



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tema I: Introducción a la teoría matemática de campos.

Electromagnetismo I

2º Curso Grado Física

Curso 2022-2023 (2º semestre)

Universidad de Alicante – Departamento de Física Aplicada

Índice

1. Introducción.
2. Campos escalares y vectoriales.
3. Gradiente de un campo escalar.
4. Divergencia y Rotacional de un campo vectorial.
5. Tipos de coordenadas.
6. Integrales de línea e integrales de superficie. Circulación y Flujo.
7. Teorema de la Divergencia y Teorema de Stokes.

1. Introducción

Teoría de campos: conjunto de principios y técnicas matemáticas que permiten estudiar la dinámica y distribución espacial de los campos físicos

El **Análisis Vectorial** es una excelente herramienta matemática con la cual se expresan en forma más conveniente y se comprenden mejor muchos conceptos de la Física, en particular los conceptos de la teoría electromagnética.

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

Geometría. Trigonometría. Magnitudes escalares y vectoriales. Cálculo diferencial. Cálculo integral.

2. Campos escalares y vectoriales

Concepto general de Campo

Introducido por Michael Faraday en 1831 para explicar la acción a distancia de las fuerzas eléctricas, y por similitud la de las fuerzas gravitatorias y magnéticas.

Un campo representa, en física, la distribución espacial de una magnitud física que muestra una variación en una región del espacio.

La entidad causante de la interacción provoca efectos sobre el espacio que le rodea, permitiendo asignar a cada punto de dicho espacio un valor que dependerá de la magnitud del cuerpo que provoca la interacción y de la posición del punto que se considera

Campos estacionarios y no estacionarios

Campos uniformes y no uniformes

Escalares, vectoriales, tensoriales o espinoriales (según la forma Matemática del campo).

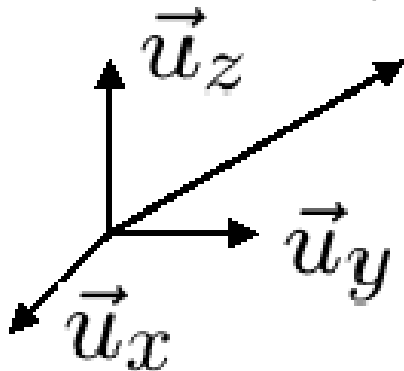
Campos escalares

Función (de la posición y del tiempo) que, a cada punto de una región, y en un instante dado, asigna una **magnitud escalar**

- * Si no hay dependencia temporal: Campo estacionario
- * Si no hay dependencia espacial: Campo uniforme

Ejemplos (campos no uniformes y estacionarios):

- **Presión**, **densidad** o **temperatura** de cada punto de esta habitación (**3D**).



$$p(\vec{r}), \rho(\vec{r}), T(\vec{r})$$

vector posición $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$$p(\vec{r}) = p(x, y, z)$$

- **Altitud** de los puntos de una región de la superficie terrestre (**2D**)

Representación de un campo escalar

Dado un campo escalar, $\varphi(\vec{r})$, habrá determinados puntos en los que la magnitud tenga el mismo valor

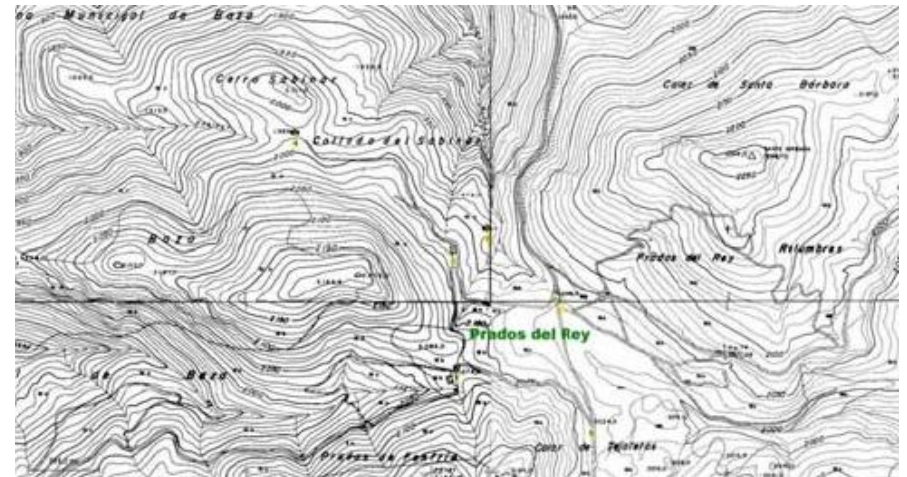
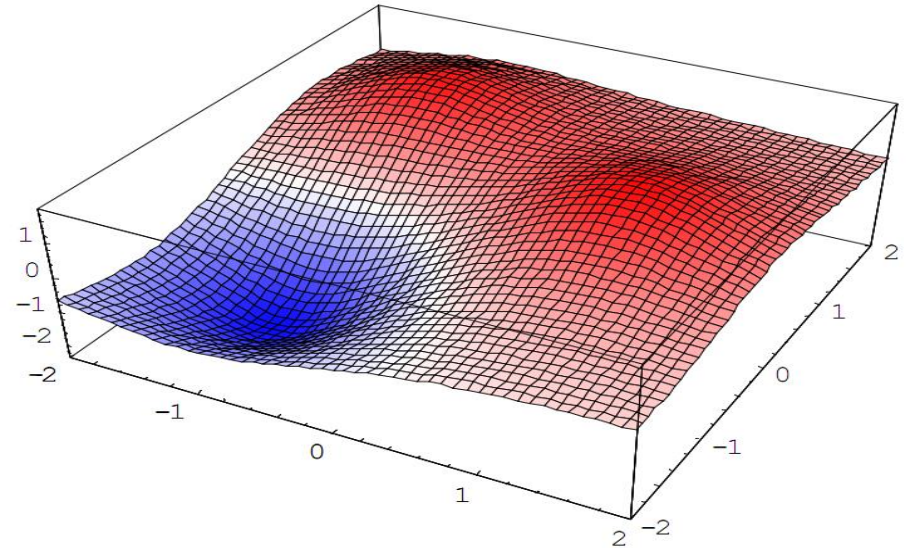
$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0$$

Si el campo escalar es en 3D, los puntos con el mismo valor forman una **superficie equiescalar o isoescalar**

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z) = \varphi_0$$

Si el campo escalar es en 2D, los puntos con el mismo valor forman una **línea equiescalar o isoescalar**

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y) = \varphi_0$$



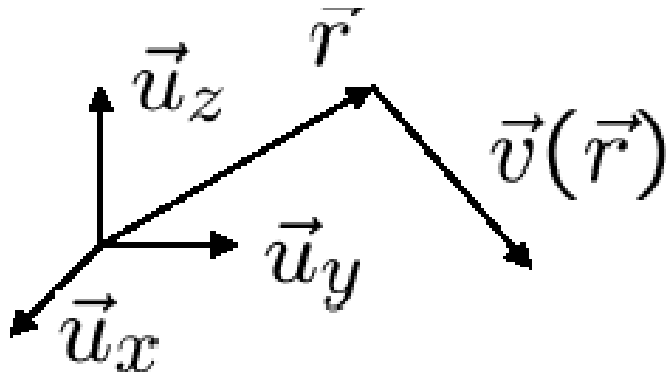
Campos vectoriales

Función de la posición y del tiempo, que a cada punto de una región y en un instante dado, asigna una magnitud vectorial

- * Si no hay dependencia temporal: Campo estacionario
- * Si no hay dependencia espacial: Campo uniforme

Ejemplos : (campos no uniformes y estacionarios):

- Velocidad del viento en cada punto (3D).



vector posición $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

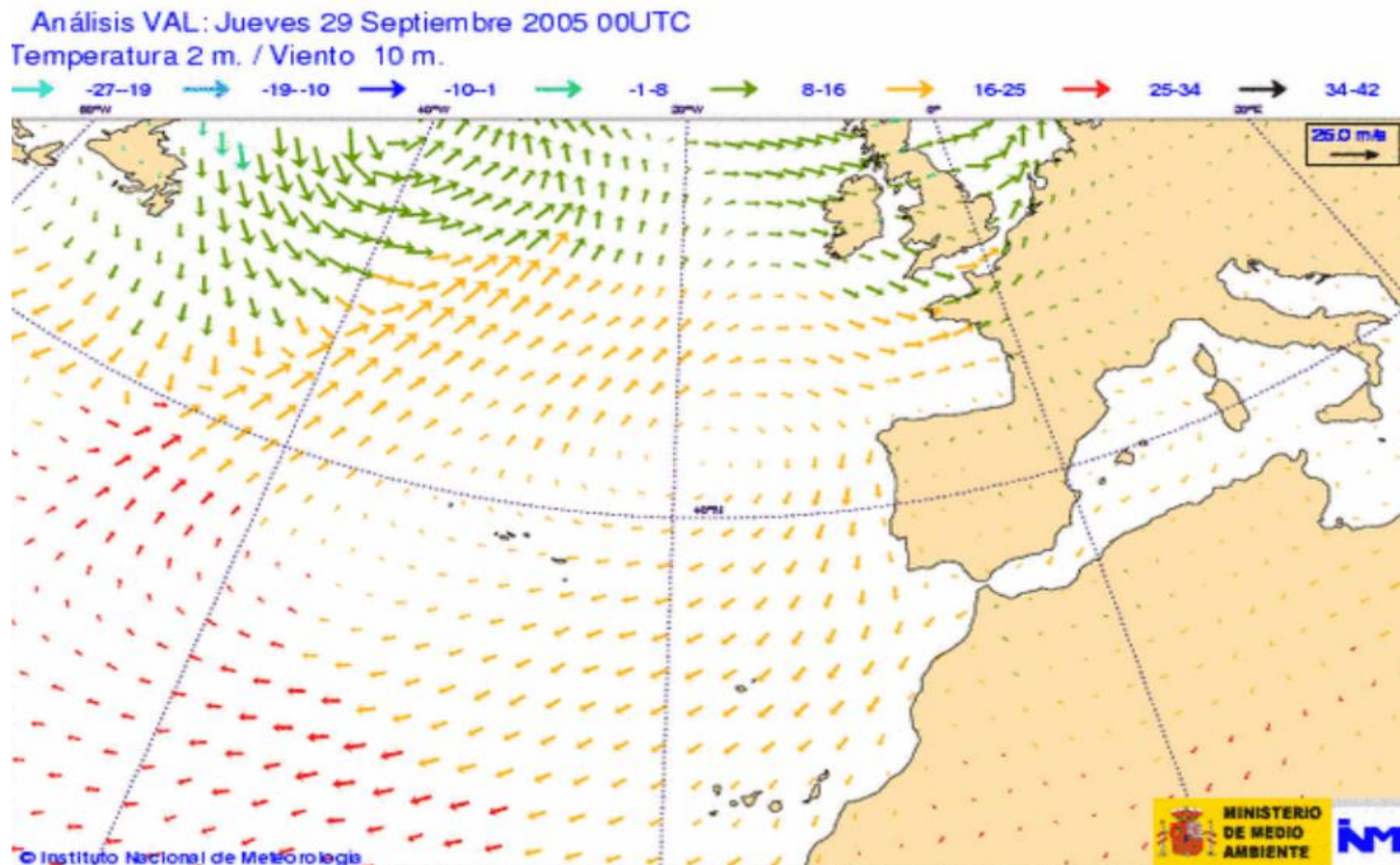
$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{r}) = & v_x(x, y, z)\vec{u}_x + \\ & + v_y(x, y, z)\vec{u}_y + \\ & + v_z(x, y, z)\vec{u}_z\end{aligned}$$

- Campo gravitatorio terrestre, campo eléctrico, campo magnético

Representación de un campo vectorial

Diagrama de flechas

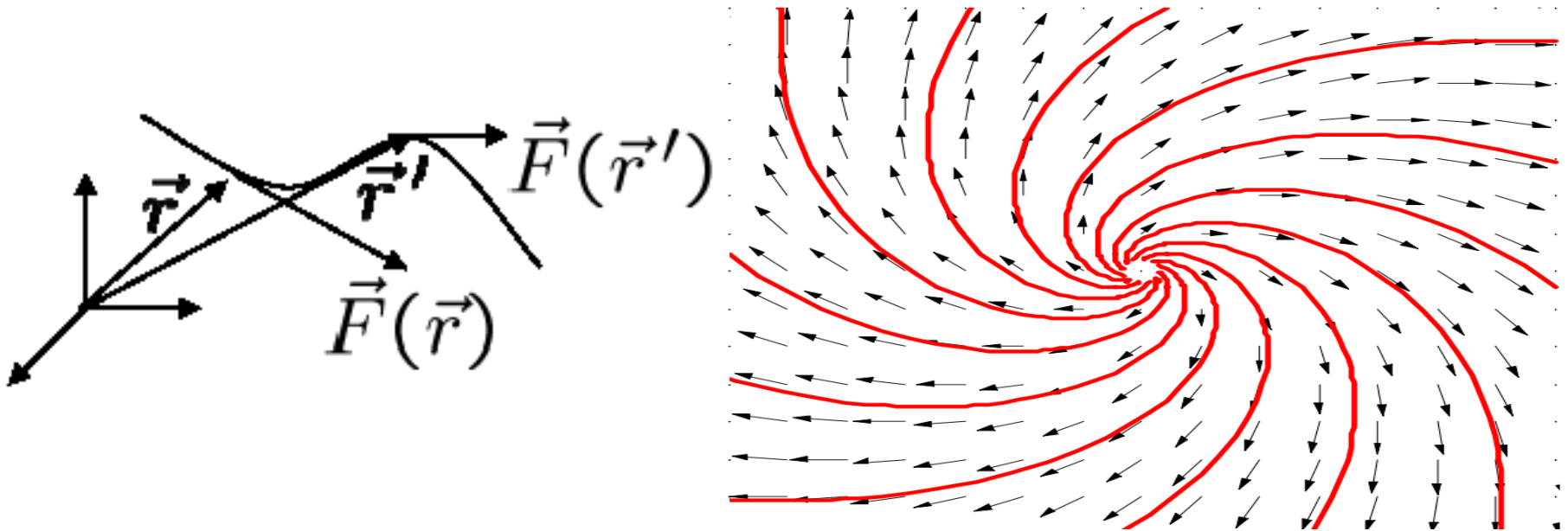
Evaluación del campo en una red equiespaciada de puntos



Representación de un campo vectorial

Líneas de campo

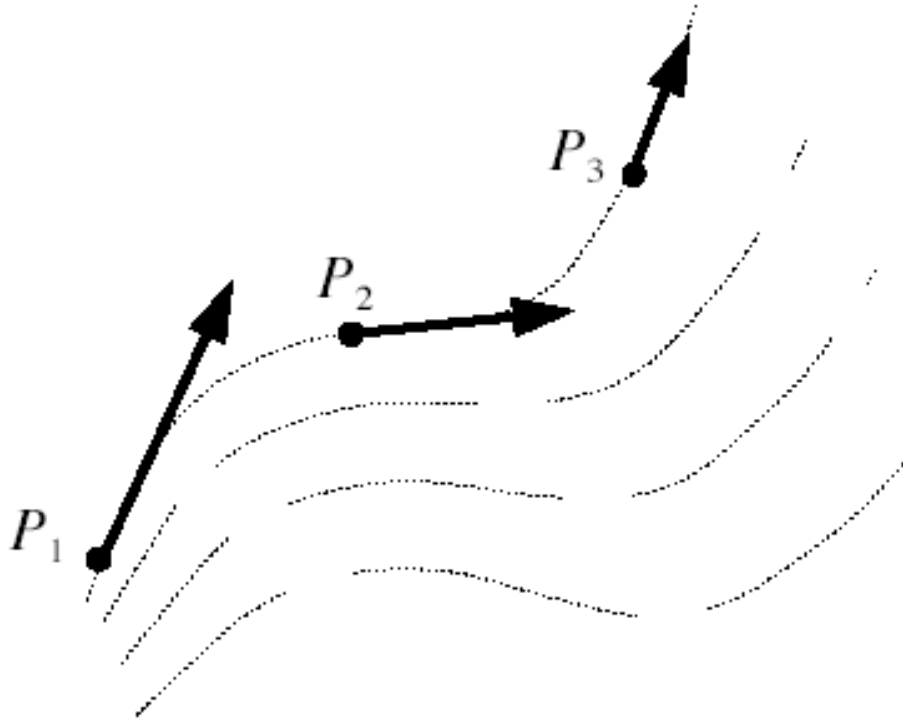
Línea cuya tangente en cada uno de sus puntos indica la dirección de la magnitud vectorial que define el campo



Las líneas del campo nunca se pueden cruzar (un punto con dos tangentes)

Representación de un campo vectorial

Líneas de campo



La densidad de líneas (número de líneas por unidad de área) es proporcional a la intensidad de la magnitud que define el campo.

Ejemplo de campo vectorial: Campo de fuerzas

¿Son distintas las interacciones entre cuerpos distantes y entre cuerpos en contacto? ¿Cómo es la interacción de cuerpos separados (tiempo y medio de propagación)?

Todas las interacciones que se producen entre cuerpos son a distancia, se producen de forma instantánea y no precisan de medio material para propagarse

¿Cómo un cuerpo puede actuar allí donde no está?

Aparece el concepto de **campo de fuerzas**

Es una región del espacio tal que al situar un cuerpo en uno de sus puntos aparece sometido a una fuerza dada por

$$\vec{F} = A\vec{E}$$

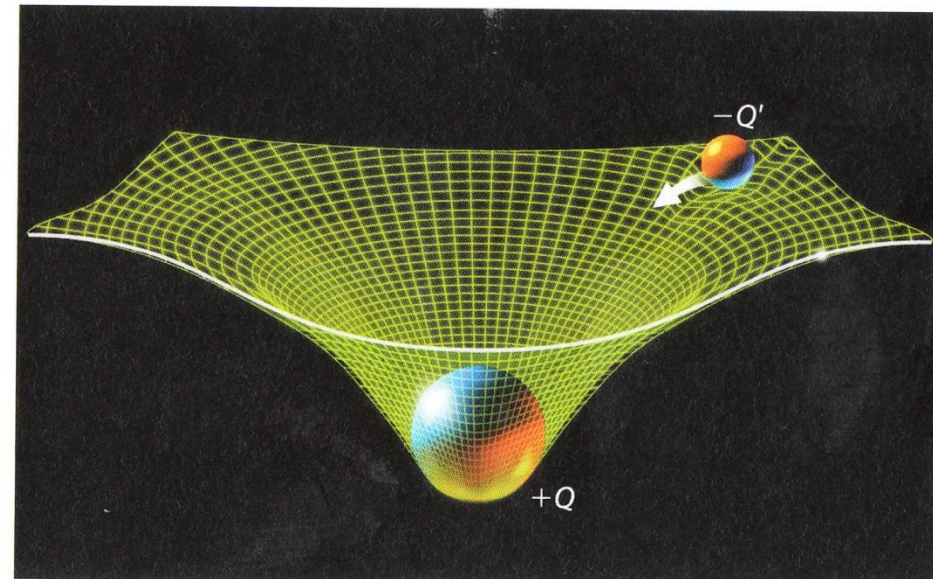
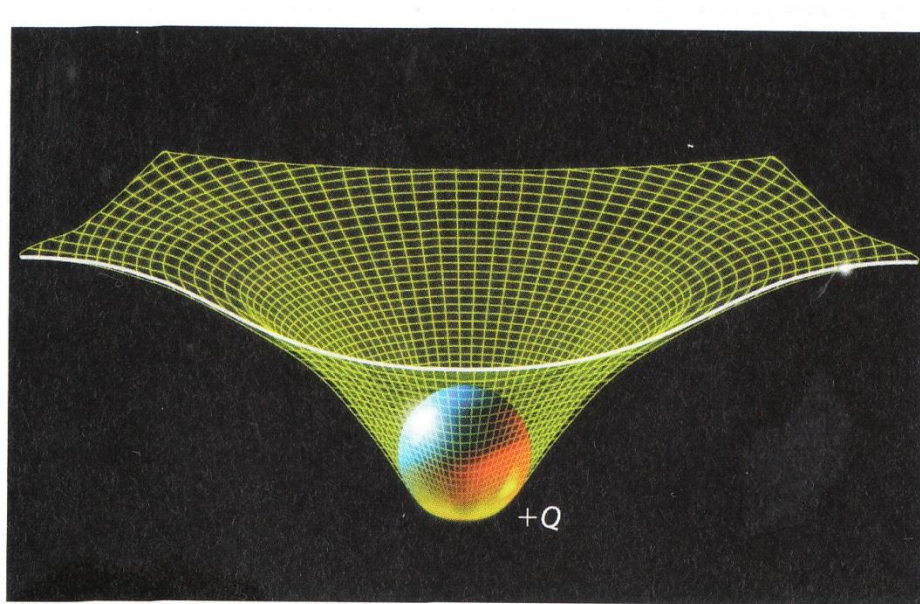
A : Magnitud activa (masa, carga, ...) que hace que el cuerpo sea sensible a ese campo. Esta magnitud es la responsable de que el campo aparezca, debido a otro cuerpo que también posee esa magnitud y que es el creador del campo.

\vec{E} : Intensidad del campo

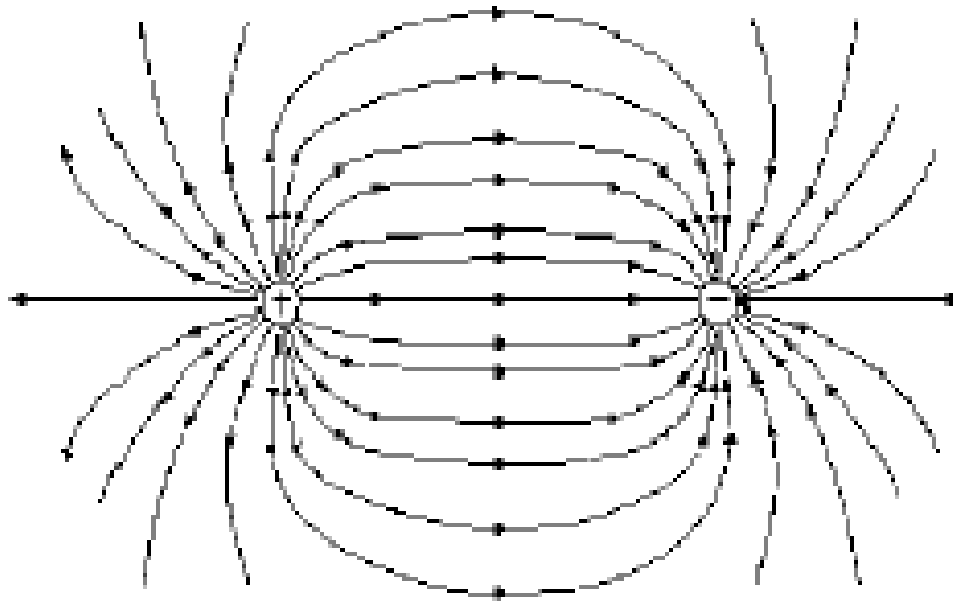
Ejemplo: Campo eléctrico

Una carga Q modifica de algún modo el espacio. A este espacio perturbado por la carga se llama campo eléctrico (vector E), y se considera que actúa sobre cualquier otra carga eléctrica, q , ejerciendo la fuerza electrostática sobre ella, según establece la ley de Coulomb.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$



Las líneas del campo pueden divergir (fuentes) o converger (sumideros). En estos puntos el campo no está definido (puntos singulares)



Campo eléctrico

3. Gradiente de un campo escalar.

CONCEPTO GENERAL DE OPERADOR GRADIENTE

El gradiente es un operador que opera sobre una función **ESCALAR** (por ej. la energía potencial gravitatoria, o electrostática) y la transforma en un **VECTOR**

Sea la función escalar, expresada en coordenadas cartesianas $\psi(x, y, z)$

$$\text{grad}\psi = \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{k}$$

Siendo ∇ el operador Nabla la función escalar $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE:

- Es un vector perpendicular a las superficies equipotenciales
- La dirección del vector es la de máxima variación de la función

EJEMPLO 1: Calcular el gradiente de la función $\psi(x, y, z) = 3x + 2y^2 - \frac{1}{z}$

$$\vec{\nabla} \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{k} \right) = 3\vec{i} + 4y\vec{j} + \frac{1}{z^2} \vec{k}$$

Ejemplo: La fuerza gravitatoria como gradiente de la energía potencial

CÁLCULO A PARTIR DE LA FUERZA GRAVITATORIA $\vec{F} = -G \frac{m M}{r^2} \vec{u}_r$

Se calcula el trabajo realizado por la fuerza ejercida sobre m (y creada por M) para mover m del punto A al B y usando el hecho de que si la fuerza es conservativa, el trabajo se puede expresar como diferencia de su energía potencial evaluada en punto inicial y final:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -G \frac{Mm}{r^2} dr \cos \mathcal{G} = \left[G \frac{Mm}{r} \right]_A^B = G \frac{Mm}{r_B} - G \frac{Mm}{r_A} = E_p(A) - E_p(B)$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA:

Trabajo que cuesta traer la partícula m desde el infinito hasta un punto que se encuentra a una distancia r de la masa M creadora del campo (suponemos que la $E_p = 0$ en el infinito)

Esta expresión verifica que:

$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-G \frac{Mm}{r} \right) = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$$

Relaciones fuerza-energía potencial e intensidad de campo-potencial

FUERZA

Magnitud **vectorial**

$$\vec{F} = q \vec{E} = K \frac{qQ}{r^2} \vec{u}_r = q \left(K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \right)$$

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$$

ENERGÍA POTENCIAL

Magnitud **ESCALAR**

$$E_p = qV = K \frac{qQ}{r} = q \left(K \frac{Q}{r} \right)$$

MAGNITUDES QUE DESCRIBEN LA INTERACCIÓN DE UNA CARGA q CON EL CAMPO CREADO POR Q

INTENSIDAD de CAMPO

Magnitud **vectorial**

Se representa con líneas de campo

$$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$$

POTENCIAL

Magnitud **ESCALAR**

Se representa con superficies equipot.

$$V = K \frac{Q}{r}$$

MAGNITUDES QUE DEFINEN EL CAMPO DE FUERZAS CREADO POR Q

4. Divergencia y Rotacional de un campo vectorial.

Sea un campo vectorial

$$\vec{A} = A_1(x, y, z)\vec{i} + A_2(x, y, z)\vec{j} + A_3(x, y, z)\vec{k}$$

DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

La divergencia de un vector es un **ESCALAR** resultante del producto escalar del operador nabla y el vector.

