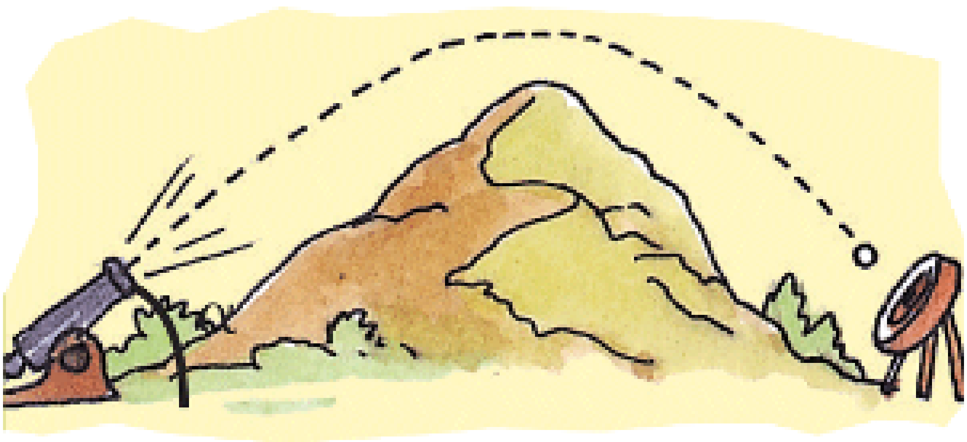
Mecánica Newtoniana y Relatividad
Curso 2023 - 2024

Práctica I

Estudio del movimiento en rotación relativa: el tiro parabólico



Inés Rufete Pastor
Grupo 1

Índice

1. Introducción

En esta práctica vamos a estudiar el movimiento del tiro parabólico puro respecto a dos sistemas de referencia: uno fijo y otro que rota con la Tierra. Además veremos cuál es el efecto de la curvatura de la tierra en este tipo de movimiento a velocidades muy elevadas. Esto lo haremos mediante el uso de dos códigos en lenguaje Phyton que adjuntaremos a esta práctica.

2. Marco teórico

Consideramos dos sistemas de referencia: uno que está fijo al cuerpo (al que denotaremos con ') y otro que rota con la Tierra. Ambos sistemas compartirán origen de coordenadas y en estos, el eje de rotación de la Tierra es el eje z. Si calculamos la segunda derivada de la posición $\vec{r}$ veremos que para el sistema ligado a la Tierra el cuerpo experimenta una aceleración donde encontramos varias componentes:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{r} \times \vec{\alpha} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2\vec{v} \times \vec{\omega} \tag{1}$$

donde $\vec{\alpha}$ es la aceleración de rotación de la Tierra y $\vec{\omega} = (\omega_x, 0, \omega_y) = \omega(-cos(\phi), 0, sin(\phi))$ es la velocidad angular de la misma. Además destacamos dos términos de (1). $a_{cen} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}$ representa la fuerza centrípeta, que es componente de la fuerza ligada al movimiento que pasa por una trayectoria curvilínea y que está dirigida hacia el centro de curvatura. Y $2\vec{a_{co}}\vec{v} \times \vec{\omega}$ representa la fuerza de Coriolis, causada por un movimiento en un sistema de referencia en rotación.
En el caso de la rotación terrestre, $\vec{\alpha} = 0\ \frac{m}{s^2}$ y $\vec{a'} = \vec{g}$. De manera que podemos escribir (1) de la siguiente forma:

$$\vec{a} = \vec{g} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2\vec{v} \times \vec{\omega} \tag{2}$$

El término centrípeto solo depende de la latitud Φ:

$$/(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}/ = 0{,}3373 \cos(\Phi) \tag{3}$$

En la expresión de la fuerza de Coriolis está contenido el siguiente producto vectorial:

$$\vec{v} \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & 0 & \omega_y \end{vmatrix} = 2v_y\omega_z\vec{i} + 2(v_z\omega_x - v_x\omega_z)\vec{j} - 2v_y\omega_x\vec{k} \tag{4}$$

Por último, los datos usados para los cálculos de las cuestiones planteadas son:

- Masa del proyectil: 1 Kg
- Aceleración: $vectg = 9'8\frac{m}{s^2}$
- Velocidad angular $|\vec{\omega}| = 7{,}272e - 05\frac{rad}{s}$
- Radio terrestre $R_T = 6378000m$

3. Cuestiones

A continuación vamos a razonar cada pregunta planteada en las diferentes cuestiones. Llegando a las conclusiones corresondientes en cada apartado.

