

# Clase 1

martes, 28 de noviembre de 2023 11:31

- Partículas distinguibles vs indistinguibles
- Número de ocupación
- Estadística "clásica" (Maxwell-Boltzmann)
- Estadística "clásica" (Bose-Einstein, bosones)
- Estadística "clásica" (Fermi-Dirac, fermiones)

## 1. PARTÍCULAS DISTINGUITABLES VS INDISTINGUITABLES

Hemos visto en cuántica que tenemos dos tipos de partículas:

- Bosones: spin entero 0, 1, 2?
- Fermiones: spin semientero  $-1/2, 1/2 \rightarrow$  PRINCIPIO EXCLUSIÓN PAULI

No puedo tener 2 partículas con todos los números cuánticos iguales

¿Cómo afecta esto a la formalización de la función de onda? Supongamos dos partículas.

- FERMIONES  $\Rightarrow \Psi(x_1, x_2) \quad \Psi(x_2, x_1) \rightarrow$  no puede ocurrir por pauli
- BOSONES  $\Rightarrow \Psi(x_1, x_2) \quad \Psi(x_2, x_1) \rightarrow$  si las permito, no sé cuál es cual

¿Cómo se arregla? Antisimetrizando o simetrizando la función de onda respectivamente:

- FERMIONES:  $\Psi = \frac{\Psi(x_1, x_2) - \Psi(x_2, x_1)}{2} \Rightarrow$  si son =, es = 0 y por tanto se ajusta al principio exclusión
- BOSONES:  $\Psi = \frac{\Psi(x_1, x_2) + \Psi(x_2, x_1)}{2}$

Además, el hecho de que no se puede tener tantos como quiera con el mismo número cuántico (en el caso de los fermiones) implica que se añade una "presión" adicional cuántica llamada presión de degeneración debida a la repulsión entre electrones en el mismo nivel (reparar de apuntes pons).

En el caso de los bosones (esto no ocurre) podemos imponer unas ciertas condiciones para que todos los fotones estén en el mismo estado, consiguiendo así una especie de "condensado" con una única función de onda que describe a todas las partículas.

Ejemplo: consideración 2 partículas A y B, que pueden tener 3 energías distintas

### CASO CLÁSICO

$E_1$	$E_2$	$E_3$	$3^2$ casos
AB	-	-	
A	B	-	
A	-	B	
B	A	-	
B	-	A	
-	A	B	
-	B	A	
-	AB	-	
-	-	AB	

### BOSONES (A=B)

$E_1$	$E_2$	$E_3$	$3 \cdot 3 = 6$ casos
AA	-	-	
-	AA	-	
-	-	AA	
A	A	-	
A	-	A	
-	A	A	

### FERMIONES (no pueden ir juntas)

$E_1$	$E_2$	$E_3$	3 casos
A	A	-	
-	A	A	
A	-	A	

Se ve claramente que al añadir ligaduras disminuye el número de posibilidades, y esto es algo que hay que tener en cuenta. Vamos a ver cómo formalizar esto.

## 2. NÚMERO DE OCUPACIÓN

Consideramos colectividad canónica:  $N$  partículas en un volumen  $V$  a temperatura  $T$  ( $\beta = 1/kT$ ). Denotaremos con subíndices  $(r, s)$  la energía de un cierto estado donde podemos tener  $n_r$  o  $n_s$  partículas (con energías  $E_r$  y  $E_s$  respectivamente).

