Tema 5

Teoría de Hamilton-Jacobi

5.1. Introducción

Hemos visto cómo la evolución de un sistema hamiltoniano entre dos instantes de tiempo t_0 y t se puede interpretar como una transformación canónica que nos pasa de las coordenadas y momentos en t_0, $\underline{q}^{(0)}$ y $\underline{p}^{(0)}$ a las coordenadas y momentos en t, $\underline{q}$ y $\underline{p}$. Además, el generador infinitesimal de esta transformación es la hamiltoniana del sistema y el parámetro infinitesimal es dt. La inversa de esta transformación canónica nos llevaría de las coordenadas $\underline{q}$ y $\underline{p}$ en t a las coordenadas $\underline{q}^{(0)}$ y $\underline{p}^{(0)}$ en t_0. Pero éstas son constantes, y la hamiltoniana también debe serlo. Si pudiéramos obtener la función generadora de esta transformación habríamos resuelto el problema ya que esta función nos daría la relación entre las coordenadas $\underline{q}$ y $\underline{p}$ en t y las condiciones iniciales $\underline{q}^{(0)}$ y $\underline{p}^{(0)}$ con t como parámetro.

Encontrar esta función generadora es el objeto de este tema y, como veremos, conlleva la resolución de la llamada ecuación de Hamilton-Jacobi.

5.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Busquemos una transformación canónica que pase de $\underline{q}$ y $\underline{p}$ a $\underline{Q}$ y $\underline{P}$ de manera que la nueva hamiltoniana K sea cero. Como H y K se relacionan por la ecuación

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{5.1}$$

tendremos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0, \tag{5.2}$$

o bien

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) = 0. \tag{5.3}$$

Si tomamos F como una función de tipo F_1 o F_2, $F_2(\underline{q}, \underline{P}, t)$ y, recordando que

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \tag{5.4}$$

podemos escribir la ecuación

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t\right) = 0. \tag{5.5}$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de ecuación de Hamilton-Jacobi y es una ecuación en derivadas parciales, con $n+1$ variables $q_1, \ldots, q_n$, t y, en general, no lineal. Denotaremos F_2 como S y la llamaremos función principal de Hamilton. Se tiene entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0. \tag{5.6}$$

La teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden con $n+1$ variables nos dice que la ecuación general dependerá de una función arbitraria (problema de Cauchy). Sin embargo, fue Jacobi quien concluyó que no era necesario obtener la solución general de la ecuación de Hamilton-Jacobi para obtener el movimiento, sino sólo conocer lo que se denomina integral completa (o solución completa), que es una solución de la ecuación que depende de $n+1$ constantes arbitrarias independientes. Una de esas constantes es aditiva ya que si S es solución $S + \text{cte.}$ también lo es porque sólo aparecen derivadas de S. Se tiene entonces que la solución completa que buscamos dependerá de n constantes arbitrarias independientes. Si a estas constantes las denotamos por $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, se tendrá la función $S = S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$ y debemos exigir que

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i}\right) \neq 0. \tag{5.7}$$

Como los momentos $\underline{P}$ son constantes y $S = S(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n, t)$, podemos tomar $\alpha_i = P_i$ y, teniendo en cuenta que $\underline{Q}$ también son constantes,

$$Q_i \equiv \beta_i = \frac{\partial S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)}{\partial \alpha_i} = \text{cte.} \tag{5.8}$$

Si de estas ecuaciones despejamos q_i obtendremos la solución que nos da el movimiento del sistema

$$q_i = q_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, t), \tag{5.9}$$

y para despejar debemos tener que

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i}\right) \neq 0, \tag{5.10}$$

que está garantizado al ser S solución completa: n constantes independientes.

Las constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ se determinan a partir de las condiciones iniciales: $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ en t_0 nos dará las constantes αs y $\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ en t_0 nos dará las constantes βs.

Observemos que la función S tiene la siguiente derivada respecto al tiempo

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i\,\dot{q}_i = L, \tag{5.11}$$

con lo que la función generadora de esta transformación es

$$S = \int L\,\mathrm{d}t \tag{5.12}$$

que se corresponde con la acción.

