## Ejercicio 1

Si $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ probar que :

$$\max\{|x_i| : i = 1, ..., n\} \leq \|\mathbf{x}\| \leq |x_1| + ... + |x_n| \leq n.\max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}.$$

¿Qué interpretación geométrica se puede dar al resultado anterior en el caso $n = 2$?

$n=2$

$\max\{|x_i| : i=1,2\} \leq \|X\| \leq |X_1|+|X_2| \leq 2.\max\{|X_i| : i=1,2\} \Longleftrightarrow 2 \leq \sqrt{1^2+2^2} \leq |1|+|2| \leq 2\cdot 2$

$= \sqrt{5} = 2'36 \leq 3 \leq 4$

Si $x=(X_1,...,X_n) \in \mathbb{R}^n$

$\max\{|X_i|, i=1,...,n\} \leq \|X\|_2 \leq |X_i| + ... + |X_n| \leq n \max\{|X_i|; i=1,...,n\}$

$\rightarrow$ Suponemos $\max\{|X_i|, i=1,...,n\} = |X_k|$ $\quad |X_k| = \sqrt{x_k^2} \leq \sqrt{x_1^2+...+x_k^2+...+x_n^2} = \|X\|_2$

$\|X\|_2^2 = x_1^2 + ... + x_n^2 = \underbrace{|x_1|^2+...+|x_n|^2}_{2} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{2}|x_i|^2 + 2\sum_{j=1}^{n}|x_i||x_j| = (|x_1|+...+|x_n|)^2$

Veremos, finalmente, $\|x\|_2^2 \leq (|x_1|+...+|x_n|)^2 \Rightarrow \|x\| \leq |x_1|+...+|x_n|$

Sabemos que:

$\forall i=1,...,n \;;\; |x_i| \leq |x_k| \Rightarrow |x_1|+...+|x_n| \leq \overbrace{|x_k|+...+|x_k|}^{n \text{ veces}} = n|x_k|$

## Ejercicio 2

Probar que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que :

$$|\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\,| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

$||x|-|y|| \leq |x-y|$ $\quad$ * Desigualdad triangular

- $|x| = |x-y+y| \overset{*}{\leq} |x-y|+|y| \Longleftrightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$
- $|y| = |y-x+x| \overset{*}{\leq} |y-x|+|x| = |x-y|+|x| \Longleftrightarrow |y|-|x| \leq |x-y| \Longleftrightarrow |x|-|y| \geq -|x-y|$

$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y| \quad \Longrightarrow \quad ||x|-|y|| \leq |x-y|$

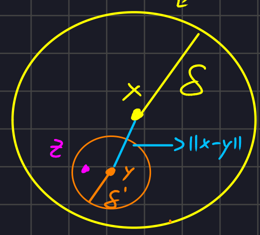
$\|x\|_2 = \|(x-y)+y\|_2 \leq \|x-y\|_2 + \|y\|_2 \Longleftrightarrow \|x\|_2 - \|y\|_2 \leq \|x-y\|_2$

$\|y\|_2 = \|(y-x)+x\|_2 \leq \underbrace{\|y-x\|_2}_{=\|x-y\|_2} + \|x\|_2 \Longleftrightarrow \|y\|_2 - \|x\|_2 \leq \|x-y\|_2$

5. $d(x+z, y+z) = \|x+z-y-z\|_2 = \|x-y\|_2 = d(x,y)$

6. $d(tx, ty) = \|tx - ty\|_2 = |t|\,\|x-y\|_2 = |t|\, d(x,y)$
   la linealidad y $x \geq 0$ de $f(x)=\sqrt{x}$

En $\mathbb{R}^2$ xd




**Ejercicio 3**

Si $\mathbf{y} \in E(\mathbf{x}, \delta)$ encontrar $\delta'$ de modo que $E(\mathbf{y}, \delta') \subseteq E(\mathbf{x}, \delta)$.

$\rightarrow$ Tomando $\delta' = \delta - \|x-y\|$ tenemos lo que queremos. En efecto, sea $z \in E(y, \delta') \overset{?}{\Rightarrow} z \in E(x, \delta)$

$\Longleftrightarrow \|x-z\| < \delta$ (def.)      ¿$\delta' = \sqrt{\delta^2 + \|x-y\|_2^2}$?      ¿$\delta'$?

