TEMA 11. INTRODUCCIÓN A HEP.

La Física de partículas (o Física de Altas Energías - HEP-) es un campo de las ciencias naturales que busca desentrañar la estructura última de la materia.

¿Cómo se consigue?

i) Buscar partículas elementales (los últimos constituyentes de la materia)

ii) Clarificar qué interacciones actúan sobre dichas partículas elementales para formar la materia tal y como la conocemos.

Vamos a hacer un repaso histórico de la historia moderna de las partículas elementales

Experimentos

S.XIX	10^{-10} m	Átomo	
1897	Thomson	e^-	Rayos catódicos.
1911	Rutherford	modelo atómico	Isótopos.
1932	Chadwick	neutrón	Isótopos.
1937	Anderson et al.	muón	Rayos cósmicos.
1947	Powell et al.	π y extrañas	Rayos cósmicos.
1955	Segre	$\bar{p}$	Bevatrón
1956	Cowan	ν	Reactor
1964	Samios et al.	Ω	Reactor BNL
1974	Ting et al.	J/ψ & c	BNL
1975	Perl	τ	Spear
1978	Lederman	Υ & b	Fermilab
1983	Rubbia et al.	W & Z^0	$Sp\bar{p}S$
1994	Muchos	t	Tevatrón LEP
1998	Totsuka et al.	ν osc.	Rayos Cósmicos
2012	Muchos	Higgs	Atlas, CMS

$(10^{-19} m)$ .... $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 10^{-35} m$

1911	Rutherford	Modelo atómico
1929-30	Heisenberg, Pauli	QFT
1930	Dirac	Ec. Dirac
1930	Pauli	Neutrino
1934	Fermi	Weak int.
1935	Yukawa	meson theory
1946-49	Tomonaga, Schwinger, Feynman	QED
1954	Yang, Mills	Non abelian YM th.
1956	Yang, Lee	Violación paridad
1958	Feynman et al.	Vector-Axial theory
1960	Nambu	Rupt. espont. simetría.
1964	Gell-Mann et al.	Quark model
1964		Violación CP
1964	Higgs et al.	Mecanismo Higgs.
1961-68	Glashow, Salam, Weinberg.	Unificación electrodébil
1971	Veltman, 't Hooft	Renormalización EW

1973	Kobayashi Maskawa	KM model CP
1973	Politzer, Gross Wilczek	QCD, libertad asintótica.

⋮

¿y ahora? Nada.

Propiedades de las partículas elementales:

(1) Una partícula está "espacialmente localizada en cada instante" y su número es contable.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Definimos masa y velocidad a partir de energía y momento

$$\left.\begin{array}{l} E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \\ \vec{v} = \vec{p}\,\frac{c^2}{E} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m \to 0 \\ E = pc \quad (\text{fotón}) \\ v = c \end{array}$$

(2) Una partícula puede ser creada o aniquilada.

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$$

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda$$

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Conclusión importante: no nos sirve Schrödinger porque ¡¡la probabilidad de existencia de una partícula no se conserva!!

↳ me falta QFT (tiene en cuenta creación y destrucción de partículas).

(3) Corolario de 2. Una partícula no es necesariamente estable.

La probabilidad de que la partícula "muera" en dt si su vida media es τ

$$= \frac{dN}{N} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

Pero, en Mecánica cuántica, la "probabilidad de existencia" de una partícula es $\simeq |\psi|^2$, luego

$$|\psi|^2 \sim e^{-t/\tau}$$

Consideremos una partícula en un autoestado de energía:

$$\psi(x,t) = \psi(x)\, e^{-iEt/\hbar}.$$

Hagamos $E = E_0 - i\frac{\Gamma}{2}$. Entonces:

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(x)\, e^{-i(E_0 - i\Gamma/2)t/\hbar}|^2 =$$

$$= |\psi(x)|^2\, e^{-\Gamma t/\hbar}, \text{ luego}$$

$\Gamma = \hbar/\tau$ y se tiene que

$$\boxed{\text{Inestable} \iff E \in \mathbb{C} \text{ con } \Gamma = \mathrm{Im}(E) > 0}$$

¿Cómo será la distribución de masa (energía) de la partícula?

(4) Una partícula tiene spin y otros grados de libertad.

- (E, p^i) : g.l. externos $\longrightarrow$ simetrías

- (carga, spin, color, isospin, ...) : g.l. internos

$\Updownarrow$

¿simetrías?

(5) Cada partícula tiene su correspondiente antipartícula.

$$p(m, \tau, s) \longrightarrow \bar{p}(m, \tau, s)$$

$$p(s_z, h_{int}) \longrightarrow \bar{p}(-s_z, h_{int})$$

(comentario Tª CPT).

(6) Clasificación

- → Hadrones : sienten fuerza fuerte.
- → leptones : no la sienten.

Hadrones

- → s semientero : bariones : $p, n, \Lambda, \Sigma, \Xi, \ldots$
- → s entero : mesones : $\pi, K, \rho, \ldots$

→ compuestos de quarks ($s = 1/2$)

$(u, d, s, c, b, t) \longrightarrow$ masa aumenta

(up, down, strange, charm, bottom, top)

$\rightarrow$ grados de libertad de color : RGB

$$q = \begin{cases} 2/3\, e \\ -1/3\, e \end{cases}$$

Leptones $(S = 1/2)$

e	ν_e
μ	ν_μ
τ	ν_τ
$(q \neq 0)$	$(q = 0)$

Resumen partículas

	spin	Q	I_3	Generación I	II	III
quarks	$\frac{1}{2}$	$+2/3$	$+1/2$	u	c	t
	$\frac{1}{2}$	$-1/3$	$-1/2$	d	s	b
leptones	$\frac{1}{2}$	0	$+1/2$	ν_e	ν_μ	ν_τ
	$\frac{1}{2}$	-1	$-1/2$	e	μ	τ

Resumen interacciones fundamentales

Fuerza	Fuerte	(Nuclear)	EM	Débil	Gravedad
Fuente	Q_{color}	(hadrón)	Q_e	$G_{débil}$	$T_{\mu\nu}$
Intensidad	0.1	(10)	1/137	10^{-5}	10^{-42}
Rango (m)	∞^*	(10^{-15})	∞	10^{-18}	∞
Potencial	$\frac{k_1}{r}+k_2 r$	$\left(\frac{e^{-m_\pi r}}{r}\right)$	$\frac{1}{r}$	$\frac{e^{-M_W r}}{r}$	$\frac{1}{r}$
Portador	gluón (S=1, 8 tipos)	(mesón π)	γ (S=1)	$W^\pm, Z^0$ (S=1)	¿gravitón? (S=2)
Teoría	QCD	(Yukawa)	$\underbrace{\text{QED} \qquad\qquad}_{\text{GWS modelo}}$		Rel. General
Simetría gauge	SU(3)	(—)	U(1) × SU(2)		Grupo Poincaré

(* sin significado si $d > 10^{-15}$ m por el efecto de confinamiento de quarks).

TEMA 12. TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS

Consideremos un campo $\varphi(x)$. Trabajemos con la densidad Lagrangiana, $\mathcal{L}$.

$$L = T - V = \int \mathcal{L}\, d^3x$$

La acción es $\quad S = \int dt\, L = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}\, d^4x$

Los lagrangianos típicos en QFT dependen de: campos y derivadas primeras

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

Consideraremos campos locales ($\mathcal{L}$ depende de $\phi\big|_{x^\mu}$ y $\partial_\mu\varphi\big|_{x^\mu}$, x^μ concreto)

Principio de acción estacionaria

$$0 = \delta S = \delta \int_{\mathcal{M}} d^4x\, \mathcal{L}$$

$$= \delta \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi) \right]$$

Observación : $\delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\delta\varphi)$

Segundo término :

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi) = \int_{\mathcal{M}} d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu(\delta\varphi)$$

$$= - \int_{\mathcal{M}} d^4x \; \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta\varphi \; +$$

$$+ \underbrace{\int_{\mathcal{M}} d^4x \; \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right]}_{\text{es una divergencia total}}$$

$$= \int_{\mathcal{M}} d^4x \; \partial_\mu \mathcal{J}^\mu =$$

$$= \int_{\partial\mathcal{M}} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi = \int_{\partial\mathcal{M}} d^3\sigma \, n_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi$$

T$^{\underline{a}}$ Stokes $\qquad\qquad$ $\delta\varphi|_{\partial\mathcal{M}} = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) = 0}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange.

La densidad de momento canónico es

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$ y la

densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H} = \pi(x)\,\dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}$$

El Hamiltoniano será

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H}$$

Veamos algunos ejemplos de teorías clásicas de campos

Campo escalar real (Higgs)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \varphi)}\left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \varphi)}\left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial_\mu \varphi}{\partial_\alpha \varphi} \partial_\nu \varphi + g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \frac{\partial_\nu \varphi}{\partial_\alpha \varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu} \delta^\alpha_\mu \partial_\nu \varphi + g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \, \delta^\alpha_\nu\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\nu} \partial_\nu \varphi + g^{\mu\alpha} \partial_\mu \varphi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\mu} \partial_\mu \varphi + g^{\mu\alpha} \partial_\mu \varphi\right)$$

$$= g^{\mu\alpha} \partial_\mu \varphi = \partial^\alpha \varphi$$

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} \right) = \partial_\alpha \partial^\alpha \varphi = \Box \varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi$$

$$\Longrightarrow \quad -m^2\varphi - \Box\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{(\Box + m^2)\varphi = 0}$$

Klein-Gordon

Otro ejemplos (entregable)

i) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_t \varphi)^2 - (\partial_x \varphi)^2 \right] + \cos\varphi$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sin\varphi = 0} \Longleftrightarrow (\Box + \sin)\varphi = 0$$

Sin-Gordon

ii) $\mathcal{L} = -\frac{\hbar}{2i}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^* \right)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \psi \partial^i \psi^* - \psi^* V \psi$$

- Obtener la ecuación de Schrödinger
- Hacer el cambio $\psi = N e^{iS/\hbar}$ y

obtener

$$\mathcal{L} = -N^2 \dot{S} - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i N \partial^i N - \frac{N^2}{2m} \partial_i S \partial^i S - VN^2$$

- Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son

$$\partial_t \rho + \frac{1}{m} \nabla_i (\rho \nabla^i S) = 0 \qquad (\rho := N^2)$$

$$\partial_t S + \frac{1}{2m} \partial_i S \partial^i S + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta N}{N} \qquad (\Delta := \partial_i \partial^i)$$

(Interpretar dichas ecuaciones. Observad que son ¡completamente equivalentes a la ecuación de Schröd.!!

El campo electromagnético:

Consideremos $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$, con

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y $J^\mu = (\rho, j^i)$.

La acción de Maxwell es

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \right)$$

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(-\frac{1}{4} (\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} (\delta F^{\mu\nu}) - J^\mu \delta A_\mu \right)$$

a) $-\frac{1}{4} (\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) F^{\mu\nu} \overset{*}{=}$

pero $\partial_\nu (\delta A_\mu F^{\mu\nu}) = \partial_\nu \delta A_\mu F^{\mu\nu} + \delta A_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}$

$\partial_\mu (\delta A_\nu F^{\mu\nu}) = \partial_\mu \delta A_\nu F^{\mu\nu} + \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}$

$$\overset{*}{=} -\frac{1}{4} \Big(\underbrace{\partial_\mu (\delta A_\nu F^{\mu\nu})}_{(1)} - \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} - \underbrace{\partial_\nu (\delta A_\mu F^{\mu\nu})}_{(2)} + \delta A_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} \Big)$$

(1) y (2) se van a anular al integrar. Son derivadas totales. Stokes. $\delta A_\nu = 0$ en fronteras.

Quedará

$$\stackrel{(A)}{=} \frac{1}{4}\left(\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu - \partial_\nu F^{\mu\nu}\delta A_\mu\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu - \partial_\mu F^{\nu\mu}\delta A_\nu\right) \qquad \left(F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu + \partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu\right)$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu = -\frac{1}{4}\left(\delta F_{\mu\nu}\right)F^{\mu\nu}$$

b) $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} =$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}\,\delta\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}\left(\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu\right)$$

$= \ldots\ldots =$ mismo caso que a) pero hay que bajar índices

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu F^{\mu\nu})\,\delta A_\nu$$

Finalmente, escribimos

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu - J^\mu \delta A_\mu \right)$$

$$= \int d^4x \, (\partial_\mu F^{\mu\nu} - J^\nu)\, \underbrace{\delta A_\mu}_{\neq 0} = 0$$

(es arbitraria)

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu} \quad (\overset{(E)}{\text{Gauss}} + \text{Ampère})$$

Además, $F_{\mu\nu}$ satisface una identidad de Bianchi:

$$\boxed{\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0}$$

$$(\overset{(B)}{\text{Gauss}} + \text{Faraday})$$

Simetrías y leyes de conservación

↳ Cambio en la "visión" de las ecuaciones que las deja invariantes.

- simetrías externas: traslación, tiempo, rotación
- simetrías internas: cambios en los campos que no involucran cambios con respecto al espacio-tiempo.

