

Análisis de varias variables 2

Víctor Mira Ramírez

27 de mayo de 2023

Índice

Capítulo 1	Formas diferenciales	Página 2
1.1	Definiciones básicas	2
1.2	Formas diferenciales cerradas y exactas	4
Capítulo 2	Campo de gradiente, divergencia y rotacional	Página 7
2.1	Campo escalar, campo vectorial	7
2.2	Aplicaciones a la física	9
Capítulo 3	Integrales de línea	Página 10
3.1	Curvas paramétricas	10
3.2	Integrales de línea	11
3.3	Longitud de una curva	13
Capítulo 4	Integrales dobles	Página 14
4.1	Introducción	14
4.2	Teoremas de Fubini	16
4.3	Teorema de cambio de variable	17
4.4	Teorema de Green-Riemann Cálculo de Área — 20	18
4.5	Superficies parametrizadas Introducción — 21 • Área de una superficie — 23	21
4.6	Integrales de funciones escalares sobre superficies	25
4.7	Integrales de superficie de funciones vectoriales	26
Capítulo 5	Integrales Triples	Página 29
5.1	Introducción	29
5.2	Cambio de variables Algunos cambios de variable — 30 • Coordenadas Esféricas — 31	30
Capítulo 6	Teoremas de Stokes y Gauss	Página 32
6.1	Teorema de Kelvin-Stokes	32
6.2	Teorema de Gauss-Ostrogradsky / Divergencia	34

Capítulo 1

Formas diferenciales

Introducción

Vamos a ver en este capítulo un concepto muy importante en matemáticas, que son las formas diferenciales. Como hicimos en *Análisis de varias variables 1*, empezaremos hablando de las formas diferenciales en 2 dimensiones, e iremos poco a poco ampliando el campo de nuestro estudio a dimensiones superiores.

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1: Diferencial

Sea f una función definida en un entorno del punto $M_0 = (x_0, y_0)$ tal que f admite derivadas parciales en un entorno $\mathcal{V}(M_0)$. Se llama **diferencial de f en M_0** a la aplicación lineal definida de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} denotado:

$$L(x_0, y_0) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (h, k) \mapsto h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Comentario:

Para el caso particular $g(x, y) = x$, entonces $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$ lo que nos da $dg(x, y) = dx(h, k) = h$ (rotación $dx = h$) $g(x, y) = y$, entonces $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 1$ lo que nos da $dg(x, y) = dy(h, k) = k$. Esto nos da: $df(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$

- Escribir $df(dx, dy)$ es un abuso de notación que debe evitarse, escribiendo en su lugar df únicamente.
- La diferencial puede existir sin que la función sea diferenciable
($f \in C_1 \implies f$ diferenciable, pero f diferenciable $\not\Rightarrow f \in C_1$)

Comentario:

Sea $f \in C_1(\mathcal{V}(M_0))$ una función de una variable,

$$f'(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \iff f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + o(h)$$

Como tenemos que $h = dx, df_{x_0} = f'(x_0) dx \iff f'(x_0) = \frac{df_{x_0}}{dx} \left(\frac{dx}{dt} = x'(t) \iff dx = x'(t) dt \right)$

Definición 1.1.2: 1-forma diferencial

Sea \mathcal{U} un abierto de \mathbb{R} y sea $(h, k) \in \mathcal{U}$ se llama **1-Forma diferencial** w a la aplicación

$$w: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(h, k) \longmapsto w = P(x, y)h + Q(x, y)k$$

donde P y Q son funciones "suficientemente regulares".

Comentario:

Si P y Q son derivadas parciales de f , entonces la 1-forma diferencial w es la diferencial de f

Definición 1.1.3: Producto exterior

Sean dx y dy dos 1-formas diferenciales, se llama **producto exterior** a la aplicación definida por $dx \wedge dy$ ("dx exterior dy"):

$$w: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(h_1, k_1) \times (h_2, k_2) \longmapsto h_1 k_2 - h_2 k_1$$

Comentario:

Un determinante es el producto exterior de dos 1-formas diferenciales

Teorema 1.1.1

- $dx \wedge dx = 0$
- $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

A consecuencia de este teorema se obtiene la llamada "*Regla de Sarrus*", cuya demostración es inmediata.

Definición 1.1.4: 2-forma diferencial

Sea \mathcal{U} un abierto de \mathbb{R}^2 y sea $(x, y) \in \mathcal{U}$, se llama **2-forma diferencial** w a la aplicación

$$w: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{B}_i(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) dx \wedge dy$$

donde $\mathcal{B}_i(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ es el conjunto de las aplicaciones bilineales.

Comentario:

$\forall H_1(h_1, k_1), H'_1(h'_1, k'_1), H_2(h_2, k_2)$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$dx \wedge dy(H_1 + \lambda H'_1, H_2) = dx \wedge dy((h_1 + \lambda h'_1, k_1 + \lambda k'_1), (h_2, k_2)) = dx \wedge dy k_2(h_1 + \lambda h'_1) - dx \wedge dy h_2(k_1 + \lambda k'_1) =$$

$$dx \wedge dy(h_1 k_2 - h_2 k_1) + \lambda dx \wedge dy(h'_1 k_2 - h_2 k'_1) = dx \wedge dy(H_1, H_2) + \lambda dx \wedge dy(H'_1, H_2) \implies$$

$dx \wedge dy$ es lineal respecto a la primera variable. *Idem* con la segunda.

Esto implica que $dx \wedge dy$ es bilineal, y lo es también $f(x, y) dx \wedge dy$.

En conclusión, $f(x, y) dx \wedge dy \in \mathcal{B}_i(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Definición 1.1.5: Derivada exterior

Sea w una 1-forma diferencial definida en \mathcal{U} abierto de \mathbb{R}^2 . Se llama derivada exterior de w y la denotamos dw a la 2-forma diferencial definida por:

$$dw = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx \wedge dy$$

1.2 Formas diferenciales cerradas y exactas

Definición 1.2.1: Forma diferencial cerrada

Sea w una 1-forma diferencial de clase C_1 en un abierto \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 se dice que w es cerrada si $dw = 0$

Comentario:

Tenemos $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, si $w \in C_1$, las derivadas parciales de P y Q existen, y tenemos

$$dw = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \quad \text{Si } w = 0 \iff \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \forall (x, y) \in \mathcal{U}$$

Definición 1.2.2: Forma diferencial exacta

Sea w una 1-forma diferencial de clase C_1 en un abierto de \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 , se dice que w es **exacta** si existe una función $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C_1 tal que $df = w$

Comentario:

Ya sabemos que si $f \in C_1(\mathcal{U})$, entonces $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. (Si $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ tenemos la estructura de una 1-forma diferencial). Si $w = df$, tenemos que $P = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $Q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

Esto significa que para demostrar que w es exacta hay que encontrar f tal que $df = w$, es decir, busquemos $f(x, y)$ que sea solución del sistema $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Como $f \in C_1(\mathcal{U})$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas. También sabemos que $w \in C_1(\mathcal{U})$, lo que nos dice que $P, Q \in C_1(\mathcal{U}) \implies f \in C_2(\mathcal{U})$

Teorema 1.2.1

Si $w \in C_1(\mathcal{U}) \implies f \in C_2(\mathcal{U})$

Comentario:

Al ser de clase C_1 , podemos determinar las derivadas parciales de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$. Tenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Y con el *Lema de Schwartz* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)$, entonces sabemos que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{U}$$

Teorema 1.2.2

Sea w una 1-forma diferencial de clase $C_1(\mathcal{U})$ y exacta en \mathcal{U} , entonces w es cerrada.

Comentario:

El recíproco del teorema anterior es falso, salvo si damos a \mathcal{U} una cierta geometría. Por ello, vamos a volver a hablar de topología.

Definición 1.2.3: Conjunto estrellado

Sea \mathcal{U} un abierto de \mathbb{R}^2 , se dice que \mathcal{U} es estrellado si $\exists a \in \mathcal{U}$ tal que $\forall b \in \mathcal{U}$ tenemos $[a, b] \subset \mathcal{U}$

Ejemplo 1.2.1

1. Todo convexo de \mathbb{R}^2 es un estrellado.
2. Si $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, \mathcal{U} no es estrellado.
3. $[a, b] \in \mathbb{R}^2 = \{ta + (1 - t)b, t \in [0, 1]\}$ (Parametrización de un segmento)

Teorema 1.2.3 Poincaré

Si w es una 1-forma diferencial de clase C_1 en un abierto estrellado de \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 tal que $dw = 0$ (i.e w es cerrada) entonces w es exacta.

Una aplicación en física puede ser, por ejemplo, en mecánica de fluidos, ya que si en $(0, 0)$ hay un obstáculo y hay un flujo alrededor de un cilindro (definido en un entorno de $(0, 0)$) entonces no se pueden usar los teoremas de la mecánica de fluidos.

La demostración se hará con integrales de línea (curvilíneas o de camino).

Ejemplo 1.2.2 (Sea $w = x dx + y dy$ y $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, ¿La forma diferencial w es cerrada?)

Claro que sí, vamos a demostrarlo. Tenemos $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = y$ entonces $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$, lo que implica que $dw = 0$, es decir, que w es cerrada.

Además, como \mathbb{R}^2 es estrellado, tenemos gracias al *Teorema de Poincaré* que w es exacta.

