Apuntes de análisis de variable compleja

2023

Apuntes de las clases de *Análisis de variable compleja* dadas por *Juan Matías Sepulcre Martínez* y transcritos a LaTeX por *Víctor Mira Ramírez* durante el curso 2023-2024 del grado en Física de la *Universidad de Alicante*.

Índice

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1: Número complejo

Un **número complejo** z es un par ordenado de números reales a, b escrito como $\boxed{z = (a, b)}$ en coordenadas cartesianas. Existe una notación equivalente, la forma binómica: $\boxed{z = a + ib}$ siendo $i = (0, 1)$.

El conjunto de los número complejos se denota por: $C := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Comentario:

Siempre que $a = 0$ sea un número imaginario puro, y $b = 0$ sea un número real.

Definición 1.1.2: Conjugado

Llamamos conjugado de un número complejo al número denotado $\boxed{\bar{z} = a - ib}$, siendo $z = a + ib$. Geométricamente, podemos decir que el eje real actúa de 'espejo' del número en el plano.

Comentario:

Llamamos $\mathbb{C}$ al cuerpo de los numeros complejos. $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo, pero no totalmente ordenado. En cambio, cualquier ecuación algebraica tiene solución en los complejos. De todas formas, el teorema fundamental del álgebra nos asegura que tendrá n soluciones en los complejos

Comentario:

Cuando los coeficientes de una ecuación algebraica son reales, las soluciones complejas vienen por pares.

Teorema 1.1.1 Operaciones elementales

SUMA $\quad (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$

RESTA $\quad (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i$

PRODUCTO $\quad (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i \quad$ (teniendo en cuenta que $i^2 = -1$)

DIVISIÓN $\quad \dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{a + bi}{c + di} \cdot \dfrac{c - di}{c - di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i \quad$ (multiplicando por el conjugado)

Comentario:

El elemento unidad es $1+0i$ y el elemento inverso es $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$. Para que un número complejo tenga elemento inverso, debe ser distinto de cero. El producto de un número complejo por su elemento inverso es la unidad.

Definición 1.1.3: Componentes de los complejos

Llamamos **módulo** del número complejo $z = a + bi$ a la cantidad $\boxed{\sqrt{a^2+b^2}}$ denotada $|z|$

Llamamos **argumento** del número complejo $z = a + bi$ al ángulo que forma el semieje positivo de abcisas con la recta que contiene el vector (a, b). Se denota Arg $z = \alpha$ y se expresa en radianes.

$\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$ si $a \neq 0$

Definición 1.1.4: Módulo

Llamamos **módulo** de un número complejo $z = a + bi$, y lo denotamos $|z|$, a la cantidad

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Definición 1.1.5: Argumento

Llamamos **argumento** de un número complejo $z = a + bi$ al ángula que forma el semieje positivo de abcisas con la recta que contiene al vector. El argumento de z se representa por Arg(z)= α, y se expresa normalmente en radianes.

$$\alpha = \arctan\frac{b}{a}, \text{si} a \neq 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{si} a = 0, b > 0$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}, \text{si} a = 0, b < 0$$

Si el ángulo se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi)$ lo llamaremos argumento principal.

Comentario:

lol

Comentario:

forma exponencial: el desarrollo en serie de la exponencial es: $e^x = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$ si introducimos un número complejo en la exponencial: $e^{iy} = 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \ldots$
Si analizamos el valor de i^n en función de n, entonces vemos como la exponencial compleja queda ahora como: $e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!}\right) = \cos(y) + i\sin(y)$
$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ con $z = x + iy$

1.2 Analiticidad

Definición 1.2.1: Función armónica conjugada

Sea $u\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función armónica en un abierto de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diremos que $v\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una **función armónica conjugada** de u en $\mathcal{D}$ si v es armónica en $\mathcal{D}$ y satisfacen las condiciones de *Cauchy-Riemann*, (o equivalentemente la función $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en $\{x+iy \in \mathbb{C}\colon (x,y) \in \mathcal{D}\}$)

Comentario:

Una función armónica es aquella que satisface la ecuación de Laplace.

Teorema 1.2.1

Sea $u(x,y)\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ es una función armónica de $\mathcal{D}$ y consideramos v una región rectangular contenida en $\mathcal{D}$. Entonces existe una conjugada armónica de $u(x,y)$ en v.

1.3 Algunas funciones elementales

1.3.1. Función exponencial

Definición 1.3.1

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right)$$

Teorema 1.3.1

1. $e^z \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$
2. $|e^z| = e^{Re(z)} \qquad z \in \mathbb{C}$
3. $arg\left(e^z\right) = \{Im(z) + 2\pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}\} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$
4. $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}} \qquad z \in \mathbb{C}$
5. $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$
   $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi k i \qquad z \in \mathbb{C}$
6. $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad x \in \mathbb{R}$
   $\nexists \lim_{|z|\to\infty} e^z = \infty \qquad x \in \mathbb{R}$
7. e^x es entera (derivable en todo punto de $\mathbb{C}$) $(e^z)' = e^z$
8. $e^{z+\omega} = e^z \cdot e^\omega, \qquad z, w \in \mathbb{C}$
   $(e^z)^n = e^{nz}, \qquad n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$

Ejemplo 1.3.1 ($e^{iz} - e^{-iz} = 4i$)

$e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Longleftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} - 4i = 0 \Longleftrightarrow e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$