La ecuación de Hamilton-Jacobi conduce a las ecuaciones de Hamilton

A partir de la ecuación de H-J

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0, \tag{5.13}$$

donde $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, $Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$, derivando la ecuación de H-J respecto a P_i (manteniendo $\underline{q}$ constantes).

$$\frac{\partial}{\partial P_i}\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial P_i \partial q_j} = 0. \tag{5.14}$$

Como $\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial S}{\partial P_i} = 0$ se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial P_i} + \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^2 S}{\partial P_i \partial q_j} = 0, \tag{5.15}$$

con lo que

$$\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial P_i \partial q_j}\left(-\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \forall j. \tag{5.16}$$

De forma análoga, pero derivando respecto a P_i, se llega a

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \forall j. \tag{5.17}$$

Veamos algunos ejemplos del uso de la ecuación de H-J.

5.2.1. Partícula libre con un grado de libertad

A partir de la hamiltoniana $H = p^2/2m$, la ecuación de H-J es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 0. \tag{5.18}$$

Vamos a mostrar dos soluciones completas de esta ecuación.

Primera solución

$$S = \frac{m(q-\alpha_1)^2}{2t} \tag{5.19}$$

es solución completa ya que cumple la ecuación,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{m(q-\alpha_1)^2}{2t^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{m(q-\alpha_1)}{t}, \tag{5.20}$$

luego es solución que depende de una constante, α_1.

Las ecuaciones de transformación son

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad p = m\frac{q-\alpha_1}{t} \\ \beta &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} \quad \Rightarrow \quad \beta = -m\frac{q-\alpha_1}{t} = -p, \end{aligned} \tag{5.21}$$

luego el movimiento es

$$q(t) = \alpha_1 - \frac{\beta}{m}t, \quad p = -\beta. \tag{5.22}$$

En este caso la constante α_1 es la posición en $t = 0$ y $-\beta$ es el momento.

Segunda solución

$$S = q\sqrt{2m\,\alpha_2} - \alpha_2\, t \tag{5.23}$$

es solución completa ya que cumple la ecuación,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_2; \quad \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2m\,\alpha_2}, \tag{5.24}$$

luego es solución que depende de una constante, α_2. Las ecuaciones de transformación son

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2m\,\alpha_2} \\ \beta &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} \quad \Rightarrow \quad \beta = q\frac{m}{\sqrt{2m\,\alpha_2}} - t, \end{aligned} \tag{5.25}$$

luego el movimiento es

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}(t+\beta), \quad p = -\sqrt{2m\,\alpha_2}. \tag{5.26}$$

En este caso la constante α_2 es la energía y $\sqrt{2\alpha_2/m}\beta$ es la posición en $t = 0$.

5.2.2. Oscilador armónico simple

La hamiltoniana es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k\,q^2, \tag{5.27}$$

y la ecuación de H-J

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = 0. \tag{5.28}$$

Proponemos una solución de la forma $S = T(t) + W(q)$, con lo que

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha, \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = \alpha. \tag{5.29}$$

De aquí obtenemos que

$$T = -\alpha\,t \tag{5.30}$$

y

$$W = \sqrt{2m}\int\sqrt{\alpha - \frac{k}{2}q^2}\,\mathrm{d}q, \tag{5.31}$$

es decir,

$$S = -\alpha\,t + \sqrt{2m}\int\sqrt{\alpha - \frac{k}{2}q^2}\,\mathrm{d}q. \tag{5.32}$$

Las ecuaciones de transformación son

$$\begin{aligned} p = \frac{\partial S}{\partial q} &= \sqrt{2m}\sqrt{\alpha - \frac{k}{2}q^2} \\ \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= -t + \int \frac{1}{2\sqrt{\alpha - \frac{k}{2}q^2}}\,\mathrm{d}q = \\ &= -t - \sqrt{\frac{m}{k}}\arccos\left(\sqrt{\frac{k}{2\alpha}}q\right). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Despejando q de esta última ecuación obtenemos el movimiento

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t+\beta)\right). \tag{5.34}$$

Si definimos $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \cos\left(\omega(t+\beta)\right). \tag{5.35}$$

La constante α resulta ser la energía ya que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha = -H, \tag{5.36}$$

y, en este caso, $H = E$. La función $S(\underline{q}, \underline{P}, t)$ es la función generatriz que nos permite pasar de las coordenada q y momento p a la coordenada β y momento $P = E$, que son constantes ya que la nueva hamiltoniana K es idénticamente nula.

