Mecánica Newtoniana y Relatividad
Curso 2022 - 2023

Práctica de ordenador I

Estudio del movimiento en rotación relativa: el tiro parabólico

Rocío Ponsoda Orgilés
Grupo 3

Índice

1. Resumen y objetivos

El objetivo de esta práctica es el estudio del tiro parabólico puro respecto a dos sistemas de referencia distintos: uno fijo y otro que rota con la Tierra. Para hacerlo, nos ayudaremos de modelos que nos ayuden en la reslución de cálculos, así como de programas en lenguaje Python.

2. Marco teórico

Vamos a considerar como movimiento a estudiar el de un tiro parabólico puro. Podríamos definir dicho tiro como una aproximación al movimiento de un objeto que cruza la atmósfera sin ningún sistema de propulsión o sustentación.

Este es uno de los problemas más sencillos a estudiar, pero se ve complicado cuando consideramos este tiro a grandes distancias, ya que nos vemos en la necesidad de considerar el movimiento de rotación de la Tierra.

Lo primero que vamos a hacer va a ser considerar dos sistemas de referencia: uno que está fijo al cuerpo - y que denotamos con '- y otro que rota con la Tierra. Ambos sistemas compartirán origen de coordenadas. Si calculamos la segunda derivada de la posición $\vec{r}$ veremos que para el sistema ligado a la Tierra el cuerpo experimenta una aceleración donde encontramos varias componentes:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{r} \times \vec{\alpha} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2\vec{v} \times \vec{\omega} \tag{1}$$

Donde $\vec{\alpha}$ y $\vec{\omega} = (\omega_x, 0, \omega_y) = \omega(-cos(\phi), 0, sin(\phi)$ son, respectivamente, la aceleración de rotación de la Tierra y su velocidad angular. En esta expresión encontramos los siguientes términos:

- Fuerza centrípeta: $\vec{a_{ce}} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}$, componente de la fuerza que actúa sobre un objeto en movimiento que pasa por una trayectoria curvilínea y que está dirigida hacia el centro de curvatura.
- Fuerza de Coriolis: $2\vec{a_{co}}\vec{v} \times \vec{\omega}$, generado por el hecho de que el cuerpo se mueve en un sistema de referencia en rotación.

En el caso de la rotación terrestre, tenemos que $\vec{\alpha} = 0\frac{m}{s^2}$ y que $\vec{a'} = \vec{g}$. Así, la ecuación (1) queda como:

$$\vec{a} = \vec{g} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2\vec{v} \times \vec{\omega} \tag{2}$$

Ahora vamos a centrarnos en los valores numéricos de los términos centrípeto y de Coriolis. En lo que respecta al primero, solo dependerá de la latitud ϕ en la cual se encuentra el origen, y su módulo será:

$$|(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}| = 0{,}3373 \cdot cos(\phi)$$

Por otra parte, tenemos que el término de Coriolis viene dado por el siguiente producto vectorial:

$$\vec{v} \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & 0 & \omega_y \end{vmatrix} = 2v_y\omega_z\vec{i} + 2(v_z\omega_x - v_x\omega_z)\vec{j} - 2v_y\omega_x\vec{k} \tag{3}$$

Con estas ecuaciones dadas, ya podemos pasar a la resolución de las cuestiones planteadas respecto al movimiento. Solo nos falta recalcar los datos usados para los cálculos: la masa del proyectil será $m = 1kg$, la aceleración $\vec{g} = 9{,}8\frac{m}{s^2}$, la velocidad angular $|\vec{\omega}| = 7{,}272e - 05\frac{rad}{s}$ y el radio terrestre $R_T = 6378000m$.

3. Cuestiones

Las preguntas elaboradas en la práctica son las siguientes:

1. En el programa, la aceleración se ha modificado con dos términos, fuerza centrípeta y fuerza de Coriolis. ¿Puedes indicar cuál de ellas es más importante? (Prueba a anular una u otra y ver cómo sería el movimiento.)

2. En el primer programa intenta modificar los ángulos de lanzamiento para que el tiro caiga lo más cerca posible de la posición predicha por el tiro parabólico puro.

3. En el segundo programa vemos cómo la dirección en la que disparemos afecta al el tiro. Intenta razonar cuál es el origen de esta diferencia.

4. Prueba a modificar la latitud y analiza cómo afecta. Si nos desplazamos al hemisferio Sur (latitudes negativas), ¿se observa algún cambio?

