Grado en Física, Curso 2022-2023

Mecánica Cuántica I

Examen Final, 27 de enero de 2023

1. (a) Obtén la relación entre el radio de un estado estacionario del átomo de Bohr y la longitud de onda de De Broglie. (b) Según la mecánica estadística, la energía cinética media de una partícula es $3kT/2$ donde T es la temperatura y k la constante de Boltzmann. ¿Cuál será la longitud de onda media de De Broglie para una molécula de hidrógeno a temperatura ambiente? (1 punto)

2. Una partícula de masa m moviéndose en una dimensión está confinada en una región del espacio $0 < x < L$. En el centro de este pozo de potencial se encuentra una barrera localizada a través de una delta de Dirac, $V(x) = \alpha\delta(x - L/2)$, donde α es una constante positiva.

   Obtén la ecuación para los autovalores de la energía en términos de la masa de la partícula, m, el valor de la constante α, y la anchura del pozo L (ecuación trascendente).
   (2.5 puntos)

3. Considera una partícula libre en una dimensión. Inicialmente su función de onda viene dada por:

$$\Psi(x, 0) = (\frac{\beta}{\pi})^{1/4}\ e^{ik_0 x - \frac{\beta x^2}{2}}$$

   donde β y k_0 son parámetros reales conocidos.

   Obtén la función de onda para cualquier instante de tiempo $t > 0$, $\Psi(x, t)$

   (2 puntos)

4. Para un potencial armónico en una dimensión:

   (a) Calcula el conmutador del operador creación, $\hat{a}_+$ con el operador destrucción, $\hat{a}_-$.

   (b) Explica qué implicaciones tiene que dos operadores que representan a observables conmuten. Relaciona tu respuesta con el principio de incertidumbre generalizado.

   (1.5 puntos)

5. Considera la siguiente matriz:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) ¿Puede representar a un observable? Justifica tu respuesta.
   (b) Calcula los autovalores y los autovectores de esta matriz.
   (c) Considera que una partícula se encuentra en el siguiente estado:

   $$|\Psi >= \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Calcula el valor esperado de A para este sistema.
   (d) ¿Cuál es la probabilidad de que al medir A se obtenga el valor 2?
   (e) ¿Cuál será el estado de la partícula después de realizar la medida?
   (f) ¿Cómo podrías construir un operador a partir de los autovectores de $\hat{A}$?. Razona tu respuesta.
   (g) Explica la relación entre la función de onda en el espacio de posiciones, $\Psi(x)$, y el estado de una partícula, $|\Psi >$.

   (2 puntos)

6. Un sistema formado por dos partículas, A y B, viene dado por la siguiente función de onda:

$$\Psi^{AB} = c_1 \Psi_i^A \Psi_j^B + c_2 \Psi_k^A \Psi_l^B$$

   donde Ψ_i^A, Ψ_k^A son las funciones de onda de la partícula A en los estados i, k respectivamente, mientras que Ψ_j^B, Ψ_l^B son las funciones de onda de la partícula B en los estados j, l respectivamente. ¿Es este un sistema correlacionado? Explica tu respuesta razonadamente. Describe el significado de un sistema correlacionado o 'entangled'.

   (1 punto)

Datos de interés

1 uma = $1.66 \times 10^{-27} kg$
Constante de Boltzmann, k = $1,38 \times 10^{-23} J/K$
Constante de Planck, h = $6.626 \times 10^{-34} J.s$

Corriente de probabilidad:

$$J(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\big(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\big)$$

Discontinuidad en la derivada para una función delta:

$$\Delta\big(\frac{d\psi}{dx}\big) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(x_d)$$

donde x_d depende de la posición de la función delta.

Integrales de interés:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$$

Oscilador armónico:

$$\hat{H} = \hbar\omega\,(\hat{a}_-\hat{a}_+ - 1/2)$$

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,(\mp i\hat{p} + m\omega\hat{x})$$

① (a) Relación entre $\lambda = \frac{h}{p}$ y el radio de un estado estacionario en el átomo de Bohr

Estado estacionario en el átomo de Bohr →

→ L_n = cuantizado = $n\hbar$

$$L = p.r = \underbrace{m.v}_{p}.r = n\hbar$$

$$p.r = n\frac{h}{2\pi} \rightarrow 2\pi r = n\frac{h}{p}$$

$2\pi r = n\lambda$ → perímetro de la órbita estacionaria = múltiplo de la longitud de onda de De Broglie.

