

Análisis de varias variables 2

Víctor Mira Ramírez

4 de abril de 2023

Índice

Capítulo 1	Formas diferenciales	Página 2
1.1	Definiciones básicas	2
1.2	Formas diferenciales cerradas y exactas	4
Capítulo 2	Campo de gradiente, divergencia y rotacional	Página 7
2.1	Campo escalar, campo vectorial	7
2.2	Aplicaciones a la física	9
Capítulo 3	Integrales de línea	Página 10
3.1	Curvas paramétricas	10
3.2	Integrales de línea	11
3.3	Longitud de una curva	13
Capítulo 4	Integrales dobles	Página 14
4.1	Introducción	14
4.2	Teoremas de Fubini	15
4.3	Teorema de Green-Riemann	16
4.4	Superficies parametrizadas	16
	Introducción — 16 • Área de una superficie — 17	
4.5	Integrales de funciones escalares sobre superficies	19
4.6	Integrales de superficie de funciones vectoriales	20

Capítulo 1

Formas diferenciales

Introducción

Vamos a ver en este capítulo un concepto muy importante en matemáticas, que son las formas diferenciales. Como hicimos en *Análisis de varias variables 1*, empezaremos hablando de las formas diferenciales en 2 dimensiones, e iremos poco a poco ampliando el campo de nuestro estudio a dimensiones superiores.

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1: Diferencial

Sea f una función definida en un entorno del punto $M_0 = (x_0, y_0)$ tal que f admite derivadas parciales en un entorno $\mathcal{V}(M_0)$. Se llama **diferencial de f en M_0** a la aplicación lineal definida de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} denotado:

$$L(x_0, y_0) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (h, k) \mapsto h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Comentario:

Para el caso particular $g(x, y) = x$, entonces $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$ lo que nos da $dg(x, y) = dx(h, k) = h$ (rotación $dx = h$) $g(x, y) = y$, entonces $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 1$ lo que nos da $dg(x, y) = dy(h, k) = k$. Esto nos da: $df(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$

- Escribir $df(dx, dy)$ es un abuso de notación que debe evitarse, escribiendo en su lugar df únicamente.
- La diferencial puede existir sin que la función sea diferenciable
($f \in C_1 \implies f$ diferenciable, pero f diferenciable $\not\Rightarrow f \in C_1$)

Comentario:

Sea $f \in C_1(\mathcal{V}(M_0))$ una función de una variable,

$$f'(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \iff f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + o(h)$$

Como tenemos que $h = dx, df_{x_0} = f'(x_0)dx \iff f'(x_0) = \frac{df_{x_0}}{dx} \left(\frac{dx}{dt} = x'(t) \iff dx = x'(t)dt \right)$

Definición 1.1.2: 1-forma diferencial

Sea \mathcal{U} un abierto de \mathbb{R} y sea $(h, k) \in \mathcal{U}$ se llama **1-Forma diferencial** w a la aplicación

$$w: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(h, k) \longmapsto w = P(x, y)h + Q(x, y)k$$

donde P y Q son funciones "suficientemente regulares".

Comentario:

Si P y Q son derivadas parciales de f , entonces la 1-forma diferencial w es la diferencial de f

Definición 1.1.3: Producto exterior

Sean dx y dy dos 1-formas diferenciales, se llama **producto exterior** a la aplicación definida por $dx \wedge dy$ (" dx exterior dy "):

$$w: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(h_1, k_1) \times (h_2, k_2) \longmapsto h_1 k_2 - h_2 k_1$$

Comentario:

Un determinante es el producto exterior de dos 1-formas diferenciales

Teorema 1.1.1

- $dx \wedge dx = 0$
- $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

A consecuencia de este teorema se obtiene la llamada "*Regla de Sarrus*", cuya demostración es inmediata.

Definición 1.1.4: 2-forma diferencial

Sea \mathcal{U} un abierto de \mathbb{R}^2 y sea $(x, y) \in \mathcal{U}$, se llama **2-forma diferencial** w a la aplicación

$$w: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{B}_i(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) dx \wedge dy$$

donde $\mathcal{B}_i(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ es el conjunto de las aplicaciones bilineales.

Comentario:

$\forall H_1(h_1, k_1), H'_1(h'_1, k'_1), H_2(h_2, k_2)$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$dx \wedge dy(H_1 + \lambda H'_1, H_2) = dx \wedge dy((h_1 + \lambda h'_1, k_1 + \lambda k'_1), (h_2, k_2)) = dx \wedge dy k_2(h_1 + \lambda h'_1) - dx \wedge dy h_2(k_1 + \lambda k'_1) =$$

$$dx \wedge dy(h_1 k_2 - h_2 k_1) + \lambda dx \wedge dy(h'_1 k_2 - h_2 k'_1) = dx \wedge dy(H_1, H_2) + \lambda dx \wedge dy(H'_1, H_2) \implies$$

$dx \wedge dy$ es lineal respecto a la primera variable. Idem con la segunda.

Esto implica que $dx \wedge dy$ es bilineal, y lo es también $f(x, y) dx \wedge dy$.

