Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tema I: Introducción a la teoría matemática de campos.

Electromagnetismo I

2º Curso Grado Física

Curso 2022-2023 (2º semestre)

Universidad de Alicante – Departamento de Física Aplicada

Índice

1. Introducción

Teoría de campos: conjunto de principios y técnicas matemáticas que permiten estudiar la dinámica y distribución espacial de los campos físicos

El **Análisis Vectorial** es una excelente herramienta matemática con la cual se expresan en forma más conveniente y se comprenden mejor muchos conceptos de la Física, en particular los conceptos de la teoría electromagnética.

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

Geometría*.* Trigonometría. Magnitudes escalares y vectoriales. Cálculo diferencial. Cálculo integral.

2. Campos escalares y vectoriales

Concepto general de Campo

Introducido por Michael Faraday en 1831 para explicar la acción a distancia de las fuerzas eléctricas, y por similitud la de las fuerzas gravitatorias y magnéticas.

Un campo representa, en física, la distribución espacial de una magnitud física que muestra una variación en una región del espacio.

La entidad causante de la interacción provoca efectos sobre el espacio que le rodea, permitiendo asignar a cada punto de dicho espacio un valor que dependerá de la magnitud del cuerpo que provoca la interacción y de la posición del punto que se considera

Campos estacionarios y no estacionarios
Campos uniformes y no uniformes
Escalares, vectoriales, tensoriales o espinoriales (según la forma Matemática del campo).

Campos escalares

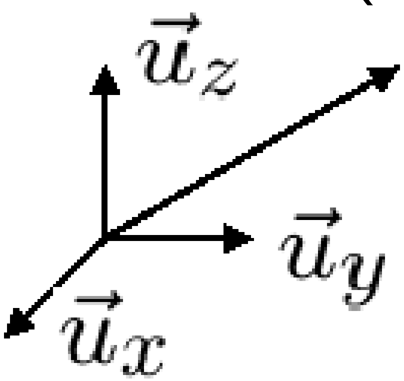
Función (de la posición y del tiempo) que, a cada punto de una región, y en un instante dado, asigna una **magnitud escalar**

** Si no hay dependencia temporal: Campo estacionario*
** Si no hay dependencia espacial: Campo uniforme*

Ejemplos (campos no uniformes y estacionarios):

- **Presión**, **densidad** o **temperatura** de cada punto de esta habitación (**3D**).

$$p(\vec{r}),\ \ \rho(\vec{r}),\ \ T(\vec{r})$$



$$\text{vector posición}\quad \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

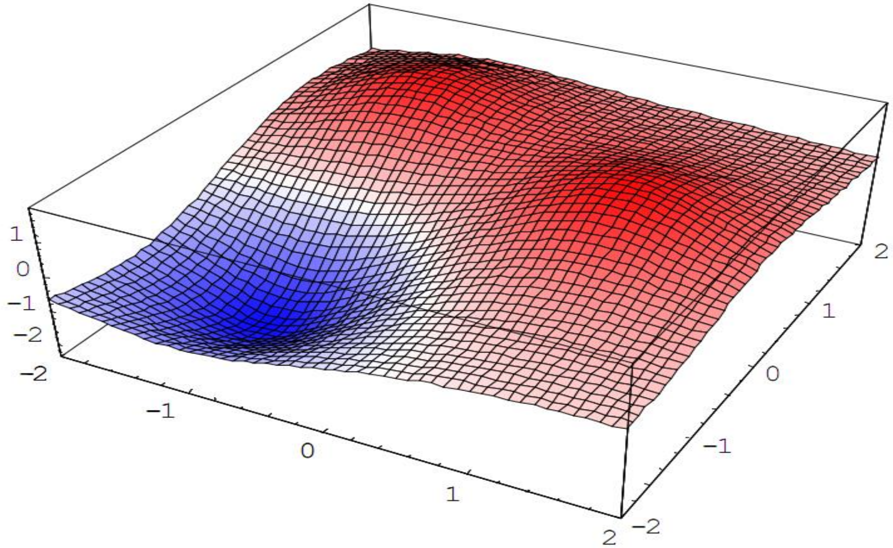
$$p(\vec{r}) = p(x, y, z)$$

- **Altitud** de los puntos de una región de la superficie terrestre (**2D**)

Representación de un campo escalar

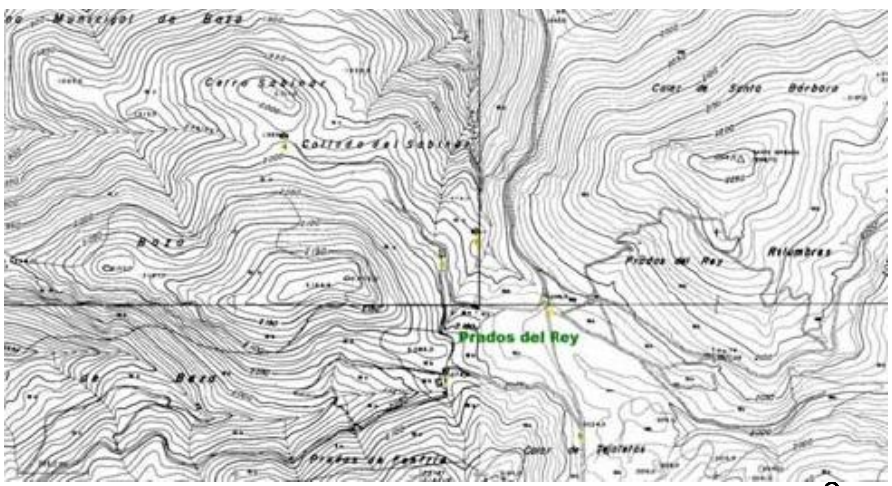
Dado un campo escalar, $\varphi(\vec{r})$, habrá determinados puntos en los que la magnitud tenga el mismo valor

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0$$



Si el campo escalar es en 3D, los puntos con el mismo valor forman una superficie equiescalar o isoescalar

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z) = \varphi_0$$



Si el campo escalar es en 2D, los puntos con el mismo valor forman una línea equiescalar o isoescalar

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y) = \varphi_0$$

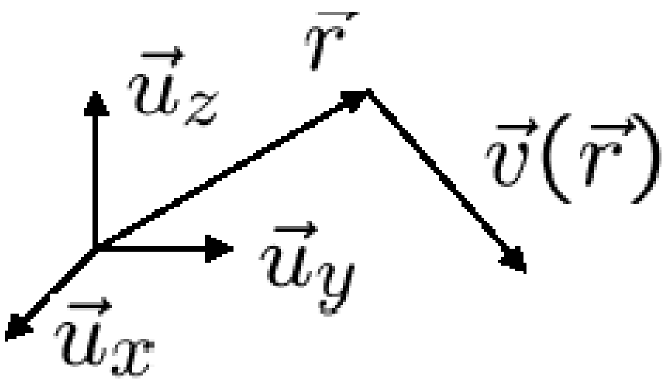
Campos vectoriales

Función de la posición y del tiempo, que a cada punto de una región y en un instante dado, asigna una magnitud vectorial

** Si no hay dependencia temporal: Campo estacionario*
** Si no hay dependencia espacial: Campo uniforme*

Ejemplos : (campos no uniformes y estacionarios):

- Velocidad del viento en cada punto (3D).