Ejemplo 1.2.3 (Usando la anterior forma diferencial, encuentra la función f tal que $df = w$)

Tenemos $w = x dx + y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, lo que nos da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y$$

De aquí, obtenemos que $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + g(y)$, y derivando respecto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) = y \implies f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C \text{ y tenemos } w = df.$$

Comentario:

En \mathbb{R}^3 , una 1-forma diferencial w se escribe $w = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ donde P, Q, R son tres funciones definidas en un abierto \mathcal{U} de \mathbb{R}^3 . Si además \mathcal{U} es un estrellado de \mathbb{R}^3 , entonces w es exacta.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Teorema 1.2.4

Sea w una 1-forma diferencial de clase $C_1(\mathcal{U})$, donde \mathcal{U} es un abierto de \mathbb{R}^2 , suponemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &= f(u, v) & y &= g(u, v) & \text{con } f, g &\in C_1 \\ w &= P(x, y) dx + Q(x, y) dy = P_1(u, v) du + Q_1(u, v) dv \\ \text{con } P_1(u, v) &= P \frac{\partial f}{\partial u} + Q \frac{\partial g}{\partial u} & Q_1(u, v) &= P \frac{\partial f}{\partial v} + Q \frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.4

Sea $w = x dx + y dy$, tenemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{cases}$$

y por tanto, $w = d\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) = d\left(\frac{r^2}{2}\right) = r dr$

Capítulo 2

Campo de gradiente, divergencia y rotacional

2.1 Campo escalar, campo vectorial

Definición 2.1.1: Campo de gradiente

Sea \bar{V} un campo vectorial con componentes P y Q de clase C_1 en $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que \bar{V} es un campo de gradiente si existe un campo escalar φ de clase C_1 en \mathcal{D} tal que:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M(x, y) &\longmapsto \varphi(M) = \varphi(x, y) \end{aligned} \quad \bar{V} = \overline{\text{grad}} \varphi = \bar{\nabla} \varphi \quad \text{i.e. } \bar{V} = \begin{cases} P(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \\ Q(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

Teorema 2.1.1

Sea \bar{V} un campo vectorial con componentes P y Q de clase $C_1(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^2$:

\bar{V} campo de gradiente \iff la 1-forma diferencial $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ es exacta en \mathcal{D} , i.e. $w = df$.

Como consecuencia, sabemos que si \bar{V} es un campo de gradiente $\implies \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$

Comentario:

1. Si \mathcal{D} es un abierto estrellado, entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \iff w$ es cerrada $\xrightarrow{\text{Poincaré}} w$ es exacta $\iff \bar{V} = \bar{\nabla} \varphi$
2. Si \mathcal{D} es un abierto 'simplemente conexo' de \mathbb{R}^3 , entonces $dw = 0 \iff \exists \varphi \in C_1(\mathcal{D})$ tal que $d\varphi = w$
i.e. w cerrada $\iff w$ exacta. \mathcal{D} simplemente conexo $\iff \mathcal{D}$ no tiene huecos

Teorema 2.1.2

- Los abiertos estrellados son simplemente conexos.
- En \mathbb{R}^3 , un campo vectorial $\bar{V}(P, Q, R)$ con $P, Q, R \in C_1(\mathcal{D})$ donde $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$,

$$\bar{V} = \bar{\nabla} \varphi \iff w = Pdx + Qdy + Rdz \text{ es exacta.}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{cases} \mathcal{D} \text{ estrellado} \\ \text{ó} \\ \mathcal{D} \text{ simplemente conexo} \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \end{aligned}$$

Definición 2.1.2: Rotacional

Sea $\bar{V}(P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C_1 ($\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$), llamamos rotacional de \bar{V} a:

$$\overline{rot} \bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{V} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Teorema 2.1.3

Sea $\bar{V}(P, Q, R)$ de clase C_1 ($\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$), si \bar{V} es un campo de gradiente, entonces $\bar{\nabla} \times \bar{V} = \bar{0}$

Comentario:

Si \mathcal{D} es simplemente conexo (sin huecos) entonces el recíproco es cierto, $\overline{rot} \bar{V} = \bar{0} \Rightarrow \bar{V} = \bar{\nabla} \varphi$ donde $\varphi \in C_1(\mathcal{D})$

Definición 2.1.3: Divergencia

Sea $\bar{V}(P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C_1 ($\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$), llamamos divergencia de \bar{V} al escalar:

$$\overline{div} \bar{V} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Teorema 2.1.4

Sea $\bar{V}(P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C_2 ($\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$), entonces $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \times \bar{V} = 0$

Teorema 2.1.5

Si \mathcal{D} es simplemente conexo y $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0 \Rightarrow \bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$ (donde \bar{A} es un campo vectorial definido en \mathcal{D})

Comentario:

El campo \bar{A} no es único, de la misma manera que un campo escalar φ asociado a un campo de vectores.

Si $\bar{V} = \bar{\nabla} \varphi = \bar{\nabla}(\varphi + \text{cte})$ De la misma manera, tenemos que si $\bar{A}f = \bar{A} + \bar{\nabla}f$, entonces $\bar{\nabla} \times \bar{A}f = \bar{\nabla} \times (\bar{A} + \bar{\nabla}f) = \bar{\nabla} \times \bar{A} + \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla}f)$. Es decir, si $\bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$, existe f tal que $\bar{V} = \bar{\nabla} \times (\bar{A} + \bar{\nabla}f)$

Definición 2.1.4: Laplaciano Cartesiano

Sea φ un campo de clase C_2 en \mathbb{R}^2 , llamamos **Laplaciano de φ** al campo escalar $\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

Comentario:

Podemos decir que $\Delta\varphi$ se escribe como

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \iff \Delta\varphi = \overline{div} (\overline{grad} \varphi) = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \varphi$$

Teorema 2.1.6

Sea \bar{V} un campo de gradiente tal que $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$, tomando φ un campo escalar $\varphi \in C_2(\mathcal{D})$ tal que $\bar{V} = \bar{\nabla} \varphi$, entonces $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \varphi = \Delta\varphi = 0$

2.2 Aplicaciones a la física

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} & \dot{\gamma} \\ \overline{M} & \longmapsto \varphi(M) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \\ \overline{M} & \longmapsto \overline{\varphi(M)} & \end{array} \text{ donde } \overline{\varphi(M)} = \begin{pmatrix} \varphi_x(M) \\ \varphi_y(M) \\ \varphi_z(M) \end{pmatrix} \text{ vectorial}$$

Operador Nabla (operador diferencial)

$$\bar{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ en la base canónica de } \mathbb{R}^3$$

Gradiente

$$\overline{\text{grad}}\varphi = \bar{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (\text{Campos escalares})$$

Divergencia

$$\text{div}\bar{\varphi} = \bar{\nabla} \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} (\text{Producto escalar})$$

Rotacional

$$\overline{\text{rot}}\bar{\varphi} = \bar{\nabla} \times \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Laplaciano Escalar

$$\Delta\varphi = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}\varphi = \bar{\nabla}\bar{\nabla}\varphi = \bar{\nabla}^2\varphi \text{ (ecuación de difusión)}$$

Laplaciano Vectorial

$$\bar{\Delta}\bar{\varphi} = (\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z)$$

(Vector cuyas componentes son Laplacianos). Se usa en mecánica de fluidos, (Ecuación de Navier-Stokes), en electromagnetismo (ecuación de d'Alembert)

Significado del gradiente

Leyes en física

$$\begin{array}{l} \text{Ley de Holm local (potencial)} \\ \bar{f} = -\gamma \overline{\text{grad}V} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ley de Fourier (temperatura)} \\ \bar{f} = -\lambda \overline{\text{grad}T} \end{array}$$

Relaciones fundamentales

$$\bar{\nabla}(\bar{A} + \bar{B}) = \bar{\nabla}\bar{A} + \bar{\nabla}\bar{B}$$

$$\bar{\nabla} \times (\bar{A} + \bar{B}) = \bar{\nabla} \times \bar{A} + \bar{\nabla} \times \bar{B}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \varphi \bar{A} = \bar{\nabla}\varphi \cdot \bar{A} + \varphi \bar{\nabla} \cdot \bar{A}$$

$$\bar{\nabla} \times (\varphi \bar{A}) = \bar{A} \times \bar{\nabla}\varphi + \varphi (\bar{\nabla} \times \bar{A})$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B})$$

$$\Delta \bar{A} = \bar{\nabla}\bar{\nabla} \cdot \bar{A} - \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{A} \iff \Delta \bar{A} = \bar{\nabla}^2 \bar{A} - \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

Capítulo 3

Integrales de línea

3.1 Curvas paramétricas

Definición 3.1.1: Curva paramétrica

Sea I un intervalo de \mathbb{R} , f y g dos funciones definidas en I "suficientemente regulares".

Sea $C = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in I, M(t) = (x(t), y(t))\}$. Llamamos a C una **curva paramétrica** en \mathbb{R}^2 .
Tenemos $x = f(t)$, $y = g(t)$

Ejemplo 3.1.1

Tenemos $t \in I \in \mathbb{R}$, $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$ dados $\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \end{cases}$ tenemos $t = \frac{x-b_1}{a_1}$ lo que nos da
 $y = a_2 \left(\frac{x-b_1}{a_1} \right) + b_2 \iff y = \frac{a_2}{a_1} x + b_2 - \frac{a_2 b_1}{a_1}$ (ecuación de una recta) i.e. $y = F(x)$

Ejemplo 3.1.2

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi]$ tenemos $x^2 + y^2 = 1$, la parametrización de un círculo en el plano.

Definición 3.1.2: Curva paramétrica tangente

Sea $C = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in I, M(t) = (f(t), g(t))\}$ con f, g derivables en I .

Entonces, la curva paramétrica con $t_0 \in I$

$$\begin{cases} x = f'(t_0)t + f(t_0) \\ y = g'(t_0)t + g(t_0) \end{cases}$$

es la tangente a C en $M(t_0) = (f(t_0), g(t_0)) \neq (0, 0)$

Comentario:

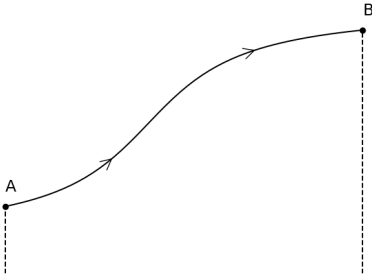
Como $f'(t_0) \neq 0$, gracias a que $x = f'(t_0)t + f(t_0)$, $t = \frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)}$, entonces si la ponemos en $y = g'(t_0)t + g(t_0)$,
 $y = g'(t_0) \left(\frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)} \right) + g(t_0) = \left[\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} x - \frac{g'(t_0)f(t_0)}{f'(t_0)} + g(t_0) \right] = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} (x - f(t_0)) + g(t_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} (x - x_0) + g(t_0)$
Si $y = F(x) \implies g(t) = F(f(t))$ $g'(t_0) = F'(f(t_0)) \cdot f'(t_0) \iff F'(x_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$ y finalmente,
[$y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$] ecuación de una tangente [...]