En conclusión, $f(x, y) dx \wedge dy \in \mathcal{B}_i(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Definición 1.1.5: Derivada exterior

Sea w una 1-forma diferencial definida en \mathcal{U} abierto de \mathbb{R}^2 . Se llama derivada exterior de w y la denotamos dw a la 2-forma diferencial definida por:

$$dw = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx \wedge dy$$

1.2 Formas diferenciales cerradas y exactas

Definición 1.2.1: Forma diferencial cerrada

Sea w una 1-forma diferencial de clase C_1 en un abierto \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 se dice que w es cerrada si $dw = 0$

Comentario:

Tenemos $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, si $w \in C_1$, las derivadas parciales de P y Q existen, y tenemos $dw = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$ Si $w = 0 \iff \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \forall (x, y) \in \mathcal{U}$

Definición 1.2.2: Forma diferencial exacta

Sea w una 1-forma diferencial de clase C_1 en un abierto de \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 , se dice que w es **exacta** si existe una función $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C_1 tal que $df = w$

Comentario:

Ya sabemos que si $f \in C_1(\mathcal{U})$, entonces $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. (Si $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ tenemos la estructura de una 1-forma diferencial). Si $w = df$, tenemos que $P = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $Q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

Esto significa que para demostrar que w es exacta hay que encontrar f tal que $df = w$, es decir, buscamos $f(x, y)$ que sea solución del sistema $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Como $f \in C_1(\mathcal{U})$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas. También sabemos que $w \in C_1(\mathcal{U})$, lo que nos dice que $P, Q \in C_1(\mathcal{U}) \implies f \in C_2(\mathcal{U})$

Teorema 1.2.1

Si $w \in C_1(\mathcal{U}) \implies f \in C_2(\mathcal{U})$

Comentario:

Al ser de clase C_1 , podemos determinar las derivadas parciales de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$. Tenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Y con el *Lema de Schwartz* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)$, entonces sabemos que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{U}$$

Teorema 1.2.2

Sea w una 1-forma diferencial de clase $C_1(\mathcal{U})$ y exacta en \mathcal{U} , entonces w es cerrada.

Comentario:

El recíproco del teorema anterior es falso, salvo si damos a \mathcal{U} una cierta geometría. Por ello, vamos a volver a hablar de topología.

Definición 1.2.3: Conjunto estrellado

Sea \mathcal{U} un abierto de \mathbb{R}^2 , se dice que \mathcal{U} es estrellado si $\exists a \in \mathcal{U}$ tal que $\forall b \in \mathcal{U}$ tenemos $[a, b] \subset \mathcal{U}$

Ejemplo 1.2.1

1. Todo convexo de \mathbb{R}^2 es un estrellado.
2. Si $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, \mathcal{U} no es estrellado.
3. $[a, b] \in \mathbb{R}^2 = \{ta + (1-t)b, t \in [0, 1]\}$ (Parametrización de un segmento)

Teorema 1.2.3 Poincaré

Si w es una 1-forma diferencial de clase C_1 en un abierto estrellado de \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 tal que $dw = 0$ (i.e w es cerrada) entonces w es exacta.

Una aplicación en física puede ser, por ejemplo, en mecánica de fluidos, ya que si en $(0, 0)$ hay un obstáculo y hay un flujo alrededor de un cilindro (definido en un entorno de $(0, 0)$) entonces no se pueden usar los teoremas de la mecánica de fluidos.

La demostración se hará con integrales de línea (curvilíneas o de camino).

Ejemplo 1.2.2 (Sea $w = x dx + y dy$ y $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, ¿La forma diferencial w es cerrada?)

Claro que sí, vamos a demostrarlo. Tenemos $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = y$ entonces $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$, lo que implica que $dw = 0$, es decir, que w es cerrada.

Además, como \mathbb{R}^2 es estrellado, tenemos gracias al *Teorema de Poincaré* que w es exacta.

Ejemplo 1.2.3 (Usando la anterior forma diferencial, encuentra la función f tal que $df = w$)

Tenemos $w = x dx + y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, lo que nos da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y$$

De aquí, obtenemos que $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + g(y)$, y derivando respecto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) = y \implies f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C \text{ y tenemos } w = df.$$

Comentario:

En \mathbb{R}^3 , una 1-forma diferencial w se escribe $w = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ donde P, Q, R son tres funciones definidas en un abierto \mathcal{U} de \mathbb{R}^3 . Si además \mathcal{U} es un estrellado de \mathbb{R}^3 , entonces w es exacta.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Teorema 1.2.4

Sea w una 1-forma diferencial de clase $C_1(\mathcal{U})$, donde \mathcal{U} es un abierto de \mathbb{R}^2 , suponemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &= f(u, v) & y &= g(u, v) & \text{con } f, g &\in C_1 \\ w &= P(x, y) dx + Q(x, y) dy = P_1(u, v) du + Q_1(u, v) dv \\ \text{con } P_1(u, v) &= P \frac{\partial f}{\partial u} + Q \frac{\partial f}{\partial v} & Q_1(u, v) &= P \frac{\partial g}{\partial u} + Q \frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.4

Sea $w = x dx + y dy$, tenemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{cases}$$

y por tanto, $w = d\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) = d\left(\frac{r^2}{2}\right) = r dr$

Capítulo 2

Campo de gradiente, divergencia y rotacional

2.1 Campo escalar, campo vectorial

Definición 2.1.1: Campo de gradiente

Sea \bar{V} un campo vectorial con componentes P y Q de clase C_1 en $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que \bar{V} es un campo de gradiente si existe un campo escalar φ de clase C_1 en \mathcal{D} tal que:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M(x, y) &\longmapsto \varphi(M) = \varphi(x, y) \end{aligned} \quad \bar{V} = \overline{\text{grad } \varphi} = \bar{\nabla} \varphi \quad \text{i.e. } \bar{V} = \begin{cases} P(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(x, y)} \\ Q(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y(x, y)} \end{cases}$$

Teorema 2.1.1

Sea \bar{V} un campo vectorial con componentes P y Q de clase $C_1(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^2$:

\bar{V} campo de gradiente \iff la 1-forma diferencial $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ es exacta en \mathcal{D} , i.e. $w = df$.

