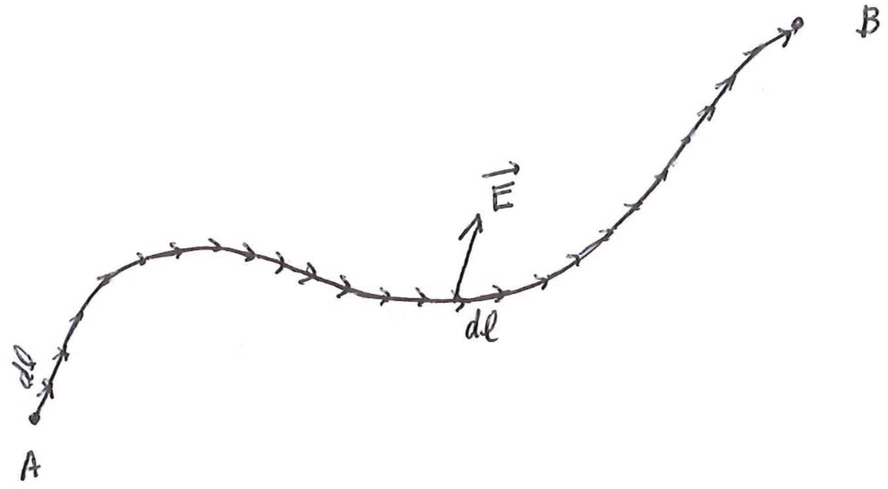
Clase 3 Tema 1

Cálculo del potencial V

Debemos obtener el campo eléctrico $\vec{E}$ por Gauss o algún otro método y luego usamos la expresión

$$\boxed{V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}}$$

diferencia de potencial entre los puntos B y A

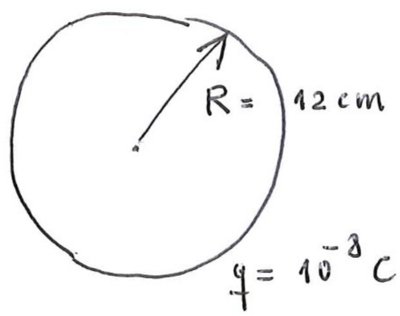


Tenemos que calcular $\vec{E} \cdot \vec{dl}$ a lo largo de una curva (cualquiera) que una los puntos A y B

Problema 45 Tema 1

45. @ Una carga q de $+10^{-8}C$ está distribuida uniformemente sobre una corteza esférica de 12cm de radio (asumir que el potencial es cero muy lejos de las cargas). a) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico justo en el exterior de la corteza y justo en el interior de la misma? b) ¿Cuál es el valor del potencial eléctrico justo en el exterior y justo en el interior de la corteza? c) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el centro de la corteza? d) ¿Cuál es el módulo del campo eléctrico en dicho punto?

Resultado: a) $E=0 \;\; r=12\,cm(dentro)$ $\quad E=6.25\,kN/C \;\; r=12\,cm(fuera)$
b) $V=750\,V$ c) $V=750\,V$ d) $E=0$



corteza esférica cargada

queremos saber V

en todo el espacio

primero calculamos $\vec{E}$ por gauss

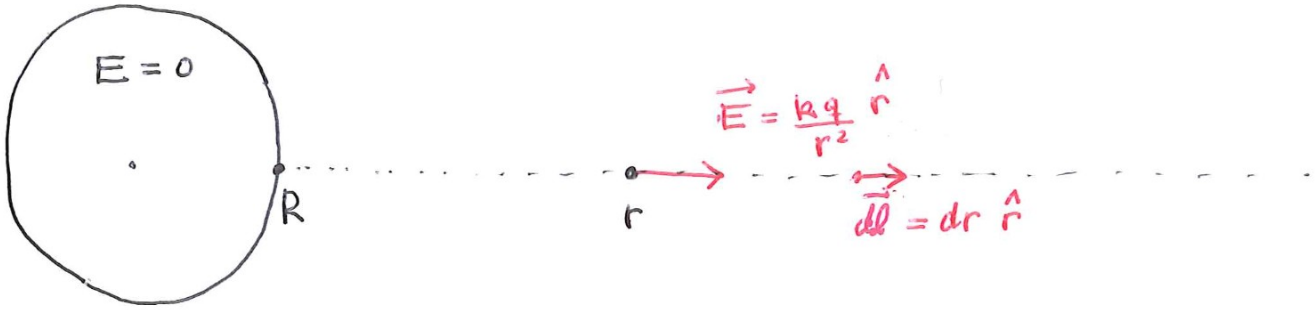
simetría esférica $\Rightarrow$ $\vec{E}$ radial $\Rightarrow$ sup. gauss esféricas