Interpretación vectorial:

Considerando la parametrización de la definición $(x_0 = f(t_0), y_0 = g(t_0))$ y sean $M(x, y), M_0(x_0, y_0) \implies \bar{T} = (f'(t_0), g'(t_0))$

$$\begin{cases} x = f'(t_0)t + x_0 \\ y = g'(t_0)t + y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - x_0 = f'(t_0)t \\ y - y_0 = g'(t_0)t \end{cases} \iff M_0\bar{M} = t\bar{T}, \text{ entonces } \bar{T} \text{ es tangente a } C \text{ en } M_0.$$

3.2 Integrales de línea



$C = \{M \in \mathbb{R}^2: \exists t \in [a, b], M(f(t), g(t))\}$ con f, g derivables en $[a, b]$, $A(f(a), g(a))$ y $B(f(b), g(b))$.

Consideremos $\bar{V}(P(x, y), Q(x, y))$ y sea w la 1-forma diferencial, i.e. $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Definición 3.2.1: Integral de línea

$$\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} \bar{V}(M) \cdot d\bar{M} = \int_{\overline{AB}} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \int_{\overline{AB}} w \text{ y tenemos}$$

$$\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} w = \int_a^b [P(f(t), g(t))f'(t) + Q(f(t), g(t))g'(t)] dt \rightarrow \text{¡Integral de Riemann!}$$

Donde $dx = f'(t)dt$, $dy = g'(t)dt$

Ejemplo 3.2.1 (Sea $w = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$, $(x, y) = (0, 0)$, necesitamos una curva parametrizada.)

Sea $C = \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, denotamos C^+ a la curva en el sentido trigonométrico.

Nos piden calcular $\gamma_{C^+} = \int_{C^+} w$.

$$\text{Volvemos a la definición: } \int_{C^+} w = \int_0^{2\pi} [\sin \theta (-\sin \theta) - \cos \theta (\cos \theta)] d\theta = -\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi$$

Donde $P(f(\theta), g(\theta)) = \sin \theta$ y $Q(f(\theta), g(\theta)) = -\cos \theta$. Y también, $f'(\theta) = -\sin \theta$ y $g'(\theta) = \cos \theta$

Comentario:

$$\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} \bar{V}(M) dM(t) = \int_a^b \bar{V}(M(t)) \cdot \bar{T}(t) \cdot dt$$

Donde $\bar{V}(M(t))$ puede ser un campo de fuerzas.

Ejemplo 3.2.2 (Sea $w = xy dx + y^2 dy + dz$ una 1-forma diferencial en \mathbb{R}^3 y sea C la curva orientada en \mathbb{R}^3 con la parametrización $\bar{V}(t) = (t^2, t^3, 1)$ con $t \in [0, 1]$. Calcular $\int_C w$)

$$\int_C w = \int_0^1 [t^5(2t) + t^6(3t^2) + 0] dt = \frac{13}{21}$$

Teorema 3.2.1

Si \bar{V} es un **campo de gradiente** (i.e. $\bar{V} = \overline{\text{grad}}\varphi = \bar{\nabla}\varphi$), $\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} \bar{V}(M) \cdot d\overline{M} = \int_{\overline{AB}} \bar{\nabla}\varphi(M) \cdot d\overline{M} = \int_{\overline{AB}} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$

Comentario:

- La circulación de un campo de gradiente no depende del camino, solamente de los valores del campo escalar φ definido por $\bar{V} = \bar{\nabla}\varphi$ en los extremos del camino \overline{AB} .
- $\gamma_{\overline{AB}} = 0$ si A y B están en la misma curva de nivel de φ

Teorema 3.2.2

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} (w_1 + w_2) &= \int_{\overline{AB}} w_1 + \int_{\overline{AB}} w_2 & \left(\bar{V}_1(M) + \bar{V}_2(M) \right) d\overline{M} &= \int_{\overline{AB}} \bar{V}_1(M) d\overline{M} + \int_{\overline{AB}} \bar{V}_2(M) d\overline{M} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \int_{\overline{AB}} \lambda w_1 &= \lambda \int_{\overline{AB}} w_1 & \forall \lambda \in \mathbb{R} \int_{\overline{AB}} \lambda \bar{V}_1(M) d\overline{M} &= \lambda \int_{\overline{AB}} \bar{V}_1(M) d\overline{M} \\ \text{Si } C \in \overline{AB}, \text{ entonces } \int_{\overline{AB}} w &= \int_{\overline{AC}} w + \int_{\overline{CB}} w & \int_{\overline{AB}} \bar{V}_1(M) d\overline{M} &= \int_{\overline{AC}} \bar{V}_1(M) d\overline{M} + \int_{\overline{CB}} \bar{V}_1(M) d\overline{M} \\ \int_{\overline{AB}} w &= - \int_{\overline{BA}} w \text{ (Hay que cambiar la parametrización para mostrarlo)} \end{aligned}$$

Corolario 3.2.1

Si \overline{AB} es una curva cerrada, entonces $A = B$, y si \bar{V} es un campo de gradiente, entonces $\int_{\overline{AB}} \bar{V}(M) d\overline{M} = 0$

Definición 3.2.2: Campo conservativo

Se dice que un campo vectorial es conservativo si la circulación del campo vectorial es nula en toda curva cerrada.

Teorema 3.2.3

Sean A y B dos puntos del plano, la circulación de un campo conservativo no depende del camino para ir de A a B .

Teorema 3.2.4

Si \bar{V} es un campo de gradiente, entonces \bar{V} es un campo conservativo.

Ejercicio 3.2.1 Sea $\bar{V}(M) = \frac{3x^2+y^2}{y^2} \hat{x} - \frac{2x^3}{y^3} \hat{y}$

- Sean $A(-1, 1)$ y $B(1, 1)$ calcular $\gamma_{\overline{AB}}$ con $\overline{AB} = [A B]$ (segmento).
- Idem con $\overline{AB} \equiv$ semicírculo de centro $\Omega(0, 1)$

Ver TD2

Teorema 3.2.5

Si \bar{V} es un campo conservativo, entonces \bar{V} es un campo de gradiente.

Comentario:

Destacar que ahora tenemos la doble implicación entre campo conservativo y de gradiente.

3.3 Longitud de una curva

Definición 3.3.1: Longitud de una curva

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva paramétrica de clase C_1 , la **longitud de γ** viene dada por la expresión:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Comentario:

Si $\gamma(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ en coordenadas cartesianas, entonces $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt$

Ejercicio 3.3.1 Halla la longitud de arco de la siguiente curva: $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ entre los puntos $(0, 0, 0)$ y $(3, 3, 2)$

$$L(\gamma) = \int_{(0,0,0)}^{(3,3,2)} \sqrt{3^2 + 36t^2 + 36t^4} dt = \int_0^1 \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} dt = 3 \int_0^1 \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} dt = 3 \int_0^1 (2t^2 + 1) dt = [2t^3 + 3t]_0^1 = 5$$

Ejercicio 3.3.2 Halla la longitud de arco de la siguiente curva: $\gamma(t) = \begin{cases} (\cos(t), \sin(t), 3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ (-1, -t + \pi, 3t) & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

Tenemos $\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 3^2} = \sqrt{10}$ y $\|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{10}$,

$$L(\gamma_1(t)) = \int_0^\pi \sqrt{10} = \pi\sqrt{10} \quad L(\gamma_2(t)) = \int_\pi^{2\pi} \sqrt{10} = \pi\sqrt{10} \implies L(\gamma(t)) = L(\gamma_1(t)) + L(\gamma_2(t)) = \pi\sqrt{10} + \pi\sqrt{10} = 2\pi\sqrt{10}$$

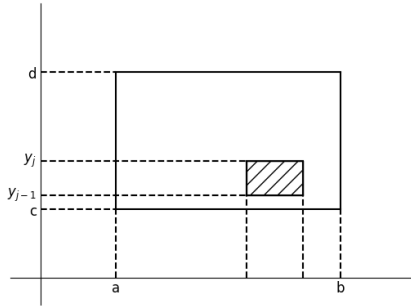
Capítulo 4

Integrales dobles

4.1 Introducción

Sea $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ (con $a < b$ y $c < d$) un rectángulo. Como se hizo con la integral simple, vamos a subdividir los intervalos de los ejes (abscisas y ordenadas). Sean las particiones de $[a, b]$ y $[c, d]$

$$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \end{cases} \quad \text{Obtenemos así las mallas, o Rectángulos Elementales: } R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$



1. Subdivisión o malla regular

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + h, & i = 1, \dots, n \\ y_j = x_{j-1} + k, & j = 1, \dots, m \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_i = x_{i-1} + h, & i = 1, \dots, n \\ y_j = x_{j-1} + k, & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

2. Función escalonada en el rectángulo \mathcal{D}

Sean $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo y $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. f es acotada en \mathcal{D}
2. $\forall x \in (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), f(x) = \mathcal{K}_{ij} \in \mathbb{R}$

Se dice que f es escalonada.

3. Definición de la integral doble de una función

Sean $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ y f una función escalonada a una malla regular de \mathcal{D} , se define la integral doble con:

$$\mathcal{I}(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathcal{K}_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \quad (\text{la malla más fina posible})$$

Se llama $\mathcal{I}(f)$ a la integral doble de f sobre \mathcal{D} denotada: $\mathcal{I}(f) = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx dy$

4. Criterio de integrabilidad de funciones

Definición 4.1.1: Función integrable en \mathcal{D}

Sea $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es integrable en \mathcal{D} si $\forall \epsilon > 0, \exists f_1, f_2$ escalonadas en \mathcal{D} tales que:

1. $f_1 \leq f \leq f_2$
2. $\left| \iint_{\mathcal{D}} f_2(x, y) \, dx dy - \iint_{\mathcal{D}} f_1(x, y) \, dx dy \right| < \epsilon$

Comentario:

El segundo punto es equivalente a cuando en una variable hablábamos de la diferencia de la suma superior y la suma inferior debe ser menor a epsilon $|\mathcal{S}_s - \mathcal{S}_i| < \epsilon$

Teorema 4.1.1

Sea $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable en \mathcal{D} y sea $\mathcal{M}_{ij} \in (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$ y sea $\delta_{m,n} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\mathcal{M}_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$, entonces $\lim_{(m,n) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \delta_{m,n} \in \mathbb{R}$ y denotamos $\lim_{m,n} \delta_{m,n} = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ llamada integral doble de f en \mathcal{M} .

