PRÁCTICA 2:
MUELLES ACOPLADOS

Informe realizado por:

Iñaky Mira Payá

24435804 – Y

Universidad de Alicante

Mecánica Analítica

Índice de contenidos:

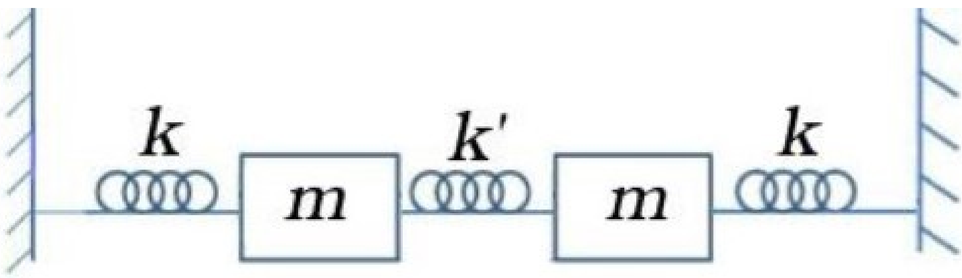
1. Introducción.
2. Fundamento teórico.
  2.1. Modos normales.
3. Desarrollo de la práctica.
  3.1. Dinámica del sistema.
  3.2. Modos normales.
  3.3. Transformada de Fourier.
  3.4. Ampliación.
4. Conclusiones.
5. Bibliografía.

1. Introducción.

En esta práctica vamos a estudiar un sistema físico sencillo, formado por dos masas iguales que están unidas a puntos fijos por dos muelles que tienen la misma constante elástica *k* y conectados entre sí por otro muelle de constante elástica *k'*. Este sistema, aún siendo una idealización tiene importantes aplicaciones en el estudio de la estructura interna de los sólidos.

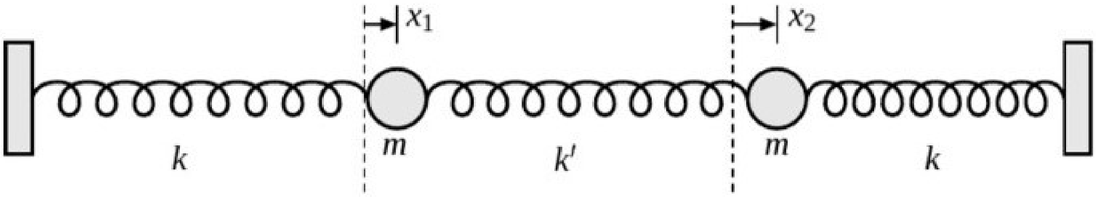
Por ejemplo, una molécula, en este caso, CO_2, se puede simplificar usando este sistema, y podemos estudiar la dinámica de esta.

A continuación, un esquema de nuestro sistema físico.



2. Fundamento teórico.

Hagamos unas pequeñas suposiciones para poder simplificar nuestro sistema. Primero consideremos que el movimiento esta limitado a una dimensión, a la que llamaremos *x.* Los puntos de equilibrio de los dos muelles iguales se encuentran en posiciones x = a y x = b, medidas desde la pared de la izquierda. Como tenemos dos masas, tenemos dos posibles perturbaciones del equilibrio, entonces nuestro sistema tiene dos grados de libertad, que representaremos por coordenadas x_1 y x_2. Estas dos coordenadas nos indican la posición de las masas desde su posición de equilibrio. Esquemáticamente tenemos el siguiente diagrama:



Supongamos que en un momento dado, la masa de la izquierda se encuentra en x_1 y la masa de la derecha se encuentra en x_2. Los muelles realizan una fuerza recuperadora sobre las masas, para intentar devolverlas a la posición de equilibrio, denotemos por F_1 y F_2 a la fuerza sobre las masas de la izquierda y la derecha respectivamente.

$$F_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2)$$

$$F_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1)$$

Mediante la segunda ley de Newton, llegamos a las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m\ddot{x}_1 + (k+k')x_1 - k'x_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + (k+k')x_2 - k'x_1 = 0$$

A estas ecuaciones de movimiento podemos suponer unas soluciones, este sistema tendrá un comportamiento ondulatorio, es por eso que suponemos soluciones ondulatorias:

$$x_1(t) = B_1 e^{i\omega t}$$

$$x_2(t) = B_2 e^{i\omega t}$$

Si sustituimos en las ecuaciones de movimiento, encontramos que debe cumplirse que:

$$\omega=\sqrt{\frac{k+k'\pm k'}{m}}$$

Con esta condición encontramos dos frecuencias características o frecuencias propias del sistema, que son:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k+2k'}{m}};\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Estas dos frecuencias corresponden a los modos normales, modo simétrico y modo antisimétrico del sistema.

2.1. Modos normales.

Para tratar este problema es conveniente llevar a cabo un cambio de coordenadas y encontrar las coordenadas normales que corresponden con los modos de oscilación propios del sistema. Estas coordenadas normales tienen una dependencia con el tiempo mucho más fácil que las coordenadas que hemos definido inicialmente. Podemos escribir:

$$\eta_1=x_1+x_2$$

$$\eta_2=x_1-x_2$$

Con estas nuevas coordenadas obtenemos nuevas ecuaciones de movimiento:

$$m\ddot{\eta}_1+(k+2k')\eta_1=0$$

$$m\ddot{\eta}_2+k\eta_2=0$$

Estas ecuaciones nos aportan la ventaja que no están acopladas, es decir, cada una de ellas corresponde a un movimiento armónico con frecuencia ω_1 y ω_2.

Depende las condiciones iniciales que imponemos podemos llegar a los modos normales antisimétrico y simétrico.

Por ejemplo si imponemos que:

$$x_1(0)=-x_2(0);\dot{x}_1(0)=-\dot{x}_2(0)\Rightarrow\eta_2(0)=0;\dot{\eta}_2(0)=0\Rightarrow\eta_2(t)=0\,\forall t$$

En este caso, las masas están siempre con frecuencia ω_1 en oposición de fase. Este movimiento se llama **modo normal antisimétrico** de oscilación.

Sin embargo si impones las siguientes condiciones iniciales:

$x_1(0)=x_2(0); \dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0) \Rightarrow \eta_1(0)=0; \dot{\eta}_1(0)=0 \Rightarrow \eta_1(t)=0 \, \forall t$

En este movimiento las masas se mueven con frecuencia ω_2 y están siempre en fase. Este movimiento se llama **modo normal simétrico** de oscilación.

En general el movimiento que se da es una combinación lineal de estos dos modos normales, si nos quedamos solo con las componentes reales, la forma general del movimiento será:

$x_1(t)=A_0^1 \sin(\omega_1 t+\phi_1)+A_0^2 \sin(\omega_2 t+\phi_2)$

$x_2(t)=A_0^1 \sin(\omega_1 t+\phi_1)-A_0^2 \sin(\omega_2 t+\phi_2)$

Un caso particularmente interesante es el de **acoplamiento débil**, cuando k'«k (es decir, las masas están ligadas débilmente en comparación a las fuerzas que las unen a las paredes). En este caso, las dos frecuencias normales son similares entre ellas y parecidas a la frecuencia natural de uno de los osciladores si dejáremos el otro quieto. Su combinación da lugar a un tipo de movimiento que se conoce como latido (o pulsos de batido) y que viene dado por:

$x_1(t)=[A_0 \cos(\varepsilon \omega_0 t)] \cos(\omega_0 t)$

$x_2(t)=[A_0 \sin(\varepsilon \omega_0 t)] \sin(\omega_0 t)$

Donde $\omega_0=\sqrt{\frac{k+k'}{m}}$ es la frecuencia natural de uno de los osciladores si ignoramos el otro y $\varepsilon=\frac{k'}{2k} \ll 1$.

