Otra forma de obtener las transformaciones de Lorentz

I. Principios de Relatividad de Galileo y de Einstein.

Las leyes de la Física deben de escribirse de igual manera en una serie de sistemas. En la Relatividad de Galileo y de Einstein (especial) este conjunto de sistemas son los llamados sistemas inerciales.

Habrá una serie de leyes de transformación entre sistemas inerciales.

- **Sistema de referencia.**

"Llamamos sistema de referencia a un sistema de coordenadas que permite fijar la posición de las partículas en el espacio y un sistema de relojes fijos en él", que sirven para indicar el tiempo".

- **Sistema inercial.**

"Es aquel conjunto de sistemas de referencia en los cuales una partícula que se encuentre inicialmente en reposo sigue en reposo y toda aquella que se halla en movimiento, continúa en movimiento sin cambiar en velocidad y dirección".

Si una partícula se mueve con velocidad constante en un sistema inercial, lo hace con velocidad constante en cualquier sistema inercial.

■ Hipótesis para encontrar la ley de transformación entre dos sistemas inerciales

- Homogeneidad del espacio-tiempo.
- Isotropía del espacio.
- Ley de grupo.
- Causalidad.

Veamos a continuación las leyes de transformación.

■ Si consideramos una sola dirección, x, y pasamos de un sistema $\underline{S}$ a otro $\underline{S'}$.

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S' \\ (x,t) & & (x',t') \end{array}$$

tendremos una transformación:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= f(x,t,a_1,\ldots,a_N) \\ t' &= g(x,t,a_1,\ldots,a_N) \end{aligned}}$$

De un sistema a otro, $a_1,\ldots,a_N$ son constantes.

Una posible transformación son las traslaciones espacio-temporales, es decir,

$$\left.\begin{aligned} x' &= x+\alpha \\ t' &= t+\tau \end{aligned}\right\} \text{traslaciones espacio-temporales.}$$

Fijamos los orígenes de espacio y de tiempo, es decir,

$$\left\{\begin{aligned} x' &= 0 \\ t' &= 0 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right.$$

tenemos, pues, la condición:

$$o = f(0,0;a_1,\dots,a_N)$$

$$o = g(0,0;a_1,\dots,a_N)$$

lo que nos reduce el número de parámetros de N a $N-2$, es decir, tendremos ahora:

$$x' = f(x,t;a_1,\dots,a_n)$$

$$t' = g(x,t;a_1,\dots,a_n)$$

donde ahora: $n = N-2$. O bien podemos escribir,

$$\boxed{(x',t') = \mathcal{F}(x,t;a_1,\dots,a_n)}$$

Para que haya todo un conjunto de sistemas inerciales solamente puede haber un parámetro (en una dimensión). Con un solo parámetro las leyes de transformación quedan:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x' &= F(x,t,a) \\ t' &= G(x,t,a) \end{aligned}\right\}}$$

Ahora aplicamos las hipótesis anteriores.

1. Homogeneidad del espacio-tiempo: Si escribimos estas leyes de transformación en forma diferencial:

$$\left.\begin{aligned} dx' &= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt \\ dt' &= \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt \end{aligned}\right\}$$

La homogeneidad del espacio nos dice que para un incremento dx' ó dt', los correspondientes dx y dt deben ser los mismos para cualquier punto del espacio, es decir, las parciales deben ser las mismas, o lo que es lo mismo, las transformaciones deben ser lineales:

$$\left.\begin{aligned} x' &= H(a)x - K(a)t \\ t' &= L(a)x - M(a)\cdot t \end{aligned}\right\}$$

En lugar de esto vamos a escribir:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(v)(x - vt) \\ t' &= \gamma(v)(\lambda(v)t - \mu(v)x) \end{aligned}\right\}}$$

a partir de estas leyes de transformación podemos encontrar la relación entre las velocidades en uno y otro sistema, diferenciando:

$$\left.\begin{aligned} dx' &= \gamma(v)(dx - v\,dt) \\ dt' &= \gamma(v)(\lambda(v)\,dt - \mu(v)\,dx) \end{aligned}\right\}$$

de donde:

$$\boxed{\frac{dx'}{dt'} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right) - v}{\lambda(v) - \mu(v)\left(\frac{dx}{dt}\right)}}$$

Donde podemos ver dos cosas:

(a) v es la velocidad con que un sistema se mueve respecto al otro.

(b) Si en un sistema una partícula se mueve con velocidad constante también lo hace en el otro.

