Osciladores Acoplados

-

Práctica II

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Mecánica Analítica

Autor: Álex Méndez Jover
DNI: 50507356T
Estudios: 2º Grado de Física
Grupo: L3

Índice

1. **Fundamento teórico** pág. 3

2. **Parte A: Dinámica del sistema** pág. 5

    2.1 **Osciladores acoplados con k’ = 0,1** pág. 5

    2.2 **Osciladores acoplados con k’ = 0,5** pág. 7

    2.3 **Osciladores acoplados con k’ = 1** pág. 8

    2.4 **Comentario sobre el valor de k’** pág.10

3. **Parte B: Modos normales** pág. 11

    3.1 **Modo simétrico** pág. 11

    3.2 **Modo antisimétrico** pág. 13

4. **Parte C: Transformada de Fourier** pág. 15

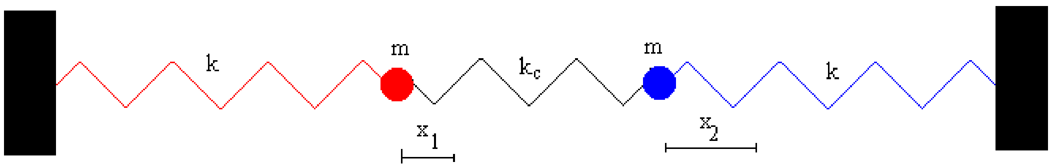
5. **Ampliación. Gravedad.** pág. 18

6. **Conclusión** pág. 20

7. **Bibliografía** pág.20

1. Fundamento teórico.

En esta práctica estudiaremos el comportamiento de un sistema formado por 2 masas de mismo valor y tres muelles. Los muelles de los extremos tendrán la misma constante elástica mientras que el muelle que une las masas tendrá una constante diferente.



Partiendo esta visión del sistema vamos a tratar de explicarlo matemáticamente.

Consideramos un problema unidimensional y su movimiento se da en el eje x. Tomaremos como origen de coordenadas el extremo izquierdo del sistema. Partiendo de esto definimos x = a y x = b como las posiciones de equilibrio de las masas. Se trata de un sistema con 2 grados de libertad x1 y x2 que medimos a partir de su posición de equilibrio. Veamos las fuerzas que actúan sobre el sistema.

$$m\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + (k + k')x_2 - k'x_1 = 0$$

Si proponemos una solución que tenga la forma:

$$x_1(t) = B_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2(t) = B_2 e^{i\omega t}$$

Tendrá que cumplirse lo siguiente:

$$\omega = \sqrt{\frac{k + k' \pm k'}{m}}$$

Por lo que habrá dos soluciones posibles:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}; \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Estas dos soluciones son los dos modos de oscilación que caracterizan al sistema.

Por otro lado, nos interesa conocer las coordenadas normales que corresponden a los modos de oscilación propios del sistema. Para ello realizamos un cambio de coordenadas:

$$\eta_1 = x_1 + x_2$$

$$\eta_2 = x_1 - x_2$$

De esta forma las ecuaciones del movimiento serán las siguientes:

$$m\ddot{\eta}_1 + (k + 2k')\eta_1 = 0$$
$$m\ddot{\eta}_2 + k\eta_2 = 0$$

Como se observa, ninguna de las dos ecuaciones tiene términos que dependan de la otra ecuación, lo que hace que la resolución del sistema sea más sencilla.

A partir de ellas obtendremos dos frecuencias, ω_1 y ω_2 . Es decir, un movimiento armónico por cada una de ellas. Vamos a imponer condiciones iniciales diferentes para obtener dos modos distintos: el modo antisimétrico y el modo simétrico.

Imponiendo condiciones iniciales:

$$x_1(0) = -x_2(0)$$

$$\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$$

Obtendremos que

$$\eta_2(t) = 0 \ \forall t$$

Este movimiento se llama modo normal antisimétrico de oscilación, donde las masas se impulsan con frecuencia ω_1 en oposición de fase.

Si imponemos las condiciones iniciales:

$$x_1(0) = x_2(0)$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$$

Entonces:

$$\eta_2(t) = 0 \ \forall t$$

Este movimiento se llama modo normal simétrico de oscilación, donde las masas se impulsan con frecuencia ω_2 en fase.

El movimiento de nuestro sistema quedará determinado por una combinación lineal de estos dos modos normales. Quedándonos con las componentes reales obtendremos que el movimiento viene definido por:

$$x_1(t) = A_0^1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_0^2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = A_0^1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - A_0^2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

2. Parte A: Dinámica del sistema.

Para este apartado debemos tener en cuenta los siguientes valores:

$$k = 10$$

$$m_1 = m_2 = 1Kg$$

$$a = 1$$

$$x_1(0) = 0{,}1\, m\, ;\;\; x_2(0) = 0\, m$$

$$\dot{x_1}(0) = \dot{x_2}(0) = 0\, \frac{m}{s}$$

2.1 Osciladores acoplados con $k' = 0,1$

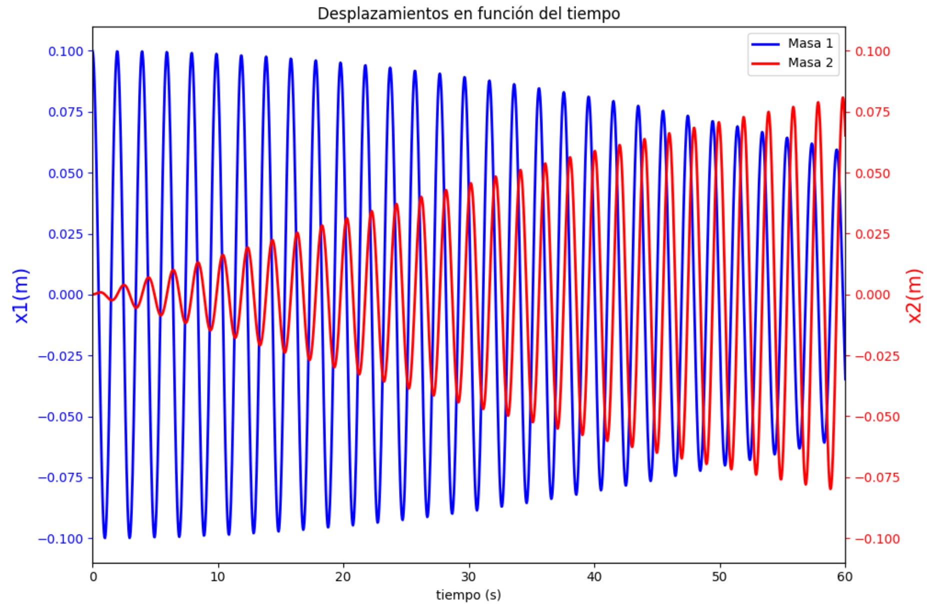


Ilustración 1: Desplazamiento en función del tiempo ($k' = 0.1$).