Denotamos por mayúsculas  $(R)$ , al conjunto de los números cuánticos que puede tener el sistema con energía total  $E_R$ :

$$E_R = n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots = \sum_r n_r E_r \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Muchas posibilidades de llegar al} \\ \text{mismo resultado reorganizando las } n \end{array} \right\} \begin{array}{l} R = (n_1, n_2, \dots) \\ N = \sum_r n_r \end{array}$$

¿Cómo queda la función de partición?  $Z = \sum_R e^{-\beta E_R} = \sum_R e^{-\beta \sum_r n_r E_r}$

suma sobre "posibles" combinaciones de  $n_r$

• VALOR ESPERADO DE  $n_s$   $\rightarrow$  número nivel TRUCO!  $\ast = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E_s} \ln Z$

$$\begin{aligned} \langle n_s \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_R n_s e^{-\beta \sum_r n_r E_r} = \frac{1}{Z} \left[ \sum_R n_s e^{-\beta \sum_r n_r E_r} \right] \uparrow \\ &\quad \uparrow \text{TRUCO! Separar suma y sacar término } s \\ &= \frac{1}{Z} \left( -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E_s} \sum_R e^{-\beta \sum_r n_r E_r} \right) = \frac{1}{Z} \left( -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E_s} \sum_R e^{-\beta \sum_r E_r n_r} \right) = \frac{1}{Z} \left( -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E_s} Z \right) = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E_s} \ln Z \end{aligned}$$

↑ volvemos a agrupar (ya no tenemos  $n_s$ )

$$\Rightarrow \langle n_s \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E_s} \ln Z \Rightarrow \text{NÚMERO DE OCUPACIÓN}$$

Nos da el promedio de partículas que esperamos encontrar en el estado de energía  $s$ .

Ejercicio: comprobar que  $\langle \Delta n_s^2 \rangle = -\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial E_s^2} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle n_s \rangle}{\partial E_s}$

Estas sumas (y la función de partición) van a depender de las consideraciones que hagamos en cuanto a las partículas.

### 2.1. Caso clásico: Maxwell-Boltzmann

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_r!} e^{-\beta (n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots + n_r E_r)} = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_r!} (e^{-\beta E_1})^{n_1} (e^{-\beta E_2})^{n_2} \dots (e^{-\beta E_r})^{n_r}$$

$\hookrightarrow$  combinatoria (permutaciones?) ↓

EXPANSIÓN MULTINOMIAL: expansión del binomio

Teorema [editar]

Para cualquier entero positivo  $m$  y cualquier entero no negativo  $n$ , la fórmula multinomial indica cómo una suma con  $m$  términos se expande cuando se eleva a una potencia arbitraria  $n$ :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{1 \leq i \leq m} x_i^{k_i},$$

donde

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

es un coeficiente multinomial. La suma se toma sobre todas las combinaciones de índices enteros no-negativos  $k_i$  a  $k_m$  de tal manera que la suma de todos los  $k_i$  es igual a  $n$ . Es decir, para cada término de la expansión, los exponentes de  $x_i$  deben sumar  $n$ . Además, al igual que con el teorema del binomio, las cantidades de la forma  $x_0$  que aparecen, se toman como iguales a 1 (incluso cuando  $x$  es igual a 0).

En el caso  $m=2$ , esta afirmación se reduce a la del Teorema del binomio.

nos permite hacer la suma  $\leftarrow$

$$= (e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} + \dots + e^{-\beta E_r})^N \Rightarrow \ln Z_{MB} = N \ln \left( \sum_r e^{-\beta E_r} \right) \Rightarrow Z_{MAXWELL-BOLTZMANN} (Z_{MB})$$

LOGARITMOS

$$\Rightarrow \langle n_s \rangle = N \frac{e^{-\beta E_s}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} ; \langle \Delta n_s^2 \rangle = \langle n_s \rangle \left( 1 - \frac{\langle n_s \rangle}{N} \right) \text{ (ejercicio ii)}$$

$\hookrightarrow$  conforme  $\uparrow N$  y  $\langle n_s \rangle$  va "repartido",

$$\langle n_s \rangle / N \ll 1 \text{ y } \langle \Delta n_s^2 \rangle \simeq \langle n_s \rangle, \text{ mientras que } \sigma = \sqrt{\langle \Delta n_s^2 \rangle} \simeq \sqrt{\langle n_s \rangle}$$