Como consecuencia, sabemos que si \bar{V} es un campo de gradiente $\implies \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$

Comentario:

Si \mathcal{D} es un abierto estrellado, entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \iff w$ es cerrada $\xrightarrow{\text{Poincaré}} w$ es exacta $\iff \bar{V} = \bar{\nabla} \varphi$

Comentario:

Si \mathcal{D} es un abierto 'simplemente conexo' de \mathbb{R}^3 , entonces $dw = 0 \iff \exists \varphi \in C_1(\mathcal{D})$ tal que $d\varphi = w$
i.e. w cerrada $\iff w$ exacta. \mathcal{D} simplemente conexo $\iff \mathcal{D}$ no tiene huecos

Teorema 2.1.2

- Los abiertos estrellados son simplemente conexos.
- En \mathbb{R}^3 , un campo vectorial $\bar{V}(P, Q, R)$ con $P, Q, R \in C_1(\mathcal{D})$ donde $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$,

$$\bar{V} = \bar{\nabla} \varphi \iff w = Pdx + Qdy + Rdz \text{ es exacta.}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad &\begin{cases} \mathcal{D} \text{ estrellado} \\ \text{ó} \\ \mathcal{D} \text{ simplemente conexo} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \end{aligned}$$

Definición 2.1.2: Rotacional

Sea $\bar{V}(P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C_1 ($\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$), llamamos rotacional de \bar{V} a:

$$\overline{rot} \bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{V} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Teorema 2.1.3

Sea $\bar{V}(P, Q, R)$ de clase C_1 ($\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$), si \bar{V} es un campo de gradiente, entonces $\bar{\nabla} \times \bar{V} = \bar{0}$

Comentario:

Si \mathcal{D} es simplemente conexo (no hay huecos), entonces el recíproco es cierto, i.e. $\overline{rot} \bar{V} = \bar{0} \implies \bar{V} = \bar{\nabla} \varphi$ donde $\varphi \in C_1(\mathcal{D})$

Definición 2.1.3: Divergencia

Sea $\bar{V}(P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C_1 ($\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$), llamamos divergencia de \bar{V} al escalar:

$$\overline{div} \bar{V} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Teorema 2.1.4

Sea $\bar{V}(P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C_2 ($\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$), entonces $\nabla \cdot \nabla \times \bar{V} = 0$

Teorema 2.1.5

Si \mathcal{D} es simplemente conexo y $\nabla \cdot \bar{V} = 0 \implies \bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$ (donde \bar{A} es un campo vectorial definido en \mathcal{D})

Comentario:

El campo \bar{A} no es único, de la misma manera que un campo escalar φ asociado a un campo de vectores.

Si $\bar{V} = \bar{\nabla} \varphi = \bar{\nabla}(\varphi + \text{cte})$ De la misma manera, tenemos que si $\bar{A}f = \bar{A} + \bar{\nabla}f$, entonces $\bar{\nabla} \times \bar{A}f = \bar{\nabla} \times (\bar{A} + \bar{\nabla}f) = \bar{\nabla} \times \bar{A} + \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla}f)$. Es decir, si $\bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$, existe f tal que $\bar{V} = \bar{\nabla} \times (\bar{A} + \bar{\nabla}f)$

Definición 2.1.4: Laplaciano

Sea φ un campo de clase C_2 en \mathbb{R}^2 , llamamos **Laplaciano de φ** al campo escalar $\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

Comentario:

Podemos decir que $\Delta\varphi$ se escribe como

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \iff \Delta\varphi = \overline{div}(\overline{grad} \varphi) = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \varphi$$

Teorema 2.1.6

Sea \bar{V} un campo de gradiente tal que $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$, tomando φ un campo escalar $\varphi \in C_2(\mathcal{D})$ tal que $\bar{V} = \bar{\nabla} \varphi$, entonces $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \varphi = \Delta\varphi = 0$

2.2 Aplicaciones a la física

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} & \dot{\gamma} \\ \overline{M} & \longmapsto \varphi(M) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \\ \overline{M} & \longmapsto \overline{\varphi(M)} & \end{array} \text{ donde } \overline{\varphi(M)} = \begin{pmatrix} \varphi_x(M) \\ \varphi_y(M) \\ \varphi_z(M) \end{pmatrix} \text{ vectorial}$$

Operador Nabla (operador diferencial)

$$\bar{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ en la base canónica de } \mathbb{R}^3$$

Gradiente

$$\overline{\text{grad}}\varphi = \bar{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (\text{Campos escalares})$$

Divergencia

$$\text{div}\bar{\varphi} = \bar{\nabla} \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} (\text{Producto escalar})$$

Rotacional

$$\overline{\text{rot}}\bar{\varphi} = \bar{\nabla} \times \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Laplaciano Escalar

$$\Delta\varphi = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}\varphi = \bar{\nabla}\bar{\nabla}\varphi = \bar{\nabla}^2\varphi \text{ (ecuación de difusión)}$$

Laplaciano Vectorial

$$\bar{\Delta}\bar{\varphi} = (\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z)$$

(Vector cuyas componentes son Laplacianos). Se usa en mecánica de fluidos, (Ecuación de Navier-Stokes), en electromagnetismo (ecuación de d'Alembert)

Significado del gradiente

Leyes en física

$$\begin{array}{l} \text{Ley de Holm local (potencial)} \\ \bar{f} = -\gamma \overline{\text{grad}V} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ley de Fourier (temperatura)} \\ \bar{f} = -\lambda \overline{\text{grad}T} \end{array}$$

Relaciones fundamentales

$$\bar{\nabla}(\bar{A} + \bar{B}) = \bar{\nabla}\bar{A} + \bar{\nabla}\bar{B}$$

$$\bar{\nabla} \times (\bar{A} + \bar{B}) = \bar{\nabla} \times \bar{A} + \bar{\nabla} \times \bar{B}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \varphi \bar{A} = \bar{\nabla}\varphi \cdot \bar{A} + \varphi \bar{\nabla} \cdot \bar{A}$$

$$\bar{\nabla} \times (\varphi \bar{A}) = \bar{A} \times \bar{\nabla}\varphi + \varphi (\bar{\nabla} \times \bar{A})$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B})$$

$$\Delta \bar{A} = \bar{\nabla}\bar{\nabla} \cdot \bar{A} - \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{A} \iff \Delta \bar{A} = \bar{\nabla}^2 \bar{A} - \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

Capítulo 3

Integrales de línea

3.1 Curvas paramétricas

Definición 3.1.1: Curva paramétrica

Sea I un intervalo de \mathbb{R} , f y g dos funciones definidas en I "suficientemente regulares".

