

ELECTROMAGNETISMO I

PRÁCTICAS DE ORDENADOR



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

María San Martín Romero. Curso 2021-2022.

ÍNDICE

Campo eléctrico	3
1. Objetivos.....	3
2. Conocimientos previos.....	3
2.1. Campo eléctrico	
2.2. Potencial eléctrico	
2.3. Ecuación de Poisson	
3. Realización de la práctica y resultados	4
3.1. Potencial y campo eléctrico debido a un dipolo	
3.2. Potencial y campo eléctrico debido a diferentes distribuciones de carga	
3.3. Potencial y campo eléctrico a partir de la ecuación de Poisson	
 Campo magnético	 12
1. Objetivos.....	12
2. Conocimientos previos.....	12
2.1. Ley de Biot y Savart	
2.2. Momento dipolar magnético	
3. Realización de la práctica y resultados	13
3.1. Campo magnético debido a una espira	
3.2. Campo magnético debido a un momento dipolar magnético	
3.3. Campo magnético debido a una distribución de momentos magnéticos	

CAMPO ELÉCTRICO

1. OBJETIVOS

Esta práctica tiene como objetivo principal el de obtener el campo eléctrico y el potencial generado por una serie de cargas puntuales haciendo uso de la definición y a partir de la solución de la ecuación de Poisson.

2. CONOCIMIENTOS PREVIOS

2.1. Campo eléctrico

La interacción entre dos cargas eléctricas viene dada por la ley de Coulomb, que afirma que la fuerza ejercida por una carga Q sobre una carga q es directamente proporcional a la magnitud de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que las separa, de acuerdo con la expresión

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica en el vacío.

Para conocer en qué medida se alteran las propiedades del espacio al introducir en este una carga puntual introducimos el concepto de campo eléctrico. Este nos informa de la fuerza que desempeñaría una carga Q sobre una carga unidad situada a una cierta distancia. Así,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (2)$$

Las cargas positivas son fuentes de campo eléctrico, mientras que las negativas actuarán como sumideros. De este modo, el vector campo eléctrico siempre irá dirigido desde la carga positiva hacia la negativa. Pueden dibujarse entonces alrededor de la carga creadora del campo lo que se conoce como líneas de campo eléctrico. Estas líneas no pueden cortarse y su número dependerá del valor de la carga.

Si nos encontramos ante una serie de cargas puntuales, el campo eléctrico debido a todas ellas se rige por el principio de superposición:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad (3)$$

donde \vec{E}_i es el campo creado por cada una de las cargas individualmente.

2.2. Potencial eléctrico

Dado que la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, el trabajo realizado por dicha fuerza es independiente del camino seguido:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = -\Delta E_p \quad (4)$$

La variación de energía potencial eléctrica, E_p , es equivalente al trabajo requerido para trasladar una carga desde su posición inicial A hasta su posición final B. Se trata de una magnitud escalar. Derivado de esta, resulta útil definir el potencial eléctrico ϕ , que nos da una idea de la energía potencial electrostática que adquiriría una carga si la situamos en un punto en el que existe un campo eléctrico. En otras palabras, se trata de la energía potencial por unidad de carga positiva.

$$\phi = \frac{E_p}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (5)$$

El potencial puede representarse como un campo escalar. Los puntos del espacio que presentan el mismo valor de potencial forman superficies equipotenciales, y el campo eléctrico va dirigido hacia donde decrece el potencial, lo que nos conduce a

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (6)$$

Además, el potencial debido a un sistema de cargas será también igual a la suma de los potenciales generados por cada una de las cargas.

2.3. Ecuación de Poisson

Una forma de calcular el potencial es por medio de la ecuación de Poisson, ya que esta establece una relación entre el potencial y la densidad de carga que lo origina. Sabemos a partir de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial que la divergencia del campo eléctrico es igual a la densidad de carga volumétrica dividida entre la permitividad eléctrica. Con esto y con la ecuación (6) se concluye que

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7)$$

Dado que el potencial es una función escalar, este enfoque tiene ventajas con respecto a tratar de calcular el campo eléctrico directamente. Una vez que se ha calculado el potencial, se puede calcular el campo eléctrico tomando el gradiente del potencial.

3. REALIZACIÓN DE LA PRÁCTICA Y RESULTADOS

Es necesario aclarar antes de comenzar que el valor de $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ se ha tomado directamente como 1 con la finalidad de evitar valores excesivamente altos o bajos que puedan dificultar la interpretación de los resultados.

3.1. Potencial y campo eléctrico debido a un dipolo

Para nuestra práctica, comenzamos considerando un cuadrado de lado 4 (unidades arbitrarias) situado sobre el plano XY, en cuyo centro situamos el origen de coordenadas. Para simplificar el problema, trabajamos únicamente en estas dos

direcciones del espacio. En nuestro programa de Python, el cuadrado queda representado por una matriz.

A continuación, situamos una carga q en la posición $(-0.5,0)$ y otra carga de igual magnitud pero signo opuesto, $-q$, en $(0.5,0)$, creando así un dipolo eléctrico. Hemos tomado para q el valor de $-3C$. La distribución de cargas en el cuadrado puede verse en la figura 1, donde se aprecian los picos debidos a la colocación de las cargas puntuales.

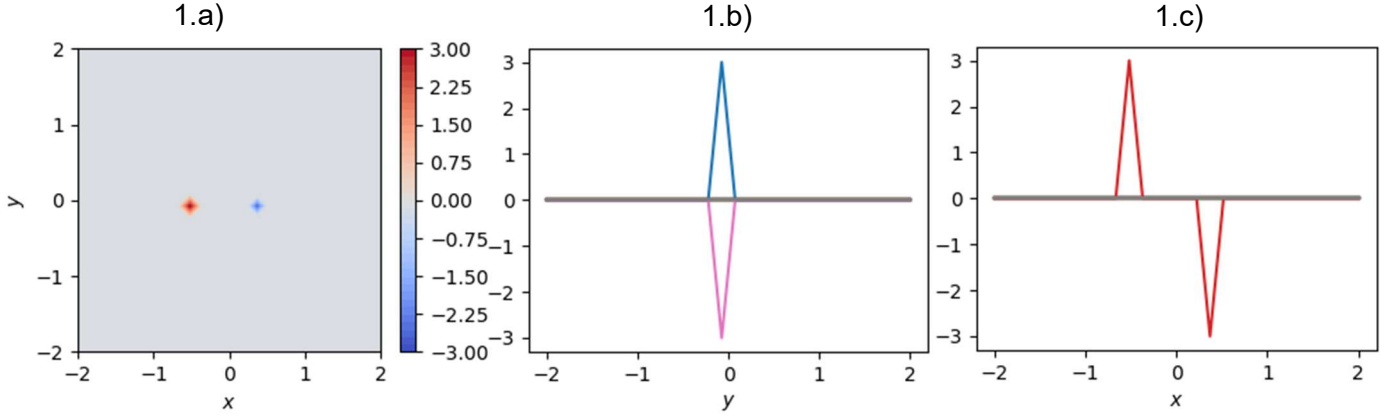


Figura 1. a) Densidad de carga en el plano XY. **b)** Densidad de carga en función de la coordenada y. **c)** Densidad de carga en función de la coordenada x.

