

Estudio del movimiento de osciladores acoplados: simulación y análisis usando Python

V. Mira Ramírez¹

¹ Departamento de Física Aplicada – Facultad de Ciencias, Universidad de Alicante (UA), Alicante, España.

14 Junio de 2024

RESUMEN

En este estudio, investigamos un sistema de osciladores acoplados utilizando un programa en Python. Las actividades clave incluyen el análisis de la dinámica del sistema al variar k , el examen de los modos normales de oscilación y la identificación de picos de frecuencia mediante la transformada de Fourier. Además, se exploran modificaciones del sistema, como la inclusión de rozamiento o un tercer oscilador. Este trabajo proporciona una comprensión profunda de los fenómenos de acoplamiento y modos normales en sistemas de osciladores, con implicaciones significativas para la física de sólidos y la dinámica de sistemas complejos, permitiendo una mejor modelización y análisis de los mismos.

Key words: Osciladores acoplados – modos normales – oscilación – mecánica lagrangiana – frecuencia propia – transformada de Fourier – FFT – modelización

1 DINÁMICA

Vamos a considerar el sistema formado por dos masas unidas por un muelle donde cada una de ellas está a su vez unida por un muelle a dos puntos fijos. El muelle que une las masas tiene constante elástica k' y los muelles de los extremos tienen constante elástica k . Consideraremos que el movimiento del sistema está limitado a una sola dimensión, x . El origen de coordenadas lo situaremos a la izquierda del diagrama de la figura (1), de forma que el sistema tendrá dos grados de libertad. Usaremos como coordenadas generalizadas la posición de cada masa x_1 , x_2 respecto del origen de coordenadas.

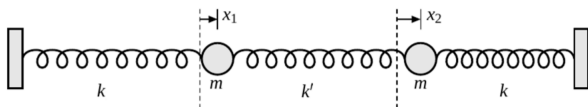


Figura 1: Diagrama del sistema

Haciendo uso de la ley de Hooke, podemos obtener la fuerza que actúa sobre cada una de las masas, y de ahí obtener las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de nuestro sistema:

$$F_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2) \iff m\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0$$

$$F_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \iff m\ddot{x}_2 + (k + k')x_2 - k'x_1 = 0$$

Y suponiendo soluciones de la forma $x_i(t) = B_i e^{i\omega t}$ obtenemos las frecuencias propias del sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{k + k' \pm k'}{m}} \iff \omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para poder apreciar bien las gráficas que vamos a realizar, siempre trataremos de usar el tiempo de simulación más óptimo para que se pueda comprender bien el propósito de la gráfica. Por ejemplo, para el caso de $k = k'$ donde podemos apreciar cómo la función del movimiento de cada masa es igual que la del otro solo que invertida. Además, apreciamos cómo hay un intercambio del

movimiento entre las masas, de forma que cuando una está en su máximo de amplitud, la otra está en un mínimo relativo.

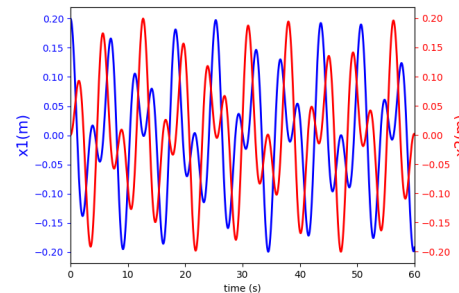


Figura 2: $k = k' = 1 \text{ N/m}$ para $t = 1 \text{ min}$.

Sin embargo, si ahora probamos a poner las constantes elásticas k de los muelles exteriores a un valor muy superior al del muelle interior, $k = 4 \text{ N/m}$ y $k' = 0,04 \text{ N/m}$

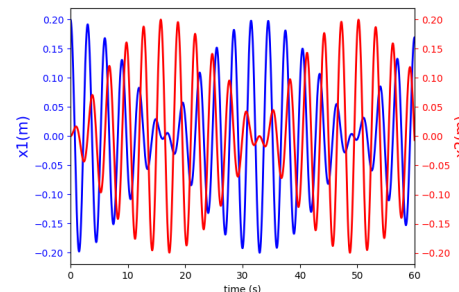


Figura 3: $k \gg k' = 1$ para $t = 1 \text{ min}$.

