1. Demostrar que si una partícula, sometida a la acción de una fuerza central atractiva, describe una elipse con foco el centro de fuerzas, la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de fuerzas. La ecuación de la elipse en coordenadas polares con foco el origen es

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}.$$

Derivar dos veces para obtener aceleración y sustituir


$F \propto \frac{1}{r^2}$

Sabemos, por las Leyes de Newton, que $\vec{F} = m\vec{a}$. Por ello, obtengamos la expresión de $\vec{a}$ y veamos con esta la expresión de la fuerza.

EN POLARES: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

1. Derivamos r:

$$\dot{r} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{p}{1+e\cos\theta}\right) = p\frac{e\cdot\dot{\theta}\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{\dot{\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}\cdot pe\sin\theta$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\theta}\left(p\frac{e\cdot\dot{\theta}\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\right) = \frac{\ddot{\theta}(1+e\cos\theta)^{\cancel{2}} + \dot{\theta}2(1+\cancel{e\cos\theta})e\dot{\theta}\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^{\cancel{4}\,3}}\cdot pe\sin\theta + \frac{\dot{\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}\cdot\dot{\theta}pe\cos\theta =$$

$\dot{\theta}^2$ $\sin^2\theta$ $\dot{\theta}^2$

$$= \frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}pe\ddot{\theta}\sin\theta + \frac{2}{(1+e\cos\theta)^3}\cdot pe^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\dot{\theta}^2 pe\cos\theta =$$

buscamos r en la expresión

$$= r^2\cdot\frac{e}{p}\cdot\ddot{\theta}\sin\theta + 2r^3\cdot\frac{e^2}{p^2}\dot{\theta}^2\sin^2\theta + r^2\cdot\frac{e}{p}\dot{\theta}^2\cos\theta$$

2. Como F es una fuerza central, podremos escribir $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ en función de r. Para ello, estudiamos la conservación del momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Longrightarrow L_0 = \mu\dot{\theta}r^2 \;;\; \dot{\theta} = \frac{L_0}{\mu r^2} \;;\; \ddot{\theta} = \frac{d}{dr}\dot{\theta} = \frac{-2L_0 r\dot{r}}{\mu^2 r^4}$$

3. Sustituimos en la expresión de F(r) en polares:

$$F(r) = m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + (2\dot{r}\dot{\theta} + \cancel{r\ddot{\theta}})\right] = m\left[r^2\cdot\frac{e}{p}\cdot\ddot{\theta}\sin\theta + \underbrace{2r^3\cdot\frac{e^2}{p^2}\dot{\theta}^2\sin^2\theta}_{2\dot{r}\frac{e}{p}\dot{\theta}\sin\theta\, r} + r^2\cdot\frac{e}{p}\dot{\theta}^2\cos\theta - r\dot{\theta}^2\right] =$$

$\dot{r} = r^2\cdot\frac{e}{p}\dot{\theta}\sin\theta$

$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$

$a_{tang} = 0 \Rightarrow$ solo depende de r

$$= m\left[\frac{e}{p}\sin\theta r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) + r^2\frac{e}{p}\dot{\theta}^2\cos\theta - r\dot{\theta}^2\right] = m\left[r^2\frac{e}{p}\dot{\theta}^2\cos\theta - r\dot{\theta}^2\right] = mr\dot{\theta}^2\left[r\frac{e}{p}\cos\theta - 1\right] =$$

$$= mr\cdot\frac{L_0^2}{\mu^2 r^4}\left[r\frac{e}{p}\frac{p-r}{re} - 1\right] = m\frac{L_0^2}{\mu^2 r^3}\left[1 - \frac{r}{p} - 1\right] = m\frac{-L_0^2}{\mu^2 p r^2} \longrightarrow F \propto \frac{1}{r^2}$$

$\cos\theta = \frac{p-r}{re}$

$\dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{\mu^2 r^4}$

2. Considera una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central. Si la órbita descrita por la partícula tiene como ecuación

$$r = \frac{p}{1+e\cos[(1-\varepsilon)\theta]},$$

obtén la dependencia de la fuerza con la distancia. Analiza el resultado y obtén el ángulo de avance entre dos pericentros consecutivos en el caso en que $\varepsilon \ll 1$.

Pericentros consecutivos: $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = 1$, hay que ver $\Delta\theta$.

a) Repetimos lo mismo que en el ejercicio anterior:

⋮ (hecho antes)

$$F(r) = \left(a^2 - 1 - \frac{a^2 r}{p}\right)\frac{L^2}{mr^3}$$

b) El pericentro es el punto donde tenemos la mínima distancia de acercamiento al foco. En este caso, $\cos\theta = 1 \Longrightarrow$ hay que ver para qué $r_1$ y $r_2$ tenemos de forma consecutiva $\cos\theta = 1$.

En este caso, $\cos\alpha = \cos[(1-\varepsilon)\theta]$. Así, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{p}{1+e\cos[(1-e)\theta_1]} \\ r_2 &= \frac{p}{1+e\cos[(1-e)\theta_2]} \end{aligned}\right\}$$

$\Delta\theta? \Longrightarrow \cos\alpha = 1$ cuando $\alpha = 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

$\cos[(1-e)\theta_1] = 1 \longrightarrow (1-e)\theta_1 = 2n\pi$

$\cos[(1-e)\theta_2] = 1 \longrightarrow (1-e)\theta_2 = 2m\pi$

$$-(1-e)\Delta\theta = 2n\pi - 2m\pi \;;\; \Delta\theta = \frac{2m\pi - 2n\pi}{1-e};$$

$$\Delta\theta = \frac{2\pi(m-n)}{1-e} = \frac{2\pi k}{1-e},\ k\in\mathbb{Z} \approx 2\pi k(1-e),\ k\in\mathbb{Z}$$

TAYLOR $\frac{1}{1-e} \approx (1-e)+\dots$

4. Una partícula de masa $m$ está sometida al campo de fuerzas $\vec{F} = -\frac{k}{r^4}\vec{r}$, $k>0$. Se encuentra inicialmente a una distancia $b$ del centro de fuerzas, con una velocidad $v_0^2 = \frac{k}{mb^2}$, formando un ángulo $\alpha$ con la dirección radial. a) Demuestra que la partícula caerá sobre el centro de fuerzas o se alejará indefinidamente según que $\alpha > \pi/2$ o $\alpha < \pi/2$. b) Si $\alpha > \pi/2$, ¿qué tiempo tardará en caer sobre el centro? c) Determina la ecuación de la trayectoria.

