Tema 3

Mecánica Hamiltoniana

En las ecuaciones de Lagrange aparece la función lagrangiana que depende de las coordenadas, las velocidades generalizadas y el tiempo: $L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$. Para un sistema de n grados de libertad, las ecuaciones de Lagrange forman un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Las soluciones serán funciones que podemos representar como curvas en el espacio de configuración parametrizadas por el tiempo.

Nos vamos a plantear transformar las ecuaciones de Lagrange de manera que, en lugar de usar las variables $\underline{q}$ y $\dot{\underline{q}}$, usemos las variable $\underline{q}$ y los momentos conjugados $\underline{p}$. Veremos que, de esta manera, las ecuaciones de movimiento las podremos escribir como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden. Además, el papel que jugarán las coordenadas y momentos será muy parecido, circunstancia que no ocurre si usamos $\underline{q}$ y $\dot{\underline{q}}$.

3.1. Ecuaciones canónicas de Hamilton

Partimos de las ecuaciones de Lagrange en el caso de fuerzas conservativas,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{3.1}$$

Si definimos el momento p_i como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{3.2}$$

podemos escribir las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial L}{\partial q_i}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

que son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange. Sin embargo, q_i y p_i aparecen en las ecuaciones de forma muy distinta. El objetivo es transformar estas ecuaciones de forma que q_i y p_i aparezcan en ellas en forma parecida. Si en lugar de L, que depende de $\underline{q}$ y $\underline{\dot{q}}$, usáramos otra función que dependiera de $\underline{q}$ y $\underline{p}$, las ecuaciones serían más simétricas entre las variables q_i y p_i. La función que buscamos es la transformada de Legendre de la lagrangiana, y corresponde a la hamiltoniana.

Transformada de Legendre

Para una función de una variable $f(x)$ buscamos una función de la derivada que nos dé la misma información. Si denotamos por X la derivada, $X = f'(x)$, buscamos $F(X)$. Se tiene que la transformada de Legendre de $f(x)$ es

$$F(X) = X\,x(X) - f(x(X)).$$

Para obtenerla debemos poder despejar x de la ecuación $X = f'(x)$, con lo que tendremos que exigir que $f''(x) \neq 0$. Se tiene entonces que $F(X)$ nos proporciona la misma información que $f(x)$ ya que a partir de $F(X)$ podemos 'reconstruir' $f(x)$:

$$f(x) = X(x)\,x - F(X(x)).$$

Para obtener $f(x)$ a partir de $F(X)$ debemos poder despejar X de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X} = x,$$

pero esto está garantizado ya que

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X} \neq 0.$$

Veamos cómo se obtiene.

La diferencial de L es

$$\mathrm{d}L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\mathrm{d}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t, \tag{3.4}$$

que podemos escribir, usando la definición de p_i y las ecuaciones de Lagrange, como

$$\mathrm{d}L = \sum_i \dot{p}_i \,\mathrm{d}q_i + \sum_i p_i \,\mathrm{d}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

Sumando y restando $\sum_i \dot{q}_i \,\mathrm{d}p_i$,

$$\mathrm{d}L = \sum_i \dot{p}_i \,\mathrm{d}q_i + \sum_i p_i \,\mathrm{d}\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \,\mathrm{d}p_i - \sum_i \dot{q}_i \,\mathrm{d}p_i + \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t, \tag{3.6}$$

o bien

$$\mathrm{d}L = \sum_i \dot{p}_i \,\mathrm{d}q_i - \sum_i \dot{q}_i \,\mathrm{d}p_i + \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}\left(\sum_i p_i \,\dot{q}_i\right), \tag{3.7}$$

con lo que

$$\mathrm{d}\left(L - \sum_i p_i \,\dot{q}_i\right) = \sum_i \dot{p}_i \,\mathrm{d}q_i - \sum_i \dot{q}_i \,\mathrm{d}p_i + \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t. \tag{3.8}$$

Como $H = \sum_i p_i \,\dot{q}_i - L$, se tiene

$$\mathrm{d}H = \sum_i \dot{p}_i \,\mathrm{d}q_i - \sum_i \dot{q}_i \,\mathrm{d}p_i + \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t, \tag{3.9}$$

que podemos escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \end{aligned} \tag{3.11}$$

se conocen con el nombre de ecuaciones canónicas de Hamilton y sustituyen a las ecuaciones de Lagrange . Se observa que en estas ecuaciones las variables q_i y p_i actúan como variables independientes y en pie de igualdad. La función H, hamiltoniana, depende de $\underline{q}$, $\underline{p}$ y t: $H = H(\underline{q}, \underline{p}, t)$.

