Electromagnetismo II

Tema 8. FORMULACIÓN LAGRANGIANA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

1.- Obtener las ecuaciones de Hamilton para un sistema discreto comparando el valor de dH (siendo H el hamiltoniano del sistema) obtenido en los siguientes casos:

1) $H = H(q^i, p_i, t)$.

2) $H = p_i \dot{q}^i - L,$ donde L es el lagrangiano del sistema $L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$.

2.- A partir de la densidad lagrangiana $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\varphi, \pi, \partial_i \varphi, x^\mu)$ para un campo escalar φ, se define la densidad de momento, π, mediante la ecuación:

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

y se obtiene la densidad hamiltoniana, $\mathscr{H}$, definida como $\mathscr{H}(\varphi, \pi, \partial_i \varphi, x^\mu) = \pi \dot{\varphi} - \mathscr{L}$. Encontrar las ecuaciones de Hamilton para un sistema continuo comparando el valor de $d\mathscr{H}$ obtenido en los siguientes casos:

1) $\mathscr{H}(\varphi, \pi, \partial_i \varphi, x^\mu)$.

2) $\mathscr{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathscr{L}$.

3.- Obtener las componentes Θ_c^{00}, Θ_c^{0i} y Θ_c^{i0} del tensor energía-impulso canónico en ausencia de fuentes. Demostrar que este tensor no es simétrico.

4.- Obtener las componentes del tensor energía-impulso de Belifante, $\Theta_s^{\mu\nu}$. Demostrar que este tensor es simétrico y que su traza es nula.

5.- Paul Dirac (1902-1984) y Vladimir Fock (1898-1974) propusieron una densidad lagrangiana para el campo electromagnético de la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 \partial_\rho A_\sigma \partial^\rho A^\sigma - J^\eta A_\eta$$

(a) Sustituir esta densidad lagrangiana en las ecuaciones de Euler-Lagrange de un campo y discutir el resultado que se obtiene.

(b) Esta densidad lagrangiana difiere de la densidad lagrangiana ordinaria en una tetradivergencia. ¿Modifica esto de alguna manera la acción o las ecuaciones de movimiento? ¿Por qué?