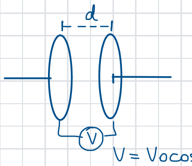
Hoja 2 - ec Maxwell, leyes de conservación

1.- El agua de mar a frecuencia $\nu = 4 \times 10^8$ Hz tiene permitividad $\varepsilon = 81\varepsilon_0$, permeabilidad $\mu = \mu_0$, y resistividad $\rho = 0.23\ \Omega\cdot$m. Considerando un condensador de láminas plano paralelas en agua de mar con un voltaje entre sus extremos $V_0\cos(2\pi\nu t)$, determinar la relación entre la corriente de conducción y la corriente de desplazamiento.

AGUA MAR $\begin{cases} \nu = 4\cdot 10^8\ Hz \\ \varepsilon = 81\varepsilon_0 \\ \mu = \mu_0 \\ \rho = 0'23\ \Omega\cdot m \end{cases}$ CONDENSADOR: $V = V_0\cos(2\pi\nu t)$

Relación corriente de conducción y de desplazamiento?



· Densidad de corriente de desplazamiento: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J_d}$

· Corriente de conducción: $\vec{J_c} = \sigma\vec{E}$

1. Calculamos la corriente de desplazamiento:

$$\vec{J_d} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\cdot\vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\cdot\frac{V}{d}\right) = \frac{\varepsilon}{d}\cdot\frac{d}{dt}(V_0\cos(2\pi\nu t)) =$$

no hay carga ligada, $\vec{P}=0$ $\vec{E}$ en un condensador de placas plano-paralelas $\Rightarrow E = \frac{V}{d}$ donde $V = V(t)$

$$= \frac{\varepsilon}{d}V_0\cdot 2\pi\nu\cdot(-\sin(2\pi\nu t)) = -\frac{\varepsilon V_0 2\pi\nu}{d}\sin(2\pi\nu t)$$

2. Calculamos la corriente de conducción:

$$\vec{J_c} = \sigma\vec{E} = \sigma\cdot\frac{V}{d} = \frac{\sigma}{d}\cdot V_0\cos(2\pi\nu t)$$

$\vec{E}$ en un condensador de placas plano-paralelas

3. Buscamos la relación entre ambas magnitudes (las dividimos).

$$\frac{J_d}{J_c} = \frac{-\frac{\varepsilon \cancel{V_0} 2\pi\nu}{\cancel{d}}\sin(2\pi\nu t)}{\frac{\sigma}{\cancel{d}}\cdot\cancel{V_0}\cos(2\pi\nu t)} = -\frac{\varepsilon}{\sigma}2\pi\nu\cdot\tan(2\pi\nu t)$$

Vamos a buscar también la relación entre amplitudes.

$$\left(\frac{J_d}{J_c}\right)_{amplitudes} = \frac{+\frac{\varepsilon \cancel{V_0} 2\pi\nu}{\cancel{d}}}{\frac{\sigma}{\cancel{d}}\cdot\cancel{V_0}} = +\frac{2\pi\nu\,\varepsilon}{\sigma} = +0'415$$

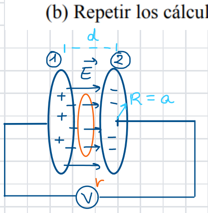
trabajamos con las amplitudes en positivo

sustituyendo, ojo $\sigma = \frac{1}{\rho}$

2.- Un condensador de capacidad C está formado por dos placas circulares paralelas de radio a y está conectado a una diferencia de potencial V.

(a) Determinar el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ en el interior del condensador cuando sus placas se separan lentamente con velocidad constante v.

(b) Repetir los cálculos considerando el condensador aislado.



a) Vamos a suponer que la placa 2 se mueve con respecto a la placa 1 con velocidad $\vec{v}$. La distancia entre placas la tendremos que dar como:

$$d(t) = d + vt$$

El cambio entre la distancia de las placas nos lleva a una variación del campo eléctrico, y esta variación genera un campo magnético $\vec{B}$ entre placas (a causa de la corriente de descarga que se genera).

A partir de la 4ª ley de Maxwell vemos que:

$$\cdot \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{\text{dentro del condensador hay aire}} \int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,dt = \mu_0\varepsilon_0\cdot\pi a^2\cdot\frac{dE}{dt} \quad (1)$$

vamos a integrar sobre la placa de área circular $S = \pi a^2$ (saco la derivada xq $\vec{E}$ no depende de R)

- $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = |\vec{B}|\, 2\pi r \quad (2)$

integramos sobre un camino circular de radio $r < a$

- $\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V}{d}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{V}{d+vt}\right) = V \cdot \frac{-v}{(d+vt)^2} \quad (3)$

$\Rightarrow$ sustituimos (3) y (2) en (1):

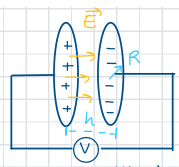
$|\vec{B}|\cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \pi a^2 V \cdot \frac{-v}{(d+vt)^2}$; $|\vec{B}| = \frac{-v a^2 \mu_0 \varepsilon_0 V}{(d+vt)^2 \cdot 2r}$ (T), $0 < r < a$

b) Si un condensador está aislado (y dejamos de hacer la suposición de que las placas se alejan), entonces esto implica que no hay una descarga de sus placas y por ello el campo $\vec{E}$ es independiente del tiempo. Como no hay variación de $\vec{E}$, no se induce ningún campo $\vec{B}$. Vamos a ver esto formalmente:

CONDENSADOR AISLADO $\Rightarrow q = cte \Rightarrow \vec{E} = cte \rightsquigarrow \oint_L \vec{B}\, d\vec{l} = \mu\varepsilon \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dS = 0 \Rightarrow \vec{B} = 0$

3.- Consideremos un condensador plano de capacidad C formado por dos placas circulares de radio a separadas una distancia h. El medio entre las placas es aire y se aplica una fuerza electromotriz alterna de alta frecuencia a sus electrodos de forma que el voltaje entre los centros de las placas es $V(t) = V_0 \operatorname{sen}\omega t$. Si se desprecia el efecto de bordes, determinar los campos eléctrico y magnético en el interior del condensador.

consideramos que en el borde se comporta igual (aunque en la realidad esto no ocurre)



$V(t) = V_0 \sin\omega t$

1. Cálculo campo $\vec{E}$

OJO! En cilíndricas y así $\vec{B}$ más fácil

$\vec{E} = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{h}\cdot \sin\omega t = E_0 \sin\omega t\, \hat{z}$ V/m, $E_0 = \frac{V_0}{h}$

2. Cálculo campo $\vec{B}$ mediante la ley de Ampère-Maxwell

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ds$$

(1) $\oint_L \vec{B}\, d\vec{l} = 2\pi r |\vec{B}|$

consideramos como camino un círculo cerrado de radio $0 < r < a$

(2) $\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ds = \pi a^2 \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} = \pi a^2 E_0 \omega \cos\omega t$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\pi r |\vec{B}| = \pi a^2 E_0 \omega \cos\omega t$, $\vec{B} = \frac{a^2 V_0 \omega}{2 r h} \cos\omega t = B_0 \cos\omega t\, \hat{\varphi}$ (T)

OJO! Esta solución nos da cuando hemos hecho una aproximación cuasiestática, es decir, una aproximación para la cual por ser ω muy chiquitita, podemos considerar que B no cambia con el tiempo. Vamos a ver a continuación cómo habría que hacerlo si queremos ajustarnos más a la realidad.