Si $\omega = e^{iz} \Longrightarrow \boxed{\omega^2 - 4i\omega - 1 = 0}$

$$w = \frac{4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = 2i \pm \sqrt{3} = 2 \pm \sqrt{3}i \Longrightarrow \boxed{e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i}$$

1.3.2. Función logarítmica

Definición 1.3.2

Se introduce por la necesidad de solucionar ecuaciones como la anterior.

$$x = e^y \iff y = \log x, \qquad x\, 0, y \in \mathbb{R}$$

Sea $z \in \mathbb{C} - 0$, definimos el logaritmo principal de z, y lo denotamos por $\log z$, como

$$\log z = \ln|z| + i \cdot Arg(z)$$

Vemos que $e^{\log z} = e^{\log|z| + Arg(z)} = e^{\ln|z|} e^{Arg(z)} = |z| e^{Arg(z)} = z$
El conjunto de todos los logaritmos de z será:

$$\log z = \{\ln|z| + i\,(Arg(z) + 2\pi k)\,, k \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 1.3.2

1. Si $z = x > 0 \Rightarrow \log z = \ln|z| + i \cdot Arg(z) = lnx$
   $\log z = \{\ln x + 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}\}$
2. Si $z = -x > 0 \Rightarrow \log z = \ln x - i \cdot (-\pi)$ (argumento de z)
   $\log z = \{\ln x + -(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}\}$
3. Si $z = ix, x > 0 \Rightarrow \log z = \ln x + i\dfrac{\pi}{2}$
   $\log z = \left\{\ln x + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

Comentario:

Retomando la ecuación del ejemplo anterior,

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i = \begin{cases} (2+\sqrt{3}i) \leftrightarrow iz = \log(2+\sqrt{3})i \leftrightarrow z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - iln(2+\sqrt{3}) \\ (2-\sqrt{3}i) \leftrightarrow iz = \log(2-\sqrt{3})i \leftrightarrow z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - iln(2-\sqrt{3}) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Teorema 1.3.2 Propiedades

1. Log z es holomorfa en $\mathbb{C} - [-\infty, 0] \implies$ de hecho, no es continua en $(-\infty, 0]$
2. $\log_{\theta_0} = z$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}, \arg(z) = \theta_0\}$
3. $e^{\log_{\theta_0} z} = z, \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \arg(z) = \theta_0$ y $\left(\log_{\theta_0}\right)' = \dfrac{1}{z}$
4. $\log_{\theta_0} e^z = z \qquad \forall z = x + iy, \theta_0 <= y < \theta_0 + 2\pi\ z = x + iy, e^z = e^x e^{iy} \implies \log_{\theta_0} e^z = z$
   cuando $y \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$

Definición 1.3.3

Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$, tomamos $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta_0 <= \theta = \theta_0 + 2\pi$ y entonces $\log_{\theta_0} z = \ln|z| + i\theta$

Si $\theta_0 = -\pi \implies \log_{\theta_0} z = Logz$
Si $\theta_0 = 0 \implies \log_0 z = \ln|z| + i\theta, \qquad 0 <= \theta < 2\pi$

1.3.3. Función potencia

Definición 1.3.4: Potencia de exponente arbitrario

Sea $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, tomamos por definición z^α, llamada potencia de exponente arbitrario como el conjunto de todos los valores dados por:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} \tag{1.1}$$

Dohde $\log z$ representa el conjunto de todos los logaritmos de z.

Definición 1.3.5: Función exponencial general

Sea $a \in \mathbb{C} \setminus 0$, tomaremos por definición a^z, llamada función exponencial general como el conjunto de todos los valores dados por:

$$a^z = \exp(z \log a) \tag{1.2}$$

Donde $\log a$ es el conjunto de todos los logaritmos de a.

Ejemplo 1.3.3

- $(-2)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log(-2)} = e^{\frac{1}{2}(\ln 2 + i(\pi + 2\pi k))}$, con $k \in \mathbb{Z}$ (tomando la primera definición, $z = -2$ y $\alpha = \frac{1}{2}$)
- $2^i = e^{i \log(2)} = e^{i(\ln 2 + 2\pi k i)} = e^{-2\pi k} e^{i \ln 2} = e^{-2\pi k(\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2))}$ con $k \in \mathbb{Z}$
- $(-1)^{\frac{1}{\pi}} = e^{\frac{1}{\pi}\log(-1)} = e^{\frac{1}{\pi}(\pi + 2\pi k)i} = e^i \cdot e^{2ki} = e^{(2k+1)i}$, con $k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 1.3.4 (Potencia de exponente entero)
Sea $\alpha \in \mathbb{Z}$, entonces $f(z) = z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\ln|z| + i(Arg(2) + 2\pi k))} = e^{\alpha \ln|z|} \cdot e^{i\alpha Arg(z)} \cdot e^{i\alpha 2\pi k} = |z|^\alpha \cdot e^{i\alpha Arg(2)}$ función univaluada

Comentario:
Cuando tomemos $k = 0$ en la función logarítmica, entonces obtenemos la denominada **rama principal**.

