Grado en Física. Mecánica Newtoniana y Relatividad.
Relatividad.
Curso 2022-2023
Los problemas marcados con (*) son de mayor dificultad.

1. Considera dos sistemas de referencia inerciales, S y S', con S' moviéndose con velocidad constante V a lo largo del eje x de S. Supongamos que en el instante inicial el origen de los dos sistemas de referencia coinciden y que en ese instante se produce un destello en este origen común. Según el observador en S, un frente de onda esférico se expande desde el origen con velocidad c. Muestra que un observador en S' verá un frente de onda similar expandiéndose desde su origen. (Considera que la ecuación para el frente de onda es: $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$)

2. Un suceso tiene lugar en $x = 60m$, $t = 8x10^{-8}s$ en un sistema S ($y = 0$, $z = 0$). El sistema S' posee una velocidad $3c/5$ según el eje de las x con relación al sistema S. Los orígenes de S y S' coinciden para t = 0, $t' = 0$. ¿Cuáles son las coordenadas espacio-tiempo del suceso S'?. Obténlas también en forma gráfica.

3. Las coordenadas espacio-tiempo de dos sucesos medidas en un sistema S son las siguientes: Suceso 1: $x_1 = x_0, t_1 = x_0/c$ ($y_1 = 0, z_1 = 0$) Suceso 2: $x_2 = 2x_0, t_2 = x_0/2c$ ($y_2 = 0, z_2 = 0$) (a) Existe un sistema en el cual estos sucesos tienen lugar en el mismo instante. Hallar la velocidad de este sistema respecto a S. (b) ¿Cuál es el valor del tiempo para el que ambos sucesos tienen lugar en el nuevo sistema de referencia?

4. A las $14h\,0m\,0s$, cae un rayo en un cierto lugar. A 1760 km de distancia y a las $14h\,0m\,0{,}003s$ cae un segundo rayo.¿Qué velocidad debe tener una nave espacial que observa el orden de las caídas invertido? Razónalo gráficamente.

5. Muestra que una transformación de Lorentz de velocidad V a lo largo del eje x puede escribirse como:

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh\theta - ct \sinh\theta \\ ct' &= -x \sinh\theta + ct \cosh\theta \end{aligned}$$

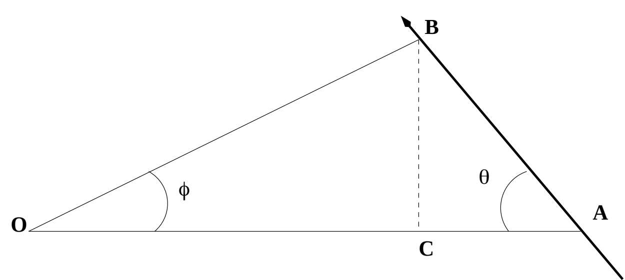
Donde θ está definido por $\tanh\theta = \dfrac{V}{c}$. Si definimos la coordenada temporal como $y = ict$, entonces la transformación de Lorentz es como una 'rotación' en un espacio bidimensional:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos i\theta + y \sin i\theta \\ y' &= -x \sin i\theta + y \cos i\theta \end{aligned}$$

Muestra que dos transformaciones consecutivas de ángulos θ_1 y θ_2 equivalen a un transformación de ángulo $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

6. La velocidad de propagación del sonido en un cable metálico es $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, donde μ es su masa por unidad de longitud. ¿Cuál es la restricción sobre los valores de tensión que puede soportar un cable de acero de 1 mm de radio de acuerdo con la relatividad? La densidad del acero es $7{,}8\,10^3\ Kg/m^3$. Compara con la tensión de rotura de ese mismo cable, que es $1{,}6\,10^3$ N.

7. Un objeto situado en una galaxia distante se mueve a lo largo de la dirección AB con velocidad v, como muestra la figura de debajo. A tiempo t_1 parte desde A y emite un fotón en la dirección de O. A tiempo t_2 ha llegado a B y emite un segundo fotón en la dirección de O. Los fotones son recibidos en O a tiempos $t_1^{'}$ y $t_2^{'}$. Supón que el ángulo ϕ es suficientemente pequeño y calcula la velocidad transversal, debida al desplazamiento aparente en la dirección BC, que percibe el observador en O. Encuentra el valor máximo de dicha velocidad respecto a θ y muestra que puede ser mayor que c. ¿Qué es lo que ocurre?.



