TEMA 4: Aplicaciones lineales.

4.1. Aplicaciones lineales. Propiedades.

DEFINICION 4.1 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que una aplicación $f : V \longrightarrow V'$ es una* ***aplicación lineal*** *si se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

(i) $f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$ *para todo* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$.
(ii) $f(\alpha \overrightarrow{u}) = \alpha f(\overrightarrow{u})$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *y para todo* $\overrightarrow{u} \in V$.

En algunos libros las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales reciben el nombre de **transformaciones lineales** o también **homomorfismos de espacios vectoriales**.

PROPOSICION 4.2 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación. Entonces, f es una aplicación lineal si, y sólo si,*

$$f(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v})$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$.

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que f es una aplicación lineal y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$. Entonces, por la condición (i) de la Definición 4.1,

$$f(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}) = f(\alpha \overrightarrow{u}) + f(\beta \overrightarrow{v})$$

y, por la condición (ii),

$$f(\alpha \overrightarrow{u}) + f(\beta \overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v}),$$

por lo tanto, $f(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v})$.

Supongamos ahora que $f(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v})$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$.

Tomando $\alpha = \beta = 1$, se tiene que

$$f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(1\overrightarrow{u} + 1\overrightarrow{v}) = 1f(\overrightarrow{u}) + 1f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}),$$

por lo que se satisface la condición (i) de la Definición 4.1.

En cambio, si tomamos $\beta = 0$, se tiene

$$f(\alpha \overrightarrow{u}) = f\left(\alpha \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0}\right) = f(\alpha \overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + 0f(\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{0} = \alpha f(\overrightarrow{u}),$$

con lo que se satisface la condición (ii) de la Definición 4.1.

En consecuencia, f es una aplicación lineal. $\square$

EJEMPLO 4.3 La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, x - y + z)$ es lineal ya que

$$f(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) =$$
$$((\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2), (\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)) =$$
$$\alpha(x_1 + y_1, x_1 - y_1 + z_1) + \beta(x_2 + y_2, x_2 - y_2 + z_2) = \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2),$$

cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 4.4 La aplicación $f : \mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}^3$ dada por $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1, a_2)$ es una aplicación lineal.

En efecto, si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $a_0 + a_1x + a_2x^2$, $b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{K}_2[x]$, entonces

$$f\left(\alpha\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) + \beta\left(b_0 + b_1x + b_2x^2\right)\right) =$$
$$f\left((\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + (\alpha a_2 + \beta b_2)x^2\right) =$$
$$(\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2) = \alpha(a_0, a_1, a_2) + \beta(b_0, b_1, b_2) =$$
$$\alpha f\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) + \beta f\left(b_0 + b_1x + b_2x^2\right).$$

EJEMPLO 4.5 La aplicación $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ que asigna a cada polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ su derivada $p'(x) \in \mathbb{R}[x]$ es una aplicación lineal. En efecto, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, se tiene que

$$D(\alpha p(x) + \beta q(x)) = \alpha D(p(x)) + \beta D(q(x)).$$

EJEMPLO 4.6 La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy$ no es lineal ya que, por ejemplo,

$$f(3 \cdot (1, 2)) = f(3, 6) = 18,$$

mientras que

$$3 \cdot f(1, 2) = 3 \cdot 2 = 6.$$

PROPOSICION 4.7 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Entonces, se cumple:*

(i) $f\left(\overrightarrow{0}_V\right) = \overrightarrow{0}_{V'}$.

(ii) $f(-\overrightarrow{u}) = -f(\overrightarrow{u})$ *para todo* $\overrightarrow{u} \in V$.

(iii) Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ *y* $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p \in V$*, entonces*

$$f(\alpha_1\overrightarrow{u}_1 + \alpha_2\overrightarrow{u}_2 + \cdots + \alpha_p\overrightarrow{u}_p) = \alpha_1 f(\overrightarrow{u}_1) + \alpha_2 f(\overrightarrow{u}_2) + \cdots + \alpha_p f(\overrightarrow{u}_p).$$

Demostración: (i) Para cualquier $\overrightarrow{u} \in V$ se tiene, por la condición (ii) de la Definición 4.1, que

$$f\left(\overrightarrow{0}_V\right) = f(0\overrightarrow{u}) = 0f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}_{V'}.$$

(ii) Sea $\overrightarrow{u} \in V$. De nuevo por la condición (ii) de la Definición 4.1, se tiene que

$$f\left(-\overrightarrow{u}\right) = f\left((-1)\,\overrightarrow{u}\right) = (-1)\, f\left(\overrightarrow{u}\right) = -f\left(\overrightarrow{u}\right).$$

(iii) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p \in V$. Procederemos por inducción sobre p.

Para $p = 1$, por la condición (ii) de la Definición 4.1, se tiene que

$$f\left(\alpha_1 \overrightarrow{u}_1\right) = \alpha_1 f\left(\overrightarrow{u}_1\right).$$

Supongamos que se satisface la propiedad para $p-1$ y veamos que también se satisface para p.

Por la condición (i) de la Definición 4.1, se tiene que

$$f\left(\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{u}_p\right) = f\left(\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \alpha_{p-1} \overrightarrow{u}_{p-1}\right) + f\left(\alpha_p \overrightarrow{u}_p\right) \tag{4.1}$$

y, por la hipótesis de inducción y la condición (ii) de la Definición 4.1, obtenemos

$$f\left(\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \alpha_{p-1} \overrightarrow{u}_{p-1}\right) + f\left(\alpha_p \overrightarrow{u}_p\right) = \alpha_1 f\left(\overrightarrow{u}_1\right) + \cdots \alpha_{p-1} f\left(\overrightarrow{u}_{p-1}\right) + \alpha_p f\left(\overrightarrow{u}_p\right). \tag{4.2}$$

De las expresiones (4.1) y (4.2), se obtiene la propiedad para p. $\square$

PROPOSICION 4.8 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Entonces, se cumple:*
(i) Si W es un subespacio vectorial de V, entonces $f(W)$ es un subespacio vectorial de V'.
(ii) Si W' es un subespacio vectorial de V', entonces la preimagen de W', $f^{-1}(W')$, es un subespacio vectorial de V.

Demostración: (i) Sea W un subespacio vectorial de V. Veremos que

$$f(W) := \{\overrightarrow{v}' \in V' \mid \overrightarrow{v}' = f\left(\overrightarrow{v}\right) \text{ para cierto } \overrightarrow{v} \in W\}$$

es un subespacio vectorial.

Puesto que W es un subespacio vectorial de V, se tiene que $\overrightarrow{0}_V \in W$. Por la Proposición 4.7(i), $\overrightarrow{0}_{V'} = f\left(\overrightarrow{0}_V\right) \in f(W)$, por lo que se tiene que $f(W) \neq \emptyset$.

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}' \in f(W)$. Entonces, existen $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W$ tales que $\overrightarrow{u}' = f\left(\overrightarrow{u}\right)$ y $\overrightarrow{v}' = f\left(\overrightarrow{v}\right)$. Además, por ser W subespacio vectorial de V, se tiene que

$$\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \in W.$$

Así pues, aplicando que f es una aplicación lineal, se obtiene que

$$\lambda \overrightarrow{u}' + \mu \overrightarrow{v}' = \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right) + \mu f\left(\overrightarrow{v}\right) = f\left(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}\right) \in f(W).$$

Por lo tanto, como consecuencia del Corolario 2.15, $f(W)$ es un subespacio vectorial de V'.

(ii) Supongamos ahora que W' es un subespacio vectorial de V'. Probaremos que

$$f^{-1}(W') := \{\overrightarrow{v} \in V \mid f\left(\overrightarrow{v}\right) \in W'\}$$

es un subespacio vectorial de V.

Puesto que W' es un subespacio vectorial de V', se tiene que $\overrightarrow{0}_{V'} \in W'$. Por la Proposición 4.7(i), $f\left(\overrightarrow{0}_V\right) = \overrightarrow{0}_{V'} \in W'$, por lo que se tiene que $\overrightarrow{0}_V \in f^{-1}(W')$ y $f^{-1}(W') \neq \emptyset$.

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in f^{-1}(W')$. Entonces, se tiene que $f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v}) \in W'$ y, dado que W' es un subespacio vectorial de V', se tiene que

$$\lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v}) \in W'.$$

Aplicando que f es una aplicación lineal, se obtiene que

$$f(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v}) \in W'$$

y, por lo tanto, $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \in f^{-1}(W')$. Así pues, como consecuencia del Corolario 2.15, $f^{-1}(W')$ es un subespacio vectorial de V. $\square$

PROPOSICION 4.9 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Sean $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p \in V$ y sea $W = \operatorname{Env}\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p\}$. Entonces,*

$$f(W) = \operatorname{Env}\{f(\overrightarrow{u}_1), f(\overrightarrow{u}_2), \ldots, f(\overrightarrow{u}_p)\}.$$

Demostración: Por ser $W = \operatorname{Env}\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p\}$, se tiene que $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p\} \subset W$ y, por lo tanto, $\{f(\overrightarrow{u}_1), f(\overrightarrow{u}_2), \ldots, f(\overrightarrow{u}_p)\} \subset f(W)$. Entonces, dado que $f(W)$ es un subespacio vectorial, por la Proposición 2.24, se tiene que

$$\operatorname{Env}\{f(\overrightarrow{u}_1), f(\overrightarrow{u}_2), \ldots, f(\overrightarrow{u}_p)\} \subseteq f(W).$$

Sea $\overrightarrow{v}' \in f(W)$. Entonces, existe $\overrightarrow{v} \in W$ tal que $\overrightarrow{v}' = f(\overrightarrow{v})$ y, puesto que $W = \operatorname{Env}\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p\}$, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{u}_2 + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{u}_p.$$

Entonces, aplicando la Proposición 4.7(iii), se tiene que

$$\overrightarrow{v}' = f(\overrightarrow{v}) = f(\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{u}_2 + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{u}_p) = \alpha_1 f(\overrightarrow{u}_1) + \alpha_2 f(\overrightarrow{u}_2) + \ldots + \alpha_p f(\overrightarrow{u}_p)$$

y, por lo tanto, $\overrightarrow{v}' \in \operatorname{Env}\{f(\overrightarrow{u}_1), f(\overrightarrow{u}_2), \ldots, f(\overrightarrow{u}_p)\}$. Así pues,

$$f(W) \subseteq \operatorname{Env}\{f(\overrightarrow{u}_1), f(\overrightarrow{u}_2), \ldots, f(\overrightarrow{u}_p)\}. \qquad \square$$

COROLARIO 4.10 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Si W es un subespacio vectorial de V, entonces $\dim f(W) \leq \dim W$.*

Demostración: Supongamos que $\dim W = p$ y $\mathcal{W} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p\}$ es una base de W.

