Errores estadísticos y determinación de la gravedad con un péndulo simple

Víctor Mira Ramírez

15 de febrero de 2024

Profesora:	Carlos Sabater Piqueres
Grupo:	Grupo III
Lugar:	Universidad de Alicante

Índice

Resumen

Este experimento tiene como objetivo estudia el movimiento de un péndulo simple para conseguir determinar la aceleración gravitatoria de en La Tierra. Se discutirá el tratamiento estadístico de medidas experimentales y cómo reducir el error en la medida.

1. Introducción

Con el material suministrado para esta práctica se deberán medir las oscilaciones de un péndulo. La determinación del periodo del péndulo tendrá un error elevado proveniente del observador. Estudiaremos la influencia de dicho error en la medida y la forma de reducirlo. Finalmente obtenderemos un valor para la aceleración gravitatoria gracias a la relación que existe entre el periodo de oscilación y la longitud de la cuerda que sujeta al péndulo. Para todos estos cálculos necesitaremos usar una serie de ecuaciones:

$$\triangle V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \triangle x^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \triangle y^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \triangle z^2} \tag{1}$$

$$y = a \cdot x + b \tag{2}$$

$$a_0 = \frac{N \sum x_i \cdot y_i - \sum x_i \cdot y_i}{N \sum x_i{}^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \quad \Rightarrow \quad b_0 = \frac{\left(\sum x_i\right)^2 \cdot y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i \cdot y_i}{N \sum x_i{}^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{3}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\chi_N{}^2}{N \cdot Var(x)}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{\chi_N{}^2 \cdot \sum_(i = 1)^(N) x_i{}^2}{N \cdot Var(x)}} \tag{4}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{l}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \tag{5}$$

La ecuación (1) se usará para la obtención del error de la gravedad respecto al error de la longitud y del periodo. Y (2) nos será útil una vez linealizada la gráfica, donde a es la pendiente y b la ordenada en el origen. Por último, la ecuación (3) es la de ajustes por mínimos cuadrados, útil para linealizar, junto con sus errores (4). Por último, la ecuación (5) nos servirá para relacionar la aceleración gravitatoria con las medidas ya obtenidas.

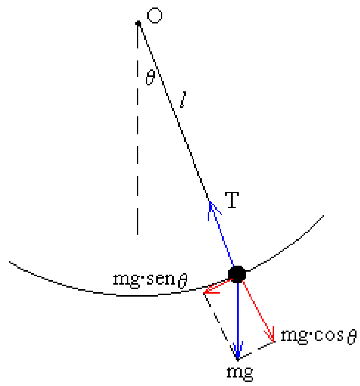
2. Diagramas y formulaciones matemáticas

El siguiente diagrama muestra un péndulo simple y las fuerzas que actúan sobre él. Podemos descomponer el peso en una componente radial ($P_r = mg\cos(\theta)$) y en una componente tangencial ($P_t = mg\sin(\theta)$)
Estudiamos el caso tanto en sentido radial, $T - mg\cos(\theta) = ma_c = ml\omega^2$, donde a_c es la aceleración centrípeta ($\frac{v^2}{r}$), quedándonos la ecuación para la Tensión:

$$\boxed{T = mg\cos(\theta) + ml\omega^2}$$

y el caso en sentido tangencial, $-mg\sin(\theta) = ma_t = ml\alpha = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$, donde a_t es la aceleración tangencial ($\frac{dv}{dt}$), quedándonos la ecuación para el ángulo:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0}$$



Con esta ecuación diferencial, conseguimos el ángulo en función al tiempo, $\omega(t)$, a partir de la cual podemos averiguar la velocidad angular, $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$ y la aceleración angular $\alpha(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
Resolver esta ecuación diferencial es algo complicado, pero existe un método rápido para obtener soluciones para ángulos pequeños detallada en el Anexo 1. En el Anexo 2 se detalla la evolución de la energía mecánica para nuestro péndulo.

2.1. Solución Numérica

Discretizando el tiempo y usando el método de Euler para pasos de Δt pequeños,
$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta\omega = \left[\frac{-g}{l}\sin(\theta)\right]\Delta t$
y por tanto, obtenemos para la velocidad angular la ecuación:

$$\boxed{\omega_{i+1} = \omega_i - \left(\frac{g}{l}\sin(\theta_i)\right)\Delta t}$$

y como $\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \omega\Delta t$, obtenemos para el ángulo la ecuación:

$$\boxed{\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta t}$$

2.2. Péndulo con Fricción

La fuerza de rozamiento viene definida por la ecuación $F_r = -k\omega$, que debemos agregar a nuestra ecuación diferencial inicial, quedándonos la nueva ecuación diferencial:

$$-mg\sin(\theta) - k\omega = ml\alpha = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{k}{ml}\frac{d\theta}{dt} = 0}$$

Simplemente hemos añadido el término $-\frac{k}{ml}\frac{d\theta}{dt} = 0$ a nuestra ecuación diferencial.

