

ENUNCIADOS DE PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL EXAMEN DE C3 DE 2020 DE ELECTROMAGNETISMO I

Las magnitudes en negrita son vectoriales

1. PROBLEMA DE POISSON EXAMENES B Y D. Sea una esfera maciza conductora de radio R , sometida a un potencial V_0 , rodeada por un material dieléctrico de permitividad absoluta ϵ . En el material dieléctrico existe una densidad volumétrica de carga (libre) dada por $\rho_v = (\rho_0 R/r) \exp(-ar)$, donde a es una constante y r la distancia al centro de la esfera (ρ_0 es la densidad de carga en la superficie de la esfera). Obtener mediante la resolución de la ecuación de Laplace o Poisson, el potencial electrostático en cualquier punto del espacio. A partir de él obtener el campo eléctrico \mathbf{E} .

2. PROBLEMA DE CILINDRO MAGNETIZADO, TODOS. Sea un cilindro recto de longitud L y radio R (siendo $R \ll L$) dirigido a lo largo del eje z de un material magnético de permeabilidad μ . El material está magnetizado, siendo el vector magnetización (en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)): $\mathbf{M} = M_0 (\rho/R) \mathbf{u}_\phi$

a) Calcular las densidades de corriente volumétricas y superficiales de magnetización. Hacer un esquema para dibujar sus direcciones.

b) Calcular los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} en todos los puntos del espacio. Dibujar gráficamente las componentes de los campos determinadas, así como de M , en función de la coordenada radial. Verificar que se cumplen las condiciones de contorno para los tres en la superficie del cilindro.

3. PROBLEMA ESPIRA CUADRADA TODOS Sea una espira conductora cuadrada de lado $2a$, situada en el plano xy y con el origen de coordenadas en el centro de la espira.

a) Determina el potencial vector \mathbf{A} (utilizando la definición) en puntos del eje z .

b) Determinar la inducción magnética \mathbf{B} en un punto cualquiera del espacio, suponiendo que está muy alejado de la espira (se sugiere usar la aproximación dipolar).

c) Particulariza la solución del apartado b) para los puntos del eje z . ¿Podrías llegar a este resultado a partir del resultado obtenido en \mathbf{A} ?

d) Hallar el radio y posición equivalente que debería tener una espira circular, para que produjera la misma \mathbf{B} que la de la espira cuadrada obtenida en el apartado b).

4. PROBLEMA DE POISSON EXAMENES A Y C. Sean dos láminas plano-paralelas conductoras de gran tamaño, de grosor despreciable y misma área S . Están separadas entre sí una distancia d , siendo $d \ll S$, habiendo entre ellas vacío. Una de las placas reposa sobre el plano XY y tiene el origen en el centro de ella.

a) Para el caso de que el potencial en las placas sea $V_1 = \text{cte}$ y $V_2 = \text{cte}$, respectivamente, calcular el potencial electrostático en la región entre las placas (en puntos alejados de los bordes) mediante la resolución de la Ecuación de Laplace o Poisson, según corresponda. A partir de él, obtener el campo eléctrico \mathbf{E} . ¿Existe densidad de carga superficial en las placas? Calcularlas en cada caso y decir si son libres o ligadas.

b) Para otro caso, en el que la diferencia de potencial entre las placas venga dada por $V(z) = C z^{4/3}$ ($C = \text{cte}$). Calcular la densidad de carga volumétrica entre los electrodos y la carga total entre los mismos. ¿Esta carga es libre o ligada? ¿Existe densidad de carga superficial en los electrodos?

RESOLUCION PROBLEMAS DE POISSON BYD

En todo punto $r > R$ deberá satisfacerse la ecuación de Poisson:

$$\begin{aligned}\nabla^2 V(r) &= -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{\rho_0}{\epsilon} \cdot \frac{Re^{-ar}}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon} \cdot \frac{Re^{-ar}}{r} \Rightarrow \\ r^2 \frac{dV}{dr} &= \int -\frac{\rho_0 R}{\epsilon} r e^{-ar} dr + C_1 = \frac{\rho_0 R}{\epsilon} \left(\frac{r e^{-ar}}{a} + \frac{e^{-ar}}{a^2} \right) + C_1 \Rightarrow \\ \frac{dV}{dr} &= \frac{\rho_0 R}{\epsilon} \left(\frac{e^{-ar}}{ar} + \frac{e^{-ar}}{a^2 r^2} \right) + \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{\rho_0 R}{a\epsilon} \int \left(\frac{e^{-ar}}{r} + \frac{e^{-ar}}{ar^2} \right) dr - \frac{C_1}{r^2} + C_2\end{aligned}$$