Puesto que $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p\}$ es un conjunto generador de W, se tiene que

$$W = \operatorname{Env}\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p\}.$$

Aplicando la Proposición 4.9, tenemos que

$$f(W) = \mathrm{Env}\{f(\overrightarrow{u}_1), f(\overrightarrow{u}_2), \ldots, f(\overrightarrow{u}_p)\},$$

por lo que $\{f(\overrightarrow{u}_1), f(\overrightarrow{u}_2), \ldots, f(\overrightarrow{u}_p)\}$ es un conjunto generador de $f(W)$ y, por la Proposición 2.50, existe $\mathcal{A} \subseteq \{f(\overrightarrow{u}_1), f(\overrightarrow{u}_2), \ldots, f(\overrightarrow{u}_p)\}$ tal que $\mathcal{A}$ es una base de $f(W)$. Así pues, $\dim f(W) = \mathrm{card}(\mathcal{A}) \leq p = \dim W$. $\square$

EJEMPLO 4.11 Dado el subespacio $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x,y,z) = (x+y, z, 2y, z-x)$, queremos calcular una base de $f(W)$.

Como

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x+y\} = \{(x,y,x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\},$$

el conjunto $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ es un conjunto generador de W. Dado que los vectores $(1,0,1),(0,1,1)$ son linealmente independientes, el conjunto $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ es una base de W y, por la Proposición 4.9,

$$f(W) = \mathrm{Env}\{f(1,0,1), f(0,1,1)\} = \mathrm{Env}\{(1,1,0,0),(1,1,2,1)\}.$$

Por lo tanto, $\{(1,1,0,0),(1,1,2,1)\}$ es un conjunto generador de $f(W)$ y, dado que estos vectores son linealmente independientes, forman una base de $f(W)$.

En este caso, $\dim f(W) = 2 = \dim W$.

Nos preguntamos ahora acerca de cuáles serán los datos (condiciones) necesarios para determinar unívocamente una aplicación lineal. ¿Será necesario conocer las imágenes de todos y cada uno de los vectores del espacio de partida para localizar totalmente un homomorfismo? El teorema que sigue responde a esta pregunta, indicando qué número mínimo de imágenes de vectores hace falta conocer para determinar una aplicación lineal.

TEOREMA 4.12 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Supongamos que $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ es una base de V y $S = \left\{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \ldots, \overrightarrow{b}_n\right\}$ es un conjunto cualquiera de n vectores de V'. Entonces, existe una única aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$ tal que $f(\overrightarrow{u}_i) = \overrightarrow{b}_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Demostración: Como $\mathcal{V}$ es una base de V, cada vector $\overrightarrow{x} \in V$ se puede escribir de manera única como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{V}$,

$$\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{u}_n.$$

Definimos la aplicación f haciendo corresponder a cada $\overrightarrow{x} \in V$ el vector $f(\overrightarrow{x}) \in V'$ tal que

$$f(\overrightarrow{x}) = \lambda_1 \overrightarrow{b}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{b}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{b}_n,$$

siendo los coeficientes λ_i las coordenadas de $\overrightarrow{x}$ en la base $\mathcal{V}$.

Es fácil comprobar que esta aplicación, así definida, cumple que $f(\overrightarrow{u}_i) = \overrightarrow{b}_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Veamos que, además, f es lineal. En efecto, dados dos vectores arbitrarios $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ de V, los escribimos en la base $\mathcal{V}$:

$$\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{u}_n$$

e

$$\overrightarrow{y} = \mu_1 \overrightarrow{u}_1 + \mu_2 \overrightarrow{u}_2 + \cdots + \mu_n \overrightarrow{u}_n.$$

Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y} = \alpha(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{u}_n) + \beta(\mu_1 \overrightarrow{u}_1 + \mu_2 \overrightarrow{u}_2 + \cdots + \mu_n \overrightarrow{u}_n) =$$

$$= (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) \overrightarrow{u}_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n) \overrightarrow{u}_n.$$

Por lo tanto,

$$f(\alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y}) = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) \overrightarrow{b}_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n) \overrightarrow{b}_n =$$

$$= \alpha(\lambda_1 \overrightarrow{b}_1 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{b}_n) + \beta(\mu_1 \overrightarrow{b}_1 + \cdots + \mu_n \overrightarrow{b}_n) = \alpha f(\overrightarrow{x}) + \beta f(\overrightarrow{y}).$$

Por último, veamos que la aplicación lineal f es única. En efecto, si $g : V \to V'$ es otra aplicación lineal tal que $g(\overrightarrow{u}_i) = \overrightarrow{b}_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, tendremos, por ser g lineal, que

$$g(\overrightarrow{x}) = g(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{u}_n) = \lambda_1 g(\overrightarrow{u}_1) + \cdots + \lambda_n g(\overrightarrow{u}_n) =$$

$$= \lambda_1 \overrightarrow{b}_1 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{b}_n = f(\overrightarrow{x})$$

para todo $\overrightarrow{x} \in V$. En consecuencia, f y g son la misma aplicación y, por tanto, f es única. $\square$

EJEMPLO 4.13 El Teorema 4.12 nos asegura que existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(1,0,0) = (3,2)$, $f(0,1,0) = (1,4)$ y $f(0,0,1) = (4,7)$. Vamos a determinarla y, a continuación, hallaremos la imagen del vector $(1, 2, -1)$.

Para determinar f, el primer paso es calcular las coordenadas de un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ en la base de vectores con imágenes conocidas. En nuestro caso, esta base es la base canónica, luego escribimos

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

A continuación, aplicamos f y utilizamos la linealidad,

$$f(x, y, z) = f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) =$$
$$= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1),$$

y sustituimos por las imágenes de los vectores de la base dada, que son conocidas,

$$f(x, y, z) = x(3, 2) + y(1, 4) + z(4, 7).$$

Por lo tanto, $f(x, y, z) = (3x + y + 4z, 2x + 4y + 7z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En particular, $f(1, 2, -1) = (1, 3)$.

4.2. Imagen y núcleo de una aplicación lineal.

DEFINICION 4.14 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Llamamos* ***núcleo*** *de f, y lo denotamos $\operatorname{Ker}(f)$, al subespacio vectorial $f^{-1}\left(\left\{\overrightarrow{0}_{V'}\right\}\right)$ de V, es decir,*

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{x} \in V \mid f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}_{V'}\right\}.$$

DEFINICION 4.15 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Llamamos* ***imagen*** *de f, y lo denotamos $\operatorname{Im}(f)$, al subespacio vectorial $f(V)$ de V', es decir,*

$$\operatorname{Im}(f) = \{\overrightarrow{y} \in V' \mid \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) \text{ para algún } \overrightarrow{x} \in V\}.$$

Llamamos ***rango*** *de f, y lo denotamos $\operatorname{rg}(f)$, a la dimensión del subespacio $\operatorname{Im}(f)$.*

PROPOSICION 4.16 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Si $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ es una base de V, entonces*

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Env}\{f(\overrightarrow{u}_1), f(\overrightarrow{u}_2), \ldots, f(\overrightarrow{u}_n)\}$$

y $\operatorname{rg}(f) \leq n$.

Demostración: El resultado se obtiene como consecuencia directa de la Proposición 4.9 y del Corolario 4.10. $\square$

EJEMPLO 4.17 Dado el homomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, z - x)$, calcularemos el núcleo y la imagen de f.

Por definición, se tiene

$$\operatorname{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0)\} =$$
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0,\ z - x = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y = z\} =$$
$$\{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Env}(\{(1, -1, 1)\}).$$

Para calcular la imagen de f, consideramos una base del espacio inicial $\mathbb{R}^3$ (la base canónica, por ejemplo). Se tiene que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Env}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\})$ y, aplicando la Proposición 4.16, se tiene

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Env}(\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\}) = \operatorname{Env}(\{(1, -1), (1, 0), (0, 1)\}).$$

Por lo tanto, $\{(1, -1), (1, 0), (0, 1)\}$ es un conjunto generador de $\operatorname{Im}(f)$ que contiene a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Como $(1, -1) \in \operatorname{Env}(\{(1, 0), (0, 1)\})$, por la Proposición 2.34,

$$\operatorname{Env}(\{(1, 0), (0, 1)\}) = \operatorname{Env}(\{(1, -1), (1, 0), (0, 1)\}) = \operatorname{Im}(f).$$

Así pues,

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Env}(\{(1, 0), (0, 1)\}) = \mathbb{R}^2.$$

En el ejemplo anterior, se obtiene que $\dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}\,(f) = 1 + 2 = 3$, que es la dimensión del espacio inicial de f. En el siguiente teorema probaremos que esta igualdad se cumple para cualquier aplicación lineal.

TEOREMA 4.18 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Entonces, se cumple que*

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}\,(f)\,.$$

Demostración: Supongamos que $\dim V = n$ y $\dim \mathrm{Ker}(f) = p$. Hemos de probar que $\mathrm{rg}\,(f) = \dim \mathrm{Im}\,(f) = n - p$.