Las ecuaciones de Hamilton son ecuaciones de primer orden, a diferencia de las ecuaciones de Lagrange que eran de segundo orden. Las condiciones iniciales para obtener la solución son ahora las coordenadas generalizadas $\underline{q}(t_0)$ y los momentos canónicos conjugados $\underline{p}(t_0)$. Las soluciones son curvas en el espacio $(\underline{q}, \underline{p})$, llamado espacio fásico, parametrizadas por el tiempo t.

El paso de la lagrangiana a la hamiltoniana se ha realizado mediante la llamada transformación de Legendre, que nos ha permitido pasar de la función L que depende de $\underline{q}$, $\dot{\underline{q}}$ y t a la función H que depende de $\underline{q}$, $\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}}$ y t. Esta transformación de podrá realizar siempre que podamos resolver el sistema $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ a fin de obtener las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ en función de los momentos p_i, las coordenadas q_i y el tiempo. Debemos, por tanto exigir que el hessiano de L en $\dot{\underline{q}}$ sea diferente de cero:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0. \tag{3.12}$$

En el caso de potenciales independientes de la velocidad se tiene que

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right), \tag{3.13}$$

y, como $T = \frac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \dot{\vec{r}}_a = T_0 + T_1 + T_2$, con

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2}\sum_a m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t} \\ T_1 &= \sum_i \left(\sum_a m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t}\right) \dot{q}_i \\ T_2 &= \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2}\sum_a m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j}\right) \dot{q}_i \dot{q}_j, \end{aligned} \tag{3.14}$$

se debe cumplir, para garantizar que T sea siempre positiva si las velocidades generalizadas son diferentes de cero, que

$$\det\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0 \Rightarrow \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0. \tag{3.15}$$

Veamos algún ejemplo con el fin de familiarizarnos con la formulación hamiltoniana.

Consideremos un oscilador armónico unidimensional. Tomamos como coordenada generalizada la posición en el eje x, q, y su velocidad generalizada, $\dot{q}$. Escribamos la energía cinética y potencial.

$$T = \frac{1}{2}m\,\dot{q}^2; \quad U = \frac{1}{2}k\,q^2 \;\Rightarrow\; L = \frac{1}{2}m\,\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k\,q^2. \tag{3.16}$$

El momento conjugado será

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\,\dot{q}, \tag{3.17}$$

que podemos invertir ya que el hessiano

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\right) = m \neq 0. \tag{3.18}$$

Se tiene que $\dot{q} = p/m$. La hamiltoniana, transformada de Legendre de la lagrangiana, es

$$H = p\,\dot{q} - L = p\,\dot{q} - \frac{1}{2}m\,\dot{q}^2 + \frac{1}{2}k\,q^2, \tag{3.19}$$

pero debemos expresarla en función de q y p:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}k\,q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k\,q^2. \tag{3.20}$$

La ecuación de Lagrange para este sistema es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \;\Rightarrow\; m\ddot{q} = -k\,q, \tag{3.21}$$

mientras que las ecuaciones canónicas de Hamilton son

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \Rightarrow \dot{p} = -k\,q \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

En forma matricial podemos escribir

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Es claro que las dos formulaciones contienen la misma información y los resultados obtenidos serán los mismos. Sin embargo, la interpretación

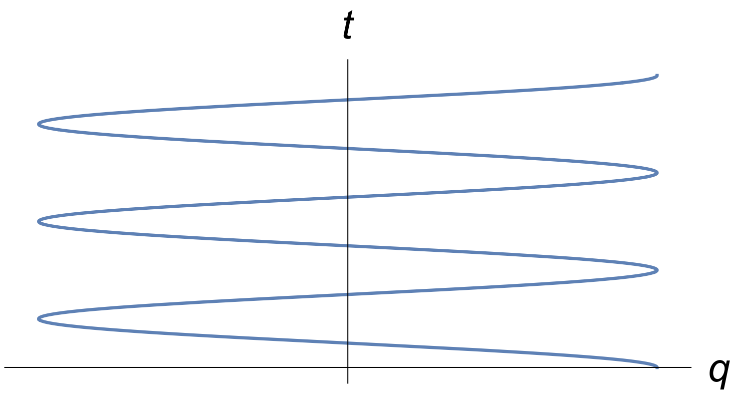

Figura 3.1: Curva en el espacio de configuración extendido.

