TEMA 1: Números complejos.

1.1. Introducción.

Las sucesivas ampliaciones de los sistemas de números se han realizado para acomodar resultados sorprendentes en los sistemas de números conocidos. Estos resultados sorprendentes provienen, en la mayor parte de los casos, de la resolución de ecuaciones algebraicas.

Por ejemplo, la ecuación $x + 7 = 5$, en la que solamente aparecen números naturales, no posee ningún número natural como solución; su solución es el número negativo -2. Los números naturales, junto con los números negativos y el cero forman el sistema de los números enteros. Este sistema de números es insuficiente para resolver todas las ecuaciones algebraicas; la ecuación $3x = 5$ no posee como solución ningún número entero; su solución es el número fraccionario $5/3$. Los números enteros, junto con los números fraccionarios, forman el conjunto de los números racionales. Estos números resultan insuficientes para resolver ecuaciones cuadráticas; por ejemplo, la ecuación $x^2 = 2$ no tiene un número racional como solución; sus soluciones son los números irracionales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Los números racionales, junto con los irracionales, forman el sistema de los números reales. Los números reales no son, sin embargo, suficientes para resolver cualquier ecuación cuadrática. La ecuación $x^2 = -1$ no tiene solución real, ya que el cuadrado de cualquier número real es siempre un número positivo. De nuevo, nos vemos en la necesidad de ampliar el concepto de número para incluir aquellos que permitan resolver esta ecuación. Con el conjunto de los números complejos, que contiene, a su vez, al conjunto de los números reales, se consigue que cualquier ecuación algebraica tenga solución.

1.2. Números complejos. Operaciones.

Se define un nuevo número (la unidad imaginaria), denotado por i, para el que se satisface $i^2 = -1$.

DEFINICION 1.1 *Un **número complejo** es cualquier expresión de la forma*

$$z = a + bi$$

*donde a y b son números reales que reciben el nombre de **parte real** y **parte imaginaria**, respectivamente, del número complejo z. Se denotan por $a = \mathrm{Re}\,(z)$ y $b = \mathrm{Im}\,(z)$. El conjunto de todos los números complejos se denota por $\mathbb{C}$.*

Los números reales son los números complejos que tienen la parte imaginaria nula, de manera que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Los números complejos cuya parte real es nula se llaman **imaginarios puros**.

DEFINICION 1.2 *Dos números **complejos** $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son **iguales** si $a = c$ y $b = d$.*

DEFINICION 1.3 *Dado un número complejo $z = a + bi$, llamaremos **conjugado** de z al número complejo $\overline{z} = a - bi$.*

DEFINICION 1.4 *Dados dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, se definen la suma y el producto de z_1 y z_2, de la siguiente manera:*

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\, i$$

y

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\, i.$$

POTENCIAS DE i:

Puesto que $i^2 = -1$, tenemos que $i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1$. Por lo tanto, si n es un número natural que al dividirlo entre 4 da de resto r, $0 \leq r < 4$, es decir, $n = 4l + r$, donde l es el cociente de la división, se tiene que

$$i^n = i^{4l+r} = i^{4l} i^r = \left(i^4\right)^l i^r = 1^l i^r = i^r,$$

que es igual a 1, i, -1 o $-i$ para $r = 0, 1, 2, 3$, respectivamente.

COCIENTE DE NÚMEROS COMPLEJOS:

Dados dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di \neq 0$, el cociente entre z_1 y z_2 es otro número complejo $x + yi$ para el que se cumple:

$$(c + di)\,(x + yi) = a + bi,$$

o lo que es lo mismo

$$(cx - dy) + (cy + dx)\, i = a + bi,$$

de donde se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} cx - dy & = & a \\ cy + dx & = & b \end{array}\right\}.$$

Resolviendo el sistema, obtenemos los valores de x e y

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \qquad y = \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}.$$

Así pues, el cociente entre z_1 y z_2 es

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}.$$

Una forma más fácil de recordar para obtener el cociente de dos números complejos es multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, es decir,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+i(cb-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}.$$

Dado un número complejo $z = a + bi$, el punto (a, b) del plano cartesiano se llama **afijo** de z. Los números complejos se pueden representar gráficamente en el plano cartesiano mediante un vector con origen en el punto $(0, 0)$ y extremo en el afijo del correspondiente número complejo, es decir, el vector (a, b) del plano.

