APELLIDOS: .... NOMBRE: ....

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Grado en Física
Escuela Politécnica Superior
Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal

Electromagnetismo II

Segundo control: 22 de diciembre de 2022

1.- (a) Ecuaciones de Maxwell en forma covariante: descripción de los elementos que aparecen en ellas y significado físico de las mismas.
(b) Deducir de forma razonada la ecuación de continuidad en forma covariante a partir de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante.
(c) Obtener las ecuaciones de Maxwell en forma vectorial incluidas en la ecuación de Maxwell con fuentes en forma covariante sabiendo que:

$$F^{0i} = -\frac{E^i}{c} \qquad F^{ij} = -\in^{ij}{}_{k} B^k \qquad (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})^k = \in^{k}{}_{ij}\, a^i b^j$$

(2.5 puntos)

2.- Campos eléctrico y magnético creados por una carga en movimiento arbitrario y vector de Poynting correspondiente: características generales, como son los campos entre ellos, comportamiento del vector de Poynting y los campos a grandes distancias…
(1.25 puntos)

3.- Una carga puntual positiva de masa m y carga q incide con velocidad constante v ($v << c$) en el seno de un campo magnético uniforme B (dirección el eje x, sentido positivo) de modo que los vectores velocidad y campo magnético son perpendiculares. La carga se mueve entonces con movimiento circular uniforme con velocidad angular constante ω en una circunferencia de radio ρ. La circunferencia se encuentra en el plano yz, centrada en el origen $O(0,0,0)$, y la carga se encuentra en el punto $(0,\rho,0)$ en el instante $t = 0$.

Determinar el tiempo retardado y los potenciales de Liénard-Wiechert en puntos del eje x.

(1.25 puntos)

4.- Para la carga del problema anterior, suponiendo que cada revolución es esencialmente circular y que se desprecian los efectos de reacción de radiación:
(a) Determinar la potencia total radiada y escribirla en función de la velocidad v de la partícula y del campo magnético aplicado B. ¿Disminuirá la velocidad v debido a la radiación? ¿Por qué?
(b) Escribir la potencia total radiada en función de la velocidad v de la partícula y del radio ρ de la órbita.
(c) Expresar la potencia total radiada en función del campo magnético aplicado B y del radio ρ de la órbita.
(d) Como la potencia radiada es la energía perdida por la partícula por unidad de tiempo, obtener el radio ρ de la partícula en función del tiempo t si para $t = 0$ el radio vale ρ_0. Expresar ρ_0 en función de la energía cinética inicial ε_0 de la partícula y sustituirlo en la ecuación de $\rho(t)$. ¿Cuánto disminuye el radio de la partícula en la primera vuelta?
(1.75 puntos)

APELLIDOS: .... NOMBRE: ....

5.- Se aceleran partículas de masa m y carga q con velocidad arbitraria en un acelerador lineal. Obtener la expresión de la potencia total radiada para este tipo de aceleradores. ¿Cómo es su dependencia? Si queremos obtener una mayor cantidad de energía radiada, ¿qué tipo de partículas es preferible acelerar?
(0.75 puntos)

6.- (a) Para el campo electromagnético en ausencia de cargas y corrientes, el tensor energía-impulso que se obtiene del teorema de Noether, es decir, de la invariancia del sistema bajo tetra-traslaciones, es el tensor energía-impulso canónico de Maxwell. ¿Qué inconvenientes presenta dicho tensor canónico que hace necesario reemplazarlo por el tensor energía-impulso de Belifante-Rosenfeld?

(b) Obtener la componente Θ_s^{00} del tensor energía-impulso de Belifante-Rosenfeld sabiendo que:

$$\Theta_s^{\mu\nu} = \varepsilon_0 c^2 \left(g^{\mu\lambda} F_{\lambda\sigma} F^{\sigma\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right)$$

[se puede utilizar el valor del invariante del campo electromagnético $F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$]

(c) ¿Cuál es el significado físico de sus demás componentes?