Consideremos que las coord. espaciotemporales varían según:

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + a^\mu \quad (a^\mu \text{ pequeño y arbitrario})$$

Series de Taylor:

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi(x+a) = \varphi(x) + a^\mu \partial_\mu \varphi$$

Bajo una pequeña perturbación, $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$

luego $\delta\varphi = a^\mu \partial_\mu \varphi$

si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$, tenemos

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi)$$

sabemos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right), \text{ luego}$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi)$$

$$= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi)$$

si hacemos $u = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}$ $\quad v = \delta\varphi$

$(uv)' = u'v + v'u$, queda

$$\delta\mathcal{L} = (uv)' = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right)$$

o bien $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \right) a^\nu$

También podemos escribir

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu (\mathcal{L}) a^\mu = \delta^\mu_\nu \partial_\mu (\mathcal{L}) a^\nu$$

(considerando cómo varía respecto a $(x^\mu \to x^\mu + a^\mu)$)

Igualando ambas expresiones:

$$\delta \mathcal{L} = \delta^\mu_\nu \partial_\mu (\mathcal{L}) a^\nu = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \right) a^\nu$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right] \underbrace{a^\nu}_{\text{es arbitrario}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu T^\mu_\nu = 0} \text{, con}$$

$$\boxed{T^\mu_\nu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}}$$

Tensor energía - momento y su conservación

$$T^0_{\ 0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \mathcal{H} \text{ (densidad Hamiltoniana)}$$

luego $\partial_0 T^0_{\ 0} = 0 \Rightarrow$ conservación energía

$T^0_{\ i} = p_i$ (densidad de momento)

$$P_i = \int d^3x\, p_i = \int d^3x\, T^0_{\ i}$$

Corrientes conservadas:

Hagamos $\varphi \to \varphi + \delta\varphi$

consideremos que, bajo esta variación, $\mathcal{L}$ no va a variar. Esto es,

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \quad \text{con} \quad \delta\mathcal{L} = 0.$$

pero $\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi)$

como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)$, queda

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta\varphi)$$

$$= \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right]}_{} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi}$$ es una

corriente conservada

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

Asociada a cada corriente conservada, hay una carga conservada,

$$Q = \int d^3x \, J^0 .$$

(en. y momento son cargas conservadas debido a invariancia bajo traslaciones espaciotemporales)

Ejercicio: considerad un campo escalar complejo.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$$

Deducid y comprobad:

$$(\Box + m^2)\varphi = 0$$

$$(\Box + m^2)\varphi^* = 0$$

$$\pi = \varphi^*_{,t} \qquad \pi^* = \varphi_{,t}$$

$$\mathcal{H} = \pi^* \pi + (\nabla \varphi^*)(\nabla \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi + \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi^* - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$$p^i = \int d^3x \, (\varphi^*_{,t} \partial^i \varphi + \varphi_{,t} \partial^i \varphi^*)$$

$$p^0 = \int d^3x \, \mathcal{H} \quad (\geq 0)$$

$$J^\mu = -i\,(\varphi \varphi^{*,\mu} - \varphi^* \varphi^{,\mu})$$

$$Q = \int d^3x \, J^0 = i \int (\varphi^* \varphi_{,t} - \varphi \varphi^*_{,t})\, d^3x$$

Transformaciones gauge

La idea viene del electromagnetismo. Sabemos que las ecuaciones de Maxwell quedan invariantes si hacemos

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$$

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

En Teoría de campos tenemos una noción similar. Veámoslo con un ejemplo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi$$

Sea $\underline{U}$ una transformación unitaria tal que NO depende de x^μ.

$$\varphi \longrightarrow U\varphi$$
$$\varphi^\dagger \longrightarrow \varphi^\dagger U^\dagger$$

(unitaria, $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$)

Veamos qué le ocurre a $\mathcal{L}$ bajo esta transformación.

$$\partial_\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi \to \partial_\mu (\varphi^+ U^+) \partial^\mu (U\varphi)$$

$$= \partial_\mu (\varphi^+)(U^+U)\partial^\mu(\varphi) = \partial_\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi$$

$$m^2 \varphi^+ \varphi \to m^2 (\varphi^+ U^+)(U\varphi) = m^2 \varphi^+ (U^+U)\varphi$$

$$= m^2 \varphi^+ \varphi$$

Entonces, $\mathcal{L}$ es invariante bajo $\varphi \to U\varphi$.

Como U es una constante (no depende de x^μ), la escribimos como

$$U = e^{i\Lambda} \quad \Lambda \to \text{constante}$$

(nota: en algunos caso Λ será una matriz hermítica)

¿ <u>Qué sucede si ahora consideramos una transformación gauge local</u>?

de nuevo

$$m^2\varphi^+\varphi \to m^2\varphi^+ U^+(x) U(x)\varphi = m^2\varphi^+\varphi$$

pero

$$\partial_\mu\varphi^+ \to \partial_\mu(\varphi^+ U^+) = (\partial_\mu\varphi^+)U^+ + \varphi^+\partial_\mu(U^+)$$

$$\partial_\mu\varphi \to \partial_\mu(U\varphi) = (\partial_\mu U)\varphi + U\partial_\mu(\varphi)$$

$$= UU^+(\partial_\mu U)\varphi + U\partial_\mu(\varphi)$$

$$= U\left[\partial_\mu\varphi + \underbrace{(U^+\partial_\mu U)\varphi}_{\text{término extra que quiero eliminar}}\right]$$

La idea es:

→ con tr. gauge globales teníamos

$$\partial_\mu\varphi \to U\partial_\mu\varphi$$

→ con tr. gauge locales, <u>queremos tener</u>

$$D_\mu\varphi \to U(x)D_\mu\varphi$$

donde D_μ es cierta nueva derivada que necesitamos introducir.

Resulta que, si definimos la derivada covariante

$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - iA_\mu\psi$, donde $A_\mu(x)$ es el

llamado potencial gauge, que satisface la

regla de transformación

$$A_\mu \to UA_\mu U^+ + i\,U\partial_\mu U^+ \,, \quad \text{entonces}$$

$\mathcal{L}$ será invariante bajo $U(x)$.

Moraleja: ¡¡para mantener invariancia gauge local, ha aparecido un nuevo campo, A_μ!!

(Comentario derivadas covariantes).

TEMA 13. TEORÍA DE GRUPOS.

Tª grupos relacionado con simetría.
La idea es que las Leyes de la Física mantienen la misma forma matemática bajo ciertas transformaciones.

Grupo $G = \{a, b, c\}$ es un conjunto de elementos que incluye una multiplicación (o regla de composición) t.q. $a \in G$ y $b \in G \Rightarrow ab \in G$.

Si $ab = ba$, G es abeliano
Si $ab \neq ba$, G es no abeliano

(Esa multiplicación es en sentido abstracto. La implementación de dicha operación puede variar de grupo a grupo).

Axiomas de grupo

i) Asociatividad : $(ab)c = a(bc)$

ii) Elemento identidad: $ae = ea = a$ (es único)

iii) " inverso : $\forall a \in G \ \exists \ a^{-1}$ t.q.
$aa^{-1} = a^{-1}a = e$

iv) El orden del grupo es el nº elementos que pertenecen a G.

Representación de un grupo

Una representación, F, es una aplicación que lleva elementos del grupo $g \in G$ a operadores lineales, F, que preservan la regla de composición de G:

$$F(a)\,F(b) = F(ab)$$

$$F(e) = I$$

Supongamos que $a, b \in G$ y $f \in H$ donde H es otro grupo. Si se satisface

$f(a)\,f(b) = f(ab)$, diremos que G es homeomorfo a H. (Vamos, que tienen una estructura similar).

Ejemplos: $(\mathbb{Z}, +)$ forma un grupo pero $(\mathbb{Z}, \times)$ no lo forma. ($1/\mathbb{Z}$ no es un entero)

Parámetros de grupo

Igual que $y = f(x)$ y decimos que x es el "input", un grupo puede ser función de varios "inputs" que llamamos parámetros.

Sea G con $g \in G$ tal que g está especificado por un conjunto finito de parámetros (digamos n parámetros). Si este conjunto de parámetros es $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$, el elemento del grupo es $g = G(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n)$. La identidad es $e = G(0, 0, \ldots, 0)$.

Vamos a estudiar brevemente unos grupos muy importantes para la Física.

Grupos de Lie

Hay grupos discretos con un nº finito de elementos pero la mayoría que consideraremos tendrán un número infinito. Pero tendrán un nº finito de parámetros que variarán de forma continua.

Si un grupo

a) depende de un conjunto finito de parámetros continuos, θ_i

b) $\exists$ las derivadas de los elementos del grupo con respecto a todos los parámetros, entonces es un grupo de Lie.

Sea un grupo con un solo parámetro, θ.

$$g(\theta)\big|_{\theta=0} = e \quad (\text{identidad})$$

Los <u>generadores del grupo</u> se obtendrán así:

$$X = \frac{\partial g}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} \quad (X \text{ es un generador})$$

Si el grupo es n-paramétrico, tendremos n generadores

$$X_i = \frac{\partial g}{\partial \theta_i}\Big|_{\theta_i=0}.$$

Para algunos θ finitos, los generadores nos permiten definir una representación del grupo, D, de la forma

$$D(\theta) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\theta X}{n}\right)^n = e^{i\theta X}$$

Si X es hermítico,

$$X_i = -i\,\frac{\partial g}{\partial \theta_i}\Big|_{\theta_i=0}$$

y $X = X^{+}$. Además, la representación del grupo será unitaria:

$$D^{+}(\theta) = (e^{i\theta X})^{+} = e^{-i\theta X^{+}} = e^{-i\theta X}$$

$$\Rightarrow \quad D^{+}(\theta)\, D(\theta) = (e^{-i\theta X})(e^{i\theta X}) = 1.$$

Los generadores de un grupo forman un espacio vectorial. Un espacio vectorial completo puede ser usado como base para representar otros espacios vectoriales (p. ej., las matrices de Pauli sirven para describir cualquier matriz 2x2).

Los generadores satisfacen una relación de conmutación

$$\boxed{[X_i, X_j] = i\, f_{ijk}\, X_k}$$ constantes de estructura del grupo.

↳ Esto es el álgebra de Lie del grupo

(recordad momento angular o matrices de Pauli en Mecánica Cuántica).

En lo que sigue vamos a centrarnos únicamente en unos grupos especiales.

Observación: además de estructura de grupo, los grupos de Lie tienen estructura de variedad diferenciable.

Grupos unitarios

Juegan un papel importante en física de partículas porque también lo hacen en mecánica cuántica.

Observación: los operadores unitarios conservan el producto interno ⇒ probabilidades entre estados no se ven afectadas por una transformación unitaria

$U(N)$: conjunto de matrices unitarias $N \times N$
↳ grupo unitario

$SU(N)$: conjunto de matrices unitarias $N \times N$ con
$\det = +1$.
↳ grupo especial unitario

Observación: $\dim [SU(N)] = N^2 - 1$

3 ($Z^0, W^\pm$) portadores int. débil

agrupamiento de partículas en dobletes o tripletes

$SU(2)$ tiene $2^2 - 1 = 3$ generadores

$SU(3)$ tiene $3^2 - 1 = 8$ generadores

$U(1)$ " 1 generador

8 gluones portadores interacción fuerte.

ej: $\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$

fotón (int. em.)

Observación: al igual que discutimos con el isospin, el e^- y el ν_e se pueden intercambiar (son indistinguibles) en lo concerniente a interacciones débiles.

(Observación experimental? → agrupamiento → simetría?)

Comentarios sobre $U(1)$:

Una matriz "1×1" es un número complejo que vamos a escribir en forma polar.

- $U(1)$ tiene un único parámetro, θ y una simetría $U(1)$ tiene la forma

$$U = e^{-i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

- $U(1)$ es abeliano:

$$U_1 U_2 = e^{-i\theta_1} e^{-i\theta_2} = e^{-i\theta_2} e^{-i\theta_1} = U_2 U_1$$

$$\left(= e^{-i(\theta_1+\theta_2)} = e^{-i(\theta_2+\theta_1)} \right)$$

- $\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$ es $U(1)$ invariante.

Es decir, la transformación

$$\varphi \to e^{-i\theta}\varphi$$

deja a $\mathcal{L}$ invariante.

• Observación: los portadores de las interacciones fundamentales (bosones gauge), se van a asociar a simetrías unitarias. (Por ejemplo, $U(1) \leftrightarrow$ fotón).

Resumiendo, $U = e^{-i\theta} = S^1$ (círculo unitario)

Comentarios sobre $SU(2)$:

El siguiente grupo unitario no trivial es $U(2)$ (conjunto de las matrices 2×2).

Unitarias : $UU^+ = U^+U = I$

En Física, estamos interesados en un subgrupo de $U(2)$: $SU(2)$ (matrices unitarias 2×2 con $\det = +1$).

Los generadores de $SU(2)$ son las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\,\varepsilon_{jkl}\,\sigma_l$$

↳ símbolo completamente antisimétrico de Levi-Civita.

En tres dimensiones

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (1,2,3),\ (2,3,1)\ \text{o}\ (3,1,2) \\ -1 & (3,2,1),\ (1,3,2)\ \text{o}\ (2,1,3) \\ 0 & i=j \ \text{o}\ j=k \ \text{o}\ k=i \end{cases}$$

Como todas las matrices unitarias 2×2 están especificadas por dos parámetros complejos, a y b, escribimos

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}.$$

Para $SU(2)$, $\det U = +1 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1$.

debido a lo anterior, tenemos la siguiente observación: $SU(2) = S^3$.

Además, un elemento de $SU(2)$ se va a escribir como $U = e^{i\sigma_j\alpha_j/2}$, donde σ_j es una de las matrices de Pauli y α_j es un número.

