1. Enunciar y demostrar el teorema de Caserati-Weierstrass. (1pto)

— Si z_o es una sigularidad esencial de f, probar que no existe $\lim_{z\to z_o} f(z)$ en $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. (0.5 ptos)

Sea z_0 una singularidad esencial de $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa en $D \subset \mathbb{C}$

$z \to z_0$ y $|f(z) - w| < \varepsilon$ $\forall w \in D$ $\quad \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0$

$\to |z - z_0| < \delta$

Es decir, que en las proximidades de una singularidad esencial la función se aproxima arbitrariamente a cualquier número complejo. Una singularidad se dice esencial si no es un polo ($\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$) ni un $\lim_{z\to z_0} |f(z)| - K$

$\boxed{\text{R. Abs.}}$

Si $|z - z_0| < \delta$ pero $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ y $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - w}$ holomorfa en D excepto en los polos de f

$\Longleftrightarrow f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + w$

$\lim_{z\to z_0} g(z) = 0 \Rightarrow f(z)$ tiene un polo en z_0 $\lightning$

$\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0 \Rightarrow z_0$ no es singularidad de f $\lightning$

$\square$

$\boxed{\text{R. Abs}}$

(1) Asumimos que $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = K$, pero por definición de z_0 como singularidad esencial, $\lim_{z\to z_0} |f(z)| \neq \infty$ y $\lim_{z\to z_0} |f(z)| \neq K$ $\lightning$

(2) Asumimos que $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, pero por definición de z_0 como singularidad esencial, $\lim_{z\to z_0} |f(z)| \neq K$ y $\lim_{z\to z_0} |f(z)| \neq \infty$ $\lightning$

Por (1) y (2) $\Rightarrow$ Si z_0 es singularidad $\lim_{z\to z_0} f(z) \neq K$ y $\lim_{z\to z_0} f(z) \neq \infty \Rightarrow \nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$ en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

2. Sea $f(z) = \dfrac{log(senh(z))}{z^2+2}$. Clasificar sus singularidades incluyendo infinito. (1.5 ptos)

— Hallar el residuo de sus singularidades aisladas. (0.5 ptos)

$f(z) = \dfrac{\log(\sinh(z))}{z^2+2}$ singularidades en $z^2 + 2 = 0 \Longleftrightarrow z^2 = -2 \Longleftrightarrow$ $\boxed{z = \pm i\sqrt{2} \to \text{Aisladas, polos orden } 1}$

$\lim_{z\to\infty} \dfrac{\log(\sinh(z))}{z^2+2} = \lim_{w\to 0} \dfrac{\log(\sinh(\frac{1}{w}))}{\frac{1}{w^2}+2} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Aislada, no es un polo porque } \lim_{z\to\infty} f(z) \neq \infty}$

$\log(z)$ tiene problemas de analiticidad en $Re(z) \leq 0$
$\sinh(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \Rightarrow$ analítica en $\mathbb{C}$
$\Rightarrow \log(\sinh(z))$ tendrá problemas de analiticidad para $\sinh(z) \leq 0$

$\operatorname{arcsinh}(0) = 0$

falta encontrar cuándo $Re(\sinh(z)) < 0$

$Re(\sinh(z)) = Re\left(\frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})\right) < 0 \Longleftrightarrow Re(e^{z} - e^{-z}) < 0 \Longleftrightarrow Re(e^{2z} - 1) < 0 \Longleftrightarrow Re(e^{2z}) < 1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2x < 0 \Longleftrightarrow x < 0$ con $z = x + yi$

$\Rightarrow$ $\boxed{Re(z) \leq 0 \text{ singularidades no aisladas}}$

$Res(\infty, f)$, $Res(i\sqrt{2}, f)$, $Res(-i\sqrt{2}, f)$

$z^2 + 2 = 0 \Longleftrightarrow z = \pm i\sqrt{2} \Longleftrightarrow z^2 + 2 = (z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2})$

$Res(i\sqrt{2}, f) = \lim_{z\to i\sqrt{2}} (z - i\sqrt{2}) f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{2}} (z - i\sqrt{2}) \dfrac{\log(\sinh(z))}{z^2+2} = \lim_{z\to i\sqrt{2}} \cancel{(z - i\sqrt{2})} \dfrac{\log(\sinh(z))}{\cancel{(z - i\sqrt{2})}(z + i\sqrt{2})} = \lim_{z\to i\sqrt{2}} \dfrac{\log(\sinh(z))}{z + i\sqrt{2}} =$