Este caso es el del llamado acoplamiento débil ($k' \ll k$), donde observamos que las oscilaciones son más definidas, y que cuando una está en su máximo la otra está en cero, en la posición de equilibrio, y no en un mínimo relativo. Esto se debe a que la interacción entre los osciladores individuales es negligible en comparación con las fuerzas de auto-oscilación, lo que permite que sus frecuencias naturales de oscilación sean más aparentes.

Ahora vamos a ver el caso análogo del acoplamiento fuerte ($k' \gg k$), donde vamos a usar $k = 0,4 \text{ N/m}$ y $k' = 4 \text{ N/m}$.

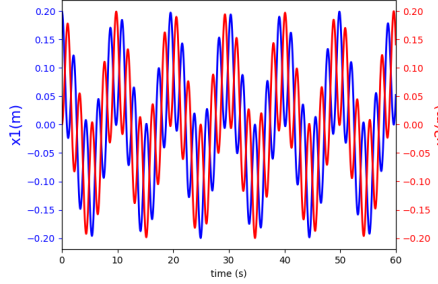


Figura 4: $k \ll k'$ para $t = 1 \text{ min}$.

En este último caso, observamos que las oscilaciones vuelven a no estar tan definidas individualmente para cada masa, pero se aprecia un patrón sinusoidal en ambas masas conjuntamente. Es en el que más rápido las masas intercambian sus energías, de forma que es en el que hay más densidad de oscilaciones. Cuando una masa está en su máximo de amplitud, la otra está en un mínimo relativo más a menudo.

2 ESTUDIO ENERGÉTICO

Vamos a realizar el estudio energético de los tres casos que acabamos de presentar. En las figuras de la izquierda veremos la energía total de cada una de las masas por separado ($U_i + T_i$) además de la potencial elástica del muelle central y de la energía mecánica. En la figura de la derecha tendremos la suma de las cinéticas de las dos masas y la suma de las potenciales de las dos masas ($U_1 + U_2 + T_1 + T_2$) también junto a la energía mecánica.

Vamos a empezar por el caso más simple otra vez en el que $k = k' = 1$

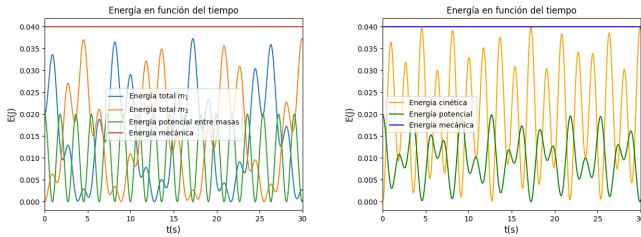


Figura 5: $k = k' = 1$ para $t = 30 \text{ s}$

Comentar que la variación en la energía potencial del muelle central nos da información sobre cómo y cuán rápido se transmite la energía entre las dos masas. La energía mecánica se conserva por la ausencia de fuerzas no conservativas. En el diagrama de la derecha vemos como la energía cinética es más significativa en la suma de energías total.

Pasamos ahora al caso del acoplamiento débil ($k' \gg k$).

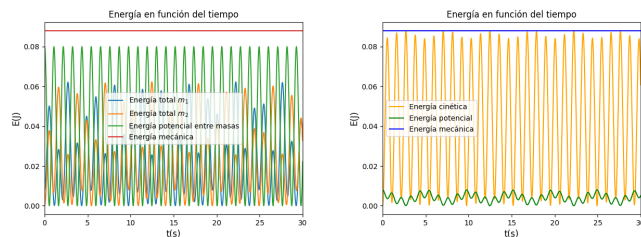


Figura 6: $k \gg k'$ para $t = 30 \text{ s}$

En este caso, vemos que el intercambio de energía entre las masas sucede a una mayor frecuencia, ya que la distancia entre los picos de la energía total de cada masa en la gráfica de la izquierda es menor que en el caso en el que las constantes elásticas son iguales. Además apreciamos que la energía cinética es significativamente superior a la potencial en todo momento, sugiriendo que ambas masas se están moviendo sincronizadamente de tal forma que se minimiza la necesidad de intercambiar energía a través de la potencial elástica.

