Ejercicio 25-R

En 1 dimensión: $\frac{dP}{dt} = F$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = -kx$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{dv}{dt} + \frac{m_0}{c^2}v^2\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt} = -kx$$

$$m_0\frac{dv}{dt}\left(\frac{1}{1-v^2/c^2}\right)^{3/2} = -kx$$ (solo hay masa longitudinal porque es 1 dimensión)

Si multiplicamos los dx de ambos lados.

$$m_0\, dx\, \frac{dv}{dt}\frac{1}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} = -kx\,dx = dW$$ (trabajo de la fuerza elástica)

$$m_0\, v\, dv\, \frac{1}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} = -dU$$ (- variación de energía potencial elástica)

$\downarrow$

$$d\left(\frac{m_0 c^2}{\left(1-v^2/c^2\right)^{1/2}}\right) = -dU$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\frac{m_0 c^2}{\left(1-v^2/c^2\right)^{1/2}} + U\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_0 c^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} + U = cte = E$$

Cuando $v=0$, la energía potencial elástica es máxima:

$$m_0 c^2 + \frac{1}{2} k A^2 = E \quad \Rightarrow \quad A = \left(\frac{2(E - m_0 c^2)}{k}\right)^{1/2}$$

, A amplitud de la oscilación

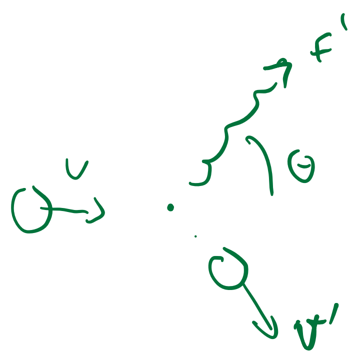
En el límite muy relativista ($v \sim c$; $E \gg m_0 c^2$) la velocidad de la partícula es $\sim c$ durante todo el movimiento

$\Rightarrow \quad T = \frac{4A}{c}$ (en una oscilación recorre $4A$ con $v \sim c$)

$$T = 2^{5/2}\left(\frac{(E - m_0 c^2)}{k c^2}\right)^{1/2} \sim 2^{5/2}\left(\frac{E}{k c^2}\right)^{1/2}.$$

(la fórmula para $v \ll c$ es $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}$)

23-R)



$$E = hf' + E'$$

$$\vec{P} = \vec{p}' + \frac{hf'}{c}\hat{n}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{P} - \frac{hf'}{c}\hat{n} &= \vec{p}' \\ (E - hf') &= E' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &c^2p^2 - 2hf'c\,\hat{n}\cdot\vec{p} + h^2f'^2 = p'^2c^2 \quad (2) \\ &E^2 - 2Ehf' + h^2f'^2 = E'^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Haciendo $(1)-(2)$ y recordando que $\begin{cases} E^2 - c^2p^2 = M_0^2c^4 \\ E'^2 - c^2p'^2 = M_0'^2c^4 \end{cases}$

$$M_0^2c^4 + 2hf'(cp\cos\theta - E) = M_0'^2c^4$$

Ahora, sabemos que $M_0c^2 - M_0'c^2 = E_f^0$ (Fotón emitido sin retroceso)

$$M_0'^2c^4 = M_0^2c^4 - 2E_f^0M_0c^2 + E_f^{0\,2}$$

Entonces, reemplazando:

$$2hf'(cp\cos\theta - E) + 2E_f^0M_0c^2 = E_f^{0\,2}$$

$$\underbrace{2hf'}_{E_f'}\left(cP\cos\theta - E\right) = E_f^0\left(E_f^0 - 2M_0c^2\right)$$

$$\frac{E_f'}{M_0c^2}\left(cm_0\gamma v\cos\theta - E\right) = E_f^0\left(\frac{E_f^0}{2M_0c^2} - 1\right)$$

$$E_f'\left(\gamma\frac{v}{c}\cos\theta - \frac{E}{M_0c^2}\right) = E_f^0\left(\frac{E_f^0}{2M_0c^2} - 1\right)$$

$$E_f'\gamma\left(\frac{v}{c}\cos\theta - 1\right) = E_f^0\left(\frac{E_f^0}{2M_0c^2} - 1\right)$$

$$E_f' = \underbrace{E_f^0\left(1 - E_f^0/2M_0c^2\right)}\ \frac{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}{\underbrace{\left(1-\beta\cos\theta\right)}}$$

Energía del fotón emitido si el átomo está en reposo

(efecto doppler ya que el átomo emisor está en movimiento)