La integral:

$$I \equiv \int \left(\frac{e^{-ar}}{r} + \frac{e^{-ar}}{ar^2} \right) dr = \int \frac{e^{-ar}}{r} dr + \int \frac{e^{-ar}}{ar^2} dr$$

e integrando la segunda por partes, se tiene:

$$I \equiv \int \frac{e^{-ar}}{r} dr + \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{r} e^{-ar} - \int \frac{ae^{-ar}}{r} dr \right) = -\frac{1}{ar} e^{-ar}$$

Sustituyendo el valor de la integral I en la expresión del potencial se tiene:

$$V(r) = -\frac{\rho_0 R}{a^2 \epsilon} \cdot \frac{e^{-ar}}{r} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

e imponiendo las condiciones de contorno:

$$r = \infty \Rightarrow V(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$r = R \Rightarrow V(R) = V_0 \Rightarrow C_1 = -RV_0 - \frac{\rho_0 R}{\epsilon a^2} e^{-aR}$$

y sustituyendo estos valores de las constantes, en la expresión del potencial, este definitivamente queda:

$$V(r) = \frac{\rho_0 R}{\epsilon a^2} \cdot \frac{e^{-aR} - e^{-ar}}{r} + V_0 \frac{R}{r}; \quad \forall r \geq R$$

$$V(r) = V_0; \quad \forall r \leq R$$

2º. Cálculo del campo.

2a) En el interior del conductor, por supuesto será nulo y para $r > R$ se tendrá:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{r}_0 = \left(V_0 R - \frac{\rho_0 R}{a^2 \epsilon} [(1 + ar) \cdot e^{-ar} - e^{-aR}] \right) \frac{\vec{r}_0}{r^2}$$

CILINDRO MAGNETIZADO

Resolución

a) La corriente de magnetización volumétrica viene dada por:

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho M_\phi) \mathbf{u}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho M_0 \left(\frac{\rho}{R} \right) \right) \mathbf{u}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(M_0 \left(\frac{\rho^2}{R} \right) \right) \mathbf{u}_z = \frac{2M_0}{R} \mathbf{u}_z.$$

Respecto de la densidad de magnetización superficial, emplearemos directamente su definición, esto es:

$$\mathbf{j}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}.$$

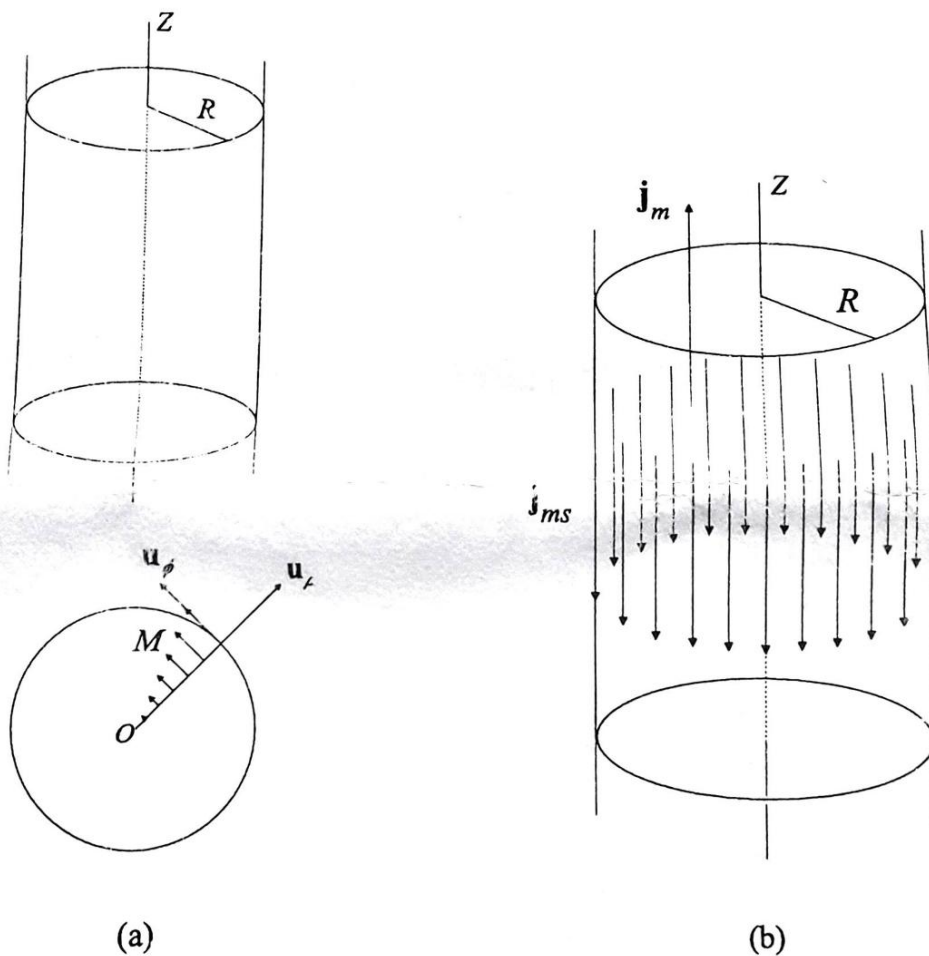


Figura 6.17: (a) Cilindro largo de magnetización $\mathbf{M} = M_0 \left(\frac{\rho}{R} \right) \mathbf{u}_\phi$. Obsérvese como la magnetización aumenta a medida que nos acercamos a la supeficie. (b) Corrientes de magnetización volumétrica y superficial.

Con el fin de facilitar los cálculos, haremos el producto vectorial anterior utilizando coordenadas ciíndricas, o sea, $\mathbf{M} = (0, M_\phi, 0) = (0, M_0 \left(\frac{\rho}{R} \right), 0) = M_0$ (se evalúa en $\rho = R$) y $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, encontrando que [Figura 6.17(b)]:

$$\mathbf{j}_{ms} = -M_0 \mathbf{u}_z.$$

Para $\rho < R$

Primer método

Para determinar \mathbf{B} a partir de las corrientes utilizamos el teorema 3.5,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$$

Para poder realizar este cálculo debemos identificar claramente el valor de \mathbf{j} . Como se explicó en la teoría, en la forma integral deben incluirse tanto las corrientes de conducción como las de magnetización. En el presente caso, al estar en un punto interior del cilindro, y no tener corrientes de conducción, sólo va a influir la densidad de corriente de magnetización volumétrica, pudiendo, por lo tanto, escribir

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$$

De mismo modo que se analizó en otros problemas donde aparecían corrientes con simetría de traslación y rotación (hilo largo, corriente cilíndrica, etc.), para aplicar el teorema de Ampère elegimos una trayectoria $\Gamma(\partial S)$ circular de radio $\rho < R$ centrada en el eje de revolución de la corriente. Operando del mismo modo como se hizo entonces, pero ahora para $\mathbf{j}_m = \frac{2M_0}{R} \mathbf{u}_z = (0, 0, \frac{2M_0}{R})$, y tomando un elemento $d\mathbf{l}$ en sentido antihorario, se tiene:

$$\oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z) d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S (0, 0, j_m) d\mathbf{S} \Rightarrow$$

$$\oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z) (0, dl, 0) = \mu_0 \int_S (0, 0, j_m) (0, 0, dS) = \int_0^{2\pi} B_\phi dl = \mu_0 \int_S \frac{2M_0}{R} dS$$

Por la mencionada simetría de revolución, la componente tangencial del campo, en el sistema $\{\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_z\}$, debe ser la misma en cualesquiera de los puntos de la curva elegida, por lo cual podemos situar B_ϕ fuera de la integral, obteniendo:

$$B_\phi \int_0^{2\pi} \rho d\phi = \mu_0 \frac{2M_0}{R} \int_S dS \Rightarrow 2\pi \rho B_\phi = \frac{2\mu_0 M_0 S}{R} \Rightarrow 2\pi \rho B_\phi = \frac{2\mu_0 M_0 \cdot \pi \rho^2}{R} \Rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 M_0 \rho}{R},$$

que puesto en forma vectorial,

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\mu_0 M_0}{R} \rho \mathbf{u}_\phi$$

Conocido el campo \mathbf{B} , el cálculo de \mathbf{H} es inmediato. En efecto, empleando la relación fundamental $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, obtenemos:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mu_0 M_0}{R \mu_0} \rho \mathbf{u}_\phi - M_0 \left(\frac{\rho}{R} \right) \mathbf{u}_\phi = 0$$

(2) Segundo método. Determinación de \mathbf{B} a partir de \mathbf{M} .

Para desarrollar este apartado de otra forma, tomamos nuevamente la ley de Ampère, pero en vez de expresarla en función de la corriente, lo hacemos en función de la magnetización, es decir:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S}$$

Aplicando el teorema de Stokes, se encuentra:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

En esta última expresión se relaciona el campo B directamente con la magnetización \mathbf{M} , lo cual es en también útil en nuestro caso, ya que conocemos su valor.

