T.D. 4 : Diferenciación.

Ejercicio 1

Estudiar la diferenciabilidad de la función

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ con } f(0,0) = 0.$$

Ejercicio 2

Estudiar la diferenciabilidad de la función

$$f(x,y) = \sqrt{1 + |x|y^2}$$

en $(0,0)$ y en $(0,1)$.

Ejercicio 3

Estudiar en el punto $(0,0,0)$ la diferenciabilidad de la función

$$f(x,y) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ con } f(0,0,0) = 0.$$

Ejercicio 4

Sea f la función definida en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. ¿Es la función f continua en $(0,0)$?
2. ¿Admite la función f derivadas parciales en $(0,0)$?
3. ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

Ejercicio 5

Sea f la función definida en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. ¿Es, la función f, continua en $\mathbb{R}^2$?
2. ¿Es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$?
3. ¿Es diferenciable en $\mathbb{R}^2$?

Ejercicio 6

1. Demostrar que, par todos (x, y) de reales tenemos $|xy| \leq x^2 - xy + y^2$.
2. Sea f la función definida en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^p - y^q}{x^2 - xy + y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   con p y q enteros naturales no nulos.
   ¿Para que valores de p y q esta función es continua ?
3. Demostrar que si $p + q = 2$ entonces f no es diferenciable.
4. Se supone que $p + q = 3$ y que f admite una diferencial en $(0, 0)$. Justificar que, entonces, existen dos constantes a y b tales que $f(x, y) = ax + by + o(\|(x, y)\|)$.
   Estudiando las aplicaciones parciales $x \mapsto f(x, 0)$ y $y \mapsto f(0, y)$, justificar que $a = b = 0$. Concluir, con la ayuda de $x \mapsto f(x, x)$, que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Ejercicio 7

Sea $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto M^{-1}$. Donde $GL_n(\mathbb{R})$ es el grupo de las matrices regulares.

1. Demostrar que ϕ es diferenciable en I_n y calcular su diferencial en este punto.
2. Misma pregunta para un $M \in GL_n(\mathbb{R})$ cualquiera.

Ejercicio 8

1. Demostrar que las aplicaciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ siguientes son de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$.
   a.
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   b.
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \ln(x^2 + y^2), & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
2. ¿Son, las funciones siguientes, definidas en $\mathbb{R}^2$, de clase C^1 ?
   a.
$$f(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   b.
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c.

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ejercicio 9

Sean $f(x,y) = (x^2+y, xy-1)$ y $g(x,y) = \sqrt{1+|x|y^2}$. Estudiar la diferenciabilidad de $g \circ f$ en $(-1,-1)$ y encontrar $(g \circ f)'(-1,-1)$.

Ejercicio 10

Si $\mathbf{x} = (x,y)$ y $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, calcular **df(x,h)** para la función $\mathbf{f}(x,y) = (e^x \cos y, x^y)$.

Ejercicio 11

Regla invariante de Cauchy :

Sea $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$, con $A \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en el punto $\mathbf{a}$ y $\mathbf{g} : B \to \mathbb{R}^p$, con $B \subset \mathbb{R}^m$, diferenciable en el punto $\mathbf{b} = \mathbf{f(a)}$.
Si en **dg(b,k)** se pone **k=df(a,h)** se obtiene **d(gøf)(a,h)**.

Usando esta regla, y también sin usarla, hallar dz cuando $z = g(x,y)$ e $y = h(y)$.

Ejercicio 12 **Funciones homogeneas**

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y sea $r \in \mathbb{R}$. Se dice que f es **homogenea** de grado r si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ \ f(tx,ty) = t^r f(x,y).$$

1. Demostrar que si f es homogenea de grado r, entonces sus derivadas parciales son homogeneas de grado $r-1$.
2. Demostrar que f es homogenea de grado r si y sólo si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = r f(x,y).$$

3. Si suponemos que f es de clase C^2, demostrar que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = r(r-1)f(x,y).$$

Ejercicio 13

Probar que la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ es homogénea en $\mathbb{R}^2$ usando la definición y mediante el Teorema de Euler.

"Mi trabajo ha intentado siempre unir la verdad con la belleza; pero si en alguna ocasión tuve que decidirme entre una y otra, escogí la belleza." [H. Weyl (1885-1955)].