$r < R$ $\qquad E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{0}{\varepsilon_0}$ $\rightarrow$ carga encerrada nula

$$\boxed{E = 0}$$

$r > R$ $\qquad E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{q}{r^2}}$

Ahora veamos el potencial V



me muevo en dirección radial desde el punto r hasta $r = \infty$

$$\underbrace{V(\infty)}_{0\,V} - V(r) = -\int_r^\infty \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_r^\infty \frac{kq}{r^2}\,\hat{r} \cdot dr\,\hat{r}$$

elijo que el potencial en ∞ es 0 V

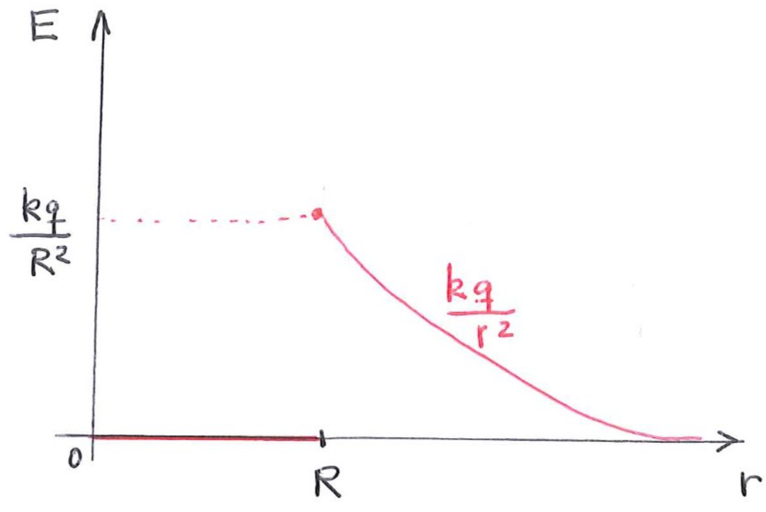
$$-V(r) = -kq \int_r^\infty \frac{1}{r^2}\,dr = +kq\left[\frac{1}{r}\Big|_r^\infty\right]$$

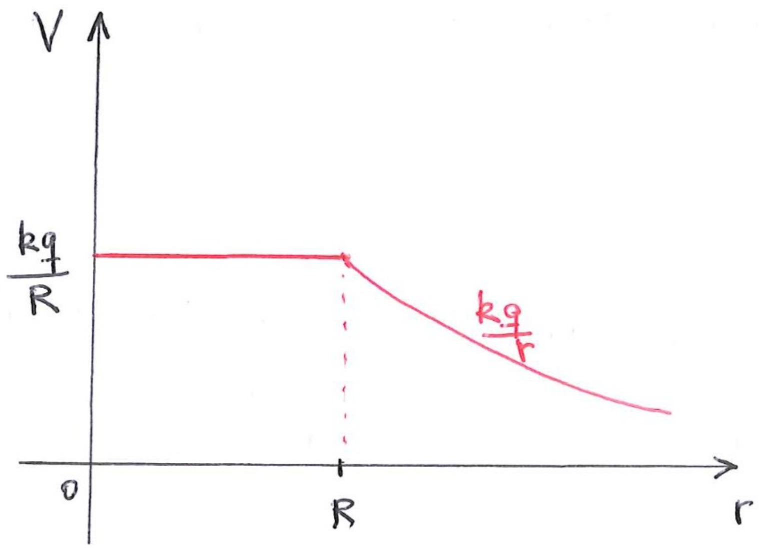
$$-V(r) = kq\left[0 - \frac{1}{r}\right] = -\frac{kq}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{kq}{r}}$$

igual que el potencial de una carga puntual

si $r < R \Rightarrow E = 0 \Rightarrow \Delta V = 0 \Rightarrow$ todos los puntos de $r<R$ tienen el mismo potencial





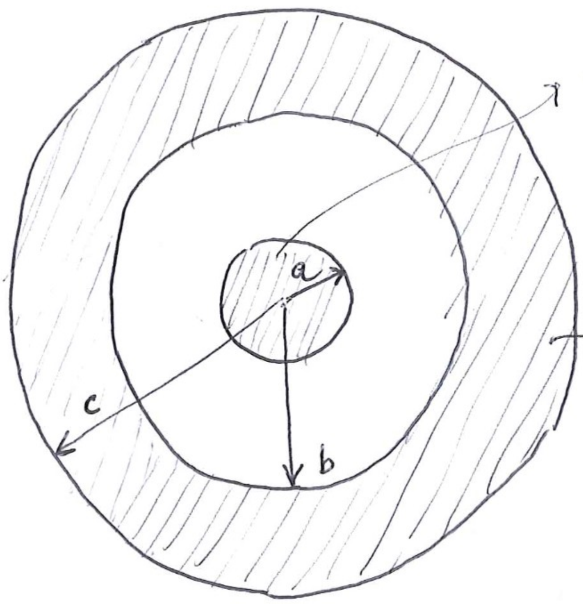
el campo eléctrico puede ser discontinuo si hay una distribucion superficial de carga

V no puede ser discontinuo !

