Electromagnetismo II

Tema 5. LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN EL ESPACIO LIBRE

1.- Obtener la ecuación de continuidad $\partial_\mu J^\mu = 0$ directamente de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante.

2.- Demostrar que $f^\mu = F^{\mu\nu} J_\nu$ es un tetravector y que su componente espacial $f^i = F^{\mu i} J_\mu$ es la densidad de (3-)fuerza de Lorentz. ¿Cuál es el significado físico de su componente temporal?

3.- Teniendo en cuenta que $J^\mu = (c\rho, \vec{\mathbf{J}})$ es un tetravector Lorentz, obtener sus ecuaciones de transformación Lorentz entre dos sistemas *K* y *K'* si los ejes permanecen paralelos, pero la velocidad del sistema *K'* con respecto al sistema *K* tiene una dirección arbitraria:

$$\left.\begin{aligned} \rho' &= \gamma\left(\rho - \frac{\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\mathbf{J}}}{c}\right) \\ \vec{\mathbf{J}}' &= \vec{\mathbf{J}} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\mathbf{J}})\vec{\boldsymbol{\beta}} - \gamma\rho\vec{\mathbf{v}} \end{aligned}\right\}$$

¿Cuáles serían las transformaciones inversas?

4.- Comprobar, utilizando las transformaciones de Lorentz, que $J_\mu A^\mu = \rho\phi - \vec{\mathbf{J}}\cdot\vec{\mathbf{A}}$ es un invariante.

5.- En el sistema propio de un medio conductor la densidad de corriente satisface la ley de Ohm, $\vec{\mathbf{J}}' = \sigma\vec{\mathbf{E}}'$, siendo σ la conductividad, e indicando mediante las primas que son las magnitudes en el sistema propio.
(a) Tomando en consideración la posibilidad de que exista una corriente de convección además de la corriente de conducción, demostrar que la generalización covariante de la ley de Ohm es:

$$J^\mu - \frac{1}{c^2}(u_\nu J^\nu)u^\mu = \sigma F^{\mu\nu} u_\nu$$

siendo u^μ la tetravelocidad del medio.
(b) Demostrar que si el medio tiene una velocidad $\vec{\mathbf{v}} = c\vec{\boldsymbol{\beta}}$ con respecto a cierto sistema inercial, la corriente tridimensional en dicho sistema es:

$$\vec{\mathbf{J}} = \gamma\sigma[\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}} - \vec{\boldsymbol{\beta}}(\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\mathbf{E}})] + \rho\vec{\mathbf{v}}$$

siendo la densidad de carga observada en este sistema.
(c) Si el medio está descargado en el sistema propio (ρ' = 0), ¿cuáles son la densidad de carga y la expresión de en el sistema considerado en la parte (b)?

6.- Encontrar las distribuciones de carga y corriente que darían lugar a los siguientes potenciales:

$$\phi = 0, \qquad \vec{\mathbf{A}} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 k}{4c}\left(ct - |x|\right)^2 \hat{\mathbf{u}}_z, & |x| < ct \\ \vec{\mathbf{0}}, & |x| > ct \end{cases}$$

donde k es una constante y $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

7.- (a) Determinar las expresiones de los campos, y las distribuciones de carga y corriente, correspondientes a los potenciales:

$$\phi(\vec{\mathbf{r}},t) = 0, \qquad \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,t}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$

(b) Usar el la función gauge:

$$\lambda = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,t}{r}$$

para transformar los potenciales y comentar el resultado.

8.- Una carga puntual dependiente del tiempo $q(t)$ situada en el origen, $\rho(\vec{\mathbf{r}},t) = q(t)\delta^3(\vec{\mathbf{r}})$, siendo $\delta^3(\vec{\mathbf{r}})$ la delta de Dirac, está alimentada por una corriente $\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -(1/4\pi)(\dot{q}/r^3)\vec{\mathbf{r}}$, donde $\dot{q} \equiv dq/dt$.

(a) Verificar que la carga se conserva confirmando que se verifica la ecuación de continuidad.
(b) Encontrar los potenciales escalar y vector en el gauge de Coulomb.
(c) Obtener los campos y comprobar que éstos satisfacen las ecuaciones de Maxwell.

9.- El potencial vector para un campo magnetostático uniforme es

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{r}})$$

Probar que, en este caso, se tiene:

$$\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{v}})$$

donde $d\vec{\mathbf{A}}/dt = \partial\vec{\mathbf{A}}/\partial t + (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathbf{A}}$ es la *derivada convectiva*. Demostrar que la ecuación:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{p}} + q\vec{\mathbf{A}}) = -\vec{\nabla}[q(\phi - \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}})]$$

donde $\vec{\mathbf{p}}$ es el momento lineal, proporciona la ecuación de movimiento correcta. $\vec{\mathbf{p}} + q\vec{\mathbf{A}}$ es el momento canónico.

10.- Dada una onda electromagnética plana en el vacío determinada por los vectores $\vec{\mathbf{E}}(z,t) = E_0 \cos[\omega(t - z/c)]\hat{\mathbf{u}}_x$ y $\vec{\mathbf{B}}(z,t) = (E_0/c)\cos[\omega(t - z/c)]\hat{\mathbf{u}}_y$, obtener una pareja de potenciales $\vec{\mathbf{A}}$ y ϕ correspondiente a esos campos y que satisfagan el *gauge* de Lorenz.

11.- Un átomo de hidrógeno tiene un potencial medio dado por la expresión:

$$\phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-2r/a}$$

donde r es la distancia al núcleo puntual y a es una constante positiva. Determinar la densidad de carga que da origen a este potencial y comprobar que la carga total es nula.