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot (A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}) = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

DEFINICIÓN

EXPRESIÓN DE LA DIVERGENCIA EN COORD. CARTESIANAS

Ejemplo: Sea el campo vectorial de la velocidad de un fluido.

La divergencia permite calcular la cantidad de fluido que atraviesa una determinada superficie por unidad de tiempo.

ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

El rotacional de un vector es un **VECTOR** resultante del producto vectorial del operador nabla y el vector.

$$\text{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k})$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

EXPRESIÓN DEL ROTACIONAL EN COORD. CARTESIANAS

RESUMEN SOBRE OPERADOR NABLA

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$\psi(x, y, z)$ función escalar

$\vec{A} = A_1(x, y, z)\vec{i} + A_2(x, y, z)\vec{j} + A_3(x, y, z)\vec{k}$
función vectorial

1. $grad\psi = \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{k}$ Resultado: Vector
2. $div\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$ Resultado: escalar (producto escalar)
3. $rot\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k})$ Resultado: vector (producto vectorial)

OPERADOR LAPLACIANO

$$\Delta = div(grad\psi) = \nabla \cdot (\nabla \psi)$$

Resultado: escalar

VARIOS ASPECTOS IMPORTANTES A CONSIDERAR

GRADIENTE:

- Definición general del gradiente (válida para cualquier tipo de coordenadas).

- Conceptos de superficies de nivel y líneas de gradiente.

FÓRMULAS VECTORIALES DE INTERÉS (Sección 1.19 libro). Se usarán a menudo a lo largo del curso.

Ecs (1-109) a (1-122)

FUNCIONES DE COORDENADAS RELATIVAS (Sección 1.20 libro)

La ecuación (1-143) del libro se utilizará varias veces en la asignatura

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

5. Tipos de coordenadas

La descripción del movimiento de un cuerpo requiere la introducción de un sistema de coordenadas espaciales que identifiquen unívocamente cada punto del espacio, y una coordenada temporal, la cual determina el orden cronológico de sucesos en cualquier punto del espacio.

*A este conjunto de coordenadas espacio-temporal se denomina **sistema de referencia**.*

Sistemas de referencia

Un sistema de referencia viene dado por un punto de referencia denominado origen y un sistema de coordenadas. El origen de coordenadas es el punto de referencia de un sistema de coordenadas y en él el valor de todas las coordenadas del sistema es nulo.

Sobre cada uno de los ejes se definen vectores unitarios, denominados versores, que indican la dirección del eje.

Sistemas de coordenadas

*Un **sistema de coordenadas** es un conjunto de valores y puntos que permiten definir unívocamente la posición de cualquier punto de un espacio euclídeo.*

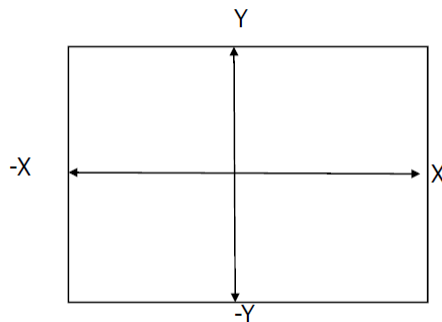
*El primero que expresó la posición de un punto en el plano o en el espacio fue Descartes, por lo que se suele referir a ellas como **coordenadas cartesianas**.*

Para representar un punto en un plano, utilizó dos rectas perpendiculares entre sí, de forma que la posición del punto se determinaba midiendo sobre los ejes las distancias al punto.

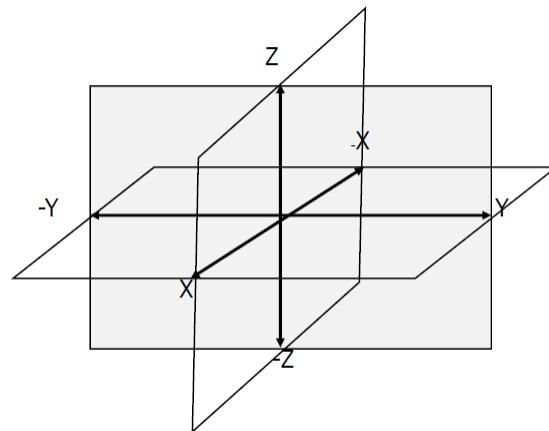
Sistemas de coordenadas cartesianas

*Un sistema de **coordenadas cartesianas** se define por dos ejes ortogonales en un sistema bidimensional y tres ejes ortogonales en un sistema tridimensional, que se cortan en el origen O.*

Las coordenadas de un punto cualquiera vendrán dadas por las proyecciones del vector de posición del punto s



2D

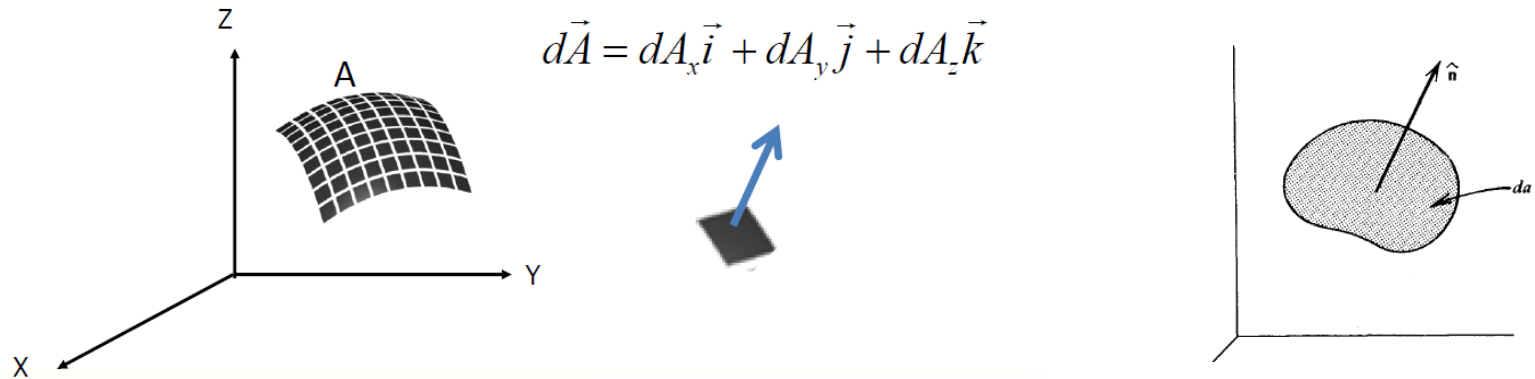


3D

Elemento diferencial (vectorial) de superficie

Dada la superficie A , seleccionamos un elemento diferencial de superficie.

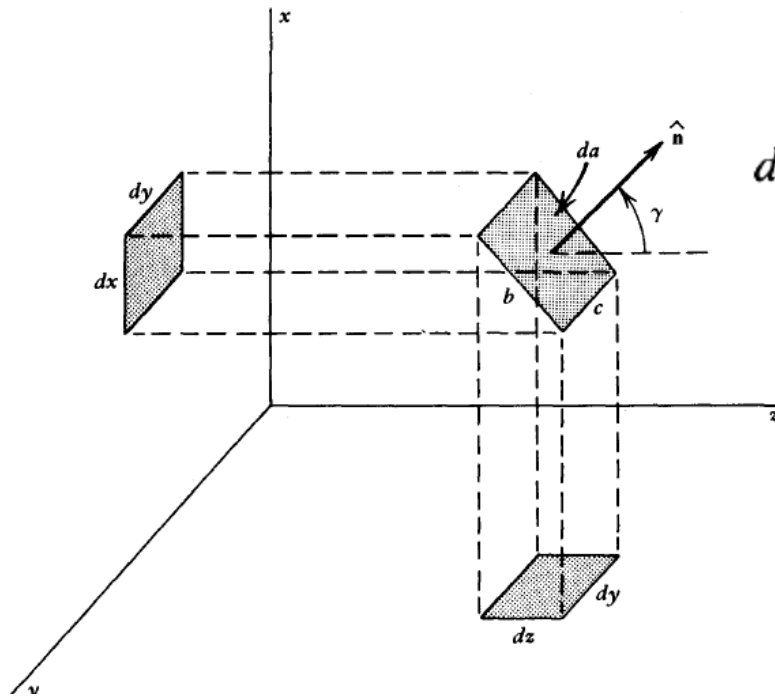
El vector característico de la superficie ($d\vec{A}$), tiene tres componentes, cada una de ellas dirigida sobre cada uno de los ejes.



NOTACIÓN EN LIBRO WANGS $d\mathbf{a} = da_x \hat{\mathbf{x}} + da_y \hat{\mathbf{y}} + da_z \hat{\mathbf{z}}$

$d\mathbf{a} = da \hat{\mathbf{n}}$ ← Vector unitario normal a la superficie (convención para elegirlo: hacia fuera si es superficie cerrada; regla de mano derecha respecto al sentido de recorrer su perímetro si es superficie abierta)

Determinación de las componentes de un elemento diferencial (vectorial) de superficie



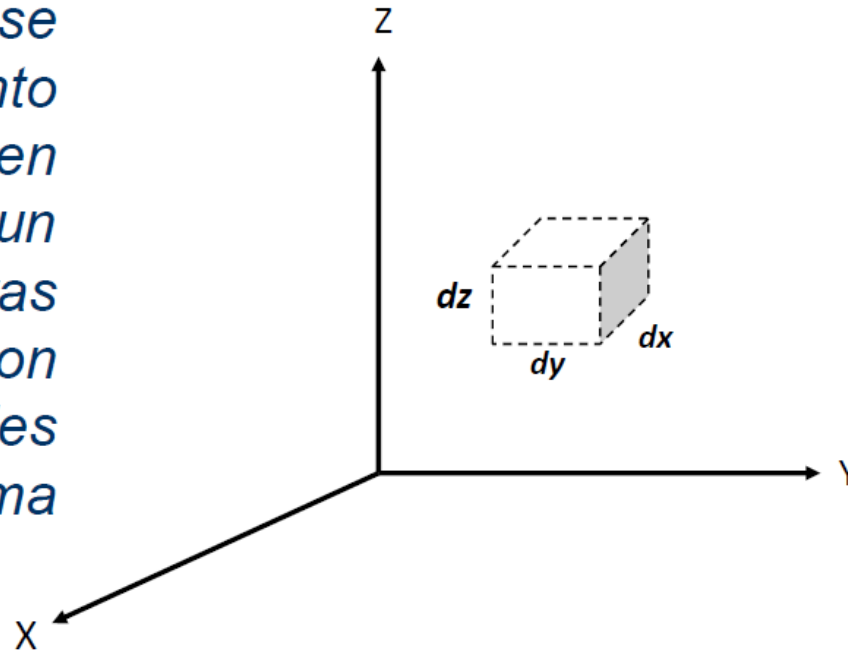
$$da_x = \pm dydz \quad da_y = \pm dzdx \quad da_z = \pm dxdy$$

Signo positivo si el vector normal forma con el eje correspondiente a esa Componente un ángulo menor de 90°

Los elementos diferenciales (vectores) de superficie se usarán para hacer integrales de superficie. Por ejemplo para calcular el flujo de un campo a través de una superficie cerrada (ley de Gauss). Por eso es muy importante saber escribirlos correctamente

Elemento diferencial de volumen

Dada un volumen V , se selecciona un elemento diferencial de volumen formado por un paralelepípedo cuyas aristas (dx , dy , dz) son paralelas a los ejes coordenados, de forma que



$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

Vector diferencial de longitud

$$d\vec{s} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

¿Por qué son importantes los diferenciales de longitud, superficie y volumen?

* Vectores **DIFERENCIALES DE LONGITUD**: necesarios para calcular **INTEGRALES DE LÍNEA** de campos vectoriales definidos a lo largo de curvas (=CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL)

Ejemplo: trabajo de una fuerza a lo largo de una trayectoria dada).

* Elementos **DIFERENCIALES DE SUPERFICIE (vectores!!)**: necesarios para calcular **INTEGRALES DE SUPERFICIE**.

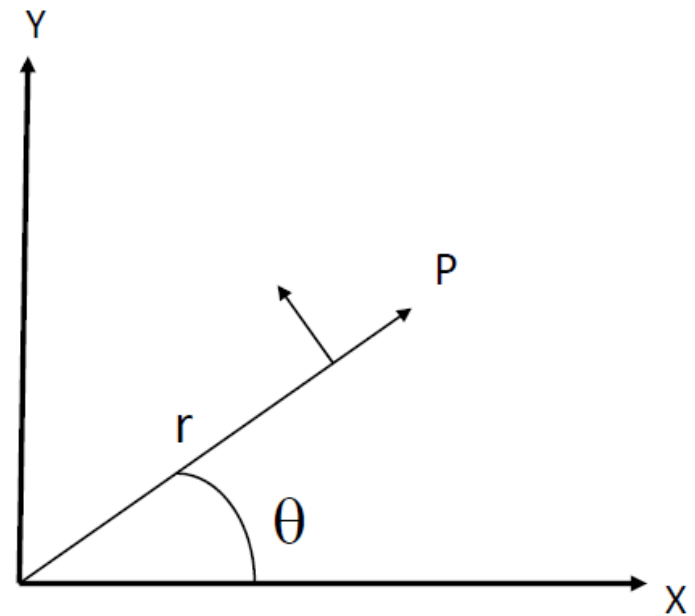
Ejemplo: flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada y usando la ley de Gauss obtener la expresión del campo eléctrico.

* Elementos **DIFERENCIALES DE VOLUMEN**: necesarios para calcular **INTEGRALES DE VOLUMEN**.

Ejemplo: integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial, útil por ser equivalente (ley de la divergencia) a calcular el flujo de ese campo a través de una superficie cerrada. Esto suele hacerse cuando la integral de volumen es más fácil de resolver que la de superficie.

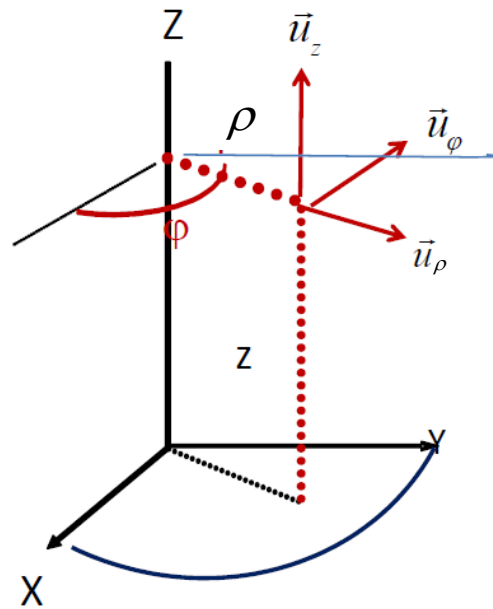
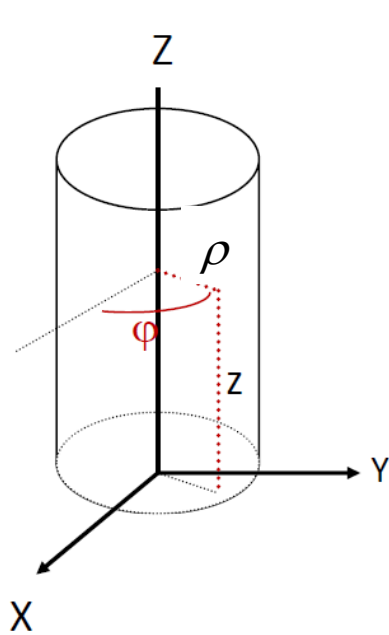
Sistemas de coordenadas polares (2D)

Para expresar la posición de un punto P en coordenadas polares (r, θ) , se define un vector unitario \vec{u}_r que indique la dirección de la línea radial que une el origen O y P , y un vector unitario \vec{u}_θ perpendicular a \vec{u}_r , orientado hacia valores crecientes de θ .



$$O\vec{P} = \vec{r} = r\vec{u}_r$$

Sistemas de coordenadas cilíndricas

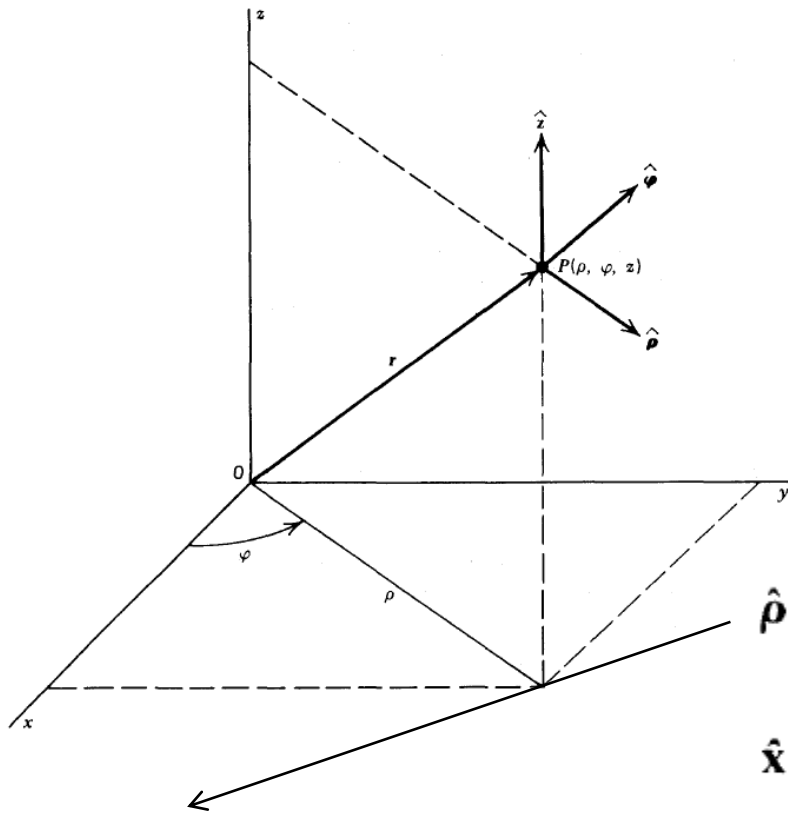


$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

$$z = z$$

Sistemas de coordenadas cilíndricas



Derivando en estas: **los vectores unitarios dependen del ángulo!!**

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\varphi} = \hat{\varphi} \quad y \quad \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} = -\hat{\rho}$$

NOTACIÓN DE WANGSNESS:

$$(\rho, \varphi, z)$$

Para pasar de cilíndricas a cartesianas

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \quad z = z$$

Para pasar de cartesianas a cilíndricas

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

A partir del dibujo:

$$\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \quad \hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

Despejando de estas:

$$\hat{x} = \cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi} \quad \hat{y} = \sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi}$$

Vector de posición **r** :

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

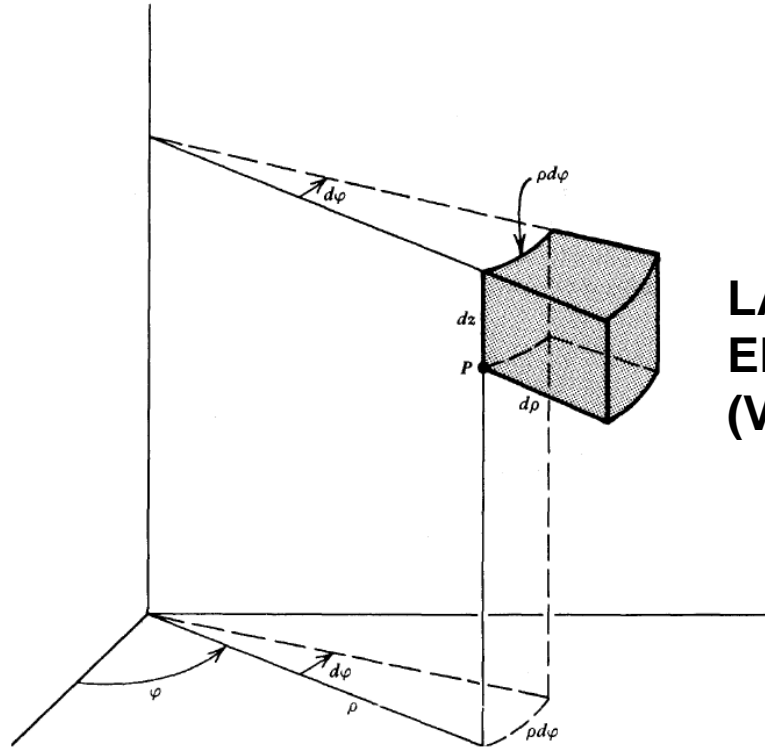
Vector diferencial de longitud **dr** (= **ds**) :

$$d\mathbf{r} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\hat{\rho} + dz \hat{z} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}$$

Sistemas de coordenadas cilíndricas

NOTACIÓN DE WANGSNESS: (ρ, φ, z)

ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN: dV (o $d\tau$, notación Wangsness)



$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz$$

**LAS TRES COMPONENTES DEL
ELEMENTO DIFERENCIAL
(VECTORIAL) DE SUPERFICIE:**

$$d\mathbf{a} = da_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + da_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + da_z \hat{\mathbf{z}}$$

$$da_\rho = \pm \rho d\varphi dz$$

$$da_\varphi = \pm d\rho dz$$

$$da_z = \pm \rho d\rho d\varphi$$

La que está contenida en la superficie curva del cilindro y con vector en dirección radial es la que más se utiliza en los problemas.

