**3.- Hallar el dominio y la imagen o recorrido de las funciones:**

a) $f(x, y) = \ln(xy-6)$ b) $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2y^2-9}}{x}$.

c) $h(x,y) = \arccos \dfrac{y}{x}$ d) $p(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

a) $f(x,y) = \ln(xy-6)$ $xy > 6$ $\begin{cases} y > \frac{6}{x} & \forall x > 0 \\ y < \frac{6}{x} & \forall x < 0 \end{cases}$

indefinido $x = 0$ ó $y = 0$

b) $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2y^2-9}}{x}$ $x^2y^2 \geq 9$ $y \geq \sqrt{\frac{9}{x^2}}$

$\forall x, y \neq 0$

c) $h(x,y) = \arccos\left(\frac{y}{x}\right)$ $\forall x \neq 0;\ \left|\frac{y}{x}\right| \leq 1;\ y \leq |x|\ \forall x \neq 0$

d) $p(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ $x^2+y^2$ si $x$ ó $y \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} p(x,y) = \lim_{r\to0^+} \frac{r\cos\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \lim_{r\to0^+} \frac{\cos\theta}{r}$$

↳ no concluye

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} p(x,y) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} p(x,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0$$

$\neq \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} p(x,y)$

**6.- Calcular los siguientes límites:**

a. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ b. $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ c. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y^4}{x^3-y^4}$

d. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy-x+y}{x+y}$ e. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$ f. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{\operatorname{sen}x \ln(1+y)}$

a. $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 2$$

b. $$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} (x-y) = 2$$

c. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^3-y^4}$$ $$\lim_{y\to1} \frac{x-y^4}{x^3-y^4} = \lim_{y\to1} \frac{x-1}{x^3-1} = \frac{1}{3}$$ $$\lim_{x\to1} \frac{x-y^4}{x^3-y^4} = \lim_{x\to1} \frac{1-y^4}{1-y^4} = 1$$ $\nexists \lim_{(x,y)\to(1,1)} c(x,y)$

d. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-x+y}{x+y} = \lim_{r\to0^+} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta - r\cos\theta + r\sin\theta}{r(\sin\theta+\cos\theta)} = \lim_{r\to0^+} r\sin\theta\cos\theta - \cos\theta + \sin\theta = \lim_{r\to0^+} r\sin\theta\cos\theta - 1$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} d(x,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y}{y} = 1 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} d(x,y) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{-x}{x} = -1$$ $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} d(x,y)$

e. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \lim_{r\to0^+} \left(\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\right)^2 = \lim_{r\to0^+} (\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} e(x,y)$$

f. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{\sin(x)\ln(1+y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{xy} = 1$$

$e^{xy}-1 \rightsquigarrow xy$

$\sin(x) \underset{x\to0}{\rightsquigarrow} x$

$\ln(1+y) \underset{y\to0}{\rightsquigarrow} y$

**7.- Estudiar la continuidad de las funciones:**

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases};\quad g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{r\to0^+} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2(\sin^2\theta+r^2\cos^4\theta)} = \lim_{r\to0^+} \frac{r\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+r^2\cos^4\theta}$$ → No decide

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^4} = 0 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0$$ → No decide

$$\lim_{(x,ax)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,ax)\to(0,0)} \frac{x^3a^2}{x^2+a^4x^4} = \lim_{(x,ax)\to(0,0)} \frac{xa^2}{1+a^4x^2} = \frac{0}{1} = 0$$ → No decide

$$\lim_{(ay^2,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(ay^2,y)\to(0,0)} \frac{ay^4}{a^2y^4+y^4} = \lim_{(ay^2,y)\to(0,0)} \frac{a}{a^2+1}$$ → depende de $a \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(ay^2,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4} = \lim_{(ay^2,y)\to(0,0)} \frac{a^2y^5}{a^2y^4+y^4} = \lim_{(ay^2,y)\to(0,0)} \frac{a^2y}{a^2+1} \to \text{No decide}$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^4} = 0 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0 \to \text{No decide}$$

$$\lim_{r\to0^+} \frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta)} = \lim_{r\to0^+} \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \Rightarrow g(x,y) \text{ es continua en } \mathbb{R}$$