$*d\Delta$      distancia máxima de y a z

$\|x-z\|_2 = \|x-y+y-z\|_2 \overset{*}{\leq} \|x-y\|_2 + \|x-z\|_2 < \|x-y\|_2 + \delta' = \|x-y\|_2 + \delta - \|x-y\|_2 - \delta$
($z \in E(y,\delta')$)

no es $\leq$ xq $z \in E(y,\delta')$ que quiere decir que la frontera NO está incluida

$\Rightarrow \|x-z\|_2 < \delta \Leftrightarrow z \in E(x,\delta)$      En conclusión, $E(y,\delta') \subseteq E(x,\delta)$

Ejercicio 7

a) Probar $E(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < \delta\}$ es abierto $\rightarrow$ Consecuencia inmediata del ej. 3

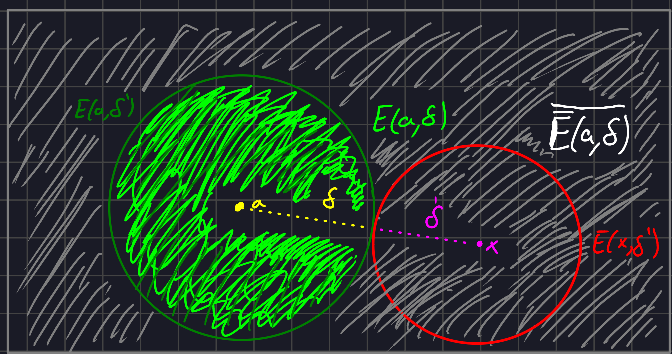
b) Probar $\overline{E}(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x-a\| \leq \delta\}$ es cerrado

Consideramos el complementario: $(\overline{E}(a,\delta))^c = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x-a\| > \delta\}$

Sea $x \in (\overline{E}(a,\delta))^c$, tenemos $\delta' = \|x-a\| - \delta$ tenemos entonces $E(x,\delta') \subseteq (\overline{E}(a,\delta))^c$ y por tanto $x$ es entonces interior a $(\overline{E}(a,\delta))^c$
(por el ej 3)

En conclusión $\overline{E}(a,\delta)$ es cerrado.

En $\mathbb{R}^2$ xd




**Ejercicio 8**

Hallar int($A$), ext($A$) y fr($A$) del conjunto $A = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, indicando si es abierto o cerrado.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R},\ 1 < x^2+y^2 < 4\}$      $fr(A) = \{[(x,y) : 1 = x^2+y^2] \cup [(x,y) : 4 = x^2+y^2]\} \rightarrow$ Cerrado

$int(A) = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2 < 4\} = A = \mathring{A}$ (por ser A ab.) $\rightarrow$ Abierto

$ext(A) = \{[(x,y) : x^2+y^2 < 1] \cup [(x,y) : x^2+y^2 > 4]\} \rightarrow$ Abierto

Como $\mathring{A}$ y $ext(A)$ son abiertos $\Longleftrightarrow$ $fr(A)$ es cerrado

**Ejercicio 9**

Encontrar una sucesión de abiertos, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, decreciente : $A_{n+1} \subseteq A_n$, tal que $C = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ sea un cerrado.

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x^2+y^2 < \frac{1}{n}\}$

Buscar sucesión $(A_n)_n$ tal que:

$(A_n)_n \searrow$
$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ cerrado

Llamamos $A_n = E(0,\frac{1}{n})$ $n\in\mathbb{N}$ $(\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\})$
Tenemos, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ entonces $(A_n)_n$ es decreciente $\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$ que es un cerrado
Además, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

**Ejercicio 10**

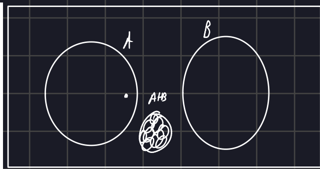
Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Se define

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}.$$

Probar que :

singleton
conjunto unitario

1. $A + B = \cup_{\mathbf{a}\in A}(\{\mathbf{a}\} + B)$.
2. Si $B$ es abierto, entonces $\{\mathbf{a}\} + B$ también lo es.
3. Si $B$ es abierto, entonces $A + B$ también lo es.




① Sea $x\in A+B$
$\exists x_0\in A, y_0\in B$ tq $x = x_0+y_0 \Rightarrow$
$x\in\{x_0\}+B$.
Tenemos $A+B\subset\{x_0\}+B\subset\bigcup_{x_0\in A}\{x_0\}+B$
$\Rightarrow$ "$\subset$"

Si $x\in\bigcup_{a\in A}\{a\}+B \Rightarrow \exists a_0\in A$ tq $x\in\{a_0\}+B \iff$
$\exists b_0\in B / x = a_0+b_0 \in A+B$. $\Rightarrow A+B = \bigcup_{a\in A}\{a\}+B \Rightarrow$ "$\supseteq$"

② Sea $x = a+b\in\{a\}+B$. $B$ abierto y $b\in B$
$\Rightarrow \exists\ \delta>0$ tq $E(b,\delta)\subset B$, esto nos da
$x = a+b\in E(a+b,\delta)\subset\{a\}+E(b,\delta)\subset\{a\}+B$
Entonces $\{a\}+B$ es abierto

③ $A+B = \bigcup_{a\in A}(\{a\}+B) \Rightarrow$ es un abierto por ser unión de abiertos.
① ↳ Abierto ②

**Ejercicio 11**

Probar que los siguientes conjuntos son compactos :

1. $\overline{E}(\mathbf{a},\delta) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \leq \delta\}$.
2. $S(\mathbf{a},\delta) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = \delta\}$.

