Mecánica Newtoniana y Relatividad
Curso 2022 - 2023

PRÁCTICA DE ORDENADOR II

ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE UN CUERPO EN UN CAMPO CENTRAL DE FUERZA

Rocío Ponsoda Orgilés
Grupo 3

Índice

1. Resumen y objetivos

El objetivo de esta práctica es el estudio del comportamiento de un cuerpo sometido a un campo de fuerzas central. En concreto, analizaremos el caso de un satélite artificial que orbita la Tierra y sobre el cual esta actúa como una fuente de interacción gravitatoria.

2. Marco teórico

Vamos a estudiar el movimiento de un cuerpo en un campo central de fuerza, el cual queda caracterizado por ser dependiente únicamente de la distancia entre las masas consideradas M y m. En el caso de la fuerza generada por el campo gravitatorio, queda descrita por la siguiente ecuación:

$$\vec{F} = \frac{-GMm}{r^2}\vec{u_r} \tag{1}$$

Hemos de tener en cuenta, además, las siguientes propiedades de los campos centrales:

- Podemos definir un potencial asociado: $\vec{F} = \vec{\nabla} V$
- Su momento angular se conserva: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ es una constante

Considerando esto, podemos definir para el campo gravitatorio un potencial asociado que queda como:

$$V_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{2}$$

Donde μ es la masa reducida definida como $\mu = \frac{M+m}{Mm}$. Así, las ecuaciones de movimiento que hemos de tener en cuenta para describir el estudio que se nos pide son las siguientes:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{2\mu^2 r^3} - \frac{GMm}{\mu r^2} \tag{3}$$

$$r = \frac{L^2}{GMm\mu}\frac{1}{1+\epsilon cos(\phi)} \tag{4}$$

Para acabar el breve marco teórico, vamos a presuponer los siguientes datos a la hora de realizar las simulaciones: masa del satélite $m_s = 750$ kg, altura inicial $h_i = 35867000$ m.

3. Cuestiones

Las preguntas elaboradas en la práctica son las siguientes:

1. Sitúa el satélite de forma que haga una órbita de radio medio aproximadamente 300 km sobre la superficie terrestre. Dibuja el potencial efectivo en ese caso e indica en el gráfico la distancia mínima y máxima al centro de la Tierra.

2. Calcula la órbita resolviendo numéricamente las ecuaciones de movimiento. Debes obtener r(t) y v(t). Utiliza para ello la rutina odeint de Python. Dibuja la órbita que has obtenido y compárala con el resultado analítico que viste en clase.

3. Varía las condiciones iníciales para representar los tres tipos de trayectoria que pueden darse en este problema. Siempre dibuja el potencial efectivo, situando la energía total en el gráfico.

4. En el caso de las órbitas acotadas, resuelve las ecuaciones considerando el potencial que obtuviste en el problema 3 del boletín 1 y haz una animación de lo que sucede en este caso.

5. Haz una animación de cada trayectoria, de tal manera que se vea la trayectoria del satélite a medida que avanza el tiempo.

6. Repite el análisis para el potencial de un muelle. ¿Cuántos tipos de trayectoria hay en este caso?

7. Por último, agrega al potencial del muelle un término proporcional a r^3. Haz una animación de la trayectoria en este caso y explica lo que sucede.

3.1. Cuestión 1

En esta parte, hemos de representar gráficamente el potencial efectivo que viene expresado en la ecuación (2). Obtenemos lo siguiente:

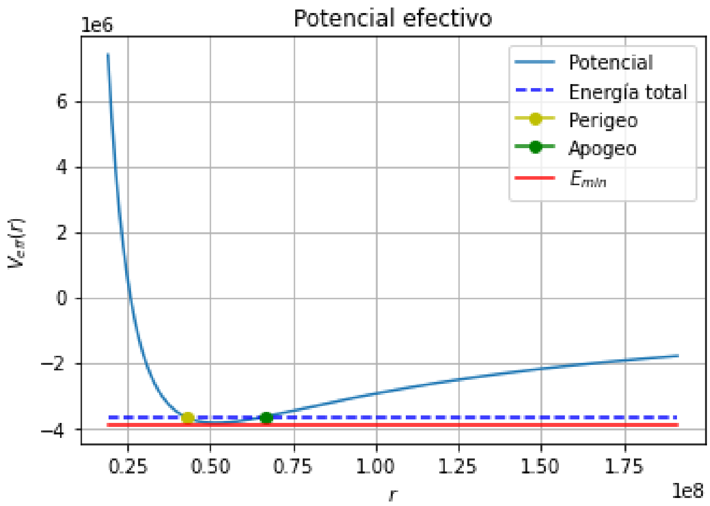


Figura 1: Potencial efectivo

En la gráfica queda marcada tanto el mínimo de la energía como la energía total. Aquellos puntos donde la energía mecánica total corta con el potencial efectivo son los puntos de mayor y menor acercamiento al planeta Tierra - el perigeo y el apogeo, respectivamente.

En este caso, los valores de cada uno de ellos serán:

$$r_{apogeo} = 66671769{,}23m$$

$$r_{perigeo} = 42381000{,}0m$$

3.2. Cuestión 2

Ahora nuestra tarea es la de graficar el movimiento orbital que realizará el satélite alrededor de la Tierra:

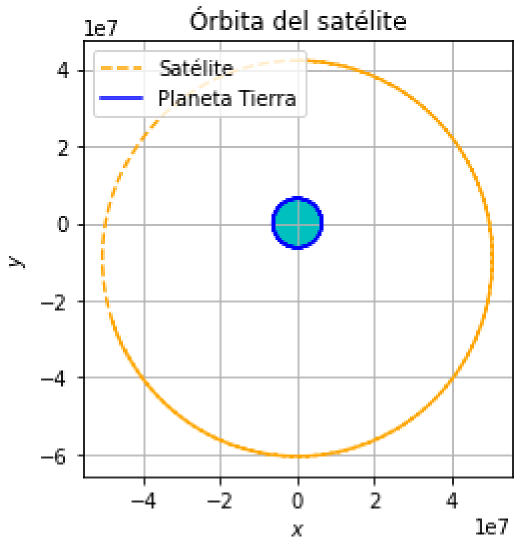


Figura 2: Órbita del satélite

Este es el caso de una órbita elíptica, tal y como se puede ver en la figura 2. Además, si nos fijamos en la energía mecánica total de la figura 1, podemos ver que queda comprendida entre la energía mínima y el 0. Para hallar dichas ecuaciones de movimiento, hemos resuelto la ecuación (3) mediante la rutina odeint de Python.

Por lo visto en clase, las energías que se mueven en pozos de potencial tan pequeños corresponden a órbitas elípticas. Sin embargo, estos valores no pueden ser los del mínimo energético, ya que tendríamos que apogeo y perigeo son la misma distancia y por tanto que tenemos una órbita circular.

3.3. Cuestión 3

Una vez analizado este caso concreto, vamos a centrarnos en las diferentes clases de órbitas que podemos hallar en este tipo de movimiento: circulares, elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Podremos distinguirlas mediante un estudio energético, tal y como se muestra en la gráfica 3 que adjuntamos más adelante. Se distinguen las siguientes posibilidades:

- Órbita circular: $E_{total} = E_{min} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$
- Órbita elíptica: $0 > E_{total} > E_{min} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{1{,}5R}}$
- Órbita parabólica: $E_{total} = 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$
- Órbita hiperbólica: $E_{total} > 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$