3. Desarrollo de la práctica.

Usaremos Python para realizar una simulación del sistema y poder resolver las ecuaciones de movimiento. Realizaremos tres partes: primero analizaremos la dinámica del sistema, seguidamente estudiaremos los modos normales, continuaremos con la transformada de Fourier y por último realizaremos una ampliación, añadiendo rozamiento o la gravedad.

3.1. Dinámica del sistema.

En esta parte iremos variando la constante elástica *k’* del muelle que une las dos masas para comprobar los diferentes tipos de movimiento que se dan. Calcularemos la energía del sistema y veremos su dependencia con el valor de *k’*. Veremos casos de acoplamiento débil y otros más fuerte. Por último, mediremos el período de batido en el acoplamiento débil.

Las condiciones iniciales del sistema son las siguientes:

· $m_1 = m_2 = 1$ kg

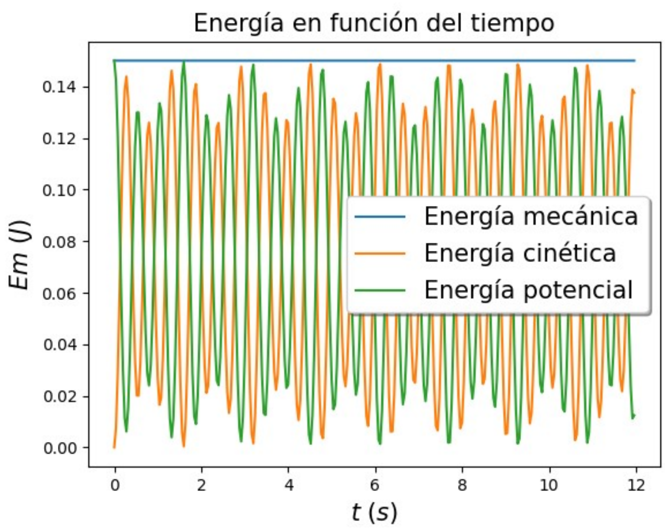
· Distanciadas inicialmente un metro.

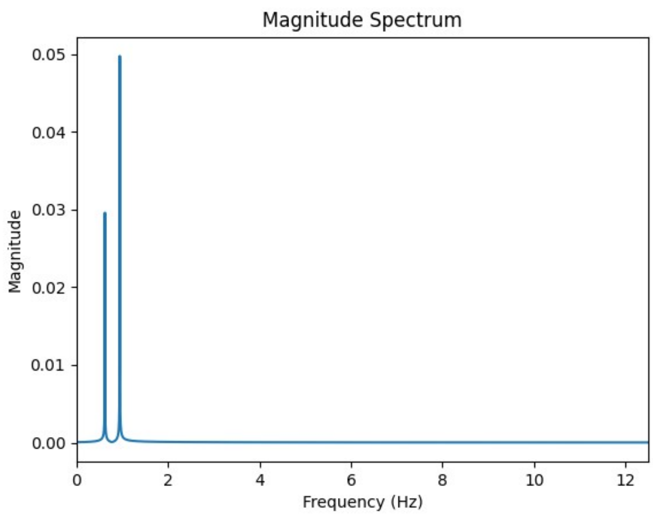
$x_1(0)=0{,}1\,m\,;\,\dot{x}_1(0)=0$

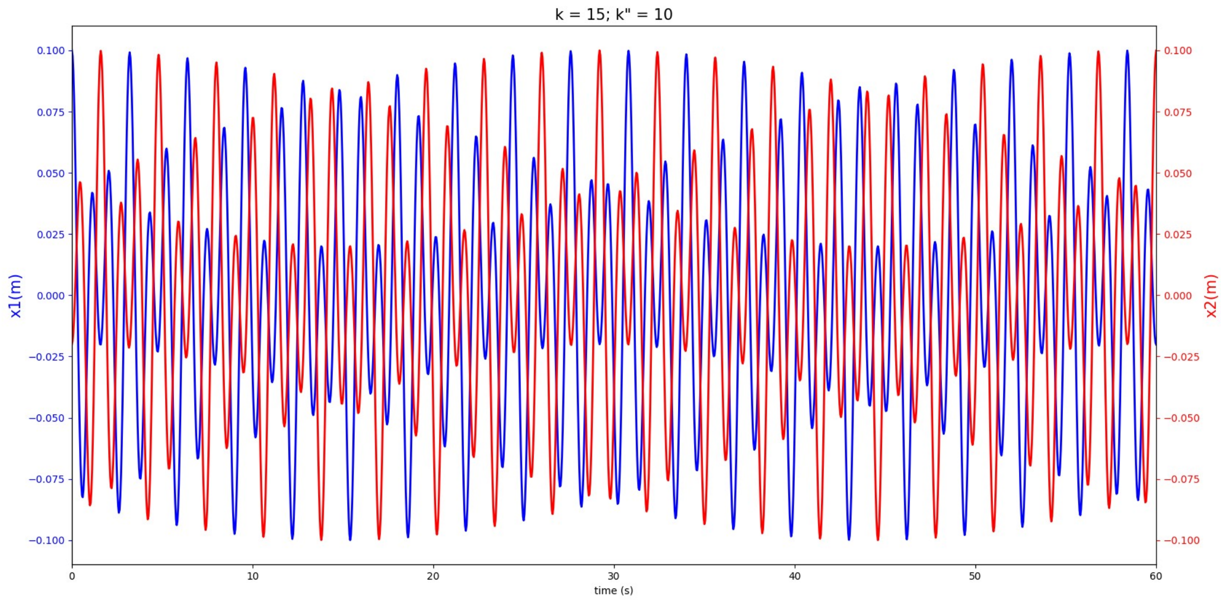
$x_2(0)=-0{,}02\,m\,;\,\dot{x}_2(0)=0$

Es decir hacemos una pequeña perturbación y inicialmente quietas.

