FORMULARIO BÁSICO

$|z_1|+|z_2| \geq |z_1 \pm z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|$

Propiedades básicas $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ elemento inverso $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

división $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

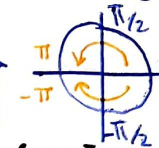
$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

$f(z) = \bar{z}$ no son derivables nunca

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\left\{ \begin{array}{l} Arg(z) = \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \arg(z) = \{\alpha + 2\pi k\} \end{array} \right.$



$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$; $\arg(z^n) = n\arg(z)$

$(-\pi, \pi]$

Definiciones: $z = |z|e^{i\alpha}$, $\alpha = Arg(z)$

- analítica en U si es derivable en todo punto de U.
- entera si es analítica en todo $\mathbb{C}$

función exponencial

$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

- $e^z \neq 0$
- $|e^z| = e^x \leq e^{|z|}$
- e^z es entera
- $\lim\limits_{z \to +\infty} e^z = \nexists$

RAÍZ DE COMPLEJOS

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\alpha}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)}$, $k = 0, \dots, n-1$

cartesiana $z = (a,b)$

binómica $z = a+bi$ $(\bar{z} = a-ib)$

trigon. $z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ módulo

polar r_α

exponencial $re^{i\alpha}$

función logaritmo

$\log z = \ln|z| + i\,(Arg(z) + 2\pi n i)$, $n \in \mathbb{Z}$

$\log z = \ln|z| + i\,Arg(z)$ (log principal)

$\log_{\theta_0}(z) = \ln|z| + i\,Arg_{\theta_0}(z)$; $\arg(z) \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$

↳ el estándard es $\theta_0 = -\pi$

↳ es analítica salvo en los z con arg. θ_0.

$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

no cumple $\left\{ \begin{array}{l} \ln xy = \ln x + \ln y \\ \ln x^n = n \cdot \ln x \end{array} \right.$ todos los log

funciones trigonométricas

$\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

$\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$

$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow z = \pi k$ $\quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow z = \pi k + \frac{\pi}{2}$

$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow z = (k + \frac{1}{2})\pi i$ $\boxed{\cosh(iz) = \cosh(z)}$

$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow z = \pi k i$ $\boxed{\operatorname{senh}(z) = -i \operatorname{senh}(zi)}$

$\operatorname{cotan} z = \frac{1}{\tan z} = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$; $\sec z = \frac{1}{\cos z}$; $\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$

función potencia

$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$

- $a^z = e^{z \cdot \log a}$
- $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha Arg(z)}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$
- $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg(z)}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{1}{2}$ (hallo raíces) → n sol

Cauchy-Riemann

$f: U \to \mathbb{C}$ analítica en U abierto

- $f = u + iv$ ⇒ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

f holomorfa ⇒

- $f: U \to \mathbb{C}$ y ∃ parciales en u y v tq $f = u + iv$ y son continuas en $z_0 \in U$ ⇒ si se cumple C-R → f derivable en z_0

→ u es analítica ⇔ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

→ v es la conjugada armónica de u si ambas son armónicas y verifican C-R siendo $f = u + iv$

→ **CR en polares**

$z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\theta_0}$

$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}}$; $\boxed{\frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{-\partial v}{\partial r}}$

Tema 2. Integración compleja

Traza o trayectoria $\gamma^* = \gamma([a,b]) = \{\gamma(t) : t \in (a,b)\}$

integral de f a lo largo de un camino $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

camino recorrido en sentido antihorario

propiedades integrabilidad • $\int_\gamma (f+g)dz = \int_\gamma f dz + \int_\gamma g dz$ • $\int_\gamma c f dz = c \cdot \int_\gamma f(z)dz$

• $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$ siendo $-\gamma$ el camino opuesto a γ: $(-\gamma)(t) = \gamma(b+a-t), t\in[a,b]$

• $\int_{\gamma+\beta} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\beta f(z)dz$ • $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M_f(z)\cdot L(\gamma)$, $M_f(z) = \max\{|f(z)|, z\in\gamma^*\}$

↳ longitud de γ

parametrizaciones

• segmento $[a,b]$ $\gamma(t) = (1-t)a + b, t\in[0,1]$

• circun. $C(z_0, r)$ $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, t\in[0,2\pi]$

¿TEOREMA extensión T.F.C

f continua en U abierto, $\gamma: [a,b] \to U$

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = F(z)\Big]_{\gamma(b)}^{\gamma(a)}}$$

CAUCHY PARA TRIÁNGULOS

f continua en U, analítica en $U \setminus \{z_0\}$

Δ contenido en U:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0 \text{ con } \Gamma = Fr(\Delta)$$

