BLOQUE 4 FUNCIONES INVERSAS E IMPLÍCITAS

TEMA 1 – FUNCIONES IMPLÍCITAS. CAMBIO DE VARIABLES. FUNCIONES INVERSAS

–Teorema de la función inversa

'Morfeo es matriz'

Tenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, y queremos saber si admite una única solución.

$$F(x)=y \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=y_1 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n)=y_n \end{cases}$$

Lo que podemos hacer es traducir por la existencia de una inversa al campo vectorial $F=(f_1,\dots,f_n)$

Recordemos lo que ocurre en 1 dimensión:

(*) Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I tal que: $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$. Entonces f^{-1} existe, es derivable en $f(I)$ y tenemos: $\forall x \in I,\ (f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Consideramos el siguiente campo vectorial:

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto F(x,y) = (e^x\cos(y), e^x\sin(y))$$

Contraejemplo

F es de clase $\mathcal{C}_1$ en $\mathbb{R}^2$, $|J_F| \neq 0$ pero F no es inyectiva porque $F(x, y+2\pi) = F(x,y)$

Conclusión: no se puede traducir directamente el teorema anterior (*) al caso de varias variables. Necesitamos la definición siguiente:

–Definición– DIFEOMORFISMO

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $F: A \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}_1$ en A

1. Se dice que F es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}_1$ en A sobre $F(A)$ $\Leftrightarrow$ F es globalmente invertible si:
   - F es inyectiva (ie $F^{-1}: F(A) \to A$ constante)
   - $F(A)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$
   - $F^{-1} \in \mathcal{C}_1(F(A))$

   $\Rightarrow F^{-1}$ se llama inversa global de $F(A)$

2. Sea $a \in A$, se dice que F es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}_1$ local en a si existen U, V abiertos de $\mathbb{R}^n$ con $a \in U$ y verificando $F_{|U}: U \to V$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}_1$

   f restringida en U

   A la función $(F_{|U})^{-1}$ se le llama inversa local de F en a

¡Atención! Una función invertible en un abierto es localmente invertible en cada punto del abierto, ¡Pero el recíproco es falso!

–Teorema

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $F: A \to \mathbb{R}^n$ y $a \in A$ tales que: $\begin{cases} F \in \mathcal{C}_1(A) \\ \det J_F(a) \neq 0 \end{cases}$

F es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}_1$ en a, es decir, existe $U \subset A$ abierto con $a \in U$ tal que $F(U)=V$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$

F es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}_1$ de U sobre V y para cada $x \in U$ tenemos la existencia de $F^{-1}: F(A) \to U$

$$J_{F^{-1}}(F(x)) = (J_F(x))^{-1}$$

-Teorema de la función implícita

Si consideramos la ecuación $x^2+y^2-1=0$ nos podemos preguntar si y se podría escribir como una función de x.
i.e. si existe una función h tal que $y=h(x)$ y la ecuación se reduce a $x^2+h^2(x)-1=0$

La respuesta aquí es negativa porque tendríamos $y=\sqrt{1-x^2}$ y no es una función.
En lugar de trabajar de forma global podríamos plantear el problema de forma local.

Sea (x_0,y_0) una solución de la ecuación $g(x,y)=0$, donde $g(x,y)=x^2+y^2-1$. ¿Se puede definir una función h tal que $y=h(x)$ en un entorno U de x_0 y además, $g(x,h(x))=0$? ¡Sí!

Ejemplo
tomando $(x_0,y_0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $U=(0,1)$, $y=h(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\forall x\in U$
Cuando esto se cumple, se dice que la ecuación $g(x,y)=0$ define y implícitamente como función de x en un entorno de (x_0,y_0)

$\mathbb{R}^2$: Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $g:A\to\mathbb{R}$ con $g\in\mathcal{C}_1(A)$. Sea $(x_0,y_0)\in A$ tal que:

1. $g(x_0,y_0)=0$
2. $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

Entonces la ecuación $g(x,y)=0$ define implícitamente a la variable y como función de la variable x en un entorno (x_0,y_0). Es decir, existe un entorno abierto $U\subset\mathbb{R}$ con $x_0\in U$ y existe $W\subset\mathbb{R}^2$ abierto, $W\subset A$ y una función $h:U\to\mathbb{R}$ tal que:

(i) $h(x)=y_0$ (ii) $(x,h(x))\in W$, $\forall x\in U$ (iii) $g(x,h(x))=0$ $\forall x\in U$ (iv) $h\in\mathcal{C}_1(U)$ y tenemos:

$$h'(x)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,h(x))}$$

Comentario

① Si $g\in\mathcal{C}_k(A)$, entonces $h\in\mathcal{C}_k(U)$

② Este teorema no nos dice cómo alterar la función h, pero sí sobre el valor de $h'(x)=0$

③ Como interpretación geométrica del teorema de la función implícita, podemos decir que una curva en el plano definida por medio de la ecuación $g(x,y)=0$ podemos obtener localmente una curva de forma explícita $y=h(x)$

④ La condición $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ corresponde a la segunda componente del gradiente de g y geométricamente nos dice que el vector gradiente, que es el tangente a la curva en el punto (x_0,y_0) no será paralelo al eje x.

⑤ Tenemos un resultado similar para expresar x en función de y con la condición $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$

$\mathbb{R}^3$. Sean A un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $g:A\to\mathbb{R}$ con $g\in\mathcal{C}_1(A)$. Sea $(x_0,y_0,z_0)\in A$ tal que:

1. $g(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

Entonces la ecuación $g(x,y,z)=0$ define implícitamente a la variable z como función de las variables x,y en un entorno (x_0,y_0,z_0) $\Longleftrightarrow$ Existe un entorno abierto $U\subset\mathbb{R}^2$ con $(x_0,y_0)\in U$ y existe $W\subset\mathbb{R}^3$ abierto, $W\subset A$ y una función $h:U\to\mathbb{R}$ tal que:

(i) $h(x_0,y_0)=z_0$ (ii) $(x,y,h(x,y))\in W$ $\forall(x,y)\in U$ (iii) $g(x,y,h(x,y))=0$ $\forall(x,y)\in U$ (iv) $h\in\mathcal{C}_1(U)$ y tenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,h(x,y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,h(x,y))}\qquad\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,h(x,y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,h(x,y))}$$

Campos Vectoriales

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $g: A \to \mathbb{R}$ con $g \in \mathcal{C}_1(A)$. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in A$ tal que:

1. $g(x_0, y_0, z_0) = (g_1(x_0, y_0, z_0), g_2(x_0, y_0, z_0)) = (0,0)$

2. $\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$

Entonces la ecuación $g(x,y,z)=0$ define implícitamente a las variables y, z como función de la variable x en un entorno $(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow$ Existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ con $x_0 \in U$ y existe $W \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $W \subset A$ y una función $h: U \to \mathbb{R}$ tal que:
$x \mapsto h(x) = (y(x), z(x))$

(i) $h(x_0) = (y_0, z_0)$ (ii) $(x, h(x)) \in W \ \forall x \in U$ (iii) $g(x, h(x)) = 0 \ \forall x \in U$ (iv) $h \in \mathcal{C}_1(U)$, y tenemos:

Y las derivadas parciales de las componentes de la función implícita h verifican el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial h_1}{\partial x} = \\ \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} = \end{array}\right| \begin{array}{l} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y(x), z(x)) \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}(x)}_{y'} + \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y(x), z(x)) \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}(x)}_{z'} \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y(x), z(x)) \cdot \frac{\partial y}{\partial x}(x) + \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y(x), z(x)) \frac{\partial z}{\partial x}(x) \end{array}$$

↳ ¡Gradientes!

Definición – Difeomorfismo

Sean E, F dos espacios normados, $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión finita ej. ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \dots$) Sea U un abierto de E y sea $f: U \to F$. Se dice que f es un difeomorfismo de U sobre un abierto V de F si:

1. f es diferenciable en U
2. f es una biyección de U sobre V
3. $f^{-1}: V \to E$ es diferenciable

Si además f es de clase $\mathcal{C}^1$ entonces f^{-1} es de clase $\mathcal{C}_1$

Teorema de la función Inversa (otra versión)

Aplicación $\leftrightarrow$ homomorfismo

Sea $f: U \to F$ donde $U \subset E$ de clase $\mathcal{C}_1$ y sea $a \in U$ donde $Df(a)$ es un isomorfismo de E sobre F