3.1. Cuestión 1

Para poder apreciar mejor las diferencias en el tiro cuando variamos los valores de la aceleración, nos hacemos valer de un programa en Pyhton donde comparar los casos donde anulemos una de ambas aceleraciones. Los resultados obtenidos son los siguientes:

	Valor de la aceleración ($\frac{m}{s^2}$)		Tiro sin correcciones de latitud	
	Coriolis	Centrípeta	Tiempo final (s)	Posición final (m)
Caso base	0.001	0.034	23854	x_f= -43404.120 y_f= -149.291 z_f= -0.095
Caso 1	0	0.034	23854	x_f= -43404.120 y_f= -149.291 z_f= -0.095
Caso 2	0.001	0	23772	x_f= -43254.902 y_f= -148.637 z_f= -0.172

	Tiro con correcciones de latitud		Error en el tiro (m)
	Tiempo final (s)	Posición final (m)	
Caso base	23854	x_f= -43302.052 y_f= 5.331e-12 z_f= -0.450	2.243
Caso 1	23809	x_f= -43302.049 y_f= 5.303e-12 z_f= -0.450	43.696
Caso 2	23809	x_f= -43302.050 y_f= 5.303e-12 z_f= -0.450	85.950

Cuadro 1: Comparación de valores según la aceleración de Coriolis y centrípeta

Gracias a esta tabla podemos ver de forma más aproximada los valores de posición, tiempo y velocidad en cada uno de los casos.

Con todos estos datos recopilados, y en especial fijándonos en los datos proporcionados en la tabla, podemos ver que los valores que se ajustan con mayor precisión a los del tiro puro son aquellos donde hemos considerado nula la aceleración de Coriolis. Por tanto, es esta la que más influye en el lanzamiento considerado, ya que es la que más lo desvía.

Esto queda ilustrado en el cálculo del error del tiro, donde podemos ver un valor sustancialmente menor en el caso 2 - que es el caso mencionado - y donde podemos ver un error de 43,696m frente a los 85,950m del caso 3.

3.2. Cuestión 2

En este apartado se nos pide modificar los ángulos del lanzamiento de forma que el tiro se ajuste a lo predicho por el tiro parabólico puro.

Tras cambiar los ángulos de latitud y alzada del tiro a valores diferentes, nos encontramos con que aquellos que nos dan el movimiento más aproximado al tiro puro son los siguientes:

	Latitud	Alzada	Plano	Error (m)
Radianes	0.698	0.454	3.142	9.264
Grados	40	26	180	

Cuadro 2: Comparación de valores según la aceleración de Coriolis y centrípeta

Con estos valores, obtenemos un movimiento que sigue una trayectoria cercana a la del tiro puro. Podemos ver un error de 43,847m frente al error que encontramos en otros casos y que puede llegar incluso a superar los 300m.

Esto queda explicado porque, para estos ángulos indicados, el impacto que tienen la fuerza de Coriolis y la fuerza centrípeta se contrarrestan, de forma que se ajusta más a una trayectoria pura.

3.3. Cuestión 3

Ahora estudiaremos cómo la dirección del disparo afecta al tiro. Para ello, se modifica el valor del ángulo del plano y obtenemos esta gráfica que nos relaciona el error del tiro con dicho valor:

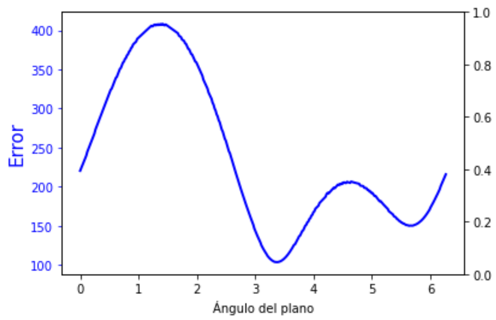


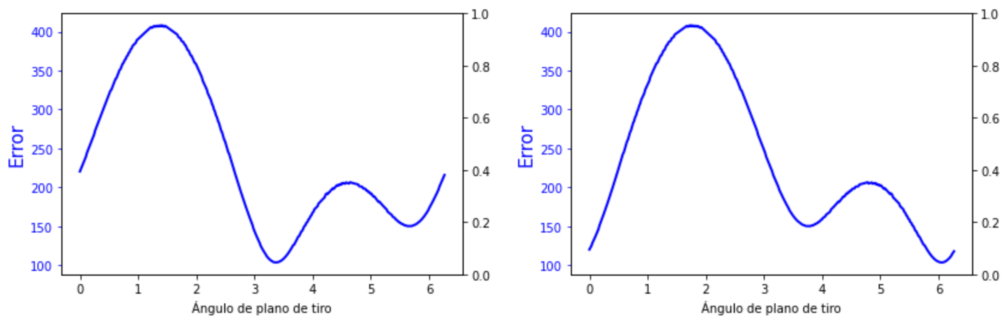
Figura 1: Relación del ángulo del plano con el error