1) Basta probar que $\bar{E}(a,\delta)$ es cerrado y acotado para demostrar su compacidad.

① $\bar{E}(a,\delta) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq \delta\}$ es cerrado ya que
$\overline{E(a,\delta)} = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| > \delta\}$ es un conjunto abierto, (el ext(A))

② Además, $\bar{E}(a,\delta)$ está contenido en $E'(a,\delta') = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq \varepsilon+\delta = \delta'\}$ $\forall\varepsilon>0$ por lo que está acotado

① y ② $\Rightarrow \bar{E}(a,\delta)$ es compacto $\square$

2) De igual forma que en 1), tratamos de probar que $S(a,\delta)$ es cerrado.
$S(a,\delta) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| = \delta\}$ es la frontera de un conjunto $A$, por lo que es cerrado.
Queda demostrar la acotación de $S(a,\delta)$. De igual manera que con 1), observamos que $S(a,\delta)$ está contenido en $E'(a,\delta')$.
donde $E'(a,\delta') = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq \varepsilon\delta = \delta'\}$ $\forall\varepsilon>0$

También, acercándonos por dentro, observamos que sea $E''(a,\delta'') = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| \geq \frac{1}{\varepsilon}\delta = \delta''\}$ $\forall\varepsilon>0$ la intersección de $E''(a,\delta'')$ y $S(a,\delta)$ es vacía.

**Ejercicio 12**

Se dice que un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si es vacío o si contiene a todos los segmentos cuyos extremos están en $S$, es decir, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in S$.
Probar que :

1. La intersección finita o infinita de convexos es otro convexo.
2. ¿La unión de dos convexos es, también, otro convexo? Justificar la respuesta.

TEOREMA DE HAHN-BANACH

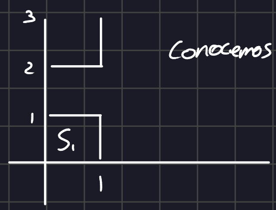
Cuando tomamos un convexo se puede tomar como la intersección de los semiplanos abiertos que lo contienen

① Sean $x,y \in \bigcap_{i\in I} S_i$ (donde $S_i$ es cerrado $\forall_i \in I$)
↳ S sub i

$\forall i \in I$, $x,y \in S_i$, pero sabemos que $S_i$ es un convexo $\exists t \in [0,1], tx+(1-t)y \in S_i \ \forall_i \in I$

$\Rightarrow tx+(1-t)y \in \bigcap_{i\in I} S_i \Rightarrow \bigcap_{i \in I} S_i$ es convexo

② Contraejemplo




Conocemos $\left\{ \begin{array}{l} S_1 = [0,1]\times[0,1] \\ S_2 = [0,1]\times[2,3] \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 \cup S_2$ NO es convexo

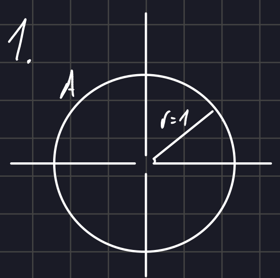
Ejercicio:

En cada uno de los casos siguientes:

$A. = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$
$B. = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y^2 ; x^2+y^2 \leq 1\}$
$C. = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 ; -1 < x < 1\}$

1. Representar $A$ en $\mathbb{R}^2$
2. Indicar si $A$ es abierto o cerrado, compacto y acotado

1.




$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} \cup \{0,0\}$

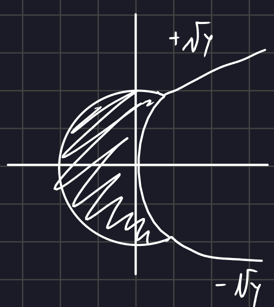
$Fr(A) \not\subset A \Rightarrow A$ no es cerrado

$A \cap Fr(A) \neq \emptyset \Rightarrow A$ no es abierto

$A$ es acotado porque $A \subset B$

$A$ es acotado $\Rightarrow A$ es compacto

2.




$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1, -1 \leq x \leq \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x = y^2 ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\}$

$A \cap Fr(A) \neq \emptyset \Rightarrow A$ no es abierto

$\left. \begin{array}{l} Fr(A) \subset A \Rightarrow A \text{ es cerrado} \\ A \text{ es acotado} \end{array} \right\} \Rightarrow$ es compacto

3.