Gradiente, divergencia y rotacional en cilíndricas

OPERADOR
NABLA

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

GRADIENTE DE UNA
FUNCIÓN ESCALAR u

$$\nabla u = \hat{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial u}{\partial z}$$

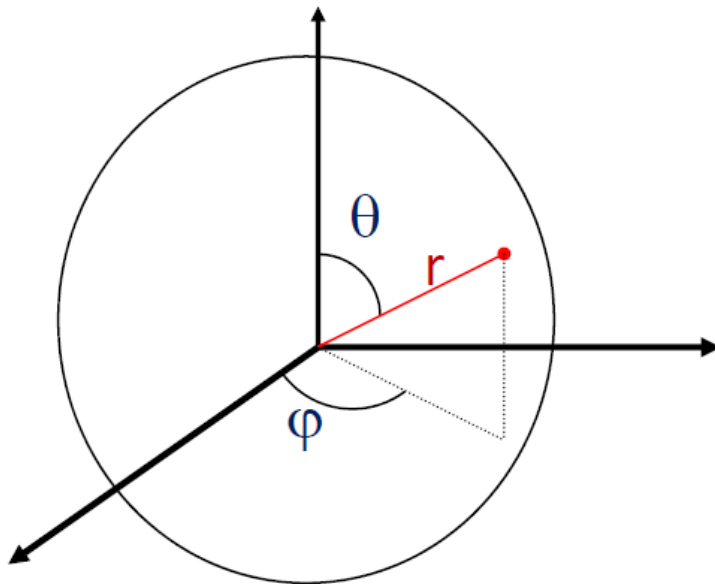
DIVERGENCIA DE UNA
FUNCIÓN VECTORIAL \mathbf{A}

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ROTACIONAL DE UNA FUNCIÓN
VECTORIAL \mathbf{A}

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

Sistemas de coordenadas esféricas



El radio r ($0 \leq r \leq R$) es la distancia desde el origen de coordenadas al punto, es el ángulo que forma r con la vertical ($0 \leq \theta \leq \pi$) y φ es el ángulo que forma la proyección de r sobre el plano XY con el eje X ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Sistemas de coordenadas

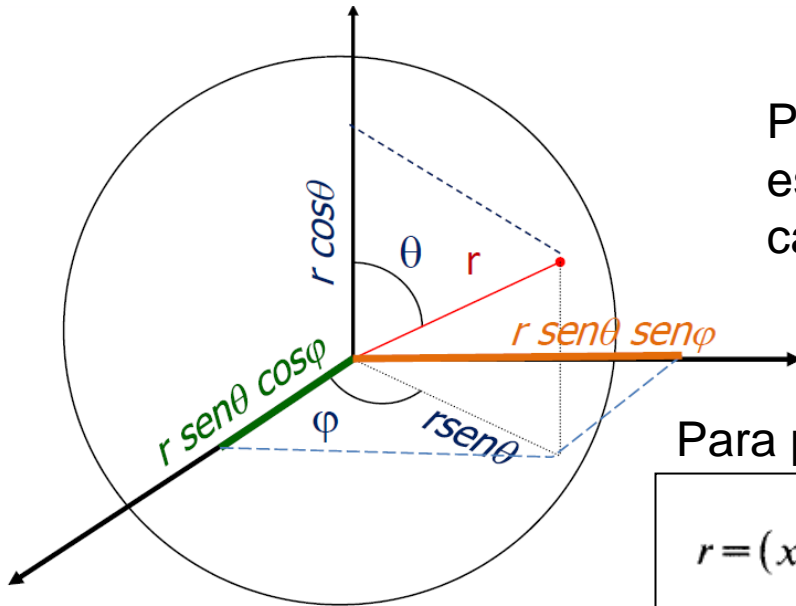
ricas

Para pasar de
esféricas a
cartesianas

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$



Para pasar de cartesianas a esféricas

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad \tan \theta = \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

NOTACIÓN WANGSNESS:

Vectores unitarios: relaciones de transformación de coordenadas

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

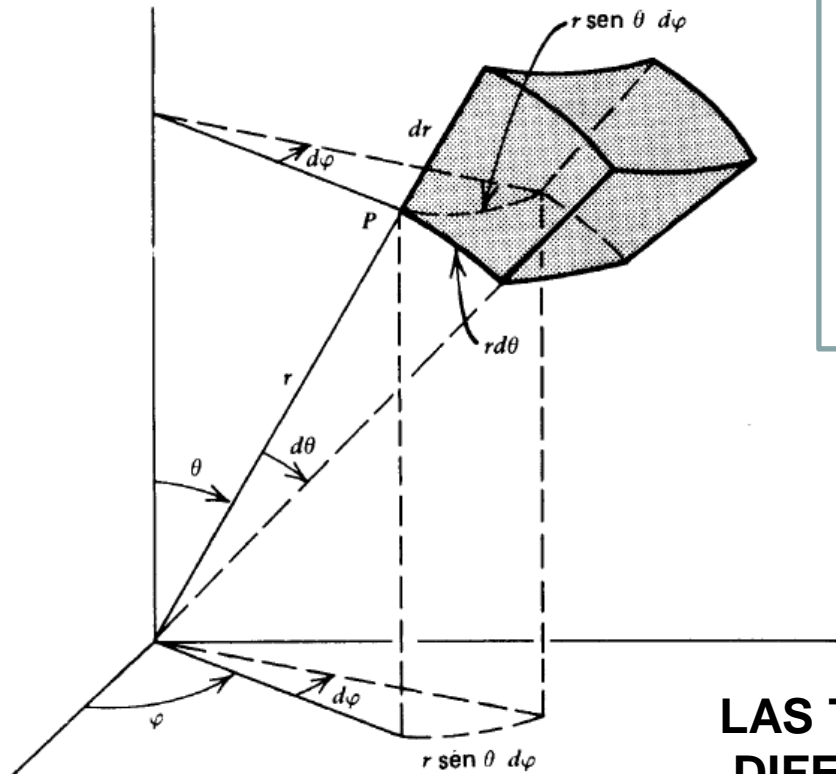
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Sistemas de coordenadas esféricas



Vector de posición \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$$

Vector diferencial de longitud $d\mathbf{r}$ ($= d\mathbf{s}$) :

$$d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN:

dV (o $d\tau$, notación Wangsness)

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

LAS TRES COMPONENTES DEL ELEMENTOS DIFERENCIAL (VECTORIAL) DE SUPERFICIE:

$$da_r = \pm r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$da_\theta = \pm r \sin \theta dr d\varphi$$

$$da_\varphi = \pm r dr d\theta$$

La que es perpendicular a la dirección radial.
Es la que más se utiliza en los problemas.

Gradiente, divergencia y rotacional en esféricas

OPERADOR
NABLA

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

GRADIENTE DE UNA
FUNCIÓN ESCALAR u

$$\nabla u = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial u}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

DIVERGENCIA DE UNA
FUNCIÓN VECTORIAL \mathbf{A}

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

ROTACIONAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL \mathbf{A}

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \\ & + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

EXPRESIONES DEL GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

- En clase se obtendrá en detalle (pizarra) el gradiente y divergencia en coordenadas cilíndricas.
- Ver el resto en el libro y hacer alguno como ejercicio práctico en casa.

MUY IMPORTANTE!!! Las expresiones no se pueden obtener de la correspondiente a coordenadas cartesianas por mera sustitución de las coordenadas cartesianas (x,y,z) por las correspondientes en cilíndricas y esféricas, pues algunos vectores unitarios no son constantes respecto a la variación de algunas coordenadas.

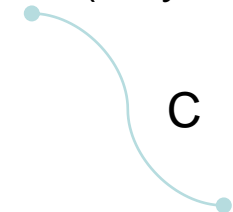
6. Integrales de línea

Integral de línea de una función escalar:

Sea una función escalar definida en todos los puntos del espacio:

$$\Phi(x, y, z)$$

P1 (x1,y1,z1)



P2 (x1,y1,z1)

Supongamos la curva C entre dos puntos del espacio, P1 y P2.

$d\vec{s}$ Vector infinitesimal de arco. Su módulo es ds y su dirección tangente a la trayectoria en cada punto

La integral de línea de la función escalar a lo largo de la curva C será:

$$\gamma = \int_{P1}^{P2} \Phi(x, y, z) ds$$

\vec{r} El vector que define la posición en cada punto de la curva C

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{s} = \dot{\vec{r}}dt; ds = \dot{r}dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

$$\gamma = \int_{P1}^{P2} \Phi[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Definimos como vector tangente a curva

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

CASO ESPECIAL: Integral de línea de una función vectorial definida a lo largo de una curva = CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea un campo vectorial $\vec{A} = A_1(x, y, z)\vec{i} + A_2(x, y, z)\vec{j} + A_3(x, y, z)\vec{k}$

Definimos la circulación de este campo a lo largo de la curva C anterior como:

$$\gamma = \int_{P1}^{P2} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{P1}^{P2} \vec{A} \cdot \vec{T} ds = \int_{P1}^{P2} (A_1 \dot{x} + A_2 \dot{y} + A_3 \dot{z}) dt$$

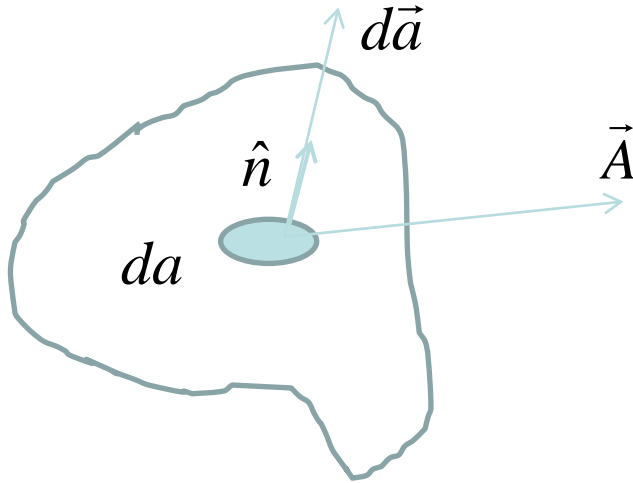
Si el campo vectorial es un campo de fuerzas conservativo y el punto final es el mismo que el inicial (trayectoria o curva cerrada), la integral es nula.

Ejemplo de cálculo de circulación: trabajo de una fuerza conservativa entre dos puntos (el campo vectorial sería la Fuerza, por ejemplo gravitatoria o electrostática).

6bis. Integrales de superficie

Integral de superficie de una función vectorial sobre una superficie = Flujo del vector a través de la superficie S

Sea un campo vectorial $\vec{A} = A_1(x, y, z)\vec{i} + A_2(x, y, z)\vec{j} + A_3(x, y, z)\vec{k}$



La superficie se divide en elementos diferenciales de área da que lleva asociado un vector perpendicular a él: $d\vec{a}$

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{A} \cdot \hat{n} da$$

7. Teorema de la divergencia

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_V \text{div} \vec{A} dV = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

S es una superficie cerrada y **V** es el volumen contenido en su interior

$dV = dx \, dy \, dz$ dV : elemento diferencia de volumen

Significado físico de la divergencia de un campo vectorial
generado dentro de un volumen V, envuelto por la superficie S:

Cantidad de flujo generado por unidad de volumen cuando éste tiende a cero. Así, tiene relación con fuentes y sumideros de líneas de campo.

El primer miembro de la ecuación es una integral de superficie, siendo la superficie cerrada. El segundo miembro de la ecuación es una integral de volumen, siendo el volumen el contenido dentro de la superficie.

A veces es más sencillo hacer la integral de volumen que la de superficie.

El teorema de Gauss y el Teorema de la divergencia

Ley de Gauss

Relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada que contiene en su interior la fuente creadora del campo. Para el caso particular de que el campo vectorial sea el campo eléctrico

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i = \frac{Q_{\text{en}}}{\epsilon_0}$$

La superficie S se elige de forma arbitraria para que contenga dentro las cargas de interés y para que la resolución de la Integral sea sencilla en base a la geometría del problema

Utilidad: Sirve para calcular de forma sencilla la intensidad de campo creada por una distribución continua de cargas (en el caso de que el campo sea eléctrico).

El primer miembro del T. del Gauss es el primer miembro del T. de La Divergencia.

Hay casos en los que hacer esta integral de superficie es complicado y puede ser más sencillo hacer la integral de volumen indicada en el segundo miembro del Teorema de la Divergencia.

7. Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S (\text{rot} \vec{A}) d\vec{a} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) d\vec{a}$$

C es una curva cerrada y S es la superficie contenida en dentro de la curva.

El primer miembro de la ecuación es una integral de línea, a lo largo de una curva Cerrada C. El segundo miembro de la ecuación es una integral de superficie, siendo la superficie S la encerrada dentro de C. A veces es más sencillo hacer la segunda que la primera.

La ley de Ampere y el Teorema de Stokes

LEY DE AMPERE: Relaciona la circulación del **campo magnético** a lo largo de una línea cerrada C, con la intensidad de corriente I que atraviesa la superficie limitada por dicha línea cerrada.

Si se divide la línea en elementos $d\vec{s}$, la circulación del campo magnético a lo largo de C será la suma extendida a lo largo de dicha línea de los productos $\vec{B} \cdot d\vec{s}$. La ley de Ampere relaciona el campo magnético con la corriente que lo produce.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu I_C$$

La curva C se elige de forma arbitraria para que contenga dentro las corrientes de interés y para que la resolución de la integral sea sencilla en base a la geometría del problema

El primer miembro de la Ley de Ampere es el primer miembro del Teorema de Stokes. Hay casos en los que hacer esta integral de línea es complicado y puede ser más sencillo hacer la integral de superficie indicada en el segundo miembro del Teorema de Stokes.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tema II: Electrostática en el vacío

Electromagnetismo I

2º Curso Grado Física

Curso 2022-2023 (2º semestre)

Universidad de Alicante – Departamento de Física Aplicada

Índice

1. Introducción.
2. Ley de Coulomb. Principio de superposición. (repaso año anterior)
3. Campo eléctrico y potencial electrostático. (repaso año anterior)
4. Teorema de Gauss y aplicaciones. (año anterior intensificado)
5. Dipolo eléctrico y desarrollos multipolares.
6. Ecuaciones de Laplace y de Poisson. Aplicaciones.
7. El método de las imágenes.

1. Introducción: La carga eléctrica

Propiedades fundamentales de la materia:

- Masa
- **Carga eléctrica** (origen en la estructura atómica: electrones, protones y neutrones)
- Spin

⇒ Principio de conservación de la carga

Neutralidad
Carga eléctrica neta (<u>electrización</u>)

⇒ La carga eléctrica está cuantizada

Múltiplo entero del valor absoluto de la carga del electrón

$$q = \pm n |e|; \quad |e| \text{ (unidad de carga fundamental)}$$

Unidad SI: Culombio (C)

$$1 e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$1 \text{ C} = 6.25 \times 10^{18} e$$

Electrización

normal

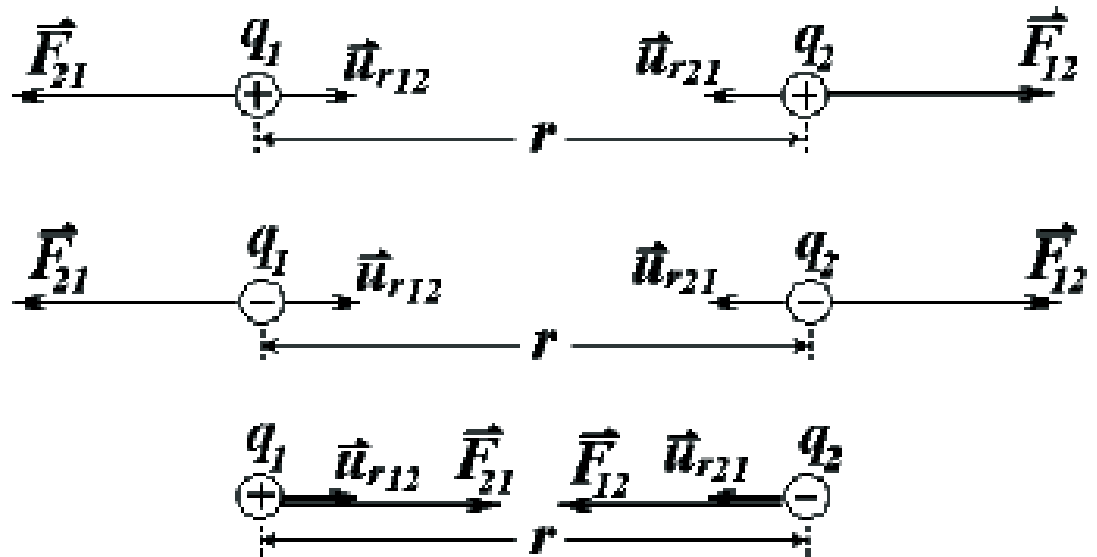
1 μ C-1nC

2. Ley de Coulomb: Fuerza electrostática entre dos cargas discretas.

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

Módulo $F = K \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}$

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$



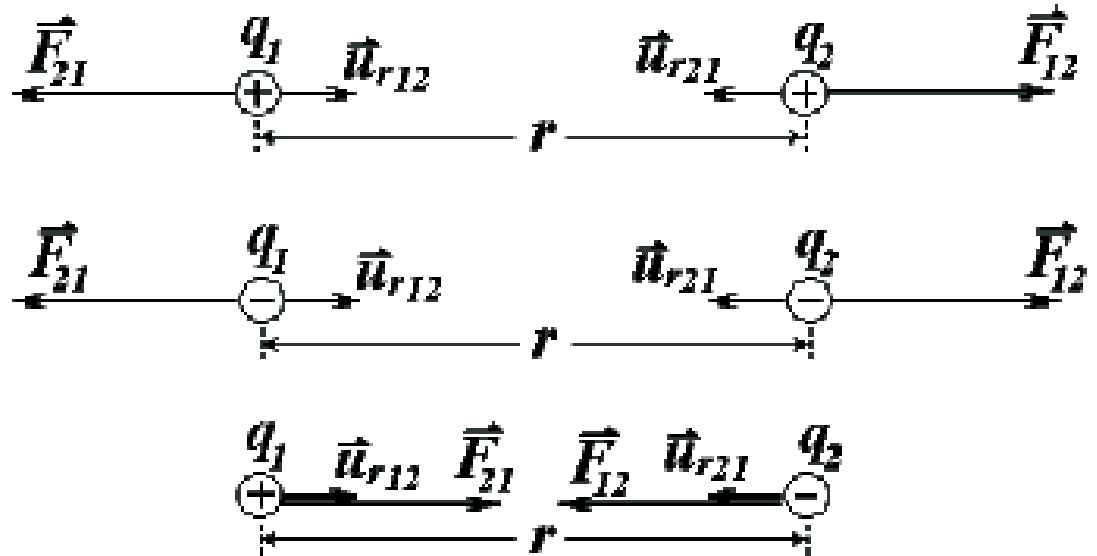
- \vec{u}_{12} es un vector unitario dirigido según la recta que une las cargas y de sentido de la carga que ejerce la fuerza hacia la carga que experimenta dicha fuerza.

NOTACIÓN del libro Wangsness: Vector que une las dos cargas $\vec{R} = \mathbf{R}$

$$\vec{F} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\text{Módulo } F = K \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}$$

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$



- La fuerza ejercida entre cargas distribuidas en cuerpos voluminosos es la misma que actuaría si los cuerpos tuvieran su carga concentrada en su centro y la distancia fuera entre ambos puntos (carga puntual).
- Las fuerzas electrostáticas que actúan sobre cada una de las partículas cargadas, \vec{F}_{12} y \vec{F}_{21} , forman un par de fuerzas de acción y reacción, por lo que su dirección es la de la recta que une sus centros y su sentido es de atracción si las cargas tienen distinto signo y de repulsión si las cargas tienen el mismo signo

$$\vec{F} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

- K es la cte eléctrica que depende del medio en el que se sitúan las cargas. A veces esta cte se define en función de otra cte ε , llamada permitividad o cte dieléctrica del medio. El valor de K más alto corresponde al vacío. Su menor valor en cualquier otro medio indica que el en medio material disminuye la interacción eléctrica entre cargas.

$$K = \frac{1}{4\pi \varepsilon}$$

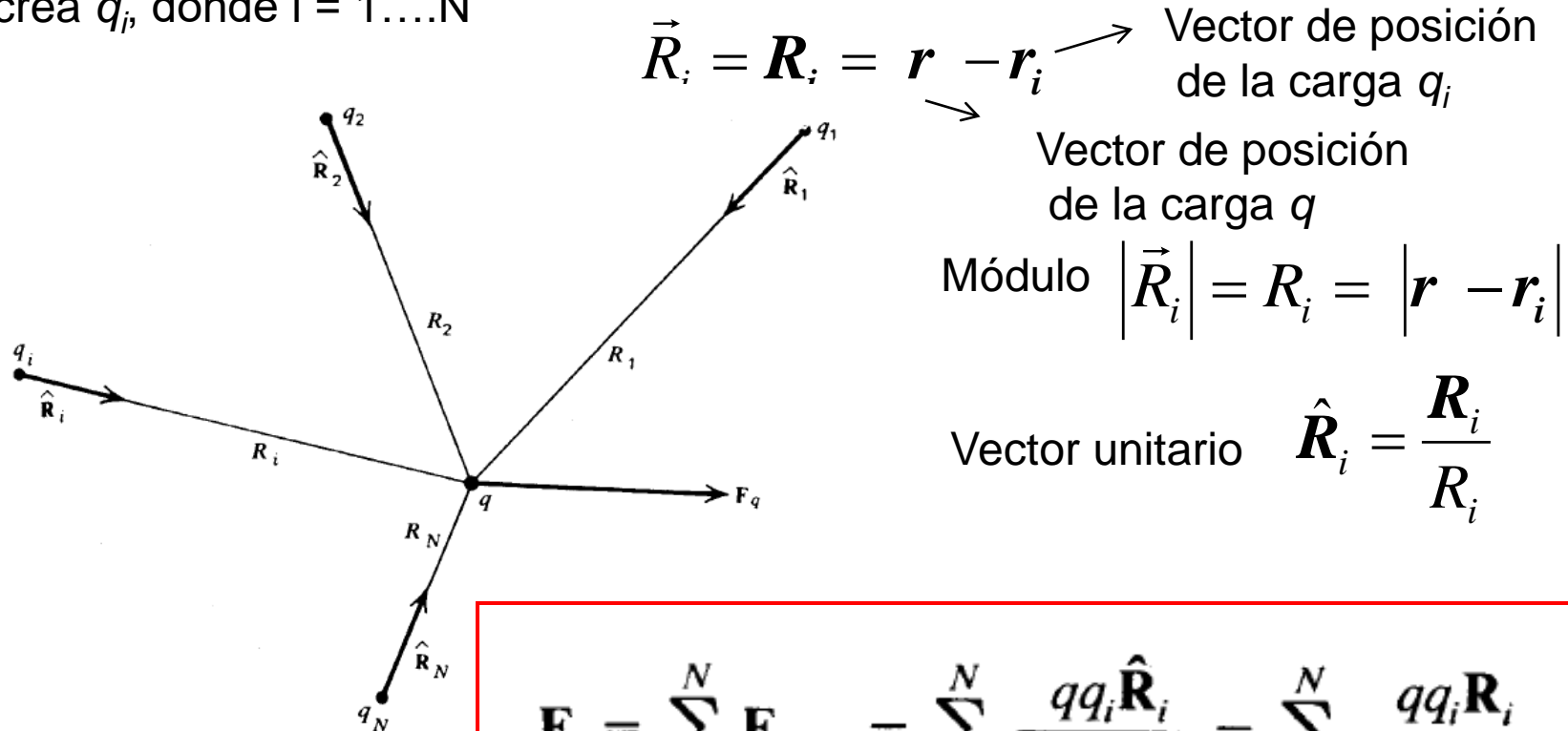
<i>Valores de ε y K para distintos medios a 20°C (unidades SI).</i>		
<i>Medio</i>	ε ($C^2 N^{-1} m^{-2}$)	$K = \frac{1}{4\pi \varepsilon}$ ($N m^2 C^{-2}$)
Vacío	$8,854 \cdot 10^{-12}$	$9 \cdot 10^9$
Aire	$8,859 \cdot 10^{-12}$	$\approx 9 \cdot 10^9$
Poliestireno	$2,267 \cdot 10^{-11}$	$3,5 \cdot 10^9$
Papel	$3,276 \cdot 10^{-11}$	$\approx 2,4 \cdot 10^9$
Vidrio pirex	$4,958 \cdot 10^{-11}$	$1,6 \cdot 10^9$
Porcelana	$6,198 \cdot 10^{-11}$	$\approx 1,3 \cdot 10^9$
Agua	$7,083 \cdot 10^{-10}$	$1,1 \cdot 10^8$

Principio de superposición para cargas discretas:

Fuerza ejercida sobre una carga q por un sistema de N cargas q_i , con $i = 1 \dots N$

NOTACIÓN del libro Wangsness:

El **vector** que une la carga que experimenta la fuerza q con la carga que la crea q_i , donde $i = 1 \dots N$



$$\mathbf{F}_q = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{q_i \rightarrow q} = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i \mathbf{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3}$$

Coordenadas cartesianas: Se puede obtener una fórmula explícita para la fuerza

$$\mathbf{F}_q = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x-x_i)\hat{\mathbf{x}} + (y-y_i)\hat{\mathbf{y}} + (z-z_i)\hat{\mathbf{z}}]}{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{3/2}}$$

Con ella se puede calcular la fuerza si se conocen las cargas y sus posiciones en un sistema de coordenadas cartesiano.

Distribución continua de cargas:

Si las cargas están tan juntas en comparación a las distancias de interés, se puede considerar que están distribuidas homogéneamente. La cantidad contenida en un elemento diferencial de espacio será dq' se puede suponer como puntual. En este caso la fuerza se puede obtener:

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq' \hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

Según sea la región del espacio en la que se encuentra distribuida la carga: un volumen V' , en 3D; una superficie S' , en 2D; o una línea L' , en 1D.