(d) En ausencia de cargas y corrientes sabemos que se cumple $\partial_\mu \Theta_s^{\mu\nu} = 0$, ¿qué leyes de conservación están incluidas en esta ecuación? Comentarlas brevemente.
(2.5 puntos)

Tensor campo electromagnético

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Fórmula de Liénard para la potencia radiada en función de los campos eléctrico y magnético aplicados a la partícula

$$P_{rad} = \frac{q^4\gamma^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\left[(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}})^2 - \frac{(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{v}})^2}{c^2} \right] \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

1

(a) $\left.\begin{array}{l}\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \\ \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0\end{array}\right\}$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu})$$

$$J^\nu = (c\rho, \vec{J})$$

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$$

$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si dos índices son iguales} \\ 1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ es una permutación par de } 0123 \\ -1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ es una permutación impar de } 0123 \end{cases}$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \rightarrow \begin{cases} \nu = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nu = i \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \begin{cases} \nu = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \nu = i \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

(b) $$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$

$$\partial_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu}) = \partial_\nu (\mu_0 J^\nu)$$

$$\underbrace{\underbrace{\partial_\nu \partial_\mu}_{\text{simétrico}} \underbrace{F^{\mu\nu}}_{\text{antisimétrico}}}_{=0} = \mu_0 \partial_\nu J^\nu \rightarrow \underbrace{\boxed{\partial_\nu J^\nu = 0}}_{\text{ec. continuidad}}$$

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \rightarrow \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial J^0}{\partial t} + \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0 \qquad J^0 = c\rho \qquad J^i = (\vec{J})^i$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial (c\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0}$$

(c) $$F^{0i} = -\frac{E^i}{c}\,;\; F^{ij} = -\epsilon^{ij}{}_k B^k$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}) = \epsilon^k{}_{ij}\, a^i b^j$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$

$$\boxed{\nu = 0} \rightarrow \partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 J^0$$

$$\underbrace{\partial_0 F^{00}}_{=0} + \partial_i F^{i0} = \mu_0 J^0 \rightarrow \partial_i \left(\frac{E^i}{c}\right) = \mu_0 c \rho$$

$$\left.\begin{array}{l} F^{i0} = -F^{0i} = \dfrac{E^i}{c} \\ J^0 = c\rho \end{array}\right\}$$

$$\partial_i E^i = \mu_0 c^2 \rho \longrightarrow \frac{\partial E^i}{\partial x^i} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

$$\boxed{\nu = j} \rightarrow \partial_\mu F^{\mu j} = \mu_0 J^j$$

$$\partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} = \mu_0 J^j$$

$$F^{0j} = -\frac{E^j}{c} \qquad F^{ij} = -\epsilon^{ij}{}_k B^k$$

$$\partial_0 \left(-\frac{E^j}{c}\right) + \partial_i \left(-\epsilon^{ij}{}_k B^k\right) = \mu_0 J^j$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E^j}{\partial t} - \underbrace{\epsilon^{ij}{}_k}_{= \epsilon^{ji}{}_k} \partial_i B^k = \mu_0 J^j$$

$$\underbrace{\epsilon^{ji}{}_{k}\, \partial_i B^k}_{(\vec{\nabla}\times\vec{B})^j} = \mu_0 J^j + \underbrace{\frac{1}{c^2}}_{=\varepsilon_0\mu_0} \frac{\partial E^j}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})^j = \mu_0 J^j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E^j}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

acumulación radiación

(2)

$$\vec{E} = \frac{\vec{X}(\vec{v})}{R^2} + \frac{\vec{Y}(\vec{v},\dot{\vec{v}})}{R} \quad \left.\begin{array}{l} \vec{B} \perp \hat{n} \\ \vec{B} \perp \vec{E} \end{array}\right.$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{n}\times\vec{E}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_{acum} + \vec{E}_{rad} \\ \vec{B} = \vec{B}_{acum} + \vec{B}_{rad} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{B}_{rad} \perp \hat{n} \\ \vec{B}_{rad} \perp \vec{E}_{rad} \\ \vec{E}_{rad} \perp \hat{n} \end{array}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{E}\times(\hat{n}\times\vec{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{E}\times(\hat{n}\times\vec{E})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{n}\times\vec{E}$$