1. Según el ángulo, vemos la dirección de $v_0$ en comparación con r
2. Sabiendo el valor de Emec, despejamos $v_0 \to$ integramos para conseguir t(r)
3. Despejamos r e integramos


$$\vec{F} = -\frac{k}{r^4}\vec{r} = -\frac{k}{r^3}\hat{r} \Rightarrow \vec{r} = r\hat{r}$$

$$v_0^2 = \frac{k}{mb^2}$$

a) Para ver si se alejará o acercará indefinidamente, estudiamos su energía potencial efectiva y su energía mecánica total:

1. ENERGÍA POTENCIAL: $F(x) = -\frac{du}{dx}$ ; $u(x) = -\int_{x_0}^{x} F(r)\,dr = +k\int_{x_0}^{x} \frac{1}{r^3}dr = -\frac{1}{2}k\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow u(r) = -k\frac{1}{2r^2}$

2. ENERGÍA POTENCIAL EFECTIVA: $u_{eff}(r) = u(r) + \frac{L_0^2}{2m}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{L_0^2 - Km}{2mr^2}$ $\longrightarrow L_0 = m|\vec{r}\times\vec{v}| = mrv\,\text{sen}\,\alpha$

3. ENERGÍA MECÁNICA TOTAL: $E_{mec}(b) = \frac{L_0^2 - Km}{2mb^2} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{E_c} = \frac{L_0^2 - Km}{2mb^2} + \frac{1}{2}m\frac{K}{mb^2}$

tomamos el pto b porque es donde conocemos $v_0$, y esta $E_{mec}$ será cte (fuerza central y conservativa)

Estudiamos en función de la $E_{mec}$:

- $u_{eff}(r) = \frac{L_0^2 - Km}{2mr^2} = \frac{m^2b^2v_0^2\,\text{sen}^2\alpha - Km}{2mr^2} = \frac{mK\,\text{sen}^2\alpha - Km}{2r^2m} = \frac{-K}{2r^2}\cos^2\alpha$ ($\text{sen}^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha$)

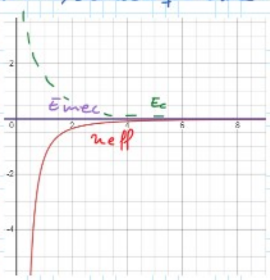
$L_0$ en función de b, se conserva!!

- $E_{mec}(b) = u_{eff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}_0^2 = -\frac{K}{2b^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{2}m\cos^2\alpha\, v_0^2 = -\frac{K}{2b^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cancel{m}\cos^2\alpha\frac{K}{\cancel{m}b^2} = 0$ //

la tomamos en b por ser conservativa y ser b un pto conocido

hay que usar la velocidad radial, y para ello usamos $\dot{r}_0 = v_0\cdot\cos\alpha$

Ahora, sabiendo que $E_{mec} = 0\ \forall r$, graficamos $u_{eff}$ y vemos qué ocurre según $\alpha$:




Aunque $E_c > 0$ siempre, $v_{radial}$ sí cambia, y es su valor el que regirá el movimiento:

1. Si $\alpha < \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \cos\alpha < 0$ ; $\dot{r}_0 = v_0\cdot\cos\alpha < 0 \Longrightarrow$ SE ALEJA
2. Si $\alpha > \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \cos\alpha > 0$ ; $\dot{r}_0 = v_0\cdot\cos\alpha > 0 \Longrightarrow$ SE ACERCA

b) Si $\alpha > \pi/2$, sabemos que caerá hacia el centro. Sabiendo que la energía mecánica total es 0:

$E_{mec} = 0 = -\frac{K}{2r^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{2}m\cos^2\alpha\, v_0^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2\alpha = \frac{K}{2r^2}\cos^2\alpha$ ; $v_0 = \sqrt{\frac{K\cos\alpha}{mr^2}} > 0\ (\alpha > \pi/2)$

$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{K\cos\alpha}{m}}\cdot\frac{1}{r}$ ; $r\,dr = \sqrt{\frac{K\cos\alpha}{m}}\,dt$ ; $\frac{r^2}{2} = \sqrt{\frac{K\cos\alpha}{m}}\,t$ ;

$t(r) = \frac{r^2}{2}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{K\cos\alpha}} \longrightarrow \lim_{r\to b} t(r) = \frac{b^2}{2}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{K\cos\alpha}}$

está a distancia b del centro

c) A partir de las ecuaciones que acabamos de obtener:

$r(t) = \cancel{\sqrt{2t\sqrt{\frac{K\cos\alpha}{m}}}}$ ?? RESOLUCIÓN KIKE

c) $\dot{r}^2 = \frac{K\cos^2\alpha}{m}\cdot\frac{1}{r^2} \Longrightarrow \frac{\dot{r}^2}{\dot{\theta}^2} = \frac{K\cos^2\alpha\, mr^2}{L_0^2}$ $(L_0^2 = m^2r^4\dot{\theta}^2)$

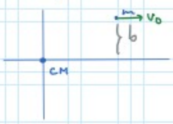
$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{K\cos^2\alpha\, mr^2}{L_0^2} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{-\sqrt{K}\cos\alpha\sqrt{m}\,r}{L_0} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{-\sqrt{K}\cos\alpha}{L_0}d\theta$

Integrando: $\int_b^r \frac{dr'}{r'} = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{-\sqrt{K}\cos\alpha\sqrt{m}}{L_0}d\theta \Rightarrow \underbrace{\ln r - \ln b}_{\ln\frac{r}{b}} = \frac{\sqrt{Km}\cos\alpha}{L_0}(\theta - \theta_0) \Rightarrow r = be$ //

5. Una partícula de masa $m$ se mueve en un campo de fuerzas central de magnitud $mc/r^3$ ($c$ constante) y repulsivo. A una distancia muy grande del centro de fuerzas la partícula se mueve con una velocidad de módulo $v_0$. Si la partícula no fuera deflectada, pasaría a una distancia $b$ del centro. ¿Cuál es, en el movimiento real de la partícula, la mínima distancia al centro de fuerzas?