Supongamos, en primer lugar, que $p \neq 0$, es decir, $\mathrm{Ker}(f) \neq \left\{ \overrightarrow{0}_V \right\}$. Consideremos una base $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p\}$ de $\mathrm{Ker}(f) \subseteq V$. Por el Teorema de la base incompleta, existen $n - p$ vectores $\overrightarrow{u}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{u}_n \in V$ tales que $\{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{u}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ es una base de V. Entonces, aplicando la Proposición 4.16, se tiene que

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Env}\left(\{f(\overrightarrow{u}_1), \ldots, f(\overrightarrow{u}_p), f(\overrightarrow{u}_{p+1}), \ldots, f(\overrightarrow{u}_n)\}\right) = \mathrm{Env}\left(\{f(\overrightarrow{u}_{p+1}), \ldots, f(\overrightarrow{u}_n)\}\right),$$

ya que $f(\overrightarrow{u}_1) = \ldots = f(\overrightarrow{u}_p) = \overrightarrow{0}_{V'}$. Por lo tanto, $\{f(\overrightarrow{u}_{p+1}), \ldots, f(\overrightarrow{u}_n)\}$ es un conjunto de generadores de $\mathrm{Im}\,(f)$. Veremos que tales vectores son linealmente independientes y, por lo tanto forman una base de $\mathrm{Im}\,(f)$ y $\dim \mathrm{Im}\,(f) = n - p$.

En efecto, si consideramos la combinación lineal nula

$$\alpha_{p+1} f(\overrightarrow{u}_{p+1}) + \ldots + \alpha_n f(\overrightarrow{u}_n) = \overrightarrow{0}_{V'},$$

aplicando la linealidad de f, se tiene que

$$f(\alpha_{p+1}\overrightarrow{u}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{u}_n) = \overrightarrow{0}_{V'},$$

es decir, $\alpha_{p+1}\overrightarrow{u}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{u}_n \in \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p\}\right)$, con lo que

$$\alpha_{p+1}\overrightarrow{u}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{u}_n = \alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{u}_p$$

o, lo que es lo mismo,

$$\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{u}_p - \alpha_{p+1}\overrightarrow{u}_{p+1} - \ldots - \alpha_n \overrightarrow{u}_n = \overrightarrow{0}_V,$$

de donde

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = -\alpha_{p+1} = \ldots = -\alpha_n = 0,$$

ya que $\{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{u}_{p+1}, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ es una base de V. En particular, $\alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ y los vectores $f(\overrightarrow{u}_{p+1}), \ldots, f(\overrightarrow{u}_n)$ son linealmente independientes.

Si $p = 0$, entonces $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \overrightarrow{0}_V \right\}$. Por lo tanto, si $\{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ es una base de V, se tiene que

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Env}\left(\left\{f\left(\overrightarrow{u}_1\right), \ldots, f\left(\overrightarrow{u}_n\right)\right\}\right)$$

y, con un razonamiento similar al del caso anterior, se obtiene que $\left\{f\left(\overrightarrow{u}_1\right), \ldots, f\left(\overrightarrow{u}_n\right)\right\}$ es una base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Por lo tanto, $\mathrm{rg}\,(f) = \dim \mathrm{Im}\,(f) = n = \dim V$. $\square$

EJEMPLO 4.19 En el Ejemplo 4.17, la aplicación del Teorema 4.18 nos permite obtener, de forma inmediata, la imagen de f a partir de su núcleo, ya que, como $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$, necesariamente $\mathrm{rg}\,(f) = 3 - 1 = 2$ y, puesto que $\mathrm{Im}\,(f)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, se tiene que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 4.20 Consideremos ahora la aplicación lineal del Ejemplo 4.11, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, z, 2y, z - x)$. En este caso, considerando la base canónica en el espacio inicial y aplicando la Proposición 4.16, se tiene que

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Env}\left(\left\{f\,(1,0,0), f\,(0,1,0), f\,(0,0,1)\right\}\right) =$$
$$\mathrm{Env}\left(\left\{(1,0,0,-1), (1,0,2,0), (0,1,0,1)\right\}\right).$$

Puesto que los vectores del conjunto $\{(1,0,0,-1), (1,0,2,0), (0,1,0,1)\}$ son linealmente independientes, se tiene que $\{(1,0,0,-1), (1,0,2,0), (0,1,0,1)\}$ es una base de $\mathrm{Im}\,(f)$ y $\mathrm{rg}\,(f) = 3$. Aplicando ahora el Teorema 4.18, obtenemos que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 3 = 0$, por lo que sabemos $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ sin necesidad de calcularlo.

DEFINICION 4.21 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Se dice que:*

- f es un **monomorfismo** si f es una aplicación inyectiva.
- f es un **epimorfismo** si f es una aplicación suprayectiva.
- f es un **isomorfismo** si f es una aplicación biyectiva.

Llamaremos **endomorfismos** a las aplicaciones lineales para las que $V = V'$ y **automorfismos** a los endomorfismos biyectivos.

PROPOSICION 4.22 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Entonces, se cumple:*
(i) f es un monomorfismo si, y sólo si, $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0}_V\right\}$.
(ii) f es un epimorfismo si, y sólo si, $\mathrm{Im}\,(f) = V'$.

Demostración: (i) Supongamos que f es un monomorfismo. Si $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(f)$, entonces $f\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}_{V'}$. Ahora, como $f\left(\overrightarrow{0}_V\right) = \overrightarrow{0}_{V'}$ y f es inyectiva, necesariamente $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}_V$. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0}_V\right\}$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0}_V\right\}$ y sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ tales que $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v})$. Entonces, se tiene que

$$\overrightarrow{0}_{V'} = f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$$

y $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0}_V\right\}$. Por lo tanto, $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}_V$ y $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$. Por lo tanto, f es inyectiva.

(ii) Que f es un epimorfismo es lo mismo que decir que f es una aplicación suprayectiva, lo que es equivalente a $f(V) = V'$, es decir, $\mathrm{Im}(f) = V'$. □

EJEMPLO 4.23 En el Ejemplo 4.17, f no es inyectiva pero sí es suprayectiva, de modo que f es un epimorfismo.

EJEMPLO 4.24 En el Ejemplo 4.20, f es inyectiva no suprayectiva, por lo que f es un monomorfismo.

COROLARIO 4.25 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Entonces, se cumple:*
(i) f es un monomorfismo si, y sólo si, $\mathrm{rg}(f) = \dim V$.
(ii) f es un epimorfismo si, y sólo si, $\mathrm{rg}(f) = \dim V'$.

Demostración: (i) Es consecuencia de la Proposición 4.22(i) y del Teorema 4.18.

(ii) Es consecuencia de la Proposición 4.22(ii). □

NOTA 4.26 *Nótese que si f es un monomorfismo, el Corolario 4.25(i) afirma que* $\dim V = \dim \mathrm{Im}(f)$ *y, dado que* $\mathrm{Im}(f)$ *es un subespacio de* V', $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim V'$. *Por lo tanto, para que f sea inyectiva, es necesario que* $\dim V \leq \dim V'$. *Así, por ejemplo, una aplicación definida de* $\mathbb{R}^3$ *en* $\mathbb{R}^2$ *no puede ser inyectiva.*

NOTA 4.27 *Del mismo modo, si f es suprayectiva, por el Corolario 4.25(ii),* $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim V'$. *Pero, por el Teorema 4.18,* $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(f) \leq \dim V$. *Por lo tanto, para que f sea suprayectiva, es necesario que* $\dim V' \leq \dim V$. *Así, por ejemplo, ninguna aplicación definida de* $\mathbb{R}^3$ *en* $\mathbb{R}^4$ *puede ser suprayectiva.*

Teniendo en cuenta las dos observaciones anteriores, para que f sea una isomorfismo es necesario que $\dim V = \dim V'$. El siguiente teorema caracteriza las aplicaciones lineales entre espacios de la misma dimensión que son isomorfismos.

TEOREMA 4.28 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ tales que* $\dim V = \dim V' = n$ *y supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) f es un isomorfismo.

(ii) f *es un monomorfismo.*

(iii) $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \overrightarrow{0}_V \right\}$.

(iv) f *es un epimorfismo.*

(v) $\mathrm{rg}\,(f) = n$.

Demostración: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Si f es un isomorfismo, entonces f es biyectiva y, por lo tanto, f es inyectiva, o lo que es lo mismo, f es un monomorfismo.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Es la implicación directa de la Proposición 4.22(i).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Como consecuencia del Teorema 4.18, $\mathrm{rg}\,(f) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim V = \dim V'$ y, por el Corolario 4.25(ii), f es un epimorfismo.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) Si f es un epimorfismo, por el Corolario 4.25(ii), $\mathrm{rg}\,(f) = \dim V' = n$.

(v) $\Longrightarrow$ (i) Si $\mathrm{rg}\,(f) = n$, entonces $\mathrm{rg}\,(f) = \dim V$ y, por el Corolario 4.25(i), f es inyectiva. Por otro lado, también se cumple que $\mathrm{rg}\,(f) = \dim V'$ y, por el Corolario 4.25(ii), f es suprayectiva. Por lo tanto, f es biyectiva y es un isomorfismo. $\square$

Dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ se dice que son **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos. Para que dos espacios vectoriales sean isomorfos, es necesario que tengan la misma dimensión.

TEOREMA 4.29 *Todos los espacios vectoriales de la misma dimensión sobre un mismo cuerpo son isomorfos.*

Demostración: Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ tales que $\dim V = \dim V' = n$. Sean $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ y $\mathcal{V}' = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ bases de V y V', respectivamente. Consideremos $f : V \longrightarrow V'$ la única aplicación lineal tal que $f(\overrightarrow{u}_i) = \overrightarrow{v}_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (véase Teorema 4.12). Dado que

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Env}\,(\{f(\overrightarrow{u}_1), \ldots, f(\overrightarrow{u}_n)\}) = \mathrm{Env}\,(\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}) = V',$$

por la Proposición 4.22(ii), f es un epimorfismo y, por el Teorema 4.28, f es un isomorfismo. Por lo tanto, V y V' son isomorfos. $\square$

EJEMPLO 4.30 Todos los espacios vectoriales reales de dimensión n son isomorfos a $\mathbb{R}^n$ y todos los espacios vectoriales complejos de dimensión n son isomorfos a $\mathbb{C}^n$.

EJEMPLO 4.31 Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}_3\,[x]$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}\,(\mathbb{R})$ son isomorfos entre sí.

4.3. Operaciones con aplicaciones lineales.

En esta sección, dados V y V' dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, consideramos el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ de todas las aplicaciones lineales entre V y V'.