Anclura  $\Rightarrow$  gaussiana picada (lo de siempre)  
 $\frac{\sigma}{\langle n_s \rangle} = \frac{1}{\sqrt{n_s}}$

$$\langle n_s \rangle / N \ll 1 \text{ y } \langle \Delta n_s^2 \rangle \simeq \langle n_s \rangle, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mientras que } \sigma = \sqrt{\langle \Delta n_s^2 \rangle} \simeq \sqrt{\langle n_s \rangle} \\ \text{mientras que } \sigma / \langle n_s \rangle = \frac{1}{\sqrt{n_s}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mientras que } \sigma / \langle n_s \rangle \ll 1 \\ \text{mientras que } \sigma / \langle n_s \rangle \ll 1 \end{array} \right.$$

## 2.2. Caso clásico particular: estadística de "fotones"

Los fotones son bosones y por tanto tenemos que tener en cuenta la restricción de que son partículas idénticas (indistinguibles), nos cargamos la combinatoria porque nos dan igual las permutaciones, el número combinatorio es 1.

$$Z = \sum_{n_1, \dots, n_r} e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots + n_r \epsilon_r)} = \left( \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta n_1 \epsilon_1} \right) \left( \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta n_2 \epsilon_2} \right) \dots \left( \sum_{n_r=0}^{\infty} e^{-\beta n_r \epsilon_r} \right) =$$

↑ PROBLEMA!  $\sum_r n_r = N$  (vamos a ignorar eso de momento)

↑ TRUCO! Serie geométrica de razón  $e^{-\beta \epsilon_i}$

$$= \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_1}} \right) \dots \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_r}} \right) = \prod_r \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_r}} \right) \Rightarrow \ln Z_{\text{fotones}} = - \sum_r \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_r})$$

LOGARITMOS

↳ Sin restricciones!

¿Y si queremos hacer lo mismo para fermiones? Suponemos sin restricciones! Tenemos que tener en cuenta que  $n = 1$  ó  $n = 0$  (ya que no podemos repetir estados). Por tanto:

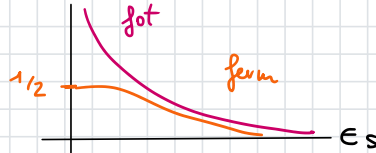
$$Z = \sum_{n_1, \dots, n_r} e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots + n_r \epsilon_r)} = \left( \sum_{n_1=0}^1 e^{-\beta n_1 \epsilon_1} \right) \left( \sum_{n_2=0}^1 e^{-\beta n_2 \epsilon_2} \right) \dots \left( \sum_{n_r=0}^1 e^{-\beta n_r \epsilon_r} \right) =$$

$$= (1 + e^{-\beta \epsilon_1}) \dots (1 + e^{-\beta \epsilon_r}) = \prod_r (1 + e^{-\beta \epsilon_r}) \Rightarrow \ln Z_{\text{fermiones}} = \sum_r \ln(1 + e^{-\beta \epsilon_r}) \Rightarrow \text{CASO PARTICULAR } \mu = 0$$

LOGARITMOS

Ahora  $\langle n_s \rangle_{\text{fot}} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_s}}$  y

$\langle n_s \rangle_{\text{ferm}} = \frac{1}{1 + e^{-\beta \epsilon_s}}$  ;



## Clase 2 → repasar apuntes Pons, como el culo esta clase

miércoles, 29 de noviembre de 2023 11:33

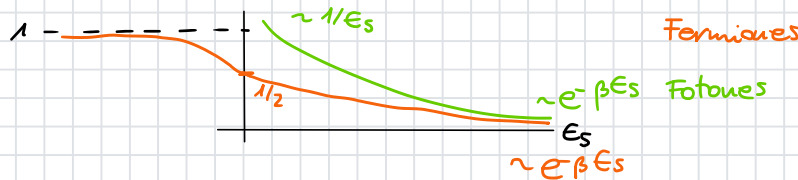
### REPASO CLASE 28 NOV

Sin restricciones ( $N = \sum_r n_r$ )

