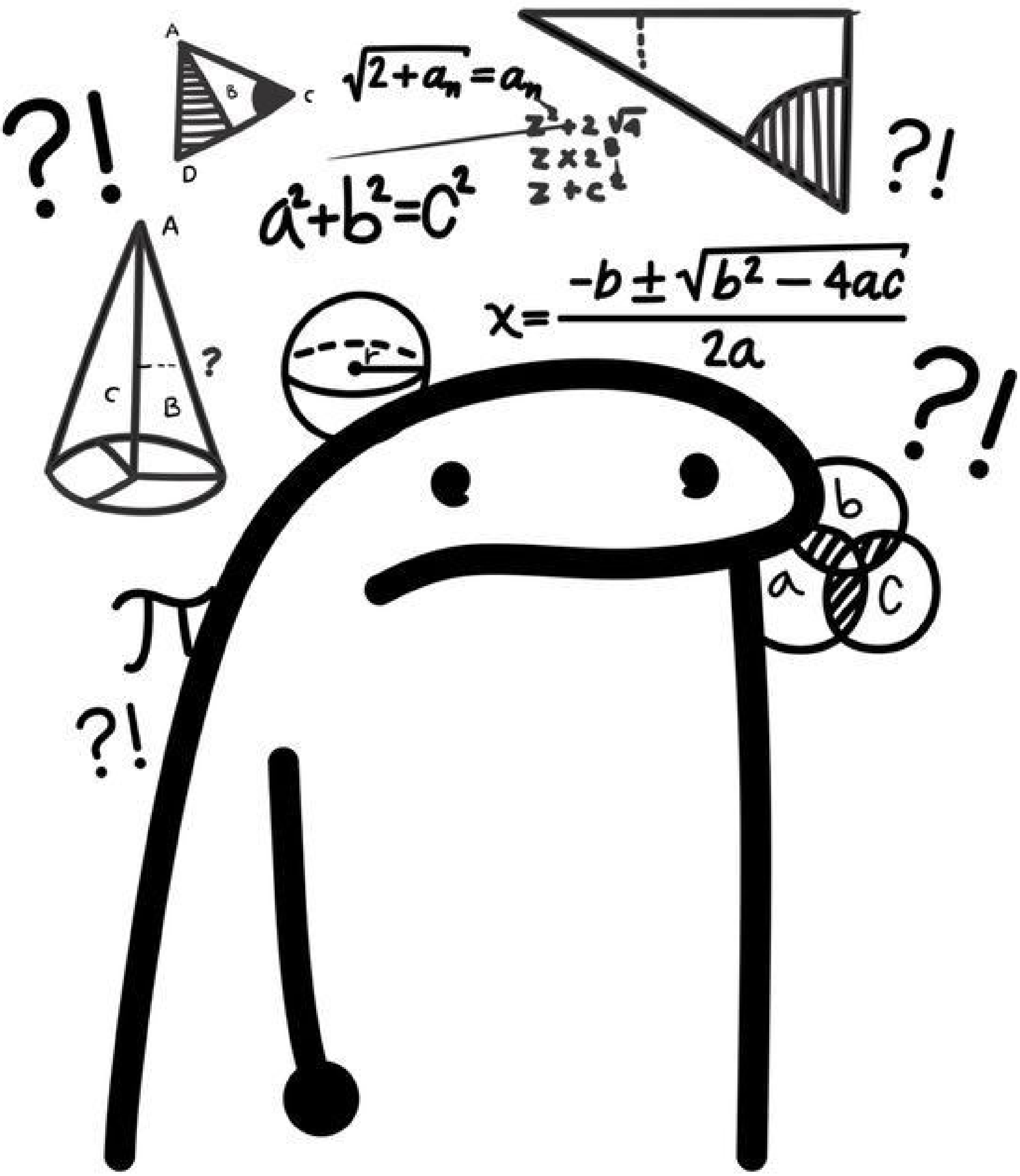
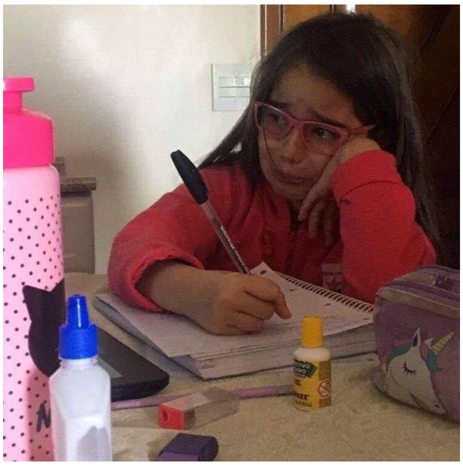
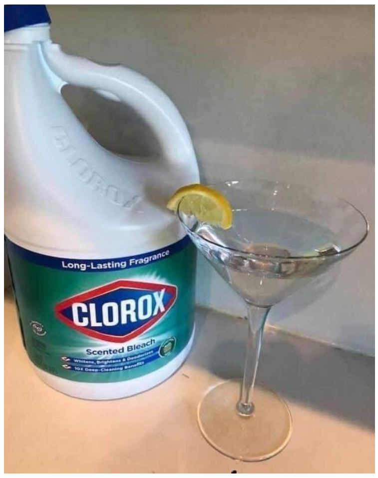


?!
A
B
C
D
$\sqrt{2+a_n}=a_n$
$a^2+b^2=c^2$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
?!
?
?!
b
a
c
?!




Tu puedes
no abandones la carrera


Long-Lasting Fragrance
CLOROX
Scented Bleach

ELECTRO


Clasismo
Miedo a ir a clase


@nocturnaltrashposts
sometimes
bullying
is okay!


I'm sorry for being annoying
@nocturnaltrashposts
It will happen again

FORMULARIO ELECTROMAGNETISMO

Ruiz Muñoz, Miguel Ángel

23 de mayo de 2022

TEMA 1: Teoría matemática

Gradiente, Divergencia, Rotacional y Laplaciano

- **Gradiente:** coge un campo escalar y lo trasforma en vector

  - Coordenadas cartesianas

    $$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

  - Coordenadas esféricas

    $$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\overrightarrow{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\overrightarrow{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\overrightarrow{\varphi}$$

  - Coordenadas cilíndricas

    $$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\overrightarrow{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\overrightarrow{\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\overrightarrow{z}$$

- **Divergencia:** coge un vector y lo transforma en un escalar

  - Coordenadas cartesianas

    $$\nabla\cdot\psi = \frac{\partial\psi_x}{x} + \frac{\partial\psi_y}{y} + \frac{\partial\psi_z}{z}$$

  - Coordenadas esféricas

    $$\nabla\cdot\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\psi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\psi_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi}$$

  - Coordenadas cilíndricas

    $$\nabla\cdot\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\psi_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z}$$

- **Rotacional:** coge un vector y te devuelve otro vector.