PROPOSICION 4.32 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$. Si $f + g : V \longrightarrow V'$ es la aplicación dada por*

$$(f+g)(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}) + g(\overrightarrow{v}), \tag{4.3}$$

para todo $\overrightarrow{v} \in V$, entonces $f + g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$.

Demostración: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$. Entonces, por ser f y g aplicaciones lineales entre V y V', se cumple que

$$f(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v}) \tag{4.4}$$

y

$$g(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = \alpha g(\overrightarrow{u}) + \beta g(\overrightarrow{v}). \tag{4.5}$$

Por lo tanto, como por definición de $f + g$ se tiene que

$$(f+g)(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = f(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) + g(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}),$$

por (4.4) y (4.5), se obtiene

$$(f+g)(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v}) + \alpha g(\overrightarrow{u}) + \beta g(\overrightarrow{v}) = \alpha(f+g)(\overrightarrow{u}) + \beta(f+g)(\overrightarrow{v}).$$

Por lo tanto, $f + g$ es una aplicación lineal. $\square$

PROPOSICION 4.33 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Si $f, g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $(f+g)+h = f+(g+h)$.

(ii) $f+g = g+f$.

(iii) $f+O = O+f = f$ *con* $O \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ *la aplicación lineal nula.*

(iv) $f+(-f) = (-f)+f = O$ *con* $-f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ *la aplicación lineal opuesta de* f *y* $O \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ *la aplicación lineal nula.*

Demostración: La demostración de estas propiedades se sigue de las propiedades análogas que sabemos se satisfacen en V' por ser V' un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Por otra parte, es fácil probar que la aplicación nula y la aplicación opuesta a una aplicación lineal f son ambas aplicaciones lineales. $\square$

PROPOSICION 4.34 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$. Si $\lambda f : V \longrightarrow V'$ es la aplicación dada por*

$$(\lambda f)(\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{v}), \tag{4.6}$$

para todo $\overrightarrow{v} \in V$*, entonces* $\lambda f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$*.*

Demostración: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$. Entonces, por ser f aplicación lineal entre V y V', se cumple que

$$f\left(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}\right) = \alpha f\left(\overrightarrow{u}\right) + \beta f\left(\overrightarrow{v}\right). \tag{4.7}$$

Por lo tanto, como por definición de λf se tiene que

$$(\lambda f)\left(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}\right) = \lambda f\left(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}\right),$$

por (4.7), se obtiene

$$(\lambda f)\left(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}\right) = \lambda\left(\alpha f\left(\overrightarrow{u}\right) + \beta f\left(\overrightarrow{v}\right)\right) = \alpha\left(\lambda f\left(\overrightarrow{u}\right)\right) + \beta\left(\lambda f\left(\overrightarrow{v}\right)\right) = \alpha(\lambda f)\left(\overrightarrow{u}\right) + \beta(\lambda f)\left(\overrightarrow{v}\right).$$

Por lo tanto, λf es una aplicación lineal. $\square$

PROPOSICION 4.35 *Sean* V *y* V' *espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$*. Si* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *y* $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$*, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*
(i) $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$*.*
(ii) $(\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f$*.*
(iii) $\lambda(\mu f) = (\lambda \mu) f$*.*
(iv) $1 f = f$*.*

Demostración: La demostración de estas propiedades se sigue de las propiedades análogas que sabemos se satisfacen en V' por ser V' un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. $\square$

PROPOSICION 4.36 *Sean* V *y* V' *espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$*. Entonces* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *con la suma y la multiplicación por un escalar introducidas en (4.3) y (4.6), respectivamente.*

Demostración: Es consecuencia de las Proposiciones 4.33 y 4.35. $\square$

PROPOSICION 4.37 *Sean* V*,* V' *y* V'' *espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$*. Si* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ *y* $g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V', V'')$*, entonces* $g \circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V'')$*.*

Demostración: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$. Entonces,

$$(g \circ f)\left(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}\right) = g\left(f\left(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}\right)\right)$$

y, dado que f es una aplicación lineal, se tiene que $f\left(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}\right) = \alpha f\left(\overrightarrow{u}\right) + \beta f\left(\overrightarrow{v}\right)$, por lo que

$$(g \circ f)\left(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}\right) = g\left(\alpha f\left(\overrightarrow{u}\right) + \beta f\left(\overrightarrow{v}\right)\right).$$

Finalmente, por ser g una aplicación lineal, se obtiene

$$(g \circ f)\left(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}\right) = \alpha g\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right) + \beta g\left(f\left(\overrightarrow{v}\right)\right) = \alpha(g \circ f)\left(\overrightarrow{u}\right) + \beta(g \circ f)\left(\overrightarrow{v}\right).$$

Así pues, $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V'')$. $\square$

PROPOSICION 4.38 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ es biyectiva, entonces $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V', V)$.*

Demostración: Por ser $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación biyectiva, sabemos que existe la aplicación inversa $f^{-1} : V' \longrightarrow V$ y también es biyectiva.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}' \in V'$. Como f es biyectiva, existe un único $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}'$ y existe un único $\overrightarrow{v} \in V$ tal que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}'$. Entonces, aplicando la linealidad de f, se tiene

$$\alpha \overrightarrow{u}' + \beta \overrightarrow{v}' = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v}) = f(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}),$$

con lo que

$$f^{-1}(\alpha \overrightarrow{u}' + \beta \overrightarrow{v}') = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} = \alpha f^{-1}(\overrightarrow{u}') + \beta f^{-1}(\overrightarrow{v}').$$

Por lo tanto, $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V', V)$. $\square$

4.4. Matriz asociada a una aplicación lineal.

Por el Teorema 4.12, una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$ queda totalmente determinada si conocemos las imágenes de los vectores de una base de V. Este hecho nos va a permitir asociar, a cada aplicación lineal, una matriz (fijadas una base del espacio inicial y otra del final).

Sean V y V' espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ tales que $\dim V = n$ y $\dim V' = m$. Consideremos $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ y $\mathcal{V}' = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m\}$ bases de V y V', respectivamente. Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Puesto que, para cada $i = 1, \ldots, n$, $f(\overrightarrow{u}_i) \in V'$, podemos considerar las coordenadas de $f(\overrightarrow{u}_i)$ en la base $\mathcal{V}'$. Así, se tiene

$$\begin{array}{ccccccccc}
f(\overrightarrow{u}_1) & = & a_{11}\overrightarrow{v}_1 & + & a_{21}\overrightarrow{v}_2 & + & \cdots & + & a_{m1}\overrightarrow{v}_m \\
f(\overrightarrow{u}_2) & = & a_{12}\overrightarrow{v}_1 & + & a_{22}\overrightarrow{v}_2 & + & \cdots & + & a_{m2}\overrightarrow{v}_m \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
f(\overrightarrow{u}_n) & = & a_{1n}\overrightarrow{v}_1 & + & a_{2n}\overrightarrow{v}_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\overrightarrow{v}_m
\end{array}$$

Diremos que la matriz

$$M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es la **matriz asociada** a f en las bases $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$.

Cabe destacar que la columna i-ésima de la matriz $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f)$ está formada por las coordenadas de

$f\left(\overrightarrow{u}_i\right)$ en la base $\mathcal{V}'$.

EJEMPLO 4.39 Consideramos el homomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y) = (2y, y-x, y)$. La matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es

$$M_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^2)}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^3\right)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En cambio, si consideramos las bases $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, la matriz asociada a f es

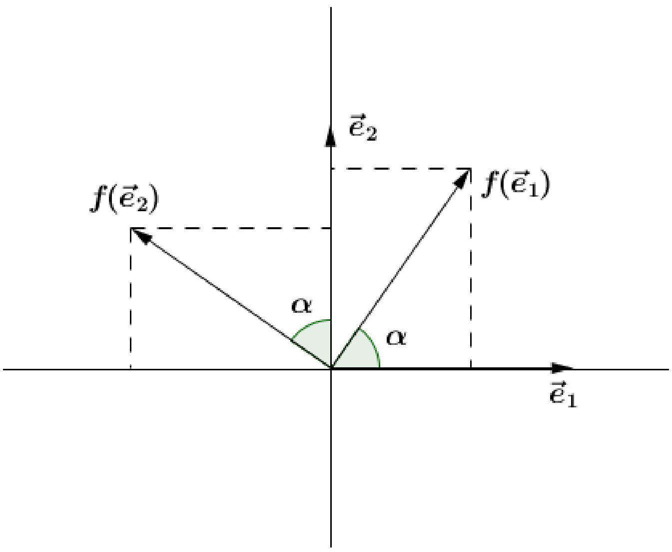
$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

ya que

$$\begin{aligned} f(1,1) &= (2,0,1) = 1\cdot(1,1,1) - 1\cdot(1,1,0) + 2\cdot(1,0,0), \\ f(-1,0) &= (0,1,0) = 0\cdot(1,1,1) + 1\cdot(1,1,0) - 1\cdot(1,0,0). \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.40 Consideramos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que consiste en un giro de α grados alrededor del eje OZ. Para obtener la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, necesitamos calcular las componentes de $f\left(\overrightarrow{e}_1\right)$, $f\left(\overrightarrow{e}_2\right)$ y $f\left(\overrightarrow{e}_3\right)$ en dicha base. Al aplicar el giro de α grados alrededor del eje OZ a los vectores $\overrightarrow{e}_1$ y $\overrightarrow{e}_2$, se obtienen los vectores $f\left(\overrightarrow{e}_1\right)$ y $f\left(\overrightarrow{e}_2\right)$ representados en la Figura (4.7) y, de acuerdo con dicha figura, se pueden expresar como

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{e}_1\right) &= (\cos\alpha)\,\overrightarrow{e}_1 + (\operatorname{sen}\alpha)\,\overrightarrow{e}_2, \\ f\left(\overrightarrow{e}_2\right) &= (-\operatorname{sen}\alpha)\,\overrightarrow{e}_1 + (\cos\alpha)\,\overrightarrow{e}_2. \end{aligned}$$



Por otra parte, es evidente que al aplicar el giro de α grados alrededor del eje OZ al vector $\overrightarrow{e}_3$, este vector no cambia, luego $f\left(\overrightarrow{e}_3\right) = \overrightarrow{e}_3$. Así pues, la matriz asociada a f respecto de la base canónica es

$$M_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^3)}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^3\right)}(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cualquier matriz que esté asociada a una aplicación lineal f, proporciona toda la información necesaria para conocer con exactitud la aplicación f. En primer lugar, veremos que la definición de f también puede darse en forma matricial. Para ello, dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ una base de V y $\overrightarrow{u} \in V$, denotaremos

$$C_{\mathcal{V}}\left(\overrightarrow{u}\right) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ en la base $\mathcal{V}$.