(b) Molécula de Hidrógeno, λ a $T = 300K$.

$$\langle E_p \rangle = \frac{3}{2}KT \qquad \langle E_p \rangle = \frac{\langle p \rangle^2}{2m}$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{h}{\langle p \rangle} \rightarrow \langle p \rangle = \frac{h}{\langle \lambda \rangle}$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{h^2}{2m\langle \lambda \rangle^2} = \frac{3}{2}KT$$

$$\langle \lambda \rangle^2 = \frac{h^2}{3mKT} \rightarrow \langle \lambda \rangle = \frac{h}{\sqrt{3mKT}}$$

$m = 2 \times 1,66 \times 10^{-27}$ Kg

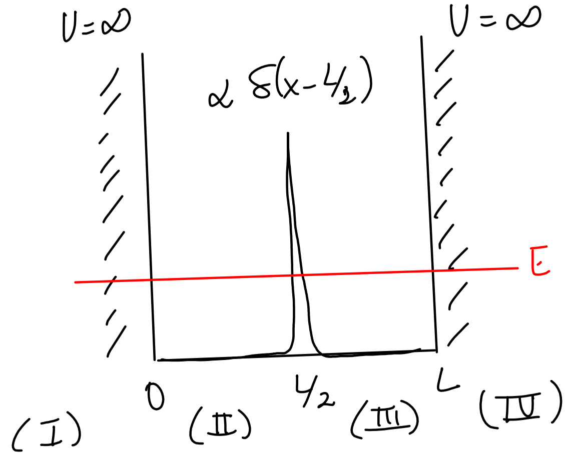
$K = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K

$h = 6,626 \times 10^{-34}$ J.s

$$\langle \lambda \rangle = \frac{6,626 \times 10^{-34}}{\sqrt{3(2 \times 1,66 \times 10^{-27})(1,38 \times 10^{-23})(300)}}$$

$$\boxed{\langle \lambda \rangle = 0,1 \times 10^{-9}\ m = 0,1\ nm}$$

(2)



Buscamos la ecuación trascendente para los autovalores de la energía.

$E > 0$

Resolvemos en cada una de las regiones:

(I) $x \leq 0$ $\quad \psi_I = 0$

(II) $0 < x < L/2$ $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)\psi$ $\quad \rightarrow K^2$

Posibles soluciones:

$$\psi_{II} = A' e^{iKx} + B' e^{-iKx} \quad \text{o}$$

$$\psi_{II} = A . \text{sen}(Kx) + B . \cos(Kx) \leftarrow$$ Utilizamos esta solución.

(III) $L/2 < x < L$ Igual que en la región II las posibles soluciones son:

$$\psi_{III} = C' . e^{iKx} + D' e^{-iKx} \quad \text{o}$$

$$\psi_{III} = C . \text{sen}(Kx) + D . \cos(Kx) \leftarrow$$ Utilizamos esta solución.

(IV) $\psi_{IV} = 0$

Aplicamos las condiciones de contorno:

⊛ $\psi_I(x=0) = 0$ $\qquad \psi_I(x=0) = \psi_{II}(x=0) = A . \text{sen}(0) + B . \cos(0) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow B = 0$

$$\boxed{\psi_{II} = A . \text{sen}(Kx)}$$

⊛ $\psi_{IV}(x=L) = 0$ $\qquad \psi_{IV}(x=L) = \psi_{III}(x=L) = C\,\text{sen}(KL) + D\cos(KL)$

Si consideramos $C . \text{sen}(K(x-L))$ y $D = 0 \rightarrow \psi_{III}(x) = C . \text{sen}(K(x-L))$

y para $x = L \rightarrow \psi_{III}(x=L) = C . \text{sen}(K(L-L)) = 0$

Cumple la condición de contorno.