1. $v_f$ con conservación de L
2. Conservación de la $E_{mec}$, donde $u(r\to\infty) = 0$

$\vec{F} = \frac{mc}{r^3}\hat{r}$




Sabemos que en el campo gravitatorio:
1. $\Delta E_{mec} = 0$
2. $L_0$ constante

Sabemos que cuando $r\to\infty$, $\vec{v} = v_0$. Usando la conservación de la energía mecánica:

- $u_{eff}(r) = u(r) + \frac{L_0^2}{2m}\cdot\frac{1}{r^2}$ ; $u(r) = -\int F\,dr = -\int\frac{mc}{r^3}dr = mc\frac{1}{2r^2}$
- $E_0(r\to\infty) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mc\cancel{\frac{1}{2r^2}}^{0} + \cancel{\frac{L_0^2}{2m r^2}}^{0}$
- $L_0 = mrv = mbv_0 = m\times v_1$ ; $v_f = \frac{bv_0}{a}$ (se conserva)
- $E_{mecf} = \frac{1}{2}mv_f^2 + mc\frac{1}{2a^2} + \frac{L_0^2}{2ma^2} = \frac{1}{2}m\frac{b^2v_0^2}{a^2} + mc\frac{1}{2a^2} + \frac{mb^2v_0^2}{2a^2} =$

$= \frac{mb^2v_0^2}{a^2} + mc\frac{1}{2a^2}$

$\Delta E_{mec} = 0 \Longrightarrow \frac{mb^2v_0^2}{a^2} + \frac{mc}{2a^2} = \frac{1}{2}mv_0^2$ ; $\frac{\cancel{m}b^2v_0^2}{a^2} = \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 - \frac{\cancel{m}c}{2a^2} = \frac{a^2v_0^2 - c}{2a^2}$

$b^2 = \frac{a^2v_0^2 - c}{2\cancel{a^2}}\cdot\frac{\cancel{a^2}}{v_0^2} = \frac{a^2}{2} - \frac{c}{2v_0^2}$ ; $b = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{c}{2v_0^2}}$

$$b^2 = \frac{a^2 v_0^2 - c}{2\cancel{g^2}} \cdot \frac{\cancel{g^2}}{v_0^2} = \frac{a^2}{2} - \frac{c}{2v_0^2} \;;\; b = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{c}{2v_0^2}}$$

6. Una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza central que proviene de una energía potencial de la forma $\mathbf{F} = -\frac{K}{r^n}\,\mathbf{e}_r$. ¿Para qué rango de valores de $K$ y $n$ existen órbitas circulares estables?.

1. Condiciones órbitas circulares

1. Para tener órbitas circulares, necesitamos una fuerza atractiva, con lo que $K>0$.

2. Para tener órbitas circulares estables, hemos de tener el mínimo posible de energía / $e = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{mK^2}} = 0 \iff E = -\frac{mK^2}{2L^2}$

Calculamos la energía mecánica:

$\cdot\, u(r) = -\int \frac{K}{r^n} = -K \cdot \frac{r^{n-1}}{n-1}$

$\boxed{n \neq 1}$

$\cdot\, E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - K\cdot\frac{r^{-(n+1)}}{n+1} + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{mK^2}{2L^2}$

LAS CONDICIONES PARA ÓRBITAS CIRCULARES SON
1. $\frac{dV}{dr} = 0$
2. $\frac{d^2V}{dr^2} > 0$

$u_{eff}(r) = -K\cdot\frac{r^{-n-1}}{n+1} + \frac{L^2}{2mr^2}$

$\frac{du_{eff}}{dr} = -\frac{K}{n+1}\cdot(-n-1)\cdot r^{-n} + \frac{L^2}{2m}\cdot(-2)r^{-3} =$

$= +Kr^{-n} - \frac{L^2}{m}r^{-3} = +\frac{K}{r^n} - \frac{L^2}{mr^3} = 0 \;;\; +\frac{Kmr^3}{L^2} = r^n$ *

despejamos $r^n$

$\frac{d^2u_{eff}}{dr} = K(-n)r^{-n-1} - \frac{L^2}{m}(-3)r^{-4} > 0$

$-\frac{Kn}{r^{n+1}} + \frac{3L^2}{mr^4} = -\frac{Kn}{\frac{Kmr^4}{L^2}} + \frac{3L^2}{mr^4} = -\frac{L^2 n}{mr^4} + \frac{3L^2}{mr^4} = \frac{3L^2 - L^2 n}{mr^4} > 0 \iff 3-n>0 \iff n<3$

* $r^{n+1} = \frac{Kmr^3}{L^2}\cdot r$

$\boxed{\text{CASO } n=1}$

$\cdot\, u(r) = -\int F\,dr = -\int \frac{K}{r}\,dr = -K\ln|r|$

$\cdot\, u_{eff}(r) = -K\ln|r| + \frac{L^2}{2mr^2} \longrightarrow \frac{du_{eff}}{dr} = 0 \implies -K\frac{1}{r} + \frac{L^2}{2m}(-2)r^{-3} = -K\frac{1}{r} - \frac{L^2}{mr^3} =$

$= \frac{-Kr^2 m - L^2}{mr^3} = 0 \iff K\cancel{r^2}\cancel{m} = -L^2 = -m^2 r^2 v^2$

$K \neq -mv^2 \implies$ no es circular

7. Una partícula de masa $m$ y momento angular $L$ se mueve bajo la acción de una fuerza central $F = -kr$. Encuentra el radio de las órbitas circulares. Encuentra el perído de pequeñas oscilaciones alrededor de la órbita cuando esa órbita es ligeramente perturbada. ¿Es la órbita perturbada abierta o cerrada?.