vector posición $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

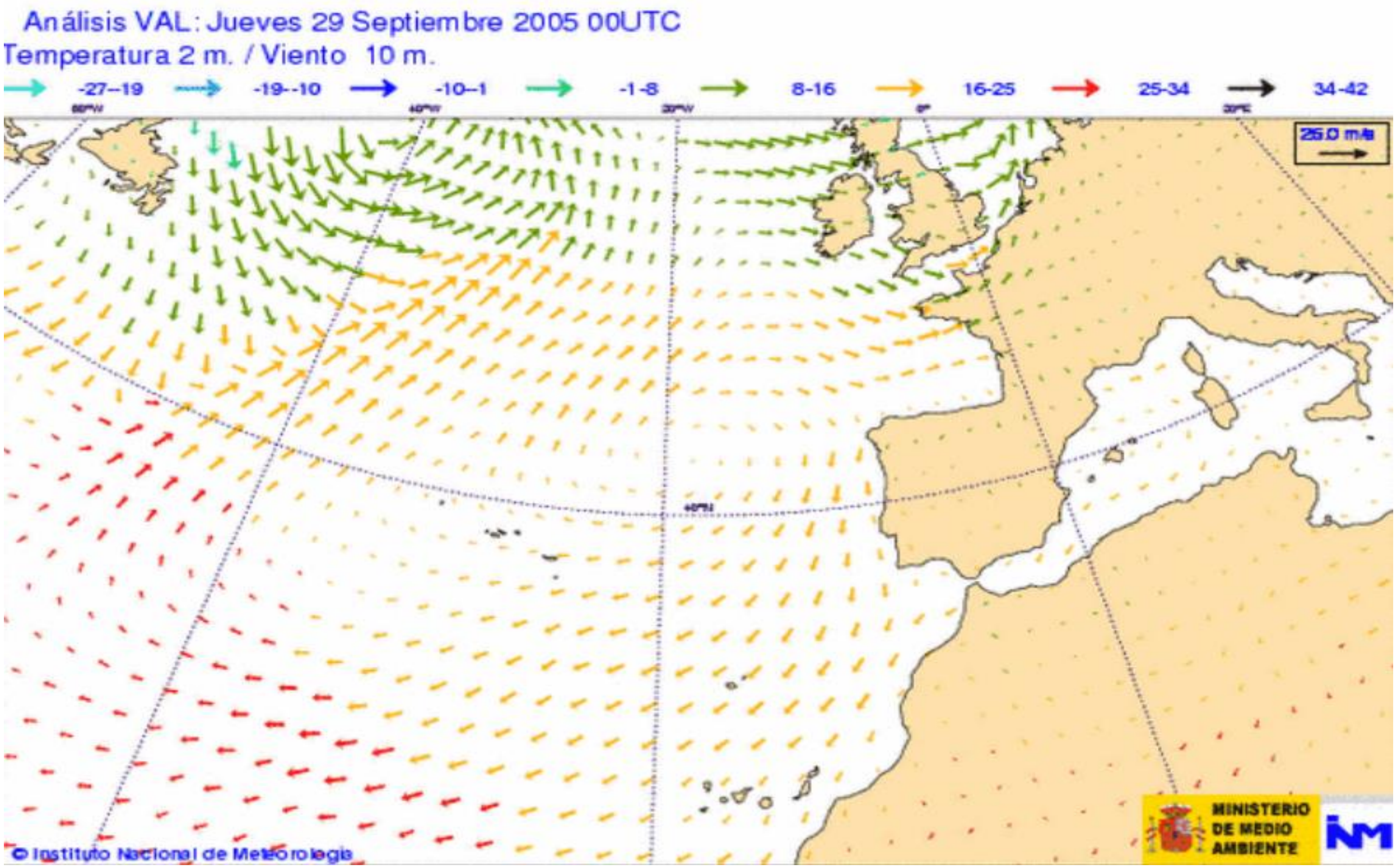
$$\vec{v}(\vec{r}) = v_x(x,y,z)\vec{u}_x + \\ + v_y(x,y,z)\vec{u}_y + \\ + v_z(x,y,z)\vec{u}_z$$

- Campo gravitatorio terrestre, campo eléctrico, campo magnético

Representación de un campo vectorial

Diagrama de flechas

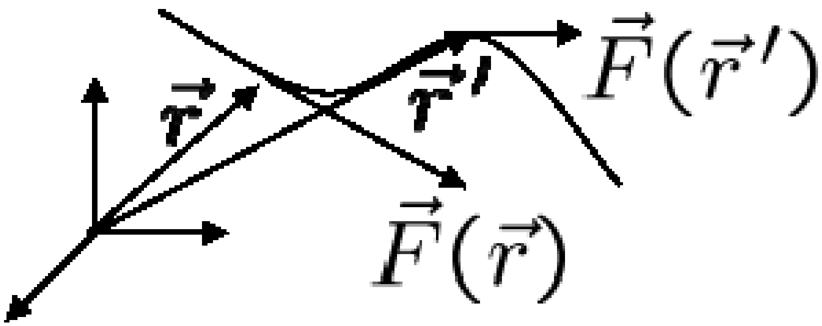
Evaluación del campo en una red equiespaciada de puntos

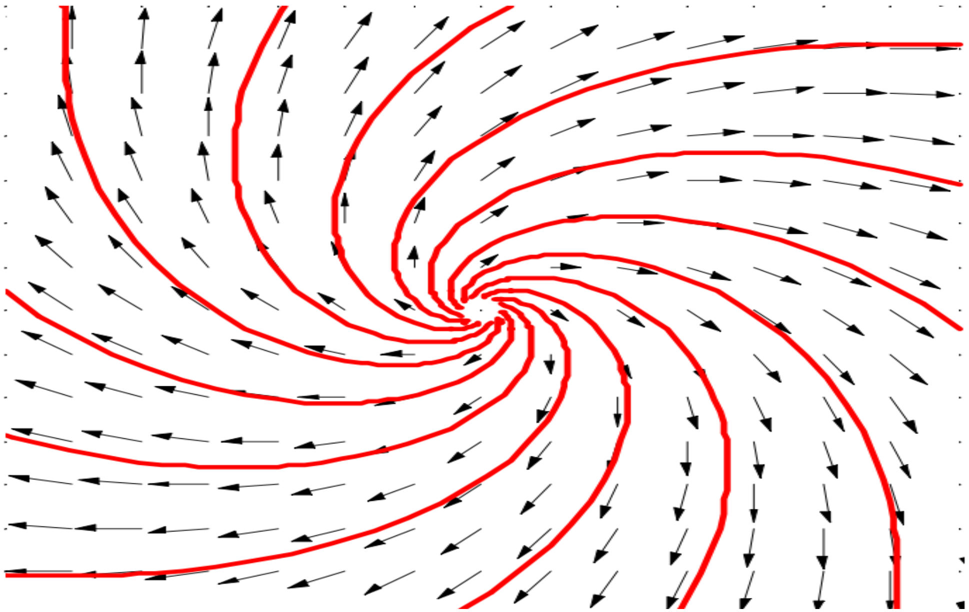


Representación de un campo vectorial

Líneas de campo

Línea cuya tangente en cada uno de sus puntos indica la dirección de la magnitud vectorial que define el campo

