TEMA 2: Existencia, unicidad y (prolongación) de soluciones de PVI

Ejemplo

$y^2 + x^2 y' = 0 \qquad y^2 + x\frac{dy}{dx} = 0 \iff x^2\frac{dy}{dx} = -y^2 \iff x\,dy = -y^2 dx \iff -\frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x^2}dx \iff$

$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} \\ g(y) = -y^2 \to I = \mathbb{R} \end{cases} \quad SS = y(x) = 0$

$\iff \frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + k = \frac{kx-1}{x} \iff y(x) = \frac{x}{kx-1}$

en $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{k}\}$

a) $\forall k \in \mathbb{R}$ verifica $y(0) = 0$

b) $y(0) \neq 0$ $\nexists$

c) $y(a) = b$ tq $ab \neq 0$ SS no verifica, forzamos la $\exists$ de la SG.

$b = \frac{a}{ak-1}$; $abk - b = a$; $k = \frac{a+b}{\underset{\neq 0}{ab}}$ $\exists!$ sol. de la familia para este k

$\hookrightarrow k \in \mathbb{R}$

$y' = f(x,y) = \begin{cases} \frac{-y^2}{x^2} & \to (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$

TEOREMA de Cauchy-Peano

$f(x,y): D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función contínua en entorno de $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. $\exists$ intervalo cerrado $[x_0 - r, y_0 + r]$ ...

T2 3

DEFINICIÓN

$f_n\ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$

1. $(f_n)_n$ es equicontínua en $x_0 \in I$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid$ Si $x \in I$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon \ \forall n$

3. $(f_n)_n$ es equicontínua en I si lo es en todos sus puntos

2. $(f_n)_n$ es uniformemente equicontínua en I si:
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid$ Si $(x,y) \in I$ $|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \ \forall n$

Ejemplos:

$\boxed{I}$ $\{f_1, \dots, f_n\}$ funciones contínuas en $I \Rightarrow \{f_1, \dots, f_p\}$ es equicontínua en I

Sea $x_0 \in I \Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0 \Rightarrow (f_p$ es contínua en $x_0) \Rightarrow \exists \delta_i > 0 \mid$ Si $x \in I$ con $|x - x_i| < \delta_i \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon \quad i = 1, \dots, p$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p\} > 0 \Rightarrow$ si $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon \ \forall n = 1, \dots, p$
$\Rightarrow \{f_1, \dots, f_p\}$ es equicontínua en I

$\boxed{\text{I}}$ Sucesión de funciones. $\left(\frac{x}{n}\right)_n$ es equicontinua en $\mathbb{R}$. $\{f_n(x) = \frac{x}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$|f_n(x) - f_n(y)| = \frac{1}{n}|x-y| \leq |x-y|$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon > 0 \Rightarrow$ si $x, y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y| < \varepsilon \quad \forall n$

↳ Debo encontrar δ tq si 2 ptos están suficientemente

Si $(nx) \rightarrow$

$x^2 y' = x^2 y^2 - xy - 1 \longrightarrow$ Riccati $\qquad y = -\frac{z'}{z}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2 - xy - 1}{x^2} \iff \frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{z''}{z} + \frac{(z')^2}{z^2}$$

$(f_n)_n$ equicontinua en $x_0 \in I$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$

Uniformemente equicontinua en I

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$

– Proposición

$(f_n)_n$ equicontinua en $K \Rightarrow (f_n)_n$ uniformemente equicontinua en K

Demostración

Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \forall x \in K \quad \exists \delta x > 0 \mid \forall y \in K \;\; |y - x| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in K} \left(x - \frac{\delta x}{2}, x + \frac{\delta x}{2}\right)$ cubrimiento por abiertos del compacto K

$\rightarrow \exists \{x_1, \dots, x_p\} \mid K \subset \bigcup_{i=1}^{p} \left(x_i - \frac{\delta_i}{2}, x_i + \frac{\delta_i}{2}\right) \; (\delta_i = \delta x_i)$

Sea $\delta = \min\left\{\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}, \dots, \frac{\delta_p}{2}\right\} > 0$

Sea $x, y \in K \mid |x-y| < \delta$ como $x \in K \subset \bigcup_{i=1}^{p} \left(x_i - \frac{\delta_i}{2}, x_i + \frac{\delta_i}{2}\right) \Rightarrow$

$\exists x_{i_0} \in \{x_1, \dots, x_p\} \mid x \in \left(x_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2}, x_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2}\right)$

$|y - x_{i_0}| \leq |y - x| + |x - x_{i_0}| < \delta + \frac{\delta_{i_0}}{2} < \frac{\delta_{i_0}}{2} + \frac{\delta_{i_0}}{2} = \delta_{i_0}$

