Tema 7 - EXAMEN

Una partícula relativista de masa m, carga q incide en un medio material con velocidad inicial v_0 y empieza a frenarse con una fuerza proporcional a la velocidad, pero de sentido contrario $F = -\lambda v$. Si el movimiento de la partícula es rectilíneo:

(a) Combinando las expresiones del trimomento relativista y de la energía relativista y tendiendo en cuenta que $F = dp/dt$, determinar la energía perdida por radiación hasta que la partícula se detiene (velocidad final igual a cero).

(b) Determinar la longitud de penetración, es decir, la distancia L recorrida en el material hasta que se frena.

(a) $$P_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c}\gamma^6\left[|\dot{\vec{\beta}}|^2 - \underbrace{(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2}\right]$$

Rectilíneo $\rightarrow \vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}} \Rightarrow \vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}} = 0$

$$\frac{dW_{rad}}{dt} = \boxed{P_{rad}} = \frac{q^2\gamma^6}{6\pi\varepsilon_0 c}|\dot{\vec{\beta}}|^2 = \boxed{\frac{q^2\gamma^6|\dot{\vec{v}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}}$$

$$W_{rad} = \int_0^t P_{rad}\,dt = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_0^t \gamma^6|\dot{\vec{v}}|^2\,dt$$

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} = \boxed{\varepsilon\frac{\vec{v}}{c^2}} \qquad \left(\vec{p} = \varepsilon\frac{\vec{\beta}}{c}\right) \text{ Tema 4}$$

$$\vec{F} = \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}} = \frac{d\varepsilon}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2} + \boxed{\frac{\varepsilon}{c^2}}\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \boxed{\varepsilon = m\gamma c^2}$$

$$\boxed{\frac{d\varepsilon}{dt}} = \vec{F}\cdot\vec{v} = (-\lambda\vec{v})\cdot\vec{v} = \boxed{-\lambda v^2}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \boxed{-\lambda\vec{v} = -\lambda v^2\frac{\vec{v}}{c^2} + m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\lambda}{m}\vec{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \rightarrow \dot{v} = \frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda}{m}v\underbrace{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}_{1/\gamma}^{3/2}$$

$$\boxed{dt = -\frac{m}{\lambda}\frac{dv}{v}\gamma^3}$$

$$W_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_0^t \gamma^6 \dot{v}^2\, dt = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{v_0}^{v_f}\frac{v\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} =$$

$$\boxed{W_{rad} = \frac{q^2\lambda}{6\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2-v_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{c^2-v_f^2}}\right)}$$

Total radiada es hasta que se para $v_f = 0$

$$\boxed{W^T_{rad} = \frac{q^2\lambda}{6\pi\varepsilon_0 m}\frac{1}{\sqrt{c^2-v_0^2}}}$$

$$L = \int_{v_0}^{v_f} v\, dt \quad \Leftarrow \quad v = \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{L = \int_{v_0}^{v_f} v\, dt = \frac{mc}{\lambda}\left(\frac{v_0}{\sqrt{c^2-v_0^2}} - \frac{v_f}{\sqrt{c^2-v_f^2}}\right)}$$

Hasta que se para Δx (cuando $v_f = 0$)

$$\boxed{\Delta x = \frac{mc\,v_0}{\lambda\sqrt{c^2-v_0^2}}} \xrightarrow[v_0 \ll c]{} \Delta x \simeq \frac{m\cancel{c}v_0}{\lambda\cancel{c}} = \boxed{\frac{m v_0}{\lambda}}$$

$$c^2 - v_0^2 \approx c^2$$