Sea $C = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in I, M(t) = (x(t), y(t))\}$. Llamamos a C una **curva paramétrica** en \mathbb{R}^2 .
Tenemos $x = f(t)$, $y = g(t)$

Ejemplo 3.1.1

Tenemos $t \in I \in \mathbb{R}$, $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$ dados $\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \end{cases}$ tenemos $t = \frac{x-b_1}{a_1}$ lo que nos da
 $y = a_2 \left(\frac{x-b_1}{a_1} \right) + b_2 \iff y = \frac{a_2}{a_1} x + b_2 - \frac{a_2 b_1}{a_1}$ (ecuación de una recta) i.e. $y = F(x)$

Ejemplo 3.1.2

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi]$ tenemos $x^2 + y^2 = 1$, la parametrización de un círculo en el plano.

Definición 3.1.2: Curva paramétrica tangente

Sea $C = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in I, M(t) = (f(t), g(t))\}$ con f, g derivables en I .

Entonces, la curva paramétrica con $t_0 \in I$

$$\begin{cases} x = f'(t_0)t + f(t_0) \\ y = g'(t_0)t + g(t_0) \end{cases}$$

es la tangente a C en $M(t_0) = (f(t_0), g(t_0)) \neq (0, 0)$

Comentario:

Como $f'(t_0) \neq 0$, gracias a que $x = f'(t_0)t + f(t_0)$, $t = \frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)}$, entonces si la ponemos en $y = g'(t_0)t + g(t_0)$,
 $y = g'(t_0) \left(\frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)} \right) + g(t_0) = \left[\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} x - \frac{g'(t_0)f(t_0)}{f'(t_0)} + g(t_0) \right] = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} (x - f(t_0)) + g(t_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} (x - x_0) + g(t_0)$
Si $y = F(x) \implies g(t) = F(f(t))$ $g'(t_0) = F'(f(t_0)) \cdot f'(t_0) \iff F'(x_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$ y finalmente,
 $[y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0)]$ ecuación de una tangente

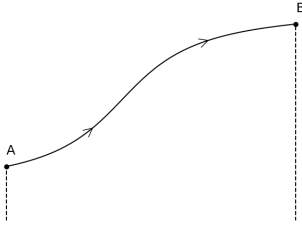
Interpretación vectorial:

Considerando la parametrización de la definición $(x_0 = f(t_0), y_0 = g(t_0))$ y sean $M(x, y), M_0(x_0, y_0) \implies \bar{T} = (f'(t_0), g'(t_0))$

$$\begin{cases} x = f'(t_0)t + x_0 \\ y = g'(t_0)t + y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - x_0 = f'(t_0)t \\ y - y_0 = g'(t_0)t \end{cases} \iff M_0\bar{M} = t\bar{T}, \text{ entonces } \bar{T} \text{ es tangente a } C \text{ en } M_0.$$

3.2 Integrales de línea

Introducción



$$C = \{M \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in [a, b], M(f(t), g(t))\} \text{ con } f, g \text{ derivables en } [a, b], A(f(a), g(a)) \text{ y } B(f(b), g(b)).$$

Consideremos $\bar{V}(P(x, y), Q(x, y))$ y sea w la 1-forma diferencial, i.e. $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Definición 3.2.1: Integral de línea

$$\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} \bar{V}(M) \cdot d\bar{M} = \int_{\overline{AB}} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \int_{\overline{AB}} w \text{ y tenemos}$$

$$\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} w = \int_a^b [P(f(t), g(t))f'(t) + Q(f(t), g(t))g'(t)] dt \rightarrow \text{Integral de Riemann!}$$

Donde $dx = f'(t)dt$, $dy = g'(t)dt$

Ejemplo 3.2.1 (Sea $w = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$, $(x, y) = (0, 0)$, necesitamos una curva parametrizada.)

Sea $C = \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, denotamos C^+ a la curva en el sentido trigonométrico.

Nos piden calcular $\gamma_{C^+} = \int_{C^+} w$.

$$\text{Volvemos a la definición: } \int_{C^+} w = \int_0^{2\pi} [\sin \theta (-\sin \theta) - \cos \theta (\cos \theta)] d\theta = - \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi$$

Donde $P(f(\theta), g(\theta)) = \sin \theta$ y $Q(f(\theta), g(\theta)) = -\cos \theta$. Y también, $f'(\theta) = -\sin \theta$ y $g'(\theta) = \cos \theta$

Comentario:

$$\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} \bar{V}(M) dM(t) = \int_a^b \bar{V}(M(t)) \cdot \bar{T}(t) \cdot dt$$

Donde $\bar{V}(M(t))$ puede ser un campo de fuerzas.

Ejemplo 3.2.2 (Sea $w = xy dx + y^2 dy + dz$ una 1-forma diferencial en \mathbb{R}^3 y sea C la curva orientada en \mathbb{R}^3 con la parametrización $\bar{V}(t) = (t^2, t^3, 1)$ con $t \in [0, 1]$. Calcular $\int_C w$)

$$\int_C w = \int_0^1 [t^5(2t) + t^6(3t^2) + 0] dt = \frac{13}{21}$$

Teorema 3.2.1

Si \bar{V} es un **campo de gradiente** (i.e. $\bar{V} = \overline{\text{grad}}\varphi = \bar{\nabla}\varphi$), $\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} \bar{V}(M) \cdot d\overline{M} = \int_{\overline{AB}} \bar{\nabla}\varphi(M) \cdot d\overline{M} = \int_{\overline{AB}} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$

Comentario:

- La circulación de un campo de gradiente no depende del camino, solamente de los valores del campo escalar φ definido por $\bar{V} = \bar{\nabla}\varphi$ en los extremos del camino \overline{AB} .
- $\gamma_{\overline{AB}} = 0$ si A y B están en la misma curva de nivel de φ