Problema 47 Tema 1

47. @ Una corteza conductora esférica de radio interior b y radio exterior c rodea concéntricamente una pequeña esfera metálica de radio $a < b$. La esfera metálica tiene una carga positiva Q. La carga total sobre a corteza esférica conductora es –Q. a) ¿Cuál es el potencial de la corteza esférica? b) ¿Cuál es el potencial de la esfera cargada?

Resultado: a) $V=0$ b) $V=kQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$



esfera maciza conductora
carga $+Q$

corteza maciza conductora
carga $-Q$ (pregunta, donde se ubica esta carga $-Q$?)

Quiero saber V en todo el espacio

primero debo saber $\vec{E}$, simetría esférica $\Rightarrow \vec{E}$ radial
$\Downarrow$
sup. gauss esfericas

si $r<a$ $\quad E=0$ (interior conductor)

$a<b<r$ $\quad E\cdot 4\pi r^2 = \frac{+Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

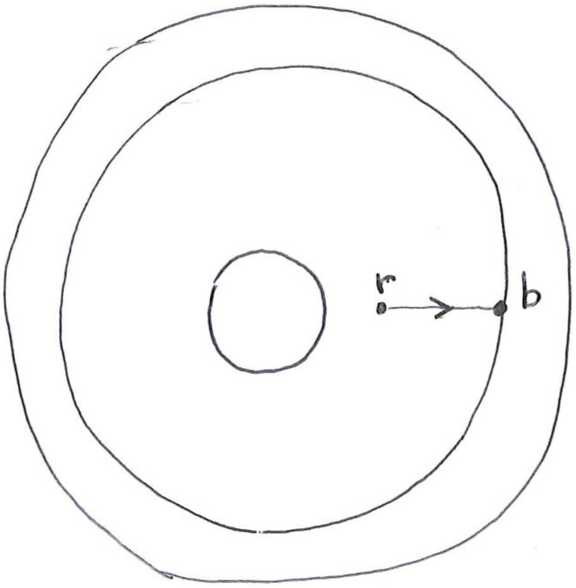
$b<r<c$ $\quad E=0$ (interior conductor)

$r>c$ $\quad E\cdot 4\pi r^2 = \frac{+Q-Q}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E=0$

entonces solo en la zona entre los conductores $(a<r<b)$ $E\neq 0$

donde $E = 0 \Rightarrow V =$ constante

si hacemos $V(\infty) = 0\,V$, V seguirá teniendo $0\,V$ hasta $r = b$, solo para $r < b$ donde hay campo variará



me muevo en dirección radial desde $a < r < b$ hasta b

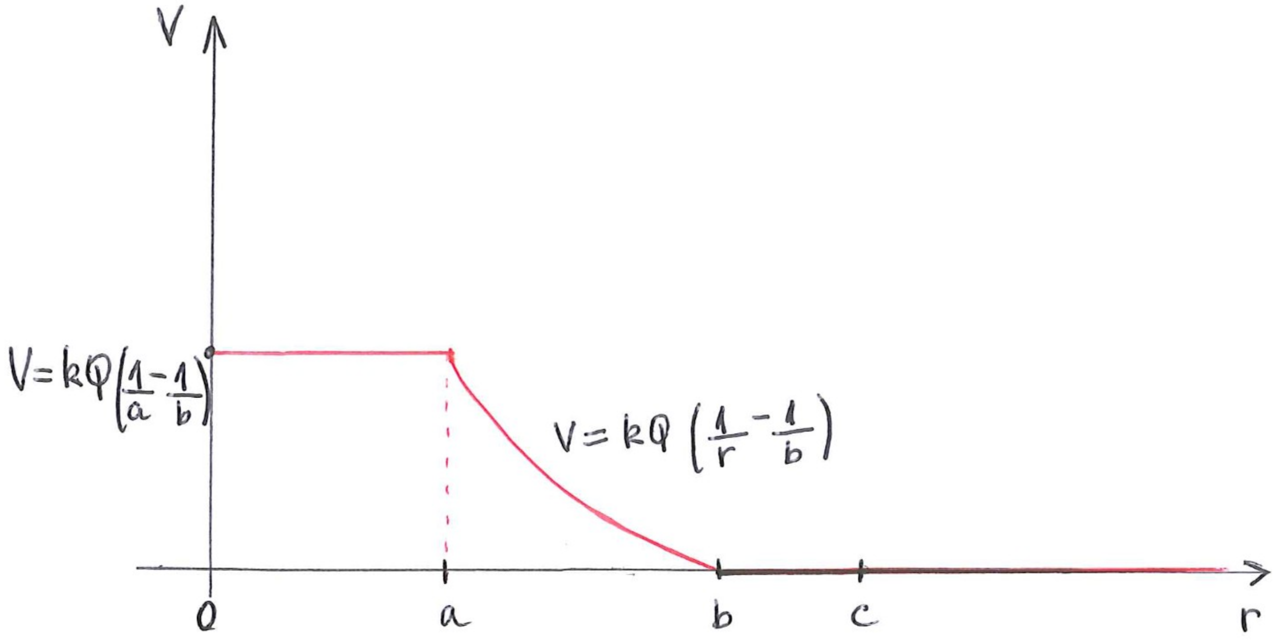
$$\vec{dl} = \hat{r}\,dr$$

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\underbrace{V(r=b)}_{0\,V} - V(r) = -\int_r^b \frac{kQ}{r^2}\,\hat{r}\,dr\,\hat{r} = -kQ\int_r^b \frac{1}{r^2}\,dr = \left.\frac{kQ}{r}\right|_r^b$$

$$= \frac{kQ}{b} - \frac{kQ}{r}$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{kQ}{r} - \frac{kQ}{b}$$



- Los conductores tienen el mismo potencial en todos sus puntos, pues $E=0$ en su interior!