3.1. Cuestión 1

La aceleración se ha modificado con dos términos, fuerza centrípeta y fuerza de Coriolis. ¿Sucede lo mismo con proyectiles de alta velocidad ($v > 700m/s$) *y de baja* ($v < 350m/s$)*?(Prueba a anular una u otra y ver cómo sería el movimiento y los errores.)*

En primer lugar, vamos a ver como afectan estas componentes al movimiento parabólico mediante las siguientes tablas. En primer lugar estudiamos los proyectiles con alta velocidad de disparo, v = 700 m/s.

Coriolis ($\frac{m}{s^2}$)	Centrípeta ($\frac{m}{s^2}$)	Tiempo final (s)	Posición final
0.0258	0.000073	23857	$x_f = -43346{,}4$ $y_f = 178{,}4$ $z_f = -0{,}8$
0	0.0258	23857	$x_f = -43346{,}8$ $y_f = 5{,}3$ $z_f = -0{,}3$
0.000073	0	23809	$x_f = -43301{,}6$ $y_f = 177{,}7$ $z_f = -0{,}97$

Cuadro 1: Datos teniendo en cuenta la rotación (v = 700 m/s).

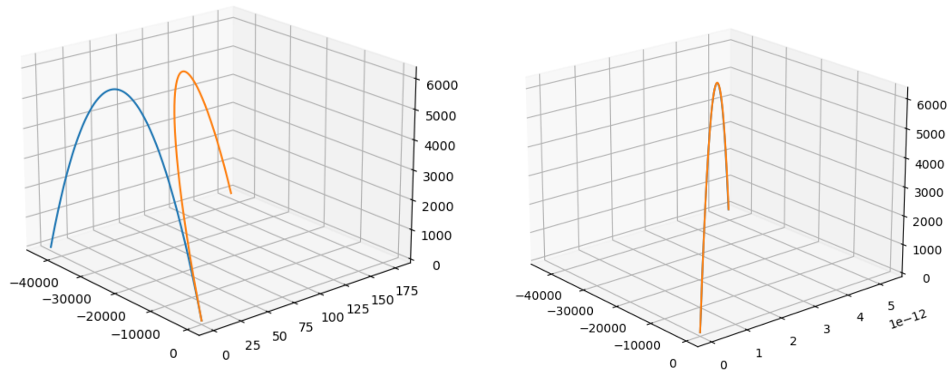
Coriolis ($\frac{m}{s^2}$)	Centrípeta ($\frac{m}{s^2}$)	Tiempo final (s)	Posición final	Error (m)
0.0258	0.000073	23809	$x_f = -43302{,}05$ $y_f = 5{,}3$ $z_f = -0{,}45$	187.8
0	0.0258	23809	$x_f = -43302{,}05$ $y_f = 5{,}3$ $z_f = -0{,}45$	44.75
0.000073	0	23809	$x_f = -43302{,}00$ $y_f = 5{,}3$ $z_f = -0{,}45$	177.7

Cuadro 2: Datos considerando un tiro puro (v = 700 m/s).

En la primera tabla reflejamos los valores de la aceleración centrípeta y de coriolis. Junto a estos datos tenemos el tiempo final y las posiciones finales en los tres ejes del proyectil que se ha lanzado considerando un tiro parabólico puro, es decir, sin tener en cuenta la rotación terrestre. En la segunda tabla reflejamos los mismos valores pero esta vez considerando el tiro parabólico con la rotación. Añadiendo además el error que se comete al no considerar la rotación en la tabla 1.