Comentarios sobre $SU(3)$:

Va a ser importante en el estudio de quarks y QCD.

Como ya dijimos, tiene <u>8 generadores</u>: las <u>matrices de Gell-Mann</u>

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Satisfacen las reglas de conmutación

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k \quad \text{con}$$

$$f_{123} = 1 \qquad f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Observación : geométricamente se tiene

$$SU(3) \xhookrightarrow{S^3 \ \text{fibra}} S^5$$

↳ base

$$\begin{pmatrix} \text{dim } (SU(3) = 8) \\ \text{dim } (SU(2) = 3) \\ \text{dim } (U(1) = 1) \end{pmatrix}$$

Cuantización del campo escalar real:

Comencemos con la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar masivo:

$$(\Box + m^2)\varphi = (\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2)\varphi =$$
$$= (\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi = 0 .$$

Las soluciones son del tipo ondas planas:

$$\varphi(x,t) \sim e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$$

denotemos $\quad E \to k_0 = \omega_k$
$\qquad\qquad\quad \vec{p} \to \vec{k}$

$$\varphi(x) \sim e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$
$\hookrightarrow \varphi(x^\mu)$

Escribamos la solución general en término de un desarrollo de Fourier:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\varphi(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \varphi^*(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right]$$

Protocolo de cuantización:

$$\varphi(\vec{k}) \longrightarrow \hat{a}(\vec{k})$$

$$\varphi^*(\vec{k}) \longrightarrow \hat{a}^+(\vec{k})$$

campo $\longrightarrow$ operador asociado a cada modo

De esta forma, hacemos $\varphi(x) \longrightarrow \hat{\varphi}(x)$:

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{a}^+(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right]$$

Recordemos que $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$

y $\pi(x) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} = \partial_0\varphi$

Por lo tanto, el momento conjugado a $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\pi}(x)$, será:

$$\hat{\pi}(x) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left[\hat{a}(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} - \hat{a}^+(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right]$$

Recordemos que, en Mecánica Cuántica no relativista y, si consideramos coordenadas cartesianas:

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$$

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 .$$

Ahora vamos a hacer el cambio

$$\delta_{ij} \to \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

y consideraremos conmutadores entre los campos, evaluados en el mismo tiempo.

Impongamos

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)] = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)] = 0 .$$

Ejercicio (sencillo) (ojo, diferente normalización para δ).

Supongamos

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \left[a(\vec{p}) e^{ipx} + a^+(\vec{p}) e^{-ipx} \right]$$

donde $p^\alpha = (p^0, p^i)$ y

$$px = p_\alpha x^\alpha = \eta_{\alpha\beta}\, p^\alpha x^\beta =$$

$$= p^0 x^0 - p_i x^i$$

Calculad $[\varphi(x), \pi(y)]$ con $x^0 = y^0$.
obtened(*) las siguientes relaciones de conmutación para a y a^+:

$$[a(\vec{p}), a^+(\vec{p}\,')] = \delta(\vec{p} - \vec{p}\,')$$

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}\,')] = [a^+(\vec{p}), a^+(\vec{p}\,')] = 0$$

(*) suponiendo las anteriores relaciones de conmutación para $\hat{\varphi}(x)$ y $\hat{\pi}(x)$.

Hemos obtenido relaciones de conmutación de un conjunto infinito de osciladores armónicos. ¿Por qué?

$(\Delta + m^2)\varphi = 0$

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\, \varphi(\vec{p},t)$$

Entonces (ejercicio), $\varphi(\vec{p},t)$ satisface

$$\left[\partial_t^2 + (\vec{p}^{\,2} + m^2)\right]\varphi(\vec{p},t) = 0\,,$$

que es la ecuación de oscilador armónico con $\omega_{\vec{p}} = +\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}$

Vamos a hablar ahora de

Estados en QFT

¿Cómo actúan los operadores de campo sobre los estados del mismo?

Comencemos por el estado de vacío, $|0\rangle$.

El vacío es aniquilado por operador destrucción:

$$\hat{a}(\vec{k})|0\rangle = 0$$

Podemos saltar de $|0\rangle$ a $|\vec{k}\rangle$ (estado con momento $\vec{p}$ o nº de onda $\vec{k}$) mediante

$$|\vec{k}\rangle = \hat{a}^+(\vec{k})|0\rangle$$

↳ describe estado de una partícula

Para un estado de dos partículas:

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = \hat{a}^+(\vec{k}_1)\hat{a}^+(\vec{k}_2)|0\rangle$$

y, en general:

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\rangle = \hat{a}^+(\vec{k}_1)\hat{a}^+(\vec{k}_2)\cdots\hat{a}^+(\vec{k}_n)|0\rangle$$

Cada operador de creación crea una partícula con momento $\hbar\vec{k}_i$ y energía

$\hbar\omega_{k_i}$, donde $\omega_{k_i} = \sqrt{k_i^2 + m^2}$

De forma análoga, $\hat{a}(\vec{k}_i)$ destruye una partícula con el mismo momento y energía.

Descomposición del campo

Definimos la parte del campo con frecuencia positiva como aquella que contiene operadores destrucción:

$$\hat{\varphi}^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \hat{a}(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

De forma equivalente, la parte con frecuencia negativa es

$$\hat{\varphi}^-(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \hat{a}^+(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

La interpretación es: la parte positiva aniquila el vacío:

$$\hat{\varphi}^{+}(x)\,|0\rangle = 0$$

y la parte negativa crea partículas:

$$\hat{\varphi}^{-}(x)\,|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}\, e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})}\,\hat{a}^{+}(\vec{k})\,|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}\, e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})}\,|\vec{k}\rangle$$

Operadores número

Definamos el operador

$$\hat{N}(\vec{k}) = \hat{a}^{+}(\vec{k})\,\hat{a}(\vec{k})$$

↳ sus autovalores son los números de ocupación

son enteros: $n(\vec{k}) = 0, 1, 2, \ldots$ que nos informan cuántas partículas con momento $\vec{k}$ hay en cada estado.

Ejemplos:

- $|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\rangle = \hat{a}^+(\vec{k}_1)\hat{a}^+(\vec{k}_2)\dots\hat{a}^+(\vec{k}_n)|0\rangle$

contiene n partículas: una con momento $\vec{k}_1$, otra con $\vec{k}_2$, ...

- Estado con dos partículas con momento $\vec{k}_1$ y una con momento $\vec{k}_2$:

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = \frac{\hat{a}^+(\vec{k}_1)\hat{a}^+(\vec{k}_1)}{\sqrt{2}}\hat{a}(\vec{k}_2)|0\rangle$$

$$= |\underbrace{n(\vec{k}_1)}_{2}\,\underbrace{n(\vec{k}_2)}_{1}\rangle$$

o bien

$$|n(\vec{k}_1)\, n(\vec{k}_2)\rangle = \frac{\hat{a}^+(\vec{k}_1)^{n(\vec{k}_1)}}{\sqrt{n(\vec{k}_1)!}}\frac{\hat{a}^+(\vec{k}_2)^{n(\vec{k}_2)}}{\sqrt{n(\vec{k}_2)!}}|0\rangle$$

En general,

$$\underbrace{|n(\vec{k}_1)\, n(\vec{k}_2) \cdots n(\vec{k}_m)\rangle}_{} = \prod_j \frac{\hat{a}^+(\vec{k}_j)^{n(\vec{k}_j)}}{\sqrt{n(\vec{k}_j)!}}\, |0\rangle$$

proporciona la densidad de número en realidad

$\hookrightarrow \hat{N}(\vec{k}) = \hat{a}^+(\vec{k})\,\hat{a}(\vec{k})$

El <u>número total de partículas</u> será

$$N = \int d^3k\, \hat{a}^+(\vec{k})\,\hat{a}(\vec{k})$$

<u>Ejemplo</u> (sencillo)

$\hat{N}\,|\vec{k}'\rangle = ?$

$|\vec{k}'\rangle = \hat{a}^+(\vec{k}')\,|0\rangle$

$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^+(\vec{k}')] = \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{k}') - \hat{a}^+(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}) = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$

$\hat{a}^+(\vec{k})\,\hat{a}(\vec{k})\,|\vec{k}'\rangle = \hat{a}^+(\vec{k})\,\hat{a}(\vec{k})\,\hat{a}^+(\vec{k}')\,|0\rangle$

$= \hat{a}^+(\vec{k})\left[\hat{a}^+(\vec{k}')\,\underbrace{\hat{a}(\vec{k}) \qquad + \delta(\vec{k}-\vec{k}')\,]\,|0\rangle}_{=0}$

$$= \hat{a}^\dagger(\vec{k})\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')\,|0\rangle$$

$$= \delta(\vec{k}-\vec{k}')\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle$$

$$\hat{N}|\vec{k}'\rangle = \int d^3k\, \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})|\vec{k}'\rangle$$

$$= \int d^3k\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle$$

$$= \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\,|0\rangle = |\vec{k}'\rangle$$

$$\Rightarrow n(\vec{k}') = 1.$$

¿Qué sucede con la normalización de estados?

Considerando $\langle 0|0\rangle = 1$, probar que

$$\langle \vec{k}|\vec{k}'\rangle = \delta(\vec{k}-\vec{k}').$$

$$\hat{a}^{+}(\vec{k})|0\rangle = |\vec{k}\rangle$$

$$\langle 0| = \langle \vec{k}|\hat{a}(\vec{k})$$

$$\Rightarrow \langle \vec{k}|\vec{k}'\rangle = \langle 0|\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^{+}(\vec{k}')|0\rangle$$

$$= \langle 0|\underbrace{\hat{a}(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k})}_{\hat{a}(\vec{k})|0\rangle = 0} + \delta(\vec{k}-\vec{k}')|0\rangle$$

$$= \langle 0|\delta(\vec{k}-\vec{k}')|0\rangle = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

¿Bosones? En el caso que nos ocupa estamos tratando con partículas de spin cero.

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = \hat{a}^{+}(\vec{k}_1)\hat{a}^{+}(\vec{k}_2)|0\rangle$$

$$= \hat{a}^{+}(\vec{k}_2)\hat{a}^{+}(\vec{k}_1)|0\rangle$$

$$= |\vec{k}_2, \vec{k}_1\rangle$$

Estado simétrico bajo intercambio de partículas $\rightarrow$ bosones. Si hubiera salido un signo menos serían fermiones.

Ahora sí, vamos a entrar en

Energía y momento:

Comencemos con el desarrollo del campo:

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{a}^+(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right]$$

su momento conjugado era:

$$\hat{\pi}(x) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left[\hat{a}(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} - \hat{a}^+(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right]$$

Recordemos que la densidad Hamiltoniana era:

$$\mathcal{H} = \pi(x)\,\dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}, \quad \text{con}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right), \quad \text{quedando}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left[(\partial_0\varphi)^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right]$$

$\hookrightarrow \hat{\mathcal{H}}$

Vamos a hacerlo poco a poco

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int (\underbrace{\hat{\pi}^2}_{I_1} + \underbrace{\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\varphi}_{I_2} + \underbrace{m^2\hat{\varphi}}_{I_3})^2 d^3x$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \hat{\pi}^2 d^3x$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3x \left[\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k \sqrt{\frac{w_k}{2}}\left[\hat{a}(\vec{k})e^{i(w_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} - \hat{a}^+(\vec{k})e^{-i(w_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})}\right]\right.$$

$$\left.\times \frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k' \sqrt{\frac{w_k'}{2}}\left[\hat{a}(\vec{k}')e^{i(w_k' x^0 - \vec{k}'\cdot\vec{x})} - \hat{a}^+(\vec{k}')e^{-i(w_k' x^0 - \vec{k}'\cdot\vec{x})}\right]\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x \int d^3k \int d^3k' \sqrt{w_k w_k'}\left(\hat{a}(\vec{k})e^{i(w_k x^0 - \vec{k}\vec{x})} - \hat{a}^+(k)e^{-i(w_k x^0 - \vec{k}\vec{x})}\right)$$

$$\times\left(\hat{a}(\vec{k}')e^{i(w_k' x^0 - \vec{k}'x)} - \hat{a}^+(\vec{k}')e^{-i(w_k' x^0 - \vec{k}'x)}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x \int d^3k \int d^3k' \sqrt{w_k w_{k'}}\left[\hat{a}(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}')e^{i[(w_k + w_k')x^0 - (\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}]}\right.$$

$$- \hat{a}(k)\hat{a}^+(\vec{k}')e^{i[(w_k - w_k')x^0 - (\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}]}$$

$$- \hat{a}^+(k)\hat{a}(\vec{k}')e^{-i[(w_k - w_k')x^0 - (\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}]}$$

$$\left.+ \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{k}')e^{-i[(w_k + w_k')x^0 - (k+k')\cdot\vec{x}]}\right]$$

Utilizamos la representación de Fourier de la delta de Dirac:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\, e^{+i\bar{k}\bar{x}} = \delta^{(3)}(\bar{k})$$ y además es par.