resulta ser diferenta. Si integramos las ecuaciones de Lagrange obtendremos como solución

$$q(t) = A\,\cos(\omega\,t + \delta), \tag{3.24}$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y A y δ se obtendrán a partir de las condiciones iniciales $q(t_0) = q_0$, $\dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$. La solución $q(t)$ es una curva en el espacio de configuración parametrizada por t, que podemos representar en el espacio de configuración extendido[1] (Fig. 3.1).

En la formulación hamiltoniana la solución es

$$\begin{aligned} q(t) &= q(t) = A\,\cos(\omega\,t + \delta) \\ p(t) &= -m\,A\,\omega\,\sin(\omega\,t + \delta), \end{aligned} \tag{3.25}$$

que es una curva en el espacio fásico (q, p) parametrizada por t como se muestra en la Fig. (3.2), o bien en el espacio fásico extendido (Fig. 3.3).

Veamos ahora las ecuaciones canónicas para una partícula de masa m que se mueve en el plano $x - y$ bajo la acción de la gravedad $\vec{g} = -g\,\vec{e}_y$. El sistema tiene dos grados de libertad y escribimos la energía cinética como

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{3.26}$$

y la potencial

$$U = m\,g\,y. \tag{3.27}$$

[1]Decimos *extendido* porque hemos añadido el tiempo.

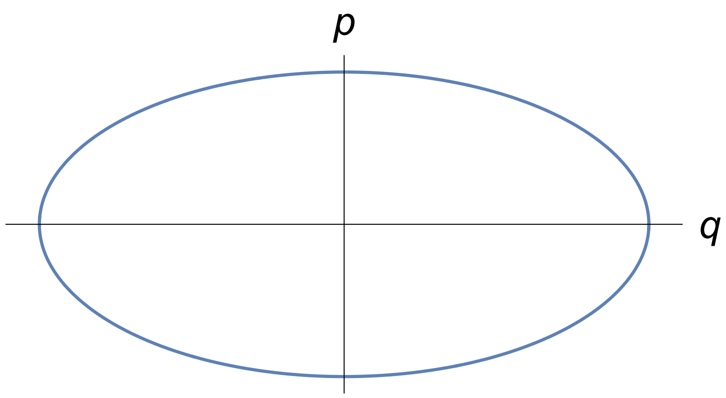

Figura 3.2: Curva en el espacio fásico.

La lagrangiana es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m\,g\,y, \tag{3.28}$$

y los momentos canónicos conjugados

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x} \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\,\dot{y}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Al ser el sistema conservativo sin ligaduras dependientes del tiempo, se tiene

$$H = T + U \Rightarrow H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + m\,g\,y. \tag{3.30}$$

Las ecuaciones canónicas de Hamilton son

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -m\,g \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

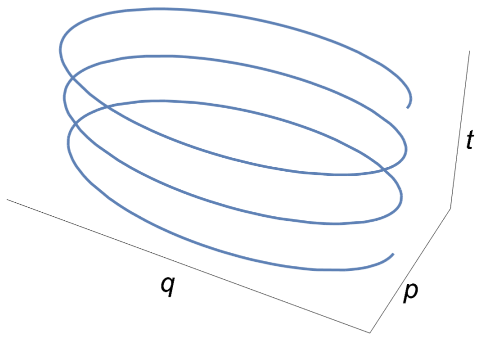

Figura 3.3: Curva en el espacio fásico extendido.

