VARIAS 1 — aka — Cálculo Vectorial ⟶ SO EF si EF ≥ 3's / SO CONT y CONT ≥ EF

↳ 1 parcial y ejercicios

BLOQUE 1 EL ESPACIO EUCLÍDEO

"hemos perdido mucho con la evolución"

TEMA 1 - EL ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$

- Introducción

Vamos a considerar en nuestro trabajo a un espacio vectorial (EV) de dimensión finita: $\mathbb{R}^n$. El hecho de que tenga una dimensión finita hace que una base canónica: $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ donde $e_K = (0, 0, \dots, 1, 0, 0)$.

↳ posición K-ésima

- Definición

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, definimos un producto escalar (euclídeo) por: $\langle x, y\rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$

- Teorema

1) $\langle x, x\rangle \geq 0$
2) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$
3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$; $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \langle \alpha x, z\rangle + \langle \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ -> por ser lineal

- Definición

↳ Convertiremos a nuestro espacio ($\mathbb{R}^n$) en un espacio NORMADO

El producto escalar nos permite definir una norma euclídea de un vector de $\mathbb{R}^n$. Tenemos $\|x\|_2 = \underbrace{\sqrt{\langle x, x\rangle}}_{\text{general}} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}}_{\text{particular a } \mathbb{R}^n}$

- Teorema

1) $\|x\|_2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2) $\|x\|_2 = 0 \iff x = 0$
3) "Desigualdad Triangular" $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ —> solo si son LD (colineales)
4) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2\right)$ —> pedir demostración a Rocío
5) "Desigualdad de Cauchy-Swartz" $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\underbrace{|\langle x, y\rangle|}_{\text{v. abs}} \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

- Definición

↳ (Ortogonal es 90° sin punto de intersección / Perpendicular es 90° con punto de intersección)

Se dice que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero

- Definición

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se llama proyección ortogonal de x sobre y denotado $P_y(x)$ tq. $P_y(x) = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot y$

$\in \mathbb{R}$ y vector => $P_y(x)$ es colineal con y.

Comentarios

$(y \neq 0) \quad P_y(x) = \underbrace{\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}}_{\in \mathbb{R}} \cdot y$

① El vector $x - P_y(x)$ es ortogonal a y

② En el caso en el que y sea unitario (ie $\|y\| = 1$), $x - \langle x, y\rangle \cdot y$ es ortogonal a y.

- Definición

Llamaremos ángulo entre los vectores x e $y \in \mathbb{R}^n$ al número, $\theta = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|_2 \cdot \|y\|_2}\right)$

Comentarios

- $\theta = 0 \iff y = tx$ con $t>0$
- $\theta = \pi \iff y = tx$ con $t<0$
- $0<\theta<\pi \iff x$ e y no son colineales

Gracias a la información dada por la norma se puede definir en $\mathbb{R}^n$ una distancia y hacer de $\mathbb{R}^n$ un ESPACIO MÉTRICO

- DEFINICIÓN

La distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación:

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(x,y) \longrightarrow d_2(x,y) = \|x-y\|_2$$

- TEOREMA

1. $\forall x,y \in \mathbb{R}^n,\ d_2(x,y) \geq 0$ y $d_2(x,y) = 0 \iff x=y$
2. $d_2(x,y) = d_2(y,x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad d_2(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d_2(x,y)$
4. $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n \quad d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$

demostración

$d_2(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\|$

$\leq \|x-z\| + \|z-y\|$

d. triangular

Comentarios

- En $\mathbb{R}^n$, además de la norma euclídea, se suelen usar otras normas como por ejemplo:

$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \to$ Norma 1

$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty = \max\{|x_k|, 1 \leq k \leq n\} \to$ Norma infinita

Ejemplo

Podemos considerar también el espacio vectorial $\mathcal{B}(A)$ de todas las funciones reales acotadas definidas en $A \subset \mathbb{R}^n$

$A \neq \emptyset \quad \forall f \in \mathcal{B}(A),\ \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in A\}$

- DEFINICIÓN

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con la métrica d_2 se llama espacio euclídeo de dimensión finita n

---

TEMA 2: TOPOLOGÍA DE $\mathbb{R}^n$

"mi hija no tiene amigas y yo, tampoco"

A) Intervalos y entornos en $\mathbb{R}^n$

- DEFINICIÓN

Se llama intervalo cerrado en $\mathbb{R}^n$ a todo conjunto de la forma $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \dots \times [a_n,b_n] =$
$= \{(x_1,x_2,\dots,x_n) ; a_i \leq x_i \leq b_i \ \forall i = 1,2,\dots,n\}$

Se llama intervalo abierto en $\mathbb{R}^n$ a todo conjunto de la forma: $(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \dots \times (a_n,b_n) =$
$= \{(x_1,x_2,\dots,x_n) ; a_i < x_i < b_i \ \forall i = 1,2,\dots,n\}$

