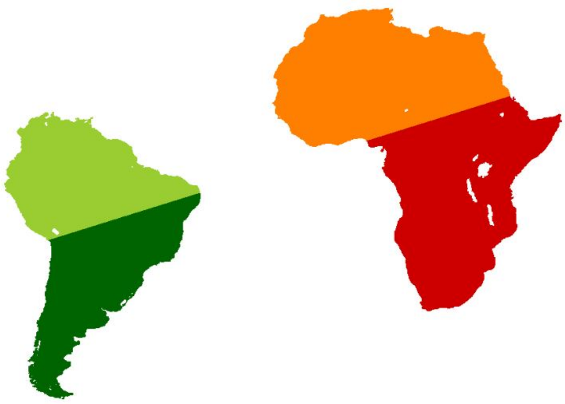
Partiendo tortitas

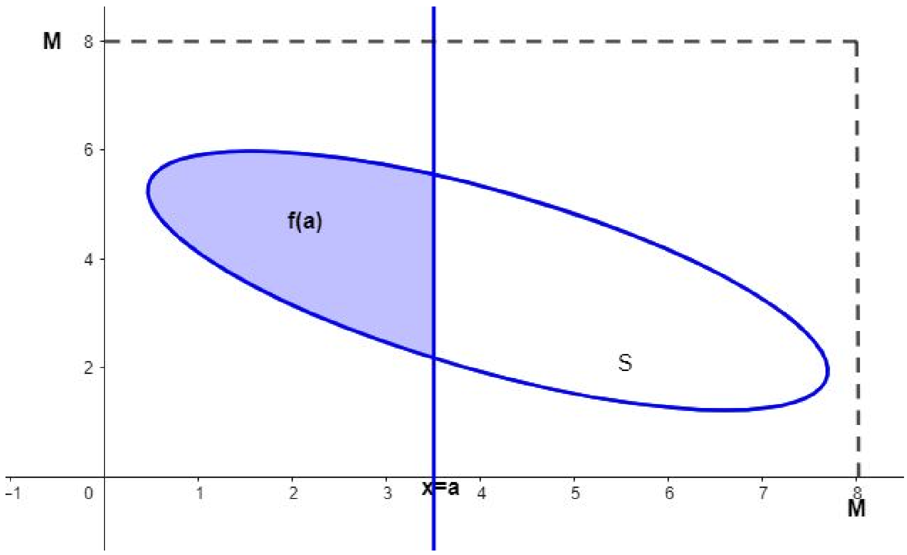


El objetivo de este control es probar el **Teorema de las Tortitas**, que informalmente hablando dice que dos tortitas colocadas sobre una mesa pueden partirse por la mitad (sin moverlas) con un único corte recto. En la imagen[a] de la izquierda se muestra un ejemplo de un corte recto que parte Sudamérica y Europa por la mitad[b]

[a]Imagen extraída de la web `https://scientificgems.wordpress.com/2021/06/30/the-pancake-theorem/`

[b]Partir por la mitad debe entenderse como partir en dos regiones con el mismo área.

1. **(3 puntos)** En este primer apartado vamos a ver que se puede partir una tortita en dos partes con el mismo tamaño con un corte recto en una dirección fija. Para ello, fijamos un eje de coordenadas de manera que nuestra tortita S se encuentra dentro del cuadrado $[0, M] \times [0, M]$ y la dirección en la que queremos cortar es la del eje y. Definimos la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que $f(a)$ **es el área de** S **que queda a la izquierda de la recta** $x = a$. Teniendo en cuenta que $|f(a) - f(b)|$ es el área de la porción de S comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = b$, encuentra una cota superior[1] para $|f(a) - f(b)|$ y deduce que f es una función uniformemente continua.



2. **(1.5 puntos)** Deduce que existe un corte vertical que divide a S en dos partes con el mismo área.

