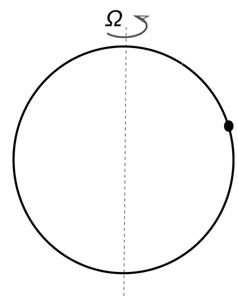
Examen Final de Mecánica Analítica.

12 de junio de 2023

1. Una partícula de masa m está ensartada en un aro de radio R. El aro está situado en un plano vertical y gira alrededor de su diámetro vertical con una velocidad angular Ω, como indica la figura. La partícula puede deslizar sin rozamiento por el aro y sobre ella actúa la fuerza de la gravedad.



   (a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? Obtén la lagrangiana del sistema.

   (b) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

   (c) Obtén la hamiltoniana. ¿Se conserva? ¿Es igual a la energía? Interpreta el resultado.

   (d) Obtén las condiciones iniciales, si es que existen, para que la partícula describa un movimiento circular uniforme. ¿Cuál sería el radio de la circunferencia que describe?

2. La lagrangiana de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético es

$$L = \frac{1}{2} m\,\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - e\,\phi + e\,\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}.$$

   Considera el caso en que la partícula se mueve en el plano $x - y$ y $\phi = -E_x\,x$, $\vec{A} = (0, B_z\,x, 0)$, donde E_x y B_z son constantes.

   (a) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

   (b) Obtén los momentos canónicos. ¿Se conserva alguno de ellos? Interpreta el resultado en base a alguna simetría de la lagrangiana.

   (c) Obtén la hamiltoniana en función de los momentos y las ecuaciones de Hamilton.

   (d) Para el caso $E_x = 0$, y considerando la rotación infinitesimal

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x + \epsilon\,y \\ y &\longrightarrow -\epsilon\,x + y \\ \dot{x} &\longrightarrow \dot{x} + \epsilon\,\dot{y} \\ \dot{y} &\longrightarrow -\epsilon\,\dot{x} + \dot{y} \end{aligned}$$

   aplica el teorema de Noether y obtén la cantidad conservada asociada.

3. Las dos partículas de la figura tienen la misma masa m y pueden deslizar sin rozamiento por las rectas paralelas. El muelle sujeto a una de las partículas tiene un extremo fijo que dista a de una de las rectas y la distancia entre las rectas es también a. Los muelles tienen una constante elástica k y longitud natural de equilibrio $\ell_0 = 0$. Usando las coordenadas indicadas, x_1 y x_2,

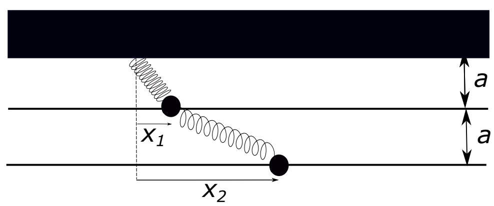
   (a) Obtén la lagrangiana del sistema.

   (b) A partir de la expresión de la energía potencial, obtén las coordenadas x_1 y x_2 para que el sistema esté en equilibrio.

   (c) Obtén las frecuencias propias de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.

   (d) Obtén los modos normales (sin normalizar) y dibuja esquemáticamente cómo se moverían las partículas en cada modo.

   (e) Estando el sistema en la posición de equilibrio le comunicamos a la partícula que está arriba una velocidad inicial v_1, ¿qué velocidad inicial le tendrímos que comunicar a la otra partícula para excitar sólo el modo de menor frecuencia. ¿Y el de mayor frecuencia?



4. Dada la transformación $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$

$$\begin{aligned} Q &= q + t\,e^p \\ P &= p, \end{aligned}$$

   (a) Demuestra que es una transformación canónica.

   (b) Obtén una función generatiz de tipo F_2 de la transformación.

   (c) Si la hamiltoniana de un sistema es

$$H = q + t\,e^p,$$

   usa la transformación dada para obtener la nueva hamiltoniana y las ecuaciones de hamilton correspondientes.

   (d) Obtén la solución de las ecuaciones de hamilton del apartado anterior y úsala para obtener $q(t)$ y $p(t)$ con las condiciones iniciales $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$.

5. Una partícula se mueve sobre el eje x y su energía potencial es $U(x) = -F\,x$, siendo F una constante.

   (a) Escribe la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente.

   (b) Obtén una solución completa para la función principal de Hamilton.

   (c) A partir de ella obtén el movimiento de la partícula, $x(t)$, con condiciones iniciales en $t = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Interpreta el resultado.