Cuantización del campo escalar real:

Comencemos con la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar masivo:

$$(\Box + m^2)\varphi = (\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2)\varphi =$$
$$= (\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi = 0.$$

Las soluciones son del tipo ondas planas:

$$\varphi(x,t) \sim e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$$

denotemos $E \to k_0 = \omega_k$
$\vec{p} \to \vec{k}$

$$\varphi(x) \sim e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$
$\hookrightarrow \varphi(x^\mu)$

Escribamos la solución general en término de un desarrollo de Fourier:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\varphi(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \varphi^{*}(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right]$$

Protocolo de cuantización:

$$\varphi(\vec{k}) \longrightarrow \hat{a}(\vec{k})$$

$$\varphi^*(\vec{k}) \longrightarrow \hat{a}^+(\vec{k})$$

campo $\longrightarrow$ operador asociado a cada modo

De esta forma, hacemos $\varphi(x) \longrightarrow \hat{\varphi}(x)$:

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{a}^+(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right]$$

Recordemos que $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$

y $\pi(x) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} = \partial_0\varphi$

Por lo tanto, el momento conjugado a $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\pi}(x)$, será:

$$\hat{\pi}(x) = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left[\hat{a}(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} - \hat{a}^+(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right]$$

Recordemos que, en Mecánica Cuántica no relativista y, si consideramos coordenadas cartesianas:

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$$

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 .$$

Ahora vamos a hacer el cambio

$$\delta_{ij} \longrightarrow \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

y consideremos conmutadores entre los campos, evaluados en el mismo tiempo.

Impongamos

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)] = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)] = 0 .$$

Ejercicio (sencillo) (ojo, diferente normalización para δ).

Supongamos

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \left[a(\vec{p}) e^{ipx} + a^+(\vec{p}) e^{-ipx} \right]$$

donde $p^\alpha = (p^0, p^i)$ y

$$px = p_\alpha x^\alpha = \eta_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta =$$

$$= p^0 x^0 - p_i x^i$$

Calculad $[\varphi(x), \pi(y)]$ con $x^0 = y^0$.
Obtened(*) las siguientes relaciones de conmutación para a y a^+:

$$[a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] = \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}')] = [a^+(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] = 0$$

(*) suponiendo las anteriores relaciones de conmutación para $\hat{\varphi}(x)$ y $\hat{\pi}(x)$.

Hemos obtenido relaciones de conmutación de un conjunto infinito de osciladores armónicos. ¿Por qué?

$$(\Box + m^2)\varphi = 0$$

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(\vec{p},t)$$

Entonces (ejercicio), $\varphi(\vec{p},t)$ satisface

$$\left[\partial_t^2 + (\vec{p}^{\,2} + m^2)\right]\varphi(\vec{p},t) = 0,$$

que es la ecuación de oscilador armónico con $\omega_{\vec{p}} = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$

Vamos a hablar ahora de

Estados en QFT

¿Cómo actúan los operadores de campo sobre los estados del mismo?

Comencemos por el estado de vacío, $|0\rangle$.

El vacío es aniquilado por operador destrucción:

$$\hat{a}(\vec{k})\,|0\rangle = 0$$

Podemos saltar de $|0\rangle$ a $|\vec{k}\rangle$ (estado con momento $\vec{p}$ o nº de onda $\vec{k}$) mediante

$$|\vec{k}\rangle = \hat{a}^{+}(\vec{k})\,|0\rangle$$

↳ describe estado de una partícula

Para un estado de dos partículas:

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = \hat{a}^{+}(\vec{k}_1)\,\hat{a}^{+}(\vec{k}_2)\,|0\rangle$$

y, en general:

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \ldots, \vec{k}_n\rangle = \hat{a}^{+}(\vec{k}_1)\,\hat{a}^{+}(\vec{k}_2)\cdots\hat{a}^{+}(\vec{k}_n)\,|0\rangle$$

Cada operador de creación crea una partícula con momento $\hbar\vec{k}_i$ y energía

$\hbar\omega_{k_i}$, donde $\omega_{k_i} = \sqrt{\vec{k}_i^{\,2} + m^2}$

De forma análoga, $\hat{a}(\vec{k}_i)$ destruye una partícula con el mismo momento y energía.

Descomposición del campo

Definimos la parte del campo con frecuencia positiva como aquella que contiene operadores destrucción:

$$\hat{\varphi}^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}\,\hat{a}(\vec{k})\,e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

De forma equivalente, la parte con frecuencia negativa es

$$\hat{\varphi}^-(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}\,\hat{a}^+(\vec{k})\,e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$