PROBLEMA 4.1 Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

1. $f_B : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ dada por $f_B(A) = AB$ con $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. $g_B : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $g_B(A) = A + B$ con $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ fija.

3. $h_B : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $h_B(A) = AB - BA$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $S : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ dada por $S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$ donde $\mathcal{S}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A = A^t\}$.

5. $R : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dada por $R(A) = AA^t$.

6. $f : \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ dada por $f(p(x)) = p(x+1)$.

7. $g : \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ dada por $g(p(x)) = p(x) + 1$.

f lineal $\Leftrightarrow \alpha f(\bar{v}) = f(\alpha \bar{v})$ y $f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v})$

1. sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$

$$f(\alpha A) = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 - \alpha a_2 \\ \alpha a_3 - \alpha a_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ a_3 - a_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha f(A)$$

$$f(A+C) = \begin{pmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 \\ a_3+c_3 & a_4+c_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+c_1-a_2-c_2 \\ a_3+c_3-a_4-c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-a_2 \\ a_3-a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1+c_2 \\ c_3-c_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f(A) + f(C) \Rightarrow f \text{ lineal.}$$

$$f(\alpha p(x)) = \alpha p(x+1) = \alpha f(p(x)) \qquad f(p(x)+q(x)) = p(x+1) + q(x+1) = f(p(x)) + f(q(x))$$

PROBLEMA 4.2 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_3)$. Halla la imagen mediante f de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, indicando en cada caso la dimensión del subespacio y la de su imagen:

1. $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

2. $V_2 = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

3. $V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) = t(1, -1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

$$V_1 = \{(x_1 x_2 x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \{(x_1 x_2 x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -x_2 - x_3\} = Env(\{(-1,1,0), (-1,0,1)\})$$

$$V_2 = \{(x_1 x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = Env(\{(1,0,0), (0,1,0)\})$$

$$V_3 = \{(x_1 x_2 x_3) = (t, -t, t) \in \mathbb{R}^3\} = Env(\{(1,-1,1)\})$$

$$Im f_1 = Env(\{f(-1,1,0), f(-1,0,1)\}) = Env(\{(0,0,-1), (-1,1,0)\}) \to Dim(Im f_1) = 2 = Dim(V_1)$$

$$Im f_2 = Env(\{f(1,0,0), f(0,1,0)\}) = Env(\{(1,0,1), (1,0,0)\}) \to Dim(Im f_2) = 2 = Dim(V_2)$$

$$Im f_3 = Env(\{f(1,-1,1)\}) = Env(\{(0,1,2)\}) \to Dim(Im f_3) = 1 = Dim(V_3)$$

PROBLEMA 4.3 Encuentra las matrices de las siguientes aplicaciones lineales con respecto a las bases canónicas de los espacios vectoriales dados:

1. $f_B : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ dada por $f_B(A) = AB$ con $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. $h_B : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $h_B(A) = AB - BA$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. f_B y h_B del Problema 4.1.

2. $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$.

3. $f : \mathbb{C}_3[x] \to \mathbb{C}_3[x]$ dada por $f(p(x)) = p(x+1)$.

1.

$$f(I) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 1 \quad \beta = -1 \Rightarrow Mf_{\mathcal{M}_{2x2}}^{\mathcal{M}_{2x1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = B$$

$$h(I) = h\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} (2,1) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \\ (0,2) = w(1,0) + \varphi(0,1) \end{matrix} \Rightarrow \alpha = 2 \quad \beta = 1 \quad w = 0 \quad \varphi = 2 \Rightarrow Mh_{\mathcal{M}_{2x2}}^{\mathcal{M}_{2x2}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

2. $f\, \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4 : f(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$

$$\left.\begin{aligned} f(x^2+x+1) &= (1,3,7,13) = \alpha_1(1,0,0,0) + \alpha_2(0,1,0,0) + \alpha_3(0,0,1,0) + \alpha_4(0,0,0,1) \\ f(x+1) &= (1,2,3,4) = \beta_1(1,0,0,0) + \beta_2(0,1,0,0) + \beta_3(0,0,1,0) + \beta_4(0,0,0,1) \\ f(1) &= (1,1,1,1) = \varphi_1(1,0,0,0) + \varphi_2(0,1,0,0) + \varphi_3(0,0,1,0) + \varphi_4(0,0,0,1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow Mf_{\mathbb{R}_2[x]}^{\mathbb{R}^4} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \varphi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \varphi_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \varphi_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \\ 13 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $f : \mathbb{C}_3[x] \to \mathbb{C}_3[x] : f(p(x)) = p(x+1)$

$$\left.\begin{aligned} f(x^3+x^2+x+1) &= x^3+x^2+x+2 = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 \\ f(x^2+x+1) &= x^2+x+2 = \beta_1 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x + \beta_4 \\ f(x+1) &= x+2 = \varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^2 + \varphi_3 x + \varphi_4 \\ f(1) &= 2 = w_1 x^3 + w_2 x^2 + w_3 x + w_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Mf_{\mathbb{C}_3[x]}^{\mathbb{C}_3[x]} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \varphi_1 & w_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \varphi_2 & w_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \varphi_3 & w_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \varphi_4 & w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 4.4 Respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$, halla las matrices de las siguientes aplicaciones lineales:

1. Simetría con respecto a la recta $x = 0$, $y = 0$.

2. Simetría con respecto a la recta $x = y$, $z = 0$.

3. Proyección sobre el plano $x - y + z = 0$.

4. Simetría con respecto a la recta $(x, y, z) = t\,(1, 1, 1)$.

PROBLEMA 4.5 Sabiendo que la aplicación f lleva los vectores

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 0)\,, \qquad \vec{u}_2 = (1, 1, 0)\,, \qquad \vec{u}_3 = (1, 1, 1)$$

de $\mathbb{R}^3$ en los vectores

$$\vec{w}_1 = (2, 1, 2)\,, \qquad \vec{w}_2 = (3, 1, 2)\,, \qquad \vec{w}_3 = (6, 2, 3)$$

respectivamente, encuentra la matriz de f en las siguientes bases:

1. La base canónica de $\mathbb{R}^3$.

2. La base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

$$f(1,0,0) = (2,1,2)$$
$$f(1,1,0) = f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1) = (3,1,2) = (2,1,2) + f(0,1,0) \Rightarrow f(0,1,0) = (1,0,0)$$
$$f(1,1,1) = f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1) = (6,2,3) = (2,1,2) + (1,0,0) + f(0,0,1) \Rightarrow f(0,0,1) = (3,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} (2,1,2) = \alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (010) + \alpha_3 (001) \\ (100) = \beta_1 (100) + \beta_2 (010) + \beta_3 (001) \\ (311) = \varphi_1 (100) + \varphi_2 (010) + \varphi_3 (001) \end{array}\right\} \Rightarrow M^{M_{2\times2}}_{N_{2\times2}} f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \varphi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \varphi_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (2,1,2) = \alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (110) + \alpha_3 (111) \\ (100) = \beta_1 (100) + \beta_2 (110) + \beta_3 (111) \\ (311) = \varphi_1 (100) + \varphi_2 (110) + \varphi_3 (111) \end{array}\right\} \Rightarrow M^{M_{2\times2}}_{N_{2\times2}} f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \varphi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \varphi_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 4.6 Encuentra las ecuaciones de las siguientes aplicaciones lineales realizando cambios de base adecuados:

1. Simetría con respecto a la recta $(x, y, z) = t\,(1, 1, 1)$.

2. Proyección sobre el plano $x - y + z = 0$.

3. Giro de 90^o con respecto a la recta $x + y = 0$, $z = 0$.

PROBLEMA 4.7 Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que $f(1) = x^2 + 1$, $f(x) = -x$, $f(x^2) = x^3$ y $f(x^3) = x^2 + x - 1$. Calcula $f(x^2 + 2x + 1)$ y $f\left((x-2)^2 + x^3\right)$. Encuentra la matriz de f con respecto a la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = x^2+1 & & = \alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \\ f(x) = -x & f(1+x) = f(1) + f(x) = x^2 - x + 1 & = \beta_1 1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 \\ f(x^2) = x^3 & f(1+x+x^2) = f(x^2) + f(1+x) = x^3 + x^2 - x + 1 & = \varphi_1 1 + \varphi_2 x + \varphi_3 x^2 + \varphi_4 x^3 \\ f(x^3) = x^2+x-1 & f(1+x+x^2+x^3) = f(x^3) + f(1+x+x^2) = x^3 + 2x^2 & = \omega_1 1 + \omega_2 x + \omega_3 x^2 + \omega_4 x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow M^{\mathbb{R}_3[x]}_{\mathbb{R}_3[x]} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x^2+2x+1) = f(x^2) + 2f(x) + f(1) = x^3 + x^2 - 2x + 1$$
$$f(x^3+x^2-4x+4) = f(x^3) + f(x^2) - 4f(x) + 4f(1) = x^3 + 5x^2 + 5x + 3$$

PROBLEMA 4.8 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 2z, x + 2y, -y + z).$$

1. Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.
2. Calcular el núcleo y la imagen de f y una base para cada uno de estos subespacios.
3. Hallar la matriz de f respecto de las bases

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \text{ y } \mathcal{B}' = \{(-1,2,0),(0,1,0),(1,-1,1)\}$$

en los espacios inicial y final, respectivamente.