Por último, estudiamos el caso del acoplamiento fuerte ($k \ll k'$).

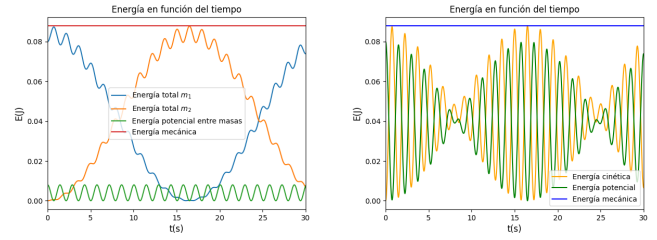


Figura 7: $k \ll k'$ para $t = 30 \text{ s}$

Este es el modo en el que más claramente se aprecia, ya que sucede más despacio, este intercambio de energía entre las masas del que venimos hablando. Como se aprecia claramente en la figura de la izquierda, la energía total de una masa se transfiere a través de la potencial del muelle central hacia la otra masa, siendo sus picos y valles perfectamente alineados. En la figura de la derecha vemos como para este caso la energía potencial total y la cinética total tienen un papel casi igual en la suma total de energías, siendo la energía mecánica total la misma que en el acoplamiento débil y menor que en el caso $k = k'$.

Destacar también que el caso en el que la energía total es mayor es en el que las constantes elásticas son iguales, ya que es el modo más “ineficiente” en lo que a la descomposición en modos normales se refiere, como veremos más adelante en el informe.

Podemos medir el periodo de batido del acoplamiento débil si vemos cuál es la distancia entre los picos en la potencial elástica del muelle central por ejemplo. Si en el código analizamos cuando un valor cualquiera tiene el valor anterior y posterior menor que él habremos encontrado un pico. Básicamente estamos calculando los ceros de la derivada numéricamente. Si contamos cuantos puntos hay entre dos de estos picos, podemos aproximar el periodo entre estos dos picos, que para el caso del acoplamiento débil resulta ser de 1,07 s.

2.1 Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Ahora procederemos a calcular y graficar la transformada rápida de Fourier del sistema. Esta transformación nos permitirá descomponer la señal y reconocer las frecuencias propias del sistema ya que se caracteriza por transformar el dominio del tiempo a su representación en el dominio de la frecuencia. La *Fast Fourier Transform* nos ayudará a identificar las frecuencias propias de los distintos movimientos oscilatorios.

Además, la FFT es computacionalmente eficiente, lo que la hace adecuada para el análisis de señales en tiempo real o de grandes volúmenes de datos. Esta eficiencia proviene de su capacidad para reducir la complejidad computacional de $O(n^2)$ a $O(n \log n)$.

Subiremos el lapso de tiempo para tener más oscilaciones y por tanto mayor precisión con el cálculo de la frecuencia. Como anteriormente, vamos a comenzar por el caso en el que $k = k'$.

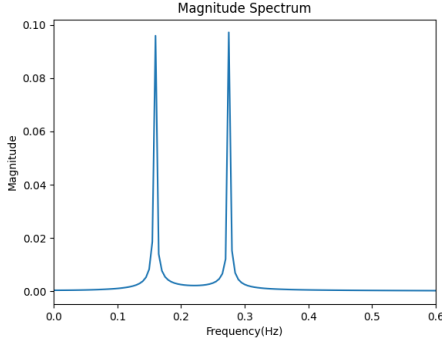


Figura 8: FFT $k = k'$ para $t = 200$ s

Los picos en la figura de la FFT se hallan en $f = 0,158$ hz y $f = 0,275$ hz es decir, (usando $\omega = 2\pi f$)

$$\omega_1 = 0,9927 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 1,7279 \text{ rad/s}$$