Problema 7

8. Una nave espacial se mueve sobre el eje x hacia la derecha con velocidad $V = 0{,}3c$.

   a) Dibuja los ejes de coordenadas $(ct;x)$ y $(ct';x')$, respecto del laboratorio y la nave espacial respectivamente, en el mismo gráfico. Marca correctamente los ángulos de los ejes y calibra las escalas adecuadamente.

   b) Ubica el punto de coordenadas $(ct = 4;x = 2)$ y determina gráficamente sus coordenadas en el sistema de la nave espacial. Comprueba los valores calculándolos con las transformaciones de Lorentz.

   c) Dibuja la trayectoria de un electrón que se mueve, respecto del laboratorio, con velocidad $\frac{c}{2}$. Determina, gráficamente, su velocidad respecto de la nave espacial. Comprueba el resultado utilizando la ley de adición de velocidades.

9. En el laboratorio hay una rueda de radio R que rota con velocidad angular ω respecto del eje x. Considera ahora un observador que se mueve a lo largo del eje x con velocidad V respecto del laboratorio. ¿Cuánto vale la velocidad angular para este observador?

10. Considera dos ruedas unidas a los extremos de un eje de longitud L ubicado a lo largo del eje x. Las ruedas giran con velocidad angular ω de tal modo que los radios de cada una de ellas están siempre paralelos. Un observador se mueve con velocidad V hacia la derecha a lo largo del eje x. ¿Qué desfasaje angular observa entre los radios de las dos ruedas?. Explica lo que ocurre.

11. Muestra que una combinación de dos transformaciones de Lorentz sucesivas con velocidades V_1 y V_2 a lo largo del eje x equivalen a una única transformación de velocidad $V = \dfrac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}}$.

12. En un sistema de referencia que se mueve con velocidad V a lo largo de la dirección x y en sentido positivo, una partícula se mueve con velocidad $\mathbf{v}'$ formando un ángulo θ' con el eje x'. Muestra que su dirección de propagación en el laboratorio forma un ángulo θ con el eje x, tal que: $\tan\theta = \dfrac{v' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin\theta'}{v' \cos\theta' + V}$. Supón que hay una fuente que emite partículas en todas las direcciones en el origen del sistema de referencia móvil. ¿Cómo se ve esta emisión en el laboratorio cuando $V \to c$?.

13. Considera el fenómeno de aberración de la luz estelar, en la configuración de incidencia perpendicular. En el sistema de referencia x', y', z' centrado en el sol, la luz se emite a lo largo del eje y' perpendicularmente a la velocidad de traslación de la tierra respecto del sol. Muestra que en el sistema de referencia de la tierra la luz forma un ángulo ϕ con el eje y tal que: $\tan\phi = \gamma \dfrac{V}{c}$.

14. (*) Supón que un espejo plano se desplaza con velocidad V en la dirección horizontal hacia la derecha. El espejo está colocado perpendicularmente a la dirección de su movimiento. Un rayo de luz que forma un ángulo θ con el eje x en el sistema del laboratorio incide sobre el espejo. Calcula el ángulo con que el rayo se refleja en el laboratorio. Repite el calculo suponiendo que el espejo se desplaza paralelamente a su superficie con velocidad V. En todos los casos analiza todas las posibles configuraciones entre sentido de propagaci?ndel haz y sentido de movimiento del espejo. ¿Existe siempre un rayo reflejado?. ¿Es reversible el proceso?.

15. Considera una nave espacial que acelera con aceleración a'_x constante en el sistema de

referencia propio, partiendo del reposo. Muestra que: $x = \dfrac{c^2}{a'_x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{(1-\frac{v_x^2}{c^2})}} - 1\right)$. Muestra que para velocidades bajas esta expresión se reduce a $v_x^2 = 2\, a'_x\, x$.

16. La velocidad orbital de la tierra alrededor del sol es de 30 km/s. Calcula cuántos segundos pierde en un año un reloj que orbita con la tierra (sin participar de la rotación sobre su eje) respecto de uno que se halla fijo al sol.