Actualizando nuestra solución numérica tenemos las siguientes ecuaciones para el caso con rozamiento:

$$\boxed{\omega_{i+1} = \omega_i + \left[\frac{-g}{l}\sin(\theta_i) + \frac{k}{ml}\omega_i\right]\Delta t}$$

$$\boxed{\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta t}$$

3. Desarrollo experimental

3.1. Medición y Tratamiento Estadístico

Primeramente, calculamos el periodo de un péndulo cuando la amplitud es pequeña y oscila 2 veces. Repetimos esta operación 20 veces, obtenemos el valor medio y la dispersión del periodo.

Ahora repetiremos el procedimiento seguido, pero esta vez haremos la medición una vez el péndulo haya oscilado 20 veces. Finalmente compararemos los valores obtenidos junto con la dispersión de los mismos.

Se realizará una representación de las distribuciones de los datos para cada uno de los casos anteriores. Se comprobará que el error estadístico en el segundo caso será mucho menor al primero.

3.2. Cálculo de la aceleración gravitatoria y su error

Con los datos obtenidos en la medición del apartado anterior, calcularemos la aceleración gravitatoria en La Tierra. Representaremos la dependencia del periodo de oscilación con la longitud del hilo, siendo la pendiente la aceleración gravitatoria. Discutiremos porqué se obtiene un valor para la odenada en el origen.

3.3. Medidas

$t \pm 0.25s$, $n = 2$	$t \pm 0.25s$, $n = 20$	$T \pm 0.13s$, $n = 2$	$T \pm 0.013s$, $n = 20$
2,03	21,89	1,02	1,095
1,96	21,89	0,98	1,095
2,14	21,93	1,07	1,097
2,03	21,90	1,02	1,095
2,01	21,96	1,01	1,098
2,03	21,95	1,02	1,098
2,01	21,87	1,01	1,094
2,01	21,84	1,01	1,092
2,09	21,83	1,05	1,092
1,88	21,83	0,94	1,092
2,02	21,90	1,01	1,095
2,00	22,08	1,00	1,104
2,02	21,95	1,01	1,098
2,02	21,90	1,01	1,095
2,06	22,02	1,03	1,101
2,00	21,94	1,00	1,097
2,02	21,96	1,01	1,098
2,13	21,84	1,07	1,092
2,07	22,01	1,04	1,101
1,94	21,88	0,97	1,094
2,02	21,92	1,01	1,096

La fila resaltada en amarillo refleja la media de los datos de la columna bajo la que se encuentre el valor.

Material proporcionado	Hilo para péndulo Bola para péndulo Cinta métrica Cronómetro

Otras medidas Longitud del hilo $0{,}3 \pm 0{,}1\, m$

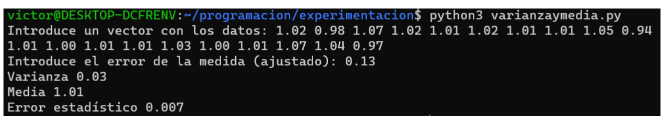
4. Resultados y Discusiones

4.1. Tratamiento Estadísico

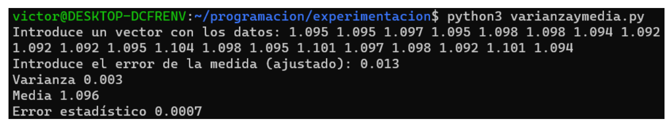
El valor medio del periodo para n = 2 oscilaciones fue de 1.01 segundos, con una dispersión de 0.03 segundos, y por tanto un error estadístico de 0.007 segundos.

Sin embargo para n = 20 oscilaciones, el periodo medio fue de 1.093 segundos, obtenemos una dispersión de 0.003 segundos, y un error estadístico de 0.0007 segundos. ¡Un orden de magnitud menor!