Fotones  $\mu=0$   $\ln Z = -\sum_r \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_r}) \Rightarrow -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_s} = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{-1}{(1 - e^{-\beta \epsilon_s})} \cdot (-e^{-\beta \epsilon_s}) = \frac{e^{-\beta \epsilon_s}}{1 - e^{-\beta \epsilon_s}} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_s} - 1} \overset{\text{ayer mal hecho}}{=} \langle n_s \rangle$

Fermiones  $\ln Z = +\sum_r \ln(1 + e^{-\beta \epsilon_r}) \Rightarrow -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_s} = \frac{e^{-\beta \epsilon_s}}{1 + e^{-\beta \epsilon_s}} = \frac{1}{1 + e^{\beta \epsilon_s}} = \langle n_s \rangle$  (FERMI-DIRAC)

Los números de ocupación los podemos dibujar:

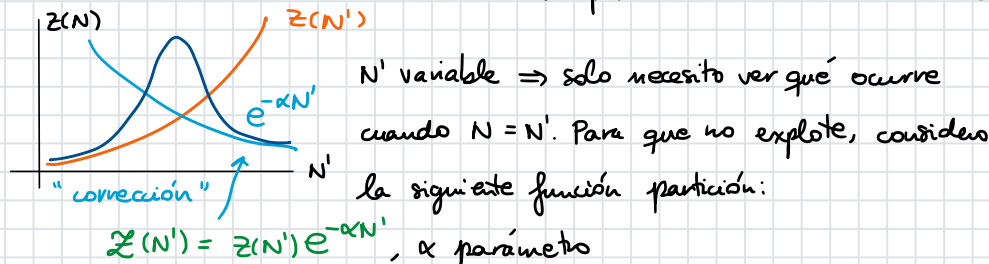


En fermiones sí que podemos hablar de energías negativas, y vemos que asintóticamente el número de ocupación tiende a 1.

### 2.3. Generalización de la función de partición

$$E_R = \sum_r n_r \epsilon_r$$

$$Z = \sum_R e^{-\beta E_R} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_r} e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + \dots + n_r \epsilon_r)} \Rightarrow Z = Z(N) \text{ ya que el n}^\circ \text{ de partículas cuenta como restricción}$$



$$\mathcal{Z}(N') = Z(N') e^{-\alpha N'}, \quad \alpha \text{ parámetro}$$

Veremos que la cuenta queda + fácil, ya que siempre podemos "ajustar"  $\alpha$  para que el máximo esté en  $N$ .

Vamos a ver cómo construir  $\mathcal{Z}(N')$ :  $\mathcal{Z}(N') = Z(N') e^{-\alpha N'} \cdot \sum_R e^{-\beta E_R}$

Como vamos a tener una función muy picada, solo nos contribuye el área de la parte central  $\Rightarrow$  APROXIMACIÓN

$$\mathcal{Z}(N') \simeq Z(N) e^{-\alpha N} \Delta N' \Rightarrow \ln \mathcal{Z} = \ln Z(N) - \alpha N + \ln \Delta N' = \ln Z(N) - \alpha N \quad \begin{matrix} \text{LOGARITMOS} \\ \text{¡¡¡ito, se desprecia} \end{matrix}$$

Como vamos buscando  $Z(N)$ :

$$\ln Z = \ln \mathcal{Z} + \alpha N \quad \begin{matrix} \text{con restricción} & \text{sin restricción (mucho más fácil)} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{hay que buscarlo tq esté} \\ \text{centrado en } N \end{matrix}$$

Y sabemos que:

$$\mathcal{Z} = \sum e^{-\sum_r n_r (\beta \epsilon_r + \alpha)} \Rightarrow \text{SIN RESTRICCIONES} \quad \left. \begin{matrix} \text{Bosones } n_1, n_2, \dots = 0 \dots +\infty \end{matrix} \right\}$$