$$\int_S \vec{S}\cdot d\vec{s} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int_S [\vec{E}\times(\hat{n}\times\vec{E})]\,d\vec{s} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int_S \left[\frac{\vec{Y}\times(\hat{n}\times\vec{Y})}{R^2} + \frac{\vec{Y}\times(\hat{n}\times\vec{X})}{R^3} + \frac{\vec{X}\times(\hat{n}\times\vec{Y})}{R^3} + \frac{\vec{X}\times(\hat{n}\times\vec{X})}{R^4}\right] d\vec{s}$$

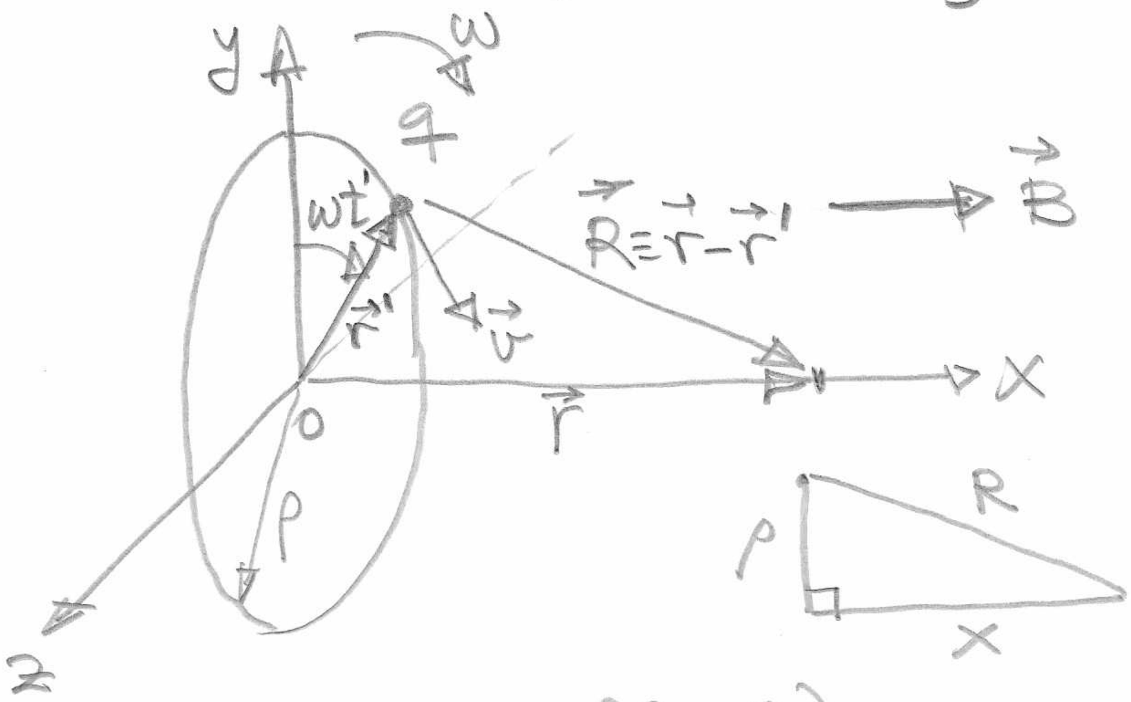
$s \propto R^2$

$R \to \infty$ (muy lejos)

RADIACIÓN

$$\int_S \vec{S}\cdot d\vec{s} \to \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int_S \frac{\vec{Y}\times(\hat{n}\times\vec{Y})}{R^2}\,d\vec{s}$$

$v \ll c$ (no relativista)