Comentario:

La condición del teorema anterior es que f tiene que ser integrable, pero no tiene porqué ser escalonada.

Comentario:

Al definir la malla regular, definimos $h = \frac{b-a}{n}$ y $k = \frac{d-c}{m}$, que tenderán a cero cuando n y m tiendan a infinito.

Teorema 4.1.2

Sea $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definida y continua en $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ entonces f es integrable en \mathcal{D} , siempre que $m\mathcal{D}$ sea un compacto.

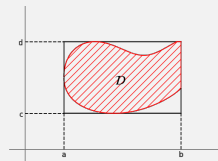
Comentario:

Es interesante conocer el *Teorema de Pikoliv*, que nos dice que el producto cartesiano de compactos es un compacto.

Teorema 4.1.3

Sean f y g dos funciones integrables en \mathcal{D} , entonces:

1. $\iint_{\mathcal{D}} (f + g)(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy + \iint_{\mathcal{D}} g(x, y) dx dy$
"La integral doble de la suma es la suma de integrales"
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \iint_{\mathcal{D}} \lambda f(x, y) dx dy = \lambda \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$
3. $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, f(x, y) \leq g(x, y) \implies \iint_{\mathcal{D}} f dx dy \leq \iint_{\mathcal{D}} g dx dy$
4. $|f|$ integrable en $\mathcal{D} \implies \left| \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_{\mathcal{D}} |f(x, y)| dx dy$

Comentario:

Si $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio 'regular', definimos \mathcal{D} rectángulo con \tilde{f} en \mathcal{D}' tal que:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{en } \mathcal{D} \\ 0 & \text{en } \mathcal{D}' \setminus \mathcal{D} \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \boxed{\iint_{\mathcal{D}'} \tilde{f} dx dy = \iint_{\mathcal{D}} f dx dy}$$

Comentario:

Cuando f es una función positiva sobre una región rectangular \mathcal{R} del plano, podemos interpretar la integral doble de f sobre \mathcal{R} como el volumen de la región tridimensional sobre el plano acotada abajo por \mathcal{R} y arriba por la superficie $z = f(x, y)$

4.2 Teoremas de Fubini

Teorema 4.2.1 Fubini en un rectángulo (versión débil)

Sea R un rectángulo de \mathbb{R}^2 , $R = [a, b] \times [c, d]$ y sea f una función integrable sobre R , tenemos:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

(las integrales dobles son permutables)

Ejemplo 4.2.1 (Calcular $I = \iint_A e^{x+y} dx dy$ con $A = [0, 1] \times [0, 2]$)

$$I = \iint_A e^x e^y dx dy = \int_0^1 e^x dx \cdot \int_0^2 e^y dy = [e^x]_0^1 \cdot [e^y]_0^2 = (e - 1)(e^2 - 1)$$

Ejemplo 4.2.2 (Calcular $I = \iint_R f(x, y) dx dy$ con $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y f definida en R por $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$)

$$I = \iint_R f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 + 2y^2) dx dy = \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x \right]_0^2 dy = \int_0^2 \left(32 - \frac{8}{3} - 4y^2 \right) dy = \left[32y - \frac{8}{3}y - \frac{4}{3}y^3 \right]_0^2 = 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = 48$$

Teorema 4.2.2 Fubini versión fuerte

- Sean φ_1 y φ_2 dos funciones continuas en un rectángulo compacto de $[a, b]$ de \mathbb{R} (uniformemente continuas) tales que:
 $\forall x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ y sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
 Si $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathcal{D} (entonces f es integrable en \mathcal{D}) tenemos:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

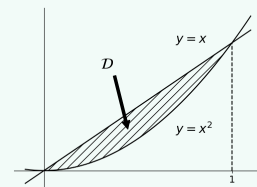
- Sean ψ_1 y ψ_2 dos funciones continuas en un rectángulo compacto de $[c, d]$ de \mathbb{R} tales que:
 $\forall x \in [c, d], \psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ y sea $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$
 Si $f: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathcal{D}' tenemos:

$$\iint_{\mathcal{D}'} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

(la integral se hace de forma horizontal).

Ejemplo 4.2.3 (Calcular $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ con $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ (no es un rectángulo), sobre la función $f(x, y) = x + y$)

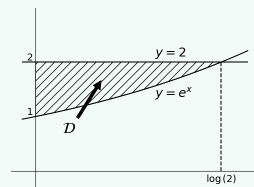
$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{3}{20} \end{aligned}$$



Ejemplo 4.2.4 (Calcular $\iint_{\mathcal{D}} e^x dx dy$ con $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \log(y), 1 \leq y \leq 2\}$)

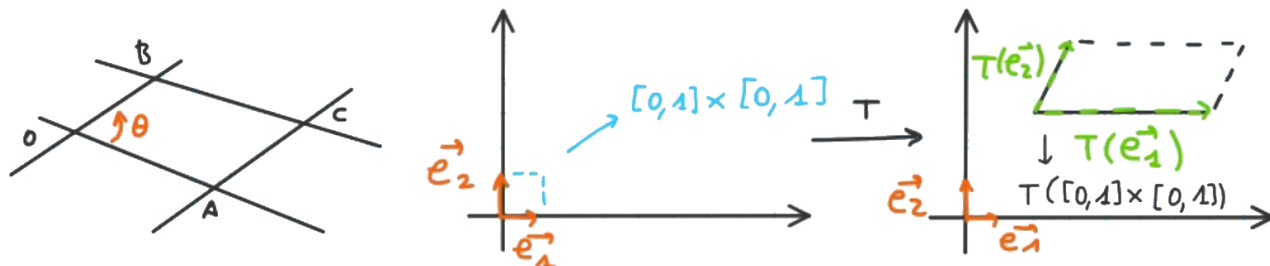
Como $f(x, y) \in C_0(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ Podemos aplicar el *Teorema de Fubini*

$$\begin{cases} \iint_{\mathcal{D}} e^x dx dy = \int_1^2 \int_0^{\log y} e^x dx dy = \int_1^2 (y-1) dy = \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^2 = \frac{1}{2} \\ \iint_{\mathcal{D}} e^x dx dy = \int_0^{\log 2} \int_1^2 e^x dy dx = \int_0^{\log 2} e^x (2 - e^x) dx = \frac{1}{2} \end{cases}$$



4.3 Teorema de cambio de variable

Vamos a preparar la base para un teorema considerando un paralelogramo $\mathcal{A}_{(CA \ CB)} = \|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\|$ Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineal (rotación, homotecia, ...) $\mathcal{A}(T([0, 1]^2)) = \|T(\vec{e}_1) \wedge T(\vec{e}_2)\|$



Tenemos $T(\vec{e}_1) = T_{11}\vec{e}_1 + T_{21}\vec{e}_2$ (porque tomamos como base \vec{e}_1, \vec{e}_2 , T_{ij} serán únicos). *idem* con \vec{e}_2 : $\begin{cases} T(\vec{e}_1) = T_{11}\vec{e}_1 + T_{21}\vec{e}_2 \\ T(\vec{e}_2) = T_{12}\vec{e}_1 + T_{22}\vec{e}_2 \end{cases}$

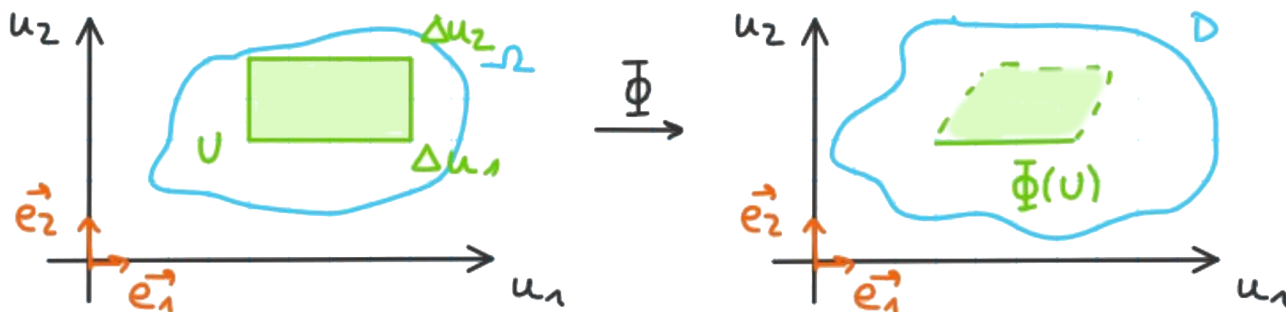
lo que nos da $\|T(\vec{e}_1) \wedge T(\vec{e}_2)\| = |\det(T)| = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$ que nos habla de la matriz asociada a la aplicación lineal T .

Entonces, $\mathcal{A}(T([0, 1]^2)) = |\det(T)|$.

De forma general, sean $i = 1, 2$ $L_i > 0$: $\mathcal{A}(T([0, L_1]) \times T([0, L_2])) = \|T(L_1\vec{e}_1) \wedge T(L_2\vec{e}_2)\| = L_1 L_2 |\det(T)|$. $L_1\vec{e}_1$ es un vector colineal a L_1 . Si hacemos un cambio de variable, cambia la geometría y con ello el área.

Sea $\phi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$
Sea $U(u_1, u_2) \mapsto \phi(U) = (\phi_1(U), \phi_2(U))$ y sea $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ denotamos $\phi(U) = M(x_1, x_2) = (\phi_1(u_1, u_2), \phi_2(u_1, u_2))$

$\Rightarrow \phi(\Omega) = \mathcal{D}$, Como vemos en la siguiente figura, ϕ deforma el rectángulo inicial en otra cosa.