Gracias a esta gráfica, podemos ver que tenemos el valores mínimo de error aproximadamente en el valor de ángulo del plano $\alpha = \pi rad$. Este valor se ajusta con la dirección de tiro este, lo cual implica que la fuerza de Coriolis sea mínima y por ello tengamos un valor de error pequeño.

3.4. Cuestión 4

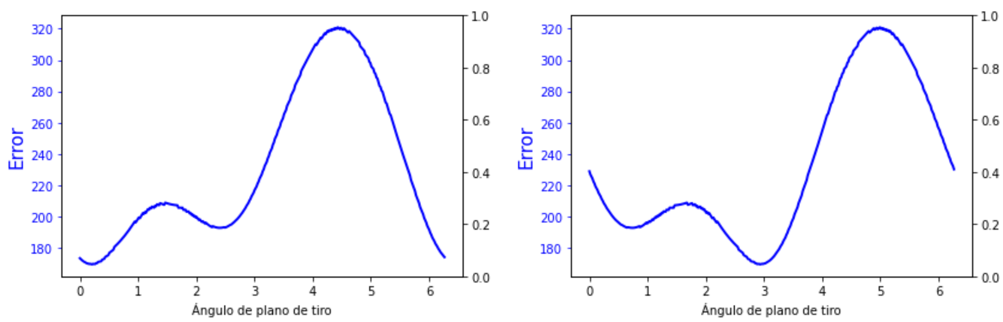
Por último, se nos pide analizar qué ocurre con este tiro cuando modificamos el ángulo de latitud y cuando este toma valores negativos. Para ello, vamos a tomar cuatro valores distintos de dicho ángulo y vamos a comparar las gráficas - análogas a las del apartado anterior - que relacionan dicho valor con el error cometido.

En concreto, vamos a graficar el movimiento cuando tenemos una latitud de $\alpha_1 = 40°$, $\alpha_2 = 120°$ y sus correspondientes $-\alpha_1$ y $-\alpha_2$. En cuanto a la alzada, tendremos que será constante e igual a 30°.



(a) Ángulo α_1 (b) Ángulo $-\alpha_1$

Figura 2: Comparación del error con ángulo de latitud $\pm\alpha_1$



(a) Ángulo α_2 (b) Ángulo $-\alpha_2$

Figura 3: Comparación del error con ángulo de latitud $\pm\alpha_2$

Los valores mínimos cambian para α_1 y α_2 debido a que son ángulos para los cuales el seno y el coseno tienen diferente signo - en el primer caso, ambos son positivos; y en el segundo el seno permanece positivo pero el coseno, negativo. Sabemos por tanto que esta diferencia se tendrá para todos los ángulos que correspondan a cuadrantes diferentes de la circunferencia goniométrica.

Así, la primera gráfica vemos cómo el mínimo lo tenemos para π, y en la segunda tenemos dos mínimos que corresponden aproximadamente a 0 y a 2π. Estos son los valores para los cuales el seno se anula y el coseno toma valores ±1.

Para el estudio de latitudes negativas, vamos a fijarnos solamente en el segundo caso. Vemos claramente que en el valor positivo del ángulo el mínimo lo tenemos en π. En cambio, al considerar su valor negativo los mínimos globales los tenemos en los extremos, y alrededor de π nos ha quedado un mínimo relativo.

Esto nos indica que cuando el tiro se realiza latitudes positivas, el error mínimo lo tenemos al disparar de norte a sur; y cuando lo iniciamos en latitudes negativas, su mínimo está al lanzarlo de sur a norte.

4. Anexo

Los códigos usados para modelar este lanzamiento y obtener los datos y gráficas que nos han ayudado a resolver las cuestiones presentadas son los siguientes:

- Código 1 - resolución de las cuestiones 1 y 2
- Código 2 - resolución de las cuestiones 3 y 4