Grado en Física

Mecánica Cuántica I

Problemas

Tema 2: La ecuación de Schrödinger (I)

1. Verifica que una función real no puede ser solución de la ecuación de Schrödinger ¿Y una función imaginaria pura?

2. Verifica que la ecuación de Schrödinger es lineal. Es decir, si $\Psi(x,t)$ es solución y se puede escribir como combinación lineal de otras dos funciones: $\Psi(x,t) = a_1\Psi_1(x,t) + a_2\Psi_2(x,t)$, entonces $\Psi_1(x,t)$ y $\Psi_2(x,t)$ también son soluciones.

3. En $t = 0$ la función de onda de una partícula es:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A(x/a), & 0 \leq x \leq a \\ A(b-x)/(b-a) & a < x \leq b \\ 0 & otros \end{cases} \tag{1}$$

   Donde A, a y b son constantes positivas.

   (a) Normaliza la función de onda.
   (b) Representa $\Psi(x,0)$ en función de x.
   (c) ¿Dónde es más probable encontrar a la partícula en $t = 0$?
   (d) Calcula la probabilidad de encontrar a la partícula a la izquierda de a.
   (e) Calcula el valor esperado de x: $< x >$

4. Calcula la derivada del valor esperado del momento:

$$\frac{d < p >}{dt} \tag{2}$$

5. Sea una partícula de masa m cuya función de onda viene dada por:

$$\Psi(x,t) = Ae^{-a(\frac{mx^2}{\hbar}+it)} \tag{3}$$

   donde A y a son constantes positivas reales.

   (a) Calcula el valor de A.
   (b) ¿Para qué función de energía potencial, $V(x)$, la función de onda anterior satisface la ecuación de Schrödinger?

(c) Calcula los valores esperados de x, x^2, p y p^2.

(d) Calcula la dispersión de x y p y su producto.

Ayuda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \tag{4}$$

6. ¿Qué unidades tiene la corriente de probabilidad J ? Estudia la corriente de probabilidad de la función de onda:

$$\Psi(x,t) = Ae^{-a(\frac{mx^2}{\hbar}+it)} \tag{5}$$

Comenta el resultado.

7. Considera la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para una partícula libre en una dimensión.

(a) Encuentra la relación entre E y k para que la siguiente función sea una solución de dicha ecuación:

$$\Psi(x,t) = e^{(ikx - iEt/\hbar)}$$

(b) Demuestra que la función de onda construida como una superposición lineal de funciones como la anterior también es solución. Es decir,

$$\Psi(x,t) = C\int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{(ikx - iE(k)t/\hbar)} dk$$

donde C es un factor de normalización y $g(k)$ es una función arbitraria de k.

(c) Calcula $\Psi(x,0)$ para el caso en el que la función $g(k)$ es constante en un intervalo de longitud $(-km, km)$ y nula fuera de ese intervalo.

(d) Calcula la constante de normalización C y representa gráficamente la función para varios valores de k_m.
Ayuda: $\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{2\sin k_m x}{x})^2 dx = 4\pi|k_m|$

(e) Comenta la relación entre k_m y el grado de localización del paquete de ondas en el espacio real.