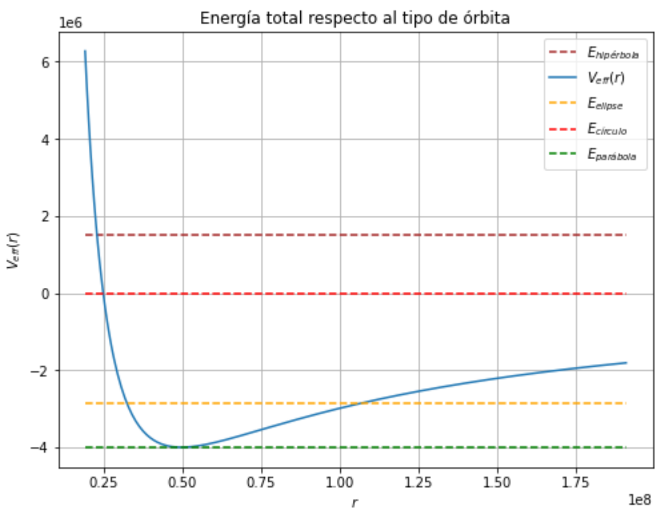


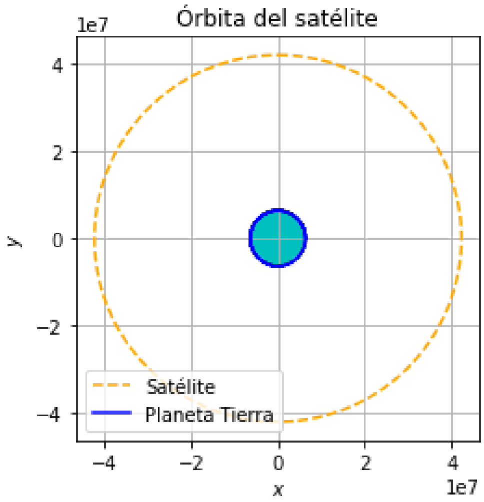
Figura 3: Energías totales según el tipo de órbita

También podemos diferenciar los diferentes movimientos por el valor del término ϵ que hallamos en la ecuación (4) y que corresponde a $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(GMm)^2}}$:

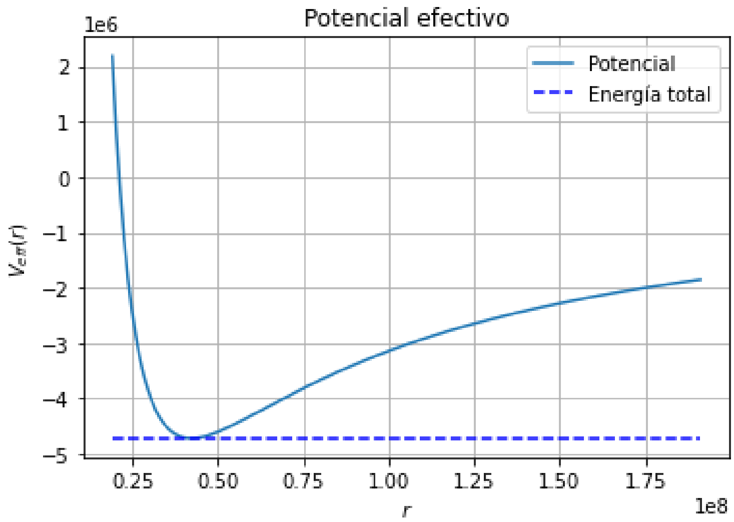
- Órbita circular: $\epsilon = 0$
- Órbita elíptica: $0 < \epsilon < 1$
- Órbita parabólica: $\epsilon = 1$
- Órbita hiperbólica: $\epsilon > 1$

A continuación, representamos algunas de estas órbitas para poder percibir mejor la diferencia entre ellas. En concreto, vamos a graficar una órbita circular, una elíptica y una parabólica - la órbita hiperbólica, al ser una órbita abierta, queda como esta última. En lo referente a las energías totales y al potencial efectivo, vamos a poder

distinguir mejor cada uno de los casos al graficarlos de forma individual.

