Análisis de varias variables 2

Víctor Mira Ramírez

21 de marzo de 2023

Índice

Capítulo 1

Formas diferenciales

Introducción

Vamos a ver en este capítulo un concupto muy importante en matemáticas, que son las formas diferenciales. Como hicimos en *Análisis de varias variables 1*, empezaremos hablando de las formas diferenciales en 2 dimensiones, e iremos poco a poco ampliando el campo de nuestro estudio a dimensiones superiores.

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1: Diferencial

Sea f una función definida en un entorno del punto $M_0 = (x_0, y_0)$ tal que f admite derivadas parciales en un entorno $\mathcal{V}(M_0)$. Se llama **diferencial de f en M_0** a la aplicación lineal definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ denotado:

$$\begin{aligned} L(x_0, y_0) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (h, k) &\longmapsto h\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Comentario:

Para el caso particular $g(x, y) = x$, entonces $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$ lo que nos da $dg(x, y) = dx(h, k) = h$
(rotación $dx = h$) $\quad g(x, y) = y$, entonces $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 1$ lo que nos da $dg(x, y) = dy(h, k) = k$
Esto nos da: $df(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dy$

- Escribir $df(dx, dy)$ es un abuso de notación que debe evitarse, escribiendo en su lugar df únicamente.
- La diferencial puede existir sin que la función sea diferenciable
  ($f \in C_1 \implies f$ diferenciable, pero f diferenciable $\not\Longrightarrow f \in C_1$)

Comentario:

Sea $f \in C_1(\mathcal{V}(M_0))$ una función de una variable,

$$f'(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h) \Longleftrightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + o(h)$$

Como tenemos que $h = dx$,$df_{x_0} = f'(x_0)\,dx \Longleftrightarrow f'(x_0) = \frac{df_{x_0}}{dx}\left(\frac{dx}{dt} = x'(t) \Longleftrightarrow dx = x'(t)\,dt\right)$

Definición 1.1.2: 1-forma diferencial

Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathbb{R}$ y sea $(h,k) \in \mathcal{U}$ se llama **1-Forma diferencial** w a la aplicación

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h,k) &\longmapsto w = P(x,y)\,h + Q(x,y)\,k \end{aligned}$$

donde P y Q son funciones "suficientemente regulares".

Comentario:

Si P y Q son derivadas parciales de f, entonces la 1-forma diferencial w es la diferencial de f

Definición 1.1.3: Producto exterior

Sean dx y dy dos 1-formas diferenciales, se llama **producto exterior** a la aplicación definida por $dx \wedge dy$ ("dx exterior dy"):

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h_1,k_1) \times (h_2,k_2) &\longmapsto h_1k_2 - h_2k_1 \end{aligned}$$

Comentario:

Un determinante es el producto exterior de dos 1-formas diferenciales

Teorema 1.1.1

- $dx \wedge dx = 0$
- $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

A consecuencia de este teorema se obtiene la llamada "*Regla de Sarrus*", cuya demostración es inmediata.

Definición 1.1.4: 2-forma diferencial

Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $(x,y) \in \mathcal{U}$, se llama **2-forma diferencial** w a la aplicación

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{B}_i\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right) \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y)\,dx \wedge dy \end{aligned}$$

donde $\mathcal{B}_i\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ es el conjunto de las apicaciones bilineales.

Comentario:

$\forall H_1(h_1,k_1), H_1'\left(h_1',k_1'\right), H_2(h_2,k_2)$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$:
$dx \wedge dy\left(H_1 + \lambda H_1', H_2\right) = dx \wedge dy\left(\left(h_1 + \lambda h_1', k_1 + \lambda k_1'\right), (h_2,k_2)\right) = k_2\left(h_1 + \lambda h_1'\right) - h_2\left(k_1 + \lambda k_1'\right) =$
$h_1k_1 - h_2k_1 + \lambda\left(h_1'k_2 - h_2k_1'\right) = dx \wedge dy\,(H_1,H_2) + \lambda dx \wedge dy\left(H_1',H_2\right) \implies$
$dx \wedge dy$ es lineal respecto a la primera variable. Idem con la segunda. Esto implica que $dx \wedge dy$ es bilineal, y lo es tambien $f(x,y)\,dx \wedge dy$.
En conclusión, $f(x,y)\,dx \wedge dy \in \mathcal{B}_i\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$

