1. Problema 1

En el primer problema que se nos plantea, tenemos que preparar un estado cuántico de 1 qubit de forma que la probabilidad de medir el sistema en el estado $|1\rangle$ sea $P = {}^{859}/_{1000} = 0{,}859$. Para ello, empleamos dos puertas de Hadamard y una puerta R_z:

$$\begin{gathered} |\Psi\rangle = HR_z(\theta)H\,|0\rangle = cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle - isin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \ , \\ \text{donde } \ |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } R_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{1}$$

Vamos a desarrollar esta expresión de forma analítica antes de adentrarnos en simulaciones en *IBMQ*.

$$|\Psi\rangle = HR_z(\theta)H\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & e^{i\frac{\theta}{2}} \\ e^{-i\frac{\theta}{2}} & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}+e^{i\frac{\theta}{2}}2} & e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \\ e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \\ e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}$$

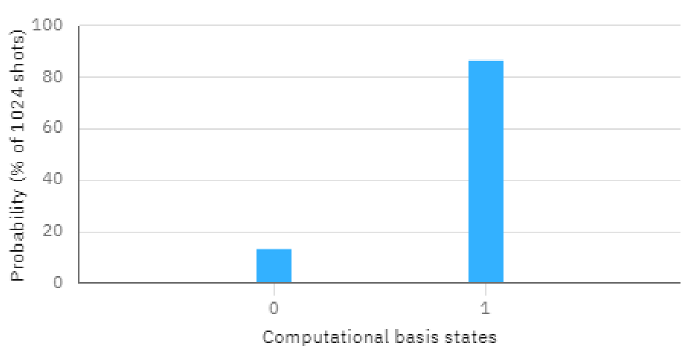
Con la fórmula de Euler es fácil ver que la expresión final para la función de onda queda:

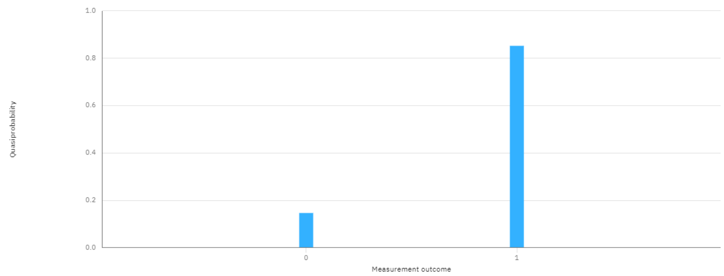
$$|\Psi\rangle = cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \tag{2}$$

En la parte teórica de la asignatura hemos visto que el cuadrado del coeficiente que acompañe al estado $|1\rangle$ es el que determinará su probabilidad, y en este caso este corresponde a $sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = P = 0{,}859$. Esto nos permite dar el valor del argumento de la puerta R_z:

$$sin^2\frac{\theta}{2} = 0{,}859 \Longrightarrow \theta = 2 \cdot arcsin(\sqrt{0{,}859}) = 2{,}37\ rad \tag{3}$$

Al ejecutar en *IBMQ* una simulación con 1024 repeticiones obtenemos el siguiente histograma de medición, según el cual la probabilidad de medir el estado $|1\rangle$ es $P = 0{,}865$.





Ahora veamos qué ocurre al realizar una computación cuántica del mismo estado(igualmente con 1024 repeticiones). En este caso, la probabilidad de medir el estado $|1\rangle$ es $P = 0{,}853$.

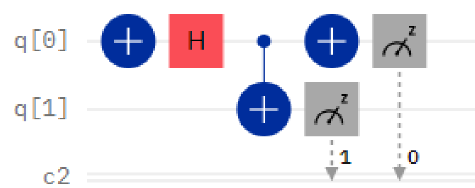
Claramente vemos desviaciones respecto a los resultados teóricos, y las podemos explicar mediante errores de **medida** (se prepara un sistema en un estado pero se mide en otro), de **puerta** (se implementa una puerta similar pero no igual a la preparada), de **relajación** (un qubit solo aguanta en un estado un cierto tiempo antes de caer al fundamental) o de **decoherencia** (se añade una fase aleatoria e impredecible).

2. Problema 2

En este segundo ejercicio vamos a trabajar con el siguiente estado de acuerdo con la última cifra de mi DNI:

$$|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right) \tag{4}$$

En primer lugar, hemos de proponer un circuito, ahora para 2 qubits, empleando una puerta Hadamard, una puerta CNOT y como máximo 3 puertas X. En nuestro caso trabajamos con el circuito que se muestra a la derecha.



A continuación mostramos los histogramas resultantes de la simulación de este circuito, así como de su ejecución en un ordenador cuántico. Aunque teóricamente ambos estados tendrían que tener probabilidad $P = 0{,}5$, hemos obtenido $P_{|01\rangle} = 0{,}499$ y $P_{|10\rangle} = 0{,}5009$.