El objetivo de este apartado es el de obtener el potencial y el campo eléctrico generados por el dipolo a partir de su definición; esto es, por medio de las ecuaciones (2) y (5). Para ello, hemos creado en nuestro programa funciones que efectúan estos cálculos a partir de los valores de las cargas y de las posiciones introducidas. En el caso del potencial, el campo escalar queda representado en la figura 2.

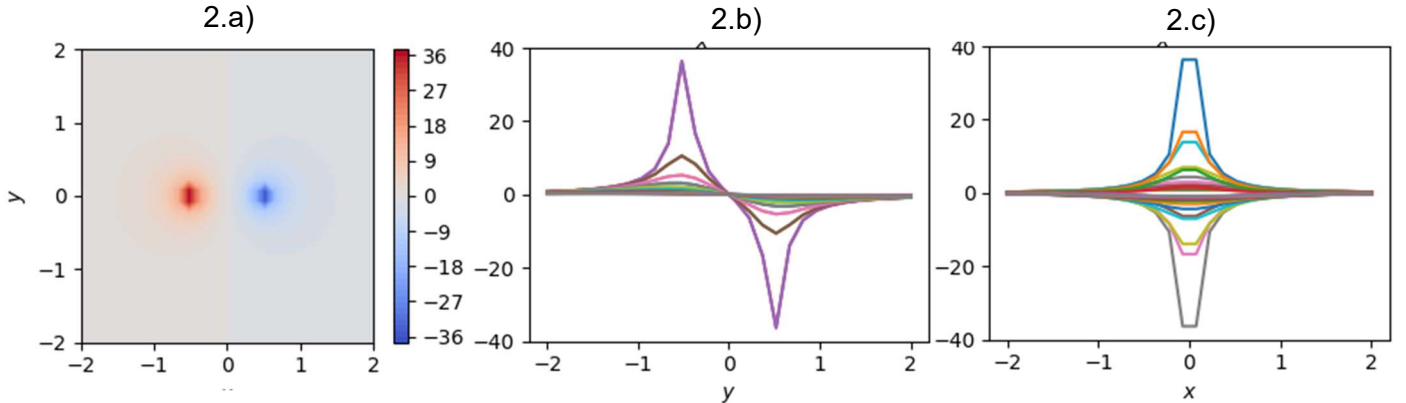


Figura 2. a) Valores del potencial en el plano XY. **b)** Potencial en función de la coordenada y. **c)** Potencial en función de la coordenada x.

Es posible obtener analíticamente que el potencial debido a un dipolo sigue la expresión

$$\phi = \frac{E_p}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (8)$$

donde r_1 y r_2 son las distancias desde el punto en el que se calcula el potencial hasta las cargas del dipolo respectivamente. De este modo, observamos que, cuando los

puntos se encuentran a la misma distancia de ambas cargas, el valor del potencial es 0. Esto es perceptible en las figuras 2.a) y 2.b), ya que, en los puntos del eje Y, observamos que la gráfica del potencial es nula. Por otro lado, encontramos los picos de la función sobre los entornos de los puntos que marcan la posición de las cargas. Donde se encuentra la carga positiva, el potencial es positivo, y viceversa. Notamos que el potencial toma los mismos valores en los picos, pero de signo contrario, lo que concuerda con el hecho de que ambas cargas son iguales en magnitud. La razón por la cual el potencial alcanza sus valores máximo y mínimo sobre las posiciones de las cargas se explica por el hecho de que el potencial es inversamente proporcional a la distancia entre el punto donde se calcula y la carga. Así, a menor distancia, mayor valor del potencial.

Veamos ahora qué resultados se obtienen para el campo eléctrico. En la figura 3 visualizamos cómo, efectivamente, la carga positiva actúa como fuente de campo eléctrico, mientras que la negativa hace el papel de sumidero.

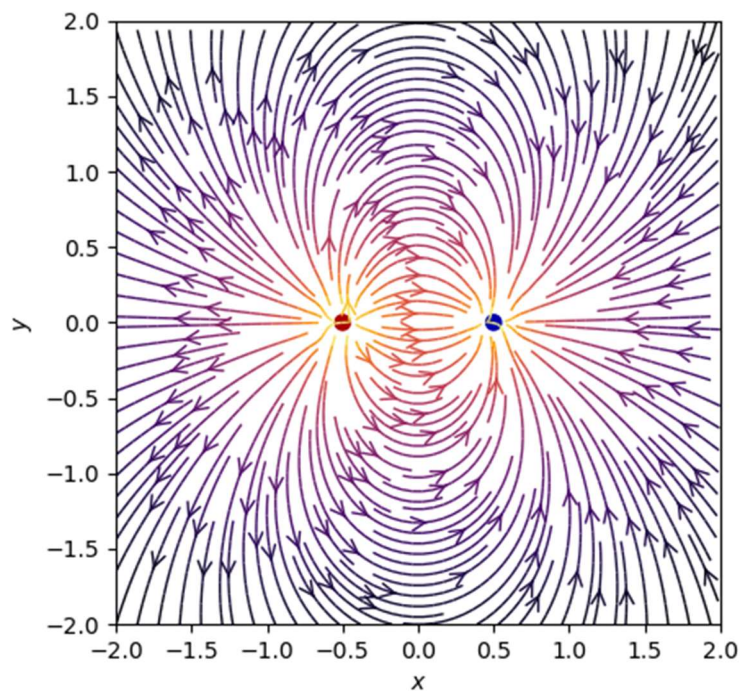


Figura 3. Representación de las líneas de campo eléctrico generado por el dipolo, donde el punto rojo representa la carga positiva y el azul, la negativa.

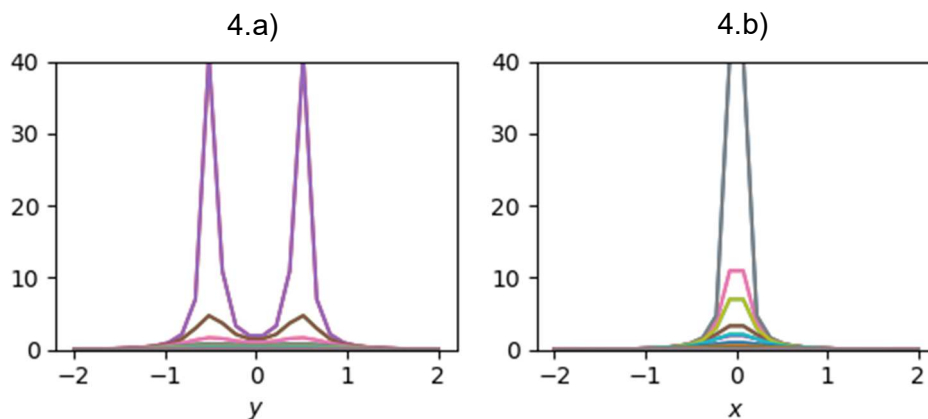


Figura 4. Perfiles del módulo del campo eléctrico en las direcciones x e y.