$(q > 0)$

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}$$

$\vec{v} \perp \vec{R}$

$\vec{v} \perp \vec{r}\,'$

$$\omega = \frac{q}{m}B = cte$$

(porque $v \ll c$)

En $t = 0 \rightarrow \vec{r}\,'(0) = \rho\,\hat{u}_y$

$$\vec{r}\,'(t') = \rho\left[\cos(\omega t')\,\hat{u}_y + \operatorname{sen}(\omega t')\,\hat{u}_z\right]$$

$$\vec{v}(t') = \frac{d\vec{r}\,'(t')}{dt'} = \omega\rho\left[-\operatorname{sen}(\omega t')\,\hat{u}_y + \cos(\omega t')\,\hat{u}_z\right]$$

$$\vec{r} = x\,\hat{u}_x$$

$$\vec{R}(t') \equiv \vec{r} - \vec{r}\,'(t') = x\,\hat{u}_x - \rho\cos(\omega t')\,\hat{u}_y - \rho\operatorname{sen}(\omega t')\,\hat{u}_z$$

$$R^2 \equiv |\vec{R}|^2 = x^2 + \rho^2\cos^2(\omega t') + \rho^2\operatorname{sen}^2(\omega t') = x^2 + \rho^2$$

$$R = \sqrt{x^2+\rho^2}$$

$$t' = t - \frac{R}{c} = t - \frac{\sqrt{x^2+\rho^2}}{c} \rightarrow \boxed{t' = t - \frac{\sqrt{x^2+\rho^2}}{c}}$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{\left[R - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c}\right]_{ret}}$$

$$\Big(R - \underbrace{\cancel{\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c}}}_{\substack{=0 \\ \vec{v}\perp\vec{R}}}\Big)_{ret} = (R)_{ret} = \sqrt{x^2+\rho^2}$$

$$\boxed{\phi(x,0,0,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{\sqrt{x^2+\rho^2}} \neq f(t)}$$

evaluada en t'

$$\vec{A}(x,0,0,t) = \frac{\vec{v}}{c^2}\,\phi(x,0,0,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{q\vec{v}}{\sqrt{x^2+\rho^2}} =$$

$$= \frac{q\omega\rho}{4\pi\varepsilon_0 c^2\sqrt{x^2+\rho^2}}\left[-\operatorname{sen}(\omega t')\,\hat{u}_y + \cos(\omega t')\,\hat{u}_z\right]$$

$$t' = t - \frac{1}{c}\sqrt{x^2+\rho^2}$$

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \mu_0\right)$$

$$\boxed{\vec{A}(x,0,0,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\omega\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\left\{-\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{1}{c}\sqrt{x^2+\rho^2}\right)\right]\hat{u}_y + \cos\left[\omega\left(t-\frac{1}{c}\sqrt{x^2+\rho^2}\right)\right]\hat{u}_z\right\}}$$

(b) Para calcular $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ necesitamos $\phi(x,y,z,t)$ y $\vec{A}(x,y,z,t)$ y no los tenemos.

Podemos calcular $\vec{E}(x,0,0,t)$ usando la expresión general:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{(1-\beta^2)(\hat{n}-\vec{\beta})}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{\hat{n}\times[(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})^3}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \qquad \hat{n} = \frac{\vec{R}}{R} \qquad \dot{\vec{\beta}} = \frac{\dot{\vec{v}}}{c}$$

$$\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt'} = \omega^2\rho\left[-\cos(\omega t')\hat{u}_y - \mathrm{sen}(\omega t')\hat{u}_z\right] =$$

$$= -\omega^2\rho\left[\cos(\omega t')\hat{u}_y + \mathrm{sen}(\omega t')\hat{u}_z\right]$$

$$\dot{\vec{v}} \perp \vec{v} \longrightarrow \dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{\beta} = 0$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{x}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\hat{u}_x - \frac{\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\cos(\omega t')\hat{u}_y - \frac{\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}} \cdot \operatorname{sen}(\omega t')\hat{u}_z$$

$$R = \sqrt{x^2+\rho^2}$$

- $1 - \vec{\beta}\cdot\hat{n} = 1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{cR} \underset{\vec{v}\cdot\vec{R}=0}{=} 1$