3.2. Teoremas de conservación

De forma similar a lo que hicimos en la formulación lagrangiana para obtener las leyes de conservación, nos planteamos obtener estas leyes a partir de las ecuaciones de Hamilton. En particular, si una coordenada no aparece en la lagrangiana tampoco aparecerá en la hamiltoniana ya que

$$H = \sum_i p_i \, \dot{q}_i - L. \tag{3.32}$$

Se tiene entonces que el momento conjugado p_k de esa coordenada, q_k, se conserva, ya que

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_k = \text{cte.} \tag{3.33}$$

Con esto podemos reducir el sistema de $2n$ ecuaciones canónicas en 2 unidades, es decir, nos quedaría un sistema de $2n-2$ ecuaciones, al eliminar las 2 ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

con k fijo, sustituyendo el valor de $p_k = \alpha_k$ en la función H, donde α_k será ahora un parámetro.

El procedimiento para reducir el número de ecuaciones en el caso de tener coordenadas cíclicas es mucho más sencillo en la formulación hamiltoniana que en la lagrangiana ya que la magnitud conservada es un momento canónico y no la velocidad generalizada.

Procedimiento de Routh

Si en un sistema de n grados de libertad las m primeras coordenadas generalizadas son cíclicas, Routh propone definir la *Routhiana*, R, como la siguiente transformada de Legendre *parcial* de la lagrangiana

$$R(q_{m+1},\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t)=\sum_{i=1}^{m}p_i\,\dot q_i-L(q_{m+1},\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n,t). \tag{3.35}$$

Con esta definición, R cumple las ecuaciones de Hamilton para las m primeras variables y las de Lagrange para las restantes:

$$\left.\begin{array}{rcl}\dot q_i &=& \frac{\partial R}{\partial p_i}\\ \dot p_i &=& -\frac{\partial R}{\partial q_i}\end{array}\right\} i=1,\dots,m$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad i=m+1,\dots,n. \tag{3.36}$$

Pero al no aparecer $q_1,\dots,q_m$ en R se tendrá que $p_i=\alpha_i=$ cte. y en las ecuaciones de Lagrange sólo aparecerán las coordenadas y velocidades generalizadas correspondientes a las no cíclicas.

Basándose en la formulación lagrangiana vimos también que si la lagrangiana no dependía explícitamente del tiempo y las fuerzas eran conservativas entonces la función hamiltoniana era una constante de movimiento: $H=$ cte. Veamos esto basándonos en las ecuaciones canónicas. Se tiene que, al ser H una función de las coordenadas $\underline{q}$, de los momentos $\underline{p}$ y del tiempo t,

$$\mathrm{d}H=\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i+\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\,\mathrm{d}p_i+\frac{\partial H}{\partial t}\,\mathrm{d}t \tag{3.37}$$

y, de aquí,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\,\dot q_i+\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\,\dot p_i+\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{3.38}$$

Usando las ecuaciones canónicas

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{3.39}$$

llegamos a

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{3.40}$$

lo cual indica que si la hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo entonces H es una constante de movimiento. Pero como $H = \sum_i p_i\, \dot{q}_i - L$, si L no depende explícitamente del tiempo tampoco dependerá H. Recordemos además que si las ligaduras son holónomas y esclerónomas entonces la función hamiltoniana coincide con la energía total.

Señalaremos, por último, que dada la lagrangiana $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$, si realizamos un cambio de coordenadas generalizadas la nueva lagrangiana se obtiene sustituyendo en la expresión funcional de L las coordenadas antiguas en función de las nuevas coordenadas: invariancia de las ecuaciones de Lagrange. Esto no ocurre con la función hamiltoniana, es decir, la nueva hamiltoniana no se obtendrá, en general, sustituyendo $\underline{q}$ y $\underline{p}$ por las nuevas coordenadas y momentos en la expresión de H.

3.3. Corchetes de Poisson

Consideremos una función f que depende de las coordenadas, momentos y del tiempo: $f(\underline{q}, \underline{p}, t)$. A este tipo de funciones, definidas en el espacio fásico extendido, de dimensión $2n + 1$, las llamaremos variables dinámicas. Obtengamos la derivada total de la función respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\, \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\, \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{3.41}$$

Para un sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

con lo que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{3.43}$$

Definimos el corchete de Poisson de dos variables dinámicas, $f(\underline{q},\underline{p},t)$ y $g(\underline{q},\underline{p},t)$, como

$$[f,g]=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right), \tag{3.44}$$

con lo que, usando esta definición, tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=[f,H]+\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{3.45}$$

La derivada total de f respecto al tiempo es la derivada temporal siguiendo el flujo en el espacio fásico. Observamos que si f no depende explícitamente del tiempo se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=[f,H], \tag{3.46}$$

y f será una magnitud conservada si y sólo si su corchete de Poissonn con la hamiltoniana es cero.

