Práctica 5

Métodos Numéricos y Computación

I. Aproximación trigonométrica *(Tema 3)*

El polinomio trigonométrico sobre $[-\pi,\pi]$ es una combinación lineal de las funciones periódicas $\{1/2, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx), \ldots\}$ y es utilizado para aproximar una función continua f definida sobre $[-\pi,\pi]$. Más generalmente, si f es una función definida sobre $[-L,L]$, la aproximación trigonométrica de f viene dada por:

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\pi x/L) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin(k\pi x/L),$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \\ a_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(k\pi x/L)dx \text{ para } k=1,\ldots,n, \\ b_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(k\pi x/L)dx \text{ para } k=1,\ldots,n-1. \end{aligned}$$

Este procedimiento también se puede usar con las funciones definidas a trozos (tanto en $[-\pi,\pi]$ como en cualquier otro intervalo).

Ejercicio 1 *Obtén los coeficientes de la aproximación trigonométrica de orden 3 para la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{si } -2 \le x < 1, \\ x, & \textit{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Construye el polinomio y represéntalo gráficamente junto a la función.

Ejercicio 2 *Implementa una función* `fourier` *que, dada una función f sobre el intervalo $[-L,L]$, devuelva el valor de la aproximación trigonométrica de orden n, con $n \in \mathbb{N}$, para $x \in [-L,L]$.*

Ejercicio 3 *Obtén el polinomio trigonométrico de orden 4 de las siguientes funciones y representa gráficamente cada uno de ellos junto a la función que aproximan:*

a) La función diente de sierra dada por $f(x) = x + \pi$, para todo $x \in [-\pi,\pi)$.

b) La función de onda rectangular dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & si\ -1 \leq x < -1/2, \\ \ \ 1, & si\ -1/2 \leq x < 1/2, \\ -1, & si\ 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ejercicio 4 *Obtén los polinomios trigonométricos de Fourier de grado 2, 3 y 4 de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & si\ -2\pi \leq x < 0, \\ x, & si\ 0 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Representa gráficamente la función junto a los polinomios trigonométricos. Comenta los resultados obtenidos.

Ejercicio 5 *Las cantidades M (en mg) de cierto isótopo radiactivo a lo largo del tiempo t (en días) vienen dadas por $M(t) = M_0 e^{-kt}$, $t \in [0, 22]$, donde $M_0 = 2100$ gr es la cantidad original (en $t = 0$) y $k = 0.15$ días^{-1} es su tasa de decaimiento. La función $M^*(x) = M(r(x))$ con $r(x) = 11 + 11x/\pi$ está definida sobre $[-\pi, \pi]$. Obtén el polinomio trigonométrico de orden 4 para M^* y represéntalo gráficamente.*

II. Aproximación de Padé *(Tema 3)*

Dada una función f, la aproximación racional en x_0 consiste en obtener un cociente de polinomios $r(x) = p(x)/q(x)$, de forma que $f^{(i)}(x_0) = r^{(i)}(x_0)$, para todo $i = 0, 1, \ldots, N = n + m$.

Ejercicio 6 *Calcula el aproximante de Padé de grado 6 a partir del desarrollo en serie de Taylor en $x_0 = 0$, con $n = m = 3$ para la función $f(x) = \sin(x)$. Compara los resultados para $x_i = 0.1i$, con $i = 0, 1, \ldots, 10$, con el resultado exacto.*

Ejercicio 7 *Las cantidades M (en mg) de cierto isótopo radiactivo a lo largo del tiempo t (en días) vienen dadas por $M(t) = M_0 e^{-kt}$, $t \in [0, 22]$, donde $M_0 = 2100$ gr es la cantidad original (en $t = 0$) y $k = 0.15$ días^{-1} es su tasa de decaimiento. Obtén la aproximación racional de Padé de $M(t)$ en $x_0 = 15$ con $N = 7$ y un polinomio cúbico en el denominador. Representa gráficamente la función y la aproximación racional.*