órbita no circular donde el radio varía

1. Radio circulares: condiciones
2. Órbitas perturbadas: oscilante entre $r_1$ y $r_2$. $U_{eff} \rightarrow$ desarrollo de Taylor centrado en $r_{min}$
3. Comparando $\omega_r$ y $\omega_\theta$

1. RADIO DE LAS ÓRBITAS CIRCULARES: sabemos que para una órbita circular $\frac{du_{eff}}{dr} = 0$ y $\frac{du_{eff}}{dr} > 0$. Así:

$\cdot\, u(r) = -\int F(r)\,dr = +\int kr\,dr = +k\frac{r^2}{2}$

$\cdot\, u_{eff} = +\frac{kr^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} \rightarrow \frac{du_{eff}}{dr} = +kr + \frac{L^2}{2m}(-2)r^{-3} = 0 \;;\; \frac{+mkr^4 - L^2}{mr^3} = 0 \iff$

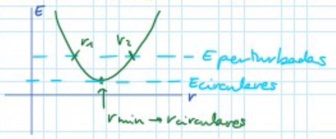
$\iff +mkr^4 - L^2 = 0 \;;\; +mkr^4 = L^2 \;;$

$r^4 = \frac{L^2}{mk}$

comprobamos la 2ª condición

$\frac{d^2u_{eff}}{dr^2} = k - \frac{L^2}{m}(-3)r^{-4} = k + \frac{3L^2}{m}r^{-4} = k + \frac{3\cancel{L^2}}{\cancel{m}}\frac{\cancel{m}k}{\cancel{L^2}} = 4k > 0$ ✓ (1)

2. RADIO DE LAS ÓRBITAS PERTURBADAS: caso donde sí tendremos una velocidad radial que deformará la órbita. Cuando apartamos el sistema de la condición de mínimo, tendremos un sistema oscilatorio entre dos puntos $\implies$ DESARROLLO DE TAYLOR DE $u_{eff}$ CENTRADO EN EL MÍNIMO.




Tendremos un movimiento oscilatorio entre $r_1$ y $r_2$.
Expresamos $u_{eff}(r)$ con su desarrollo de Taylor centrado en $r_{min}$ de grado 2: $\rightarrow$ movimiento osilatorio

$$u_{eff}(r) = u_{eff}(r_{min}) + \cancel{\left.\frac{du_{eff}}{dr}\right)_{r_{min}}}^{0}(r-r_{min}) + \underbrace{\left.\frac{d^2u_{eff}}{dr^2}\right)_{r_{min}}}\frac{1}{2}(r-r_{min})^2 + \ldots =$$

ESTO DEPENDE DE $r_{min}$, ASÍ QUE SERÁ CTE $\implies \left.\frac{d^2u_{eff}}{dr^2}\right)_{r_{min}} \overset{(2)}{=} T$

$$= u_{eff}(r_{min}) + \frac{1}{2}k(\overbrace{r-r_{min}}^{x})^2 \implies \text{potencial de un movimiento oscilatorio}$$

Acabamos de ver que podemos expresar el movimiento de una órbita ligeramente perturbada como un movimiento oscilatorio:

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

Donde:
$x$ = Es la elongación
$t$ = Es el tiempo
$A$ = Es la amplitud o elongación máxima
$\omega$ = Es la frecuencia angular

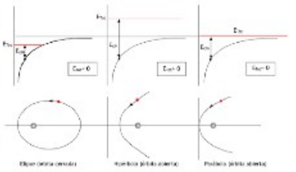
$\implies r(t) - r_{min} = A\cos(\omega t + \phi)$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Dónde:
$x$ = Es la elongación
$t$ = Es el tiempo
$A$ = Es la amplitud o elongación máxima
$\omega$ = Es la frecuencia angular
$\phi$ = Es la fase inicial

$\Longrightarrow$ $r(t) - r_{min} = A\cos(\omega t + \phi)$

Queda estudiar si dichas órbitas perturbadas serán abiertas o cerradas.



Observemos la energía total del sistema:

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + u_{eff}(r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{Kr_m^2}{2} + \frac{L^2}{2mr_m^2} + \frac{1}{2}K(r - r_m)^2$$

Como

$\Uparrow$ en este caso no se estudia por energías

Para ver si una órbita equivalente a un mov. ondulatorio es cerrada, tenemos 2 opciones:

1. TEOREMA DE BERTRAND

En mecánica clásica, el **teorema de Bertrand** establece que, entre los potenciales de fuerzas centrales con órbitas estables, solo hay dos tipos con la propiedad de que todas las órbitas que producen son cerradas. Estos dos son:

1. Una fuerza central de la inversa del cuadrado, tales como el potencial gravitatorio o electrostático:
$$V(r) = \frac{-k}{r},$$
2. El potencial del oscilador armónico simple:
$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2.$$

2. Mediante la FRECUENCIA DE OSCILACIÓN:

Es decir, el movimiento radial es aproximadamente armónico y podemos calcular sencillamente la frecuencia $\omega_r$ de la oscilación radial entre los puntos de retorno:

$$\overset{F}{\mu\ddot{r}} + Kr = 0 \rightarrow \omega_r = \sqrt{K/\mu}. \qquad (1.91)$$

La frecuencia del giro alrededor del origen es, al orden más bajo, nada más que la ecuación radial (1.81):

$$\omega_\theta \approx \dot{\phi}(r_0) = \frac{L}{\mu r_0^2}. \qquad (1.92)$$

De la comparación de $\omega_r$ y $\omega_\theta$ uno puede encontrar condiciones sobre $U$ para que se cierren las órbitas: el cociente entre ambas tiene que ser un número racional. Por este lado se encara la demostración del *teorema de Bertrand*.