Observamos también que si tomamos com f las coordenadas q_i y los momentos p_i, obtenemos las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= [q_i,H]=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i &= [p_i,H]=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.\end{aligned} \tag{3.47}$$

3.4. Deducción a partir de un principio variacional

Las ecuaciones de Hamilton pueden deducirse, al igual que las ecuaciones de Lagrange, a partir de un principio variacional. Recordemos que el principio de Hamilton nos decía que la integral

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,\mathrm{d}t \tag{3.48}$$

era extremal respecto a las variaciones de $\underline{q}(t)$ alrededor del movimiento real con las condiciones $\underline{q}(t_1)=\underline{q}^{(1)}$ y $\underline{q}(t_2)=\underline{q}^{(2)}$ fijas.

FIGURA

El principio de Hamilton modificado establece que el funcional

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_i p_i\dot{q}_i-H(\underline{q},\underline{p},t)\right]\mathrm{d}t \tag{3.49}$$

es extremal respecto a variaciones de las funciones $\underline{q}(t)$, $\underline{p}(t)$ alrededor del movimiento real con las condiciones $\underline{q}(t_1) = \underline{q}^{(1)}$ y $\underline{q}(t_2) = \underline{q}^{(2)}$ fijas.

Obtengamos a partir de este principio las ecuaciones de Hamilton. Impongamos que $\delta S = 0$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i\, \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}, t) \right] \mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\delta p_i\, \dot{q}_i + p_i\, \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \mathrm{d}t = 0. \tag{3.50}$$

Reagrupando y haciendo la integral $\int_{t_1}^{t_2} p_i\, \delta \dot{q}_i$ por partes se llega a

$$\left. \sum_i p_i\, \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] \mathrm{d}t = 0. \tag{3.51}$$

Para que esta integral se anule para cualquier variación δq_i, δp_i, se deben anular los coeficientes, con lo que llegamos a las ecuaciones de Hamilton. Fundamental en la prueba ha sido suponer que las coordenadas y los momentos son independientes.

3.5. La acción como función de las coordenadas

Se denomina integral de acción al funcional del principio de Hamilton

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, \mathrm{d}t, \tag{3.52}$$

que, claro está, debemos conocer $\underline{q}(t)$ para calcularlo. Como la solución real que sigue el sistema entre una posición inicial $\underline{q}^{(1)}$ en t_1 y $\underline{q}^{(2)}$ en t_2 está unívocamente definida, a cada posición inicial y final en los instantes t_1 y t_2 le asociamos un valor de la integral de acción. Así, podemos escribir

$$S = S(t_1, \underline{q}^{(1)}; t_2, \underline{q}^{(2)}). \tag{3.53}$$

Si fijamos la posición inicial en el instante t_0, $\underline{q}^{(0)}$, la acción sólo dependerá del tiempo y posición final, t, $\underline{q}$,

$$S = S(t, \underline{q}) = \int_{t_0}^{t} L\, \mathrm{d}t, . \tag{3.54}$$

Como ejemplo de lo que acabamos de decir, obtengamos la acción correspondiente a una partícula libre que se mueve en tres dimensiones. Se tiene que el movimiento es

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}\,(t - t_0), \tag{3.55}$$

con $\vec{v} = \vec{\text{cte}}$, y la lagrangiana es

$$L = \frac{1}{2} m\,\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2} m \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}{(t-t_0)^2}. \tag{3.56}$$

Integrando

$$\int_{t_0}^{t} L\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} m\,\vec{v}\cdot\vec{v}(t-t_0) = \frac{1}{2} m \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}{(t-t_0)}, \tag{3.57}$$

es decir,

$$S(t,\vec{r}) = \frac{1}{2} m \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}{(t-t_0)}. \tag{3.58}$$

Como la acción dependerá de las coordenadas y del tiempo, calculemos las derivadas con respecto a estas variables. Consideremos primero el cambio en la acción al cambiar las posiciones finales, es decir $\underline{q}$, sin cambiar el tiempo final. Se tiene que

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} \delta L\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) \mathrm{d}t =$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \bigg|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\,\mathrm{d}t. \tag{3.59}$$