$|y - x_{i_0}| < \delta_{i_0} \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon/$

$|x - x_{i_0}| < \delta_{i_0} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/$

Si $|x-y| < \delta \Rightarrow \begin{matrix} |x - x_{i_0}| < \delta_{i_0} \\ |y - x_{i_0}| < \delta_{i_0} \end{matrix} \rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x_{i_0}) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ //

$\varepsilon > 0 \Rightarrow A \subset \bigcup_{x \in K} \left(x - \frac{\delta x}{2}, x + \frac{\delta x}{2}\right)$

$A \subset \bigcup_{A=1}^{p} \left(x - \frac{\delta_i}{2}, x + \frac{\delta_i}{2}\right)$

$|x-y| < \delta = \min\left\{\frac{\delta_1}{2}, \dots, \frac{\delta_p}{2}\right\} \Rightarrow \exists x_0 \in \{x_1, \dots, x_p\}$

$x \in \left(x_i - \frac{\delta_{i_0}}{2}, x_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2}\right) \Rightarrow |x - x_{i_0}| < \frac{\delta_{i_0}}{2} < \delta_{i_0}$

$|y - x_{i_0}| \leq |y - x| + |x - x_{i_0}| < \delta + \frac{\delta_{i_0}}{2} \leq \frac{\delta_{i_0}}{2} + \frac{\delta_{i_0}}{2} = \delta_{i_0}$

$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_{i_0}) - f_n(y)| <$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq 1$

I es denso en J $(I \subset J \subset \mathbb{R})$ si $\forall x \in J \;\; \exists y \in J \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \; \forall \varepsilon > 0 \quad I \neq \emptyset$

1.5 Eq en $K \Rightarrow$ Unif. Eq

1.10 Eq + CP en denso $\Rightarrow$ CP en total

1.11 Eq + CP $\Rightarrow$ límite continuo

1.17 Eq + CP en $I = [a,b] \Rightarrow$ CU en $[a,b]$

1.20 Ascoli-Arcela EQ + Unif. Acot. admite subsucesión UNIF. Convergente a función continua en I

Proposición

Sea $(f_n)_n$ equicontinua convergente puntualmente en $I \subset J$ (I denso en J) $\Rightarrow (f_n)_n$ es convergente puntualmente en J

Demostración

Sea $x \in J \setminus I \to$ ¿$(f_n(x))_n$ es convergente? $\Longleftrightarrow$ ¿$(f_n(x))_n$ es de Cauchy?

$\varepsilon > 0 \Rightarrow$ Como $(f_n)_n$ es equicontinua en $x \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \mid \forall y \in J \mid |x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq 1$ (A)

$y \in (x-\delta, x+\delta) \Rightarrow \exists\, z \in (x-\delta, x+\delta) \cap I \to$ por la CP en I $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid |f_n(x) - f_n(z)| < \varepsilon/3 \quad \forall n, m > n_0$ (B)

Sean $n, m > n_0 \to |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
(A) (B) (A)

$\Longleftrightarrow (f_n(x))_n$ es de Cauchy

Peano - Cauchy

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Continua en $B((x_0, y_0), \varepsilon) \Rightarrow \exists\, [x_0 - r, x_0 + r]$ $\quad y: [x_0 - r, x_0 + r] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad Im(y) \subset D$

$y(x_0) = y_0$ $\quad y$ es derivable en $[x_0 - r, x_0 + r]$

$y'(x) - f(x, y(x)) \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r]$

¡no $\mathbb{R}^2$

$R = \{(x,y) \mid |x - x_0| \leq a \quad |y - y_0| \leq b\}$ $\quad M = \max\{|f(x,y)| \mid (x,y) \in R\}$ $\quad r = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

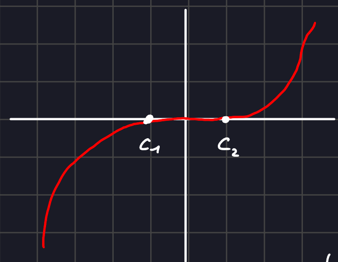
Teorema

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = x_0 \end{cases} \quad (1) \qquad f \text{ continua en } D \Rightarrow \exists \text{ Sol de } (1)$$

★ Ejercicio Propuesto $\quad$ Ej. 1.22.2

Calcula la poligonal de $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \Leftrightarrow \int \frac{1}{3y^{2/3}}\, dy = \int dx \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int y^{-2/3}\, dy = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} 3\sqrt[3]{y} = x + C \Leftrightarrow y^{\frac{1}{3}} = x + K$



$y(x) = (x+K)^3$

$$y(x) = \begin{cases} (x - c_1)^3 & \text{si } x \leq c_1 \\ 0 & c_1 \leq x \leq c_2 \\ (x - c_2)^3 & \text{si } x \geq c_2 \end{cases}$$

$y(x) = 0$ es solución

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz de $L > 0$ si $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|$

$f(x_0) - L|x - x_0| \leq f(x) \leq f(x_0) + L|x - x_0|$

★ Ejemplo 1.24 $\quad f(t,y) = y^2 \quad D = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < 3\}$ ¿Es Lipschitz en D respecto de 6?