La gráfica representa la evolución de las posiciones de ambas masas en función del tiempo. Ambas masas parten del reposo. La primera de ellas desplazada 0.1 m de su posición de equilibrio. Se observa como a medida que avanza el tiempo, la amplitud de la masa 2 aumenta mientras que la amplitud de la masa 1 disminuye. Para observar mejor este fenómeno podemos graficar las energías totales de cada partícula:

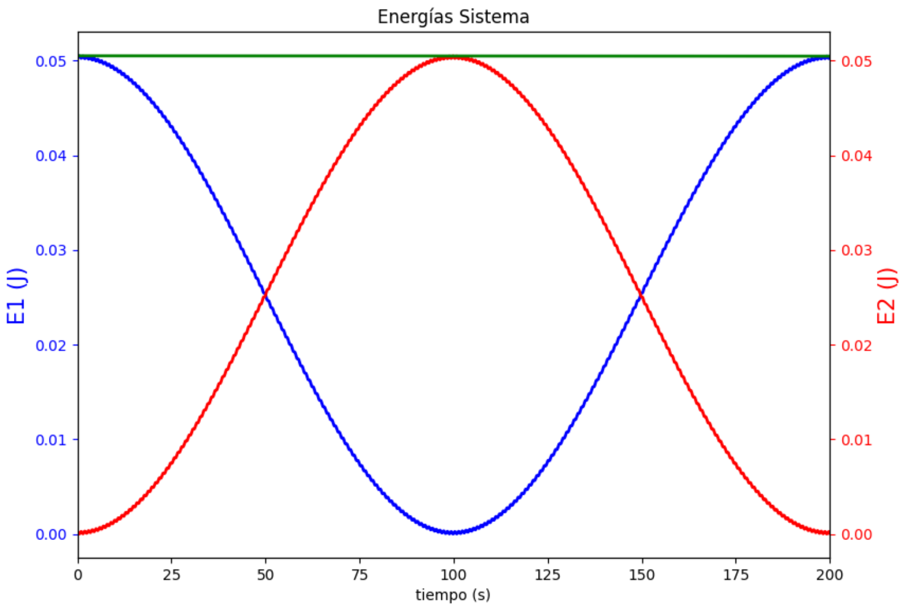


Ilustración 2: Energías totales masa 1 y 2 en función del tiempo (k = 0,1).

Aquí si se ve claramente como la energía que va perdiendo la masa 1 (azul) la gana la masa 2 (rojo). Esto da lugar a la conservación de la energía mecánica (verde).

Veamos cómo queda el diagrama, pero fijándonos en la energía cinética y potencial total del sistema:

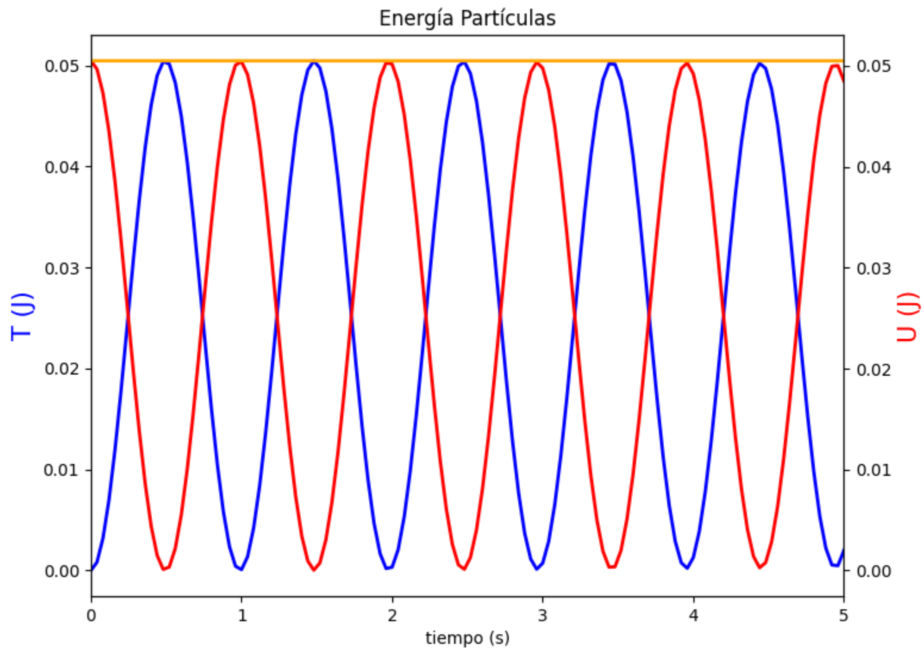


Ilustración 3: Energía cinética y potencial total sistema (k = 0,1).

Disminuyendo el tiempo de simulación para poder observar con claridad lo que ocurre, nos damos cuenta de que la energía cinética y potencial del sistema están en contrafase. Cuando la potencial alcanza su máximo, la cinética alcanza su mínimo y viceversa. En cualquier caso, la energía mecánica se conserva.

2.2 Osciladores acoplados con $k' = 0,5$

Veamos como se comporta nuestro sistema con un valor de constante elástica, del muelle que une las masas, mayor.

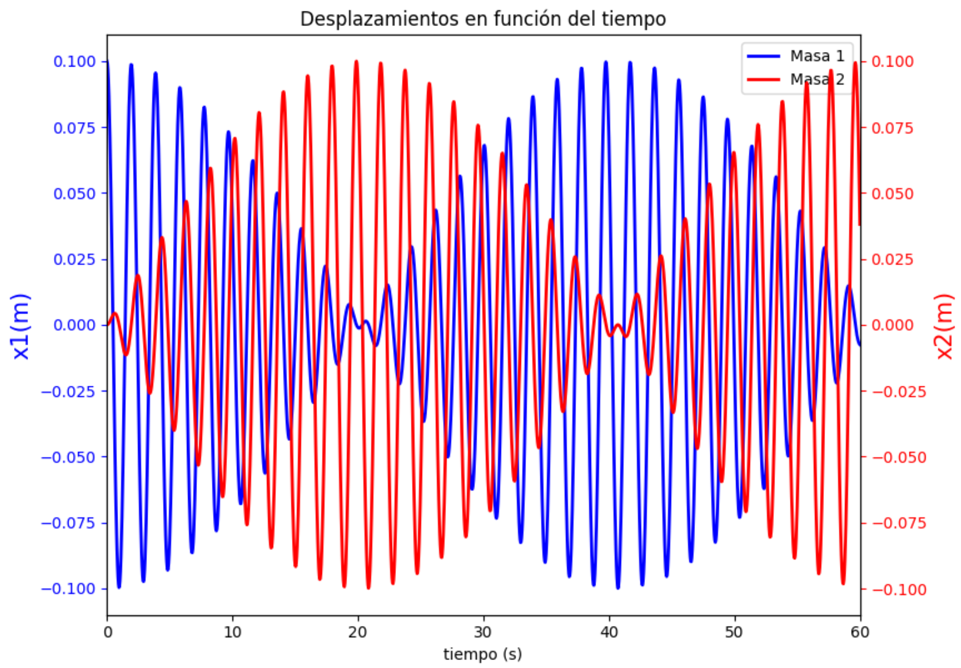


Ilustración 4:Desplazamiento en función del tiempo (k'=0,5).