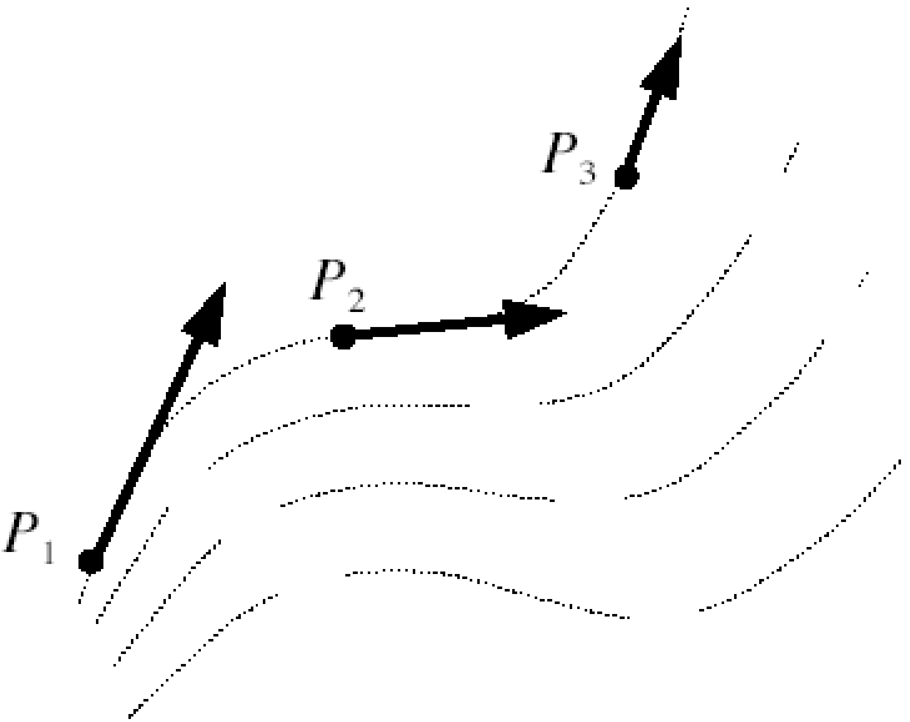




Las líneas del campo nunca se pueden cruzar (un punto con dos tangentes)

Representación de un campo vectorial

Líneas de campo



La densidad de líneas (número de líneas por unidad de área) es proporcional a la intensidad de la magnitud que define el campo.

Ejemplo de campo vectorial: Campo de fuerzas

¿Son distintas las interacciones entre cuerpos distantes y entre cuerpos en contacto? ¿Cómo es la interacción de cuerpos separados (tiempo y medio de propagación)?

Todas las interacciones que se producen entre cuerpos son a distancia, se producen de forma instantánea y no precisan de medio material para propagarse

¿Cómo un cuerpo puede actuar allí donde no está?

Aparece el concepto de ***campo de fuerzas***

Es una región del espacio tal que al situar un cuerpo en uno de sus puntos aparece sometido a una fuerza dada por

$$\vec{F} = A\vec{E}$$

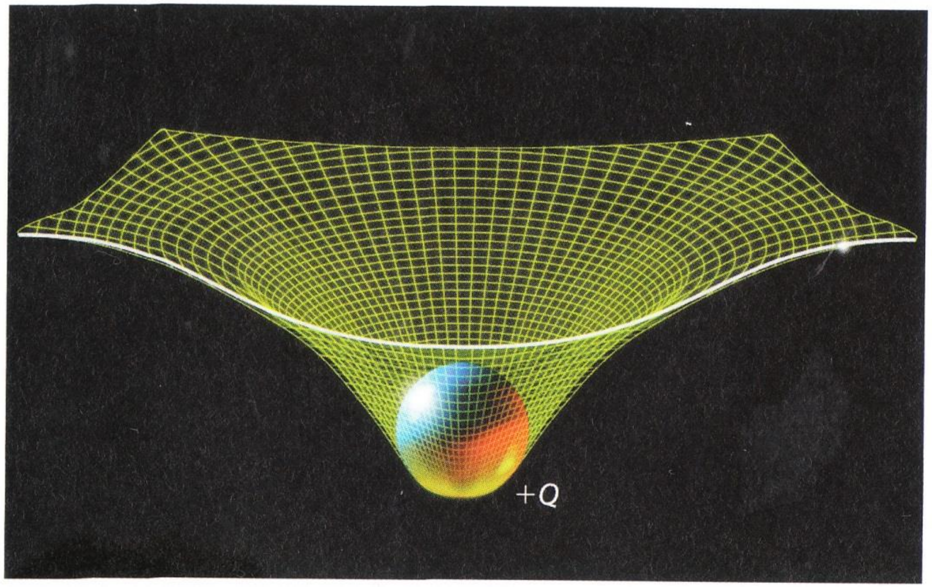
A : Magnitud activa (masa, carga,….) que hace que el cuerpo sea sensible a ese campo. Esta magnitud es la responsable de que el campo aparezca, debido a otro cuerpo que también posee esa magnitud y que es el creador del campo.

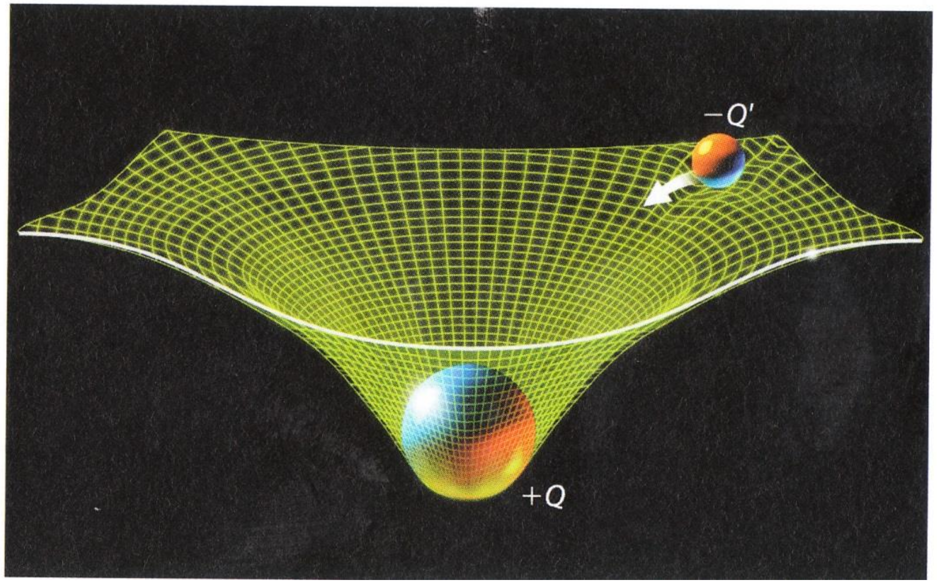
$\vec{E}$ *: Intensidad del campo*

Ejemplo: Campo eléctrico

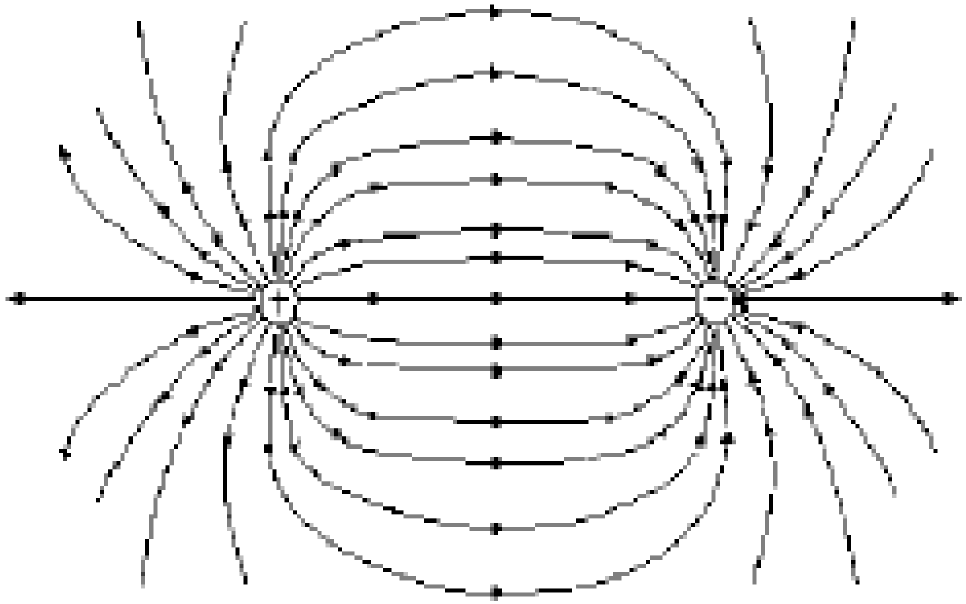
Una carga *Q* modifica de algún modo el espacio. A este espacio perturbado por la carga se llama campo eléctrico (vector *E*), y se considera que actúa sobre cualquier otra carga eléctrica, *q,* ejerciendo la fuerza electrostática sobre ella, según establece la ley de Coulomb.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$





