Práctica 9

Métodos Numéricos y Computación

Métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales *(Tema 5)*

Los métodos iterativos tratan de obtener la solución de un sistema de ecuaciones construyendo una sucesión de aproximaciones. En este caso, denotaremos como $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, para $m = 0, 1, \dots$ cada aproximación de la solución. Si el sistema se escribe como $Ax = b$, aplicaremos una transformación

$$x^{(m+1)} = Bx^{(m)} + c, \quad \text{para } m = 0, 1, \dots,$$

donde $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}^n$ es un vector de constantes y $x^{(0)}$ es cualquier vector en $\mathbb{R}^n$. Un método iterativo es convergente si es consistente y el radio espectral es menor que 1. En el método de Jacobi, por ejemplo, $B = M^{-1}N$ y $c = M^{-1}b$ donde $M = D$ y $N = L + U$; mientras que, en el método de Gauss-Seidel, $M = D - L$ y $N = U$ (las definiciones de L, U y D están en la página 70 de la presentación).

Estos métodos son consistentes por construcción y, por tanto, su convergencia depende únicamente del radio espectral. En el caso particular de tener asegurada la convergencia, la construcción de esta sucesión finalizará cuando o bien se alcance un número máximo de iteraciones, o bien tengamos que $||x^{(m+1)} - x^{(m)}|| < \varepsilon$ para un $\varepsilon > 0$ fijado que es conocido como la tolerancia.

Ejercicio 1 *Calcula las matrices B y c asociadas a los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 &=& 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &=& 2 \\ -x_2 + 3x_3 &=& 0 \end{array}\right\}$$

Estudia la convergencia de ambos métodos y, sea convergente o divergente, obtén tres iteraciones de cada uno de ellos a partir de $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. Calcula $||x^{(m+1)} - x^{(m)}||_\star$ donde $\star = 1, 2, \infty$, para $m = 0, 1, 2$.

El cálculo de la sucesión de aproximaciones no tendría sentido de no estar seguros que el método es convergente (es decir, consistente con el sistema $Ax = b$ y tal que radio espectral de B sea menor que 1) y comienza en $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ (llamado semilla). Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son consistentes por construcción y, por tanto, su convergencia depende únicamente del radio espectral. Aun considerando un método convergente, necesitamos especificar un criterio de parada en el cálculo de las iteraciones. En este sentido, dejaremos de calcular iteraciones cuando o bien se alcance un número máximo de iteraciones, o bien tengamos que $||x^{(m+1)} - x^{(m)}|| < \varepsilon$ para un $\varepsilon > 0$ fijado que es conocido como la tolerancia.

Ejercicio 2 *Implementa dos funciones `jacobi` y `gauss_seidel` que, dada la matriz de coeficientes, el vector de términos independientes, el punto semilla, el tipo de norma a utilizar, la tolerancia, y el número máximo de iteraciones que puede realizar el método, compruebe si el método de Jacobi o Gauss-Seidel, respectivamente, es convergente o no y, en caso de que sea convergente, devuelva la aproximación de la solución, el número de pasos necesarios y el valor del radio espectral. Ten en cuenta el siguiente esquema:*

```
def funcion(A,b,x0,norma,error,k):
    # Construimos D, L y U.
    # Construimos M y N.
    # Construimos B y c.
    # Comprobamos que es convergente (a partir del radio espectral).
        # Si no es convergente, devolvemos el mensaje "El método
          no es convergente".
    # Calculamos aproximaciones mientras que no sobrepasemos el máximo de
      iteraciones y la norma de dos aproximaciones consecutivas no sea
      menor que la tolerancia.
    # Devolvemos solucion aproximada, nº iteraciones.
```

Ejercicio 3 *Aplica los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para aproximar las soluciones de:*

$$a)\qquad \left.\begin{array}{rcr} 4x_1+3x_2 & = & 24 \\ 3x_1+4x_2-x_3 & = & 30 \\ -x_2+4x_3 & = & -24 \end{array}\right\}$$

$$b)\qquad \left.\begin{array}{rcr} x+2y-2z & = & 1 \\ x+z & = & 3 \\ 2x+2y+z & = & 5 \end{array}\right\}$$

¿Qué ocurre con el sistema de ecuaciones del apartado (b)? Observación: Toma como $x^{(0)}$ un vector de ceros, considera la norma infinito, cien pasos como máximo y una tolerancia de 10^{-5}.

Ejercicio 4 *Implementa una función* `relax` *(método de relajación) que, dada la matriz de coeficientes, el vector de términos independientes, un valor $\omega \in \mathbb{R}$, el punto semilla, el tipo de norma a utilizar, la tolerancia, y el número máximo de iteraciones que puede realizar el método, compruebe si el método SOR es convergente o no y, en caso de que sea convergente, devuelva la aproximación de la solución, el número de pasos necesarios y el valor del radio espectral.*

Ejercicio 5 *Aplica el método SOR para aproximar las soluciones de:*

$$a)\qquad \left.\begin{array}{rcr} 4x_1+3x_2 & = & 24 \\ 3x_1+4x_2-x_3 & = & 30 \\ -x_2+4x_3 & = & -24 \end{array}\right\} \text{ con } \omega = 1.25.$$

$$b)\qquad \left.\begin{array}{rcr} x+2y-2z & = & 1 \\ x+y+z & = & 3 \\ 2x+2y+z & = & 5 \end{array}\right\} \text{ con } \omega = 0.25.$$

Observación: Toma como $x^{(0)}$ un vector de ceros, considera la norma infinito, cien pasos como máximo y una tolerancia de 10^{-5}.