Grado en Física, Curso 2023-2024

Mecánica Estadística

Problemas

Tema 1: Introducción a métodos estadísticos

1. Si se lanzan seis dados a la vez, calcula la probabilidad de obtener:
   (a) Un único dado con el 1
   (b) Exáctamente dos dados con el 1
   (c) Al menos un dado con el 1

2. Se elige un número aleatorio entre 0 y 1. Calcula la probabilidad de que exáctamente 5 de sus 10 primeras posiciones decimales sean menores de 5.

3. En la ruleta rusa se introduce una única bala en el cargador del revólver, dejando vacíos los otros cinco huecos. Se gira el cargador aleatoriamente y se dispara. Calcula:
   (a) la probabilidad de seguir vivo tras jugar N veces.
   (b) la probabilidad de sobrevivir tras jugar N-1 veces, y morir la N-ésima vez que se juega.
   (c) la media de veces que un jugador tiene la oportunidad de jugar.

4. Considera el problema del camino aleatorio en una dimensión con igual probabilidad de ir a la izquierda que a la derecha, $p = q$ y considera $m = n_1 - n_2$ como el desplazamiento neto a la derecha, donde n_1 es el número de saltos a la derecha y n_2 el número de saltos a la izquierda. Después de un total de N pasos, calcula los siguientes valores medios: (a) $\overline{m}$, (b) $\overline{m^2}$, (c) $\overline{m^3}$.

5. Dos borrachos están juntos exactamente en el centro de una calle unidimensional, con la misma probabilidad de dar un paso a la derecha o a la izquierda. Calcula la probabilidad de que se vuelvan a encontrar juntos tras dar N pasos. (Supón que dan los pasos simultáneamente).

6. Supón que en un libro de 600 páginas hay 600 errores tipográficos distribuidos aleatoriamente. Usa la distribución de Poisson para calcular la probabilidad de que:
   (a) una página no contenga ningún error.
   (b) una página contenga como mínimo tres errores.

7. Considera el problema del camino aleatorio en una dimensión, suponiendo que en cada paso el desplazamiento es siempre positivo y con probabilidad uniformemente distribuida entre $l - b$ y $l + b$, con $b < l$. Después de N pasos, calcula

   (a) el desplazamiento medio $\overline{x}$

   (b) la dispersión $\overline{(x - \overline{x})^2}$

8. Repite el problema anterior considerando que en cada paso la probabilidad no es uniforme en un intervalo, sino Gaussiana

$$w(s)ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, e^{-(s-l)^2/2\sigma^2} ds$$

9. El teorema central del límite dice que si sumamos un número N muy grande de variables aleatorias con dispersión finita, la variable suma tiene siempre una distribución Gaussiana, independientemente de la naturaleza de la distribución aleatoria de las variables que sumamos. El valor medio de la variable suma será $\overline{S} = N\overline{s}$ y su dispersión $\sigma_S^2 = N\,\sigma_s^2$, donde $\overline{s}$ y σ_s^2 son el valor medio y la dispersión de la variable aleatoria que se suma. Considera un polímero, que consiste de un número muy grande N de unidades moleculares que se encadenan una a continua de otra aleatoriamente orientadas en el espacio. La unidad molecular tiene longitud a. Prueba que la probabilidad de que el vector desplazamiento entre el inicio y el final del polímero sea $\mathbf{R}$ es:

$$P(\mathbf{R}, N) = \left(\frac{3}{2\pi N a^2} \right)^{3/2} e^{-3R^2/2Na^2}.$$

Tema 1: Soluciones

1. (a) 0.40 ; (b) 0.20 ; (c) 0.66
2. 0.246
3. (a) $\left(\frac{5}{6}\right)^N$; (b) $\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}$; (c) 6
4. (a) $\overline{m} = 0$; (b) $\overline{m^2} = N$; (c) $\overline{m^3} = 0$
5. $\frac{(2N)!}{(N!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$
6. (a) e^{-1} ; (b) 0.080
7. (a) Nl ; (b) $Nb^2/3$
8. (a) Nl ; (b) $N\sigma^2$