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int d^3k \int d^3k' \sqrt{w_k w_{k'}}\Big[\hat{a}(\bar{k})\hat{a}(\bar{k}')\delta^{(3)}(\bar{k}+\bar{k}')e^{i(w_k+w_{k'})x^0}$$

$$-\hat{a}(\bar{k})\hat{a}^+(\bar{k}')\delta^{(3)}(\bar{k}-\bar{k}')e^{i(w_k-w_{k'})x^0}$$

$$-\hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}(\bar{k}')\delta^{(3)}(\bar{k}-\bar{k}')e^{-i(w_k-w_{k'})x^0}$$

$$+\hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}^+(\bar{k}')\delta^{(3)}(\bar{k}+\bar{k}')e^{-i(w_k+w_{k'})x^0}\Big]$$

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int d^3k\, w_k\Big[\hat{a}(\bar{k})\hat{a}(-\bar{k})e^{2iw_kx^0}$$

↳ integro en k' ($w_{\bar{k}} = w_{-\bar{k}}$; $w_k = +\sqrt{k^2+m^2}$)

$$-\hat{a}(\bar{k})\hat{a}^+(\bar{k}) - \hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}(\bar{k})$$

$$+\hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}^+(-\bar{k})e^{-2iw_kx^0}\Big]$$

Vamos a hacer lo mismo con los siguientes términos.

$$\textcircled{I_2} = \frac{1}{2}\int d^3x\, \bar\nabla\hat\varphi\cdot\bar\nabla\hat\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x \int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\int\frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}}(-i\bar k)\cdot(-i\bar k')$$

$$\times\left(\hat a(\bar k)e^{i(\omega_k t^0-\bar k\bar x)}-\hat a^+(k)e^{-i(\omega_k x^0-\bar k\bar x)}\right)$$

$$\times\left(\hat a(\bar k')e^{i(\omega_{k'}x^0-\bar k'\cdot\bar x)}-\hat a^+(\bar k')e^{-i(\omega_k' x^0-\bar k'\cdot\bar x)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\int\frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\bar k\cdot\bar k'\Big[\hat a(\bar k)\hat a(\bar k')e^{i[(\omega_k+\omega_k')x^0-(\bar k+\bar k')\cdot\bar x]}$$

$$-\hat a(\bar k)\hat a^+(\bar k')e^{i[(\omega_k-\omega_{k'})x^0-(\bar k-\bar k')\cdot\bar x]}$$

$$-\hat a^+(k)\hat a(\bar k')e^{-i[(\omega_k-\omega_k')x^0-(\bar k-\bar k')\cdot\bar x]}+$$

$$+\hat a^+(\bar k)\hat a^+(\bar k')e^{-i[(\omega_k+\omega_{k'})x^0-(\bar k+\bar k')\cdot\bar x]}\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\bar k\cdot\bar k'\Big[\hat a(\bar k)\hat a(\bar k')\delta^{(3)}(\bar k+\bar k')e^{i(\omega_k+\omega_k')x^0}$$

$$-\hat a(\bar k)\hat a^+(\bar k')\delta^{(3)}(\bar k-\bar k')e^{i(\omega_k-\omega_k')x^0}$$

$$-\hat a^+(\bar k)\hat a(\bar k')\delta^{(3)}(\bar k-\bar k')e^{-i(\omega_k-\omega_k')x^0}+$$

$$+\hat a^+(\bar k)\hat a^+(\bar k')\delta^{(3)}(\bar k+\bar k')e^{-i(\omega_k+\omega_k')x^0}\Big]$$

$$= \Big[-\frac{1}{4} \int d^3k \, \frac{k^2}{\omega} \Big[-\hat{a}(\bar{k})\hat{a}(-\bar{k}) e^{2i\omega_k x^0} - \hat{a}(\bar{k})\hat{a}^+(\bar{k})$$

$$- \hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}(\bar{k}) - \hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}^+(-\bar{k}) e^{-2i\omega_k x^0} \Big] = I_2 \Big]$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \int d^3x \, m^2 \hat{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} m^2 \Big[\hat{a}(\bar{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \bar{k}\bar{x})} + \hat{a}^+(\bar{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \bar{k}\cdot\bar{x})} \Big]$$

$$\times \Big[\hat{a}(\bar{k}') e^{i(\omega_{k'} x^0 - \bar{k}'\bar{x})} + \hat{a}^+(\bar{k}') e^{-i(\omega_{k'} x^0 - \bar{k}'\bar{x})} \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} m^2 \Big[\hat{a}(\bar{k})\hat{a}(\bar{k}') e^{i[(\omega_k + \omega_{k'})x^0 - (\bar{k}+\bar{k}')\bar{x}]}$$

$$+ \hat{a}(\bar{k})\hat{a}^+(\bar{k}') e^{i[(\omega_k - \omega_{k'})x^0 - (\bar{k}-\bar{k}')\cdot\bar{x}]}$$

$$+ \hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}(\bar{k}') e^{-i[(\omega_k - \omega_{k'})x^0 - (\bar{k}-\bar{k}')\bar{x}]} +$$

$$+ \hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}^+(\bar{k}') e^{-i[(\omega_k + \omega_{k'})x^0 - (\bar{k}+\bar{k}')\cdot\bar{x}]} \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega'}} m^2 \Big[\hat{a}(\bar{k})\hat{a}(\bar{k}') \delta^{(3)}(\bar{k}+\bar{k}') e^{i(\omega_k + \omega_{k'})x^0}$$

$$+ \hat{a}(\bar{k})\hat{a}^+(\bar{k}') \delta^{(3)}(\bar{k}-\bar{k}') e^{i(\omega_k - \omega_{k'})x^0}$$

$$+ \hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}(\bar{k}') \delta^{(3)}(\bar{k}-\bar{k}') e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})x^0} + \hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}^+(\bar{k}')$$

$$\delta^{(3)}(\bar{k}+\bar{k}') e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})x^0}$$

$$\left[= \frac{1}{4}\int d^3k\, \frac{m^2}{\omega_k}\Big[\hat a(\vec k)\hat a(-\vec k)\, e^{2i\omega_k x^0} + \hat a(\vec k)\hat a^{+}(\vec k) + \hat a^{+}(\vec k)\hat a(\vec k) + \hat a^{+}(\vec k)\hat a(-\vec k)\, e^{-2i\omega_k x^0}\Big] \right.$$

$$\left. = I_3 \right]$$

Juntándolo todo (antes de usar) y agrupando

$$\hat H = I_1 + I_2 + I_3$$

$$= -\frac{1}{4}\int d^3k\, \cancelto{0}{\left(\omega_k - \frac{k^2}{\omega_k} - \frac{m^2}{\omega_k}\right)}\hat a(\vec k)\hat a(-\vec k)\, e^{2i\omega_k x^0}$$

$$-\frac{1}{4}\int d^3k\, \cancelto{0\ \to\ \text{no se va}}{\left(-\omega_k - \frac{k^2}{\omega_k} - \frac{m^2}{\omega_k}\right)}\hat a(\vec k)\hat a^{+}(\vec k)$$

$$-\frac{1}{4}\int d^3k\, \left(-\omega_k - \frac{k^2}{\omega_k} - \frac{m^2}{\omega_k}\right)\hat a^{+}(\vec k)\hat a(\vec k)$$

$$-\frac{1}{4}\int d^3k\, \cancelto{0}{\left(\omega_k - \frac{k^2}{\omega_k} - \frac{m^2}{\omega_k}\right)}\hat a^{+}(\vec k)\hat a^{+}(-\vec k)\, e^{-2i\omega_k x^0}$$

Como ~~...~~ $\omega^2 = k^2 + m^2$, se van algunos y queda

$$\hat{H} = -\frac{1}{4}\int d^3k\,(-2w_k)\,\hat{a}(\bar{k})\hat{a}^+(\bar{k}) - \frac{1}{4}\int d^3k\,(-2w)\,\hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}(\bar{k})$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3k\, w_k\left(\hat{a}(\bar{k})\hat{a}^+(\bar{k}) + \hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}(\bar{k})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3k\, w_k\left(\hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}(\bar{k}) + \hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}(\bar{k}) + \delta^{(3)}(\bar{k}-\bar{k})\right)$$

$$= \int d^3k\, w_k\left(\hat{a}^+(\bar{k})\hat{a}(\bar{k}) + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(0)\right)$$

Comienzan a aparecer los problemas

Hemos obtenido:

$$\hat{H} = \int d^3k\, w_k\left[\hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(0)\right]$$

La energía del estado fundamental será

$$\hat{H}|0\rangle = \int d^3k\, w_k\,\frac{1}{2}\delta^{(3)}(0) = E_0|0\rangle$$

Esta divergencia podemos quitarla usando el ordenamiento normal de operadores

$\Rightarrow$ Reordenamos los operadores para que aparezcan los operadores de creación a la izquierda (ojo: estamos con bosones, si tuviéramos fermiones saldría un factor $(-1)^P$, donde P es el nº de permutaciones necesarias para ordenar normalmente una cadena de operadores.

Ejemplos:

$$N[\hat{a}\hat{a}^+] = \hat{a}^+\hat{a}$$

$$N[\hat{a}^+\hat{a}] = \hat{a}^+\hat{a}$$

$$N[\hat{a}^+\hat{a}\,\hat{a}\,\hat{a}\,\hat{a}^+] = \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\,\hat{a}$$

$$N[\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}'')] = \hat{a}^+(\vec{k}')\underbrace{\hat{a}(\vec{k}'')\hat{a}(\vec{k})}$$

estos conmutan. Su orden no importa.

para fermiones:

$$N[\hat{b}(\vec{k})\hat{b}^+(\vec{k}')\hat{b}(\vec{k}'')]$$
$$= -\hat{b}^+(\vec{k}')\hat{b}(\vec{k})\hat{b}(\vec{k}'')$$

Si lo aplicamos para nuestro $\hat{H}$, obtenemos:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3k\, w_k \left(\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{k}) + \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\right)$$

$\hookrightarrow$ $$N[\hat{H}] = \frac{1}{2}\int d^3k\, w_k \left(\hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{k}) + \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\right)$$

$$= \int d^3k\, w_k\, \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})$$

$$= \int d^3k\, w_k\, \hat{N}(\vec{k})$$

$N[\hat{H}]|\Psi\rangle$ nos dice cuantas excitaciones con nº onda k hay en el estado $|\Psi\rangle$.

[A veces se denota $:\hat{H}:$ en vez de $N[\hat{H}]$]

Con esta prescripción,

$$:\hat{H}:|0\rangle = 0 .$$

¿ Por qué ocurre este "problema" ?

Consideremos a nuestro viejo amigo:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}w^2\hat{q}^2 \quad \text{con} \quad [q,p] = i$$

Definimos

$$\left.\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\frac{w}{2}}\,\hat{q} + \frac{i}{\sqrt{2w}}\,\hat{p} \\ \hat{a}^+ &= \sqrt{\frac{w}{2}}\,\hat{q} - \frac{i}{\sqrt{2w}}\,\hat{p} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \hat{q} &= \frac{1}{\sqrt{2w}}(\hat{a} + \hat{a}^+) \\ \hat{p} &= -i\sqrt{\frac{w}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^+) \end{aligned}\right.$$

Entonces, $[\hat{q},\hat{p}] = i \Rightarrow [\hat{a},\hat{a}^+] = 1$ y

nuestro Hamiltoniano es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}w(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a})$$

$$= w(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2})$$

¿ Y si hubiéramos escogido

$$H_{cl}^{(1)} = \frac{1}{2}(wq - ip)(wq + ip) \quad \text{en vez}$$

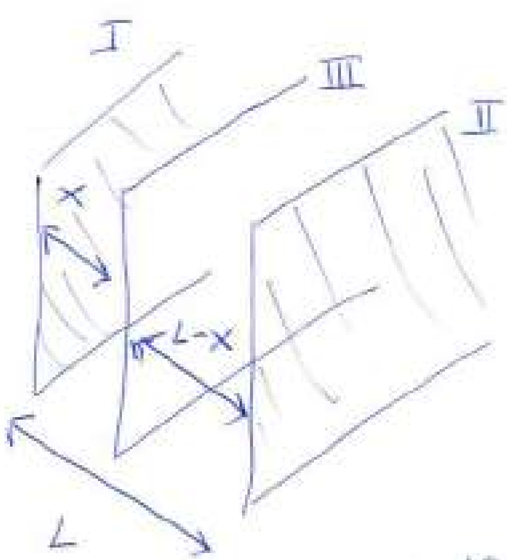
de $H_{cl}^{(2)} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}w^2q^2$?

Curioso: $H_{cl}^{(1)} \rightarrow \hat{H}^{(1)} = \omega \hat{a}^{+}\hat{a}$ y nos evitamos el posible problema de la energía del estado fundamental.

El efecto Casimir

Hemos dicho que la energía del vacío no es observable; podemos escoger un "buen origen" de energías y eliminarla. Pero, ¿qué ocurre con la diferencia, o con cambios, en la energía del vacío?

Por sencillez, vamos a considerar un problema en una dimensión. Tenemos dos placas metálicas y ponemos una tercera entre ambas.



Si recordamos nuestras clases de Mecánica Cuántica, al imponer condiciones de frontera de Dirichlet sobre el campo φ:

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = 0 \,,$$ los

números de onda resultaban estar cuantizados:

(recordad una partícula confinada entre dos paredes infinitas)

$$k_n = \frac{n\pi}{x} \qquad \text{ó} \qquad k_n = \frac{n\pi}{L-x}$$

La relación de dispersión para un campo escalar sin masa es $E_n = k_n$ y la

energía total del punto cero será $\frac{1}{2}w_n$ por cada modo:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{L-x}\right)\right]$$

$$= f(x) + f(L-x).$$

Ambas sumas divergen. Vamos con un argumento físico para eliminar esas divergencias.

· Las placas reales no pueden reflejar radiación con frecuencias arbitrariamente altas (los modos de más alta energía se filtran).

