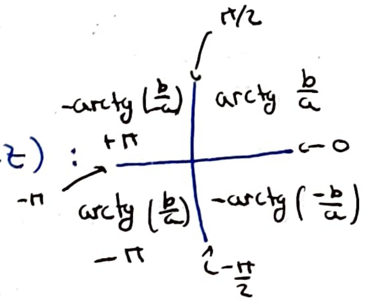
Resumensillo ejersisics

T1

DEFINICIONES:

- Analítica en U si es derivable en todo pto. de U
- Entera si analítica en todo $\mathbb{C}$
- Forma exponencial: $z = |z| e^{i\alpha}$, $\alpha = \mathrm{Arg}(z)$:



PROPIEDADES

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Módulo: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\frac{1}{i} = -i$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

- $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$
- $e^z \neq 0$
- $|e^z| = e^{x} \leq e^{|z|}$ (Re(z))
- e^z es entera
- $e^z = 1 \iff z = 2\pi k i$
- $\nexists \lim_{z \to \infty} e^z$
- $e^{-iz} = i(\operatorname{sen} z + i \cos z)$
- $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$

FUNCIÓN POTENCIA

$z^\alpha = e^{\alpha \cdot (\log z)}$ ▷ cjto de todos los log.

$a^z = e^{z \cdot \log a}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

- $\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \mathrm{Arg}(z)}$
- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg(z)}$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\left(\frac{\mathrm{Arg}\, z + 2\pi k}{n}\right)}$; n raíces

FUNCIÓN LOGARITMO

- $\log z = \ln|z| + i(\mathrm{Arg}\, z + 2\pi k)$ $k \in \mathbb{Z}$
- $\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i \mathrm{Arg}\, z$ (Log. principal)
- $\log_{\theta_0} z = \ln|z| + i \arg_{\theta_0} z$, es decir,

  $\arg z \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$

  ↳ el estándar es $\theta = -\pi$

  ↳ es analítica salvo en los z con argumento θ_0
- No es cta.
- $(\mathrm{Log}\, z)' = \frac{1}{z}$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
- No cumple $\begin{cases} \ln xy = \ln x + \ln y \\ \ln x^k = k \ln x \end{cases}$

DESARROLLOS EN SERIE

- $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$
- $\operatorname{sen}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n)!}$
- $\operatorname{Senh} z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{2n!}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \iff z = \pi k + \dfrac{\pi}{2}$ $\quad (2k+1)\frac{\pi}{2}$
- $\tan(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$
- $\operatorname{sen}(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff z = \pi k$
- $\operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$
- $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\left.\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{senh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \tanh z = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

- $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
- $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$
- $\cos z = \cosh(iz)$
- $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$
- $\cosh z = 0 \iff z = (k + 1/2)\pi i$
- $\operatorname{senh} z = 0 \iff z = \pi k i$

CONDICIONES CAUCHY-RIEMANN

$f: U \to \mathbb{C}$ analítica en U abierto. $f = u + iv$:
$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

T2

DEF :

$\to$ $f = u + iv \Rightarrow \displaystyle\int f\,dz = \int u(z)\,dz + i \int v(z)\,dz$

$\to$ $\gamma(t) \Rightarrow \displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$

Segmento $[a,b]$: $\gamma(t) = (1-t)a + tb$, $t \in [0,1]$

Circunf. $C(z_0, r)$: $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$

$\to$ $\displaystyle\int_{\alpha+\beta} f\,dz = \int_\alpha f\,dz + \int_\beta f\,dz$

Si hay más de un pto. singular separamos (descomp. frac. simples)

$\to$ 2º T.F.C. : $\displaystyle\int_\gamma f\,dz = F(z)\Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}$

FÓRMULA DE CAUCHY DEL CÍRCULO

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - w}\,dz$$

$f(z) \to f$ analítica en U que contiene $\bar{D}(z_0, r)$

$w \to$ pto singular en el interior del círculo

FÓRMULA INTEGRAL DE POISSON

f holomorfa en $D(z_0,R)$ continua en $\bar{D}(z_0,R)$

Para cada $z = z_0 + re^{i\theta}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, f(z_0 + Re^{it})\,dt$$

$u = \operatorname{Re}(f)$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \cdot u(z_0 + Re^{it})\,dt$$

FÓRMULA INTEGRAL DERIVADAS DE CAUCHY

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dw$$

NÚCLEO POISSON

$$P_r(x) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos x}, \quad 0 < r < R, \quad x \in \mathbb{R}$$

NÚCLEO DE CAUCHY

$$Q_z(t) = \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \qquad z \in D(0,R),\ R > 0 \quad t \in \mathbb{R}$$

TEOREMA LIOUVILLE

f entera y acotada $\Rightarrow$ f es constante

THA. FUND. DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio no cte. tiene al menos una raíz.

