1.- Sea $\mathbb{R}^4$ el espacio afín 'standard'de dimensión 4, y sean $L := \{(x_1, x_2.x_3, x_4) : x_1 = 0, x_2 = 3\}$ y $M := \{(x_1, x_2.x_3, x_4) : x_2 = 0, x_3 = -1\}$.

a) (0,5 puntos) Determinar las dimensiones de L y de M. Justificar la respuesta.

b) (1 punto) ¿Cuál es la posición relativa de L y de M? Justificar la respuesta.

c) (1 punto) ¿Quién es $L + M$? Justificar la respuesta.

a) Las dimensiones de L y de M se corresponden a las dimensiones de su espacio vectorial director. Las escribimos como variedades lineales:

$L := \{(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) : x_1 = 0, x_2 = 3\} = (0\ 3\ 0\ 0) + \langle (0\,0\,1\,0)(0\,0\,0\,1)\rangle = a + F$

$M := \{(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) : x_2 = 0, x_3 = -1\} = (0\ 0\ -1\ 0) + \langle (1\,0\,0\,0)(0\,0\,0\,1)\rangle = b + G$

$\dim F = \dim G = 2$

b) 1. Son paralelas o coincidentes si $F \subset G$ o $G \subset F$:

$F \cup G = \langle (1\,0\,0\,0)(0\,0\,0\,1)(0\,0\,1\,0)\rangle = \dim = 3 > \dim G = \dim F \Rightarrow$ no están mutuamente contenidos, no son $\parallel$

2. Se cortan si $\vec{ab} \in F + G$:

- $\vec{ab} = (0\ -3\ -1\ 0)$
- $F + G = \langle (1\,0\,0\,0)(0\,0\,1\,0)(0\,0\,0\,1)\rangle$

$(0\ -3\ -1\ 0) \notin F + G \Rightarrow$ no se cortan

3. Se cruzan.

c) $L + M$ es la variedad lineal suma de ambas, la cual se calcula como

$L + M = a + (F + G + \langle \vec{ab}\rangle) \rightarrow$ es la mínima variedad lineal que contiene a ambas

$L + M = (0\ 3\ 0\ 0) + \langle (0\,0\,0\,1)(1\,0\,0\,0)(0\,0\,1\,0)(0\ -3\ -1\ 0)\rangle = \mathbb{R}^4$

!!! hacer esto siempre

Vamos a comprobar que es correcto con la fórmula de Grassman

4. FÓRMULAS DE GRASSMAN : sean $L = a + F$, $M = b + G$ variedades lineales

- Si $L \cap M \neq \phi$, $\dim(L+M) = \dim(L) + \dim(M) - \dim(L \cap M)$
- Si $L \cap M = \phi$, $\dim(L+M) = \dim(L) + \dim(M) - \dim(F \cap G) + 1$

estamos en el segundo caso:

$\dim(L+M) = \dim L + \dim M - \dim(F \cap G) + 1 = 2 + 2 - 1 + 1 = 4$ ✓

2.- $\mathbb{R}^2$ el espacio afín 'standard'de dimensión 2. Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$g(x, y) = (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{8}{5}, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{16}{5})$$

a) (1,5 puntos) Demostrar que g es una aplicación afín (afinidad).

b) (1 punto) ¿Qué tipo de afinidad es?. Justificar la respuesta. PISTA: Comprobar que $g^2 = Id$.

a) Demostramos que es afinidad viendo que podemos escribir $g(x,y) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y que $\vec{g(a)g(b)} = \gamma(\vec{ab})$

- $g(x,y) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{8}{5}, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{16}{5}\right) = \frac{8}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ✓
- $\vec{g(a)g(b)} = \left(\frac{3}{5}b_1 - \frac{4}{5}b_2 - \frac{3}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_2, -\frac{4}{5}b_1 - \frac{3}{5}b_2 + \frac{4}{5}a_1 + \frac{3}{5}a_2\right) =$

$= \left(\frac{3}{5}(b_1 - a_1) - \frac{4}{5}(b_2 - a_2), -\frac{4}{5}(b_1 - a_1) - \frac{3}{5}(b_2 - a_2)\right) = \gamma(\vec{ab})$ ✓

b) Estudiamos γ para ver el tipo de afinidad que es:

$\gamma = \left[\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\right]^2 \Rightarrow \gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ SIMETRÍA. Vamos a estudiar la simetría:

- AUTOVALORES: $\det(\gamma - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 3/5 - \lambda & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{3}{5} - \lambda)(-\frac{3}{5} - \lambda) - \frac{16}{25} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-9}{25} - \cancel{\frac{3}{5}\lambda} + \cancel{\frac{3}{5}\lambda} + \lambda^2 - \frac{16}{25} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1\ ;\ \lambda_2 = -1$