$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \Rightarrow \frac{|f(t,y_1) - f(t,y_2)|}{|y_1 - y_2|} = |y_1 + y_2| \leq 6$

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L|y_1-y_2|$$

$\left.\begin{array}{l} y' = 3y^{2/3} \\ y(0)=0 \end{array}\right\}$ → los poligonales de Euler converge solamente a $y(x)=0$

$\boxed{1.24}$ $f(t,y)=y^2$ $\left\{\begin{array}{l} L=6 \\ L=2k \end{array}\right.$ $\nexists$

$\boxed{1.25}$ $f(t,y)=y^{2/3}$ $(t_0,0)$ $\dfrac{|f(t,y)-f(t,0)|}{y} = y^{-1/3}$ No está acotado en cualquier entorno de $(t_0,0)$

↳ ∞ cuando $y \to 0$

Proposición 1.26

D = Bola f admite derivada parcial continua en D $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ y está acotada ⇒ f es Lipschitz en D en la variable y

Demostración

Si f derivable y continua en I, ⇒ $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$ | equivalencia en derivadas parciales

$\xi \in (x,y)$ ó (y,x)

$$\underbrace{f(t,y_1)}_{g(y_1)} - \underbrace{f(t,y_2)}_{g(y_2)} = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\right| \cdot \underbrace{|y_1-y_2|}, \quad \text{con } \xi \in (y_1,y_2) \text{ ó } (y_2,y_1)$$

↳ lo que mide el intervalo para t fijo

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| < M \quad \forall (t,y) \in D \leq M|y_1-y_2|$$

Proposición 1.29 LEMA DE GRONWALL

mirar libro

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(s) f(s)\,ds, \quad h \geq 0$$

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t g(s)h(s)\, e^{\int_s^t h(r)dr}\, ds \quad \forall t \in [a,b]$$ → ¡¡ hay una versión $\int_t^a ds$

Corolario

f, h continuas en $[a,b]$; $h(t) \geq 0$

$$f(t) \leq c + \int_a^t h(s) f(s)\, ds \quad \text{(Condición del lema con } g=c)$$

Aplicamos el lema y vemos q f es una exponencial

Demostración

$$g(t)=c \text{ en } [a,b] \Rightarrow 1.29 \Rightarrow f(t) \leq c + c\int_a^t h(s)\exp\left(\int_s^t h(r)dr\right)ds =$$

$$= c + c\int_a^t \frac{d}{ds}\left(-\exp\left(\int_s^t h(r)dr\right)\right)ds = c + c\left[-\exp\left(\int_t^t h(r)dr\right) + \exp\left(\int_a^t h(r)dr\right)\right] =$$

$$= c\exp\left(\int_a^t h(s)ds\right)$$

Teorema Picard-Lindelof

$\left.\begin{array}{l} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{array}\right\}$ f continua y localmente Lipschitz en $D((x_0,y_0)) \subset \mathbb{R}^2$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$r = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ¿Construimos el equivalente a las poligonales?

Sea $g_0 = y_0 \ \forall x \in [x_0-r, x_0+r]$

$$g_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g_k(t))\,dt \quad \forall k \geq 0 \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$$

$$|g_k(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, g_{k+1}(t))\,dt \right| \longrightarrow \text{"Prueba inductiva"} \longrightarrow \begin{cases} g_0 \text{ no se sale} \\ g_k \text{ no se sale} \end{cases}$$

$\leq M|x - x_0| \leq Mr \leq b \implies$ No me salgo $\implies$ Bien definida

Sea $C = \max\{|g_1(x) - g_0(x)| : x \in [x_0 - r, x_0 + r]\}$ $\quad |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leq C \dfrac{L^k |x - x_0|^k}{k!}$ funciona para $k=0$ $\Rightarrow \sim \leq C$ por def.

