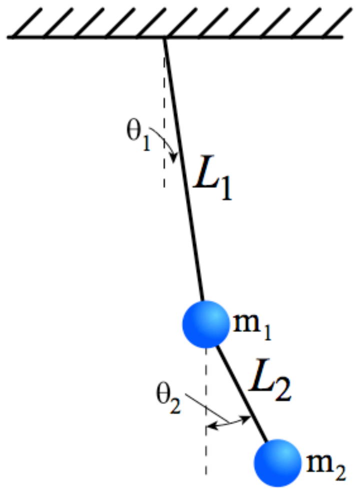
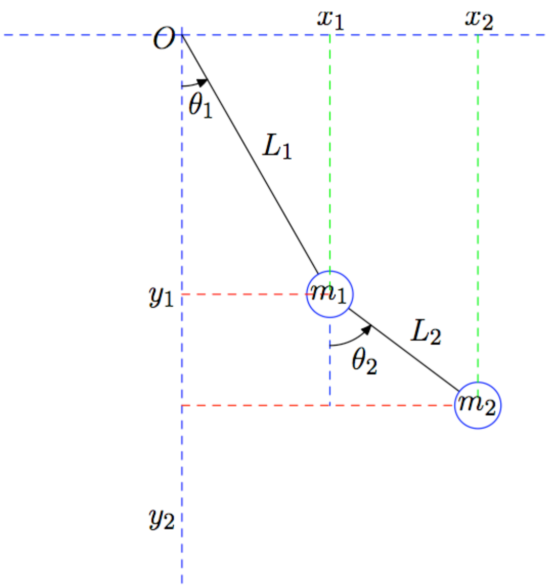
Práctica de ordenador 1 "Péndulo doble"

Introducción

El péndulo doble es un sistema formado por dos péndulos con el segundo colgando del extremo del primero tal como se muestra en la siguiente figura.



Ecuaciones de movimiento de un péndulo doble



$$x_1 = L_1 \sin(\theta_1)$$
$$x_2 = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2)$$
$$y_1 = -L_1 \cos(\theta_1)$$
$$y_2 = -L_1 \cos(\theta_1) - L_2 \cos(\theta_2)$$

Podemos expresar la energía cinética T del sistema en función de las coordenadas generalizadas θ_1 y θ_2

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 + 2\dot{\theta}_1 L_1 \dot{\theta}_2 L_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]$$

de la misma manera la energía potencial V del sistema puede escribirse

$$V = m_1 g y_1 + m_1 g y_2 = -m_1 g L_1 \cos(\theta_1) - m_2 g\left(L_1\cos(\theta_1) + L_2\cos(\theta_2)\right)$$

Por lo tanto el lagrangiano L del sistema será

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_2^2 L_2^2 + m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 L_1 L_2\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + \left(m_1 + m_2\right)gL_1\cos(\theta_1) + m_2 g L_2\cos(\theta_2)$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ para θ_1 y θ_2 se obtiene

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-m_2 L_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 L_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)g\sin(\theta_1)}{(m_1 + m_2)L_1}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-L_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) + L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - g\sin(\theta_2)}{L_2}$$

Estas ecuaciones son dependientes entre sí ya que ambas contienen $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$

Sustituyendo se llega a

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-m_2 L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2) + g m_2\sin(\theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 L_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)g\sin(\theta_1)}{(m_1 + m_2)L_1 - m_2 L_1\cos^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{m_2 L_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2) + g\sin(\theta_1)\cos(\theta_1 - \theta_2)(m_1 + m_2) + L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2)(m_1 + m_2) - (m_1 + m_2)g\sin(\theta_2)}{(m_1 + m_2)L_2 - m_2 L_2\cos^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

Podemos convertir estas ecuaciones en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden definiendo nuevas variables

$$\begin{array}{ll} z_1 = \theta_1 & \dot{z}_1 = \dot{\theta}_1 \\ z_2 = \theta_2 & \dot{z}_2 = \dot{\theta}_2 \\ z_3 = \dot{\theta}_1 & \dot{z}_3 = \ddot{\theta}_1 \\ z_4 = \dot{\theta}_2 & \dot{z}_4 = \ddot{\theta}_2 \end{array}$$

De esta manera nos queda un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{z}_1 = z_3$$
$$\dot{z}_2 = z_4$$
$$\dot{z}_3 = \frac{-m_2 L_1 z_3^2 \sin(z_1 - z_2)\cos(z_1 - z_2) + g m_2 \sin(z_2)\cos(z_1 - z_2) - m_2 L_2 z_4^2 \sin(z_1 - z_2) - (m_1 + m_2) g \sin(z_1)}{(m_1 + m_2)L_1 - m_2 L_1 \cos^2(z_1 - z_2)}$$
$$\dot{z}_4 = \frac{m_2 L_2 z_4^2 \sin(z_1 - z_2)\cos(z_1 - z_2) + g \sin(z_1)\cos(z_1 - z_2)(m_1 + m_2) + L_1 z_3^2 \sin(z_1 - z_2)(m_1 + m_2) - (m_1 + m_2) g \sin(z_2)}{(m_1 + m_2)L_2 - m_2 L_2 \cos^2(z_1 - z_2)}$$

Estas ecuaciones son las que resuelve numéricamente el programa python double_pendulum.py usando la librería odeint

Procedimiento de la práctica

Parte A : Dinámica de un péndulo doble.