Teorema 3.2.2

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} (w_1 + w_2) &= \int_{\overline{AB}} w_1 + \int_{\overline{AB}} w_2 & \left(\bar{V}_1(M) + \bar{V}_2(M) \right) d\overline{M} &= \int_{\overline{AB}} \bar{V}_1(M) d\overline{M} + \int_{\overline{AB}} \bar{V}_2(M) d\overline{M} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \int_{\overline{AB}} \lambda w_1 &= \lambda \int_{\overline{AB}} w_1 & \forall \lambda \in \mathbb{R} \int_{\overline{AB}} \lambda \bar{V}_1(M) d\overline{M} &= \lambda \int_{\overline{AB}} \bar{V}_1(M) d\overline{M} \\ \text{Si } C \in \overline{AB}, \text{ entonces } \int_{\overline{AB}} w &= \int_{\overline{AC}} w + \int_{\overline{CB}} w & \int_{\overline{AB}} \bar{V}_1(M) d\overline{M} &= \int_{\overline{AC}} \bar{V}_1(M) d\overline{M} + \int_{\overline{CB}} \bar{V}_1(M) d\overline{M} \\ \int_{\overline{AB}} w &= - \int_{\overline{BA}} w \text{ (Hay que cambiar la parametrización para mostrarlo)} \end{aligned}$$

Corolario 3.2.1

Si \overline{AB} es una curva cerrada, entonces $A = B$, y si \bar{V} es un campo de gradiente, entonces $\int_{\overline{AB}} \bar{V}(M) d\overline{M} = 0$

Definición 3.2.2: Campo conservativo

Se dice que un campo vectorial es conservativo si la circulación del campo vectorial es nula en toda curva cerrada.

Teorema 3.2.3

Sean A y B dos puntos del plano, la circulación de un campo conservativo no depende del camino para ir de A a B .

Teorema 3.2.4

Si \bar{V} es un campo de gradiente, entonces \bar{V} es un campo conservativo.

Ejercicio 3.2.1 Sea $\bar{V}(M) = \frac{3x^2+y^2}{y^2}\hat{x} - \frac{2x^3}{y^3}\hat{y}$

- Sean $A(-1, 1)$ y $B(1, 1)$ calcular $\gamma_{\overline{AB}}$ con $\overline{AB} = [A B]$ (segmento).
- Idem con $\overline{AB} \equiv$ semicírculo de centro $\Omega(0, 1)$

Ver TD2

Teorema 3.2.5

Si \bar{V} es un campo conservativo, entonces \bar{V} es un campo de gradiente.

Comentario:

Destacar que ahora tenemos la doble implicación entre campo conservativo y de gradiente.

3.3 Longitud de una curva

Definición 3.3.1: Longitud de una curva

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva paramétrica de clase C_1 , la **longitud de γ** viene dada por la expresión:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Comentario:

Si $\gamma(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ en coordenadas cartesianas, entonces $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt$

Ejercicio 3.3.1 Halla la longitud de arco de la siguiente curva: $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ entre los puntos $(0, 0, 0)$ y $(3, 3, 2)$

$$L(\gamma) = \int_{(0,0,0)}^{(3,3,2)} \sqrt{3^2 + 36t^2 + 36t^4} dt = \int_0^1 \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} dt = 3 \int_0^1 \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} dt = 3 \int_0^1 (2t^2 + 1) dt = [2t^3 + 3t]_0^1 = 5$$

Ejercicio 3.3.2 Halla la longitud de arco de la siguiente curva: $\gamma(t) = \begin{cases} (\cos(t), \sin(t), 3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ (-1, -t + \pi, 3t) & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

Tenemos $\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 3^2} = \sqrt{10}$ y $\|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{10}$,

$$L(\gamma_1(t)) = \int_0^\pi \sqrt{10} = \pi\sqrt{10} \quad L(\gamma_2(t)) = \pi\sqrt{10} \implies L(\gamma(t)) = L(\gamma_1(t)) + L(\gamma_2(t)) = \pi\sqrt{10} + \pi\sqrt{10} = 2\pi\sqrt{10}$$

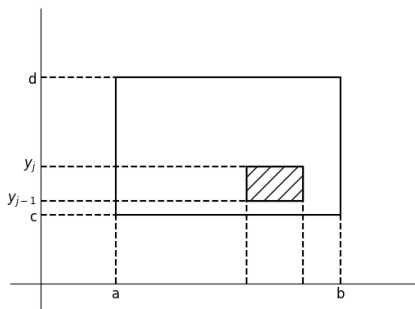
Capítulo 4

Integrales dobles

4.1 Introducción

Sea $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ (con $a < b$ y $c < d$) un rectángulo. Como se hizo con la integral simple, vamos a subdividir los intervalos de los ejes (abscisas y ordenadas). Sean las particiones de $[a, b]$ y $[c, d]$

$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \end{cases}$ Obtenemos así las mallas, o Rectángulos Elementales: $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$



4.2 Teoremas de Fubini

Teorema 4.2.1 Fubini en un rectángulo (versión débil)

Sea R un rectángulo de \mathbb{R}^2 , $R = [a, b] \times [c, d]$ y sea f una función integrable sobre R , tenemos:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

(las integrales dobles son permutables)

Ejemplo 4.2.1 (Calcular $I = \iint_A e^{x+y} dx dy$ con $A = [0, 1] \times [0, 2]$)

$$I = \iint_A e^x e^y dx dy = \int_0^1 e^x dx \cdot \int_0^2 e^y dy = [e^x]_0^1 \cdot [e^y]_0^2 = (e - 1)(e^2 - 1)$$

Ejemplo 4.2.2 (Calcular $I = \iint_R f(x, y) dx dy$ con $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y f definida en R por $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$)

$$I = \iint_R f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^2 16 - x^2 + 2y^2 dx dy = \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x \right]_0^2 dy = \int_0^2 32 - \frac{8}{3} - 4y^2 dy = \left[32y - \frac{8}{3}y - \frac{4}{3}y^3 \right]_0^2 = 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = 48$$