Esto se debe a que en dos oscilaciones el error de interacción será muy grande relativo al tiempo que el péndulo está oscilando. Este error se reduce en porcentaje cuando aumentamos las oscilaciones, y por tanto el tiempo total que está oscilando el péndulo



```
victor@DESKTOP-DCFRENV:~/programacion/experimentacion$ python3 varianzaymedia.py
Introduce un vector con los datos: 1.02 0.98 1.07 1.02 1.01 1.02 1.01 1.01 1.05 0.94
1.01 1.00 1.01 1.01 1.03 1.00 1.01 1.07 1.04 0.97
Introduce el error de la medida (ajustado): 0.13
Varianza 0.03
Media 1.01
Error estadístico 0.007
```



```
victor@DESKTOP-DCFRENV:~/programacion/experimentacion$ python3 varianzaymedia.py
Introduce un vector con los datos: 1.095 1.095 1.097 1.095 1.098 1.098 1.094 1.092
1.092 1.092 1.095 1.104 1.098 1.095 1.101 1.097 1.098 1.092 1.101 1.094
Introduce el error de la medida (ajustado): 0.013
Varianza 0.003
Media 1.096
Error estadístico 0.0007
```

El error de la medida (0.13s y 0.013s respectivamente) fue calculado usando propagación de errores desde el error del tiempo que tardó en realizar las n oscilaciones (0.25 segundos).

$$\Delta T_{n=2} = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 (\Delta t)^2} \quad = \quad \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 (\Delta t)^2} \quad = \quad \sqrt{0{,}5^2 \cdot 0{,}25^2} \quad = \quad 0{,}13s$$

$$\Delta T_{n=20} = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 (\Delta t)^2} \quad = \quad \sqrt{\left(\frac{t}{20}\right)^2 (\Delta t)^2} \quad = \quad \sqrt{0{,}05^2 \cdot 0{,}25^2} \quad = \quad 0{,}013s$$

En la siguiente figura vemos representados las dos columnas del periodo, donde la curva naranja es el periodo calculado para n = 20, y la curva azul para n = 2. Podemos comprobar como la curva naranja es mucho menos dispersa que la azul, que tiene muchos más picos.
Para los futuros cálculos usaremos únicamente el valor del periodo para n = 20, que sabemos que nos dará una mayor precisión.

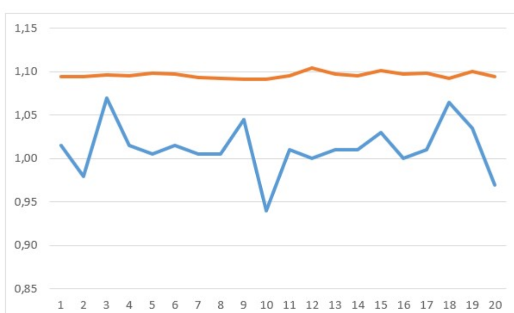


Figura 1: Periodo para 20 oscilaciones

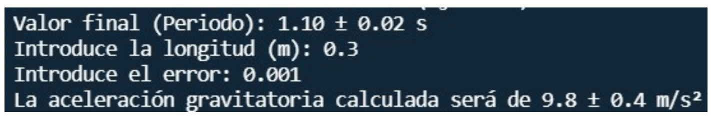
Después de añadir el respectivo error de interacción (0.3s) y del cronómetro (0.01s), obtenemos un valor final para el periodo de 1.10 ± 0.02s

4.2. Cálculo de la gravedad

Una vez obtenido el periodo y su error, procedemos a calcular la aceleración gravitatoria usando la fórmula que la relaciona con la longitud del hilo y el periodo.

Calculamos mediante propagación de errores y el uso de las derivadas parciales el error para la aceleración gravitatoria.

Obtenemos como valor final una aceleración gravitatoria de 9.8 ± 0.4 m/s²



```
Valor final (Periodo): 1.10 ± 0.02 s
Introduce la longitud (m): 0.3
Introduce el error: 0.001
La aceleración gravitatoria calculada será de 9.8 ± 0.4 m/s²
```

Figura 2: Aceleración Gravitatoria

4.2.1. Linealización

Aquí iría la linealización para n = 20 constante y diferentes longitudes. Se obtiene como pendiente la gravedad y se muestra el gráfico. No he tenido tiempo de acabarlo pero este es el hueco para ello.

