Movimiento relativo: el tiro

1 Introducción

Podemos considerar el tiro parabólico ha sido siempre uno de los problemas típicos de iniciación a la cinemática. Es fácil visualizarlo en la vida cotidiana, como por ejemplo en la trayectoria de un balón. El tiro parabólico es una aproximación al movimiento que un objeto que cruza la atmósfera sin ningún sistema de propulsión o sustentación.

Dentro de esta definición entran los proyectiles de artillería clásicos. Hace poco más de un siglo, se desarrollaron cañones que tenían alcances de una o dos decenas de kilómetros. Esto comportó el problema de como apuntarlos.

El problema no era sencillo, se tenía que tener en cuenta múltiples factores, tanto en el alcance (velocidad inicial, desgaste del cañón, temperatura, densidad del aire, viento, curvatura de la Tierra, rotación de la Tierra...) como en la deriva (autogiro del proyectil, viento, rotación de la Tierra,...) del proyectil. Para intentar resolver este problema, se utilizaron lo que podríamos llamar como computadoras mecánicas. A pesar de ello, la complejidad era tal, que en general la única forma de saber dónde caería un proyectil era disparándolo. Así que a partir de los datos, se daba una predicción, se disparaba y se corregía a partir de los datos de observación del punto de caída. El procedimiento se consideraba optimo, si a la tercera salva se "centraba el blanco" [1]

Uno de esos factores que tuvieron que preocuparse era la rotación de la Tierra. En esta práctica vamos a intentar analizar cuál es su efecto sobre un tiro parabólico puro, con velocidades similares a aquellos proyectiles[2] .

2 Tiro sistemas de referencia en rotación relativa

Al disparar a grandes distancias el movimiento de rotación de la Tierra se ha de tener en cuenta.

Partimos de un sistema de referencia que rota con la Tierra y otro fijo (que denotaremos por '). Estos dos sistemas de referencia comparten origen, siendo su eje zeta coincidente con el eje de rotación de la Tierra.

Partiendo del caso general

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{r} \times \vec{\alpha} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2\vec{v} \times \vec{\omega} \tag{1}$$

donde el término $(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \omega$ es llamado centrípeto y $2\vec{v} \times \vec{\omega}$ es la llamada fuerza de Coriolis.

Para el caso terrestre, donde la rotación no sufre alteraciones ($\alpha = 0$) y donde $\vec{a'} = \vec{g}$ queda reducida a

[1] Es decir, los proyectiles caían alrededor del blanco.

[2] En el desarrollo del programa se omite los efectos del aire y de la curvatura del planeta.

$$\vec{a} = \vec{g} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2\vec{v} \times \vec{\omega} \tag{2}$$

Considerando que el cambio de latitud debido al movimiento del proyectil es despreciable, el término centrípeto solo depende de la latitud ϕ del punto de lanzamiento, siendo su módulo [3]

$$/(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \omega/ = 0.3373 \cdot \cos(\phi). \tag{3}$$

Su dirección está dentro del plano definido por la velocidad angular y el radio del punto y es perpendicular al vector velocidad angular.

Para poder trabajar, hemos definido en el sistema de referencia local, el eje x mirando al sur, el eje y al este y z el vertical. Debemos dar 2 ángulo el de alzada (ángulo sobre la horizontal) y el de orientación (plano XY).

El término de Coriolis se ha de calcular en cada momento. En este sistema de referencia la velocidad angular de la Tierra es

$$\vec{\omega} = (\omega_x, 0, \omega_y) = \omega(-\cos(\phi), 0, \sin(\phi)), \tag{4}$$

Así el término de Coriolis

$$2\vec{v} \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z \end{vmatrix}$$

$$2v_y\omega_z\vec{i} + 2(v_z\omega_x - v_x\omega_z)\vec{j} - 2v_y\omega_x\vec{k} \tag{5}$$

3 Cuestiones

- En el programa, la aceleración se ha modificado con dos términos, fuerza centrípeta y fuerza de Coriolis. Puedes indicar cuál de ellas es más importantes. (Prueba a anular una u otra y ver cómo sería el movimiento.)

- En el primer programa intenta modificar los ángulos de lanzamiento para que el tiro caiga lo más cerca posible de la posición predicha por el tiro parabólico puro. tq. el error sea mínimo

- En el segundo programa vemos cómo la dirección en la que disparemos afecta al el tiro. Intenta razonar cuál es el origen de esta diferencia.

- Prueba a modificar la latitud y analiza cómo afecta. Si nos desplazamos al hemisferio Sur (latitudes negativas) se observa algún cambio.

[3]Tomando la velocidad angular de la Tierra $\pi/43200$ rad/s y el radio de la Tierra por 6378 km.