17. Las partículas inestables tienen una probabilidad de no decaer al cabo de un tiempo t dada por la ley $P = \exp(-\frac{t}{\tau})$, donde τ es el tiempo de vida media de la partícula. Los muones tienen un tiempo de vida media de $2{,}2\, 10^{-6}$ s. Supón que el impacto de un rayo cósmico en la átmosfera, a 40 km de la superficie terrestre, genera un muón que se mueve hacia abajo con velocidad $0{,}99c$. Calcula la probabilidad de que ese muón llegue a la superficie sin tener en cuenta la dilatación temporal, y luego teniéndola en cuenta. ¿Cómo sería este último cálculo en el sistema de referencia del muón?.

18. Se construye un reloj constituido por una partícula que rebota elásticamente entre dos paredes rígidas separadas por una distancia L. Supón que estas paredes están en reposo en un sistema de referencia que se mueve con velocidad V a lo largo del eje x del laboratorio. La partícula rebota con velocidad $\pm v'_y$ a lo largo de la dirección y'. ¿Cuál es el tiempo que transcurre entre rebotes en el sistema móvil y en el laboratorio?. ¿Se cumple la ley de dilatación temporal?.

19. (*) Supón que estás en un sistema de referencia S_0 y que hay una pa.rtícula en reposo respecto de ti. Escribe su cuadrivector velocidad en este sistema de referencia.Entonces comienzas a moverte de acuerdo a la siguiente secuencia: y ten en cuenta la igualdad: $v^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$. Utiliza la notación matricial.

    a) Te pasas a un sistema de referencia S_1 que se mueve con $\mathbf{V}_{10} = V\hat{\mathbf{x}}$ respecto de S_0. Calcula el cuadrivector velocidad de la partícula en S_1. Comprueba la ley de transformación de las velocidades.

    b) Luego te pasas a un sistema S_2 que se mueve respecto de S_1 con velocidad $\mathbf{V}_{21} = V\hat{\mathbf{y}}$. Calcula el cuadrivector velocidad en S_2. Calcula la velocidad ordinaria de la partícula en S_2. Comprueba que la norma del cuadrivector ha permanecido invariante. ¿ Son los resultados que esperabas?.

    Para entender lo que ha ocurrido en b) haz lo siguiente:

    c) Ahora pásate a un sistema S_3 que se mueve respecto de S_2 con velocidad $\mathbf{V}_{32} = V_x\hat{\mathbf{x}}$. Calcula el cuadriverctor velocidad en S_3 y determina V_x para que en S_3 la velocidad de la partícula en la dirección x sea 0.

d) A continuación pásate a un sistema S_4 que se mueve respecto de S_3 con velocidad $\mathbf{V}_{43} = V_y\hat{\mathbf{y}}$. Calcula el cuadrivector velocidad en $S4$ y determina V_y para que en S_4 la velocidad de la partícula en la dirección y sea 0. Comprueba que en S_4 la partícula está en reposo.

O sea que podemos decir que hemos vuelto al sistema de referencia inicial. Sin embargo...
e) Haz el producto de las cuatro transformaciones de los puntos anteriores, en el mismo orden: dcba (primero a,b,c,d). Comprueba que la matriz resultante corresponde a una matriz de rotación de los ejes espaciales de ángulo θ y calcula ese ángulo.

O sea, al cabo de esa vuelta, hemos regresado al sistema de referencia inicial, pero los ejes espaciales están rotados respecto de la situación inicial. ¿Qué conclusión puedes sacar de este resultado?.

20. Cuando se mueve a velocidad de $0,9c$ respecto del laboratorio un mesón K decae en dos piones de masa 140 MeV/c^2 y energía cinética de 110 MeV que se mueven en direcciones opuestas en el sistema de referencia del mesón. ¿Cuál es la energía cinética y el impulso de cada pion en el sistema del laboratorio? Calcula el impulso inicial del mesón K en el laboratorio de dos maneras distintas.

