Grado en Física, Curso 2023-2024

Mecánica Estadística

Problemas

Tema 3: Sistemas de partículas no interactuantes

1. Un recipiente térmicamente aislado está dividido en dos partes de modo que la parte derecha tiene un volumen b veces mayor que la parte izquierda. La parte izquierda contiene n moles de un gas ideal monoatómico a una temperatura T y presión media $\bar{P}$. El de la derecha contiene el mismo número de moles n y se encuentra a la misma temperatura T. Si se elimina la partición, calcula:

   (a) La presión final del gas en términos de $\bar{P}$.

   (b) El cambio total en entropía si los gases son diferentes (distinta masa).

   (c) El cambio total en entropía si los gases son iguales (igual masa).

2. Estima si para un gas de He ($m \approx 7 \times 10^{-24} g$) a temperatura y presión ambientales (300 K y 1 atm) la aproximación clásica es válida.

3. Supongamos un gas ideal monoatómico de N partículas de masa m en equilibrio térmico con un baño de temperatura absoluta T, contenido en una caja cúbica de lado L, con la parte superior e inferior paralelas a la superficie de la tierra. Teniendo en cuenta el efecto de la gravedad sobre las partículas del gas, calcula la energía media por partícula considerando tanto la energía cinética como la potencial.

4. Considera un sistema con N partículas que interactúan muy débilmente a una temperatura T lo suficientemente alta para poder utilizar la mecánica estadística clásica. Cada partícula tiene una masa m y puede realizar un movimiento oscilatorio en una dimensión alrededor de su posición de equilibrio. Calcula la capacidad calorífica a volumen constante de este sistema en los siguientes casos:

   (a) La fuerza efectiva de recuperación de cada partícula es proporcional al desplazamiento, x, de su posición de equilibrio.

   (b) La fuerza de recuperación es proporcional a x^3.

5. Considera una molécula diatómica, cuya energía tiene tres contribuciones: la energía cinética de traslación, la de vibración, y la de rotación:

$$E = \frac{|\vec{P}|^2}{2M} + \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}(r - r_0)^2 + \frac{1}{2\mu r_0^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right)$$

donde M es la masa total, μ la masa reducida de la molécula y r_0 la distancia entre átomos que minimiza la energía de interacción entre ellos. Calcula la función de partición, y obtén la energía media y el calor específico.

6. Calcula la raíz cuadrada de la velocidad cuadrática media $v_{rms} = \sqrt{\overline{v}^2}$ para la distribución de Maxwell de velocidades y el valor más probable de la velocidad $\tilde{v}$. Calcula la relación entre v_{rms}, $\bar{v}$ y $\tilde{v}$, y el valor de v_{rms} para el caso particular de gas nitrógeno (N_2) a temperatura ambiente.

7. Calcula la fracción de moléculas de un gas cuya componente x de la velocidad tiene valores entre $-\tilde{v}$ y $\tilde{v}$ donde $\tilde{v}$ es la velocidad más probable.

8. Calcula el valor medio de moléculas por unidad de volumen que tienen una energía entre ϵ y $\epsilon + d\epsilon$ para el caso de un gas ideal monoatómico en equilibrio térmico cuya distribución de velocidades sigue la distribución de Maxwell.

9. Para el mismo caso que el problema anterior, calcula $\overline{v^{-1}}$ y compárala con $1/\bar{v}$.

10. Una solución acuosa a temperatura ambiente T contiene una pequeña concentración de átomos magnéticos, cada uno de los cuales tiene un espín neto de 1/2 y un momento magnético μ. La solución se sitúa en un campo magnético externo H dirigido en la dirección z cuya magnitud aumenta con z, con valor H_1 en la parte inferior de la solución donde $z = z_1$ y valor $H_2 > H_1$ en la parte superior de la solución donde $z = z_2$.

   (a) Si $n_+(z)dz$ es el número medio de átomos magnéticos cuyos espines son paralelos a la dirección z y que se encuentran entre z y z + dz, calcula la relación: $n_+(z_2)/n_+(z_1)$.

   (b) Si $n(z)dz$ es el número medio total de átomos magnéticos (con espín paralelo o antiparalelo) que se encuentran entre z y z + dz, calcula la relación: $n(z_2)/n(z_1)$. Considerando $\mu H << kT$, simplifica el resultado.

11. Muestra que la expresión general para el valor medio del momento magnético en la dirección z, $\bar{\mu}_z = g\mu_0 J B_J(\eta)$, donde z es la dirección del campo magnético externo, se reduce a la expresión $\bar{\mu}_z = \mu \tanh \frac{\mu H}{kT}$ para el caso en el que J = 1/2.

Tema 3: Soluciones

1. (a) $\frac{2\bar{p}}{1+b}$ (b) $nR\ln(\frac{(1+b)^2}{b})$ (c) $nR\ln(\frac{(1+b)^2}{4b})$
2. $\bar{R} \approx 3.4$ nm; $\quad \bar{\lambda}_e \approx 0.07$ nm.
   Si lo hacemos con la masa del electrón $\bar{\lambda}_e \approx 6.3$ nm.
3. $\frac{5}{2}kT + \frac{mgL}{1-e^{mgL/kT}}$
4. (a) $C_v = Nk$ (b) $C_v = \frac{3}{4}Nk$
5. $$Z = V\frac{(2\pi M)^{3/2}}{\beta^{7/2}}\frac{16\pi^3\mu r_0^2}{h^6\omega}$$
   $\bar{e} = \frac{7}{2}kT \quad , c_v = \frac{7}{2}k.$
6. $v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, $\tilde{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, $\sqrt{3} : \sqrt{8/\pi} : \sqrt{2}$; $v_{rms} \approx 500m/s$
7. 0.843
8. $F(\epsilon)d\epsilon = \frac{2\pi n\epsilon^{1/2}}{(\pi kT)^{3/2}}e^{-\epsilon/kT}$
9. $\left(\frac{2m}{\pi kT}\right)^{1/2}$
10. (b) $1 + 1/2(\mu/kT)^2(H_2^2 - H_1^2)$