Se llama entorno de centro a y radio δ al conjunto de la forma: $E(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x-a\|_2 < \delta\}$

si $a=2$, $E(a,\delta)$ es un círculo de centro a y radio δ

si $a=3$, $E(a,\delta)$ es una esfera de centro a y radio δ

Quitando un punto x ejemplo

siempre el centro

Se llama entorno reducido de centro a y radio δ al conjunto de la forma: $E(a,\delta) \setminus \{a\}$ y la denotamos $E^*(a,\delta)$

— TEOREMA

① Cada punto de $\mathbb{R}^n$ tiene infinitos entornos, cada uno de los cuales tiene infinitos puntos de $\mathbb{R}^n$

② Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq y$ entonces existen $E(x,\delta)$ y $E(y,\delta')$ tales que $E(x,\delta) \cap E(y,\delta') = \emptyset$

③ Si $y \in E(x,\delta)$, entonces existe un entorno $E(y,\delta')$ tq $E(y,\delta') \subseteq E(x,\delta)$

B) Conjuntos abiertos y cerrados en $\mathbb{R}^n$

— DEFINICIÓN

- Se dice que un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es interior al conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si existe un entorno de a contenido en A
- Se dice que un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es exterior al $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si existe un entorno de a contenido en el complementario de A
- Se dice que un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es punto frontera de $A \subset \mathbb{R}^n$ si a no es interior ni exterior a A. Es decir, todo entorno de a contiene puntos de A y de su complementario $(\bar{A})$
- Se llama interior de A ($\mathring{A}$ o $int(A)$) al conjunto de los puntos interiores
- Se llama exterior de A ($ext(A)$) al conjunto de los puntos exteriores
- Se llama frontera de A ($fr(A)$) al conjunto de los puntos frontera

Comentario

$\mathring{A}$, $Ext(A)$ y $Fr(A)$ forman una partición de $\mathbb{R}^n$

— DEFINICIÓN

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ si es vacío o si todos sus puntos son interiores

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si su conjunto complementario es abierto

— TEOREMA

Tenemos los resultados siguiente

1. $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son abiertos
2. La unión (finita o infinita) de abiertos es un abierto
3. La intersección finita de abiertos es un abierto
4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $int(A)$ y $ext(A)$ son abiertos; $fr(A)$ es un cerrado
5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A abierto $\Longleftrightarrow \mathring{A} = A$
6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A abierto $\Longleftrightarrow$ A no contiene a ninguno de sus puntos frontera
7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A cerrado $\Longleftrightarrow$ A contiene a TODOS sus puntos frontera
8. Los intervalos abiertos son conjuntos abiertos
9. Los intervalos cerrados son conjuntos cerrados

→ De Morgan $\overline{A \cup B} \Leftrightarrow \overline{A \cap B}$

lol bastante xd

→ 1'. $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son cerrados

2'. La intersección (finita o infinita) de cerrados es un cerrado

3'. La union finita de cerrados es un cerrados

— DEFINICIÓN

Diremos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado si existe un $K \in \mathbb{R}$ tq $\|x\|_2 < K \quad \forall x \in A$ ← $\|x\|_2 < K \Longleftrightarrow \underbrace{\|x - 0\| < K}_{E(0,K)}$

Es decir, existe un extremo $E(0,K)$ tq $A \subseteq E(0,K)$

— DEFINICIÓN

Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si cualquiera que sea el entorno $E(x,\delta)$, tenemos $E^*(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$

Tan pequeño sea el entorno que sea, siempre encontrarás puntos de A dentro del entorno

Los puntos que no son puntos de acumulación se llaman puntos aislados

— TEOREMA

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado $\Longleftrightarrow$ contiene todos sus puntos de acumulación

Comentario

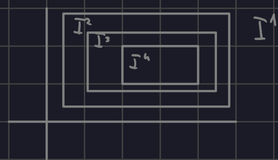
No es posible generalizar a $\mathbb{R}^n$ el principio del extremo en $\mathbb{R}$. Pero sí es posible generalizar el Principio del encaje de Cantor

— DEFINICIÓN

Sea $(I^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados de $\mathbb{R}^n$ siendo $I^k = [a_1^k, b_1^k] \times [a_2^k, b_2^k] \times \dots \times [a_n^k, b_n^k]$

Se dice que $(I^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un encaje de intervalos cerrados si

$\dots \subseteq I^{n+1} \subseteq I^n \subseteq I^{n-1} \subseteq \dots \subseteq I^2 \subseteq I^1$ i.e. $[a^{n+1}, b^{n+1}] \subseteq [a^n, b^n] \quad \forall_i = 1, \dots, n$



— TEOREMA de BOLZANO-WEIESTRASS

Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ infinito y acotado tiene AL MENOS un punto de acumulación

— DEFINICIÓN

Decimos que una familia de conjuntos $\{A_j\}_{j\in J}$, es un recubrimiento de un conjunto K si $K \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$

— DEFINICIÓN

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si de cada recubrimiento abierto $(A_j)_{j\in J}$ de K podemos extraer una familia finita de abiertos A_j de $(A_j)_{j\in J}$ que sea a su vez un recubrimiento de K

— TEOREMA

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un compacto $\Longleftrightarrow$ K es cerrado y acotado

— TEOREMA

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto $\Longleftrightarrow$ de toda sucesión de puntos de K puede extraerse una subsucesión convergente a un punto de K