HI

$$|g_{k+2}(x) - g_{k+1}(x)| = \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g_{k+1}(t))\,dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, g_k(t))\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, g_{k+1}(t)) - f(t, g_k(t)))\,dt \right| \quad \left(\text{para } x > x_0 \; \int_{x_0}^{x} dt > 0\right) \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, g_{k+1}(t)) - f(t, g_k(t))|\,dt \leq$$

$$\leq L \int_{x_0}^{x} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|\,dt \underset{\text{HI}}{\leq} \frac{C L^{k+1}}{k!} \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^k\,dt = \frac{C L^{k+1}}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}$$

$$\frac{C L^k |x - x_0|^k}{k!} \leq C \frac{L^k r^k}{k!} \quad y \quad \sum_{k=0}^{\infty} C \frac{L^k r^k}{k!} = C e^{Lr}$$

El Criterio M de Weiestrass $\implies g_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} g_{k+1}(x) - g_k(x)$ es uniformemente convergente en $[x_0 - r, x_0 + r]$ a $y(x)$ continua en $[x_0 - r, x_0 + r]$

$$g_0(x) + \sum_{k=0}^{n} g_{k+1}(x) - g_k(x) = g_{k+1}(x) \to \text{lol} \qquad (g_n(x))_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} y(x)$$

Por otro lado $|f(x, g_k(x)) - f(x, y(x))| \leq L |g_k(x) - y(x)| \implies$ como $g_k(x) \xrightarrow[\text{unif.}]{} y(x) \implies$

$\implies f(x, g_k(x)) \xrightarrow[\text{unif.}]{} f(x, y(x))$

$\to$ en $[x_0 - r, x_0 + r]$

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, g_k(x))\,dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{k \to \infty} f(t, g_k(t))\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

$\to$ xq. converge unif.

$$y(x) = \lim_{k \to \infty} g_k(x) = \lim_{k \to \infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g_{k+1}(t))\,dt \right) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \implies \text{Sol de PVI}$$

$y(x_0) = y_0$ $\quad$ (= Peano pero con Lip. de condición)

Unicidad

$\to y(x)$ es sol de $\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ en $[x_0 - r, x_0 + r]$ (1)

Sea $z(x)$ otra sol. de (1) $\implies |y(x) - z(x)| = \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))\,dt \right| =$

$(x > x_0)$ $\quad = \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))\,dt \right| \leq L \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|\,dt \implies$ por corolario Gronwall $\to |g(x) - z(x)| = 0$

$\forall x \in [x_0, x_0 + r]$

$\forall x \in [x_0 - r, x_0]$

Ejemplo 1.35 $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $(0,1) = (x_0, y_0)$ $f(x,y) = y$

$$g_0(x) = 1 \rightarrow g_1(x) = 1 + \int_0^x f(t, g(t))\,dt = 1 + \int_0^x 1\,dt$$

$$g_1(x) = 1 + x \rightarrow g_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$ → Desarrollo en serie de e

Ejemplo 1.25 $t_0 \in \mathbb{R}$ $D(t_0, 0)$ $f(t,y) = y^{2/3}$ no es Lipschitz en D

↳ entorno

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \frac{|f(t,y) - f(t,0)|}{|y|} = \frac{y^{2/3}}{|y|} = \frac{1}{|y|^{1/3}} \leq L$$

↳ No lo puedo acotar

Ejemplo 1.35 Existencia y Unicidad Picard PVI 4 primeras iteradas.

$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $f(x,y) = y$ $D = \mathbb{R}^2$ f continua en $\mathbb{R}^2$ $((0,1))$ $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = 1|y_1 - y_2|$ → Lips. $L = 1$

$y(x_0) = y_0$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ $\exists!$ $y(x) = y_0 e^{(x - x_0)}$

Ejemplo 1.36

$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $f(x,y) = x^2 + y^2$ f continua en $\mathbb{R}^2$ $((0,1))$ $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = 1 \cdot |y_1^2 - y_2^2| =$

$= 1 \cdot |y_1 - y_2||y_1 + y_2| \leq 2K|y_1 - y_2|$ $L = 2K$ con $K = cte =$ cima de la bolilla

Ejemplo 1.37

$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $f(x,y) = 3y^{2/3}$ f continua en $\mathbb{R}^2$ $((0,0))$ → Por 1.25 ⇒ No es loc Lipsc. en $(0,0)$

↳ Tawantas

COROLARIO VIP AKA24

Continua y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua

I $\begin{cases} y' = y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = y \text{ continua en } \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \text{ continua en } \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ unicidad

II $\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(t_0) = y_0 > 0 \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = 2\sqrt{y} \text{ continua en } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \text{ continua en } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ y Unicidad

$y(t) = (t - t_0 + \sqrt{y_0})^2$ $t \in \mathbb{R}$

III $\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = 2\sqrt{y} \text{ continua en } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \text{ No continua en } (x,0) \in \mathbb{R}^2 \end{array}\right\}$ $\overset{\checkmark \text{ no se pot}}{\overset{!!}{\Rightarrow}}$ $|2\sqrt{y_1} - 2\sqrt{y_2}| = 2|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}|$