$$\boxed{\psi_{III}(x) = C \cdot \operatorname{sen}(K(x-L))}$$

* Continuidad de la función de onda en $x = L/2$

$$\psi_{II}(x = L/2) = \psi_{III}(x = L/2)$$

$$A \cdot \operatorname{sen}(KL/2) = C \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{KL}{2}\right)$$

$$A \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{KL}{2}\right) = -C \operatorname{sen}\left(\frac{KL}{2}\right)$$

$$A = -C$$

$$\psi_{II}(x) = A \cdot \operatorname{sen}(Kx); \quad \psi_{III}(x) = -A \cdot \operatorname{sen}(K(x-L))$$

* Consideramos la discontinuidad de la primera derivada en $x = \frac{L}{2}$. Nos dan el valor de esta discontinuidad.

$$\Delta\psi' = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(L/2)$$

$$\psi'_{III}(x = L/2) = -KA \cdot \cos\left(K\left(\frac{L}{2} - L\right)\right) = -K \cdot A \cdot \cos(KL/2)$$

$$\psi'_{II}(x = L/2) = K \cdot A \cos(KL/2)$$

$$-KA \cdot \cos\left(\frac{KL}{2}\right) - K \cdot A \cdot \cos(KL/2) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} A \cdot \operatorname{sen}(KL/2)$$

$$\cancel{2}K\cancel{A} \cos\left(\frac{KL}{2}\right) = \frac{\cancel{2}m\alpha}{\hbar^2} \cancel{A} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{KL}{2}\right)$$

$$\boxed{K = -\frac{m\alpha}{\hbar^2} \operatorname{tg}\left(\frac{KL}{2}\right)}$$

Otras posibles formas de resolver el problema.

- Considerando las soluciones

$$\psi_{II}(x) = A \cdot \text{sen}(Kx)$$
$$\psi_{III}(x) = C \cdot \text{sen}(Kx) + D \cdot \cos(Kx)$$

Continuidad en $x = L \rightarrow \psi_{III}(x=L) = 0 \rightarrow C \cdot \text{sen}(KL) = -D \cdot \cos(KL)$

$$\rightarrow D = -C\, \text{tg}(KL)$$

$$\psi_{III}(x) = C\left(\text{sen}(Kx) - \text{tg}(KL) \cdot \cos(Kx)\right)$$

Continuidad en $x = L/2$:

$$\psi_{II}(x=L/2) = A \cdot \text{sen}(KL/2) = C\left(\text{sen}\left(\frac{KL}{2}\right) - \text{tg}(KL) \cdot \cos\left(\frac{KL}{2}\right)\right)$$

$$\rightarrow C = \frac{A \cdot \text{sen}(KL/2)}{\text{sen}(KL/2) - \text{tg}(KL) \cdot \cos\left(\frac{KL}{2}\right)}$$

$$C = \frac{A}{1 - \text{tg}(KL)/\text{tg}\left(\frac{KL}{2}\right)}$$

Discontinuidad en la 1ª derivada:

$$\psi'_{II}(x=L/2) = K \cdot A \cdot \cos(KL/2) \;;\; \psi'_{III}(x=L/2) = KC\left(\cos(KL/2) + \text{tg}(KL)\,\text{sen}\left(\frac{KL}{2}\right)\right)$$

$$\psi'_{III}(x=L/2) - \psi'_{II}(x=L/2) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} A \cdot \text{sen}(KL/2)$$

$$K \cdot C\left(\cos(KL/2) + \text{tg}(KL) \cdot \text{sen}\left(\frac{KL}{2}\right)\right) - K \cdot A \cdot \cos(KL/2) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} A \cdot \text{sen}\left(\frac{KL}{2}\right)$$

$$K \cdot \frac{\cancel{A}}{1 - \text{tg}(KL)/\text{tg}\left(\frac{KL}{2}\right)}\left[\cos(KL/2) + \text{tg}(KL) \cdot \text{sen}\left(\frac{KL}{2}\right)\right] - K\cancel{A}\cos\left(\frac{KL}{2}\right) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\cancel{A}\,\text{sen}\left(\frac{KL}{2}\right)$$

$$K\,\frac{1 + \text{tg}(KL) \cdot \text{tg}(KL/2)}{1 - \text{tg}(KL)/\text{tg}\left(\frac{KL}{2}\right)} - K = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\text{tg}\left(\frac{KL}{2}\right)$$

Desarrollando se debería llegar al mismo resultado anterior pero no es necesario.

Otras posibles formas de resolver el problema.

