CONTROL II 2019 | 2 — TEMA 5 — (1'75 puntos) ~ M19.1

1 El campo eléctrico de una onda electromagnética plana en el vacío que se propaga a lo largo del eje z (por lo que ninguna magnitud es función ni de x ni de y) viene dado por la ecuación: $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos[\omega(t - z/c)]\,\hat{u}_x$ y además se tiene que el potencial escalar es nulo ($\phi = 0$). Determina:

[A] El valor del potencial vector $\bar{A}$ y el vector campo magnético $\bar{B}$ de la onda electromagnética.

[B] Comprobar que los potenciales $\bar{A}$ y ϕ satisfacen el gauge de Lorentz.

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla\phi^{\,0} \iff \bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \iff \bar{A} = -\int \bar{E}\,dt \iff \bar{A} = -\int E_0\cos[\omega(t - z/c)]\,dt \iff$$

$$\iff \boxed{\bar{A} = -\frac{1}{\omega}E_0\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\hat{u}_x \quad \left[\frac{Wb}{m}\right]}$$

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A} = (0, B, 0) \iff \begin{cases} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} = B \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \xrightarrow{A_y = A_z = 0} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} = B \end{cases}$$

$$B = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{\omega}E_0\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\right) = \overbrace{\frac{1}{c}E_0}^{B_0}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right] \iff \boxed{\bar{B} = B_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\hat{u}_y}$$

El gauge de Lorentz se escribe como $\partial_\mu A^\mu = 0$ con $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \bar{\nabla}\right)$ y $A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \bar{A}\right)$

$$\boxed{\mu=0} \implies \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\phi}{c} = 0 \quad \text{ya que } \phi = 0$$

$$\boxed{\mu=1} \implies \frac{\partial}{\partial x}A^1 = \frac{\partial}{\partial x}A_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\omega}E_0\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\right) = 0$$

$$\boxed{\mu=2} \implies \frac{\partial}{\partial y}A^2 = \frac{\partial}{\partial y}A_y = 0 \quad \text{ya que } A_y = 0$$

$$\boxed{\mu=3} \implies \frac{\partial}{\partial z}A^3 = \frac{\partial}{\partial z}A_z = 0 \quad \text{ya que } A_z = 0$$

2 Una carga puntual describe un movimiento hiperbólico a lo largo del eje x que viene dado por la ecuación $\bar{r}(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}\ \hat{x}$ $(-\infty < t < \infty)$. [en relatividad especial, esta es la trayectoria de una partícula sometida a una fuerza constante a lo largo del eje x y cuyo valor es $F = mc^2/b$; se denomina "movimiento hiperbólico" pues representa una rama de hipérbola en el plano $x-ct$]. Determinar para un punto p situado en el eje x a la derecha de la carga:

[A] El tiempo de retardo t' en función de x y del tiempo "actual" t.

$$\left.\begin{aligned} t' &= t - \frac{R}{c} \\ \bar{R} &= \bar{r} - \bar{r}' \end{aligned}\right\} \iff t' = t - \frac{x - \sqrt{b^2 + (ct')^2}}{c} \iff \overbrace{c(t'-t) = \sqrt{b^2+(ct')^2} - x}^{\circledast} \iff (c[t'-t] + x)^2 = b^2 + (ct')^2 \iff$$

$$\iff c^2(t-t')^2 + x^2 + 2xc(t'-t) = b^2 + (ct')^2 \iff (ct')^2 + (ct)^2 - 2c^2t't + x^2 + 2xct' - 2xct = b^2 + (ct')^2$$

$$\iff (x-ct)^2 + 2ct'(x-ct) = b^2 \iff \boxed{t' = \frac{b^2 - (x-ct)^2}{2c(x-ct)}}\ \circledast$$

[B] La velocidad de la carga v en función del tiempo retardado t', así como en función de x y del tiempo "actual" t.

