Apuntes de análisis de variable compleja

2023

Apuntes de las clases de *Análisis de variable compleja* dadas por *Juan Matías Sepulcre Martínez* y transcritos a LaTeX por *Víctor Mira Ramírez* durante el curso 2023-2024 del grado en Física de la *Universidad de Alicante*.

Índice

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1: Número complejo

Un **número complejo** z es un par ordenado de números reales a, b escrito como $\boxed{z = (a, b)}$ en coordenadas cartesianas. Existe una notación equivalente, la forma binómica: $\boxed{z = a + ib}$ siendo $i = (0, 1)$.

El conjunto de los número complejos se denota por: $C := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Comentario:

Siempre que $a = 0$ sea un número imaginario puro, y $b = 0$ sea un número real.

Definición 1.1.2: Conjugado

Llamamos conjugado de un número complejo al número denotado $\boxed{\bar{z} = a - ib}$, siendo $z = a + ib$. Geométricamente, podemos decir que el eje real actúa de 'espejo' del número en el plano.

Comentario:

Llamamos $\mathbb{C}$ al cuerpo de los numeros complejos. $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo, pero no totalmente ordenado. En cambio, cualquier ecuación algebraica tiene solución en los complejos. De todas formas, el teorema fundamental del álgebra nos asegura que tendrá n soluciones en los complejos

Comentario:

Cuando los coeficientes de una ecuación algebraica son reales, las soluciones complejas vienen por pares.

Teorema 1.1.1 Operaciones elementales

SUMA $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$

RESTA $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i$

PRODUCTO $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$ (teniendo en cuenta que $i^2 = -1$)

DIVISIÓN $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{a + bi}{c + di} \cdot \dfrac{c - di}{c - di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i$ (multiplicando por el conjugado)

Comentario:

El elemento unidad es $1 + 0i$ y el elemento inverso es $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$. Para que un número complejo tenga elemento inverso, debe ser distinto de cero. El producto de un número complejo por su elemento inverso es la unidad.

Definición 1.1.3: Componentes de los complejos

Llamamos **módulo** del número complejo $z = a + bi$ a la cantidad $\boxed{\sqrt{a^2 + b^2}}$ denotada $|z|$

Llamamos **argumento** del número complejo $z = a + bi$ al ángulo que forma el semieje positivo de abcisas con la recta que contiene el vector (a, b). Se denota Arg $z = \alpha$ y se expresa en radianes.
$\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$ si $a \neq 0$

Definición 1.1.4: Módulo

Llamamos **módulo** de un número complejo $z = a + bi$, y lo denotamos $|z|$, a la cantidad

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Definición 1.1.5: Argumento

Llamamos **argumento** de un número complejo $z = a + bi$ al ángula que forma el semieje positivo de abcisas con la recta que contiene al vector. El argumento de z se representa por Arg(z)= α, y se expresa normalmente en radianes.

$$\alpha = \arctan\frac{b}{a}, \text{si} a \neq 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{si} a = 0, b > 0$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}, \text{si} a = 0, b < 0$$

Si el ángulo se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi)$ lo llamaremos argumento principal.

Comentario:

lol

Comentario:

forma exponencial: el desarrollo en serie de la exponencial es: $e^x = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ si introducimos un número complejo en la exponencial: $e^{iy} = 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots$
Si analizamos el valor de i^n en función de n, entonces vemos como la exponencial compleja queda ahora como:
$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!}\right) = \cos(y) + i\sin(y)$
$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ con $z = x + iy$

1.2 Analiticidad

Definición 1.2.1: Función armónica conjugada

Sea $u\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función armónica en un abierto de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diremos que $v\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una **función armónica conjugada** de u en $\mathcal{D}$ si v es armónica en $\mathcal{D}$ y satisfacen las condiciones de *Cauchy-Riemann*, (o equivalentemente la función $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en $\{x+iy \in \mathbb{C}\colon (x,y) \in \mathcal{D}\}$)

Comentario:
Una función armónica es aquella que satisface la ecuación de Laplace.

Teorema 1.2.1
Sea $u(x,y)\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ es una función armónica de $\mathcal{D}$ y consideramos v una región rectangular contenida en $\mathcal{D}$. Entonces existe una conjugada armónica de $u(x,y)$ en v.