Suponemos que:

1. ϕ es una biyección
2. ϕ y ϕ^{-1} son de clase C_1 en su dominio respectivo.

Es decir, que ϕ sea un C_1 -difeomorfismo.

Tenemos entonces $\phi(U+h) = \phi(U) + D_\phi(U) \cdot h + o(h)$ con $D_\phi(U) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1(U)}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_1(U)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \phi_2(U)}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_2(U)}{\partial u_2} \end{vmatrix}$

Si Δu_1 y Δu_2 son 'pequeños' entonces $\mathcal{A}(\phi([u_1, u_1 + \Delta u_1] \times [u_2, u_2 + \Delta u_2]))$ es el área de un paralelogramo, es decir $\|D_\phi(U)(\Delta u_1 \vec{e}_1) \wedge D_\phi(U)(\Delta u_2 \vec{e}_2)\|$, donde $D_\phi(U)$ es la imagen de la parte lineal de ϕ .

Tenemos finalmente,

$$\mathcal{A}(\phi([u_1, u_1 + \Delta u_1] \times [u_2, u_2 + \Delta u_2])) = \Delta u_1 \Delta u_2 \|D_{\phi(U)}(\vec{e}_1) \wedge D_{\phi(U)}(\vec{e}_2)\| = \Delta u_1 \Delta u_2 |\det(D_\phi(u_1, u_2))| \leftarrow \text{¡El Jacobiano!}$$

Teorema 4.3.1 Cambio de variable

Sea $f \in C_0(\overline{\mathcal{D}})$ (donde \mathcal{D} es un abierto acotado de \mathbb{R}^2) entonces para todo ϕ C_1 -difeomorfismo de $\overline{\Omega}$ en $\overline{\mathcal{D}}$ tenemos:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} f(\phi(u_1, u_2)) |\det(D_\phi(u_1, u_2))| du_1 du_2$$

Comentario:

Aplicación: Cambio a polares $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \implies g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$|J(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$$

Entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Ejemplo 4.3.1 (Calcular $\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$ con $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$)

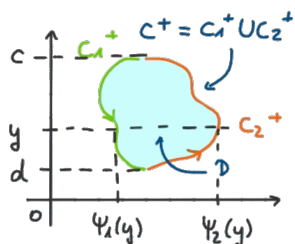
Usamos el cambio de variable de polares $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} (x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} r \in [0, 1] \\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

Tenemos $1 + x^2 + y^2 = 1 + r^2$

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+r^2} r d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{4} [\log(1+r^2)]_0^1 = \frac{\pi \log(2)}{4}$$

4.4 Teorema de Green-Riemann

Si $f \in C_1([a, b])$ entonces $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$. Nos gustaría generalizar este resultado al plano.



Sea f una función que admita derivadas parciales continuas en $\overline{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^2$:

$$\iint_{\mathcal{D}} dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx \right) dy = \int_{y=c}^{y=d} [f(\psi_2(y), y) - f(\psi_1(y), y)] dy$$

$$C_2^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, M_2(t) = (\psi_2(t), t)\} \text{ con } t \in [c, d]$$

$$C_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, M_1(t') = (\psi_1(t'), t')\} \text{ con } t' \in [d, c]$$

Y aplicamos un cambio de variable para pasar de $[d, c]$ a $[c, d]$ en C_2 :

$$\text{Sea } t = \alpha t' + \beta \text{ con } t \in [c, d]: \begin{cases} c = \alpha d + \beta \\ d = \alpha c + \beta \end{cases} \implies c - d = \alpha(d - c) \implies \alpha = -1$$

Entonces, $\beta = c - \alpha d = c + d$. Tenemos, $t = -t' + c + d \Leftrightarrow t' = c + d - t$. Y con este resultado tenemos:
 $C_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, M_1(t) = (\psi_1(c + d - t), c + d - t)\}$ con $t \in [c, d]$

Para estudiar la integral, debemos centrar nuestra atención en $\int_c^d f(\psi_2(t), t) dt$

$$\int_{C_2^+} f dy = \int_{C_2^+} 0 dx + f dy = \int_c^d \vec{V}(M_2(t)) \cdot M_2'(t) dt \quad \text{con } \vec{V}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}\right), M_2(t) \begin{pmatrix} \psi_2(t) \\ t \end{pmatrix}, M_2'(t) \begin{pmatrix} \psi_2'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces, } \int_{C_2^+} f dy = \int_c^d f(M_2(t)) \cdot 1 dt = \int_c^d f(\psi_2(t), t) dt$$

$$\int_{C^+} f dy = \int_c^d \vec{V}(M_1(t)) \cdot M_1'(t) dt = - \int_c^d f(M_1(t)) dt = - \int_c^d f(\psi_1(c + d - t), c + d - t) dt = \int_d^c f(\psi_1(s), s) ds =$$

$$= - \int_c^d f(\psi_1(s), s) ds = \int_{C_1^+} f dy$$

$$\text{con } \vec{V}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}\right), M_1(t) \begin{pmatrix} \psi_1(c + d - t) \\ c + d - t \end{pmatrix}, M_1'(t) \begin{pmatrix} \psi_1'(c + d - t) \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{cases} s = c + d - t \\ ds = -dt \end{cases}$$

En conclusión,

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_c^d f(\psi_2(y), y) dy - \int_c^d f(\psi_1(y), y) dy = \int_{C_2^+} f dy + \int_{C_1^+} f dy = \int_{C^+} f dy$$

Si repetimos con la derivada parcial respecto a y , de la misma manera obtenemos el mismo resultado, pero cambiando el signo a causa de la orientación de la curva.

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_{C^+} f dy \\ \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy dx &= - \int_{C^+} f dy \end{aligned}}$$

Teorema 4.4.1 Green-Riemann

Sean $f, g \in C_1(\overline{\mathcal{D}})$ y sea C^+ la frontera orientada de \mathcal{D} , entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C^+} f dx + g dy$$

Comentario:

Aplicación del teorema de Green-Riemann

1. Si $w = f dx + g dy$, entonces $dw = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$

En el caso del cálculo integral, denotamos $dx \wedge dy \equiv dx dy$, lo que nos permite escribir $\iint_{\mathcal{D}} dw = \int_{\sigma(\mathcal{D})} w$

2. Si $\vec{V}(V_1, V_2)$, entonces $\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\sigma(\mathcal{D})} V_1 dx + V_2 dy = \int_{\sigma(\mathcal{D})} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M}$

Si $\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0$ en \mathcal{D} , entonces $w = V_1 dx + V_2 dy$ es cerrada, y si \mathcal{D} es un abierto estrellado de \mathbb{R}^2 , entonces w es exacta $\implies \vec{V}$ es un campo de gradiente.

Entonces si $\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0$ en $\mathcal{D} \implies \int_{\mathcal{D}} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = 0 \forall$ curva cerrada.

Comentario:

Sea f una función que admite derivadas parciales continuas ($\in C_1$) y además satisface la Ecuación de Laplace $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \right)$, entonces $\int_C \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$

Si aplicamos el Teorema de Green-Riemann:

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = \iint_{\mathcal{D}} \left[\frac{-\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] dx dy = 0$$

Comentario:

El *Teorema de Green-Riemann* se cumple también para una región con un número finito de agujeros, siempre que las curvas sean simples, cerradas y regulares. Debemos integrar sobre cada componente de la frontera en la dirección en la que la región R se mantiene a la izquierda mientras avanzamos. ¿Qué significa esto? Es una forma de elegir el sentido en la frontera.

En la figura de la izquierda, hay que dejar la zona azul a nuestra izquierda (valga la redundancia).



En la práctica, se crean dos regiones (arriba y abajo). Así, nos quitamos el hueco y tenemos dos curvas que cumplen las condiciones.

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy$$

4.4.1. Cálculo de Área

Caso particular

Supongamos que $\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 1$ en \mathcal{D}

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{D}) &= \iint_{\sigma\mathcal{D}} 1 dx dy = \int_{\sigma\mathcal{D}} V_1 dx + V_2 dy \quad \text{y podemos elegir } \vec{V} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \text{ ó } \vec{V} \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ó } \vec{V} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D}) &= \int_{\sigma\mathcal{D}} x dy = \int_{\sigma\mathcal{D}} y dx = \frac{1}{2} \int_{\sigma\mathcal{D}} -y dx + x dy \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.1 (Cálculo del área de una elipse \mathcal{D})

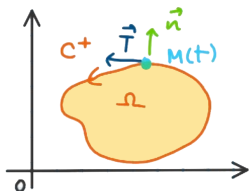
Tomando la parametrización $\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \int_{\sigma\mathcal{D}} -y dx + x dy = \int_{\sigma\mathcal{D}} \vec{V}(M) d\vec{M} = \int_0^{2\pi} \vec{V}(M(t)) \vec{M}'(t) dt$$

y tenemos, $\vec{V} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}(M(t)) = \frac{1}{2} (-b \sin(t), a \cos(t))$ y $M'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$

$$\vec{V}(M(t)) \cdot \vec{M}'(t) = \frac{1}{2} (ab \sin^2(t) + ab \cos^2(t)) = \frac{1}{2} ab \quad \text{Finalmente, } \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} ab dt = \pi ab$$

Flujo y divergencia de un campo vectorial



Tenemos $M(t) = (f(t), g(t))$

$$\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'(t) \\ -f'(t) \end{pmatrix}$$

Definición 4.4.1: Flujo

Sea \vec{V} un campo vectorial, llamamos flujo de \vec{V} , denotado ϕ a través de $\sigma\Omega$ a la cantidad

$$\phi = \int_{\sigma\Omega} \vec{V} \cdot d\vec{n} = \iint_a^b \vec{V}(M(t)) \cdot \vec{n}(M(t)) dt$$

Teorema 4.4.2 Green-Ostrogradsky o Teorema de la divergencia (en \mathbb{R}^2)

$$\phi = \int_{\sigma\Omega} \vec{V} \cdot d\vec{n} = \int_a^b \vec{V}(M(t)) \cdot \vec{n}(M(t)) dt = \iint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{V} dx dy$$

4.5 Superficies parametrizadas

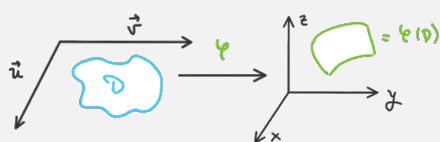
4.5.1. Introducción

Definición 4.5.1: Superficie parametrizada

Una **superficie parametrizada** es una función $\varphi: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. La superficie denotada S corresponde a $\varphi(x, y) \forall (x, y) \in \mathcal{D}$ es una imagen $S = \varphi(\mathcal{D})$

Comentario:

Podemos ver $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, y si además pedimos a φ ser de clase C_1 o diferenciable, entonces S se denomina **Superficie diferenciable o de clase C_1** .



