DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE.
Asignatura: ELECTROMAGNETISMO I - 2º Curso Grado en Física Curso 2018-19

EXAMEN FINAL: 11/6/2019

CUESTIONES

1. (3 puntos) En la gráfica de la figura se representa la componente angular del campo magnético **H** (en coordenadas cilíndricas) en función de la distancia radial (r), para un sistema de diversos medios separados por interfases. En algunas zonas del espacio hay densidades de corriente.

a) Sugiere un ejemplo de sistema cuya componente angular de **H** sea de este tipo, justificando matemáticamente la respuesta.

b) Para dicho sistema dibuja, razonando por qué, como variaría la componente angular del campo magnético **B** en función de r, para tres posibles casos en los que el material situado en la zona con b < r < c sea: i) vacío; ii) material diamagnético; iii) material paramagnético. Considera que para los tres casos hay vacío en las zonas con r < a y r > c.

c) Para cada caso del apartado b) discute (justificando matemáticamente) qué tipos de corriente (libre y/o de magnetización; volumétrica y/o superficial) hay en los distintos puntos del espacio.

d) Verifica/justifica si se cumplen las condiciones de contorno para **H** y **B** en las distintas interfases para los distintos casos.

PROBLEMAS

Las magnitudes en negrita son vectoriales

1. (2 puntos) Sea una esfera de radio R, cuyo interior está relleno de un material aislante. Se sabe que dentro de la esfera el vector polarización (en coordenadas cilíndricas) viene dado por $\mathbf{P} = A\,(\rho\,\mathbf{u}_\rho - z\,\mathbf{u}_z)$, siendo A = cte.

a) Determina las densidades de carga ligada en todos los puntos de la esfera.

b) Determinar el potencial electrostático en el centro de la esfera.

2. (2.5 puntos) Un cilindro conductor hueco de radio R y de longitud infinita, de espesor despreciable cargado con una carga lineal λ (expresada en C/m) se encuentra en un medio dieléctrico lineal, isótropo y homogéneo de permitividad ε.

a) Determinar el potencial electrostático en todos los puntos del espacio resolviendo la ecuación de Poisson. Para ello debes considerar que la densidad volumétrica de carga libre que aparece en la ecuación de Poisson se puede expresar en función de λ del siguiente modo:

$$\rho_f = \frac{\lambda}{2\pi R}\,\delta(r - R)$$

Donde *r* es la distancia desde un punto al eje del cilindro (para evitar confusión se usa el símbolo *r,* en lugar de la habitual ρ de coordenadas cilíndricas) y $\delta(r - R)$ es la denominada función delta de Dirac cuyo valor es 1 si $r = R$ y 0 si $r \neq R$.

b) ¿Por qué al resolver la ecuación de Poisson sólo se considera la densidad de carga libre y no la ligada? ¿Esto se puede hacer siempre, es decir, independientemente del tipo de medio material que haya? Justifica la respuesta.

3. (2.5 puntos) Sea una espira circular de radio a cuyo eje está dirigido en la dirección *z*, por la que circula una corriente *I* en el sentido de las agujas del reloj.

a) Calcular, a partir de su definición, el campo **B** en puntos del eje z. Obtén su valor concreto en el centro de la espira.

b) A partir del valor de **B** en el centro de la espira, determina por inspección el potencial vector **A.**

c) De forma alternativa, determina **A** en el centro de la espira a partir de su definición y verifica que obtienes lo mismo que en el apartado b.

4. (1.5 puntos) Se tiene un sistema formado por cuatro cargas puntuales, tres de magnitud q situadas en $\mathbf{r_1} = a\mathbf{u_x}$, $\mathbf{r_2} = a\mathbf{u_y}$ y en $\mathbf{r_3} = -a\mathbf{u_x}$ respectivamente, y una de valor -q situada en $\mathbf{r_4} = -a\mathbf{u_y}$. Determínese el potencial electrostático a grandes distancias de la distribución, reteniendo hasta el tercer término en el desarrollo multipolar. Razonar a qué distancia (relativa al valor de a) sería conveniente mantener todos los términos, sólo dos o uno, para que la aproximación fuera razonable.

Solución: PROB. 1

La polarización produce el mismo campo que la superposición de dos densidades de carga, una volumétrica y otra superficial, dadas por

$$\rho_p = -\nabla\cdot\mathbf{P} \qquad \sigma_p = -\mathbf{n}\cdot[\mathbf{P}]$$

En el exterior de la esfera no hay polarización. En el interior, la densidad de volumen es, empleando coordenadas cilíndricas

$$\rho_p = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho P_\rho)\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{\partial P_z}{\partial z} = -2A - 0 + A = -A$$

Esta densidad de carga es uniforme en la esfera.

Para la superficie esférica, la normal es el vector unitario radial

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_r = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\rho + \cos\theta\,\mathbf{u}_z$$

mientras que los puntos de la superficie se encuentran en

$$\rho = R\operatorname{sen}\theta \qquad z = R\cos\theta$$

por lo que la densidad de carga es

$$\sigma_p = -(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\rho + \cos\theta\,\mathbf{u}_z)\cdot(\mathbf{0} - (AR\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\rho - AR\cos\theta\,\mathbf{u}_z)) = AR(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta) = -AR\cos(2\theta)$$

Para hallar el potencial en el centro de la esfera podemos partir directamente de la polarización o de las cargas equivalentes.