21. Muestra que la cantidad $E\,t\; - \;x\,p_x$ es invariante por transformaciones de Lorentz. La cantidad $\omega\, t - k_x\, x$ es la fase de una onda luz, que determina dónde ocurren los máximos y mínimos de la onda, y por lo tanto también debe ser un invariante por transformaciones de Lorentz (ω es la pulsación y k_x el vector de onda de la onda de luz). ¿Qué relación debe haber entre E y ω y entre k_x y p_x?.

22. Para una partícula sin masa que se mueve a lo largo de la dirección x se cumple que $p_x = \pm\dfrac{E}{c}$, donde p_x y E son el impulso y la energía de la partícula. Calcula la energía E' en un sistema que se mueve con velocidad V hacia la derecha y muestra que $E' = E\sqrt{\left(\frac{1\mp\frac{V}{c}}{1\pm\frac{V}{c}}\right)}$. Compara esta relación con la del problema anterior y obtén la fórmula del efecto Doppler relativista. ¿Qué ocurre si el sistema se mueve con velocidad V en la dirección y?.

23. Considera un átomo en un estado excitado que se mueve con velocidad V hacia la derecha cuando emite un fotón de frecuencia f. Calcula esta frecuencia. ¿Cómo se relaciona esto con el efecto Doppler?.

24. Considera la reacción $p + p \rightarrow p + 7\pi^- + 7\pi^+ + K^+ + \Lambda^0$. Un protón p incide sobre otro que está en reposo para dar esa reacción. ¿Cuál es la energía cinética umbral del protón incidente?. Compara esa energía con la energía de las masas creadas. Datos:

$m_{0p} = 0{,}938 GeV/c^2$

$m_{0\pi^{+/-}} = 0{,}140 GeV/c^2$

$m_{0K} = 0{,}494 GeV/c^2$

$m_{0\Lambda} = 1{,}115 GeV/c^2$

25. Considera un oscilador unidimensional relativista de masa en reposo m y constante elástica K. El oscilador tiene una energía total E.

    - Escribe la ecuación de Newton para este problema unidimensional y obtén la aceleración. Compara con lo que se hizo en la teoría para 3 dimensiones.
    - Estima el período de oscilación en el límite muy relativista ($v \lesssim c$, $E >> mc^2$). Muestra que $T = 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{(\frac{m}{K} (\frac{E}{mc^2} - 1))} \sim 2^{\frac{5}{2}} \sqrt{(\frac{E}{Kc^2})}$.

Soluciones

2. $x' = 57m, t' = -5\,10^{-8}s$

3. $v = -c/2$, $t' = \frac{\sqrt{3}x_0}{c}$

4. $\frac{V}{c} \geq$ 0,51

6. $T_{max} = 2{,}2\,10^{15}$ N.

7. $V_{BC} = v\,\dfrac{\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}$; $\cos\theta_{max} = \beta$

8. a) ángulo $xOx' = 17^o$; b) $x' = 0{,}84$, $ct' = 3{,}6$; c) $v'_x = 0{,}23c$

9. $\omega' = \dfrac{\omega}{\gamma}$

10. $\Delta\phi = -\dfrac{VL\omega}{c^2}$

12. Todas las partículas salen hacia adelante muy cerca del eje x, excepto aquellas que salen con ($\theta' \to \pi$) y con $v' > V$, que salen hacia atrás y cerca del eje x.

14. $\sin\theta_r = \dfrac{\sin\theta_i}{\gamma^2\,(\beta^2 \pm 2\beta\cos\theta_i + 1)}$; $\sin\theta_r = \sin\theta_i$

16. 0,1577 s

17. $2{,}2\,10^{-27}$; $1{,}7\,10^{-4}$

19 $\tan\theta = \beta^2\gamma$

20. $p_1 = 991\ MeV/c$, $p_2 = 41\ MeV/c$, $p_K = 1032\ MeV/c$, $E_{c1} = 861\ MeV$, $E_{c2} = 5,89$ MeV.

23. $f = \frac{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\beta\cdot\mathbf{n}}\Delta E(1 - \frac{\Delta E}{2\,M_0\,c^2})$, donde ΔE es la energía de excitación del átomo, $\hat{\mathbf{n}}$ es la dirección de propagación del fotón y M_0 es la masa en reposo del átomo excitado.

24 $K = 8{,}952 GeV$