5.2.3. Partícula en un campo gravitatorio constante (caso 1D).

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\,g\,z. \tag{5.37}$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi en este caso es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + m\,g\,z = 0, \tag{5.38}$$

buscamos una solución de la forma (separación de variables)

$$\begin{aligned} S = T(t) + W(z) \quad &\Rightarrow \\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)^2 + m\,g\,z &= 0. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Como cada sumando depende de variables diferentes, para que se anule debemos tener

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -\alpha \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)^2 + m\,g\,z &= \alpha \end{aligned} \tag{5.40}$$

Resolviendo estas ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} T &= -\alpha\, t \\ W &= \int \sqrt{2m(\alpha - m\,g\,z)}\, \mathrm{d}z = -\sqrt{\frac{8}{9m}}\frac{(\alpha - m\,g\,z)^{3/2}}{g}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

La función S es

$$S = -\alpha\, t \sqrt{\frac{8}{9m}}\frac{(\alpha - m\, g\, z)^{3/2}}{g}, \tag{5.42}$$

y las ecuaciones de transformación son

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2m(\alpha - m\, g\, z)}, \\ \beta &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\sqrt{\frac{2}{m}}\frac{\sqrt{\alpha - m\, g\, z}}{g}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Despejando z obtenemos el movimiento,

$$z(t) = \frac{\alpha}{m\, g} - \frac{1}{2} g (t + \beta)^2. \tag{5.44}$$

Las constantes α y beta se determinan a partir de las condiciones iniciales (en $t = 0$),

$$\begin{aligned} z(0) \equiv z_0 &= \frac{\alpha}{m\, g} - \frac{1}{2} g\, \beta^2 \\ p(0) \equiv p_0 &= m\, g\, \beta, \end{aligned} \tag{5.45}$$

con lo que

$$\alpha = m\, g\, z_0 + \frac{p_0^2}{2m}, \tag{5.46}$$

y α resulta ser la energía.

5.2.4. Partícula en un campo gravitatorio constante (caso 3D).

Usando coordenadas cartesianas se tiene que

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + m\, g\, z. \tag{5.47}$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi en este caso es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + m\, g\, z = 0, \tag{5.48}$$

buscamos una solución de la forma (separación de variables)

$$S = W_1(x) + W_2(y) + W_3(z) + T(t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}z}\right)^2\right] + m\, g\, z = 0. \tag{5.49}$$

Como cada sumando depende de variables diferentes , para que se anule debemos tener

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -\alpha \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}x}\right)^2 &= \alpha_1 \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}y}\right)^2 &= \alpha_2 \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}z}\right)^2 + m\,g\,z &= \alpha_3 \end{aligned} \tag{5.50}$$

con $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$. Resolviendo estas ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} T &= -\alpha\, t = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\, t \\ W_1 &= \sqrt{2m\,\alpha_1}x \\ W_2 &= \sqrt{2m\,\alpha_2}y \\ W_3 &= -\sqrt{\frac{8}{9m\,g^2}}(\alpha_3 - m\,g\,z)^{3/2}. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Las constantes β_1, β_2, β_3 vienen dadas por

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \sqrt{\frac{m}{2\alpha_1}}x - t \\ \beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \sqrt{\frac{m}{2\alpha_2}}y - t \\ \beta_3 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -\sqrt{\frac{2(\alpha_3 - m\,g\,z)}{m\,g^2}} - t. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Si invertimos despejando x, y, z,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m}}(\beta_1 + t) \\ y &= \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}(\beta_2 + t) \\ z &= \frac{\alpha_3}{m\,g} - \frac{g}{2}(\beta_3 + t)^2. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Los momentos vienen dados por

$$
\begin{aligned}
p_x = \frac{\partial S}{\partial x} &= \sqrt{2m\,\alpha_1} \\
p_y = \frac{\partial S}{\partial y} &= \sqrt{2m\,\alpha_2} \\
z = \frac{\partial S}{\partial z} &= \sqrt{2m(\alpha_3 - m\,g\,z)}.
\end{aligned}
\tag{5.54}
$$