DEFINICION 1.5 *El **módulo** del número complejo $a+bi$ es la distancia entre el origen de coordenadas y el afijo del número o, si se prefiere, la longitud del vector (a, b). En otras palabras, como consecuencia del Teorema de Pitágoras, el módulo de $a + bi$ es el número real*

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

PROPIEDADES:

1. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.

Si $z = a + bi$, se tiene que

$$z + \overline{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)\,.$$

2. $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)\,i$.

Si $z = a + bi$, se tiene que

$$z - \overline{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi = 2\,\mathrm{Im}(z)\,i.$$

3. $0 \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

Por un lado, $|z| \geq 0$ por definición. Además,

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}.$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} |z|^2 &= (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 = |\mathrm{Re}(z)|^2 + |\mathrm{Im}(z)|^2 \\ &\leq |\mathrm{Re}(z)|^2 + |\mathrm{Im}(z)|^2 + 2\,|\mathrm{Re}(z)|\,|\mathrm{Im}(z)| = (|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|)^2\,. \end{aligned}$$

Tomando raíces cuadradas en la expresión

$$|z|^2 \leq (|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|)^2\,,$$

se obtiene el resultado.

4. $|z| = 0$ si, y sólo si, $z = 0$.

$|z| = 0$ si, y sólo si,

$$\sqrt{(\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2} = 0$$

o, lo que es lo mismo, $(\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2 = 0$, que sólo es posible cuando $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z) = 0$, es decir, cuando $z = 0$.

5. $|-z| = |z|$.

Si $z = a + bi$, se tiene

$$|-z| = |-a - bi| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|\,.$$

6. $|\overline{z}| = |z|\,.$

Si $z = a + bi$, se tiene

$$|\overline{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|\,.$$

7. $z\overline{z} = |z|^2$ (real no negativo).

Si $z = a + bi$, se tiene

$$z\overline{z} = (a + bi)\,(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2\,(-1) = a^2 + b^2 = |z|^2\,.$$

8. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,i$, de donde

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)\,i. \tag{1.1}$$

Por otra parte,

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a - bi) + (c - di)\,,$$

que coincide con (1.1).

9. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$, de donde

$$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)\,i. \tag{1.2}$$

Por otra parte,

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (a - bi)\,(c - di) = (ac + (-b)\,(-d)) + (a\,(-d) + (-b)\,c)\,i,$$

que coincide con (1.2).

10. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,.$

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$ y

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{(a^2c^2 + b^2d^2 - 2acbd) + (a^2d^2 + b^2c^2 + 2adbc)} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Por otra parte,

$$|z_1|\,|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2)},$$

que coincide con (1.3).

11. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (propiedad triangular).

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \tag{1.4}$$

y

$$|z_1| + |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}. \tag{1.5}$$

Se cumple que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ si, y sólo si, $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$ que, por (1.4) y (1.5), es equivalente a

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 \leq \left(a^2 + b^2\right) + \left(c^2 + d^2\right) + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$$

o, lo que es lo mismo,

$$a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}.$$

Simplificando, se obtiene la desigualdad equivalente

$$2ac + 2bd \leq 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2},$$

que se cumple si, y sólo si,

$$(2ac + 2bd)^2 \leq \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}\right)^2$$

o, lo que es lo mismo,

$$4a^2c^2 + 4b^2d^2 + 8acbd \leq 4\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right).$$