Ejemplo 1.3.5 (Función multiforme/aplicación multivaluada)
$f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ con $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ Tomando $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $-\pi \leqslant \theta < \pi$ La llamada rama principal de $z^{\frac{1}{2}}$ es $f_1(z) = e^{\frac{1}{2}(\ln(r) + i\theta)} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{\theta}{2}} i$ Otra rama con el ¿?. $\arg(z) = \pi$ viene dada por $-f_1(z) = f_2(z) = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{\theta + 2\pi}{2}} i$

Si $k = 2 \longrightarrow e^{\frac{1}{2}(\ln r + i(\theta + 4\pi))} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot e^{2\pi i} = f_1(z)$

1.3.4. Funciones trigonométricas

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ con $z \in \mathbb{C}$

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iZ}}{2i}$ con $z \in \mathbb{C}$

$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ excepto en $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = i\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i\dfrac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$ $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$ $\operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{\sin z}$

Hiperbólicas

$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ $\tanh z = \dfrac{\sinh}{\cosh} = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \dfrac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$

Teorema 1.3.3 Propiedades

1. $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
2. $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$
3. $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
4. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
5. $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi i, n \in \mathbb{Z}$
6. $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}i, nin\mathbb{Z}$
7. $\sinh(z) = -i\sin(iz)$
8. $\cosh(z) = \cos(iz)$

Comentario:

Comparación con el caso real:

- $e^z = \sum_{n=0} \dfrac{z^n}{n!}$
- $\sin z = \sum_{n=0} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh z = \sum_{n=0} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$
- $\sinh z = \sum_{n=0} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh z = \sum_{n=0} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$

Capítulo 2

Integración compleja

2.1 Preliminares topológicos

Definición 2.1.1: Entorno perforado

Llamamos **entorno perforado** de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ a un abierto de la forma $\{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$, con $\epsilon > 0$

Definición 2.1.2: Tipos de conjuntos

- Diremos que dos conjuntos A y B de $\mathbb{C}$ están **espaciados** si $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$
  Siendo $\overline{A}$ la clausura, la adherencia de A.
- Diremos que un conjunto del plano es **conexo** si no puede ser escrito como unión de dos subconjuntos no vaciós y separados.
- Diremos que un conjunto $P \in \mathbb{C}$ es **poligonalmente conexo** si cada par de puntos de P pueden ser unidos mediante una poligonal contenida en P. (una ponigonal es una unión finita de segmentos).
- Un conjunto $E \in \mathbb{C}$ es **estrellado** si existe un punto $a \in E$ tal que $[a, z] \subset E \quad \forall z \in E$
- Un conjunto $C \in \mathbb{C}$ es **convexo** si $[z, w] \subset C \quad \forall z, w \in C$ (cualquier segmento formado por puntos del conjunto está dentro del conjunto).

  Nota: Sea $U \in \mathbb{C}$ un conjunto abierto, entonces U es conexo si y sólo si es poligonalmente conexo.
- Llamamos **simplemente conexo** al conjunto $S \subset \mathbb{C}$ del cual cada curva cerrada simple (sin autointersecciones) en S puede contraerse dentro del conjunto hasta ser un punto (no tiene agujeros).

2.2 Integración sobre caminos

Definición 2.2.1: Curva

Llamamos **curva** a una aplicación continua $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ con $a < b$, tal que a un número real $t \in [a, b]$ le corresponde un número complejo $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones reales y continuas.

- La **traza o trayectoria** de la curva $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ será representado por γ^*
- Diremos que la curva es **cerrada** cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$

Definición 2.2.2: Camino

Una curva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ es **diferenciable** cuando γ es derivable en todo punto de $[a,b]$. Una curva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ es **suave** si es diferiencable (o de clase $C^1([a,b])$), si γ es derivable en $[a,b]$ y su derivada es continua. Llamamos **camino** a una curva suave a trozos (diferenciable con continuidad a trozos).

Comentario:

Los casos de curvas rectificables (aquellas curvas parametrizadas por $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$), con $t \in [a,b]$, para las que existe:

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2}\right\}$$

Con P en el conjunto de posibles particiones de $[a,b]$. En estos casos, la longitud de la curva se calcula como:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}\ dt$$

Definición 2.2.3: Integral compleja

Sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y f una función continua en $\gamma^* \in \mathbb{C}$, definimos la **integral conmpleja** de f a lo largo γ por:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t)\ dt$$

Nota: Cuando no se diga nada, se supondra que el sentido de recorrido sobre un camino cerrado será el antihorario.

Ejemplo 2.2.1 ($\int_\gamma \bar{z}\ dz$, donde γ^* es el segmento $[1+i, 2+4i]$)

$\gamma(t) = (1-t)(1+i) + t\cdot(2+4i) \Longrightarrow \gamma'(t) = -(1+i) + 2 + 4i = 1 + 3i \quad$ con $t \in [0,1]$.

Si separamos en parte real y imaginaria nos queda:
$\gamma(t) = 1+t+i(1+3t) \Longrightarrow \int_\gamma \bar{z}\ dz = \int_0^1 (1+t-i(1+3t))(1+3i)\ dt = \int_0^1 (1+t-i(1+3t)+3i+3it+3+9t)\ dt = \int_0^1 (4+10t+2i)\ dt = \left[(4+2i)t + 5t^2\right]_0^1 = 4 + 2i + 5 = 9 + 2i$

Ejemplo 2.2.2 ($\int_\gamma \bar{z}\ dz$, donde γ_2 es el trozo de parábola que une $1+i$ con $2+4i$)