Por el primer método, debemos calcular la integral

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d\tau'$$

En nuestro caso $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ y el integrando es la esfera de radio R

$$\phi(\mathbf{0}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{r}'}{r'^3}r'^2\operatorname{sen}\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'$$

El producto escalar del numerador lo podemos calcular expresando ambos vectores en esféricas

$$\mathbf{P} = -Ar'(\cos(2\theta')\mathbf{u}_{r'} - \operatorname{sen}(2\theta')\mathbf{u}_{\theta'}) \qquad \mathbf{r}' = r'\mathbf{u}_r \qquad \mathbf{P}\cdot\mathbf{r}' = -Ar'^2\cos(2\theta')$$

o manteniendo cada uno en una base y luego aplicando los productos escalares entre las diferentes bases (nótese que no es preciso pasar a la base cartesiana porque no estamos integrando vectores, sino un producto escalar, que es un número con el mismo valor sea cual sea la base empleada).

Integrando resulta

$$\phi = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)\left(\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta'\cos(2\theta')\,d\theta'\right)\left(\int_0^{R}dr'r'\right) = -\frac{AR^2}{6\varepsilon_0}$$

Si en lugar de la polarización partimos de la distribución de cargas equivalente, la expresión para el potencial es

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_\tau \frac{\rho_p}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \oint_{\partial\tau}\frac{\sigma_p}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ y que el recinto de integración es una esfera, así como los valores de ρ_p y σ_p calculados antes, esta integral se reduce a

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \int_0^R r'^2\, dr' \frac{(-A)}{r'} + \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'\, R^2 \frac{(-AR\cos(2\theta'))}{R}\right) =$$

$$= \frac{A}{4\pi\varepsilon_0}\left(-2\pi R^2 + \frac{4\pi R^2}{3}\right) = -\frac{AR^2}{6\varepsilon_0}$$

En la integral sobre la superficie, la coordenada r debe sustituirse por su valor R.

Solución:

2 En este caso, hay simetría axial respecto al eje del cilindro, que se tomará como eje Z, por tanto el potencial no dependerá del ángulo φ y por considerarse infinito el cilindro tampoco dependerá de la coordenada z. El potencial solo dependerá de la distancia ρ al eje del cilindro.

Llamando ρ_V a la densidad espacial de carga, se tendrá: $\rho_V = \omega \cdot \delta(\rho - R)$, donde ω es la densidad superficial de carga del cilindro y $\delta(\rho - R)$ es la función-distribución delta. Por otra parte, la densidad superficial de carga ω, estará ligada con la densidad lineal de carga λ, por la relación: $\lambda = 2\pi R\omega$, luego $\rho_V = \dfrac{\lambda}{2\pi R} \cdot \delta(\rho - R)$.

La ecuación a resolver será:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_V}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = -\frac{\lambda.\delta(\rho - R)}{2\pi\epsilon R}$$

pues V solo depende de ρ, entonces:

$$d\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = -\frac{\lambda.\delta(\rho-R)}{2\pi\epsilon R}\rho.d\rho \Rightarrow \int_0^\rho d\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon R}\int_0^\rho \delta(\rho-R)\varrho.d\rho =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \rho<R \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon} & \text{si} \quad \rho>R \end{cases} \Rightarrow \rho\frac{dV}{d\rho} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \rho<R \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon} & \text{si} \quad \rho>R \end{cases}$$

Integrando de nuevo:

$$\begin{cases} \text{si} \quad \rho<R: \quad dV = 0 \Rightarrow V = \mathrm{C(Cte.)} \\ \text{si} \quad \rho>R: \quad dV = -\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon}\cdot\dfrac{d\rho}{\rho} \Rightarrow V = -\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln\rho + B \end{cases}$$

como se ve, las superficies equpotenciales son cilindros coaxiales con el conductor, así tomando como superficie equipotencial de valor nulo, la corespondiente a: $\rho = \rho_0 \geq R$ queda:

$$0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln\rho_0 + B \Rightarrow B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln\rho_0 \Rightarrow V(\rho \geq R) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln\frac{\rho}{\rho_0}$$

imponiendo la continuidad del potencial en $\rho = R$, se tiene: $\mathrm{C} = -\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln\dfrac{R}{\rho_0}$, luego queda como expresión del potencial en todo punto del espacio:

$$\text{Para } \rho \leq R: \quad V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln\frac{R}{\rho_0}$$

$$\text{Para } \rho \geq R: \quad V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln\frac{\rho}{\rho_0}$$

b) Esto es así porque el material es IHL. Ver en Transparencias la Ec. de Poisson para materiales de este tipo.

Scanned by TapScanner

$\boxed{3}$ a) Resuelto en Wagness Pag. 284

$$\vec{B}_{centro} = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{u}_z$$

b) Resuelto en transparencias y libro la obtención de $\vec{A}$ por inspección para un $\vec{B} = cte$. Nótese que el resultado obtenido en a) es un $\vec{B} = cte$.