LOCAL DE CAUCHY

f analítica en $D(z_0, r)$

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \ \forall\gamma \text{ cerrado en } D(z_0,r)$$

FORMULA INTEGRAL CÍRCULO CAUCHY

$f(z)$ analítica en U que contiene $\bar{D}(z_0,r)$

Entonces $\forall z \in D(z_0, r)$, $C = C(z_0, r)$

FIC $\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz}$

1er Tma de Cauchy

$f: U \to \mathbb{C}$, U abierto, γ camino cerrado

$\int f(z)dz = 0 \ \forall f$ analítica $\Leftrightarrow n(\gamma, z) = 0$ $\forall z \notin U$

CAUCHY PARA ESTRELLADOS

f holomorfa en U estrellado y abierto

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \ \forall\gamma \text{ contenido en } U$$

CAUCHY PARA CONVEXOS

f continua en U y holomorfa en $U\setminus\{z_0\}$

$$\int_\gamma f(z) = 0 \ \forall\gamma \text{ camino cerrado en } U$$

FÓRMULA INTEGRAL DERIVADAS CAUCHY

mismas condiciones

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz}$$

Índice: γ camino cerrado y $z \notin \gamma^* \Rightarrow$

$\Rightarrow$ índice de z_0 respecto γ: $\boxed{n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}}$

nº de vueltas de γ respecto z_0

• $n(\gamma, z_0) = n(\gamma - z_0, 0)$

• $n(-\gamma, z_0) = -n(\gamma, z_0)$

• $n(\gamma\beta, 0) = n(\gamma, 0) + n(\beta, 0)$

• $n(\gamma, z) = 0 \ \forall z$ en la comp. conexa no acotada

FORMULAS generales Cauchy

f analítica y γ camino cerrado en U tq $n(\gamma, z) = 0 \ \forall z \notin U$

$$\boxed{f(z)\cdot n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz}$$

$$\boxed{f^{(n)}(z)\cdot n(\gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz}$$

Pcipio REFLEXIÓN SCHWARZ

f analítica en $\mathbb{C}^+$ y continua en $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ si $Im(f(z)) = 0 \ \forall z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f puede ser extendida analíticamente en $\mathbb{C}$

ESTIMACIÓN CAUCHY

f analítica en U, abierto que contiene $D(z_0, r)$:

$$\boxed{|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M_f(r)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Tma. FUNDAMENTAL ÁLGEBRA

Todo polinomio no constante tiene al menos una raíz.

Propiedad valor medio de Gauss

f analítica en U abierto $D(z_0, r) \subseteq U$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt$$

Lema de Schwarz

f analítica en $D(0,1)$.

Supongamos $f(0) = 0$ ó $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in D(0,1)$, entonces:

$$|f(z)| \leq |z| \quad y \quad |f'(0)| \leq 1$$

Además si $\exists z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ que cumple la igualdad, entonces f es

$$f(z) = az \quad con \quad a \in \mathbb{C} : |a| = 1$$

RESOLVER POR POISSON

① $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - t)}$

fijamos $z_0 = 0$ y hallamos R, r, θ

② Tenemos $\displaystyle P_r(\theta - t) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - t)}$

③ $z = z_0 + re^{it}$

Tma Liouville

f entera + acotada $\Rightarrow$ f es cte

ANALITICIDAD DE DERIVADAS

f analítica en $z_0 \Rightarrow f^{(n)}$ analítica en z_0

Además, f tiene primitiva en $U \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f es analítica en U

Tma de Morera

$\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0 \ \forall \Gamma$ frontera triangulo $\Rightarrow$ f es holomorfa en U

PCIPIO MÓDULO MÁXIMO

f analítica en U abierto, conexo y acotado

f continua en $Fr(U) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} ① \ |f(z)| \leq M \quad \forall z \in U \\ ② \ |f(z_0)| = M, z_0 \in U \Rightarrow f \text{ constante} \end{cases}$$

$M = \max\{|f(z)| : z \in Fr(U)\}$

PCIPIO MODULO MÍNIMO

f analítica en U abierto, conexo y acotado

f continua en $Fr(U)$, $f \neq 0, \forall z \in U$: $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} ① \ |f(z)| \geq m \\ ② \ |f(z_0)| = m, z_0 \in U \Rightarrow f \text{ constante} \end{cases}$$

