creados por dos planos paralelos, uniformes y opuestamente cargados

Tengamos dos planos de dimensiones infinitas separados una distancia *d*, con igual densidad de carga superficial, pero de diferente signo ($+\sigma$ y $-\sigma$).

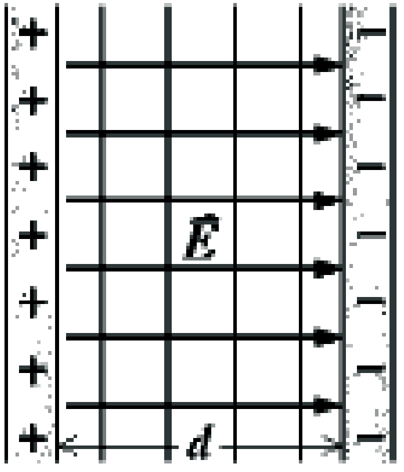


Las líneas de campo son rectas paralelas entre sí y perpendiculares a los planos, uniformemente espaciadas. Se dirigen del plano positivo al negativo.

Las superficies equipotenciales son paralelas al plano y uniformemente espaciadas.

EJEMPLO RELEVANTE: CONDENSADOR DE PLACAS PLANO-PARALELAS

Campo



Región entre ambos planos: Se superponen los campos debidos a cada plano. El módulo será:

$$E(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Dirigido desde el plano positivo hacia el negativo.

Región exterior a los planos: Los campos debidos a cada plano se neutralizan y no hay campo neto.

El potencial disminuye linealmente con la distancia desde el plano positivo al negativo .

Se propone al alumno que intente calcular el campo eléctrico para estas Distribuciones uniformes de carga (esfera, línea infinita y plano infinito) mediante la definición de campo eléctrico (transparencia 24) y compruebe que se obtiene el mismo resultado.

Se observará lo útil que resulta el teorema de Gauss para simplificar los cálculos