PRINCIPIO MÓDULO MÁXIMO

f analítica en U abierto, conexo y acotado. Si f es continua en $Fr(U)$ entonces:

① $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in U$

② Si $|f(z_0)| = M$, $z_0 \in U \Rightarrow f$ es cte.

$$M = \max\{|f(z)| : z \in Fr(U)\}$$

PRINCIPIO MÓDULO MÍNIMO

f analítica en U abierto, conexo y acotado. Si f es cta. en $Fr(U)$ y $f \neq 0 \ \forall z \in U$ entonces:

① $|f(z)| \geq m \quad \forall z \in U$

② Si $|f(z_0)| = m \Rightarrow f$ es cte.

$$m := \min\{|f(z)| : z \in Fr(U)\}$$

COSITAS PARA EJERSISIOS

RESOLVER POR POISSON

De la forma $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - t)}$

① Fijamos $z_0 = 0$ y hallamos r, R, θ

② Tenemos $P_r = \dfrac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - t)}$

③ $z = z_0 + re^{i\theta}$

④ Buscamos $f(z)$ tal que $Re(f(z_0 + Re^{it})) = g(t)$

↳ Suelen ser z^{n} ó e^z — n: Suele ser el nº que va dentro del $\operatorname{sen}(nt)$ o $\cos(nt)$

⑤ Sustituimos en la fórmula ajustando $R^2 - r^2$

RESOLVER POR FIC (CÍRCULO)

De la forma $\displaystyle\int_C (\ )\,dz$

① Dejamos $(\ )$ de la forma $\dfrac{f(z)}{z - w}$ donde w es el pto. singular que cae dentro del círculo

⊛ Si hay varios ptos. que caen dentro separamos $\dfrac{A}{z - w_1} + \dfrac{B}{z - w_2}$

② Identificamos $f(z)$ y hallamos su valor en el pto. de singularidad.

③ Sustituimos en la fórmula.

T3

DEFS.

→ Serie de potencias: $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \xrightarrow{\text{si converge}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

→ $r = \left(\limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$ ó $\left(\limsup_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1}$ (radio de convergencia)

TAYLOR

Tª Taylor: f analítica en $D(z_0, r) \Rightarrow f(z) = \sum \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \forall z \in D$

Recíproco Tª Taylor: $f(z) = \sum \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, r) \Rightarrow f$ analítica en $D(z_0, r)$

CEROS

f analítica en z_0 $\rightarrow$ cjto. de ceros: $Z(f) = \{z \in U : f(z) = 0\}$

↳ f tiene un 0 en z_0 de orden $m \geq 1$ si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n$ con $\begin{cases} a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0 \\ a_m \neq 0 \end{cases}$

↳ Equivalentemente $f^{(k)}(z_0) = 0 \dots, f^{(m)}(z_0) \neq 0$

↳ Equivalentemente $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$; g analítica y $g(z_0) \neq 0$

SINGULARIDADES

↳ f tiene una singularidad en z_0 si no es analítica en z_0 pero sí en algún pto. del entorno de z_0.

↳ z_0 es singularidad aislada si $\exists$ entorno perforado (entorno sin el propio pto.) de z_0 donde sí es analítica. Es NO aislada en caso contrario.

↳ z_0 sing. aislada de $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$
- → z_0 evitable $\iff$ $a_n = 0 \quad \forall n < 0$
- → z_0 polo de orden m $\iff$ $a_{-m} \neq 0$ y $a_n = 0 \quad \forall n < m$
- → z_0 es esencial $\iff$ $a_n \neq 0$ para nro. infinito de $n < 0$.

PROP: z_0 es polo $\Rightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \pm\infty$

CLASIFICACIÓN

z_0 sing. aislada $\Rightarrow$
- evitable $\iff \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$
- polo orden m $\iff \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- esencial $\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$

↳ en $+\infty$: f tiene una sing. aislada en $+\infty$ si f es analítica en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ → Para clasificarla estudiamos $f(\frac{1}{z})$ en $z = 0$.