Cuando se tiene una única carga puntual, el campo eléctrico debido a la misma tiene dirección radial. Sin embargo, en el instante en el que se introduce una distribución de cargas se hace visible la curvatura de las líneas de campo (figura 3), que son consecuencia de la predominancia del campo debido a una de las cargas sobre la otra. Es decir, si tomamos un punto más próximo a la carga positiva, el campo eléctrico que sea consecuencia de la misma se impondrá sobre el campo eléctrico producido por la carga negativa, y es gracias a que el campo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Al igual que para el potencial, observamos que los picos de la función se encuentran sobre los puntos ocupados por las cargas. Sin embargo, la curva de la función en este caso es enteramente positiva, ya que, a diferencia del potencial, el campo eléctrico es una magnitud vectorial y su módulo siempre va a ser positivo.

3.2. Potencial y campo eléctrico debido a diferentes distribuciones de carga

Para ilustrar los diferentes tipos de funciones del potencial y del campo eléctrico que pueden darse, estableceremos una comparativa del caso anterior con una distribución de cargas en forma de circunferencia y en forma cuadrada, tal y como se muestra en la figura 5.

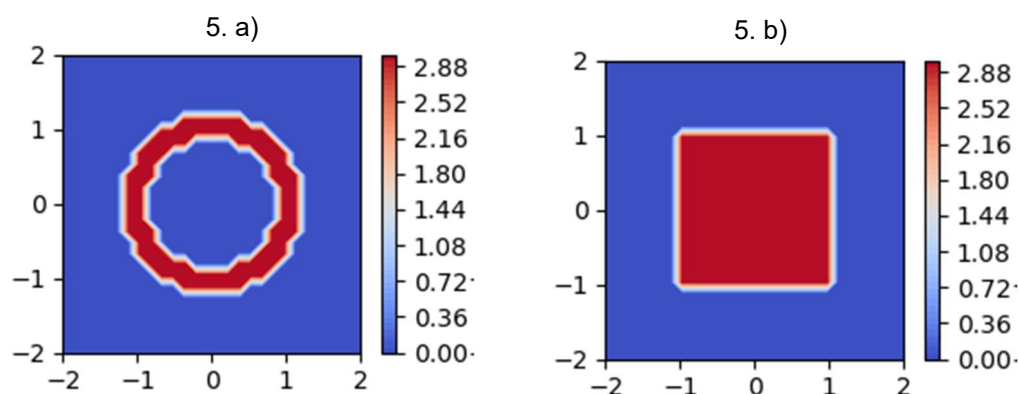


Figura 5. a) Densidad de carga en una circunferencia. **b)** Densidad de carga en un cuadrado.

Si calculamos el potencial de estas distribuciones como suma del potencial debido a cada fragmento infinitesimal de carga y lo representamos gráficamente, obtenemos las gráficas que se muestran a continuación.

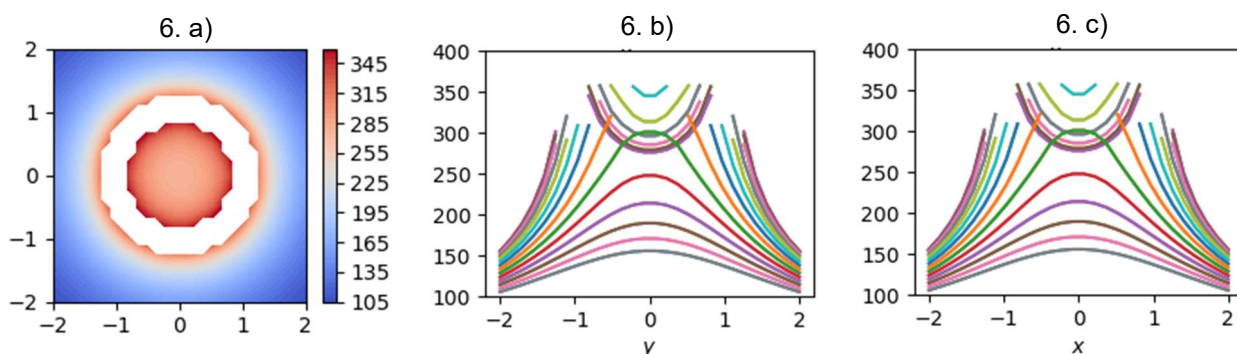


Figura 6. a) Valores del potencial debido a una circunferencia cargada en el plano XY. **b)** Perfil del potencial en la dirección y. **c)** Perfil del potencial en la dirección x.

En el caso de la circunferencia, es destacable el hecho de que la región central es la que concentra el mayor valor del potencial, ya que los puntos de esta zona son los

que están simultáneamente más cerca de todas las cargas. Por el contrario, cuanto más nos alejamos de la distribución, el valor del potencial va disminuyendo. En comparación con el dipolo, notamos que los valores del potencial son visiblemente mayores, consecuencia de una mayor cantidad de carga.

Asimismo, encontramos que los perfiles del potencial son exactamente iguales en ambas direcciones. Al ser una distribución circular, cada punto contribuye al potencial de manera simétrica, por lo que no importa desde qué lado de observe. Vemos que, en la zona central, las líneas del potencial se superponen, lo cual es lógico si el potencial de dentro de la circunferencia toma valores de forma diferente al exterior de la misma.

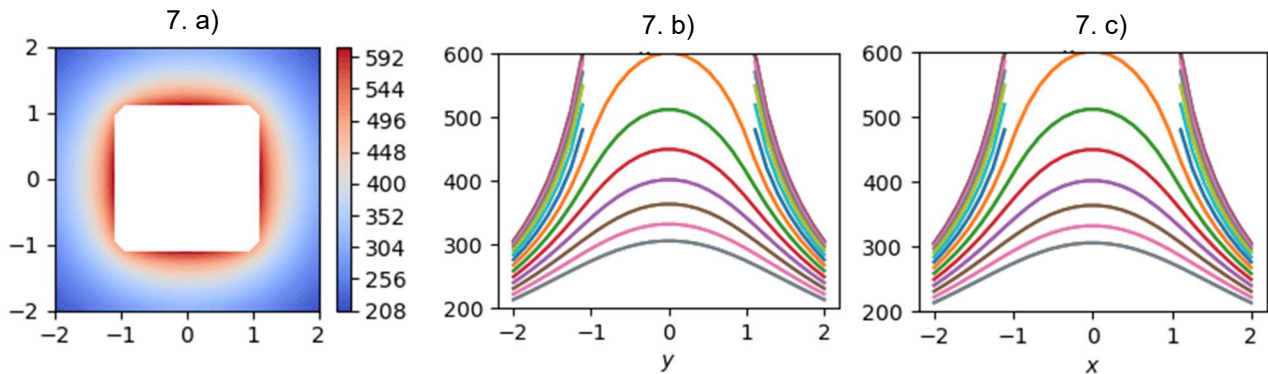


Figura 7. **a)** Valores del potencial debido a un cuadrado cargado en el plano XY. **b)** Perfil del potencial en la dirección y. **c)** Perfil del potencial en la dirección x.