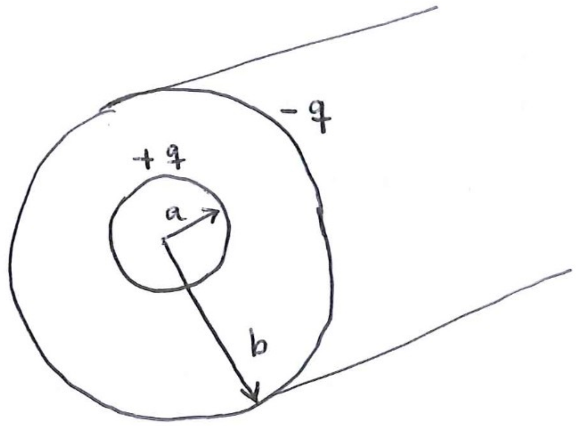
- La diferencia de potencial entre la esfera interior y la corteza interior es $kQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$, la esfera esta a mayor potencial.

- El campo $\vec{E}$ siempre va desde las zonas de mas potencial a las de menos

Problema 48 Tema 1

48. Dos cortezas cilíndricas conductoras de gran longitud poseen cargas iguales y opuestas. La corteza interior tiene un radio *a* y una carga +*q*; la exterior tiene un radio *b* y una carga –*q*. La longitud de cada corteza cilíndrica es *L*, siendo *L* mucho mas larga que *b*. Hallar la diferencia de potencial existente entre las dos capas de la corteza V_b-V_a.

Resultado: $V_b - V_a = \frac{2kQ}{L}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$



podemos considerar que la longitud L es tan grande que hay simetría cilíndrica

quiero saber la dif. de potencial entre ambos cortezas

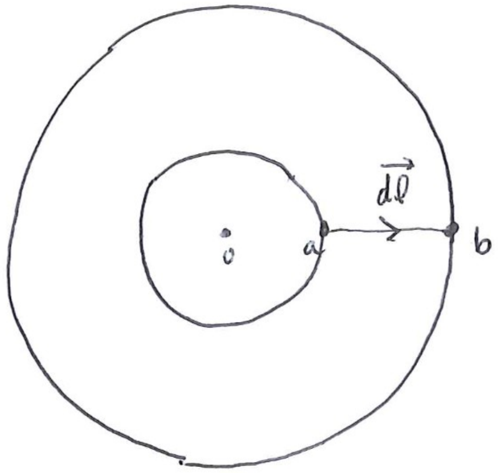
$\vec{E}$ tiene simetría cilíndrica $\Rightarrow$ sup gauss cilindros coaxiales de long. ℓ

$r < a \qquad E \cdot 2\pi r \ell = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = 0$

$a < r < b \qquad E \cdot 2\pi r \cancel{\ell} = \frac{\frac{+q\cancel{\ell}}{L}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{L\, 2\pi \varepsilon_0 r}$

$r > b \qquad E \cdot 2\pi r \ell = \frac{(+q-q)\frac{\ell}{L}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E = 0$

Solo tenemos campo entre las dos cortezas



$$\vec{dl} = dr\ \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{L 2\pi \varepsilon_0 r}\ \hat{r}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_a^b \frac{q}{L 2\pi \varepsilon_0 r}\ \hat{r}\ \ dr\ \hat{r}$$

$$V_b - V_a = \frac{-q}{L 2\pi \varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r}\, dr = \frac{-q}{L 2\pi \varepsilon_0} \left[\ln r \Big|_a^b \right]$$

$$V_b - V_a = \frac{-q}{L 2\pi \varepsilon_0} \left[\ln(b) - \ln(a) \right]$$

$$\boxed{V_b - V_a = \frac{-q}{L 2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$b > a \Rightarrow V_b - V_a < 0 \Rightarrow V_a > V_b$

lógico pues $\vec{E}$ se dirige hacia afuera

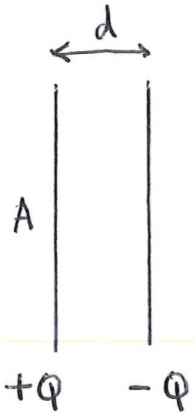
Capacidad

Un conductor ya vimos que está todo al mismo potencial. Este potencial dependerá de la carga que tenga el conductor. La capacidad del conductor se define como:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Condensador