} esto indica que la velocidad con que varían $r$ y $\theta$ son proporcionales $\rightarrow$ elipse

Así pues, pasamos a obtener $\omega_\theta$, $\omega_r$ y a ver qué da el cociente entre ambas. Por definición, $\omega = \sqrt{T/m}$, donde $T$ la podemos obtener a partir de (1) y (2):

$$4K = \frac{d u_{eff}^2}{dr^2} \; ; \; \frac{d u_{eff}^2}{dr^2} = T$$

1. $\omega_\theta \Longrightarrow$ desarrollado a partir del momento angular

$$L = \dot{\theta} m r_c^2$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr_c^2} = \frac{L}{m\frac{L}{(mK)^{1/2}}} = \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} = \omega_\theta$$

2. $\omega_r = \sqrt{\frac{T}{m}} = \sqrt{\frac{4K}{m}} = 2\sqrt{\frac{K}{m}}$

3. $\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = 2 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$ LA ÓRBITA ES CERRADA

9. Un sistema de estrellas binario consiste de dos estrellas de masas $m_1$ y $m_2$ orbitando una en torno a la otra. Supón que la órbita de cada estrella es un círculo de radio $R_{1,2}$ en torno al centro de masa. Muestra que el período del movimiento orbital es $T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}(r_1 + r_2)^3$.

1. Escribir $r_1$ y $r_2$ en función de R, distancia entre masas
2. $F = ma_N = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \frac{2\pi R}{T}$
3. Igualamos $F_{gravedad}$ a $F_{newton}$


1. Vamos a tomar $m_1$ como nuestra "estrella referencia", de forma que:

$$\left.\begin{array}{l} r = r_1 + r_2 \\ \underbrace{r_1 m_1 = r_2 m_2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} r_1 = r - r_2 = r - \frac{r_1 m_1}{m_2} \; ; \; r_1 = r \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \; * \\ r_2 = r - r_1 = r\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = + r\frac{m_1}{m_1 + m_2} \end{array}$$

porque las estrellas están en oposición $\rightarrow \vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 = 0$

$\uparrow$ reescribimos $r_1$ y $r_2$ en función de $r$

2. Sabemos que el periodo es la proporción entre el área recorrida y el área total. Además, para un problema de fuerzas centrales, tanto $P_T$ como $L$ son constantes. (lo haremos con $r_1$)

ÁREA CÍRCULO


$A_T = 2\pi r^2 \Longrightarrow A_1 = 2\pi r_1^2$

igualando la fuerza gravitatoria a la expresión de Newton

dA lo podemos obtener a partir del momento angular, ya que: $L_T = (m_1 + m_2)\underline{r^2\dot{\theta}} = (m_1 + m_2)\underline{dA}$

Así: $T = \frac{A}{dA} = \frac{2\pi r_1^2}{(m_1 + m_2)} \Longrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{(m_1 + m_2)^2} r_1^4 = \frac{4\pi^2}{(m_1 + m_2)^2} r^4 \frac{m_2^4}{(m_1 + m_2)^4}$

- $F = ma_N = m_1\frac{v_1^2}{r_1} = m_1\frac{r_1^2 4\pi^2}{r_1 T^2} = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T^2}$

$\uparrow a_N = \frac{v^2}{R}$ $\quad$ $\uparrow v = \frac{s}{t}$, donde T es el tiempo empleado en recorrer $2\pi r$ (perímetro)

- $F(r_1) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$

} las igualamos:

$$\frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T^2} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \Longrightarrow$$

tiempo empleado en recorrer $2\pi r$ (perímetro) } les igualamos:

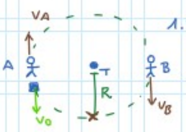
$$\frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T^2} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \Longrightarrow$$

$\cdot\ F(r_1) = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$

$r = r_1 + r_2$

$$\Longrightarrow \frac{4\pi^2 m_1 r}{T^2} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \; ; \; T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_1 m_2} r^2 \cdot m_1 \cdot r_1 \overset{*}{=} \frac{4\pi^2}{G m_1 m_2} \cdot r^2 \cdot m_1 \cdot r \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}(r_1+r_2)^3$$

10. Dos astronautas están en la misma órbita circular de radio $R$ en torno a la tierra, en puntos opuestos de la misma. El astronauta A tiene un objeto que quiere hacer llegar al astronauta B.[1] ¿Cómo puede lanzarlo para que le llegue?.[2] ¿Cuánto tardará en llegar a B en términos del período de la órbita?[3] ¿Cómo es la órbita que describe el objeto?.




1. Para lanzar el objeto y que le llegue, este tendrá que ser lanzado con una $a_T$ a la órbita de forma que tenga $a_T$ y $a_N$.

Los astronautas también giran, así que se encuentran en el pto x

2. Como los astronautas giran en sentido opuesto al objeto y entre ambos astronautas la distancia es $\frac{2\pi R}{2} = \pi R$, el astronauta y el objeto se encontrarán a distancia $\frac{\pi}{2}R$ de su posición inicial (suponiendo $v_0 = v_a$).

En términos de periodo, como T es el tiempo en dar 1 vuelta y se encuentran a 1/4 de vuelta, se encuentran en T/4

3. Para ver el tipo de órbita que describe, estudiemos su energía:

- Sea $F_a = m\dot{v}_0$ la fuerza de empuje que le da el astronauta y $F_T = \frac{G m M_T}{R^2}$ la fuerza gravitatoria

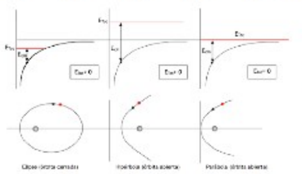
si que es por energías, pero vamos así

- $u(r) = -\int F_T(dr) = -\frac{G m M_T}{R^2} \cdot r \Big]_0^R = -\frac{G m M_T}{R}$

$u_{eff} = -\frac{G m M_T}{R} + \frac{L^2}{2mR^2} = -\frac{G M_T m}{R} + \frac{m^2 R^2 v_0^2}{2mR^2} = -\frac{G M_T m}{R} + \frac{m v_0^2}{2}$

$E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$

- Si la órbita es circular, $\frac{du_{eff}}{dr} = 0 \rightarrow \frac{du_{eff}}{dr} = \frac{G M_T m}{R^2} \neq 0 \rightarrow$ NO CIRCULAR



- $E_{mec} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_T m}{R} + \frac{m v_0^2}{2} =$

$= m v_0^2 - \frac{G M_T m}{R} < 0 \; ; \; v_0^2 < \frac{G M_T}{R} \Rightarrow$ lo podemos asegurar porque $v_0 = v_a$ y $v_a < \sqrt{\frac{G M_T}{R}}$ (si no, sería imposible órbita cerrada, ya que es la velocidad de escape)

11. En un sistema solar hipotético los planetas se mueven en órbitas circulares y la razún de sus períodos es como la razón de sus radios al cuadrado. ¿Cómo es la fuerza central en este caso?.


