Práctica 8

Métodos Numéricos y Computación

Métodos directos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales *(Tema 5)*

Los métodos para la resolución de los sistemas de ecuaciones se clasifican en métodos directos o iterativos. Los métodos directos son útiles cuando el sistema tiene adopta una forma concreta (diagonal o triangular, entre otras). Por ejemplo, si la matriz de coeficientes es diagonal, su solución es fácil de obtener:

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & & & & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & & & = & b_2 \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \; x_i = b_i/a_{ii}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejercicio 1 *Implementa una función* `solucionU` *que devuelva la solución de un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes triangular superior. Indicación: Las expresiones concretas están en la página 9 de la presentación de teoría. Aplica esta función para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & -2 \\ x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 3x_3 & = & -4 \end{array}\right\}$$

Una forma muy práctica de obtener la solución de los sistemas cuando no tienen esta forma concreta es transformarlos en otros equivalentes a partir de transformaciones elementales sobre las matrices involucradas: intercambio de filas, suma de una fila más otra multiplicada por un escalar y producto de una fila por un escalar. Estas operaciones también se pueden realizar por columnas, si fuera necesario, pero afectaría al orden en que aparecen los valores de las incógnitas en la solución.

Ejercicio 2 *Implementa dos funciones* `gauss_parcial` *y* `gauss_parcial_escalado` *que devuelva la solución de un sistema de ecuaciones usando el* ***método de Gauss*** *(transformando el sistema en un sistema triangular) con pivoteo parcial y parcial escalado, respectivamente, y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando la función* `solucionU`*:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2y - z + 3t & = & -8 \\ 2x + 2z - t & = & 13 \\ -x + y + z - t & = & 8 \\ 3x + 3y - z + 2t & = & -1 \end{array}\right\}$$

Comprueba tu resultado usando la función `solve` *incluida en la librería* `scipy.linalg`*.*

Como bien sabemos, otra de las aplicaciones de las transformaciones elementales es el cálculo de la inversa de una matriz. Si a una matriz invertible A se le aplican las operaciones elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ (en este orden) a fin de "transformar" A en la matriz identidad, entonces:

$$E_k E_{k-1} \ldots E_1 A = I \Leftrightarrow A^{-1} = E_k E_{k-1} \ldots E_1 I,$$

o, en otras palabras, A^{-1} se obtiene aplicando las mismas transformaciones a la matriz identidad. Esto también es útil para resolver un sistema de ecuaciones pues si $Ax = b$, entonces $x = A^{-1}b$.

Ejercicio 3 *Obtén la inversa de la siguiente matriz aplicando, paso a paso, las transformaciones elementales anteriores:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprueba tu resultado usando la función `inv` *incluida en la librería* `scipy.linalg`.

Otro de los métodos directos para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales pasa por la factorización LU de la matriz de coeficientes. Una matriz A tiene descomposición LU si se puede escribir como $A = LU$ donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior con elementos no nulos en la diagonal. No siempre se puede obtener esta descomposición (ni siquiera aun haciendo permutaciones en las columnas), pero, en caso de que sea posible, lo que debemos hacer es aplicar transformaciones elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ de forma que

$$E_k E_{k-1} \ldots E_1 A = U, \text{ y, por tanto, } A = (E_k E_{k-1} \ldots E_1)^{-1} U,$$

en cuyo caso

$$L = (E_k E_{k-1} \ldots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}.$$

Es importante tener en cuenta la forma de las inversas de los tres tipos de transformaciones elementales $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$, $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$ y , $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(1/\alpha)$.

Ejercicio 4 *Obtén la descomposición LU de las siguientes matrices:*

$$a) \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{pmatrix}$$