Las constantes αs y βs se determinan a partir de las condiciones iniciales para las posiciones y momentos. La constante α resulta ser la energía

$$
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + m\,g\,z,
\tag{5.55}
$$

y podemos escribir el movimiento, en función de las condiciones iniciales en $t = 0$, como

$$
\begin{aligned}
x &= x(0) + \frac{p_x(0)}{m} t \\
y &= y(0) + \frac{p_y(0)}{m} t \\
z &= z(0) + \frac{p_z(0)}{m}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2.
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

5.3. Función característica de Hamilton

Los ejemplos que hemos visto se han podido resolver fácilmente debido a que la hamiltoniana original no dependía explícitamente del tiempo. Esto conduce a que la función principal de Hamilton, S, se pueda escribir como

$$
S = -E\,t + W(\underline{q}, \underline{\alpha}),
\tag{5.57}
$$

donde E es la energía y W es una función que depende de n constantes y entre E y esas constantes $\underline{\alpha}$ existe una relación funcional ya que S debe depender sólo de n constantes independientes. Al sustituir S en la ecuación de H-J obtenemos

$$
H\left(\underline{q}, \frac{\partial W}{\partial \underline{q}}\right) = E.
\tag{5.58}
$$

que se llama ecuación de H-J independiente del tiempo y la solución $W(\underline{q}, \underline{\alpha})$ se denomina función característica de Hamilton. Las ecuaciones de transformación serán

$$\begin{aligned} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} &= \frac{\partial W}{\partial q_i} \\ \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} &= -\frac{\partial E}{\partial \alpha_i}\, t + \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}. \end{aligned} \tag{5.59}$$

La relación entre E y $\underline{\alpha}$ se puede elegir e manera arbitraria. Una posible elección es $E = \sum \alpha_i$, con lo que

$$\beta_i = -t + \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}, \tag{5.60}$$

y es lo que se hizo en el caso de una partícula en un campo gravitatorio constante en 3D. Estas n ecuaciones, conocida W, describen el movimiento del sistema en forma paramétrica, con t como parámetro.

Otra elección podría ser $E = \alpha_1$ con lo que se tendría

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -t + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, && \text{movimiento} \\ \beta_i &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}, \quad i = 2, \ldots, n, && \text{trayectoria}. \end{aligned} \tag{5.61}$$

Se propone como ejercicio aplicarlo al caso de una partícula en un campo gravitatorio constante en 3D.

5.4. Separación de variables

El método de H-J es epecialmente útil cuando es posible separar las variables de la ecuación de H-J ya que, en ese caso, la solución se reduce siempre a cuadraturas. Es el caso de los ejemplos que hemos visto hasta ahora. Consideraremos sólo aquellos casos en los que la hamiltoniana es una constante del movimiento. Así, $S = -E\,t + W$, y la función característica de Hamilton cumple la ecuación

$$H\left(\underline{q}, \frac{\partial W}{\partial \underline{q}}\right) = E. \tag{5.62}$$

Si el sistema es *completamente separable* podremos escribir la solución de la forma

$$W = \sum W_i(q_i, \underline{\alpha}), \tag{5.63}$$

y convertir la ecuación de H-J independiente del tiempo en n ecuaciones del tipo

$$H_i\left(q_i, \frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}q_i, \underline{\alpha}}\right) = \alpha_i, \tag{5.64}$$

formando un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas ya que en cada ecuación sólo aparece una de las variables. Para integrarlo basta despejar $\mathrm{d}W_i/\mathrm{d}q_i$, con lo que se integra por cuadraturas.