$m = \min\{|f(z)| : z \in Fr(U)\}$

NÚCLEO DE POISSON

$$P_r(x) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2r\cos x}$$

- $0 < r < R$
- $x \in \mathbb{R}$

NÚCLEO DE CAUCHY

$$Q_z(t) = \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z}$$

$z \in D(0, R)$
$R > 0$
$z \in \mathbb{R}$

Lema Cauchy $[u = Re(f(z))]$

- f analítica en $D(z_0, R)$ y continua en $\overline{D}(z_0, R)$

Para cada $z = z_0 + re^{i\theta}$ con $0 \leq r \leq R$ y $\theta \in [0, 2\pi]$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(z_0 + Re^{it})\, dt$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \cdot u(z_0 + Re^{it})\, dt$$

④ Buscamos $f(z)$ tq $\operatorname{Re}(f(z_0+Re^{it})) = g(t)$

↳ suele ser z^n o e^z

⑤ Sustituimos

Tema 3. Series de potencias

$z_0 \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$ sucesión en $\mathbb{C}$

Serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$

RADIO DE CONV.

$\boxed{r = (\limsup |a_n|^{1/n})^{-1}}$ es el radio de convergencia

$$\boxed{\text{si } \exists \lim_{n\to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \Rightarrow r = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)^{-1}}$$

Def: f analítica en U

f analítica en U si $\exists r>0$ con $D(z_0,r) \subset U$ y $\exists \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ centrada en z_0 y con radio conv $\geq r$ tq:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n} \quad \forall z \in D(z_0,r)$$

Tma Taylor, recíproco y unicidad

① f holomorfa en $D(z_0,r)$

② $\exists \{a_n\} \subseteq \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0,r)$

③ f indef. derivable en $D(z_0,r)$ y $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Además, en este caso, f conv. uniformemente sobre compactos:

$$\boxed{f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n-p)!} (z-z_0)^{n-p}} \quad \forall z \in D(z_0,r)$$

Tma Laurent y unicidad

f analítica, $U = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$

$$\boxed{f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n} \quad \forall z \in U$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz}$$

Si f fuese analítica también dentro del anillo $a_n = 0 \ \forall n<0$ por Taylor = Laurent

RESOLVER POR FIC

De la forma $\int_C (\,)dz$

① Dejamos $(\,)$ de la forma $\frac{f(z)}{z-z_0}$ con z_0 la singularidad que cae dentro de C

② Identificamos dentro $f(z)$

③ Calculamos $f(z)$ en z_0

convergencia

converge: $\sum a_n |z-z_0|^n < +\infty$

conv. abs: $\sum |a_n(z-z_0)^n| < +\infty$

conv. unif. $\exists N \in \mathbb{N} : |\sum a_n (z-z_0)^n - f(w)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Tma Abel —

Tma Taylor

f holomorfa en $D(z_0,r)$ entonces:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0,r)}$$

Tma recíproco Taylor

Si $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n \ \forall z \in D(z_0,r) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f holomorfa en $D(z_0,r)$

Además $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Def: conjunto de ceros

$Z(f) = \{z \in U : f(z) = 0\}$

Pciplo Identidad

(PRINCIPIO PROLONGACIÓN ANALÍTICA)

Si dos funciones coinciden en un conjunto con puntos de acumulación entonces son iguales.

Def: anillo $A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$

Singularidades

f tiene una singularidad en z_0 si no es analítica en z_0 pero sí en algún punto de todo entorno de z_0.

→ es sing. aislada si $\exists$ entorno perforado de z_0 donde sí es analítica. ES NO aislada en caso contrario

→ z_0 sing. aislada de $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

Tipos de singularidades aisladas

▷ Evitable: $a_n = 0 \ \forall n<0$ (la serie de Laurent coincide con la serie de Taylor)

▷ Polo de orden m: $a_{-m} \neq 0$ y $a_n = 0 \ \forall n < -m$

▷ Esencial: $\{a_{-n} \neq 0 : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito

CLASIFICACIÓN Sea z_0 una singularidad aislada de f

▷ evitable: $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

→ (si $\lim () = +\infty \Rightarrow$ aumentamos m)

▷ polo de orden m: $\exists \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) \neq 0$

▷ esencial: $\nexists \lim_{z\to z_0} f(z) \wedge (\nexists \lim_{z\to z_0} |f(z)| \vee \lim_{z\to z_0} |f(z)| \neq \infty)$

singularidad en ∞ estudiamos $g(z) = f(\frac{1}{z})$ en $z=0$

↳ si f es entera $\Rightarrow \begin{cases} \infty \text{ evitable} \Rightarrow f \text{ es constante} \\ \infty \text{ polo de orden } m \Rightarrow f \text{ es un polinomio (no constante)} \\ \infty \text{ esencial} \Rightarrow f \text{ no es un polinomio} \end{cases}$

