Electromagnetismo II

Primer control: 14 de abril de 2021

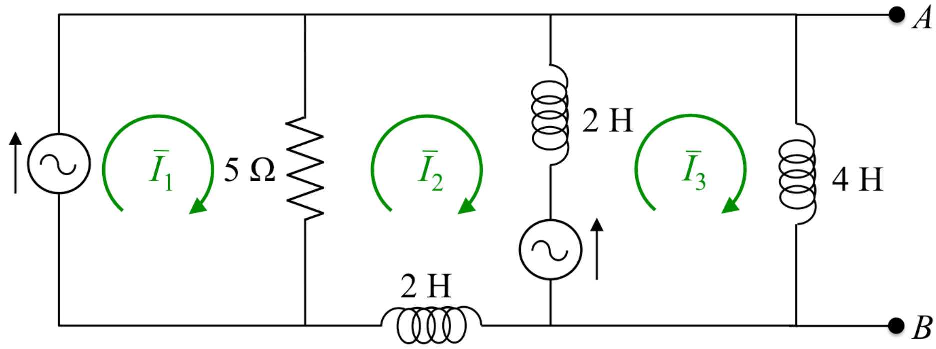
1.- En el circuito de la figura los generadores tienen el mismo valor instantáneo de la tensión dado por $V(t) = 10\sqrt{2}\cos t$ V.

(a) Determinar las corrientes de malla sabiendo que la intensidad instantánea de la malla central vale $I_2(t) = \sqrt{2}\cos(t - 90^\circ)$ A.

(b) Obtener el circuito equivalente de Thevenin entre los terminales A y B.

(c) Se conecta una impedancia $\bar{Z} = R + jX$ entre los terminales A y B del circuito equivalente de Thevenin obtenido en el apartado (b), de modo que en el circuito en serie resultante hay resonancia y la potencia reactiva en la impedancia $\bar{Z}$ vale -3.2 VAR. Determinar R, X y la corriente que circula por el circuito serie resultante.

(2.5 puntos)



2.- Un condensador formado por dos láminas planoparalelas de área A separadas una distancia d está completamente cargado (con un campo uniforme $\vec{\mathbf{E}} = E\hat{\mathbf{u}}_z$ entre sus láminas) y se sitúa en una región del espacio en la que hay un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}} = B\hat{\mathbf{u}}_x$ como se ve en la figura.

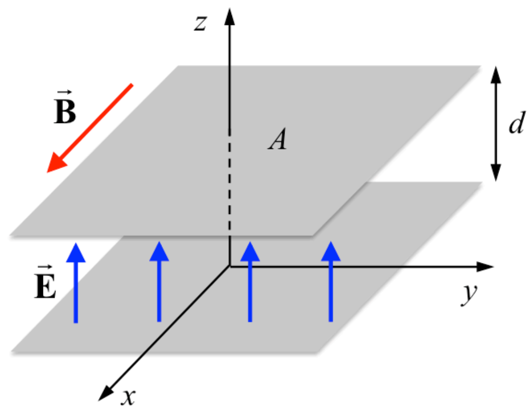
(a) Determinar el vector de Poynting, la densidad de momento lineal electromagnético, el momento lineal electromagnético y el tensor de tensiones de Maxwell entre las láminas.

Ahora se conectan las láminas mediante un cable con una resistencia muy pequeña, a lo largo del eje z, de modo que el condensador se descarga muy lentamente (el campo magnético resultante se puede suponer que es prácticamente el campo magnético exterior aplicado).

(b) Obtener la fuerza magnética que actúa sobre el cable y el momento lineal mecánico final cuando el condensador está completamente descargado, comprobando que coincide con el momento electromagnético inicial del sistema.

(c) Determinar las energías electromagnéticas inicial y final (cuando el condensador está totalmente descargado) y comprobar que se cumple la ley de conservación de la energía. Tener en cuenta que:

$$\int_V \vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}}\, dV = \int_V E \underbrace{J\, dA}_{I}\, dl = \int_L E\, I\, dl$$



Expresar los resultados de los tres apartados en función de los datos del problema (E, B, A y d) teniendo en cuenta que hay aire entre sus láminas.

(2.5 puntos)

3.- Sea una onda electromagnética plana polarizada linealmente que se propaga en un medio conductor indefinido.

(a) Encontrar la expresión de la profundidad de penetración para un mal conductor. ¿Cuánto vale la profundidad de penetración para el agua pura si a bajas frecuencias $\sigma = 4 \times 10^{-6}\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, $\varepsilon_r = 80.1$ y $\mu \approx \mu_0$?