**8.- Dada la función:**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ **, se pide:**

**a. Hallar, si existe,** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

**b. Estudiar la continuidad de f en todo $R^2$, según los valores de k.**

Continua en $\mathbb{R}$ para $k=0$

Continua en $\mathbb{R}-(0,0)$ $\forall k\neq0$

a $$\lim_{(ay,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy} = \lim_{(ay,y)\to(0,0)} \frac{ay^3}{2a^2y^2+3y^2-ay^2} = \lim_{(ay,y)\to(0,0)} \frac{ay}{2a^2+3-a} \to \text{No decide}$$

$$\lim_{r\to0^+} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{2r^2\cos^2\theta+3r^2\sin^2\theta-r^2\sin^2\theta\cos^2\theta} = \lim_{r\to0^+} \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta} = \lim_{r\to0^+} \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{2+\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{3y^2} = 0 \; ; \; \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{2x^2} = 0 \to \text{No decide}$$

**9.- Estudiar la continuidad en (0, 0) de las siguientes funciones:**

**a.** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

**b.** $h(x,y)=\begin{cases}g(x,y)\cdot\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$**, siendo g(x, y) una función continua en (0,0)**

**tal que g (0, 0) =0. Nota: Utilizar que** $|xy|\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

**c.** $j(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0^+} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \lim_{r\to0^+} \cos\theta\sin\theta \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow \text{No es continua en } (0,0)$$

b. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow \text{Es continua en } \mathbb{R}$$

c. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0^+} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta\left[r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\right]}{r^2\left[\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]} = \lim_{r\to0^+} \cos\theta\sin\theta\; r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = 0 \Rightarrow \text{Es continua en } \mathbb{R}$$

* Caso Particular del 8b. donde $g(x,y) = (x^2-y^2)$

$\sin(x) = x$
$x \to 0$

**10.- Dada la función** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\text{sen}^2 x\ \text{sen} y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ k & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **. Se pide:**

**a) Hallar, si existe,** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

**b) Estudiar la continuidad de f en todo** $\mathbf{R^2}$**, según los valores de k.**

a. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x)\sin(y)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\sin^2(r\cos\theta)\sin(r\sin\theta)}{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\theta\, r\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

b. $f(x,y)$ $\begin{cases} \text{continua en } \mathbb{R}^2 \text{ si } K=0 \\ \text{continua en } \mathbb{R}^2-(0,0)\ \forall K\in\mathbb{R}-\{0\} \end{cases}$

**11.- Dada la función** $z = \dfrac{y^2\left(1+2y\,\text{sen}\dfrac{1}{x}\right)+x^2}{x^2+y^2}$ **. Se pide:**

**a) Dominio de la función.**
**b) Límites reiterados en el punto (0,0).**
**c) A la vista del resultado anterior ¿existe el límite de f en (0,0)? En caso afirmativo calcularlo.**
**d) ¿Es continua la función en (0,0)?**
**e) Definir f(0,0) para que f sea continua en dicho punto.**

a. $Df = \mathbb{R}^2 - \{0,y\}\ \forall y\in\mathbb{R}$

b. $$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^2(1+2y\sin(\frac{1}{x}))+x^2}{x^2+y^2} = \infty \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

c. $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} z(x,y)$ $\Rightarrow$ d. No es continua en $(0,0)$

e. $f(0,0) = 1$

**13.- Consideremos** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ **. Se pide:**

**a) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de cualquier recta** $y = mx$**.**
**b) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de la parábola** $y = x^2$**.**
**c) ¿Existe el límite? Justifica la respuesta.**

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x^2+m^2x^2}{mx^2} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{1+m^2}{m} \cdot \frac{1+m^2}{m}$$ $\nexists$ límite ya que dependerá de la pendiente m.