Las líneas del campo pueden divergir (fuentes) o converger (sumideros). En estos puntos el campo no está definido (puntos singulares)



Campo eléctrico

3. Gradiente de un campo escalar.

CONCEPTO GENERAL DE OPERADOR GRADIENTE

El gradiente es un operador que opera sobre una función **ESCALAR** (por ej. la energía potencial gravitatoria, o electrostática) y la transforma en un **VECTOR**

Sea la función escalar, expresada en coordenadas cartesianas $\psi(x, y, z)$

$$grad\psi = \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\vec{k}$$

Siendo ∇ el operador Nabla la función escalar $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE:

-Es un vector perpendicular a las superficies equipotenciales

-La dirección del vector es la de máxima variación de la función

EJEMPLO 1: Calcular el gradiente de la función $\psi(x, y, z) = 3x + 2y^2 - \frac{1}{z}$

$$\vec{\nabla}\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\vec{k}\right) = 3\vec{i} + 4y\vec{j} + \frac{1}{z^2}\vec{k}$$

Ejemplo: La fuerza gravitatoria como gradiente de la energía potencial

CÁLCULO A PARTIR DE LA FUERZA GRAVITATORIA $\vec{F} = -G\dfrac{m\,M}{r^2}\vec{u}_r$

Se calcula el trabajo realizado por la fuerza ejercida sobre m (y creada por M) para mover m del punto A al B y usando el hecho de que si la fuerza es conservativa, el trabajo se puede expresar como diferencia de su energía potencial evaluada en punto inicial y final:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -G\frac{Mm}{r^2}\,dr\cos\vartheta = \left[G\frac{Mm}{r}\right]_A^B = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A} = E_P(A) - E_P(B)$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA:
Trabajo que cuesta traer la partícula *m* desde el infinito hasta un punto que se encuentra a una distancia r de la masa M creadora del campo (suponemos que la Ep = 0 en el infinito)

$$\boxed{E_p(r) = -G\frac{Mm}{r}}$$

Esta expresión verifica que:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_P = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-G\frac{Mm}{r}\right) = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$$

Relaciones fuerza-energía potencial e intensidad de campo-potencial

FUERZA
Magnitud vectorial

$$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{E}} = K\frac{qQ}{r^2}\vec{u}_r = q\left(K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_P}$$

ENERGÍA POTENCIAL
Magnitud ESCALAR

$$\boxed{E_p = qV} = K\frac{qQ}{r} = q\left(K\frac{Q}{r}\right)$$

MAGNITUDES QUE DESCRIBEN LA INTERACCIÓN DE UNA CARGA *q* CON EL CAMPO CREADO POR *Q*

INTENSIDAD de CAMPO
Magnitud vectorial

Se representa con líneas de campo

$$\boxed{\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V}$$

POTENCIAL
Magnitud ESCALAR

Se representa con superficies equipot.

$$\boxed{V = K\frac{G}{r}}$$

MAGNITUDES QUE DEFINEN EL CAMPO DE FUERZAS CREADO POR *Q*

4. Divergencia y Rotacional de un campo vectorial.

Sea un campo vectorial

$$\vec{A} = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k}$$

DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

La divergencia de un vector es un **ESCALAR** resultante del producto escalar del operador nabla y el vector.

$$\boxed{div\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot \left(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k} \right) = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

DEFINICIÓN

EXPRESIÓN DE LA DIVERGENCIA EN COORD. CARTESIANAS

Ejemplo: Sea el campo vectorial de la velocidad de un fluido.
La divergencia permite calcular la cantidad de fluido que atraviesa una determinada superficie por unidad de tiempo.

ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

El rotacional de un vector es un **VECTOR** resultante del producto vectorial del operador nabla y el vector.

$$\boxed{rot\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \times \left(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k} \right)}$$

$$rot\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \times \left(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right)\vec{k}$$

EXPRESIÓN DEL ROTACIONAL EN COORD. CARTESIANAS

RESUMEN SOBRE OPERADOR NABLA

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

$\psi(x, y, z)$ función escalar

$\vec{A} = A_1(x, y, z)\vec{i} + A_2(x, y, z)\vec{j} + A_3(x, y, z)\vec{k}$

función vectorial

1. $grad\psi = \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k}$ <u>Resultado</u>: Vector

2. $div\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$ <u>Resultado</u>: escalar (producto escalar)

3. $rot\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}\right)$ <u>Resultado</u>: vector (producto vectorial)

OPERADOR LAPLACIANO

$$\boxed{\Delta = div(grad\psi) = \nabla\cdot(\nabla\psi)}$$

<u>Resultado</u>: escalar

VARIOS ASPECTOS IMPORTANTES A CONSIDERAR

GRADIENTE:

-Definición general del gradiente (válida para cualquier tipo de coordenadas).

-Conceptos de superficies de nivel y líneas de gradiente.

FÓRMULAS VECTORIALES DE INTERÉS (Sección 1.19 libro). Se usarán a menudo a lo largo del curso.
Ecs (1-109) a (1-122)

FUNCIONES DE COORDENADAS RELATIVAS (Sección 1.20 libro)

La ecuación (1-143) del libro se utilizará varias veces en la asignatura

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

5. Tipos de coordenadas

La descripción del movimiento de un cuerpo requiere la introducción de un sistema de coordenadas espaciales que identifiquen unívocamente cada punto del espacio, y una coordenada temporal, la cual determina el orden cronológico de sucesos en cualquier punto del espacio.

A este conjunto de coordenadas espacio-temporal se denomina ***sistema de referencia.***

Sistemas de referencia

Un sistema de referencia viene dado por un punto de referencia denominado origen y un sistema de coordenadas. El origen de coordenadas es el punto de referencia de un sistema de coordenadas y en él el valor de todas las coordenadas del sistema es nulo.

Sobre cada uno de los ejes se definen vectores unitarios, denominados versores, que indican la dirección del eje.

Sistemas de coordenadas

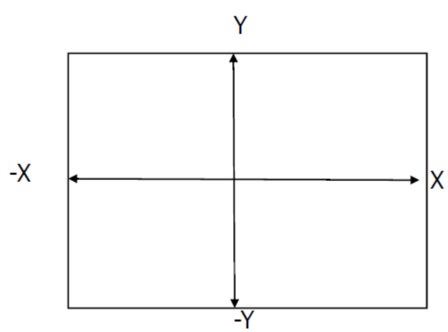
*Un **sistema de coordenadas** es un conjunto de valores y puntos que permiten definir unívocamente la posición de cualquier punto de un espacio euclídeo.*

*El primero que expresó la posición de un punto en el plano o en el espacio fue Descartes, por lo que se suele referir a ellas como **coordenadas cartesianas**.*

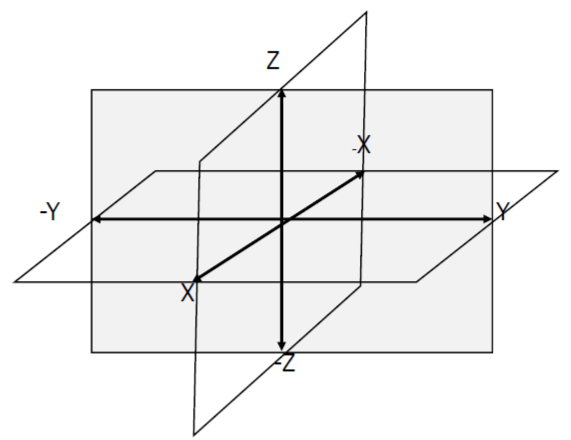
Para representar un punto en un plano, utilizó dos rectas perpendiculares entre sí, de forma que la posición del punto se determinaba midiendo sobre los ejes las distancias al punto.

