Soluciones Problemas Tema 2 Parte A

Problemas adicionales

$\boxed{1}$ a) Campo eléctrico en un punto del eje X debido a un hilo de longitud L

$$\vec{E} = \frac{a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{L}{x-L} + \ln\left(\frac{x-L}{x}\right)\right)\vec{u}_x$$

Potencial $\phi = \frac{a}{4\pi\epsilon_0}\left(x\ln\frac{x}{x-L} - L\right)$

---

b) Hilo semiinfinito y $\lambda = cte$. ¿Campo en ~~el~~ punto del eje Y?

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}(-\vec{u}_x + \vec{u}_y)$$

c) Hilo infinito y λ cte en pto. del eje Y:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\vec{u}_y$$

Estos campos se pueden obtener como casos particulares de la solución del campo debido a un hilo finito de longitud L y que reposa sobre eje x ($\lambda = cte$) con un extremo en el origen, evaluado el campo en cualquier punto (x,y). [Se sugiere resolver primero ese problema, cuya solución es:

$$\vec{E} = \frac{a}{4\pi\epsilon_0 L y}\left[\left(\frac{y}{\sqrt{(L-x)^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+y^2}}\right)\vec{u}_y\right]$$

Para este caso, el potencial se puede obtener de la definición de potencial debido a una distribución continua de carga, suponiendo que el potencial en el infinito es cero ~~E~~

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\ell} \frac{dq'}{|\vec r - \vec r'|} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x-L+\sqrt{(x-L)^2+y^2}} \quad (*)$$

Para este caso se podría haber obtenido 1º el potencial y luego el campo mediante $\vec E = -\nabla\phi$

Sin embargo $\Rightarrow$ para el caso de los hilos semi-inf. y finitos este método tiene un problema porque al calcular el potencial en $(*)$ haciendo $L\to\infty$ el $\phi\to\infty$. ~~Esto es~~ En estos casos no se puede usar ese método.

$\boxed{2}$ Campo y potencial de hilo en forma de semianillo que reposa en plano XY, en puntos del eje Z (λ = cte)

$$\vec E = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\left(-2R\vec u_y + \pi z \vec u_z\right)$$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

Donde Q es la carga del hilo $\quad Q = \lambda\,(\pi R)$

3 Campo y potencial de chapa semicircular (σ = cte) de radios R_1 y R_2 (interno y externo, respect) en ptos. del eje Z

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2r'}{\sqrt{r'^2+z^2}} - 2\ln\left(r'+\sqrt{r'^2+z^2}\right)\vec{u}_y - \frac{\pi z}{\sqrt{r'^2+z^2}}\vec{u}_z\right]_{r_i=R_1}^{r_i=R_2}$$

Si obteneis el valor para $R_1 = 0.2\,m$, $R_2 = 0.4\,m$ en un pto. $z = 0.2\,m$, el resultado es:

$$\vec{E}(z=0.2m) = -16405\,\vec{u}_y + 26208\,\vec{u}_z \;\; V/m$$

$$\phi(z) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\left\{\sqrt{R_2^2+z^2} - \sqrt{R_1^2+z^2}\right\}$$

para el ejemplo anterior sale $\phi(z=0.2m) = 15749\,V$

---

4 Toroide (ρ = cte)

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{u}_z}{2\epsilon_0}\cdot\left(\sqrt{R_1^2+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2} - \sqrt{R_1^2+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2} + \sqrt{R_2^2+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2} - \sqrt{R_2^2+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2}\right)\vec{u}_z$$

- A partir de este resultado, si se particulariza al caso de $R_1 \to 0$ se obtiene el resultado de un disco grueso

- Otro caso particular de interés es el de $R_2 \to \infty$ (con R_1 y h finitos) $\Rightarrow$ Plano grueso infinito con agujero circular

≡

- Otro caso interesante es el de $z \to \infty$ (R_1, R_2, h finitos) $\to$ Carga puntual situada en el origen, pues en la lejanía no se aprecian los detalles de la distribución de carga