ÓRBITA CIRCULAR $\begin{cases} \frac{G M m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow F_g = F_c \\ \frac{du_{eff}}{dr} = 0 \end{cases}$

$\frac{T_B}{T_A} = \frac{R_B^2}{R_A^2} \Longrightarrow F?$

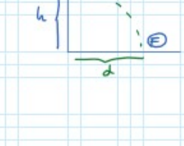
Sabemos que $F_g = F_c = m_i \frac{v_i^2}{R_i}$ por ser órbitas circulares. Además, sea $v = \frac{s}{t}$ ; $T_i = \frac{2\pi R_i}{v_i}$. Por tanto:

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{R_B^2}{R_A^2} \Longleftrightarrow \boxed{T_i \propto R_i^2} \; ; \; v_i = \frac{2\pi R_i}{T_i} \propto \frac{2\pi R_i}{R_i^2} = \frac{2\pi}{R_i}$$

La expresión de la fuerza queda por tanto de la siguiente forma:

$$F = m\frac{v^2}{R} = m\frac{4\pi^2}{R^3} \Longrightarrow F \propto R^{-3}$$

12. Se arroja una pelota con una velocidad paralela a la superficie de la tierra y a una distancia $h$ de la misma. Describe la trayectoria que sigue la pelota antes de caer al piso.




Habrá dos fuerzas que actuarán sobre la pelota:

- $F = m\dot{v}_{0x}$
- $F = -mg$

Características del movimiento

- Las proyecciones del móvil sobre los ejes son cada segundo
- Es un movimiento compuesto por:


MRU Eje x → $x = x_0 + v_{0x}t$ ; $v_x$ = cte

MRUA Eje y → $y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2} a t^2$ ; $v_y = v_{y0} + at$

Situando el origen en tierra y considerando.
$X_0 = 0$; $y_0 = h_0$; $y = h_i$
$v_{0x} = v_0$ = cte ; $v_{0y} = 0$
$a = -9{,}8$

Ecuaciones del movimiento
Eje x → $x = v_0 t$ ; $v_x = v_0$ = cte
Eje y → $h_i = h_0 + \frac{1}{2} a t^2$ ; $v_y = a \cdot t$
Mezclando x e y → Ecuación de la trayectoria $y = h + (a/2v_0^2)\cdot x^2$

Eje x → $d = v_{0x}t$, $v_{0x}$ = cte

Eje y → $y_f = 0 = h + \cancel{v_{0y}}t - \frac{1}{2}gt^2$

$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow d = v_{0x}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$F = \frac{k}{r^2}$ ; $u_{eff} = u(r)$

14. Demostrar que la velocidad areolar de una partícula, $\frac{dS}{dt}$, en el [problema de Kepler] (ritmo al cual el vector posición de la partícula barre áreas) es constante (ley de las áreas) e igual a

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2m},$$

donde $m$ es la masa de la partícula y $\ell$ es su momento angular.

⟹ Sea una fuerza central F que varía en intensidad con el inverso del cuadrado de la distancia r entre dos cuerpos:

$$\mathbf{F} = \frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

donde k es una constante y $\hat{\mathbf{r}}$ representa el vector unitario en la línea que los separa.[6] La fuerza puede ser atractiva (k<0) o repulsiva (k>0). El potencial escalar correspondiente (la energía potencial del cuerpo no situado centralmente) es:

$$V(r) = \frac{k}{r}$$

$\vec{v_A} = \frac{dS}{dt}$ Probar esto implica probar la 2ª Ley de Kepler:


$dA = \frac{1}{2}\dot{\theta} r^2$ → área sección circular ⟹ por ser una fuerza central, el momento angular se conserva;

$L = m r \underbrace{v}_{v=\omega r} = m r^2 \omega = \underbrace{m r^2 \dot{\theta}}_{2dA/dt} = 2mA$ ; $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ CONSTANTE

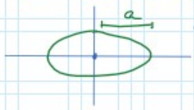
???

15. Demostrar que para óbitas elípticas en el problema de Kepler el semieje mayor de la órbita es

$$a = -\frac{\alpha}{2E},$$

donde $\alpha = GMm$ y $E$ es la energía de la partícula.

En una órbita elíptica, el semieje mayor es el siguiente:




Es decir, $r_{max}$. En el problema de Kepler, se nos presenta lo siguiente:

$F = \frac{k}{r^2}\hat{r}$ ; $u_{eff}(r) = u(r) = \frac{K}{r}$

① Sabemos que en el punto de máximo acercamiento, $\cos\theta = -1$ en la expresión siguiente:

$r(\theta) = \frac{L^2}{mK} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\theta}$, con $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK}}$ y $K = GMm$

$r_{max} = \frac{L}{mK} \cdot \frac{1}{1-e} = \frac{L}{mK} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1+2EL^2}{mK}}}$

② Sabemos que, para una órbita elíptica, el semieje mayor es:

$a = \frac{c}{1-e^2}$ ; con $e = \sqrt{\frac{1+2EL^2}{mK}}$ ; $c = \frac{L^2}{mK}$ y $K = GMm$