Veamos, como ejemplo de aplicación del método, el caso de una partícula en un potencial central. El movimiento es plano, y tomando coordenadas polares, la hamiltoniana es

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) + U(r). \tag{5.65}$$

La ecuación para la función característica es

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2\right] + U(r) = E. \tag{5.66}$$

Tomando $W = W_r(r) + W_\phi(\phi)$,

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}W_\phi}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\right] + U(r) = E \Rightarrow \\
r^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 + 2m\,U(r)\right] - 2m\,r^2\,E + \left(\frac{\mathrm{d}W_\phi}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = 0 \Rightarrow \\
\left(\frac{\mathrm{d}W_\phi}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = \alpha_\phi^2, \qquad r^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 + 2m\,U(r)\right] - 2m\,r^2\,E = -\alpha_\phi^2. \quad (5.67)
\end{gathered}$$

Estas dos últimas ecuaciones son de la forma

$$H_\phi\left(\phi, \frac{\mathrm{d}W_\phi}{\mathrm{d}\phi}\right) = \alpha_\phi^2, \qquad H_r\left(r, \frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r}\right) = E. \tag{5.68}$$

Las soluciones son

$$\begin{aligned}
W_\phi &= \alpha_\phi\,\phi, \\
W_r &= \int\sqrt{2m\,(E - U(r)) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r \qquad (5.69)
\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} W &= \int \sqrt{2m\,(E-U(r)) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r + \alpha_\phi\,\phi \Rightarrow \\ S &= -E\,t + \int \sqrt{2m\,(E-U(r)) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r + \alpha_\phi\,\phi. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Se tendrá entonces

$$\begin{aligned} p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r} &= \sqrt{2m\,(E-U(r)) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}} \\ p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{\mathrm{d}W_\phi}{\mathrm{d}\phi} &= \alpha_\phi \\ \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial E} &= \int \frac{m}{\sqrt{2m\,(E-U(r)) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}}\,\mathrm{d}r - t \\ \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\phi} &= \int \frac{\alpha_\phi}{r^2\sqrt{2m\,(E-U(r)) - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}}\,\mathrm{d}r + \phi. \end{aligned} \tag{5.71}$$

Como vemos, la tercera ecuación nos dará el movimiento al despejar r en función de t, $r(t)$, y la última de las ecuaciones nos permitirá relacionar r con ϕ, para obtener la trayectoria $r(\phi)$.

5.5. Variables ángulo-acción

Vamos a aplicar el método de H-J a sistemas periódicos y, como veremos, nos permitirá obtener algunas características sin necesidad de resolcer las ecuaciones de movimiento.

Entre los sistemas con movimientos periódicos distinguiremos aquéllos en los que las trayectorias en el espacio fásico son cerradas, y que llamaremos movimiento de libración, de aquéllos en los que el movimiento es una función periódica de q sin que la trayectoria en el espacio fásico se cierre, y en este caso hablamos de movimiento de rotación. La nomenclatura usada proviene de que históricamente se aplicaba a problemas astronómicos.

Como ejemplo para aclarar la diferencia nos referiremos al péndulo simple, en el que se pueden dar los dos tipos e movimiento. Si la energía es menor que una determinada, el ángulo de oscilación está en el intervalo $[-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$ y el momento canónico $p_\theta \in [-p_{\max}, p_{\max}]$, de manera que en el espacio fásico se tendrá la figura (5.1.a). Hablamos entonces de movimiento de libración. En el caso de movimiento de libración la curva suele ser simétrica ya que en la hamiltoniana el momento aparece elevado al cuadrado.

Por otra parte, si la energía es suficientemente grande el péndulo podrá dar una vuelta completa y se tendr'a en el espacio fásico la siguiente trayectoria representada en la figura (5.1.b). Hablamos entonces de movimiento de rotación.

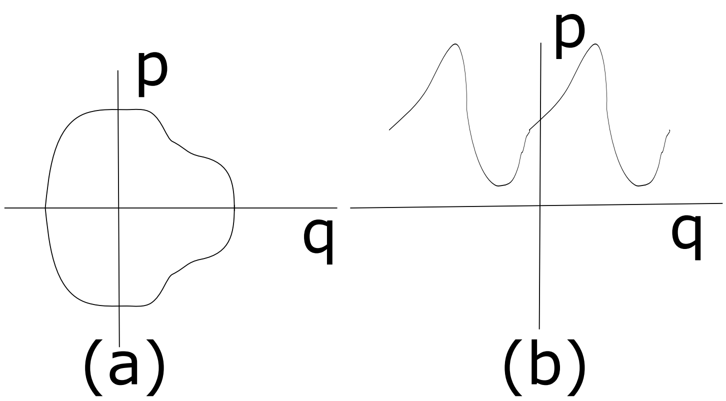

Figura 5.1: El panel (a) representa movimiento de libración mientra que el (b) representa movimiento de rotación.

