Hoja 2 MAEDO.

Ejercicio 1. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables y ,en su caso, resolver el problema de valor inicial*

$a)\ \frac{dy}{dx} = \cos 2x$	$b)\ \frac{dy}{dx} = (x+1)^2$
$c)\ dx - x^2 dy = 0$	$d)\ dx + e^{3x} dy = 0$
$e)\ (x+1)\frac{dy}{dx} = x$	$f)\ e^x \frac{dy}{dx} = 2x$
$g)\ e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$	$h)\ (1+x^2+y^2+x^2y^2)dy = y^2 dx$
$i)\ 2\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} = \frac{2x}{y}$	$j)\ (x+\sqrt{x})\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{y}$
$k)\ \frac{dy}{dx} + xy = y \quad y(1) = 3$	$l)\ ydy = 4x(y^2+1)^{1/2}dx \quad y(0) = 1$

Ejercicio 2. *Reducir a variables separables mediante cambio de variable las ecuaciones diferenciales:*

$$a)\frac{dy}{dx} = (x+y+1)^2 \qquad b)\frac{dy}{dx} = \frac{1-x-y}{x+y} \qquad c)\frac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$$

Ejercicio 3. *Resolver las ecuaciones diferenciales:*

$$a)\frac{dy}{dx} = \frac{x-y-5}{x+y-1} \qquad b)\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+2}{y-2x} \qquad c)\frac{dy}{dx} = \frac{2x-3y+4}{4x+y-6}$$

Ejercicio 4. *Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes mediante un cambio de variable de la forma* $u = y/x^\alpha$, *para cierto valor de* α*:*

$$a)\frac{dy}{dx} = \frac{1-xy^2}{2x^2y} \qquad b)\frac{dy}{dx} = \frac{y-xy^2}{x+yx^2}$$

Ejercicio 5. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas y ,en su caso, resolver el problema de valor inicial*

$a)\ (x-y)dx + xdy = 0$	$b)\ (x+y)dx + xdy = 0$
$c)\ xdx + (y-2x)dy = 0$	$d)\ ydx = 2(x+y)dy$
$e)\ (y^2+yx)dx - x^2dy = 0$	$f)\ (y^2+yx)dx + x^2dy = 0$
$g)\ (x^4+y^4)dx - 2x^3ydy = 0$	$h)\ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$
$i)\ (x^2+xy-y^2)dx - 2xydy = 0$	$j)\ (x^2+xy-3y^2)dx - (x^2+2xy)dy = 0$
$k)\ xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3 \quad y(1) = 2$	$l)\ (x^2+2y^2)dx = xydy \quad y(-1) = 1$

Ejercicio 6. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas o reducibles a exactas por factor integrante*

$a)\ (2x+4)dx + (3y-1)dy = 0$	$b)\ (2x+y)dx + (x+6y)dy = 0$
$c)\ (5x+4y)dx + (4x-8y^3)dy = 0$	$d)\ (\sin y - y\sin x)dx + (\cos x + x\cos y - y)dy = 0$
$e)\ (2y^2x-3)dx + (2yx^2+4)dy = 0$	$f)\ (2y - \frac{1}{x} + \cos 3x)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 - 3y\sin 3x = 0$
$g)\ (x+y)(x-y)dx + x(x-2y)dy = 0$	$h)\ (1+\ln x + yx^{-1})dx = (1-\ln x)dy$
$i)\ (4x^2-14y)dx - 7xdy = 0$	$j)\ (y-8xy^2)dx + (3x-16x^2y)dy = 0$
$k)\ (2y^3-2y^2+3x)dx + (3xy^2-2xy)dy = 0$	$l)\ (y^3+x^2y+2xy-x-1)dx + (3y^2+x^2)dy = 0$

Ejercicio 7. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales*

a) $\frac{dy}{dx} = 4y$	*b*) $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
c) $2\frac{dy}{dx} + 10y = 1$	*d*) $x\frac{dy}{dx} + 2y = 3$
e) $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$	*f*) $\frac{dy}{dx} = y + e^{x}$
g) $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2$	*h*) $\frac{dy}{dx} + 2xy = x^3$
i) $x^2\frac{dy}{dx} + xy = 1$	*j*) $\frac{dy}{dx} = 2y + x^2 + 5$
k) $\frac{dy}{dx} + 5y = 20, \quad y(0) = 2$	*l*) $\frac{dy}{dx} = 2y + x(e^{3x} - e^{2x}), \quad y(0) = 2$