Si suponemos que φ es diferenciable en $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, fijando un cierto u_0 obtenemos una función con imagen una curva en $S = \varphi(\mathcal{D})$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \varphi(v_0, t)$$

Esto nos permite definir un vector tangente: $\vec{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{x} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{y} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{z}$.

Si ahora fijamos v_0 en lugar de u_0 , podemos tener una función $t \mapsto \varphi(t, v_0)$ y tenemos otra curva sobre $S = \varphi(\mathcal{D})$ y un vector tangente \vec{T}_u *idem* con \vec{T}_v .

El hecho de que \vec{T}_u y \vec{T}_v sean tangentes a dos curvas sobre una superficie S en $\varphi(u_0, v_0)$ entonces determinan un plano tangente a la superficie S en ese punto. El vector $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$ es normal al plano generado por \vec{T}_u y \vec{T}_v , y entonces es normal a S .

Definición 4.5.2: Superficie suave

Se dice que una superficie S es **suave** en $\varphi(u_0, v_0)$ si $\vec{T}_u \times \vec{T}_v \neq \vec{0}$ en (u_0, v_0) . Se dice que S es **suave** si lo es para todos los puntos de la superficie S .

Definición 4.5.3: Plano tangente

Si una superficie S es suave (i.e. $\bar{T}_u \times \bar{T}_v \neq \bar{0}$) definimos **el plano tangente de S en $\Phi(u_0, v_0)$** como el plano determinado por \bar{T}_u y \bar{T}_v y con vector normal $\bar{n} = \bar{T}_u \times \bar{T}_v$

Una ecuación del plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0) es:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \bar{n} = 0 \quad (4.1)$$

con \bar{n} evaluado en (u_0, v_0)

Si $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ entonces 4.1 se escribe:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

Ejemplo 4.5.1 (Sea $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$ ¿Existe un plano tangente?

Hallar el plano tangente en $\Phi(0, 1)$

$$\bar{T}_u = \cos(v) \bar{i} + \sin(v) \bar{j} + 2u \bar{k}$$

$$\bar{T}_v = -\sin(v) \bar{i} + \cos(v) \bar{j} + 2v \bar{k}$$

El plano tangente en $\Phi(u, v)$ es el conjunto de vectores que pasen por $\Phi(u, v)$ perpendiculares a $\bar{T}_u \times \bar{T}_v$
Tenemos:

$$\bar{T}_u \times \bar{T}_v \neq \bar{0} = \begin{pmatrix} -2u^2 \cos(v) + 2v \sin(v) \\ -2u^2 \sin(v) - 2v \cos(v) \\ u \end{pmatrix} \quad \bar{T}_u \times \bar{T}_v = \bar{0} \iff (u, v) = (0, 0)$$

Entonces el plano tangente en $\Phi(0, 0)$ pero sí en los otros puntos. Por ejemplo en $\Phi(0, 1) = (1, 0, 1)$ tenemos

$$\bar{n} = \bar{T}_u \times \bar{T}_v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ así que una ecuación del plano tangente es: } -2(x - 1) + (z - 1) = 0 \text{ es decir, } z = 2x - 1$$

4.5.2. Área de una superficie

En esta sección, consideraremos sólo superficies suaves a trozos que sean uniones de imágenes de superficies parametrizadas $\Phi_i: \mathcal{D}_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que: (Los 'quizás' son a causa de medidas matemáticas que se definen en *Análisis Funcional*)

1. \mathcal{D}_i es una región elemental del plano.
2. Φ_i es de clase C_1 y biyectiva, excepto, quizá, en $\partial\mathcal{D}$.
3. La imagen de Φ_i es suave, excepto, quizá, en un número finito de puntos.

Definición 4.5.4: Área de una superficie

Se define el **área de una superficie** $\mathcal{A}(S)$ de una superficie parametrizada por:

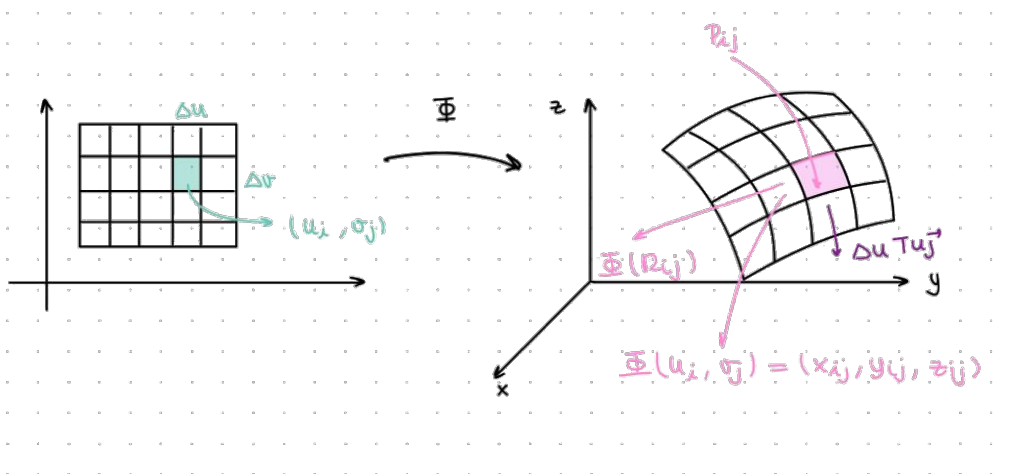
$$\mathcal{A}(S) = \iint_{\mathcal{D}} \|\overline{T}_u \times \overline{T}_v\| \, du \, dv$$

Comentario:

En el caso que S fuera unión de superficies S_i su área será la suma de las áreas de las S_i .

Entonces tenemos:

$$\mathcal{A}(A) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2} \, du \, dv \quad \text{donde} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$



Hay que considerar una porción de \mathcal{D} y sea R_{ij} el ij -ésimo rectángulo con vértices $(u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1}), (u_{i+1}, v_{j+1})$. Los valores de \overline{T}_u y \overline{T}_v en (u_i, v_j) serán determinados \overline{T}_{u_i} y \overline{T}_{v_j} . Podemos pensar los vectores $\Delta u \overline{T}_{u_i}$ y $\Delta v \overline{T}_{v_j}$ como tangentes a la superficie en $\Phi(u_i, v_j) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ donde $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ y $\Delta v = v_{j+1} - v_j$

Entonces, estos vectores forman un paralelogramo P_{ij} que está en el plano tangente a la superficie en (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) . Para n grande, (es una subdivisión de n trozos), el área de P_{ij} es una buena aproximación al área de $\Phi(R_{ij})$. Como el área del paralelogramo generado por dos vectores \overline{v}_1 y \overline{v}_2 es $\|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\|$ entonces $\mathcal{A}(P_{ij}) = \|\Delta u \overline{T}_{u_i} \times \Delta v \overline{T}_{v_j}\| = \Delta u \Delta v \cdot \|\overline{T}_{u_i} \times \overline{T}_{v_j}\|$

Por lo tanto, el área total es $\mathcal{A}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{A}(P_{ij})$ y cuando $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{A}_n \rightarrow \iint_{\mathcal{D}} \|\overline{T}_u \times \overline{T}_v\| \, du \, dv$

Ejemplo 4.5.2 (Sea \mathcal{D} la región determinada por $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 1$ y sea $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

Sea la parametrización del cono $S: \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r \end{cases}$ hallar su área de superficie.)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = -r \cos \theta \quad \text{y} \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = r \sin \theta \implies$$

$$\implies \|\bar{T}_r \times \bar{T}_\theta\| = \sqrt{r^2 + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{2}r$$

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \pi \int_0^1 \sqrt{2}r \, dr \, d\theta = \sqrt{2}\pi$$

Comentario:

Para confirmar que es el área de $\Phi(\mathcal{D})$ debemos comprobar que Φ es biyectiva para puntos que no están en la frontera de \mathcal{D}

Sea \mathcal{D}_0 el conjunto de (r, θ) tales que $0 < r < 1$ y $0 < \theta < 2\pi$ i.e. $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \setminus \partial \mathcal{D}$

Para ver que Φ es biyectiva, suponemos que $\Phi(r, \theta) = \Phi(r', \theta')$ pero $(r, \theta), (r', \theta') \in \mathcal{D}_0$

Tenemos:

$$\begin{cases} r \cos \theta = r' \cos \theta' \\ r \sin \theta = r' \sin \theta' \\ r = r' \end{cases} \implies \begin{cases} \cos \theta = \cos \theta' \\ \sin \theta = \sin \theta' \end{cases} \implies \theta = \theta' \text{ ó } \theta = \theta' + 2\pi$$

En conclusión, $\begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \end{cases}$ y eso nos dice que Φ es biyectiva.