Definición 1.1.5: Derivada exterior

Sea w una 1-forma diferencial definida en $\mathcal{U}$ abierto de $\mathbb{R}^2$. Se llama derivada exterior de w y la denotamos dw a la 2-forma diferencial definida por:

$$dw = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right) dx \wedge dy$$

1.2 Formas diferenciales cerradas y exactas

Definición 1.2.1: Forma diferencial cerrada

Sea w una 1-forma diferencial de clase C_1 en un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ se dice que w es cerrada si $dw = 0$

Comentario:

Tenemos $w = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, si $w \in C_1$, las derivadas parciales de P y Q existen, y tenemos $dw = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$ Si $w = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, \forall (x, y) \in \mathcal{U}$

Definición 1.2.2: Forma diferencial exacta

Sea w una 1-forma diferenicial de clase C_1 en un abierto de $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, se dice que w es **exacta** si existe una función $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C_1 tal que $df = w$

Comentario:

Ya sabemos que si $f \in C_1(\mathcal{U})$, entonces $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. (Si $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ tenemos la estructura de una 1-forma diferencial). Si $w = df$, tenemos que $P = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $Q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

Esto significa que para demostrar que w es exacta hay que encontrar f tal que $df = w$, es decir, buscamos $f(x, y)$ que sea solución del sistema $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Como $f \in C_1(\mathcal{U})$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas. También sabemos que $w \in C_1(\mathcal{U})$, lo que nos dice que $P, Q \in C_1(\mathcal{U}) \implies f \in C_2(\mathcal{U})$

Teorema 1.2.1
Si $w \in C_1(\mathcal{U}) \implies f \in C_2(\mathcal{U})$

Comentario:

Al ser de clase C_1, podemso determinar las derivadas parciales de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.Tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Y con el *Lema de Schwartz* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$, entonces sabemos que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \ \forall (x, y) \in \mathcal{U}$$

Teorema 1.2.2
Sea w una 1-forma diferencial de clase $C_1(\mathcal{U})$ y exacta en $\mathcal{U}$, entonces w es cerrada.

Comentario:
El recíproco del teorema anterior es falso, salvo si damos a $\mathcal{U}$ una cierta geometría. Por ello, vamos a volver a hablar de topología.

Definición 1.2.3: Conjunto estrellado

Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^2$, se dice que $\mathcal{U}$ es estrellado si $\exists a \in \mathcal{U}$ tal que $\forall b \in \mathcal{U}$ tenemos $[a, b] \subset \mathcal{U}$

Ejemplo 1.2.1

1. Todo convexo de $\mathbb{R}^2$ es un estrellado.
2. Si $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathcal{U}$ no es estrellado.
3. $[a, b] \in \mathbb{R}^2 = \{ta + (1-t)b, t \in [0,1]\}$ (Parametrización de un segmento)

Teorema 1.2.3 Poincaré
Si w es una 1-forma diferencial de clase C_1 en un abierto estrellado de $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $dw = 0$ (i.e w es cerrada) entonces w es exacta.

Una aplicación en física puede ser, por ejemplo, en mecánica de fluidos, ya que si en $(0,0)$ hay un obstáculo y hay un flujo alrededor de un cilindro (definido en un entorno de $(0,0)$) entonces no se pueden usar los teoremas de la mecánica de fluidos.

La demostración se hará con integrales de línea (curvilíneas o de camino).

Ejemplo 1.2.2 (Sea $w = x\ dx + y\ dy$ y $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, ¿La forma diferencial w es cerrada?)
Claro que sí, vamos a demostrarlo. Tenemos $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = y$ entonces $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$, lo que implica que $dw = 0$, es decir, que w es cerrada.