- Considerando las soluciones

$$\psi_{II}(x) = A'.e^{iKx} + B'e^{-iKx}$$
$$\psi_{III}(x) = C'e^{iKx} + D'e^{-iKx}$$

Aplicamos condiciones de contorno:

$$\psi_I(x=0) = 0 \qquad A' + B' = 0 \rightarrow A' = -B'$$
$$\psi_{II}(x) = A'\left(e^{iKx} - e^{-iKx}\right)$$

$$\psi_{IV}(x=L) = 0 \rightarrow C'.e^{iKL} + D'e^{-iKL} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow C'.e^{2iKL} + D' = 0 \rightarrow D' = -C'.e^{2iKL}$$
$$\psi_{III}(x) = C'\left(e^{iKx} - e^{2iKL}.e^{-iKx}\right)$$

$$\psi_{II}(x=L/2) = \psi_{III}(x=L/2)$$
$$A'.\left(e^{iKL/2} - e^{-iKL/2}\right) = C'\left(e^{iKL/2} - e^{2iKL}.e^{-iKL/2}\right)$$
$$A'\left(e^{iKL/2} - e^{-iKL/2}\right) = C'\left(e^{iKL/2} - e^{i3KL/2}\right)$$
$$C' = A'\frac{e^{iKL/2} - e^{-iKL/2}}{e^{iKL/2} - e^{i3KL/2}} = A'\frac{1 - e^{-iKL}}{1 - e^{iKL}}$$

Discontinuidad en la 1ª derivada:

$$\psi'_{III}(x=L/2) = C'\left(iK\,e^{iKx} + iKe^{2iKL}.e^{-iKx}\right) = C'iK\left(e^{iKx} + e^{2iKL-iKx}.e\right)$$

$$\psi'_{II}(x=L/2) = A'iK\left(e^{iKx} + e^{-iKx}\right)$$

$$C'iK\left(e^{iKL/2} + e^{2iKL}.e^{-iKL/2}\right) - A'iK\left(e^{iKL/2} + e^{-iKL/2}\right) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}A'.\left(e^{iKL/2} - e^{-\frac{iKL}{2}}\right)$$

$$A'.iK\left(\frac{1-e^{-iKL}}{1-e^{iKL}}\right)\left(e^{iKL/2} + e^{\frac{3iKL}{2}}\right) - A'iK\left(e^{iKL/2} + e^{-iKL/2}\right) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}A'\left(e^{\frac{iKL}{2}} - e^{\frac{-iKL}{2}}\right)$$

$$ik\left(\frac{1-e^{-ikL}}{1-e^{ikL}}\right)\left(e^{ikL/2}+e^{3ikL/2}\right)-ik\left(e^{ikL/2}+e^{-ikL/2}\right)=\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\left(e^{\frac{ikL}{2}}-e^{\frac{-ikL}{2}}\right)$$

Desarrollando se llegaría a la misma ecuación anterior.

$$\frac{1}{e^{-ikL/2}}\quad ik\left(\frac{1-e^{-ikL}}{1-e^{ikL}}\right)\left(1+e^{ikL}\right)-ik\left(1+e^{-ikL}\right)=\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\left(1-e^{-ikL}\right)$$

$$ik\underbrace{\left(\frac{1+e^{ikL}}{1-e^{ikL}}\right)}_{-\frac{1}{i\,tg(kL/2)}}-ik\underbrace{\left(\frac{1+e^{-ikL}}{1-e^{-ikL}}\right)}_{\frac{1}{i\,tg\left(\frac{kL}{2}\right)}}=\frac{2m\alpha}{\hbar^2}$$

$$\frac{2k}{tg(kL/2)}=\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\rightarrow\boxed{k=\frac{m\alpha}{\hbar^2}tg\left(kL/2\right)}$$

(3) $\Psi(x,0) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} e^{ik_0 x - \frac{\beta x^2}{2}}$

$\Psi(x,t)$ partícula libre:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(k)\, e^{-ikx} \cdot e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\, dk$$

Tenemos que calcular $\tilde{\Psi}(k)$

$$\tilde{\Psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,0)\, e^{ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} \cdot e^{ik_0 x - \frac{\beta x^2}{2}} \cdot e^{ikx}\, dx$$

Nos dan el valor de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + bx)}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}}$$