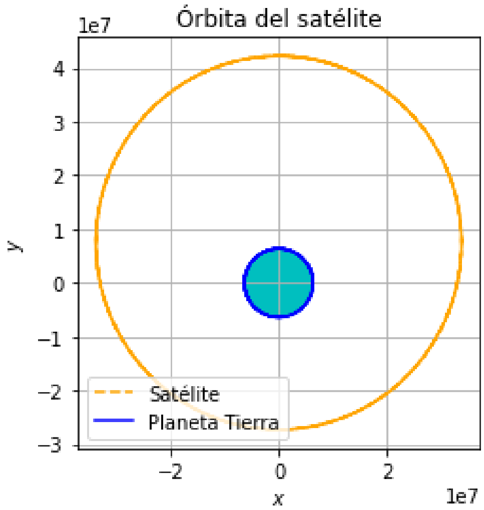


(a) Órbita

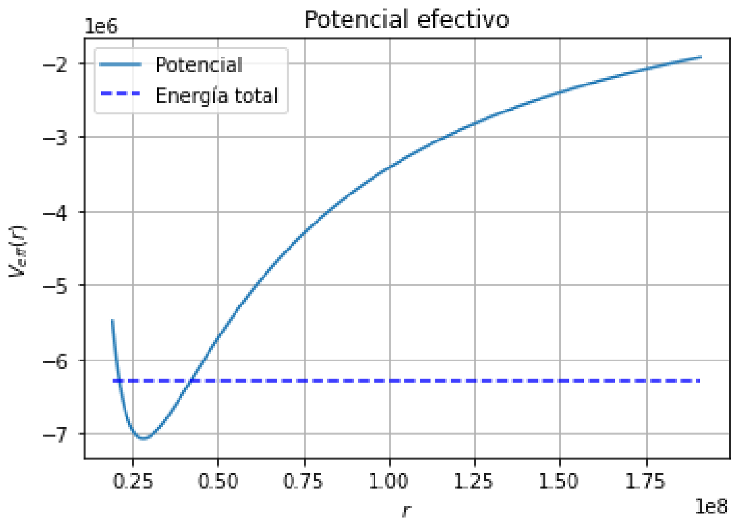


(b) Potencial

Figura 4: Órbita circular

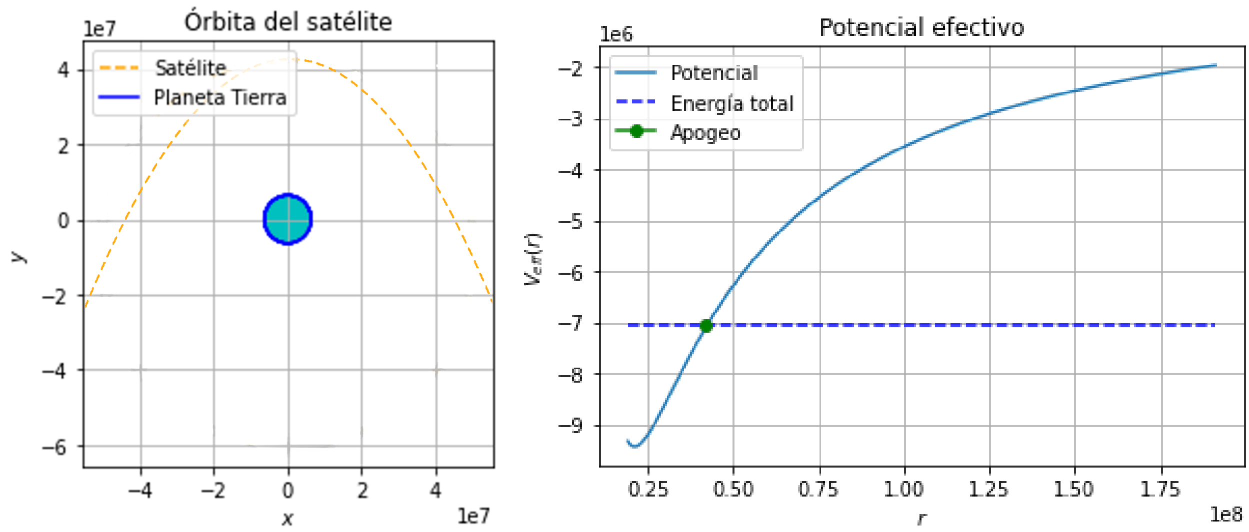


(a) Órbita



(b) Potencial

Figura 5: Órbita elíptica



(a) Órbita (b) Potencial

Figura 6: Órbita elíptica

3.4. Cuestión 5

Para contestar esta cuestión, vamos a remitirnos al boletín 1 y en concreto al ejercicio 3. Su enunciado nos pide demostrar que si una partícula está sometida a la acción de una fuerza central atractiva dirigida hacia un punto de su órbita - describiendo así una circunferencia -, la fuerza es inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia al centro de fuerzas.