Sistemas de coordenadas cartesianas

*Un sistema de **coordenadas cartesianas** se define por dos ejes ortogonales en un sistema bidimensional y tres ejes ortogonales en un sistema tridimensional, que se cortan en el origen O.*
Las coordenadas de un punto cualquiera vendrán dadas por las proyecciones del vector de posición del punto s



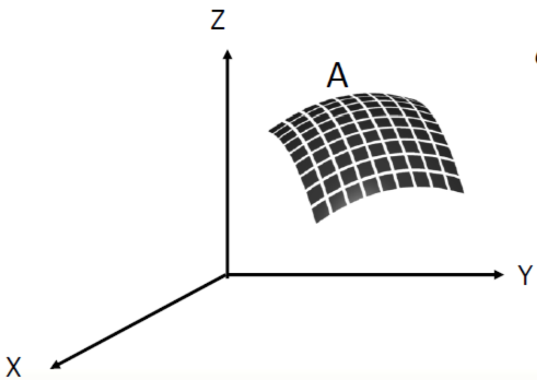
2D



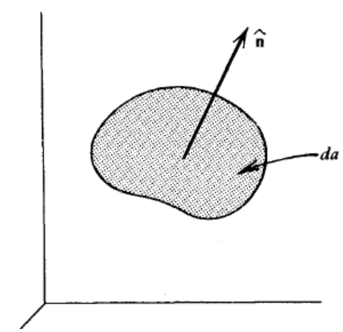
3D

Elemento diferencial (vectorial) de superficie

Dada la superficie A, seleccionamos un elemento diferencial de superficie.
El vector característico de la superficie (dA), tiene tres componentes, cada una de ellas dirigida sobre cada uno de los ejes.



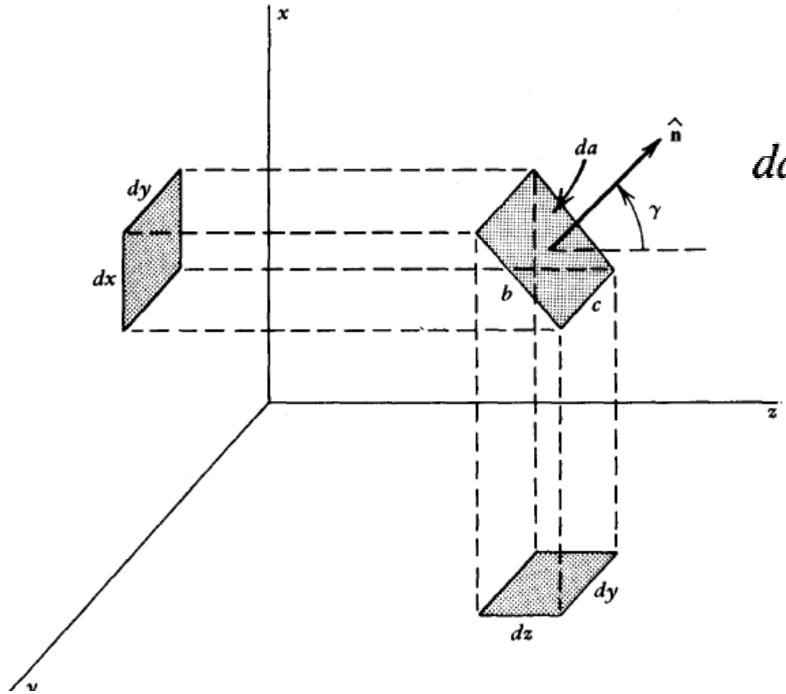
$$d\vec{A} = dA_x\vec{i} + dA_y\vec{j} + dA_z\vec{k}$$



NOTACIÓN EN LIBRO WANGSN $d\mathbf{a} = da_x\hat{\mathbf{x}} + da_y\hat{\mathbf{y}} + da_z\hat{\mathbf{z}}$

$d\mathbf{a} = da\,\hat{\mathbf{n}}$ ← Vector unitario normal a la superficie (convención para elegirlo: hacia fuera si es superficie cerrada; regla de mano derecha respecto al sentido de recorrer su perímetro si es superficie abierta)

Determinación de las componentes de un elemento diferencial (vectorial) de superficie



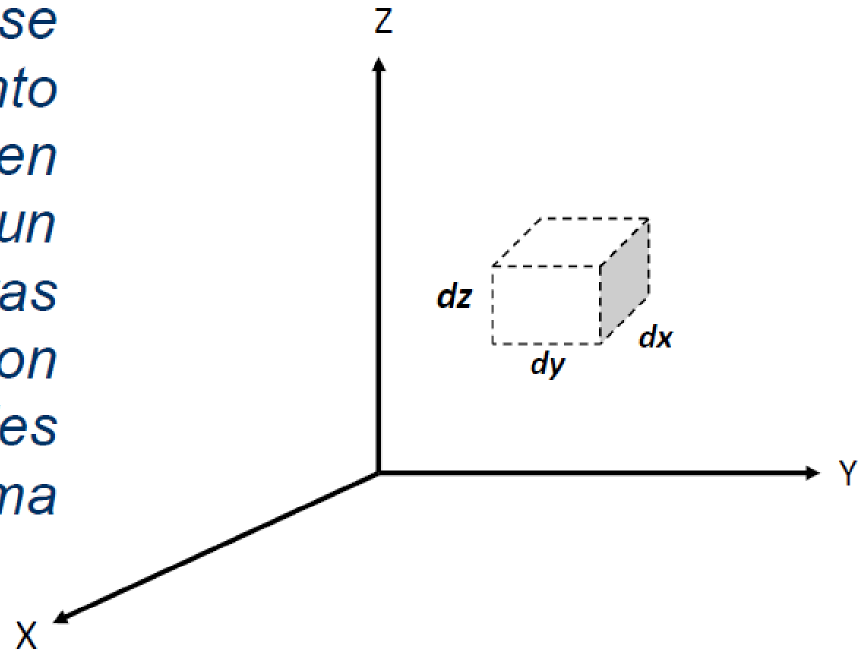
$$da_x = \pm\, dydz \qquad da_y = \pm\, dzdx \qquad da_z = \pm\, dxdy$$

Signo positivo si el vector normal forma con el eje correspondiente a esa Componente un ángulo menor de 90º

Los elementos diferenciales (vectores) de superficie se usarán para hacer integrales de superficie. Por ejemplo para calcular el flujo de un campo a través de una superficie cerrada (ley de Gauss). Por eso es muy importante saber escribirlos correctamente

Elemento diferencial de volumen

Dada un volumen V, se selecciona un elemento diferencial de volumen formado por un paralelepípedo cuyas aristas (dx, dy, dz) son paralelas a los ejes coordenados, de forma que



$dV = dx \cdot dy \cdot dz$

Vector diferencial de longitud

$$d\vec{s} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

¿Por qué son importantes los diferenciales de longitud, superficie y volumen?

*** Vectores DIFERENCIALES DE LONGITUD: necesarios para calcular INTEGRALES DE LÍNEA de campos vectoriales definidos a lo largo de curvas (=CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL)**

Ejemplo: trabajo de una fuerza a lo largo de una trayectoria dada).