Como podemos observar en la ilustración, para el mismo tiempo de simulación que el apartado anterior vemos un mayor cambio en el movimiento de nuestro sistema. Si nos fijamos, aproximadamente alrededor de t = 20 s, mientras que la masa 1 apenas llega a oscilar la masa 2 alcanza sus máximos de amplitud de forma brusca. Lo mismo ocurre en un intervalo de tiempo alrededor de los 40 segundos.

Veamos el comportamiento del sistema bajo la representación energética:

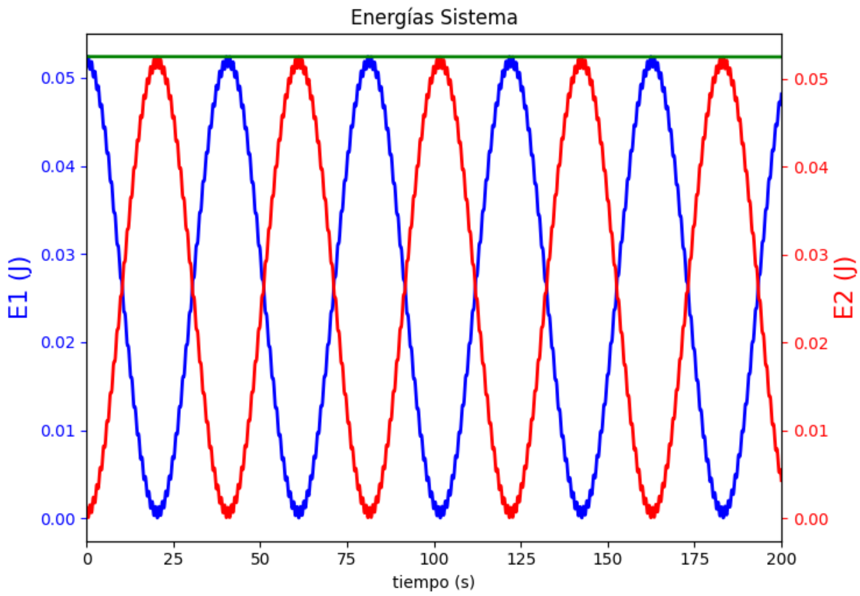


Ilustración 5: Energías totales masa 1 y 2 en función del tiempo (k = 0.5).

Nuevamente la energía se encuentra en contrafase. La masa 1 otorga su energía a la masa 2. Mientras la masa 1 deja de vibrar, la otra masa alcanza su energía total máxima y viceversa.

2.3 Osciladores acoplados con $k' = 1$

Siguiendo el mismo orden que en los casos anteriores obtenemos las siguientes gráficas:

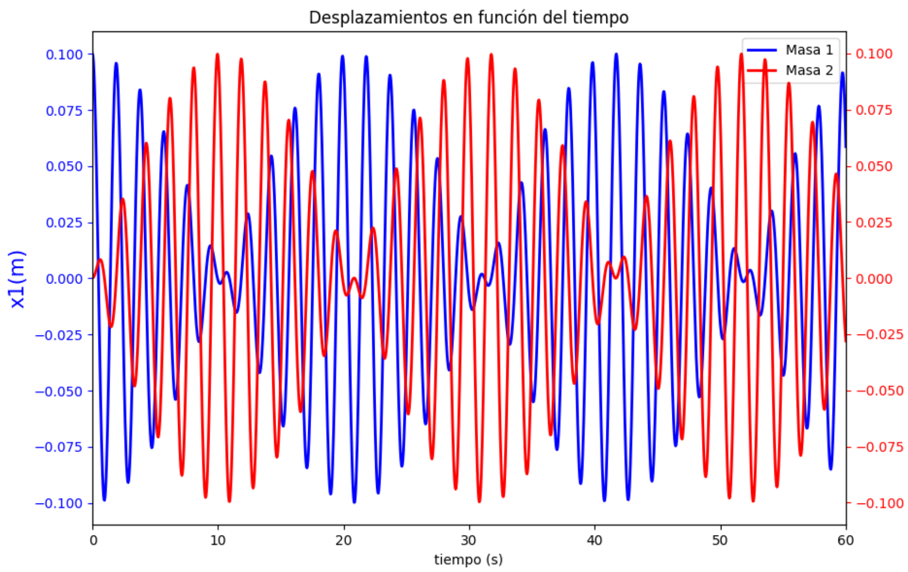


Ilustración 6: Desplazamiento en función del tiempo (k'=1).

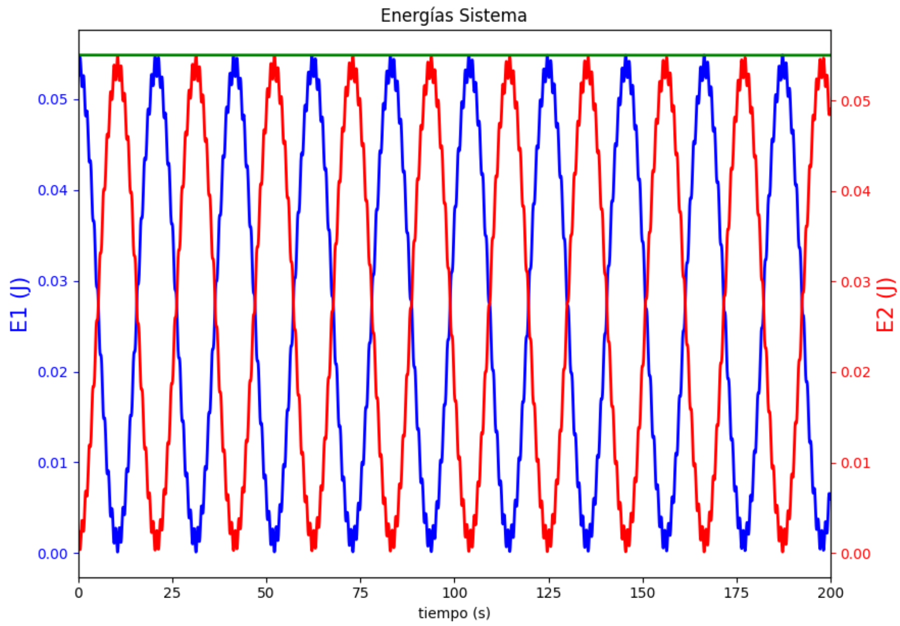


Ilustración 7: Energías totales masa 1 y 2 en función del tiempo (k = 1).