Si consideramos un sistema con un grado de libertad el área encerrada en el plano $q - p$ del espacio fásico dividida entre 2π es

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p \, \mathrm{d}q, \tag{5.72}$$

y tiene dimensiones de acción (energía×tiempo).

En el caso de rotación la integral se realiza en un periodo.

Para sistemas completamente separables la función característica de Hamilton es

$$W = \sum W_i(q_i, \underline{\alpha}) \tag{5.73}$$

y, al ser

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, \tag{5.74}$$

se tiene que

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i \, \mathrm{d}q_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_i}{\partial q_i} \, \mathrm{d}q_i. \tag{5.75}$$

Observamos entonces que las magnitudes J_i sólo dependen de de las $\underline{\alpha}$, que constituyen nuevos momentos. Expresando $\underline{\alpha}$ en función de las variables $\underline{J}$, que llamaremos variables de acción, podremos escribir la función característica de Hamilton como

$$W = W(q_1, \ldots, q_n, J_1, \ldots, J_n). \tag{5.76}$$

Esta función es generadora de una transformación canónica independiente del tiempo $(\underline{q}, \underline{p}) \rightarrow (\underline{\psi}, \underline{J})$, con

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i} \\ \psi_i &= \frac{\partial W}{\partial J_i}. \end{aligned} \tag{5.77}$$

Como $\underline{J}$ son constantes, $\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = 0$ y la nueva hamiltoniana sólo depende de $\underline{J}$,

$$H = H(J_1, \ldots, J_n). \tag{5.78}$$

Las coordenadas canónicas asociadas a las $\underline{J}$ serán $\underline{\psi}$, que llamaremos variables angulares, de manera que

$$\psi_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}, \tag{5.79}$$

y las ecuaciones canónicas no dirán que

$$\dot{\psi}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i, \tag{5.80}$$

que al ser constante nos permitirá obtener el periodo de oscilación a partir de

$$\psi_i = \omega_i \, t + \delta_i. \tag{5.81}$$

En un ciclo completo de q_j manteniendo el resto de coordenadas constantes se tiene

$$\begin{aligned} \Delta\psi_i &= \oint \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} \, \mathrm{d}q_j = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial J_i} \, \mathrm{d}q_j = \\ & \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} \, \mathrm{d}q_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_j \, \mathrm{d}q_j = 2\pi \, \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{5.82}$$

Deducimos entonces que

$$\begin{aligned} \Delta\psi_i &= 2\pi \qquad \text{si } q_i \text{ realiza un ciclo} \\ \Delta\psi_i &= 0 \qquad \text{si } q_i \text{ no cambia.} \end{aligned} \tag{5.83}$$

El periodo será entonces

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{1}{(\partial H/\partial J_i)}. \tag{5.84}$$

Vamos a ver dos ejemplos del uso de las variables ángulo-acción.

1. **Oscilador armónico simple con variables ángulo-acción**

   En el epígrafe (??) habíamos obtenido l función característica de Hamilton para este caso,

   $$W(q,\alpha) = \int \sqrt{m\,(2\alpha - k\,q^2)}\,\mathrm{d}q. \tag{5.85}$$

   Esta función genera una transformación canónica en la que

   $$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{m\,(2\alpha - k\,q^2)}. \tag{5.86}$$

   Introduciendo la acción, J,

   $$J = \frac{1}{2\pi}\oint p\,\mathrm{d}q = \frac{1}{2\pi}2\int_{-A}^{A}\sqrt{m\,(2\alpha - k\,q^2)}\,\mathrm{d}q, \tag{5.87}$$

   con $A = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}}$. Es claro que J sólo dependerá de α. Para realizar la integral hacemos el cambio de variable $\sin\theta = \sqrt{2\alpha/k}q$ y se obtiene que

   $$J = \alpha\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{5.88}$$

   y la función característica la podemos expresar como

   $$W(q,J) = \int\sqrt{m\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}J - k\,q^2\right)}\,\mathrm{d}q. \tag{5.89}$$