*** Elementos DIFERENCIALES DE SUPERFICIE (vectores!!): necesarios para calcular INTEGRALES DE SUPERFICIE.**

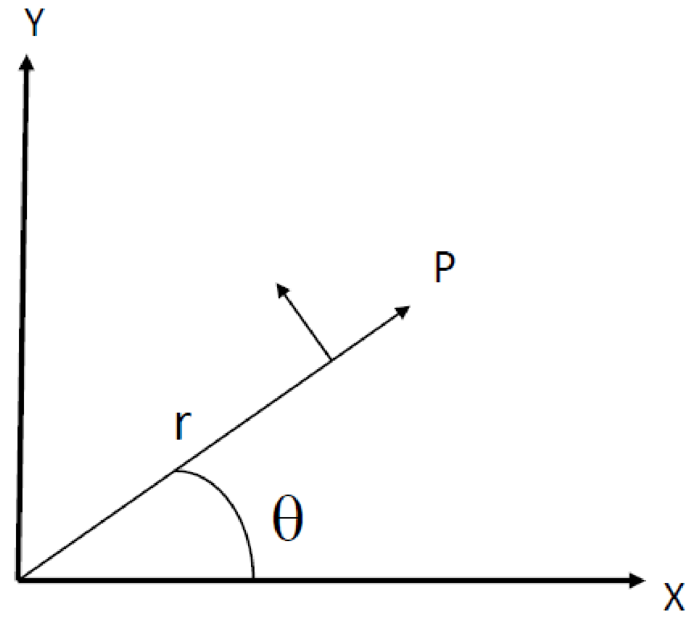
Ejemplo: flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada y usando la ley de Gauss obtener la expresión del campo eléctrico**.**

*** Elementos DIFERENCIALES DE VOLUMEN: necesarios para calcular INTEGRALES DE VOLUMEN.**

Ejemplo: integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial, útil por ser equivalente (ley de la divergencia) a calcular el flujo de ese campo a través de una superficie cerrada. Esto suele hacerse cuando la integral de volumen es más fácil de resolver que la de superficie.

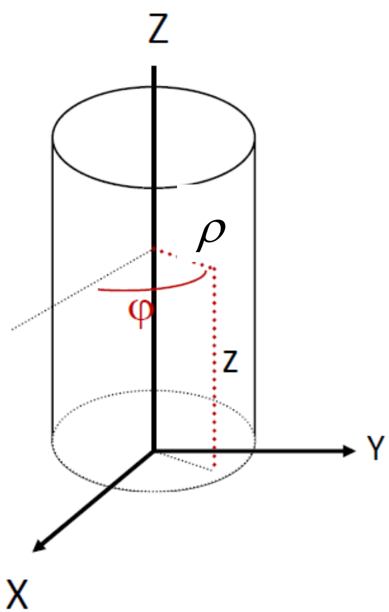
Sistemas de coordenadas polares (2D)

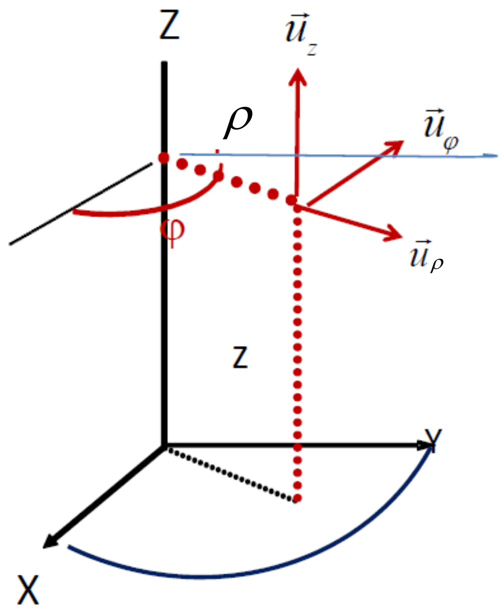
Para expresar la posición de un punto P en coordenadas polares (r,θ), se define un vector unitario $\vec{u}_r$ que indique la dirección de la línea radial que une el origen O y P, y un vector unitario $\vec{u}_\theta$ perpendicular a $\vec{u}_r$ orientado hacia valores crecientes de θ.



$$\vec{OP} = \vec{r} = r\vec{u}_r$$

Sistemas de coordenadas cilíndricas



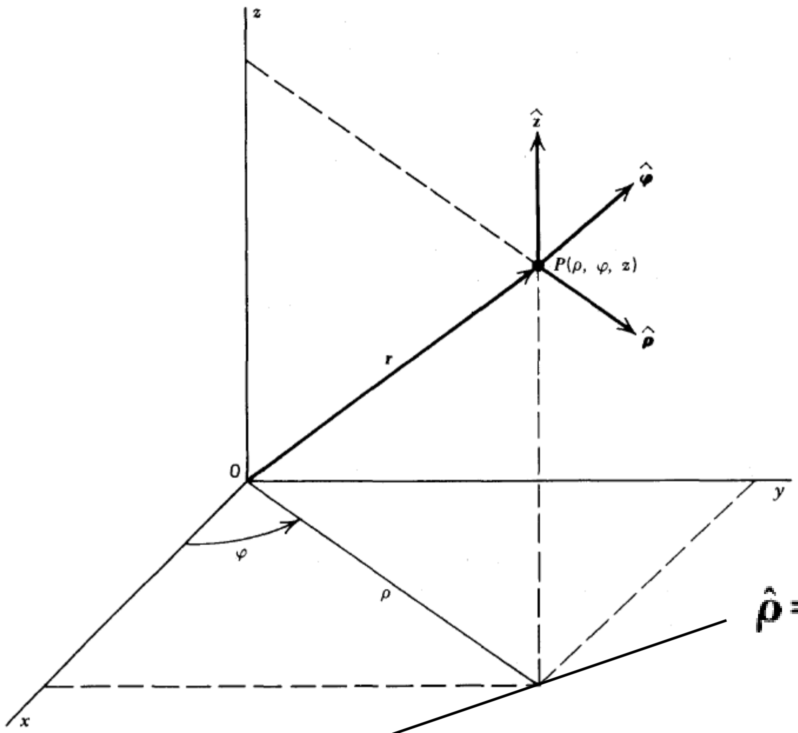


$$x = \rho\ \cos\varphi$$

$$y = \rho sen\varphi$$

$$z = z$$

Sistemas de coordenadas cilíndricas



NOTACIÓN DE WANGSNESS:

$$(\rho, \varphi, z)$$

Para pasar de cilíndricas a cartesianas

$$\boxed{x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad z = z}$$

Para pasar de cartesianas a cilíndricas

$$\boxed{\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}}$$

A partir del dibujo:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}}$$

Despejando de estas:

$$\hat{\mathbf{x}} = \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \hat{\mathbf{y}} = \mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Derivando en estas: **los vectores unitarios dependen del ángulo!!**

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{d\varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{d\varphi} = -\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Vector de posición **r** :

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

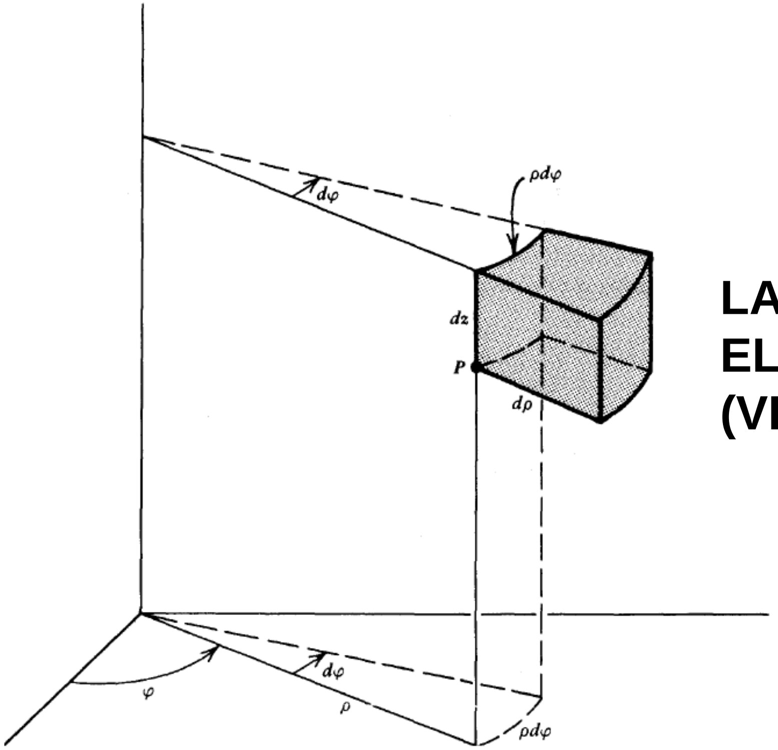
Vector diferencial de longitud *d***r** (= *d***s**) :

$$d\mathbf{r} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,d\hat{\boldsymbol{\rho}} + dz\,\hat{\mathbf{z}} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