Nuevamente podemos ver que el resultado obtenido, tanto para el desplazamiento como las energías con un k' mayor que los escogidos anteriormente, es muy parecido.

2.4 Osciladores acoplados con $k' = 0,01$

Este apartado se centra en el estudio del acoplamiento débil, ya que $k' = 0{,}001 \lll k = 10$

Veamos las gráficas que obtenemos con esta condición de constante elástica:

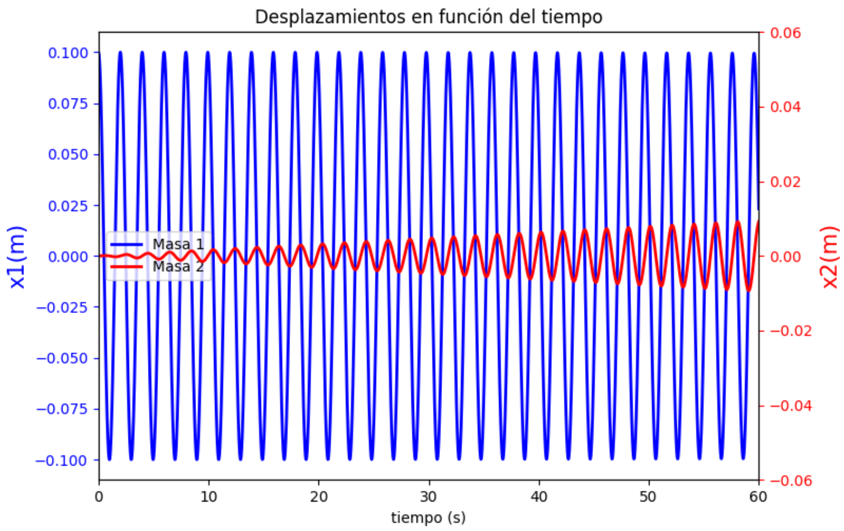


Ilustración 8:Desplazamiento en función del tiempo (k'=0,01).

En esta ocasión la constante elástica del muelle que une las dos masas es mucho menor que la constante de los muelles externos que unen las masas a los puntos fijos. Fijándonos en la ilustración 8 podemos ver como la masa 1 prácticamente oscila entre valores constantes de amplitud. Por otro lado, esto queda reflejado también en la masa 2 (rojo) ya que, si nos fijamos en el eje Y de la derecha a medida que avanza el tiempo, la amplitud ni si quiera alcanza 0.02 metros.

Podemos aproximar nuestro movimiento por un movimiento armónico simple, ya que si nos fijamos en los valores que toma a la amplitud de la masa 1 se mantiene prácticamente invariable. Este movimiento es el que conocemos como latido o pulso de batido.

En Python, mediante la función "find_peaks" podemos obtener la posición en la que se encuentran los máximos de nuestra masa 1. De esta forma y haciendo la resta entre el tiempo en el que se alcanza el primer pico y el segundo pico podemos obtener el periodo. En este caso el resultado numérico que nos queda es el siguiente:

$$T = 1.98\ s$$

Veamos el valor obtenido si lo hacemos analíticamente:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} = \sqrt{\frac{10 + 2 \cdot 0.01}{1}} = 3{,}16 \frac{rad}{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3.16} = 1{,}98\ s$$

Por lo que el periodo de oscilación obtenido de forma numérica es una aproximación precisa.

Veamos ahora el periodo de batido. Lo calcularé analíticamente, ya que para hacerlo de forma numérica tendría que tomar el intervalo de tiempo que analizamos y dividirlo entre el número de veces que se repite el patrón de batido.

$$T = \frac{2\pi}{\varepsilon\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{k'}{2k} \cdot \omega_0} = 3976{,}699\ s$$

2.5 Comentario sobre valor de k'

Finalmente podemos decir que las masas oscilan con una mayor frecuencia cuanto más grande es la constante k'. En cada uno de los casos ocurre lo mismo, cuando una de las masas ha perdido toda su energía la otra llega a la máxima y así sucesivamente.

Por otro lado, para un mismo intervalo de tiempo, cuando k' toma valores mayores el número de veces que se intercambia la energía entre partículas es mayor que en casos en los que k' toma valores más pequeños. Esto queda representado en las ilustraciones 2, 5 y 7.

3. Parte B: Modos normales.

A partir de los cálculos hechos en el fundamento teórico, realizaremos el estudio sistema con 2 modos: simétrico y antisimétrico. Para el estudio tomaré la constante elástica siguientes:

$$k' = 0{,}5 \;\; y \; k = 10$$

3.1 Modo simétrico

Excitando el modo simétrico con las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = 0{,}1\, m\,; \;\; x_2(0) = 0{,}1\, m$$

$$\dot{x_1}(0) = 1\frac{m}{s}\; ; \; \dot{x_2}(0) = 1\frac{m}{s}$$

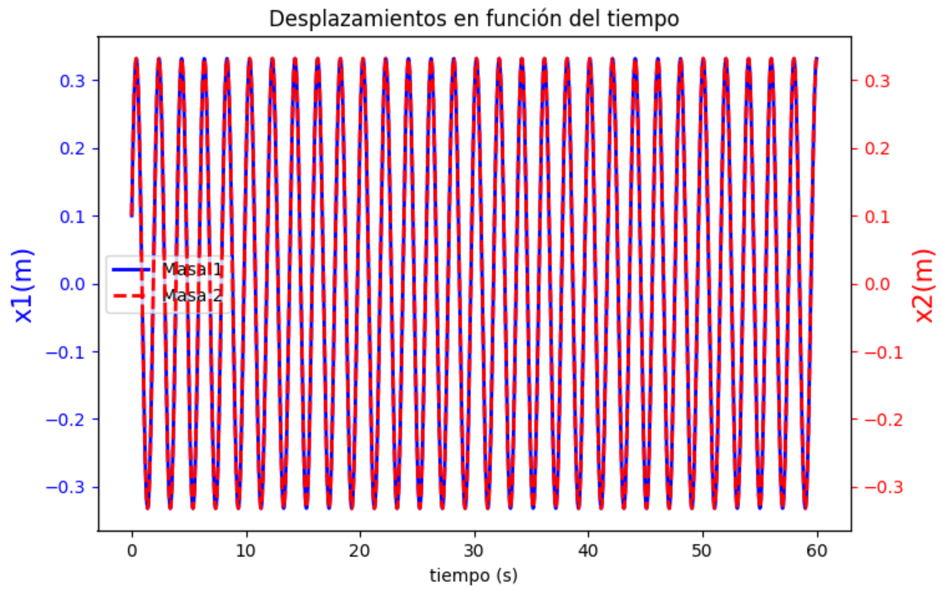


Ilustración 9: Desplazamiento en función del tiempo (Simétrico).