Introduciendo $\mathbf{M} = \mathbf{M}_\phi = M_0 \left(\frac{\rho}{R} \right) \mathbf{u}_\phi$ en la anterior igualdad, se obtiene:

$$\oint_{\Gamma} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S (0, M_\phi, 0) \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \oint_{\Gamma} (B_\rho, B_\phi, B_z)(0, dl, 0) = \mu_0 \oint_{\Gamma} (0, M_0 \left(\frac{\rho}{R} \right), 0)(0, dl, 0) \Rightarrow$$

$$\oint_{\Gamma} B_\phi dl = \mu_0 \oint_{\Gamma} M_0 \left(\frac{\rho}{R} \right) dl \Rightarrow \int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi = \mu_0 \int_0^{2\pi} \frac{M_0 \rho}{R} \rho d\phi \Rightarrow$$

$$B_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 \frac{M_0 \rho^2}{R} \int_0^{2\pi} d\phi \Rightarrow$$

$$B_\phi 2\pi \rho = 2\pi \mu_0 \frac{M_0 \rho^2}{R} \Rightarrow B_\phi = \mu_0 \frac{M_0 \rho}{R},$$

obteniendo, por lo tanto, el mismo resultado que por el primer método, esto es

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\mu_0 M_0}{R} \rho \mathbf{u}_\phi.$$

El campo \mathbf{H} no lo repetimos porque es idéntico a lo hecho en el primer caso.

Para $\rho > R$

(1) Primer método, empleando la densidad de corriente.

Para este caso se procede del mismo modo que lo expuesto hasta ahora, aunque hay que hacer algunas consideraciones. Así, si aplicamos ahora el teorema de Ampère se observa que, al ser el punto exterior al cilindro, influyen las corrientes de magnetización volumétrica y superficial, cosa que no ocurría en el anterior apartado. Ello hace que la integral tome el siguiente aspecto:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left\{ \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S} \right\} = \mu_0 I.$$

Teniendo en cuenta los valores de \mathbf{j}_m y \mathbf{j}_{ms} hallados al principio, introduciéndolos en la anterior integral, encontramos:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \left\{ \int_S (0, 0, j_m) \cdot d\mathbf{S} + \int_S (0, 0, j_{ms}) \cdot d\mathbf{S} \right\} \Rightarrow \\ \oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z)(0, dl, 0) &= \mu_0 \left\{ \int_S (0, 0, j_m)(0, 0, dS) + \int_S (0, 0, j_{ms})(0, 0, dS) \right\} \Rightarrow \\ \int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi &= \mu_0 \left\{ \int_S \frac{2M_0}{R} dS + \int_S (-M_0) dS \right\}. \end{aligned}$$

Obtenida esta expresión sólo queda calcular las integrales. Al intentar esto nos encontramos con una pequeña dificultad comentada ya en el ejercicio anterior, cual es la referente a $\int_S (-M_0) dS$. Así, aunque el dominio de integración se corresponde, en principio, con la superficie circular S de radio $\rho > R$, la densidad de magnetización \mathbf{j}_{ms} sólo existe por la superficie del cilindro [véase Figura 6.17(b)], por lo que el producto $\mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S}$ del integrando será distinto de cero allí donde existan, simultáneamente, la densidad \mathbf{j}_{ms} y $d\mathbf{S}$. En definitiva, esto no es mas que lo que se ha explicado en el Capítulo 5 en relación al teorema de Ampère. Se aclaró entonces que, la superficie real sobre la que se integra en el cálculo de la intensidad, corresponde a la intersección entre el volumen por donde circula la \mathbf{j} y la superficie S elegida. En nuestro caso, si se intersecta la superficie cilíndrica (donde existe \mathbf{j}_{ms}), con la superficie matemática $S = \pi \rho^2$, se obtiene un círculo de radio R y longitud $\ell = 2\pi R$ (véase la Figura 6.16 del problema anterior). La razón, por tanto, de que la citada intersección no sea una superficie (como es lo habitual) está en que