Como podemos ver, el error cometido al despreciar la aceleración centrípeta es menor que el cometido al despreciar la de coriolis. Por tanto esta última es más determinante en el movimiento parabólico que estamos estudiando que la centrípeta.

A continuación representamos el tiro parabólico puro mediante la gráfica azul y el tiro parabólico teniendo en cuenta la rotación terrestre mediante la gráfica naranja.



(a) Sin centrípeta (b) Sin coriolis

Figura 1: Comparación entre tiro parabólico puro y con rotación (v = 700 m/s).

Gráficamente llegamos al mismo resultado que analíticamente, el caso sin aceleracion de coriolis representa una trayectoria muy similar al caso del tiro parabólico sin rotación.

Ahora estudiamos el tiro parabólico con menor velocidad de disparo, v = 350 m/s.

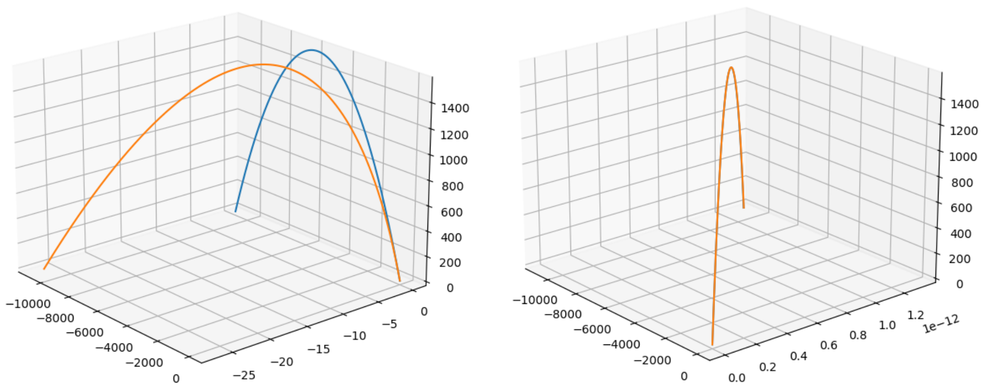
Coriolis ($\frac{m}{s^2}$)	Centrípeta ($\frac{m}{s^2}$)	Tiempo final (s)	Posición final
0.000073	0.016	11915	$x_f = -10825{,}7$ $y_f = -27{,}1$ $z_f = -0{,}3$
0	0.016	11915	$x_f = -10825{,}7$ $y_f = 1{,}3$ $z_f = -0{,}2$
0.000073	0	11905	$x_f = -10826$ $y_f = -27{,}1$ $z_f = -0{,}4$

Cuadro 3: Datos teniendo en cuenta la rotación (v = 350 m/s).

Coriolis ($\frac{m}{s^2}$)	Centrípeta ($\frac{m}{s^2}$)	Tiempo final (s)	Posición final	Error (m)
0.000073	0.016	11905	$x_f = -10826$ $y_f = 1{,}3$ $z_f = -0{,}4$	27.1
0	0.016	11905	$x_f = -10825{,}7$ $y_f = 1{,}3$ $z_f = -0{,}4$	0.23
0.000073	0	11905	$x_f = -10826$ $y_f = 1{,}3$ $z_f = -0{,}4$	27.1

Cuadro 4: Datos considerando un tiro puro (v = 350 m/s).

Representamos de nuevo el tiro parabólico puro mediante la gráfica azul y el tiro parabólico teniendo en cuenta la rotación terrestre mediante la gráfica naranja para velocidades bajas.



(a) Sin centrípeta

(b) Sin coriolis

Figura 2: Comparación entre tiro parabólico puro y con rotación (v = 350 m/s).

Llegamos a los mismos resultado que con altas velocidades, la aceleración de Coriolis tiene mayor importancia en el movimiento que la centrípeta.

Comparando los resultados obtenidos con las distintas velocidades, 700 m/s y 350 m/s podemos decir que a bajas velocidades se comete menos error, tenemos tiros mas exactos. Por otra parte, como es natural, la posición final es menor que con mayor velocidad.