⇒ No es Lipschitz

IV $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = y^2 \text{ continua en } \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \text{ continua en } \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ y Unicidad $y(x) = \frac{1}{1-x}$

$y(t) = 0$, $y(t) = t^2$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ No hay unicidad

V $\begin{cases} y' = \frac{-y^2}{x^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$f(x,y) = -\frac{y^2}{x^2}$ continua en $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{x^2} y$ continua en $\mathbb{R}^2$ $\Big\} \Rightarrow \exists$ y Unicidad

$y(x) = \frac{x}{kx-1}$ $\quad k = \frac{x_0 + y_0}{x_0 y_0}$

si $x_0 = 0$ $y(x) = 0$ si $y_0 = 0$

si $y_0 \neq 0$ $\cancel{\exists}$

$y(-1) = 1$

V.2 $\begin{cases} y' = \frac{-y^2}{x^2} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{x^2}$ $\quad \int \frac{1}{x^2} dx = -\int \frac{1}{y^2} dy \Leftrightarrow c - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{c - x^{-1}}$ $\quad c = 0 \Downarrow$

$\Rightarrow y(x) = -x$

VI $\begin{cases} y' = \frac{2y}{x} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$

$f(x,y) = \frac{2y}{x}$ continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,y)\}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x}$ continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y)\}$ $\Big\} \Rightarrow \exists$ y Unicidad

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Leftrightarrow \ln|x| = \frac{1}{2}\ln|y| + k$

$2\hat{k}e^x = y(x)$ $\quad y(-1) = 1 \Downarrow$

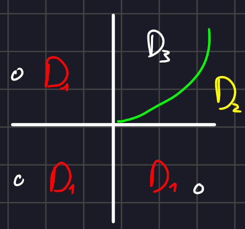
$\frac{2\hat{k}}{e} = 1$ $\quad \hat{k} = \frac{e}{2}$

$y(x) = e^{2x} \longleftarrow$ Ta mal

$y(x) = x^2$

Ejemplo (Función No localmente Lipschitz con solución única) ¿Es loc Lip de y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ó } y \leq 0 \\ \frac{-2y}{x} & \text{si } 0 \leq y \leq x^2 \\ -2x & \text{si } 0 < x^2 \leq y \end{cases}$



$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

1. f es continua en todo $\mathbb{R}^2$

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ o } x > 0, y < 0\}$ $\quad C_0 = \{(0,0)\}$ $\quad C_2 = \{(x,x^2) : x > 0\}$

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 0 < y < x^2\}$ $\quad C_1 = \{(0,y) : y > 0\}$ $\quad C_3 = \{(x,0) : x > 0\}$

$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 0 < x^2 < y\}$

Si $(x_0,y_0) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \Rightarrow \exists B((x_0,y_0),\varepsilon) \subset D_i$ según $(x_0,y_0) \in D_i$ $(i = 1,2,3)$ y f es continua en B

Ahora cogemos el punto $(0,0) \in C_0 \Rightarrow B((0,0),\varepsilon)$

$\forall x,y \in B((0,0),\varepsilon)$, $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in D_1 \\ -2x & \text{si } (x,y) \in D_3 \\ -\frac{2y}{x} & \text{si } (x,y) \in D_2 \end{cases}$ $\Rightarrow 0 \leq \left|\frac{2y}{x} - 0\right| = \frac{2y}{x} <$

Idem con $C_1 \Rightarrow$ sea $(0,y_0) \in C_1 \Rightarrow B((0,y_0),\varepsilon)$

$\forall x,y \in B \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in D_1 \\ -2x & \text{si } (x,y) \in D_3 \end{cases}$ $\rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = 0 = f(0,y_0)$

Idem con $C_2 \Rightarrow$ sea $(x_0,x_0^2) \in C_2 \Rightarrow B((x_0,x_0^2),\varepsilon)$

$\forall x,y \in B \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} -2x & \text{si } (x,y) \in D_3 \\ -\frac{2y}{x} & \text{si } (x,y) \in D_2 \end{cases}$ $\rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,x_0^2)} f(x,y) = -2x_0 = f(x_0,x_0^2)$

Idem con $C_3 \Rightarrow$ sea $(x_0,0) \in C_3 \Rightarrow B((x_0,0),\varepsilon)$

$\forall x,y \in B \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in D_1 \\ \frac{-2y}{x} & \text{si } (x,y) \in D_2 \end{cases}$ $\rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,0)$

Localmente Lipschitz en y.