4. Si $(2,3,0)$ son las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B}$, calcular las coordenadas de $f(\vec{v})$ en la base canónica.

$$\left.\begin{array}{l} f(100) = (-1,1,0) = \alpha_1(100)+\alpha_2(010)+\alpha_3(001) \\ f(010) = (0,2,-1) = \beta_1(100)+\beta_2(010)+\beta_3(001) \\ f(001) = (-2,0,1) = \varphi_1(100)+\varphi_2(010)+\varphi_3(001) \end{array}\right\} \Rightarrow M_f{}^{\mathbb{R}^3}_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2z, x = -2y, y = z\} = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y\} = \operatorname{Env}(\{(-2,1,0)\})$

Como $\operatorname{Dim}(\mathbb{R}^3) = \operatorname{Dim}(\operatorname{Im} f) + \operatorname{Dim}(\operatorname{Ker} f)$ y $\operatorname{Dim}(\operatorname{Ker} f) = 1 \Rightarrow \operatorname{Dim}(\operatorname{Im} f) = 2$

$\{(-1,1,0),(0,2,-1),(-2,0,1)\} \xrightarrow{¿\text{son LI?}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2+2 = 0 \Rightarrow$ No son LI

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Env}(\{(-1,1,0),(0,2,-1)\})$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & can & \longrightarrow & can & \longrightarrow & \mathcal{B}' \end{array}$$

Hay que calcular $M^{can}_{\mathcal{B}}$ y $M^{\mathcal{B}'}_{can}$ ya que $M_f{}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B}'}_{can} M_f{}^{can}_{can} M^{can}_{\mathcal{B}}$

$$\left.\begin{array}{l} (1,1,0) = \alpha_1(100)+\alpha_2(010)+\alpha_3(001) \\ (1,0,0) = \beta_1(100)+\beta_2(010)+\beta_3(001) \\ (0,1,1) = \varphi_1(100)+\varphi_2(010)+\varphi_3(001) \end{array}\right\} \Rightarrow M^{can}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftarrow -F_1}{\overset{F_2 \leftarrow F_2 + 2F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftarrow F_2 - F_3}{\overset{F_1 \leftarrow F_1 + F_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} (-1,2,0) = \alpha_1(100)+\alpha_2(010)+\alpha_3(001) \\ (0,1,0) = \beta_1(100)+\beta_2(010)+\beta_3(001) \\ (1,-1,1) = \varphi_1(100)+\varphi_2(010)+\varphi_3(001) \end{array}\right\} \Rightarrow M^{can}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{\mathcal{B}'}_{can} = M^{can\,-1}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_f{}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Si $(2,3,0)$ son las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B}$, calcular las coordenadas de $f(\vec{v})$ en la base canónica.

$\mathcal{B} = \{(110),(100),(011)\}$

$2(110) + 3(100) + 0(011) = (5,2,0)$

$f(5,2,0) = (-5,9,-2)$

PROBLEMA 4.9 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ -1 & -11 & -7 \end{pmatrix}$$

y las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,-1),(2,1,0),(0,1,1)\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \{(-2,1),(1,-1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal que tiene como matriz asociada respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ a la matriz A. Se pide:

1. Halla la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
2. Da una expresión general para f.
3. Calcula el núcleo y la imagen de f y una base para cada uno de estos subespacios.
4. Clasifica la aplicación f.

$$M_f{}^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 \\ -1 & -11 & -7 \end{pmatrix} \qquad M_f{}^{\mathbb{R}^2}_{\mathbb{R}_3} = M^{\mathbb{R}^2}_{\mathcal{B}_2} M_f{}^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} M^{\mathcal{B}_1}_{\mathbb{R}_3}$$

$$\left.\begin{array}{l} (-2\ 1) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) \\ (1\ -1) = \beta_1(1,0) + \beta_2(0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow M^{\mathbb{R}_2}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1\,0\,-1) = \alpha_1(100) + \alpha_2(010) + \alpha_3(001) \\ (2\,1\,0) = \beta_1(100) + \beta_2(010) + \beta_3(001) \\ (0\,1\,1) = \varphi_1(100) + \varphi_2(010) + \varphi_3(001) \end{array}\right\} \Rightarrow M^{\mathbb{R}^3}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to M^{\mathcal{B}_1}_{\mathbb{R}^3} = M^{\mathbb{R}^3\,-1}_{\mathcal{B}_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \leftarrow F_2 - F_3 \\ F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2}}{\overset{F_3 \leftarrow F_3 + F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow M^{\mathcal{B}_1}_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_f{}^{\mathbb{R}^2}_{\mathbb{R}_3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 \\ -1 & -11 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 3 & -18 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -17 & 3 & -18 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-17x+3y-18z, 7x+3y+8z)$$

$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{17x+18z}{3}, z = \frac{-7x-3y}{8}\} = \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{5}{39}x\} = \operatorname{Env}(\{(39,5,0)\})$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Env}(\{(-17,7),(3,3)\})$

PROBLEMA 4.10 Considérese $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ consistente en la composición de un giro de 90^o alrededor del eje OX con una simetría respecto del plano $x = 0$.

1. Hallar la matriz de f referida a la base canónica $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Idem respecto de la base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_1} + \vec{e_3}\}$.

PROBLEMA 4.11 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que

$$f(3,-5) = (1,1,1,1) \qquad f(-1,2) = (2,1,0,-2)$$

1. Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.

2. Hallar la expresión general de la aplicación f.

3. Determinar el subespacio imagen de la aplicación lineal f y su dimensión.

4. Clasificar la aplicación f.

$f(3,-5) = (1,1,1,1)$
$f(-1,2) = (2,1,0,-2)$