$\boxed{= \dfrac{\log(\sinh(i\sqrt{2}))}{i2\sqrt{2}}}$

$\boxed{Res(-i\sqrt{2}, f) = \dfrac{\log(\sinh(-i\sqrt{2}))}{-i2\sqrt{2}}}$

$\boxed{Res(\infty, f) = \lim_{w\to 0} w \dfrac{\log(\sinh(\frac{1}{w}))}{\frac{1}{w^2}+2} = \lim_{w\to 0} \dfrac{w^3 \log(\sinh(\frac{1}{w}))}{1 + 2w^2} = 0}$

6. Dado $\alpha \in \mathbb{N}$ y $f(z) = senh(\pi z^{\alpha})$

i) Calcular formalmente el exponente de convergencia. (0.75 ptos)

ii) Si $\alpha = 1$, hallar la factorización de Hadamard de f. (1 pto)

$f(z)=0 \iff \sinh(\pi z^{\alpha})=0 \iff z^{\alpha} = \frac{1}{\pi} n\pi i = ni \iff z = \sqrt[\alpha]{ni}$

$M = \inf\{k>0 : \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z_n|^k} < \infty\}$ con $|z_n| = \sqrt[\alpha]{ni}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(ni)^{k/\alpha}}$ converge si $\frac{k}{\alpha} > 1 \Rightarrow k > \alpha \Rightarrow M = \alpha$

¿$g(z)$?

Si $\alpha = 1$ $f(z) = \sinh(\pi z)$ $f(z) = e^{g(z)} \prod_k \left(1-\frac{z}{z_k}\right) = e^{g(z)} \prod_k \left(1 - \frac{z}{(ni)^k}\right)$

5. Determinal el número de raíces de $e^z - 5z^3 + 2 = 0$ en $D(0,1)$ (0.75 ptos)

D disco centrado en cero y de radio uno (disco unidad)

Vamos a usar el T^{ma} de Rouché, que si g, h son holomorfas en un dominio simplemente conexo D y $|g(z)| > |h(z)|$ en ∂D, entonces $g(z)$ y $g(z)+h(z)$ tienen el mismo número de ceros en D.

$f(z) = g(z) + h(z) = e^z - 5z^3 + 2 \Rightarrow g(z) = -5z^3$ $h(z) = e^z + 2$

g holomorfa en $\mathbb{C}$ por ser un polinomio

$e^z = e^{x+iy}$, verificamos holomorfía con Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$g(z) = u(x,y) + iv(x,y) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos(y) = e^x\cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin(y) = -e^x\sin(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array}\right\} \Rightarrow e^z \text{ es holomorfa en } \mathbb{C}$$

Como g, h son holomorfas en $\mathbb{C}$, lo son también en D } $\Rightarrow$ Podemos aplicar el T^{ma} de Rouché

El disco unidad es simplemente conexo

$|g(z)| = |-5z^3| = 5 > e + 2 = |e^z + 2| = |h(z)| \Rightarrow f(z) = g(z) + h(z)$ tiene el mismo número de ceros en D que $g(z)$ en D

en ∂D

Como $g(z) = -5z^3$ es un polinomio de grado 3, por el T^{ma} Fundamental del Álgebra, sabemos que tendrá 3 raíces

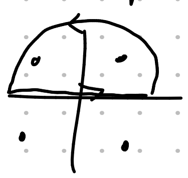
$g(z) = 0 \Rightarrow -5z^3 = 0 \Rightarrow z = 0$ con multiplicidad 3 y $0 \in D \Rightarrow f(z)$ tiene 3 ceros en D

4. Utilizar el teorema de los residuos en la siguiente integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{9xsen(\pi x)}{x^4+4} dt$. (2 ptos) Lo ¿x?

$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{9x\sin(\pi x)}{x^4+4}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{9x(e^{i\pi x} - e^{-i\pi x})}{2i(x^4+4)}dx = \frac{9}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i\pi x}}{x^4+4}dx - \frac{9}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{-i\pi x}}{x^4+4}dx$$

Tendremos problemas de analiticidad cuando $x^4 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\pm 2i} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = i+1 \\ x_2 = -i+1 \\ x_3 = -i-1 \\ x_4 = i-1 \end{cases}$