(tips ejercicios)

Tema 4. Teoría de residuos

Def: residuo de f en z_0: $Res(f,z_0) = a_{-1}$

CÁLCULO DE RESIDUOS

- z_0 evitable: $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^m \Rightarrow a_{-1} = Res(f,z_0) = 0$

- z_0 polo de orden m: $Res(f,z_0) = a_{-1} = \dfrac{\lim_{z\to z_0} g^{(m-1)}(z)}{(m-1)!}$ derivada

  ↳ polo simple: $Res(f,z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$

- z_0 esencial: calculamos desarrollo de Laurent

T^{ma} residuos

f analítica en abierto U, excepto $w_1, \dots, w_n$ puntos de U donde tiene singularidades aisladas. Sea γ el camino cerrado en U tq $w_j \notin \gamma^*$ y $n(\gamma, z) = 0$ $\forall z \notin U \Rightarrow$

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{w\in S} n(\gamma, w_j) \cdot Res(f, w_j)}$$

TIPS

- f analítica en z_0, no constante, con un cero de orden m en $z_0 \Rightarrow g(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ tiene un polo simple en z_0 y $Res(g, z_0) = m$

- f y g analíticas en z_0, $f(z_0) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(z)}{g(z)}$ tiene un polo de orden m en $z_0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow g(z)$ tiene un cero de orden m en z_0.

(RESOLVER INTEGRALES POR RESIDUOS)

$$\lim \int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

T^{ma} Jordan

f analítica en γ_R^*, $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, $R>0$, $a>0$

$$\boxed{\left|\int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz\right| \leq \frac{\pi M_f(\gamma_R)}{a} \cdot (1 - e^{-Ra})}$$

$$\boxed{M_f(\gamma_R) = \max\{|f(z)|, z\in\gamma_R\}}$$

por definición $\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

$\gamma_r = re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

- $a = 0 \Rightarrow \leq \pi R M_f(\gamma_R)$

PROP. polo simple

Sea z_0 sing. aislada de f analítica en $A(z_0, 0, R)$, $0<r<R$, definimos $\gamma_R(t) = z_0 + re^{i(\pi - t)}$ $t\in[0,\pi]$

sea z_0 polo simple de f:

$$\boxed{\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = -\pi i \, Res(f, z_0)}$$

T^ma Rouché

f, g analíticas en U abierto.
Sea γ camino cerrado en U, tq $n(\gamma, z) = 0$ $\forall z \notin U$

si $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ $\forall z \in \gamma^* \Rightarrow$

$\rightarrow f$ y g tienen los mismos ceros en γ

T^ma aplicación abierta

$f: U \to \mathbb{C}$ analítica en U, f no constante en ninguna componente conexa de U, entonces f es abierta.

T^ma aplicación inversa

$f: U \to \mathbb{C}$ analítica e inyectiva en $U \subseteq \mathbb{C}$ entonces f^{-1} es analítica en $f(U)$

$$\boxed{(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}}$$

Tema 5. Productorios infinitos

Producto infinito convergente $\rightarrow$ si P_n tiene una cantidad finita de términos nulos $\Rightarrow$ se pueden quitar y estudiar la convergencia.

Consideramos el producto parcial

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k \quad \text{si } \lim_{n\to+\infty} P_n = P \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{j\geq 1} z_j \text{ converge a } P$$

(si $P = 0 \Rightarrow \prod_{j\geq 1} z_j$ es no convergente)

condición necesaria

$$\boxed{\prod_{n\geq 1} z_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 1}$$

convergencia absoluta

$$\prod_{n\geq 1} (1 + z_n) \text{ conv. abs} \Leftarrow \prod_{n\geq 1} (1 + |z_n|) \text{ conv}$$

$$\prod_{n\geq 1} z_n \text{ conv. abs.} \Leftrightarrow \prod_{n\geq 1} (1 + |z_n - 1|) \text{ conv.}$$

$\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^+_0$ sucesión de n^os reales ≥ 0:

$$\prod_{n\geq 1} (1 + a_n) \text{ conv.} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \text{ conv.}$$

(también cierto en complejos) $z_n \in \mathbb{C}$

$$\prod_{n\geq 1} (1 + z_n) \text{ conv} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} |z_n| \text{ conv.}$$

si $\sum a_n$ conv $\Rightarrow$

$$\rightarrow \prod_{n\geq 1} (1 - a_n) \text{ conv.} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n^2 \text{ conv} \equiv \sum_{n\geq 1} (-a_n)^2 \text{ conv}$$