Operando en el segundo miembro de la desigualdad, se obtiene

$$4a^2c^2 + 4b^2d^2 + 8acbd \leq 4a^2c^2 + 4b^2c^2 + 4a^2d^2 + 4b^2d^2,$$

lo que resulta ser equivalente a

$$4b^2c^2 + 4a^2d^2 - 8acbd \geq 0,$$

o, lo que es lo mismo,

$$(2bc - 2ad)^2 \geq 0.$$

Dado que esta última desigualdad se cumple siempre, también se cumplirá

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,.$$

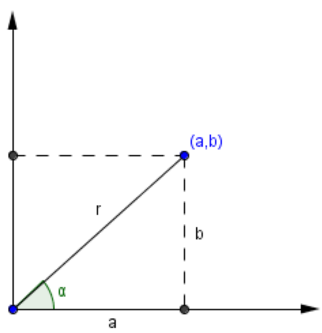
1.3. Formas trigonométrica y exponencial.

Un número complejo $z = a + bi$ se dice que está expresado en **forma binómica**. Veremos otras dos formas de expresar z.

Hemos definido el módulo de z, $|z|$, como la distancia entre el origen de coordenadas y el afijo de z, o lo que es lo mismo, como la longitud del vector (a, b). El ángulo que forma dicho vector con la parte positiva del eje de abcisas se denomina **argumento** de z y se denota $\alpha = \arg(z)$. La trigonometría elemental nos permite obtener

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

siempre que a no sea nulo.



En la figura, en la que $r = |z|$, se observa que $a = |z| \cos \alpha$ y $b = |z| \operatorname{sen} \alpha$, por lo que podemos escribir

$$z = |z| \left(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha\right)$$

que es la **forma polar o trigonométrica** de z.

PROPOSICION 1.6 *(i) El módulo del producto de dos números complejos es el producto de sus módulos, y el argumento del producto es la suma de sus argumentos.*

(ii) El módulo del cociente de un número complejo por otro no nulo es el cociente de sus módulos, y el argumento del cociente es la diferencia de sus argumentos.

Demostración: Consideremos los números complejos

$$z_1 = |z_1| (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) \quad \text{y} \quad z_2 = |z_2| (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2).$$

(i) Efectuando el producto, tenemos

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)$$

$$= |z_1| |z_2| [(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2) + i (\operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2)]$$

$$= |z_1| |z_2| [\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \operatorname{sen} (\alpha_1 + \alpha_2)].$$

(ii) De forma semejante, si $z_2 \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1| (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)}{|z_2| (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) (\cos \alpha_2 - i \operatorname{sen} \alpha_2) \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos (\alpha_1 - \alpha_2) + i \operatorname{sen} (\alpha_1 - \alpha_2)]. \end{aligned}$$

□

Si definimos

$$e^{i\alpha} := \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha,$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos escribir, para todo complejo $z = |z| (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$,

$$z = |z| e^{i\alpha},$$

que es la **forma exponencial** de z.

Como en el caso de los números reales, $s \in \mathbb{C}$ es una **raíz n-ésima** de $z \in \mathbb{C}$ si $s^n = z$. Veremos que todo número complejo no nulo tiene exactamente n raíces distintas, por lo que evitaremos escribir $\sqrt[n]{z}$ (salvo que z sea un número real no negativo).

PROPOSICION 1.7 *Sea $z = |z| e^{i\alpha}$ un complejo dado y $n \in \mathbb{N}$. Se cumple:*

(i) $z^n = |z|^n e^{in\alpha}$.