Un condensador son dos conductores separados que se cargan con cargas opuestas. El condensador más común es uno de placas planas paralelas



$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$$

$$\Delta V = E\,d$$

$$C = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}\, d}{A\, \varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

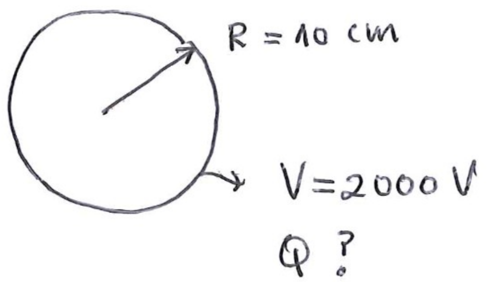
Un condensador acumula energía electrostática al cargarlo

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Problema 56 Tema 1

56. @ Un conductor esférico aislado de radio 10.0cm se carga a 2.00kV (el potencial lejos de la esfera es cero). a) ¿Cuánta carga se deposita en el conductor? b) ¿Cuál es la capacidad de la esfera? c) ¿Cómo se modificaría la capacidad de la esfera si se cargase a 6kV?

Resultado: a) 22.2 nC b) 11.1 pF c) no se modifica



Si $r < R$ $\quad E = 0$

Si $r > R$ $\quad E = \dfrac{kQ}{r^2}$

$V(r) = \dfrac{kQ}{r}$ si $r > R$

$V(r) = \dfrac{kQ}{R}$ si $r < R$ potencial constante en toda la esfera

a) $V = 2000\ V = \dfrac{kQ}{R} \Rightarrow Q = \dfrac{VR}{k} = \dfrac{2000 \times 0{,}1}{9 \times 10^{9}}$

$$\boxed{Q = 2{,}22 \times 10^{-8}\ C}$$

b) $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{2{,}22 \times 10^{-8}\ C}{2000\ V} = \boxed{1{,}11 \times 10^{-11}\ F}$

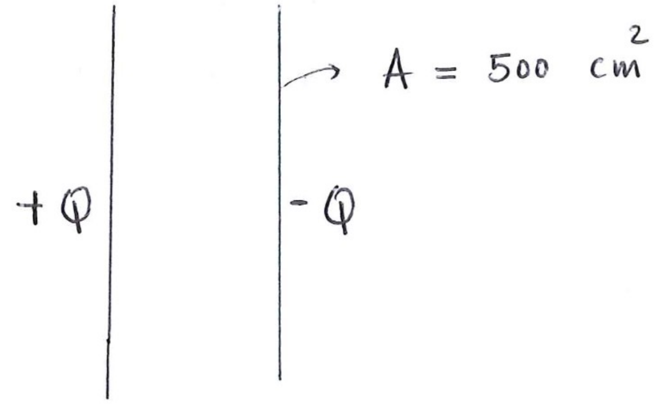
c) $C = \dfrac{\cancel{Q}}{\dfrac{k\cancel{Q}}{R}} = \dfrac{R}{k}$ C no depende de V ni de Q, solo de su radio

Por tanto C no cambiará

Problema 60 Tema 1

60. @ Un condensador de placas paralelas con placas de área $500 cm^2$ se carga con una diferencia de potencial V y después se desconecta de la fuente de voltaje. Cuando las placas se separan 0.4cm, el voltaje entre ellas se incrementa en 100V. a) ¿Cuánto vale la carga Q en la placa positiva del condensador? b) ¿En cuánto ha crecido la energía almacenada en el condensador por causa del movimiento de las placas? c) Justifica el resultado de b) determinando la variación de energía del condensador al mover las placas.

Resultado: a) Q=0.1105 nC b) $U = 0.553 \mu J$



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A \varepsilon_0}$$

por tanto E no se modifica al separar las placas

pero la diferencia de potencial si cambia al separarlas

$$\Delta V_0 = E\, d$$

$$\Delta V_f = E\,(d + \Delta d)$$

$$E \cdot \Delta d = 100 \text{ V} \qquad \Delta d = 0{,}4 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow E = \frac{100 \text{ V}}{0{,}4 \times 10^{-2} \text{ m}} = 25000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E = \frac{Q}{A \varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad Q = A \varepsilon_0 E$$

$$Q = 500 \times 10^{-4} \cancel{m^2} \cdot 8{,}85 \times 10^{-12} \frac{C^{2}}{\cancel{N m^2}} \cdot 25000 \frac{\cancel{V}}{\cancel{m}}$$

$$A = 500 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{Q = 1{,}10625 \times 10^{-8} \text{ C}}$$

b) $$U_f = \frac{1}{2} Q \, \Delta V_f$$

$$U_0 = \frac{1}{2} Q \, \Delta V_0$$

$$U_f - U_0 = \frac{1}{2} Q \overbrace{(\Delta V_f - \Delta V_f)}^{100 \text{ V}}$$