5. Anexo

5.1. Formulación de ángulos pequeños - Anexo 1

La ecuación $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$ puede simplificarse si, considerando ángulos pequeños, $\sin(\theta) = 0$, obteniendo la fórmula $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta) = 0$, que tiene una solución exacta,

$$\boxed{\theta = \theta_0 \cos(\gamma t) \qquad \theta_0 = \theta(t = 0)}$$

donde γ es la frecuencia angular, $\gamma^2 = \frac{g}{l} \quad \longrightarrow \quad \gamma = \sqrt{\frac{g}{l}}$

y como $\omega = \frac{d\theta}{dt}$:

$$\boxed{\omega = \theta_0 \gamma \left(-\sin(\gamma t)\right)}$$

5.2. Energías - Anexo 2

Trivialmente sabemos que la Energía Mecánica será la suma de la Energía Potencial y de la Energía Cinética. En el caso sin rozamiento, habrá una conservación de la Energía Mecánica, ya que no existirá ninguna energía disipatoria que la reduzca. Ese es el caso con rozamiento, donde el rozamiento irá poco a poco reduciendo nuestra energía mecánica total hasta llegar al punto donde no oscilará.

Energía Potencial

Sabiendo que la fórmula de la Energía Potencial es $E_p = -mgh$ y que la altura del péndulo en cada momento viene dada por $\cos(\theta)l$, obtenemos para la Energía Potencial de nuestro péndulo la ecuación:

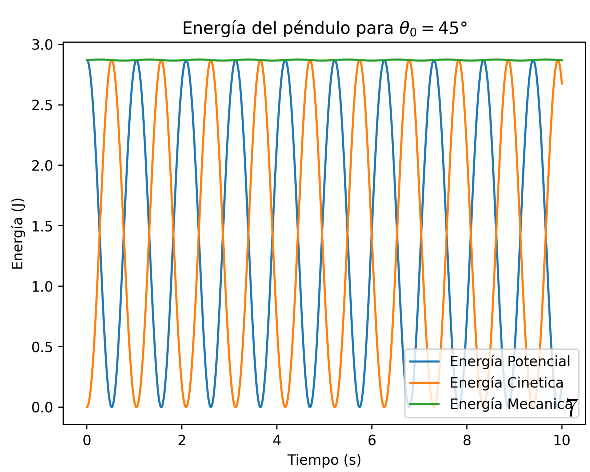
$$\boxed{E_p = -mgl\cos(\theta)}$$

Energía Cinética

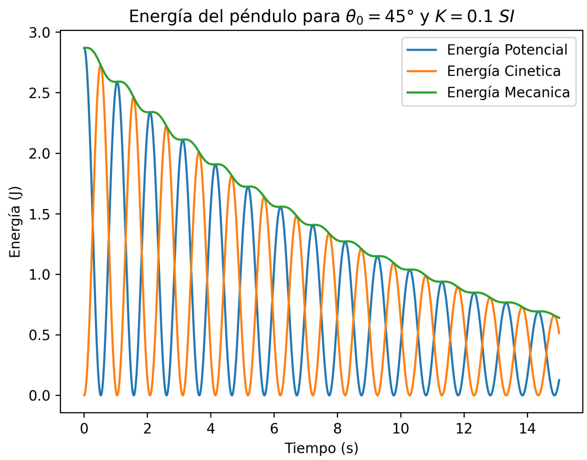
Sabiendo que la fórmula de la Energía Cinética es $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ y que la velocidad tangencial se relaciona con la angular con la fórmula $v = \omega r$, donde r será la longitud de la cuerda del péndulo l, obtenemos para la Energía Cinética de nuestro péndulo la ecuación

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2}$$

Gráficas



Esta es la gráfica de las energías del péndulo en función al tiempo para un péndulo soltado desde 45 grados. Esta gráfica ha sido calculada usando el método que no tiene en cuenta el rozamiento, lo cual refleja una conservación de la energía mecánica, que es constante.



Sin embargo en esta otra gráfica sí que se ha tenido en cuenta el rozamiento, y podemos comprobar como la energía cae rápidamente a lo largo del tiempo. Esto sucede ya que hemos incluido una fuerza disipatoria, la fuerza de rozamiento. Esto no quiere decir que la energía no se conserve, sino que la energía que en la gráfica anterior siempre estaba en el péndulo como cinética o potencial, ahora poco a poco va convirtiéndose en calor y disipándose al aire mientras roza con él.

Es interesante observar que el descenso de la energía mecánica no es una curva suave, si no que tiene una forma casi ondulatoria. Esto se debe a que la energía mecánica se disipará en mayor medida cuanto más rápido vaya el péndulo, es decir cuanto mayor sea la energía cinética. Cuando el péndulo alcanza uno de los extremos, la energía cinética será 0, y por tanto no habrá disipación. Es en estos instantes donde la energía mecánica será plana y no descenderá, lo que hace que observemos estos picos en la gráfica.