1.3 Algunas funciones elementales

1.3.1. Función exponencial

Definición 1.3.1

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Teorema 1.3.1

1. $e^z \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$
2. $|e^z| = e^{Re(z)} \qquad z \in \mathbb{C}$
3. $arg\,(e^z) = \{Im(z) + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}\} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$
4. $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}} \qquad z \in \mathbb{C}$
5. $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$
   $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi k i \qquad z \in \mathbb{C}$
6. $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad x \in \mathbb{R}$
   $\nexists \lim_{|z|\to\infty} e^z = \infty \qquad x \in \mathbb{R}$
7. e^x es entera (derivable en todo punto de $\mathbb{C}$) $(e^z)' = e^z$
8. $e^{z+\omega} = e^z \cdot e^\omega, \qquad z, w \in \mathbb{C}$
   $(e^z)^n = e^{nz}, \qquad n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$

Ejemplo 1.3.1 ($e^{iz} - e^{-iz} = 4i$)
$e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Longleftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} - 4i = 0 \Longleftrightarrow e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$

Si $\omega = e^{iz} \Longrightarrow \boxed{\omega^2 - 4i\omega - 1 = 0}$

$$w = \frac{4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = 2i \pm \sqrt{3} = 2 \pm \sqrt{3}i \Longrightarrow \boxed{e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i}$$

1.3.2. Función logarítmica

Definición 1.3.2

Se introduce por la necesidad de solucionar ecuaciones como la anterior.

$$x = e^y \iff y = \log x, \qquad x\, 0, y \in \mathbb{R}$$

Sea $z \in \mathbb{C} - 0$, definimos el logaritmo principal de z, y lo denotamos por $\log z$, como

$$\log z = \ln|z| + i \cdot Arg(z)$$

Vemos que $e^{\log z} = e^{\log|z| + Arg(z)} = e^{\ln|z|} e^{Arg(z)} = |z| e^{Arg(z)} = z$
El conjunto de todos los logaritmos de z será:

$$\log z = \{\ln|z| + i\,(Arg(z) + 2\pi k)\,, k \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 1.3.2

1. Si $z = x > 0 \Rightarrow \log z = \ln|z| + i \cdot Arg(z) = lnx$
   $\log z = \{\ln x + 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}\}$
2. Si $z = -x > 0 \Rightarrow \log z = \ln x - i \cdot (-\pi)$ (argumento de z)
   $\log z = \{\ln x + -(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}\}$
3. Si $z = ix, x > 0 \Rightarrow \log z = \ln x + i\dfrac{\pi}{2}$
   $\log z = \left\{\ln x + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

Comentario:

Retomando la ecuación del ejemplo anterior,

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i = \begin{cases} (2 + \sqrt{3}i) \leftrightarrow iz = \log(2 + \sqrt{3})i \leftrightarrow z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - iln(2 + \sqrt{3}) \\ (2 - \sqrt{3}i) \leftrightarrow iz = \log(2 - \sqrt{3})i \leftrightarrow z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - iln(2 - \sqrt{3}) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Teorema 1.3.2 Propiedades

1. Log z es holomorfa en $\mathbb{C} - [-\infty, 0] \implies$ de hecho, no es continua en $(-\infty, 0]$
2. $\log_{\theta_0} = z$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}, \arg(z) = \theta_0\}$
3. $e^{\log_{\theta_0} z} = z, \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \arg(z) = \theta_0$ y $\left(\log_{\theta_0}\right)' = \dfrac{1}{z}$
4. $\log_{\theta_0} e^z = z \qquad \forall z = x + iy, \theta_0 <= y < \theta_0 + 2\pi\ z = x + iy, e^z = e^x e^{iy} \implies \log_{\theta_0} e^z = z$
   cuando $y \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$

Definición 1.3.3

Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$, tomamos $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta_0 <= \theta = \theta_0 + 2\pi$ y entonces $\log_{\theta_0} z = \ln|z| + i\theta$

Si $\theta_0 = -\pi \implies \log_{\theta_0} z = Logz$
Si $\theta_0 = 0 \implies \log_0 z = \ln|z| + i\theta, \qquad 0 <= \theta < 2\pi$

1.3.3. Función potencia

Definición 1.3.4: Potencia de exponente arbitrario

Sea $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, tomamos por definición z^α, llamada potencia de exponente arbitrario como el conjunto de todos los valores dados por:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} \tag{1.1}$$

Dohde $\log z$ representa el conjunto de todos los logaritmos de z.

Definición 1.3.5: Función exponencial general

Sea $a \in \mathbb{C} \setminus 0$, tomaremos por definición a^z, llamada función exponencial general como el conjunto de todos los valores dados por:

$$a^z = \exp(z \log a) \tag{1.2}$$

Donde $\log a$ es el conjunto de todos los logaritmos de a.