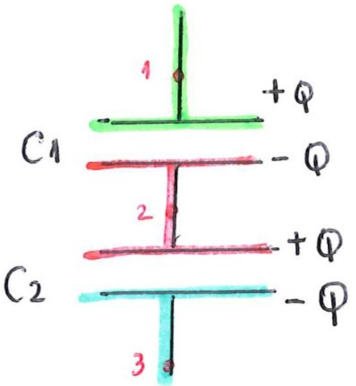
$$= \frac{1}{2} \, 1{,}10625 \times 10^{-8} \cdot 100 = \boxed{5{,}53 \times 10^{-7} \text{ J}}$$

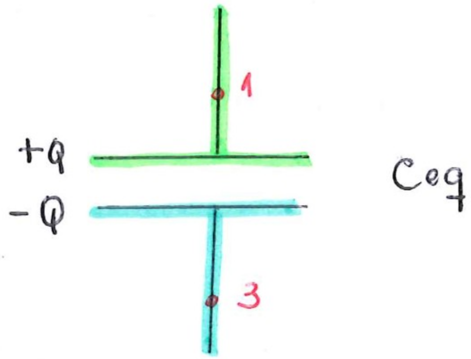
de donde viene
este aumento de
la energía acumulada

interpretarlo en función
de la densidad de energía $u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

Asociación de condensadores

En serie



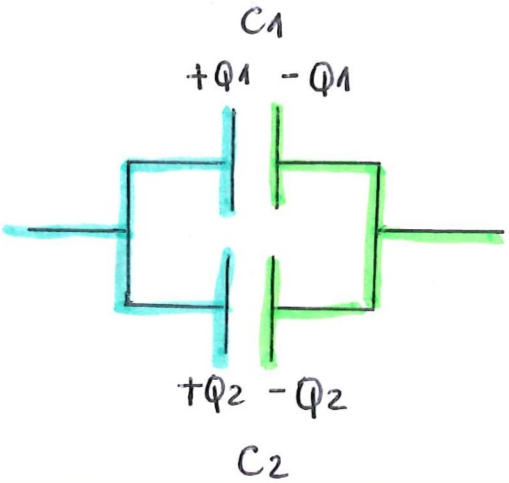


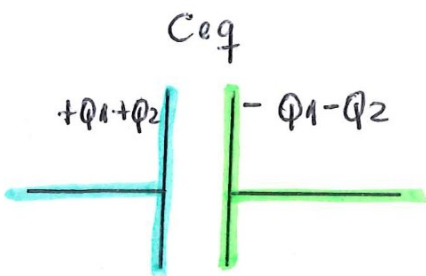
el condensador equivalente con la misma ΔV tiene la misma carga

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

En paralelo

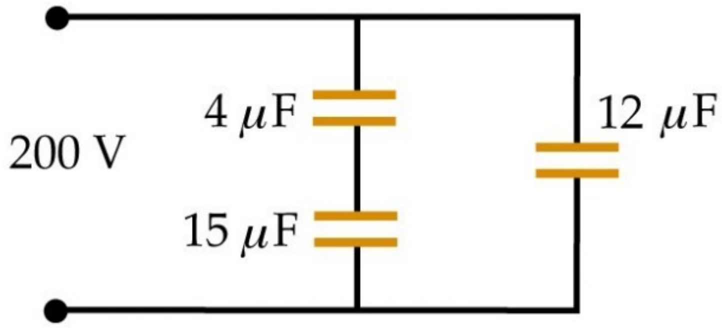




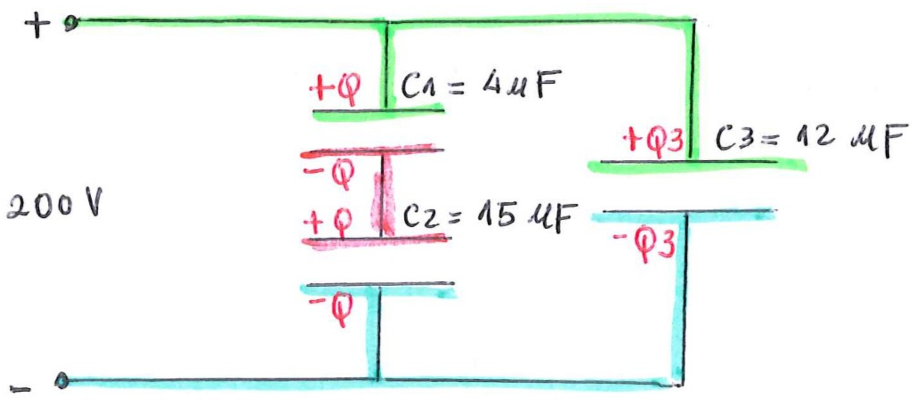
$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Problema 66 Tema 1

66. @ Para el dispositivo que se muestra en la figura, calcular: a) la capacidad total efectiva entre los terminales, b) la carga almacenada en cada uno de los condensadores, c) el voltaje a través de cada condensador y d) la energía total almacenada.