\mathbf{j}_{ms} se extiende por una superficie y no por un volumen (como ocurre con \mathbf{j}_m). Tomando esto en consideración, podemos escribir:

$$\begin{aligned} B_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi &= \mu_0 \left\{ \frac{2M_0}{R} \int_S dS - M_0 \int_S dS \right\} \Rightarrow \\ B_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi &= \mu_0 \left\{ \frac{2M_0}{R} S - M_0 \ell \right\} = \mu_0 \left\{ \frac{2M_0}{R} \pi R^2 - M_0 2\pi R \right\} \Rightarrow \\ 2\pi \rho B_\phi &= \mu_0 \{ M_0 2\pi R - M_0 2\pi R \} = 0, \end{aligned}$$

luego

$$\boxed{\mathbf{B}_\phi = 0.}$$

Obsérvese cómo en el caso de la integral de la densidad \mathbf{j}_m , la superficie que interviene πR^2 es también el resultado de la intersección entre el volumen donde se encuentra (cilindro muy largo) con la superficie circular $S = \pi \rho^2$ cuyo contorno Γ pasa por el punto donde se pide calculemos el campo.

Respecto del campo \mathbf{H} , sabiendo que en un punto externo al cilindro la magnetización es nula (vacío), se tiene:

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = 0 - 0 = 0.}$$

(2) Segundo método, a partir de la magnetización.

El resultado obtenido para los campos puede hallarse de otra manera. Para verlo, reescribamos la ley de Ampère en función de la magnetización,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left\{ \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S} \right\} = \int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S} + \int_S (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Se trata ahora de aplicar el teorema de Stokes para transformar primera integral del segundo miembro a una integral curvilínea. Esto es inmediato, pero debe entenderse bien la forma de situar la región donde se hace cada integral, lo cual, en este caso, es fácil de equivocar. Para analizar esto, vamos a aclarar cada paso.

Téngase presente, que la región donde tiene que hallarse el campo está fuera del cilindro magnetizado, esto es, en un punto que dista ρ del eje de simetría del cilindro ($\rho > R$). Por esta razón, elegiremos una curva Γ en forma de círculo de radio ρ , y una superficie plana $S = \pi \rho^2$. De este modo, tenemos la geometría básica para aplicar el teorema de Ampère, aunque existen algunos problemas. En efecto, si nos fijamos en el primer miembro, no hay duda de que $\int_0^{2\pi} B_\phi dl$ se determina sobre la curva Γ que se ha escogido. Pero, al convertir $\int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S}$ en una integral curvilínea podemos entender que se extiende a lo largo de la misma curva circular antedicha, ya que es la curva original utilizada para aplicar el teorema, sin embargo esta idea es errónea. La razón de ello se encuentra en que, ésta integral de camino es el resultado de aplicar el teorema de Stokes sobre $\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_m$, por lo cual, la trayectoria Γ sobre la que se hace éste cálculo es la relacionada con la frontera de la superficie S real que interviene en $\int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}$ y que, como ya sabemos, viene dada por la intersección entre el volumen V_j por donde circula la corriente que corresponda (\mathbf{j}_c , \mathbf{j}_m o \mathbf{j}_{ms}) y la superficie original empleada para la ley de Ampère, esto es, $S_R = V_{j_m} \cap S = \pi R^2$; fuera de esta intersección el producto $\mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}$ es cero, ya sea porque \mathbf{j}_m lo es (como este el presente caso) o porque lo es $d\mathbf{S}$.

En relación con $\int_S (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S}$ ocurre parcialmente lo mismo. Así, si tenemos en cuenta la región donde se extiende \mathbf{j}_{ms} veremos que no es la superficie S , sino tan solo por una superficie cilíndrica de radio R , por lo que $(\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S}$ será cero, salvo en la intersección de S con la superficie donde se halla \mathbf{j}_{ms} , es decir, $V_{j_{ms}} \cap S = S_\ell = \ell = 2\pi R$ (longitud de la circunferencia). Obsérvese que, en este caso, dicha intersección S_ℓ es una longitud y no una superficie.

Teniendo todo ello en cuenta, se encuentra la siguiente expresión:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_R} (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_\ell} (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S},$$

y empleando el teorema de Stokes,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left\{ \oint_{\Gamma_R} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} + \int_{S_\ell} (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S} \right\},$$