Quitemos entonces estos modos.

parámetro de corte arbitrario

$$\frac{n\pi}{2x} \longrightarrow \frac{n\pi}{2x}\underbrace{e^{-n\pi a/x}}_{\text{quita modos con } \lambda \ll a}$$

↳ no debe salir al final del cálculo

Sumemos:

$$f(x) = \sum_n \frac{n\pi}{2x} e^{-n\pi a/x}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\sum_n e^{-n\pi a/x}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{1-e^{\pi a/x}} = \frac{\pi}{2x}\frac{e^{\pi a/x}}{(1-e^{\pi a/x})^2}$$

$$\underset{\text{Taylor}}{\simeq} \frac{x}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24x} + \mathcal{O}(a^2)$$

De esta manera, la energía total del punto cero, será:

$$E = f(x) + f(L-x) = -\frac{\pi}{24x} + \frac{x}{2\pi a^2} + \frac{L-x}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24(L-x)} + O(a^2)$$

$$= \frac{L}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x}\right) + O(a^2)$$

Ahora bien, si $x \ll L$, entonces

$$\boxed{-\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\pi}{24x^2} = F_{casimir}}$$

Fuerza atractiva entre las placas

Otra deducción (tal vez más sorprendente)

$$E = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{L-x}\right)\right]$$

como $x \ll L$, $$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\pi}{2x^2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n}_{\text{densidad de energía del vacío}}$$

¿y si $\sum_{n=1}^{\infty} n \hat{=} -\frac{1}{12}$? ya lo tendríamos todo.

¿Es eso posible?

Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920)

- 1889 Erode $\xrightarrow{+2 \text{ años}}$ Madras (Chennai)
- sin ninguna formación. No fue al colegio.
- Descubrió expresiones tan asombrosas como

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{99^2} \sum_{n \geq 0} \frac{(4n)!}{(4^n n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{99^{4n}}$$

con
$$|\pi - \pi_0| \simeq 7.6 \cdot 10^{-8}$$
$$|\pi - \pi_1| \simeq 6.4 \cdot 10^{-16}$$
$$|\pi - \pi_2| \simeq 5.7 \cdot 10^{-24}$$

- Decía que la diosa Namagiri le susurraba en sueños.
- En 1913 escribió a G. Hardy, eminente matemático en el Trinity College (Cambridge)

• Una de las primeras cosas que le escribió, fue:

$$\sum_{n\geq 1} n = 1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12}$$

• Hardy reconoció fácilmente la función zeta de Riemann. Para $\operatorname{Re} z > 1$, es

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

• Riemann llevó a cabo la continuación analítica en $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, obteniendo

$$\zeta(z) = \frac{(2\pi)^z}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z)\, \zeta(1-z)$$

$$\Longrightarrow \quad \zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}$$

números de Bernoulli.

que coincide para $k=1$ con la suma "mágica" de Ramanujan.

• El uso de la función ζ es, hoy en día, común, para tratar procesos de renormalización. (p. ej. en gravedad cuántica)

• No sabemos cómo llegó a ello Ramanujan. Usaba una pizarra y únicamente anotaba los resultados finales que le parecían interesantes.

LA ECUACIÓN DE DIRAC.

¿Por qué es necesaria? Problemas con Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0$$

Solución: $\varphi(t,\vec{x}) = N e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} =$

$$= N e^{-ipx}$$

con $E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$

El problema es que, tomando

$$\vec{j}(x) = -i\left(\varphi^*(x)\vec{\nabla}\varphi(x) - \varphi(x)\vec{\nabla}\varphi^*(x)\right)$$

como en Schrödinger, necesitamos

tomar
$$\rho(x) = i\left[\varphi^*(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial t}\varphi(x)\right]$$

para que se satisfaga K-G.

Entonces, podríamos escribir

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \qquad \text{con}$$

$$j^\mu(x) = i\left\{ \varphi^*(x)\partial^\mu \varphi(x) - (\partial^\mu \varphi^*(x))\varphi(x) \right\}$$

Como $\varphi(x) = N e^{-ipx}$, obtenemos

$j^0 = \rho = 2|N|^2 E$ y tenemos problemas

con $E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$.

¿Podemos interpretar los estados con energía < 0?

(Feynman & Stuckelberg)

"partículas moviéndose hacia atrás en el tiempo"

$\updownarrow$

Antipartículas

Observemos que

$$m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = q\, F^\alpha{}_\rho \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

obtenemos la misma ecuación cambiando

$$q \to -q \quad \text{ó} \quad \tau \to -\tau$$

$\Rightarrow$ una partícula viajando hacia atrás en el tiempo $\simeq$ una antipartícula de carga opuesta viajando hacia el futuro.

Entonces, para eliminar estados con $E<0$:

$$q \to -q$$
$$\vec{p} \to -\vec{p}$$
$$t \to -t$$
$$E \to -E$$

También podríamos usar un argumento de este estilo: consideremos la corriente electromagnética para un campo de Klein-Gordon.

Si $q>0$ y la partícula es entrante ($e^{-ip\cdot x}$) con $E>0$, tenemos:

$$J^{\mu}_{EM} = (+q)\,2\,|N|^2 p^{\mu}$$
$$= (+q)\,2\,|N|^2 (E, p^i)$$

Si $q>0$ y $E<0$:

$$J^{\mu}_{EM} = (+q)\,2\,|N|^2(-E, p^i)$$

no nos gusta el signo "$-$"

$$= (-q)\,2\,|N|^2(E, -p^i)$$

sale del argumento de la página anterior.

luego

"partícula entrante" $\longleftrightarrow$ "antipartícula saliente"

De esta manera, el campo $\varphi(x)$ lo expresamos como

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \text{partícula} \\ \text{entrante} \\ E>0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{antipartícula} \\ \text{saliente} \\ E>0 \end{pmatrix}$$

$$e^{-i(Et-\vec{p}\vec{x})} \qquad e^{+i(Et-\vec{p}\vec{x})}$$

Como habíamos comentado, el problema es el signo $-$ en $E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$. Dirac se dio cuenta de que el problema radicaba en que la ecuación es de segundo orden en derivadas. Quiso hacer

$$(\Box + m^2) = (\partial^2 + m^2) = (\sqrt{\partial^2} + im)(\sqrt{\partial^2} - im)$$

¿Cómo definimos $\sqrt{\partial^2}$?

Dirac: definamos un <u>cuadrivector</u> γ^μ cuyas componentes son:

$$(\gamma^0)^2 = 1 \; ; \quad (\gamma^1)^2 = -1 \; ; \quad (\gamma^2)^2 = -1 \; ; \quad (\gamma^3)^2 = -1$$

Además, estas componentes <u>no son números ordinarios</u>.

Si $\mu \neq \nu$: $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0$.

Si vamos ésto al valor de las componentes de γ^μ, obtenemos

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_{4\times 4}$$

(Esta relación define un <u>álgebra de Clifford</u>)

La factorización anterior queda:

$$(\Box + m^2) = (\partial^2 + m^2) = (\gamma^\mu \partial_\mu + m^2)$$

$$= (\gamma^\mu \partial_\mu - im)(\gamma^\mu \partial_\mu + im)$$

Notación : $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$ (<u>a-slash</u>)

$$(\partial^2 + m^2) = (\not{\partial}^2 + m^2) = (\not{\partial} - im)(\not{\partial} + im)$$

Escojamos el paréntesis con signo positivo y tratémoslo como un operador actuando sobre la función de onda, $\Psi(x)$:

$$\boxed{(\not{\partial} + im)\Psi(x) = 0}$$, o bien,

$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0}$, que es la famosa

ecuación de Dirac.

Notemos que también podemos escribirla como

$\boxed{(\hat{p} - m)\Psi = 0}$, donde $\hat{p} = \gamma^\mu (i\partial_\mu)$ y

$\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$

Comentarios:

· hemos introducido los símbolos γ^μ (que anticonmutan). Los vamos a representar por matrices 4×4.

· Esto implica que $\Psi(x)$ es una función de onda con 4 componentes. ¿Qué representan?

No hay una forma única de representar las matrices γ^μ. Vamos a escoger una.

Representación quiral de las matrices gamma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para simplificar la notación (e intuir qué es lo que va a pasar), hagamos:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$. Entonces

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix}$$

Además, puede demostrarse que γ^μ transforma como un cuadrivector. Motivados por esto, escribimos

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (\gamma^0, \vec{\gamma})\ , \text{ con}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\ , \text{ donde}$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)\ .$$

Finalmente, para escribir aun menos, definimos

$$\begin{matrix} \sigma^\mu = (I, \vec{\sigma}) \\ \bar{\sigma}^\mu = (I, -\vec{\sigma}) \end{matrix} \quad \text{y obtenemos}$$

$$\boxed{\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ +\bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}}$$

Si sustituimos estas γ^μ en la ecuación de Dirac, queda:

$$(\gamma_0 \hat{p}^0 - \gamma_i \hat{p}^i - m)\, \psi(x) = 0\ ,$$

con $\hat{p}^0 = i\partial_0$ y $\hat{p}_i = -i\partial_i$

Ahora, vamos a escribir la función de onda como

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \text{ donde } \psi_{L,R} \text{ son}$$

matrices columna de dos componentes. Nuestra ecuación queda:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \hat{p}^0 \\ \hat{p}^0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0$$

O bien:

$$(\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\psi_R = m\psi_L$$

$$(\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\psi_L = m\psi_R$$

Simplifiquemos todavía más considerando partículas sin masa ($m=0$).

$$(\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\psi_R = 0$$

$$(\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\psi_L = 0.$$

Entonces, en el caso de partículas sin masa, nuestro anterior $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ se separa en dos componentes, ψ_L y ψ_R, que no se mezclan.

<u>Conclusión</u>: tenemos en la Naturaleza dos tipos de partículas de Dirac sin masa: zurdas (left-handed) (ψ_L) y diestras (right-handed) (ψ_R)

En la representación quiral que estamos considerando,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \text{ left-handed} \\ \\ \} \text{ right-handed} \end{matrix}$$

Para ser más precisos con left- and right-handed, definimos el <u>operador de quiralidad</u>, γ^5,

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

↳ (sólo en la repr. quiral)

De esta manera,

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = (+1) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

las partículas left-handed tienen quiralidad -1.
Las partículas right-handed " $+1$.

Para extraer las partes left- o right-handed de una función de onda, definimos los proyectores de quiralidad

$$\hat{P}_L = \frac{1-\gamma^5}{2} \quad ; \quad \hat{P}_R = \frac{1+\gamma^5}{2}$$

Conclusión: como ψ_L y ψ_R son autoestados de la ec. Dirac sin masa, entonces una partícula libre, sin masa y L, nunca se transformará en una R.

Además, para $m=0$, el autovalor de $\hat{p}^0$ es $E_{\vec{p}} = |\vec{p}|$, luego

$$\left.\begin{array}{l}(\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}})\psi_R = 0 \\ (\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}})\psi_L = 0\end{array}\right\} \text{ implica}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\psi_R = \psi_R \\ \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\psi_L = -\psi_L\end{array}\right\} \text{ Esto significa que}$$

los estados con $m=0$ son también autoestados del <u>operador de helicidad</u>

$$\hat{h} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|} \quad \text{con autovalores}$$

$+1$ (ψ_R) y -1 (ψ_L).

<u>Ojo</u>: quiralidad y helicidad son lo mismo para partículas sin masa.

En el caso $m \neq 0$ tenemos las ecuaciones

$$(\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\Psi_R = m\,\Psi_L$$

$$(\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\Psi_L = m\,\Psi_R$$

que muestran oscilaciones entre Ψ_L y Ψ_R con una frecuencia proporcional a la masa. En particular, si consideramos un S.R. en el que la partícula está en reposo:

$$i\partial_0\Psi_R = m\Psi_L$$

$$i\partial_0\Psi_L = m\Psi_R \quad ,$$

que es como un sistema de dos estados pero "duplicado".

Vamos a sacar ahora la relación de dispersión de las partículas de Dirac masivas

De nuevo partimos de

$$(\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\psi_R = m\psi_L \qquad (1)$$

$$(\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\psi_L = m\psi_R \qquad (2)$$

Eliminamos ψ_L de (1) e introducimos en (2)

$$(\hat{p}^0 + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})(\hat{p}^0 - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\psi_R = m^2\psi_R$$

$\Rightarrow$ Si ψ_L, ψ_R son autoestados de momento y energía:

$$\underbrace{(p^0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})(p^0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{p})}\psi_R = m^2\psi_R$$

$[(p^0)^2 - |\vec{p}|^2]\psi_R = m^2\psi_R$, luego

$$E_{\vec{p}} = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

<u>Observación</u>: todavía seguimos teniendo estados con energía negativa. ¿Qué son estos estados?

Si escribimos $E = -|p_0|$, para partículas con $m=0$ tenemos

$$\left.\begin{aligned} (-|p^0| - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\,\psi_R &= 0 \\ (-|p^0| + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\,\psi_L &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ antipartículas}$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{|\vec{p}|}\,\psi_R &= -\psi_R \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{|\vec{p}|}\,\psi_L &= \psi_L \end{aligned}\right\} \text{ antipartículas}$$

(al revés que las partículas).

Resumen:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix}$$

espinores de Weyl (2 componentes)

espinor de Dirac (4 componentes)

A continuación, hablaremos de soluciones de la ecuación de Dirac.

Soluciones de la ecuación de Dirac. Spin.