La distribución cuadrada nos proporciona unas representaciones del potencial bastante similares a las de la circunferencia, con la salvedad de que ahora el centro de la distribución está ocupado por cargas, luego la función del potencial toma valores únicamente en el exterior del cuadrado. Además, el potencial en cada punto es aún más alto que en el caso anterior, cosa que se deriva de la mayor cantidad de carga.

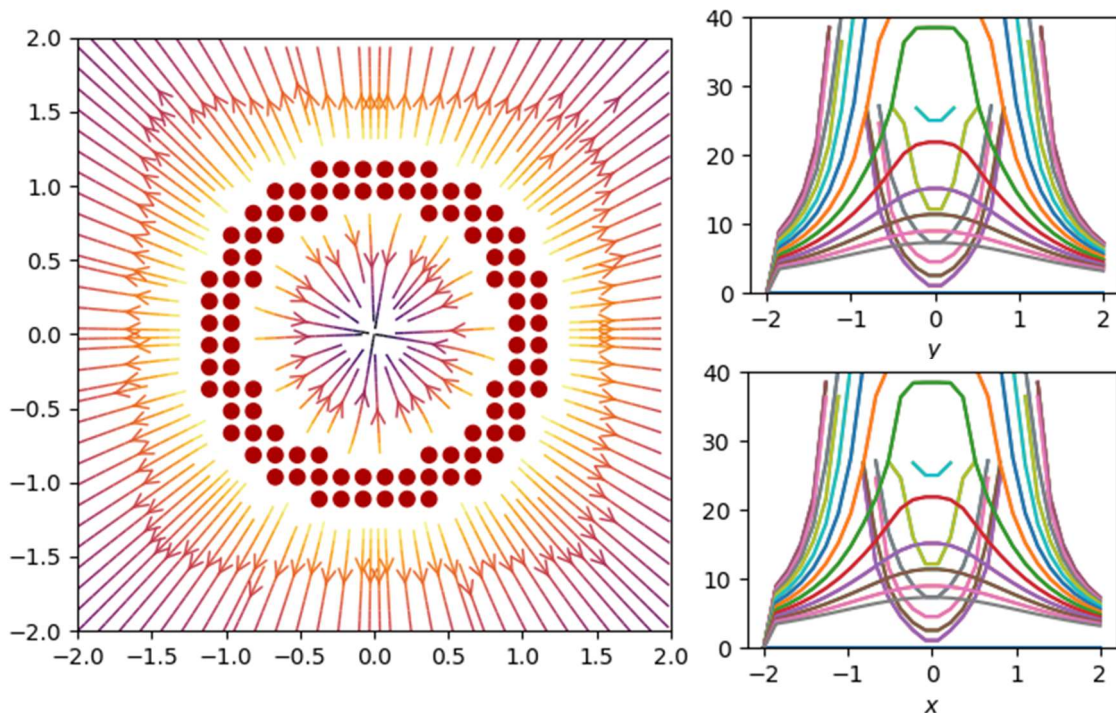


Figura 8. Líneas de campo magnético debido a una distribución en forma de disco en el plano XY y su módulo representado en los perfiles x e y.

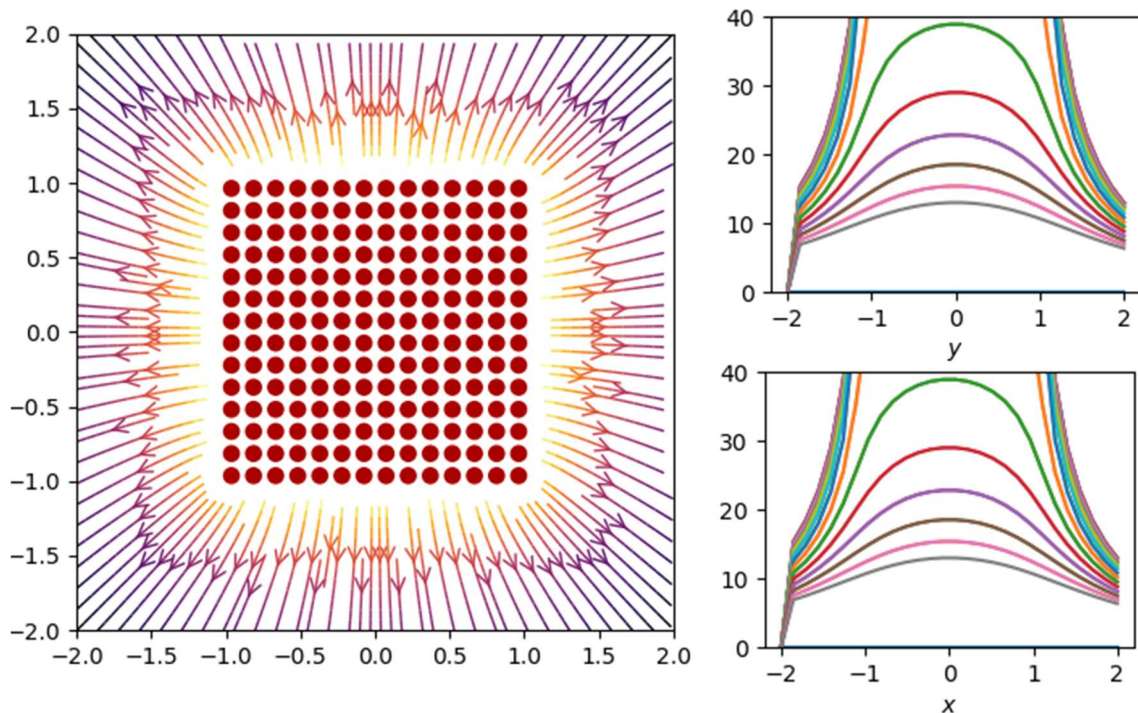


Figura 9. Líneas de campo magnético debido a una distribución cuadrada plana en XY y su módulo representado en los perfiles x e y.

El campo eléctrico que nos proporcionan estas dos distribuciones se asemeja en cierta medida al campo que produce una carga puntual, ya que las líneas de campo surgen de las distribuciones manteniendo la dirección normal a estas. Al igual que en el dipolo, las líneas parten desde la carga positiva, pero como no hay cargas negativas, estas divergen sin curvarse hacia ninguna dirección en particular.

Por otro lado, los colores de las líneas nos indican que el campo eléctrico de estas distribuciones es considerablemente mayor que para el dipolo. En cuanto a los perfiles del módulo del campo, su interpretación es análoga a la que hicimos para el potencial.