- ESPACIOS PROPIOS:

$Ef(1) = Ker(\lambda - Id) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2/5 & -4/5 \\ -4/5 & -8/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 = \langle(-2\ 1)\rangle \Rightarrow$ nos da el eje de simetría

$Ef(-1) = Ker(\lambda + Id) \Rightarrow \begin{pmatrix} 8/5 & -4/5 \\ -4/5 & 2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{-1} = \langle(1\ 2)\rangle \Rightarrow$ dirección de la simetría

3.- (2,5 puntos) Sea $\mathbb{R}^4$ el espacio afín 'standard'de dimensión 4, y sea $L := \{(x_1, x_2.x_3, x_4) : x_1 = 0, x_2 = 3\}$. Determinar la distancia del punto $P = (1, 1, 1, 1)$ a la variedad L. Justificar la respuesta.

$L = \{(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) : x_1 = 0, x_2 = 3\} = (0\ 3\ 0\ 0) + \langle (0\,0\,0\,1)(0\,0\,1\,0)\rangle = a + F$

Vamos a determinar la distancia de P a L como la distancia de P con su proyección ortogonal en $L \Rightarrow P' = (P + F^\perp) \cap (a + F)$.

1. $F^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4 : \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0, \vec{w} \in F\} = \langle (1\,0\,0\,0)(0\,1\,0\,0)\rangle$

$\langle (x\,y\,z\,t), (0\,0\,0\,1)\rangle = t = 0$

$\langle (x\,y\,z\,t), (0\,0\,1\,0)\rangle = z = 0$

2. $(P + F^\perp) \cap (a + F) \Longrightarrow (1 + \alpha, 1 + \beta, 1, 1) \cap (0, 3, \lambda, \xi) \longrightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \alpha = 0 & \rightarrow \alpha = -1 \\ 1 + \beta = 3 & \Rightarrow \beta = 2 \\ 1 = \lambda \\ 1 = \xi \end{cases} \Rightarrow P' = (0, 3, 1, 1)$

3. $d(P, L) = d(P, P') = \|P' - P\| = \sqrt{\langle(-1\ 2\ 0\ 0)(-1\ 2\ 0\ 0)\rangle} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

3.-

$\mathbb{R}^3$ el espacio euclídeo 'standard'. Considérese la aplicación $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $g((x, y, z)) = (x, 2z - y, z)$

a) (0,5 puntos) ¿Es g una afinidad? Justificar la respuesta.
b) (0,5 puntos) ¿Es g un isomorfismo afín? Justificar la respuesta.
c) (0,5 puntos) Determinar el conjunto de puntos fijos de g. Justificar la respuesta.
d) (0,5 puntos) ¿Es g una afinidad conocida? Justificar la respuesta.
e) (0,5 puntos) Sea L la variedad lineal $z = 1$. Determinar $g(L)$. Justificar la respuesta.

a) $g((x, y, z)) = (x, 2z - y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ✓

b) $|\gamma| = -1 \neq 0 \rightarrow$ isomorfismo afín

c) $g((x, y, z)) = (x, y, z) = (x, 2z - y, z) \Longleftrightarrow y = 2z - y \Rightarrow 2y = 2z \rightarrow y = z$

$\Rightarrow P = (x\ z\ z) = \langle (1\,0\,0)(0\,1\,1)\rangle$

d) Vamos a estudiar γ:

$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ simetría

polinomio mínimo

- AUTOVALORES $\Rightarrow \det(\gamma - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -1$

- ESPACIOS PROPIOS:

$Ef(1) = Ker(\gamma - Id) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2y + z = 0;\ 2y = z \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 = \langle (1\,0\,0)(0\,2\,1)\rangle \rightarrow$ eje de simetría

$Ef(-1) = Ker(\gamma + Id) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{-1} = \langle (0\,1\,0)\rangle \rightarrow$ dirección

e) Sea $L \equiv z = 1 \Longleftrightarrow L \equiv (x, y, z) = (0\ 0\ 1) + \langle (1\,0\,0)(0\,1\,0)\rangle$

$g(L) = g(0\,0\,1) + \langle \gamma(1\,0\,0), \gamma(0\,1\,0)\rangle = (0\ 2\ 1) + \langle (1\,0\,0)(0\,-1\,0)\rangle$

4.-

Sea $\mathbb{R}^2$ el plano euclídeo 'standard'. Considérese la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$g((x, y)) = (-x, y)$$

a) (0,5 puntos) Demostrar que g es un movimiento.

a) (1 punto) ¿Qué clase de movimiento es? Justificar la respuesta.

b) (1 punto) Encuentra todos los movimientos que puedas que conmuten con g. Justificar la respuesta.