Como se observa en la gráfica ambos cuerpos oscilan en fase. Ambas parten con la misma velocidad inicial y se encuentran desplazadas en el mismo sentido y la misma distancia de su posición de equilibrio. Por ello cuando una de las masas comprime el muelle que la une al punto fijo, la otra estira el muelle que la une al otro punto fijo la misma distancia. Esto provoca que la interacción sobre el muelle que une ambas masas sea casi nula y su longitud no se vea modifica.

Desde el punto de vista energético:

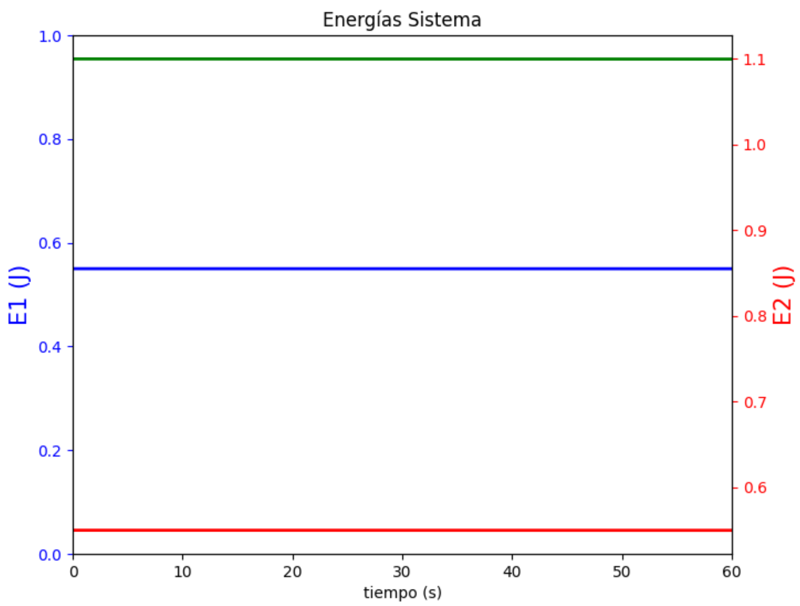


Ilustración 10: Energías totales sistema modo simétrico.

Observando la ilustración 10 vemos como las energías para ambas partículas se mantiene constante, verificando lo que ocurre en la ilustración 9. De esta manera podemos decir que cada una de las partículas se comporta como si se tratase de un movimiento armónico simple.

Para el cálculo de la frecuencia angular hemos utilizado de nuevo la función “find_peaks”. El resultado numérico de la frecuencia angular es el siguiente:

$$\omega_{numérica} = 3{,}1623$$

Mientras que al calcularla analíticamente el resultado que obtenemos es:

$$\omega_{analítica} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3{,}1622\ s$$

$Frecuencia\ Angular \left[\frac{rad}{s}\right]$	
Resultado Analítico	3,1622
Resultado numérico	3,1623

Tabla 1: Modo Simétrico.

Podemos decir que el cálculo numérico es una muy buena aproximación al comportamiento teórico del sistema.

3.2 Modo antisimétrico

El modo antisimétrico lo excitaremos mediante las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = 0{,}1\ m\,;\ \ x_2(0) = -0{,}1\ m$$

$$\dot{x_1}(0) = -1\frac{m}{s}\ ;\ \dot{x_2}(0) = 1\frac{m}{s}$$

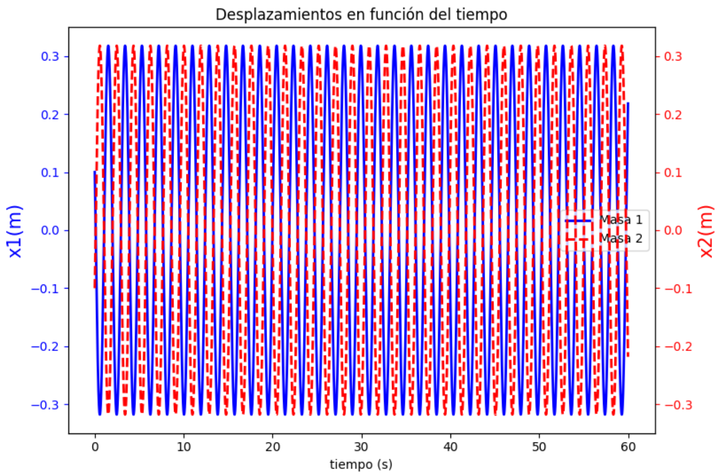


Ilustración 11: Desplazamiento en función del tiempo (Antisimétrico).

Como representa la ilustración 11, en esta ocasión las masas se encuentran en contrafase, es decir, cuando una de las masas alcanza su máxima amplitud en la parte positiva, la otra alcanza su máximo en la parte negativa. Respecto a las energías ocurre lo siguiente:

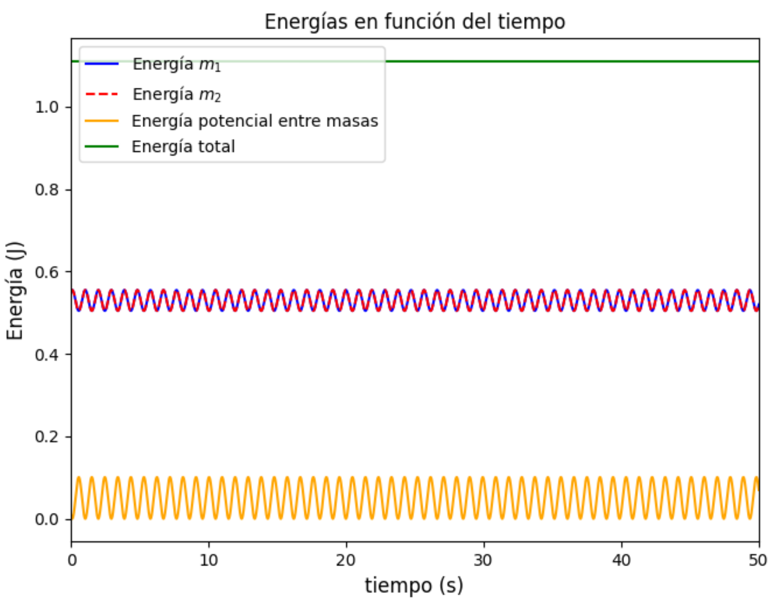


Ilustración 12: Energías Sistema.