Y sabemos que:

$$\mathcal{Z} = \sum_{n_1, n_2, \dots} e^{-\sum_r n_r (\beta \epsilon_r + \alpha)} \Rightarrow \text{SIN RESTRICCIONES} \left\{ \begin{array}{l} \text{Bosones } n_1, n_2, \dots = 0, \dots, +\infty \\ \text{Fermiones } n_1, n_2, \dots = 0, 1 \end{array} \right.$$

Y si repetimos los argumentos de ayer:

$$\mathcal{Z} = \left( \sum_{n_1} e^{-n_1 (\beta \epsilon_1 + \alpha)} \right) \dots \left( \sum_{n_r} e^{-n_r (\beta \epsilon_r + \alpha)} \right)$$

¿Quién es  $\alpha$ ? Máximo  $\mathcal{Z}$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial N'} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial N'} = \frac{\partial}{\partial N'} [\ln \mathcal{Z} - \alpha N'] = \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial N'} \Big|_{N'=N} - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \alpha(N) = \frac{\partial \ln \mathcal{Z}(N')}{\partial N'} \Big|_{N=N'}$$

Retomamos  $\ln \mathcal{Z} = \ln \mathcal{Z} + \alpha(N)N$ :

$$\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial N} = \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial N} + \alpha + N \frac{\partial \alpha}{\partial N} ; 0 = \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial N} + N \frac{\partial \alpha}{\partial N} =$$

$$= \left[ \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \alpha} + N \right] \frac{\partial \alpha}{\partial N} = 0 ; \rightarrow \text{Truco! meter parámetros que nos quiten restricciones y luego volver cuando queramos calcular derivadas}$$

$$= \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \text{del tipo } \langle n_s \rangle = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \epsilon_s} = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \epsilon_s} \text{ nueva forma}$$

$\hookrightarrow \mathcal{Z}$  no depende de  $\alpha$

**BOSONES** (cualquier tipo, no solo fotones)

$$\ln \mathcal{Z} = -\sum \ln(1 - e^{-(\beta \epsilon_i + \alpha)}) \Rightarrow \langle n_i \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \epsilon_i} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_i + \alpha} - 1} \quad (\text{BOSE - EINSTEIN})$$

$$\text{FERMIONES } \ln \mathcal{Z} = \sum \ln(1 + e^{-(\beta \epsilon_i + \alpha)}) \Rightarrow \langle n_i \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \epsilon_i} = \frac{1}{1 + e^{\beta \epsilon_i + \alpha}}$$

$$\Rightarrow \sum_i \langle n_i \rangle = \sum_i \frac{1}{e^{\beta \epsilon_i + \alpha} - 1} = -\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \alpha} = N$$

¿Quién es  $\alpha$ ? Vamos a relacionarlo con el potencial químico:

$$\mu = -kT \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial N} = -kT \alpha \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\mu}{kT}$$

$$\text{Fotones: } \langle n_1 \rangle = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_1} - 1} \Rightarrow \text{DISTRIBUCIÓN DE PLANCK: radiación de cuerpo negro}$$

$$\text{CLÁSICA: } \ln \mathcal{Z} = N \ln \sum_r e^{-\beta \epsilon_r} \quad (\text{MAXWELL - BOLTZMANN}) \Rightarrow \langle n_s \rangle = N \frac{e^{-\beta \epsilon_s}}{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r}}$$

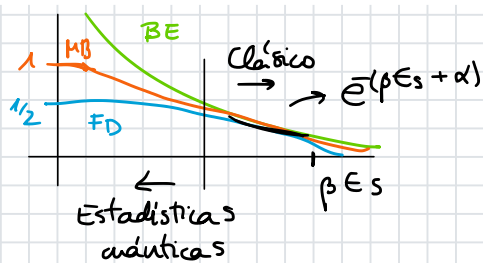
Todo se puede pasar entre  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{Z}$  usando  $\ln \mathcal{Z} = \ln \mathcal{Z} + \alpha N$ .