Sea $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, si $x_0<0 \Rightarrow \exists B((x_0,y_0),\varepsilon)\subset D_1$

Si $x_0<0$

$\forall (x,y_1),(x,y_2)\in B((x_0,y_0),\varepsilon) \Rightarrow |f(x,y_1)-f(x,y_2)|=0\leq L|y_1-y_2|$

Si $x_0>0$

1. $y_0>0$ Idem
2. $y_0=0$: tomamos $B((x_0,0),\varepsilon) \Rightarrow (x,y_1),(x,y_2)\in B((x_0,0),\varepsilon)$
   - Si $(x,y_1),(x,y_2)\in D_1 \Rightarrow |f(x,y_1)-f(x,y_2)|=0\leq L|y_1-y_2|$
   - Si $(x,y_1)\in D_1\ (x,y_2)\in D_2 \Rightarrow |f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\frac{2y_2}{x}\leq\frac{2}{x_0-\varepsilon}|y_2-y_1|$
   - Si $(x,y_1)\ (x,y_2)\in D_2 \Rightarrow |f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\frac{2}{x}|y_2-y_1|$
3. $0<y<x_0^2$ $B((x_0,y_0),\varepsilon)$: $x_0-\varepsilon>0$

   $(x,y_1),(x_1,y_2)\in B((x,y),\varepsilon) \Rightarrow |f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\frac{2}{x-\varepsilon}|y_2-y_1|$
4. $y_0=x_0^2 \Rightarrow B((x_0,x_0^2),\varepsilon)$ $(x,y_1)(x,y_2)\in B((x_0,x_0^2),\varepsilon)$
   - Si $(x,y_1),(x,y_2)\in D_2 \Rightarrow |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq\frac{2}{x-\varepsilon}|y_2-y_1|$
   - Si $(x,y_1)\in D_2,\ (x,y_2)\in D_3 \Rightarrow |f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\frac{2y_1}{x}+2x\right|=\frac{2}{x}|y_1-x^2|=\frac{2}{x}|x^2-y_1|<\frac{2}{x}|y_2-y_1|$ $\quad (x,y_2)\in D_3$
   - Si $(x,y_1)\in D_3,\ (x,y_2)\in D_3 \Rightarrow |f(x,y_1)-f(x,y_2)|=0\leq L|y_2-y_1|$
5. $y_0>x_0^2$ Idem 1.
   - Si $y_0<0 \Rightarrow$ igual que $y_0<0$ (idem)
   - Si $y_0>0 \Rightarrow (x,y_1)(x,y_2)\in B((0,y_0),\varepsilon)$
     - Si $(x,y_1),(x,y_2)\in D_1 \Rightarrow$ idem
     - Si $(x,y_1),(x,y_2)\in D_3 \Rightarrow 4.3$
   - Si $y_0=0 \rightarrow$ nos acercamos al $(0,0)$ solo por puntos de D_2 (Demo. q NO es Lips.)
     - Si $(x,y_1)(x,y_2)\in B((0,0),\varepsilon)\cap D_2$
     - Si fuera Loc. Lips. en $(0,0)$, entonces:

       $\left|\frac{-2y_1}{x}+\frac{2y_2}{x}\right|=\frac{2}{x}|y_2-y_1|<L|y_2-y_1|$ $\quad \frac{2}{x}\leq L\ \ \forall x\in(0,\varepsilon)$ $\quad\boxtimes$

Sí que existe sol. de la edo y es única { con el recíproco de Picard

$$\begin{cases} y'=0 \Rightarrow y(x)=K \\ y'=\frac{-2y}{x} \Rightarrow y(x)=\frac{C}{x^2} \quad C>0 \\ y'=-2x \Rightarrow y(x)=-x^2+M \end{cases}$$

$$y(x)=\begin{cases} y_0 & \text{si } x\leq 0 \\ y_0-x^2 & \text{si } 0\leq x\leq\sqrt{\frac{y_0}{2}} \\ \frac{y_0^2}{y}\frac{1}{x^2} & \text{si } \sqrt{\frac{y_0}{2}}<x \end{cases}$$

PEANO EN SISTEMAS

Sea D un abierto conexo en $\mathbb{R}^{1+n}$, sea $(x_0, \bar{y}_0) \in D$ (vector) y $f_i(x,\bar{y})$ funciones continuas definidas en D $\forall i=1,\dots,n \Rightarrow \exists r>0$:

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = f_1(x,\bar{y}) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x,\bar{y}) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array}\right\}$$

tiene una solución $y(x)$ definida en $[x_0 - r, x_0 + r]$: $y(x_0) = Y_0 = (y_{1,0}, \dots, y_{n,0})$
$(x_0, y_{1,0}, \dots, y_{n,0})$

Si además es localmente lipschitz en $\bar{y}$ $\Rightarrow$ tendremos $\exists$ y unicidad
↳ en todas las y_n

Ejemplo

$$\begin{cases} 5y_1'' = -6y_1 + 2y_2 \\ y_2'' = 2y_1 - 2y_2 - y_0 \sin 3x \end{cases}$$