Podemos definir densidades de carga

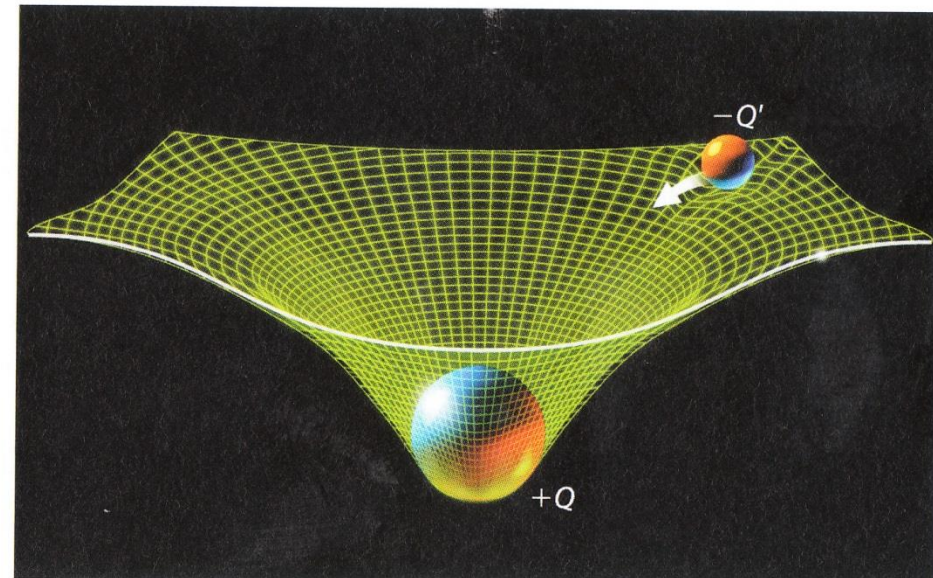
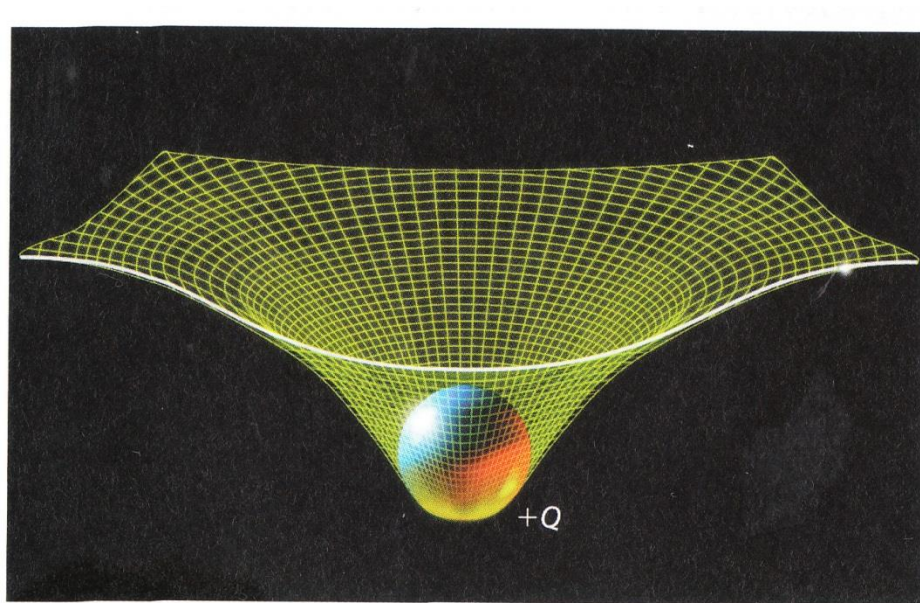
Densidad de carga volúmica	$\rho = \frac{dq'}{d\tau'}$	$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{R}} d\tau'}{R^2}$
-------------------------------	-----------------------------	---

Densidad de carga superficial	$\sigma = \frac{dq'}{da'}$	$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{R}} da'}{R^2}$
----------------------------------	----------------------------	--

Densidad de carga lineal	$\lambda = \frac{dq'}{ds'}$	$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{R}} ds'}{R^2}$
-----------------------------	-----------------------------	---

3. Campo eléctrico y potencial electrostático

Una carga Q modifica de algún modo el espacio. A este espacio perturbado por la carga se llama campo eléctrico, y se considera que actúa sobre cualquier otra carga eléctrica, q , ejerciendo la fuerza electrostática sobre ella, según establece la ley de Coulomb.



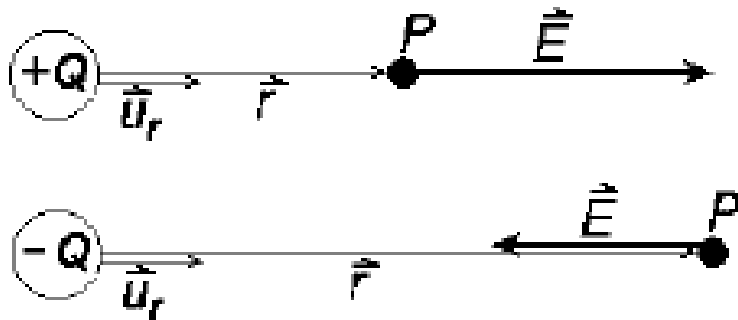
Descripción del campo eléctrico en distribuciones discretas de carga

3.1 Perspectiva dinámica: fuerza e intensidad de campo

La fuerza electrostática no sirve para caracterizar el campo, pues su valor en un punto depende de la carga q colocada en el mismo.

La intensidad de campo eléctrico creado por una carga eléctrica Q en un punto representa la fuerza que actuaría sobre la unidad de carga colocada en dicho punto.

Cada punto del espacio queda caracterizado por el valor de



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r; \quad \vec{F} = q \cdot \vec{E};$$

(Unidad Si: N/C ó V/m)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r; \quad \vec{F} = q \cdot \vec{E};$$

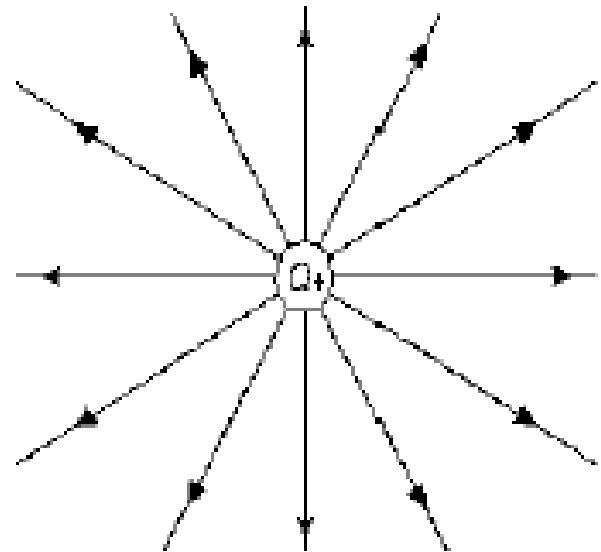
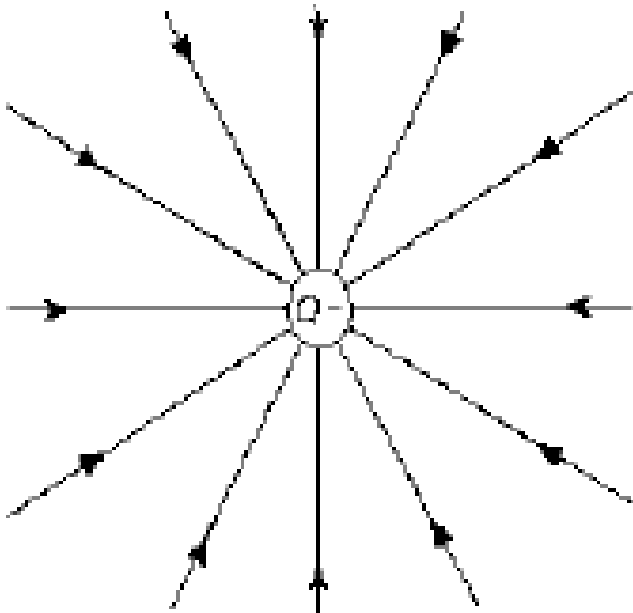
- Independiente de la carga que se coloque en el punto.
- Dependiente de la carga, Q , que lo crea y de la distancia r al punto.
- El sentido del campo depende del signo de la carga Q que lo crea. El campo se aleja de carga positiva y va hacia la carga negativa.

Principio de superposición: al ser un vector, el campo eléctrico creado en un punto por varias cargas es la composición vectorial de los campos individuales generados en ese punto por cada una de ellas.

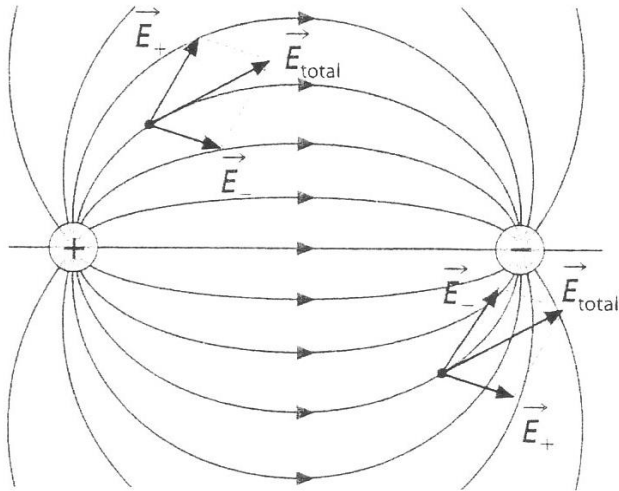
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Representación del campo eléctrico mediante líneas de campo

- Dirección: radial, su dirección coincide con la dirección de \vec{E} en cada punto. No se cortan.
- Sentido: Si $+Q$ hacia fuera, si $-Q$ hacia la carga
- Módulo: el número de líneas es proporcional al $|\vec{E}|$ y por tanto proporcional a Q

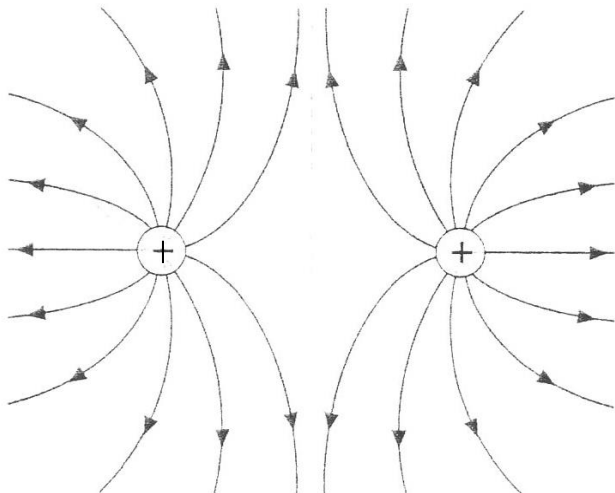


- Si hay más de una carga, el campo en un punto surge de la aplicación del principio de superposición. Las líneas dejan de ser simétricas y radiales



Campos eléctricos en la Naturaleza

	$E, \text{ N/C}$
En los cables domésticos	10^{-2}
En las ondas de la radio	10^{-1}
En la atmósfera	10^2
En la luz solar	10^3
Bajo una nube tormentosa	10^4
En la descarga de un relámpago	10^4
En un tubo de rayos X	10^6
En el electrón de un átomo de hidrógeno	6×10^{11}
En la superficie de un núcleo de uranio	6×10^{21}



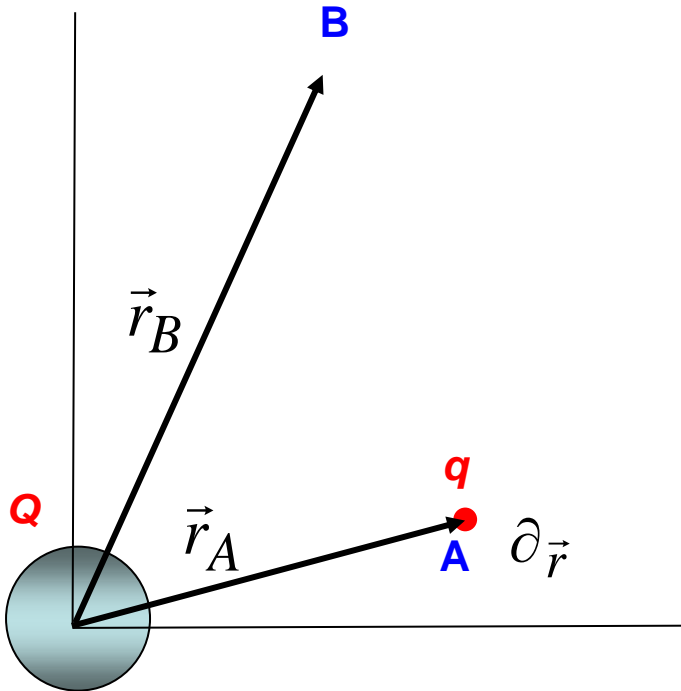
3.2 Perspectiva energética: energía potencial y potencial

Ley de la energía potencial

Fuerza electrostática
(Central y conservativa)

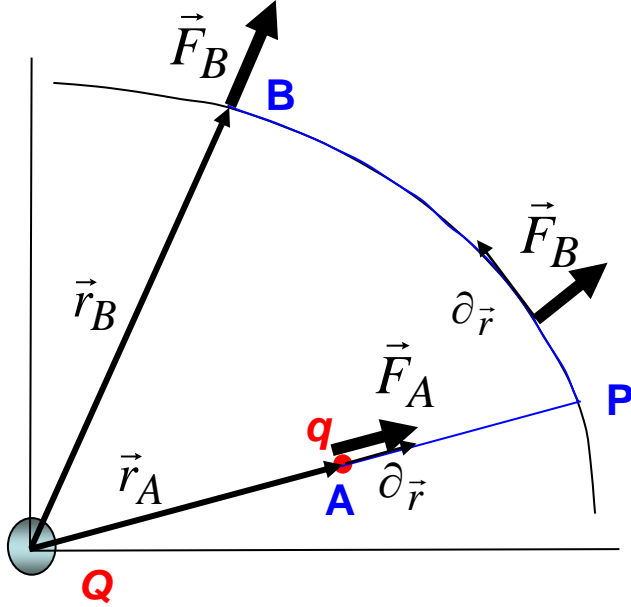
⇒

Energía potencial electrostática
(Magnitud escalar que solo
depende de la posición)



El trabajo realizado por la fuerza electrostática para trasladar una carga q desde un punto A a otro B del campo creado por otra carga Q es igual a la diferencia de valores que toma dicha función escalar entre dichos puntos

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = \\ &= -E_{pB} + E_{pA} = E_{pA} - E_{pB} \end{aligned}$$



El trabajo realizado por la fuerza es independiente del camino seguido

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow P} + W_{P \rightarrow B} = W_{A \rightarrow P} =$$

$$\int_A^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^P K \frac{Qq}{r^2} dr \cos(0^\circ) =$$

$$\left[-K \frac{Qq}{r} \right]_A^P = -K \frac{Qq}{r_P} + K \frac{Qq}{r_A};$$

$$-K \frac{Qq}{r_B} + K \frac{Qq}{r_A} = -E_{pB} + E_{pA}$$

Tramo $A \rightarrow P$ ángulo entre \vec{F} y \vec{r} 180°

Tramo $P \rightarrow B$ ángulo entre \vec{F} y \vec{r} 90°

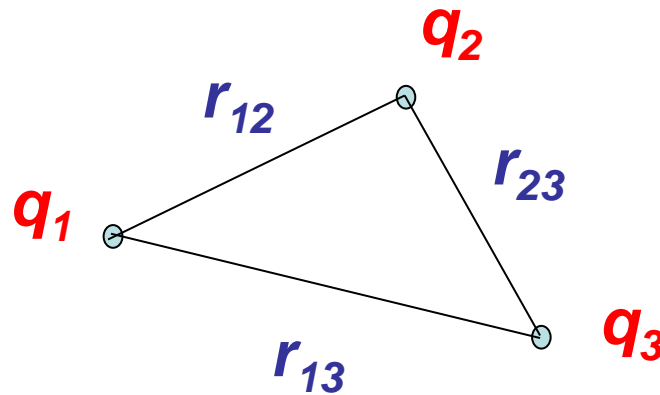
$$r_P = r_B$$

La energía potencial electrostática de una carga q colocada a una distancia r de la carga Q creadora del campo eléctrico es igual a:

$$E_p = K \frac{Qq}{r} \quad (\text{unidad SI: J, eV})$$

Energía potencial para un sistema de varias cargas

La energía potencial del sistema es la suma de las energías potenciales de todos los pares distintos de cargas que se puedan formar.



$$E_{Ptotal} = E_{P12} + E_{P23} + E_{P13} = -K \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} \right)$$

La energía potencial no caracteriza el campo, pues su valor en un punto depende de la carga q colocada en el mismo.

$$V = \frac{E_p}{q} = K \frac{Q}{r}$$

Unidad SI:
J/C ó V

NOTACIÓN EN WANGSNESS
A V se le llama ϕ

El potencial del campo en un punto será la energía potencial que corresponde a la unidad de carga testigo positiva colocada en ese punto.

- Si la carga que origina el campo es positiva, el potencial en cualquier punto es positivo
- Si la carga que origina el campo es negativa, el potencial en cualquier punto es negativo

En el caso de varias cargas puntuales, el potencial en un punto debido a todas ellas es la suma algebraica de todos los potenciales

3.3 Relaciones fuerza-energía potencial e intensidad de campo-potencial

Magnitudes que definen el campo

- Intensidad del campo en un punto (perspectiva dinámica)
- Potencial del campo en un punto (perspectiva energética)

Magnitudes inherentes a la interacción del campo con una partícula de una determinada carga

- Fuerza que actúa sobre el cuerpo como medida de la interacción (perspectiva dinámica)
- Energía potencial del cuerpo asociada a su posición relativa en el campo (perspectiva energética)

Relaciones fuerza-energía potencial e intensidad de campo-potencial

FUERZA

Magnitud **vectorial**

$$\vec{F} = K\vec{E} = K \frac{qQ}{r^2} \vec{u}_r = q \left(K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \right)$$

$$\vec{F} = -gradE_p = -\nabla E_p$$

ENERGÍA POTENCIAL

Magnitud **ESCALAR**

$$E_p = qV = K \frac{qQ}{r} = q \left(K \frac{Q}{r} \right)$$

MAGNITUDES QUE DESCRIBEN LA INTERACCIÓN DE UNA CARGA q CON EL CAMPO CREADO POR Q

INTENSIDAD de CAMPO

Magnitud **vectorial**

Se representa con líneas de campo

$$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = -gradV = -\nabla V$$

POTENCIAL

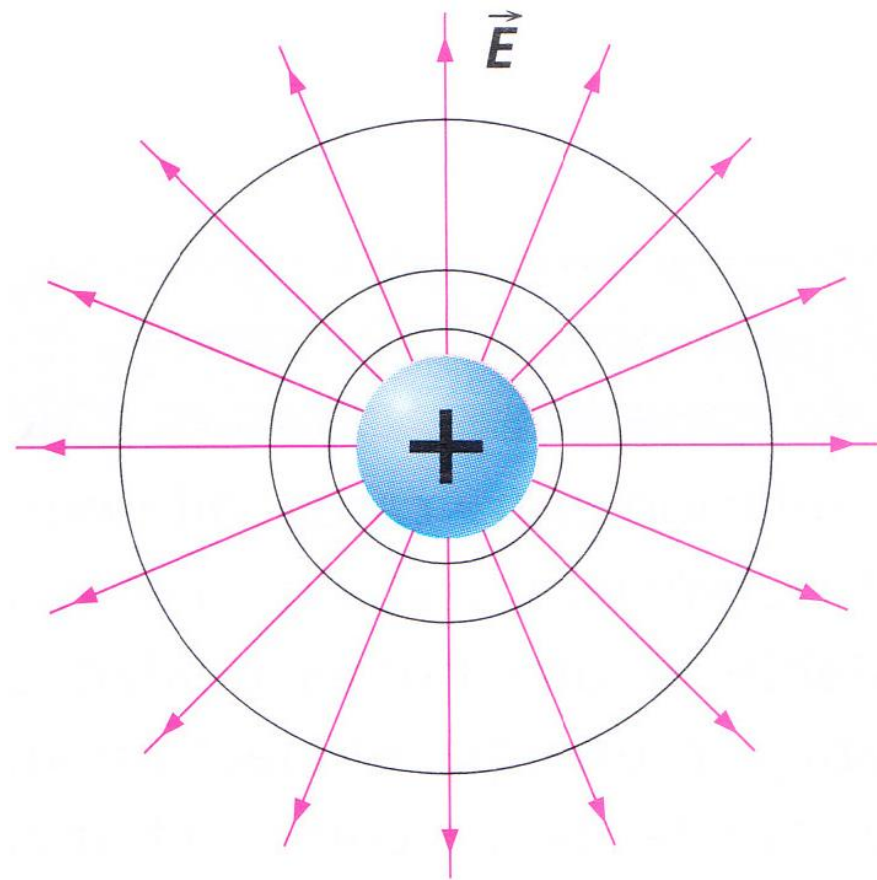
Magnitud **ESCALAR**

Se representa con superficies equipot.

$$V = K \frac{Q}{r}$$

MAGNITUDES QUE DEFINEN EL CAMPO DE FUERZAS CREADO POR Q

- Si la carga está distribuida uniformemente y es esférica las superficies equipotenciales son esferas concéntricas centradas en la carga.



- El vector campo eléctrico tiene el sentido de los potenciales decrecientes.

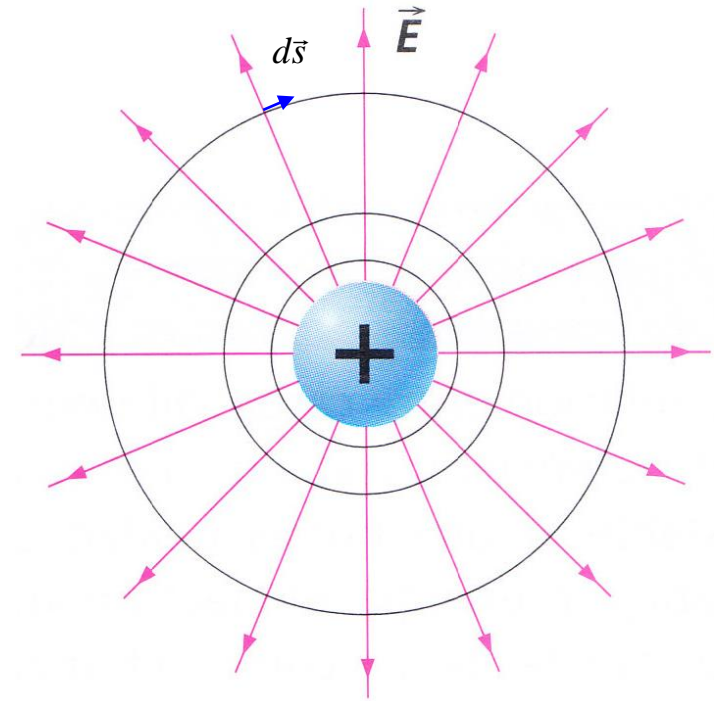
$$\vec{E} = -\nabla V$$

- El vector campo es perpendicular a las superficies equipotenciales

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

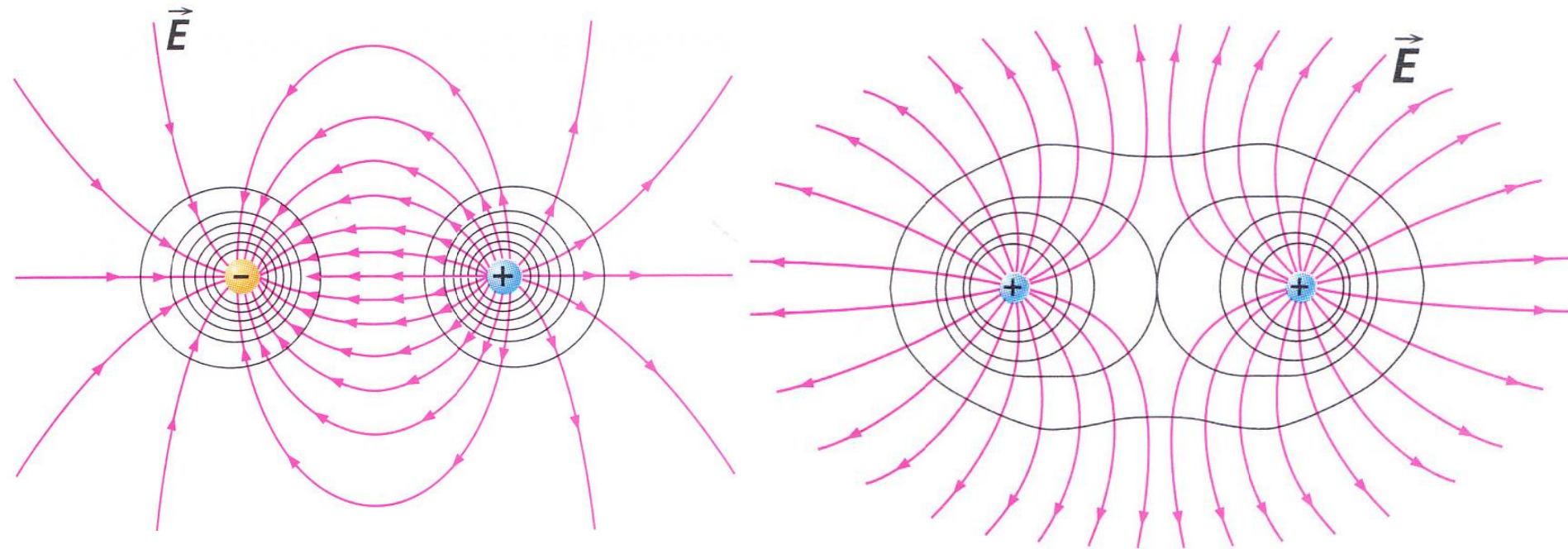
Al desplazar una carga a lo largo de una superficie equipotencial una distancia ds la variación de potencial es nula.

$$dV = 0 \Rightarrow -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{s}$$



El vector posición tiene la misma dirección que las líneas del campo y éstas la misma dirección que el vector campo.

- Si hay más de una carga, el potencial en un punto surge de la aplicación del principio de superposición. En este caso, la superficie equipotencial deja de ser concéntrica con las cargas.



- Las superficies equipotenciales no se pueden cortar. Si lo hicieran en el punto de corte habría dos vectores campo.

Campo eléctrico creado por una distribución continua de carga

Si tenemos una región del espacio (un volumen V' , en 3D; una superficie S' , en 2D; o una línea L' , en 1D) en la que la carga está distribuida homogéneamente, podemos aplicar todo lo anterior considerando

Densidad de carga
volumica $\rho = \frac{dq'}{d\tau'}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}} d\tau'}{R^2}$$

Densidad de carga
superficial $\sigma = \frac{dq'}{da'}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}} da'}{R^2}$$

Densidad de carga
lineal $\lambda = \frac{dq'}{ds'}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}} ds'}{R^2}$$

La realización de estas integrales puede a veces ser muy complejo. En todo caso, incluso aunque pueda hacerse, suele ser más sencillo utilizando el teorema de Gauss.

