Apuntes de análisis de variable compleja

2023

Apuntes de las clases de *Análisis de variable compleja* dadas por *Juan Matías Sepulcre Martínez* y transcritos a LaTeX por *Víctor Mira Ramírez* durante el curso 2023-2024 del grado en Física de la *Universidad de Alicante*.

Índice

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1: Número complejo

Un **número complejo** z es un par ordenado de números reales a, b escrito como $\boxed{z = (a, b)}$ en coordenadas cartesianas. Existe una notación equivalente, la forma binómica: $\boxed{z = a + ib}$ siendo $i = (0, 1)$.

El conjunto de los número complejos se denota por: $C := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Comentario:

Siempre que $a = 0$ sea un número imaginario puro, y $b = 0$ sea un número real.

Definición 1.1.2: Conjugado

Llamamos conjugado de un número complejo al número denotado $\boxed{\bar{z} = a - ib}$, siendo $z = a + ib$. Geométricamente, podemos decir que el eje real actúa de 'espejo' del número en el plano.

Comentario:

Llamamos $\mathbb{C}$ al cuerpo de los numeros complejos. $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo, pero no totalmente ordenado. En cambio, cualquier ecuación algebraica tiene solución en los complejos. De todas formas, el teorema fundamental del álgebra nos asegura que tendrá n soluciones en los complejos

Comentario:

Cuando los coeficientes de una ecuación algebraica son reales, las soluciones complejas vienen por pares.

Teorema 1.1.1 Operaciones elementales

SUMA $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$

RESTA $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i$

PRODUCTO $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$ (teniendo en cuenta que $i^2 = -1$)

DIVISIÓN $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{a + bi}{c + di} \cdot \dfrac{c - di}{c - di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i$ (multiplicando por el conjugado)

Comentario:

El elemento unidad es $1 + 0i$ y el elemento inverso es $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$. Para que un número complejo tenga elemento inverso, debe ser distinto de cero. El producto de un número complejo por su elemento inverso es la unidad.

Definición 1.1.3: Componentes de los complejos

Llamamos **módulo** del número complejo $z = a + bi$ a la cantidad $\boxed{\sqrt{a^2 + b^2}}$ denotada $|z|$

Llamamos **argumento** del número complejo $z = a + bi$ al ángulo que forma el semieje positivo de abcisas con la recta que contiene el vector (a, b). Se denota Arg $z = \alpha$ y se expresa en radianes.

$\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$ si $a \neq 0$

Definición 1.1.4: Módulo

Llamamos **módulo** de un número complejo $z = a + bi$, y lo denotamos $|z|$, a la cantidad

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Definición 1.1.5: Argumento

Llamamos **argumento** de un número complejo $z = a + bi$ al ángula que forma el semieje positivo de abcisas con la recta que contiene al vector. El argumento de z se representa por Arg(z)= α, y se expresa normalmente en radianes.

$$\alpha = \arctan\frac{b}{a}, \text{si} a \neq 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{si} a = 0, b > 0$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}, \text{si} a = 0, b < 0$$

Si el ángulo se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi)$ lo llamaremos argumento principal.

Comentario:

lol

Comentario:

forma exponencial: el desarrollo en serie de la exponencial es: $e^x = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$ si introducimos un número complejo en la exponencial: $e^{iy} = 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \ldots$
Si analizamos el valor de i^n en función de n, entonces vemos como la exponencial compleja queda ahora como:
$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!}\right) = \cos(y) + i\sin(y)$
$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ con $z = x + iy$

1.2 Analiticidad

Definición 1.2.1: Función armónica conjugada

Sea $u\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en un abierto de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diremos que $v\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función armónica conjugada** de u en $\mathcal{D}$ si v es armónica en $\mathcal{D}$ y satisfacen las condiciones de *Cauchy-Riemann*, (o equivalentemente la función $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en $\{x + iy \in \mathbb{C}\colon (x,y) \in \mathcal{D}\}$)

Comentario:

Una función armónica es aquella que satisface la ecuación de Laplace.

Teorema 1.2.1

Sea $u(x,y)\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica de $\mathcal{D}$ y consideramos v una región rectangular contenida en $\mathcal{D}$. Entonces existe una conjugada armónica de $u(x,y)$ en v.