$\gamma(t) = t + it^2 \Longrightarrow \gamma'(t) = 1 + 2it$ con $t \in [1,2] \Longrightarrow$
$f(\gamma_2(t)) = t - it^2 \Longrightarrow \int_{\gamma_2} \bar{z}\ dz = \int_1^2 (t - it^2)(1+2it)\ dt = 9 + \frac{7}{3}i$

Teorema 2.2.1 Propiedades básicas de integrabilidad

Sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino, y consideremos dos funciones continuas f y g continuas en γ^*, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\int_\gamma (f(z) + g(z))\ dz = \int_\gamma f(z)\ dz + \int_\gamma g(z)\ dz$
2. $\int_\gamma c f(z)\ dz = c\int_\gamma f(z)\ dz \quad \forall c \in \mathbb{C}$
3. $\int_{-\gamma} f(z)\ dz = -\int_\gamma f(z)\ dz$, donde $-\gamma$ es el camino opuesto a γ: $(-\gamma)(t) = \gamma(b + a - t)$ con $t \in [a,b]$
4. Si β es otro camino tal que $\gamma + \beta$ está definido (el punto inicial de β coincide con el punto final de γ) y la función f es también continua en β^* y $(\gamma+\beta)^*$, entonces:

$\int_{\beta+\gamma} f(z)\ dz = \int_\gamma f(z)\ dz + \int_\beta f(z)\ dz$

5. La integral sobre un camino es invariante bajo una parametrización.

Teorema 2.2.2 Propiedades

Sea $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino y f una función continua en γ^* entonces $|\int_\gamma f(z)\ dz| \leqslant M_f(\gamma)L(\gamma)$ siendo $M_f(\gamma) = \max\{|f(z)|, z \in \gamma^*\}$ y $L(\gamma)$ la longitud de γ.

Prueba

$$|\int_\gamma f(z)\ dz| = |\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ dt| \leqslant \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\ dt \leqslant M_f(\gamma)\int_a^b |\gamma'(t)|\ dt = M_f(\gamma)L(\gamma)$$

Ejemplo 2.2.3

Si $\gamma(t) = 2e^{it}$ para $\frac{-\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6}$ entonces $|\int_\gamma \frac{1}{z^3+1}\ dz| \leqslant \frac{2\pi}{21} \Longleftrightarrow \frac{1}{|z^3+1|} \leqslant \frac{1}{|z^3|+1} \leqslant \frac{1}{8-1} = \frac{1}{7} \quad \forall z \in \gamma^*$

Usando la propiedad $|z^3+1| \geqslant |z^3| - 1$.

Finalmente: $|\int_\gamma \frac{1}{z^3+1}\ dz| \leqslant \frac{1}{7}\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{21}$

Definición 2.2.4: Primitiva compleja de f

Sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto abierto U, diremos que $F\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una primitiva de f en U si F es holomorfa en U y $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in U$.

Ejemplo 2.2.4

Tomando la función $f : U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{1}{z}$, entonces $F(z) = Logz + C$ con $c \in \mathbb{C}$ es una primitiva de f en U.

Teorema 2.2.3 Extensión del 2º Teorema Fundamental del Cálculo

Supongamos que $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$ y que F es un aprimitiva de f en U. Si $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$ es un camino en U, entonces:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = F(z)|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}$$

En particular, bajo las hipótesis anteriories tenemos que $\int_\gamma f(z)\ dz = 0 \quad \forall\gamma$ camino cerrado en U.

Prueba

Definamos $G(t) = F(\gamma(t))$ con $t \in [a,b]$, que es una función continua en $[a,b] \Longrightarrow G'(t) = F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$ (excepto a la suma, una contidad finita de puntos).

Por el 2º TFC, tenemos que: $\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ dt = \int_a^b G(t)\ dt = G(b) - G(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Corolario 2.2.1
Supongamos que $f : U \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa en un conjunto abierto y conexo U y además $f'(z) = 0 \quad \forall z \in U$, entonces f es constante en U.

Prueba

Tomamos $F(z) = f(z)$: Como $f'(z) = 0$ es continua en U, tenemos que $0 = \int \gamma f'(z)\, dz = f(z_2) - f(z_1) \quad \forall z_1, z_2 \in U$. γ une z_1 y $z_2 \Rightarrow f$ es constante.

Ejemplo 2.2.5
Si γ representa cualquier camino que conecte los puntos 0 y $1+i$, por el teorema anterior:
$\int_\gamma z^2\, dz = \frac{2^3}{3}|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{2}{3}(-1+i)$

Ejemplo 2.2.6
$\int_\gamma P(z)\, dz = 0$ cuando γ es un camino cerrado y P es un polinomio.

Teorema 2.2.4 Independencia del camino
Supongamos que $f : U \to \mathbb{C}$ es una función continua en un conjunto abierto y conexo $U \subset \mathbb{C}$, las siguientes propiedades son equivalentes:

- $\int_\gamma f(z)\, dz$ es independiente del camino (por dos puntos prefijados).
- $\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \quad \forall \gamma$ camino cerrado en U.
- f admite una primitiva en U.

Comentario:

Una propiedad importante de las integrales de línea para el caso de campos vectoriales es la vinculada con los llamados **campos conservativos** (los que admiten función potencial). El principio físico que hay detrás de estos campos es que el trabajo realizado cuando una partícula recorre la trayectoria de la curva sometida al campo de fuerzas es igual del potencial de campo entre los extremos de la trayectoria.