Agrupamos: $\tilde{\Psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} \cdot e^{-\left(\underset{a}{\underset{\parallel}{\frac{\beta}{2}}} x^2 - \underbrace{i(k+k_0)}_{b} x\right)} dx =$

$a = \frac{\beta}{2}$; $b = -i(k+k_0)$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{\cancel{2\pi}}{\beta}}\, e^{\frac{-(k+k_0)^2}{2\beta}}$$

$$\tilde{\Psi}(k) = \frac{1}{(\beta\pi)^{1/4}}\, e^{\frac{-(k+k_0)^2}{2\beta}}$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(k)\, e^{-ikx} \cdot e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\, dk$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{k^2\hbar^2}{2m}.$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\beta\pi)^{1/4}} \cdot e^{-\frac{(k+k_0)^2}{2/\beta}} \cdot e^{-ikx} \cdot e^{-i\frac{k^2\hbar}{2m}t}\, dk$$

Mismo tipo de integral que antes. Agrupamos:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\beta\pi)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(k^2+k_0^2+2kk_0)}{2/\beta} - ikx - i\frac{k^2\hbar}{2m}t}\, dk$$

$$k^2\left(-\frac{1}{2/\beta} - \frac{i\hbar}{2m}t\right) - k\left(\frac{k_0}{\beta} + ix\right) - \frac{k_0^2}{2/\beta}$$

$$-k^2\underbrace{\left(\frac{1}{2/\beta} + \frac{i\hbar}{2m}t\right)}_{a} - k\underbrace{\left(\frac{k_0}{\beta} + ix\right)}_{b} - \frac{k_0^2}{2/\beta}$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\beta\pi)^{1/4}} \cdot e^{-\frac{k_0^2}{2/\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ak^2+bk)}\, dk =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\beta\pi)^{1/4}} \cdot e^{-\frac{k_0^2}{2/\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2/\beta} + \frac{i\hbar}{2m}t}} \cdot e^{\frac{\left(\frac{k_0}{\beta}+ix\right)^2}{4\left(\frac{1}{2/\beta}+\frac{i\hbar}{2m}t\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cancel{2\pi}}} \left(\frac{1}{\beta\pi}\right)^{1/4} \cdot e^{-\frac{k_0^2}{2/\beta}} \sqrt{\frac{\cancel{2\pi}\beta}{1 + \frac{i\hbar\beta}{m}t}} \cdot e^{\frac{\left(\frac{k_0}{\beta}+ix\right)^2 \cdot \beta}{2\left(1+\frac{i\hbar\beta}{m}t\right)}}$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{i\hbar\beta}{m}t}}\, e^{\frac{-K_0^2}{2\beta}} \cdot e^{\frac{1}{2\left(1+\frac{i\hbar\beta}{m}t\right)}\cdot\left(\frac{K_0}{\beta}+ix\right)^2\cdot\beta}}$$

④ $[\hat a_+, \hat a_-] = ?$

(a)

$$\hat a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\mp i\hat p + m\omega\hat x\right)$$

$$[\hat a_+, \hat a_-] = a_+ \cdot a_- - a_- \cdot a_+ =$$

$$\frac{1}{2\hbar\omega m}\left[(-i\hat p + m\omega\hat x)(i\hat p + m\omega\hat x) - (i\hat p + m\omega\hat x)(-i\hat p + m\omega\hat x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega m}\left[\cancel{\hat p^2} - im\omega\hat p\hat x + im\omega\hat x\hat p + \cancel{m^2\omega^2\hat x^2} - \cancel{\hat p^2} - im\omega\hat p\hat x + \right.$$
$$\left. + im\omega\hat x\hat p - \cancel{m^2\omega^2\hat x^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\hbar\cancel{\omega}\cancel{m}}\left[\cancel{2}i\cancel{m}\cancel{\omega}(\hat x\hat p - \hat p\hat x)\right] = \frac{i}{\hbar}(\hat x\hat p - \hat p\hat x) = \frac{i}{\hbar}[\hat x, \hat p] =$$

$$= \frac{i}{\hbar}(i\hbar) = \boxed{-1}$$

$$[\hat x, \hat p] = \hat x\hat p - \hat p \cdot \hat x$$

$$[\hat x, \hat p] f(x) = x \cdot \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) + \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) x f(x) =$$

$$= -i\hbar x\frac{\partial f}{\partial x} + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(xf) = \cancel{-i\hbar x\frac{\partial f}{\partial x}} + i\hbar f + \cancel{i\hbar x\frac{\partial f}{\partial x}} =$$

$$= i\hbar f \longrightarrow [\hat x, \hat p] = i\hbar$$

(b) Si conmutan esos observables son compatibles →

→ podemos encontrar un conjunto de autovectores que lo son a la vez de los dos observables.