4. Teorema de Gauss y aplicaciones

Relaciona el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga contenida en su interior.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{dentro}} q_i = \frac{Q_{\text{en}}}{\epsilon_0}$$

Donde Q_{en} es la carga neta contenida dentro del volumen limitado por la superficie arbitraria S .

Este teorema se puede demostrar expresando el campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2}$ y considerando dos casos, que la q_i esté dentro o fuera del recinto de volumen delimitado por la superficie. Ello permite ver que solo las cargas que están dentro producen flujo neto. Las que están fuera producen líneas de campo que entran dentro del recinto delimitado por S por un lado y salen por el otro, de manera que las contribuciones se cancelan.

Si la carga está distribuida de forma continua $Q_{\text{en}} = \int_V \rho d\tau$

La ley de Gauss es útil para calcular de forma sencilla el campo cuando el sistema tiene una elevada simetría

1. Se elige la superficie cerrada de área conocida, de modo que el campo sea perpendicular o paralelo a ella. Esta superficie se denomina gaussiana.
2. Se determina el flujo a través de ella mediante la expresión:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

3. Se iguala el flujo obtenido a la expresión de la ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi K Q_{en} = \frac{Q_{en}}{\epsilon_o}$$

Si las cargas dentro del volumen englobado por la superficie están distribuidas de forma continua con densidad de carga ρ

$$Q_{\text{en}} = \int_V \rho d\tau$$

Donde V es el volumen contenido dentro de la superficie S

Utilizando el Teorema de la divergencia que vimos en el tema 1, aplicado al campo eléctrico, que decía (allí al diferencial de volumen lo llamábamos dV)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \text{div} \vec{E} d\tau = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau$$

El Teorema de Gauss se puede escribir:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$$

Como el resultado se aplica a cualquier volumen arbitrario, también serviría para uno infinitamente pequeño

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1ª ECUACIÓN DE MAXWELL

(forma diferencial)

EQUIVALENTE A LA LEY DE COULOMB 27

El potencial electrostático

Puesto que el campo eléctrico es conservativo, existe una función escalar (llamada potencial electrostático o potencia escalar) ϕ que cumple:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

Sabiendo que el campo viene dado por
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2}$$

Esa expresión se verifica si el potencial se define
$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

Tomando rotacional en ambos miembros de $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \longrightarrow$$

Aplicando el T. de Stokes

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Demuestra que \mathbf{E} es un campo conservativo

A continuación se ven varios ejemplos sencillos en los que se obtiene el **campo eléctrico a partir de la ley de Gauss**

En estos casos se obtiene también el potencial electrostático utilizando la expresión del **campo eléctrico** obtenida a partir de la relación

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

MUY IMPORTANTE: En la práctica determinar el potencial de este modo no es lo habitual. En realidad suele ser más fácil calcular primero el potencial (a partir de su definición) dado que es una función escalar, y luego a partir de él el campo.

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

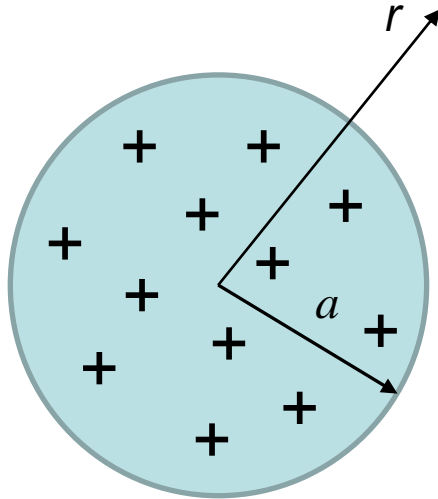
Aunque a veces hacer el cálculo de este modo no es posible o es muy complejo. En esos casos se usan otros métodos (resolver la ecuación de Poisson).

Cálculo de campos eléctricos mediante la ley de Gauss

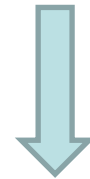
SIMETRÍA ESFÉRICA

Campo y potencial creados por una esfera aislante cargada simétricamente

Radio a , volumen V , carga total Q . Densidad volumétrica de carga ρ



Carga Simétricamente distribuida (independiente del ángulo; $\rho = \rho(r)$)



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

\mathbf{E} es radial y es independiente del ángulo

$$\mathbf{E} = E_r(r) \hat{\mathbf{r}}.$$

COORD. ESFÉRICAS

Superficie gaussiana: esfera de radio r

En esta superficie:

- E tiene mismo valor en todos sus puntos.
- El diferencial de área va en dirección radial.

1er miembro
Teorema Gauss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S E_r(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} da = E_r(r) \oint_S da = 4\pi r^2 E_r(r)$$

Teorema Gauss

$$E_r(r) = \frac{Q_{\text{en}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Para calcular Q_{en}

$$Q_{\text{en}} = \int_{V(r)} \rho(r') d\tau'$$

$V(r)$: volumen de la esfera
gausiana

CASO 1: Puntos exteriores de la esfera de carga, $r > a$

$$\rho(r') = 0 \text{ si } r' > a \quad Q_{\text{en}} = \int_{V(a)} \rho(r') d\tau' = Q \quad E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > a)$$

CASO 2: Puntos interiores de la esfera de carga, $r < a$

$$Q_{\text{in}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi' = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

$$E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (r < a)$$

Para poder seguir necesario
Conocer la forma de $\rho(r)$

CASO PARTICULAR: DISTRIBUCIÓN HOMOGÉNEA DE CARGA

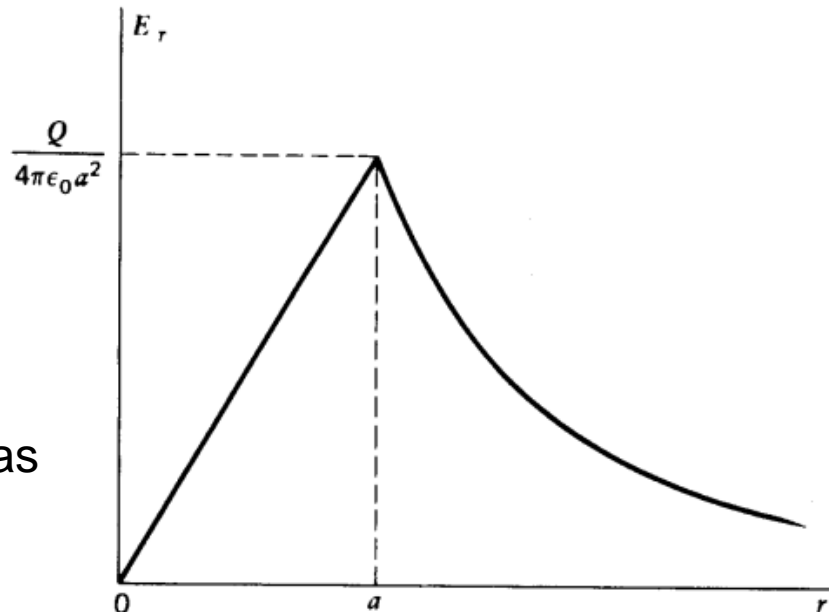
$$\rho(r) = \text{constante}$$

$$\int_0^r \rho r'^2 dr' = \rho \int_0^r r'^2 dr' = \frac{1}{3} \rho r^3$$

$$E_r(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (r < a)$$

El cálculo para $r = a$
da el mismo valor con
ambas expresiones

El campo E es continuo en
la interfase: pero esto es porque
se supone que hay vacío en ambas
(no es realista porque si la esfera
es aislante no habría vacío....);
Veremos después que ocurre si no
se hace esta suposición



Potencial electrostático. Se calcula a partir de la expresión del campo **E** mediante la relación:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 -\nabla\phi \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 d\phi = -(\phi_2 - \phi_1) = -[\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)]$$

Necesario imponer condiciones (por ejemplo fijar arbitrariamente origen potencial)

CASO 1: Puntos exteriores de la esfera de carga, para $\rho = \text{cte}$, $r > a$

$$\phi_o(r) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

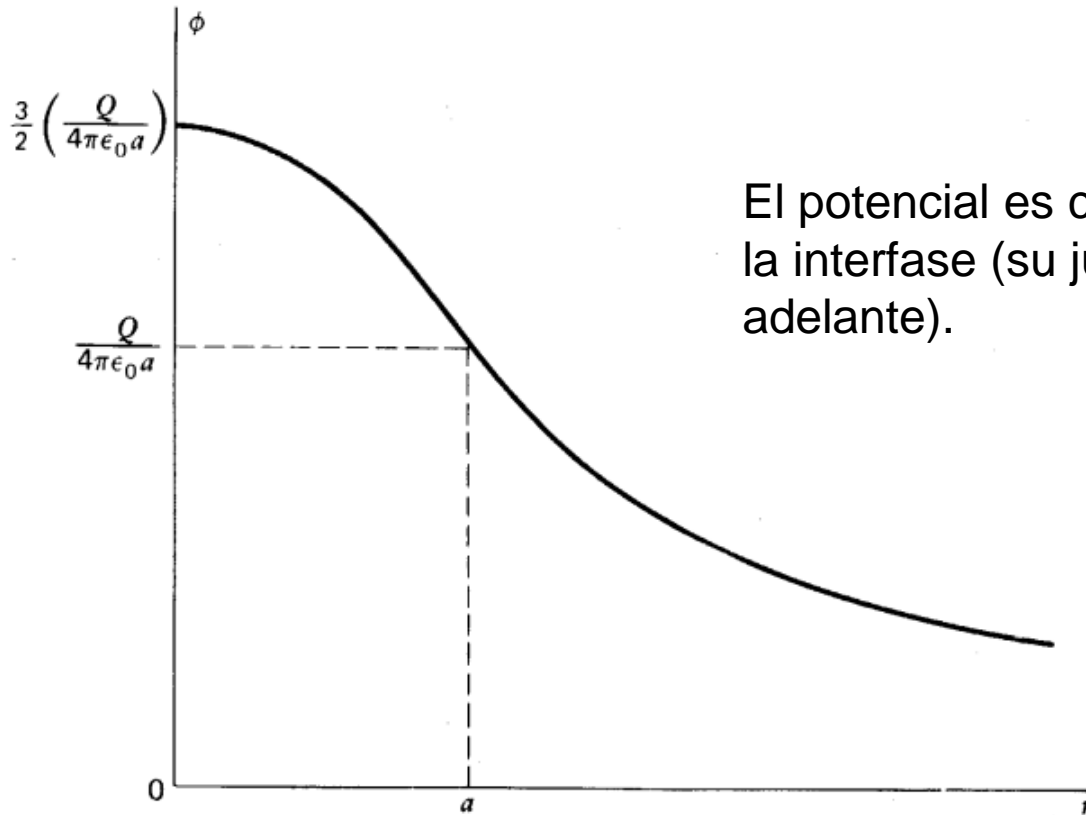
Equivalente a tener toda la carga en el centro de la esfera

CASO 2: Puntos interiores de la esfera de carga, para $\rho = \text{cte}$, $r < a$

$$\phi_i(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

Los detalles de como llegar a estos valores se hará en la pizarra

En este caso las condiciones impuestas son: origen de potencial en el infinito y continuidad del potencial en la interfase ($r = a$)



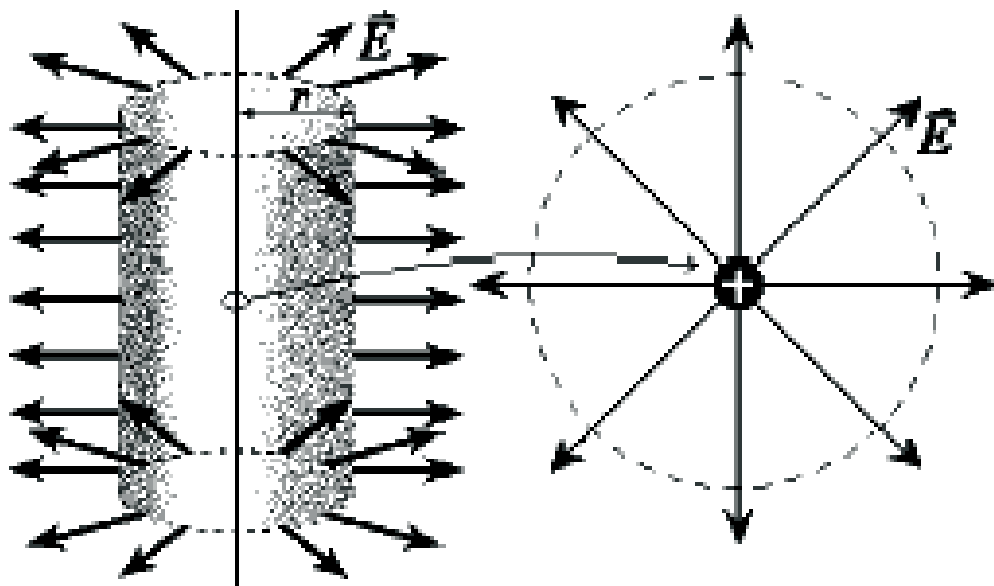
El potencial es continuo en la interfase (su justificación se verá más adelante).

Cuando las cargas están distribuidas en una región finita del espacio es habitual poner el origen de potencial en el infinito.

SIMETRÍA CILÍNDRICA

Campo y potencial creados por una línea infinita uniformemente cargada

Tengamos un hilo de longitud infinita cargado con una densidad de carga lineal $\lambda = \text{cte}$



Las líneas de campo son rectas perpendiculares al hilo en todos los puntos y presentan simetría radial. Se dirigen hacia fuera del hilo si la carga que contiene es positiva y hacia dentro si la carga es negativa.

Las superficies equipotenciales son superficies cilíndricas concéntricas en torno al hilo, tanto más alejadas cuanto menor sea el potencial.

COORDENADAS CILÍNDRICAS

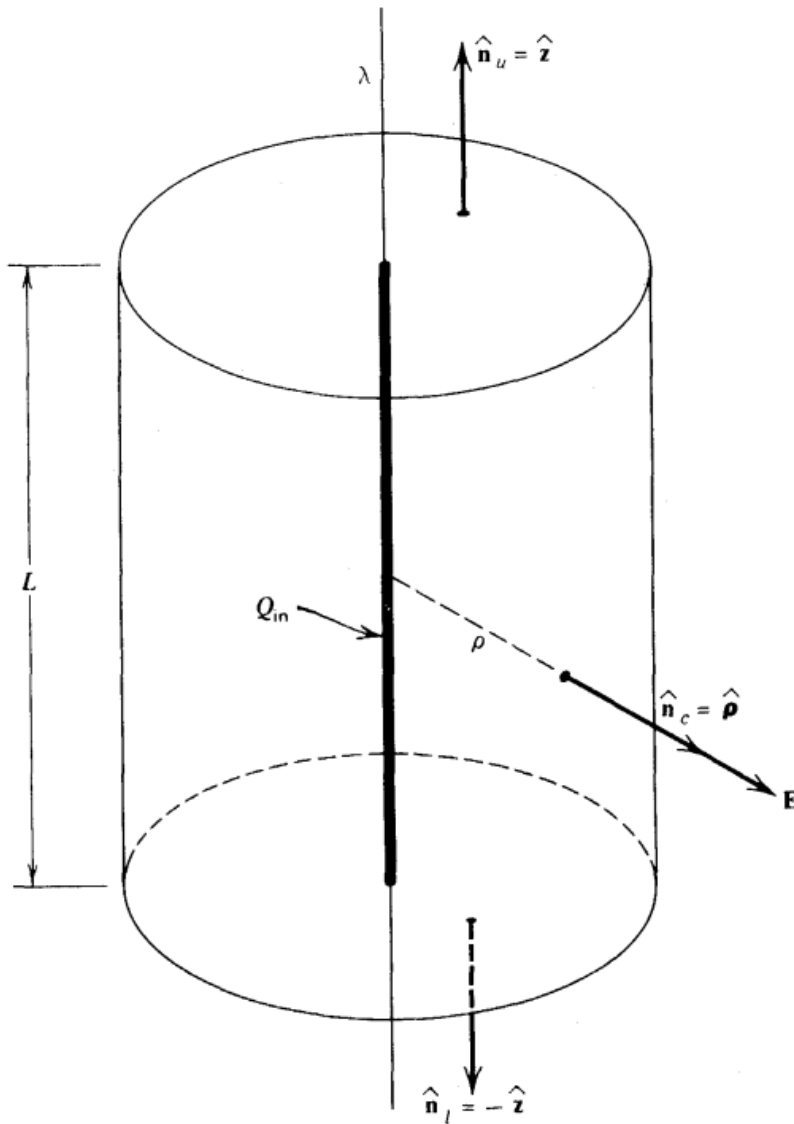
Por simetría:

E sólo tiene componente radial, y ésta sólo depende del radio (independiente de z y del ángulo)

$$\mathbf{E} = E_\rho(\rho)\hat{\rho}$$

Teorema de Gauss:

Elegimos como superficie gaussiana un cilindro de longitud L concéntrico con el Hilo.

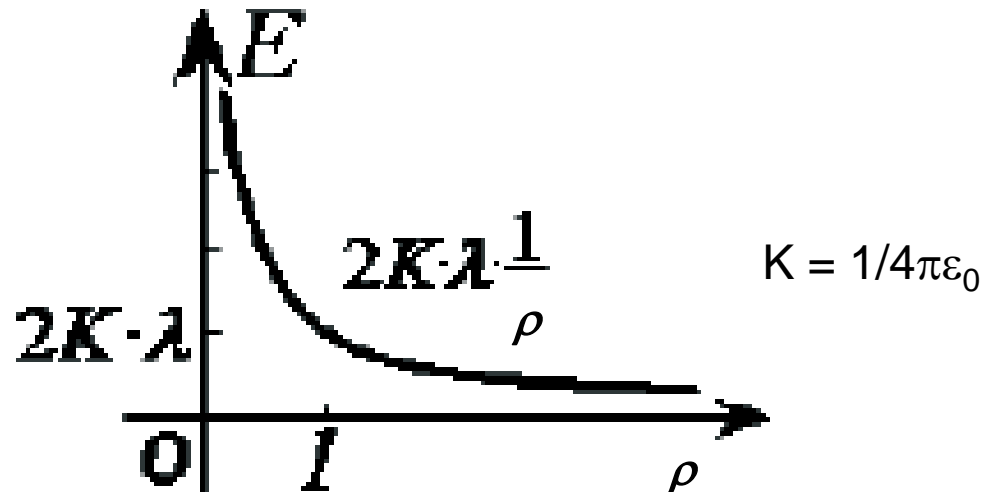


Aplicamos el T. Gauss:

El cilindro tiene 3 caras: curva (c), tapa superior(u, de “up”) y tapa inferior (“l” de “low”).

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \int_c E_\rho(\rho) \hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{n}}_c da + \int_u E_\rho \hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{n}}_u da + \int_l E_\rho \hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{n}}_l da \\ &= E_\rho(\rho) \int_c da + 0 + 0 = E_\rho(\rho) 2\pi\rho L = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$



Potencial

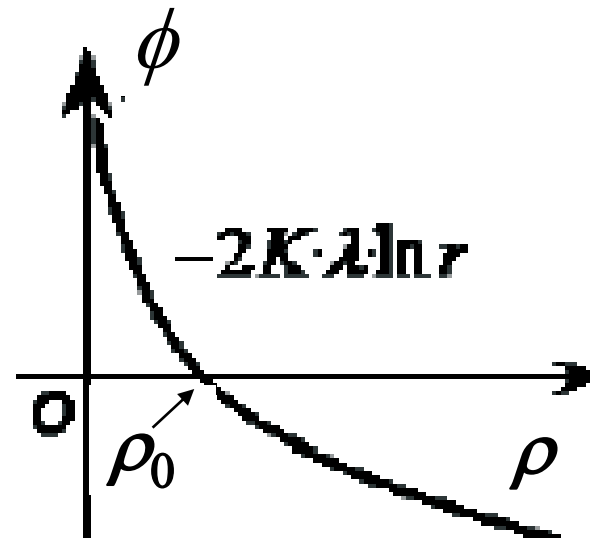
$$\phi(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + C$$

La constante C se determina fijando un origen para el potencial, por ejemplo en ρ_0

$$\rho = \rho_0, \phi(\rho_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \lambda \ln \rho_0 / 2\pi\epsilon_0,$$

$$\phi(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

Para distribuciones de carga que se extienden hasta el infinito, el origen de potencial no se puede poner en el infinito. Se pone en un punto arbitrario.



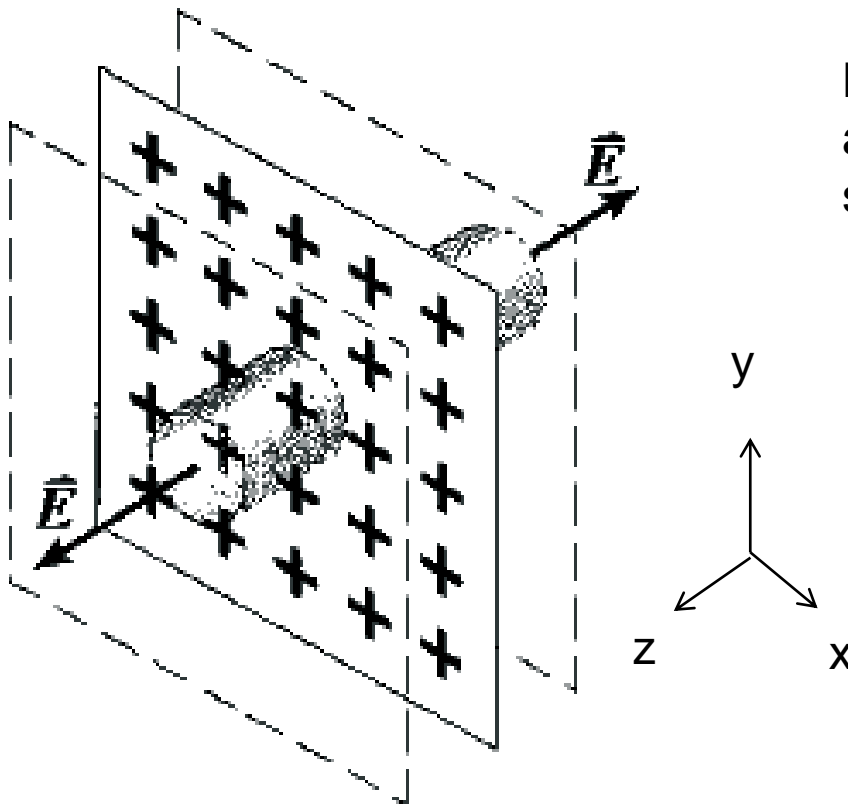
SIMETRÍA PLANA

Campo y potencial creados por un plano infinito uniformemente cargado

Tengamos un plano de dimensiones infinitas cargado con una densidad superficial $\sigma = cte$.