   Esta función genera una transformación canónica que pasa de las variables (q,p) a las variable (ψ,J), siendo la nueva hamiltoniana

   $$H = \sqrt{\frac{k}{m}}J. \tag{5.90}$$

   La frecuencia angular será entonces

   $$\omega = \frac{\partial H}{\partial J} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{5.91}$$

Y las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\partial H}{\partial J} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \psi = \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \delta \\ \dot{J} &= -\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow J = \text{constante}. \end{aligned} \tag{5.92}$$

2. **Problema de Kepler con variables ángulo-acción**

   La hamiltoniana es

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) - \frac{k}{r}, \tag{5.93}$$

donde $k = G\,M\,m$.

Al ser independiente de t escribimos la ecuación de H-J independiente de t para la función característica de Hamilton

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2\right\} - \frac{k}{r} = E. \tag{5.94}$$

Separamos variables

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi) \tag{5.95}$$

y se tiene que $\frac{\partial W}{\partial \phi} = \frac{\mathrm{d}W_\phi}{\mathrm{d}\phi}$ no puede depender de ϕ, con lo que ha de ser constante, es decir,

$$\frac{\mathrm{d}W_\phi}{\mathrm{d}\phi} = \alpha_\phi = \text{cte.}, \tag{5.96}$$

que conduce a la siguiente ecuación de H-J

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_\theta}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta}\right]\right\} - \frac{k}{r} = E. \tag{5.97}$$

El término entre corchetes $[\dots]$ sólo puede depender de θ, con lo que debe ser una constante ya que los otros términos sólo pueden depender de r,

$$\left(\frac{\mathrm{d}W_\theta}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2, \tag{5.98}$$

y al sustituir en la ecuación de H-J sólo nos queda la dependencia en r,

$$\left(\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m\left(E + \frac{k}{r}\right). \tag{5.99}$$

Cada una de las constantes introducidas corresponde a una ley de conservación. Así, α_ϕ se corresponde con la componente polar del momento angular, p_ϕ. La segunda de las ecuaciones la podemos escribir como

$$p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2, \tag{5.100}$$

y α_θ resulta ser el momento angular total, que denotaremos por ℓ. Por último, se tiene la ecuación

$$\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} = E, \tag{5.101}$$

que expresa la conservación de la energía.

Si introducimos ahora las variables de acción

$$\begin{aligned} J_\phi &= \frac{1}{2\pi}\oint p_\phi\,\mathrm{d}\phi, \\ J_\theta &= \frac{1}{2\pi}\oint p_\theta\,\mathrm{d}\theta, \\ J_r &= \frac{1}{2\pi}\oint p_r\,\mathrm{d}r, \end{aligned} \tag{5.102}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} J_\phi &= \alpha_\phi, \\ J_\theta &= (\ell - p_\phi) = \alpha_\theta - \alpha_\phi, \\ J_r &= -(J_\theta + J_\phi) + \frac{1}{2}k\sqrt{\frac{2m}{-E}}, \end{aligned} \tag{5.103}$$

ese decir,

$$E = -\frac{mk^2}{2(J_r + J_\theta + J_\phi)^2}. \tag{5.104}$$

Esta última expresión nos permite obtener los periodos, $T_i = \frac{2\pi}{(\partial H/\partial J_i)}$, y, en este caso,

$$T_r = T_\theta = T_\phi = \pi\,k\sqrt{-\frac{m}{2E^3}}. \tag{5.105}$$

Las órbitas son cerradas ya que los periodos son todos iguales.