siendo Γ_R la curva que delimita la superficie S_R . Nótese como, en este caso, $S_\ell = \partial S_R$. Escribiendo ahora las componentes de los campos que intervienen, se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (B_\rho, B_\phi, B_z)(0, dl, 0) &= \mu_0 \left\{ \oint_{\Gamma_R} (0, M_0 \left(\frac{\rho}{R}\right), 0)(0, dl, 0) + \int_{S_\ell} (0, 0, -M_0)(0, 0, dS) \right\} \Rightarrow \\ \int_0^{2\pi} B_\phi dl &= \mu_0 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{M_0 \rho}{R} dl - \int_{S_\ell} M_0 dS \right\}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la curva Γ_R tiene de radio R , al hacer el cambio a coordenadas polares el elemento diferencial se convierte en $dl = R d\phi$. Asimismo, la magnetización $M_\phi = \left(\frac{M_0 \rho}{R}\right)$ que aparece en el integrando debe particularizarse para $\rho = R$. Con todo ello, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi &= \mu_0 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{M_0 R}{R} R d\phi - \int_{S_\ell} M_0 dS \right\} \Rightarrow \\ B_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi &= \mu_0 \left\{ M_0 R \int_0^{2\pi} d\phi - M_0 \int_{S_\ell} dS \right\} \Rightarrow \\ 2\pi \rho B_\phi &= \mu_0 \{ 2\pi R M_0 - M_0 2\pi R \} = 0, \end{aligned}$$

con lo cual $B_\phi = 0$, obteniendo el mismo resultado que el encontrado por el primer método.

Respecto del campo \mathbf{H}_ϕ , el procedimiento es idéntico a lo visto anteriormente.

En relación al cálculo donde aparece la corriente de magnetización superficial, el procedimiento seguido es sencillo e intuitivo, pero matemáticamente zafio. Como se explicó en otro problema anterior de características similares, la resolución de la integral $\int_S \mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S}$, puede llevarse a cabo directamente a través de la teoría de distribuciones.

Con este fin, tomemos nuevamente la relación anterior en función de la magnetización,

$$\int_S (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S (-M_0) \mathbf{u}_z dS \mathbf{u}_z.$$

Aquí partimos de la expresión original en donde aparece S y no S_ℓ , ya que mediante esta otra posibilidad de operar no necesitamos dar argumentos geométricos para llegar al resultado. Por otra parte, sabemos que la corriente $(-M_0) \mathbf{u}_z$ está definida sólo sobre el círculo $x^2 + y^2 = R^2$, por lo que puede expresarse mediante la distribución delta de Dirac del siguiente modo:

$$\mathbf{j}_{ms} = -M_0 \delta(\rho - R) \mathbf{u}_z$$

Introduciendo esto en la integral,

$$\int_S (-M_0) \delta(\rho - R) \mathbf{u}_z dS \mathbf{u}_z = - \int_S M_0 \delta(\rho - R) dS$$

y haciendo ahora un cambio de variable a coordenadas polares, dada la simetría de rotación del sistema, se tiene:

$$- \int_0^R M_0 \delta(\rho - R) \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi$$

La parte radial de esta integral va de cero hasta el radio ρ de la superficie elegida para aplicar la ley de Ampère, aunque sabemos que salvo en $\rho = R$, \mathbf{j}_{ms} es nula. Por esta razón, puede ponerse cualquier otro valor mayor que ρ como límite superior, ya que sigue siendo cierto que el integrando es nulo excepto en el círculo de radio⁹ R . Por todo ello, puede escribirse lo siguiente:

$$-\int_0^\infty M_0 \delta(\rho - R) \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = -M_0 R \int_0^{2\pi} d\phi = -2\pi R M_0,$$

que, como puede observarse, es el mismo resultado que el obtenido anteriormente.

Observación: Si se repasa ahora lo hecho para el caso $\rho < R$, se podrá notar como no había tanta complicación a la hora de identificar las curva y superficie que intervenía en $\int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}$. La razón es, que al pedirnos el campo B_ϕ en un punto interior al cilindro ($\rho < R$), la intersección del volumen de la corriente \mathbf{j}_m con la superficie circular $S = \pi\rho^2$ es ésta misma área, es decir, $V_{\mathbf{j}_m} \cap S = S = \pi\rho^2$. De este modo, al aplicar el teorema de Stokes sobre $\int_S (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S}$ aparece como curva de integración la misma que el caso de $\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$.

ESPIRA CUADRADA

Solución:

a)

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell}'}{r}$$

Vamos a demostrar que cuando P está en el eje Z las contribuciones a \vec{A} de lados opuestos de la espira se anulan mutuamente.

