3.- Hallar el dominio y la imagen o recorrido de las funciones:

a) $f(x, y) = \ln(xy - 6)$ **b)** $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2y^2 - 9}}{x}$.

c) $h(x,y) = \arccos \dfrac{y}{x}$ **d)** $p(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

a) $f(x,y) = \ln(xy-6)$ $\quad xy > 6 \quad \begin{cases} y > \frac{6}{x} & \forall x > 0 \\ y < \frac{6}{x} & \forall x < 0 \end{cases}$

indefinido $x = 0$ ó $y = 0$

b) $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2y^2 - 9}}{x}$ $\quad x^2y^2 \geq 9 \quad \forall x,y \neq 0 \quad y \geq \sqrt{\frac{9}{x^2}}$

c) $h(x,y) = \arccos\left(\frac{y}{x}\right)$ $\forall x \neq 0; \left|\frac{y}{x}\right| \leq 1; y \leq |x| \ \forall x \neq 0$

d) $p(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ $\quad x^2 + y^2$ si x ý $y \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} p(x,y) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\theta}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\cos\theta}{r}$$

↪ no concluye

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} p(x,y) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} p(x,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0$$

$\neq \ \to \ \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} p(x,y)$

6.- Calcular los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ **b.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ **c.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y^4}{x^3-y^4}$

d. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy-x+y}{x+y}$ **e.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$ **f.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{\operatorname{sen}x \ln(1+y)}$

a. $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 2$$

b. $$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} (x-y) = 2$$

c. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^3-y^4}$$

$$\lim_{y\to 1} \frac{x-y^4}{x^3-y^4} = \lim_{y\to 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x-y^4}{x^3-y^4} = \lim_{x\to 1} \frac{1-y^4}{1-y^4} = 1 \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(1,1)} c(x,y)$$

d. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-x+y}{x+y} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta - r\cos\theta + r\sin\theta}{r(\sin\theta + \cos\theta)} = \lim_{r\to 0^+} r\sin\theta\cos\theta - \cos\theta + \sin\theta = \lim_{r\to 0^+} r\sin\theta\cos\theta - 1$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} d(x,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y}{y} = 1 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} d(x,y) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{-x}{x} = -1 \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} d(x,y)$$

e. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \lim_{r\to 0^+} \left(\frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\right)^2 = \lim_{r\to 0^+} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} e(x,y)$$

f. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{\sin(x)\ln(1+y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{xy} = 1$$

$e^{xy}-1 \rightsquigarrow xy$

$\sin(x) \rightsquigarrow x$ ($x\to 0$)

$\ln(1+y) \rightsquigarrow y$ ($y \to 0$)

7.- Estudiar la continuidad de las funciones:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2(\sin^2\theta + r^2\cos^4\theta)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta + r^2\cos^4\theta} \to \text{No decide}$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^4} = 0 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0 \to \text{No decide}$$

$$\lim_{(x,ax)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,ax)\to(0,0)} \frac{x^3a^2}{x^2+a^4x^4} = \lim_{(x,ax)\to(0,0)} \frac{xa^2}{1+a^4x^2} = \frac{0}{1} = 0 \to \text{No decide}$$

$$\lim_{(ay^2,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(ay^2,y)\to(0,0)} \frac{ay^4}{a^2y^4+y^4} = \lim_{(ay^2,y)\to(0,0)} \frac{a}{a^2+1} \to \text{depende de } a \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow f(x,y) \text{ no es continua en } (0,0)$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^4} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(ay^2,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^4}=\lim_{(ay^2,y)\to(0,0)}\frac{a^2y^5}{a^2y^4+y^4}=\lim_{(ay^2,y)\to(0,0)}\frac{a^2y}{a^2+1}\longrightarrow \text{No decide}$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^4}=\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{0}{y^4}=0 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^4}=\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{0}{x^2}=0 \longrightarrow \text{No decide}$$

$$\lim_{r\to0^+}\frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta)}=\lim_{r\to0^+}\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0 \Rightarrow g(x,y)\ \text{es continua en}\ \mathbb{R}$$