3.3. Potencial y campo eléctrico a partir de la ecuación de Poisson

Creando una función en nuestro programa que nos permita resolver por el método de Jacobi la ecuación de Poisson es posible obtener una aproximación del potencial debido a una distribución de cargas. Para ello, impondremos como condición de contorno que el potencial sea nulo en los bordes del dominio.

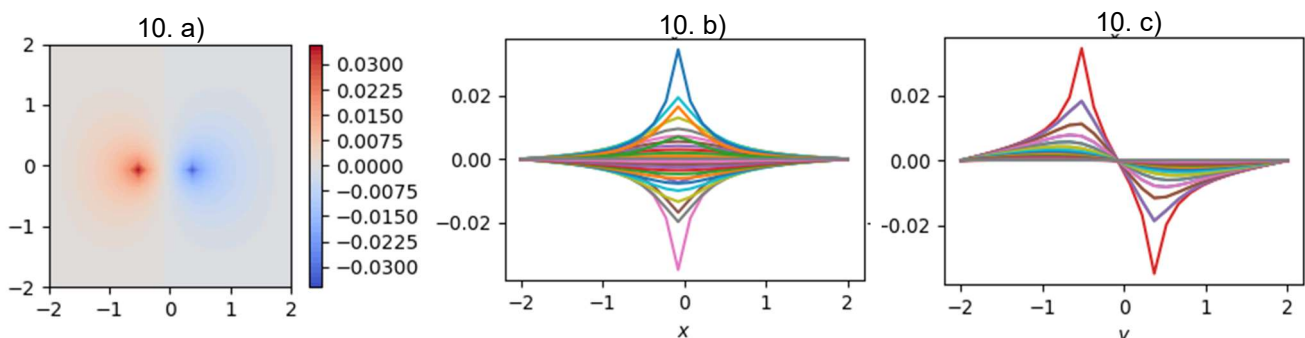


Figura 10. a) Potencial debido a un dipolo en el plano XY. b) Perfil del potencial en la dirección x. c) Perfil del potencial en la dirección y.

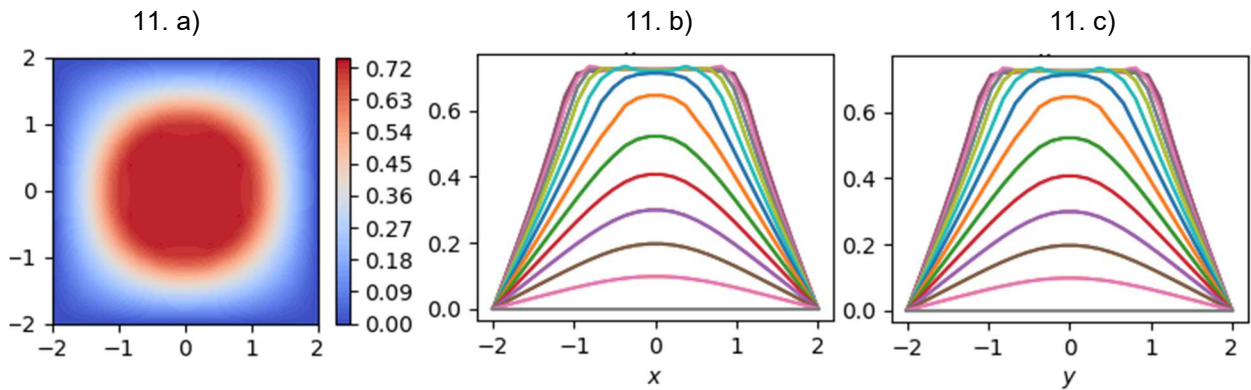


Figura 11. **a)** Potencial debido a un disco cargado en el plano XY. **b)** Perfil del potencial en la dirección x. **c)** Perfil del potencial en la dirección y.

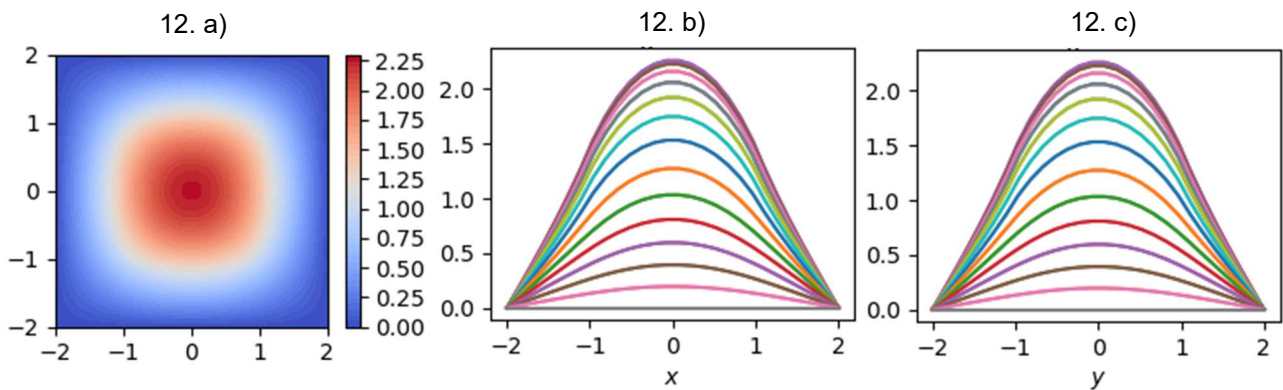


Figura 12. **a)** Potencial debido a un disco cargado en el plano XY. **b)** Perfil del potencial en la dirección x. **c)** Perfil del potencial en la dirección y.

Si comparamos las figuras 10, 11 y 12 con las que obtuvimos a partir de la definición, contemplamos que los órdenes de magnitud del potencial son bastante más pequeños al resolver la ecuación de Poisson, lo que seguramente se deba a algún error del programa. Por eso, nos centraremos más en analizar la forma de las gráficas. La del dipolo es probablemente la que más se ajusta a la de la definición. Sin embargo, en los perfiles del potencial debido al disco se observa que la gráfica del potencial dista de manera apreciable de la forma que debería tener, por lo que podemos considerar que la aproximación no es demasiado precisa en este caso.

Una vez obtenido el potencial en todo el dominio, el campo eléctrico se obtiene a partir de su gradiente. Numéricamente, esto se traduce en restar los potenciales de dos puntos consecutivos y dividirlo entre la distancia que los separa (y cambiándolo de signo, según la ecuación (6)). Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 13, 14 y 15. Al igual que para el potencial, la aproximación para el dipolo es bastante acertada. En el caso de la distribución cuadrada también se ajusta bastante bien, pero en el disco, las líneas de campo eléctrico dibujadas en el interior de la distribución para los valores obtenidos a partir de Poisson no deberían curvarse, sino que tendrían que apuntar radialmente hacia el centro del círculo. De este modo, podríamos decir que cuanto más compleja es la distribución de la carga, más imprecisa se vuelve la aproximación del método de Jacobi.