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{x^2+x^4}{x^3} = \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{1+x^2}{x} = \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{1}{x}+x = \infty$$

DEFINICIÓN

Sea $M_0(x_0,y_0)$ tq f puede ser definida en este punto. Se dice que f admite un límite $\ell$ en $M_0$ si:

$(x_0,y_0)$

All Exists

$\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0,\ (|x-x_0|<\eta; |y-y_0|<\eta) \Rightarrow |f(x,y)-\ell|<\varepsilon$

Al cambiar $\varepsilon$ cambia a $\eta$, $\eta$ depende de $\varepsilon$

se cumplen las 2 condiciones

no hace falta abs() porque $\varepsilon$ es estrictamente $>0$

**14.- Demostrar aplicando la definición de límite que** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(y\cos\dfrac{1}{x}\right) = 0$ **.**

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tq

**15.- Dada la función**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ k & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad \textbf{se pide:}$$

**a) Límites radiales en (0, 0)**
**b) Límites reiterados en (0, 0)**
**c) ¿Existe límite en (0, 0)?**
**d) ¿Existe algún valor de k para el cual la función sea continua en todo** $R^2$**?**

a. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r\cdot\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}} = \lim_{r\to 0^+} r^2\cos^2\theta\sin\theta = 0$$ $\left\{ \lim\limits_{(x,mx)\to(0,0)} \dfrac{mx^3}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim\limits_{(x,mx)\to(0,0)} \dfrac{mx^2}{\sqrt{1+m}} = 0 \right.$

b. $$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y} = 0 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x} = 0$$

c. Sí, es 0

d. Para $K=0$ $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$, $\forall K\in\mathbb{R}-\{0\}$ $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2-(0,0)$

**16.- ¿Existe el** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^2}{x^4y^2+(y-x^2)^2}$ **? Caso afirmativo, calcularlo.**

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^4} = 0 \to \text{No decide}$$

$\Updownarrow \neq$

$$\lim_{(x,x^2)} \frac{x^8}{x^8+(x^2-x^2)^2} = 1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \nexists$$

**17.- Sea** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **. Se pide:**

a) **Dominio** de f.
b) **Estudiar la continuidad de f.**

$$\lim_{x\to 0}\sin(x) = x$$

$$(x^2+y^2)\neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\sin(r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta))}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0^+}\frac{\sin(r^2)}{r^2} = \lim_{r\to 0^+}\frac{r^2}{r^2} = 1$$

f(x,y) es continua en todo $\mathbb{R}^2$

**18.- Sea** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+4y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **. Se pide:**

a) **Dominio** de f.
b) **Estudiar la continuidad de f.**

$D_f = \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+4y^2} = \lim_{r\to 0^+}\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta+4r^2\sin\theta} = \lim_{r\to 0^+}\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+4\sin\theta} \longrightarrow \text{No decide}$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+4y^2} = \lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{0}{4y^2} = 0 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+4y^2} = \lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{0}{x^4} = 0 \longrightarrow \text{No decide}$$

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)}\frac{x^4}{x^4+4x^4} = \frac{1}{5} \quad \neq \quad \longrightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

**19.- Sea** $f(x,y)=\begin{cases}2+\dfrac{x^2y(y^2+x^2)}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) **Hallar, si existe,** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
b) **¿Es f continua en (0, 0) para algún valor de k?**

$$\lim_{(x,y)} 2+\frac{x^2y(y^2+x^2)}{x^4+y^4} = \lim_{r\to 0^+} 2+\frac{r^5\cos\theta\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{r^4(\sin^4\theta+\cos^4\theta)} = \lim_{r\to 0^+} 2+\frac{r\cos\theta\sin\theta}{2} = 2$$

f(x,y) es continua en (0,0) para $k=2$

**20.- Sea** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2x(y^2+x^2)}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

**a) Hallar, si existe,** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2x(y^2+x^2)}{x^4+y^4} = \lim_{r\to 0^+}\frac{r^5\cos\theta\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{r^4(\sin^4\theta+\cos^4\theta)} = \lim_{r\to 0^+}\frac{r\cos\theta\sin\theta}{2} = 0$$