Teorema 4.2.2 Fubini versión fuerte

- Sean φ_1 y φ_2 dos funciones continuas en un rectángulo compacto de $[a, b]$ de \mathbb{R} (uniformemente continuas) tales que:
 $\forall x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ y sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
 Si $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathcal{D} (entonces f es integrable en \mathcal{D}) tenemos:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

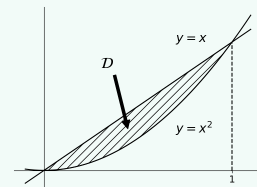
- Sean ψ_1 y ψ_2 dos funciones continuas en un rectángulo compacto de $[c, d]$ de \mathbb{R} tales que:
 $\forall y \in [c, d], \psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ y sea $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$
 Si $f: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathcal{D}' tenemos:

$$\iint_{\mathcal{D}'} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

(la integral se hace de forma horizontal).

Ejemplo 4.2.3 (Calcular $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ con $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ (no es un rectángulo), sobre la función $f(x, y) = x + y$)

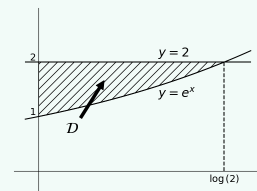
$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (x, y) dy dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{3}{20} \end{aligned}$$



Ejemplo 4.2.4 (Calcular $\iint_{\mathcal{D}} e^x dx dy$ con $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \log(y), 1 \leq y \leq 2\}$)

Como $f(x, y) \in C_0(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ Podemos aplicar el *Teorema de Fubini*

$$\begin{cases} \iint_{\mathcal{D}} e^x dx dy = \int_1^2 \int_0^{\log y} e^x dx dy = \int_1^2 (y - 1) dy = \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^2 = \frac{1}{2} \\ \iint_{\mathcal{D}} e^x dx dy = \int_0^{\log 2} \int_1^2 e^x dy dx = \int_0^{\log 2} e^x (2 - e^x) dx = \frac{1}{2} \end{cases}$$



4.3 Teorema de Green-Riemann

4.4 Superficies parametrizadas

4.4.1. Introducción

Definición 4.4.1: Plano tangente

Si una superficie S es suave (i.e. $\bar{T}_u \times \bar{T}_v \neq \bar{0}$) definimos **el plano tangente de S en $\Phi(u_0, v_0)$** como el plano determinado por \bar{T}_u y \bar{T}_v y con vector normal $\bar{n} = \bar{T}_u \times \bar{T}_v$
Una ecuación del plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0) es:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \bar{n} = 0 \quad (4.1)$$

con \bar{n} evaluado en (u_0, v_0)

Si $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ entonces 4.1 se escribe:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

Ejemplo 4.4.1 (Sea $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$)

¿Existe un plano tangente? Hallar el plano tangente en $\Phi(0, 1)$

$$\bar{T}_u = \cos(v) \bar{i} + \sin(v) \bar{j} + 2u \bar{k}$$

$$\bar{T}_v = -\sin(v) \bar{i} + \cos(v) \bar{j} + 2v \bar{k}$$

El plano tangente en $\Phi(u, v)$ es el conjunto de vectores que pasen por $\Phi(u, v)$ perpendiculares a $\bar{T}_u \times \bar{T}_v$
Tenemos:

$$\bar{T}_u \times \bar{T}_v \neq \bar{0} = \begin{pmatrix} -2u^2 \cos(v) + 2v \sin(v) \\ -2u^2 \sin(v) - 2v \cos(v) \\ u \end{pmatrix} \quad \bar{T}_u \times \bar{T}_v = \bar{0} \iff (u, v) = (0, 0)$$

Entonces el plano tangente en $\Phi(0, 0)$ pero sí en los otros puntos. Por ejemplo en $\Phi(0, 1) = (1, 0, 1)$ tenemos

$$\bar{n} = \bar{T}_u \times \bar{T}_v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ así que una ecuación del plano tangente es: } -2(x - 1) + (z - 1) = 0 \text{ es decir, } z = 2x - 1$$

4.4.2. Área de una superficie

En esta sección, consideraremos sólo superficies suaves a trozos que sean uniones de imágenes de superficies parametrizadas $\Phi_i: \mathcal{D}_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que: (Los 'quizás' son a causa de medidas matemáticas que se definen en *Análisis Funcional*)

1. \mathcal{D}_i es una región elemental del plano.
2. Φ_i es de clase C_1 y biyectiva, excepto, quizá, en $\partial\mathcal{D}$.
3. La imagen de Φ_i es suave, excepto, quizá, en un número finito de puntos.

Definición 4.4.2: Área de una superficie

Se define el **área de una superficie** $\mathcal{A}(S)$ de una superficie parametrizada por:

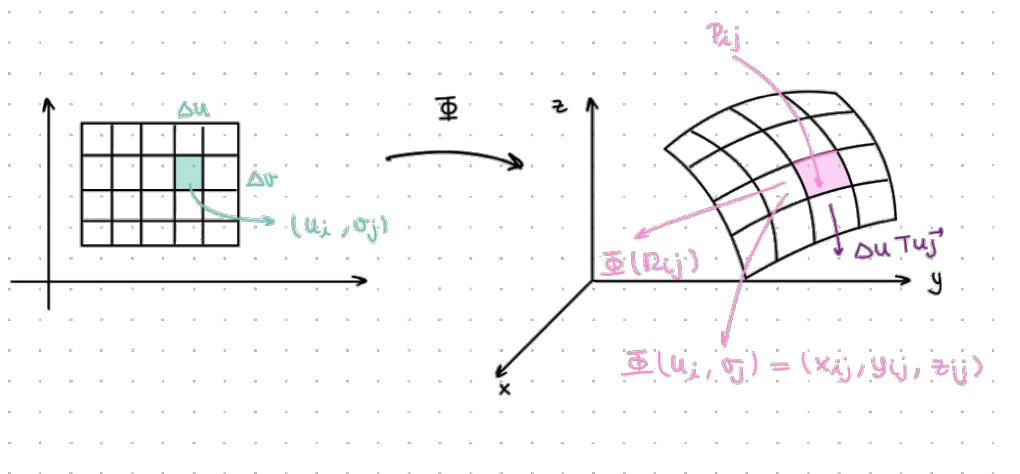
$$\mathcal{A}(S) = \iint_{\mathcal{D}} \|\overline{T}_u \times \overline{T}_v\| \, du \, dv$$

Comentario:

En el caso que S fuera unión de superficies S_i su área será la suma de las áreas de las S_i .