Ejemplo 4.5.3 (Una helicoides se define como $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \theta \end{cases}$ y \mathcal{D} es la región donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 1$. Hallar su área.)

$$\text{Calculamos } \frac{\partial(x,y)}{\partial(1,0)} = r \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(1,0)} = \sin \theta \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(1,0)} = \cos \theta$$

$$\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{D}} \|\bar{T}_r \times \bar{T}_\theta\| \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \, dr = \pi \left(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \right)$$

Comentario:

Si consideramos una superficie \mathcal{S} dada con $z = f(x, y)$ donde $(x, y) \in \mathcal{D}$ admite la parametrización

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad \text{con } (u, v) \in \mathcal{D}.$$

Si f es de clase C_1 , entonces la superficie es suave, y el cálculo del área se reduce a:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

Ejemplo 4.5.4 (Calcular el área de la superficie de la esfera \mathcal{S} definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (Indicación: calcular el área del hemisferio superior \mathcal{S}^+ (i.e. con $z \geq 0$)))

Tenemos $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ con $(x^2 + y^2 \leq 1)$ Sea \mathcal{D} la región de $(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1$

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}^+) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1} dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

Aplicamos el *Teorema de Fubini*:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}^+) = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx = \int_{-1}^1 \left[\arcsin \left(\frac{y}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) dx = 2\pi$$

Por simetría, $\mathcal{A}(\mathcal{S}^-) = 2\pi$ y finalmente $\mathcal{A}(\mathcal{S}^+) + \mathcal{A}(\mathcal{S}^-) = 4\pi$

4.6 Integrales de funciones escalares sobre superficies

Definición 4.6.1

Sea f una función continua con valores reales definida en \mathcal{S} , La integral de f sobre \mathcal{S} se define:
 $\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} f d\mathcal{S}$ (donde $d\mathcal{S}$ es un diferencial de superficie)

$$\iint_{\mathcal{S}} f d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} f(\Phi(u, v)) \|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\| du dv$$

Comentario:

1. Si $f \equiv 1$ volvemos a encontrar la fórmula del área
2. La integral de superficie, como el área de superficie, no depende de la parametrización elegida.
3. Si \mathcal{S} es una unión de superficies parametrizadas, si $i = 1, \dots, N$ que no se intersecan excepto quizá, a lo largo de curvas que definen sus fronteras, entonces: $\iint_{\mathcal{S}} f d\mathcal{S} = \sum_{i=1}^N \iint_{\mathcal{S}_i} f d\mathcal{S}_i$

Ejemplo 4.6.1 (Consideramos el helicoides \mathcal{S} anterior. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Hallar $\iint_{\mathcal{S}} f d\mathcal{S}$)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = 2 \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \sin \theta \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \cos \theta \quad \text{con } r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi)$$

Tenemos $f(r \cos \theta, r \sin \theta, 0) = \sqrt{r^2 + 1}$ lo que nos da

$$\iint_{\mathcal{D}} f d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} f(\Phi(r, \theta)) \|\bar{T}_r \times \bar{T}_\theta\| dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{r^2 + 1} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} d\theta = \frac{8}{3}\pi$$

Comentario:

Si $z = g(x, y)$ con $g \in C_1$ tenemos:

$$\iint_{\mathcal{S}} f d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Ejemplo 4.6.2 (Sea \mathcal{S} una superficie definida por $z = x^2 + y$ donde \mathcal{D} es la región caracterizada por $0 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$. Calcular $\iint_{\mathcal{D}} x d\mathcal{S}$)

$$\begin{aligned} \text{Tenemos } \iint_{\mathcal{S}} x d\mathcal{S} &= \iint_{\mathcal{D}} x \sqrt{1 + 4x^2 + 1} dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 x \sqrt{4x^2 + 2} dx \right) dy = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 8x (4x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} dx \right) dy = \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \left[(2 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 dy = \frac{1}{12} \int_{-1}^1 \left(6^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right) dy = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Comentario:

Si $z = g(x, y)$

$$\Phi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$$

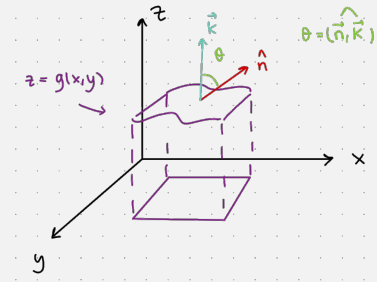
Un vector normal a Φ es $\bar{n} = \bar{\nabla}\Phi$ es decir,

$$\bar{n} = -\frac{\partial g}{\partial x} \bar{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \bar{j} + \bar{k}$$

$$\bar{n}, \bar{k} = \|\bar{n}\| \cdot \|\bar{k}\| \cdot \cos(\bar{n}, \bar{k}) \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\bar{n} \cdot \bar{k}}{\|\bar{n}\| \cdot \|\bar{k}\|} = \frac{\bar{n} \cdot \bar{k}}{\|\bar{n}\|} = \frac{1}{\|\bar{n}\|} \Leftrightarrow \|\bar{n}\| = \frac{1}{\cos \theta}$$

(sabiendo que \bar{k} es unitario y es $(0, 0, 1)$)

Al final obtenemos,
$$\iint_S f dS = \iint_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos \theta} dx dy$$



Ejemplo 4.6.3 (Calcular $\iint_S x dS$ donde S es el triángulo con vértices $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ (indicación: encontrar un vector normal \bar{n} unitario, tendríamos $\bar{n} \cdot \bar{k} = \cos \theta$))

Esta superficie es el plano dado por $x + y + z = 1$. Un vector normal \bar{n} a este plano tiene coordenadas $(1, 1, 1)$. Tenemos $\|\bar{n}\| = \sqrt{3}$ lo que nos da un vector normal unitario a este plano $\bar{n} = \frac{\bar{n}}{\|\bar{n}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ esto va vertical. Con la fórmula del comentario anterior, tenemos $\iint_S x dS = \iint_D \frac{x}{\bar{n} \cdot \bar{k}} dx dy = \iint_D \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx dy$ donde $\bar{n} \cdot \bar{k} = \|\bar{n}\| \|\bar{k}\| \cos \theta \Leftrightarrow \bar{n} \cdot \bar{k} = \cos \theta$ porque $\|\bar{n}\| \|\bar{k}\| = 1$ por unitarios.

$$\iint_D \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

4.7 Integrales de superficie de funciones vectoriales

Definición 4.7.1: Superficie orientada

Una superficie suave S es una **superficie orientada** si existe una función normal unitaria \bar{n} definida en cada punto (x, y, z) sobre la superficie. El campo vectorial $\bar{n}(x, y, z)$ recibe el nombre de **orientación** de S .

Puesto que una normal unitaria a S puede ser $\bar{n}(x, y, z)$ o $-\bar{n}(x, y, z)$, una superficie **orientada** tiene dos orientaciones.

Comentario:

Tenemos $\bar{n} = \frac{\bar{T}_u \times \bar{T}_v}{\|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\|}$ Una superficie S definida por $z = g(x, y)$ tiene una orientación hacia arriba cuando las normales unitarias están dirigidas hacia arriba.

Definición 4.7.2: Superficie cerrada

Una superficie **cerrada** se define como la frontera de un sólido finito.

Ejemplo 4.7.1

La superficie de una esfera es una superficie cerrada

Comentario:

1. Si una superficie **suave** S está definida por $f(x, y, z) = 0$ entonces la normal es **unitaria** $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}$
2. Si f está definida de forma explícita, $z = g(x, y)$ podemos escribir $f(x, y, z) = g(x, y) - z$ o $f(x, y, z) = z - g(x, y)$ en función de la orientación.
3. Si S está definida por $z = g(x, y)$ hay dos vectores unitarios en $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$.

$$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 + 1}} \text{ y } \vec{n}' \text{ en el sentido opuesto.}$$

Teorema 4.7.1

1. Sea S una superficie parametrizada y sean ϕ_1 y ϕ_2 dos parametrizaciones de S suaves y que preserven la orientación (el vector normal que se obtiene va hacia arriba, abajo invierte la orientación).

$$\iint_{\phi_1} F dS = \iint_{\phi_2} F dS$$

2. Si ϕ_1 preserva la orientación y ϕ_2 la invierte, entonces

$$\iint_{\phi_1} F dS = - \iint_{\phi_2} F dS$$

Comentario:

1. Si f es un campo escalar, $\iint_{\phi_1} f dS = \iint_{\phi_2} f dS$ (la integral no depende de la parametrización).
2. $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) dudv = \iint_D \vec{F} \cdot \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|} \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| dudv = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{u} \cdot dS$

Donde:

$d\vec{S} = (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) dudv$ es el vector diferencial de superficie

$dS = \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| dudv$ es el diferencial de superficie

$\vec{n} = \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|}$ es la normal unitaria

Algunas Parametrizaciones

Parametrización de una elipse

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1 \quad \begin{cases} x(t) = \alpha + a \cos(t) \\ y(t) = \beta + b \sin(t) \end{cases}$$

Parametrización de una parábola

La ecuación canónica de una parábola con vértice $V(\alpha, \beta)$ y eje horizontal es $(y - \beta)^2 = 4c(x - \alpha)$.
Con eje vertical sería $(x - \alpha)^2 = 4c(y - \beta)$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4c}t^2 + \alpha \\ y(t) = t + \beta \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Parametrización de una espiral

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Capítulo 5

Integrales Triples

5.1 Introducción

Como lo hicimos con la integral doble, vamos a definir la integral de una función en el paralelepípedo (rectángulo). $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Sean N_1, N_2, N_3 tres enteros dados:

$$\begin{cases} x_i - x_{i-1} = \frac{b_1 - a_1}{N_1} \\ y_j - y_{j-1} = \frac{b_2 - a_2}{N_2} \\ z_k - z_{k-1} = \frac{b_3 - a_3}{N_3} \end{cases}$$

lo que nos da **paralelepípedos elementales** $w_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$

Definición 5.1.1: Integral Triple

Sea $\mathcal{I}_V(f) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_3} f(x_i, y_j, z_k) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) (z_k - z_{k-1})$ si N_1, N_2 y N_3 se van al infinito, entonces $\mathcal{I}_V(f)$ admite un límite en \mathbb{R} . Este límite se llama **Integral Triple** de f en \mathcal{V} se escribe:

$$\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Comentario:

Como lo hicimos con la integral doble, la integral triple se puede calcular gracias a tres integrales simples.