#1. k = 15, k’= 10 [N/m²]



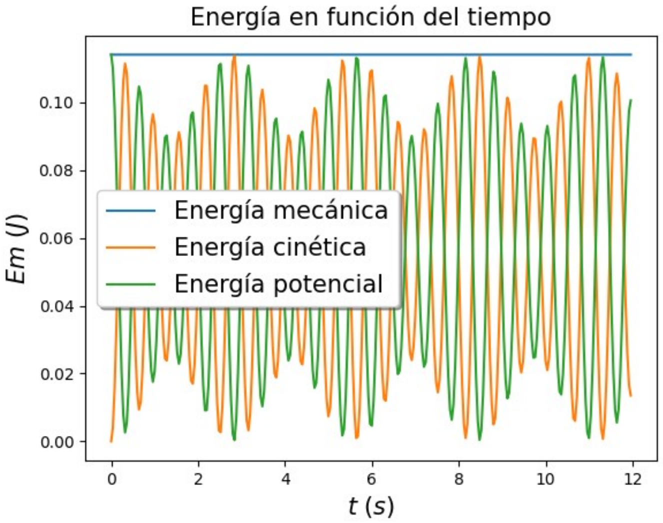


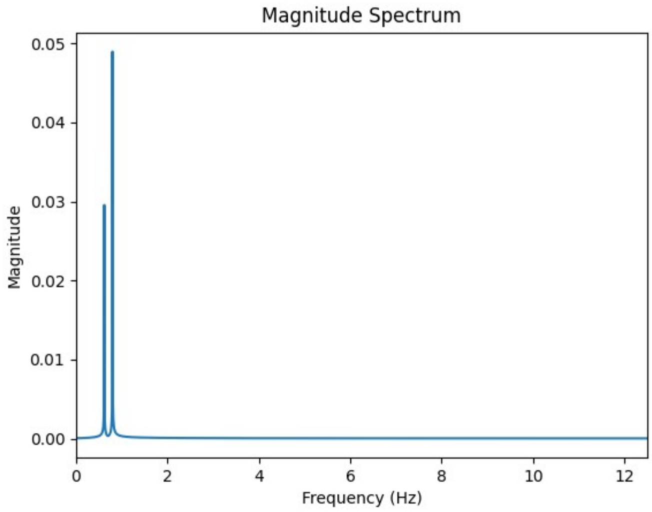


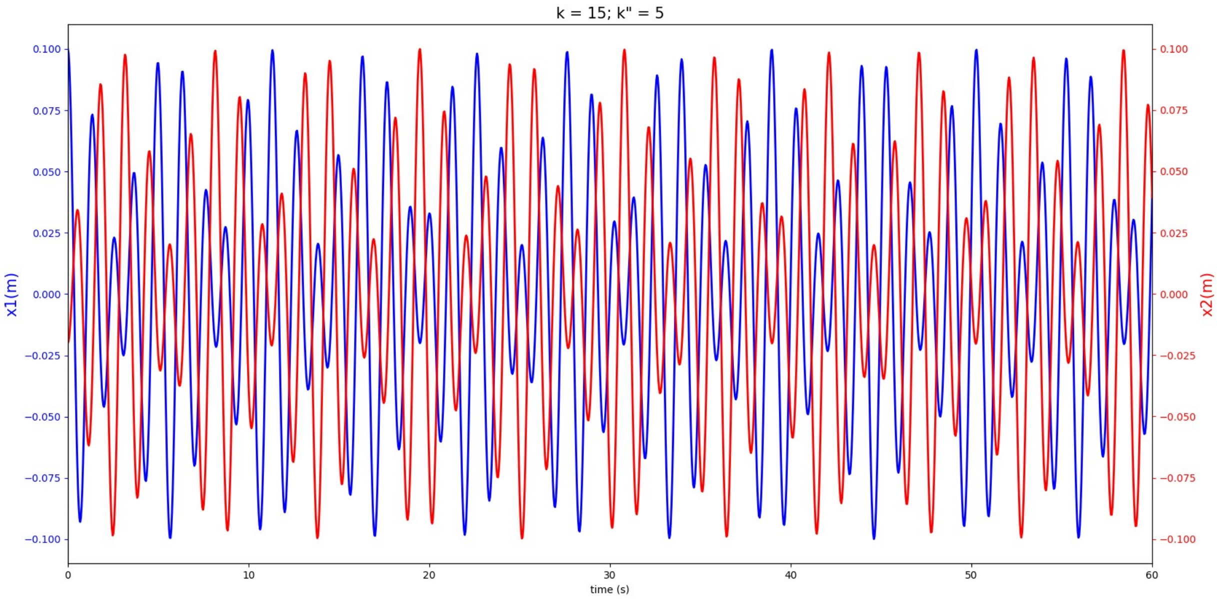
Como podemos observar en el movimiento es ciertamente caótico, parece ser que las masas desequilibradas desde el momento inicial no consiguen moverse a la par.

Las gráficas de la energía y la transformada de Fourier nos indican que el movimiento es una combinación de los dos modos normales.

#2. k = 15, k’= 5 [N/m²]







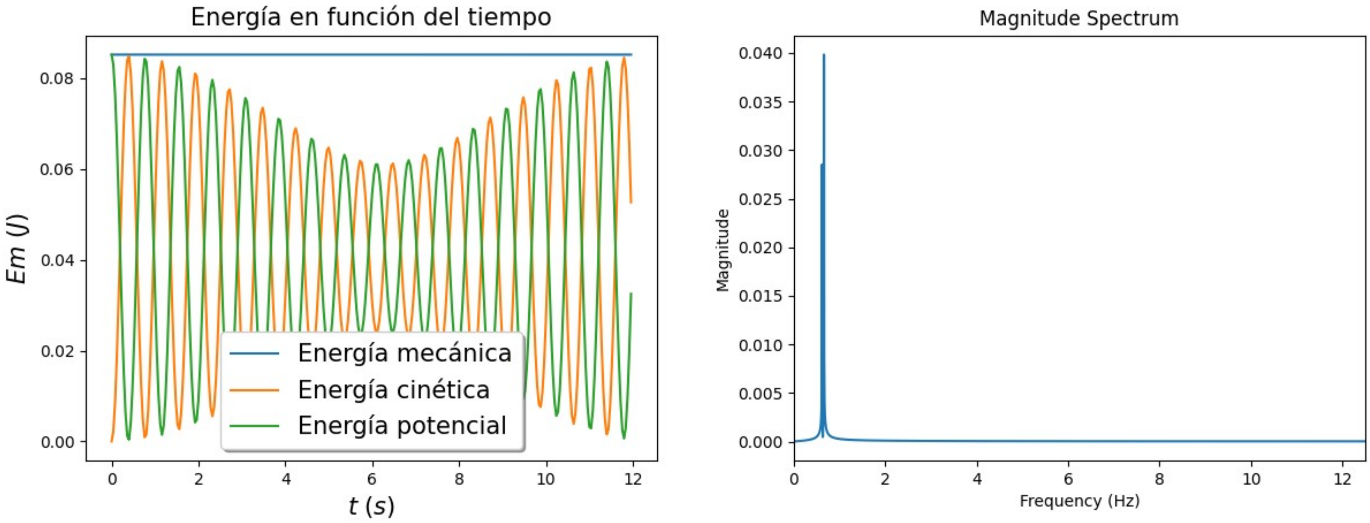
En este movimiento también resulta de ser una combinación de ambos modos normales, aún así, por muy difuso que parezca, es reconocible un cierto patrón u orden.