Sistemas de coordenadas cilíndricas

NOTACIÓN DE WANGSNESS: (ρ, φ, z)

ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN: dV (o $d\tau$, notación Wangsness)



$$d\tau = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

LAS TRES COMPONENTES DEL ELEMENTO DIFERENCIAL (VECTORIAL) DE SUPERFICIE:

$$d\boldsymbol{a} = da_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + da_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + da_z \hat{\mathbf{z}}$$

$$\boxed{da_\rho = \pm \rho\, d\varphi\, dz} \qquad da_\varphi = \pm\, d\rho\, dz \qquad da_z = \pm \rho\, d\rho\, d\varphi$$

La que está contenida en la superficie curva del cilindro y con vector en dirección radial es la que más se utiliza en los problemas.

Gradiente, divergencia y rotacional en cilíndricas

OPERADOR NABLA

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN ESCALAR *u*

$$\nabla u = \hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial u}{\partial z}$$

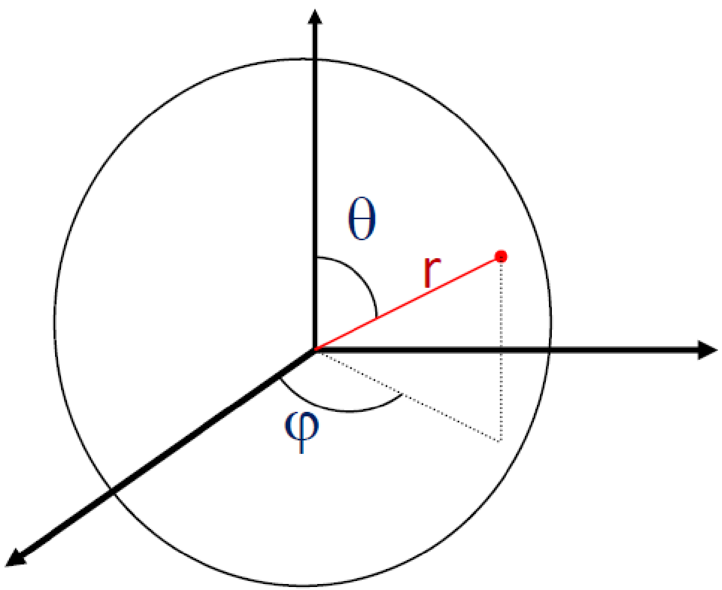
DIVERGENCIA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL **A**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ROTACIONAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL **A**

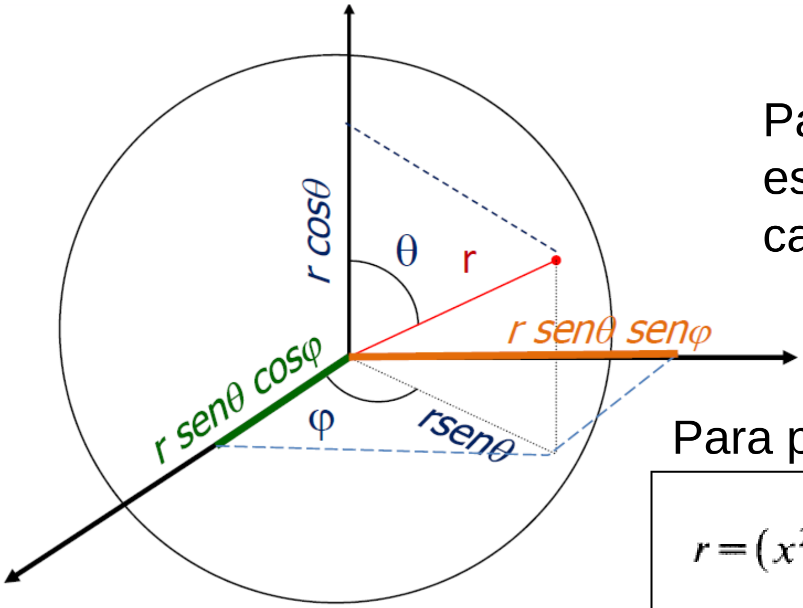
$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right]$$

Sistemas de coordenadas esféricas



El radio r ($0 \leq r \leq R$) es la distancia desde el origen de coordenadas al punto, es el ángulo que forma r con la vertical ($0 \leq \theta \leq \pi$) y φ es el ángulo que forma la proyección de r sobre el plano XY con el eje X ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Sistemas de coordenadas esféricas



Para pasar de esféricas a cartesianas

$$x = r sen\theta \cos\varphi$$

$$y = r sen\theta sen\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

Para pasar de cartesianas a esféricas

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \qquad \tan\theta = \frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{z} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

NOTACIÓN WANGSNESS:

Vectores unitarios: relaciones de transformación de coordenadas

$$\hat{\mathbf{r}} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{y}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

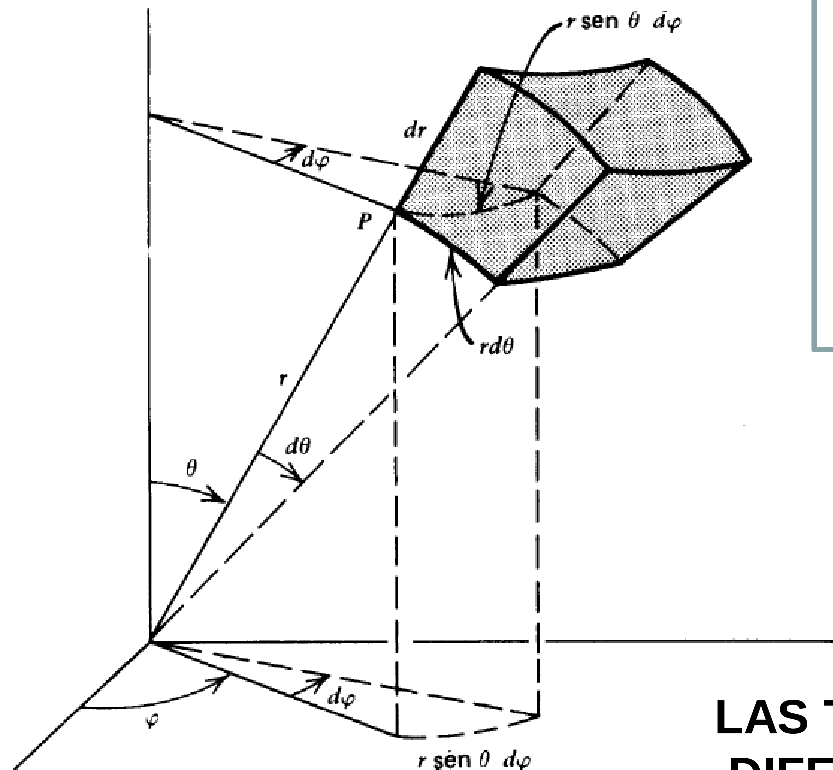
$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \operatorname{sen}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Sistemas de coordenadas esféricas



Vector de posición **r** :

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

Vector diferencial de longitud d**r** (= d**s**) :

$$d\mathbf{r} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN: *d*V (o *d*τ, notación Wangsness)

$$d\tau = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

LAS TRES COMPONENTES DEL ELEMENTOS DIFERENCIAL (VECTORIAL) DE SUPERFICIE:

$$\boxed{da_r = \pm\, r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi} \qquad da_\theta = \pm\, r\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\varphi \qquad da_\varphi = \pm\, r\,dr\,d\theta$$

La que es perpendicular a la dirección radial.
Es la que más se utiliza en los problemas.

