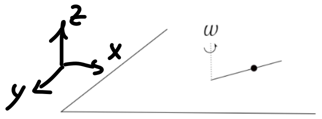
1. Una partícula de masa m está ensartada en un alambre recto sobre el que puede deslizarse sin rozamiento. El alambre gira en un plano horizontal respecto a un eje vertical que pasa por uno de sus extremos con velocidad angular ω. ¿Cuál el el número de grados de libertad del sistema? Elige coordenadas generalizadas adecuadas y obtén la lagrangiana del sistema y las ecuaciones de Lagrange correspondientes. Obtén la hamiltoniana y di si se conserva constante. ¿Es la hamiltoniana igual a la energía? ¿Por qué? Si el alambre tiene una longitud d y la partícula está inicialmente parada respecto al alambre en su punto medio, ¿cuál será el módulo de la velocidad de la partícula cuando salga por el extremo del alambre?



$\boxed{\text{2 grados de libertad}}$ ρ, φ. Tomamos esféricas y fijamos $\theta_0 = \pi/2$, $\dot\varphi$ será cte $= \omega$

$$x = \rho \sin\theta_0 \cos\varphi \qquad y = \rho\sin\theta_0 \sin\varphi \qquad z = \rho\cos\theta_0 \Rightarrow \begin{cases} \dot x = \dot\rho \sin\theta_0\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\theta_0 \sin\varphi \\ \dot y = \dot\rho \sin\theta_0 \sin\varphi + \rho\dot\varphi\sin\theta_0\cos\varphi \\ \dot z = \dot\rho\cos\theta_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot x^2 = \dot\rho^2 \sin^2\theta_0\cos^2\varphi + \rho^2\dot\varphi^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi - 2\rho\dot\rho\sin^2\theta_0\sin\varphi\cos\varphi \\ \dot y^2 = \dot\rho^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi + \rho^2\dot\varphi^2\sin^2\theta_0\cos^2\varphi + 2\rho\dot\rho\sin^2\theta_0\sin\varphi\cos\varphi \\ \dot z^2 = \dot\rho^2\cos^2\theta_0 \end{cases} \longrightarrow$$

* (Cuando hice el ej. tendría que haber hecho $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ y $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ básicamente quedarme con polares)

$$\Rightarrow \dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 = \dot\rho^2\sin^2\theta_0\cos^2\varphi + \rho^2\dot\varphi^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi + \dot\rho^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi + \rho^2\dot\varphi^2\sin^2\theta_0\cos^2\varphi + \dot\rho^2\cos^2\theta_0 =$$
$$= \dot\rho^2\sin^2\theta_0 + \rho^2\dot\varphi^2\sin^2\theta_0 + \dot\rho^2\cos^2\theta_0 = \dot\rho^2(1 + \dot\varphi^2\rho^2\sin^2\theta_0)$$

$$\longrightarrow T = \frac{1}{2}m\dot\rho^2(1+\dot\varphi^2\rho^2\sin^2\theta_0) \qquad U = 0 \longrightarrow \boxed{\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}m\dot\rho^2(1+\dot\varphi\rho^2\sin^2\theta_0)}$$

La independencia de la Lagrangiana respecto a a φ nos confirma la simetría y conservación que habíamos predicho gracias al Tma de Noether, el momento conjugado p_φ se conserva. Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} - \cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}}^{0} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}p_\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{m\dot\rho^2\ddot\varphi\sin^2\theta_0 = 0} \Rightarrow \dot\varphi m\dot\rho^2\sin^2\theta_0 = p_\varphi = \omega \text{ se conserva}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot\rho(1+\dot\varphi\rho^2\sin^2\theta_0) - m\dot\rho^2\dot\varphi\rho\sin^2\theta_0 = 0} \Longleftrightarrow \ddot\rho = \frac{\dot\rho^2\dot\varphi\rho\sin^2\theta_0}{1+\dot\varphi\rho^2\sin^2\theta_0} = \frac{\dot\rho^2\dot\varphi}{1+\dot\varphi\rho^2}$$

$$H = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\dot q_i - \mathcal{L} = p_\varphi\dot\varphi + p_\rho\dot\rho - T = \dot\varphi^2 m\dot\rho^2\sin^2\theta_0 + m\dot\rho(1+\dot\varphi\rho^2\sin^2\theta_0) - \frac{1}{2}m\dot\rho^2(1+\dot\varphi\rho^2\sin^2\theta_0) =$$

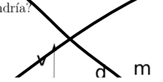
$$= \boxed{\dot\varphi\omega + \frac{1}{2}m\dot\rho(1+\dot\varphi\rho^2\sin^2\theta_0)} = \dot\varphi\omega + \mathcal{L} \neq \mathcal{L} \longrightarrow \boxed{H \text{ no se conserva en el tiempo} \Rightarrow H \neq E} \to \text{Mala pinta}$$

$$\rho(0) = \frac{d}{2} \qquad ¿\dot\rho\left(\frac{d}{2}\right)? \qquad \Delta T = T_d - T_{d/2} = \frac{1}{2}m\cancel{\dot\rho(d)^2}^{0}(\dots) - \frac{1}{2}m\dot\rho\left(\frac{d}{2}\right)(1+\dot\varphi\rho^2) = -\frac{1}{2}\dot\rho\left(\frac{d}{2}\right)(m+\omega) = \dot\varphi\omega$$

No puedo hacer $E = \Delta T$ xq $H \neq E$

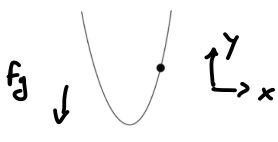
$$\Rightarrow \boxed{\dot\rho\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{-2\dot\varphi\omega}{m+\omega}} \to \text{Bien feo}$$

2. Dos partículas de masa m están separadas una distancia d y tienen velocidades como se muestra en la figura. Entre ellas actúa la fuerza de la gravedad. Obtener el ángulo θ y el valor de v (en función G, m y d) para que la órbita relativa sea circular. Dibuja esquemáticamente la trayectoria de las partículas. Si con ese valor de v, el ángulo θ fuera igual a 120°, ¿qué tipo de movimiento relativo se tendría?



Newtoniana

3. Una bolita de masa m está ensartada en un alambre, como muestra la figura, y puede deslizar sin rozamiento. Sobre la bolita actúa la fuerza de la gravedad (con intensidad g). Si el alambre tiene forma parabólica con ecuación $y = c\,x^2$, siendo c una constante, obtén la energía cinética, potencial y la lagrangiana del sistema usando como coordenada generalizada x. Obtén la posición de equilibrio y la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.



1 ligadura $y = cx^2 \Rightarrow$ 1 grado de libertad (x)

$$\begin{matrix} x = x \\ y = cx^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot x = \dot x \\ \dot y = 2c\dot x x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x^2 = \dot x^2 \\ \dot y^2 = 4c^2\dot x^2 x^2 \end{cases}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + 4c^2\dot x^2 x^2) = \frac{1}{2}m\dot x^2(1+4c^2x^2)} \quad \text{I}$$

$$\boxed{U = gmcx^2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot x^2(1+4c^2x^2) - gmcx^2}$$

Posición de equilibrio $\Rightarrow$ Mínimo en U

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Longleftrightarrow 2gmcx = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x = 0} \quad \text{II} \quad \text{Como } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0) = 0 \text{ es equilibrio estable}$$

$$|U - \omega^2 T| = 0 \Longleftrightarrow 2gmc - \omega^2 m(1+4c^2x^2) = 0 \Longleftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2gc}{1+4c^2x^2}}$$

Si hay pequeñas oscilaciones $x \to 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{2gc}}$ III