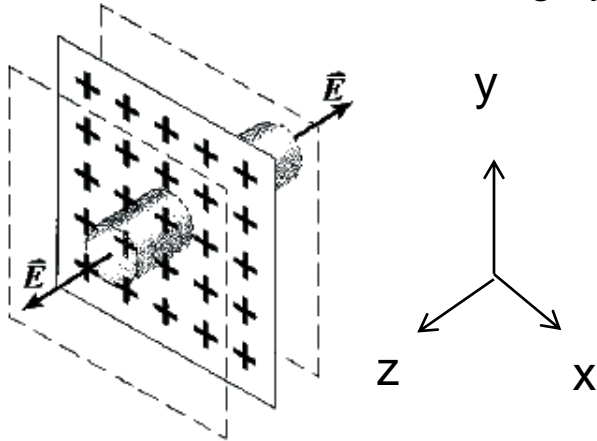
Por simetría:

E sólo tiene componente perpendicular al plano (dirección z), y ésta depende sólo de la distancia a éste

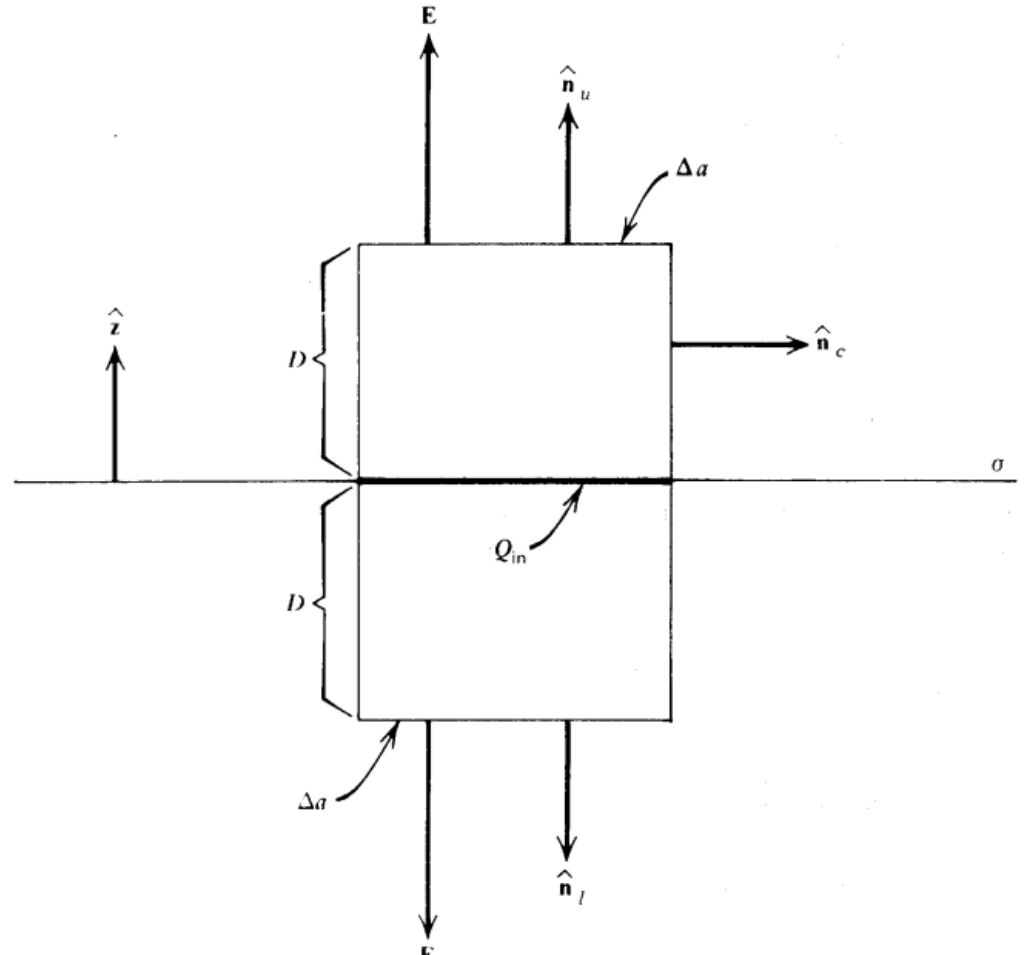


Campo

Superficie gaussiana: cilindro de altura arbitraria 2D y sección transversal de área Δa con su eje (z) perpendicular al plano de carga y cortándolo simétricamente



¿Se podría usar un paralelepípedo como superficie gaussiana, en lugar de un cilindro?



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_u E(D) \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} da + \int_l E(D) (-\hat{\mathbf{z}}) \cdot (-\hat{\mathbf{z}}) da + \int_c E(z) \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_c da$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_u E(D) \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} da + \int_l E(D) (-\hat{\mathbf{z}}) \cdot (-\hat{\mathbf{z}}) da + \int_c E(z) \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_c da$$

Cara arriba

Cara abajo

Cara curva

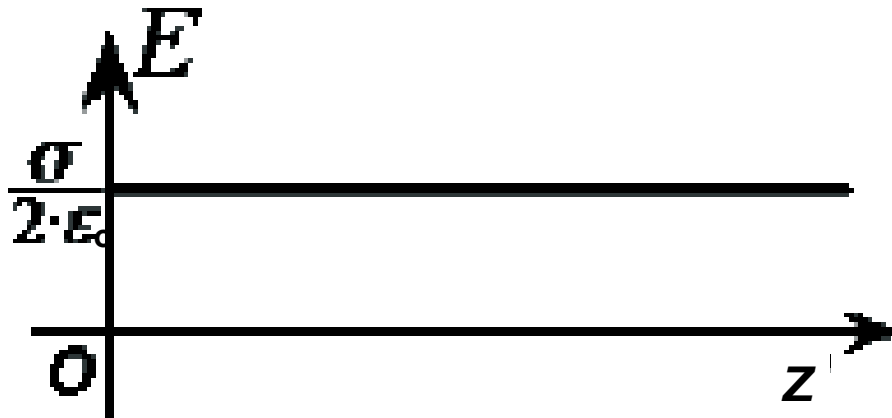
$$= E(D)\Delta a + E(D)\Delta a + 0 = 2E(D)\Delta a = \frac{Q_{\text{en}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta a}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$$

Signo + para $z > 0$

Signo - para $z < 0$

El campo es constante:
no depende de la distancia
al plano (z)

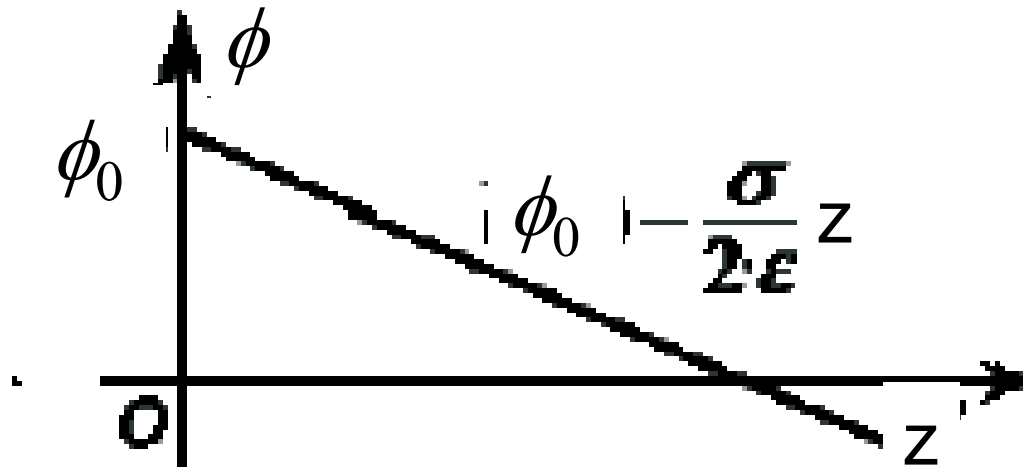


Potencial

$$\phi(z) = - \int E(z) dz = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + C$$

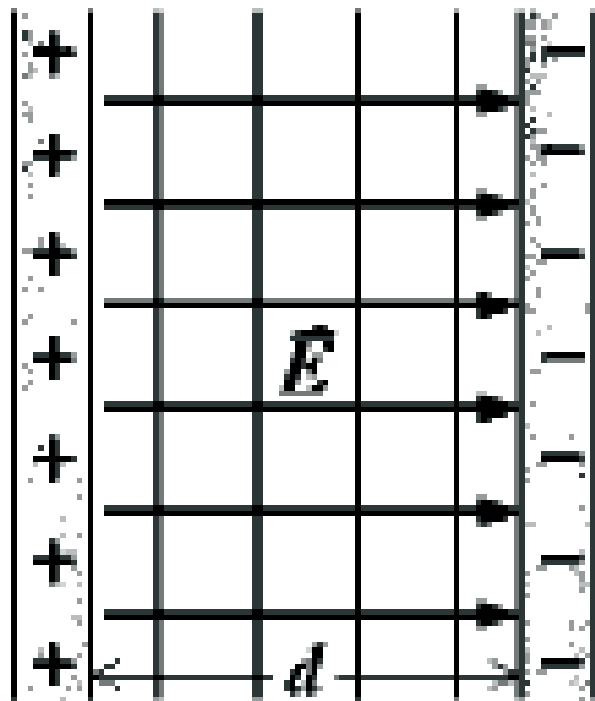
Para determinar la constante C es necesario conocer el valor del potencial para algún valor determinado (z referencia)

Por ejemplo, $\phi(z_{ref}) = \phi_0$, con $z_{ref} = 0$



Campo y potencial creados por dos planos paralelos, uniformes y opuestamente cargados

Tengamos dos planos de dimensiones infinitas separados una distancia d , con igual densidad de carga superficial, pero de diferente signo ($+\sigma$ y $-\sigma$).

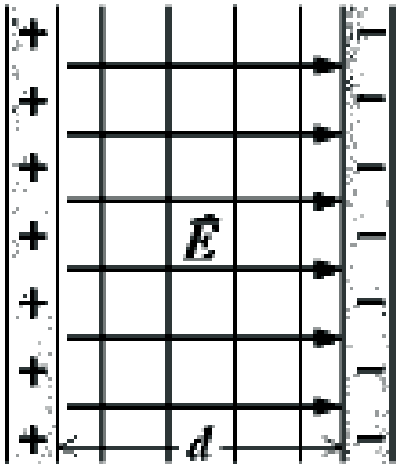


Las líneas de campo son rectas paralelas entre sí y perpendiculares a los planos, uniformemente espaciadas. Se dirigen del plano positivo al negativo.

Las superficies equipotenciales son paralelas al plano y uniformemente espaciadas.

EJEMPLO RELEVANTE: CONDENSADOR DE PLACAS PLANO-PARALELAS

Campo



Región entre ambos planos: Se superponen los campos debidos a cada plano. El módulo será:

$$E(z) = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Dirigido desde el plano positivo hacia el negativo.

Región exterior a los planos: Los campos debidos a cada plano se neutralizan y no hay campo neto.

El potencial disminuye linealmente con la distancia desde el plano positivo al negativo .

Se propone al alumno que intente calcular el campo eléctrico para estas Distribuciones uniformes de carga (esfera, línea infinita y plano infinito) mediante la definición de campo eléctrico (transparencia 24) y compruebe que se obtiene el mismo resultado.

Se observará lo útil que resulta el teorema de Gauss para simplificar los cálculos



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tema II: Electrostática en el vacío

Electromagnetismo I

2º Curso Grado Física

Curso 2022-2023 (2º semestre)

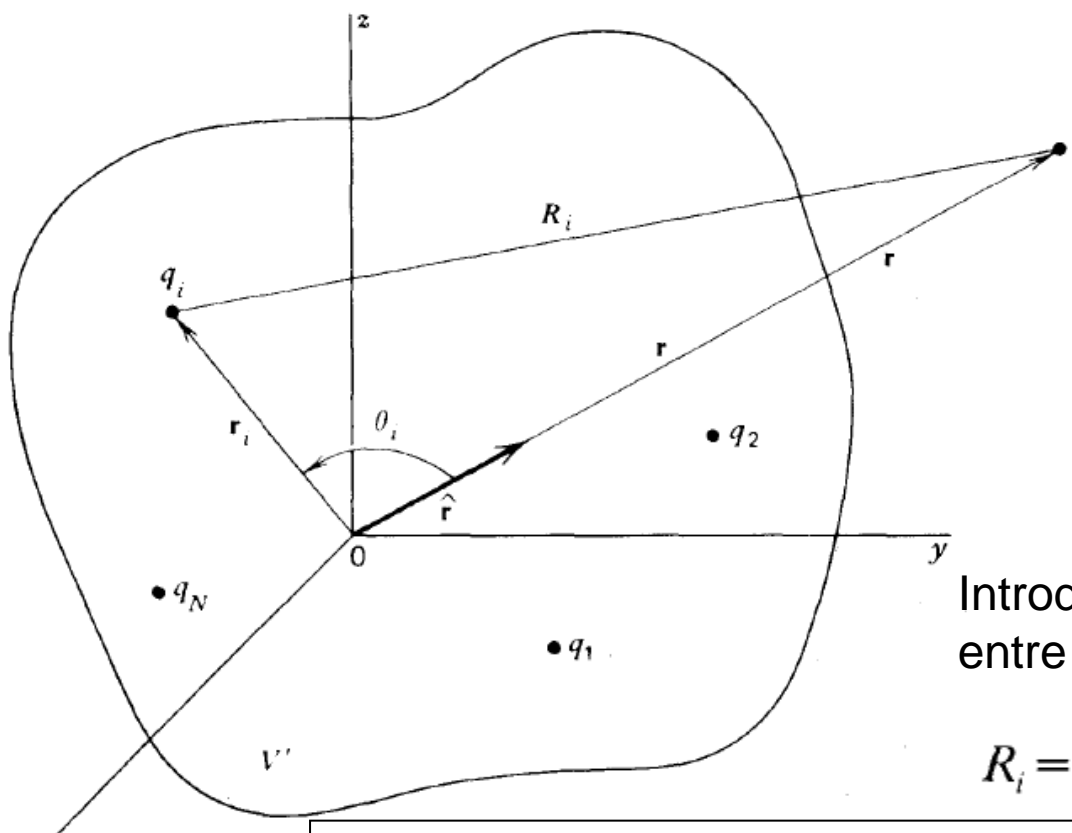
Universidad de Alicante – Departamento de Física Aplicada

Índice

1. Introducción.
2. Ley de Coulomb. Principio de superposición. (repaso año anterior)
3. Campo eléctrico y potencial electrostático. (repaso año anterior)
4. Teorema de Gauss y aplicaciones. (año anterior intensificado)
5. Dipolo eléctrico y desarrollos multipolares.
6. Ecuaciones de Laplace y de Poisson.
7. El método de las imágenes.

5. Dipolo eléctrico y desarrollos multipolares

Desarrollo multipolar del potencial de una distribución de cargas



$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

Donde:

$$R_i = |\vec{r} - \vec{r}_i|$$

Introduciendo los ángulos θ_i entre las direcciones de \vec{r} y \vec{r}_i

$$R_i = (r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \theta_i)^{1/2}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \theta_i)^{1/2}}$$

R_i se puede escribir en función del parámetro t :

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r(1+t)^{1/2}} \quad t = -2\left(\frac{r_i}{r}\right)\cos\theta_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2$$

Si P se encuentra lo suficientemente alejado del volumen en el que están contenidas las cargas, se puede hacer una aproximación a la expresión anterior haciendo uso del desarrollo en serie de potencias siguiente (usando el signo superior):

$$(1 \pm t)^{-(1/2)} = 1 \mp \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 \mp \frac{5}{16}t^3 + \dots$$

Término monopolar

Término dipolar

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=1}^N q_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^N q_i r_i \cos\theta_i \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_{i=1}^N \frac{q_i r_i^2}{2} (3\cos^2\theta_i - 1) + \dots \end{aligned}$$

**Desarrollo
multipolar del
potencial
electrostático**

Término cuadripolar

La expresión anterior tiene la dificultad de que depende de los cosenos de los ángulos, que dependen de ambas variables r y r_i . Sería mejor poner la expresión de manera que estas variables aparecieran explícitamente separadas.

$$\cos \theta_i = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{rr_i} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \right) = \frac{l_x x_i + l_y y_i + l_z z_i}{r_i}$$

Donde l_x , l_y y l_z , son los cosenos directores del vector unitario. Las coordenadas x_i, y_i, z_i son las coordenadas cartesianas de la carga q_i

El término monopolar

Este término solo depende de r , y no de r_i

$$\phi_M(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^N q_i = Q_{\text{total}} = Q$$

Q es la carga neta del sistema. Aquí se llama MOMENTO MONOPOLAR

que es la característica más importante de la distribución de cargas para el término monopolar

Si las cargas se encuentran distribuidas de forma continua, Q se puede calcular a partir de la siguiente integral:

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

El término dipolar

$$\sum_{i=1}^N q_i r_i \cos \theta_i = \sum_{i=1}^N q_i (l_x x_i + l_y y_i + l_z z_i)$$

MOMENTO DIPOLAR DE LA
DISTRIBUCIÓN DE CARGAS

$$= l_x \left(\sum_i q_i x_i \right) + l_y \left(\sum_i q_i y_i \right) + l_z \left(\sum_i q_i z_i \right)$$

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i$$

$$= \hat{\mathbf{r}} \cdot \left(\sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \right)$$

Si las cargas están distribuidas de forma continua

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\tau'$$

$$\phi_D(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

TÉRMINO DIPOLAR ESCRITO EN FUNCIÓN
DEL MOMENTO DIPOLAR

Escrito como un producto escalar de cantidades, una que sólo depende de la posición del punto en el campo, y la otra sólo de los detalles de la distribución de carga.

El término cuadripolar

$$\begin{aligned} & \sum_i q_i r_i^2 (3 \cos^2 \theta_i - 1) \\ &= l_x^2 \sum_i q_i (3x_i^2 - r_i^2) + l_x l_y \sum_i q_i 3x_i y_i + l_x l_z \sum_i q_i 3x_i z_i \\ &+ l_y l_x \sum_i q_i 3y_i x_i + l_y^2 \sum_i q_i (3y_i^2 - r_i^2) + l_y l_z \sum_i q_i 3y_i z_i \\ &+ l_z l_x \sum_i q_i 3z_i x_i + l_z l_y \sum_i q_i 3z_i y_i + l_z^2 \sum_i q_i (3z_i^2 - r_i^2) \end{aligned}$$

$$Q_{jk} = \sum_{i=1}^N q_i (3j_i k_i - r_i^2 \delta_{jk})$$

$(j, k = x, y, z)$



Cada término es el producto de una cantidad que sólo depende del punto del campo, es decir, de su dirección; y de otra cantidad que sólo depende de los detalles de la distribución de cargas. Por ello, se puede definir un conjunto de cantidades: las componentes del **TENSOR MOMENTO CUADRIPOlar**

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Función delta de Kronecker

$$\phi_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=x,y,z} \sum_{k=x,y,z} l_j l_k Q_{jk}$$

TÉRMINO CUADRIPOlar EN FUNCIÓN DEL MOMENTO CUADRIPOlar

6. Ecuaciones de Poisson y de Laplace

Combinando la 1ª Ecuación de Maxwell (se obtuvo en Apartado 4)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1ª ECUACIÓN DE MAXWELL

(forma diferencial)

EQUIVALENTE A LA LEY DE COULOMB ₉

Con la ecuación que relaciona el campo con el potencial

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

Se obtiene la **ECUACIÓN DE POISSON**

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ecuación diferencial que permite calcular el potencial conocida la densidad de carga y dos condiciones de contorno.

Esto constituye un método alternativo de obtener el potencial.

Si estamos en el vacío, o en regiones en las que la densidad de carga es nula, la ecuación de Poisson se llama

ECUACIÓN DE LAPLACE

$$\nabla^2 \phi = 0$$

MÉTODOS PARA OBTENER EL POTENCIAL ELÉCTRICO DE UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS

El problema fundamental de la electrostática es la determinación del **potencial electrostático (o eléctrico)**.

A partir de él se puede obtener el campo, la fuerza y la energía potencial.

Existen diversos métodos para resolver este problema

1. A partir de la definición (integrando).

Posible si se conoce la distribución de las cargas puntuales y/o de las densidades de cargas (volumétrica, superficial y lineal)

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{R}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}') da'}{R}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}') ds'}{R}$$

2. Resolviendo la Ecuación de Poisson y/o Laplace.

Cuando no se conoce la distribución de las cargas y/o densidades de cargas (por ejemplo en el caso de conductores cargados), o cuando se conoce la distribución de cargas sólo en una zona determinado del espacio, pero no en la otra.

Consideraciones necesarias para la resolución:

- ☐ En todos los puntos donde hay densidad de carga, el potencial verifica la Ecuación de Poisson.
- ☐ En todos los puntos donde no hay densidad de carga, el potencial verifica la Ecuación de Laplace.
- ☐ En el infinito el potencial tiende a cero.
- ☐ La ecuación a resolver es una ecuación diferencial de segundo orden, por lo que la solución tendrá dos constantes arbitrarias.
- ☐ Para determinar dichas constantes arbitrarias es necesario tener dos condiciones, denominadas **condiciones de contorno o de frontera** (establecen el valor del potencial o de sus derivadas en las superficies de discontinuidad que separan dos medios).

DOS FORMAS DE RESOLVER LA EC. DE LAPLACE:

- A) Dar la solución como combinación lineal de varias soluciones independientes.
- A) Usando el método de las imágenes.

TEOREMA DE UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN A LA EC. DE LAPLACE:

Si una función es una solución de la ecuación de Laplace que satisface las condiciones de contorno, esa función es única y no puede existir otra distinta que verifique las mismas condiciones

Este teorema es clave para el método de las imágenes

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE CON UNA SOLA VARIABLE

La ecuación de Laplace para una sola variable en coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 \phi(x) = 0 \qquad \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0$$

Las soluciones de esta ecuación tienen la forma: $\phi(x) = a + bx$

Siendo a y b constantes arbitrarias. Para determinarlas es preciso tener dos condiciones de contorno, por ejemplo conocer el valor del potencial para dos valores de la variable x .

Ejemplos (desarrollo en pizarra): Condensador plano.

Calcular el potencial $\phi(x)$ en la región del espacio comprendida entre dos placas metálicas paralelas y perpendiculares al eje x , sabiendo que entre ambas placas no hay cargas.

Las condiciones de contorno son los valores del potencial en las placas.

Condensador esférico y condensador cilíndrico

ECUACIÓN DE LAPLACE PARA VARIAS VARIABLES: MÉTODO SEPARACIÓN DE VARIABLES

La mayoría de ejemplos en los que el cálculo del potencial requiere la resolución de la ecuación de Laplace (o de Poisson) es cuando hay materiales conductores. En el tema 3 veremos materiales conductores y dieléctricos y se justificará la razón de las condiciones de contorno.

En esta sección nos centramos en el método matemático de resolver la ecuación, para unas condiciones de contorno dadas.

ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS CARTESIANAS

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Suponemos que la solución es de la forma:

$$\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

Que sustituyendo en la ecuación de Laplace resulta:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$$

Para que la ecuación anterior se cumpla es necesario que ambos miembros sean iguales a una misma constante

Cumplíendose:

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \quad \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

Para que se cumpla esta **condición**:

- α , β y γ , no pueden ser todas positivas ni todas negativas.
- No pueden ser todas reales ni todas imaginarias

Las soluciones de las tres ecuaciones serán:

$$X(x) = a_1 e^{\alpha x} + a_2 e^{-\alpha x}$$

$$Y(y) = b_1 e^{\beta y} + b_2 e^{-\beta y}$$

$$Z(z) = c_1 e^{\gamma z} + c_2 e^{-\gamma z}$$

La solución general para la función potencial será una combinación lineal de estas, donde el sumatorio se extiende a todos los posibles valores de α , β y γ , que verifiquen la condición anterior

$$\phi(x, y, z) = \sum \left[a_1(\alpha) e^{\alpha x} + a_2(\alpha) e^{-\alpha x} \right] \left[b_1(\beta) e^{\beta y} + b_2(\beta) e^{-\beta y} \right] \left[c_1(\gamma) e^{\gamma z} + c_2(\gamma) e^{-\gamma z} \right]$$

El tipo de solución anterior es válido para cualquier ejemplo de potencial de tres variables que se pueda expresar en coordenadas rectangulares.

La resolución completa de un problema concreto consistirá en imponer las condiciones de contorno para determinar las constantes α , β y γ , así como a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 . Nótese que estas últimas en general pueden depender de las primeras.

EJEMPLO (Desarrollo en la pizarra):

Considérese una región limitada por (1) un plano conductor semi-infinito en $x = 0$ que ocupa la mitad del plano yz correspondiente a y positiva (así, $0 \leq y < \infty$, $-\infty \leq z < \infty$); (2) un plano similar en $x = L$; y (3) la franja del plano xz entre ellos ($0 \leq x \leq L$). La figura

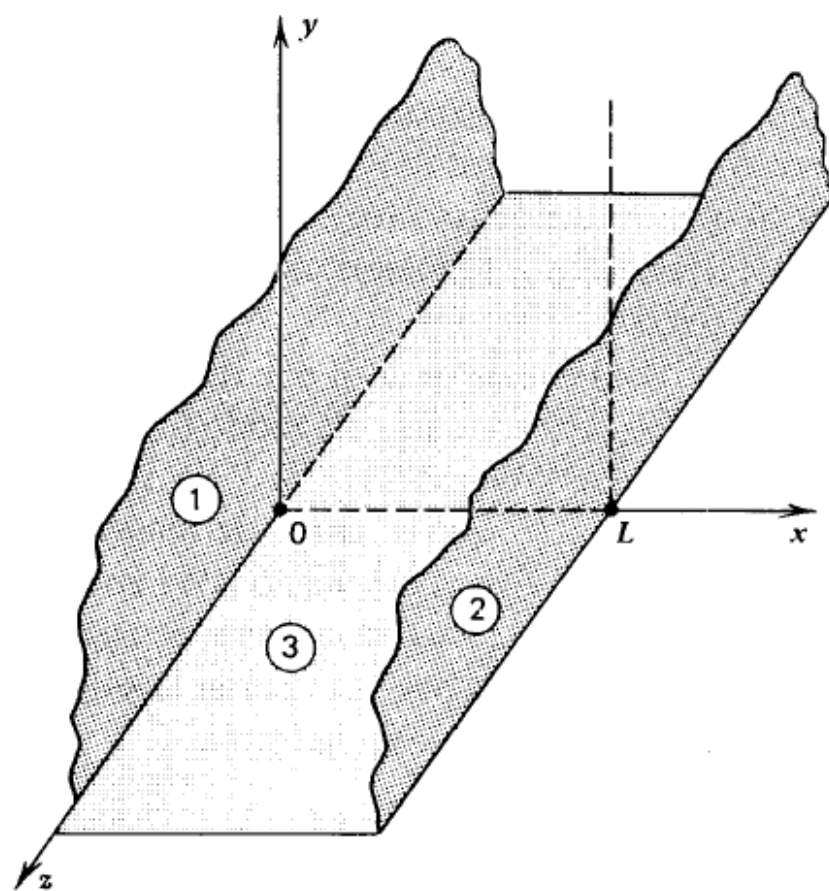
CONDICIONES DE CONTORNO

$$\text{en } x=0 \quad \phi(0,y,z)=0$$

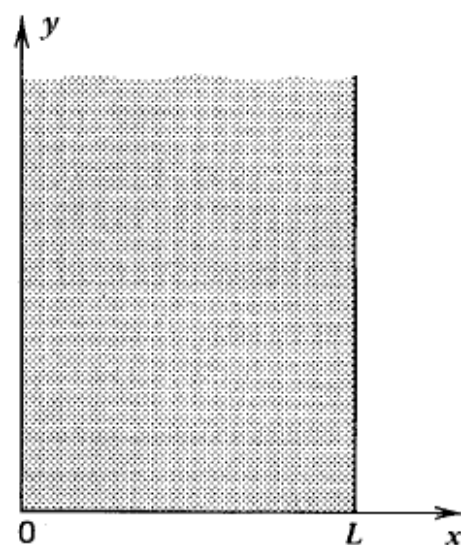
$$\text{en } x=L \quad \phi(L,y,z)=0$$

$$\text{en } y=\infty \quad \phi(x,\infty,z)=0$$

$$\text{en } y=0 \quad \phi(x,0,z)=f(x)$$



(a)



(b)

Figura 11-11 (a) Dos planos conductores semiinfinitos paralelos al plano yz .
(b) Su proyección sobre el plano xy .