1.3 Algunas funciones elementales

1.3.1. Función exponencial

Definición 1.3.1

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Teorema 1.3.1

1. $e^z \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$
2. $|e^z| = e^{Re(z)} \qquad z \in \mathbb{C}$
3. $arg\,(e^z) = \{Im(z) + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}\} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$
4. $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}} \qquad z \in \mathbb{C}$
5. $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$
   $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi k i \qquad z \in \mathbb{C}$
6. $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad x \in \mathbb{R}$
   $\nexists \lim_{|z|\to\infty} e^z = \infty \qquad x \in \mathbb{R}$
7. e^x es entera (derivable en todo punto de $\mathbb{C}$) $(e^z)' = e^z$
8. $e^{z+\omega} = e^z \cdot e^\omega, \qquad z, w \in \mathbb{C}$
   $(e^z)^n = e^{nz}, \qquad n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$

Ejemplo 1.3.1 ($e^{iz} - e^{-iz} = 4i$)

$e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Longleftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} - 4i = 0 \Longleftrightarrow e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$

Si $\omega = e^{iz} \Longrightarrow \boxed{\omega^2 - 4i\omega - 1 = 0}$

$$w = \frac{4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = 2i \pm \sqrt{3} = 2 \pm \sqrt{3}i \Longrightarrow \boxed{e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i}$$

1.3.2. Función logarítmica

Definición 1.3.2

Se introduce por la necesidad de solucionar ecuaciones como la anterior.

$$x = e^y \iff y = \log x, \qquad x\,0, y \in \mathbb{R}$$

Sea $z \in \mathbb{C} - 0$, definimos el logaritmo principal de z, y lo denotamos por $\log z$, como

$$\log z = ln|z| + i \cdot Arg(z)$$

Vemos que $e^{\log z} = e^{log|z| + Arg(z)} = e^{ln|z|}e^{Arg(z)} = |z|e^{Arg(z)} = z$
El conjunto de todos los logaritmos de z será:

$$\log z = \{ln|z| + i\,(Arg(z) + 2\pi k)\,, k \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 1.3.2

1. Si $z = x > 0 \Rightarrow \log z = ln|z| + i \cdot Arg(z) = ln x$
   $\log z = \{ln x + 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}\}$
2. Si $z = -x > 0 \Rightarrow \log z = ln x - i \cdot (-\pi)$ (argumento de z)
   $\log z = \{ln x + -(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}\}$
3. Si $z = ix, x > 0 \Rightarrow \log z = ln x + i\dfrac{\pi}{2}$
   $\log z = \left\{ln x + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

Comentario:

Retomando la ecuación del ejemplo anterior,

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i = \begin{cases} (2+\sqrt{3}i) \leftrightarrow iz = \log(2+\sqrt{3})i \leftrightarrow z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - iln(2+\sqrt{3}) \\ (2-\sqrt{3}i) \leftrightarrow iz = \log(2-\sqrt{3})i \leftrightarrow z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - iln(2-\sqrt{3}) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Teorema 1.3.2 Propiedades

1. Log z es holomorfa en $\mathbb{C} - [-\infty, 0] \implies$ de hecho, no es continua en $(-\infty, 0]$
2. $\log_{\theta_0} = z$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}, arg(z) = \theta_0\}$
3. $e^{\log_{\theta_0} z} = z, \qquad \forall z \in \mathbb{C}, arg(z) = \theta_0$ y $(log_{\theta_0})' = \dfrac{1}{z}$
4. $\log_{\theta_0} e^z = z \qquad \forall z = x + iy, \theta_0 <= y < \theta_0 + 2\pi \; z = x + iy, e^z = e^x e^{iy} \implies \log_{\theta_0} e^z = z$
   cuando $y \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$

Definición 1.3.3

Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$, tomamos $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta_0 <= \theta = \theta_0 + 2\pi$ y entonces $log_{\theta_0} z = ln|z| + i\theta$

Si $\theta_0 = -\pi \implies \log_{\theta_0} z = Log z$
Si $\theta_0 = 0 \implies log_0 z = ln|z| + i\theta, \qquad 0 <= \theta < 2\pi$