CORRECCIÓN AL CASO CUASIESTÁTICO

1. Primero vamos a ver cómo varía el campo $\vec{B}$

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -B_0 \omega \sin(\omega t) = -\frac{a^2 V_0 \omega^2}{2rh} \sin(\omega t) \approx 0$ en cuasiestático

2. Aplicamos la ley de Faraday para "corregir" $\vec{E}$:

$\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \Rightarrow \oint_L \vec{E}_2\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}_1 d\vec{S}$;

integramos $\vec{E}_2$ en un rectángulo que abarque ambas placas

no me queda muy claro de dónde viene

$; -E_2 \cdot h = -\frac{d}{dt}\int_0^r \frac{\varepsilon \mu \omega r E_0}{2} \cos\omega t h\, dr \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{E}_2 = -\frac{1}{[illegible]} \varepsilon \mu \omega^2 r^2 E [illegible] \sin\omega t\, \hat{z}$

A partir de este valor de $\vec{E}_2$ (con el que podemos ver que el campo eléctrico disminuye cuando nos alejamos del centro de las placas) podemos construir $\vec{B}_2$, y así sucesivamente. La aproximación "buena" de los campos la veremos como una suma de todos estos campos:

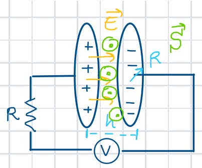
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \qquad \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots$$

Estos sumatorios se pueden escribir empleando polinomios de Bessel (porro).

4.- Un condensador de capacidad C está formado por dos placas circulares paralelas de radio a separadas una distancia h. El condensador se carga mediante una resistencia R conectada en serie a una diferencia de potencial V_0. La corriente en R y la carga q en las placas son, respectivamente:

$$I = \frac{V_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \qquad q = \int_0^t I\,dt$$

(a) Obtener la corriente de desplazamiento en el condensador.
(b) Calcular el flujo del vector de Poynting a través de la superficie cilíndrica de radio a y altura h comprendida entre las placas del condensador.



$$I = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$$

$$q = \int_0^t I dt$$

a) $\vec{J}_d$?

Lo primero que hay que hacer es dar q (y para ello necesitamos dar q). Sabemos, por los apuntes del tema 1, que podemos establecer esta relación entre ddp:

ley Ohm, $C = q/V$

$$\Rightarrow \quad V_0 = \Delta V_R + \Delta V_C = IR + \frac{q}{C}$$

No podemos despejar directamente q de esta ecuación porque hay que tener en cuenta que es una edo:

$$V_0 - \frac{dq}{dt}R - \frac{q}{C} = 0 \; ; \; \frac{dq}{dt}R = V_0 - \frac{q}{C} \quad ; \; \frac{dq}{dt} = \frac{V_0}{R} - \frac{q}{CR} \; ; \; dt = \frac{RC}{CV_0 - q}dq$$

$$\Rightarrow \text{INTEGRAMOS} \Rightarrow -t = -RC\ln\left(\frac{1}{CV_0 - q}\right) + K = +RC\ln(C\cdot V_0 - q) + K$$

para meter el − a la dcha hay que multiplicarlo todo

$$; -\frac{t}{RC} - K = \ln(CV_0 - q) \; ; \; e^{-t/RC - K} = CV_0 - q$$

$$; q(t) = -\hat{K}e^{-t/RC} + CV_0 \Rightarrow$$ ¿Cuál es el valor de $\hat{K}$? Forzamos que $q(t=0) = 0$

$$q(0) = -\hat{K} + CV_0 = 0 \Rightarrow \hat{K} = CV_0$$

$$\Rightarrow q(t) = CV_0(1 - e^{-t/RC}) \quad (C)$$

Ahora ya podemos buscar la corriente de desplazamiento:

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\vec{E}) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V}{d}\right) = \varepsilon\frac{d}{dt}\left[\frac{C}{\varepsilon S}\cdot V_0(1 - e^{-t/RC})\right] =$$

$V = \frac{q}{C}$

d no es la distancia entre placas, sino que $d = \frac{\varepsilon S}{C}$ ⇒ + fácil con $\sigma = \frac{q}{S}$ (densidad superficial)

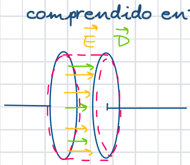
él lo tiene con un −, es necesario o según lo que tomemos >0 ?

$$= \frac{V_0 C}{\pi a^2}\left[\frac{1}{R}e^{-t/RC}\right]\hat{z} \; (A/m^2)$$

$S = A_{circ} = \pi a^2$

↳ esto será ∥ a como hayamos definido $\vec{E}$ (ya que $\vec{D} \parallel \vec{E}$) ⇒ se usa $\hat{z}$ xq se usan cilíndricas

b) Flujo del vector de Poynting a través del cilindro de radio a y altura h comprendido entre las placas del condensador.