Sólo tendremos en cuenta x_1 y x_4 $f(x) = \frac{xe^{i\pi x}}{x^4+4}$

$$\text{Res}(f, x_1) = \lim_{x\to x_1} (x - x_1)\frac{xe^{i\pi x}}{x^4+4} = \lim_{x\to i+1} \cancel{(x-i-1)} \frac{xe^{i\pi x}}{\cancel{(x-i-1)}(x+i-1)(x+i+1)(x-i+1)} =$$

$$= \lim_{x\to i+1} \frac{xe^{i\pi x}}{(x+i-1)(x+i+1)(x-i+1)} = \frac{(i+1)e^{\pi(i-1)}}{2i(2i+2)\cdot 2} = \frac{e^{\pi(i-1)}}{8i}$$

$$\text{Res}(f, x_4) = \lim_{x\to i-1} \cancel{(x-i+1)} \frac{xe^{i\pi x}}{(x-i-1)(x+i-1)(x+i+1)\cancel{(x-i+1)}} = \frac{(i-1)e^{-\pi(i+1)}}{-2\cdot(2i-2)2i} = \frac{e^{-\pi(i+1)}}{-8i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i\pi x}}{x^4+4}dx = \frac{2\pi i}{8i}\left(e^{\pi(i-1)} - e^{-\pi(i+1)}\right) = \frac{\pi}{4}\left(e^{\pi(i-1)} - e^{-\pi(i+1)}\right)$$

Análogamente para $g(x) = \frac{xe^{-i\pi x}}{x^4+4}$

$$\text{Res}(g,x_1) = \lim_{x \to i+1} \frac{xe^{-i\pi x}}{(x+i-1)(x+i+1)(x-i+1)} = \frac{e^{-\pi(i-1)}}{8i} \qquad \text{Res}(g,x_2) = \frac{e^{\pi(i+1)}}{-8i} \Rightarrow$$

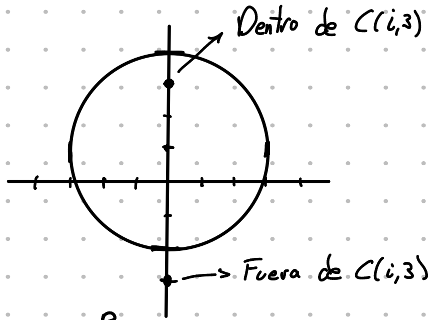
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-i\pi x}}{x^4+4}dx = \frac{2\pi i}{8i}\left(e^{-\pi(i-1)} - e^{\pi(i+1)}\right) = \frac{\pi}{4}\left(e^{-\pi(i-1)} - e^{\pi(i+1)}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{9x\sin(\pi x)}{x^4+4}dx = \frac{9}{2i}\cdot\frac{\pi}{4}\left(\left(e^{\pi(i-1)} - e^{-\pi(i+1)}\right) - \left(e^{-\pi(i-1)} - e^{\pi(i+1)}\right)\right) =$$

$$= \frac{9\pi}{8i}\left(\underbrace{e^{\pi(i-1)}}_{-e^{-\pi}} \underbrace{- e^{-\pi(i-1)}}_{e^{\pi}} + \underbrace{e^{\pi(i+1)}}_{-e^{\pi}} \underbrace{- e^{-\pi(i+1)}}_{e^{-\pi}}\right) = 0$$

3. Calcular las siguientes integrales.

i) $\int_{C(i,3)} \frac{1}{(z^2+9)^3}dz$ mediante fórmulas de Cauchy. (1 pto)



$(z^2+9)^3 = 0 \Rightarrow z^2+9 = 0 \to z = \pm 3i$

Dos polos de orden 1

$$\int_{C(i,3)} \frac{1}{(z^2+9)^3}dz = \int_{C(i,3)} \frac{1}{((z-3i)(z+3i))^3}dz = \int_{C(i,3)} \frac{1}{(z-3i)^3(z+3i)^3}dz = \int_{C(i,3)} \left(\frac{A}{(z-3i)^3} + \frac{B}{(z+3i)^3}\right)dz =$$

$$\frac{A}{(z-3i)^3} + \frac{B}{(z+3i)^3} = \frac{A(z+3i)^3 + B(z-3i)^3}{(z-3i)^3(z+3i)^3} \Rightarrow A(z+3i)^3 + B(z-3i)^3 = 1 \Rightarrow$$

$$\to A(z^3+9iz^2-27z-27i) + B(z^3-9iz^2-27z+27i) \Rightarrow \begin{cases} A(9z^2-27) + B(-9z^2+27) = 0 \Rightarrow A = B \\ A(z^3-27z) + B(z^3-27z) = 1 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = B = \frac{1}{2z(z^2-27)}$$

$$= \int_{C(i,3)} \frac{1}{2z(z^2-27)(z-3i)^3}dz + \int_{C(i,3)} \frac{1}{2z(z^2-27)(z+3i)^3}dz =$$