Veamos qué se oculta en $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$.

Por convenio, llamaremos

- partículas $\equiv$ soluciones frec. positiva
- antipartículas $\equiv$ sols. frecuencia negativa.

Es sencillo ver que un conjunto de soluciones de la ecuación de Dirac viene dado por

$$u(p)e^{-ip\cdot x} = \begin{pmatrix} u_L(p) \\ u_R(p) \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x} \quad (\text{partículas})$$

$$v(p)e^{ip\cdot x} = \begin{pmatrix} v_L(p) \\ v_R(p) \end{pmatrix} e^{ip\cdot x} \quad (\text{antipartículas})$$

- $u_{L,R}(p)$ y $v_{L,R}(p)$ son espinores de Weyl en el espacio de momentos. u y v son los espinores de Dirac en dicho espacio y satisfacen:

$$\left.\begin{aligned} (\not p - m)\, u(p) &= 0 \\ (-\not p - m)\, v(p) &= 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

Consideremos primero la partícula en reposo:

$p^\mu = (m, 0)$. Entonces, $(*)$ son:

$$\begin{pmatrix} -m & m \\ m & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L(p^0) \\ u_R(p^0) \end{pmatrix} = 0$$

Las soluciones son $u_L(p^0) = u_R(p^0)$.

Escribimos

$$u(p^0) \equiv \begin{pmatrix} u_L(p^0) \\ u_R(p^0) \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{m}}_{\text{por conveniencia.}} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

donde $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ es un vector columna de dos

componentes que escojeremos t.q.

$\xi^\dagger \xi = 1$. (ξ es un espinor. Así se llama usualmente)

Repetimos el argumento para antipartículas y obtenemos:

$$-\begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_L(p^0) \\ v_R(p^0) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_L(p^0) = -v_R(p^0).$$

Escribimos

$$v(p^0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix}$$

con $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ el espinor asociado a las antipartículas.

<u>Observación</u>: para las partículas (u) y antipartículas (v), tenemos dos grados de libertad, codificados en ξ (η). Dichos espinores nos informarán sobre el spin de las partículas / antipartículas.

El operador de spin de una partícula en reposo es

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} .$$

Este operador actúa sobre ξ o η.

- una partícula con spin up a lo largo del eje z tiene $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y otra con spin down a lo largo del eje z tiene $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- de forma similar, definimos una antipartícula en reposo con spin up a lo largo del eje z como aquella que tiene $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de tal forma que

$$\hat{S}_z \eta = -\frac{1}{2}\eta .$$

Una antipartícula con spin down en z tiene $S_z = 1/2$ y $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tal que $\hat{S}_z \eta = \frac{1}{2}\eta$.

¿Qué ocurre en el caso de que las partículas no están en reposo? Deberíamos hacer un boost sobre el caso anterior. Daremos el resultado sin demostrar:

- Para una partícula / antipartícula con momento p^μ, los espinores de Dirac vienen dados por

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} \quad ; \quad v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta \end{pmatrix}$$

Ejemplo: calculemos el espinor para una partícula con $p^\mu = (E_{\vec{p}}, 0, 0, |\vec{p}|)$ y $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$u_L(p) = \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi = \sqrt{p^\mu \sigma_\mu}\,\xi = \sqrt{p^0\sigma_0 - |\vec{p}|\sigma_3}\,\xi$$

$$= \sqrt{p^0 I - |\vec{p}|\sigma_z}\,\xi = \left[\begin{pmatrix} E_{\vec{p}} & 0 \\ 0 & E_{\vec{p}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |\vec{p}| & 0 \\ 0 & -|\vec{p}| \end{pmatrix}\right]^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{\vec{p}} - |\vec{p}| & 0 \\ 0 & E_{\vec{p}} + |\vec{p}| \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} - |\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \sqrt{E_{\vec{p}} + |\vec{p}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u_L(p) = \sqrt{E_{\vec{p}} + |\vec{p}|} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_R(p) = \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta = \sqrt{p^0\bar{\sigma}_0 - |\vec{p}|\bar{\sigma}_z}\,\eta$$

$$= \left[\begin{pmatrix} E_{\vec{p}} & 0 \\ 0 & E_{\vec{p}} \end{pmatrix} - |\vec{p}|\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{1/2}\eta$$

$$= \left[\begin{pmatrix} E_{\vec{p}} + |\vec{p}| & 0 \\ 0 & E_{\vec{p}} - |\vec{p}| \end{pmatrix}\right]^{1/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{E_{\vec{p}} - |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} + |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E_{\vec{p}} - |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

es el espinor de Dirac buscado.

Exploremos ahora la helicidad y quiralidad de part. / antipart. en más detalle

Ejemplo: consideremos una partícula con spin up a lo largo de z. Su momento es $|\vec{p}|$ (a lo largo de z). $\rightsquigarrow$ helicidad positiva

Según nuestra "receta" anterior

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\ \xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L(p) \\ u_R(p) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} - p\cdot\sigma}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \sqrt{E_{\vec{p}} + p\cdot\sigma}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Si es a lo largo del eje z:

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} - |\vec{p}|}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \sqrt{E_{\vec{p}} + |\vec{p}|}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{\vec{p}}\to|\vec{p}|]{\text{ultrarel.}} \begin{pmatrix} 0\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \sqrt{2E_{\vec{p}}}\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{2E_{\vec{p}}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$, luego $u_L = 0$

$u_R = \sqrt{2E_{\vec{p}}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Conclusión: partículas ultrarelativistas con helicidad positiva tienen spinores right-handed.

Consideremos ahora una partícula con helicidad negativa (spin down a lo largo de z y momento a lo largo de $+z$).

El espinor de Dirac será

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} - p\cdot\sigma}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \sqrt{E_{\vec{p}} + p\cdot\sigma}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{ejemplo}\\\text{anterior}}}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} + |\vec{p}|}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \sqrt{E_{\vec{p}} - |\vec{p}|}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{\vec{p}} \to |\vec{p}|]{\text{ultrarr.}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2E_{\vec{p}}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ 0 \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \sqrt{2E_{\vec{p}}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

luego $u_L = \sqrt{2E_{\vec{p}}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ y $u_R = 0$.

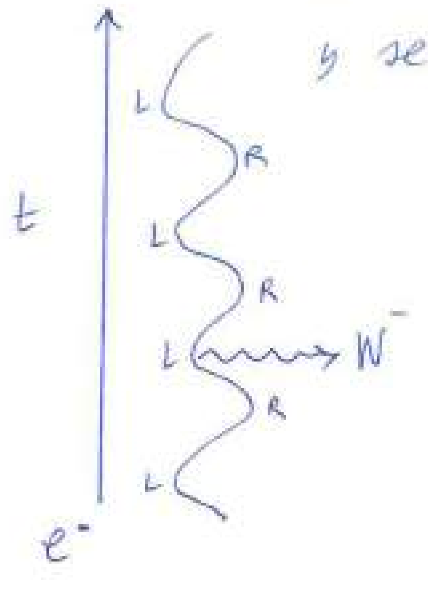
Entregable: haced lo mismo pero considerando antipartículas. Resultado: antipartículas ultrarrelativistas con helicidad positiva (negativa) tienen espinores left- (right-) handed.

¿ Por qué es importante este ejercicio ?

Supongamos que existe una interacción que sólo se acopla con partículas left-handed. En el límite ultrarrelativista, sólo interaccionarán partículas de helicidad negativa y antipartículas de helicidad positiva.

Este es, exactamente, el caso de la Interacción Débil. Describe un campo, $W_+(x)$, que únicamente se acopla a partículas de Dirac left-handed.

Ejemplo: e^- es masivo: oscila entre u_R y u_L. Emitirá un W^- sólo cuando sea u_L y se convertirá en un neutrino.



Observación: los neutrinos únicamente existen como partículas left-handed. Como $m_\nu \simeq 0$, se han observado sólo ν con hel. negativa y $\bar{\nu}$ con hel. positiva.

Relaciones de ortogonalidad

Es sencillo demostrar (ejercicio) que:

$u^{+}(p)\, u(p) = 2E_p\, \xi^{+}\xi$

$v^{+}(p)\, v(p) = 2E_p\, \zeta^{+}\zeta$

Observación (sin demostrar): estas expresiones NO son invariante Lorentz. Para conseguir invariancia, definimos:

Adjunto de un espinor

$\bar{u}(p) \equiv u^{+}(p)\gamma^{0}$

De esta manera, $\bar{u}(p)u(p) = 2m\,\xi^{+}\xi$ sí es invariante Lorentz.

Volvemos a la ortogonalidad: para describir el spin de una partícula, usamos normalmente la base

$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tal que

$$\xi^{s\dagger} \xi^r = \delta^{sr}$$

Entonces, podemos escribir un espinor de Dirac de manera apropiada para ser usado como un estado de base:

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma}\, \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}\, \xi^s \end{pmatrix} \quad , s = 1 \text{ ó } 2$$

y $\bar{u}^s(p) u^r(p) = 2m \, \xi^{s\dagger} \xi^r = 2m \, \delta^{sr}$

Ahora sí: importante: podemos expresar cualquier solución arbitraria de la ecuación de Dirac como una $\int$ momento y una Σ sobre espines; para particular:

$$\boxed{\psi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1}^{2} a_{s\vec{p}}\, u^s(p)\, e^{-ip\cdot x}}$$

Para el caso de antipartículas, obtenemos:

$$\bar{v}^s(p)\, v^r(p) = -2m\eta^{s\dagger}\eta^r = -2m\delta^{sr}$$

y la función de onda para antipartículas será

$$\boxed{\psi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1}^{2} b^*_{s\vec{p}}\, v^s(p)\, e^{ip\cdot x}}$$

En las expresiones anteriores, $a_{s\vec{p}}$ y $b^*_{s\vec{p}}$ son las amplitudes del campo.

Finalmente, notemos que

$$\bar{u}^r(p)\, v^s(p) = \bar{v}^r(p)\, u^s(p) = 0 .$$

Resumen

	espinor	spin up	spin down	normaliz
partícula	$\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\bar{u}^s(p)u^r(p) = 2m\delta^{sr}$
antipartícula	$\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\bar{v}^s(p)v^r(p) = -2m\delta^{sr}$

Hagamos algún cálculo para practicar.

Ejemplo

$$\sum_{s=1}^{2} u^s(p)\bar{u}^s(p) = \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix} \left(\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \quad \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \right)$$

$$\bar{u}^s(p) = u^{\dagger}(p)\gamma^0 \quad y \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}^s(p) = \left(\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \quad \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \right) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \quad \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \right)$$

Ahora bien:

$$\sum_{s=1}^{2} \xi^s\xi^{s\dagger} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\ 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\sum_{s=1}^{2} u^s(p)\bar{u}^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma} \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{p\cdot\sigma}\,\sqrt{p\cdot\bar\sigma} = \Big[(p^0 - p^1\sigma_x - p^2\sigma_y - p^3\sigma_z)(p^0 + p^1\sigma_x + p^2\sigma_y + p^3\sigma_z)\Big]^{1/2}$$

$$= \Big[(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2\Big]^{1/2}$$

$$= \sqrt{E^2 - p^2} = m$$

luego

$$\sum_{s=1}^{2} u^s(p)\,\bar u^s(p) = \begin{pmatrix} m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar\sigma & m \end{pmatrix}$$

$$= \gamma^\mu p_\mu + m = (\gamma\cdot p + m)\mathbb{1}_{4\times 4}$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ -\bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Resultado importante:

$$\boxed{\sum_s u^s(p)\,\bar u^s(p) = \gamma\cdot p + m} = \not{p} + m$$

Entregable: para antipartículas, se tiene:

$$\boxed{\sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \gamma\cdot p - m} = \not{p} - m$$

Para terminar este capítulo, antes de entrar el Lagrangiano y cuantización, vamos a hablar del <u>límite no-relativista de la ec. Dirac</u>

Se suele decir que la ec. de Dirac es necesaria para hablar del spin. En realidad, la <u>ecuación de Pauli</u> ya lo hacía

$$\hat{H}\psi = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^2}{2m}\psi$$

¿Cómo tomamos el límite no-relativista?

En el límite no relativista,

$$E^2 = p^2 + m^2 \longrightarrow m^2$$

$\Rightarrow$ $E = mc^2$ (recordad que ultrarrelativista es $E = pc$).

Para hacer una teoría no relativista, la idea es reemplazar el campo relativista

$$\psi(\vec{x},t) \longrightarrow \phi(\vec{x},t)\, e^{-imc^2/\hbar}$$

para factorizar la gran energía en reposo.

Hagamos esto en Dirac:

$$\psi_L(t,\vec{x}) = \phi_L(t,\vec{x})\, e^{-imt}$$

Entonces, $(\hat{\not{p}} - m)\psi = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -m & \hat{E} - \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \\ \hat{E} + \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L(t,\vec{x})e^{-imt} \\ \phi_R(t,\vec{x})e^{-imt} \end{pmatrix} = 0$$

donde $\hat{E} = i\partial_0$.

Observad que

$$\hat{E}\phi_a(t,\vec{x})e^{-imt} = e^{-imt}(m + \hat{E})\phi_a(t,\vec{x})$$

$(a = L, R)$.

