Tema 6: Solución General de las Ec. Maxwell

Ondas esféricas asociadas a una carga puntual en el origen. Potenciales retardados

Empleando el gauge de Lorentz y la ecuación de ondas que obtenemos de este, un cambio de variable y le damos solución obtenemos:

El potencial para una carga puntual en el origen será: $\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(t-\frac{r}{c})}{r}$

Si la carga está en el punto $\vec{r} = \vec{r}_i$: $$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_i|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}}$$

El potencial ϕ es un potencial retardado pues su valor en el instante t viene dado por el valor de la carga en un instante anterior t':

$$\boxed{t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_i|}{c}} \longrightarrow \text{Tiempo retardado}$$

Expresión general para los potenciales retardados

El potencial total creado por una distribución de carga será:

$$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3x'}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3x'}$$

Los potenciales están evaluados en el tiempo t y las fuentes de campo lo están en un tiempo anterior $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$. El retardo $|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$ es el tiempo que tarda en viajar la información.

Los potenciales ϕ, $\vec{A}$ en el punto P de vector de posición $\vec{r}$ dependen del valor de las densidades de carga y corriente, respectivamente, en un instante anterior $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$.

Esto está de acuerdo con el principio de causalidad y es consecuencia de que las señales no pueden superar la velocidad c.

Comparación con el caso estático: resultados con validez general y parcial

Sin validez general (válido en el caso estático)	Válido siempre
$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\vec{r}$ (Coulomb)	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ (Lorentz)
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$	$* \ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Gauss)
$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$	$* \ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (Faraday)
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}d^3x'$	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$
$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$ (Ley de Ampère)	$* \ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}d^3x'$	$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$
	$* \ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

(*) Ecuaciones de Maxwell

Potenciales

$\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0$ (Poisson)	$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$ con $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (gauge de Coulomb o transversa)	$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = \mu_0\vec{J}$ i.e. $\Box A^\mu = \mu_0 J^\mu$ con $\partial_\mu A^\mu = 0$ (gauge de Lorenz)
$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}d^3r'$	$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}{c}\right)}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}d^3r'$
$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}d^3r'$	$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}{c}\right)}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}d^3r'$

Potenciales para una carga móvil: Solución de Lienard-Wiechert

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

$R \equiv |\vec{R}|$

Consideremos una partícula que se mueve con velocidad $\vec{v}$:

En el sistema en reposo de la partícula: $\boxed{A^{\mu}_{(S')} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} \dfrac{u^{\mu}_{(S')}}{(R_{\nu})_{(S')} u^{\nu}_{(S')}}}$

donde $u^{\mu}_{(S')} = (c, \vec{0})$

$(R_{\nu} u^{\nu})_{(S')} = c^2(t-t') = cR$

Como A^{μ} es un tetravector, tendrá la misma expresión en cualquier sistema de referencia:

$$\boxed{A^{\mu} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{q u^{\mu}}{R_{\nu} u^{\nu}}} \longrightarrow \text{Nos falta calcular } R_{\nu}u^{\mu} \text{ en cualquier sistema de referencia.}$$

Los potenciales retardados quedan:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\left[R - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c}\right]_{ret}}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{\left[R - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c}\right]_{ret}}$$

donde

$t' = t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$

$\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}\,'(t')$

$ret \equiv$ todo en $t' = t - \dfrac{R(t')}{c}$

Partícula que se mueve con $\vec{v}(v,0,0)$ según OX

Podemos calcular los potenciales con las trasformaciones de Lorentz o con los potenciales retardados:

- Con Lorentz: S' en reposo $\rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi(x) = \gamma\phi'(x') \\ A_x(x) = \beta\gamma \dfrac{\phi'(x')}{c} \\ A_y(x) = 0 \\ A_z(x) = 0 \end{cases}$

- Sin Lorentz: $t' = t - \dfrac{R}{c}$, $\phi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{\left[R - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c}\right]_{ret}}$, $\quad R = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}$

  $c(t'-t) = R \qquad \vec{v}\cdot\vec{R} = v(x - vt')$

En ambos casos obtenemos:

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2}}$$

$$\vec{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\gamma\vec{v}}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2}} = \frac{\vec{v}}{c^2}\phi(x)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Podemos calcular los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ mediante:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\gamma(x-vt, y, z)}{\left[\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}, \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E} = \frac{\vec{\beta}}{c}\times\vec{E}$$

donde $\vec{B}\perp\vec{E}$ y $\vec{B}\perp\vec{v}$

Campos creados por una carga en movimiento arbitrario: campo próximo y campo de radiación

$$\boxed{\vec{E} = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{(1-\beta^2)(\hat{n}-\vec{\beta})}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})^3}}_{\text{Campo próximo o de acumulación}} + \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c R}\frac{\hat{n}\times[(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})^3}}_{\text{Campo de radiación}}}$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{n}\times\vec{E}}$$

- El vector $\dot{\vec{v}}$ ($\dot{\vec{\beta}}$) representa la aceleración de la partícula
- $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares

El primer término de $\vec{E}$ depende de $\vec{v}$ mientras que el segundo depende de $\dot{\vec{v}}$ (aceleración). El primer término va como $\sim \frac{1}{R^2}$ y no da contribución al flujo del campo eléctrico en una superficie alejada (campo próximo). El segundo término va como $\sim \frac{1}{R}$ y sí contribuye al flujo en una superficie alejada (campo de radiación).