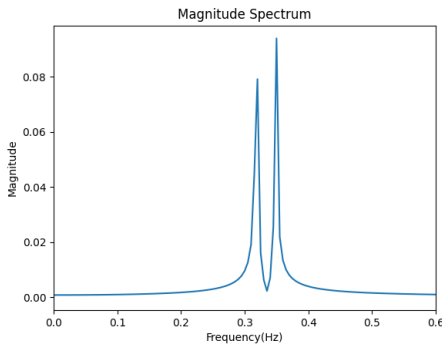


Figura 9: FFT $k \gg k'$ para $t = 200$ s

Los picos en la figura de la FFT se hallan en $f = 0,318$ hz y $f = 0,350$ hz es decir, (usando $\omega = 2\pi f$)

$$\omega_1 = 1,9981 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 2,1991 \text{ rad/s}$$

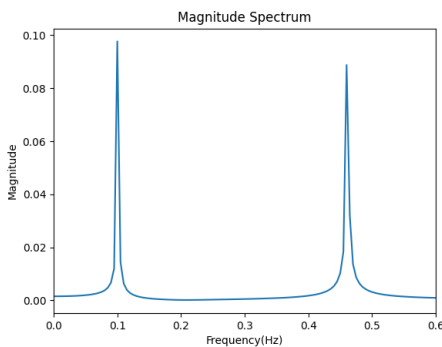


Figura 10: FFT $k \ll k'$ para $t = 200$ s

Los picos en la figura de la FFT se hallan en $f = 0,099$ hz y $f = 0,460$ hz es decir, (usando $\omega = 2\pi f$)

$$\omega_1 = 0,6220 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 2,8903 \text{ rad/s}$$

Una vez calculados estos resultados “experimentalmente”, vamos a compararlos con el resultado teórico que obtendríamos a partir de la fórmula del apartado de dinámica.

$$\omega = \sqrt{\frac{k + k' \pm k'}{m}} \iff \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}$$

	$k = k'$		$k \gg k'$		$k \ll k'$	
	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2
Teórico (rad/s)	1	$\sqrt{3} \approx 1,7320$	2	2,1909	0,6325	2,8983
Experimental (rad/s)	0,9927	1,7279	1,9981	2,1991	0,6220	2,8903

Figura 11: Comparativa entre las frecuencias propias teóricas y experimentales

En la tabla anterior, vemos que los datos experimentales se aproximan estrechamente a lo calculado analíticamente.

3 MODOS NORMALES

Puesto que sabemos de la existencia de modos normales en nuestro sistema, vamos a hacer un cambio de coordenadas a las coordenadas normales tal que la dependencia temporal de las mismas sea más sencilla gracias al conocimiento que tenemos ahora acerca de la existencia de modos normales.

$$\eta_1 = x_1 + x_2 \iff m\ddot{\eta}_1 + (k + 2k')\eta_1 = 0$$

$$\eta_2 = x_1 - x_2 \iff m\ddot{\eta}_2 + k\eta_2 = 0$$

La principal ventaja que hemos obtenido no es sólo la simplicidad de las nuevas ecuaciones, si no que estas no están acopladas. Esto quiere decir que las ecuaciones no dependen la una de la otra ($\ddot{\eta}_1$ solo depende de η_1 y viceversa). Podremos encontrar unas condiciones iniciales que hagan que $\eta_i(t) = 0 \forall t$, obteniendo lo que llamamos un modo normal simétrico o antisimétrico. Podremos obtener el movimiento de cada masa a partir de una combinación lineal de las anteriores, es decir

$$x_1(t) = A_0^1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_0^2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2(t) = A_0^1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - A_0^2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

3.1 Modo Simétrico

Como tendremos un modo simétrico y un modo antisimétrico, vamos a hacer el análisis de los tres casos con constantes elásticas simultáneamente. Empezamos excitando el modo simétrico con las condiciones iniciales:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0,5 \text{ m} \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \text{ m/s}$$