Además, como $\mathbb{R}^2$ es estrellado, tenemos gracias al *Teorema de Poincaré* que w es exacta.

Ejemplo 1.2.3 (Usando la anterior forma diferencial, encuentra la función f tal que $df = w$)
Tenemos $w = x\ dx + y\ dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, lo que nos da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y$$

De aquí, obtenemos que $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + g(y)$, y derivando respecto a y:
$\frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) = y \implies f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + C$ y tenemos $w = df$.

Comentario:
En $\mathbb{R}^3$, una 1-forma diferencial w se escribe $w = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ donde P, Q, R son tres funciones definidas en un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$. Si además $\mathcal{U}$ es un estrellado de $\mathbb{R}^3$, entonces w es exacta.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Teorema 1.2.4

Sea w una 1-forma diferencial de clase $\mathcal{C}_1(\mathcal{U})$, donde $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$, suponemos el cambio de variable:

$$x = f(u,v) \qquad y = g(u,v) \qquad \text{con} f, g \in \mathcal{C}_1$$

$$w = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = P_1(u,v)\,du + Q_1(u,v)\,dv$$

$$\text{con } P_1(u,v) = P\frac{\partial f}{\partial u} + Q\frac{\partial f}{\partial u} \qquad Q_1(u,v) = P\frac{\partial f}{\partial v} + Q\frac{\partial f}{\partial v}$$

Ejemplo 1.2.4

Sea $w = x\ dx + y\ dy$, tenemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \implies \begin{cases} dx = \cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \\ dy = \sin\theta\ dr + r\cos\theta\ d\theta \end{cases}$$

y por tanto, $w = d\left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right) = d\left(\frac{r^2}{2}\right) = r\ dr$

Capítulo 2

Campo de gradiente, divergencia y rotacional

2.1 Campo escalar, campo vectorial

Definición 2.1.1: Campo de gradiente

Sea $\vec{V}$ un campo vectorial con componentes P y Q de clase $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que $\vec{V}$ es un campo de gradiente si existe un campo escalar φ de clase $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{D}$ tal que:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M(x,y) &\longmapsto \varphi(M) = \varphi(x,y) \end{aligned} \qquad \vec{V} = \vec{grad}\ \varphi = \vec{\nabla}\varphi \qquad \text{i.e.} \vec{V} = \begin{cases} P(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(x,y)} \\ Q(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y(x,y)} \end{cases}$$

Teorema 2.1.1

Sea $\vec{V}$ un campo vectorial con componentes P y Q de clase $\mathcal{C}_1(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^2$:
$\vec{V}$ campo de gradiente $\Longleftrightarrow$ la 1-forma diferencial $w = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ es exacta en $\mathcal{D}$, i.e. $w = df$.
Como consecuencia, sabemos que si $\vec{V}$ es un campo de gradiente $\Longrightarrow \forall (x,y) \in \mathcal{D}, \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

Comentario:

Si $\mathcal{D}$ es un abierto estrellado, entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Longleftrightarrow w$ es cerrada $\overset{\text{Poincaré}}{\Longleftrightarrow}$ w es exacta $\Longleftrightarrow \vec{V} = \vec{\nabla}\varphi$

Comentario:

Si $\mathcal{D}$ es un abierto 'simplemente conexo' (no tiene huecos) de $\mathbb{R}^3$, entonces $dw = 0 \Longleftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{C}_1(\mathcal{D})$ tal que $d\varphi = w$ i.e. w cerrada $\Longleftrightarrow w$ exacta

Teorema 2.1.2

- Los abiertos estrellados son simplemente conexos.
- En $\mathbb{R}^3$, un campo vectorial $\vec{V}(P,Q,R)$ con $P,Q,R \in \mathcal{C}_1(\mathcal{D})$ donde $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi \Longleftrightarrow w = Pdx + Qdy + Rdz \text{es exacta.}$$