  - Coordenadas cartesianas

    $$\nabla\times\psi = \left(\frac{\partial\psi_z}{\partial y} - \frac{\partial\psi_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

- Coordenadas esféricas

$$\nabla \times \psi = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\psi_\varphi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\varphi}\right)\overrightarrow{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\psi_\varphi)}{\partial r}\right)\overrightarrow{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\psi_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{\varphi}$$

- Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \psi = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial\psi_\varphi}{\partial z}\right)\overrightarrow{\rho} + \left(\frac{\partial\psi_\rho}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial\rho}\right)\overrightarrow{\varphi} + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\psi_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_\rho}{\partial\varphi}\right]\overrightarrow{z}$$

- **Laplaciano:** realmente el laplaciano nos va a ser muy útil para resolver las ecuaciones de *Poisson* y *Laplace*.
  - Coordenadas cartesianas

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

  - Coordenadas esféricas

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

  - Coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Cambios de coordenadas

De cartesianas a cilíndricas

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z$$

$$\hat{x} = \cos\varphi\hat{\rho} - \sin\varphi\hat{\varphi} \qquad \hat{y} = \sin\varphi\hat{\rho} + \cos\varphi\hat{\varphi} \qquad \hat{z} = \hat{z}$$

De cilíndricas a cartesianas

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

$$\hat{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{y} \qquad \hat{\varphi} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{y} \qquad \hat{z} = \hat{z}$$

De cartesianas a esféricas

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

$$\hat{x} = \sin\theta\cos\varphi\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi} \qquad \hat{y} = \sin\theta\sin\varphi\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\hat{\theta} + \cos\varphi\hat{\varphi} \qquad \hat{z} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}$$

De esféricas a cartesianas

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\hat{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{y} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{y} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{z}$$

$$\hat{\varphi} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{y}$$

Diferenciales de longitud, superficie y volumen

- Coordenadas cartesianas
  - Diferencial de longitud
    $d\overrightarrow{l} = dx\ \hat{x} + dy\ \hat{y} + dz\ \hat{z}$
  - Diferencial de superficie
    $d\overrightarrow{a} = \pm dydz\ \hat{x} \pm dxdz\ \hat{y} \pm dydx\ \hat{z}$
  - Diferencial de volumen
    $dV = dxdydz$
- Coordenadas esféricas
  - Diferencial de longitud
    $d\overrightarrow{l} = dr\ \hat{r} + rd\theta\ \hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\ \hat{\varphi}$
  - Diferencial de superficie
    $d\overleftarrow{a} = \pm r^2 \sin\theta d\theta d\varphi\ \hat{r} \pm r\sin\theta dr d\varphi\ \hat{\theta} \pm r dr d\theta \hat{\varphi}$
  - Diferencial de volumen
    $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$
- Coordenadas cilíndricas
  - Diferencial de longitud
    $d\overrightarrow{l} = d\rho\ \hat{\rho} + \rho d\varphi\ \hat{\varphi} + dz\ \hat{z}$
  - Diferencial de superficie
    $d\overleftarrow{a} = \pm \rho d\varphi dz\ \hat{\rho} \pm d\rho dz\ \hat{\varphi} \pm \rho d\rho d\varphi\ \hat{z}$
  - Diferencial de volumen
    $dV = \rho d\rho d\varphi dz$

Teorema de Stokes y Teorema de la divergencia

Teorema de Stokes

$$\int_C \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{l} = \int_S \left(\nabla \times \overrightarrow{A}\right) d\overrightarrow{a}$$

Teorema de la divergencia

$$\int_S \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{a} = \int_V \left(\nabla \cdot \overrightarrow{A}\right) dV$$

Mikiherramientas que nos serán útiles más adelante (Primitivas para hacer *Laplace* según la variable)

- <u>COORDENADAS CARTESIANAS</u>
  - Depende solo de X:
    $\phi = Ax + B$
  - Depende solo de Y:
    $\phi = Ay + B$
  - Depende solo de Z:
    $\phi = Az + B$
- <u>COORDENADAS ESFÉRICAS</u>
  - Depende solo de r:
    $\phi = \frac{-A}{r} + B$
  - Depende solo de θ:
    $\phi = A \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + B$
  - Depende solo de φ:
    $\phi = A\varphi + B$
- <u>COORDENADAS CILÍNDRICAS</u>
  - Depende solo de ρ:
    $\phi = A \ln \rho + B$
  - Depende solo de φ:
    $\phi = A\varphi + B$
  - Depende solo de Z:
    $\phi = Az + B$

TEMA 2: Electrostática en el vacío

Teorema de Gauss

Teorema de Gauss (integral)

$$\int_S \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon}$$

Teorema de Gauss (diferencial)

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

La ley de Gauss será útil para los casos en los que tengamos una elevada simetría en el problema.

Como el campo eléctrico es conservativo sabemos que,

$$E = -\nabla\phi$$

Tomando rotacional a ambos lados,

$$\nabla \times E = 0$$

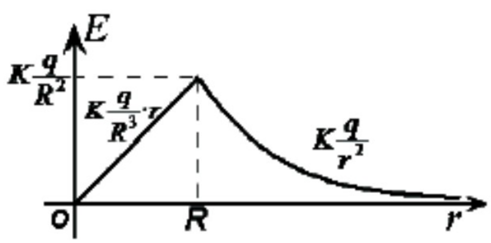
Veamos algunos ejemplo de campo eléctrico y potenciales que se pueden hallar con el teorema de Gauss.

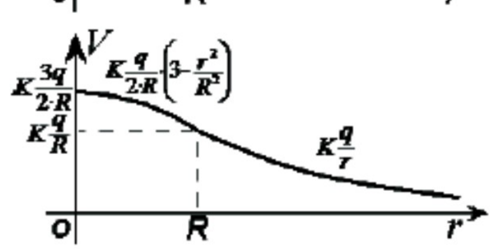
- Geometría esférica
  - Campo y potencial en el exterior

    $$E = \frac{Kq}{r^2} \qquad \phi = \frac{Kq}{r}$$

  - Campo y potencial en el interior

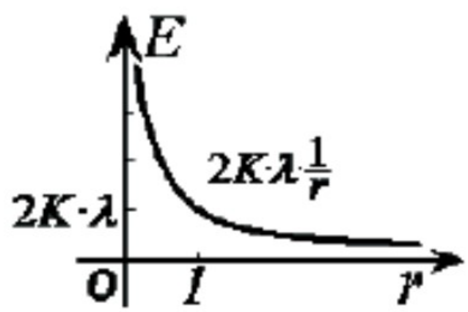
    $$E = \frac{\rho}{3\varepsilon}r \qquad \phi = \frac{Kq}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

