T.D. 5 : Funciones implícitas.

Ejercicio 1

Probar que $f(x,y) = x^2 + y^4 - 5 = 0$ define en un entorno de $(2,1)$ las funciones implícitas $y = g(x)$ y $x = h(y)$.
Hallar $g'(2)$ y $g''(2)$. Expresar $g''(x)$ en función de las parciales de f.

Ejercicio 2

Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = x^2 + y^3 + xy - x^3 + ay$ con $a \in \mathbb{R}$.

1. ¿ Para que valores de a la relación $h(x,y) = 0$ define una función implícita $y = f(x)$ de clase C^∞ en un entorno de $(0,0)$?
2. Misma pregunta para una función implícita $x = g(y)$.

Ejercicio 3

Se sabe que para f diferenciable la igualdad $f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ define la función implícita $z = h(x,y)$.
Calcular, entonces, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ejercicio 4

Demostrar que la ecuación :

$$\ln(x) + e^{\frac{y}{x}} = 1$$

define en un entorno de $(1;0)$ una función implícita $y = g(x)$ tal que $g(1) = 0$. Dar la ecuación de la tangente a la curva $y = g(x)$ en 1.

Ejercicio 5

Demostrar que la función $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que :

$$\phi(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$$

es un difeomorfismo que se determinará.

Demostrar que la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que :

$$F(x,y,z) = (e^{x-y+2z} + e^{-x+y+2z}, e^{2x} + e^{2y} - 2\lambda e^{x-y}, e^{2x} + e^{2y} - 2e^{y-x})$$

es un difeomorfismo para $\lambda \geq 0$ (se podrá escribir $F = Go\phi$).

Ejercicio 6

Demostrar que $z = g(x,y)$ definida implícitamente por el sistema :

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z &= f(\alpha) \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha &= f'(\alpha) \end{cases}$$

donde α es de clase C^1 y f es de clase C^2, satisface $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z^2$.

"La elegancia de los teoremas es directamente proporcional al número de ideas que en ellos vemos, e inversamente proporcional al esfuerzo requerido para comprenderlas." [G. Polya (1887-1985)].