La fuerza que queda al resolver esta cuestión será $\vec{F} = -\frac{8R^2L^2}{mr^5}\vec{e_r}$. Integrando esta expresión podremos obtener el potencial $U(r)$, que sustituiremos en la ecuación (2) para finalmente conseguir el potencial efectivo:

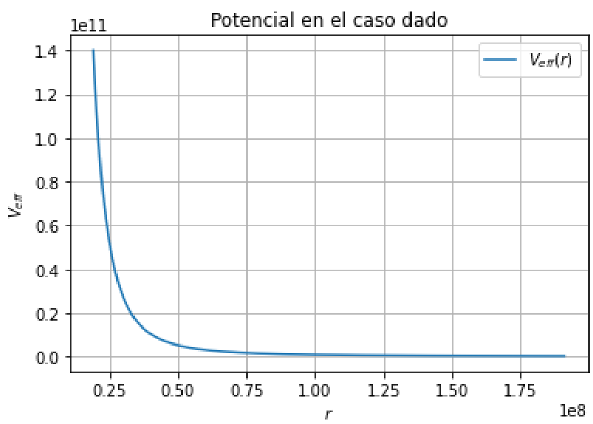


Figura 7: Potencial efectivo del ejercicio 3 del boletín 1

3.5. Cuestión 6

Ahora cambiamos el foco de nuestro estudio de un satélite al del potencial de un muelle. Sabemos que, para energías muy bajas, podemos expresar el potencial efectivo con un desarrollo limitado de orden dos. Dicho desarrollo limitado de orden dos será:

$$V_{eff}(r) = V_{eff}(r_{min}) + \frac{1}{2}k(r - r_{min})^2 \tag{5}$$

Este potencial se corresponde con el de un movimiento oscilatorio. Así, podremos expresar el potencial de una órbita ligeramente perturbada como el de un muelle. Si tomamos la constante del muelle $k = 0{,}5$ y su masa $m = 1$ kg, vamos a tener el siguiente potencial:

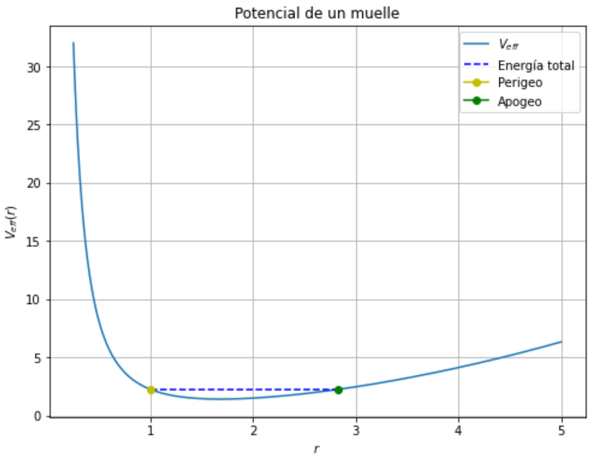


Figura 8: Potencial efectivo del muelle

Ahora solo hallamos un tipo de movimiento, el relacionado en el caso gravitatorio con energías negativas pero superiores a la energía mínima: se trata de una órbita elíptica.

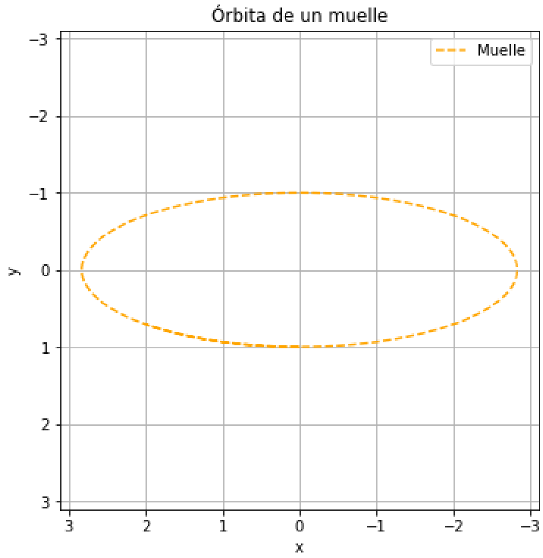


Figura 9: Órbita del muelle

3.6. Cuestión 7

En este caso, vamos a añadir al potencial de nuestro muelle un término proporcional a r^3, de forma que nos queda:

$$E_{mecánica} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{3}kr^3 \tag{6}$$

Si repetimos lo hecho en el apartado anterior obtenemos lo siguiente para la energía total y para la trayectoria, respectivamente:

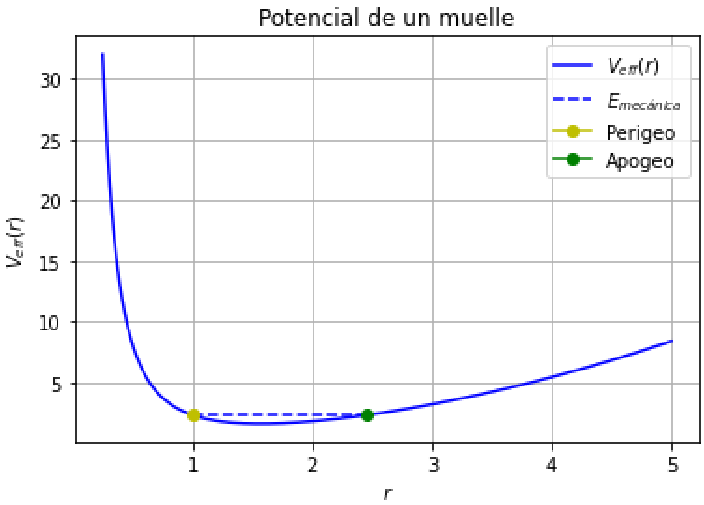


Figura 10: Potencial efectivo

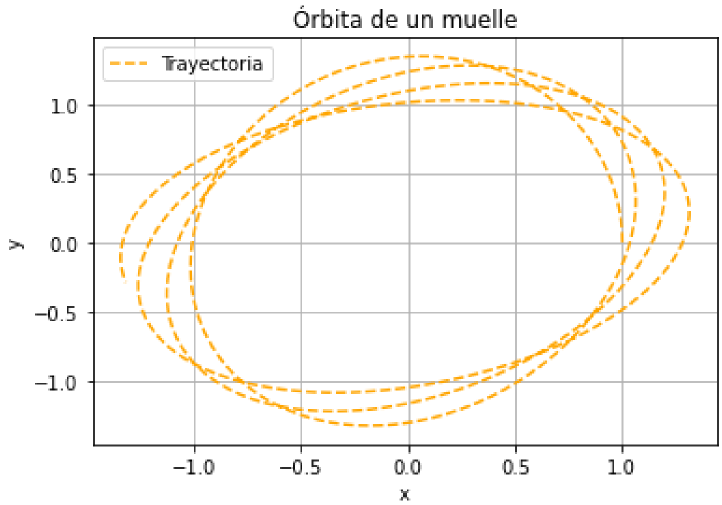


Figura 11: Órbita del muelle en este nuevo caso

No se aprecia una gran diferencia en lo que corresponde al valor de la energía mecánica: disminuye un poco, pero su rango de valores se mantiene similar.

En cambio, sí notamos una diferencia importante en lo que respecta a la trayectoria, puesto que ya no podemos distinguir el movimiento elíptico con el que nos encontrábamos antes.

Ahora vemos cómo, aunque el radio varía en la misma proporción que antes, el cuerpo rota poco a poco, haciendo que la elipse gire. Si simulamos el movimiento para un tiempo mayor, veremos que la órbita final definida es la siguiente:

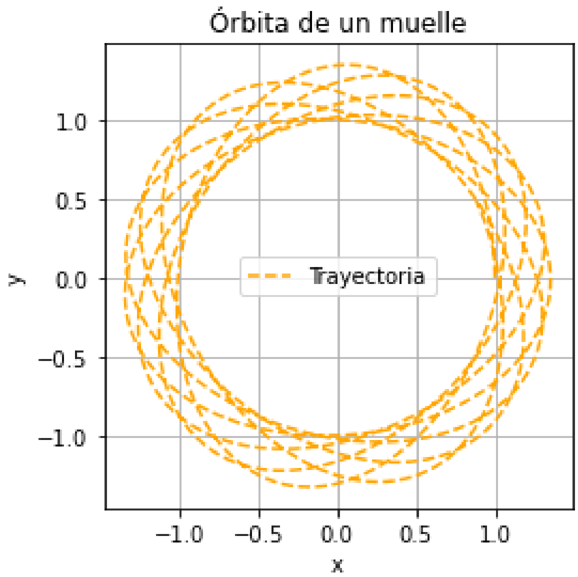


Figura 12: Trayectoria del muelle

Aquí podemos observar claramente cómo el movimiento compuesto de elipses y de una rotación acaba siendo una órbita que varía entre un radio máximo y mínimo.