ECUACIÓN DE LAPLACE: SEPARACIÓN DE VARIABLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

La ecuación de Laplace en Coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Examinamos el caso particular más sencillo de dos variables en el que hay simetría axial (es decir que el potencial es independiente del ángulo φ), esto es para $\phi = \phi(r, \theta)$

La ecuación de Laplace para este caso queda:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0$$

Se buscan soluciones de la forma (separación variables):

$$\phi(r, \theta) = R(r) T(\theta)$$

Imponiendo que esta solución verifique la ecuación diferencial y siguiendo un método similar al anterior se llega a dos ecuaciones diferenciales diferentes de una sola variable, una dependiente de r y otra del ángulo θ

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - KR = 0$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dT_l}{d\theta} \right) + l(l+1) T_l = 0$$

Soluciones de la forma:

$$R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$$

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Las soluciones son los polinomios de Legendre: $T_l(\theta) = P_l(\cos \theta)$

$$P_0(\cos \theta) = 1 \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

Forma general de la solución

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

7. El método de las imágenes

En base al **teorema de unicidad** que vimos, podemos “inventar” cualquier método que nos lleve a una solución válida de la ecuación de Laplace y que cumpla las condiciones de contorno, y estaremos seguros de que esa es la única posible solución.

Este método consiste en sustituir parte de las cargas (o densidades de carga) del sistema que se quiere resolver, por otras ficticias (“cargas imagen”) que permiten llevar a misma solución del problema real completo, pero simplificando la resolución del problema.

La idea es calcular el potencial según la expresión:

$$\phi = \sum_{\text{real}} \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 R_a} + \sum_{\text{imagen}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

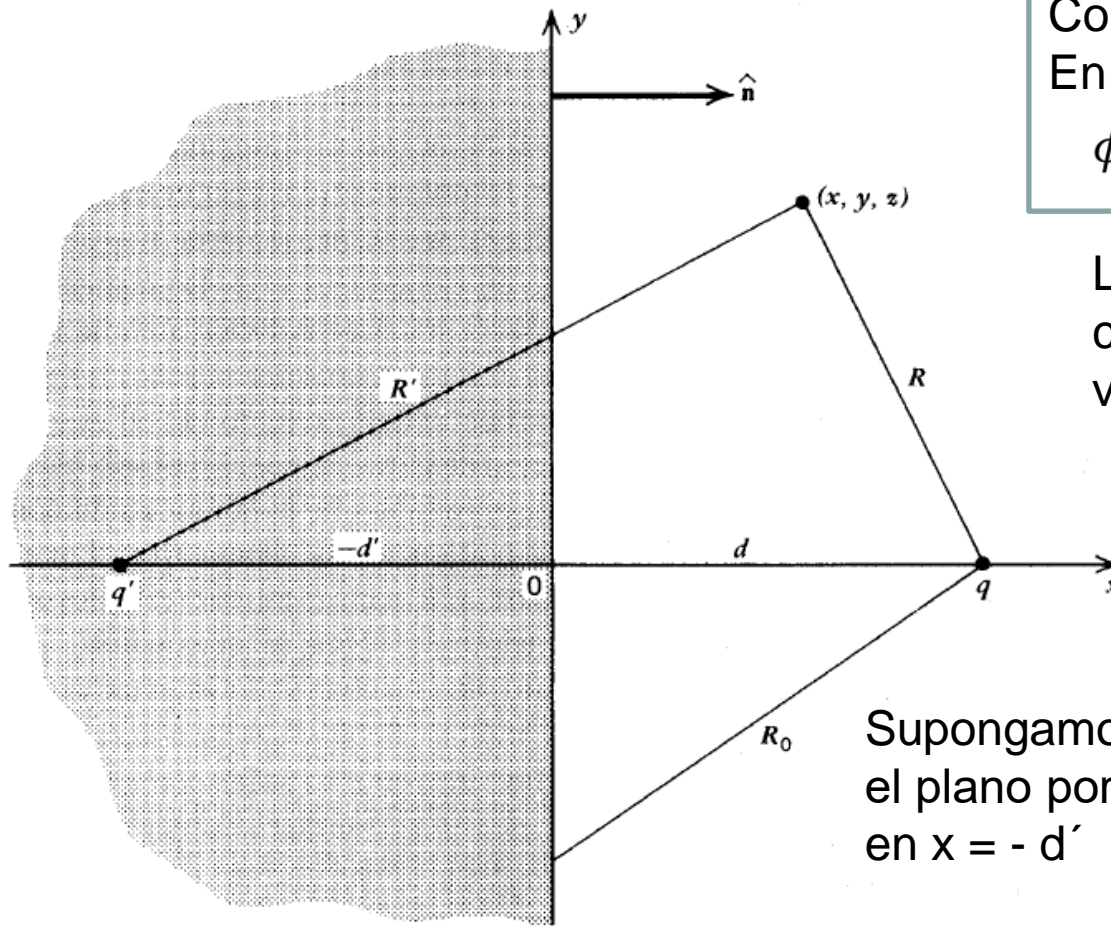
Las cargas “imagen” deben simular las otras cargas o el material presente de modo que se llegue a la misma solución

7. El método de las imágenes. Ejemplo

OBTENER POTENCIAL ϕ DEBIDO A CARGA PUNTUAL, q , Y PLANO CONDUCTOR SEMI-INFINITO CONECTADO A TIERRA

Condición de contorno:
En $x = 0$, $\phi = \text{cte} = 0$ (con tierra)
 $\phi(0, y, z) = 0$

La justificación de esta condición de contorno se verá en el Tema 3.



Supongamos que es posible sustituir el plano por una carga “imagen” q' situada en $x = -d'$

Para este sistema ficticio el potencial sería:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{q'}{[(x+d')^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\}$$

Imponiendo que este potencial satisfaga la condición de contorno se obtiene:

$$\frac{q}{(d^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{q'}{(d'^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = 0$$

Esta condición se cumple si $q = -q'$ y $d = d'$. Poniendo estos valores en la expresión del potencial obtenemos la solución, válida para $x > 0$

$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\}$$



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tema III: Electrostática en conductores y dielectricos

Electromagnetismo I

2º Curso Grado Física

Curso 2022-2023 (2º semestre)

Universidad de Alicante – Departamento de Física Aplicada

Índice

1. Conductores en condiciones estática.
2. Sistemas de conductores.
3. Capacidad de un conductor.
4. Polarización en medios dieléctricos.
5. Teorema de Gauss en medios dieléctricos.
6. Relaciones constitutivas y condiciones de contorno.

1. Conductores en condiciones estáticas.

Conductor: Región en la que las cargas son libres de moverse bajo la influencia de un campo eléctrico.

Ejemplo: Metales (las cargas móviles son los electrones libres)

Condiciones estáticas = No hay movimiento de cargas

DENTRO DEL CONDUCTOR:

- 1) El campo debe ser nulo, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$
- 2) El potencial $\Phi(\mathbf{r})$ cumple ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$), luego $\Phi(\mathbf{r}) = \text{cte}$
- 3) No puede haber densidad de carga ($\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho_v / \epsilon_0 = 0$)
- 4) Si aplicamos el T. de Gauss en una superficie gaussiana en el interior del conductor, muy cercana a la superficie: la carga dentro es cero;
la carga debe estar distribuida en la superficie.

EN LA SUPERFICIE DEL CONDUCTOR:

1) La componente tangencial del campo debe ser nula (si no, habría movimiento de cargas, $\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = 0$)

2) El potencial debe ser constante, $\Phi(\mathbf{r}) = \text{cte.}$

3) El campo (en el caso de ser no nulo) debe ser normal a la superficie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_n(\mathbf{r})$$

4) Cálculo de la relación entre la densidad de carga superficial (σ) y el campo eléctrico: Usando el teorema de Gauss (se hizo en el Tema 2)

$$E = \sigma / \varepsilon_0$$

2. Sistemas de conductores.

Sea un sistema de n conductores $(1, 2, \dots, j, \dots, n)$ cargados con cargas $Q_1, Q_2, \dots, Q_j, \dots, Q_n$. El potencial en un punto del espacio debido a todos ellos será

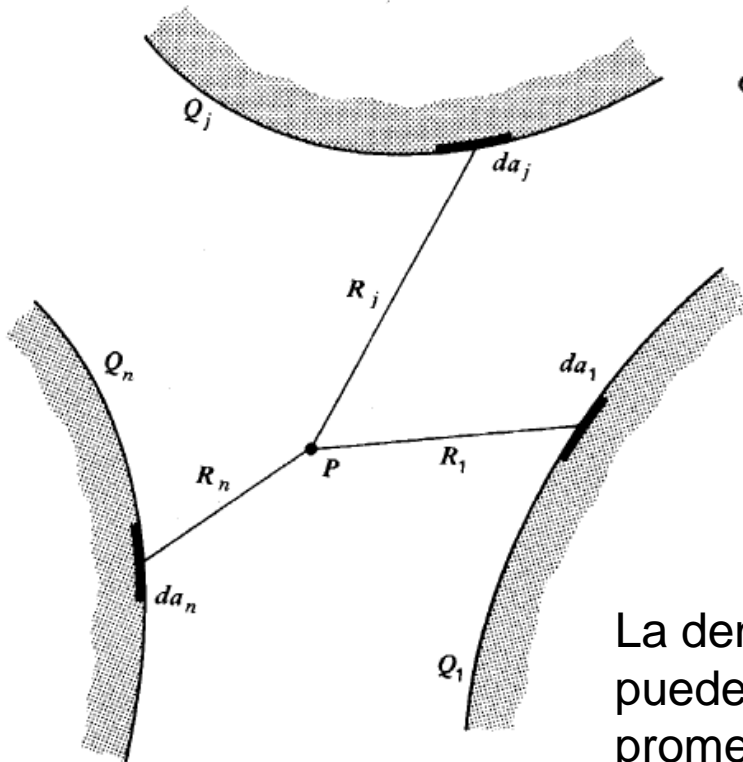
$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}') da'}{R} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_j} \frac{\sigma_j(\mathbf{r}_j) da_j}{R_j}$$

En la superficie de un conductor dado:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_j} \frac{\sigma_j da_j}{R_{ji}} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

La densidad superficial en cada conductor se puede expresar en función de la densidad promedio (f es un factor que depende de la posición en el conductor):

$$\sigma_j = \langle \sigma_j \rangle f_j = \frac{Q_j}{S_j} f_j$$



El potencial se puede expresar entonces del siguiente modo:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 S_j} \int_{S_j} \frac{f_j da_j}{R_{ji}} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

O mejor, en función de los coeficiente p_{ij} (solo dependen de factores geométricos)

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 S_j} \int_{S_j} \frac{f_j da_j}{R_{ji}}$$

Coeficientes de potencial: hay un total de n^2

$$\begin{array}{l} \phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + \dots + p_{1n}Q_n \\ \phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + \dots + p_{2n}Q_n \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ \phi_n = p_{n1}Q_1 + p_{n2}Q_2 + \dots + p_{nn}Q_n \end{array}$$

El potencial de cada conductor depende linealmente de las cargas de todos los conductores

Estos coeficientes sólo dependen de factores geométricos y en general son siempre medibles.

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial Q_j} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial Q_j} \right)_{Q_1, \dots, Q_{j-1}, Q_{j+1}, \dots, Q_n} = p_{ij}$$

Se puede demostrar fácilmente que la matriz de estos coeficientes es **SIMÉTRICA**

$$p_{ji} = p_{ij}$$

EJEMPLO: Esfera conductora aislada de radio a $\phi = Q/4\pi\epsilon_0 a$

$$\phi = p_{11} Q \quad p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}$$

3. Capacidad (o capacitancia) de un conductor

Capacidad de acumular carga = cantidad de carga que puede acumular (almacenar) un conductor; Depende de la geometría y del material.

CONDUCTOR AISLADO

$$\phi = p_{11} Q$$

$$C = \frac{Q}{\phi} = \frac{1}{p_{11}}$$

Caso particular de esfera conductora: $C_{\text{esfera}} = 4\pi\epsilon_0 a$

SISTEMA DE DOS CONDUCTORES

$$\phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2$$

$$\phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2$$

$$p_{12} = p_{21}$$

Cuando dos conductores se usan como capacitor, sus cargas son iguales y de signo contrario

$$Q_1 = Q \text{ y } Q_2 = -Q$$

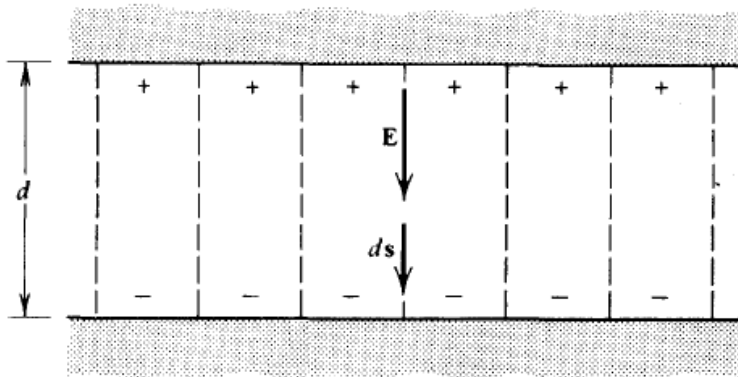
La diferencia de potencial entre ambos conductores será:

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = (p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21})Q$$

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}$$

$$C = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$$

EJEMPLO: Capacitor (o condensador) de placas (infinitas) plano-paralelas; A = area de una placa; d = espaciado entre las placas



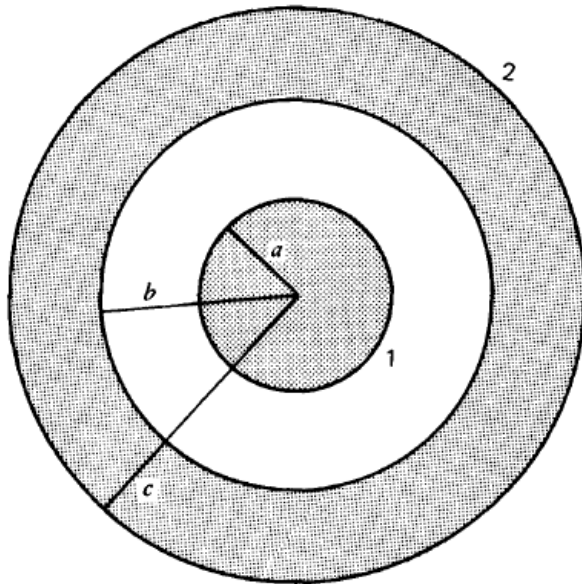
$$\Delta\phi = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_+^- ds = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \left(\frac{d}{\epsilon_0 A} \right) Q = \frac{Q}{C}$$

$$\sigma = Q/A$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

EJEMPLO: Capacitor esférico

Dos conductores (zona sombreada en figura) limitados por esferas concéntricas de radios a , b y c . Carga de la esfera interior $+Q$ y de la exterior $-Q$

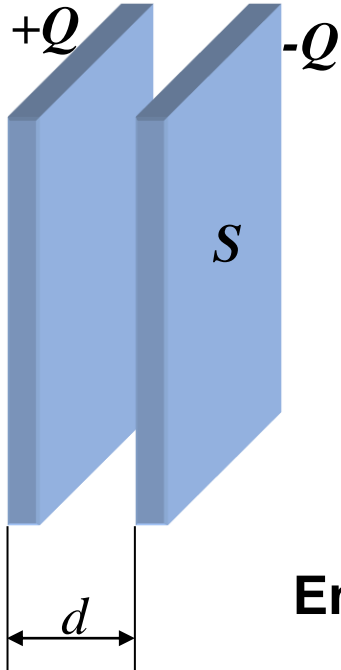
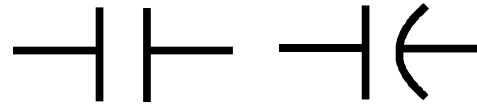


$$\Delta\phi = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{1}{p_{11} - p_{22}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a}$$

Condensador de placas paralelas (aspectos prácticos)

Símbolo en circuitos:



$$Q = CV$$

$$V = E d = \frac{\sigma}{\epsilon} d = \frac{Q S}{\epsilon} d$$

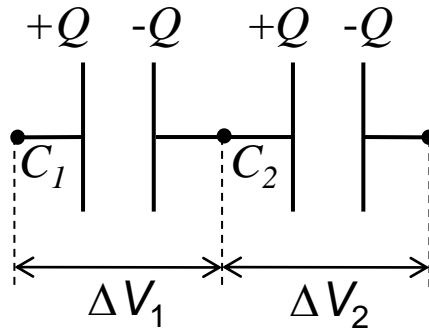
$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

Energía potencial almacenada en un condensador cargado

$$E_p = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

Asociación de condensadores

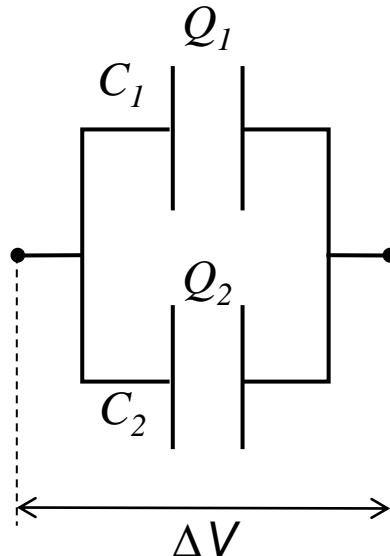
Serie



La carga es igual a la de su condensador equivalente

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Paralelo



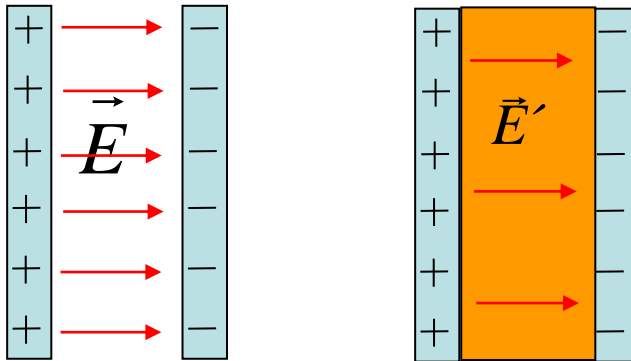
La diferencia de potencial es igual a la de su condensador equivalente

$$C_{eq} = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2$$



Introducción de un dieléctrico (aislante) entre los conductores de un condensador

- 1) Resuelve el problema mecánico de mantener dos grandes láminas metálicas a distancia muy pequeña sin contacto alguno.
- 2) Consigue aumentar la diferencia de potencial máxima que el condensador es capaz de resistir sin que salte una chispa entre las placas (**ruptura dieléctrica**).
- 3) **La capacidad del condensador aumenta.**



$$\text{Vacío} \quad E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\text{Medio aislante} \quad E_m = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon'}$$

$$E_m = \frac{E_0}{\epsilon'} \quad \text{como } \epsilon' > 1 \Rightarrow E_m < E_0$$

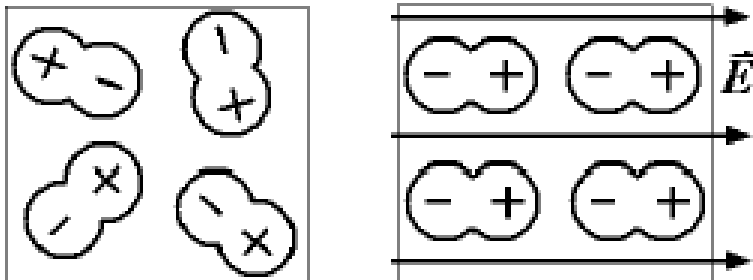
La capacidad C es directamente proporcional a la cte dieléctrica

4. Polarización en medios dieléctricos.

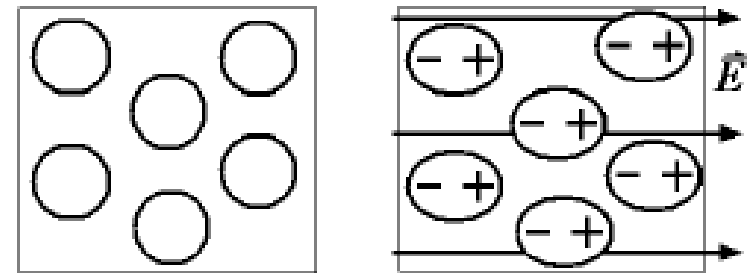
Dieléctrico: Material caracterizado porque no posee cargas libres y los electrones están fuertemente ligados.
Es aislantes de la electricidad (no conduce).

¿ Qué le ocurre al material al aplicar un campo eléctrico?:

Las cargas eléctricas se mueven levemente, formándose dipolos y orientándolos (sustancias no polares), y orientando los dipolos si ya existían antes de aplicar el campo, aunque orientados al azar (sustancias polares)



Material dieléctrico con
sustancias polares
 N_2O , H_2O



Material dieléctrico con
sustancias no polares
 O_2 , N_2 , H_2

ELECTRETOS:

Sustancias en las que las moléculas poseen momentos dipolares permanentes que tienen un cierto grado de orientación aún en ausencia de campo aplicado. Ejemplos: Cuarzo, algunos polímeros.

Estos no se van a considerar de aquí en adelante.

Aunque en general puede haber momentos multipolares de orden superior al dipolar, no los consideramos.

HIPÓTESIS (PARA PROCEDER AL OBJETIVO DE DAR UNA DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA DE LA MATERIA EN FUNCIÓN DEL COMPORTAMIENTO MICROSCÓPICO PROMEDIO DE SUS CONSTITUYENTES):

En promedio, las características dominantes de la materia para este objetivo son las relacionadas con los momentos dipolares eléctricos

En relación a sus propiedades eléctricas la materia neutra es equivalente a una configuración de dipolos eléctricos

VECTOR POLARIZACIÓN **P**: Momento dipolar por unidad de volumen.

Consideramos el dieléctrico como un conjunto de dipolos puntuales.

El momento monopolar es nulo, luego el momento dipolar es independiente del sistema de referencia elegido (se pueden sumar todos).

Dentro de un elemento diferencial de volumen dentro del dieléctrico $\Delta\tau$, el momento dipolar será:

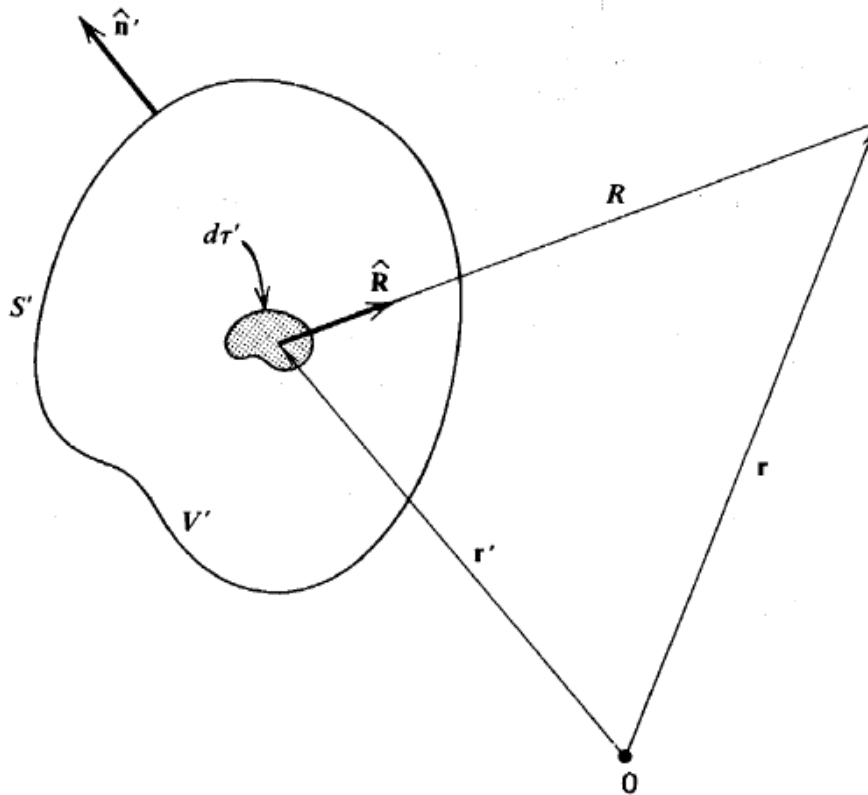
$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r}) d\tau$$

En un volumen V dado de material el momento dipolar será:

$$\mathbf{p}_{\text{total}} = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}) d\tau$$

Unidades de **P**: Coulomb/m²

Potencial producido por un material dieléctrico polarizado: concepto de densidad de carga ligada



Calculamos el potencial en puntos del espacio exteriores al material dieléctrico. Para ello consideramos el término dipolar del potencial

(desarrollo en pizarra)

$$\phi(\mathbf{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau'}{R}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' da'}{R}}$$

Potencial creado por una densidad de carga volumétrica ρ_b distribuida en el volumen V'

$$\rho_b = -\nabla' \cdot \mathbf{P}$$

Potencial creado por una densidad de carga superficial σ_b sobre la superficie S' que envuelve al volumen V'

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = P_n$$

Para efectos en el exterior, el dieléctrico puede ser reemplazado por **densidades de carga volumétrica y superficial LIGADAS** (el subíndice **b** del inglés “bound”), que están relacionadas con la polarización, mediante las ecuaciones recuadradas.