PROPOSICION 4.41 (Ecuación matricial de una aplicación lineal) *Sean V y V' espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ bases de V y V', respectivamente. Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$, la ecuación matricial de f respecto de las bases $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ es la expresión*

$$M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f)\, C_{\mathcal{V}}\left(\overrightarrow{u}\right) = C_{\mathcal{V}'}\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$$

para todo $\overrightarrow{u} \in V$.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$, $\mathcal{V}' = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m\}$ y

$$M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Por la propia definición de $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f)$, sabemos que

$$\begin{array}{ccccccccc} f\left(\overrightarrow{u}_1\right) & = & a_{11}\overrightarrow{v}_1 & + & a_{21}\overrightarrow{v}_2 & + & \cdots & + & a_{m1}\overrightarrow{v}_m, \\ f\left(\overrightarrow{u}_2\right) & = & a_{12}\overrightarrow{v}_1 & + & a_{22}\overrightarrow{v}_2 & + & \cdots & + & a_{m2}\overrightarrow{v}_m, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ f\left(\overrightarrow{u}_n\right) & = & a_{1n}\overrightarrow{v}_1 & + & a_{2n}\overrightarrow{v}_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\overrightarrow{v}_m. \end{array} \tag{4.8}$$

Sea $\overrightarrow{u} \in V$ y supongamos que

$$C_{\mathcal{V}}\left(\overrightarrow{u}\right) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C_{\mathcal{V}'}\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

es decir

$$\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{u}_1 + x_2\overrightarrow{u}_2 + \cdots + x_n\overrightarrow{u}_n$$

y

$$f\left(\overrightarrow{u}\right) = y_1\overrightarrow{v}_1 + y_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + y_m\overrightarrow{v}_m. \tag{4.9}$$

Como f es una aplicación lineal, se tiene que

$$f\left(\overrightarrow{u}\right) = f\left(x_1\overrightarrow{u}_1 + x_2\overrightarrow{u}_2 + \cdots + x_n\overrightarrow{u}_n\right) = x_1 f\left(\overrightarrow{u}_1\right) + x_2 f\left(\overrightarrow{u}_2\right) + \cdots + x_n f\left(\overrightarrow{u}_n\right)$$

y, por (4.8),

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{u}\right) &= x_1\left(a_{11}\overrightarrow{v}_1 + a_{21}\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m1}\overrightarrow{v}_m\right) + x_2\left(a_{12}\overrightarrow{v}_1 + a_{22}\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m2}\overrightarrow{v}_m\right) \\ &\quad + \cdots + x_n\left(a_{1n}\overrightarrow{v}_1 + a_{2n}\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{mn}\overrightarrow{v}_m\right), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{u}\right) &= \left(x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n}\right)\overrightarrow{v}_1 + \left(x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n}\right)\overrightarrow{v}_2 \qquad (4.10) \\ &\quad + \cdots + \left(x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \cdots + x_na_{mn}\right)\overrightarrow{v}_m. \end{aligned}$$

Dado que las coordenadas de un vector respecto de una cierta base son únicas, teniendo en cuenta (4.9) y (4.10), se obtiene

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array}$$

o, lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

que es la forma matricial del enunciado. $\square$

EJEMPLO 4.42 En el ejemplo 4.39 podemos calcular la imagen del vector $\overrightarrow{u} = (3,2)$ usando la forma matricial de la aplicación f. Dado que conocemos las coordenadas del vector $\overrightarrow{u}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, usaremos las matriz $M_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^2)}^{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^3)}(f)$ para obtener las coordenadas de $f\left(\overrightarrow{u}\right)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Así,

$$C_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^2)}\left(\overrightarrow{u}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y

$$C_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^3)}\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = M_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^2)}^{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^3)}(f)C_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^2)}\left(\overrightarrow{u}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Así pues, $f\left(\overrightarrow{u}\right) = (4,-1,2)$.

Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, la aplicación identidad $id : V \longrightarrow V$ definida por $id\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$, es trivialmente una aplicación lineal. Si consideramos dos bases de V, $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ y $\mathcal{V}' = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$, se tiene que

$$M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(id) = I,$$

mientras que

$$M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(id) = (a_{ij})$$

donde $a_{\cdot j} = C_{\mathcal{V}'}\left(\overrightarrow{u}_j\right)$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Además, para cualquier $\overrightarrow{u} \in V$, se tiene

$$M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(id)\, C_{\mathcal{V}}\left(\overrightarrow{u}\right) = C_{\mathcal{V}'}\left(id\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = C_{\mathcal{V}'}\left(\overrightarrow{u}\right),$$

es decir, si multiplicamos la matriz asociada $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(id)$ por las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ en la base $\mathcal{V}$ se obtienen las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ en la base $\mathcal{V}'$. Debido a ello, a la matriz $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(id)$ le llamaremos **matriz cambio de base** de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$ y la denotaremos por $P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}$.

EJEMPLO 4.43 En el ejemplo 4.39, calculamos las matrices cambio de base de $\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^2\right)$ a $\mathcal{B}$ y de $\mathcal{B}'$ a $\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^3\right)$. Para ello, necesitamos conocer las coordenadas de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{B}$ y las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Por un lado, se tiene

$$\begin{aligned} (1,0) &= 0 \cdot (1,1) + (-1) \cdot (-1,0) \\ (0,1) &= 1 \cdot (1,1) + 1 \cdot (-1,0)\,, \end{aligned}$$

por lo que

$$P_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^2)}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} (1,1,1) &= 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1) \\ (1,1,0) &= 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1) \\ (1,0,0) &= 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)\,, \end{aligned}$$

de modo que

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^3\right)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado el vector $\overrightarrow{u} = (3,2) \in \mathbb{R}^2$, se pueden calcular sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$ de la siguiente forma:

$$C_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{u}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, utilizando la matriz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$, podemos calcular las coordenadas de $f\left(\overrightarrow{u}\right)$ en la base $\mathcal{B}'$

$$C_{\mathcal{B}'}\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) C_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{u}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Por último, podemos calcular las coordenadas de $f\left(\overrightarrow{u}\right)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera:

$$C_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^3)}\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^3\right)} C_{\mathcal{B}'}\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

PROPOSICION 4.44 *Sean V, V' y V'' espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ y $\mathcal{V}''$ bases de V, V' y V'', respectivamente. Dadas las aplicaciones lineales $f, g : V \longrightarrow V'$ y $h : V' \longrightarrow V''$, se verifica:*

(i) $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f+g) = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f) + M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(g)\,.$

(ii) $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(\lambda f) = \lambda M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f)$*, para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}''}(h \circ f) = M_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}''}(h)\, M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f)$.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$, $\mathcal{V}' = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m\}$ y $\mathcal{V}'' = \{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \ldots, \overrightarrow{w}_p\}$. Entonces $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f)$, $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(g) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $M_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}''}(h) \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$. Supongamos que $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f) = (a_{ij})$, $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(g) = (b_{ij})$ y $M_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}''}(h) = (c_{ki})$.

(i) Si $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f) = (a_{ij})$ y $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(g) = (b_{ij})$, entonces

$$f(\overrightarrow{u}_j) = a_{1j}\overrightarrow{v}_1 + a_{2j}\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{mj}\overrightarrow{v}_m$$

y

$$g(\overrightarrow{u}_j) = b_{1j}\overrightarrow{v}_1 + b_{2j}\overrightarrow{v}_2 + \cdots + b_{mj}\overrightarrow{v}_m$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces,

$$(f+g)(\overrightarrow{u}_j) = f(\overrightarrow{u}_j) + g(\overrightarrow{u}_j) = (a_{1j}+b_{1j})\overrightarrow{v}_1 + (a_{2j}+b_{2j})\overrightarrow{v}_2 + \cdots + (a_{mj}+b_{mj})\overrightarrow{v}_m$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto,

$$M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f+g) = (a_{ij}+b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f) + M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(g).$$

(ii) Del mismo modo, dado $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\begin{aligned}(\lambda f)(\overrightarrow{u}_j) &= \lambda f(\overrightarrow{u}_j) = \lambda(a_{1j}\overrightarrow{v}_1 + a_{2j}\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{mj}\overrightarrow{v}_m) = \\ &\quad (\lambda a_{1j})\overrightarrow{v}_1 + (\lambda a_{2j})\overrightarrow{v}_2 + \cdots + (\lambda a_{mj})\overrightarrow{v}_m\end{aligned}$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto,

$$M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(\lambda f) = (\lambda a_{ij}) = \lambda(a_{ij}) = \lambda M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f).$$

(iii) Si $M_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}''}(h) = (c_{ki})$, entonces

$$h(\overrightarrow{v}_i) = c_{1i}\overrightarrow{w}_1 + c_{2i}\overrightarrow{w}_2 + \cdots + a_{pi}\overrightarrow{w}_p$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Entonces, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$(h\circ f)(\overrightarrow{u}_j) = h(f(\overrightarrow{u}_j)) = h(a_{1j}\overrightarrow{v}_1 + a_{2j}\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{mj}\overrightarrow{v}_m)$$

y, como h es lineal, se tiene que

$$\begin{aligned}(h\circ f)(\overrightarrow{u}_j) &= a_{1j}h(\overrightarrow{v}_1) + a_{2j}h(\overrightarrow{v}_2) + \cdots + a_{mj}h(\overrightarrow{v}_m) \\ &= a_{1j}(c_{11}\overrightarrow{w}_1 + c_{21}\overrightarrow{w}_2 + \cdots + a_{p1}\overrightarrow{w}_p) + a_{2j}(c_{12}\overrightarrow{w}_1 + c_{22}\overrightarrow{w}_2 + \cdots + a_{p2}\overrightarrow{w}_p) \\ &\quad + \cdots + a_{mj}(c_{1m}\overrightarrow{w}_1 + c_{2m}\overrightarrow{w}_2 + \cdots + a_{pm}\overrightarrow{w}_p)\end{aligned}$$

y, agrupando términos, se obtiene

$$\begin{aligned}(h\circ f)(\overrightarrow{u}_j) &= (a_{1j}c_{11}+a_{2j}c_{12}+\cdots+a_{mj}c_{1m})\,\overrightarrow{w}_1\\ &\quad+(a_{1j}c_{21}+a_{2j}c_{22}+\cdots+a_{mj}c_{2m})\,\overrightarrow{w}_2\\ &\quad+\cdots+(a_{1j}c_{p1}+a_{2j}c_{p2}+\cdots+a_{mj}c_{pm})\,\overrightarrow{w}_p\end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$(h\circ f)(\overrightarrow{u}_j)=(c_{1\cdot}\cdot a_{\cdot j})\,\overrightarrow{w}_1+(c_{2\cdot}\cdot a_{\cdot j})\,\overrightarrow{w}_2+\cdots+(c_{p\cdot}\cdot a_{\cdot j})\,\overrightarrow{w}_p.$$