En esta ocasión la energía se sigue manteniendo constante, sin embargo, la energía potencial que hay entre las masas se mantiene oscilando; ambas energías la de la masa 1 y masa 2 serán iguales oscilando 2 amplitudes al igual que la potencial entre masas. Cuando las energías de ambas masas toman el valor más pequeño, la potencial entre masas toma su máximo y viceversa. Todo ello haciendo que la energía total del sistema se mantenga constante.

El valor numérico de la frecuencia queda:

$$\omega_{numérica} = 3{,}3165 \frac{rad}{s}$$

Mientras que al calcularla analíticamente el resultado que obtenemos es:

$$\omega_{analítica} = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} = 3,3166s$$

Finalmente obtenemos:

$Frecuencia\ angular\ \left[\frac{rad}{s}\right]$	
Resultado Analítico	3,3166
Resultado numérico	3,3165

Tabla 2: Modo Antisimétrico.

4. Parte C: Transformada de Fourier.

Para este apartado aplicaremos la transformada de Fourier para los casos que hemos analizado en la parte A. Después analizaremos uno de los casos excitando primero el modo normal simétrico y luego el antisimétrico.

- $\underline{\boldsymbol{k' = 0,1}}$

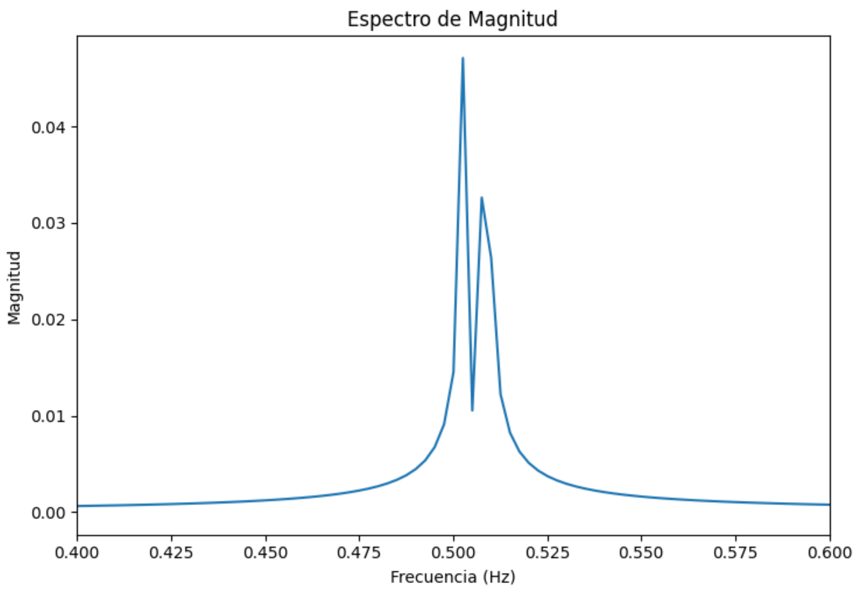


Ilustración 13: Transformada Fourier (k' = 0.1)

- $\underline{\boldsymbol{k' = 0,5}}$

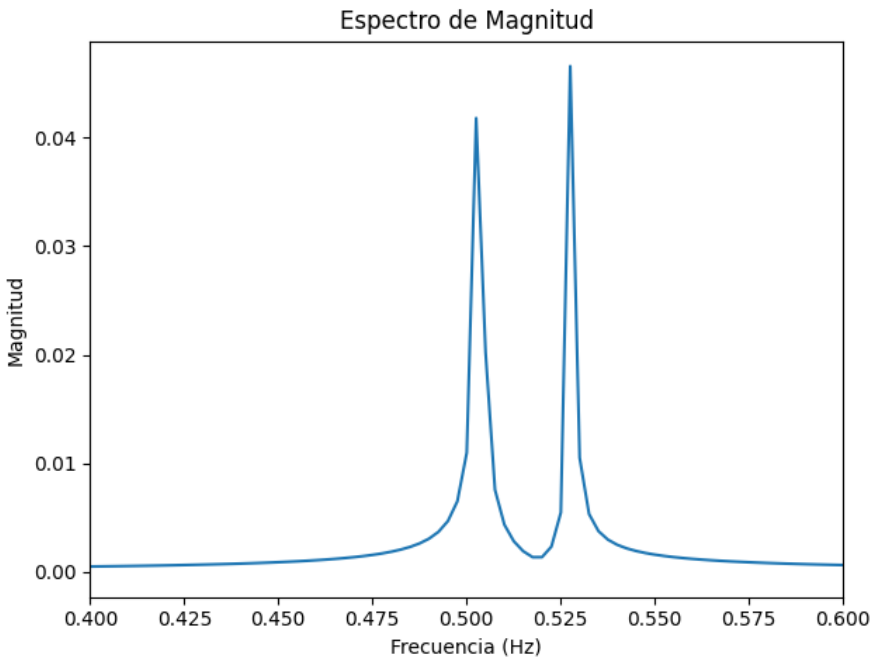


Ilustración 14:Transformada Fourier (k' = 0.5).

- **$k' = 1$**

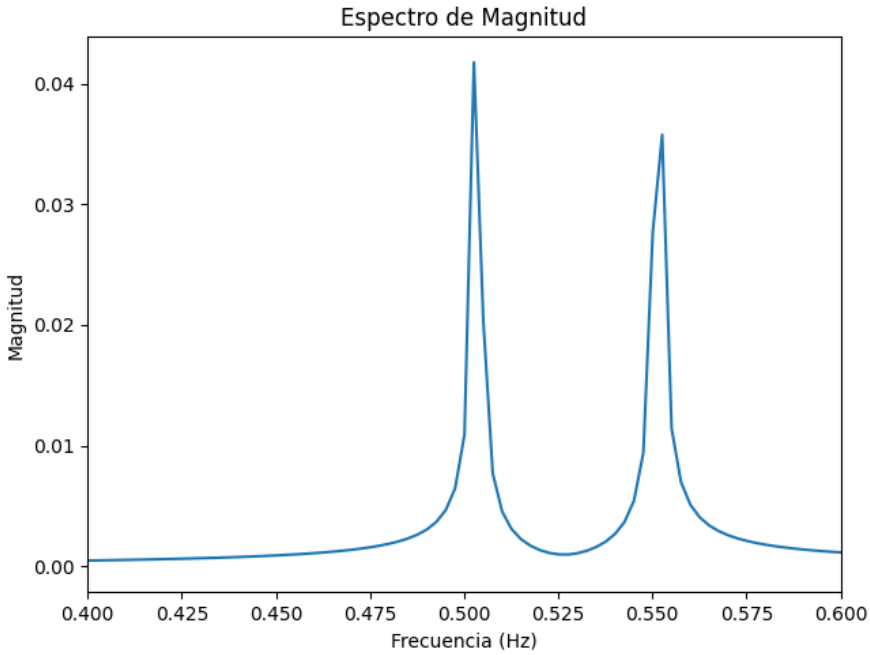


Ilustración 15: Transformada Fourier (k' = 1)

Como podemos observar, en los tres casos hemos obtenido 2 picos de frecuencias a partir de la transformada de Fourier independientemente del valor de la constante elástica que une las masas.