En el caso de la integral compleja, el valor depende generalmente del camino elegido, sin embargo, el teorema anterior afirma que la independencia del camino se puede caracterizar a través de la existencia de una primitiva del integrando continuo f en el conjunto U, esto es, la existencia de una función F holomorfa en U con $F' = f(z) \ \forall z \in U$. Además, sabemos que $F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = f(z)$.
Por tanto, $\overline{F'(z)} = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = U(x,y) - iU(x,y)$ y deducimos que $\Delta U = \bar{f}, \quad$ con $\bar{f} = (u, -v)$

Teorema 2.2.5 Teoremas de Cauchy para determinados tipos de regiones

Teorema de Cauchy para triángulos

Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un conjunto abierto $U \in \mathbb{C}$, tenemos que para cualquier triángulo $\Delta(\Delta = \mathrm{int}(\Delta)) \cup F_r(\Delta)$ contenido en U:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \qquad \text{donde } \gamma = F_r(\Delta) \tag{2.1}$$

Teorema de Cauchy para regiones estrelladas

Consideremos $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un conjunto estrellado y abierto de $U \subset \mathbb{C}$, entonces:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0 \tag{2.2}$$

para cualquier camino cerrado γ contenido en U.

Teorema local de Cauchy

Sea $f : \mathcal{D}(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un disco abierto $\mathcal{D}(z_0, r)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, entonces:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0 \tag{2.3}$$

para todo camino γcerrado en $\mathcal{D}(z_0, r)$
Nota: *No siempre la integral sobre un camino cerrado es cero, por ejemplo:* $\int_{(0,1)} \frac{1}{z}\ dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\ dt = 2\pi i \neq 0$ *ya que el disco no es estrellado porque tiene un agujero en el origen (no es simplemente conexo).*

Teorema de Cauchy extendido para triánglos

Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función contitua en un conjunto abierto $U \in \mathbb{C}$, y holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$ para algún $z_0 \in U$. Para cualquier triángulo $\Delta(\Delta = \text{int}(\Delta)) \cup F_r(\Delta)$ contenido en U:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0 \qquad \text{donde } \gamma = F_r(\Delta) \tag{2.4}$$

Teorema de Cauchy para conjuntos convexos

Sea U un conjunto convexo y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en tono U y holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$ para algún $z_0 \in U$, entonces:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0$$

para cualquier γ camino cerrado en U. ***Nota:****Puede ser holomorfa también en* z_0 *de forma más general.*

Corolario 2.2.2

Sea U un conjunto convexo y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en U entonces:

$F(z) = \int_{\gamma_z} f(s)\ ds$ con $z \in U$ es holomorfa en U y $F'(z) = f(z)\ \forall z \in U$
donde γ_z es un camino en U que une z_0 con z, siendo z_0 un punto prefijado de U.

Teorema 2.2.6 Fórmula integral de Cauchy para el cálculo - **F.I.C.**

Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un conjunto abierto U que contiene un disco $\overline{\mathcal{D}}(z_0, r)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ entonces para cualquier punto $z \in \mathcal{D}(z_0, r)$ se tiene que:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z}\ dw} \qquad \text{donde } \ C = C(z_0, z) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| = r\} \tag{2.5}$$

Corolario 2.2.3

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y $C = C(z, r) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| = r\}$ entonces:

$$\int_C \frac{dw}{w - z} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } z \text{ es interior a } C \ (|z - z_0| < r) \\ 0 & \text{si } z \text{ es exterior a } C \ (|z - z_0| > r) \end{cases}$$

Nota: *la variable de integración es distinta al punto prefijado: $z \neq w$*

Ejemplo 2.2.7 ($\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z}\, dz$)

Observamos que $f(z) = e^z$ es entera y holomorfa siempre Empezamos reescribiendo con w como variable y tomamos para el FIC $z = 0$, $r = 2$ y $z_0 = 0$:

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z}\, dz = \int_{C(0,2)} \frac{e^w}{w}\, dw = 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

Ejemplo 2.2.8 ($\int_{C(0,1000000)} \frac{e^z}{z}\, dz$)

El radio no importa para nuestra fórmula por lo que podemos asumir el mismo resultado que en el anterior:

$$\int_{C(0,1000000)} \frac{e^z}{z}\, dz = 2\pi i$$

Ejemplo 2.2.9 ($\int_{(0,2)} \frac{e^z}{1 - z}\, dz$)

Como $f(w) = e^w$ es entera: $\int_{(0,2)} \frac{e^z}{1-z}\, dz = \int_{(0,2)} \frac{e^w}{1-w}\, dw = -\int_{C(0,2)} \frac{e^w}{w-1}\, dw = -(2\pi i f(1)) = -2\pi i e$

Ejemplo 2.2.10 (Sea $0 < a < b$: $\int_{C(a,b)} \frac{e^z}{z + ai}\, dz$)

Como $f(w) = e^w$ es entera: $\int_{C(a,b)} \frac{e^z}{z + ai}\, dz = \int_{C(a,b)} \frac{e^w}{w + ai}\, dw = 2\pi i f(-ai) = 2\pi i e^{-ai}$

Ejemplo 2.2.11 ($\int_{C(a,a)} \frac{z}{z^4 - 1}\, dz$ con $a > 1$)

$$\int_{C(a,a)} \frac{z}{z^4 - 1}\, dz = \int_{C(a,a)} \frac{z}{(z^2+1)(z^2-1)}\, dz = \int_{C(a,a)} \frac{z}{(z^2+1)(z+1)(z-1)}\, dz = \mathcal{I}$$

Por lo que tomamos $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z+1)}$.