↳ Si f es <u>entera</u>
- ∞ evitable $\iff$ f es cte.
- ∞ polo $\iff$ f es polinomio no cte.
- ∞ esencial $\iff$ f no es un polinomio

LAURENT

T^a Laurent: f analítica en el anillo $A(z_0, s_1, s_2)$; $0 \leq s_1 < s_2 \leq +\infty$. Entonces para cada $z \in A(z_0, s_1, s_2)$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \ ; \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = r\}, \ s_1 < r < s_2$$

↳ Si f fuese analítica tmb. dentro del anillo $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ La serie de Laurent sería igual que la de Taylor.

$\boxed{\text{T4}}$

DEF: z_0 sing. aislada ; $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \Rightarrow$ El residuo de f en z_0 es $\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}$

CÁLCULO $\operatorname{Res}(f, z_0)$

*) z_0 evitable $\Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) = 0$

*) z_0 polo orden $m \Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z)$; $g(z) = (z-z_0)^m \cdot f(z)$

T^{a} RESIDUOS

f analítica en un abierto U, excepto en $w_1, w_2, \dots$ ptos. de U donde tiene sing. aisladas. Sea γ el camino cerrado t.q. $w_i \notin \gamma^*$ y $n(\gamma, z) = 0 \ \forall z \notin U \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_j n(\gamma, w_j) \cdot \operatorname{Res}(f, w_j)$

n — 1 si w_j dentro del camino
— 0 si w_j fuera

CÁLCULO DE INTEGRALES REALES

LEMA DE JORDAN: g analítica en $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ $\left| \int_{\gamma_R} g(z) e^{iaz} \right| \le \frac{\pi}{a}(1 - e^{-Ra}) M_g(\gamma_R)$

$a > 0$

$\max\{|g(z)| : z \in \gamma_R\}$

DES. Δ:
- $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 + z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$ (inversa)

En general: $\left| \dfrac{a_n R^n + \dots + a_0}{b_m R^m + \dots + b_0} \right| \le \dfrac{|a_n| R^n + \dots + |a_0|}{|b_m| R^m - \dots - |b_0|}$

PROPO: Si z_0 es un polo simple de f ; $\gamma_r(t) = z_0 + re^{(\pi - t)i}$, $t \in [0, \pi] \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f\, dz = -\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, z_0)$

HALLAR RAÍCES : $\to$ T^{a} ROUCHÉ

f, g analíticas en U abierto. Sea γ camino cerrado en U t.q. f y g no tienen sing. en el interior de γ. Si $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ $\forall z \in \gamma^* \Rightarrow f$ y g tienen los mismos ceros en γ.

TEOREMAS (me la pelan mucho)

T^{a} APLICACIÓN ABIERTA: Si $f: U \to \mathbb{C}$ es analítica en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ y f no es cte. en ninguna componente conexa de $U \Rightarrow f$ es abierta.

• Propo: f analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $f'(z_0) \neq 0$ $\exists r > 0$: f inyectiva en $D(z_0, r)$.
Si $f'(z_0) \neq 0$ f no es inyectiva en $D(z_0, r)$ para ningún r.

T^{a} APLIC INVERSA: $f: U \to \mathbb{C}$ analítica e inyectiva en U abierto $\Rightarrow f^{-1}(z)$ es analítica en $f(U)$.

COSITAS PARA EJERSISIOS :)

$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$

① C.V: $z = e^{i\theta}$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{z - 1/z}{2i}$; $\cos\theta = \dfrac{z + 1/z}{2}$; $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$

② $\Rightarrow \int_{C(0,1)} f(z)\, dz$ por residuos

$\int_\gamma f(z)\, dz$ por Residuos
$\gamma \to$ casi siempre circunferencia

→ ① Sing. de f y clasificar
→ ② Calcular residuos
→ ③ $\int_\gamma f\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_0)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ POR RESIDUOS

-> Si tiene sen x o cos x $\quad I = Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ix}\right)$ ó $Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ix}\right)$
($e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$)

-> $\int_0^{\infty} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}$

① Tomamos $f(z)$ la extensión a $\mathbb{C}$ de f. Y definimos el camino cerrado con R suficientemente grande y r suficientemente pequeño.