Veamos que ocurre si para uno de los casos excitamos el modo simétrico y antisimétrico. Tomaré k = 1

- **$k' = 1$ (Modo simétrico)**

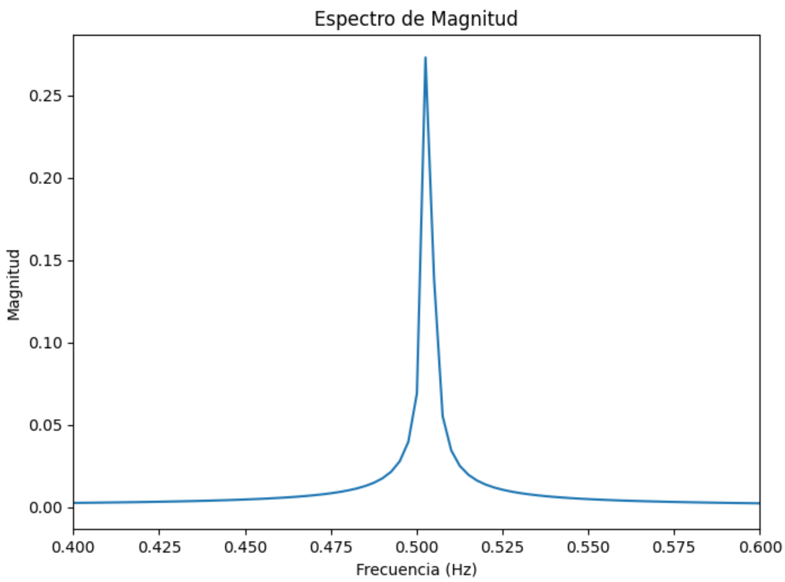


Ilustración 16: Transformada de Fourier (Simétrico)

- **$k' = 1$ (Modo antisimétrico)**

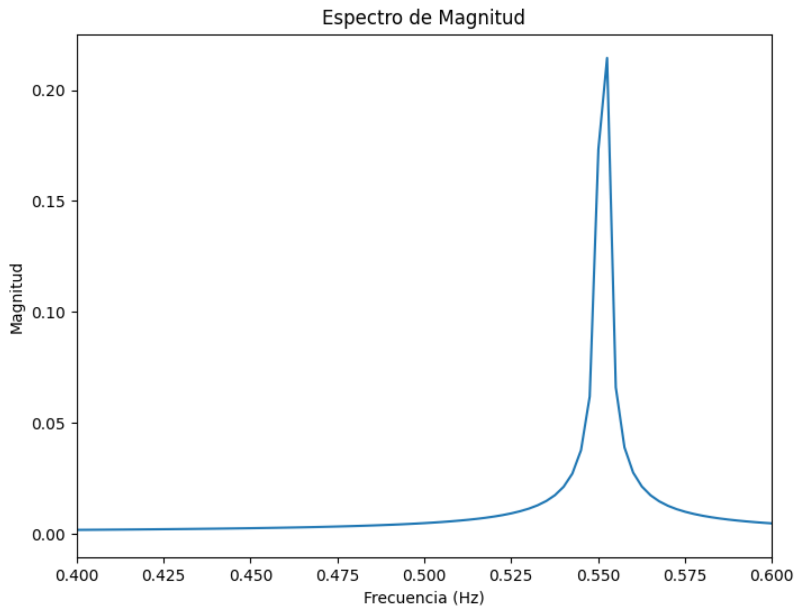


Ilustración 17: Transformada de Fourier (antisimétrico)

Como podemos observar en las ilustraciones 13, 14 y 15 obtenemos dos frecuencias. Esto tiene sentido ya que al poder describir el movimiento como la combinación lineal de los dos modos característicos del sistema obtenemos dos velocidades angulares dando lugar a dos frecuencias diferentes. Además, estas dos velocidades angulares dependerán del valor de k' y teniendo en cuenta que:

$$\omega = 2\pi f$$

se justifica esa diferencia en el valor de la frecuencia en las gráficas para diferentes valores de k'.

Respecto a las ilustraciones 16 y 17, podemos ver una clara diferencia con la ilustración 15, ya que obtenemos un solo pico. Esto es debido a que hemos excitado el modo simétrico y antisimétrico, lo que hace que ambas masas estén en fase y se muevan con la misma frecuencia angular, lo que se traduce en un único pico.

De hecho, si vamos más allá en el análisis de las gráficas nos damos cuenta de que el pico de la ilustración 16 coincide con el primer pico de la ilustración 15 mientras que el pico de la ilustración 17 coincide con el segundo pico de la 15. La única diferencia que hay es la magnitud de estos picos. Es decir, el valor de la transformada de Fourier en el caso de excitar los modos normales es mucho mayor que en el otro caso.

En resumen, representando la transformada de Fourier para una k' concreta donde el movimiento del sistema no sea excitando uno de los modos normales, obtendremos 2 picos; el primero será el del modo simétrico y el segundo el del modo antisimétrico.

5. Ampliación. Gravedad.

Para este apartado añadiré la condición de que el sistema se encuentra bajo efecto de la fuerza de la gravedad. De esta manera debemos introducir la energía potencial gravitatoria a nuestro sistema de ecuaciones a resolver para obtener las ecuaciones del movimiento.

Partiendo de $F + P = m \cdot a$; llegaremos a:

$$\ddot{x_1} = \frac{-kx_1 + k'(x_2 - x_1) + m \cdot g}{m}$$

$$\ddot{x_2} = \frac{-kx_2 - k'(x_2 - x_1) + m \cdot g}{m}$$

Resolviendo obtendríamos el movimiento del sistema.

Debemos tener en cuenta que hay que añadir el potencial gravitatorio:

$$U = mgh$$

Además, cogeremos unas constantes de muelle que no cedan rápidamente y que terminen por quedarse estáticos; queremos que oscilen repetidamente.