- $\hat{n} - \vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\left[x\hat{u}_x - \rho\cos(\omega t')\hat{u}_y - \rho \operatorname{sen}(\omega t')\hat{u}_z\right] - \frac{\omega\rho}{c}\left[-\operatorname{sen}(\omega t')\hat{u}_y + \cos(\omega t')\hat{u}_z\right]$

- $\hat{n}\times\left[(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right] = \hat{n}\times\left[\hat{n}\times\dot{\vec{\beta}} - \vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\right]$

Habría que calcularlo todo y sustituirlo en $\vec{E}$

(c) No podemos calcular $\vec{B}$ a partir de $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ porque no tenemos $\vec{A}(x,y,z,t)$.
Podemos calcular $\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{n}\times\vec{E}$ si se usa el $\vec{E}(x,0,0,t)$ calculado en (b).

$q>0 \qquad v \ll c \qquad \omega = \frac{q}{m} B$ (4)

Fórmula de Larmor

(a) $P_{rad} = \frac{q^2 |\dot{\vec{v}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{q^2 \omega^4 \rho^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$

$|\dot{\vec{v}}| = \omega^2 \rho \sqrt{\cos^2(\omega t') + \operatorname{sen}^2(\omega t')} = \omega^2 \rho$

Prob. 3

$v = \omega\rho \rightarrow \omega = \frac{v}{\rho}$

$$\boxed{P_{rad} = \frac{q^2 v^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3 \rho^2}}$$ apartado (b)

$\omega = \frac{q}{m} B$

$$P_{rad} = \frac{q^2 \omega^4 \rho^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{q^2 \omega^2 v^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{q^4 v^2 B^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}$$

$$\boxed{P_{rad} = \frac{q^4 v^2 B^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}}$$

También se puede obtener de la fórmula de Liénard

$\vec{E} = 0, \ \gamma = 1$

$\vec{v} \perp \vec{B}$

v disminuye al radiar porque disminuye la energía cinética

(b) $$\boxed{P_{rad} = \frac{q^2 v^4}{6\pi \varepsilon_0 c^3 \rho^2}}$$

(c) $$v = \omega \rho = \frac{q}{m} B \rho$$

$$P_{rad} = \frac{q^4 v^2 B^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2} = \frac{q^4 \frac{q^2}{m^2} B^2 \rho^2 B^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2} = \frac{q^6 B^4 \rho^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^4}$$

$$\boxed{P_{rad} = \frac{q^6 B^4 \rho^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^4}}$$

(d) $$P_{rad} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{d\mathcal{E}}{d\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \rho^2$$

$$P_{rad} = -\frac{d\mathcal{E}}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} \rightarrow P_{rad} = -m\omega^2 \rho \frac{d\rho}{dt}$$

$$= -\frac{q^2 B^2}{m} \rho \frac{d\rho}{dt}$$

$$-\frac{q^2 B^2}{m} \rho \frac{d\rho}{dt} = \frac{q^6 B^4 \rho^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^4}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{q^4 B^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^3} dt$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{q^4 B^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3 m^3} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = -\frac{q^4 B^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3 m^3} t \rightarrow \boxed{\rho = \rho_0 \, e^{-\frac{q^4 B^2 t}{6\pi \varepsilon_0 c^3 m^3}}}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \rho^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{m} B^2 \rho^2$$

$$\mathcal{E}_0 = \frac{q^2}{2m} B^2 \rho_0^2 \rightarrow \boxed{\rho_0 = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}_0}}{qB}}$$

$$\boxed{\rho(t) = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}_0}}{qB} \, e^{-\frac{q^4 B^2 t}{6\pi \varepsilon_0 c^3 m^3}}}$$