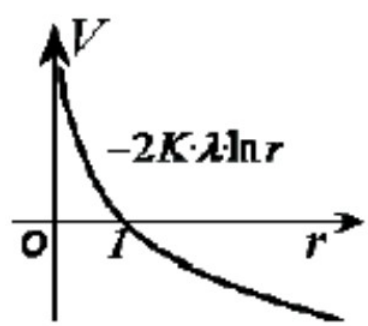




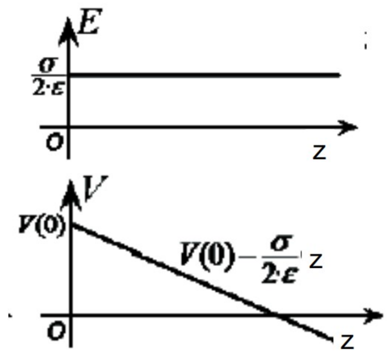
- Geometría cilíndrica (hilo conductor)

  $$E = 2K\lambda\frac{1}{r} \qquad \phi = -2K\lambda\ln r$$





- Geometría plana
  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \qquad \phi = \phi(0) - \frac{\sigma}{2\varepsilon} z$



- Dos planos paralelos
  - Campo y potencial en el exterior
    $E = 0$
  - Campo y potencial en el interior
    $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad \phi = \phi_+(0) - \frac{\sigma}{\varepsilon} z$

Término monopolar, dipolar y cuadripolar

- Momento monopolar
  $Q = \sum_i q_i = \int_V dq$
- Término monopolar
  $\phi_M = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
- Momento dipolar
  $p = \sum_i q_i r_i = \int_V r dq$
- Término dipolar
  $\phi_D = \frac{p \cdot \hat{r}}{4\pi\varepsilon r^2}$
- Momento cuadripolar
  $Q_{jk} = \sum_i q_i (3jk - r_i^2 \delta_{jk}) = \int (3jk - r^2 \delta_{jk}) dq$
- Término cuadripolar
  $\phi_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \frac{1}{2} \sum_i \sum_i jk Q_{jk}$

Ecuación de *Poisson* y *Laplace*

Si combinamos la primera ecuación de Maxwell con la definición de campo eléctrico como gradiente del potencial,

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$E = -\nabla \phi$$

Obtenemos,

Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cuando estamos en una situación de vacío o en la que la densidad de carga es nula, entonces,

Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Para una variable está claro cómo resolverlas, pero para dos variables se complica.

Para coordenadas cartesianas

how can i live, laugh, love
in these conditions?!?!

ECUACIÓN DE LAPLACE PARA VARIAS VARIABLES: MÉTODO SEPARACIÓN DE VARIABLES

La mayoría de ejemplos en los que el cálculo del potencial requiere la resolución de la ecuación de Laplace (o de Poisson) es cuando hay materiales conductores. En el tema 3 veremos materiales conductores y dieléctricos y se justificará la razón de las condiciones de contorno.

En esta sección nos centramos en el método matemático de resolver la ecuación, para unas condiciones de contorno dadas.

ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS CARTESIANAS

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

Suponemos que la solución es de la forma:

$$\phi(x,y,z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

Que sustituyendo en la ecuación de Laplace resulta:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

15

Para que la ecuación anterior se cumpla es necesario que ambos miembros sean iguales a una misma constante

Cumpliéndose:

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\gamma^2 \qquad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\alpha^2 \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\beta^2 \qquad \boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0}$$

Para que se cumpla esta **condición**:

- α, β y γ, no pueden ser todas positivas ni todas negativas.
- No pueden ser todas reales ni todas imaginarias

Las soluciones de las tres ecuaciones serán:

$$\boxed{\begin{aligned} X(x)&=a_1e^{\alpha x}+a_2e^{-\alpha x}\\ Y(y)&=b_1e^{\beta y}+b_2e^{-\beta y}\\ Z(z)&=c_1e^{\gamma z}+c_2e^{-\gamma z}\end{aligned}}$$

La solución general para la función potencial será una combinación lineal de estas, donde el sumatorio se extiende a todos los posibles valores de α, β y γ, que verifiquen la condición anterior

$$\phi(x,y,z)=\sum\left[a_1(\alpha)e^{\alpha x}+a_2(\alpha)e^{-\alpha x}\right]\left[b_1(\beta)e^{\beta y}+b_2(\beta)e^{-\beta y}\right]\left[c_1(\gamma)e^{\gamma z}+c_2(\gamma)e^{-\gamma z}\right]$$

16

En el caso de coordenadas esféricas la solución general sería

Imponiendo que esta solución verifique la ecuación diferencial y siguiendo un método similar al anterior se llega a dos ecuaciones diferenciales diferentes de una sóla variable, una dependiente de r y otra del ángulo θ

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - KR = 0$$

Soluciones de la forma:

$$R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$$

$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dT_l}{d\theta}\right) + l(l+1)T_l = 0$$

Las soluciones son los polinomios de Legendre: $T_l(\theta) = P_l(\cos\theta)$

$P_0(\cos\theta) = 1 \qquad P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$

Forma general de la solución

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)}$$

20

Para coordenadas cilíndricas OK.

Método de las imágenes OK

TEMA 3: Electrostática en conductores y dieléctricos

Conductor: región en la que las cargas son libres de moverse ante la acción de un campo eléctrico. Aplicando el Teorema de Gauss en su interior se ve fácilmente que el campo eléctrico es nulo ya que la carga es cero. Por lo tanto, el potencial en su interior es constante. La carga se distribuye en la superficie.

En la superficie del conductor ha de cumplirse que $E_t = 0$ y $E = E_n$

Capacidad: cantidad de carga que es capaz de almacenar un conductor.