• $1 - e^2 = 1 - 1 + \frac{2EL^2}{mK} = \frac{2EL^2}{mK}$

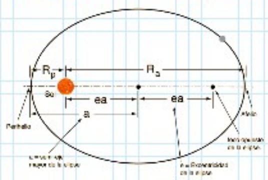
• $a = \frac{\cancel{L^2}}{\cancel{mK}} \cdot \frac{\cancel{mK}}{2E\cancel{L^2}} =$

③ Sabemos que, en el problema de Kepler, se cumple lo siguiente (3ª Ley de Kepler): $T^2 \propto a^3$ ; $T^2 = \alpha a^3$. Además, para una órbita elíptica, $a = \frac{c}{1-e^2}$, con $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m}}$

$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$

SIGUIENDO LOS PASOS DEL PDF DE EJERCICIOS RESUELTOS DEL DRIVE

1. Obtenemos la energía
2. Cuando $u_{eff} = E_{mec}$ ⟹ AFELIO Y PERIHELIO → $r_1 + r_2 = 2a$




$R_a = a(1+e)$ $R_p = a(1-e)$ $2a = R_a + R_p$

1. Sea $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}\vec{r}$ : $GMm = \alpha$

• $u(r) = -\int F(r)\,dr = -\frac{GMm}{r} = -\frac{\alpha}{r}$

• $E_{mec} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \underbrace{- \frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}}_{u_{eff}}$

2. Cuando $v = 0$ tendremos el afelio y el perihelio. Como $2a = r_a + r_p$, buscaremos estos valores igualando $E = u_{eff}$.

$E = u_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$ ; $E + \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} = 2mr^2E + 2mr\alpha - L^2 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$r = \frac{-2m\alpha \pm \sqrt{4m^2\alpha^2 + 8mL^2E}}{4mr^2E} = \frac{-m\alpha \pm \sqrt{m^2\alpha^2 + 2EmL^2}}{2mE}$

$r_1 = \frac{-m\alpha - \sqrt{m^2\alpha^2 + 2EmL^2}}{2mE}$

$r_2 = \frac{-m\alpha + \sqrt{m^2\alpha^2 + 2EmL^2}}{2mE}$

$2a = r_1 + r_2 = -\frac{\cancel{2m}\alpha}{\cancel{2m}E} \Rightarrow a = -\frac{\alpha}{2E}$

17. Se desea poner un satélite de masa $m$ en órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de $h$ sobre la superficie terrestre. Para ello se traslada mediante un cohete a esta altura y se le comunica una velcidad. a) Obtener esta velocidad. b) Si le hubieramos comunicado una velocidad un 20% mayor en la misma dirección, ¿qué tipo de órbita seguiría? c) ¿Y si hubiera sido un 20% menor? d) ¿En cuánto deberíamos aumentar la velocidad correspondiente a la órbita circular para que realizara una órbita parabólica? ¿En cuánto deberíamos disminuir la velocidad correspondiente a la órbita circular para que realizara una órbita que en el punto más cercano (perigeo) rozara la superficie de la Tierra?

a) La velocidad necesaria para que se ponga en órbita la obtenemos gracias a la conservación de la energía mecánica:

$\cdot\ \Delta E_{mec} = 0 = E_i - E_f = U(R_T) - \frac{1}{2}mv^2 - U(a)$ ; $v = \sqrt{[U(R_T) - U(a)]\frac{2}{m}}$

$a = R_T + h$

$\cdot$ Sea $F = -\frac{GMm}{r}\hat{r}$ ; $U(r) = -\frac{GMm}{r}$

$v = \sqrt{\frac{2}{m}GMm\left[-\frac{1}{R_T} + \frac{1}{a}\right]} = \sqrt{2GM}$

$\underbrace{\left[-\frac{1}{R_T}+\frac{1}{a}\right]}_{\frac{-a+R_T}{R_T a}} = \frac{h}{R_T^2 + h}$

Para que se quede en órbita, $F_{gravedad} = F_{centrífuga}$

$$F_g = \frac{GMm}{a^2} = m\frac{v^2}{a} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

b) Si $v_1 = 1'2 v_0 \Longrightarrow$ qué órbita sería? Veamos qué ocurriría con la energía, sabiendo que sea $E \geq 0$, será una órbita abierta y que para $v_0$, $<0$ por órbita cerrada.

$$E_1 = \frac{1}{2}m 1'44 v_0^2 - \frac{\alpha}{h} > E_0 \Longrightarrow \frac{E_1}{E_0} = \frac{m \cdot 1'44 v_0^2 \cdot h - 2\alpha}{m \cdot v_0^2 \cdot h - 2\alpha}$$

Siendo $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}$, $K = GMm$ $\rightarrow$ $e = 0$ círculo $\rightarrow$ ocurre con $v_0$

$\cdot$ ¿Qué pasa ahora con $e$?

Con $v_0, E_0, e = 0 \Longleftrightarrow \frac{2EL^2}{mk^2} = -1$ ; $\frac{2E_0 v_0^2 h^2}{G^2M^2 m} = -1$

Sin embargo, ahora tenemos $v_1 > v_0$:

$$\frac{2EL^2}{mk^2} = \frac{2E_1 m h^2 1'44 v_0^2}{k^2} = 1'44 \frac{2E_1 h^2 v_0^2}{G^2 M^2} =$$

: hacer caso general y luego aplicar a los tres apartados a la vez

RESOLUCIÓN

Para hacer un cálculo más general por casos vamos a suponer que la velocidad se incrementa tal que $v = \sqrt{\lambda}\, v_0$ siendo $\lambda > 1$ y $\lambda \geq 0$

$v = \sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{\alpha}{mr}} \Rightarrow v^2 = \lambda\frac{\alpha}{mr}$

$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r} = \frac{\frac{r\lambda\alpha r}{2mr} - \alpha}{r} = \frac{mv^2 r - \alpha 2}{2r} = \frac{\lambda\alpha - 2\alpha}{2r} = \frac{\alpha}{2r}(\lambda - 2)$

$L = mrv = mr\sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{\alpha}{mr}}$ , $e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2 m}$