Por definición:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$

1. Buscamos $\vec{E}$ sabiendo que conocemos la expresión de $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \int_0^t \vec{J}_d\,dt' \Rightarrow \vec{E} = \frac{C}{\varepsilon S}V_0(1 - e^{-t/RC}) = \underbrace{\frac{V_0 C}{\varepsilon\pi a^2}}_{E_0}(1 - e^{-t/RC})\,\hat{z} \; (V/m)$$

2. Para dar H, primero tenemos que calcular B. Esto lo haremos con la ley

de Ampere-Maxwell $\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \mu\varepsilon \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Longrightarrow}} B2\pi a = \mu\varepsilon\cancel{\pi a^2} \frac{V_0 \cancel{C}}{\cancel{\varepsilon\pi a^2}} \cdot \frac{1}{R\cancel{C}} e^{-t/RC}$;

(1) $\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = B2\pi a \Rightarrow$ integramos sobre un círculo de radio a

(2) $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{V_0 \cancel{C}}{\varepsilon\pi a^2} \cdot \frac{1}{R\cancel{C}} e^{-t/RC}$

; $\vec{B} = \frac{V_0 \mu}{2\pi a R} e^{-t/RC}\, \hat{\varphi}$ (T)

Ahora usamos la relación $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} = \frac{V_0}{2\pi a R} e^{-t/RC}\, \hat{\varphi}$ (A/m)

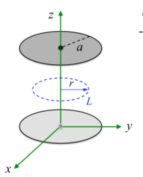
Ya podemos calcular S, teniendo en cuenta que trabajamos en coordenadas cilíndricas.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ 0 & 0 & E \\ 0 & H & 0 \end{vmatrix} = -E \cdot H \hat{\rho} = -\frac{V_0 C}{\varepsilon\pi a^2}(1 - e^{-t/RC}) \cdot \frac{V_0}{2\pi a R} e^{-t/RC} =$$

$$= \frac{V_0{}^2 C}{2\varepsilon\pi^2 a^3 R} e^{-t/RC} (e^{-t/RC} - 1)\ \hat{\rho} \quad (W/m^2)$$

OTRA FORMA DE HACERLO SIN PASAR POR $\vec{B}$

Aplicando la ley de Ampère-Maxwell entre los campos $\vec{D}$ y $\vec{H}$:



Aplicando la ley de Ampère-Maxwell teniendo en cuenta que entre las placas del condensado $\vec{J} = 0$, queda:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

y en forma integral:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

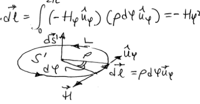
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S'} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$$

Como $\vec{D}$ tiene el sentido $-\hat{u}_z$, $\vec{H}$ sólo tiene componente H_φ y además:

$$\vec{H} = -H_\varphi \hat{u}_\varphi$$

Así pues:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (-H_\varphi \hat{u}_\varphi)(\rho\, d\varphi\, \hat{u}_\varphi) = -H_\varphi 2\pi\rho$$



$$\int_{S'} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}' = \int_{S'} \frac{-V_0}{\pi a^2 R} e^{-t/RC} \hat{u}_z \cdot ds'$$

$$= -\frac{V_0}{\pi a^2 R} e^{-t/RC} \underbrace{\int_{S'} ds'}_{\pi\rho^2}$$

es decir:

$$\int_{S'} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}' = -\frac{V_0 \rho^2}{a^2 R} e^{-t/RC}$$

y aplicando la ley de Ampère-Maxwell:

$$-H_\varphi 2\pi\rho = -\frac{V_0\rho^2}{a^2 R} e^{-t/RC}$$

$$H_\varphi = \frac{V_0 \rho}{2\pi a^2 R} e^{-t/RC}$$

vemos que se llega a lo mismo $\Longrightarrow$

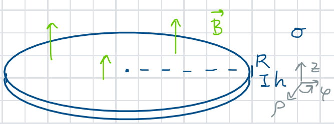
Ahora que ya tenemos el vector de Poynting, hemos de calcular su flujo total sobre el cilindro (en concreto tomando una sección infinitesimal en la pared del cilindro e integrando sobre esta).

$$\int_S \vec{S}\, ds = \int_0^{2\pi} |\vec{S}| \underbrace{h a\, d\varphi}_{} = |\vec{S}| 2\pi a h = \frac{V_0{}^2 C h}{\varepsilon\pi a^2 R} e^{-t/RC}(e^{-t/RC} - 1)$$

área de un trocito del giro, puesto que será h·b con b el perímetro de la circun.

aquí esto se puede escribir como $C = \varepsilon \frac{\pi a^2}{R}$ y simplificar más

5.- Un disco delgado de radio R, espesor h y conductividad σ se somete a un campo magnético uniforme lentamente variable con el tiempo de la forma $B(t) = B_0 \operatorname{sen}\omega t$ y perpendicular al disco. ¿Cuál es el valor medio temporal de la potencia disipada en el disco?



σ $\vec{B}(t) = B_0 \sin\omega t\ \hat{z}$ (T)

Valor medio de la potencia disipada?

La potencia disipada por unidad de volumen la damos como:

$\frac{dP}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2 \Rightarrow$ Hay que dar $\vec{E}$, y lo vamos a relacionar con B mediante la ley de Faraday

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$\Rightarrow$ LEY DE FARADAY

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}\, ds \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}}$

(1) $\oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = |\vec{E}|\, 2\pi r$

integramos sobre un círculo de radio r $(0<r<R)$

$$(2)\ \int_S \vec{B}\,d\vec{s} = \int_S B_0 \sin\omega t\, ds = B_0 \sin\omega t\, \pi r^2$$

integramos sobre un segmento del plano de radio r y ángulo $d\varphi$ (multiplicar por área círculo)

$$\Rightarrow |\vec{E}|2\pi r = -\frac{d}{dt}\left(B_0 \sin\omega t \cdot \pi r^2\right);\quad \vec{E} = -\frac{1}{2}B_0\omega r \cos\omega t\ \hat{z}\ \ (V/m)$$

Retomamos la expresión de la potencia disipada por unidad de volumen:

$$\frac{dP}{dV} = \sigma \vec{E}^2 = \sigma \frac{1}{4} B_0^2 \omega^2 r^2 \cos^2\omega t \quad (W/m^3)$$

no tomamos $\vec{E}$ sobre el círculo entero!!

$$\Rightarrow P = \int_V \sigma \frac{1}{4} B_0^2 \omega^2 r^2 \cos^2\omega t\, dV = \frac{1}{4}\sigma B_0^2 \omega^2 \cos^2\omega t \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho^3 d\rho\, d\varphi\, dz =$$

$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

$$= \frac{1}{16}\sigma B_0^2 \omega^2 R^4 2\pi h \cos^2\omega t = \frac{1}{8} R^4 \pi h \sigma B_0^2 \omega^2 \cos^2\omega t\ \ (W)$$

Ahora nos queda calcular su valor medio:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{8} R^4 \pi h \sigma B_0^2 \omega^2 \cos^2\omega t =$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$I_n = \int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \,\mathrm{sen}\, u + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