$$\bar{v}(t') = \frac{\partial \bar{r}'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}\left(\sqrt{b^2 + (ct')^2}\right) = \boxed{\frac{c^2t'}{\sqrt{b^2 + (ct')^2}}} \overset{\circledast}{\iff} v' = \frac{c^2t'}{c(t'-t) + x} = \frac{c^2t'}{ct' - ct + x} = c\left[\frac{b^2 - (x-ct)^2}{2(x-ct)}\right]\frac{1}{\left[\frac{b^2 - (x-ct)^2}{2(x-ct)}\right] + x - ct}$$

$$\iff v' = \frac{c\left[\frac{b^2 - (x-ct)^2}{2\cancel{(x-ct)}}\right]}{\left[\frac{b^2 - (x-ct)^2 + 2(x-ct)^2}{2\cancel{(x-ct)}}\right]} \iff \boxed{\bar{v}(x,t) = c\,\frac{b^2 - (x-ct)^2}{b^2 + (x-ct)^2}}$$

[C] Demostrar que la potencia radiada es constante y viene dada por la ecuación $P_r = \frac{q^2c}{6\pi\varepsilon_0 b^2} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{F}{m}\right)^2$ (Teniendo en cuenta que la velocidad es relativista).

FÓRMULA DE LIÉNARD $\quad P_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c}\gamma^6\left[\dot{\bar{\beta}}^2 - (\bar{\beta} \times \dot{\bar{\beta}})^2\right]$ $\quad$ Movimiento rectilíneo $\iff \bar{\beta} \parallel \dot{\bar{\beta}} \Rightarrow \bar{\beta} \times \dot{\bar{\beta}} = 0$

$$P_r = \frac{q^2|\dot{\bar{v}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\gamma^6 \quad \text{con} \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\dot{\bar{v}} = c\dot{\bar{\beta}} = \frac{\partial v(t')}{\partial t} = \frac{c^2\sqrt{b^2 + c^2t'^2} - \frac{c^2t' \cdot 2c^2t'}{2\sqrt{b^2 + c^2t'^2}}}{b^2 + c^2t'^2} = \frac{c^2b^2 + c^4t'^2 - c^4t'^2}{(b^2 + c^2t'^2)^{3/2}} \iff \dot{\bar{v}} = \frac{c^2b^2}{(b^2 + c^2t'^2)^{3/2}} \quad (1)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{c^2t'^2}{b^2 + c^2t'^2}} = \frac{1}{\frac{b^2 + c^2t'^2 - c^2t'^2}{b^2 + c^2t'^2}} = \frac{b^2 - c^2t'^2}{b^2} \quad (2)$$

Sustituimos (1) y (2) en la fórmula de Liénard $P_r = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}|\dot{\bar{v}}|^2\gamma^6 \iff P_r = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{c^4b^4}{(b^2 + c^2t'^2)^3} \cdot \frac{(b^2 - c^2t'^2)^3}{b^6}$

$$\iff \boxed{P_r = \frac{q^2c}{6\pi\varepsilon_0 b^2}} \text{ (constante)}$$

$$P_r = \frac{q^2c}{6\pi\varepsilon_0 b^2} = \frac{q^2c^4}{6\pi\varepsilon_0 b^2c^3} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{c^2}{b}\right)^2 \xleftrightarrow{F = \frac{mc^2}{b}} \boxed{P_r = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{F}{m}\right)^2}$$

3 Un condensador de láminas planoparalelas de capacidad C y separación entre las placas d, tiene una carga inicial $(\pm Q_0)$. Entonces se contacta a una resistencia R y se descarga de modo que la carga es $Q_0 e^{-t/RC}$

A) ¿Qué fracción de su energía inicial $(Q_0^2/2C)$ es radiada?

$$p = Qd \quad y \quad \frac{\partial W_{rad}}{\partial t} = \frac{|\ddot{p}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \Longleftrightarrow \frac{\partial W_{rad}}{\partial t} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\cdot\frac{(Q_0 d)^2}{(RC)^4} e^{-2t/RC} \quad (3)$$

$$(1) \bullet \ \dot{p}(t) = \frac{\partial p}{\partial t}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[Q_0 d e^{\frac{-t}{RC}}\right] = \frac{-Q_0 d}{RC} e^{-t/RC}$$

$$(2) \bullet \ \ddot{p}(t) = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(t) = \frac{\partial \dot{p}}{\partial t}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{Q_0 d}{RC} e^{-t/RC}\right] = \frac{Q_0 d}{(RC)^2} e^{-t/RC}$$

$$(3) \Longleftrightarrow W_{rad} = \frac{(Q_0 d)^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 (RC)^4}\int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt = \frac{(Q_0 d)^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3 (RC)^3}$$

$$\frac{W_{rad}}{W_0} = \frac{\frac{Q_0^2 d^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3 (RC)^3}}{\frac{Q_0^2}{2C}} = \boxed{\frac{d^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 R^3 C^2}}$$