8.- Dada la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ **, se pide:**

a. **Hallar, si existe,** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b. **Estudiar la continuidad de f en todo R^2, según los valores de k.**

Continua en $\mathbb{R}$ para $K=0$

Continua en $\mathbb{R}-(0,0)$ $\forall K\neq0$

a
$$\lim_{(ay,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy}=\lim_{(ay,y)\to(0,0)}\frac{ay^3}{2a^2y^2+3y^2-ay^2}=\lim_{(ay,y)\to(0,0)}\frac{ay}{2a^2+3-a}\longrightarrow\text{No decide}$$

$$\lim_{r\to0^+}\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{2r^2\cos^2\theta+3r^2\sin^2\theta-r^2\sin^2\theta\cos^2\theta}=\lim_{r\to0^+}\frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}=\lim_{r\to0^+}\frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{2+\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}=0$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy}=\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{0}{3y^2}=0\ ;\ \lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy}=\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{0}{2x^2}=0\longrightarrow\text{No decide}$$

9.- Estudiar la continuidad en (0, 0) de las siguientes funciones:

a. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b. $h(x,y)=\begin{cases}g(x,y)\cdot\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$, **siendo g(x, y) una función continua en (0,0) tal que g (0, 0) =0. Nota: Utilizar que** $|xy|\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

c. $j(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0^+}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\lim_{r\to0^+}\cos\theta\sin\theta\Rightarrow\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)\Rightarrow\text{No es continua en }(0,0)$$

b. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)}{2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{0}{2}=0\Rightarrow\text{Es continua en }\mathbb{R}$$

c. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0^+}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta[r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]}{r^2[\cos^2\theta+\sin^2\theta]}=\lim_{r\to0^+}\cos\theta\sin\theta\ r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0\Rightarrow\text{Es continua en }\mathbb{R}$$

* Caso Particular del 8b. donde $g(x,y)=(x^2-y^2)$

$\sin(x) = x$
$x \to 0$

10.- Dada la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ k & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **. Se pide:**

a) Hallar, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) Estudiar la continuidad de f en todo R², según los valores de k.

a. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x)\sin(y)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\sin^2(r\cos\theta)\sin(r\sin\theta)}{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\theta\, r\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

b. $f(x,y)$ $\begin{cases} \text{continua en } \mathbb{R}^2 \text{ si } K=0 \\ \text{continua en } \mathbb{R}^2-(0,0)\ \forall K\in\mathbb{R}-\{0\} \end{cases}$

11.- Dada la función $z = \dfrac{y^2\left(1+2y\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)+x^2}{x^2+y^2}$ **. Se pide:**

a) Dominio de la función.
b) Límites reiterados en el punto (0,0).
c) A la vista del resultado anterior ¿existe el límite de f en (0,0)? En caso afirmativo calcularlo.
d) ¿Es continua la función en (0,0)?
e) Definir f(0,0) para que f sea continua en dicho punto.

a. $Df = \mathbb{R}^2 - \{0,y\}\ \forall y\in\mathbb{R}$

b. $$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^2(1+2y\sin(\frac{1}{x}))+x^2}{x^2+y^2} = \infty \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

c. $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} z(x,y)$ d. $\Rightarrow$ No es continua en $(0,0)$

e. $f(0,0) = 1$

13.- Consideremos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ **. Se pide:**

a) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de cualquier recta $y = mx$.
b) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de la parábola $y = x^2$.
c) ¿Existe el límite? Justifica la respuesta.

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x^2+m^2x^2}{mx^2} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{1+m^2}{m} = \frac{1+m^2}{m}$$

$\nexists$ límite ya que dependerá de la pendiente m.