- $$\begin{cases} \mathcal{D} \text{ estrellado} \\ \text{ó} \\ \mathcal{D} \text{ simplemente conexo} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Definición 2.1.2: Rotacional

Sea $\vec{V}(P,Q,R)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}_1\left(\mathcal{D}\in\mathbb{R}^3\right)$, llamamos rotacional de $\vec{V}$ a:

$$r\vec{o}t\vec{V}=\vec{\nabla}\times\vec{V}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Teorema 2.1.3

Sea $\vec{V}(P,Q,R)$ de clase $\mathcal{C}_1\left(\mathcal{D}\in\mathbb{R}^3\right)$, si $\vec{V}$ es un campo de gradiente, entonces $\quad \vec{\nabla}\times\vec{V}=\vec{0}$

Comentario:

Si $\mathcal{D}$ es simplemente conexo (no hay huecos), entonces el recíproco es cierto, i.e. $r\vec{o}t\vec{V}=\vec{0}\implies\vec{V}=\vec{\nabla}\varphi$ donde $\varphi\in\mathcal{C}_1(\mathcal{D})$

Definición 2.1.3: Divergencia

Sea $\vec{V}(P,Q,R)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}_1\left(\mathcal{D}\in\mathbb{R}^3\right)$, llamamos divergencia de $\vec{V}$ al escalar:

$$d\vec{i}v\vec{V}=\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Teorema 2.1.4

Sea $\vec{V}(P,Q,R)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}_2\left(\mathcal{D}\in\mathbb{R}^3\right)$, entonces $\quad \nabla\cdot\nabla\times\vec{V}=0$

Teorema 2.1.5

Si $\mathcal{D}$ es simplemente conexo y $\nabla\cdot\vec{V}=0\implies\vec{V}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ (donde $\vec{A}$ es un campo vectorial definido en $\mathcal{D}$)

Comentario:

El campo $\vec{A}$ no es único, de la misma manera que un campo escalar φ asociado a un campo de vectores. Si $\vec{V}=\vec{\nabla}\varphi=\vec{\nabla}(\varphi+\text{cte})$ De la misma manera, tenemos que si $\vec{A}f=\vec{A}+\vec{\nabla}f$, entonces $\vec{\nabla}\times\vec{A}f=\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}+\vec{\nabla}f\right)=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right)$. Es decir, si $\vec{V}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, existe f tal que $\vec{V}=\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}+\vec{\nabla}f\right)$

Definición 2.1.4: Laplaciano

Sea φ un compo de clase $\mathcal{C}_2$ en $\mathbb{R}^2$, llamamos **Laplaciano de** φ al campo escalar $\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

Comentario:

Podemos decir que $\Delta\varphi$ se escribe como

$$\Delta\varphi=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\iff\Delta\varphi=d\vec{i}v\left(gr\vec{a}d\varphi\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi$$

Teorema 2.1.6

Sea $\vec{V}$ un campo de gradiente tal que $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$, tomando φ un campo escalar $\varphi\in\mathcal{C}_2(\mathcal{D})$ tal que $\vec{V}=\vec{\nabla}\varphi$, entonces $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi=\Delta\varphi=0$

2.2 Aplicaciones a la física

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{M} &\longmapsto \varphi(M) \end{aligned} \qquad \text{ý} \qquad \begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{M} &\longmapsto \varphi(\vec{M}) \end{aligned} \text{ donde } \varphi(\vec{M}) \begin{pmatrix} \varphi_x(M) \\ \varphi_y(M) \\ \varphi_z(M) \end{pmatrix} \text{ vectorial}$$

Operador Nabla (operador diferencial)

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ en la base canónica de } \mathbb{R}^3$$

Gradiente

$$\vec{\text{grad}}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ (Campos escalares)}$$

Divergencia

$$\text{div}\vec{\varphi} = \vec{\nabla} \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \text{(Producto escalar)}$$

Rotacional

$$\vec{\text{rot}}\vec{\varphi} = \vec{\nabla} \times \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Laplaciano Escalar

$$\Delta\varphi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla}^2\varphi \text{ (ecuación de difusión)}$$