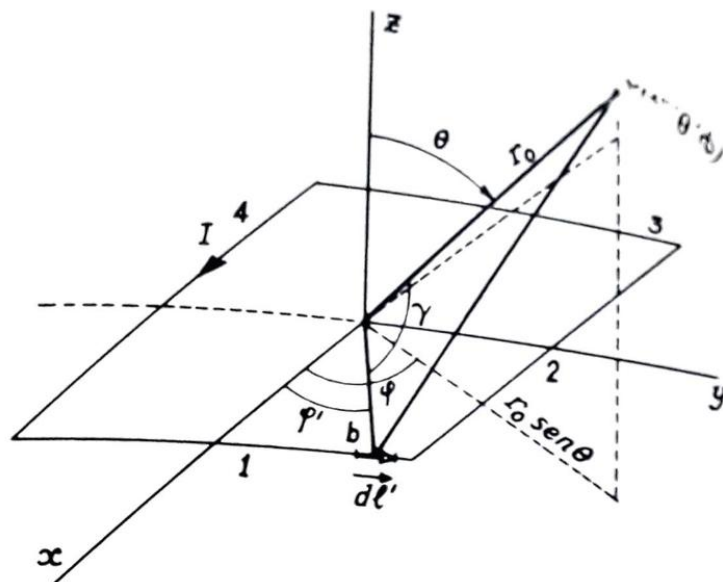


Fig. 6.15

Lado 1:

$$d\vec{\ell}' = dy \vec{u}_y$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dy \vec{u}_y}{r}, \quad r = \sqrt{a^2 + y^2 + z^2}$$

Lado 3:

$$d\vec{\ell}' = -dy \vec{u}_y$$

$$\vec{A}_3 = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{-dy \vec{u}_y}{r}, \quad r = \sqrt{a^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_3 = 0$$

Análogamente $\vec{A}_2 + \vec{A}_4 = 0$, resultando $\vec{A} = 0$

b) Aplicamos la fórmula [6.22] con $\vec{m} = \vec{I} S \vec{n} = I 4a^2 \vec{u}_z$. Según la expresión [2] del problema anterior

$$\vec{B} = \frac{\mu (I 4a^2)}{2\pi r_0^3} \cos \theta \vec{u}_{r_0} + \frac{\mu (I 4a^2)}{4\pi r_0^3} \sin \theta \vec{u}_\theta$$

c) La espira circular equivalente ha de ser tal que su momento magnético sea de la misma magnitud, dirección y sentido que el de la espira dada. Tal espira circular será la centrada en el origen de coordenadas, alojada en el plano XY y reco-

$$B_r = \frac{\mu m \cos \theta}{2\pi r_0^3},$$

$$B_\theta = \frac{\mu m \sin \theta}{4\pi r_0^3}$$

[2]

a en el sentido contrario a las agujas del reloj que tenga por área $4a^2$.

$$\pi R^2 = 4 a^2 , \quad R = a \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

RESOLUCION PROBLEMAS DE POISSON A YC

a) Se tomará como hipótesis que las placas sean de extensión muy grande (matemáticamente de extensión infinita), o bien que la distancia entre ellas sea muy pequeña comparada con sus dimensiones, en ambos casos, se pueden no tener en cuenta los efectos de borde.

Se cogerá como origen de coordenadas O el centro geométrico del paralelepípedo cuyas bases superior e inferior son las placas y como eje de las Z el perpendicular a las placas por O, así como plano horizontal el paralelo a las placas por O, tal y como indica la figura 6.15. Entonces, los puntos de corte del eje Z con las placas serán: $A(0, 0, d/2)$ y $A'(0, 0, -d/2)$.

Resolución general para $\rho \neq 0$. En el examen $\rho = 0$ y hay una

Debido a la simetría del sistema respecto al eje Z, se puede considerar que el potencial solo va a depender de la coordenada z , como dice el enunciado. Así pues, la ecuación de Poisson será en este caso: $\nabla^2 V(z) = -\frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$, integrando dos veces se llega a: $V(z) = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon} + C_1 z + C_2$. Las constantes se obtienen de las