Por lo tanto,

$$M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}''}(h\circ f)=\begin{pmatrix} c_{1\cdot}\cdot a_{\cdot 1} & c_{1\cdot}\cdot a_{\cdot 2} & \cdots & c_{1\cdot}\cdot a_{\cdot n}\\ c_{2\cdot}\cdot a_{\cdot 1} & c_{2\cdot}\cdot a_{\cdot 2} & \cdots & c_{2\cdot}\cdot a_{\cdot n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{p\cdot}\cdot a_{\cdot 1} & c_{p\cdot}\cdot a_{\cdot 2} & \cdots & c_{p\cdot}\cdot a_{\cdot n}\end{pmatrix}=(c_{ki})(a_{ij})=M_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}''}(h)\,M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f). \qquad \square$$

PROPOSICION 4.45 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos bases de V. Entonces, la matriz cambio de base de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$ es regular y su inversa es la matriz cambio de base de $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{V}$.*

Demostración: Sabemos que la matriz cambio de base de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$ es la matriz asociada a la aplicación identidad respecto de las bases $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$, mientras que la matriz cambio de base de $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{V}$ es la matriz asociada a la aplicación identidad respecto de las bases $\mathcal{V}'$ y $\mathcal{V}$. Teniendo en cuenta que la composición $id\circ id=id$ y aplicando la Proposición 4.44(iii), se tiene que

$$P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}\cdot P_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}}=M_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}'}(id\circ id)=M_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}'}(id)=I$$

y

$$P_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}}\cdot P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}=M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(id\circ id)=M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(id)=I.$$

Por lo tanto, $P_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}}$ y $P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}$ son matrices inversas. $\square$

PROPOSICION 4.46 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, $f:V\longrightarrow V'$ una aplicación lineal, $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ dos bases de V y $\mathcal{V}_1'$ y $\mathcal{V}_2'$ dos bases de V'. Entonces, se cumple*

$$M_{\mathcal{V}_2}^{\mathcal{V}_2'}(f)=P_{\mathcal{V}_1'}^{\mathcal{V}_2'}M_{\mathcal{V}_1}^{\mathcal{V}_1'}(f)P_{\mathcal{V}_2}^{\mathcal{V}_1}.$$

Demostración: Sabemos que la matriz cambio de base de $\mathcal{V}_2$ a $\mathcal{V}_1$ es la matriz asociada a la aplicación identidad de V respecto de las bases $\mathcal{V}_2$ y $\mathcal{V}_1$, mientras que la matriz cambio de base de $\mathcal{V}_1'$ a $\mathcal{V}_2'$ es la matriz asociada a la aplicación identidad de V' respecto de las bases $\mathcal{V}_1'$ y $\mathcal{V}_2'$. Aplicando la Proposición 4.44(iii), se tiene que

$$P_{\mathcal{V}_1'}^{\mathcal{V}_2'}M_{\mathcal{V}_1}^{\mathcal{V}_1'}(f)P_{\mathcal{V}_2}^{\mathcal{V}_1}=M_{\mathcal{V}_2}^{\mathcal{V}_2'}(id_{V'}\circ f\circ id_V)=M_{\mathcal{V}_2}^{\mathcal{V}_2'}(f). \qquad \square$$

EJEMPLO 4.47 Consideramos de nuevo el Ejemplo 4.39. Calculamos la matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}=\{(1,1),(-1,0)\}$ y $\mathcal{B}'=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ a partir de la matriz $M_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^2)}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^3\right)}(f)$ utilizando la Proposición 4.46. Por un lado, es fácil calcular las matrices cambio de base $P_{\mathcal{B}}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^2\right)}$ y $P_{\mathcal{B}'}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^3\right)}$, ya que se trata de poner en columnas las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$, en el primer caso, y de la base $\mathcal{B}'$, en el segundo,

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^2\right)}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P_{\mathcal{B}'}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^3\right)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por la Proposición 4.45, se tiene que

$$P_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^3)}^{\mathcal{B}'}=\left(P_{\mathcal{B}'}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^3\right)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por la Proposición 4.46,

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) &= P_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^3)}^{\mathcal{B}'} M_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^2)}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^3\right)}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^2\right)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

PROPOSICION 4.48 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f: V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces, $\operatorname{rg}(f)=\operatorname{rg}(A)$, donde A es cualquier matriz asociada a la aplicación lineal f.*

Demostración: Consideremos $\mathcal{V}=\{\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2,\ldots,\overrightarrow{u}_n\}$ y $\mathcal{V}'=\{\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2,\ldots,\overrightarrow{v}_m\}$ bases de V y V', respectivamente, y sea $A=M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f)$.

Por definición, $\operatorname{rg}(f)=\dim\operatorname{Im}(f)$ y, por la Proposición 4.16,

$$\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Env}\left(\{f(\overrightarrow{u}_1),f(\overrightarrow{u}_2),\ldots,f(\overrightarrow{u}_n)\}\right),$$

por lo que se tiene que

$$\operatorname{rg}(f)=\dim\operatorname{Env}\left(\{f(\overrightarrow{u}_1),f(\overrightarrow{u}_2),\ldots,f(\overrightarrow{u}_n)\}\right).$$

Supongamos que $\operatorname{rg}(f)=r\leq n$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{f(\overrightarrow{u}_1),f(\overrightarrow{u}_2),\ldots,f(\overrightarrow{u}_r)\}$ es una base de $\operatorname{Im}(f)$. Entonces, se tiene que

$$f(\overrightarrow{u}_k)\in\operatorname{Env}\left(\{f(\overrightarrow{u}_1),f(\overrightarrow{u}_2),\ldots,f(\overrightarrow{u}_r)\}\right)$$

para todo $k=r+1,\ldots,n$ y existen escalares únicos $\lambda_{1k},\ldots,\lambda_{rk}\in\mathbb{K}$ tales que

$$f(\overrightarrow{u}_k)=\lambda_{1k}f(\overrightarrow{u}_1)+\lambda_{2k}f(\overrightarrow{u}_2)+\cdots+\lambda_{rk}f(\overrightarrow{u}_r)$$

para todo $k = r+1, \ldots, n$. Como las coordenadas de un vector en una base son únicas, se tiene que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}'}\left(f\left(\overrightarrow{u}_k\right)\right) = \lambda_{1k}\mathcal{C}_{\mathcal{V}'}\left(f\left(\overrightarrow{u}_1\right)\right) + \lambda_{2k}\mathcal{C}_{\mathcal{V}'}\left(f\left(\overrightarrow{u}_2\right)\right) + \cdots + \lambda_{rk}\mathcal{C}_{\mathcal{V}'}\left(f\left(\overrightarrow{u}_r\right)\right) \tag{4.12}$$

para todo $k = r+1, \ldots, n$. Ahora bien, por la definición de matriz asociada a una aplicación lineal, se tiene que $a_{\cdot j} = \mathcal{C}_{\mathcal{V}'}\left(f\left(\overrightarrow{u}_j\right)\right)$ para todo $j = 1, \ldots, n$, y (4.12) se puede expresar como

$$a_{\cdot k} = \lambda_{1k}a_{\cdot 1} + \lambda_{2k}a_{\cdot 2} + \cdots + \lambda_{rk}a_{\cdot r},$$

para todo $k = r+1, \ldots, n$, de donde se tiene que las $n - r$ últimas columnas de la matriz A son combinación lineal de las r primeras. Probando que $\{a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot r}\}$ son linealmente independientes, se obtiene que $\operatorname{rg}(A) = r$.

Consideremos la combinación lineal nula

$$\lambda_1 a_{\cdot 1} + \lambda_2 a_{\cdot 2} + \cdots + \lambda_r a_{\cdot r} = \mathbf{0}.$$

Entonces,

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1r}\lambda_r = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2r}\lambda_r = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \cdots + a_{mr}\lambda_r = 0 \end{array}\right\}$$

y, puesto que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= 0\overrightarrow{v}_1 + 0\overrightarrow{v}_2 + \ldots + 0\overrightarrow{v}_m = \left(a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1r}\lambda_r\right)\overrightarrow{v}_1 + \\ &\quad \left(a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2r}\lambda_r\right)\overrightarrow{v}_2 + \cdots + \left(a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \cdots + a_{mr}\lambda_r\right)\overrightarrow{v}_m, \end{aligned}$$

reagrupando, se obtiene

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= \lambda_1\left(a_{11}\overrightarrow{v}_1 + a_{21}\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m1}\overrightarrow{v}_m\right) + \lambda_2\left(a_{12}\overrightarrow{v}_1 + a_{22}\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{m2}\overrightarrow{v}_m\right) \\ &\quad + \cdots + \lambda_r\left(a_{1r}\overrightarrow{v}_1 + a_{2r}\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{mr}\overrightarrow{v}_m\right) \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\overrightarrow{0} = \lambda_1 f\left(\overrightarrow{u}_1\right) + \lambda_2 f\left(\overrightarrow{u}_2\right) + \cdots + \lambda_r f\left(\overrightarrow{u}_r\right).$$

Dado que los vectores $f\left(\overrightarrow{u}_1\right), f\left(\overrightarrow{u}_2\right), \ldots, f\left(\overrightarrow{u}_r\right)$ son linealmente independientes, se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$. Así pues, las r primeras columnas de A son linealmente independientes y $\operatorname{rg}(A) = r$. $\square$

TEOREMA 4.49 *Sean V y V' espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensiones n y m, respectivamente, y sean $\mathcal{V}$ una base de V y $\mathcal{V}'$ una base de V'. Entonces, la aplicación*

$$\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'} : \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V') \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

que asocia a cada aplicación lineal entre V y V' su matriz asociada en las bases $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$, es un isomorfismo.