Capacidad conductor aislado	Capacidad dos conductores
$C = \frac{Q}{\phi}$	$C = \frac{Q}{\triangle\, \phi}$

Aplicación a casos concretos y fórmulas de interés:

- Condensador de **placas paralelas**

$$\triangle\, \phi = \int_{+}^{-} E\ ds = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_{+}^{-} ds = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} d = \frac{Q}{C}$$

  De donde se deduce fácilmente que,

Capacidad
$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

- Condensador esférico

$$\triangle\, \phi = \int_{+}^{-} E\ ds = \int_{a}^{b} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{a}^{b} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{C}$$

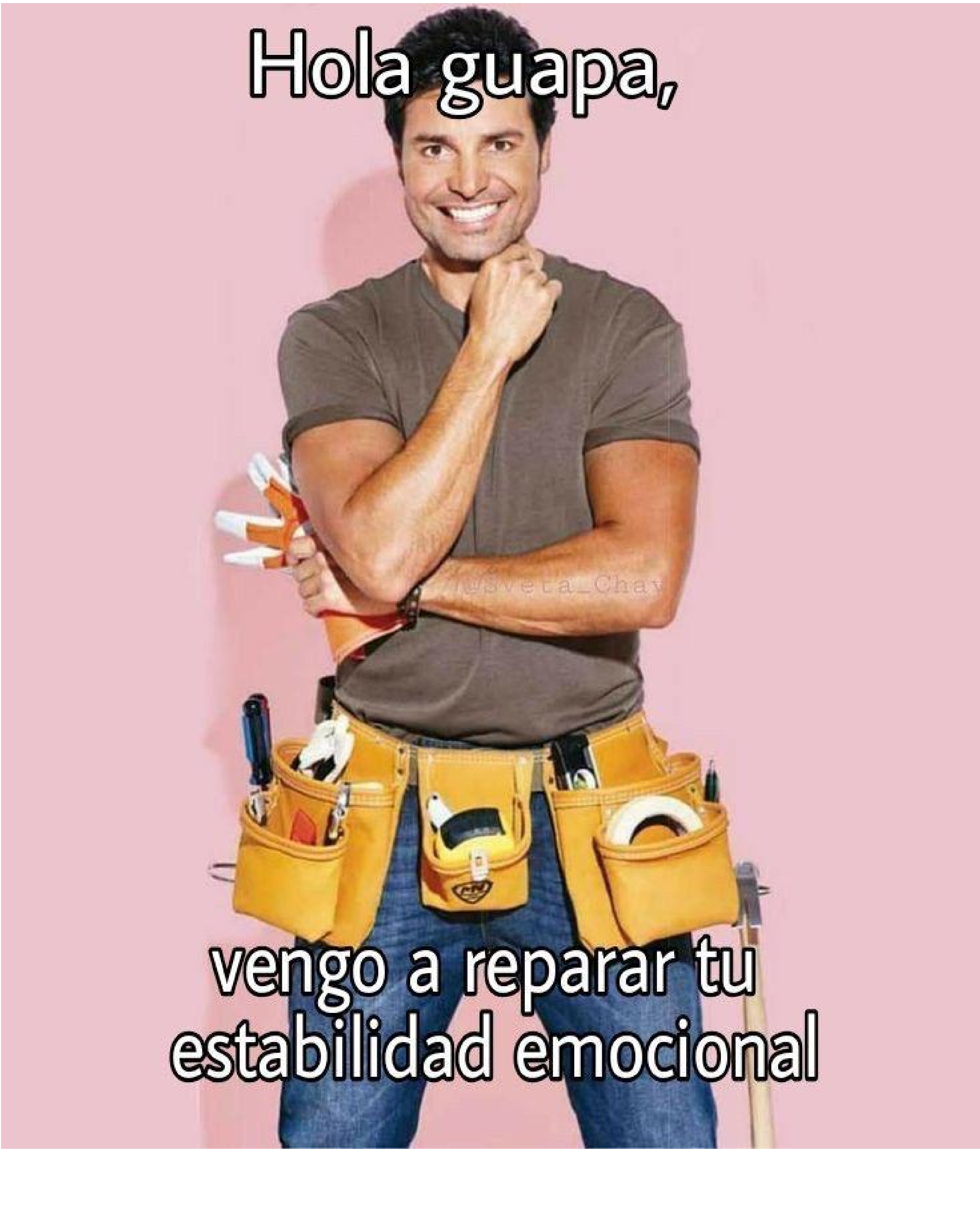
  De donde se deduce que,

Capacidad
$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$

- Energía de un condensador

$$E = \int V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \triangle\, \phi^2 = \frac{1}{2} Q \triangle\, \phi$$

- Asociación de condensadores
  - Paralelo
    $C_{eq} = \frac{Q_1 + Q_2}{\triangle\, \phi} = C_1 + C_2$

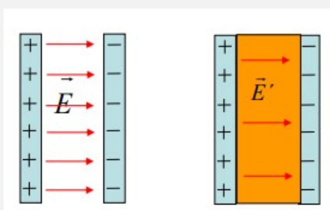

Hola guapa,
vengo a reparar tu
estabilidad emocional

- Serie
$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{\triangle_1 + \triangle_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

Dieléctricos: materiales por donde las cargas no se pueden mover libremente ante la acción de un campo eléctrico. Los electrones están fuertemente ligados. Son aislantes de la electricidad.

La relación entre ε_0 y ε_m es: $\varepsilon_m = \kappa\varepsilon_0$, donde $\kappa > 1$

Es interesante darse cuenta del cambio que conlleva esto en algunas magnitudes cuando hay un dieléctrico. Pongamos el caso del condensador de placas paralelas.



$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $\qquad$ $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\kappa\varepsilon_0} = \frac{E_0}{\kappa}$

Podemos decir entonces que $E < E_0$.

Fijándonos en el potencial ahora.

$\phi_0 = E_0 d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$ $\qquad$ $\phi = Ed = \frac{\sigma}{\kappa\varepsilon_0} d = \frac{\phi_0}{\kappa}$

Podemos decir entonces que $\phi < \phi_0$

Por otro lado, la capacidad,

$C_0 = \frac{Q}{\phi_0} = \frac{Q\varepsilon_0}{\sigma d}$ $\qquad$ $C = \frac{Q}{\phi} = \kappa \frac{Q\varepsilon_0}{\sigma d} = \kappa C_0$

Podemos concluir que $C > C_0$

Los materiales dieléctricos cuando son sometidos a un campo eléctrico, las cargas eléctricas se orientan lentamente.

