



## Electromagnetismo II

### Tema 3. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

- 1.- Escribir las ecuaciones de los campos (reales) eléctrico y magnético para una onda plana sinusoidal monocromática de amplitud  $E_0$ , frecuencia  $\omega$  y ángulo de fase cero, en las siguientes situaciones:
- (a) Propagándose en la dirección  $x$ , sentido negativo, y polarizada en la dirección  $z$ .
  - (b) Propagándose en la dirección que va desde el origen hasta el punto  $(1,1,1)$ , con polarización paralela a la plano  $xz$ .
- En cada caso hacer un dibujo de la onda y dar las coordenadas cartesianas del vector de onda  $\mathbf{k}$  y del vector de polarización  $\mathbf{n}$ .

- 2.- El campo magnético de una onda electromagnética plana que se propaga en el vacío es de la forma:

$$\vec{\mathbf{B}} = -B_0 \sin(kz - \omega t) \hat{\mathbf{u}}_x + B_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{u}}_y$$

Determinar las expresiones del campo eléctrico y del vector de Poynting.

- 3.- Encontrar todos los elementos del tensor de tensiones de Maxwell para una onda electromagnética plana de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $E_0$  que se propaga en la dirección del eje  $z$  y está linealmente polarizada en la dirección del eje  $x$ . ¿Tiene sentido el valor obtenido? ¿Cómo está relacionada la densidad de flujo de momento con la densidad de energía en este caso?
- 4.- Dos ondas planas sinusoidales, de igual frecuencia y amplitud, polarizadas en el mismo plano, se propagan en sentidos opuestos según el eje  $x$ . Determinar en función de  $t$  y  $x$ :
- (a) Los campos eléctricos y magnéticos y el vector de Poynting.
  - (b) Los valores medios de estas magnitudes así como los valores medios de  $E^2$  y  $H^2$ .
- 5.- Una onda electromagnética plana se propaga en el espacio libre en la dirección positiva del eje  $x$ , tiene una intensidad máxima del campo eléctrico de  $6 \times 10^3$  V/m y una longitud de onda  $\lambda = 2$  m. Si la onda está polarizada linealmente según el eje  $y$ , determinar:
- (a) Las expresiones de los campos eléctrico y magnético que describen la onda.
  - (b) El vector de Poynting, la densidad de momento lineal y la densidad de energía de la onda electromagnética.
  - (c) La intensidad media de energía que transporta la onda y la presión de radiación si la onda incide perpendicularmente sobre una superficie absorbente perfecta. ¿Cómo se modificaría la expresión de la presión de radiación si la incidencia de la onda electromagnética sobre la superficie fuera oblicua?
- 6.- El vector de Poynting de una onda electromagnética plana que se propaga en el espacio libre viene dado por la expresión:

$$\vec{\mathbf{S}}(z, t) = 100 \cos^2(10z - 3 \times 10^9 t) \hat{\mathbf{u}}_z \quad (\text{S.I.})$$

Sabiendo que la onda está polarizada según el eje  $x$ , determinar:

- (a) La dirección de propagación de la onda, la longitud de onda y su frecuencia.

- (b) Las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético, tanto en su forma real como compleja.
- (c) Las densidades de energía y de momento lineal electromagnético de la onda instantáneas y medias.
- (d) El vector de Poynting complejo.

7.- Una antena de radiodifusión emite isotrópicamente a 100 kHz con una potencia de 60 kW. Determinar:

- (a) El número de onda y la frecuencia angular de las ondas radiadas.
- (b) La intensidad media de la onda a una distancia de 6 km de la antena.
- (c) La presión de radiación a esa distancia
- (d) Los valores máximos de los campos eléctrico y magnético.

8.- Supongamos un campo eléctrico de la forma:

$$\vec{E}(r, \theta, \phi, t) = A \frac{\sin \theta}{r} \left[ \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \hat{\phi} \quad \text{con} \quad \frac{\omega}{k} = c$$

(Esta expresión corresponde a la onda esférica más sencilla posible. Por conveniencia, se sugiere escribir  $(kr - \omega t) \equiv u$  en los cálculos).

- (a) Mostrar que  $\vec{E}$  obedece las cuatro ecuaciones de Maxwell en el vacío y encontrar el campo magnético asociado.
- (b) Calcular el vector de Poynting. Hacer el promedio del vector de Poynting para un periodo completo para encontrar el vector intensidad  $\vec{I}$ .
- (c) Integrar  $\vec{I} \cdot d\vec{a}$  ( $\vec{a}$ , vector área) sobre una superficie esférica para determinar la potencia total radiada.

9.- Un haz colimado proveniente de un láser de He-Ne de longitud de onda 632.8 nm y polarizado linealmente, incide normalmente sobre una superficie totalmente absorbente. El haz tiene una potencia media de 15 mW y una sección circular de 2 mm de diámetro. Determinar:

- (a) Las amplitudes de los campos eléctrico y magnético.
- (b) La energía electromagnética por unidad de longitud del haz.
- (c) La fuerza que ejerce el haz sobre la superficie absorbente.

10.- Mostrar que en un buen conductor los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  oscilan desfasados  $45^\circ$ .