Obtenemos

$$-m\phi_L + (m + \hat{E} - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\phi_R = 0$$

$$\underbrace{(m + \hat{E} + \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\phi_L - m\phi_R = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_R = \left(1 + \frac{\hat{E}}{m} + \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{m}\right)\phi_L$$

lo meto en la 1ª ec.

$$\left[-m + (m + \hat{E} - \vec{\sigma}\cdot\hat{p})\left(1 + \frac{\hat{E}}{m} + \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}}{m}\right)\right]\phi_L = 0$$

$$\left[-\cancel{m} + \left(\cancel{m} + \hat{E} + \cancel{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}} + \hat{E} + \frac{\hat{E}^2}{m} + \cancel{\frac{\hat{E}}{m}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}} - \cancel{\vec{\sigma}\cdot\hat{p}} - \cancel{\frac{\hat{E}}{m}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}} - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^2}{m}\right)\right]\phi_L = 0$$

$$\left(2\hat{E} + \frac{\hat{E}^2}{m} - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^2}{m}\right)\phi_L = 0$$

$\hat{E}^2$ despreciable si estoy a baja energía.

$$\Rightarrow \quad \hat{E}\phi_L = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}})^2}{2m}\phi_L$$, que es la ec. de Pauli.

Ejercicio: comprobad que la misma ecuación sirve para ϕ_R.

Toda esta discusión anterior es muy relevante para calcular el factor giromagnético del electrón

Vamos a partir del acoplamiento mínimo (ya hemos hablado de él en clase)

$$\hat{\vec{p}} \to \hat{\vec{p}} - q\vec{A}$$

$$\hat{E} \to \hat{E} - qA^0$$

Entonces, $$(\hat{E} - qA^0)\phi = \frac{[\vec{\sigma}\cdot(\hat{\vec{p}} - q\vec{A})]^2}{2m}\phi$$

El R.H.S. de la ec. anterior lo vamos a desarrollar usando:

$$\hat{p} = -i\vec{\nabla}$$

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Ejercicio: llegad a

$$(\hat{E} - qA^0)\phi = \frac{[\vec{\sigma}\cdot(\hat{p} - q\hat{A})]^2}{2m}\phi - \frac{q}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\phi$$

Por otro lado, la interacción de un momento magnético con un $\vec{B}$ externo viene dada por

$$\hat{H} = -\hat{\mu}\cdot\vec{B} = -g\frac{q}{2m}\hat{S}\cdot\vec{B}$$

Como $\hat{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \Rightarrow \boxed{g_e = 2}$

En realidad $g_e = 2{,}0023193\ldots$ y se calcula teniendo en cuenta que tenemos no partículas sino campos cuánticos.

¿Por qué es necesario el adjunto de Dirac?

La ecuación adjunta

Partimos de:

$$(\not{p} - m)\Psi(x) = 0$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi(x) = 0$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0$$

Podéis demostrar lo siguiente:

$$\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$$
$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$$

Entonces: $$\left([i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\Psi(x)\right)^\dagger =$$

$$= \left[(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\Psi(x)\right]^\dagger$$

$$= \partial_0\Psi^\dagger(i\gamma^0)^\dagger + \partial_i\Psi^\dagger(i\gamma^i)^\dagger - m\Psi^\dagger$$

$$= -i\partial_0\Psi^\dagger\gamma^0 + i\partial_i\Psi^\dagger\gamma^i - m\Psi^\dagger$$

Problema: la ecuación anterior no la podemos escribir en forma covariante.

- Multipliquemos por γ^0 por la derecha:

Queda:

$$(-i\partial_0\psi^+\gamma^0 + i\partial_i\psi^+\gamma^i - m\psi^+)\gamma^0 = 0$$

$$(-i\partial_0\bar{\Psi}\gamma^0 + i\partial_i\psi^+\underbrace{\gamma^i\gamma^0}_{-\gamma^0\gamma^i} - m\bar{\Psi}) = 0$$

$$(-i\partial_0\bar{\Psi}\gamma^0 - i\partial_i\bar{\Psi}\gamma^i - m\bar{\Psi}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0}$$

Ecuación de Dirac adjunta

Tenemos:

Dirac: $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$

$\overline{\text{Dirac}}$: $(i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi}) = 0$

$$0 = \bar{\Psi}\,(\text{Dirac}) + (\overline{\text{Dirac}})\,\Psi =$$

$$= \bar{\Psi}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi) - \bar{\Psi}m\Psi$$

$$+ (i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu)\Psi + m\bar{\Psi}\Psi$$

$$= i\,(\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = 0$$

luego $\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$ con $j^\mu = (\rho, j^i)$

y $\boxed{j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi}$ es la corriente de probabilidad

(es la famosa corriente vectorial).

¿ Podemos construir una densidad

Lagrangiana para el campo de Dirac?

Al contrario que en el caso fermiónico, no podemos tener un análogo clásico del tipo (bosón = masa + muelle). Recordemos que los fermiones no tienen análogo clásico. Aun así, podemos postular una $\mathcal{L}$. Hagámoslo:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi \\ &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \right) = \partial_\mu \bar{\Psi} i \gamma^\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = -m\bar{\Psi}$$

$$\Longrightarrow \quad i\partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0 \quad (\overline{\text{Dirac}})$$

De un modo similar, obtened la ecuación de Dirac (ejercicio sencillo). Sigamos avanzando.

- Momento conjugado a ψ:

$$\Pi^{\mu}_{\psi} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}$$

$$\Pi^{\mu}_{\bar{\psi}} = 0$$

- Densidad Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \Pi^{0}_{\psi}\partial_0\psi - \mathcal{L}$$

$$= i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi - \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_\mu - m)\psi$$

$$= i\psi^{+}\partial_0\psi - \psi^{+}\gamma^0 i\gamma^{\mu}\partial_\mu\psi + m\psi^{+}\gamma^0\psi$$

$$= \psi^{+}(i\partial_0 - i\gamma^0\gamma^{\mu}\partial_\mu + m\gamma^0)\psi$$

$$= \psi^{+}(i\partial_0 - i\gamma^0\gamma^0\partial_0 - i\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0)\psi$$

$$= \psi^{+}(-i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m\gamma^0)\psi$$

Pero sabemos que

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

$$i\gamma^0 \partial_0 \psi + i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\psi - m\psi = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m)\psi = i\gamma^0 \partial_0 \psi \text{ , luego}$$

$$\mathcal{H} = \psi^\dagger (i\gamma^0 \partial_0 \psi)\gamma^0 = \psi^\dagger i \partial_0 \psi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{H} = \psi^\dagger i \partial_0 \psi}$$

Prescripción de cuantización

Imponemos relaciones de anticonmutación a tiempos iguales:

$$\{\hat{\psi}_a(t,\vec{x}), \hat{\psi}_b^\dagger(t,\vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{ab}$$

$$\{\hat{\psi}_a(t,\vec{x}), \hat{\psi}_b(t,\vec{y})\} = \{\hat{\psi}_a^\dagger(t,\vec{x}), \hat{\psi}_b^\dagger(t,\vec{y})\} = 0$$

(a,b) etiquetan las componentes del cuadriespinor $(a,b) = (1,2,3,4)$.

Ayer propusimos un entregable que era llegar a

$$:\hat{H}: = \int d^3p \sum_{s=1}^{2} E_{\vec{p}} \left(\hat{a}^{+}_{s\vec{p}}\hat{a}_{s\vec{p}} + \hat{b}^{+}_{s\vec{p}}\hat{b}_{s\vec{p}}\right)$$

Hablemos ahora, para terminar este gran bloque sobre la ecuación de Dirac, de

Simetría local y teoría gauge para fermiones

¿Por qué necesitamos esta teoría? Porque sabemos que los e^- interaccionan con campos electromagnéticos. La idea es incluir fermiones en $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y, de esta manera, ver cómo interaccionan fotones y electrones. Como resumen, veremos cómo convertir la teoría de Dirac en una teoría gauge imponiendo simetría $U(1)$ local y aplicando la prescripción de acoplamiento mínimo.

Veamos que $\mathcal{L}_D$ es invariante bajo una transformación $U(1)$ global:

$$\psi(x) \to \psi(x)\, e^{i\alpha}$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)\, e^{-i\alpha}.$$

Como la transformación es global,

$$\partial_\mu \psi \to e^{i\alpha}\, \partial_\mu \psi.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi \to$$

$$\to \bar{\psi} e^{-i\alpha}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi e^{i\alpha} = \bar{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi$$

Como resultado de esta invariancia, hay una corriente de Noether conservada (<u>podéis calcularla</u> usando los resultados del capítulo de T^{as} clásicas de campos):

$$J^\mu = \bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi$$

Impongamos ahora invariancia frente a una transformación $U(1)$ local. El cambio es:

$$\psi \to \psi e^{i\alpha(x)}$$

Además, introduzcamos un campo gauge, A_μ mediante la derivada covariante (acoplamiento mínimo):

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x)$$

Para asegurar simetría local $U(1)$, el campo gauge se tiene que transformar como

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu \alpha(x)$$

Con todos estos ingredientes, la ~~ecuación~~ densidad Lagrangiana de Dirac localmente $U(1)$ invariante es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi ,$$

con $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)$

Desarrollando brevemente:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi - \underbrace{q\bar{\Psi}\not{A}\Psi}$$

éste es el famoso término de interacción

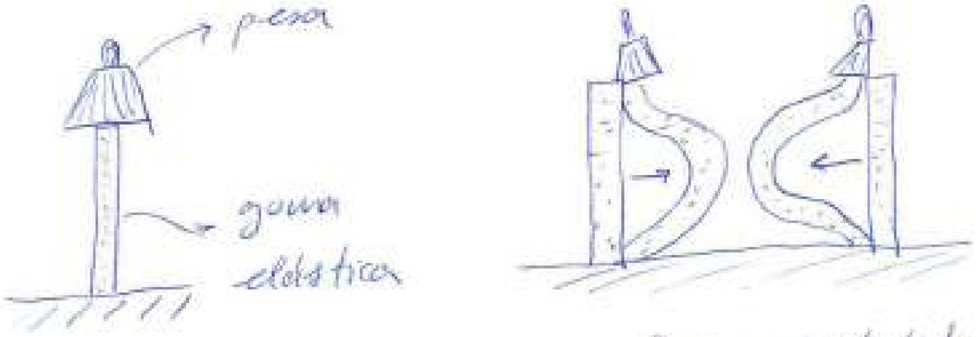
$$\mathcal{L}_I = -q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi$$

Si sumamos términos, podemos escribir las contribuciones del campo gauge de Maxwell y del campo fermiónico localmente invariante gauge, así como de la interacción entre ellos. Dicha Teoría, llamada QED, es la más exitosa de todas las teorías que la Física ha desarrollado:

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi}$$

RUPTURA DE SIMETRÍA

"El estado fundamental no tiene la misma simetría que el Hamiltoniano que describe el sistema"



Dos posibilidades que rompen simetría.

Ruptura de simetría con un Lagrangiano

Comencemos con

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi\right) - V(\phi)$$

Una teoría muy usada es la llamada $\lambda\phi^4$. Para ésta:

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \qquad (\lambda > 0)$$

Observamos que $\mathcal{L}$ es invariante bajo la transformación discreta $\phi(x) \to -\phi(x)$.

El mínimo del potencial está en:

$$\frac{dV}{d\phi} = \mu^2 \phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 = 0$$

Entonces, $\mu^2 > 0 \Rightarrow$ mínimo en $\phi = 0$.

($\mu = m$ sería la masa de las excitaciones del campo escalar considerado)

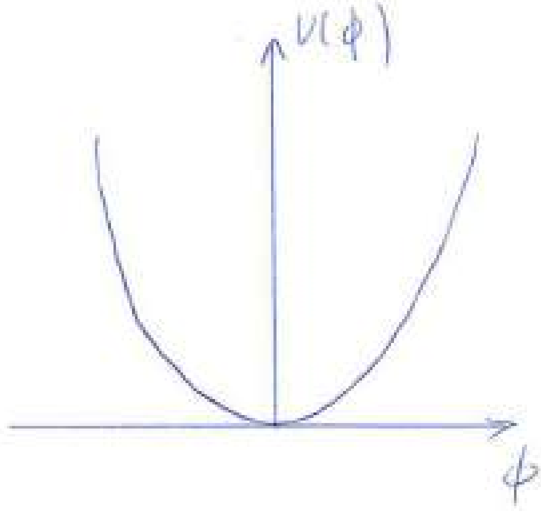
¿Qué ocurre si hacemos?

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

Entonces, el mínimo está en

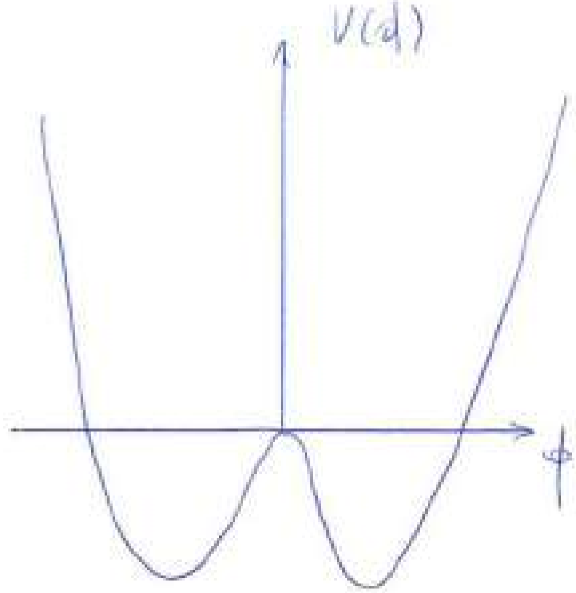
$$\phi_0 = \pm \left(\frac{6\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}$$

y tendremos la siguiente situación:



$\mu^2 > 0$

$\phi_0 = 0$



$\mu^2 < 0$

$\phi_0 = -\sqrt{\dfrac{6\mu^2}{\lambda}}$ $\quad$ $\phi_0 = +\sqrt{\dfrac{6\mu^2}{\lambda}}$

En el caso de la derecha, tenemos dos vacíos para escoger. El sistema escogerá uno de ellos y se romperá la simetría $\phi_0 \to -\phi_0$ del estado fundamental.

