## Hoja 1.

**Ejercicio 1.** *Dar el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales*

*a)* $(\pi - t)x'' - tx' + 5x = \cos t.$

*b)* $(\pi - x)t'' - xt' + 5t = \cos t.$

*c)* $yy' + xy = \log x.$

*d)* $(\sin x)t'' + (\cos x)t' = e^x.$

*e)* $(1 - y^2)dx + xdy = 0.$

*f)* $x^2dy + (y - xy - xe^x)dx = 0.$

*g)* $y' = ay + \sin^n x.$

*h)* $(z'')^2 = (z')^3.$

*i)* $(x^2 - 1 + y^2x^2 - y^2)dy = y^2dx.$

*j)* $x' + 5x^2 = 3x'''.$

**Ejercicio 2.** *Decidir si las siguientes ecuaciones diferenciales son Problemas de Valor Inicial o Problemas de Valos en la frontera*

1. $y' = ay + \sin^n x$, $y(0) = 1.$
2. $(z'')^2 = (z')^3$, $z'(0) = z(1) = 0.$
3. $(x^2 - 1 + y^2x^2 - y^2)dy = y^2dx$, $y(9) = -9$
4. $x' + 5x^2 = 3x'''$, $x'(0) = x''(0) = x(0) = 1.$

**Ejercicio 3.** *Para cada ecuación diferencial, comprobar si las funciones dadas son soluciones o no. En caso afirmativo indicar el dominio de dichas soluciones.*

*a)* $y' = y$, $y_1(x) = 3e^x$, $y_2(x) = e^{2x}.$

*b)* $yx''(y) + yx'(y) = 0$, $x_1(y) = y$, $x_2(y) = \frac{1}{y}.$

*c)* $y'(x) = -\frac{xy^2+y}{x^2y+x}, y_1(x) = \frac{7}{x}$, $y_2(x) = 0.$

*d)* $z''(t) - z(t) = 0$, $z_1(t) = e^{mt} + e^{-mt}.$

*e)* $ax' - x = 0$, $x(t) = e^{-t/a}$, $a \neq 0.$

*f)* $t' + 5t = 20$, $t = 4.$

*g)* $(y')^3 + xy' = y$, $y(x) = x + 1.$

*h)* $\frac{dP}{dt} = P(a - bP), P(t) = \frac{ac_1e^{at}}{1+bc_1e^{at}}.$

*i)* $y''' - 2y'' - 5y' + 6 = 0$, $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x}.$

*j)* $y''' + 2y'' + y' + 2 = 0$, $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3e^{-2x}.$

**Ejercicio 4.** *Encontrar una ecuación diferencial de orden* 2 *que tenga como solución las funciones que se indican*

*a)* $r(s) = e^s + e^{-s}$

*b)* $y(x) = \cos x + \sin x.$

*c)* $y(x) = e^x(\cos x + \sin x).$

*d)* $x(t) = e^x(1 + x)$

**Ejercicio 5.** *Sea $f(x, y)$ una función continua y positiva en todo $\mathbb{R}^2$. Sea $y(x)$ una solución de la ecuación diferencial*

$$y'(x) = xyf(x, y). \tag{1}$$

*Demostrar que si $y(0) > 0$ se verifica que $y(x)$ es positiva para todo $x$.*

**Ejercicio 6.** *Reducir a un sistema de orden* 1 *el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcc} 2x'' + y''' - z & = & 2\cos t \\ x'' + y' + z' & = & e^t \\ x + y' + z'' & = & 8 \end{array}\right\}$$

**Ejercicio 7.** *Sea $z(t)$ una solución de $z' = z^4 + 1$. Justificar que $z$ es creciente.*

**Ejercicio 8.** *Sea $p$ un polinomio de grado 2. Estudiar condiciones en el polinomio $p$ para que la ecuación diferencial $y' = p(y)$ tenga soluciones constantes (horizontales).*

**Ejercicio 9.** *Se considera la ecuación diferencial* $z' = z^2 - 1$. *Se pide*

1. *Dar las soluciones constantes.*

2. *Demostrar que si* $z$ *no es constante entonces tiene un único punto de inflexión sobre el eje* $OX$.

3. *Comprobar que para todo valor de* $c$ *real la función* $z(t) = \frac{1-ce^{2t}}{1+ce^{2t}}$ *es solución.*

4. *Estudiar qué soluciones del apartado anterior coinciden con las obtenidas en el apartado* 1.

5. *Demostrar que si* $z(0) \in (-1, 1)$ *entonces* $|z(t)| < 1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

6. *Estudiar el dominio de las solucines cuando* $|z(0)| > 1$.

**Ejercicio 10.** *Comprobar que una familia uniparamétrica de soluciones de la E.D.*

$$y = xy' + (y')^2 \text{ es } y(x) = cx + c^2.$$

*Determinar el valor de* $k$ *de manera que* $y(x) = kx^2$ *sea también solución.¿Qué tipo de solución es?. Justifica tu respuesta.*

**Ejercicio 11.** *Obtener la E.D. de la familia de curvas siguientes*

a) *La familia de rectas que pasan por el origen de coordenadas.*

b) *La familia de circunferencias cuyos centros están en el eje* $y$.

c) *La familia de parábolas con vértice en el origen y cuyo foco está en el eje* $x$.

d) *La familia de tangentes a la parábola* $y^2 = 2x$.

**Ejercicio 12.** *Un cuerpo de masa* $m$ *que va cayendo recibe una resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea. Usar la segunda ley de Newton para encontrar la ecuación diferencial de la velocidad del cuerpo en un instante cualquiera. Resolver el ejercicio suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.*

**Ejercicio 13.** *La velocidad con que se desintegra una sustancia radiactiva es proporcional, en cada instante, a la cantidad de sustancia que permanece no desintegrada. Encontrar la E.D. para la cantidad de sustancia presente en función del tiempo.*

**Ejercicio 14.** *Un medicamento se inyecta en el flujo sanguíneo de un paciente con una intensidad constante de* $r$ *gramos/segundo. Simultáneamente, la sustancia se elimina con una rapidez proporcional a la cantidad de sustancia presente en cada instante. Halle la ecuación diferencial para la cantidad de sustancia presente en sangre en función del tiempo.*