Los valores que le damos a nuestro sistema serán los siguientes

$$constante\ elástica\ muelles\ externos \rightarrow k = 45$$

$$constante\ elástica\ muelle\ central \rightarrow k' = 15$$

$$masas \rightarrow m = 1\ Kg$$

$$Posiciones\ equilibrio\ masas \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Daremos las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = 0{,}1\ m\ ;\ \ x_2(0) = 0\ m$$

$$\dot{x_1}(0) = \dot{x_2}(0) = 0\,\frac{m}{s}$$

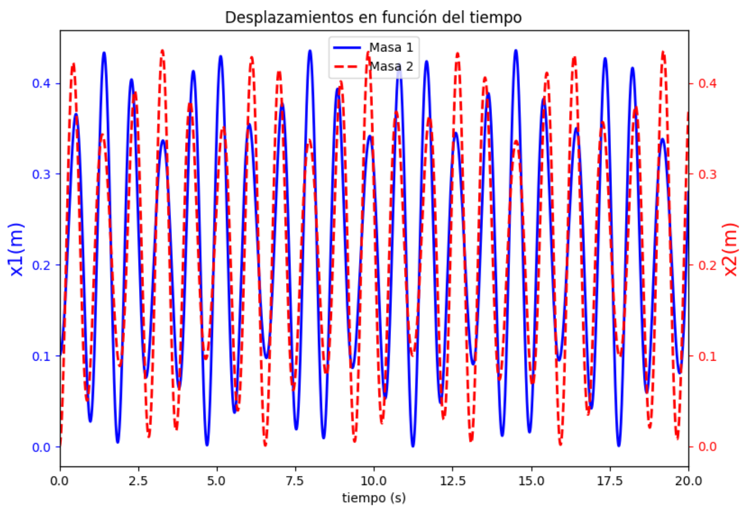


Ilustración 18: Desplazamiento en función del tiempo.

Como podemos ver en la gráfica a pesar de que las amplitudes para el mismo valor de tiempo no son iguales, si podemos ver que se encuentran en fase, cuando la masa 1 alcanza su máximo de amplitud positivo también lo hace la masa 2. Esto es debido a que nuestro sistema se encuentra bajo la acción de la fuerza gravitatoria que es muy notable en estos casos.

Las gráficas de la energía cinética del sistema:

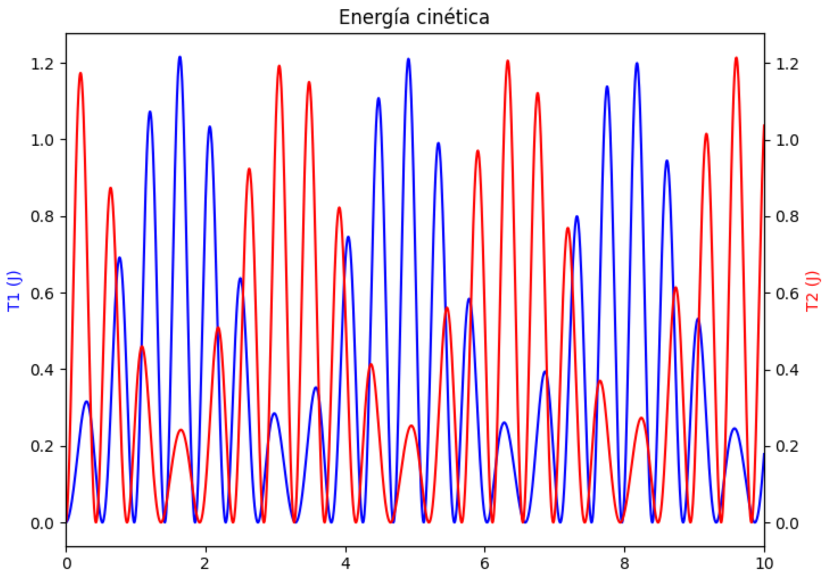


Ilustración 19: Energía cinética sistema con gravedad

En la gráfica se representa la energía cinética de la masa 1 (azul) y la masa 2 (rojo). Podemos ver cómo ambas parten del reposo. Y además si comparamos con la ilustración18 podemos ver cómo cuando las masas alcanzan un máximo, la energía cinética se anula.

Por otro lado, si graficamos las energías potenciales del sistema:

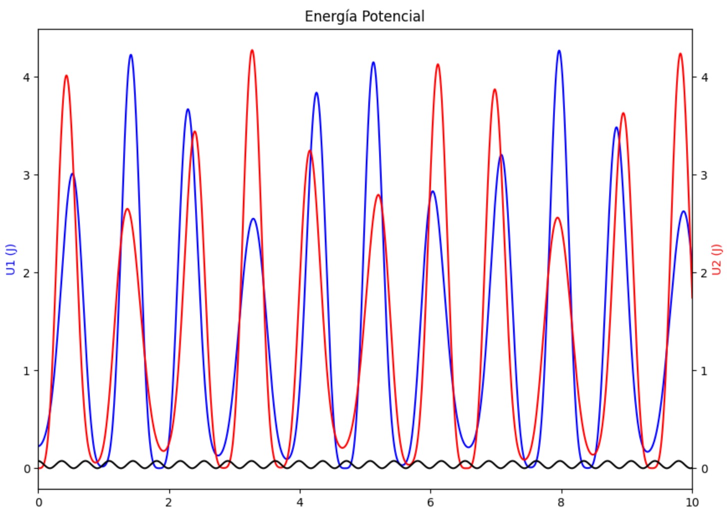


Ilustración 20: Energía potencial sistema con gravedad.

En esta gráfica podemos observar como la energía potencial de ambas masas es bastante mayor que la energía potencial del muelle que une ambas. Esto es debido a que hemos considerado las masas de los muelles despreciable y por lo tanto la energía potencial total de éste no incluye la fuerza gravitatoria actuando sobre él. Además de la masa, hay que tener en cuenta que la constante del muelle que las une es menor que el que sujeta las masas a los extremos.

6. Conclusión.

Tras haber completado cada uno de los apartados y haber dado una explicación al movimiento de nuestro sistema llegamos a la siguiente conclusión.

En primer lugar, hemos observado como varía nuestro sistema en función de los valores que le demos a las constantes elásticas. La constante elástica que une ambas masas tiene un gran efecto sobre el movimiento, cuanto mayor sea su valor, mayor intercambio de energía habrá entre las partículas, y el periodo de oscilación será menor.

Por otro lado, hemos tratado el movimiento de nuestro sistema excitando sus modos normales observando las masas en fase y contrafase dependiendo del si el modo es simétrico o antisimétrico. Además, junto a la transformada de Fourier nos ha hecho ver como el movimiento del sistema es la combinación lineal de ambos modos.

Finalmente hemos tratado de modificar nuestro sistema añadiendo la fuerza gravitatoria. Para ello hemos considerado que nuestro sistema está en "vertical" y sobre las masas actúa la gravedad.

7. Bibliografía.

- Tipler, P. A., & Mosca, G. (2018). Física para la ciencia y la tecnología (Vol. 1). Editorial Reverté.
- Goldstein, H., Poole, C. P., & Safko. Mecánica Clásica.
- http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/acoplados/acoplados.html
- Apuntes "Guión_práctica 2"