2. Isotropía del espacio: En cuanto a las coordenadas espaciales no hay ninguna dirección privilegiada. En este modelo unidimensional no podemos hacer rotaciones. Lo único que podemos hacer es pasar de $\underline{x}$ a $\underline{-x}$:

$$\left.\begin{array}{l} (x,t) \rightarrow (x',t') \\ (-x,t) \rightarrow (-x',t') \end{array}\right\}$$

Tendremos, pues,

$$\left.\begin{array}{l} -x' = \gamma(u)(-x-ut) \\ t' = \gamma(u)(\lambda(u)t+\mu(u)x) \end{array}\right\}$$

multiplicando la primera ecuación por -1 y comparando con las relaciones anteriores, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{c} \gamma(u) = \gamma(v) \\ u\,\gamma(u) = -v\,\gamma(v) \\ \lambda(u)\gamma(u) = \lambda(v)\gamma(v) \quad ; \gamma(u)\mu(u) = -\gamma(v)\mu(v) \end{array}\right\}$$

haciendo operaciones llegamos a las siguientes conclusiones:

$$\boxed{\begin{aligned} &u = -v \\ &\gamma(-v) = \gamma(v) \longrightarrow \text{función par.} \\ &\lambda(-v) = \lambda(v) \longrightarrow \text{función par} \\ &\mu(-v) = -\mu(v) \longrightarrow \text{función impar} \end{aligned}}$$

3. Ley de Grupo.

(I) Debe de existir un elemento unidad en ese grupo: pasar al mismo sistema inercial – transformación identidad –. Los elementos del grupo son las transformaciones. La transformación identidad será:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ t' &= t \end{aligned}\right\}$$

Para el elemento identidad tendremos:

$$v = 0 \quad \left\{\begin{aligned} \gamma(0) &= 1 \\ \lambda(0) &= 1 \\ \mu(0) &= 0 \end{aligned}\right.$$

(II) Para cada transformación debe existir su elemento inverso. La transformación inversa vendrá dada por:

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma(\omega)(x' - \omega t') \\ t &= \gamma(\omega)(\lambda(\omega) t' - \mu(\omega) x') \end{aligned}\right\}$$

Despejando de la transformación directa:

$$x = \frac{1}{\gamma(v)}\left(1 - \frac{v\mu(v)}{\lambda(v)}\right)^{-1} \cdot \left(x' + \frac{v}{\lambda(v)} t'\right)$$

$$t = \frac{1}{\gamma(v)}\left(1 - \frac{v\mu(v)}{\lambda(v)}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{\lambda(v)} t' + \frac{\mu(v)}{\lambda(v)}\right.$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \omega = -\dfrac{v}{\lambda(v)} \\[2ex] (2)\ \lambda(\omega) = \dfrac{1}{\lambda(v)} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} (3)\ \mu(\omega) = -\dfrac{\mu(v)}{\lambda(v)} \\[2ex] (4)\ \gamma(\omega) = \dfrac{1}{\gamma(v)}\left(1 - \dfrac{v\mu(v)}{\lambda(v)}\right)^{-1} \end{array}\right\}$$

Operando se obtiene, tomando λ en (1) y teniendo en cuenta (2):

$$\lambda(\omega) = \lambda\left(-\frac{v}{\lambda(v)}\right) \underset{\text{par}}{=} \lambda\left(\frac{v}{\lambda(v)}\right)$$

luego:

$$\underline{\lambda\left(\frac{v}{\lambda(v)}\right) = \frac{1}{\lambda(v)}}$$

de aquí se puede razonar que λ debe ser constante y como $\lambda(0) = 1$, entonces llegamos a la conclusión de que:

$$\boxed{\lambda(v) \equiv 1 \quad \forall v}$$

Teniendo en cuenta (1), vemos que:

$$\omega = -v \quad \rightarrow \gamma(\omega) = \gamma(-v) \overset{\text{par}}{=} \gamma(v)$$

De (3):

$$\mu(\omega) = -\mu(v)$$

De (4):

$$\boxed{\gamma^2(v)(1 - v\mu(v)) = 1}$$

(III) Ley de composición interna. Como son transformaciones lineales las podemos escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = [T(v_1)] \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = [T(v_2)] \begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ quedarán relacionadas por lo siguiente: si definimos

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \equiv [T(v)] \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

tendremos que, la composición de las dos ecuaciones primeras, será:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \gamma(v_1)\gamma(v_2)[1+\mu(v_1)v_2]\left(x - \frac{v_1+v_2}{1+\mu(v_1)v_2}\,t\right) \\ t_2 &= \gamma(v_1)\gamma(v_2)[1+\mu(v_2)v_1]\left(t - \frac{\mu(v_1)+\mu(v_2)}{1+v_1\mu(v_2)}\,x\right) \end{aligned}\right\}$$

Comparando los coeficientes en una y otra ecuación:

$$\mu(v_1)\,v_2 = \mu(v_2)\,v_1 \qquad \forall v_1, v_2$$

es decir,

$$\frac{\mu(v_1)}{v_1} = \frac{\mu(v_2)}{v_2} \qquad \forall v_1, v_2$$

o bien,

$$\frac{\mu(v)}{v} = \text{cte.} \qquad \forall v.$$

que podemos poner como:

$$\boxed{\mu(v) = \alpha \cdot v \qquad \alpha = \text{cte.}}$$

siendo α una constante para todo el grupo de transformaciones.