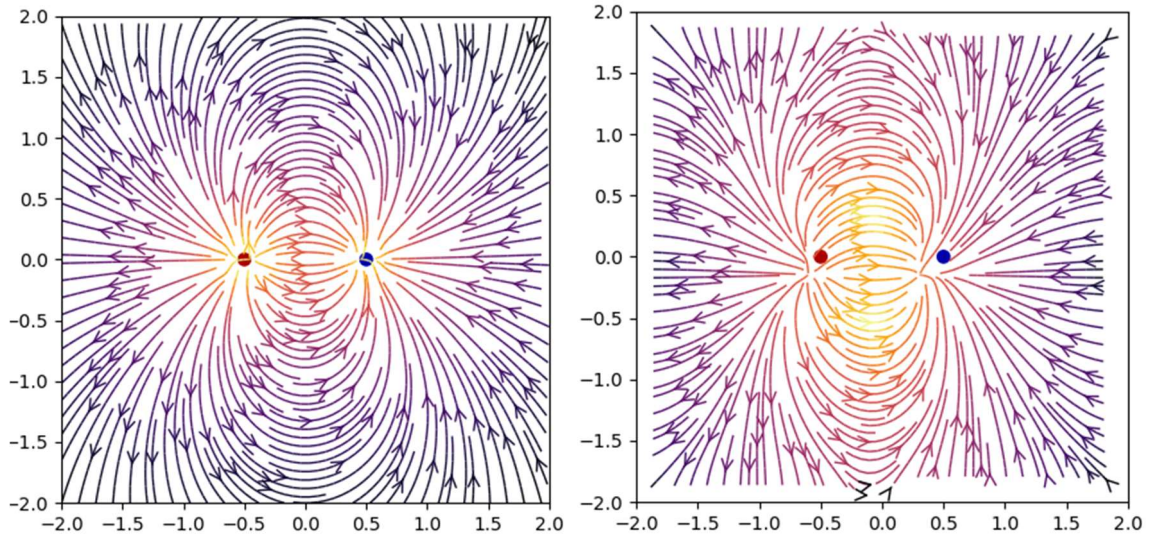


Figura 13. Comparación de las líneas de campo eléctrico de un dipolo por definición (izquierda) y a partir de la solución de la ecuación de Poisson (derecha).

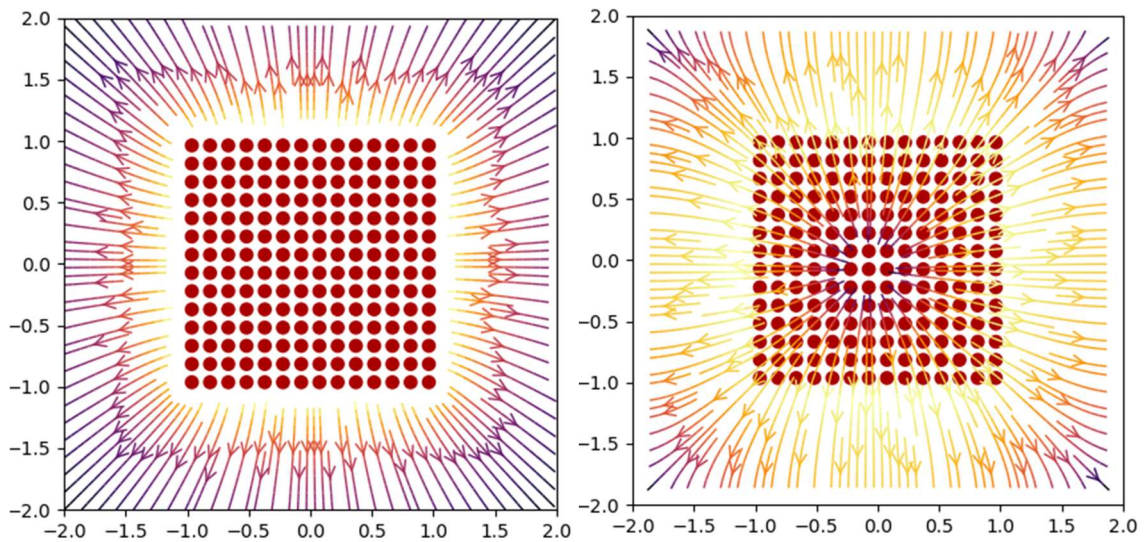


Figura 14. Comparación de las líneas de campo eléctrico de un cuadrado por definición (izquierda) y a partir de la solución de la ecuación de Poisson (derecha).

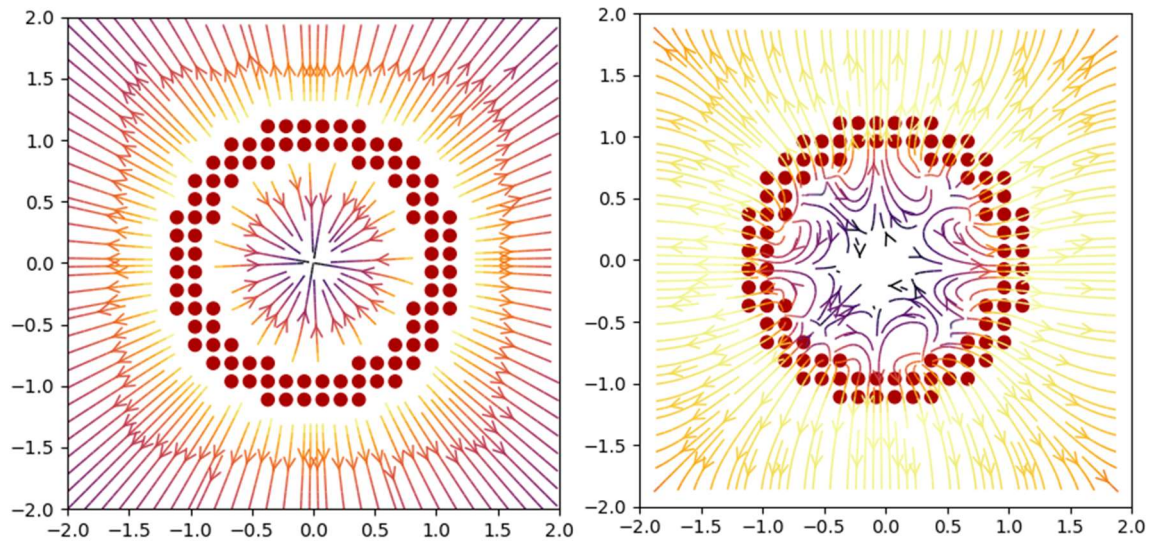


Figura 15. Comparación de las líneas de campo eléctrico de un disco por definición (izquierda) y a partir de la solución de la ecuación de Poisson (derecha).

CAMPO MAGNÉTICO

1. OBJETIVOS

Esta práctica tiene como finalidad estudiar el campo magnético en cada punto del espacio como consecuencia de la circulación de corriente a través de una espira circular, por un momento magnético, y por una distribución de estos últimos.