Poner los siguientes valores de entrada para la simulación del péndulo doble:

$$L_1 = L_2 = 10 \text{ cm}$$
$$m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$$
$$\text{g}=9.8 \text{ m/s}^2$$
$$\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 20^0$$
$$\dot{\theta}_{1,0} = \dot{\theta}_{2,0} = 0$$
$$t_{simul} = 10 \text{ s}$$

Graficar:

- La trayectoria del péndulo en el espacio real (x,y)
- La trayectoria del péndulo en el espacio de fases ($\theta,\dot{\theta}$)
- La evolución de ambos ángulos θ_1 y θ_2 con el tiempo
- La evolución de las energías de ambas masas con el tiempo. Comprueba también que la energía total se conserva.

Repetir la simulación con los mismos parámetros excepto $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 130^0$ y volver a hacer las gráficas anteriores. Compara ambos casos.

Parte B : Modos normales en un péndulo doble.

Resuelve el problema de los modos normales de un péndulo doble en la aproximación de pequeñas oscilaciones. Para ello puedes suponer que los ángulos son pequeños y aproximar en las energías cinética y potencial del sistema:

$$\cos\theta \cong 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$
$$\cos(\theta_1 - \theta_2) \cong 1$$

Para simplificar los cálculos asume que $L_1 = L_2 = L$ y $m_1 = m_2 = m$

Calcula los dos modos normales del sistema con sus frecuencias propias.

- En la simulación excita el modo simétrico asegurandote de que los ángulos iniciales que pones en la simulación no sean muy grandes. Observa el movimiento del péndulo doble y grafica la evolución de ambos ángulos con el tiempo. De esta gráfica obtén la frecuencia angular propia del modo y comprueba que coincide con el resultado teórico

- Ahora excita el modo antisimétrico y repite lo hecho en el apartado anterior

Parte C : Caos en un péndulo doble.

El caos en física se refiere a la situación en la cual variaciones muy pequeñas (infinitesimales) en las condiciones iniciales dan lugar a trayectorias que van divergiendo entre sí. El péndulo doble es un sistema que en algunas condiciones puede resultar caótico y vamos a comprobarlo con la simulación.

- Vamos a modificar el programa de simulación para que calcule la evolución de los ángulos del sistema variando las condiciones iniciales. Para ello vamos a obtener el ángulo θ_1 que se obtiene en la simulación para un tiempo de 10 s variando el ángulo inicial . El resto de los valores iniciales de la simulación serán:

$$\theta_{1,0} = \theta_{2,0}$$
$$\dot{\theta}_{1,0} = \dot{\theta}_{2,0} = 0$$

Variaremos $\theta_{1,0}$ entre 0 y 180 grados cada medio grado.

Haremos a continuación una gráfica de $\theta_1(10s) = f(\theta_1(t=0)$ representado los resultados con puntos (no puntos unidos con líneas). Para que valores iniciales de ángulo $\theta_{1,0}$, dirías que el sistema se comporta de manera caótica?

- A continuación vamos a modificar el programa para que represente dos simulaciones con dos condiciones iniciales levemente diferentes

$$\begin{matrix} \theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 120^0 \\ \dot{\theta}_{1,0} = \dot{\theta}_{2,0} = 0 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} \theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 120.00001^0 \\ \dot{\theta}_{1,0} = \dot{\theta}_{2,0} = 0 \end{matrix}$$

Graficar para ambas simulaciones la evolución de θ_1 con el tiempo y comprobar en esta gráfica y en el movimiento del péndulo como se separan en algún momento ambas simulaciones.

- Repetir el apartado anterior pero con las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{matrix} \theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 20^0 \\ \dot{\theta}_{1,0} = \dot{\theta}_{2,0} = 0 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} \theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 20.00001^0 \\ \dot{\theta}_{1,0} = \dot{\theta}_{2,0} = 0 \end{matrix}$$

Graficar para ambas simulaciones la evolución de θ_1 con el tiempo y comprobar en este caso que ambas simulaciones dan prácticamente el mismo resultado.