La elección de  $\alpha$  es lo que me hace fijar  $N$ .

### 3. LÍMITE CLÁSICO

Vamos a ver cómo recuperar la teoría clásica a partir de la cuántica. Lo que vamos a decir es que tenemos niveles de ocupación muy bajos (densidades bajas, gases diluidos).

$$e^{\beta \epsilon_s + \alpha} \gg 1 \quad \text{ó} \quad e^{-(\beta \epsilon_s + \alpha)} \ll 1$$



Vamos a hacer algo más (sabe Dios, me mato):

$$\ln Z_{BE}^{FD} = \alpha N + \sum_r \ln(1 \pm e^{-(\alpha + \beta \epsilon_r)}) \approx \alpha N + \sum_r e^{-(\alpha + \beta \epsilon_r)} = \alpha N + e^{-\alpha} \sum_r e^{-\beta \epsilon_r}$$

límite clásico  $\Rightarrow \ln(1+x) \approx x$   
 $x \ll 1$

$N$  (de algún sitio sale, revisar)

$\Rightarrow$  ejercicio: poner eso en función de  $\ln Z^{MB}$  y ver qué más sale

Temperatura negativa: inversión de población (mirar). Tenemos un sistema estadístico donde el parámetro que va con  $T$  cambia el signo. Dejamos vacíos estados con menor energía, solo nos indica cosas sobre distribución estadística

# Clase 3

viernes, 1 de diciembre de 2023

11:34

En la clase anterior planteamos lo siguiente:

$$\ln Z_{BE}^{FD} \simeq \alpha N + \left[ \sum_r \pm e^{-(\alpha + \beta \epsilon_r)} \right] N$$

A partir de esto queremos llegar a Maxwell-Boltzmann y acabar en el límite clásico.

$$\ln Z^{MB} = N \ln \sum_r e^{-\beta \epsilon_r}, \text{ donde } N = \sum_r \frac{1}{e^{\alpha + \beta \epsilon_r} \pm 1} \simeq \sum_r e^{-(\alpha + \beta \epsilon_r)} = e^{-\alpha} \sum_r e^{-\beta \epsilon_r}$$

↳ se diferencia en que no tenemos potencial químico

clásico  
(despreciamos 1)

Por tanto, de aquí obtenemos:

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r}} \Rightarrow -\alpha = \ln \left( \frac{N}{\sum_r e^{-\beta \epsilon_r}} \right) \Rightarrow \alpha = -\ln N + \ln \sum_r e^{-\beta \epsilon_r}$$

Si reemplazamos la expresión anterior:

$$\ln Z_{BE}^{FD} \simeq (-\ln N + \ln \sum_r e^{-\beta \epsilon_r}) N + N = \underbrace{N \ln \sum_r e^{-\beta \epsilon_r}}_{\ln Z^{MB}} - \underbrace{N \ln N + N}_{-\ln N!} = \ln \left( \frac{Z^{MB}}{N!} \right)$$

El "ajuste" que hicimos de poner  $N!$  cuando tenemos partículas indistinguibles ahora lo hemos conseguido de forma más rigurosa (sacando el límite clásico a partir de estadísticas cuánticas). Nos queda Maxwell-Boltzmann con la corrección pertinente.