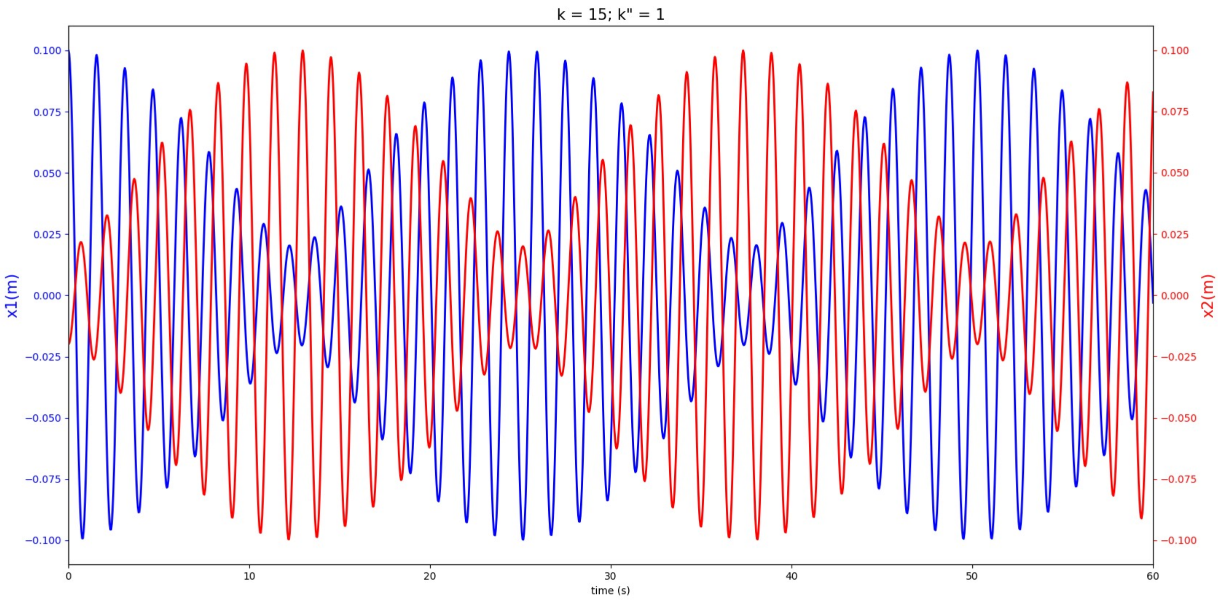
Vemos que la transformada de Fourier nos indica que ambas frecuencias de oscilación son parecidas.

La energía también nos indica esto.

Una cosa muy interesante de la energía, es que al disminuir el valor de la constante elástica que une ambos muelles, la energía mecánica del sistema es menor.

#3. k = 15, k'= 1 [N/m²]

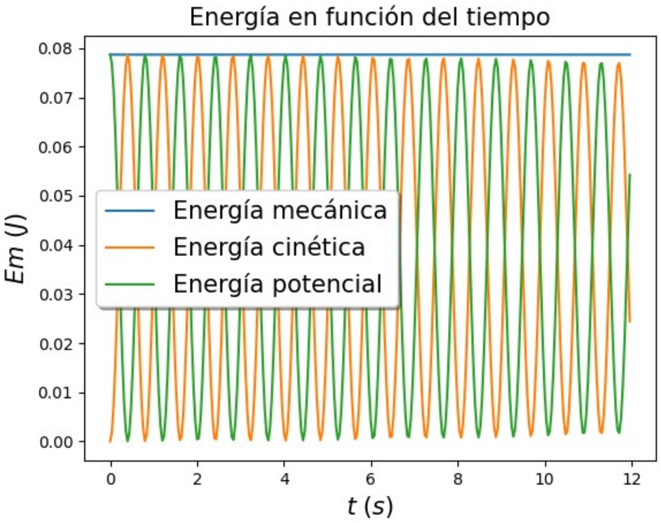


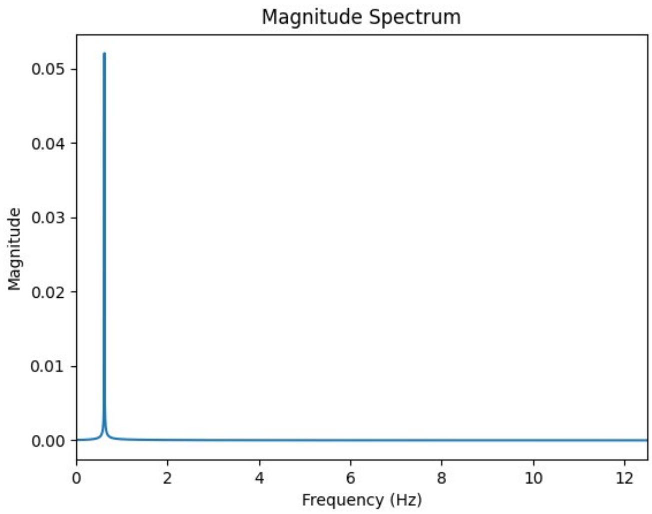


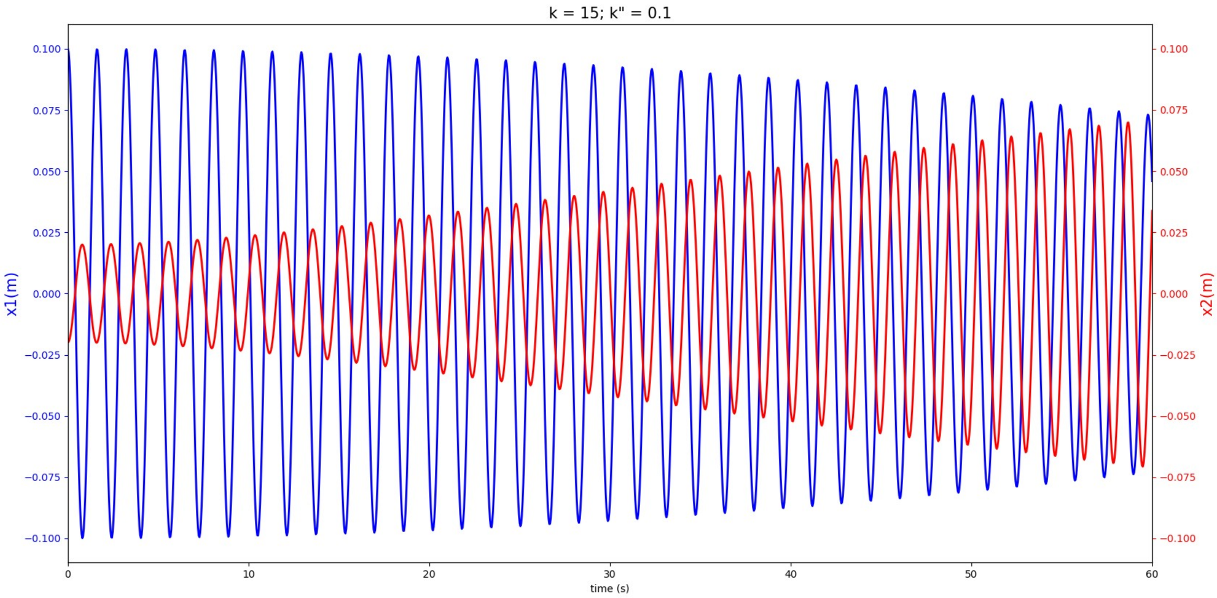
En este movimiento si podemos apreciar cierta armonía en ambas masas, aún con las condiciones iniciales no propias de los modos normales, el sistema consigue llegar a un movimiento de latido. No van completamente en fase, pero se pueden apreciar ciertas regiones dónde sí lo están.

El espectro de frecuencias no indica con gran claridad este echo.

#4. k = 15, k'= 0.1 [N/m²]







En este movimiento dónde la diferencia entre *k* y *k'* es más notoria, si podemos apreciar bien ese movimiento de latido. Vemos como al inicio del movimiento las masas parecen realizar el movimiento normal antisimétrico. Paulatinamente, está diferencia en fase, va reduciéndose hasta que finalmente las masas se encuentran en modo normal de vibración.