Resolución 3c) parte c

Primer método

Para esta geometría se tiene: $\mathbf{r} = (0,0,z)$, $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ y el vector infinitesimal de espira es $\mathrm{d}\mathbf{l}' = (dx', dy', 0)$. Introduciendo estos datos en la Ecuación (5.14), se tiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_\Gamma \frac{dx'\mathbf{u}_x + dy'\mathbf{u}_y}{(x'^2+y'^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\oint_\Gamma \frac{dx'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{1/2}}\mathbf{u}_x + \oint_\Gamma \frac{dy'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{1/2}}\mathbf{u}_y\right\}.$$

Haciendo el cambio a coordenadas polares, esto es,$x' = a\cos\phi'$ e $y' = a\sin\phi'$, se tiene,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{-a\sin\phi' d\phi'}{(a^2+z^2)^{1/2}}\mathbf{u}_x + \int_0^{2\pi}\frac{a\cos\phi' d\phi'}{(a^2+z^2)^{1/2}}\mathbf{u}_y\right\}\\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\frac{-a}{(a^2+z^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\sin\phi' d\phi'\mathbf{u}_x + \frac{a}{(a^2+z^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\sin\phi' d\phi'\mathbf{u}_y\right\} = 0\,.\end{aligned}$$

Segundo método

Existe otra forma mas sencilla de calcular el potencial vector. Para verlo, analicemos la Ecuación (5.14) en nuestro caso. Así, substituyendo los datos del problema se observa que el denominador $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = (a^2+z^2)^{1/2}$ es constante, ya que z es fija. Ello implica que podemos sacar fuera del símbolo integral esta magnitud, obteniendo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\Gamma'}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}'}{(a^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(a^2+z^2)^{1/2}}\oint_\Gamma \mathrm{d}\mathbf{l}'.$$

La integral quiere decir que debemos sumar los vectores $d\mathbf{l}'$ a lo largo de la circunferencia de radio a, que representa la espira, de lo cual se infiere que $\mathbf{A}$ es nulo, ya que dichos vectores $d\mathbf{l}'$ forman un polígono cerrado [9].

Observaciones: En el primer método empleado podría haberse comenzado de otra manera. Así, si se tiene en cuenta que existe simetría de revolución en torno al eje OZ y que en el numerador de la expresión integral aparece $d\mathbf{l}'$, podría haberse introducido la expresión de éste directamente en coordenadas polares, quedando la integral inicial para el potencial vector del siguiente modo:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\oint_\Gamma \frac{a d\phi' \mathbf{u}_\phi}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right\}. \tag{5.42}$$

Esta forma de proceder es más rápida que la mostrada en un principio, si bien tiene el inconveniente de poder inducirnos a error con más facilidad, ya que al aparecer en el integrando el cociente entre $d\phi'$ y $(a^2+z^2)^{1/2}$, se llega a la igualdad

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 a I}{4\pi(a^2+z^2)^{1/2}}\oint_\Gamma d\phi'\mathbf{u}_\phi\,, \tag{5.43}$$

cuya integral indefinida puede creerse igual a $\phi'\mathbf{u}_\phi$. Esto es evidentemente *falso*, pues $\mathbf{u}_\phi = \mathbf{u}_\phi(\phi)$, por lo que para resolver la integral anterior hay que poner el valor del vector unitario $\mathbf{u}_\phi$ en función del ángulo ϕ', esto es, $\mathbf{u}_\phi(\phi) = -\sin\phi'\mathbf{u}_\mathbf{x} + \cos\phi'\mathbf{u}_y$.

Solución: $\boxed{4}$

El momento monopolar, esto es, la carga neta, vale

$$Q = \sum_i q_i = 2q$$

El dipolar es

$$\mathbf{p} = \sum_i q\mathbf{r}_i = q(a\mathbf{u}_x) + q(a\mathbf{u}_y) + q(-a\mathbf{u}_x) - q(-a\mathbf{u}_y) = 2qa\mathbf{u}_y$$

Para el momento cuadrupolar calculamos las componentes por separado. Tenemos

$$Q_{xx} = \sum_i q_i \frac{2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2}{2} = 2qa^2$$

$$Q_{xy} = \frac{3}{2}\sum_i q_i x_i y_i = 0 \qquad Q_{xz} = Q_{yz} = 0$$

$$Q_{yy} = \sum_i q_i \frac{2y_i^2 - x_i^2 - z_i^2}{2} = -qa^2$$

$$Q_{zz} = \sum_i q_i \frac{2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2}{2} = -qa^2$$

lo que, en forma matricial se escribe como

$$\mathcal{Q} = qa^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El potencial debido a esta distribución es

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathcal{Q}\cdot\mathbf{r}}{r^5} + \cdots\right)$$

Sustituyendo los valores anteriores y teniendo en cuenta que

$$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

resulta

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{r} + \frac{2qay}{r^3} + \frac{qa^2(2x^2 - y^2 - z^2)}{r^5} + \cdots\right)$$