Primera vuelta $\rightarrow t = T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$

$$\rho(T) = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}_0}}{qB} \, e^{-\frac{q^4 B^2 2\pi m}{6\pi \varepsilon_0 c^3 m^3 qB}}$$

$$\rho(T) = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}_0}}{qB} \, e^{-\frac{q^3 B}{3\varepsilon_0 c^3 m^2}}$$

disminución de ρ

$$|\Delta \rho| = |\rho_0 - \rho(T)| = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}_0}}{qB}\left[1 - e^{-\frac{q^3 B}{3\varepsilon_0 c^3 m^2}}\right]$$

$$\left|\frac{\Delta \rho}{\rho_0}\right| = 1 - e^{-\frac{q^3 B}{3\varepsilon_0 c^3 m^2}} \simeq$$

$$\simeq 1 - 1 + \frac{q^3 B}{3\varepsilon_0 c^3 m^2} = \frac{q^3 B}{3\varepsilon_0 c^3 m^2}$$

(5)

$$\vec{B} = \vec{0} \qquad \vec{E} \parallel \vec{v} \parallel \dot{\vec{v}}$$

$$P_{rad} = \frac{q^4 \gamma^2}{6\pi \varepsilon_0 m^2 c^3} \left[E^2 - \frac{E^2 v^2}{c^2} \right] =$$

$$= \frac{q^4 \gamma^2 E^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{= \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{q^4 E^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}$$

$$\boxed{P_{rad} = \frac{q^4 E^2}{6\pi \varepsilon_0 m^2 c^3}}$$

$$P_{rad} \propto E^2 \qquad P_{rad} \propto \frac{1}{m^2} \qquad P_{rad} \neq f(v)$$

Como $P_{rad} \propto \frac{1}{m^2}$, a menor masa más potencia radiada.

(6)

(a) - No es simétrico (no permite usarlo para definir el tensor densidad de momento angular).

- Incluye a los potenciales ϕ y $\vec{A}$ explícitamente, por lo que no es invariante gauge.

- No tiene traza nula (importante para la invariancia conforme.)

(b) $$F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 2\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)$$

$$\boxed{H}^{00}_{s} = \varepsilon_0 c^2 \Big(\underbrace{g^{0\lambda}}_{\text{sólo } g^{00}\neq 0} F_{\lambda\sigma} F^{\sigma 0} + \frac{1}{4} \underbrace{g^{00}}_{=1} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \Big) =$$

$$= \varepsilon_0 c^2 \Big(\underbrace{g^{00}}_{=1} \underbrace{F_{0\sigma}}_{\substack{\text{sólo } F_{0i}\neq 0 \\ F_{00}=0}} F^{\sigma 0} + \frac{1}{4} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \Big) =$$

$$= \varepsilon_0 c^2 \Big(\underbrace{F_{0i}}_{=-\frac{E^i}{c}} \underbrace{F^{i0}}_{=\frac{E^i}{c}} + \frac{1}{4} 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \Big) =$$

$$= \varepsilon_0 c^2 \left(-\frac{E^2}{c^2} + \frac{1}{2} B^2 - \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 B^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 =$$

$$= u_E + u_B = u_{EM} \longrightarrow \boxed{\Theta_S^{00} = u_{EM}}$$

(c)

$$\Theta_S^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} u_{EM} & \frac{\vec{S}}{c} = c\vec{g} \\ \hline \frac{\vec{S}}{c} = c\vec{g} & -T_M^{ij} \end{array} \right)$$

(d) $\partial_\mu \Theta_S^{\mu\nu} = 0$

$\boxed{\nu = 0} \rightarrow \quad \dfrac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$

$$\frac{d W_{EM}}{dt} = -\int_S \vec{S}\, \hat{n}\, da$$

área

$\boxed{\nu = i} \quad \dfrac{\partial g^i}{\partial t} - \partial_j T_M^{ij} = 0$

$$\frac{d p^i_{EM}}{dt} = \sum_j \int T_M^{ij} ds^j$$