Se define así el vector polarización como el momento dipolar por unidad de volumen,

$$dp = PdV$$

Para calcular el potencial en un dieléctrico podemos usar,

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{(-\nabla \cdot P)dV}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{P \cdot \hat{n} da}{R}$$

Donde,

$$\rho_b = (-\nabla \cdot P) \qquad \sigma_b = P \cdot \hat{n} = P_n$$

La carga total ligada es cero. Es fácil de verlo sumando las cargas en el volumen y en la superficie y aplicando el teorema de la divergencia.
Existen dos tipos diferentes de cargas: libres (f) y ligadas (b).

$$\rho_{total} = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot P$$

Sustituyendo esta expresión en la forma diferencial de la ley de Gauss, llegamos a

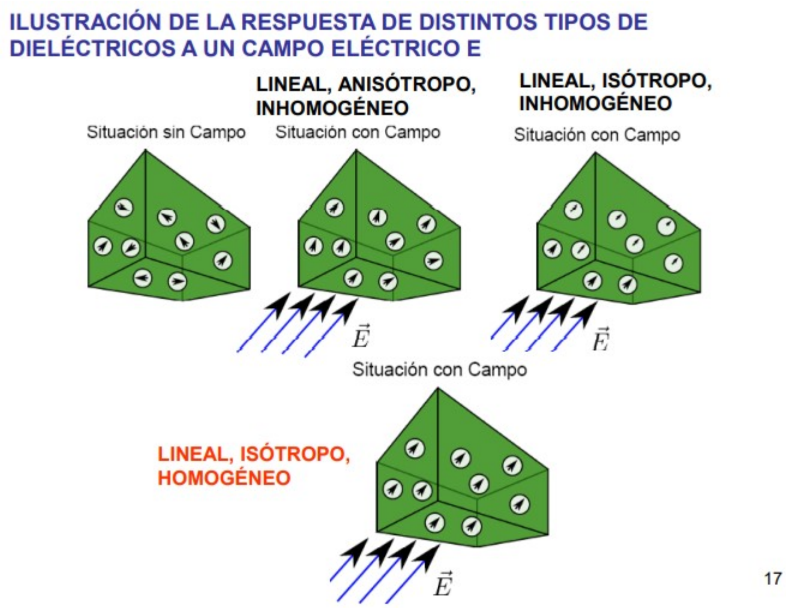
$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 E + P) = \rho_f$$

Entonces, nos es muy útil definir $D = \varepsilon_0 E + P$, que haga referencia únicamente a las cargas libres.

$$\int Dda = Q_{f,enc}$$

Hay diferentes tipos de dieléctricos,

- Electretos
- Dieléctricos no lineales
- Dieléctricos lineales
  - Dieléctricos isotrópicos lineales
    $D = (1+\chi_e)\varepsilon_0 E = \kappa_e \varepsilon_0 E = \varepsilon E$
    ε puede ser función de la posición
  - Dieléctricos isotrópicos lineales homogeneos (ILH)
    $D = (1+\chi_e)\varepsilon_0 E = \kappa_e \varepsilon_0 E = \varepsilon E$
    $\varepsilon = cte$ (no depende de la posición)



Condiciones de contorno

Cuando estamos en un mismo material, las magnitudes definidas en él (campo eléctrico y potencial) son continuas de forma evidente. Los problemas los podemos encontrar cuando nos encontramos en la frontera entre dos materiales diferentes. Para ello establecemos condiciones de frontera.

Componentes normales

$$\hat{n}\cdot(E_2 - E_1) = E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Componentes tangenciales

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

Potenciales

$$\phi_2 = \phi_1$$

Además, está claro que D también tendrá condiciones de frontera, en general:

Componentes normales

$$\hat{n}\cdot(D_2 - D_1) = D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$

Componentes tangentes

$$D_{2t} - D_{1t} = P_{2t} - P_{1t}$$

En el caso concreto de los ILH sabemos que $D = \varepsilon E$, por lo tanto,

Componentes normales

$$\hat{n} \cdot (\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1) = \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma_f$$

Componentes tangenciales

$$E_{2t} = E_{1t}$$

TEMA 4: Corriente eléctrica

Corriente eléctrica: movimiento de las cargas.

Intensidad de corriente: cantidad de cargas que pasan por un punto en un instante de tiempo.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Densidad de corriente: Corriente por unidad de superficie.

$$I = \int J ds$$

$$I = \int K dl$$

Además, en función de la velocidad de las cargas tenemos,

$$J = \rho v$$

$$K = \sigma v$$

$$I = \lambda v$$

Considerando una superficie cerrada, podemos definir la variación de carga dentro de esa superficie con la expresión,

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_S J \cdot da \qquad -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V (\nabla \cdot J) dV \qquad \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J\right) dV = 0$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$$

como condición de frontera para J tenemos,

Componente normal

$$\hat{n} \cdot (J_2 - J_1) = J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Para el caso concreto de corrientes estacionarias (I = cte) tenemos $J_{2n} - J_{1n} = 0$

Si el material es diaeléctrico y está polarizado, entonces la ecuación de continuidad es igual solo que con ρ_b y J_b, como sabemos que $\rho_b = -\nabla \cdot P$ llegamos a,

Densidad de corriente de polarización

$$J_b = \frac{\partial P}{\partial t}$$

Para el caso de las cargas libres, se define la ecuación de continuidad igualmente pero con ρ_f y J_f, y las condiciones de contorno son,

Componente normal

$$\hat{n} \cdot (J_{f2} - J_{f1}) = J_{2fn} - J_{1fn} = -\frac{\partial \sigma_f}{\partial t}$$

Igual que antes, para el caso concreto de corrientes estacionarias (I = cte) tenemos $J_{2fn} - J_{1fn} = 0$

- Corrientes conducción: corrientes creadas debido al movimiento de las partículas libres en los materiales al aplicar un campo eléctrico
- Corrientes de convección
- Corrientes de difusión: movimientos generados por la diferencia de densidad de carga en dos zonas del material.

En cuanto a las corrientes de conducción, al aplicar un campo eléctrico las partículas experimentan fuerzas,

$$F = qE$$

si el medio es homogéneo se cumple que la fuerza es proporcional a la velocidad,

$$v_a = \mu E$$

donde

v_a : velocidad de arrastre
μ : movilidad (parámetro del material)

Se observa que en medios isotrópicos y homogéneos (ILH) J y E están relacionadas según la relación constitutiva,

Relación constitutiva

$$J = \sigma E$$

donde σ es la conductividad del material

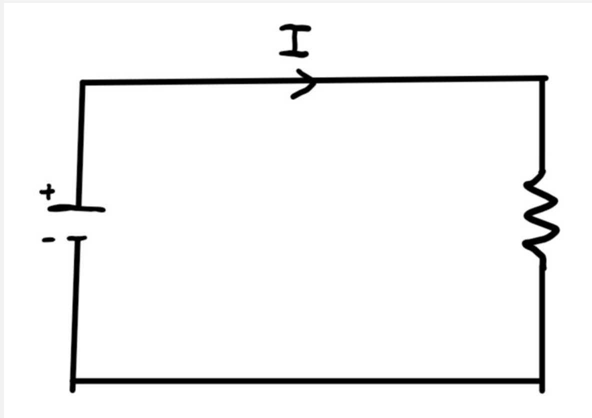
Para los materiales donde se cumple $J = \sigma E$ la condición de frontera para J_f,