Si se mide uno de ellos, no se perturba el valor del otro observable. El principio de incertidumbre generalizado $\sigma_A \sigma_B \propto [\hat{A}, \hat{B}]$

Extender esta explicación algo más.

(5) $$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Para poder representar a un observable debe ser Hermítica ya que sus autovalores serán reales.

Para que sea Hermítica $\hat{A} = \hat{A}^{\dagger}$

$$\hat{A}^{\dagger} = (\hat{A}^{T})^{*}$$

$$\hat{A}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \quad (\hat{A}^{T})^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} = \hat{A}$$

Por tanto es Hermítica y puede representar a un observable.

(b) Autovalores y autovectores.

$$\det \begin{pmatrix} 1-a & 1-i \\ 1+i & -a \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & 1-i \\ 1+i & -a \end{vmatrix} = (1-a)(-a) - (1-i)(1+i) =$$

$$= -a + a^2 - (1 + \cancel{i} - \cancel{i} + 1) = a^2 - a - 2 = 0$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\boxed{a_1 = 2 \; ; \; a_2 = -1}$$ Autovalores

Autovectores: $\hat{A}|a_1\rangle = a_1 |a_1\rangle$

$a_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\alpha + \beta(1-i) = 0 \longrightarrow \alpha = \beta(1-i) \rightarrow \beta \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalizamos: $|\beta|^2 + |\alpha|^2 = 1$

$$\beta^2 + \beta^2 (1-i)(1+i) = 1$$

$$\beta^2 (1 + 1 + \cancel{i} - \cancel{i} + 1) = 1 \rightarrow \beta^2 \cdot 3 = 1$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$a_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2\alpha + \beta(1-i) = 0$$

$$\alpha(1+i) + \beta = 0 \longrightarrow \beta = -\alpha(1+i) \rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

Normalizamos: $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$\alpha^2 + \alpha^2 (1+i)(1-i) = 1$$

$$\alpha^2 (1 + (1 - \cancel{i} + \cancel{i} + 1)) = 1$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{|a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}}$$

$|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$ deben ser ortonormales:

$$\langle a_1 | a_2 \rangle = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1+i-1-i \right) = 0 \rightarrow \text{Se cumple.}$$

(c) $|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}$

Valor esperado de A para este sistema:

$$\langle \Psi | A | \Psi \rangle = \begin{pmatrix} i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ -i+1 \end{pmatrix} = \boxed{1}$$

$$\boxed{\langle \Psi | A | \Psi \rangle = 1}$$

(d) Probabilidad de que al medir A se obtenga 2:

$a_1 = 2 \rightarrow |\langle a_1 | \Psi \rangle|^2 =$ probabilidad de obtener 2 al medir A

$$\langle a_1 | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-i+1 \right)$$

$$|\langle a_1 | \Psi \rangle|^2 = \frac{1}{3} (i+1)(-i+1) = \frac{1}{3} \left(1 \cancel{+i} \cancel{-i} + 1 \right) = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{|\langle a_1 | \Psi \rangle|^2 = \frac{2}{3}}$$

(e) Después de medir la partícula se encontrará en el estado $|a_1\rangle$

(f) $|a_1\rangle\langle a_2|$

(g) $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ es la proyección del autovector de posición $|x\rangle$ sobre el estado de la partícula.

(6)

$$\Psi^{AB} = c_1 \Psi_i^A \Psi_j^B + c_2 \Psi_k^A \psi_l^B$$

Sí, porque si medimos sobre la partícula A y se encuentra en el estado $i \to$ la partícula B estará en el estado j. La medida sobre un sistema determina el estado de la otra partícula.
No podemos escribir la función de onda del sistema conjunto como producto de las funciones de onda de los sistemas individuales.