Laplaciano Vectorial

$$\vec{\Delta}\vec{\varphi} = \left(\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z\right)$$

(Vector cuyas componentes son Laplacianos). Se usa en mecánica de fluidos, (Ecuación de Navier-Stokes), en electromagnetismo (ecuación de d'Alembert)

Significado del gradiente

Leyes en física

Ley de Holm local (potencial)	Ley de Fourier (temperatura)
$\vec{f} = -\gamma \vec{\text{grad}} V$	$\vec{f} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$

Relaciones fundamentales

$$\vec{\nabla}(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla}A + \vec{\nabla}B \qquad \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \varphi\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{A} + \varphi\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \qquad \vec{\nabla} \times (\varphi\vec{A}) = \vec{A} \times \vec{\nabla}\varphi + \varphi(\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \qquad \Delta\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot A - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times A \iff \Delta\vec{A} = \vec{\nabla}^2 A - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times A$$

Capítulo 3

Integrales de línea

3.1 Curvas paramétricas

Definición 3.1.1: Curva paramétrica

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, f y g dos funciones defindas en I "suficientemente regulares".
Sea $C = \left\{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \exists t \in I, M(t) = (x(t), y(t))\right\}$.Llamamos a C una **curva paramétrica** en $\mathbb{R}^2$.
Tenemos $x = f(t)$, $y = g(t)$

Ejemplo 3.1.1

Tenemos $t \subset I \in \mathbb{R}(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$ dados $\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \end{cases}$ tenemos $t = \frac{x-b_1}{a_1}$ lo que nos da $y = a_2\left(\frac{x-b_1}{a_1}\right) + b_2 \Longleftrightarrow y = \frac{a_2}{a_1}x + b_2 - \frac{a_2 b_1}{a_1}$ (ecuación de una recta) i.e. $y = F(x)$

Ejemplo 3.1.2

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi]$ tenemos $x^2 + y^2 = 1$, la parametrización de un círcula en el plano.

Definición 3.1.2: Curva paramétrica tangente

Sea $C = \left\{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \exists t \in I, M(t) = (f(t), g(t))\right\}$ con f,g derivables en I.
Entonces, la curva paramétrica con $t_0 \in I$

$$\begin{cases} x = f'(t_0)\,t + f(t_0) \\ y = g'(t_0)\,t + g(t_0) \end{cases}$$

es la tangente a C en $M(t_0) = (f'(t_0), g'(t_0)) \neq (0,0)$

Comentario:

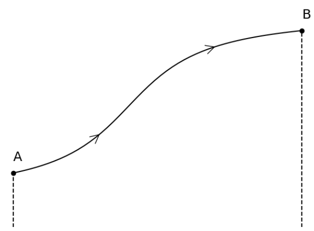
Como $f'(t_0) \neq 0$, gracias a que $x = f'(t_0)\,t + f(t_0)$, $t = \frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)}$, entonces si la ponemos en $y = g'(t_0)\,t + g(t_0)$,
$y = g'(t_0)\left(\frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)}\right) + g(t_0) = \left[\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}x - \frac{g'(t_0)f(t_0)}{f'(t_0)} + g(t_0)\right] = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}(x - f(t_0)) + g(t_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}(x - x_0) + g(t_0)$
Si $y = F(x) \Longrightarrow g(t) = F(f(t)) \qquad g'(t_0) = F'(f(t_0) \cdot f'(t_0)) \Longleftrightarrow F'(x_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$ y finalmente, $[y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0)]$ ecuación de una tangente

Interpretación vectorial:
Considerando la parametrización de la definición $(x_0 = f(t_0), y_0 = g(t_0))$ y sean $M(x, y), M_0(x_0, y_0) \implies \vec{T} = (f'(t_0), g'(t_0))$

$$\begin{cases} x = f'(t_0)t + x_0 \\ y = g'(t_0)t + y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - x_0 = f'(t_0)t \\ y - y_0 = g'(t_0)t \end{cases} \iff M_0\vec{M} = t\vec{T}$$, entonces $\vec{T}$ es tangente a C en M_0.