Así, el potencial se puede expresar:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_b d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\sigma_b da'}{R}$$

La carga total
ligada es cero

$$Q_b = \int_{V'} \rho_b d\tau' + \oint_{S'} \sigma_b da' = - \int_{V'} \nabla' \cdot \mathbf{P} d\tau' + \oint_{S'} \sigma_b da'$$

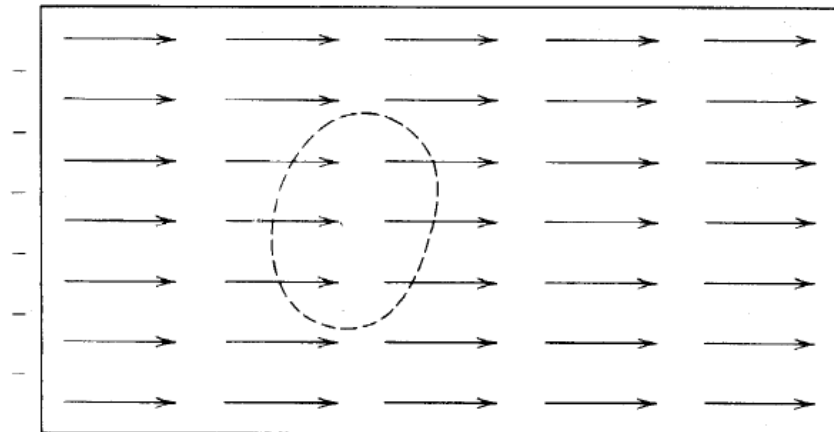
$$= - \oint_{S'} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' da' + \oint_{S'} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' da' = 0$$

CASO PARTICULAR: DIELECTRICO UNIFORMEMENTE POLARIZADO

$$\mathbf{P} = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \rho_b = -\nabla' \cdot \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \rho_b = 0$$

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = P_n$$

$$\sigma_b = P_n < 0$$



$$\sigma_b = P_n > 0$$

5. Teorema de Gauss en medios dieléctricos: el vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} o campo \mathbf{D}

En la definición del campo eléctrico \mathbf{E} , las cargas son todas las presente (sean del tipo que sean, sin importar su origen o tipo)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{R}} d\tau'}{R^2}$$

DOS TIPOS PRINCIPALES DE CARGAS:

LIBRES (f, “free”) Y **LIGADAS** (“b”, bound)

- Resto de cargas no debidas a constituyentes de la materia.
- En general, se puede controlar su distribución.
- Incluye las cargas móviles de los conductores

- Origen en los elementos que constituyen la materia.
- En general, no se tiene control sobre su distribución.

$$\rho_{\text{total}} = \rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

Sustituyendo esta expresión para la densidad de carga total en la forma diferencial de la ley de Coulomb : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$,

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \quad \text{Solo aparece la densidad de carga libre!!}$$

Resulta útil definir un nuevo campo vectorial $\mathbf{D}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{VECTOR DESPLAZAMIENTO o VECTOR } \mathbf{D}$$

En función de \mathbf{D} , la forma diferencial de la ley de Coulomb queda:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

La divergencia de \mathbf{D} sólo depende de la densidad de carga libre

La ley de Gauss para **D** queda:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho_f d\tau = Q_{f, \text{en}}$$

$Q_{f, \text{en}}$ Es la carga libre neta contenida dentro del volumen V encerrado dentro de la superficie S .

Esta expresión permite calcular **D** de forma sencilla, en el caso de alta simetría.

6. Relaciones constitutivas y condiciones de contorno

RELACIONES CONSTITUTIVAS

Relaciones funcionales entre el vector polarización \mathbf{P} y el vector campo (\mathbf{E} y \mathbf{D})

La forma de estas funciones no puede ser predicha por la teoría electromagnética macroscópica

¿Cómo determinamos las funciones $\mathbf{P}(\mathbf{E})$, $\mathbf{P}(\mathbf{D})$ y $\mathbf{D}(\mathbf{E})$?

Experimentalmente

Calculadas teóricamente a partir de propiedades microscópicas de la materia usando otras ramas de la Física (Mec. Estadística o Mec. Estado Sólido)

La combinación de teoría y experimentos muestran que la mayoría de los materiales pertenece a alguna de las clases de materiales siguientes. Las relaciones constitutivas para cada clase son diferentes.

Clasificación de dieléctricos

1. **ELECTRETOS:** Con polarización permanente. $\mathbf{P}(0) \neq 0$,

2. **DIELÉCTRICOS NO LINEALES.**

Asumiendo que no hay polarización permanente: $\mathbf{P}(0) = 0$.

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j + \sum_j \sum_k \beta_{ijk} E_j E_k + \dots \quad i, j, k = x, y, z$$

El dieléctrico es no lineal si son necesarios términos de orden 2 con \mathbf{E} o superiores para describir el material.

3. **DIELÉCTRICOS LINEALES**

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j$$

$$P_x = \epsilon_0 (\chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z)$$

$$P_y = \epsilon_0 (\chi_{yx} E_x + \chi_{yy} E_y + \chi_{yz} E_z)$$

$$P_z = \epsilon_0 (\chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + \chi_{zz} E_z)$$

χ_{ij} : componentes
del tensor
**SUSCEPTIBILIDAD
ELÉCTRICA**

En general, los vectores \mathbf{P} y \mathbf{E} no son paralelos. Y por tanto tampoco \mathbf{D} y \mathbf{E}

3a. CASO PARTICULAR: DIELECTRICOS ISOTROPICOS LINEALES

ISOTROPÍA: en un punto dado, las propiedades eléctricas son independientes de la dirección de \mathbf{E}

\mathbf{P} y \mathbf{E} paralelos; $\chi_{ij} = 0$ si $i \neq j$, y $\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} \Rightarrow \mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \kappa_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad \boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}} \quad \text{ECUACIÓN CONSTITUTIVA}$$

χ_e : Susceptibilidad eléctrica

$\kappa_e = 1 + \chi_e$ = constante dieléctrica = capacidad inductiva específica relativa

$\epsilon = \kappa_e \epsilon_0$ = capacidad inductiva específica (absoluta) o permitividad dieléctrica del medio

ϵ_0 = capacidad inductiva específica (o permitividad dieléctrica) del espacio libre

$$K = \frac{1}{4\pi \epsilon} \quad K: \text{Constante eléctrica} \quad \text{Para todas las sustancias conocidas}$$
$$\chi_e > 0, \text{ luego } \kappa_e > 1$$

Ecuación diferencial para el potencial escalar

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \epsilon \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \epsilon = -\rho_f$$

ϵ puede aún ser función de la posición $\epsilon(\mathbf{r})$

3b. CASO PARTICULAR: DIELECTRICOS ISOTROPICOS LINEALES HOMOGENEOS

HOMOGENEO: las propiedades eléctricas son independientes de la posición $\epsilon = \text{cte.}$

Se siguen cumpliendo las expresiones siguientes del apartado 3a

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \kappa_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad \kappa_e = 1 + \chi_e \quad \epsilon = \kappa_e \epsilon_0$$

La Ecuación diferencial para el potencial escalar se simplifica

$$\nabla^2 \phi = - \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

Para todas las sustancias conocidas

$\chi_e > 0$, luego $\kappa_e > 1$

Como la Ecuación de Poisson, pero con ϵ en lugar de ϵ_0 y con densidad de carga libre, ρ_f en lugar de la total ρ

<i>Cuadro 2. Valores de ϵ y K para distintos medios a 20°C (unidades SI).</i>		
<i>Medio</i>	ϵ ($C^2 N^{-1} m^{-2}$)	$K = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ ($Nm^2 C^{-2}$)
Vacío	$8,854 \cdot 10^{-12}$	$9 \cdot 10^9$
Aire	$8,859 \cdot 10^{-12}$	$\approx 9 \cdot 10^9$
Poliestireno	$2,267 \cdot 10^{-11}$	$3,5 \cdot 10^9$
Papel	$3,276 \cdot 10^{-11}$	$\approx 2,4 \cdot 10^9$
Vidrio pirex	$4,958 \cdot 10^{-11}$	$1,6 \cdot 10^9$
Porcelana	$6,198 \cdot 10^{-11}$	$\approx 1,3 \cdot 10^9$
Agua	$7,083 \cdot 10^{-10}$	$1,1 \cdot 10^8$

P y **E** son paralelos entre sí; **D** y **P** también

$$\mathbf{P} = \frac{\chi_e}{\kappa_e} \mathbf{D} = \frac{(\kappa_e - 1)}{\kappa_e} \mathbf{D}$$

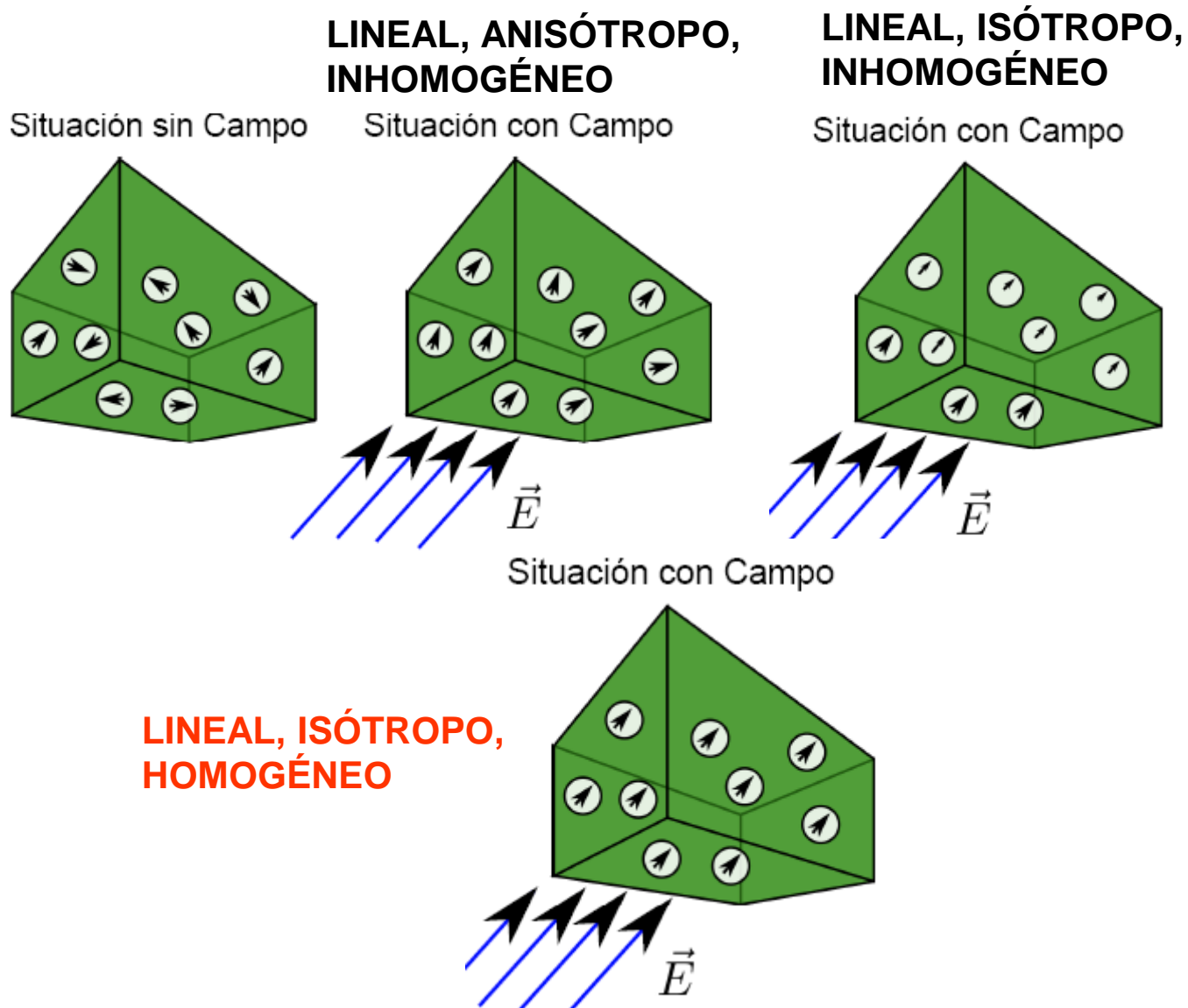
La susceptibilidad eléctrica (χ_e) y la constante dieléctrica (κ_e) son constantes

$$\chi_e > 0, \kappa_e > 1 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{P}| < |\mathbf{D}|.$$

$$\rho_b = -\frac{(\kappa_e - 1)}{\kappa_e} \rho_f \quad \Rightarrow \quad |\rho_b| < |\rho_f|$$

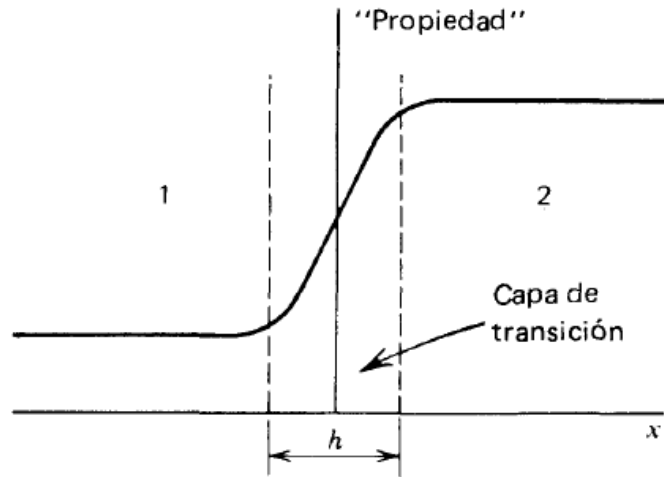
$$\rho = \frac{\rho_f}{\kappa_e} = -\frac{\rho_b}{\kappa_e - 1}$$

ILUSTRACIÓN DE LA RESPUESTA DE DISTINTOS TIPOS DE DIELECTRICOS A UN CAMPO ELÉCTRICO \vec{E}

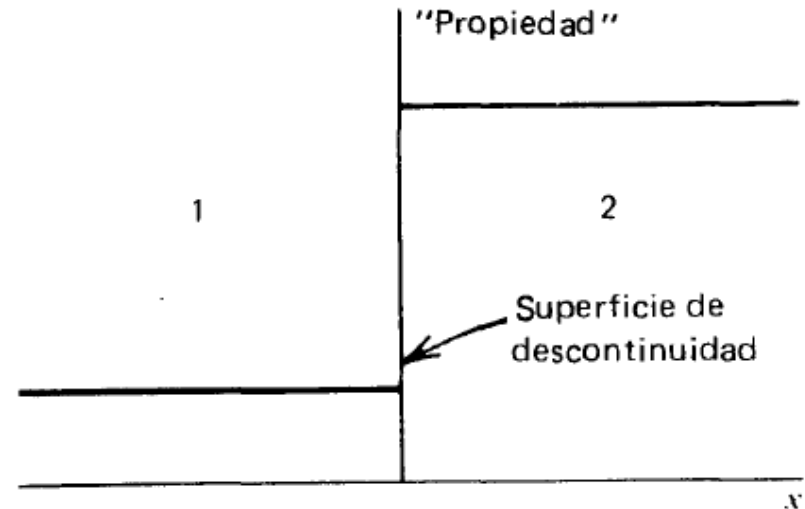


Condiciones de contorno (o frontera) en una superficie de discontinuidad (GENERAL)

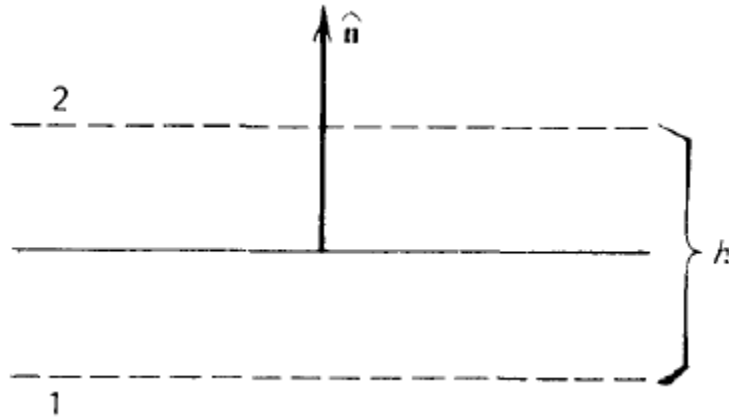
Los medios materiales de distinto tipo tienen en general propiedades distintas. En las situaciones en las que hay varios de estos materiales, es útil conocer cómo cambia una determinada propiedad (el campo, o el potencial) en la superficie de contacto entre ellos = **CONDICIONES DE FRONTERA O CONTORNO**



Situación real de como varía una propiedad en una superficie de discontinuidad entre dos medios



Situación idealizada considerada para establecer las condiciones de frontera



CONVENCIÓN DE SIGNOS

Definición de la normal a la superficie de discontinuidad

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_{\text{de 1 a 2}}$$

Condiciones de contorno para el campo eléctrico La divergencia y las componentes normales

Combinamos: - la ley de Coulomb en forma diferencial $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

- Teorema de la Divergencia

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\tau$$

Calculamos el flujo a través de una superficie cerrada que encierra la superficie de discontinuidad entre dos medios (un cilindro con sus paralelas a la superficie de discontinuidad). **Desarrollo en pizarra (libro)**

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA PARA
LAS COMPONENTES NORMALES
DE E

Existe una discontinuidad en las componentes normales sólo si en la superficie de discontinuidad hay una densidad de carga.

VÁLIDO BAJO CUALQUIER CIRCUNSTANCIA

Condiciones de contorno para el campo eléctrico: el rotacional y las componentes tangenciales

Combinamos: - $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

- Teorema de la Stokes
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) d\vec{a}$$

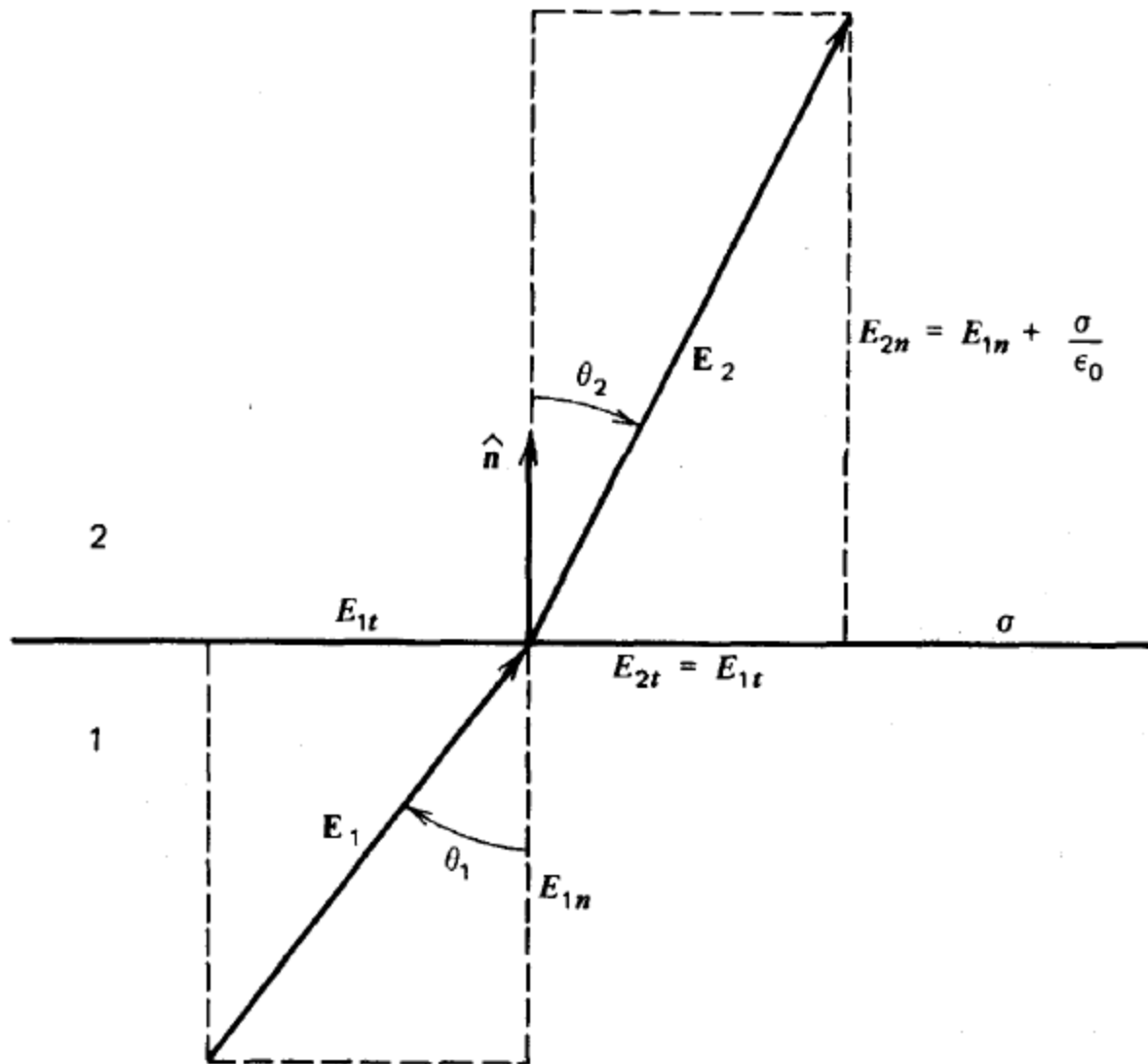
Calculamos la circulación a través de una trayectoria cerrada C que encierra un trozo de la línea de unión entre dos medios (un rectángulo tal que el área que encierra es perpendicular a la superficie de discontinuidad). **Desarrollo en pizarra (libro)**

Las componentes tangenciales de \mathbf{E} no cambian (son continuas) al pasar de un medio a otro. **VERDADERO BAJO CUALQUIER CIRCUNSTANCIA**

$$\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = 0$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA PARA LAS COMPONENTES TANGENCIALES DE \mathbf{E}



Condiciones de contorno para el potencial

Si ϕ_1 y ϕ_2 son los potenciales en cada lado de la superficie de discontinuidad

$$\phi_2 - \phi_1 = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

La integración es sobre una trayectoria conveniente que atraviese la superficie de discontinuidad. Si se elige una trayectoria normal a la superficie

$$\phi_2 - \phi_1 = - \int_1^2 E_n ds = - \langle E_n \rangle h$$

\downarrow

Promedio de la E_n en la capa de transición entre los dos medios (anchura h). Siempre finito

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle E_n \rangle h = 0$$



$$\phi_2 = \phi_1$$

**CONDICIÓN DE FRONTERA
PARA EL POTENCIAL**

El potencial es continuo a través de la discontinuidad, pero las derivadas del potencial normales a la superficie no necesariamente lo son!!

$$E_n = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi)_2 - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi)_1 = - \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

**CONDICIÓN DE FRONTERA
PARA LAS DERIVADAS
DEL POTENCIAL**

Condiciones de contorno para el campo \mathbf{D} (generales, cualquier tipo material)

$$\left. \begin{array}{l} E_{2t} = E_{1t} \\ \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \end{array} \right\} \boxed{\mathbf{D}_{2t} - \mathbf{D}_{1t} = \mathbf{P}_{2t} - \mathbf{P}_{1t}}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA
PARA LAS COMPONENTES
TANGENCIALES DE \mathbf{D}

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \text{Por similitud como campo } \mathbf{E} \end{array} \right\} \boxed{\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA
PARA LAS COMPONENTES
NORMALES DE \mathbf{D}

Densidad de carga libre superficial

Condiciones de contorno: medios isotrópicos, homogéneos y lineales

$$E_{2t} = E_{1t}$$

En la condición de contorno de **D** general

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$

Introducimos que para medios ihl se cumple: **D** = ϵ **E**

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) = \sigma_f$$

En este caso se puede poner la condición de frontera con **E** (en lugar de con **D**)