Componente normal

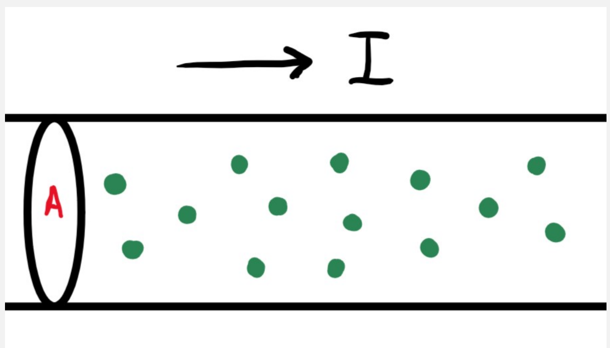
$$\hat{n} \cdot (\sigma_2 E_2 - \sigma_1 E_1) = 0$$

A partir de estas relaciones es de donde sale la **ley de Ohm**

Deducción ley de Ohm



Imaginemos que tenemos un circuito como el de la figura. Al aplicar una diferencia de potencial, habrá un campo eléctrico que hará que los electrones circulen por el circuito. Por lo tanto, tendremos una densidad de corriente, $\overrightarrow{J}$, y una intensidad de corriente, $\overrightarrow{I}$.



Fijémonos ahora en un trozo de hilo como vemos en la figura. Las partículas se moverán con una velocidad media que llamaremos $\overrightarrow{v}$. Podemos definir la intensidad como la variación de carga que atraviesa un la superficie transversal en un determinado tiempo, es decir,

$$I = \frac{\triangle Q}{\triangle t} \tag{1}$$

donde,

$$\triangle Q = neAv\triangle t$$

n: número de electrones por volumen
e: carga del electrón
A: área de la sección transversal
v: velocidad media de los electrones
$\triangle t$: tiempo transcurrido

Sustituyendo en la ecuación 1 obtenemos:

$$I = neAv$$

dividiendo esta expresión por A obtenemos la densidad de corriente J,

$$J = \frac{I}{A} = nev \tag{2}$$

$$I = \iint_A J da$$

buscando una expresión para v en la ecuación 2,

$$v = a\ t \tag{3}$$

Además, con la 2^a ley de Newton ($F = m_e a$) y la fuerza que actúa sobre los electrones debido al campo eléctrico ($F = eE$), tenemos que la aceleración es,

$$a = \frac{eE}{m_e}$$

sustituyendo esta aceleración en la ecuación 3,

$$v = \frac{eE}{m_e} t$$

sustituyendo esta velocidad en la ecuación 2,

$$J = \frac{ne^2 t}{m_e} E$$

definiendo la conductividad eléctrica del material como,

$$\sigma = \frac{ne^2 t}{m_e}$$

llegamos a la ley de Ohm microscópica,

$$J = \sigma E \tag{4}$$

Llegados a este punto, podemos decir que los materiales que obedecen la ecuación 4 son los que se denominan óhmicos, y los que no, no óhmicos. Un ejemplo de material no óhmico son los diodos semiconductores (hablaremos más adelante).

Sigamos desarrollando la ecuación 4 a partir de la relación entre potencial y campo eléctrico,

$$V = -\int E dl \tag{5}$$

sabiendo que la resistividad eléctrica es,

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

y sustituyendo la ecuación 4 en la ecuación 5,

$$V = -\int J \rho dl$$

sacando las constantes de la integral y resolviéndola,

$$V = -J \rho L$$


@postperronas
Una calificación no
me define, pero si
me hace llorar

sustituimos el valor de J por el de la ecuación[a] 2,

$$V = \frac{\rho L}{A} I \tag{6}$$

si definimos la resistencia como,

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

finalmente, sustituyendo en la ecuación 6, llegamos a la ley de Ohm,

$$V = I\ R$$

[a] Si nos damos cuenta, cambiamos el signo de la ecuación 2. Esto es debido al sentido que tienen $\overrightarrow{J}$ y $\overrightarrow{I}$. Los electrones circulan en el sentido contrario al que indica el campo eléctrico $\overrightarrow{E}$

TEMA 5: Magnetostática

Se tiene que un imán crea un campo magnético,

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{Q_m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

El campo magnético creado por una carga en movimiento es,

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{q\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u_r})}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu}{4\mu}\frac{qv\sin\theta}{r^2}$$

El sentido del campo creado lo da la regla de la mano derecha.

Como resumen general, podemos decir que una partícula por el hecho de tener carga, crea un campo eléctrico, y por el hecho de moverse, crea un campo magnético.

Campo eléctrico

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Campo magnético

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{q\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u_r})}{r^2}$$

Es fácil, darse cuenta de que $\overrightarrow{E}$ y $\overrightarrow{B}$

Si en lugar de tener cargas individuales tenemos corrientes a lo largo de un filamento,

Ley de Biot-Savart

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I(d\overrightarrow{l}\times\overrightarrow{u_r})}{r^2}$$

$d\overrightarrow{l}$ es un vector que va en la dirección en la que circula la corriente y $\overrightarrow{u_r}$ es un vector unitario hasta el punto donde se quiere calcular el campo magnético

<u>EJEMPLOS:</u>

- Hilo finito:

  $$\overrightarrow{B} = \frac{\mu I}{4\pi\rho}(\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1)\hat{\varphi}$$

- Espira circular (eje axial):

  $$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\sqrt{(a^2+z^2)^3}}\hat{z}$$

- Solenoide
  $B = \mu_0 \dfrac{N}{L} I$

- Plano infinito
  $\overrightarrow{B} = \pm\mu_0 K\hat{x}$

La ley de Gauss no es útil para obtener el campo magnético ya que, si nos imaginamos una superficie gaussiana, las líneas de campo magnético que entran son las misma que salen, por lo que,

$$\int_S \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{s} = 0$$

Es por esto por lo que para calcular el campo magnético tenemos la ley de Ampere,

Ley de Ampere (integral)

$$\int_C \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Combinando la relación entre la intensidad de corriente y la densidad de corriente y el teorema de Stokes, llegamos fácilmente a,

Ley de Ampere (diferencial)

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{J}$$

De igual forma que teníamos en el campo eléctrico condiciones de contorno, también las hay para el magnético,

Componentes tangenciales

$$B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 K \times \hat{n}$$

Gracias a la segunda ley de Maxwell ($\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$) obtenemos la componente normal,

Componentes normales

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

Como $\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$, sabemos que existe $\overrightarrow{A}$ tal que,

$$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

Donde $\overrightarrow{A}$ se llama potencial vector. A partir de la ley de Biot-Savart podemos obtener una expresión directa de $\overrightarrow{A}$,

$$\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\overrightarrow{l}}{r}$$

Para una partícula puntual,

$$\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\overrightarrow{v}}{r}$$

El potencial vector es continuo en las interfases,

$$\overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{A_2}$$

Al igual que en el campo eléctrico podíamos obtener el potencial eléctrico con la ecuación de Poisson, el potencial vector lo podemos obtener con la ecuación de Poisson,

$$\nabla \times B = \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = -\nabla^2 A = \mu_0 J$$

