1: $f_n(x) = \sin(nx)$, $n \geq 1$ no es equicontinua en $[-\pi, \pi]$

función equicontinua $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta, |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \ \forall n \geq 1$ con $x \in [-\pi, \pi]$

$\left.\begin{array}{l} \bullet |x-y| < \delta \\ \bullet |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \end{array}\right\}$ si tomamos $x = \frac{\pi}{2n}$, $y = 0$ $\left.\begin{array}{l} 1.\ |x-y| = \frac{\pi}{2n} < \delta \text{ para cierto } n \geq n_0 \\ 2.\ |f_n(x) - f_n(y)| = |\sin(n\frac{\pi}{2n}) - \sin(0)| = 1 > \varepsilon \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ No es equicontinua ya que podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon = 1)$ tal que no se cumpla la definición de equicontinuidad $\square$

2: $\frac{x^n}{n} = f_n(x)$ es equicontinua en $[0, 1]$

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| = \left|\frac{x^n}{n} - \frac{y^n}{n}\right| = \frac{1}{n}|x^n - y^n| \overset{*}{\leq} \frac{1}{n} = \delta < \varepsilon$ $\Rightarrow$ Basta tomar $\varepsilon > \frac{1}{n}$ para que $f_n(x)$ sea equicontinua

$* \ |x^n - y^n| \left\{\begin{array}{l} x^n - y^n \leq 1 - (0) = 1 \\ y^n - x^n \leq 1 - (0) = 1 \end{array}\right. \Rightarrow |x^n - y^n| \leq 1$

3: Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones continuas en $[a,b]$ que no converge uniformemente en $[a,b]$ $\forall n \geq 1$,
Sea $F_n(x) = \int_a^x \sin(f_n(t))dt$ donde $x \in [a,b]$, ¿Existe una subsucesión uniformemente convergente de $(f_n)_n$?

Teorema Ascoli-Arcelà

1. ¿Equicontinua? $|F_n(x) - F_n(x_0)| = \left|\int_a^x \sin(f_n(t))dt - \int_a^{x} \sin(f(t))dt\right| = \ (x > x_0)$
$= \left|\int_{x_0}^x \sin(f_n(t))dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^x dt\right| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ ✓
Acotando por 1

2. ¿Uniformemente acotada? $|F_n(x)| = \left|\int_x^a \sin(f_n(t))dt\right| \leq \left|\int_a^x dt\right| = |x-a| \leq |b-a| = K$ ✓

$\Rightarrow$ Por el Tma. Ascoli-Arcela concluyo que existirá una subsucesión de $(f_n)_n$ uniformemente convergente $\square$