2. CONOCIMIENTOS PREVIOS

2.1. Ley de Biot y Savart

Biot y Savart establecieron las leyes experimentales básicas que relacionan la inducción magnética B con las corrientes eléctricas, llegando a la conclusión de que las cargas eléctricas en movimiento son originarias del campo magnético. De este modo, la expresión matemática que proporciona el campo magnético producido por la corriente I que circula a través de un elemento diferencial de longitud $d\vec{l}$ es la siguiente:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (1)$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío. El campo magnético producido por una distribución continua de carga se obtendrá entonces a partir de la integración de la expresión anterior. El caso de la espira situada en el plano XY es el que se considerará inicialmente. Analíticamente puede obtenerse que la inducción en dirección axial debida a una espira circular sigue la fórmula

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (2)$$

donde a es el radio de la espira.

2.2. Momento dipolar magnético

Por otro lado, haciendo la divergencia del campo magnético puede obtenerse que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, lo que se traduce en que existe un campo vectorial \vec{A} de tal manera que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3)$$

\vec{A} es lo que se conoce como potencial vector. En muchas ocasiones, la obtención de \vec{A} no es sencilla, por lo que suele ser conveniente hacer una aproximación por un desarrollo multipolar. El término más relevante de este desarrollo es el dipolar, que se expresa de la manera siguiente:

$$\vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (4)$$

donde \vec{m} es el momento dipolar magnético, que para una corriente filamental puede escribirse de la forma

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{S} \quad (5)$$

Gracias a la ecuación (3) es posible obtener la inducción magnética a partir del potencial vector en la expresión (4), lo que nos da

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{r} \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) \quad (6)$$

3. REALIZACIÓN DE LA PRÁCTICA Y RESULTADOS

3.1. Campo magnético debido a una espira

Por medio de un programa de Python, estudiaremos el campo magnético inducido por una espira circular situada en el plano XY y cuyo centro se sitúa sobre el eje de coordenadas. El dominio de simulación a considerar es un cuadrado de lado 4 (unidades arbitrarias) centrado en el origen, delimitando el plano en el que se encuentra la espira. Definiremos una serie de funciones que nos permitan calcular la inducción magnética en cada punto del dominio a partir de la ley de Biot y Savart.

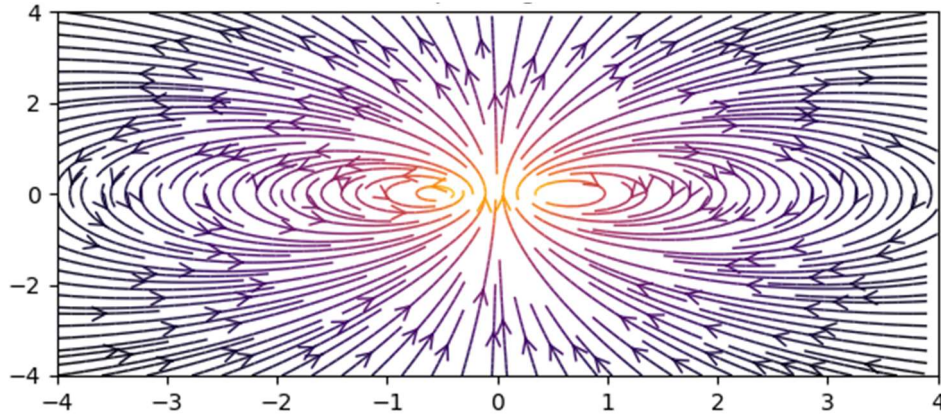


Figura 1. Líneas de campo magnético debido a una espira circular de radio 0,5 m.

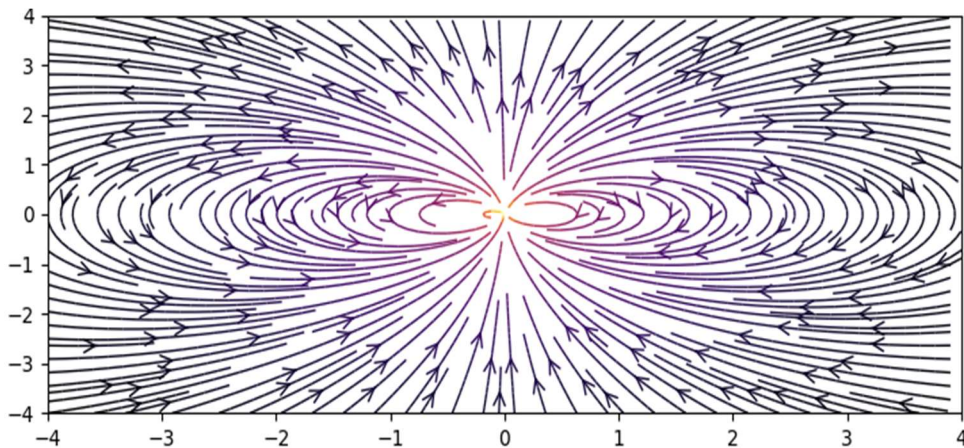


Figura 2. Líneas de campo magnético debido a una espira circular de radio 0,005 m.

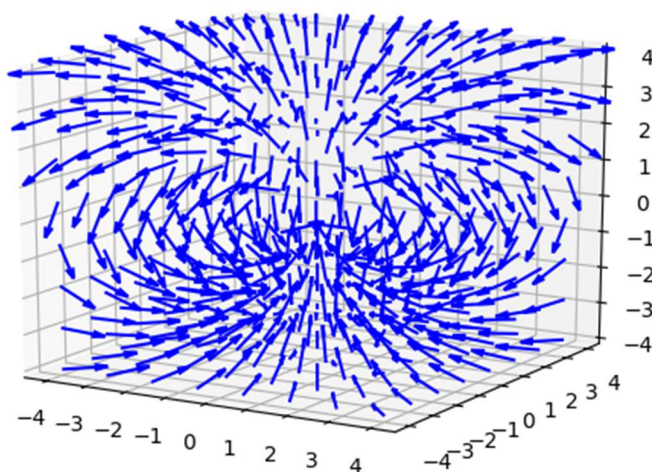


Figura 3. Representación tridimensional del campo magnético debido a una espira circular de radio 0,5 m.

Tanto en la figura 1 como en la figura 2, las fuentes del campo magnético son espiras circulares a través de las cuales circula una corriente de intensidad 1000 A (la constante μ_0 se ha tomado como 1). Observamos que se trata de líneas cerradas que nunca llegan a cortarse. Los diferentes colores que se ven en la representación nos permiten hacernos una idea de la intensidad del campo en cada punto. Así, se distingue que, en la región que atraviesa la espira y sus alrededores más próximos, la inducción magnética es más intensa que en cualquier

otro lugar, lo cual es concordante con la ecuación (2), que nos decía que el campo magnético era inversamente proporcional a la distancia a la espira (cuando se medía sobre puntos del eje). Además, podemos encontrar cierta similitud con las líneas de campo eléctrico debidas a un dipolo que estudiamos en la práctica anterior.