Un análisis de los dos sumandos de la expresión de $\vec{E}$ (y por tanto de $\vec{B}$) permite hacer las siguientes consideraciones:

(1) Estos dos sumandos corresponden a campos electromagnéticos que se pueden explicar de diferente forma, ya que las propiedades de su propagación son claramente diferenciadas.

(2) El primer término depende solo de la velocidad $\vec{v}$ y no de la aceleración $\dot{\vec{v}}$, mientras que el segundo depende de la velocidad $\vec{v}$ y de la aceleración $\dot{\vec{v}}$.

(3) El primer término de dicha suma varía con la distancia como $1/R^2$ y, por el contrario, el segundo término varía como $1/R$.

Las consideraciones (2) y (3) expresan diferencias básicas entre los campos electromagnéticos que corresponden a los dos diferentes sumandos.
El primer campo (primer sumando), cuyo valor decrece rápidamente al separarse de la carga que lo genera, lo denominamos campo de acumulación, pues su energía se acumula en las cercanías de dicha carga.
El segundo campo (segundo sumando) corresponde a un campo electromagnético que denominaremos campo de radiación. Este campo de radiación surge cuando las partículas cargadas presentan movimientos acelerados ($\dot{\vec{v}} \neq 0$) y el campo creado por cada una de ellas se caracteriza por variar como $1/R$, en vez de $1/R^2$ como lo hace el campo de acumulación. Con fuentes externas de carga y corriente, las condiciones equivalentes a las anteriores para obtener el campo de radiación son que la variación temporal de las densidades de carga y corriente no sean constantes temporales.
Si consideramos distancias suficientemente grandes, el segundo sumando es el que predomina con respecto al primero y el campo eléctrico $\vec{E}$ es perpendicular a $\hat{n}$. Además $\vec{B}$ siempre es perpendicular a $\hat{n}$ y a $\vec{E}$. Por tanto, a grandes distancias tenemos una triada de vectores perpendiculares entre sí ($\vec{E}, \vec{B}, \hat{n}$) que configuran la relación que cumplen las ondas electromagnéticas que se propagan en medios infinitos. Por ello, cuando se usa el término de la radiación de las ondas electromagnéticas se refiere al campo que varía como $1/R$ y se prescinde del que varía como $1/R^2$, aproximación válida si consideramos los campos lejos del lugar donde se generan.

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \frac{\hat{n}\times[(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})^3} \rightarrow \vec{E}_{rad} \perp \hat{n}$$

$$\vec{B}_{rad} = \frac{1}{c}\hat{n}\times\vec{E}_{rad} \rightarrow \vec{B}_{rad}\perp\hat{n} \text{ y } \vec{B}_{rad}\perp\vec{E}_{rad}$$

Teorema:

"La energía debida al campo de radiación fluye en igual cantidad independientemente del tamaño de la superficie cerrada que se considere y dicha energía es la misma que la que fluye en la superficie cerrada del infinito".

Potencia radiada total y direccional

Se define la potencia o intensidad radiada:

$$I \equiv \frac{dW}{dt} = \oint_S (\vec{E}\times\vec{H})\hat{u}_s\, \underbrace{dS}_{\text{área}} = \frac{1}{c\mu_0}\oint E^2\hat{n}\cdot\hat{u}_s\, dS = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\oint_S H^2\hat{n}\cdot\hat{u}_s\, dS$$

Si $d\Omega$ es un diferencial de ángulo sólido: $d\Omega = \hat{n}\cdot\hat{u}_s \frac{dS}{R^2}$

$$I = \frac{1}{c\mu_0}\oint H^2R^2 d\Omega = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\oint H^2R^2 d\Omega$$

La intensidad radiada direccional es la energía radiada por unidad de tiempo en una dirección:

$$\frac{dI}{d\Omega} \equiv \frac{1}{c\mu_0} E^2 R^2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H^2 R^2$$

de modo que:

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega \quad \left(\text{intensidad total}\right) \qquad W = \int_{-\infty}^{\infty} I(t)\, dt \quad \left(\text{energía total radiada}\right)$$