↳ matriz conmutativa

a) Vamos a escribir g como afinidad (requisito):

$g((x, y)) = (-x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\gamma}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Es movimiento si $\gamma \cdot \gamma^t = Id \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

b) $|\gamma| = -1 \rightarrow$ movimiento inverso en $\mathbb{R}^2$. Vamos a clasificarla con los puntos fijos:

$g(x, y) = (-x, y) \Longleftrightarrow (0, y) \Rightarrow$ tenemos ∞ puntos fijos que forman la recta $r \equiv \langle (0, 1)\rangle$. Por tanto, simetría axial respecto de r. Estudiamos la simetría:

- AUTOVALORES: $\det(\gamma - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

- ESPACIOS PROPIOS:

$Ef(1) = Ker(\gamma - Id) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow V_1 = \langle (0\,1)\rangle$ eje

$Ef(-1) = Ker(\gamma + Id) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow V_{-1}\ \langle (1\,0)\rangle$ dirección

3.-

$\mathbb{R}^3$ el espacio euclídeo 'standard'.
a) (2 puntos) Calcular la distancia del punto $P = (3, 3, 3)$ al plano $2x + y = 5$. Justificar la respuesta.
b) (2 puntos) Considérese la aplicación $f((x, y, z)) = (-y, x, 2)$. ¿Es f un movimiento? En caso afirmativo, decir de qué movimiento se trata. Justificar la respuesta.

a) $\pi \equiv 2x + y = 5 \Longrightarrow y = 5 - 2x\ ;\ \pi \equiv (x, y, z) = (0\,5\,0) + \langle (1\,-2\,0)(0\,0\,1)\rangle = a + G$

La distancia de π a P va a ser la distancia de P a su proyección ortogonal en π, $P' = (P + G^\perp) \cap (a + G)$.

1. $G^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0, \vec{w} \in G\} = \langle (2\,1\,0)\rangle$

- $\langle (x, y, z), (1\,-2\,0)\rangle = x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$
- $\langle (x, y, z), (0\,0\,1)\rangle = z = 0$

2. $P' \equiv (P + G^\perp) \cap (a + G) = (3 + 2\alpha, 3 + \alpha, 3) \cap (\beta, 5 - 2\beta, \lambda) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3 + 2\alpha = \beta \\ 3 + \alpha = 5 - 2\beta \\ 3 = \lambda \end{cases} \rightarrow 3 + \alpha = 5 - 6 - 4\alpha;\ 5\alpha = -4;\ \alpha = -\frac{4}{5}$

↳ $\beta = \frac{7}{5}$

3. $P = \left(\frac{7}{5}, \frac{11}{5}, 3\right) \longrightarrow d(P, L) = d(P, P') = \|P' - P\| = \|(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, 0)\| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

b) $f((x, y, z)) = (-y, x, 2)$

Primero obtenemos su matriz asociada y estudiamos todo a partir de esta.

$f((x, y, z)) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\gamma}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (escribiendo así tmb comprobamos que es afinidad $\Rightarrow$ todas las isometrías son afinidades)

1. Es movimiento? $\Rightarrow \gamma \cdot \gamma^t = Id \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq Id \Rightarrow$

no es movimiento

1.-
Sea el espacio afín standard $\mathbb{R}^4$. Sea L la variedad lineal cuyas ecuaciones implícitas son $x+z=0$ y $y-t=2$. Sea M la variedad lineal cuyas ecuaciones implícitas son $x+z=2$ y $3x+z=7$.

a) Determinar la posición relativa de L y M. Justificar la respuesta. (2 puntos)

b) Calcular $L\cap M$ y $L+M$. Justificar la respuesta. (2 puntos).

$$L \equiv \begin{cases} x+z=0 \\ y-t=2 \end{cases} \equiv (x,y,z,t) = (0\ 0\ 0\ {-2}) + \langle (1\ 0\ {-1}\ 0)(0\ 1\ 0\ 1)\rangle = a+F$$

$$M \equiv \begin{cases} x+z=2 & \to z = 2-x = -\frac{1}{2} \\ 3x+z=7 & \to 3x+2-x=7;\ 2x=5;\ x=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \equiv (x,y,z,t) = (5/2, 0, -1/2, 0) + \langle (0\ 1\ 0\ 0)(0\ 0\ 0\ 1)\rangle = b+G$$