¿Cómo son las excitaciones (partículas) del nuevo vacío comparadas con las del estado sin ruptura de simetría?

Escogemos $+\phi_0$ y desarrollamos alrededor de este mínimo.

$$V(\phi-\phi_0) = V(\phi_0) + \left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)_{\phi_0}(\phi-\phi_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right)_{\phi_0}(\phi-\phi_0)^2 + \cdots$$

$$= V(\phi_0) + \mu^2(\phi-\phi_0)^2 + \cdots$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = -\mu^2 + \frac{\lambda\phi^2}{2} = \begin{cases} -\mu^2 & \phi_0 = 0 \\ 2\mu^2 & \phi_0 = \pm\sqrt{6\mu^2/\lambda} \end{cases} \right]$$

Entonces, como $V(\phi_0) = cte$ y no modifica las ecuaciones de movimiento:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi' - \mu^2\phi'^2 + O(\phi')^3,$$

con $\phi' = \phi - \phi_0$.

Si comparamos con la teoría original:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

pasamos de $m = \mu$ a $m = \sqrt{2}\mu$

(ha cambiado la masa de nuestra teoría)

¿Qué ocurriría ahora si la simetría rota fuera continua?

Ruptura de simetrías continuas. Teorema de Goldstone

Consideremos una teoría que tiene un campo con dos componentes, ϕ_1 y ϕ_2. Si le damos la vuelta al término de masa (como hicimos antes), queda:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \phi^1 \partial^\mu \phi^1) + (\partial_\mu \phi^2 \partial^\mu \phi^2) \right]$$

$$+ \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

(Esto viene de un campo escalar complejo

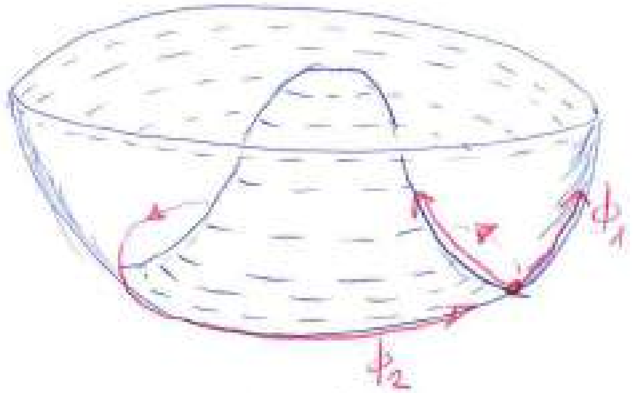
$\varphi = \phi_1 + i\phi_2$)

Este Lagrangiano tiene una simetría:

Invariancia $SO(2)$ en el espacio interno (rotaciones en dicho espacio) → en el plano $\phi_1(x) - \phi_2(x)$

$$\begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$V(\phi_1, \phi_2) = -\frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$ tiene la forma



Hay un número infinito de mínimos del potencial:

$$V(x) = -\frac{\mu^2}{2}x + \frac{\lambda}{4!}x^2 \quad (x = \phi_1^2 + \phi_2^2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow \quad \underbrace{x = \phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{6\mu^2}{\lambda}}_{\text{círculo que contiene a los infinitos mínimos de } V(\phi_1,\phi_2).}$$

Supongamos, como antes, que el sistema escoge un mínimo. En particular, tomemos

$$(\phi_1, \phi_2) = \left(+ \sqrt{\frac{6\mu^2}{\lambda}}, 0 \right)$$ y desarrollamos

usando $\phi_1' = \phi_1 - \sqrt{\frac{6\mu^2}{\lambda}}$ y $\phi_2' = \phi_2$.

Ignorando constantes y cortando a orden dos, como antes, obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi_1' \partial^\mu \phi_1' + \partial_\mu \phi_2' \partial^\mu \phi_2' \right) - \mu^2 (\phi_1')^2 + O(\phi'^3)$$

Resultado:

- las partículas del campo ϕ_1' tienen masa $m = \sqrt{2}\mu$
- el campo ϕ_2' es sin masa

Teorema de Goldstone: la ruptura de una simetría continua da lugar a una excitación masiva y a una sin masa (llamado bosón de Goldstone)

Ejercicio (No entregable)

$U(1) \simeq SO(2)$ (isomorfismo)

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \psi)^\dagger (\partial_\mu \psi) + \mu^2 \psi^\dagger \psi - \lambda (\psi^\dagger \psi)^2$$

- definid $\psi(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)}$

- demostrad:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 (\partial_\mu \theta)^2 + \mu^2 \rho^2 - \lambda \rho^4$$

Ahora, la invariancia $U(1)$ es frente a transformaciones del tipo

$$\rho \to \rho$$
$$\theta \to \theta + \alpha$$

- Romped la simetría y obtened las masas de los campos ρ' y θ' (como en los ejemplos anteriores).

Ruptura de simetrías en teorías gauge.

El mecanismo de Higgs

Ya sabemos que un Lagrangiano que tiene una simetría local contiene campos gauge. Por ejemplo:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \psi^+ - igA^\mu \psi^+)(\partial_\mu \psi + igA_\mu \psi) + \mu^2 \psi^+ \psi$$

$$- \lambda (\psi^+ \psi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

ya le dimos la vuelta al signo

es invariante $U(1)$ local ($\psi \to \psi e^{i\alpha(x)}$)

siempre que A_μ transforme como

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x)$$

¿Qué describe el Lagrangiano anterior?

- partículas masivas con $E_{\vec{p}} = \sqrt{p^2 + \mu^2}$ y carga opuesta (partículas escalares) (2 partíc.)
- partículas sin masa (vectoriales) con $E_{\vec{p}} = |\vec{p}|$ (2 partíc según la polarización del fotón)

Para romper la simetría, antes vamos a escribir el Lagrangiano anterior de forma ligeramente diferente. Recordamos que teníamos:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \psi^+ - iq A^\mu \psi^+)(\partial_\mu \psi + iq A_\mu \psi) + \mu^2 \psi^+ \psi$$
$$- \lambda (\psi^+ \psi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

El segundo término lo escribimos como

$$\partial_\mu \psi + iq A_\mu \psi = (\partial_\mu \rho) e^{i\theta} + i \underbrace{(\partial_\mu \theta + q A_\mu)}_{} \rho e^{i\theta}$$

término interesante

definimos $\quad C_\mu := A_\mu + \frac{1}{q} \partial_\mu \theta$

Por lo tanto,

$$(\partial^\mu \psi^+ - iq A^\mu \psi^+)(\partial_\mu \psi + iq A_\mu \psi) =$$

$$= (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 q^2 C_\mu C^\mu \quad \text{, luego}$$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 q^2 C_\mu C^\mu + \mu^2 \rho^2 - \lambda \rho^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Rompamos ahora la simetría:

- mínimos del potencial sobre el círculo

$$\rho = \sqrt{\mu^2/2\lambda}$$

- escogemos vacío: $\rho_0 = \sqrt{\mu^2/2\lambda}$ y $\theta_0 = 0$.

- estudiemos las excitaciones alrededor del vacío.

Definiendo $\dfrac{\chi}{\sqrt{2}} = \rho - \rho_0$ e ignorando términos constantes, queda

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 - \sqrt{\lambda}\mu \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4$$

$$- \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{q^2}{2} \frac{\mu^2}{\lambda} C_\mu C^\mu +$$

→ ¡¡ aparece un campo vectorial masivo !!

$$+ q^2 \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2} \chi C_\mu C^\mu + \frac{1}{2} q^2 \chi^2 C_\mu C^\mu + \ldots$$

. Observemos que las excitaciones de θ han desaparecido (se han cambiado por las de C_μ)

. Ahora tenemos:

i) una partícula escalar masiva

con $E_{\vec{p}} = \sqrt{p^2 + 2\mu^2}$

iii) tres partículas vectoriales masivas (excitaciones de C_μ), con

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{p^2 + \left(\frac{q^2\mu^2}{\lambda}\right)}$$

Recordemos que, cuando rompíamos una simetría continua, aparecía un modo escalar masivo y a otro sin masa (bosón de Goldstone)

¿Cómo hemos eliminado el Goldstone?

Así: $C_\mu := A_\mu + \frac{1}{q}\partial_\mu\theta$. Ha desaparecido por hacer una transformación gauge.

Podemos entender el <u>Mecanismo de Higgs</u> de la siguiente manera: quitemos todos los bosones de Goldstone mediante una transformación gauge.

Nos <u>quedan dos grandes temas</u> para acabar la asignatura: teorías gauge no abelianas basadas en $U(1) \times SU(2)$ y el modelo de Weinberg-Salam, basado en $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

Teorías gauge no abelianas

Recordemos que la teoría dada por

$$\mathcal{L} = (D^\mu \psi)^+ (D_\mu \psi) - m^2 \psi^+ \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

con $D_\mu \psi = (\partial_\mu \psi + i q A_\mu \psi)$ es invariante gauge local bajo las transformaciones

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha(x)}$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x)$$

Hagámoslo usando transformaciones infinitesimales (que es lo que vamos a estudiar después)

$$\psi \rightarrow (1 + i\alpha) \psi$$

$$\partial_\mu \psi \rightarrow \partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \alpha) \psi + i\alpha (\partial_\mu \psi)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x)$$

Vamos hasta $O(\alpha)$:

$$\psi^\dagger\psi \to (\psi^\dagger - i\alpha\psi^\dagger)(\psi + i\alpha\psi^\dagger) = \psi^\dagger\psi + O(\alpha^2)$$

$$D_\mu\psi \to [\partial_\mu\psi + i(\partial_\mu\alpha)\psi + i\alpha(\partial_\mu\psi) +$$

$$+ iq\,(A_\mu - \tfrac{1}{q}\partial_\mu\alpha)(\psi + i\alpha\psi)]$$

$$= [\partial_\mu\psi + iqA_\mu\psi] + i\alpha[\partial_\mu\psi + iqA_\mu\psi] + O(\alpha^2)$$

$$= (1 + i\alpha)D_\mu\psi + O(\alpha^2)$$

luego $(D^\mu\psi^\dagger)(D_\mu\psi) \to (D^\mu\psi^\dagger)(D_\mu\psi) + O(\alpha^2)$ y la teoría es invariante.

¿Qué ocurre si el grupo de simetría no es abeliano? Yang-Mills (1954) se preguntaron qué ocurría en el caso de $U(1) \to SU(2)$.

Consideremos una teoría de Dirac con dos tipos de fermiones de igual masa.

$$\mathcal{L} = \bar{f}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)f + \bar{g}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)g$$

Si definimos

$$\Psi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \qquad \overline{\Psi} = (\bar{f} \; \bar{g})$$, queda

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi$$

Introduzcamos ahora las matrices de Pauli de isospín, $\vec{\tau}$. Son las mismas que $\vec{\sigma}$ pero así recordamos que actúan sobre dos tipos de fermiones (recordad p y n = dobletes de isospín).

$\mathcal{L}$ es invariante bajo una transformación de SU(2) global

$$\Psi \to e^{\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}}\Psi$$

$$\overline{\Psi} \to \overline{\Psi}e^{-\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}}$$

$(\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z))$.

Para seguir profundizando en la teoría, consideremos transformaciones infinitesimales

$$\Psi \rightarrow \left(1 + \frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}\right)\Psi$$

Ejemplo sencillo: demostrar que $\mathcal{L}$ es invariante bajo SU(2) global usando transformaciones infinitesimales.

Vayamos ahora al caso de invariancia

SU(2) local: $\alpha \rightarrow \alpha(x)$. Como vimos antes:

- El término de masa no es problemático.
- La derivada sí lo es:

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow \partial_\mu \Psi + \frac{i}{2}(\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}(x))\partial_\mu\Psi + \underbrace{\frac{i}{2}(\vec{\tau}\cdot\partial_\mu\vec{\alpha}(x))\Psi}_{\text{recordemos que éste era el término problemático}}$$

- ¿Qué hacemos?

U(1) $\longrightarrow$ introducimos un campo gauge, A_μ

dim(U(1)) = 1 $\longrightarrow$ 1

• Como $\dim(SU(2)) = 3$, vamos ahora a introducir <u>3 campos gauge vectoriales</u> (necesitamos 3 porque tenemos 3 derivadas "que arreglar").

índices internos $= 1, 2, 3$

$$\vec{W}_\mu(x) = \left(W_\mu^1(x), W_\mu^2(x), W_\mu^3(x) \right)$$

índices de Minkowski $= 0, 1, 2, 3$.

• Igual que habíamos hecho para $U(1)$:

$$D_\mu = \partial_\mu + i q A_\mu, \quad \text{ahora tenemos}$$

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} g \, \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu(x)}$$

constante de acoplamiento (carga de la teoría)

convenio (pudiera ser el opuesto)

La idea es la de siempre: <u>quiero que la derivada transforme como el campo</u>