Ejercicio 8. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales del tipo Bernoulli*

a) $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$	*b*) $\frac{dy}{dx} - y = e^{x}y^2$
c) $\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$	*d*) $x\frac{dy}{dx} - (1+x)y = xy^2$
e) $x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = xy$	*f*) $3(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy(y^3 - 1)$
g) $x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4, \quad y(1) = \frac{1}{2}$	*h*) $y^{1/2}\frac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1, \quad y(0) = 4$
i) $xy(1+xy^2)\frac{dy}{dx} = 1, \quad y(1) = 0$	*j*) $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}, \quad y(1) = 1$

Ejercicio 9. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales del tipo Riccati*

a) $y' = 1 + xy - y^2$	*b*) $xy' = x^2 + y - y^2$
c) $y' + y^2 = x^2 - 2x$	*d*) $(1+x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$

Ejercicio 10. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales del tipo Lagrange*

a) $y = -x + \frac{1-y'}{1+y'}$	*b*) $y = -x - \frac{1+y'}{1-y'}$
c) $y = x + y' - 3(y')^2$	*d*) $y = -x + (y')^3$
e) $y = 3x - (y')^2$	*f*) $y = 2x + y' - 5(y')^2$

Ejercicio 11. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales del tipo Claireaut*

a) $y = y'x - 2(y')^2$	*b*) $y = y'x + 4(y')^2$
c) $y = y'x + 2(y')^3$	*d*) $y = y'x + y' + 5(y')^2$

Ejercicio 12. *Obtener las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dadas.*

1. $y = kx$.
2. $y = kx^2$.
3. $kx^2 + y^2 = 1$.
4. $y = \frac{x}{1+kx}$.
5. $y = k\sin x$.
6. $x^{1/3} + y^{1/3} = k$.

Ejercicio 13. *Una cierta población aumenta proporcionalmente al número de personas que tiene en cualquier instante. Si la población se duplicó en* 2 *años, ¿Cuánto tardará en triplicarse?, ¿ y en cuadruplicarse?*

Ejercicio 14. *Un cultivo de bacterias crece a una tasa proporcional al número de bacterias presentes en cada instante. Al cabo de tres horas se observa que hay* 400 *bacterias mientras que pasadas diez horas hay* 2000. *¿Cuál fue la población inicial de este cultivo?*

Ejercicio 15. *En* 1970, *el Departamento de Recursos Naturales, arrojó en un lago* 1000 *ejemplares de una especie de pez híbrido. En* 1977 *se calculó que la población de esta especie en el lago era de* 3000. *Calcular la población en el año* 2002 *de esta especie, usando una ley malthusiana para el crecimiento de la población.*

Ejercicio 16. *Un modelo de crecimiento de población que se utiliza en predicciones actuariales se basa en la Ecuación de GOMPERT.* $\frac{dP}{dt} = P(a - b\log(P)$*, donde* a *y* b *son constantes. Calcular* $P(t)$ *suponiendo que* $P(0) > 0$ *y describir el comportamiento cuando* $t \to \infty$.

Ejercicio 17. *El problema de valor inicial* $\frac{dA}{dt} = kA$, $A(0) = A_0$ *es el modelo de desintegración de una sustancia radioactiva. Demuestre que en general, el periodo medio de vida, o semivida, de la sustancia es* $T = \frac{-\log(2)}{k}$. *Demuestre también que la solución general del problema de valor inicial anterior se puede escribir como* $A(t) = A_0 e^{\frac{-t}{T}}$.

En los problemas 7, 8 y 9 suponer que la rapidez con la que se desintegra una sustancia radioactiva es proporcional a la cantidad presente en cada instante.

Ejercicio 18. *El Pb-209, isótopo radioactivo del plomo, tiene un periodo de vida medio de* $3,3$ *horas. Si inicialmente había* 20 *gramos de plomo. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre el* 90 %?