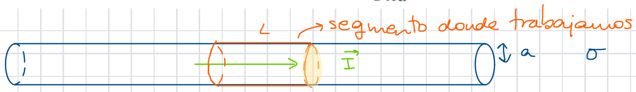
CV $u = \omega t$, $dt = \frac{1}{\omega} du$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\cdot \frac{1}{8} R^4 \pi h \sigma B_0^2 \omega^2 \cdot \frac{1}{\omega}\left[\frac{1}{2}\cos u \,\cancel{\sin u}^{\,0} + \frac{1}{2}u\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{16} R^4 h \sigma B_0^2 \omega^2 \pi\ \ (W)$$

6.- Sea una cable conductor cilíndrico, rectilíneo e indefinido de radio a y conductividad σ que transporta una corriente estacionaria de intensidad I uniformemente distribuida en su sección transversal. Mostrar, con ayuda del teorema de Poynting, que la potencia disipada en un segmento de longitud L corresponde a la expresión de Joule:

$$P = \frac{L}{\sigma \pi a^2} I^2$$



$\vec{I}$ uniformemente distribuida $\rightarrow$ no varía con ρ

TEOREMA DE POYNTING: en un recinto cerrado donde existen cargas eléctricas en movimiento, la energía electromagnética más la energía interna se conserva si el flujo del vector $\vec{E}\times\vec{H}$, llamado vector de Poynting es cero.

$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ $\longrightarrow$ representa el flujo de energía

La ley de conservación de la energía se escribe por lo tanto de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{S} = -\vec{J}\cdot\vec{E} \iff \frac{dW_{EM}}{dt} = -\int_S (\vec{E}\times\vec{H})\,d\vec{s} - \int \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV$$

densidad volumétrica de corriente

1. Cálculo W_{EM}: tenemos el dato de que la corriente es estacionaria, y como trabajamos en un recinto cerrado donde hay cargas en movimiento, la energía se conservará. Esto implica que:

$$W_{EM} = cte \Rightarrow W_{EM} \neq W_{EM}(t) \Rightarrow \frac{\partial W_{EM}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

2. Cálculo $\vec{J}$: esta va a ser la primera magnitud que vamos a dar porque es la única que viene directamente relacionada con I. Gracias a ella podremos calcular $\vec{E}$ (y luego H con este).

$$\vec{J} = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{z} \quad (C/m^3)$$

S es la superficie circular marcada

3. Cálculo $\vec{E}$ mediante la ley de Ohm: $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{\sigma \pi a^2}\hat{z}$ (N/C) (2)

~~4. Cálculo H: primero calculamos B mediante la ley de Ampère-Maxwell y luego los relacionamos.~~

$$\underbrace{\oint_L}_{\text{círculo radio } r<a} \vec{B}d\vec{l} = \mu\varepsilon \underbrace{\int_S}_{\text{círculo marcado}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \Longrightarrow |\vec{B}| 2\pi r = \mu\varepsilon$$

NO SE PUEDE HACER ASÍ PQ $\vec{E}$ NO VARÍA CON t

Vamos a dar $\vec{H}$ directamente desde $\vec{J}$ puesto que sabemos que $\vec{D}$ tampoco varía con t (al igual que $\vec{E}$):

LEY AMPÈRE - MAXWELL:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \Longrightarrow T^{ma} \text{ Stokes } \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} da \; ; \; |\vec{H}| 2\pi a^2 = I$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\vec{E}) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}) = 0$$

↳ integramos en círculo de radio $r = a$ (porque la sección es del propio cilindro)

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi a^2}\hat{\varphi} \quad (A/m) \quad (3)$$

5. Aplicamos el teorema de Poynting con (1), (2) y (3):

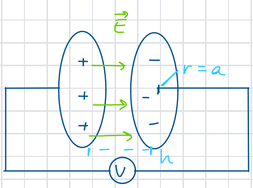
$$\frac{\partial W_{EM}}{\partial t} = -\int_S (\vec{E}\times\vec{H}) d\vec{S} - \int \vec{J}\cdot\vec{E} dV \underset{(1)}{=} 0 \Rightarrow \int \vec{J}\cdot\vec{E} dV = P = -\int_S (\vec{E}\times\vec{H}) d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \int_S |\vec{E}||\vec{H}| \, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^L \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^3} a \, d\varphi dz = \frac{I^2}{\cancel{2}\sigma\pi^2 a^{\cancel{3}}} \cdot \cancel{2}\cancel{\pi} \cdot L\cancel{a} = \frac{I^2 L}{\sigma\pi a^2} \quad (W)$$

$$\vec{E}\times\vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ 0 & 0 & |\vec{E}| \\ 0 & |\vec{H}| & 0 \end{vmatrix} = -|\vec{E}||\vec{H}|\hat{\rho}$$

7.- Un condensador plano de capacidad *C* está formado por dos placas circulares de radio *a* separadas una distancia *h* se carga hasta una diferencia de potencial *V* mediante una batería. Mostrar, con ayuda del teorema de Poynting, que la energía almacenada se corresponde con la expresión $\frac{1}{2}CV^2$, siendo la capacidad del condensador:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{h}$$



Analizamos una a una las componentes de la ley de conservación de la energía para ver qué términos se anulan:

$$\frac{dW_{EM}}{dt} = -\int_S (\vec{E}\times\vec{H}) d\vec{S} - \int \vec{J}\cdot\vec{E} dV$$

(1) $$W_{EM} = \frac{1}{2}\int_V (\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}) dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{D} \, dV \Rightarrow \text{energía acumulada que queremos despejar}$$

$\int_V \vec{H}\cdot\vec{B} dV = 0$ al evaluarla (al principio y al final es $=0$)

(2) $\int \vec{J}\cdot\vec{E} dV = 0$ porque $I = 0$ entre las placas del condensador

(3) $\int_S (\vec{E}\times\vec{H}) d\vec{S}$ no se anula

1. Cálculo campo $\vec{E}$: $\vec{E} = \frac{V(t)}{d} = \frac{V(t)}{h}\hat{z}$ — potencial depende del tiempo porque se está cargando

2. Cálculo campo $\vec{H}$: mediante la ley de Ampère-Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Longrightarrow \text{STOKES} \Rightarrow \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{D} ds \Rightarrow$$

0 entre las placas del condensador, $I = 0$

$$\Rightarrow \underset{0<r<a}{H_\varphi 2\pi r} = \frac{d}{dt}\int_S \varepsilon_0 \vec{E} \, ds = \varepsilon_0 \cdot \pi r^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{V(t)}{h}\right) = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{h} \cdot \frac{d}{dt}V(t)$$

$$\vec{H} = \frac{\varepsilon_0 r}{2h} \cdot \frac{d}{dt}V(t) \, \hat{\varphi} \quad (A/m)$$