Entonces,

Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 A = -\mu_0 J$$

En realidad, tenemos que ir componente a componente,

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \qquad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \qquad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

Si no hay intensidad de corriente,

Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 A = 0$$

Terminemos haciendo un repaso de cómo podemos hallar $\overrightarrow{A}$,

Definición de $\overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{Id\overrightarrow{l}}{r}$$

Ecuación de Poisson o Laplace

$$\nabla^2 A = -\mu_0 J$$

$$\nabla^2 A = 0$$


Why do sexy people
(me) have to suffer
so much

Conociendo $\overrightarrow{B}$ (Por inspección)

$$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

EJEMPLO

Supongamos un campo magnético:

$$\overrightarrow{B} = B\hat{z}$$

Entonces tenemos que,

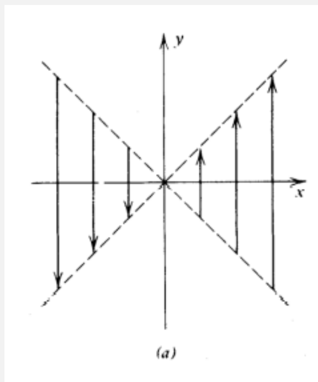
$$B\hat{z} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

Por lo que,

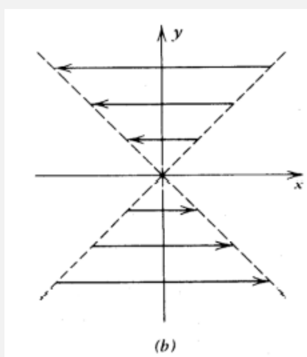
$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B$$

Se tiene que cumplir que A_x y A_y no dependa de z y que A_z solo dependa de z o que sea constante.Además, tenemos que $\nabla \cdot A = 0$. Entonces hay 3 opciones,

- $A_y = Bx$ y $A_x = 0$

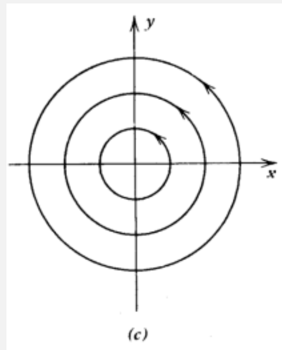


- $A_y = 0$ y $A_x = -By$



Conociendo $\overrightarrow{B}$ (Por inspección)

- $A_y = \frac{1}{2}Bx$ y $\frac{-1}{2}By$



Otra opción válida para un B uniforme,

$$A = \frac{1}{2}B \times r$$

Con el flujo de B

$$\int_S \overrightarrow{B} d\overrightarrow{a} = \int_S (\nabla \times A) d\overrightarrow{a} = \int_C \overrightarrow{A} d\overrightarrow{l}$$

Si es fácil resolver la integral que nos da el flujo

TEMA 6: Medios materiales magnéticos

De igual forma que podiamos calcular el potencial eléctrico como suma del término monopolar, dipolar y cuadripolar, para el potencial vector podemos hacer lo mismo,

$$A = A_M + A_D + A_Q$$

El **término monopolar** es nulo siempre ya que no existen monopolos magnéticos,

$$A_M = 0$$

El **término dipolar** es,

$$A_D = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \underbrace{\left[\frac{1}{2}\int_V r \times J dV\right]}_{m} \times \hat{r}$$

El momento dipolar es independiente del origen de coordenadas escogido.

El momento dipolar de una corriente filamental es,

$$m = \frac{1}{2} I \int_C r \times ds$$

Si la corriente filamental estás metida en un plano, entonces,

$$m = IS\hat{n}$$

Es perpendicular al plano que lo contiene.

MAGNETIZACIÓN, M: Momento dipolar magnético por unidad de volumen,

$$dm = MdV$$

En presencia de un B los m se orientan y aparece magnetización M.
En el tema de la polarización vimos que se podía calcular el potencial eléctrico a partir de la polarización, de igual forma si tenemos el vector magnetización, entonces,

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{(\nabla \times M)\, dV}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{M \times \hat{n} da}{R}$$

Donde,

$$J_m = \nabla \times M \qquad\qquad K_m = M \times \hat{n}$$

J_m : densidad corriente volumétrica de magnetización
K_m : densidad corriente superficial de magnetización

Es fácil ver que si M es constante, entonces, $J_m = 0$

Vemos ahora que aquí también diferenciamos entre densidad libre y de magnetización,

$$J_{total} = J_f + J_m$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de Maxwell tenemos que,

$$\nabla \times \left(\frac{B}{\mu_0} - M\right) = J_f$$


So you like girls?

Por lo que, al igual que con el campo eléctrico definiamos D, ahora definimos H,

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

La ley de Ampere para H sería,

$$\int_C H \cdot dl = \int_S J_f \cdot da = I_{f,enc}$$

CONDICIONES DE CONTORNO H

Componentes normales

$$\hat{n} \cdot (H_2 - H_1) = -\hat{n} \cdot (M_2 - M_1); \qquad \nabla \cdot H = -\nabla \cdot M$$

Componentes tangenciales

$$\nabla \times H = J_f; \qquad H_{2t} - H_{1t} = K_f \times \hat{n}$$

Ante la presencia de un B, un material se magnetiza (equivalente más o menos de P). Las **relaciones constitutivas** dependerán del tipo de material.

- Imanes permanentes
- Materiales no lineales
- Materiales lineales
  - Diamagnetismo: $\chi_m < 0 \rightarrow M$ sentido opuesto a H
  - Paramagnetismo: $\chi_m > 0 \rightarrow M$ mismo sentido que H

EJEMPLOS:

- Ferromagnéticos
- Diamagnéticos
- Paramagnéticos

Caso concreto para cuando el material es ILH (en todos los problemas se trabaja con estos materiales). En este caso la relación constitutiva es,

$$B = \mu_0(1 + \chi_m)H = \kappa_m \mu_0 H = \mu H$$

Relación constitutiva

$$B = \mu H$$

Material Diamagnético

$$0 < \kappa_m < 1 \rightarrow \mu < \mu_0$$

Material Paramagnético

$$1 < \kappa_m < 2 \rightarrow \mu > \mu_0$$

$$M = \frac{\chi_m}{\kappa_m \mu_0} B = \frac{\chi_m}{(1 + \chi_m)\mu_0} B$$

$$\nabla \cdot B = 0; \qquad \nabla \cdot H = 0; \qquad \nabla \cdot M = 0;$$

Una relación sencilla entre J y J_f y entre J_m y J_f es,

$$J_m = \chi_m = J_f = (\kappa_m - 1)J_f \qquad J = (1 + \chi_m)J_f = \kappa_m J_f$$