Esta frecuencia de latido es de: f_{latido} *= 0,715 [Hz].* (Calculada mediante Python).

Como conclusión al apartado hemos podido observar como varía el movimiento en función del valor de la constante elástica que une ambas masas.

Hemos podido observar como la energía también se ve alterada.

A mayor valor de k’ inicialmente el sistema tendrá más energía potencial y por tanto también más mecánica. Al no variar las condiciones iniciales pero reducir el valor de k’, la energía potencial y mecánica iniciales se ven reducidas.

3.2. Modos normales.

En este apartado daremos condiciones iniciales tales que excitaremos los modos normales. Observaremos los movimientos de estos modos y calcularemos sus frecuencias angulares.

De manera práctica, para excitar los modos normales haremos lo siguiente: las velocidades iniciales de ambas masas deberán de ser cero. Es decir, parten del reposo.

En cuanto a las posiciones iniciales de las masas tomarán dos configuraciones distintas. Las moveremos en el mismo sentido y las desplazaremos la misma distancia desde su posición de equilibrio si queremos excitar su modo de oscilación normal. O por el contrario, las moveremos en direcciones opuestas y la misma distancia, para excitar su modo normal antisimétrico.

Cabe destacar que estos modos también son posibles de lograr si las masas permanecen en su posición de equilibrio y son las velocidades iniciales las que cambian, pero esto en la práctica es más complicado de realizar experimentalmente.

Empezaremos por el modo normal simétrico. Realizaremos distintos movimientos, variando la distancia de separación con el equilibrio.

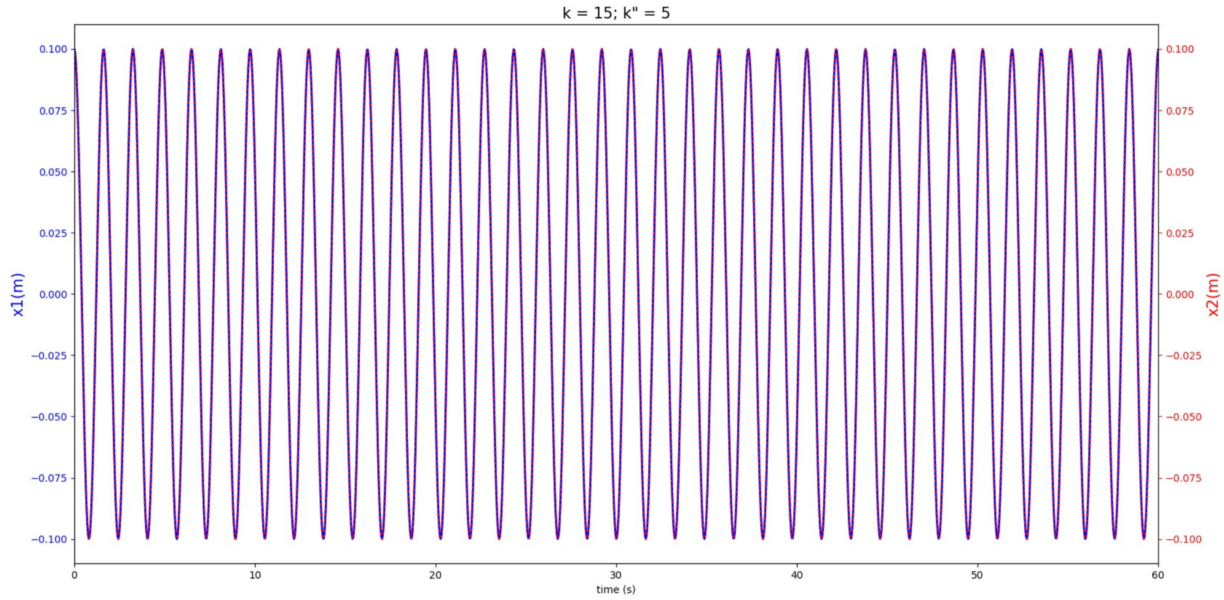
Usaremos valores de k = 15, k’ = 5 [N/m²].

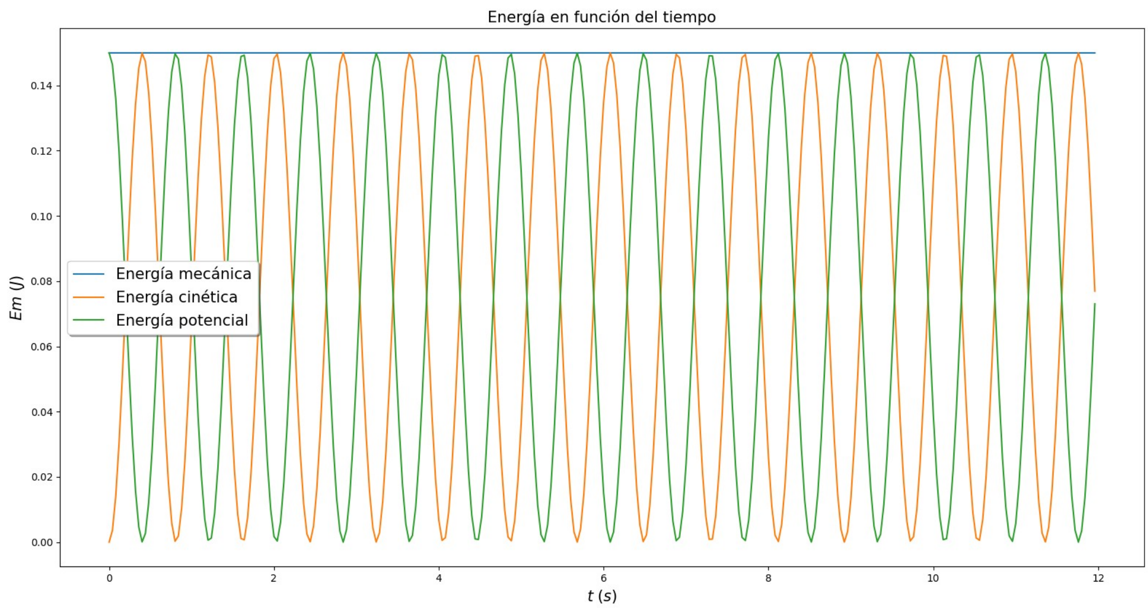
Las condiciones iniciales para el movimiento simétrico son:

$x_1(0)=0{,}1\,m\,;\dot{x}_1(0)=0\,;x_2(0)=0{,}1\,m\,;\dot{x}_2(0)=0$

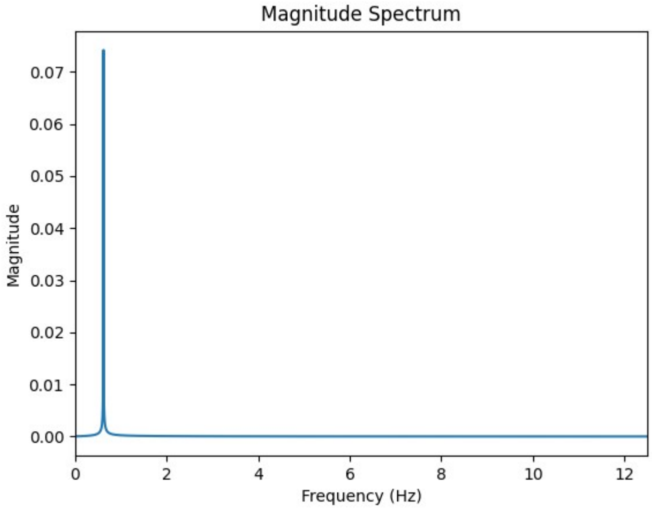
Es decir, movemos las masas la misma distancia desde su posición de equilibrio, sin darles velocidad inicial.