## 4. APLICACIONES

### 4.1. Electrones de conducción en metales

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \simeq \frac{3}{2} kT \Rightarrow \bar{p} = \sqrt{\langle p^2 \rangle} = \sqrt{3mkT}$$

↑ "valor esperado del módulo", una nueva definición

Vamos a ver primero si hay que hacer caso clásico o cuántico:

$$\lambda_{DB} = \frac{\lambda}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} \uparrow$$

$m_e, T = 300K$

$$\cdot \text{"Distancia media": } \bar{l} = \left[ \frac{V}{N} \right]^{1/3}, \text{ donde } \frac{N}{V} = \frac{\rho}{A m_{\text{átomo}}} \uparrow$$

↑ densidad  
↑ COBRE  
↑ no métrico

$\rightarrow$  suponemos  $1e^-$  de conducción/átomo  
 $\rho = 9 \text{ g/cm}^3; A = 64$

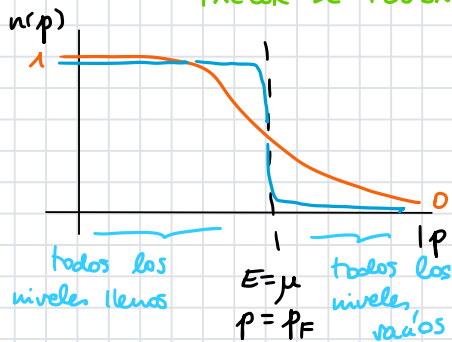
$$\Rightarrow \bar{l} = 2.3 \cdot 10^{-10} \text{ m} \ll \lambda_{DB} \Rightarrow \text{CASO CUÁNTICO}$$



Ahora vamos a calcular el número  $N$  (tendremos que saber la densidad de ocupación para un momento dado e integrar en posiciones y momentos).

$$N = \frac{2}{h^3} \int d^3p d^3x u(p) \Rightarrow u(p) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\frac{p^2}{2m} - \mu)}} \text{ DISTRIBUCIÓN FERMI}$$

↑ FACTOR DE DEGENERACIÓN: suma sobre espines  $g=2$  (2 opciones,  $1/2$  y  $-1/2$ )



MOMENTO DE FERMI:  $E_F = \frac{p_F^2}{2m} \mu$

corresponde al punto donde

se cambia de valor, por definición = potencial químico

Cuanto mayor sea beta, más picada va a estar la distribución y se va a convertir en una función escalón. LÍMITE DEGENERADO:  $T \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow +\infty$

Se dice que  $T$  baja comparada con  $\mu$ .

A este concepto se le llama gas de Fermi degenerado o "Mar de Fermi".

En este límite:

↑ más allá de  $p_F$  es 0

$$N = \frac{g}{h^3} \int d^3p d^3x u(p) = \frac{g}{h^3} \int_0^{p_F} \iiint d^3x d^3p = \frac{g}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp \frac{4\pi}{3} = \frac{g 4\pi V}{2\pi^3 h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{g 4\pi V}{2\pi^3 h^3} \frac{p_F^3}{3}$$

$\underbrace{\int_0^{p_F} p^2 dp}_{\frac{p^3}{3}}$      $\underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{\text{nos gusta + h}} \quad (h^3 = (2\pi)^3 \hbar^3)$

$k = p/\hbar$  (nº onda)

$$= \frac{g 4\pi V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} dk k^2 \Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \Rightarrow \text{momento y nº onda indistinguible}$$

$\underbrace{\int_0^{k_F} dk k^2}_{k^3/3}$

Por tanto la energía de Fermi (y lo que tomamos como definición del potencial químico) queda como:

$$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3} \rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{2/3} = \mu \approx 7 \text{ eV}$$

COBRE  $\Rightarrow$  comparamos con la

energía de un  $e^-$  en el nivel

fundamental del átomo H  $\Rightarrow$  CTE

RYDBERG

Y transformamos energía en temperatura (que llamaremos temperatura de Fermi) dividiendo por la constante de Boltzmann (temperatura tq la energía típica iguale a la energía de fermi)

$$T_K = \frac{E_F}{k} = 8 \cdot 10^4 \text{ K (gordísima)} \Rightarrow T \ll T_F \text{ y esto nos permite}$$

decir que es degenerado (me cago qué guapo!)



acar que es degenerado (me  
cago qué guapo!)