Si ploteamos las raíces, vemos como todas ellas quedan fuera del disco, vamos a tomar a un abierto que no contenga a las raíces pero sí a la función para poder aplicar el FIC.

Sea U abierto que contiene al disco $D(a, a)$ y deja fuera a los puntos i, $-i$, $-1 \Rightarrow f(z)$ es holomorfa en U.

$\mathcal{I} = 2\pi i f(1) = 2\pi i \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2} i}$

Ejemplo 2.2.12 ($\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,b)} \frac{e^z}{z^2+a^2}\, dz$ con $0 < a < b$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,b)} \frac{e^z}{z^2+a^2}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,b)} \frac{e^z}{(z+ai)(z-ai)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,b)} e^z\left(\frac{A}{z+ai}+\frac{B}{z-ai}\right) dz = \mathcal{I}$$

Pero ahora vemos como las raíces sí quedan dentro del círculo por lo que no podemos seguir el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior. Vamos a tener que descomponer en fracciones simples para poder trabajar:

$$\left(\frac{A}{z+ai}+\frac{B}{z-ai}\right) = \left(\frac{A(z-ai)+B(z+ai)}{(z+ai)(z-ai)}\right) = \left(\frac{(A+B)z+(B-A)ai}{(z+ai)(z-ai)}\right)$$

Por lo que sabemos que $A+B = 0 \iff A = -B$ y $(B-A)ai = 1 \iff 2Bai = 1 \iff \boxed{B = \frac{1}{2ai} \iff A = -\frac{1}{2ai}}$

$\mathcal{I} = \frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,b)} \frac{e^z}{z-ai}\, dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,b)} \frac{e^z}{z+ai}\, dz\right) = \frac{1}{2ai}\left(f(ai) - f(-ai)\right) = \frac{1}{2ai}(e^{ai} - e^{-ai}) = \frac{1}{a} = \sin(a) = \boxed{\frac{\sin(a)}{a}}$

Ya que $f(z) = e^z$ entera.

Definición 2.2.5: Índice de un camino cerrado

Sea γ un camino cerrado y $z_0 \in \gamma^*$, se define el *índice de* z_0 respecto del camino γ y se denota por $n(\gamma, z_0)$:

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

Geométricamente, $n(\gamma, z_0)$ representa el número de vueltas completas en sentido antihorario que da un camino cerrado γ alrededor de z_0.

Comentario:

Para justificar la afirmación anterior, observemos que si γ_1 es una circunferencia de centro z_0 y radio $r > 0$ recorrida n veces en sentido antihorario, entonces

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it} \qquad \text{con } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi n$$

$$\implies n(\gamma_1, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi n} \frac{1}{z_0 + re^{it} - z_0} rie^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi n} t\, dt = \frac{2\pi n}{2\pi} = n$$

Y además si $z_1 \notin \overline{D}(z_0, r) \implies n(\gamma_1, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-z_1} = 0$ siempre que $\frac{1}{z-z_1}$ sea holomorfa en $D(z_0, r)$

Teorema 2.2.7 Propiedades del índice de un camino cerrado

Sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino cerrado y $z_0 \notin \gamma^*$, si se cumple que:

1. El índice $n(\gamma, z_0)$ es un número entero.
2. $n(\gamma, z_0) = n(\gamma - z_0, 0)$
3. $n(-\gamma, z_0) = -n(\gamma, z_0)$
4. La funicoń $z \to n(\gamma, z)$, $z \notin \gamma^*$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$
5. $n(\gamma, z) = 0$ $\forall z$ en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$

Teorema 2.2.8

Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un conjunto abierto U y sea γ un camino cerrado en U tal que $n(\gamma, z) = 0\ \forall z \in \mathbb{C} \notin U$, entonces:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0$$

Comentario:

Prueba:

Sea γ un camino cerrado en U tal que $n(\gamma, z) \implies \forall z \in \mathbb{C} \setminus U$ Fijemos un $z_0 \in U \setminus \gamma^*$, si tomamos $g(w) = (w - z_0)f(w)\ \forall w \in U$, entonces g es holomorfa en U y por la *fórmula integral de Cauchy*, tenemos que:

$$n(\gamma, z)g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(w)}{w - z}\ dw$$

En particular, para $z = z_0$ tenemos que:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\ dw \implies \boxed{\int_\gamma f(w)\ dw = 0}$$

Teorema 2.2.9

Sea γ un camino cerrado en un conjunto abierto $U \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0$$

para cada función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en U. Si y solo si $n(\gamma, z) = 0\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus U$.