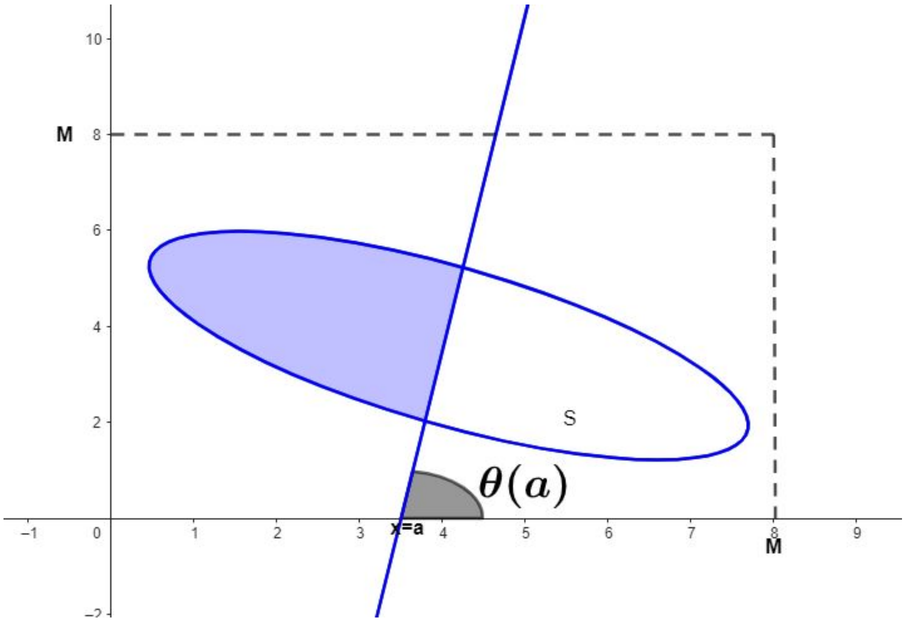
   Además, si la tortita no consta de varios trozos (lo que supondremos a partir de ahora), entonces el corte vertical que divide a S en dos partes con el mismo área es único.

[1]Recuerda que si una región S_1 está contenida en una región S_2, entonces el área de S_2 es mayor que el área de S_1.

En general, si fijamos un sistema de referencia cualquiera, acabamos de probar que **dado un ángulo cualquiera** $\theta \in [0, \pi)$, existe una **única** recta formando un ángulo θ con el eje x, que divide a S en dos partes con el mismo área.

De manera análoga se puede comprobar que si tomamos un punto P del plano **cualquiera** entonces existe una **única** recta que pasa por P y divide a S en dos partes con el mismo área.

Fijemos ahora un sistema de coordenadas de manera que nuestra tortita S se encuentra por encima del eje x al igual que antes. Para cada $a \in \mathbb{R}$, definimos la función $\theta \colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$ de manera que $\theta(a) \in (0, \pi)$ es el ángulo que forma la recta que pasa por el punto $(a, 0)$ y divide a S en dos partes iguales con el eje x. Es sencillo comprobar que θ es una función **estrictamente creciente**, ya que si $a_1 < a_2$ y $\theta(a_1) \geq \theta(a_2)$, entonces la tortita S constaría de dos trozos separados por las rectas que pasan por $(a_1, 0)$ con pendiente $\theta(a_1)$ y $(a_2, 0)$ con pendiente $\theta(a_2)$.



3. (3 puntos) Teniendo en cuenta la reflexión anterior, deduce si la función $\theta \colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$ que acabamos de definir es inyectiva o suprayectiva. ¿Será θ una función continua[2]? ¿Existirá $\lim_{x \to \pi} \theta(x)$?¿y $\lim_{x \to 0} \theta(x)$? ¿Cuánto valdrán?

4. (3 puntos) Suponemos ahora que tenemos dos tortitas S_1 y S_2 y situamos el eje de coordenadas de manera que ambas tortitas quedan por encima del eje x. Utilizando las funciones θ_1 y θ_2 del apartado anterior para las tortitas S_1 y S_2 respectivamente, deduce que existe un corte recto que parte ambas tortitas en dos partes con el mismo área.

[2]Para este apartado es interesante repasar bien los resultados de teoría vistos en clase.