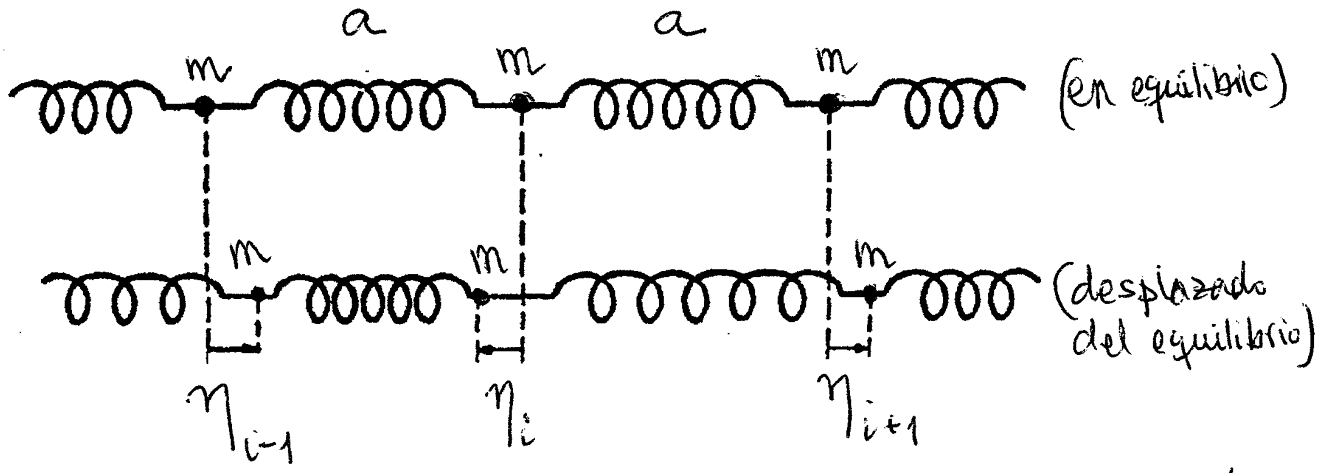
Formulación lagrangiana en un sistema continuo

Veamos con un ejemplo sencillo como pasar de un sistema con un conjunto numerable de grados de libertad a otro constituido por un conjunto no numerable de ellos. Se trata de las vibraciones longitudinales de una barra elástica. Se trata de un campo no relativista con velocidades pequeñas de propagación y que es además un campo escalar y en una dimensión.



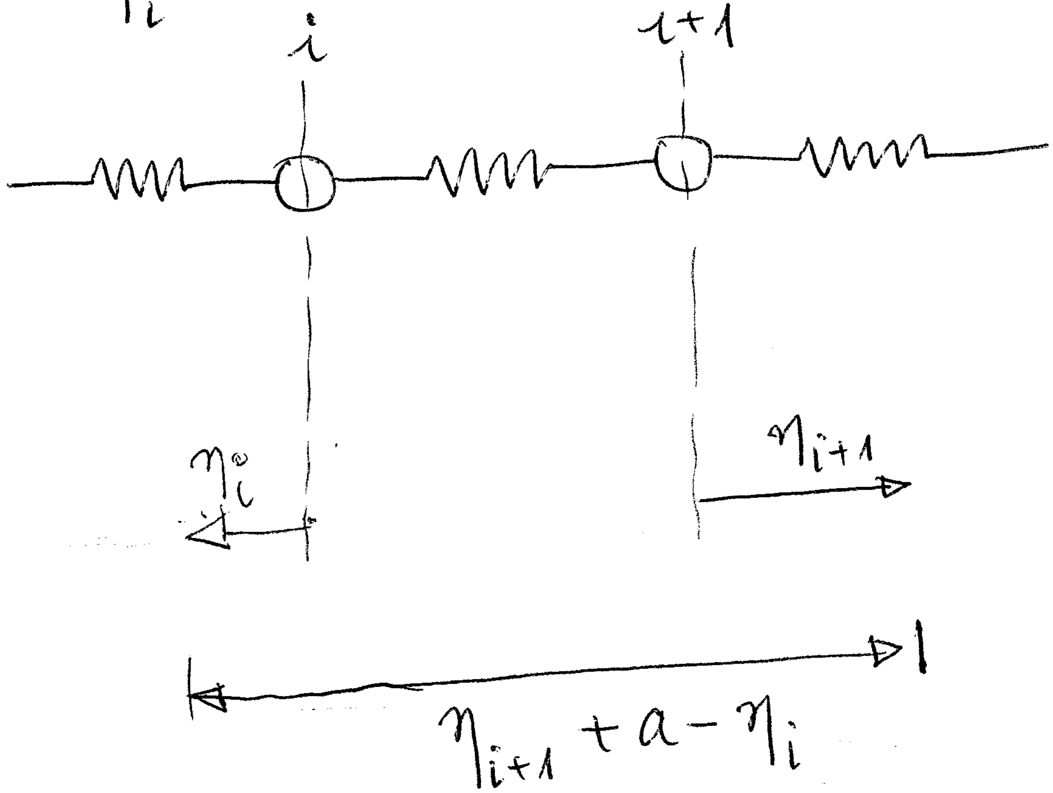
El sistema discreto será el siguiente: Un conjunto de partículas de masa m unidas mediante muelles sin masa de constante recuperadora eláctica k. La separación de las masas en reposo es a y las masas solo sufren desplazamientos longitudinales que, respecto a la posición de equilibrio, se designará por η_i para la partícula i:

Partícula i $\longmapsto$ desplazamiento η_i (medido respecto a la posición de equilibrio)

La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m \dot{\eta}_i^2$$

Cada muelle sufre un cambio de longitud igual a $\eta_{i+1} - \eta_i$ como se ve en la figura:



$$\Delta\eta = \begin{pmatrix}\text{longitud del muelle} \\ \text{tras el desplazamiento}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{longitud inicial} \\ \text{entre masas}\end{pmatrix} =$$

$$= (\eta_{i+1} + a - \eta_i) - a = \eta_{i+1} - \eta_i$$

La energía potencial debido al cambio de longitud de los muelles (para un muelle es $\frac{1}{2}kx^2$):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2$$

Lagrangiano del sistema:

$$\boxed{L = T - U = \frac{1}{2}\sum_i \left[m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \right]}$$

que también se puede escribir:

$$L = \frac{1}{2}\sum_i a\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}\right)^2\right] \equiv \sum_i a L_i$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_j} = 0$$

que nos dan:

$$\frac{m}{a}\ddot{\eta}_j + ka\left(\frac{\eta_j - \eta_{j-1}}{a^2} - \frac{\eta_{j+1}-\eta_j}{a^2}\right) = 0$$

Para pasar al continuo consideramos:

$$\left.\begin{matrix} m \to 0 \\ a \to 0 \end{matrix}\right\}$$

de modo que:

$$\lim_{a\to 0} \frac{m}{a} = \mu \text{ (masa por unidad de longitud)}$$

Si f es la fuerza aplicada:

$$f = k(\eta_{i+1} - \eta_i)$$

Para una <u>barra elástica</u>:

$$f = Y \frac{\Delta L}{L}$$

Y: módulo de Young

$\frac{\Delta L}{L}$: alargamiento por unidad de longitud.

$$f = k(\eta_{i+1} - \eta_i) = ka \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = ka \frac{\Delta L}{L}$$

es decir:

$$\lim_{a \to 0} ka = Y \text{ (módulo de Young)}$$

En el límite cambiamos i por la coordenada x para designar la posición de la partícula, ya que $a \to 0$ y el número de partículas es infinito. El sumatorio se convertirá en una integral y, además,

$$\lim_{a \to 0} \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \lim_{a \to 0} \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a} = \frac{\partial \eta(x)}{\partial x}$$

Sustituyendo en L_i:

$$\lim_{a \to 0} L_i = \lim_{a \to 0} \frac{1}{2}\left[m \dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2\right]$$

$$\lim_{a\to 0} L_i = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - Y\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right] \equiv \mathcal{L}$$

y el langrangiano es:

$$\boxed{L = \int \mathcal{L}\, dx}$$

siendo $\mathcal{L}$ la densidad lagrangiana. Si tenemos en cuenta que:

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\left[\frac{\eta_{j+1}-\eta_j}{a} - \frac{\eta_j - \eta_{j-1}}{a}\right] =$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{x+a} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_x\right] = \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2}$$

y la ecuación de movimiento será:

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

que queda ($\eta(x)$ es la ecuación del campo escalar):

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\mu}{Y}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}}$$

que comparando con la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

nos da la velocidad de propagación:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$$

Formulación lagrangiana de un campo (una dimensión)

$$\eta_i(t) \longrightarrow \eta(x,t) \quad \text{(campo escalar)}$$

$$L(\eta_i, \dot{\eta}_i, t) \longrightarrow L = \int \underbrace{\mathcal{L}\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial t}; x, t\right)}_{\text{densidad lagrangiana}} dx$$

Principio de mínima acción $\quad \delta I = 0 \quad$ (I es la acción)

$$I = \int L\, dt = \iint \mathcal{L}\, dx\, dt = I\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)$$

Donde al hacer la acción extremal queda:

$$\delta I = \int dx \int dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial x)} \delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial t)} \delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\right] = 0$$

Tenemos en cuenta que se cumple:

$$\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta \eta) \qquad \delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\delta \eta)$$

y nos queda:

$$\delta I = \int dx \int dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)} \frac{\partial}{\partial x}(\delta\eta) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\eta) \right] = 0$$

Integramos por partes el segundo sumando respecto a $\underline{\underline{x}}$ y el tercero respecto a t:

$$\int dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)} \frac{\partial}{\partial x}(\delta\eta) \right] =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)} \rightarrow du = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)} \right) \\ dv = \dfrac{\partial}{\partial x}(\delta\eta)\, dx \rightarrow v = \delta\eta \end{array} \right| =$$

$$= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)} \delta\eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int dx \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)} \right) \delta\eta \right]$$

$$\int dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\eta) \right] =$$

$$
= \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)} \longrightarrow du = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)}\right) \\[2em] dv = \dfrac{\partial}{\partial t}(\delta\eta) \longrightarrow v = \delta\eta \end{array} \right| =
$$

$$
= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\,\delta\eta\right]_{t_1}^{t_2} - \int dt\, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\right)\delta\eta
$$

Sustituyendo en la expresión de δI nos queda:

$$
\delta I = \int dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)}\,\delta\eta\right]_{x_1}^{x_2} + \int dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\,\delta\eta\right]_{t_1}^{t_2} +
$$

$$
+ \int dx \int dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\,\delta\eta - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)}\right)\delta\eta - \right.
$$

$$
\left. - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\right)\delta\eta \right] = 0
$$

Las dos primeras integrales son nulas, ya que los puntos extremos se mantienen fijos:

Como $\delta\eta$ es arbitraria, para que $\delta I = 0$ lo debe ser el integrando. Esto nos da la <u>ecuación de Euler-Lagrange para un campo escalar en una</u>

dimensión:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}=0}$$

Para la barra elástica la densidad lagrangiana es:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}Y\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2$$

resulta al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(Y\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)=0 \Rightarrow \mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=Y\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

Formulación lagrangiana de un campo (tres dimensiones)

Consideremos el tetrapotencial campo A^μ:

$$A^\mu=\left(\frac{\phi}{c},\vec{A}\right)$$

entonces la densidad lagrangiana dependerá de:

$$\mathcal{L}\left(\eta,\frac{\partial\eta}{\partial x},\frac{\partial\eta}{\partial t};x,t\right)\mapsto \mathcal{L}\left(A_\mu,\partial_\nu A_\mu,x^\mu\right)$$

$$(\mu,\nu=0,1,2,3)$$

La acción será:

$$\boxed{I=\frac{1}{c}\int \mathcal{L}\,d^4x}$$

con $d^4x = c\,dt\,dx\,dy\,dz \equiv dx^0dx^1dx^2dx^3$.

Aplicando el <u>principio de mínima acción</u> ($\delta I = 0$):

$$\delta I = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta(\partial_\nu A_\mu) \right] d^4x = 0$$

Integrando por partes el segundo sumando respecto a x^ν y teniendo en cuenta que los extremos son fijos y por lo tanto en ellos no hay variaciones en A_μ,

$$\delta I = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) \delta A_\mu \right] d^4x = 0$$

y al ser δA_μ variaciones arbitrarias queda:

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0$$

que son las <u>ecuaciones de Euler-Lagrange para A_μ</u>:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0}$$

donde recordemos que la <u>densidad lagrangiana</u> es:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu, x^\mu) \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$