Comentario:

Prueba:

Sea γ un camino cerrado en U y supongamos que existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ tal que $n(\gamma, z_0) \neq 0$, entonces

$$0 \neq n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Pero esto es un absurdo ya que la función $g(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$, con $z \in U$ es holomorfa en U y por hipótesis se debería cumplir $\int_\gamma g(z)\ dz = 0$

Teorema 2.2.10 Fórmula Integral de Cauchy

Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomofa en un abierto U y sea γ un camino cerrado en U tal que $n(\gamma, z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus U$, entonces:

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\ dw \quad \forall z \in U \setminus \gamma^*$$

$$n(\gamma, z)f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\ dw \quad \forall z \in U \setminus \gamma^*$$

Ejemplo 2.2.13 (Sea γ el camino cerrado que vemos en la figura calcular $\int_\gamma \frac{e^{i(z-1)}}{z}\ dz$ con $z_2 = 0$)

Sabemos que $n(\gamma, 0) = 1 \implies$ y que $f(z) = e^{i(z-1)}$ $\int_\gamma \frac{e^{i(z-1)}}{z}\ dz = 2\pi i n(\gamma, 0)f(0) = 2\pi i f(0) = 2\pi i e^{-1}$

Teorema 2.2.11 Principio de Reflexión de Schwarz

Sea f una función holomorfa en el semiplano superior abierto, $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ Im(z) > 0\}$ y continua en $\mathbb{C}^+ U \cup \mathbb{R}$. Supongamos que $Im(f(z)) = 0\ \forall z \in \mathbb{R}$, entonces f puede ser extendedia de forma holomorfa a $\mathbb{C}$ a través de

$$f^*(z) = \begin{cases} f(z) \text{ si } z \in \mathbb{C}^+ \cap \mathbb{R} \\ \overline{f(z)} \text{ si } z \notin \mathbb{C}^+ \cap \mathbb{R} \end{cases}$$

Es decir, si tenemos una función acotada y derivable entonces es constante.

Corolario 2.2.4 Estimación de Cauchy

Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en un conjunto abierto $U \supset D(z_0, R)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Para cada $0 < r < R$, consideremos la notación $M_f(r) = max\,\{|f(z)||z - z_0| = r\}$ entonces

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{r^n} M_f(r), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Comentario:

Prueba:
Aplicamos la fórmula integral de Cauchy para las derivadas

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\ dz \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

siendo $c_r = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| = r\}$ Ahora, tomamos módulos, llegamos a

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi} |\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}|\ dz = \frac{n!}{2\pi} \frac{M_f(r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!}{r^n} M_f(r)$$

Teorema 2.2.12 Liouville

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera y acotada, entonces f es constante.

Comentario:

Prueba:
Dado que f es una función acotada en $\mathbb{C} \implies \exists M > 0$ tal que $|f(z)| < M\ \forall z \in \mathbb{C}$. Así, por la estimación de Cauchy para la primera derivada aplicada a cualquier valor del parámetro $r > 0$, se deduce que $|f'(z)| \leqslant {}^{M}\!/_{r}$, $z \in \mathbb{C}$ Dado que M no depende de r, se deduce que $f'(z) = 0\ \forall z \in \mathbb{C} \implies f(z) = cte$

Teorema 2.2.13 Fundamental del Álgebra

Todo polinomio $p(z)$ no constante tiene al menos una raíz.
Donde $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$

Comentario:

Prueba: Por Reducción al Absurdo, supongamos que $p(z)$ no tiene raíces.
Entonces $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ es una función entera (holomorfa en $\mathbb{C}$). Además, como $|p(z)| \to \infty$ cuando $|z| \to \infty$
$\implies \exists M > 0 \colon |p(z)| > 1 \forall z \colon |z| > M \implies |f(z)| = \dfrac{1}{|p(z)|} < 1 \forall z \colon |z| > M \implies$ f acotada en $\mathbb{C}$
Y por el teorema de Liouville, $f \equiv$ cte

Corolario 2.2.5

Sea $p(z)$ un polinomio de grado $n \geqslant 1$, entonces $p(z)$ tiene n raíces complejas.

Teorema 2.2.14 Gauss-Lucas

Sea $p(z)$ un polinomio no constante con coeficientes complejos, los ceros de $p'(z)$ están en la clausura convexa de los ceros de $p(z)$.

(Una clausura convexa de laso raíces es el conjunto convexo más pequeño que incluye a las raíces).

...

Corolario 2.2.6

Sea f analítica no constante en un abierto conexo ya acotado U, y continua en la frontera de U. Entonces $u = \text{Re } f$ y $v = \text{Im } f$ verifican ambas el principio del máximo y del mínimo en U.

Teorema 2.2.15 Lema de Schwarz

Sea $f : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en $D(0,1)$. Supongamos que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leqslant 1$ $\forall z \in D(0,1)$, entonces $|f(z)| \leqslant |z|$ y $|f'(0)| \leqslant 1$.

Además, si existe $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ o se cumple que $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = az$ $\forall z \in D(0,1)$ para algún $a \in \mathbb{C}$ tal que $|a| = 1$

Definición 2.2.6: Núcleo de Poisson

Llamaremos *núcleo de Poisson* a la función:

$$P_r(x) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos x}$$

siendo $0 \leqslant r < R$ y $x \in \mathbb{R}$

Definición 2.2.7: Núcleo de Cauchy

Llamaremos *núcleo de Cauchy* a la función:

$$Q_z(t) = \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z}$$

siendo $z \in D(0,R)$ y $t \in \mathbb{R}$

Teorema 2.2.16

Sea $R > 0$ y $z = re^{i\theta} \in D(0,R)$ para algún $0 \leqslant r < R$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$, entonces:

$$\text{Re } Q_z(t) = P_r(\theta - t) = \frac{R^2 - r^2}{|Re^{it} - z|^2}$$

Definición 2.2.8: Fórmula Integral de Poisson

Sea $f(z)$ analítica en $D(z_0, R)$ y continua en $\overline{D}(z_0, R)$, para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Para cada $z = z_0 + re^{i\theta} \in D(z_0, R)$, $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(z_0 + Re^{it})\, dt$$