Veamos este movimiento:





Estas son las gráficas de movimiento y energía del movimiento simétrico, si nos fijamos en la del movimiento, las gráficas están acopladas, una encima de la otra. Es decir, ambas masas se mueven de igual manera. Esta es la característica del movimiento simétrico. Veamos el espectro de frecuencias de la transformada de Fourier:



En el espectro de frecuencias, vemos un único pico, esto es debido a que ambas frecuencias de las dos masas son exactamente iguales, al tratárse del movimiento normal simétrico. Mediante Python, podemos calcular numéricamente la frecuencia de oscilación.

Antes hemos mencionado las fórmulas para poder calcular la frecuencia de oscilación de los movimientos normales. Podemos compararlas:

$\nu_{teórica} = 0{,}6164[Hz]; \nu_{numérica} = 0{,}6176[Hz]$

Cómo podemos ver ambas frecuencias son muy similares, esto nos indica que nuestra aproximación al sistema teórico es adecuada.

Pasemos ahora al movimiento normal antisimétrico.

Para ello debemos de cambiar las condiciones iniciales, las condiciones iniciales para el movimiento antisimétrico son parecidas, pero en vez de mover las masas en la misma dirección, debemos de moverlas en direcciones opuestas, es decir, alejándolas o acercándolas.

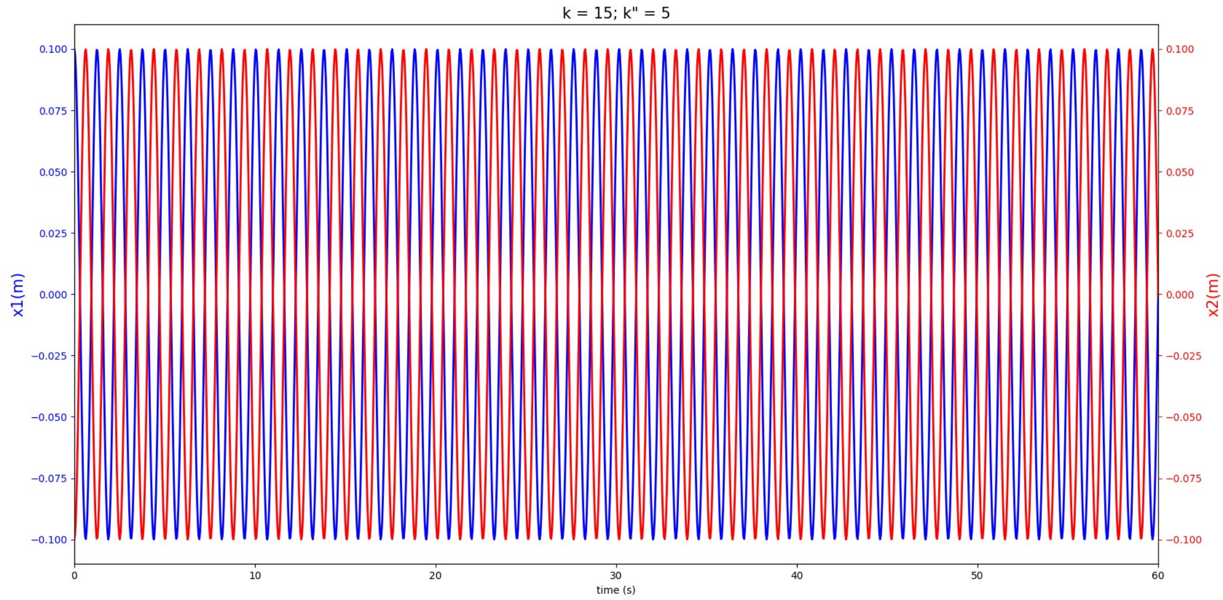
Esto es:

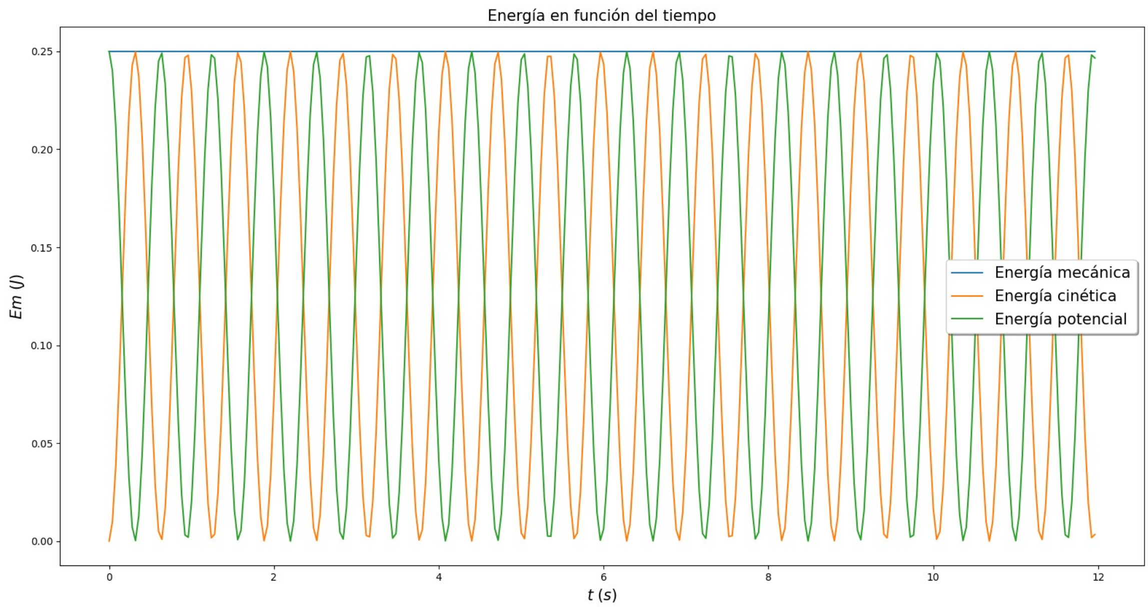
$x_1(0) = 0{,}1\,m, \dot{x}_1(0) = 0; x_2(0) = -0{,}1\,m, \dot{x}_2(0) = 0$

Recordemos que nuestro sistema de muelles sigue siendo el mismo:

k = 15, k’ = 5 [N/m²].

