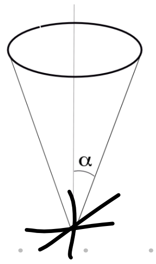
1. Una partícula de masa m puede deslizar sin rozamiento sobre la superficie de un cono como muestra la figura. Sobre la partícula actúa la fuerza de la gravedad. a) Obtén, usando las coordenadas generalizadas adecuadas, la Lagrangiana del sistema y las ecuaciones de Lagrange. b) Obtén los momentos canónicos y discute si alguno de ellos se conserva. c) Explica cómo se puede reducir el problema a un problema unidimensional conservativo, obteniendo el potencial (efectivo) asociado. d) Representa esquemáticamente ese potencial y discute los posibles movimientos. e) Si inicialmente la partícula está a una distancia d del vértice, ¿qué velocidad y en qué dirección le comunicarías para que realizara un movimiento circular?



Como se trata de un cono, la elección de coordenadas más sensata resulta ser las coordenadas esféricas, ya que el ángulo α corresponde con el ángulo polar, que mantendremos constante y nos dará por tanto una ligadura. El sistema tiene por tanto dos grados de libertad, el ángulo acimutal φ y el radio ρ. Partiendo de cartesianas, obtenemos el valor de la velocidad generalizada:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\alpha\cos\varphi \\ y=\rho\sin\alpha\sin\varphi \\ z=\rho\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x=\dot\rho\sin\alpha\cos\varphi-\dot\varphi\rho\sin\alpha\sin\varphi \\ \dot y=\dot\rho\sin\alpha\sin\varphi+\dot\varphi\rho\sin\alpha\cos\varphi \\ \dot z=\dot\rho\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x^2=\dot\rho^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi+\dot\varphi^2\rho^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi-2\rho\dot\rho\dot\varphi\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi \\ \dot y^2=\dot\rho^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi+\dot\varphi^2\rho^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi+2\rho\dot\rho\dot\varphi\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi \\ \dot z^2=\dot\rho^2\cos^2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot x^2+\dot y^2+\dot z^2=\dot\rho^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi+\dot\varphi^2\rho^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi+\dot\rho^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi+\dot\varphi^2\rho^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi+\dot\rho^2\cos^2\alpha=$$

$$=\dot\rho^2\sin^2\alpha+\dot\varphi^2\rho^2\sin^2\alpha+\dot\rho^2\cos^2\alpha=\dot\rho^2+\dot\varphi^2\rho^2\sin\alpha \Rightarrow$$

I

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\dot\varphi^2\rho^2\sin\alpha) \qquad U=mg\rho\cos\alpha \rightarrow \boxed{\mathcal{L}=T-U=\frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\dot\varphi^2\rho^2\sin\alpha)-mg\rho\cos\alpha}$$

Euler-Lagrange

I

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho}=0 \Longleftrightarrow \boxed{m\ddot\rho-m\dot\varphi^2\rho\sin\alpha-mg\cos\alpha=0} \Longleftrightarrow \ddot\rho=\dot\varphi^2\rho\sin\alpha+g\cos\alpha \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}-\cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}}=0 \Longleftrightarrow \boxed{m\ddot\varphi\rho^2\sin\alpha=0} \longrightarrow \boxed{p_\varphi=m\dot\varphi\rho^2\sin\alpha \text{ se conservará}} \quad \boxed{p_\rho=m\dot\rho} \end{cases}$$

II

↳ La independencia de la lagrangiana del ángulo acimutal nos da la certeza de que habrá una simetría, este caso, que el momento conjugado asociado al ángulo acimutal p_φ, se conservará gracias al T^ma de Noether.

Para reducir el sistema a un problema unidimensional, haremos uso de la conservación de este momento:

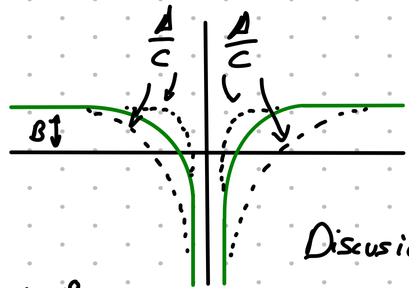
$$p_\varphi=A=m\dot\varphi\rho^2\sin\alpha \Longleftrightarrow \dot\varphi=\frac{A}{m\rho^2\sin\alpha} \Longleftrightarrow \boxed{\mathcal{L}'=\frac{1}{2}m\dot\rho^2+\frac{A^2}{2m\rho^2\sin\alpha}-mg\rho\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{eff}(\rho)=mg\cos\alpha-\frac{A}{2m\rho^2\sin\alpha}}$$

III

$$\begin{matrix} mg\cos\alpha=B \\ 2m\sin\alpha=C \end{matrix} \Rightarrow U_{eff}(\rho)=B-\frac{A}{C\rho^2} \Rightarrow$$

IV



Discusión...