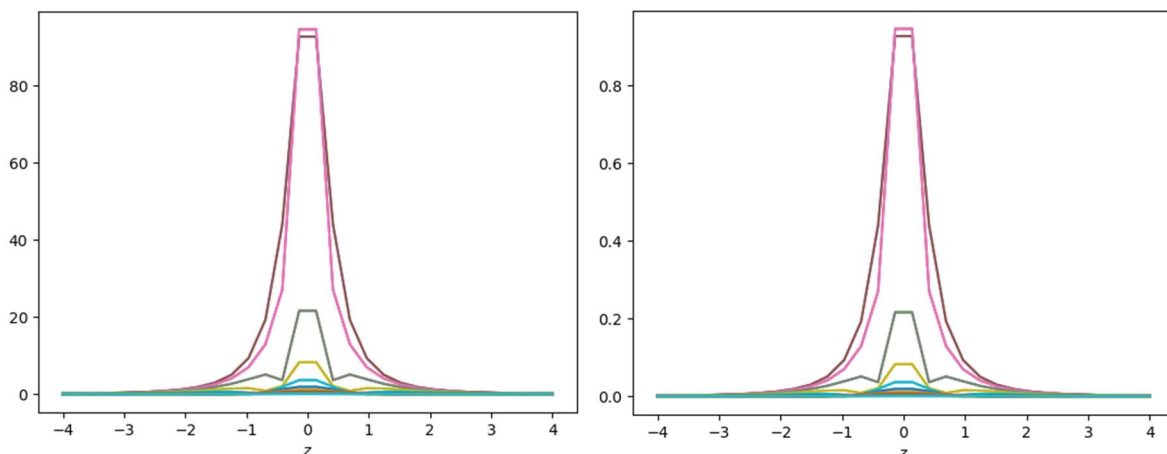


Figura 4. Perfiles del campo magnético en la dirección z para radios de 0,5 m (izquierda) y 0,005 m (derecha).

Si ponemos atención en la representación gráfica del módulo del campo eléctrico, notamos que, conforme mayor es la distancia a la espira en comparación con su radio, el decrecimiento cúbico del campo magnético es más apreciable. Esto puede comprobarse también a partir de la ecuación (2) al desprestigiar a frente a z .

3.2. Campo magnético debido a un momento dipolar magnético

Si calculamos el momento magnético de una espira circular a partir de la expresión (5), llegamos a la ecuación:

$$\vec{m} = I\pi a^2 \hat{n} \quad (15)$$

En el caso de la espira que se estaba considerando, el vector normal a la misma es el que va en la dirección del eje z en sentido positivo.

Creando una función en nuestro programa de Python que devuelva el campo magnético producido por un momento dipolar dado, podemos establecer una comparación de resultados con el apartado anterior.

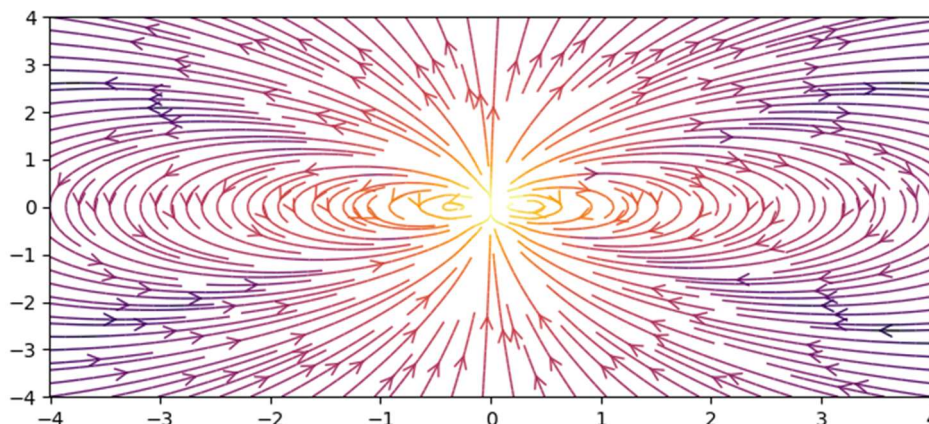


Figura 5. Líneas de campo magnético a partir del momento dipolar de una espira circular de radio 0,5 m.

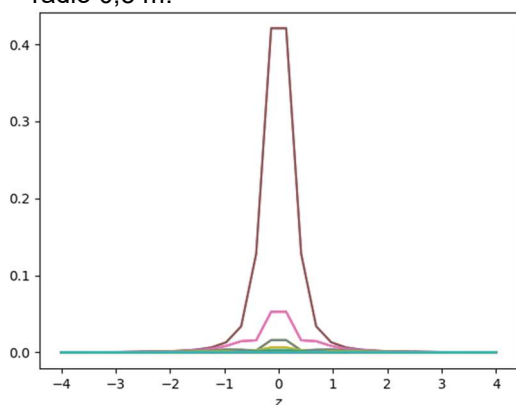


Figura 6. Perfil del campo magnético en la dirección z para una espira de radio 0,5 m.

La representación obtenida es bastante similar a la que se consiguió a partir de la Ley de Biot y Savart. Si representamos el módulo del campo magnético obtenido en función de la coordenada z observamos, al igual que en el caso anterior, que el campo magnético decae con el cubo de la distancia. Podemos concluir que la aproximación del momento dipolar es entonces aceptable.

3.2. Campo magnético debido a una distribución de momentos magnéticos

Para finalizar, consideraremos una distribución cuadrada plana de momentos magnéticos. Lo que pretendemos ver con esto es que, cuando tenemos varias distribuciones simultáneamente, el momento dipolar es la superposición de los momentos individuales. En consecuencia, el campo magnético producido por estos momentos será también una suma de los campos producidos por cada uno de ellos de manera individual.

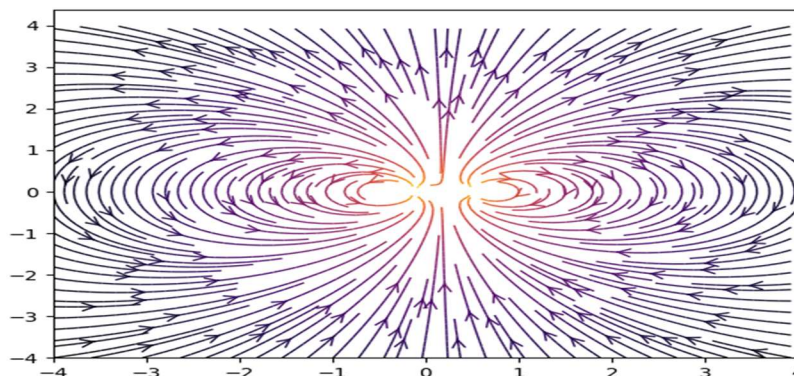


Figura 7. Líneas de campo magnético generado por una red de momentos dipolares.