En los sistemas completamente separables se tiene la relación entre p_i y q_i que viene dada por la ecuación

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, \tag{5.106}$$

con $W_i = W_i(q_i, \underline{\alpha})$. Para órbitas acotadas, se muestra, como ejemplo, en la figura (5.2) la proyección de la órbita en el espacio fásico (q_i, p_i), donde

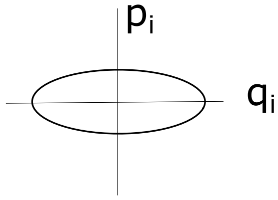

Figura 5.2: Proyección de la órbita en el subespacio fásico (q_i, p_i).

hemos elegido los valores de $\underline{\alpha}$ fijos ya que son constantes. Esta curva es homotópica a una circunferencia S^1 ya que podemos pasar de una manera continua a la circunferencia. Como esto es válido para cualquier par (q_i, p_i), se tiene que, en su movimiento, el sistema de n grados de libertad describe una curva en el espacio fásico contenida en una superficie de dimensión n cuya topología es la de un toro n-dimensional: $\mathcal{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$.

Para el caso de un sistema con dos grados de libertad se tendrá $\mathcal{T}^2 = S^1 \times S^1$. Un ejemplo de este caso es el oscilador armónico bidimensional, cuya hamiltoniana viene dada por

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} k_1\, q_1^2 + \frac{1}{2} k_2\, q_2^2. \tag{5.107}$$

El movimiento está contenido en el toro de la figura (5.3).

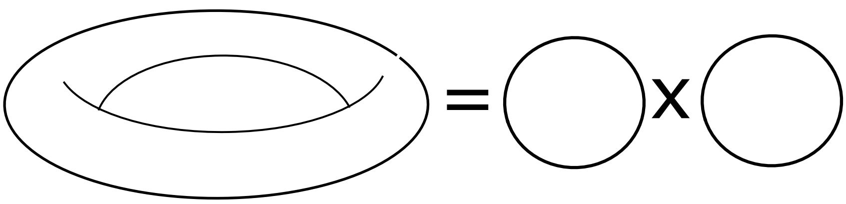

Figura 5.3: Toro $\mathcal{T}^2$ correspondiente a un sistema con dos grados de libertad.

Los toros vienen caracterizados por los valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ o por las correspondientes variables de acción $J_1, \ldots, J_n$. Cada J_i caracteriza una curva del subespacio fásico (q_i, p_i), como se muestra en la figura (5.4).

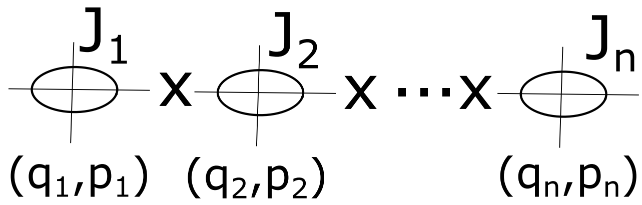

Figura 5.4: Toro $\mathcal{T}^n$ correspondiente a un sistema con n grados de libertad.

5.6. Invariante adiabático

Consideremos un sistema hamiltoniano con un grado de libertad en el que la hamiltoniana depende de un parámetro λ,

$$H = H(q, p, \lambda). \tag{5.108}$$

Para cada valor de λ el sistema es integrable y las variales ángulo-acción (ψ, J) pasan ahora a depender de λ.

Nos planteamos el caso en que λ sea una función del tiempo. En ese caso el sistema no será completamente integrable y J ya no será constante. Pero si λ varía muy lentamente, resulta que J permanece casi constante. Más concretamente, la variación de J es aproximadamente proporcional a la velocidad a la cual cambia λ:

$$\Delta J \propto \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = \dot{\lambda}. \tag{5.109}$$

Esto significa que aunque el cambio en λ sea grande, J prácticamente no cambiará si el cambio en λ se realiza muy lentamente. Se dice entonces que J es un invariante adiabático.

Consideremos, por ejemplo, el caso del oscilador armónico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\,\omega^2}{2}\,q^2, \tag{5.110}$$

en el que cambiamos muy lentamente la constante elástica del muelle y, por tanto, ω. Si ω fuera constante se tendría, como vimos en el epígrafe anterior, que

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p \, \mathrm{d}q = \frac{E}{\omega}. \tag{5.111}$$

Si J es invariante, al aumentar el parámetro ω la energía debe aumentar proporcionalmente.