B) Si $C = 1\,pF$, $R = 1000\,\Omega$ y $d = 0'1\,mm$, ¿Cuál es el valor de esta fracción? En electrónica normalmente no nos preocupamos sobre las pérdidas por radiación. ¿Esto es razonable en este caso?

$$\frac{W_{rad}}{W_0} = \frac{10^{-4}}{6\pi(8'85\cdot10^{-12})(3\cdot10^8)^3\cdot10^6\cdot10^{-12}} = 2'22\cdot10^{-9}\,J$$

→ Es un valor despreciable ya que nos hallamos en el rango de 10^{-9}, errores en la construcción del condensador pueden ser más significativos.

4 En la teoría del átomo de Bohr para el hidrógeno, el electrón en su estado fundamental se supone que gira en una órbita circular de radio r_0 manteniendo su órbita por acción de la atracción culombiana del protón. De hecho, con la electrodinámica clásica, este electrón radiaría, describiendo una trayectoria en espiral hasta caer en sobre el protón. Suponiendo que cada revolución es esencialmente circular, que la aceleración tangencial es muy pequeña comparada con la aceleración centrípeta y que la velocidad del electrón es no relativista ($v \ll c$)

A Determina la velocidad de la carga negativa en función de un radio genérico r.

$$q^+ = -q^- \Longleftrightarrow F = \frac{kq^2}{r^2} = ma = m\frac{v^2}{r} \Longleftrightarrow \frac{kq^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Longleftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{kq^2}{rm}} = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r m}} \; m/s} \quad (1)$$

B Determina la energía total de la carga negativa en función de un radio genérico r y la pérdida de energía por radiación entre los radios $r = r_0$ y $r = r_0/2$.

$$W = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kq^2}{r} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\frac{kq^2}{r} - \frac{kq^2}{r} = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{kq^2}{r} \; J}$$

Sabemos que $\frac{\partial W_{rad}}{\partial t} = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \Longleftrightarrow \frac{dW_{rad}}{dt} = \frac{q^2|\dot{\vec{v}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \Longleftrightarrow W_{rad} = \int \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\cdot\frac{v^4}{r^2}\,dt$ (2)

Sacamos el diferencial con la Fórmula de Larmor $\frac{q^2 v^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3 r^2} = -\frac{dW}{dt} = -\frac{dW}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{kq^2}{r^2}\frac{dr}{dt} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \frac{v^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{dt} \Longleftrightarrow dt = -\frac{3}{4}\frac{c^3}{v^4}\,dr \quad (3)$$

Sustituyendo en (2) $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow W_{rad} = -\int_{r_0}^{r_0/2} \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,\frac{v^4}{r^2}\cdot\frac{3c^3}{4v^4}\,dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r_0/2} -\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{r_0} - \frac{1}{r_0}\right] = \boxed{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}}$$

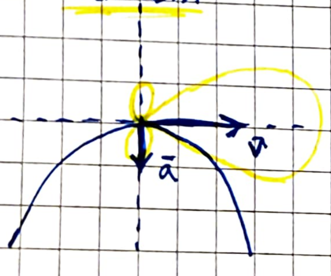
C El tiempo que tarda la órbita en disminuir su radio de $r = r_0$ a $r = r_0/2$

Sustituyendo (1) en (3) $dt = -\frac{3}{4}c^3\frac{r^2 m^2}{k^2 q^4} \Longleftrightarrow \int_0^t dt = \int_{r_0}^{r_0/2} -\frac{3}{4}c^3\frac{r^2 m^2}{k^2 q^4}\,dr \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow t = -\frac{3}{4}c^3\frac{m^2}{k^2 q^4}\int_{r_0}^{r_0/2} r^2\,dr = \frac{-3c^3 m^2}{4k^2 q^4}\left[\frac{r_0^3}{8\cdot 3} - \frac{r_0^3}{3}\right] = \boxed{\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{q^4}\,c^3\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 r_0^3 \; s}$$

D Hacer un esquema de la distribución angular de la radiación dibujando los vectores velocidad y aceleración. ¿Cómo sería esta distribución angular si el movimiento del electrón fuera no relativista?

RELATIVISTA



NO RELATIVISTA