Demostración: Dado que, para cada $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$, $\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(f) = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f)$, la Proposición 4.44

(i) y (ii) nos asegura que $\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(f+g) = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f+g) = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f) + M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(g) = \Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(f) + \Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(g)$ y $\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\lambda f) = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(\lambda f) = \lambda M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f) = \lambda \Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(f)$, para todo $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, por lo que $\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$ es una aplicación lineal.

$\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$ es inyectiva ya que si $f \in \operatorname{Ker}\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$, entonces $\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(f) = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f) = O$, donde O representa la matriz nula de orden $m \times n$. Pero la única aplicación lineal que tiene como matriz asociada la matriz nula es la aplicación nula. Así pues, $\operatorname{Ker}\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'} = \{0\}$ y $\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$ es inyectiva.

$\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$ también es suprayectiva ya que, dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, existe una aplicación lineal $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ cuya matriz asociada es A, la que tiene como ecuación matricial

$$C_{\mathcal{V}'}(f(\overrightarrow{u})) = A \cdot C_{\mathcal{V}}(\overrightarrow{u}).$$

Por lo tanto, $\Psi_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$ es un isomorfismo. $\square$

NOTA 4.50 *De la Proposición 4.46 se deduce que las matrices asociadas a una misma aplicación lineal en distintas bases son matrices equivalentes.*

EJEMPLO 4.51 Considerando las matrices del Ejemplo 4.39,

$$A = M_{Can(\mathbb{R}^2)}^{Can(\mathbb{R}^3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

y denotando como P y Q las matrices cambio de base obtenidas en el Ejemplo 4.47,

$$P = P_{Can(\mathbb{R}^3)}^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$Q = P_{\mathcal{B}}^{can(\mathbb{R}^2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que $B = PAQ$ (véase (4.11)) con P y Q matrices regulares, por lo que A y B son matrices equivalentes.

PROPOSICION 4.52 *Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, A y B son matrices equivalentes si, y sólo si, existen un homomorfismo $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, bases $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ de $\mathbb{K}^n$ y bases $\mathcal{U}'$, $\mathcal{V}'$ de $\mathbb{K}^m$ tales que $A = M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}(f)$ y $B = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f)$.*

Demostración: Supongamos que A y B son matrices equivalentes. Entonces existen $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrices regulares tales que $B = PAQ$.

Consideremos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ las bases canónicas de $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$, respectivamente, $\mathcal{V}$ la base de $\mathbb{K}^n$ formada por los vectores cuyas componentes en la base canónica de $\mathbb{K}^n$ son las columnas de Q y $\mathcal{V}'$ la base de $\mathbb{K}^m$ formada por los vectores cuyas componentes en la base canónica de $\mathbb{K}^m$ son las columnas de P^{-1}. Entonces $P^{-1} = P_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{U}'}$ y $Q = P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$.

Sea $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ el único homomorfismo tal que $M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}(f) = A$ (véase Teorema 4.49). Entonces, por la Proposición 4.46, se tiene que

$$M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f) = P_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{V}'} M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}(f) P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = PAQ = B.$$

Recíprocamente, si $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ son bases de $\mathbb{K}^n$ y $\mathcal{U}'$, $\mathcal{V}'$ son bases de $\mathbb{K}^m$ tales que $A = M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}(f)$ y $B = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f)$, entonces, por la Proposición 4.46, se tiene que $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}(f) = P_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{V}'} M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}(f) P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$. Tomando $P = P_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{V}'}$ y $Q = P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$, se tiene que $B = PAQ$ o, lo que es lo mismo, A y B son matrices equivalentes. $\square$

NOTA 4.53 *Como consecuencia de la proposición anterior, dos matrices son equivalentes cuando son matrices asociadas a una misma aplicación lineal en distintas bases. Además las matrices P y Q son realmente matrices de cambio de base: P en el espacio final y Q en el espacio inicial.*

COROLARIO 4.54 *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) A y B representan a la misma aplicación lineal en pares de bases distintas.
(ii) Existen matrices regulares P y Q tales que $A = PBQ$.
(iii) A y B tienen el mismo rango.

Demostración: La equivalencia entre (i) y (ii) se ha demostrado en la Proposición 4.52.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Es consecuencia inmediata de la Proposición 4.48.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Supongamos que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$. Entonces, por el Teorema 3.99, tanto A como B son equivalentes a la matriz C_r, y por la propiedad transitiva de la equivalencia de matrices, A y B son equivalentes, es decir, se verifica (ii). $\square$

4.5. Matrices asociadas a endomorfismos.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ tal que $\dim V = n$ y sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo en V. Si $\mathcal{U}$ es una base de V, denotamos por $M_{\mathcal{U}}(f)$ a la matriz asociada a f cuando consideramos la misma base $\mathcal{U}$ en los espacios inicial y final de f. Además, si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son bases distintas de V, se tiene

$$M_{\mathcal{V}}\left(f\right)=P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}M_{\mathcal{U}}\left(f\right)P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}=P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}M_{\mathcal{U}}\left(f\right)\left(P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\right)^{-1}. \tag{4.13}$$

DEFINICION 4.55 *Dos matrices $A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}\left(\mathbb{K}\right)$ son* ***semejantes*** *si existe una matriz P regular tal que $A=PBP^{-1}$.*

NOTA 4.56 *De (4.13) se deduce que las matrices asociadas a un mismo endomorfismo en distintas bases son matrices semejantes.*

PROPOSICION 4.57 *Dos matrices $A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}\left(\mathbb{K}\right)$ son semejantes si, y solo si, existen un endomorfismo $f:\mathbb{K}^n\longrightarrow\mathbb{K}^n$ y dos bases $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathbb{K}^n$ tales que $A=M_{\mathcal{U}}\left(f\right)$ y $B=M_{\mathcal{V}}\left(f\right)$.*

Demostración: La prueba es similar a la de la Proposición 4.52. $\square$

PROPOSICION 4.58 *Si $A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}\left(\mathbb{K}\right)$ son matrices semejantes, entonces $\det A=\det B$ y $\operatorname{tr}\left(A\right)=\operatorname{tr}\left(B\right)$.*

Demostración: Si A y B son matrices semejantes, entonces existe una matriz regular P tal que $A=PBP^{-1}$. Entonces

$$\det A=\left(\det P\right)\left(\det B\right)\left(\det P^{-1}\right)=\left(\det P\right)\left(\det B\right)\left(\det P\right)^{-1}=\det B.$$

Por otra parte, dado que $\operatorname{tr}\left(CD\right)=\operatorname{tr}\left(DC\right)$, cualesquiera que sean las matrices C y D, se tiene

$$\operatorname{tr}\left(A\right)=\operatorname{tr}\left(PBP^{-1}\right)=\operatorname{tr}\left(P^{-1}PB\right)=\operatorname{tr}\left(B\right). \qquad \square$$

DEFINICION 4.59 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $f:V\longrightarrow V$ un endomorfismo en V. Se define el* ***determinante*** *de f, $\det f$, como el determinante de la matriz asociada a f respecto de cualquier base de V. Del mismo modo se define la* ***traza*** *de f, $\operatorname{tr} f$.*

EJEMPLO 4.60 Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ tal que $f\left(x,y\right)=\left(x+y,x-y\right)$.
La matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$A=M_{Can(\mathbb{R}^2)}(f)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

La matriz de f en la base $\mathcal{V}=\{(1,1),(2,0)\}$ es

$$B=M_{\mathcal{V}}(f)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Se verifica que $A=P_{\mathcal{V}}^{Can(\mathbb{R}^2)}BP_{Can(\mathbb{R}^2)}^{\mathcal{V}}=P_{\mathcal{V}}^{Can(\mathbb{R}^2)}B(P_{\mathcal{V}}^{Can(\mathbb{R}^2)})^{-1}$ donde $P_{\mathcal{V}}^{Can(\mathbb{R}^2)}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ es una matriz regular. Por lo tanto, A y B son matrices semejantes.
En este caso, $\det f=-2$ y $\operatorname{tr} f=0$.

Subespacios invariantes de un endomorfismo.

DEFINICION 4.61 *Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ y un endomorfismo $f : V \to V$, se dice que un subespacio W de V es invariante para f si $f(W) \subset W$.*

EJEMPLO 4.62 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (-y, x, z)$. El plano $z = 0$ y el eje OZ son subespacios invariantes para f.

En efecto, sean $W_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Se tiene que $f(x, y, 0) = (-y, x, 0)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, por lo que $f(W_1) \subset W_1$.

En el caso de W_2, se tiene que $f(0, 0, z) = (0, 0, z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$, por lo que $f(W_2) \subset W_2$.

EJEMPLO 4.63 Para cualquier endomorfismo de V, los subespacios impropios de V son invariantes, ya que $f\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$ y $f(V) \subset V$.

PROPOSICION 4.64 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f : V \to V$ un endomorfismo. Entonces, $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ son subespacios invariantes para f.*

Demostración: Por definición, para todo $\overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker} f$, se tiene que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ y, de acuerdo con la Proposición 4.7(i), $\overrightarrow{0} \in \operatorname{Ker} f$. Así pues, $f(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$.