Ejercicio 19. *Si inicialmente hay* 300 *gramos de una sustancia radioactiva y al cabo de* 5 *años quedan* 200 *gramos. ¿Cuántos años deben pasar para que queden* 10 *gramos?*

Ejercicio 20. *Si inicialmente hay* 50 *gramos de una sustancia radioactiva y al cabo de* 3 *días quedan* 10 *gramos. ¿Qué porcentaje de la cantidad original queda al cabo de* 4 *días?*

Ejercicio 21. *Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura es de* 27 *grados centígrados y se lleva al exterior donde la temperatura es de* 2 *grados centígrados. Pasado medio minuto el termómetro indica* 20 *grados centígrados. ¿Qué marcará el termómetro después de un minuto? ¿Cuánto tiempo se necesita para que le termómetro marque* 5 *grados centígrados?*

Ejercicio 22. *Una taza de café caliente que inicialmente se encuentra a* 95 *grados centígrados se enfría y llega a* 80 *grados centígrados en* 5 *minutos mientras permanece servida en un cuarto con temperatura de* 21 *grados centígrados. Determine en qué momento alcanzará el café la temperatura ideal de* 50 *grados centígrados.*

Ejercicio 23. *Se aplica una fuerza electromotriz* $E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \leq t \leq 20 \\ 0, & t > 20 \end{cases}$,

a un circuito en serie LR, en que la inductancia es de $20h$ *y la resistencia es* 2Ω. *Determinar la corriente* $i(t)$ *si* $i(0) = 0$.

Ejercicio 24. *Se aplica una fuerza electromotriz* $E(t) = 200v$ *a un circuito en serie RC, en que la capacitancia es de* $5x10^-6\, f$ *y la resistencia es* 1000Ω. *Determinar la carga* $q(t)$ *del condensador si* $i(0) = 0{,}4$ *amp. Halle la carga cuando* $t \to \infty$.

Ejercicio 25. *Un tanque contiene* 200 *litros de agua en el que se han disuelto* 30 *gramos de sal y le entran* 4 *litros por minuto de una solución con un gramo de sal por litro; está bien mezclado, y de él sale líquido con el mismo flujo. Calcule la cantidad de gramos de sal que hay en el tanque en cualquier momento. Resuelva el problema suponiendo que el flujo de salida es de* 5 *litros por minuto. Resuelva el problema inicial suponiendo que entra agua pura.*

Ejercicio 26. *Una solución de salmuera de sal fluye a razón de* 6 L/min *hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene* 50 L *de solución de salmuera en la cual se disolvieron* $5Kg$ *de sal. La solución contenida en el tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior con la misma rapidez. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de* $0'5Kg/L$, *determinar la cantidad de sal presente en el tanque al cabo de* t *minutos. ¿Cuándo alcanzará la concentración de sal en el tanque el valor de* $0'3$ Kg/L?

Ejercicio 27. *Una solución de ácido nítrico fluye a razon de* $6L/min$ *hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene* 200 L *de solución de ácido nítrico al* $0'5$ %. *La solución contenida en el tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior a razón de* $8L/min$. *Si la concentración que entra en el tanque es del* 20 % *de ácido nítrico, determinar la cantidad de ácido nítrico presente en el tanque al cabo de* t *minutos. ¿En qué momento el porcentaje de ácido nítrico presente en el tanque será del* 10 %?

Ejercicio 28. *Una ecuación diferencial que describe la velocidad v de una masa m en caída libre sujeta a una resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea es $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$, donde k es una constante de proporcionalidad positiva. Resuelva esta ecuación con la condición inicial $v(0) = v_0$. Calcule la velocidad límite de la masa. Si la distancia $s(t)$ se relaciona con la velocidad por medio de $\frac{ds}{dt} = v$, deduzca una ecuación explícita para $s(t)$, si se sabe que $s(0) = s_0$.*

Ejercicio 29. *La razón con la que se disemina un medicamento en el torrente sanguíneo se describe con la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = r - kx$, donde k y r son constantes positivas, La función $x(t)$ describe la concentración del fármaco en sangre en el momento t . Determine el valor límite de $x(t)$ cuando $t \to \infty$.. ¿En cuánto tiempo la concentración será la mitad del valor límite?. Suponer que $x(0) = 0$.*