$e^2 = \frac{\alpha^2 m + \frac{\alpha}{r}(\lambda - 2) m r^2 \lambda \frac{\alpha}{mr}}{\alpha^2 m} = 1 + \frac{2\alpha(\lambda-2) m r^2 \lambda \alpha}{\alpha^2 m\, 2r\, mr}$

$\Rightarrow e^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda \Rightarrow e^2 = (\lambda - 1)^2 = \boxed{e^2 = (\lambda - 1)^2}$

Si $e = 0 \Rightarrow \lambda = 1$, $v = v_0 \Rightarrow$ órbita circular

Si $e \in (0,1) \Rightarrow \lambda \in (1,2)$, $v = \sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{\alpha}{mr}} \Rightarrow$ órbita elíptica

Si $e = 1 \Rightarrow \lambda = 2$, $v = \sqrt{\frac{2\alpha}{mr}} = v_{esc} \Rightarrow$ órbita parabólica

Si $e > 1 \Rightarrow \lambda > 2$, $v = \sqrt{\frac{\lambda\alpha}{mr}} \Rightarrow$ órbita hiperbólica

Para $\lambda < 2 \Rightarrow r = \frac{p}{1 - (\lambda - 1)\cos\theta}$ , $p = \frac{L^2}{m\alpha}$

con $\lambda \in (0,1) \cup (1,2)$

d) Para calcular el perigeo/apogeo, SIEMPRE $E = U_{eff}$ y sacar $r_a$ y $r_p$

Calculamos el perigeo sea $E = U_{eff}$

$$E = U_{eff} = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \; ; \; 2mr^2E + \alpha 2mr - L^2 = 0$$

$$r = \frac{-2\alpha m \pm \sqrt{4\alpha^2 m^2 + 8mEL^2}}{4mE} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r_p = \frac{-\alpha m - \sqrt{\alpha^2 m^2 + 2mEL^2}}{4mE} = R_T \; ; \; -\alpha m - \sqrt{\alpha^2 m^2 + 2mEL^2} = R_T - 4mE$$

13. Examen 31/10/19. Dos partículas de masa $m$ están separadas una distancia $d$ y tienen velocidades como se muestra en la figura. Entre ellas actúa la fuerza de la gravedad. Obtener el ángulo $\theta$ y el valor de $v$ (en función de $G$, $m$ y $d$) para que la órbita relativa sea circular. Dibuja esquemáticamente la trayectoria de las partículas. Si con ese valor de $v$, el ángulo $\theta$ fuera igual a 120°, ¿Qué tipo de movimiento relativo se tendría?

1. Primero definimos el sistema tomando como referencia el centro de masas:

$m_1 : (0,0,0)$

CM: $(d/2, 0, 0)$

$m_2 : (0,0,d)$

Definimos el vector $R$ como la distancia entre las masas: $\vec{R} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\hat{x} = d\hat{x}$

Y la masa reducida: $\mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{1}{2}m$

Planteamos las fuerzas que actúan sobre cada masa:

MASA 1 $\longrightarrow \vec{F}_1 = ma = m \cdot \frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}(v_y\hat{y})$

$\longrightarrow F_{21} = \mu\frac{d\vec{R}}{dt}$

MASA 2 $\longrightarrow \vec{F}_2 = ma = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d}{dt}(v_y \hat{y} + v_x \hat{x}) = m \frac{d}{dt}(-2v\cos\theta\, \hat{y} + 2v\,\text{sen}\,\theta\, \hat{x})$


$\rightarrow v'_y = \cos\theta \cdot v' = 2v\cos\theta\, \hat{y}$

$v'_x = \text{sen}\,\theta \cdot v' = 2v\,\text{sen}\,\theta\, \hat{x}$

$\vec{F}_{12} = -\mu \frac{d\vec{R}}{dt}$

Así, tenemos que en el movimiento relativo:

$\vec{R} = d\hat{x}$

$\mu = \frac{1}{2}m$

$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = v\hat{y} + 2v\,\text{sen}\,\theta\, \hat{x} - 2v\cos\theta\, \hat{y} = (v - 2v\cos\theta)\hat{y} + 2v\,\text{sen}\,\theta\, \hat{x}$ ✓

2. Una condición para que la órbita sea circular será:

- $F_{gravitatoria} = F_{cent} = m \cdot \frac{|\vec{v}|^2}{r}$ ; $|\vec{v}|^2 = (v - 2v\cos\theta)^2 + (2v\,\text{sen}\,\theta)^2 = v^2 + 4v^2\cos^2\theta - 4v^2\cos\theta + 4v^2\text{sen}^2\theta =$
$= v^2 + 4v^2 - 4v^2\cos\theta = v^2(5 - 4\cos\theta)$

$Gm^2 \cdot \frac{1}{d^2} = m \cdot \frac{1}{d} \cdot v^2(5 - 4\cos\theta)$ *

- $\frac{du_{eff}}{dr} = 0 \rightarrow u_{eff}(r) = -\frac{Gm^2}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

$\frac{du_{eff}}{dr} = Gm^2 \frac{1}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} = 0$ ; $Gm^3 r - L^2 = Gm^3 r - m^2 r^2 v^2 (5 - 4\cos\theta) = 0$

$L^2 = m^2 r^2 |\vec{v}|^2$

$Gm - rv^2(5 - 4\cos\theta) = 0$ ; $v = \sqrt{\frac{Gm}{r(5 - 4\cos\theta)}}$ *

18. Un haz de meteoritos se dirige hacia la Tierra. Cuando están a una distancia muy grande de ésta tienen todos la misma velocidad conocida $v_0$. Se llama parámetro de impacto a la distamcia entre la partícula incidente y la recta que pasa por el centro de fuerzas y es paralela a la velocidad inicial de la partícula. Demuestra que existe un valor del parámetro de impacto $b_c$ tal que todo meteorito con parámetro de impacto $b < b_c$ caerá sobre la superficie de la Tierra. Obtén la sección del haz que incidirá sobre la Tierra (sección eficaz) en función de $v_0$.