(ii) Si $z \neq 0$, entonces z tiene exactamente n raíces n-ésimas, que son

$$\sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Demostración: (i) Por la Proposición 1.6 (i),

$$z^2 = |z|^2 (\cos 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha) = |z|^2 e^{i2\alpha}.$$

La prueba se completa por inducción sobre n. Supongamos que la proposición se cumple para $n-1$, es decir, $z^{n-1} = |z|^{n-1} e^{i(n-1)\alpha}$. Entonces,

$$z^n = z^{n-1} \cdot z = \left(|z|^{n-1} e^{i(n-1)\alpha}\right)\left(|z| e^{i\alpha}\right) = |z|^n e^{in\alpha}.$$

(ii) Empezaremos viendo que tales números complejos son raíces n-ésimas de z. En efecto, de acuerdo con (i), se tiene

$$\left[\sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)}\right]^n = \left[\sqrt[n]{|z|}\right]^n e^{in\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)} = |z| e^{i(\alpha+2k\pi)} = |z| e^{i\alpha} = z.$$

Para ver que esas n raíces de z son distintas dos a dos efectuaremos su cociente de acuerdo con la Proposición 1.6 (ii). Dados $0 \leq k_2 < k_1 \leq n-1$,

$$\frac{\sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\alpha+2k_1\pi}{n}\right)}}{\sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\alpha+2k_2\pi}{n}\right)}} = \cos\left(\frac{2(k_1-k_2)\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2(k_1-k_2)\pi}{n}\right) \neq 1$$

puesto que $(k_1 - k_2)/n \notin \mathbb{Z}$.

Terminaremos probando que cualquier otra raíz n-ésima de z pertenece al conjunto considerado en (ii). En efecto, si $s = |s| e^{i\varphi}$ es raíz n-ésima de z, se deberá cumplir $s^n = z$, es decir, $|s|^n = |z|$ y $e^{in\varphi} = e^{i\alpha}$. Entonces,

$$\cos n\varphi = \cos\alpha \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n\varphi = \operatorname{sen}\alpha,$$

lo que implica $(n\varphi - \alpha)/2\pi \in \mathbb{Z}$. Podemos escribir

$$(n\varphi - \alpha)/2\pi = k + pn,$$

con $p \in \mathbb{Z}$ y $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, es decir,

$$\varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + 2p\pi.$$

Entonces,

$$s = |s| e^{i\varphi} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)},$$

que es uno de los n números complejos enumerados en (ii). $\square$

1.4. Problemas.

PROBLEMA 1.1 Dados los complejos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -5 + i$, $z_3 = 2i$ y $z_4 = -5$, calcula:

1. $z_1 + z_2 - z_3$. (Sol.: $-3 + 2i$).

2. $z_2 \left(z_3 + z_4\right)$. (Sol.: $23 - 15i$).

3. $\dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3}$. (Sol.: $-\frac{5}{26} - \frac{7}{13}i$).

4. $\dfrac{z_1 + z_2}{2\left(z_3 - z_4\right)}$. (Sol.: $-\frac{7}{58} + \frac{13}{29}i$).

PROBLEMA 1.2 Calcula:

1. $(2 - i)(-3 + 2i)(5 - 4i)$. (Sol.: $8 + 51i$).

2. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{8}$. (Sol.: 2).

3. $\dfrac{3+7i}{2+3i} + \dfrac{5-8i}{2-3i}$. (Sol.: $\frac{61}{13} + \frac{4}{13}i$).

4. $i^{2000} + i^{1999} + i^{201} + i^{82} + i^{47}$. (Sol.: $-i$).

PROBLEMA 1.3 Determina el valor del número real x para que el cociente $\dfrac{2x - i}{1 + i}$ sea imaginario puro. (Sol.: $x = \frac{1}{2}$).

PROBLEMA 1.4 Determina el valor del número real x para que $\dfrac{1}{2x - i}$ sea un número real. (Sol.: No existe ningún valor para x).

PROBLEMA 1.5 Determina un número complejo cuyo cuadrado sea $8 - 6i$. (Sol.: $3 - i$ o $-3 + i$).

PROBLEMA 1.6 Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

1. $(1 - z)(1 + i) = 2 - i$. (Sol.: $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$).