$z_1 = y_1 \quad z_3 = y_2$
$z_2 = y_1' \quad z_4 = y_2'$

$(z_1, z_2, z_3, z_4) \to z_1$ y z_3

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1' = y_1' = z_2 \\ z_2' = y_1'' = -\frac{6}{5} z_1 + \frac{2}{5} z_3 \\ z_3' = y_2' = z_4 \\ z_4' = y_2'' = 2z_1 + 2z_3 - 40 \sin 3x \end{cases}$$

Ejemplo $\quad y''' + xy'' - 5y' + y = \sin 5x$

$z_1 = y \quad z_1' = y' = z_2$
$z_2 = y' \quad z_2' = y'' = z_3$ } $\Rightarrow$ es Lipschitz, continua
$z_3 = y'' \quad z_3' = y''' = -xz_3 + 5z_2 - z_1 - \sin 5x$ } $\to$ hay que probar

> **TEOREMA**
>
> (1) Todo sistema de FD de orden n es equivalente a una de orden 1
>
> (2) Toda EDO de orden n es equivalente a un sistema de orden 1

Ejercicio: Enunciar Picard para sistemas de orden 1

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ f(x,y) = y^2 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}^2$ $E((1,-1),\varepsilon)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}^2$

Por Picard, $\exists!\, y(x) : [1-r, 1+r] \in \mathbb{R} : y(1) = -1$

$r = \min\{a, \frac{b}{M}\} \qquad R = [1-a, 1+a] \times [-1-b, -1+b]$

$M = \max\{|f(x,y)| : \forall x,y \in R\} = \max\{y^2 : (x,y) \in R\} = (1+b)^2 = (-1-b)^2$

$r = \min\{a, \frac{b}{(b+1)^2}\} = \min\{a, \frac{1}{4}\} \to$ si $a \geq \frac{1}{4}$, la mejor b que puedes coger es 1 (estoy buscando la r más grande) $\Rightarrow r = \frac{1}{4}$

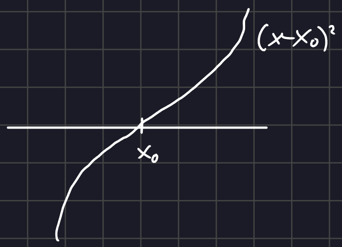
↘ si $a < \frac{1}{4} \to r = a$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \Longleftrightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int dx \Longleftrightarrow -y^{-1} = x + \xi \Longleftrightarrow y(x) = \frac{-1}{x+\xi}$$

$y(1) = -1$ } $\xi = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{x}$

Ejemplo 4.3 $\quad y' = 2y^{2/3} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

soluciones $\begin{cases} y(x) = 0 \\ y(x) = (x-x_0)^2 \end{cases}$ Ambas soluciones pasan por (x_0, y_0)



Para cada punto de OX tendremos dos soluciones maximales $(x_0, 0)$

Sí podemos aplicar Picard en (x_0, y_0) pero siempre nos topamos con otra solución que podría ser maximal.

Proposición 4.4

$y' = f(x,y)$, f continua en D en un abierto de $\mathbb{R}^2$, $\forall (x,y)\in D$

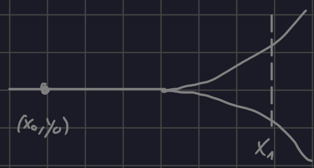
Si (x,y) es un punto de unicidad total $\Rightarrow$ (x,y) es un punto de unicidad global

Demostración

Supongamos que existe $(x_0, y_0)\in D$ que no es de unicidad global $\Rightarrow$

- $\exists y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ sol de $y' = f(x,y)$ $\quad y_1(x_0) = y_0$
- $\exists y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ sol de $y' = f(x,y)$ $\quad y_2(x_0) = y_0$

tales que



$\exists x_1 \in I_1 \cap I_2 \ (x_0 < x_1) : y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$

Sea $x_2 = \text{ínfimo}\{x \in (x_0, x_1] : y_1(x) \neq y_2(x)\}$ $\quad \left.\begin{matrix}(x_2, y_2(x_2)) \\ (x_2, y_1(x_2))\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x_2, y_1(x_2))$ solución singular $\#$

WTF

Corolario 4.5 ÚTIL

Proposición 4.5. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua en D.*

I) *Si f es una función localmente lipschitziana en D, entonces todo problema de Cauchy*

$$\left.\begin{matrix} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0, \end{matrix}\right\},$$

para $(x_0, y_0) \in D$ admite una única solución maximal.

II) *Si f admite derivada parcial continua en D respecto de y, entonces todo problema de Cauchy*

$$\left.\begin{matrix} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0, \end{matrix}\right\},$$

para $(x_0, y_0) \in D$ admite una única solución maximal.