Resultado: a) $C_{eq}=15.2\,\mu F$ b) $Q_4=Q_{15}=0.632\,mC$ $Q_{12}=2.4\,mC$
c) $V_{12}=200$ $V_4=158\,V$ $V_{15}=42.1\,V$ d) $U=0.304\,J$



a) $$C_{eq} = \underbrace{\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1+C_2}}_{C_{eq\,12}} + C_3 = \frac{4\times10^{-6} \cdot 15\cancel{\times10^{-6}}}{19\cancel{\times10^{-6}}} + 12\times10^{-6}$$

$$= 3{,}15 \times 10^{-6} + 12\times10^{-6}$$

$$= \boxed{15{,}15 \times 10^{-6} \text{ F}}$$

b) $Q_1 = Q_2 = Q = C_{eq_{12}} \cdot \Delta V$

$= 3{,}15 \times 10^{-6}\ F \cdot 200\ V$

$= \boxed{6{,}31 \times 10^{-4}\ C}$

$Q_3 = C_3 \cdot \Delta V = 12 \times 10^{-6}\ F \cdot 200\ V$

$= \boxed{2{,}4 \times 10^{-3}\ C}$

c) $\Delta V_3 = \boxed{200\ V}$

$\Delta V_1 = \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{6{,}31 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-6}} = \boxed{157{,}75\ V}$

$\Delta V_2 = \dfrac{Q_2}{C_2} = \dfrac{6{,}31 \times 10^{-4}}{15 \times 10^{-6}} = \boxed{42{,}1\ V}$

d) $U_{TOTAL} = \frac{1}{2} C_{eq} \Delta V^2 = \frac{1}{2} 15{,}15 \times 10^{-6} \cdot 200^2$

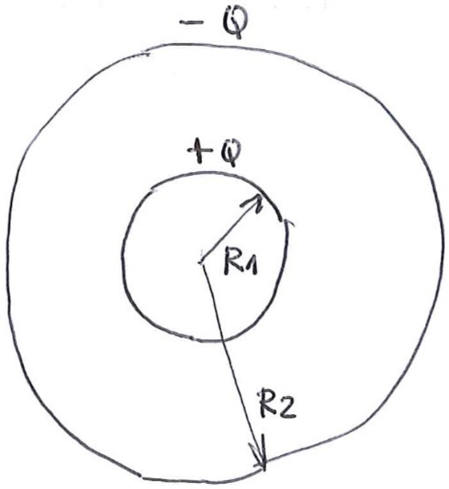
$= \boxed{0{,}303\ J}$

debería ser igual a

$U_{TOTAL} = \frac{1}{2} C_1 \Delta V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \Delta V_2^2 + \frac{1}{2} C_3 \Delta V_3^2$

Problema 71 Tema 1

71. @ Un condensador esférico está formado por dos cortezas esféricas concéntricas y delgadas, de radios R_1 y R_2. a) Demostrar que la capacidad viene dada por $C=4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2-R_1}$. b) Demostrar que cuando los radios de las cortezas son casi iguales, la capacidad del sistema viene dada, aproximadamente, por la expresión correspondiente a un condensador de placas paralelas $C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}$, donde A es el área de la esfera, y $d=R_2-R_1$.



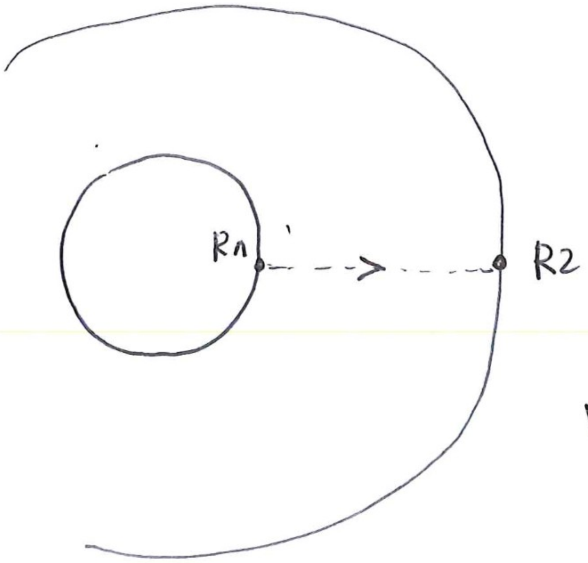
por gauss

si $r < R_1 \Rightarrow E = 0$

si $R_1 < r < R_2 \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^2}$

si $r > R_2 \Rightarrow E = 0$

solo hay variación de potencial entre las dos cortezas esféricas $(R_1 < r < R_2)$



$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\vec{dl} = dr\,\hat{r}$$

$$V(R_2) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{kQ}{r^2}\,\hat{r}\,dr\,\hat{r}$$

$$V(R_2) - V(R_1) = -k\varphi \left[-\frac{1}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} \right] = k\varphi \underbrace{\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]}_{<0}$$

$$\Downarrow$$

$V(R_2) < V(R_1)$

lógico!