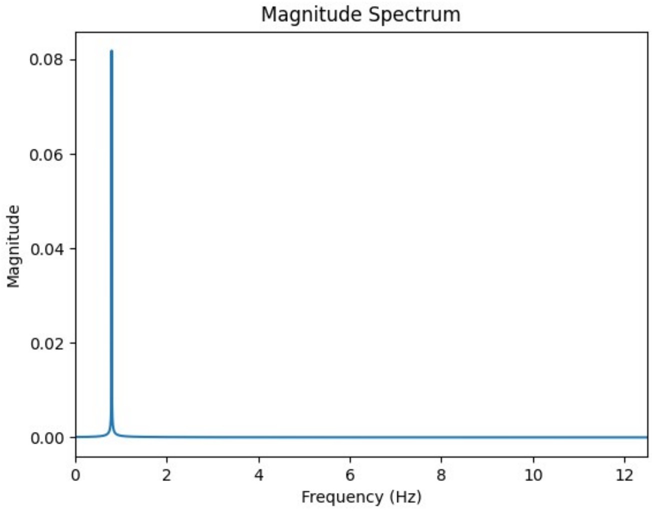
Veamos que movimiento tenemos:





Podemos observar en las gráficas como es el movimiento, en este caso las masas van desfasadas, moviéndose contrariamente, es decir, alejándose y acercándose con cierta frecuencia angular. La energía en todo estos movimientos se conserva.

Veamos el espectro de frecuencias y calculemos numéricamente la frecuencia de oscilación.



En el espectro de frecuencias, al igual que en el modo simétrico, únicamente vemos un pico de frecuencias, ya que ambas masas en este modo antisimétrico llevan la misma frecuencia.

Podemos calcular mediante Python, el valor numérico de esta frecuencia.

Comparando los valores de las frecuencias vemos que:

$\nu_{teórica} = 0{,}7958[Hz]; \nu_{numérica} = 0{,}7952[Hz]$

Cómo vemos ambas frecuencias son muy similares, al igual que antes esto es un indicio de la buena simulación que hemos considerado de nuestro sistema teórico.

3.3. Transformada de Fourier.

Este apartado hemos ido desarrollándolo durante todo el análisis anterior, en toda y cada una de las gráfica anexadas, podemos observar la gráfica del espectro de frecuencias, calculadas mediante Python, usando la transformada de Fourier.

Para un movimiento aleatorio podemos observar dos picos en la gráfica que hace referencia a las frecuencias de ambos modos normales, pero como el movimiento es una combinación lineal de estos, observamos dos picos.

Sin embargo, cuando excitamos estos modos normales, el otro es prácticamente nulo, y por eso, en el apartado de modos normales, vemos el espectro únicamente con un pico de frecuencias, propio del modo normal excitado.

También comentar que en el acoplamiento débil, también observamos un único pico de frecuencia, esto es debido al movimiento de latido, que hace que tras un tiempo, las masas adopten un movimiento normal de oscilación y acaben sincronizadas.

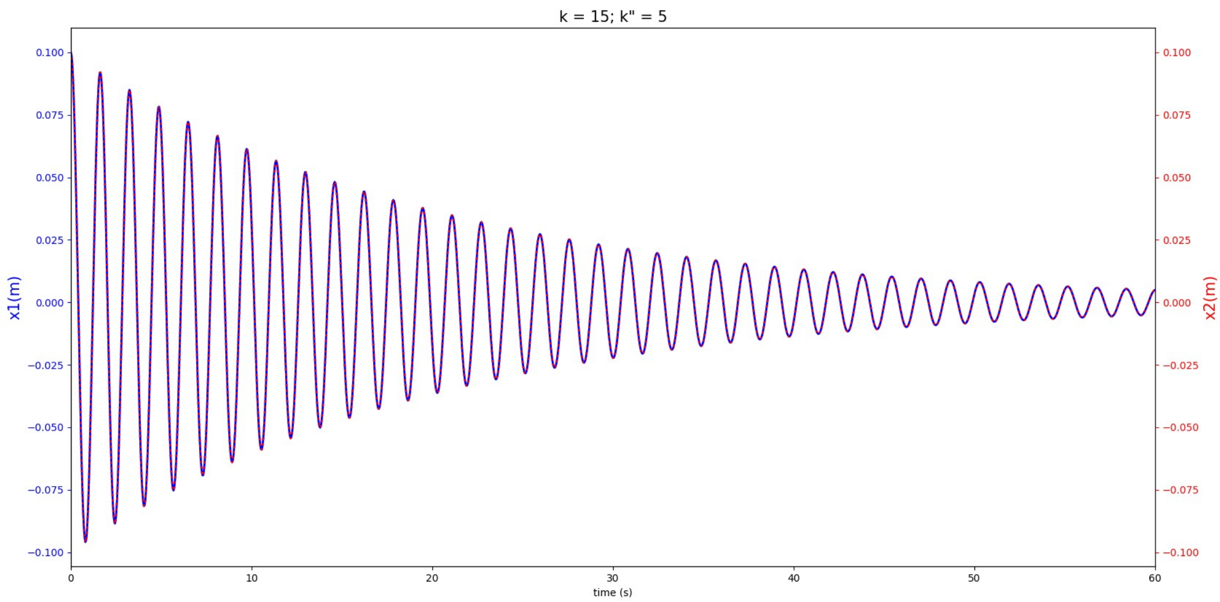
3.4. Ampliación.

En este apartado, modificaremos las ecuaciones de movimiento, añadiremos una fuerza de rozamiento con el aire, que es proporcional a la velocidad de las masas, veremos los nuevos movimientos que se dan y como la energía en este modelo no se conserva.

$\vec{F}_{Roz} = -\alpha \vec{v} ; \alpha \in \mathbb{R}$

Añadiremos un término de fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad de las masas, excitaremos los modos normales de vibración y veremos cuál es la evolución del sistema.

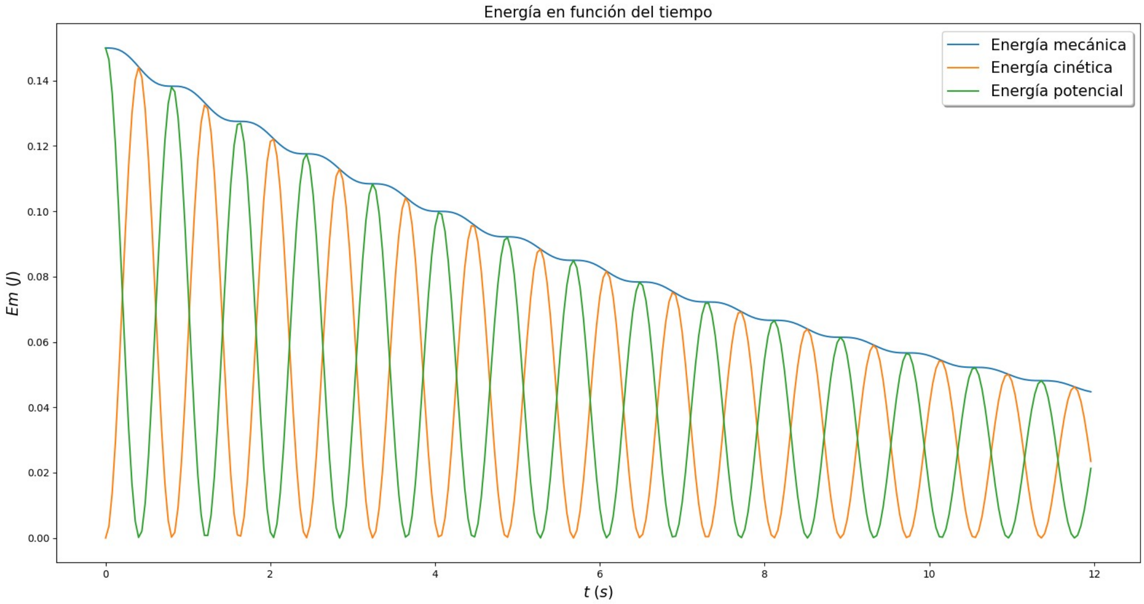
Empecemos por el modo simétrico con rozamiento:



En la gráfica podemos observar que se trata del modo normal simétrico, las masas se mueven de igual manera, el trazo rojo está punteado sobre el azul.