3.2. Cuestión 2

En esta cuestión estudiaremos de forma direccional el lanzamiento. ¿La dirección afecta al error del tiro? Intenta razonar cuál es el origen de esta diferencia si la hay o si no la hay por qué no se debería producir.

Haremos el estudio tomando $\Phi = 40$, mediante el código representamos el error del tiro en función del ángulo del plano:

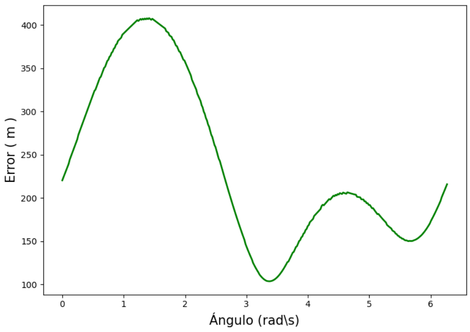


Figura 3: Relación del ángulo del plano con el error.

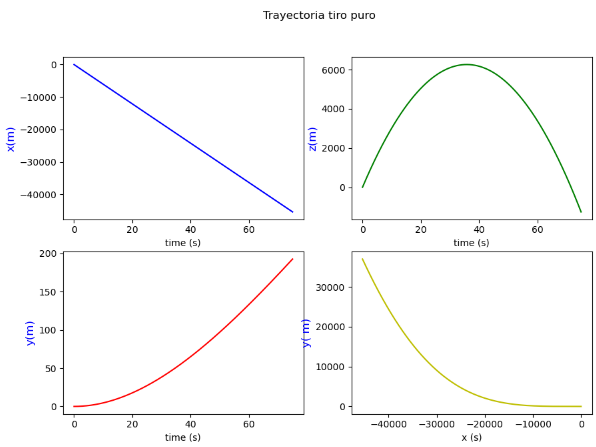
En la gráfica que obtenemos mediante el código de Python, posicionando el puntero encima del punto máximo y mínimo obtenemos los siguentes resultados(los valores son aproximados, porque al ser tomados de esta manera no tenemos la certeza de que sean exactos) :

- Valor máximo: 1.3º con un error de 408.5 m.
- Valor mínimo: 3.4º con un error de 104.0 m.

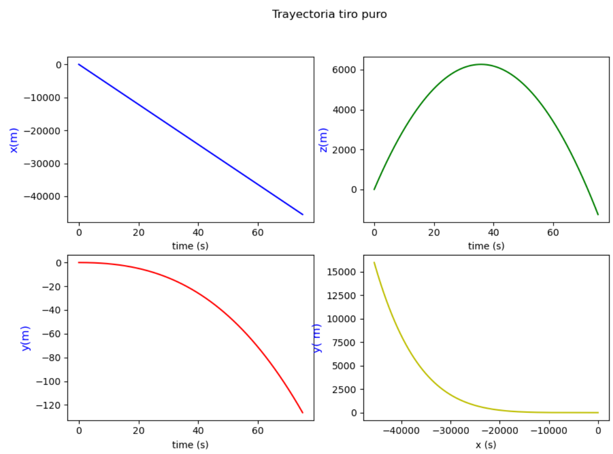
El valor del error mínimo se toma en aproximadamente π, que es la direccion del tiro este. Por tanto la componente de la fuerza de coriolis es mínima y por ello el error es mínimo. De nuevo concluimos que la componente asociada a la fuerza de coriolis es la de mayor importancia.

3.3. Cuestión 3

Modificar la latitud y analiza cómo afecta. Si nos desplazamos al hemisferio Sur (latitudes negativas) ¿se observa algún cambio en las curvas?