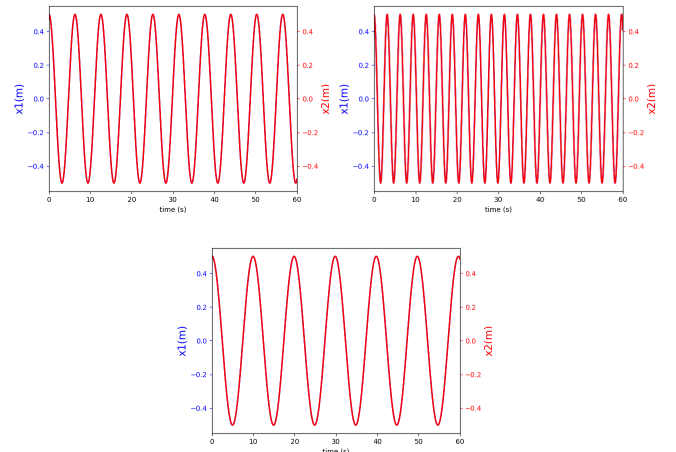


Figura 12: Posiciones para el modo simétrico para, de izquierda a derecha: $k = k'$, el acoplamiento débil y el acoplamiento fuerte

En este modo no se produce ninguna variación en la longitud de el muelle central, lo que implica que da igual qué tipo de acoplamiento tengamos para la posición de las masas.

Si hacemos un estudio de el espectro de Fourier obtendremos que sólo hay un pico, la frecuencia asociada a ω_1 , la que no depende de k' ya que este muelle no se deforma en este modo como ya hemos comentado.

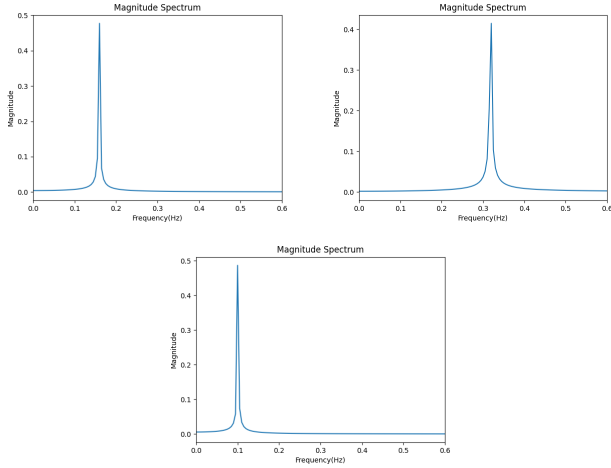


Figura 13: Espectro de Fourier del modo simétrico para, de izquierda a derecha: $k = k'$, el acoplamiento débil y el acoplamiento fuerte

De nuevo, podemos calcular “experimentalmente” el valor de la velocidad angular a partir de las gráficas de la posición midiendo el periodo de las mismas. En la siguiente tabla los comparamos con los valores teóricos.

	$k = k'$	$k \gg k'$	$k \ll k'$
Teórico (rad/s)	1	2	0,6325
Experimental (rad/s)	0,9935	1,9963	0,6294

Figura 14: Comparativa entre la frecuencia propia teórica y experimental del modo simétrico

3.2 Modo Antisimétrico

Para excitar este modo vamos a imponer:

$$x_1(0) = 0,5 \quad x_2(0) = -0,5 \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \text{ m/s}$$

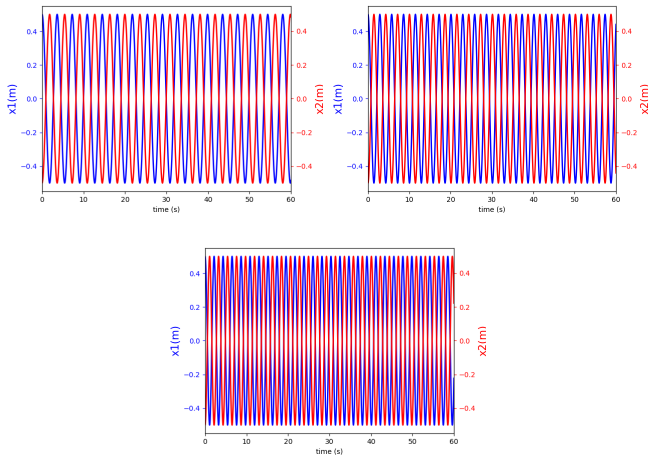


Figura 15: Posiciones para el modo antisimétrico para, de izquierda a derecha: $k = k'$, el acoplamiento débil y el acoplamiento fuerte