3. Sustitución en los términos

(1) $$W_{EM} = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{D} dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V \vec{E}^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^h \frac{V^2(t)}{h^2} \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz =$$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$; $dV =$

$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot \frac{a^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{V^2(t)}{h^2} h 2\pi = \frac{1}{2h}\varepsilon_0 a^2 \pi V^2(t)$

$$(2)\quad \vec{E}\times\vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ 0 & 0 & E \\ 0 & H & 0 \end{vmatrix} = -|E||H|\,\hat{\rho} = -\frac{\varepsilon_0 r}{2h^2} V(t)\frac{d}{dt}V(t)\,\hat{\rho} = -\frac{\varepsilon_0 r}{4h^2}\frac{d}{dt}(V^2(t))\,\hat{\rho} = \vec{S}$$

$2V(t)\frac{d}{dt}(V(t)) = \frac{d}{dt}(V^2(t))$

$$\int_S \vec{E}\times\vec{H}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{h} -\frac{\varepsilon_0}{4h^2}\cdot a^2 \frac{d}{dt}(V^2(t))\, d\varphi\, dz = -\frac{\varepsilon_0}{4h} a^2 2\pi \frac{d}{dt}(V^2(t))$$

$dS_\rho = \rho\, d\varphi\, dz,\ r = a$

4. Vamos a ver que en las dos expresiones llegaremos al término deseado (aunque la que realmente nos interesa es la segunda, puesto que así veremos que se cumple el vector de Poynting:

$(1)\ W_{EM} = \frac{1}{2h}\varepsilon_0 a^2 \pi V^2(t) = \frac{1}{2} C V^2$ ✓

$C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{h}$

tiempo en que tarda en cargarse tomamos $t \to +\infty$

$$(2)\quad \frac{\partial W_{EM}}{\partial t} = -\int_S \vec{S}\, ds = +\frac{\varepsilon_0}{4h} a^2 2\pi \frac{d}{dt}(V^2(t)) \Rightarrow W_{EM} = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_0 2\pi}{4h} a^2 \frac{d}{dt} V^2(t)\, dt =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 2\pi}{4h} a^2 \int_0^{\infty} dV^2(t) = \frac{\varepsilon_0 2\pi}{4h} a^2 \left[V^2(\infty) - V^2(0)\right] = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{h} V^2 = \frac{1}{2} C V^2 \checkmark$$

8.- Determinar, con ayuda del tensor de tensiones de Maxwell, la fuerza de interacción culombiana entre las placas de un condensador plano.

TENSOR DE TENSIONES DE MAXWELL

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{materia} + \vec{P}_{EM}\right) = \oint_S (\vec{T}_x\cdot\hat{n}, \vec{T}_y\cdot\hat{n}, \vec{T}_z\cdot\hat{n})\, dS = \oint_S \overleftrightarrow{T}\cdot\hat{n}\, dS \Rightarrow$$ relación con la fuerza

$$T_{ij} = \varepsilon E_i E_j + \frac{1}{\mu} B_i B_j - \frac{1}{2}\left[\varepsilon \vec{E}\cdot\vec{E} + \frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\vec{B}\right]\delta_{ij}$$

Nos indican que trabajamos en un condensador plano, por lo que suponemos que la coordenada z es nula en todo caso (esto nos va a facilitar las cuentas). Para dar el tensor de tensiones, necesitamos primero calcular los campos E y B:

1. Calculamos $\vec{E}$ entre las placas de un condensador plano (teoría).

$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0}\hat{z}$

2. Calculamos $\vec{B}$ con la ley de Ampere-Maxwell

$\oint_L \vec{B}\, d\vec{l} = \mu\varepsilon \int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = 0$ porque $\vec{E}$ no varía con el tiempo

3. Suponemos que no tenemos momento electromagnético y aplicamos la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{materia}}{dt} = \oint_S \overleftrightarrow{T}\hat{n}\, dS\ ;\ \overleftrightarrow{T} = (\vec{T}_x, \vec{T}_y, \vec{T}_z) = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

es simétrico, nos ahorra mucha cosa

- $T_{xx} = \cancel{\varepsilon_0 E_x^2}^{\,0} - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{S^2\varepsilon_0^2} = -\frac{Q^2}{2S^2\varepsilon_0} = T_{yy}$ (porque $E_y = 0$)
- $T_{xy} = T_{yx} = 0 = T_{yz} = T_{zy} = T_{xz} = T_{zx}$
- $T_{zz} = \varepsilon_0 E_z^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{Q^2}{2S^2\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{T} = \begin{bmatrix} -\frac{Q^2}{2S^2\varepsilon_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q^2}{2S^2\varepsilon_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q^2}{2S^2\varepsilon_0} \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{T}_x \\ \vec{T}_y \\ \vec{T}_z \end{matrix}$$ y $\hat{n} = -\hat{z}$

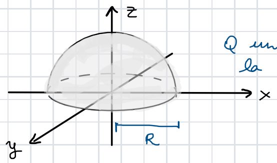
si se toma $\vec{E}$ en la dirección positiva, $\hat{n}$ va al revés xq la tomamos hacia la placa con $Q>0$

Por tanto tenemos que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \oint_S \overleftrightarrow{T}\hat{n}\, dS = -\oint_S (\vec{T}_x\cdot\hat{z}, \vec{T}_y\cdot\hat{z}, \vec{T}_z\cdot\hat{z})\, dS =$$

$$= -\oint_S \frac{Q^2}{2S^2\varepsilon_0}\, dS = \frac{-Q^2}{2S^2\varepsilon_0}\, S = \frac{-Q^2}{2S\varepsilon_0}\ (N)$$

9.- Consideremos una esfera maciza de radio R cargada con una carga Q distribuida uniformemente en todo su volumen. Determinar, con ayuda del tensor de tensiones de Maxwell, la fuerza neta que actúa sobre la semiesfera "norte" de la esfera.



Q uniforme sobre la esfera completa $\Rightarrow$ usaremos coordenadas polares

1. Calculamos el campo $\vec{E}$ debido a una distribución de carga uniforme mediante la ley de Gauss. Tomamos como superficie Gaussiana una esfera de radio r y distinguiremos varios casos.