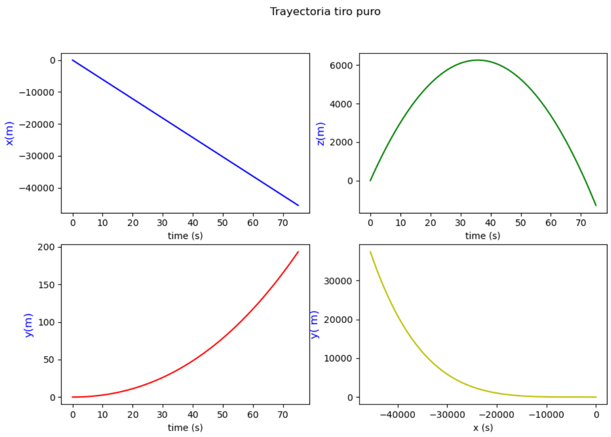


(a) $\Phi = +40$

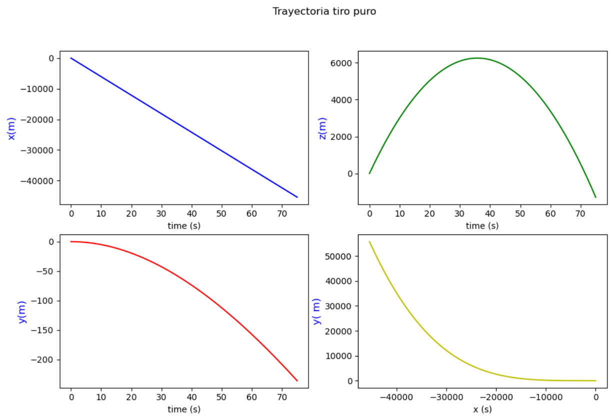


(b) $\Phi = -40$

Figura 4: ± 40



(a) $\Phi = +120$

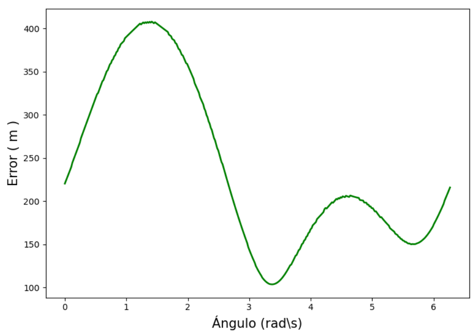


(b) $\Phi = -120$

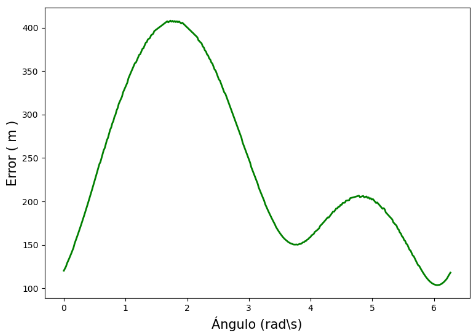
Figura 5: ± 120

Vemos que inicialmente apuntamos al Norte ($+\Phi$) la trayectoria se curva hacia la derecha respecto la dirección inicial. en cambio, cuando apuntamos al sur ($-\Phi$), se curva a la izquierda. Esto se debe a que la rotación de la tierra es de Oeste a Este.

A continuación vamos a representar el error en función del ángulo para las diferentes latitudes que acabamos de estudiar. En el apartado anterior (cuestión 2) el error está calculado con $\Phi = 40$, sin embargo lo graficaremos de nuevo para poder comparar las gráficas con claridad.

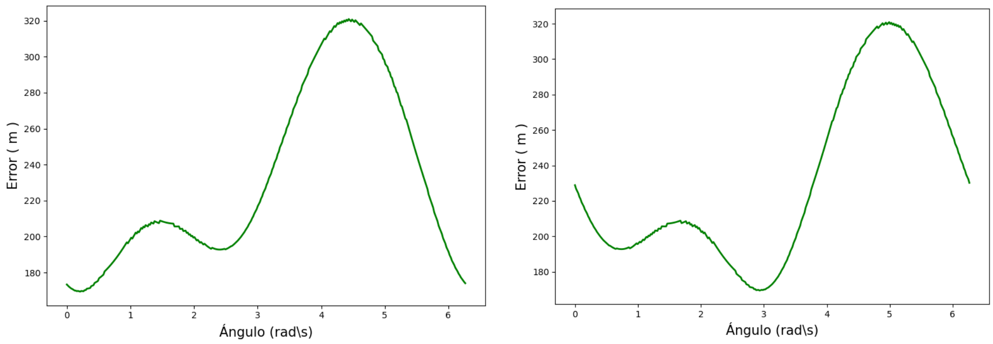


(a) Error con $\Phi = +40$



(b) Error con $\Phi = -40$

Figura 6: Error con diferentes ángulos de latitud.