$$V(R_1) - V(R_2) = \Delta V = k\varphi \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = k\varphi \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} \right)$$

$$C = \frac{\varphi}{\Delta V} = \frac{\cancel{\varphi}}{k\cancel{\varphi}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} \right)} = \frac{R_1 \cdot R_2}{k(R_2 - R_1)}$$

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}}$$

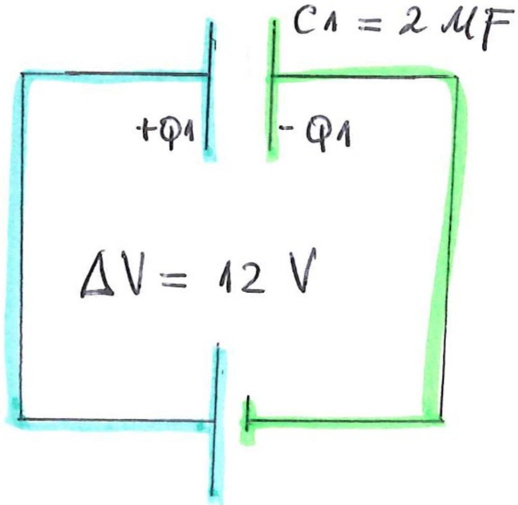
Si $R_1 \cong R_2 \equiv R$ $\qquad R_2 - R_1 = d$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad A = 4\pi R^2$$

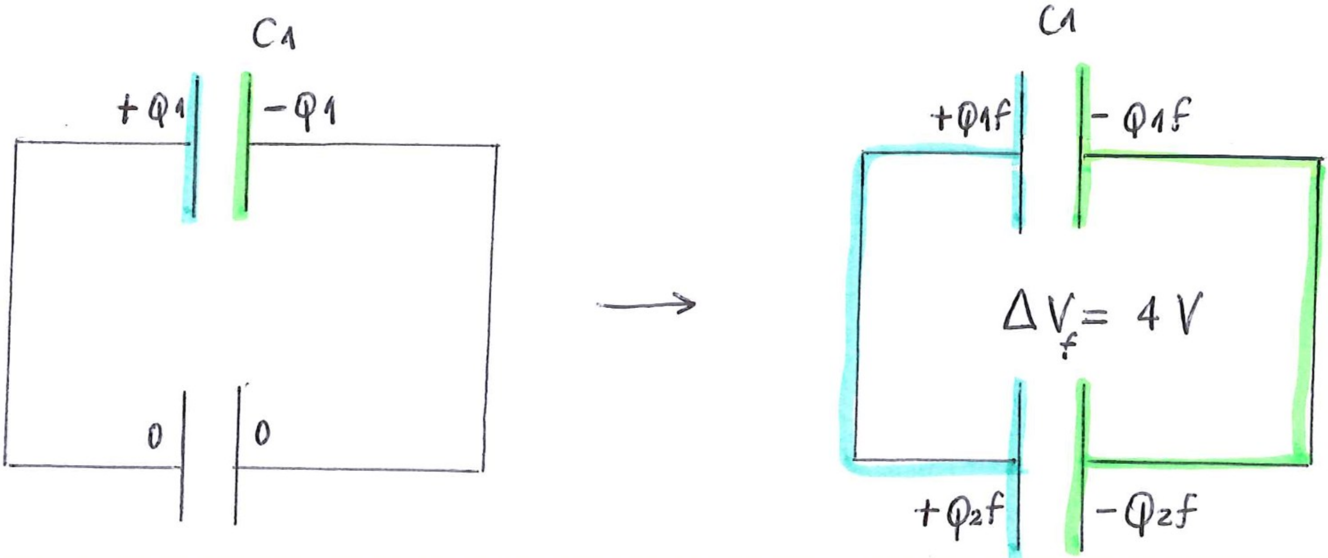
Problema 72 Tema 1

72. @ Un condensador de 2.0μF se carga a una diferencia de potencial de 12V y, a continuación, se desconecta de la batería. Cuando se conecta un segundo condensador (inicialmente sin cargar) en paralelo a este condensador, la diferencia de potencial disminuye hasta 4.0V. ¿Cuál es la capacidad del segundo condensador?

Resultado: $C_2 = 4.0 \mu F$



$$Q_1 = C\,\Delta V = 2 \times 10^{-6} \cdot 12$$
$$= 2{,}4 \times 10^{-5}\ C$$



$t = 0$

$C_2 = ?$

$$Q_{1f} = C_1 \, \Delta V_f = 2 \times 10^{-6} \, F \cdot 4 \, V = 8 \times 10^{-6} \, C$$

$$Q_{1f} + Q_{2f} = Q_1 \Rightarrow Q_{2f} = Q_1 - Q_{1f}$$

$$= 2{,}4 \times 10^{-5} - 8 \times 10^{-6}$$

$$= 1{,}6 \times 10^{-5} \, C$$

$$C_2 = \frac{Q_{2f}}{\Delta V_f} = \frac{1{,}6 \times 10^{-5} \, C}{4 \, V} = \boxed{4 \times 10^{-6} \, F}$$