Podemos comprobar fácilmente que a diferencia del caso anterior, ahora las dos masas oscilan con una diferencia total de fase, y como en el caso anterior, la constante de el muelle central sólo varía la densidad de oscilaciones que tendremos.

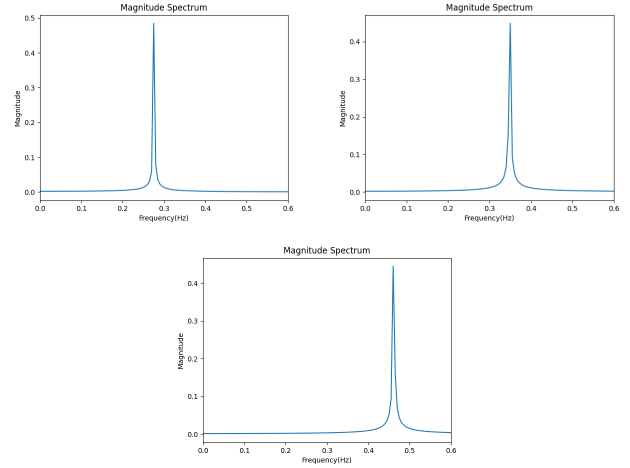


Figura 16: Espectro de Fourier del modo antisimétrico para, de izquierda a derecha: $k = k'$, el acoplamiento débil y el acoplamiento fuerte

	$k = k'$	$k \gg k'$	$k \ll k'$
Teórico (rad/s)	1	2	0,6325
Experimental (rad/s)	0,9935	1,9963	0,6294

Figura 17: Comparativa entre la frecuencia propia teórica y experimental del modo antisimétrico

Me resulta curioso que los datos experimentales sean siempre inferiores al teórico y no haya ningún caso en el que sobrepasen la teoría aunque se traten de aproximaciones que en principio no tienen porqué comportarse así. He intentado asociar esto a algún error humano pero no encuentro ninguna influencia humana en la medición directa, y tampoco encuentro una razón teórica que explique esto. Entiendo que la explicación más sencilla sería que he hecho una elección de las constantes k y k' que lleva a que para mi caso concreto se repita este patrón. He podido corroborar esto aumentando la resolución temporal, dt , y observando que algunos datos experimentales ya no seguían este patrón.

4 EXTRAS

4.1 Acoplamientos

Vamos a explicar con algo más de detalle qué es el acoplamiento débil que hemos nombrado tanto en el informe. El acoplamiento débil sucede cuando la constante de elasticidad del muelle central, el que une las dos masas, es muy pequeño. En este caso, las frecuencias naturales se asemejan mucho entre sí, y a la frecuencia natural de cada muelle con su masa independientemente como hemos visto por su cercanía en el espectro de Fourier. Este tipo de acoplamiento da lugar a un movimiento conocido como latido:

$$x_1(t) = [A_0 \cos(\epsilon \omega_0 t)] \cos \omega_0 t \quad x_2(t) = [A_0 \sin(\epsilon \omega_0 t)] \sin \omega_0 t$$

Con $\omega_0 = \sqrt{(k+k')/m}$ la frecuencia natural de cada oscilador ignorando el otro, y $\epsilon = k'/2k \ll 1$

Análogamente, tenemos el caso del acoplamiento fuerte, en el que la constante de elasticidad del muelle central es muy grande en comparación al de los extremos.