Si fijamos el radio $\rho=d$, $\dot\rho=0$ y $\ddot\rho=0$

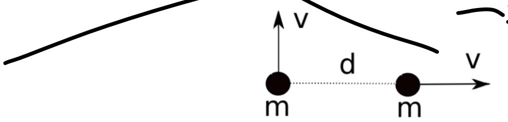
$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\dot\varphi^2\rho^2\sin\alpha)-mg\rho\cos\alpha \rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}-\cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}}=0 \Rightarrow m\rho^2\ddot\varphi\sin\alpha=0,\ \dot\varphi m\rho^2\sin\alpha \text{ se conserva} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho}=0 \rightarrow m\ddot\rho^2-m\dot\varphi^2\rho\sin\alpha-mg\cos\alpha=0 \end{cases}$$

Pero con $\rho=d$, $\dot\rho=0$, $\ddot\rho=0$ $\quad \cancelto{0}{m\ddot\rho^2}-m\dot\varphi^2\rho\sin\alpha-mg\cos\alpha=0 \longleftrightarrow m\dot\varphi^2 d\sin\alpha=mg\cos\alpha \longleftrightarrow$

$$\longleftrightarrow \boxed{\dot\varphi=\left(\frac{g}{d}\cot\alpha\right)^{1/2},\ \dot\rho=0}$$

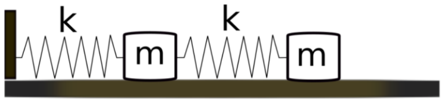
V

2. Dos partículas de masa m están separadas una distancia d y tienen velocidad v en la dirección que se muestra la figura. Entre ellas actúa la fuerza de la gravedad. Obtén, en función de la velocidad v, m, d y G, las características (parámetro y excentricidad) de la órbita relativa, indicando los intervalos de v en los cuales se tiene órbita elíptica, parablica o hiperbólica. ¿Hay algún valor de v para el que se tenga una órbita circular?



$\longrightarrow$ Newtoniana

3. Los bloques de masa m de la figura pueden deslizar sin rozamiento. Los dos muelles son iguales y tienen constante elástica k. a) Obtén razonadamente las frecuencias propias de oscilación del sistema. b) Obtén los modos normales de oscilación correspondientes (sin necesidad de normalizarlos). c) Estando en la posición de equilibrio, ¿qué velocidades comunicarías a los bloques para excitar sólo el modo de vibración con menor frecuencia?



$\rightarrow \eta_1 \qquad \rightarrow \eta_2$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m (\dot\eta_1^2 + \dot\eta_2^2) \\ U = \frac{1}{2} k \eta_1^2 + \frac{1}{2} k (\eta_2 - \eta_1)^2 = k\eta_1^2 - k\eta_1\eta_2 + \frac{1}{2} k \eta_2^2 \end{cases}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot\eta_1^2 + \dot\eta_2^2) + k\eta_1\eta_2 - k\eta_1^2 - \frac{1}{2} k \eta_2^2$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot\eta_1^2}(0) = m = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot\eta_2^2}(0) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot\eta_1 \partial \dot\eta_2}(0) = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot\eta_2 \partial \dot\eta_1}(0) = 0 \Longrightarrow T' = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta_1} = 2k\eta_1 - k\eta_2 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2}(0) = 2k \quad \frac{\partial U}{\partial \eta_2} = k\eta_2 - k\eta_1 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_2^2}(0) = k \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = -k = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} \longrightarrow U = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

$$|U - \omega^2 T'| = 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{pmatrix} \right| = 0 \Longleftrightarrow -k^2 + (2k - \omega^2 m)(k - \omega^2 m) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + k^2 = 0 \underset{x = \omega^2}{\Longleftrightarrow} m^2 x^2 - 3kmx + k^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4m^2k^2}}{2m^2} =$$

$$= \frac{3km \pm \sqrt{5k^2m^2}}{2m^2} = \frac{km(3 \pm \sqrt{5})}{2m^2} = \frac{k}{m} \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}} \ \mathrm{I}$$

$$\left(U - \frac{k}{m}\frac{3+\sqrt{5}}{2} T'\right) = \begin{pmatrix} 2k - k\frac{3+\sqrt{5}}{2} & -k \\ -k & k - \frac{3+\sqrt{5}}{2}k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{-2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} x_1 = x_2$$

$$-x_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{-2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} x_1 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_1$$

- $\mathrm{Ker}\left(U - \frac{k}{m}\frac{3+\sqrt{5}}{2} T'\right) = \mathrm{Env}\{(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)\} \Longrightarrow \boxed{A_1^T = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)}$ II

$$\left(U - \frac{k}{m}\frac{3-\sqrt{5}}{2} T'\right) = \begin{pmatrix} 2k - k\frac{3-\sqrt{5}}{2} & -k \\ -k & k - \frac{3-\sqrt{5}}{2}k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} x_1 = x_2$$

$$\Longleftrightarrow x_1 = x_1$$

- $\mathrm{Ker}\left(U - \frac{k}{m}\frac{3-\sqrt{5}}{2} T'\right) = \mathrm{Env}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)\} \Longrightarrow \boxed{A_2^T = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)}$ II

$\omega_2 < \omega_1$ y para hacer que el sistema entre en este modo, la velocidad aplicada a m_1 debe ser $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1'618$ veces la velocidad aplicada a m_2 tal y como nos indica el autovector asociado

III