(b) Encontrar la expresión de la profundidad de penetración para un buen conductor y obtener su valor en nanómetros para un metal típico ($\sigma \approx 4 \times 10^{7}\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ en el rango visible ($\omega \approx 10^{5}$ rad/s), suponiendo que $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ y $\mu \approx \mu_0$. ¿Por qué son opacos los metales?

(c) Probar que para un buen conductor el campo magnético está retrasado 45º respecto al campo eléctrico y encontrar el cociente entre sus amplitudes B_0/E_0. Determinar el valor numérico del cociente B_0/E_0 para un metal típico (tomar los datos numéricos del apartado (b)).

(2.5 puntos)

4.- Una superficie cilíndrica de radio de la base a se mueve con velocidad constante v a lo largo de su eje (que coincide con el eje x). Esta corteza cilíndrica tiene una carga neta por unidad de longitud λ uniformemente distribuida sobre su superficie.

(a) Determinar los campos eléctrico y magnético creados por la superficie cilíndrica a partir del valor de los campos en el sistema de referencia *S'* en el que la superficie cilíndrica está en reposo.

(b) Comprobar que el campo magnético en el sistema *S* corresponde al obtenido al aplicar la ley de Ampére de la magnetostática. ¿Cuál es el valor de la intensidad *I* transportada la superficie cilíndrica en el sistema *S*?

(c) Si introducimos un tetravector corriente cuyas componentes en el sistema *S'* son:

$$J'^{\mu} = \begin{pmatrix} c\lambda' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

determinar, aplicando las transformaciones de Lorentz, las componentes de ese tetravector en el sistema de referencia *S* en el que la superficie cilíndrica está en movimiento ¿Coincide con el resultado obtenido anteriormente?

(2 puntos)

5.- Determinar las componentes F_{01}, F_{10}, F_{23} y F_{32} del tensor campo electromagnético teniendo en cuenta que es antisimétrico, así como las componentes $\mathscr{F}^{01}$, $\mathscr{F}^{10}$, $\mathscr{F}^{23}$ y $\mathscr{F}^{32}$ del tensor dual del campo electromagnético.

(0.5 puntos)

• Conservación del momento lineal

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}_{mecánico}}{dt}+\frac{d}{dt}\underbrace{\int_V \varepsilon_0(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}})\,dV}_{\vec{\mathbf{P}}_{EM}}=\oint_S(\vec{\mathbf{T}}_x\cdot\hat{\mathbf{n}},\vec{\mathbf{T}}_y\cdot\hat{\mathbf{n}},\vec{\mathbf{T}}_z\cdot\hat{\mathbf{n}})\,ds$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{P}}_{mecánico}+\vec{\mathbf{P}}_{EM}\right)=\oint_S\vec{\mathbf{T}}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,ds \qquad T_{ij}=\varepsilon_0E_iE_j+\frac{1}{\mu_0}B_iB_j-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\delta_{ij}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}_{mecánico}}{dt}+\frac{d}{dt}\int_V \varepsilon_0(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}})\,dV=\oint_S\vec{\mathbf{T}}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,ds \qquad \vec{\mathbf{F}}=\frac{d\vec{\mathbf{P}}_{mecánico}}{dt}:\text{fuerza}$$

$$\text{densidad de momento lineal e.m.}:\ \vec{\mathbf{g}}=\varepsilon_0(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}})=\varepsilon_0\mu_0\vec{\mathbf{S}}=\frac{\vec{\mathbf{S}}}{c^2}$$

• Ondas electromagnéticas en medios conductores

$$\tilde{k}=k+i\beta \qquad \begin{cases} k=\omega\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1\right]^{1/2} \\[2ex] \beta=\omega\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2} \end{cases}$$

$$\tilde{k}=K\mathrm{e}^{i\phi} \quad\Rightarrow\quad K\equiv\left|\tilde{k}\right|=\sqrt{k^2+\beta^2}=\omega\sqrt{\varepsilon\mu\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}}$$

$$\tilde{B}_0=\frac{\tilde{k}}{\omega}\tilde{E}_0$$

$$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\,C^2\cdot N\cdot m^{-2} \qquad \mu_0=4\pi\times10^{-7}\,N\cdot A^{-2}$$

• Transformación de los campos eléctrico y magnético bajo un "boost" con velocidad v a lo largo del eje x, sentido positivo (E' y B' en el sistema S' –que se mueve con velocidad v respecto al sistema S, donde los campos son E y B–)

$$E'_x=E_x \qquad B'_x=B_x$$

$$E'_y=\gamma(E_y-vB_z) \qquad B'_y=\gamma\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)$$

$$E'_z=\gamma(E_z+vB_y) \qquad B'_z=\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)$$