4.2 Fuerzas no conservativas

En esta sección, vamos a añadir el efecto del rozamiento al diagrama problema. Para el análisis, variaremos el coeficiente de rozamiento de cada muelle individualmente para ver qué efectos tiene en el movimiento de los mismos. Para ello llamaremos α al coeficiente de rozamiento de los muelles exteriores y β al coeficiente de rozamiento del muelle que une las masas. De esta forma las ecuaciones diferenciales quedan como:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - \alpha\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - \alpha\dot{x}_2 - k'(x_2 - x_1) - \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{aligned}$$

En el código, vamos a añadir esta consideración sobre el rozamiento y vamos a variar los valores de α y β y observar qué sucede con las gráficas de la energía. Vamos a graficar el caso en el que $k = k'$

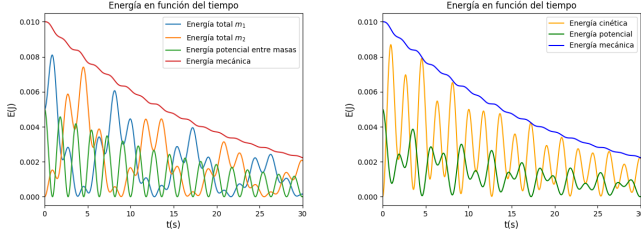


Figura 18: $k = k' = 1$ con $\alpha = 0,05$ y $\beta = 0$

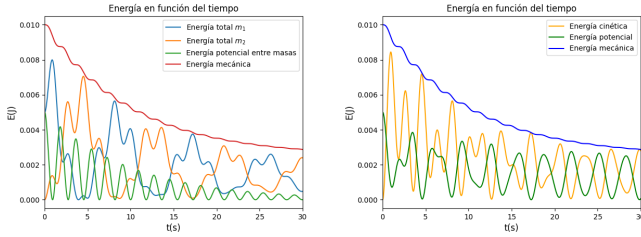


Figura 19: $k = k' = 1$ con $\alpha = 0$ y $\beta = 0,05$

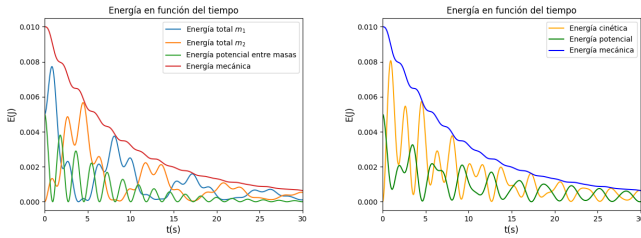


Figura 20: $k = k' = 1$ con $\alpha = 0,05$ y $\beta = 0,05$

Observamos que aunque β sea solo un muelle, el caso en el que $\alpha = 0$ y $\beta = 0,05$ hace decrecer la energía más rápido que el caso en el que solo hay α . De acuerdo con lo esperado, el que más rápido la hace decrecer es el caso en el que tenemos en cuenta ambos muelles. La naturaleza oscilatoria del decrecimiento se debe a que la energía sólo se verá afectada cuando los muelles están en movimiento, y el central lo está siempre, por lo que tiene sentido que ese sea el caso en el que haya un decrecimiento más veloz.

BIBLIOGRAFÍA

- Guckenheimer, J., & Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- Meirovitch, L. *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, 1970.
- Hilborn, R.C. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, 2000.
- Nayfeh, A.H., & Mook, D.T. *Nonlinear Oscillations*, Wiley-VCH, 1979.
- Rand, R.H. *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*, Cornell University, 1994.
- Koplowitz, J., & Patra, S., & Joshi, S. *Coupled Oscillators: A Case Study in Mathematical Modeling*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, DOI: 10.1006/jmaa.2001.7793, 2002.
- Andronov, A.A., Vitt, A.A., & Khaikin, S.E. *Theory of Oscillators*, Dover Publications, 1973.
- Introduction to Coupled Oscillators*, www.vibrationdata.com/tutorials2/coupled_oscillators.html, 2024.
- SciPy Documentation. *Signal Processing (scipy.fftpack)*, www.docs.scipy.org/doc/scipy/reference/fftpack.html, 2024.