En las condiciones de D abierto y $f(x,y)$ continua en D,

NO es posible que una solución esté definida en un intervalo cerrado

Si hubiera un cerrado, podrías encontrar un cerrado mayor dentro de la bola. Seguirías buscando cerrados más grandes hasta topar con la frontera de la bola. El último sería un abierto ya que la bola es abierta x def.

Lema de Witner

$f: D \to \mathbb{R}^2$ $\quad y: I \to \mathbb{R}$ una solución de $y' = f(x,y)$ $\quad I = \left\langle \begin{matrix}(a,b)\\ [a,b)\end{matrix}\right.$ $\quad$ Sea $(b,z) \in \mathbb{R}^2$

$\boxed{1.}$ 1.1 Para cualquier entorno U del punto (b,z), existen puntos, $(x, y(x))$ con $x \in I$

ó

1.2 $\exists (x_n)_n$ sucesión en I tq $x_n \to b$ e $y(x_n) \to z$

$\Big\}$ (b,z) punto de acumulación de $y(x)$ cuando $x \to b^-$

$\boxed{2.}$ f admite una prolongación a $[b-h, b] \times \{y \in \mathbb{R} : |y-z| < h\}$, $\forall h > 0$

$\Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x \to b^-} y(x) = z}$

Teorema 4.8

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Continua en el abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ $\quad y(a,b) \to \mathbb{R}$ una solución maximal de $y' = f(x,y)$

1. Si $b < +\infty$ (b es finito) $\quad (b,z)$ es el punto límite de la gráfica de $y(t)$ cuando $t \to b^-$ $\Rightarrow (b,z) \in Fr(D)$
2. Si $-\infty < a$ $\quad$ '' $\quad (a,u)$ $\quad$ '' $\quad t \to a^+ \Rightarrow (a,u) \in Fr(D)$
3. Si $K \subset D$ "la gráfica de la función se sale de cualquier compacto contenido en D"

Edos definidas en bandas

Sea $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ $\qquad I \longrightarrow$ 4 opciones $\{(\ )[\ ](\ ][\ )\} \to$ la frontera es $[\ ]$

y sea $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ahora nos planteamos si I es el intervalo maximal ya que no tenemos ninguna restricción en y.

Todos los resultados se darán en el punto b.

Supongamos que f es continua en $I = \left\langle \begin{matrix}[a,b) \times \mathbb{R}\\ (a,b) \times \mathbb{R}\end{matrix}\right\rangle$ y sea $y(x)$ una solución maximal de $y' = f(x,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sabemos que el intervalo maximal de la solución $y(x)$ es de la forma $[a', b')$ ó (a', b') con $a \leq a' < b' \leq b'$

Puede ocurrir:

1. $b' < b$ (estrictamente menor) "la solución tiene que explotar" $\Rightarrow \lim_{x \to b'} |y(x)| = +\infty$

   en caso contrario, tendríamos un punto límite que pertenecería a la frontera, pero esta no está en un sitio finito ¿?

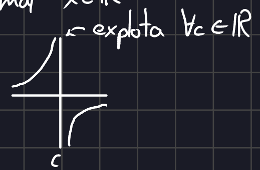
2. $b' = b$ Idem. si trabajamos con a'

   si la solución queda acotada (en bandas), el intervalo es el máximo posible (no explota)
   si la solución explota, el intervalo maximal será algo más pequeño

Ejemplo

$y' = y^2$ $\quad I = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad y(x) = 0$ solución maximal $x \in \mathbb{R}$

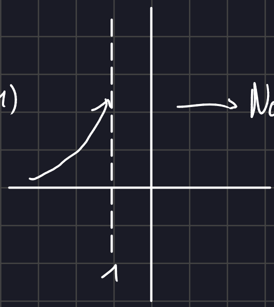
$y(x) = \dfrac{1}{c-x} \left\langle \begin{matrix} x \in (-\infty, c) \\ x \in (c, +\infty)\end{matrix}\right.$



$y'=y^2$ $\quad (-\infty,1)\times\mathbb{R}$

$y(x)=0$ única solución maximal $x\in(-\infty,1)$

- Si $c>1 \Rightarrow y(x)=\frac{1}{c-x}$ $\quad x\in(-\infty,1)$
- Si $c=1 \Rightarrow y(x)=\frac{1}{1-x}$ $\quad x\in(-\infty,1)$
- Si $c<1 \Rightarrow y(x)=\frac{1}{c-x}$ $\left\langle \begin{array}{l} x\in(-\infty,1) \\ x\in(c,1) \end{array}\right.$



→ No explota xq el dominio no le deja