*) Si no hay sing. en el eje:

$\Gamma_R = \gamma_R(t) + [-R, R]$

*) Si hay sing. en el eje:

$\Gamma_R = \gamma_R(t) + \gamma_{r_i}(t) + [-R, x_0 - r] + \dots + [x_n + r, R]$

-> $\gamma_R(t) = Re^{it}$; $t \in [0, \pi]$ -> $\gamma_{r_i}(t) = x_i + re^{(\pi - t)i}$, $t \in [0, \pi]$

② $$\underbrace{\int_{\Gamma_R} f\,dz}_{1)} = \underbrace{\int_{\gamma_R} f\,dz}_{2)} + \underbrace{\int_{\gamma_{r_i}} f\,dz}_{3)} + \int_{-R}^{x_0 - r} f\,dz + \dots + \int_{x_n + r}^{R} f\,dz$$

1) Por residuos 2) Lema Jordan ó si $a = 0 \leq \pi R M_f(\gamma_R)$ (cdo. $R \to \infty$ $\int_{\gamma_R} \to 0$)

3) PROPOSICIÓN ó por def.

③ Tomamos límites en ② ; $\lim_{\substack{R \to \infty \\ r \to 0}} \left(\int_{-R}^{x_0 - r} + \dots + \int_{x_n + r}^{R} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ y despejamos esta (decir el detalle de que esto se puede hacer si la integral converge) por ser par p.ej.

EJERCICIOS Tª DE ROUCHÉ

① Definimos f. Si nos piden en disco buscamos directamente aplicar Rouché si nos dan Anillo restamos al disco exterior los ceros del disco interior. Semiplano tomamos semicírculo y segmento del eje y vemos que se verifica Rouché en ambos para que se verifique en γ = segmento ∪ semicírculo.

② Definimos g (normalmente el sumando que sea mayor en γ y sea fácil determinar sus ceros) y definimos γ

③ Tª Rouché $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ => Concluimos que f y g tienen los mismos ceros en el interior de γ.

T5

DEF Producto infinito $\prod_{n=1} z_n$ converge si la sucesión $\{\prod_{k=1}^{n} z_k\} = \{z_1, z_1 \cdot z_2, \dots\}$ converge a un nro. $\neq 0$ y en ese caso $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k \neq 0$

-> Si $\{n : z_n = 0\}$ el producto converge <-> $\{\prod_{\substack{k=1 \\ z_k \neq 0}}^{n} z_k\}$ converge a un nro. distinto 0 y $\prod_{n=0}^{\infty} z_n = 0$ (la suc. sin los $z_k = 0$)

-> Si $\{n : z_n = 0\}$ es ∞ => el producto no converge.

OBS $\prod_{n\geq 1} z_n$ converge $\iff \prod_{n\geq m} z_n$ converge $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} z_n = \prod_{n=1}^{m-1} z_n \cdot \prod_{n=m}^{\infty} z_n$

*) Si $\prod_{n\geq 1} z_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 1$

CONVERGENCIA (Si tenemos $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ podemos hacer $n=-n$ y cambiar a $\sum_{n\geq 1}^{+\infty}$ ó $\sum_{n=0}$)

-> $\prod_{n\geq 1}(1+z_n)$ conv. abs $\iff \sum_{n\geq 1} |z_n|$ converge

-> $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$; $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ converge $\iff \sum a_n$ converge

-> a_n t.q. $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\Rightarrow \prod_{n\geq 1}(1-a_n)$ converge $\iff \sum_{n\geq 1} a_n^2$ converge

CONVERGENCIA UNIFORME (para ver si un prod. define una func. entera o analítica)

TEOREMA Si $\sum |g_n|$ (suc. func. analíticas en U) conv. uniformemente sobre un compacto de $U \Rightarrow f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1+g_n(z))$ es analítica en U

FACTORIZACIÓN DE HADAMARD

TEOREMA : $f(z)$ entera de orden finito λ, con cero en $z=0$ de orden $m\geq 0$ y otros ceros $a_1, a_2, \dots, a_n$. Entonces $f(z) = e^{P(z)} \cdot z^m \cdot \prod_{n\geq 1} E_h\left(\frac{z}{a_n}\right)$ donde $P(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que λ y h:

$$h = \begin{cases} \mu - 1, & \text{si } \mu \in \mathbb{Z} \text{ y } \sum \frac{1}{|a_n|^\mu} < \infty \\ \mu, & \text{si } \mu \in \mathbb{Z} \text{ y } \sum \frac{1}{|a_n|^\mu} = \infty \\ [\mu], & \text{si } \mu \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad ; \quad E_h\left(\frac{z}{a_n}\right) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \dots + \frac{z^h}{h \cdot a_n^h}}$$