Por otra parte, puesto que $\operatorname{Im} f \subset V$, se tiene que $f(\operatorname{Im} f) \subset f(V) = \operatorname{Im} f$. $\square$

PROPOSICION 4.65 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f : V \to V$ un endomorfismo. Entonces, la intersección y la suma de subespacios invariantes para f son también subespacios invariantes.*

Demostración: Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V que son invariantes para f. Si $\overrightarrow{u} \in W_1 \cap W_2$, entonces $\overrightarrow{u} \in W_1$ y $\overrightarrow{u} \in W_2$. Como W_1 y W_2 son invariantes para f, se tiene que $f(\overrightarrow{u}) \in W_1$ y $f(\overrightarrow{u}) \in W_2$, por lo que $f(\overrightarrow{u}) \in W_1 \cap W_2$. Así pues, $W_1 \cap W_2$ es invariante para f.

Sea ahora $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 \in W_1 + W_2$. Como f es lineal y W_1 y W_2 son invariantes para f, se tiene que $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2) = f(\overrightarrow{u}_1) + f(\overrightarrow{u}_2) \in W_1 + W_2$, lo que demuestra que $W_1 + W_2$ es invariante.

El razonamiento es similar si se consideran más de dos subespacios vectoriales. $\square$

PROPOSICION 4.66 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f : V \to V$ un endomorfismo. Si $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_p$, con W_i subespacio de V invariante para f para todo $i = 1, \ldots, p$, entonces existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal por bloques.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{W}_i$ es una base de W_i para todo $i = 1, \ldots, p$. Dado que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_p$, por el Corolario 2.83, se tiene que $\mathcal{V} := \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{W}_i$ es una base de V. Por ser W_i invariante para f, se tiene que $f(W_i) \subset W_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, p$, y por lo tanto, podemos considerar el endomorfismo $f\backslash_{W_i} : W_i \to W_i$. Si denotamos por A_i la matriz asociada a $f\backslash_{W_i}$ respecto de la base $\mathcal{W}_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, p$, obtenemos

$$\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_p \end{pmatrix},$$

que es una matriz diagonal por bloques. $\square$

EJEMPLO 4.67 Consideremos el endomorfismo del Ejemplo 4.62, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (-y, x, z)$. Consideremos también los subespacios invariantes para f

$$W_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Env}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$$

y

$$W_2 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Env}(\{(0, 0, 1)\}).$$

Dado que $W_1 + W_2 = \operatorname{Env}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}) = \mathbb{R}^3$ y

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2,$$

se tiene que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

Si consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ que es unión de las bases de W_1 y W_2, se tiene

$$\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

que es una matriz diagonal por bloques.

4.6. Problemas.

PROBLEMA 4.1 Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

1. $f_B : \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$ dada por $f_B(A) = AB$ con $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. $g_B : \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ dada por $g_B(A) = A + B$ con $B \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ fija.

3. $h_B : \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ dada por $h_B(A) = AB - BA$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $S : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ dada por $S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$ donde $\mathcal{S}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A = A^t\}$.

5. $R : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dada por $R(A) = AA^t$.

6. $f : \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ dada por $f(p(x)) = p(x+1)$.

7. $g : \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ dada por $g(p(x)) = p(x) + 1$.

PROBLEMA 4.2 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_3)$. Halla la imagen mediante f de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, indicando en cada caso la dimensión del subespacio y la de su imagen:

1. $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

2. $V_2 = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

3. $V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) = t(1, -1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

PROBLEMA 4.3 Encuentra las matrices de las siguientes aplicaciones lineales con respecto a las bases canónicas de los espacios vectoriales dados:

1. f_B y h_B del Problema 4.1.

2. $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$.

3. $f : \mathbb{C}_3[x] \to \mathbb{C}_3[x]$ dada por $f(p(x)) = p(x+1)$.

PROBLEMA 4.4 Respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$, halla las matrices de las siguientes aplicaciones lineales:

1. Simetría con respecto a la recta $x = 0$, $y = 0$.

2. Simetría con respecto a la recta $x = y$, $z = 0$.

3. Proyección sobre el plano $x - y + z = 0$.

4. Simetría con respecto a la recta $(x, y, z) = t\,(1, 1, 1)$.

PROBLEMA 4.5 Sabiendo que la aplicación f lleva los vectores

$$\overrightarrow{u}_1 = (1, 0, 0)\,, \qquad \overrightarrow{u}_2 = (1, 1, 0)\,, \qquad \overrightarrow{u}_3 = (1, 1, 1)$$

de $\mathbb{R}^3$ en los vectores

$$\overrightarrow{w}_1 = (2, 1, 2)\,, \qquad \overrightarrow{w}_2 = (3, 1, 2)\,, \qquad \overrightarrow{w}_3 = (6, 2, 3)$$

respectivamente, encuentra la matriz de f en las siguientes bases:

1. La base canónica de $\mathbb{R}^3$.

2. La base $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$.

PROBLEMA 4.6 Encuentra las ecuaciones de las siguientes aplicaciones lineales realizando cambios de base adecuados:

1. Simetría con respecto a la recta $(x, y, z) = t\,(1, 1, 1)$.

2. Proyección sobre el plano $x - y + z = 0$.

3. Giro de 90^o con respecto a la recta $x + y = 0$, $z = 0$.

PROBLEMA 4.7 Sea $f : \mathbb{R}_3\,[x] \to \mathbb{R}_3\,[x]$ tal que $f\,(1) = x^2 + 1$, $f\,(x) = -x$, $f\,(x^2) = x^3$ y $f\,(x^3) = x^2 + x - 1$. Calcula $f\,(x^2 + 2x + 1)$ y $f\left((x-2)^2 + x^3\right)$. Encuentra la matriz de f con respecto a la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3\,[x]$.

PROBLEMA 4.8 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f\,(x, y, z) = (-x - 2z, x + 2y, -y + z)\,.$$

1. Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

2. Calcular el núcleo y la imagen de f y una base para cada uno de estos subespacios.

3. Hallar la matriz de f respecto de las bases

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 0)\,, (1, 0, 1)\,, (0, 1, 1)\} \;\text{ y }\; \mathcal{B}' = \{(-1, 2, 0)\,, (0, 1, 0)\,, (1, -1, 1)\}$$

en los espacios inicial y final, respectivamente.

4. Si $(2, 3, 0)$ son las coordenadas de un vector $\overrightarrow{v}$ en la base $\mathcal{B}$, calcular las coordenadas de $f\,(\overrightarrow{v})$ en la base canónica.

PROBLEMA 4.9 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ -1 & -11 & -7 \end{pmatrix}$$

y las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,-1),(2,1,0),(0,1,1)\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \{(-2,1),(1,-1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal que tiene como matriz asociada respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ a la matriz A. Se pide:

1. Halla la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

2. Da una expresión general para f.

3. Calcula el núcleo y la imagen de f y una base para cada uno de estos subespacios.

4. Clasifica la aplicación f.

PROBLEMA 4.10 Considérese $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ consistente en la composición de un giro de 90^o alrededor del eje OX con una simetría respecto del plano $x = 0$.

1. Hallar la matriz de f referida a la base canónica $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Idem respecto de la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}\}$.

PROBLEMA 4.11 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que

$$f(3,-5) = (1,1,1,1) \qquad f(-1,2) = (2,1,0,-2)$$

1. Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.

2. Hallar la expresión general de la aplicación f.

3. Determinar el subespacio imagen de la aplicación lineal f y su dimensión.

4. Clasificar la aplicación f.

PROBLEMA 4.12 Dados dos espacios vectoriales reales E_3 y E_3', se define una aplicación lineal $f : E_3 \to E_3'$ de manera que $f(\overrightarrow{u}_1) = \overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2$, $f(\overrightarrow{u}_2) = \overrightarrow{v}_2$ y $f(\overrightarrow{u}_3) = \overrightarrow{v}_1$, siendo $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ bases de E_3 y E_3', respectivamente. Se pide:

1. Matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

2. Dimensión de $\operatorname{img} f$.

3. Una base de $\ker f$.

4. Si en E_3 se considera una nueva base $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{u}'_1, \overrightarrow{u}'_2, \overrightarrow{u}'_3\}$ donde $\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{u}'_1$, $\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{u}'_1 + \overrightarrow{u}'_2$ y $\overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{u}'_1 + \overrightarrow{u}'_3$, calcular la matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}'$.

5. Si en E_3' se hace el cambio de coordenadas $x_1' = x_1 + x_2 - x_3$, $x_2' = x_1 - x_2$ y $x_3' = x_3$, donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas en la base $\mathcal{B}'$ de cualquier vector $\overrightarrow{x} \in E_3'$ y (x_1', x_2', x_3') son las coordenadas del mismo vector $\overrightarrow{x}$ en una nueva base $\mathcal{B}_1'$ de E_3', calcular la matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_1'$.

6. Obtener la matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_1'$.

PROBLEMA 4.13 En el espacio vectorial, $\mathbb{R}_3[x]$, de los polinomios en una variable, x, con coeficientes reales de grado menor o igual que 3, se considera la aplicación $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dada por

$$f(p) = p(x+1) + p(x).$$

Se pide:

1. Demuestra que f es una aplicación lineal.

2. Determina la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

3. Clasifica la aplicación f.

4. Determina, si existe, el polinomio $p \in \mathbb{R}_3[x]$ tal que $f(p) = 2 + x + x^2 + 2x^3$.

PROBLEMA 4.14 Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos en $\mathbb{R}$ y sea

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se pide:

1. Demuestra que las matrices de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes.

2. Sea $N_2(\mathbb{R})$ el subespacio generado por $\mathcal{B}$. Demuestra que las matrices pertenecientes a $N_2(\mathbb{R})$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & a \end{pmatrix},$$

con a, b, $c \in \mathbb{R}$.

3. Sea $f : N_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2b+c \\ -2b+c & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcula la matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C} = \operatorname{Can}(M_2(\mathbb{R})) = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ representa la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

4. Calcula el núcleo y la imagen de f.

PROBLEMA 4.15 En $\mathbb{R}^4$ consideramos los subespacios

$$W_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\right\}$$

y

$$W_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0,\ x_3 - x_4 = 0\right\},$$

y el endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\left(3x_1 + x_2 - x_3 - x_4, 4x_1 - 2x_3, -2x_1 + 4x_3 - 2x_4, -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right).$$

Se pide:

1. Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios invariantes para f.

2. Encontrar una base de $W_1 + W_2$ y otra de $W_1 \cap W_2$.

3. Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal a trozos.