CASO 1 : $0 < r \leq R$

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\pi R^2 \frac{\rho}{\varepsilon_0} \; ; \; |\vec{E}|\cancel{4\pi} r^2 = \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} R^2 \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{3}\frac{R^2}{r^2}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\hat{r} \quad (N/C)$$

$\rho = \frac{Q}{V}$ densidad volumétrica de carga

CASO 2 : $r > R$

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\pi R^2 \frac{\rho}{\varepsilon_0} \; ; \; |\vec{E}|\cancel{4\pi}\cancel{R^2} = \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}\cancel{R^2}\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E_r} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\rho}{\varepsilon_0}\hat{r} \quad (N/C)$$

Vamos a trabajar con el segundo resultado, puesto que vamos a tener la semiesfera norte completa.

2. Calculamos el campo $\vec{B}$ mediante la ley de Faraday.

$$\oint_c \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\, d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \neq \vec{E}(t) \Rightarrow \vec{B} = 0 \quad (T)$$

3. Calculamos el tensor de tensiones de Maxwell

$$\overleftrightarrow{T} = (\vec{T_x}, \vec{T_y}, \vec{T_z}) = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \text{tensor simétrico de orden 2}$$

Tenemos un problema: el tensor de tensiones está definido en coordenadas cartesianas y nuestro campo E está en coordenadas esféricas. Tenemos por tanto que escribirlo en función de x,y,z.

$$\vec{E_r} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\rho}{\varepsilon_0}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left[\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\right], \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

semiesfera norte

Por simetría solo tenemos fuerza en la dirección del eje z, así que solo calculamos esta componente del tensor:

$$\vec{E}^2 = \frac{1}{9}\cdot\frac{\rho^2}{\varepsilon_0^2}\left[\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \sin\theta\cos\theta\cos\varphi + \right.$$
$$+ \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos\theta\cos\varphi +$$
$$\left. + \sin\theta\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\cos\theta\sin\varphi + \cos^2\theta\right] =$$
$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{\rho^2}{\varepsilon_0^2}\left[1 + 2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \sin\theta\cos\theta\cos\varphi + \cos^2\theta\right]$$

el cuadrado se toma del módulo de $\vec{E}$

- $T_{zx} = \varepsilon_0 E_x E_z = \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{9}\cdot\frac{\rho^2}{\varepsilon_0^2}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi = T_{xz}$
- $T_{zy} = \varepsilon_0 E_y E_z = \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{9}\cdot\frac{\rho^2}{\varepsilon_0^2}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi = T_{yz}$
- $T_{zz} = \varepsilon_0 E_z^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 = \varepsilon_0\frac{1}{9}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0^2}\left[\cos^2\theta - \frac{1}{2} - \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos^2\theta\right] =$

  $= \varepsilon_0\frac{1}{9}\cdot\frac{\rho^2}{\varepsilon_0^2}\left[\frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} - \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\right] = \varepsilon_0\frac{1}{9}\cdot\frac{\rho^2}{\varepsilon_0^2}\left[\cos^2\theta - 1\right]$

4. Pasamos al cálculo del flujo del tensor de tensiones. Tenemos una semiesfera, así que vamos a dividir este cálculo en la parte circular que sirve de tapa y en la cúpula. La suma de ambas será la fuerza total.

CÚPULA : $\vec{S}_c = \hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$; $dS_r = R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

Vamos a ver componente por componente cómo queda esto:

- $T_{zx}\cdot\hat{n} = T_{zx}\cdot\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x}\cdot dS_r = \frac{1}{9}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}R^2\sin^3\theta\cos\theta\cos^2\varphi\, d\theta\, d\varphi$
- $T_{zy}\cdot\hat{n} = T_{zy}\cdot\sin\theta\sin\varphi\,\hat{y}\cdot dS_r = \frac{1}{9}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}R^2\sin^3\theta\cos\theta\sin^2\varphi\, d\theta\, d\varphi$
- $T_{zz}\cdot\hat{n} = T_{zz}\cdot\cos\theta\,\hat{z}\cdot dS_r = \frac{1}{9}\cdot\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}R^2\left[\cos^2\theta - 1\right]\cos\theta\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

Tenemos una suma de estos tres términos:

$$\sin^3\theta\cos\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\cos\theta\sin^2\varphi + \cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta =$$

$$=$$

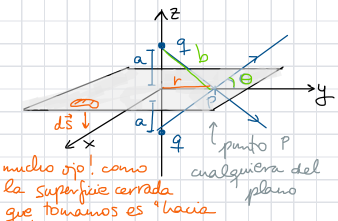
¿qué significa esto?

10.- (a) Considerar dos cargas puntuales iguales q, separadas una distancia $2a$. Considerar el plano equidistante a las dos cargas. Determinar la fuerza que ejerce una carga sobre la otra mediante la integración del tensor de tensiones de Maxwell sobre este plano.
(b) Repetir el apartado (a) si las cargas son de signo contrario.

a) De nuevo nos encontramos con que $\vec F = \frac{d\vec P_{mec}}{dt}$, de forma que nuestro problema vuelve a ser calcular el tensor de tensiones de Maxwell.

$$\vec F = \oint_S \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec S \Rightarrow$$ OJO! Integral sobre una superficie cerrada

¿Qué superficie cerrada vamos a tomar como región de integración?
Escogemos como región cerrada el plano xy (donde se hallan ambas partículas) y una semiesfera ("tapadera") cuyo radio tiende a infinito y que por ello $E = 0$ en ella.



mucho ojo! como la superficie cerrada que tomamos es "hacia arriba" desde este plano, para coger $d\vec S$ hacia afuera se coge hacia abajo

Por la simetría del problema, la fuerza solo se ejerce en la dirección del eje z. Es por ello que solo tendremos que calcular la componente T_{zz} del tensor de tensiones. Para un punto P cualquiera perteneciente al plano:

$$\vec E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\frac{q}{b^2}\cos\theta\,\hat u_r \Rightarrow \vec E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r}{b^3}\hat u_r$$

→ en P, $E_z = 0$ (se anulan las aportaciones de las cargas entre sí)

$r = b\cos\theta$ (proyección) ; $\hat u_r = \vec r/r$

Calculamos el tensor de tensiones:

$$T_{zz} = \varepsilon_0 E_z^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2\cdot\frac{r^2}{(r^2+a^2)^3}$$

y si integramos este término, nos queda la fuerza buscada:

$$\vec F = F\hat u_z = \left[\int_S(-T_{zz})dS\right]\hat u_z \Longrightarrow F = -\int_S T_{zz}\,dS = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}\frac{r^3}{(r^2+a^2)^3}dr =$$

Integramos en polares sobre todo el plano:
$dS = r\,dr\,d\varphi$; $r\in[0,+\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi]$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{r^3}{(r^2+a^2)^3}dr = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{u\,du}{(u+a^2)^3} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{u+a^2}+\frac{a^2}{2(u+a^2)^3}\right]_0^{\infty} =$$