11.- La conductividad del agua de mar es alrededor de  $4.3 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ . Suponiendo que  $\mu = \mu_0$  y  $\epsilon \approx 80\epsilon_0$ , determinar la profundidad de penetración en el agua de mar de una onda de muy baja frecuencia de 100 Hz. Comentar la posibilidad de que las ondas de radio de baja frecuencia como medio de comunicación con o entre submarinos.

12.- Determinar el coeficiente de reflexión para la luz para una superficie de separación aire-plata ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ,  $\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ ), a frecuencias ópticas ( $\omega = 4 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ ).

13.- Una onda electromagnética plana de frecuencia  $\omega$  se propaga a lo largo del eje  $y$  en un buen conductor de conductividad  $\sigma$  y permeabilidad  $\mu$ .

- (a) Calcular el valor medio del vector de Poynting en el plano  $y = 0$  y en otro plano, paralelo al anterior, que está a una distancia igual a la profundidad de penetración  $\delta$  ( $y = \delta$ ). Obtener la diferencia de flujo a través de un cilindro de sección  $A$  y eje el de propagación.
- (b) Comprobar que la potencia disipada por efecto Joule en el cilindro conductor de sección  $A$  y espesor  $\delta$  es igual a la diferencia entre los valores obtenidos en el apartado anterior, (a).

- 14.- Probar que la profundidad de penetración en un mal conductor ( $\sigma \ll \omega\epsilon$ ) es  $(2/\sigma)\sqrt{\epsilon/\mu}$ , independientemente de su frecuencia. Encontrar la profundidad de penetración para el agua pura utilizando los valores estáticos de sus constantes a 20°C ( $\epsilon_r = 80.1$ ,  $\chi_m = -9.0 \times 10^{-6}$ ,  $\sigma = 1.2 \times 10^{-4}$  S/m), es decir, que el resultado obtenido será válido sólo para bajas frecuencias.
- 15.- (a) Determinar el promedio temporal de la densidad de energía de una onda electromagnética plana en un medio conductor. Probar que la contribución magnética es la que siempre domina. Determinar cuantas veces es mayor la contribución magnética que la eléctrica a la energía para un metal típico ( $\sigma \approx 10^7$  S/m) en el rango visible ( $\omega \approx 10^{15}$  s<sup>-1</sup>), suponiendo  $\epsilon \approx \epsilon_0$  y  $\mu \approx \mu_0$ .  
 (b) Probar que la intensidad es  $(k/2\mu\omega)E_0^2 e^{-2\beta z}$ .
- 16.- Probar que la profundidad de penetración en un buen conductor ( $\sigma \gg \omega\epsilon$ ) es  $\lambda/2\pi$  (donde  $\lambda$  es la longitud de onda *en el conductor*). Encontrar la profundidad de penetración para un metal típico ( $\sigma \approx 10^7$  S/m) en el rango visible ( $\omega \approx 10^{15}$  s<sup>-1</sup>), suponiendo  $\epsilon \approx \epsilon_0$  y  $\mu \approx \mu_0$ . ¿Por qué son los metales opacos?
- 17.- Calcular la velocidad de grupo de una radiación electromagnética de alta frecuencia, tal como los rayos X.
- 18.- Obtener la relación de dispersión para una onda electromagnética que se propaga a través de un plasma tenue en el que hay un campo magnético axial débil a lo largo del eje  $z$ .
- 19.- Demostrar que en una guía de onda rectangular no se puede propagar el modo TE<sub>00</sub>.
- 20.- Considerar una guía de onda rectangular de dimensiones 2.28 cm  $\times$  1.01 cm. ¿Qué modos se propagarán en esta guía de onda si la frecuencia de corte es  $1.70 \times 10^{10}$  Hz. Supongamos que deseamos tener solamente un modo TE, ¿qué rango de frecuencias podríamos usar? ¿Cuáles serían las longitudes de onda correspondientes (en el espacio libre)?
- 21.- Consideraremos una guía de onda rectangular en la que se propaga el modo TM. Encontrar la expresión de la componente longitudinal del campo eléctrico,  $E_z$ , las frecuencias de corte y las velocidades de onda y de grupo. ¿Cuál es el modo TM más bajo que se propaga? Encontrar el cociente de las frecuencias de corte para el modo más bajo TM y el modo más bajo TE para la misma guía de onda.
- 22.- Sea una guía de onda hueca de sección rectangular de lados  $a$  y  $b$  ( $a \geq b$ ) en la que se propaga el modo TE a lo largo del eje  $z$  de la guía. (a) A partir de la expresión de la componente  $B_z(x,y)$ , determinar los valores de las componentes  $B_x(x,y)$  y  $B_y(x,y)$  del campo magnético, y  $E_x(x,y)$  y  $E_y(x,y)$  del campo eléctrico en el interior de la guía ( $E_z = 0$  al tratarse del modo TE y ser  $z$  la dirección de propagación). (b) Obtener la expresión del valor medio del vector de Poynting,  $\langle \vec{S} \rangle$ , en el interior de la guía. (c) Calcular la expresión del valor medio de la densidad de energía electromagnética,  $\langle u \rangle$ , en el interior de la guía. (d) Confirmar que la energía electromagnética para el modo TE <sub>$mn$</sub>  viaja a la velocidad de grupo  $v_g = c\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}$ .