Grado en Física

Mecánica Cuántica I

Problemas

Tema 3: La ecuación de Schrödinger (II)

1. Resuelve la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un pozo cuadrado infinito de anchura a:
   (a) Considerando como solución de la ecuación la suma de dos ondas planas:
   $$\psi(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}$$
   y que el potencial es nulo entre 0 y a e infinito para cualquier otro valor de x.
   (b) Considerando que es un pozo centrado en $x = 0$:
   $V(x) = 0$ para $-a/2 < x < a/2$, infinito en el resto. Sugerencia: considera la solución con senos y cosenos y elige la más conveniente.

   Discute si tus resultados coinciden o no con el obtenido en clase.

2. Calcula el valor de la anchura del pozo de potencial infinito para que la energía del estado fundamental sea del orden del eV para: un electrón, un protón, una persona.

3. Calcula los valores esperados de x, x^2, p, p^2, las incertidumbres de x, p y su producto para las 3 primeras funciones de onda del pozo de potencial infinito.

4. Demuestra que las funciones de onda son ortogonales para el caso del pozo de potencial infinito.

5. Una partícula en el pozo infinito tiene la siguiente función de onda en t=0:
   $$\Psi(x,0) = Ax(a-x) \qquad 0 \leq x \leq a$$
   Halla:
   (a) $\Psi(x,t)$
   (b) El valor esperado de la energía: $< H >$ Considera que: $\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$

6. Considera una partícula cuántica confinada a moverse en el segmento $0 < x < L$. En $t = 0$ su función de onda viene dada por:
   $$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\cos\alpha \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin\alpha \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)$$
   donde α es un parámetro arbitrario.

(a) Discute el significado que tiene el término que contiene α y determina qué valores debe tomar α para que el estado anterior sea un estado estacionario.

(b) Comprueba si esta función de onda está normalizada.

(c) Calcula la función de onda para cualquier instante $t > 0$.

(d) Calcula el valor esperado de la posición de la partícula.

7. Considera un electrón, confinado a moverse en el segmento $0 < x < L$. En $t = 0$ su función de onda viene dada por:

$$\Psi(x, 0) = A \sin^5 (\frac{\pi x}{L})$$

(a) Calcula A para que la función de onda esté normalizada.

(b) Calcula la función de onda para $t > 0$.

(c) Realizamos un experimento para medir la energía de la partícula. Discute qué valores podemos encontrar y con qué probabilidad. Considera L = 100.

Ayuda: $\sin^5(\theta) = \frac{1}{16}(10 \sin(\theta) - 5 \sin(3\theta) + \sin(5\theta))$.

8. Sea una partícula cuya función de onda se puede describir mediante la onda plana:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

(a) Calcula la corriente de probabilidad asociada a dicho estado.

(b) ¿Qué relación debe haber entre A y B para que la corriente se anule? Considera que A y B son funciones complejas.

9. Una partícula libre está representada por la siguiente función de onda en $t = 0$:

$$\Psi(x, 0) = A\ e^{-ax^2}$$

donde A y a son constantes (a es real y positiva).

(a) Normaliza la función de onda $\Psi(x, 0)$

(b) Obtén la función de onda para cualquier instante de tiempo: $\Psi(x, t)$

(c) Calcula la densidad de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$

Ayuda: Las integrales de la forma: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx)}dx$ se pueden resolver mediante un cambio de variable: $y = \sqrt{a}[x + (b/2a)]$.