Teorema 5.1.1 Cálculo directo

1. Si \mathcal{V} es de la forma siguiente:

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b : g_1(x) \leq y \leq g_2(x) : h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

$$\text{y entonces, } \iiint_m cV f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

2. Si \mathcal{V} es de la forma siguiente:

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b : g_1(x) \leq z \leq g_2(x) : h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\}$$

$$\text{entonces, } \iiint_m cV f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x, z)}^{h_2(x, z)} f(x, y, z) \, dy \right) dz \right) dx$$

3. *Idem.*

5.2 Cambio de variables

Consideramos $\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ y supongamos que tenemos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{cases} x = a(u, v, w) \\ y = b(u, v, w) \\ z = c(u, v, w) \end{cases} \quad \text{con } (u, v, w) \in \Omega \text{ biyección de } \mathcal{V}$$

Podemos, entonces, definir una nueva función g tal que: $g(u, v, w) = f(a(u, v, w), b(u, v, w), c(u, v, w))$ lo que nos permite escribir:

Teorema 5.2.1

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega} g(u, v, w) |J_g(u, v, w)| \, du \, dv \, dw$$

Ejemplo 5.2.1 (Calcular $\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{V}} xyz(1-x-y-z) \, dx \, dy \, dz$ con \mathcal{V} delimitado por los planos

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{con el cambio de variable propuesto: } \begin{cases} x = u(1-u) \\ y = uv(1-w) \\ z = uvw \end{cases}$$

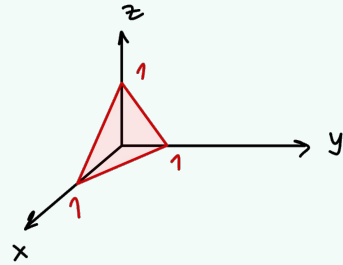
Tenemos $g(u, v, w) = (u - uv, uv - uvw, uvw)$

$$\text{y además: } \begin{cases} u = x + y + z \\ v = \frac{y + z}{x + y + z} \\ w = \frac{z}{y + z} \end{cases}$$

$$|J_g(u, v, w)| = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v(1-w) & u(1-w) & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2v$$

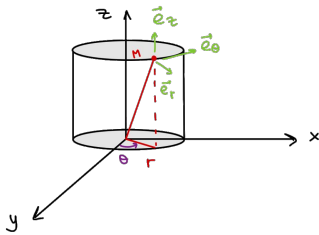
$$g(u, v, w) = f(u(1-v), uv(1-w), uvw) = u^3v^2w(1-u)(1-v)(1-w)$$

$$\mathcal{I} = \iiint u^5v^3w(1-u)(1-v)(1-w) \, du \, dv \, dw = \int_0^1 u^5(1-u) \, du \int_0^1 v(1-v) \, dv \int_0^1 w(1-w) \, dw = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$



5.2.1. Algunos cambios de variable

Cambio en coordenadas cilíndricas



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{con } r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi] \quad g(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

$$|J_g(r, \theta, z)| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \quad \iiint_V (x, y, z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iiint_{\Omega} g(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr \, d\theta \, dz$$

Comentario:

Si $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \mathcal{D}, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$ la proyección de \mathcal{V} sobre (Oxy) es el dominio \mathcal{D} tal que: $\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \theta < \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$ Entonces si f es una función continua en \mathcal{V} tenemos:

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

Ejemplo 5.2.2 (Calcular $\iiint_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2 + 1) dx dy dz$ donde $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ y } 0 \leq z \leq 2\}$)

Vamos a utilizar las coordenadas cilíndricas $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ e integramos en $\Delta = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 2]$.

Tenemos $f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = r^2 + 1$ lo que nos da $\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} (1 + r^2) r dr d\theta dz = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + r^2) r dr = 4\pi \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 4\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 3\pi$

5.2.2. Coordenadas Esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \\ \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \quad \text{con } \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$$

El Jacobiano será $\boxed{\rho^2 \sin \varphi}$

Comentario:

Si ponemos $\begin{cases} r = \rho \sin \varphi \\ \theta = \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$ entonces podemos transformar las coordenadas esféricas en cilíndricas (r, θ, z)

Ejemplo 5.2.3 (Sea \mathcal{B} la bola unidad y $a > 1$, calcular $\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{B}} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}}$)

Pasamos a coordenadas esféricas: $\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$ y obtenemos

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin \varphi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2a\rho \cos \varphi}} d\varphi d\theta d\rho \quad \text{Hacemos el cambio de variable: } \begin{cases} t = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi \\ dt = 2a\rho \sin \varphi d\varphi \end{cases}$$

$$\text{y } \mathcal{I} = 2\pi \int_0^1 \rho^2 \left(\int_{(a-\rho)^2}^{(a+\rho)^2} \frac{dt}{2a\rho \sqrt{t}} \right) d\rho = \frac{4\pi}{a} \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{4\pi}{3a}$$

Capítulo 6

Teoremas de Stokes y Gauss

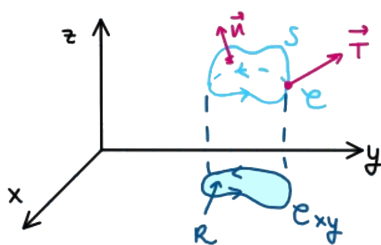
6.1 Teorema de Kelvin-Stokes

Empezando por algunas aplicaciones en física, la idea en el campo de mecánica de fluidos es la de observar que las rotaciones en una superficie se superponen entre ellas hasta llegar a la frontera, es decir, a partir de lo que ocurre en el interior de la superficie podemos tener una idea de lo que está pasando en la frontera.

Se trata de generalizar a \mathbb{R}^3 el concepto que vimos con el *Teorema de Green-Riemann*. En efecto, si recordamos:

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} \implies \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\vec{i} - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\vec{j} \right) \vec{k}$$

$$\text{lo que nos daba } \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} dS$$



El *Teorema de Green-Riemann* en un espacio tridimensional relaciona una integral de línea alrededor de una curva C cerrada, simple, suave (por partes) de forma que la frontera de una superficie S con una integral de superficie sobre S , como vemos en la figura.

Suponemos que $z = f(x, y)$ es continua cuya representación gráfica es una superficie orientada suave por partes sobre una región R en el plano OXY , donde C es la frontera de S y C_{xy} es la frontera de R .

Teorema 6.1.1 Kelvin-Stokes

Sea S una superficie orientada suave por partes y acotada por una curva C cerrada, simple y suave por partes.

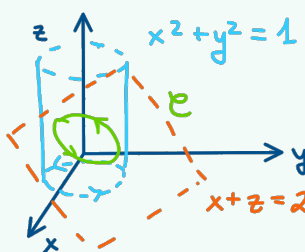
Sea $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ un campo vectorial cuyas componentes son funciones continuas y que tienen derivadas parciales continuas de primer orden en una región abierta de \mathbb{R}^3 que contiene a S .

Si C se recorre en el sentido positivo:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Ejemplo 6.1.1 (Evaluar $\int_C (z \, dx + x \, dy + y \, dz)$ donde C es la traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $y + z = 2$. C está orientado en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se mira desde arriba.)

Tenemos $\vec{F}(x, y, z) = z \, dx + x \, dy + y \, dz$. Si calculamos $\nabla \times \vec{F}$:



$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y & z \end{vmatrix} = 1\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}$$

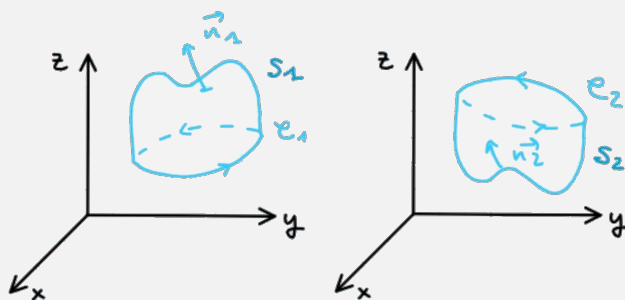
Si $h(x, y, z) = y + z - 2$, entonces $h(x, y, z) = 0$ es la ecuación del plano cuyo vector normal unitario $\vec{n} = \frac{\nabla h}{\|\nabla h\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$

Con el *Teorema de Stokes* tenemos:

$$\int_C \vec{F} d\vec{M} = \iint_S (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} \right) dS = \sqrt{2} \iint_S dS = \sqrt{2} \iint_S \sqrt{2} \, dx dy = 2\pi$$

Comentario:

Podemos tener:



El valor de la integral de superficie está determinado por la integral alrededor de su frontera C . Esto significa que la "forma" de la superficie S no tiene importancia:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{M} = \iint_{S_1} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}_2$$

Comentario:

En el diagrama siguiente resumimos los resultados para campos conservativos definidos en regiones abiertas conexas y simplemente conexas.

$$\begin{array}{ccc} \vec{F} \text{ conservativo en } \mathcal{D} & \iff & \vec{F} = \nabla f \text{ en } \mathcal{D} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \int_C \vec{F} \cdot d\vec{M} = 0 & \xLeftrightarrow[\text{Stokes}] & \nabla \cdot \vec{F} = 0 \text{ en } \mathcal{D} \end{array}$$

6.2 Teorema de Gauss-Ostrogradsky / Divergencia

Si consideramos el punto (x_0, y_0, z_0) como una región infinitesimal de un volumen de control de un gas, entonces podemos entender la divergencia en dicho punto como la medida de cuánto diverge o se escapa el gas en dicho punto. Si $\nabla \cdot F > 0$, entonces el gas se expande, si $\nabla \cdot F < 0$ entonces se contrae, y si $\nabla \cdot F = 0$ se dice que el gas es incompresible.

Se considera un recipiente con un líquido y una membrana semipermeable en su interior. El *Teorema de Gauss-Ostrogradsky* sugiere que para medir cuánto flujo se escapa a través de la membrana se puede medir el flujo infinitesimal que se escapa a través de cada punto que la membrana encierra y sumar todos esos puntos. La suma de cada uno de estos flujos infinitesimales que escapan representa el flujo total que se escapa de la membrana.

Teorema 6.2.1 Gauss-Ostrogradsky o de la divergencia

Sea Ω una región de \mathbb{R}^3 y sea S la frontera de Ω con una parametrización $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que orienta a la superficie con sus vectores normales apuntando hacia el exterior.

Si $F(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$ campo vectorial de \mathbb{R}^3 de clase C_1 definido en todo punto del abierto \mathcal{U} tal que $\Omega \subseteq \mathcal{U}$, entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$