Esto nos da que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \gamma(v) = (1-\alpha v^2)^{-1/2} \\ \\ v = \dfrac{v_1+v_2}{1+\alpha v_1 v_2} \end{array}}$$

Los casos que pueden presentarse para α son:

- $\alpha < 0 \rightarrow \alpha = -K^{-2} \rightarrow [K] = L \cdot T^{-1}$

(dimensiones de velocidad)

Queda entonces la transformación:

$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{x - v t}{(1+v^2/K^2)^{1/2}} \\ \\ t' = \dfrac{t + v x / K^2}{(1+v^2/K^2)^{1/2}} \end{array}\right\}$$

- $\alpha = 0$.

Las leyes de transformación que se obtienen son:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x - v t \\ t' = t \end{array}\right. \qquad v = v_1 + v_2$$

Transformaciones de Galileo.

Que son las Transformaciones de Galileo.

• $\alpha > 0 \rightarrow \alpha = c^{-2}$

Las leyes de transformación quedan:

$$x' = \frac{x - vt}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}$$

Transformaciones de Lorentz.

Estas son las Transformaciones de Lorentz

4. Principio de causalidad. Hay un conjunto de pares de sucesos que están relacionados en la naturaleza de forma causal. Si uno es anterior a otro en un sistema de referencia, lo debe ser en cualquier sistema de referencia (La causa es anterior al efecto).

Esta causalidad se verifica en las transformaciones de Galileo. Para $\alpha < 0$, puede ser $v \geq k$ ó menor que K. Para $\alpha > 0$, sólo puede ser $v < c$, no es posible que $v \geq c$. En las transformaciones de Lorentz, los sucesos causales necesariamente han de seguir la relación:

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| \leq c$$

Tenemos que descartar como posible el caso $\alpha < 0$

Las leyes de transformación entre sistemas galileanos y de Lorentz son consecuencia de la homogeneidad del espacio-tiempo, isotropía del espacio, de la ley de grupo y de la causalidad.

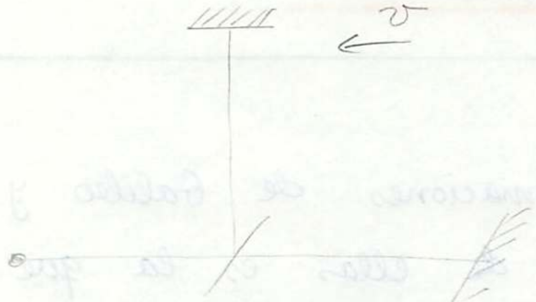
De las transformaciones de Galileo y Lorentz habrá que decidir cual de ellas es la que nos sirve. Sólo una de las dos nos hace falta. Para decidir esto, el experimento que fue decisivo para decidir cual de las dos transformaciones hay que tomar fue el experimento de Michelson y Morley.

II. La experiencia de Michelson-Morley.

Durante el siglo pasado se desarrolló la Mecánica, basada en los principios de Newton y desarrollada sobre todo por Lagrange y Hamilton. Según la Mecánica, las ondas (mecánicas) necesitan un medio para su propagación y según el medio se propagan con una cierta velocidad y si pasamos a otro sistema de referencia esa velocidad cambia.

Con la luz, si hacemos el vacío, la luz sigue propagándose aún en ausencia de medio material. Para conciliar todo esto con la Mecánica se postuló la existencia del éter como medio de propagación de la luz en el cual la luz se propagaría con una velocidad. El éter llena todo el Universo y la Tierra se mueve con respecto al éter con una velocidad que, aproximadamente, puede ser la de la Tierra alrededor del Sol (~30 km/s).

(...)



Si la Tierra se mueve con una velocidad v con respecto al éter la velocidad de la luz que se tendría que detectar no sería c.

El resultado fue que, con el dispositivo montado por Michelson-Morley y suponiendo la velocidad de la Tierra con respecto al éter de 30 km/s, habría que haber observado un desplazamiento de las franjas de interferencia que se tendría que haber observado, pero las franjas no se movieron.

La conclusión es que no existe el fenómeno del "viento del éter".

Para el caso de la luz no es válida la ley de composición de velocidades (según las transformaciones de Galileo) salvo que se utilizaran las transformaciones de Lorentz donde la ley de composición de velocidades es:

$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}}$$

Sólo hay un caso en el que al componer dos velocidades el resultado es la misma velocidad:

v_1: movimiento de la Tierra.