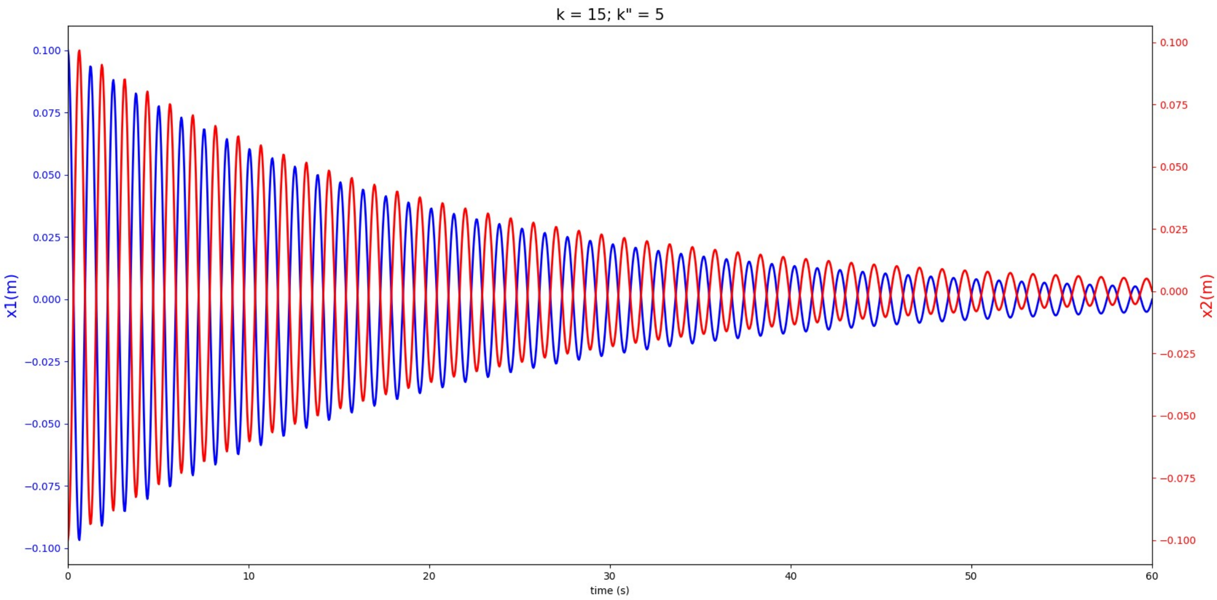
Por efecto de la fuerza de rozamiento, este movimiento se va debilitando y va perdiendo amplitud a medida que avanza el tiempo, hasta que finalmente se queda quieto.

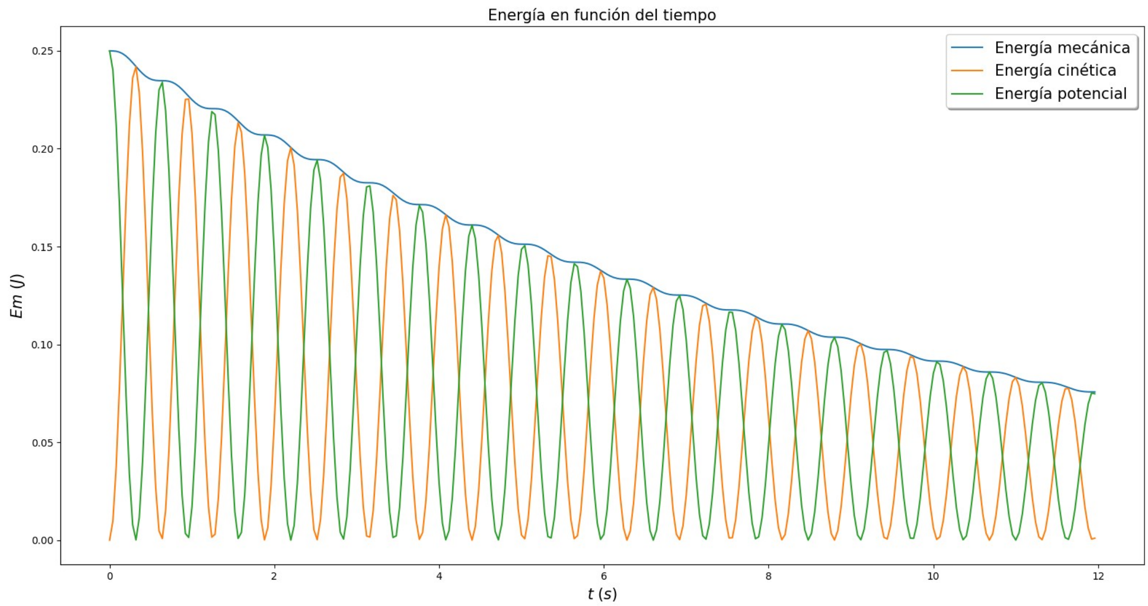
Veamos qué pasa con la energía.



Cómo podemos observar la energía no se conserva, la energía mecánica disminuye con el tiempo, esto es debido al rozamiento con el aire, al considerar la existencia del aire, las masas se mueven en este 'fluido' generando corrientes de aire por allí dónde pasan, estas corrientes se van disipando en forma de calor, aumentando tímidamente la temperatura del aire, esto equivale a una pérdida de energía de las masas.

Para el caso del movimiento normal antisimétrico es muy parecido, veremos cómo las masas se van deteniendo y la energía total va disminuyendo.





El análisis de este movimiento es similar al anterior.

4. Conclusiones.

En esta práctica hemos aprendido cómo se comporta tanto de manera ideal, cómo de manera real un sistema físico formado por muelles acoplados. Hemos aprendido a desarrollar de manera teórica el problema, llegando a unas ecuaciones de movimiento que nos han proporcionado simulaciones precisas del movimiento.

Hemos aprendido el fenómeno de acoplamiento débil y frecuencia de latido.

Además hemos indagado de manera minuciosa sobre los movimientos normales de oscilación.

Hemos visto que papel fundamental juega la transformada de Fourier en este tipo de sistemas.

Y por último hemos visto cuál es el movimiento que se daría realmente, considerando la fuerza de rozamiento con el aire.

5. Bibliografía.

1.- Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2014). Fundamentos de Física(Volumen 1). Editorial Reverté.

2.- French, A. P. (1971). Vibrations and Waves. CRC Press.

3.- Marín, J. L. (2002). Oscilaciones y Ondas: Una introducción a la física moderna. Ediciones Paraninfo.

4.- Wang, G., & Li, X. (2017). Dynamics of Coupled Oscillators. CRC Press.

5.- Rodríguez, A., & Fernández, C. (2005). Dinámica de sistemas físicos. Ediciones de la Universidad de Murcia.