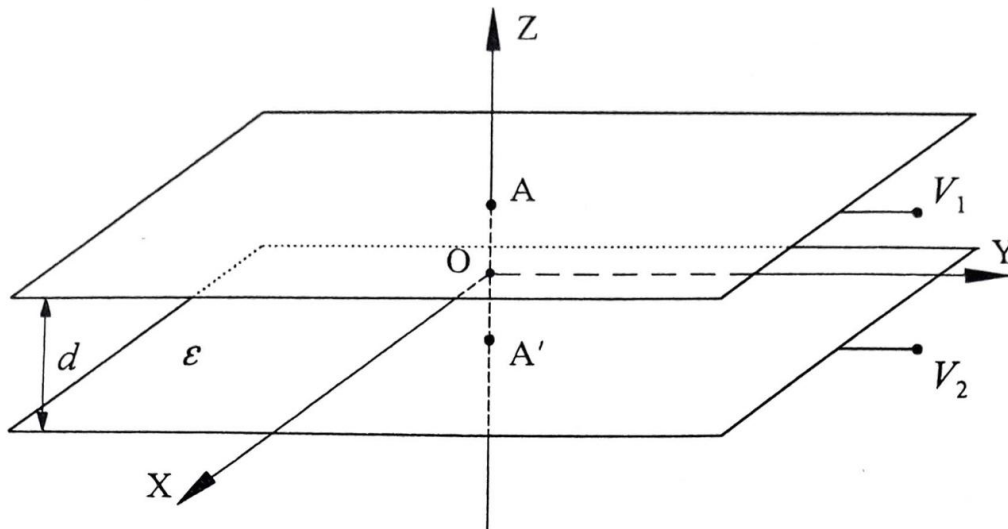


Figura 6.15

condiciones de contorno, es decir:

$$\left. \begin{aligned} V(d/2) = V_1 &= -\frac{\rho d^2}{8\epsilon} + C_1 \frac{d}{2} + C_2 \\ V(-d/2) = V_2 &= -\frac{\rho d^2}{8\epsilon} - C_1 \frac{d}{2} + C_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= \frac{V_1 - V_2}{d} \\ C_2 &= \frac{\rho d^2}{8\epsilon} + \frac{V_1 + V_2}{2} \end{aligned}$$

y sustituyendo las constantes en la expresión del potencial, este queda:

$$V(z) = -\frac{\rho}{2\epsilon} \left(z^2 - \frac{d^2}{4} \right) + \frac{V_1 - V_2}{d} z + \frac{V_1 + V_2}{2}$$

Por tanto, el campo eléctrico vale:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = \left(\frac{\rho}{\epsilon} z - \frac{V_1 - V_2}{d} \right) \vec{u}_z$$

[examen]
ρ=0

[examen]
ρ=0

Solución:

b)

De la ecuación de Poisson: $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$, así que derivando dos veces el potencial, se llega a: $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{4}{9}Cz^{-2/3} = -\frac{\rho}{\epsilon}$ y de aquí se obtiene la expresión de la densidad volumétrica de carga entre placas:

$$\rho = -\frac{4}{9}\epsilon Cz^{-2/3}$$

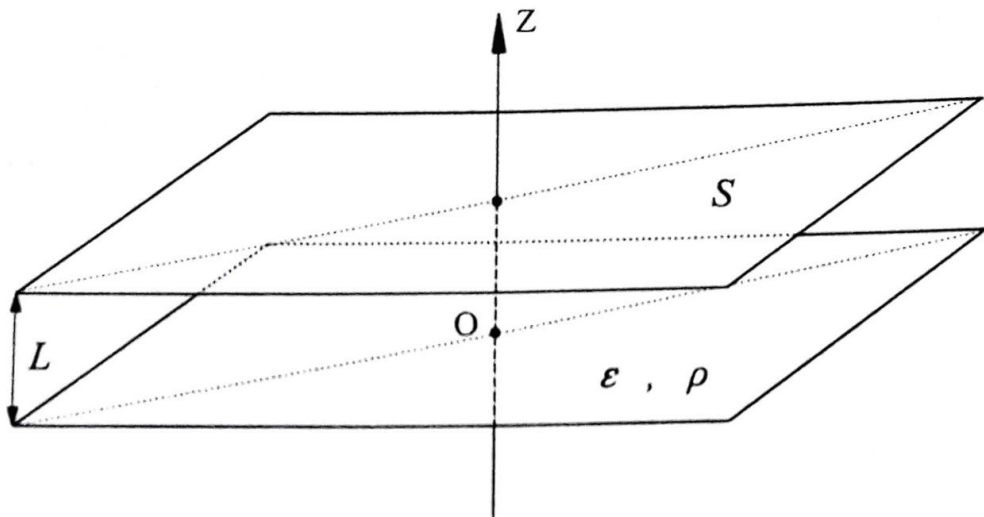


Figura 6.16

Llamando Q a la carga total entre placas, se tendrá, una vez hallada la densidad de carga:

$$\frac{d^2Q}{dS \cdot dz} = -\frac{4}{9}\epsilon C z^{-2/3} \Rightarrow \frac{dQ}{dz} = -\frac{4}{9}\epsilon C S z^{-2/3} \Rightarrow Q = -\frac{4}{9}\epsilon S C \int_0^L z^{-2/3} dz \Rightarrow$$

$$Q = -\frac{4\epsilon S C}{3} z^{1/3} \Big|_0^L = -\frac{4\epsilon S C}{3} L^{1/3}$$