$v_2 = x$.

$$\frac{v_1 + x}{1 + \frac{x v_1}{c^2}} = x \Rightarrow v_1 + \cancel{x} = \cancel{x} + \frac{x^2 v_1}{c^2}$$

de donde,

$$x^2 = c^2$$

es decir,

$$x = c$$

1. La ley de composición de velocidades de Galileo no es cierta. Las válidas son las transformaciones de Lorentz.

2. La luz se propaga en todos los sistemas con la velocidad c que aparecía en el grupo de transformaciones de Lorentz.

III. Principio de la Relatividad de Einstein.

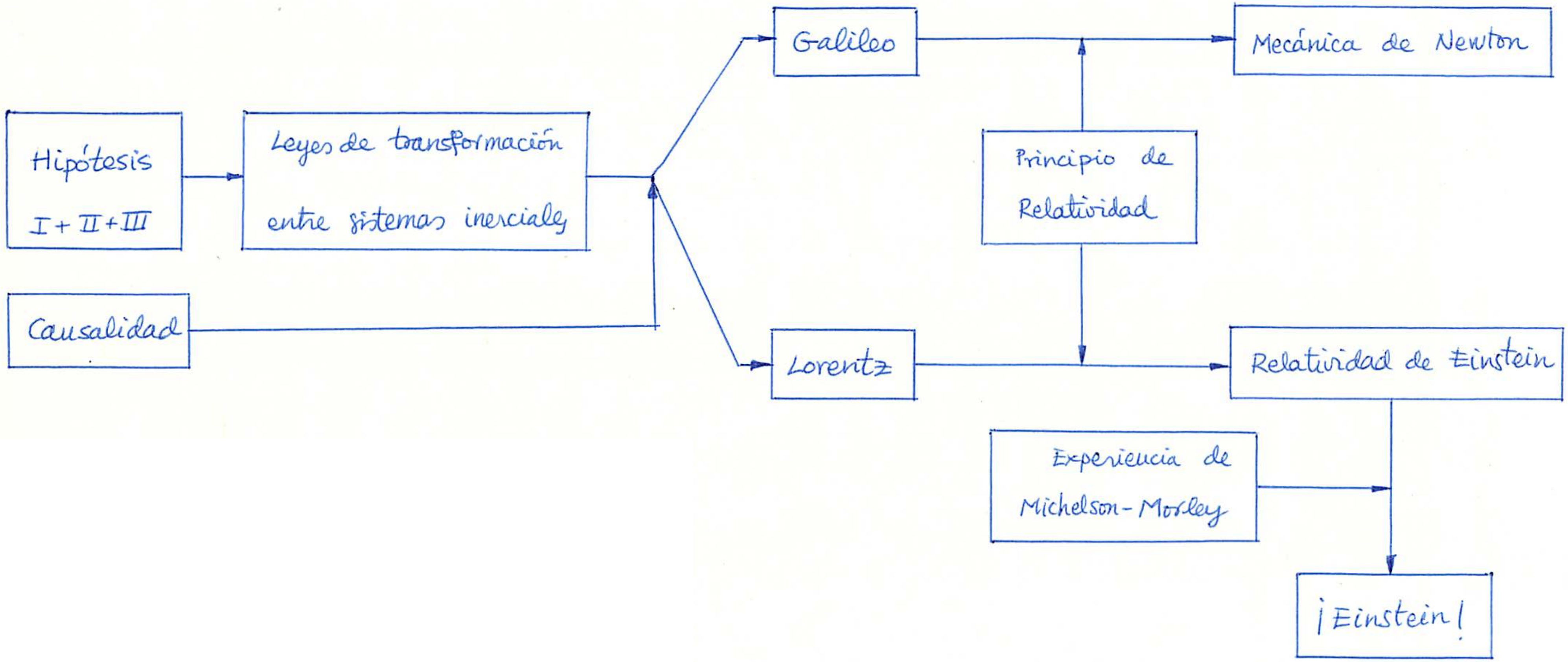
(I). "Las leyes físicas adoptan la misma expresión escritas en cualquier sistema de referencia inercial".

"Las leyes de transformación entre sistemas inerciales son las transformaciones de Lorentz".

(II). "La velocidad de la luz en el vacío es la misma en cualquier sistema de referencia inercial".

El dato más actual que se tiene sobre la velocidad de la luz es:

$$c = 2{,}99792458 \times 10^{10}\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$$


Hipótesis
I + II + III
Leyes de transformación
entre sistemas inerciales
Causalidad
Galileo
Lorentz
Principio de
Relatividad
Mecánica de Newton
Relatividad de Einstein
Experiencia de
Michelson-Morley
¡Einstein!