1. Vemos si son paralelas /coincidentes ($F\subset G$ o $G\subset F$):

$F\cup G = \langle (1\ 0\ {-1}\ 0)(0\ 1\ 0\ 0)(0\ 0\ 0\ 1)\rangle \to$ no

2. Se cortan si $\vec{ab} \in F+G$:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \vec{ab} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right) \\ \cdot\ F+G = \langle (1\ 0\ {-1}\ 0)(0\ 1\ 0\ 0)(0\ 0\ 0\ 1)\rangle \end{array}\right\} \vec{ab} \in F+G \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = \alpha \\ 0 = \beta \\ 1/2 = -\alpha \\ 0 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{NO}$$

3. Se cruzan

b) $\underline{L\cap M}$

$$\left.\begin{array}{l} L \equiv (0\ 0\ 0\ {-2}) + \langle (1\ 0\ {-1}\ 0)(0\ 1\ 0\ 1)\rangle \\ M \equiv (5/2, 0, -1/2, 0) + \langle (0\ 1\ 0\ 0)(0\ 0\ 0\ 1)\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=-\alpha \\ t=-2+\beta \end{cases};\ \begin{cases} x=5/2 \\ y=\lambda \\ z=-1/2 \\ t=\xi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \alpha=5/2 \\ \beta=\lambda \\ \alpha=1/2 \\ -2+\beta=\xi \end{array} \Rightarrow \nexists \text{ intersección}$$

$\underline{L+M}$: $L+M = a + \langle F+G+\langle\vec{ab}\rangle\rangle = (0\ 0\ 0\ {-2}) + \langle (1\ 0\ {-1}\ 0)(0\ 1\ 0\ 0)(0\ 0\ 0\ 1)(5\ 0\ {-1}\ {-4})\rangle$ " $\mathbb{R}^4$

$(5/2, 0, -1/2, -2) = (5\ 0\ {-1}\ {-4})$

Comprobamos con Grassman:

$\dim(L+M) = \dim L + \dim M - \dim(F\cap G) + 1 \Rightarrow 4 = 2+2-1+1 = 4$ ✓

2.-
Considérese el espacio afín standard $\mathbb{Z}_5^3$. Considérese la aplicación $f:\mathbb{Z}_5^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$ definida por $f((x,y,z)) = (x,y,-z)$

↳ clase de resto 5 en $\mathbb{Z}^3$

a) ¿Es una afinidad)? (0,4 puntos)

b) ¿Tiene puntos fijos? ¿Tiene variedades lineales invariantes? (0,4 puntos)

c) ¿Qué más puedes decir de f? (0,8 puntos)

d) Calcular la imagen del punto $(3,1,4)$. (0,4 puntos)

Justificar las respuestas.

a) $f((x,y,z)) = (x,y,-z) = \begin{pmatrix} \bar 0 \\ \bar 0 \\ \bar 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar 1 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 1 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

b) $f((x,y,z)) = (x,y,z) \Leftrightarrow z=\bar 0 \Rightarrow$ VL invariante será $P = \langle (\bar 1\,\bar 0\,\bar 0)(\bar 0\,\bar 1\,\bar 0)\rangle$

b) $f((x,y,z)) = (x,y,z) \Leftrightarrow z=\bar 0 \Rightarrow$ VL invariante será $P = \langle (\bar 1\,\bar 0\,\bar 0)(\bar 0\,\bar 1\,\bar 0)\rangle$

c) Vamos a estudiar qué tipo de afinidad es:

$\gamma^2 = \begin{pmatrix} \bar 1 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 1 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Id \to$ SIMETRÍA

· AUTOVALORES: $\det(\gamma - \lambda Id) = \begin{vmatrix} \bar 1-\lambda & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 1-\lambda & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 4-\lambda \end{vmatrix} = (\bar 1-\lambda)(\bar 4-\lambda) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = \bar 1 \\ \lambda_2 = \bar 4 \end{cases}$

↑ polinomio mínimo

· ESPACIOS PROPIOS:

$Ef(\bar 1) = Ker(\gamma - \bar 1 Id) \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar 0 \\ \bar 0 \\ \bar 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = \bar 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 = \langle (\bar 1\,\bar 0\,\bar 0)(\bar 0\,\bar 1\,\bar 0)\rangle \to$ eje de la simetría (plano, especular)

$Ef(\bar 4) = Ker(\gamma - \bar 4 Id) \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar 2 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 2 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar 0 \\ \bar 0 \\ \bar 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = \bar 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{-1} = \langle (\bar 0\,\bar 0\,\bar 1)\rangle \to$ dirección de la simetría

d) $f(\bar 3, \bar 1, \bar 4) = \begin{pmatrix} \bar 0 \\ \bar 0 \\ \bar 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar 1 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 1 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar 3 \\ \bar 1 \\ \bar 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar 3 \\ \bar 1 \\ \bar 1 \end{pmatrix}$