5.3. Código en python - Anexo 3

Python es una herramienta muy potente para hacer cálculos de este tipo.Por ejemplo nos permite obtener valores para la varianza de una forma mucho más fácil (una vez escrito el código necesario).

Aquí se encuentra un código fácilmente reutilizable para otros propósitos, que ajusta los errores de las medidas además de los valores a las cifras significativas de su respectivo error. No solo eso, sino que calcula la varianza y por tanto el error estadístico. Pidiendo el error de interacción y el del instrumento consigue dar un valor para el periodo con su error ajustado una vez se le ha introducido una columna con las medidas.

Para el caso de la gravedad, tiene programada la relación entre el periodo, la longitud del hilo y la aceleración gravitatoria, con lo que, dándole además del periodo calculado previamente, una longitud del hilo con su error, calcula la aceleración gravitatoria asociada a la columna de datos primeramente introducida.

Básicamente es un código que calcula todo lo realizado en esta práctica de una forma prácticamente instantánea. De aquí surgen las capturas de consola que han aparecido a lo largo del informe.

```python
from math import pi,sqrt
def cerror(err):
    cont = 0
    if err >= 1:
        while 10*(err-int(err)) == 0:
            err /= 10
            cont -= 1
        cont += 1
    else:
        while int(err) == 0:
            err *= 10
            cont += 1
        if int(err) == 1 and int((err-1)*10) != 0:
            cont += 1
    return cont

def normal_round(num, ndigits=0):
    if ndigits == 0:
        return int(num + 0.5)
    else:
        digit_value = 10 ** ndigits
        return int(num * digit_value + 0.5) / digit_value

def cifra(a):
    b = a
    cont = 0
    if a < 1:
        while int(a) == 0:
            a *= 10
            cont += 1
        if int(a) == 1 and int((a-int(a))*10) < 5:
            cont+=1
        return normal_round(b,cont)
    else:
        if a >= 100:
            a = int(a)
            while a > 1:
                a /= 10
                cont -= 1
            cont += 1
            if int(a*10) == 1 and int(((a*10)-int(a*10))*10) < 5:
                cont += 1
            return int(normal_round(b,cont))
```

```
        elif a >= 10:
            if (int(a)-int(10*(a/10-int(a/10))))/10 == 1 and int(a-10) < 4:
                cont = 0
            else:
                cont = -1
            return normal_round(b,cont)
        else:
            if int(a) - 1 == 0 and int((a-int(a))*10) < 5:
                cont = 1
            else:
                cont = 0
            return normal_round(b,cont)

def periodo():
    filas = int(input('Introduce el n mero de filas: '))
    print('Introduce una columna de excel con los datos:')
    result = ''
    for i in range(filas):
        result += input()+' '

    datos = list(map(float,result.replace(',','.').split()))
    error = float(input('Introduce el error de la medida (ajustado): '))
    sum,media = 0,0

    for i in range(len(datos)):
        media += datos[i]
    b = normal_round(media/len(datos),cerror(error))

    for i in range(len(datos)):
        sum += ((datos[i] - b)**2)/(len(datos)-1)

    ans = (sum)**(0.5)
    var = normal_round(ans,cerror(error))
    ErEsta = cifra(var/(len(datos))**0.5)
    #print('Varianza', var)
    #print('Media', b)
    #print('Error estad stico', ErEsta)
    ErInte = float(input('Introduce el error de interacci n (ajustado): '))
    ErInst = float(input('Introduce el error del instrumento (ajustado): '))
    ErTodo = ((ErEsta**(2))+(((ErInte/len(datos))**(2)+(ErInst/len(datos))**(2))**(0.5))**2)**(0.5)
    print('Valor final (Periodo): {} \xB1 {}'\
        .format(f"{normal_round(b,cerror(cifra(ErTodo))):.{cerror(cifra(ErTodo))}f}",cifra(ErTodo)),'s')

    return[f"{normal_round(b,cerror(cifra(ErTodo))):.{cerror(cifra(ErTodo))}f}" , cifra(ErTodo)]

ans = periodo()
T = float(ans[0])
errT = float(ans[1])

L =    float(input('Introduce la longitud (m): '))
errL = float(input('Introduce el error: '))

gravedad = L/((T/(2*pi))**(2))
error = sqrt((((4*(pi**(2)))/(T**(2)))**(2))*((errL)**2)+(((-8*(pi**(2))*L)/(T**(3)))**2)*((errT)**2))
```