3.2 Integrales de línea

Introducción



$C = \{M \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in [a, b], M(f(t), g(t))\}$ con f, g derivables en $[a, b]$, $A(f(a), g(a))$ y $B(f(b), g(b))$.

Consideremos $\vec{V}(P(x, y), Q(x, y))$ y sea w la 1-forma diferencial, i.e. $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Definición 3.2.1: Integral de línea

$\gamma_{\vec{AB}} = \int_{\vec{AB}} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \int_{\vec{AB}} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \int_{\vec{AB}} w$ y tenemos

$$\gamma_{\vec{AB}} = \int_{\vec{AB}} w = \int_a^b [P(f(t), g(t))f'(t) + Q(f(t), g(t)g'(t))]dt \longrightarrow \text{¡Integral de Riemann!}$$

Donde $dx = f'(t)dt$, $dy = g'(t)dt$

Ejemplo 3.2.1 (Sea $w = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy, (x, y) = (0, 0)$, necesistamos una curva parametrizada.)

Sea $C = \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, denotamos C^+ a la curva en el sentido trigonométrico.

Nos piden calcular $\gamma_{C^+} = \int_{C^+} w$.

Volvemos a la definición: $\int_{C^+} w = \int_0^{2\pi} [\sin\theta(-\sin\theta) - \cos\theta(\cos\theta)]d\theta = -\int_0^{2\pi d\theta} = -2\pi$

Donde $P(f(\theta), g(\theta)) = \sin\theta$ y $Q(f(\theta), g(\theta)) = -\cos\theta$. Y también,$f'(\theta) = -\sin\theta$ y $g'(\theta) = \cos\theta$

Comentario:

$\gamma_{\vec{AB}} = \int_{\vec{AB}} \vec{V}(M)dM(t) = \int_a^b \vec{V}(M(t)) \cdot \vec{T}(t) \cdot dt$ Donde $\vec{V}(M(t))$ puede ser un campo de fuerzas.

Ejemplo 3.2.2 (Sea $w = xy\ dx + y^2\ dy + dz$ una 1-forma diferencial en $\mathbb{R}^3$ y sea C la curva orientada en $\mathbb{R}^3$ con la parametrización $\vec{V}(t) = (t^2, t^3, 1)$ con $t \in [0, 1]$. Calcular $\int_C w$)

$\int_C w = \int_0^1 \left[t^5(2t) + t^6(3t^2) + 0\right]dt = \frac{13}{21}$

Teorema 3.2.1

Si $\vec{V}$ es un **campo de gradiente** (i.e. $\vec{V} = \vec{\text{grad}}\varphi = \vec{\nabla}\vec{V}$), $\gamma_{\vec{AB}} = \int_{\vec{AB}} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \int_{\vec{AB}} \vec{\nabla}\varphi(M) \cdot d\vec{M} = \int_{\vec{AB}} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$

Comentario:

- La circulación de un campo de gradiente no depende del camino, solamente de los valores del campo escalar φ definido por $\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi$ en los extremos del camino $\vec{AB}$.
- $\gamma_{\vec{AB}} = 0$ si A y B están en la misma curva de nivel de φ

Teorema 3.2.2

- $\int_{\vec{AB}} (w_1 + w_2) = \int_{\vec{AB}} w_1 + \int_{\vec{AB}} w_2$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \int_{\vec{AB}} \lambda w_1 = \lambda \int_{\vec{AB}} w_1$
- $\left(\vec{V}_1(M) + \vec{V}_2(M)\right) d\vec{M} = \int_{\vec{AB}} \vec{V}_1(M)\, dM + \int_{\vec{AB}} \vec{V}_2(M)\, dM$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

3.3 Longitud de una curva

Capítulo 4

Integrales dobles

Introducción

4.1 Teoremas de Fubini

4.2 Teorema de Green-Riemann

4.3 Cálculo de Área