CV $u = r^2$
$du = 2r\,dr$

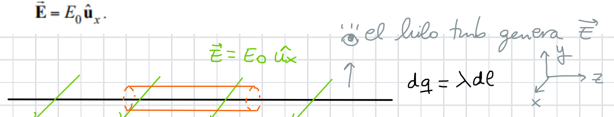
$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(2a)^2} \Rightarrow \vec F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(2a)^2}\hat u_z$$ LEY COULOMB

b) Si las cargas son de distinto signo, cambia la expresión que tenemos del campo eléctrico (puesto que en una de ambas, el campo irá en sentido contrario).

$$\vec E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,2\frac{q}{b^2}\sin\theta\,\hat u_z \quad \text{con } \sin\theta = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q\,a}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2\cdot\frac{1}{(r^2+a^2)^3} \underset{\text{integrar}}{\Rightarrow} \vec F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q(-q)}{(2a)^2}\hat u_z$$

11.- Consideremos un cable conductor rectilíneo, indefinido y de sección despreciable, cargado con densidad lineal de carga uniforme λ y situado a lo largo del eje z. Determinar, con ayuda del tensor de tensiones de Maxwell, la fuerza que experimenta el cable por unidad de longitud cuando se somete a un campo eléctrico uniforme estacionario perpendicular al cable y de la forma $\vec{\mathbf{E}} = E_0\hat{\mathbf{u}}_x$.



cierta longitud l y radio ρ (l no nos importa xq queremos $\vec F/l$)

1. Calculamos las componentes del tensor de tensiones de Maxwell. Para ello, primero tendremos que escribir el campo eléctrico en coordenadas

TEORÍA

Cartesianas: $\vec{E} = E_0\hat{x} + E_\lambda\hat{\rho} = E_0\hat{x} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho} = E_0\hat{x} + E_\lambda\sin\varphi\hat{y} + E_\lambda\cos\varphi\hat{x}$

- $T_{xx} = \varepsilon_0 E_x^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0(E_0 + E_\lambda\cos\varphi)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0[E_0 + E_\lambda\cos\varphi + E_\lambda\sin\varphi]^2 =$
  $= \frac{1}{2}\varepsilon_0(E_0 + E_\lambda\cos\varphi)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0[(E_0 + E_\lambda\cos\varphi)^2 + E_\lambda^2\sin^2\varphi]$
- $T_{zy} = T_{yz} = T_{xz} = T_{zx} = 0$ porque $E_z = 0$
- $T_{xy} = T_{yx} = \varepsilon_0 E_x E_y = \varepsilon_0(E_0 + E_\lambda\cos\varphi)\cdot E_\lambda\sin\varphi$
- $T_{zz} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_0[(E_0 + E_\lambda\cos\varphi)^2 + E_\lambda^2\sin^2\varphi]$
- $T_{yy} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_\lambda^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon_0[(E_0 + E_\lambda\cos\varphi)^2 + E_\lambda^2\sin^2\varphi] =$
  $= -\frac{1}{2}\varepsilon_0(E_0 + E_\lambda\cos\varphi)^2$

2. Integramos tomando como superficie un cilindro cerrado de radio ρ centrado en el cable ($\vec{E}$ a través de la pared del cilindro).

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T}\cdot\hat{n}\,ds = \oint_S(\vec{T_x}\cdot\hat{r}, \vec{T_y}\cdot\hat{r}, \vec{T_z}\cdot\hat{r})\,dS = \int_0^\ell\int_0^{2\pi}(T_{xx} + T_{xy})\cos\varphi\,\rho\,d\varphi\,dz =$$

CILÍNDRICAS

$\hat{r} = \cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}$
$dS_\rho = \rho\,d\varphi\,dz$ $\Rightarrow$ por la simetría del problema, la fuerza se ejerce en $\hat{x}$ *

* Si esto no queda muy claro, matemáticamente:

$\vec{T_x}\cdot\vec{r} = T_{xx}\cdot\cos\varphi\hat{x} + T_{xy}\sin\varphi\hat{y}$
$\vec{T_y}\cdot\vec{r} = T_{xy}\cdot\cos\varphi\hat{x} + T_{yy}\sin\varphi\hat{y}$ $\Rightarrow$ vamos a integrar en y con este color para ver que es 0
$\vec{T_z}\cdot\vec{r} = T_{xz}\cdot\cos\varphi\hat{x} + T_{zy}\sin\varphi\hat{y} = 0$

$$\oint_S \overleftrightarrow{T_y}\,ds = \int_0^{2\pi}\int_0^\ell(T_{xy} + T_{yy})\sin\varphi\cdot\rho\,d\varphi\,dz =$$

$$= \ell\rho\int_0^{2\pi}\varepsilon_0(\cancel{E_0} + E_\lambda\cos\varphi)\cdot E_\lambda\sin\varphi\,d\varphi + \ell\rho\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\varepsilon_0(E_0 + E_\lambda\cos\varphi)^2\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \ell\rho E_\lambda^2\int_0^{2\pi}\cancel{\cos\varphi\sin\varphi}\,d\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon_0\ell\rho\int_0^{2\pi}E_0^2\cancel{\sin\varphi} + E_\lambda^2\cancel{\cos^2\varphi\sin\varphi} + 2E_0E_\lambda\cancel{\cos\varphi\sin\varphi}\,d\varphi$$

$\Rightarrow$ sin hacer esto, vemos que va en el sentido del campo "externo"

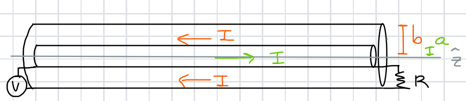
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\ell\rho\left[E_0^2\int_0^{2\pi}\cancel{\cos\varphi}\,d\varphi + E_\lambda^2\int_0^{2\pi}\cancel{\cos^3\varphi}\,d\varphi + 2E_\lambda E_0\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi - E_\lambda^2\int_0^{2\pi}\cancel{\sin^2\varphi\cos\varphi}\,d\varphi\right] +$$

$$+ \varepsilon_0\ell\rho\left[E_0E_\lambda\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi + E_\lambda^2\int_0^{2\pi}\cancel{\cos\varphi\sin^2\varphi}\,d\varphi\right] =$$

$$= 2\varepsilon_0\ell\rho E_0E_\lambda\pi = F \Rightarrow \vec{F}/\ell = 2\pi\varepsilon_0\rho E_0E_\lambda\,\hat{x} = \lambda E_0\,\hat{x}\ \ (N)$$

$E_\lambda = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}$

12.- Un cable largo coaxial de longitud *L*, está formado por un conductor cilíndrico interior de radio *a* y otro exterior de radio *b*. Los dos conductores están conectados entre sí a una batería *V* por un extremo y a una resistencia *R* por el otro. El conductor interior está cargado con densidad lineal de carga uniforme λ y transporta una corriente estacionaria hacia la derecha de intensidad *I*, mientras que el conductor externo tiene una densidad de carga de signo opuesto y la corriente va en sentido contrario. Determinar el momento lineal electromagnético asociado a esta distribución de fuentes.