(a) Error con $\Phi = +120$ (b) Error con $\Phi = -120$

Figura 7: Error con diferentes ángulos de latitud.

Los valores mínimos del error cambian, en primer lugar con +40º(primer cuadrante) y -40º(segundo cuadrante) debido a que para estos ángulos el seno y el coseno tienen diferente signo (primer cuadrante ambos positivos y segundo cuadrante seno positivo y coseno negativo). Por tanto esto sucederá con todos los ángulos de estos cuadrantes. Vemos en el primer par de gráficas que para $\Phi = 40$ el error toma el mínimo en π mientras que para $\Phi = -40$ el error toma dos mínimos en 0 y 2π aproximadamente. Esto se debe a que la función del error en función del ángulo en el plano, depende de $cos(\Phi)$ y de $sen(\Phi)$.

$$cos(0) = 1 \qquad cos(2\pi) = 1 \qquad sen(0) = 0 \qquad sen(2\pi) = 0$$

Ahora nos fijamos en el segundo par de gráficas, para el valor positivo del ángulo, el mínimo se alcanza en π. Mientras que para el valor negativo, tenemos un mínimo relativo alrededor de π y mínimos globales en los extremos.

Finalmente, tras el análisis de las gráficas, podemos concluir que con latitudes positivas, el mínimo error se encuentra al disparar de norte a sur ($0,2\pi$) y para latitudes negativas, de sur a norte (2π, 0).

3.4. Cuestión 4

Vamos a intentar emular a los artilleros de hace un siglo encontrando una solución de tiro: Introduciendo un valor concreto de ángulos definimos un tiro parabólico puro. Suponiendo que el punto de impacto es nuestro blanco, utilizando las variables correalz y correpla modifica los ángulos de lanzamiento para que el tiro real caiga lo más cerca posible de la posición predicha por el tiro parabólico. Para ser más realistas, se ha introducido el rozamiento.

El rozamiento introducido en nuestro sistema es compatible con los datos balísticos de la pieza 30.5 cm SK L/50.

Los ángulos que debemos variar son el ángulo de alzada de tiro y el ángulo sobre el plano. Hemos ido probando distintos ángulos hasta que nos han coincidido el tiro puro (sin rotación), representado por la trayectoria azul y el que considera la rotación describiendo la naranja.

- Ángulo sobre el plano 0º : 93º
  (Sur eje X, 90º Este eje y, 180º norte 270º Oeste)
- Ángulo de alzada del tiro : 0.2 º
- Error : 1.4015

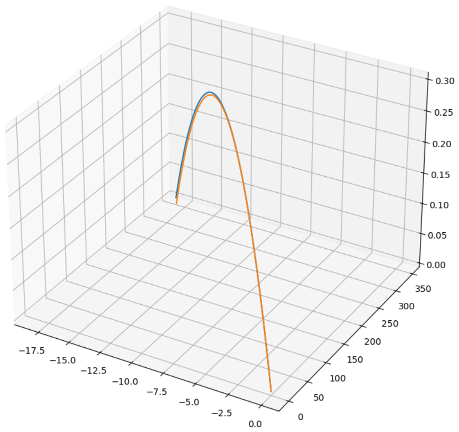


Figura 8: Representación 3D del tiro puro y tiro considerando la rotación terrestre.

Vemos que el error es muy pequeño, por tanto podemos considerar que nuestro resultado es aceptable y hemos encontrado unos valores de ángulos bastante exactos.

4. Bibliografía

- Guión de prácticas de ordenador. [Mecánica Newtoniana, Grado en Física].
- Código de Python.