Gradiente, divergencia y rotacional en esféricas

OPERADOR NABLA

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN ESCALAR *u*

$$\nabla u = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial u}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

DIVERGENCIA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL **A**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

ROTACIONAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL **A**

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left[\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\varphi\right)\right]$$

$$+ \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]$$

EXPRESIONES DEL GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

- En clase se obtendrá en detalle (pizarra) el gradiente y divergencia en coordenadas
  cilíndricas.
- Ver el resto en el libro y hacer alguno como ejercicio práctico en casa.

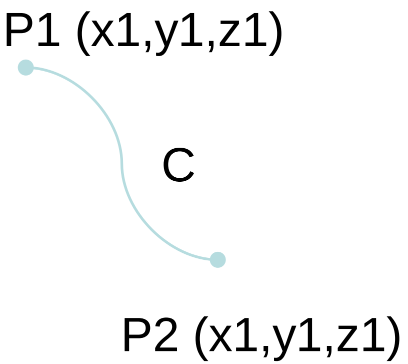
MUY IMPORTANTE!!! Las expresiones no se pueden obtener de la correspondiente a coordenadas cartesianas por mera sustitución de las coordenadas cartesianas (x,y,z) por las correspondientes en cilíndricas y esféricas, pues algunos vectores unitariosno son constantes respecto a la variación de algunas coordenadas.

6. Integrales de línea

Integral de línea de una función escalar:

Sea una función escalar definida en todos los puntos del espacio:

$$\Phi(x, y, z)$$



Supongamos la curva C entre dos puntos del espacio, P1 y P2.

$d\vec{s}$ Vector infinitesimal de arco. Su módulo es ds y su dirección tangente a la trayectoria en cada punto

La integral de línea de la función escalar a lo largo de la curva C será:

$$\gamma = \int_{P1}^{P2} \Phi(x, y, z) ds$$

$\vec{r}$ El vector que define la posición en cada punto de la curva C

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{s} = \dot{\vec{r}}dt; ds = \dot{r}dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt$$

$$\boxed{\gamma = \int_{P1}^{P2} \Phi[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt}$$

Definimos como vector tangente a curva

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\right|} = \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

CASO ESPECIAL: Integral de línea de una función vectorial definida a lo largo de una curva = CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea un campo vectorial $\vec{A} = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k}$

Definimos la circulación de este campo a lo largo de la curva C anterior como:

A_1

$$\boxed{\gamma = \int_{P1}^{P2} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{P1}^{P2} \vec{A} \cdot \vec{T} ds = \int_{P1}^{P2} \left(A_1 \dot{x} + A_2 \dot{y} + A_3 \dot{z} \right) dt}$$

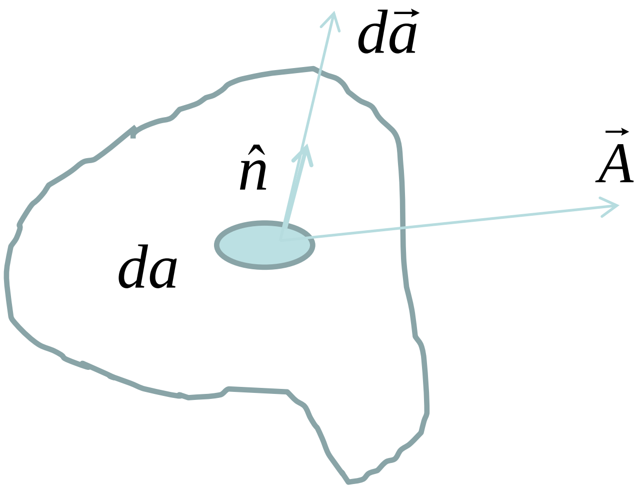
Si el campo vectorial es un campo de fuerzas conservativo y el punto final es el mismo que el inicial (trayectoria o curva cerrada), la integral es nula.

<u>Ejemplo de cálculo de circulación</u>: trabajo de una fuerza conservativa entre dos puntos (el campo vectorial sería la Fuerza, por ejemplo gravitatoria o electrostática).

6bis. Integrales de superficie

Integral de superficie de una función vectorial sobre una superficie = Flujo del vector a través de la superficie S

Sea un campo vectorial $\vec{A} = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k}$



La superficie se divide en elementos diferenciales de área *da* que lleva asociado un vector perpendicular a él: $d\vec{a}$

$$\boxed{\int_S \vec{A}\cdot d\vec{a} = \int_S \vec{A}\cdot \hat{n}\, da}$$

7. Teorema de la divergencia

$$\boxed{\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{a} = \int_V div\vec{A}dV = \int_V \left(\nabla\cdot\vec{A}\right)dV}$$

S es una superficie cerrada y ***V*** es el volumen contenido en su interior

dV = dx dy dz *dV:* elemento diferencia de volumen

<u>Significado físico de la divergencia de un campo vectorial generado dentro de un volumen V, envuelto por la superficie S</u>:

Cantidad de flujo generado por unidad de volumen cuando éste tiende a cero. Así, tiene relación con fuentes y sumideros de líneas de campo.

El primer miembro de la ecuación es una integral de superficie, siendo la superficie cerrada. El segundo miembro de la ecuación es una integral de volumen, siendo el volumen el contenido dentro de la superficie.
A veces es más sencillo hacer la integral de volumen que la de superficie.

El teorema de Gauss y el Teorema de la divergencia

Ley de Gauss

Relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada que contiene en su interior la fuente creadora del campo. Para el caso particular de que el campo vectorial sea el campo eléctrico

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{\text{dentro}} q_i = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}$$

La superficie S se elige de forma arbitraria para que contenga dentro las cargas de interés y para que la resolución de la Integral sea sencilla en base a la geometría del problema

Utilidad: Sirve para calcular de forma sencilla la intensidad de campo creada por una distribución continua de cargas (en el caso de que el campo sea eléctrico).

El primer miembro del T. del Gauss es el primer miembro del T. de La Divergencia.
Hay casos en los que hacer esta integral de superficie es complicado y puede ser más sencillo hacer la integral de volumen indicada en el segundo miembro del Teorema de la Divergencia.

7. Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_S (rot\vec{A})d\vec{a} = \int_S (\nabla \times \vec{A})d\vec{a}$$

C es una curva cerrada y S es la superficie contenida en dentro de la curva.

El primer miembro de la ecuación es una integral de línea, a lo largo de una curva Cerrada C. El segundo miembro de la ecuación es una integral de superficie, siendo la superficie S la encerrada dentro de C.
A veces es más sencillo hacer la segunda que la primera.

La ley de Ampere y el Teorema de Stokes

LEY DE AMPERE: Relaciona la circulación del **campo magnético** $\vec{B}$ a lo largo de una línea cerrada C, con la intensidad de corriente ***I*** que atraviesa la superficie limitada por dicha línea cerrada.

Si se divide la línea en elementos $d\vec{s}$, la circulación del campo magnético a lo largo de C será la suma extendida a lo largo de dicha línea de los productos $\vec{B} \cdot d\vec{s}$. La ley de Ampere relaciona el campo magnético con la corriente que lo produce.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \, I_C$$

La curva C se elige de forma arbitraria para que contenga dentro las corrientes de interés y para que la resolución de la integral sea sencilla en base a la geometría del problema

El primer miembro de la Ley de Ampere es el primer miembro del Teorema de Stokes. Hay casos en los que hacer esta integral de línea es complicado y puede ser más sencillo hacer la integral de superficie indicada en el segundo miembro del Teorema de Stokes.