- Conductor interior: λ, $\vec{I} = I\hat{z}$
- Conductor externo: $\lambda' = -\lambda$, $\vec{I} = -I\hat{z}$

Para dar el momento lineal electromagnético, también vamos a tener que calcular el tensor de tensiones de Maxwell.

1. Calculamos el campo $\vec{E}$

$\vec{E_A} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}(\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y})$

$\vec{E_B} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}(\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y})$

$$\Rightarrow \vec{E}(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < a \\ E_A(\rho), & a \le \rho < b \\ E_A(\rho) + E_B(\rho) = 0, & b \le \rho \end{cases}$$

2. Calculamos el campo $\vec{B}$ (que ahora ya no será nulo porque tenemos una corriente que lo induce)

LEY BIOT Y SAVART: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi} \rightarrow$ solo cuando $a \le \rho < b$, ya que de lo contrario $I = 0$

$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y}$

3. Calculamos las componentes del tensor de tensiones de Maxwell.

- $T_{xx} = \varepsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{\mu_0} B_x^2 - \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right] = \varepsilon_0 \frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2\rho^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2\rho^2}\sin^2\varphi -$

$- \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2\rho^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - \frac{1}{2\mu_0}\cdot\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2\rho^2}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) =$

$= \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0\rho^2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2\rho^2}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)$

- $T_{xz} = T_{zx} = T_{yz} = T_{zy} = 0$
- $T_{yy} = \varepsilon_0 E_y^2 + \frac{1}{\mu_0} B_y^2 - \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right] = \varepsilon_0 \frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2\rho^2}\sin^2\varphi + \frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2\rho^2}\cos^2\varphi -$

$- \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2\rho^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - \frac{1}{2\mu_0}\cdot\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2\rho^2}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) =$

$= \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0\rho^2}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) + \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2\rho^2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$

- $T_{zz} = \varepsilon_0 E_z^2 + \frac{1}{\mu_0} B_z^2 - \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right] = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2\rho^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) -$

$- \frac{1}{2\mu_0}\cdot\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2\rho^2}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$

4. Integramos (primero sobre la pared de un cilindro que se encuentre entre ambos conductores y luego sobre el tiempo).

$\frac{d}{dt}\vec{P}_{EM} = \oint_S \overleftrightarrow{T}\hat{\rho}\, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^L (T_{xx}\cos\varphi\hat{x} +$

$\hat{\rho} = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}$

$ds_\rho = \rho\, d\varphi\, dz$

Supongo que así también se puede hacer pero... Vaya tela tía qué forma de complicar las cosas por la cara más tonta.

TEORÍA $\vec{P}_{EM} = \int_V \vec{g}\, dV \Rightarrow \vec{g} = \mu_0\varepsilon_0 \vec{S}$

Calculamos el vector de Poynting:

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ E & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \end{vmatrix} = \vec{E}\cdot\vec{H}\,\hat{z} = \vec{E}\cdot\frac{\vec{B}}{\mu_0}\hat{z} = \frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0\rho^2}\hat{z}$$

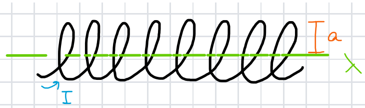
$$\vec{P}_{EM} = \int_V \vec{g}\, dV = \frac{\lambda\mu_0 I}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^L\int_a^b \frac{1}{\rho}\, d\rho\, d\varphi\, dz =$$

$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

$$= \frac{\lambda\mu_0 I}{4\pi^2}\cdot 2\pi\cdot L\cdot \ln\frac{b}{a} = \frac{\lambda\mu_0 I}{2\pi} L \ln\frac{b}{a}\,\hat{z} = \frac{VI\ell}{c^2}\hat{z}$$

QUÉ !!

13.- Consideremos un solenoide cilíndrico muy largo de radio a, con espiras muy apretadas distribuidas uniformemente a razón de n espiras por unidad de longitud y por el que se hace circular una corriente estacionaria de intensidad I. Se coloca un cable conductor rectilíneo, indefinido y de sección despreciable y cargado con densidad lineal de carga uniforme λ a lo largo del eje del solenoide. Determinar los momentos lineal y angular electromagnéticos asociados a esta distribución de fuentes.



- n espiras por ud $\ell \Rightarrow n = \frac{N}{L}$

1. Momento lineal electromagnético (primero necesitamos calcular $\vec{g}$ y para ello $\vec{E}$, $\vec{B}$).

$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho}$; $0 \le \rho \le +\infty$

$\vec{B} = \frac{N\mu_0 I}{L} = n\mu_0 I\,\hat{z} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = nI\hat{z}$; $0 \le \rho \le a$

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix} = -\vec{E}\vec{H}\,\hat{\varphi} = -\frac{\lambda n I}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\varphi}$$

$\vec{g} = \mu_0\varepsilon_0\vec{S} = -\frac{\lambda n\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$

$\vec{P}_{EM} = \int_V \vec{g}\, dV = -\frac{\lambda n\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^L\int_0^a \frac{\rho}{\rho}\, d\rho\, d\varphi\, dz = -\lambda N\mu_0 I a\,\hat{\varphi}$

$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

el qué forma líneas cerradas??

Integramos $\vec{g}$ a todo el volumen:

$\vec{P}_{EM} = \int_V \vec{g}\, dV = 0$ (pues forma líneas cerradas)

2. Momento angular electromagnético

$\vec{l} = \vec{\rho}\times\vec{g} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \rho g\,\hat{z} = -\frac{\lambda n\mu_0 I}{\ldots}\hat{z}$

$$\vec{L}_{EM} = \int_V \vec{\ell}\, dV = -\frac{\lambda n \mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_0^{a} \rho\, d\rho\, \rho\, d\varphi\, dz =$$

$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

$$= -\lambda n \mu_0 I L \cdot \frac{a^2}{2}\,\hat{z}$$