$\boxed{k=0}$

**21.- Sea** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **la función:** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^py^q}{2x^2+3y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **con p>0 y q>0.**

**Obtener** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **según los valores de p y q**

para $p+q=2$, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ya que el límite por polares depende solo de $\theta$

para $p+q>2$ $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ya que el límite por polares dará 0

**22.- Sea** $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **la función:** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **Estudiar la continuidad de f.**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^5}{x^2+y^4} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3(\cos^3\theta + r^2\sin^5\theta)}{r^2(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos^3\theta + r^3\sin^5\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$$

$$\lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^6+y^5}{y^4+y^4} = \lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^2+y}{2} = 0 \quad \left\{ \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^5}{y^4} = 0 \right. \quad \left\{ \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2} = 0 \right.$$

$$\lim_{(my^2,y)\to(0,0)} \frac{m^3y^6+y^5}{m^2y^4+y^4} = \lim_{(my^2,y)\to(0,0)} \frac{m^3y^2+y}{m^2+1} = 0$$

**Ejercicio 1.1** En cada uno de los siguientes casos

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$.

b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

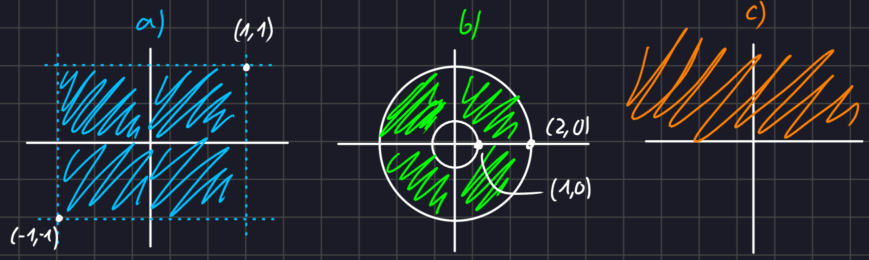
c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

se pide:

i) Determinar la frontera del conjunto $A$.

ii) Probar que el conjunto $A$ es abierto

iii) Dado $X_0 \in A$, determinar un valor $r > 0$ tal que $B_r(X_0) \subset A$.




i) a) $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm 1, -1 < x < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm 1, -1 < y < 1\}$

b) $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}$

c) $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$

ii) a) $A \cap fr(A) = \emptyset \Rightarrow A$ es abierto

b) $A \cap fr(A) = \emptyset \Rightarrow A$ es abierto

c) $A \cap fr(A) = \emptyset \Rightarrow A$ es abierto

iii) $X_0 = (x_0, y_0) \in A \in \mathbb{R}^2$

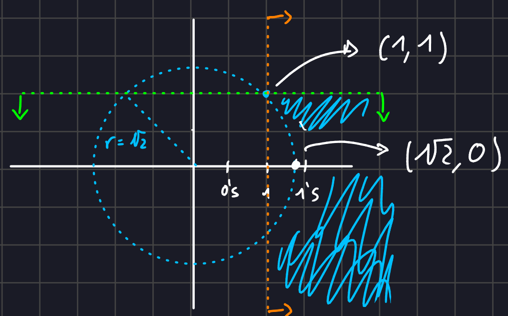
$B_r(X_0) \subset A$

2.2 d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 2, x \geq 1, y \leq 1\}$

se pide:

i) Representar el conjunto $A$ de $\mathbb{R}^2$.

ii) Indicar si $A$ es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.




¿Es $A$ abierto, es $A$ cerrado?

Calculo $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1, x \geq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 2, y \geq |1|\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, y \leq 1\}$

Calculo $A \cap Fr(A) = Fr(A) \Rightarrow A$ no es abierto ya que $A \cap Fr(A) \neq \emptyset$

$\Rightarrow A$ es cerrado ya que $A \cap Fr(A) = Fr(A)$

¿Es $A$ acotado, es $A$ compacto?

$A$ no está acotado $\Leftrightarrow$ no es compacto

¿Es $A$ convexo? No, $a = (1,1)$ y $b = (\sqrt{2}, 0) \in A$ pero $\overline{ab} \notin A$