Límites:

1 • Límites parabólicos, radiales
2 • Límites reiterados

Para probar existencia de límite

3 • Polares
  ↳ Esféricas
$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

4 • T^a de los sandwitches

5 • Acotando

6 • Criterio de la mayorante:

Teorema: Si existe una función $h: E(0,\delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:
$\forall(\theta,r) \in Dom(g)$, $|g(r,\theta)-\ell| \leq h(r)$ y si $\lim_{r\to 0^+} h(r) = 0$
entonces $\lim_{r\to 0^+} g(r,\theta) = \ell$ (tienes que conocer ℓ de antemano)

7 • Definición

Definición: Sea $M_0(x_0, y_0)$ (punto) tal que f puede ser definida en este punto. Se dice que f admite un límite ℓ en M_0 si:

$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\eta > 0$, ($\eta$ depende del ε) $(|x-x_0| < \eta, |y-y_0| < \eta) \Longrightarrow$
$(x_0,y_0) \neq (x,y)$
$\Longrightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$

8 • Curvas paramétricas

Consideramos una curva paramétrica

$\begin{cases} x = t \\ y = t\cdot h(t) \end{cases}$ tenemos $\lim_{t\to 0} t\cdot h(t) = 0$
↳ curva paramétrica cualquiera

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4\, h^2(t)}{t^4 h^2(t) + (t - t h(t))^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\, h^2(t)}{t^2 h^2(t) + (1-h(t))^2}$$

Hay que ver que pasa con $h(t)$, hacemos 3 estudios:
↳ Porque al no conocer h, tenemos que ver todos los casos, si en todos pasa lo mismo

- Si $h(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{0}{t} = 0$
- Si $h(t) \xrightarrow[t\to 0]{} \infty$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \text{“}\frac{0}{\infty}\text{”} = 0$
- Si $h(t) \xrightarrow[t\to 0]{} K_{\neq 1}$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{0}{(1-K)^2} = 0$

9 • Infinitésimos equivalentes

Tenemos:

$\operatorname{sen}(f(x,y)) \sim f(x,y)$
$\arcsin(f(x,y)) \sim f(x,y)$
$\arctan(f(x,y)) \sim f(x,y)$
$1-\cos(f(x,y)) \sim \frac{f^2(x,y)}{2}$
$\tan(f(x,y)) \sim f(x,y)$
$\ln(1+f(x,y)) \sim f(x,y)$
$e^{f(x,y)} - 1 \sim f(x,y)$
$a^{f(x,y)} - 1 \sim \times f(x,y)\ln(a)$
$(1+f(x,y))^d - 1 \sim d f(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \longrightarrow 0$$