CONDICIONES DE CONTORNO

Componentes normales B

$$\hat{n} \cdot (B_2 - B_1) = 0$$

Componentes tangenciales B

$$\hat{n} \times \left(\frac{B_2}{\mu_2} - \frac{B_1}{\mu_1}\right) = K_f$$

Componentes normales H

$$\hat{n} \cdot (\mu_2 H_2 - \mu_1 H_1) = 0$$

Componentes tangenciales H

$$\hat{n} \times (H_2 - H_1) = K_f$$

MATERIALES FERROMAGNÉTICOS

Relación entre M y H no lineal → EXPERIMENTALMENTE

La relación entre B y H muchas veces depende de la historia del material: **CICLO DE HISTÉRESIS**

TEMA 7: Inducción magnética

Se observa que un campo magnético variable induce una corriente

LEY DE FARADAY-HENRY

La corriente inducida es mayor cuando mayor es la rapidez con la que se acerca el imán a la bobina.

Fuerza electromotriz

$$\varepsilon_{inducida} = -\frac{d\phi}{dt}$$

El campo eléctrico que es inducido es no conservativo.

$$\int_C E_{ind} \cdot dl = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S B \cdot da$$

El signo menos de la expresión es empírico. El sentido de la corriente inducida es tal que el campo magnético que crea se opone a la causa que lo genera.
Como,

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(B \cdot S \cdot \cos\theta)}{dt}$$

FORMAS DE INDUCIR UNA FUERZA ELECTROMOTRIZ

- Medio estacionario: campo magnético variable con el tiempo

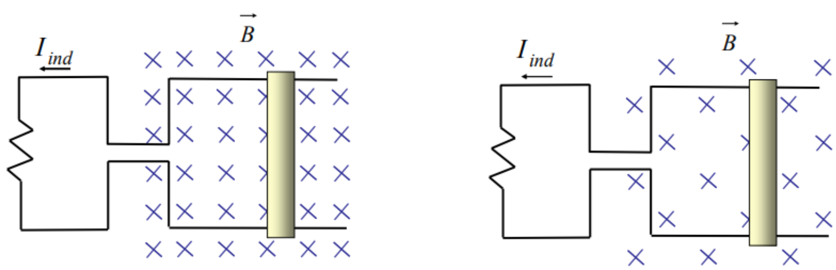


Figura 1: Inducción de corriente debido a campo variable

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(BS\cos\theta)}{dt} = -\frac{dB}{dt}S\cos\theta$$

- Medio móvil: variando el área o variando el ángulo que forman el campo magnético y la superficie.

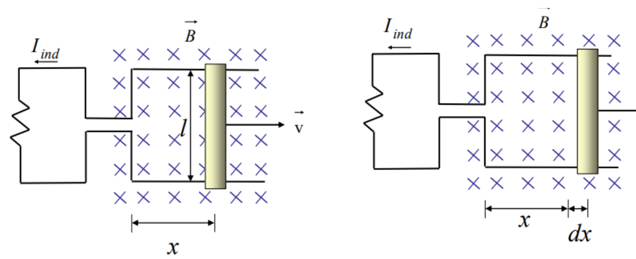


Figura 2: Inducción de corriente por cambio en el área

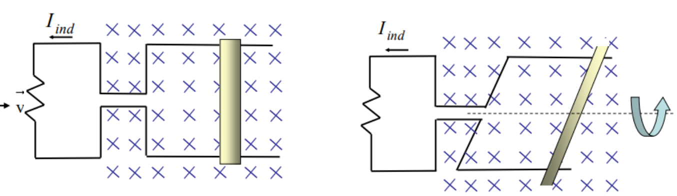


Figura 3: Inducción de corriente por cambio en el ángulo

Para el caso en el que varía el área,

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(BS\cos\theta)}{dt} = -B\frac{dS}{dt}\cos\theta = -B\frac{d[l(x+vt)]}{dt}\cos\theta = -Blv\cos\theta$$

Para el caso en el que varía el ángulo entre B y S,

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(BS\cos\theta)}{dt} = -BS\frac{d(\cos\omega t)}{dt} = BS\omega\sin\omega t$$

La corriente inducida en todos los casos sería,

$$I_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R}$$

MEDIOS ESTACIONARIOS

La ley de Faraday- Lenz sería,

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Por lo tanto, **el campo eléctrico** ,por lo general, **no es conservativo**. Solo lo es cuando el campo magnético no varíe con el tiempo.

$$\nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

Se tiene que,

Condición de contorno tangente

$$E_{2t} = E_{1t}$$

MEDIOS MÓVILES

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot da + \underbrace{\int_C (B \times v) \cdot ds}_{\text{movimiento del circuito}}$$

$$\nabla \times (E' - v \times B) = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Donde,

$$E = E' - v \times B$$

Es el campo eléctrico medido en el laboratorio.

INDUCTANCIA Y AUTOINDUCTANCIA

Una corriente de intensidad variable crea un campo magnético variable que al mismo tiempo crea una fuerza electromotriz que se opone a la variación.

Sabemos que,

$$\phi_m = NBS \cdot \cos\theta$$

Además, el flujo es directamente proporcional a la intensidad de corriente que lo genera

$$\phi_m = LI$$

Donde a la constante de proporcionalidad la llamaremos autoinducción.

En el caso del solenoide, sabiendo que,

$$B = \mu \frac{N}{l} I$$

Entonces,

$$L = \frac{\mu N^2 S}{l}$$

Por otro lado, cuando acercamos dos circuitos, el flujo que atraviesa a cada uno de ellos dependerá de su propia corriente más de las corrientes de los demás circuitos.

Por ejemplo, si tenemos dos circuitos, el flujo de uno de ellos será,

$$\phi_{m1} = L_1 I_1 + M_{21} I_2$$

Donde $L_1 I_1$ representa el flujo causado por la corriente 1 sobre sí misma (autoinducción) y $M_{21} I_2$ representa el flujo inducido sobre 1 a causa de la corriente 2 (Inducción mutua)

Relacionando L y M con la fuerza electromotriz,

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon = -M \frac{dI}{dt}$$

ENERGÍA MAGNÉTICA

$$W_M = \int_0^{\phi} I d\phi = L \int_0^{I} I dI = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \phi I = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L}$$

im proud of you!

you're doing your best, keep going!