Esta temperatura de fermi nos permite dar fenómenos cuánticos  
(superconductividad etc).

## 4.2. Concepto de densidad de estados

Lo que vamos a hacer básicamente es razonar cuántos estados tengo a una cierta  
energía. Vamos a hacer sumatorio de números cuánticos que aproximaremos con  
una integral cuando tengo muchos.

$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_r} = \int d^3 n \Rightarrow$  ¿Cómo cuantizo mi sistema? Diremos que lo que tenemos son ondas  
estacionarias y solo tendremos unos ciertos números cuánticos  
permitidos que han de cumplir la siguiente condición:

$$\lambda = \frac{l}{n} \quad \text{condición al } n^\circ \text{ onda}$$

Otra condición de cuantización será:  $k_i = \frac{2\pi n_i}{L}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$   $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Poniendo las integrales en función de  $k$  tendremos:

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_r} = \int d^3 n = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3 k = \frac{4\pi L^3}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk = *$$

CAMBIO A MÓDULO  
Y ÁNGULO sin repeticiones

Si nos fijamos en la energía:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \hbar^2 \frac{k^2}{2m}$$

Por tanto la integral queda:

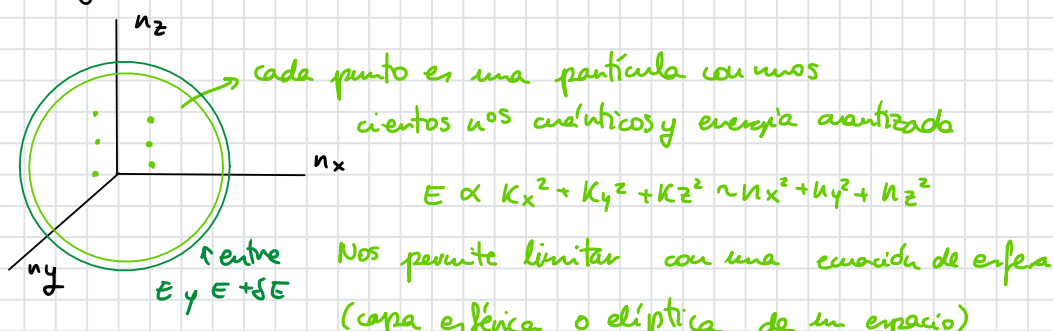
$$* = \frac{V_m}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \sqrt{2mE} dE = \int_0^\infty g(E) dE$$

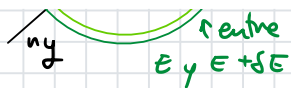
↑ tomamos una caja cuyo volumen será  $L^3$

**Definición:** función de probabilidad normalizada al  
número total y que únicamente depende de la energía.

**DENSIDAD DE ESTADOS**  $g(E) = \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$

Esta nueva definición nos ayuda en los cálculos por el tema de los límites  
de integración.





Nos permite limitar con una ecuación de esfera (capa esférica o elíptica de un espacio)

Falta añadir si estas partículas tienen algún grado extra de libertad (por ejemplo,  $g = 2$  que hemos definido antes para el spin). En general, si son fermiones,  $g_s = 2s + 1$ . Para fotones  $g = 2$  (2 polarizaciones)

$$g(E) = g_s \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$$

¿Qué pasa con la función de partición para  $N$  partículas?

$$\ln Z = \int_0^\infty dE g(E) \ln(e^{-\beta(E-\mu)} + 1)$$

Queda como la función de partición de un sistema de toda la vida pero con un término añadido a la densidad de estados. Let's go a las derivadas de la función de partición:

- $N = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = \int_0^\infty g(E) \frac{dE}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$
- $\langle E \rangle = \mu N - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \int_0^\infty g(E) \frac{E dE}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$
- PRESIÓN:  $\langle P \rangle = \frac{1}{\beta V} \ln Z$  (ejercicio)