Además, si $u = \operatorname{Re} f$, entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) u(z_0 + Re^{it})\, dt$$

Capítulo 3

Series de Potencias

Si f es una función holomorfa, podemos expresar (almenos localmente) como un polinomio de grado infinito.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\inf} a_n (z - z_0)^n$$

3.1 Notación

La serie $\sum\limits_{n} z_n$ es la sucesión

Definición 3.1.1: Convergencia de Series

- Una sucesión $\{z_n\} \in \mathbb{C}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$
- Una serie $\sum_{n=1} z_n$ converge a $z \in \mathbb{C}$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_1 + \cdots + z_n - z| < \varepsilon$

  Como $|z_n - z| \in \mathbb{R}$, es equivalente la covergencia de sucesiones en números reales que en números complejos.
- Una serie $\sum_{n=1} z_n$ converge absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$

Comentario:

Si $z_n = x_n + i y_n$, entonces $\sum\limits_{n=1} z_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1} x_n$ y $\sum\limits_{n=1} y_n$ converge y en ese caso, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$
Convergencia absoluta $\Longrightarrow$ Convergencia.

Comentario:

Recordatorio: Seriees de números positivos

Sea $\sum\limits_{n=1} \rho_n$, $\rho_n \geqslant 0$. Sean $A = \text{limsup}\,(\rho_n)^{1/n}$ y $B = \text{limsup}\left(\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right)^{1/n}$ Entonces:

- Si $A < 1$ ó $B < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$
- Si $A > 1$ ó $B > 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$

$\text{limsup}(x_n) = \lim\sup\{x_k : k \geqslant n\}$ Si $\exists \lim x_n$, $\text{lumsup} x_n = \lim x_n$ $\quad$ $\text{limsup}(x_n y_n) = \lim x_n \text{limsup} y_n$ si $\exists \lim x_n$

Ejemplo 3.1.1 ($\sum_{n=1} n(1+i)^n(2i)^{-n}$)

$a_n = n(1+i)^n(2i)^{-n} \Longrightarrow |a_n| = n|1+i|^n|2i|^{-n} = \frac{n(\sqrt{2})^n}{2^n}$

$\sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{n}\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \operatorname{limsup}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Longrightarrow$ La serie converge absolutamente.

En general, si la sucesión es convergente, podemos pasar una sucesión de números naturales a reales para aplicar los criterios de los reales.

Ejemplo 3.1.2 ($\sum_{n=1} n^2 2^n(3+i)^{-n}$)

$a_n = n^2 2^n(3+i)^{-n} \Longrightarrow |a_n| = \frac{n^2 \cdot 2^n}{(\sqrt{10})^n}$

$\frac{a_{n+1}}{|a_n|} = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}{(\sqrt{10})^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{10})^n}{n^2 \cdot 2^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{2}{\sqrt{10}} \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{10}} < 1$

Ejemplo 3.1.3 (Serie geométrica: $\sum_{n \geqslant 0} z^n$)

$a_n = z^n \Longrightarrow |a_n| = |z|^n \qquad \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = 1 + z + \cdots + z_n$

Si $z = 1$, la serie no converge, si $z \neq 1$: $\sum_{n \geqslant 0} z^n = \{1 + \cdots + z_n\}_{n \in \mathbb{N} U \{0\}} = \left\{\frac{z^{n+1}-}{z-1}\right\}$

- Si $|z| < 1, z^{n+1} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$
- Si $|z| \geqslant 1, z^{n+1}$ no converge $\Longrightarrow$ La serie no converge.

Definición 3.1.2: Series de potencias

Sean $z_0 \in \mathbb{C}, \{a_n\} \in \mathbb{C}$. La serie de potencias de coeficientes $\{a_n\}$ y otro z_0 es la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n$

Decimos que la serie converge (puntualmente) en $S \subseteq \mathbb{C}$ si:

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n (w_0 - z_0)^n \text{ converge } \forall w_0 \in S \tag{3.1}$$

Decimos que la serie converge uniformemente a $S \subseteq \mathbb{C}$ si:

$$\forall z > 0 \exists N \in \mathbb{N} \colon n \geqslant N \Longrightarrow |\sum_{k=1}^{n} a_k (w_0 - z_0)^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k (w_0 - z_0)^k| < \varepsilon \quad \forall w_0 \in S \tag{3.2}$$

Definición 3.1.3: Teorema de Abel

Sea $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ y sea $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que la serie converge puntualmente en z_1. Si $r = |z_0 - z_1|$, entonces:

- La serie converge **absolutamente** en cada punto de $D(z_0, r)$
- La serie converge **uniformemente** en cada compacto de $D(z_0, r)$

Definición 3.1.4: Radio de convergencia de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ una serie de potencias, definimos el radio de convergencia de la serie como:

$$r = \left(\limsup(|a_n|^{1/n})\right)^{-1}$$

Estudiando $(+\infty)^{-1} = 0, \quad 0^{-1} = +\infty$

Teorema 3.1.1 Teorema de convergencia de las series de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ y sea $r = \left(\limsup|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$, entonces:

- La serie converge absolutamente en $D(z_0, r)$
- Converge uniformemente en cada compacto de $D(z_0, r)$, y
- No converge en ningún punto $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, r)$

Comentario:

Sea $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ una serie de potencias.

Si $\exists \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, entonces el radio de convergencia de la serie es $r = \left(\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)^{-1}$