Entonces tenemos:

$$\mathcal{A}(A) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2} \, du \, dv \quad \text{donde} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$



Hay que considerar una porción de \mathcal{D} y sea R_{ij} el ij -ésimo rectángulo con vértices $(u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1}), (u_{i+1}, v_{j+1})$. Los valores de \overline{T}_u y \overline{T}_v en (u_i, v_i) serán determinados \overline{T}_{u_i} y \overline{T}_{v_i} . Podemos pensar los vectores $\Delta u \overline{T}_u$ y $\Delta v \overline{T}_v$ como tangentes a la superficie en $\Phi(u_i, v_j) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ donde $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ y $\Delta v = v_{j+1} - v_j$

Entonces, estos vectores forman un paralelogramo P_{ij} que está en el plano tangente a la superficie en (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) . Para n grande, (es una subdivisión de n trozos), el área de P_{ij} es una buena aproximación al área de $\Phi(R_{ij})$. Como el área del paralelogramo generado por dos vectores \overline{v}_1 y \overline{v}_2 es $\|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\|$ entonces $\mathcal{A}(P_{ij}) = \|\Delta u \overline{T}_{u_i} \times \Delta v \overline{T}_{v_j}\| = \Delta u \Delta v \cdot \|\overline{T}_{u_i} \times \overline{T}_{v_j}\|$

Por lo tanto, el área total es $\mathcal{A}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{A}(P_{ij})$ y cuando $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{A}_n \rightarrow \iint_{\mathcal{D}} \|\overline{T}_u \times \overline{T}_v\| \, du \, dv$

Ejemplo 4.4.2 (Sea \mathcal{D} la región determinada por $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 1$ y sea $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

Sea la parametrización del cono $S: \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r \end{cases}$ hallar su área de superficie.)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = -r \cos \theta \quad y \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = r \sin \theta \implies$$

$$\implies \|\bar{T}_r \times \bar{T}_\theta\| = \sqrt{r^2 + r^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{2}r$$

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \pi \int_0^1 \sqrt{2}r \, dr \, d\theta = \sqrt{2}\pi$$

Comentario:

Para confirmar que es el area de $\Phi(\mathcal{D})$ debemos comprobar que Φ es biyectiva para puntos que no están en la frontera de Φ

Sea \mathcal{D}_0 el conjunto de (r, θ) tales que $0 < r < 1$ y $0 < \theta < 2\pi$ i.e. $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \partial \mathcal{D}$

Para ver que Φ es biyectiva, suponemos que $\Phi(r, \theta) = \Phi(r', \theta')$ pero $(r, \theta), (r', \theta') \in \mathcal{D}_0$

Tenemos:

$$\begin{cases} r \cos \theta = r' \cos \theta' \\ r \sin \theta = r' \sin \theta' \\ r = r' \end{cases} \implies \begin{cases} \cos \theta = \cos \theta' \\ \sin \theta = \sin \theta' \end{cases} \implies \theta = \theta' \text{ ó } \theta = \theta' (2\pi)$$

En conclusión, $\begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \end{cases}$ y eso nos dice que Φ es biyectiva.

Ejemplo 4.4.3 (Una helicoides se define como $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \theta \end{cases}$ y \mathcal{D} es la región donde

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 1$. Hallar su área.)

$$\text{Calculamos } \frac{\partial(x,y)}{\partial(1,0)} = r \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(1,0)} = \sin \theta \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(1,0)} = \cos \theta$$

$$\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{D}} \|\bar{T}_r \times \bar{T}_\theta\| \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \, dr = \pi \left(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \right)$$

Comentario:

Si consideramos una superficie \mathcal{S} dada con $z = f(x, y)$ donde $(x, y) \in \mathcal{D}$ admite la parametrización

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad \text{con } (u, v) \in \mathcal{D}.$$

Si f es de clase \mathcal{C}_1 , entonces la superficie es suave, y el cálculo del área se reduce a:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

Ejemplo 4.4.4 (Calcular el área de la superficie de la esfera \mathcal{S} definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (Indicación: calcular el área del hemisferio superior \mathcal{S}^+ (i.e. con $z \geq 0$)))

Tenemos $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ con $(x^2 + y^2 \leq 1)$ Sea \mathcal{D} la región de $(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1$

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}^+) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1} dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

Aplicamos el *Teorema de Fubini*:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}^+) = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx = \int_{-1}^1 \left[\arcsin \left(\frac{y}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) dx = 2\pi$$

Por simetría, $\mathcal{A}(\mathcal{S}^-) = 2\pi$ y finalmente $\mathcal{A}(\mathcal{S}^+) + \mathcal{A}(\mathcal{S}^-) = 4\pi$

4.5 Integrales de funciones escalares sobre superficies

Definición 4.5.1

Sea f una función continua con valores reales definida en \mathcal{S} , La integral de f sobre \mathcal{S} se define:
 $\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} f d\mathcal{S}$ (donde $d\mathcal{S}$ es un diferencial de superficie)

$$\iint_{\mathcal{S}} f d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} f(\Phi(u, v)) \|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\| du dv$$

Comentario:

1. Si $f \equiv 1$ volvemos a encontrar la fórmula del área
2. La integral de superficie, como el área de superficie, no depende de la parametrización elegida.
3. Si \mathcal{S} es una unión de superficies parametrizadas, si $i = 1, \dots, N$ que no se intersecan excepto quizá, a lo largo de curvas que definen sus fronteras, entonces: $\iint_{\mathcal{S}} f d\mathcal{S} = \sum_{i=1}^N \iint_{\mathcal{S}_i} f d\mathcal{S}_i$

Ejemplo 4.5.1 (Consideramos el helicoides \mathcal{S} anterior. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Hallar $\iint_{\mathcal{S}} f d\mathcal{S}$)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = 2 \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \sin \theta \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \cos \theta \quad \text{con } r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi)$$

Tenemos $f(r \cos \theta, r \sin \theta, 0) = \sqrt{r^2 + 1}$ lo que nos da

$$\iint_{\mathcal{D}} f d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} f(\Phi(r, \theta)) \|\bar{T}_r \times \bar{T}_\theta\| dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{r^2 + 1} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} d\theta = \frac{8}{3}\pi$$

Comentario:

Si $z = g(x, y)$ con $g \in \mathcal{C}_1$ tenemos:

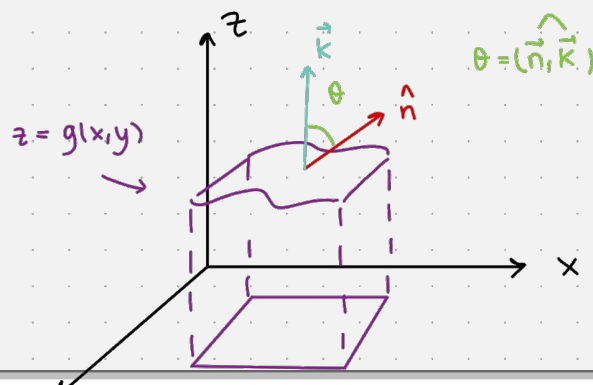
$$\iint_{\mathcal{S}} f d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Ejemplo 4.5.2 (Sea \mathcal{S} una superficie definida por $z = x^2 + y$ donde \mathcal{D} es la region caracterizada por $0 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$. Calcular $\iint_{\mathcal{D}} x d\mathcal{S}$)

$$\begin{aligned} \text{Tenemos } \iint_{\mathcal{S}} x d\mathcal{S} &= \iint_{\mathcal{D}} x \sqrt{1 + 4x^2 + 1} dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 x \sqrt{4x^2 + 2} dx \right) dy = \\ &= \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 8x (4x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} dx \right) dy = \frac{2}{3} \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \left[(2 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 dy = \frac{1}{12} \int_{-1}^1 \left(6^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right) dy = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Comentario:

Si $z = g(x, y)$



$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= z - g(x, y) = 0 \\ \text{un vector normal a } \Phi &\text{ es } \bar{n} \\ \bar{\nabla}\Phi, \text{ es decir, } \bar{n} &= -\frac{\partial g}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\bar{j} + \bar{k} \text{ y tenemos } \bar{n}, \bar{k} = \\ \|\bar{n}\| \cdot \|\bar{k}\| \cdot \cos(\bar{n}, \bar{k}) &= \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{\bar{n} \cdot \bar{k}}{\|\bar{n}\| \cdot \|\bar{k}\|} \\ \frac{\bar{n} \cdot \bar{k}}{\|\bar{n}\|} &= \frac{1}{\|\bar{n}\|} \\ \|\bar{n}\| &= \frac{1}{\cos \theta} \text{ (sabiendo que } \bar{k} \text{ es unitario y es } (0, 0, 1)) \end{aligned}$$

Al final obten

Ejemplo 4.5.3 (Calcular $\iint_S x \, dS$ donde S es el triángulo con vértices $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ (indicación: encontrar un vector normal \bar{n} unitario, tendríamos $\bar{n} \cdot \bar{k} = \cos \theta$))

Esta superficie es el plano dado por $x + y + z = 1$. Un vector normal \bar{n} a este plano tiene coordenadas $(1, 1, 1)$. Tenemos $\|\bar{n}\| = \sqrt{3}$ lo que nos da un vector normal unitario a este plano $\bar{n} = \frac{\bar{n}}{\|\bar{n}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ esto va vertical. Con la fórmula del comentario anterior, tenemos $\iint_S x \, dS = \iint_D \frac{x}{\bar{n} \cdot \bar{k}} \, dx \, dy = \iint_D \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \, dx \, dy = \iint_D \frac{x}{\sqrt{3}} \, dx \, dy$ donde $\bar{n} \cdot \bar{k} = \|\bar{n}\| \|\bar{k}\| \cos \theta \Leftrightarrow \bar{n} \cdot \bar{k} = \cos \theta$ porque $\|\bar{n}\| \|\bar{k}\| = 1$ por unitarios.

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{3}} \, dx \, dy = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x \, dy \, dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

4.6 Integrales de superficie de funciones vectoriales

Definición 4.6.1: Superficie orientada

Una superficie suave S es una **superficie orientada** si existe una función normal unitaria \bar{n} definida en cada punto (x, y, z) sobre la superficie. El campo vectorial $\bar{n}(x, y, z)$ recibe el nombre de **orientación** de S .

Puesto que una normal unitaria a S puede ser $\bar{n}(x, y, z)$ o $-\bar{n}(x, y, z)$, una superficie **orientada** tiene dos orientaciones.

Comentario:

Tenemos $\bar{n} = \frac{\bar{T}_u \times \bar{T}_v}{\|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\|}$ Una superficie S definida por $z = g(x, y)$ tiene una orientación hacia arriba cuando las normales unitarias están dirigidas hacia arriba.

Definición 4.6.2: Superficie cerrada

Una superficie **cerrada** se define como la frontera de un sólido finito.

Ejemplo 4.6.1

La superficie de una esfera es una superficie cerrada