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{x^2+x^4}{x^3} = \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{1+x^2}{x} = \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{1}{x}+x = \infty$$

DEFINICIÓN

Sea $M_0(x_0,y_0)$ tq f puede ser definida en este punto. Se dice que f admite un límite ℓ en M_0 si:

(x_0,y_0)

All Exists

$\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0, \ (|x-x_0|<\eta; |y-y_0|<\eta) \Rightarrow |f(x,y)-\ell|<\varepsilon$

La cambiar ε cambia a η, η depende de ε

se cumplen las 2 condiciones

no hace falta abs() porque ε es estrictamente >0

14.- Demostrar aplicando la definición de límite que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(y\cos\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tq

15.- Dada la función

$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ k & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **se pide:**

a) Límites radiales en (0, 0)
b) Límites reiterados en (0, 0)
c) ¿Existe límite en (0, 0)?
d) ¿Existe algún valor de k para el cual la función sea continua en todo $\mathbb{R}^2$**?**

a. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}} = \lim_{r\to 0^+} r^2\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

$$\left\{ \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{mx^3}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{mx^2}{\sqrt{1+m}} = 0 \right.$$

b. $$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y} = 0 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x} = 0$$

c. Sí, es 0

d. Para $K=0$ $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$, $\forall K\in\mathbb{R}-\{0\}$ $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2-(0,0)$

16.- ¿Existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^2}{x^4y^2+(y-x^2)^2}$ **? Caso afirmativo, calcularlo.**

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^4} = 0 \to \text{No decide}$$

$\Updownarrow \neq$

$$\lim_{(x,x^2)} \frac{x^8}{x^8+(x^2-x^2)^2} = 1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \nexists$$

17.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **. Se pide:**

a) Dominio de f.
b) Estudiar la continuidad de f.

$$\lim_{x\to 0}\sin(x) = x$$

$$(x^2+y^2)\neq 0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}^2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0^+}\frac{\sin(r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta))}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\lim_{r\to0^+}\frac{\sin(r^2)}{r^2}=\lim_{r\to0^+}\frac{r^2}{r^2}=1$$

$f(x,y)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$

18.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+4y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **. Se pide:**

a) Dominio de f.
b) Estudiar la continuidad de f.

$D_f=\mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+4y^2}=\lim_{r\to0^+}\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta+4r^2\sin\theta}=\lim_{r\to0^+}\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+4\sin\theta}\longrightarrow \text{No decide}$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+4y^2}=\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{0}{4y^2}=0$$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+4y^2}=\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{0}{x^4}=0\longrightarrow \text{No decide}$$

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)}\frac{x^4}{x^4+4x^4}=\frac{1}{5}\quad\neq\quad\longrightarrow\ \nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$$

19.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}2+\dfrac{x^2y(y^2+x^2)}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) Hallar, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) ¿Es f continua en (0, 0) para algún valor de k?

$$\lim_{(x,y)}2+\frac{x^2y(y^2+x^2)}{x^4+y^4}=\lim_{r\to0^+}2+\frac{r^5\cos\theta\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{r^4(\sin^4\theta+\cos^4\theta)}=\lim_{r\to0^+}2+\frac{r\cos\theta\sin\theta}{2}=2$$

$f(x,y)$ es continua en $(0,0)$ para $k=2$

20.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2x(y^2+x^2)}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) Hallar, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2x(y^2+x^2)}{x^4+y^4}=\lim_{r\to0^+}\frac{r^5\cos\theta\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{r^4(\sin^4\theta+\cos^4\theta)}=\lim_{r\to0^+}\frac{r\cos\theta\sin\theta}{2}=0$$

$\boxed{K=0}$

21.- Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **la función:** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^py^q}{2x^2+3y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **con p>0 y q>0.**

Obtener $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **según los valores de p y q**

para $p+q=2$, $\nexists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ ya que el límite por polares depende solo de θ

para $p+q>2$ $\exists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ ya que el límite por polares dará 0

22.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **la función:** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **Estudiar la continuidad de f.**

$$\lim_{(r,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^5}{x^2+y^4} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3(\cos^3\theta + r^2\sin^5\theta)}{r^2(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos^3\theta + r^3\sin^5\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$$

$$\lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^6+y^5}{y^4+y^4} = \lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^2+y}{2} = 0 \quad \left\{ \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^5}{y^4} = 0 \right. \quad \left\{ \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2} = 0 \right.$$

$$\lim_{(my^2,y)\to(0,0)} \frac{m^3y^6+y^5}{m^2y^4+y^4} = \lim_{(my^2,y)\to(0,0)} \frac{m^3y^2+y}{m^2+1} = 0$$