Práctica 10

Métodos Numéricos y Computación

I. Ecuaciones no lineales *(Tema 6)*

En ocasiones estamos interesados en hallar un valor, p, tal que $f(p) = 0$ donde f es una función continua real de variable real. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(x)$ solo tiene una raíz en $[a, b]$ (si tiene más de una raíz se puede considerar otro intervalo más pequeño donde solo hay una raíz). Los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales son aquellos en los que, a partir de un punto inicial p_0, se construye una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. En las clases de teoría hemos presentado el método de la bisección, el método general de punto fijo, el método de Newton-Raphson, el de la secante y el de Regula-Falsi.

Ejercicio 1 *Implementa una función* `biseccion` *que, dada una función* `f`*, los extremos de un intervalo* `a` *y* `b` *y la tolerancia* `tol`*, devuelva la solución de $f(x) = 0$ mediante el método de la bisección (junto al número de pasos que han sido necesarios). Aplica esta función para calcular las raíces de $f(x) = e^{-x/10}\cos(x)$, utilizando los intervalos obtenidos con la función* `busqueda_incremental` *y una tolerancia de 10^{-4}.*

Los métodos de resolución de ecuaciones no lineales de punto fijo se basan en la transformación de $f(x) = 0$ en una ecuación equivalente del tipo $g(x) = x$. A partir de un punto inicial p_0, se obtiene $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante $p_{n+1} = g(p_n)$ de forma que, bajo ciertas condiciones, cumple $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. El cálculo de las iteraciones se detendrá cuando, o bien se alcance un número máximo de iteraciones (que llamaremos *maxiter*), o bien se satisfaga algún criterio de parada en términos de la tolerancia $tol > 0$. Algunos criterios son los siguientes:

$$|p_k - p_{k-1}| < tol, \text{ ó} \tag{1}$$

$$|p_k - p_{k-1}|/|p_k| < tol, \text{ ó} \tag{2}$$

$$|f(p_k)| < tol. \tag{3}$$

Si utilizamos el método de Newton, por ejemplo, la solución se obtiene como el límite de la sucesión:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Ejercicio 2 *Implementa una función* `newton_5ptos` *que, dada una función* `f`*, un punto inicial* `p0`*, la tolerancia* `tol` *y el número máximo de iteraciones* `maxiter`*, devuelva la solución de $f(x) = 0$ mediante el método de Newton (junto al número de pasos que han sido necesarios usando el criterio de parada (1)) aproximando la derivada se aproxime según la fórmula de los cinco puntos con $h = 10^{-2}$. Aplica esta función para calcular las raíces de $f(x) = e^{-x/10}\cos(x)$, utilizando los puntos medios de los intervalos obtenidos con la función* `busqueda_incremental` *como puntos iniciales, una tolerancia de 10^{-4} y un máximo de 50 iteraciones.*

Ejercicio 3 *Implementa dos funciones* `secante` *y* `regula_falsi` *que, dada una función* `f`*, puntos iniciales* `p0` *y* `p1`*, la tolerancia* `tol` *y el número máximo de iteraciones* `maxiter`*, devuelvan la solución de* $f(x) = 0$ *mediante el método de la secante y regula-falsi (junto al número de pasos que han sido necesarios usando el criterio de parada* (1)*), respectivamente. Aplica estas funciones para calcular las raíces de* $f(x) = e^{-x/10}\cos(x)$*, utilizando los intervalos obtenidos con la función* `busqueda_incremental`*, una tolerancia de* 10^{-4} *y un máximo de 50 iteraciones.*

Ejercicio 4 *Se requiere conocer el tiempo (en segundos) en que una partícula que se mueve en el espacio según el vector de posición:*

$$R(t) = (2\cos(t), \sin(t), 0),$$

se encuentra más cerca del punto $P(2,1,0)$ *en el intervalo de tiempo* $[0,2]$*. Aplica el método de la bisección, el de Newton, el de la secante y el de regula-falsi con los argumentos que consideres oportunos (haz un gráfico si es necesario).*

II. Sistemas de ecuaciones no lineales *(Tema 6)*

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales más conocidos son los métodos iterativos de punto fijo. Se basan en la resolución de una ecuación del tipo $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Bajo ciertas condiciones, la sucesión $\left(\mathbf{p}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ obtenida como $\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{G}\left(\mathbf{p}^{(k)}\right)$, para $k = 0, 1, \ldots$, a partir de un punto semilla $\mathbf{p}^{(0)}$, converge al punto fijo de $\mathbf{G}$.

Ejercicio 5 *Implementa una función* `punto_fijo_sist` *que, dada una función vectorial* `G`*, un punto inicial* `p0`*, la tolerancia* `tol` *y el número máximo de iteraciones* `maxiter`*, devuelva la solución de* $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$ *mediante el método general de punto fijo, junto con el número de pasos que sido necesarios.*

Ejercicio 6 *Aplica la función* `punto_fijo_sist` *dos veces, con los puntos iniciales* $(2,0)$ *y* $(0,1)$*, una tolerancia de* 10^{-4} *y un máximo de 50 iteraciones, para resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineal:*

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -0.5x_1^2 + 2x_1 + 0.5x_2 - 0.25 \\ x_2 = -0.125x_1^2 - 0.5x_2^2 + x_2 + 0.5 \end{array}\right\}$$