ORDEN DE CRECIMIENTO (λ)

Nos indica como crece f respecto de la exponencial

-> e^z ; $\lambda = 1$ -> $P(z)$; $\lambda = 0$

-> $e^{P(z)}$; λ = grado de $P(z)$ -> $e^{P(z)} + Q$; λ = grado de P

-> e^{e^z} ; $\lambda = \infty$ -> $\left.\begin{matrix}\operatorname{sen} z, \cos z \\ \operatorname{senh} z, \cosh z\end{matrix}\right\}$; $\lambda = 1$

EXPONENTE DE CONVERGENCIA (μ)

Sea $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ con $\lim |a_n| = \infty$. El exponente de convergencia de $\{a_n\}$ es:

$$\mu = \inf \left\{ k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k} < \infty \right\}$$

Si este cjto. es vacío $\Rightarrow \mu = \infty$

(es decir μ será la k más pequeña a partir de la cual la serie de ceros de f es convergente).

TIPS EJERSIOS

HADAMARD

· $f(z)$ entera

① Hallar λ ; ② Calcur el orden m del cero $z=0$ ($m=0$ si no es cero) ; ③ Hallar el resto de ceros de la función $a_1, \dots, a_n$

④ Hallar μ asociado a la sucesión de ceros $\{a_n\}$; ⑤ Calcular h en función de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|^{\mu}}$

⑥ Escribir fact. con $P(z)$ de grado λ ; ⑦ Calcular $E_h\left(\frac{z}{a_n}\right)$ y arreglar $\prod_{-\infty}^{\infty} E_h\left(\frac{z}{a_n}\right)$ dividiendo en 2 : $\prod_{n=1}^{\infty}(\dots)$

⑧ Calcular los coef. de $P(z)$ igualando $\frac{f(z)}{z^m} = e^{P(z)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(\ )$ y tomando límites cdo $z \to 0$. Para hallar el otro derivamos a ambos lados y volvemos a evaluar cdo $z \to 0$ teniendo en cuenta que siempre $(\Pi(0))' = 0$.

CONVERGENCIA DE SERIES DE NROS. REALES

TIPS

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ no converge
- $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge
- $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e$

- $\sum_{n\geq 1} (r)^n$ → $\boxed{\text{si } -1<r<1 \text{ converge}}$; → si $r>1$ ó $r<-1$ no converge
  → Serie geométrica razón r
- $\sum \frac{1}{n^p}$ → $p\leq 0$ diverge ; → $0<p\leq 1$ diverge ; → $\boxed{p>1 \text{ converge}}$

CRITERIOS

CONDICIÓN DEL RESTO Si $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ es no convergente

CRITERIO DE ACOTACIÓN Una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$; $a_n\geq 0$ $\forall n$ es convergente sii la sucesión de sumas parciales $\left\{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada

CRITERIO DE COMPARACIÓN $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ series de términos no negativos

si $\exists k$ t.q. $a_n \leq k b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ entonces
→ si $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
→ si $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

COROLARIO: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$
→ $0<\lambda<+\infty \Rightarrow \sum a_n$ conv. $\Leftrightarrow \sum b_n$ conv.
→ $\lambda=0 \Rightarrow \sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.
→ $\lambda=+\infty \Rightarrow \sum b_n$ div $\Rightarrow \sum a_n$ div.

CRITERIO DE LA RAÍZ

$\sum_{n\geq 1} a_n$; $a_n\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$
→ $0\leq\alpha<1$ la serie converge
→ $\alpha>1$ la serie diverge
→ $\alpha=1$ el criterio no concluye.

CRITERIO DEL COCIENTE

$\sum_{n\geq 1} a_n$; $a_n\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$
→ $0\leq\alpha<1$ $\sum a_n$ converge
→ $\alpha>1$ $\sum a_n$ diverge
→ $\alpha=1$ el criterio no concluye

CRITERIO DE RAABE (cdo. no concluye el del cociente)

$\sum_{n\geq 1} a_n$; $a_n\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$
→ $\lim(\ )>1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
→ $\lim(\ )<1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

CRITERIO DE LEIBNIZ $\sum(-1)^n a_n$ t.q. $a_n\geq 0$; $a_{n+1}\leq a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\lim_n a_n=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ La serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\cdot a_n$ es convergente.