2. $z(1 - 2i) + 3 = 1 - 2z + i$. (Sol.: $z = -\frac{8}{13} - \frac{1}{13}i$).

3. $\dfrac{1-z}{1+z} = \dfrac{2-i}{1+4i}$. (Sol.: $z = \frac{2}{3} + i$).

4. $\dfrac{z}{i} + \dfrac{1-z}{2i} = 0.$ $\quad (z = -1)$.

5. $\dfrac{2z}{1+i} - \dfrac{z}{1-i} = 3 + 4i.$ $\quad$ (Sol.: $z = -\frac{9}{5} + \frac{13}{5}i$).

PROBLEMA 1.7 Hallar los números complejos que son conjugados de:

1. su cuadrado. $\quad$ (Sol.: $0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$).

2. su cubo. $\quad$ (Sol.: $0, i, -i, 1, -1$).

PROBLEMA 1.8 Encuentra todos los números complejos $z \neq 0$ tales que $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$.
(Sol.: $z \in \mathbb{R}$ y $z = a + bi$ con $a^2 + b^2 = 1$).

PROBLEMA 1.9 Encuentra todos los números complejos, $z \in \mathbb{C}$, que verifican

$$|z| = |1 - z| = \left|\frac{1}{z}\right|.$$

(Sol.: $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$).

PROBLEMA 1.10 Encuentra la forma polar de los siguientes números complejos:

1. $1 - \sqrt{3}i.$ $\quad$ (Sol.:$2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$).

2. $-1 + i.$ $\quad$ (Sol.: $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$).

3. $2i.$ $\quad$ (Sol.: $2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$).

4. $4.$ $\quad$ (Sol.: $4(\cos 0 + i\sin 0)$).

5. $-\sqrt{3} - i.$ $\quad$ (Sol.: $2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$).

PROBLEMA 1.11 Escribe los siguientes números complejos en su forma binómica:

1. $3e^{i\frac{\pi}{6}}.$ $\quad$ (Sol.: $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$).

2. $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$ $\quad$ (Sol.: $-1 + i$).

3. $2e^{i\frac{\pi}{2}}.$ $\quad$ (Sol.: $2i$).

4. $3e^{i\pi}.$ $\quad$ (Sol.: -3).

PROBLEMA 1.12 Calcula las siguientes potencias:

1. $(1-i)^4$. (Sol.: -4).

2. $\left(-1-\sqrt{3}i\right)^5$. (Sol.: $-16+16\sqrt{3}i$).

3. $(-2+i)^3$. (Sol.: $5\sqrt{5}\,(-0.17+0.98i)$).

PROBLEMA 1.13 Demuestre que $\left(\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n=\dfrac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$.

PROBLEMA 1.14 Calcula:

1. Las raíces cúbicas de i. (Sol.: $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $-i$).

2. Las raíces cuartas de -4. (Sol.: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$).

3. Las raíces sextas de -27. (Sol.: $\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}i$).

PROBLEMA 1.15 Resuelve, en $\mathbb{C}$, las siguientes ecuaciones:

1. $(z+i)^3=\dfrac{1-i}{-1-i}$. (Sol.: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $-2i$).

2. $z^2+2\overline{z}^2+z-\overline{z}+9=0$. (Sol.: $1+2i$ y $1-2i$).

3. $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)+1=0$. (Sol.: $0,1,-1$).

4. $x^6+4x^3-5=0$. (Sol.: 1, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{5}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\sqrt[3]{5}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$).

5. $2x^5-20x^4+70x^3-140x^2+248x-240=0$. (Sol.: $2,3,5,2i,-2i$).

PROBLEMA 1.16 Encuentra todos los números naturales n tales que

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=2.$$

(Sol.: $n=3k$ con $k\in\mathbb{N}$).

PROBLEMA 1.17 Dados dos números complejos no nulos, z_1 y z_2, tales que

$$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\,,$$

demuestra que $\dfrac{z_1}{z_2}$ es imaginario puro.