Como estamos considerando un movimiento real, el último término se anulará ya que se cumplen las ecuaciones de Lagrange

$$\delta S = \sum_i p_i\,\delta q_i, \tag{3.60}$$

de aquí se sigue que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \tag{3.61}$$

Obtengamos ahora la derivada parcial de S respecto al tiempo t. Partimos de que

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t_0}^{t} L\,\mathrm{d}t = L \tag{3.62}$$

con lo que, al ser

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \ \Rightarrow$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = L - \sum_i p_i\,\dot{q}_i, \tag{3.63}$$

es decir,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \tag{3.64}$$

Para el caso de la partícula libre se tiene

$$S = \frac{1}{2}m\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}{(t-t_0)}, \tag{3.65}$$

con lo que

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}m\,2\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{(t-t_0)}\cdot\mathrm{d}\vec{r} - \frac{1}{2}m\,2\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{(t-t_0)^2}\,\mathrm{d}t = \vec{p}\cdot\mathrm{d}\vec{r} - H\,\mathrm{d}t. \tag{3.66}$$

Podemos entonces escribir.

$$\mathrm{d}S = \sum_i p_i\,\mathrm{d}q_i - H\,\mathrm{d}t, \tag{3.67}$$

y la integral se acción

$$S = \int\left(\sum_i p_i\,\mathrm{d}q_i - H\,\mathrm{d}t\right). \tag{3.68}$$

Si consideramos sistemas en los que la hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo, la acción se puede escribir como

$$S = \int\left(\sum_i p_i\,\mathrm{d}q_i\right) - H\,(t-t_0). \tag{3.69}$$

Por otra parte, el principio de mínima acción nos dice que la variación de la acción si mantenemos el punto inicial y final constantes y los instantes de tiempo correspondientes, es cero en el movimiento real. Si liberamos la condición de llegar en el mismo instante de tiempo se tendrá

$$\delta S = -H\,\delta t \tag{3.70}$$

con lo que

$$-H\,\delta t = \delta \int \left(\sum_i p_i\,\mathrm{d}q_i \right) - H\,\delta t, \tag{3.71}$$

lo que implica

$$\delta \int \left(\sum_i p_i\,\mathrm{d}q_i \right) = 0. \tag{3.72}$$

Este resultado se conoce con el nombre de principio de mínima acción o principio de Maupertuis y nos permite obtener la trayectoria sin necesidad de obtener el movimiento. Para ello debemos obtener p_i en función de q_i usando la definición de p_i:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{3.73}$$

y la constancia de la hamiltoniana

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = E. \tag{3.74}$$

El principio fue planteado por Maupertuis, aunque de forma poco rigurosa y fue formalizado más tarde por Lagrange y Euler. Está muy relacionado con el principio de Fermat y, como hemos dicho, nos permitirá obtener la trayectoria.

Pongamos un ejemplo de aplicación de este principio. Consideremos una partícula que puede moverse en dos dimensiones en un campo gravitatorio constante. La lagrangiana será, tomando coordenadas cartesianas,

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m\,g\,y. \tag{3.75}$$

Los momentos conjugados son

$$\begin{aligned} p_x &= m\,\dot{x}, \\ p_y &= m\,\dot{y}. \end{aligned} \tag{3.76}$$

El principio de mínima acción será

$$\delta \int (p_x\,\mathrm{d}x + p_y\,\mathrm{d}y) = 0 \Rightarrow \delta \int (p_x\,\dot{x} + p_y\,\dot{y})\,\mathrm{d}t = \delta \int 2T\,\mathrm{d}t = 0.$$

Si parametrizamos la curva usando la longitud de arco s, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$, podemos escribir la integral, usando que $T = \frac{1}{2} m\,v^2 = E - m\,g\,y$, como

$$\delta \int 2(E - m\,g\,y) \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2(E - m\,g\,y)}} = \delta \int \sqrt{2(E - m\,g\,y)}\,\mathrm{d}s = 0. \tag{3.77}$$

Si comparamos con el principio de Fermat

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{1}{c} \int n \, \mathrm{d}s \to \text{extremo} \tag{3.78}$$

vemos que son equivalentes si el índice de refracción $n(x, y, z)$ lo identificamos con $\sqrt{2(E - m\,g\,y)}$.