Ejemplo 1.3.3

- $(-2)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log(-2)} = e^{\frac{1}{2}(\ln 2 + i(\pi + 2\pi k))}$, con $k \in \mathbb{Z}$ (tomando la primera definición, $z = -2$ y $\alpha = \frac{1}{2}$)
- $2^i = e^{i \log(2)} = e^{i(\ln 2 + 2\pi k i)} = e^{-2\pi k} e^{i \ln 2} = e^{-2\pi k(\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2))}$ con $k \in \mathbb{Z}$
- $(-1)^{\frac{1}{\pi}} = e^{\frac{1}{\pi}\log(-1)} = e^{\frac{1}{\pi}(\pi + 2\pi k)i} = e^i \cdot e^{2ki} = e^{(2k+1)i}$, con $k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 1.3.4 (Potencia de exponente entero)
Sea $\alpha \in \mathbb{Z}$, entonces $f(z) = z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\ln|z| + i(Arg(2) + 2\pi k))} = e^{\alpha \ln|z|} \cdot e^{i\alpha Arg(z)} \cdot e^{i\alpha 2\pi k} = |z|^\alpha \cdot e^{i\alpha Arg(2)}$ función univaluada

Comentario:
Cuando tomemos $k = 0$ en la función logarítmica, entonces obtenemos la denominada **rama principal**.

Ejemplo 1.3.5 (Función multiforme/aplicación multivaluada)
$f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ con $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ Tomando $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $-\pi \leqslant \theta < \pi$ La llamada rama principal de $z^{\frac{1}{2}}$ es $f_1(z) = e^{\frac{1}{2}(\ln(r) + i\theta)} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{\theta}{2}i}$ Otra rama con el ¿?. $\arg(z) = \pi$ viene dada por $-f_1(z) = f_2(z) = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{\theta + 2\pi}{2}i}$

Si $k = 2 \longrightarrow e^{\frac{1}{2}(\ln r + i(\theta + 4\pi))} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot e^{2\pi i} = f_1(z)$

1.3.4. Funciones trigonométricas

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ con } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iZ}}{2i} \text{ con } z \in \mathbb{C}$$

$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ excepto en $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

Hiperbólicas

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \tanh z = \frac{\sinh}{\cosh} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

Teorema 1.3.3 Propiedades

1. $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
2. $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$
3. $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
4. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
5. $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi i, n \in \mathbb{Z}$
6. $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}i, nin\mathbb{Z}$
7. $\sinh(z) = -i\sin(iz)$
8. $\cosh(z) = \cos(iz)$

Comentario:

Comparación con el caso real:

- $e^z = \sum_{n=0} \dfrac{z^n}{n!}$
- $\sin z = \sum_{n=0} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh z = \sum_{n=0} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$
- $\sinh z = \sum_{n=0} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh z = \sum_{n=0} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$

Capítulo 2

Integración compleja

2.1 Preliminares topológicos

Definición 2.1.1: Entorno perforado

Llamamos **entorno perforado** de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ a un abierto de la forma $\{z \in \mathbb{C} \colon 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$, con $\epsilon > 0$

Definición 2.1.2: Tipos de conjuntos

- Diremos que dos conjuntos A y B de $\mathbb{C}$ están **espaciados** si $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$
  Siendo $\overline{A}$ la clausura, la adherencia de A.
- Diremos que un conjunto del plano es **conexo** si no puede ser escrito como unión de dos subconjuntos no vaciós y separados.
- Diremos que un conjunto $P \in \mathbb{C}$ es **poligonalmente conexo** si cada par de puntos de P pueden ser unidos mediante una poligonal contenida en P. (una ponigonal es una unión finita de segmentos).
- Un conjunto $E \in \mathbb{C}$ es **estrellado** si existe un punto $a \in E$ tal que $[a, z] \subset E \quad \forall z \in E$
- Un conjunto $C \in \mathbb{C}$ es **convexo** si $[z, w] \subset C \quad \forall z, w \in C$ (cualquier segmento formado por puntos del conjunto está dentro del conjunto).

  Nota: Sea $U \in \mathbb{C}$ un conjunto abierto, entonces U es conexo si y sólo si es poligonalmente conexo.
- Llamamos **simplemente conexo** al conjunto $S \subset \mathbb{C}$ del cual cada curva cerrada simple (sin autointersecciones) en S puede contraerse dentro del conjunto hasta ser un punto (no tiene agujeros).

2.2 Integración sobre caminos

Definición 2.2.1: Curva

Llamamos **curva** a una aplicación continua $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ con $a < b$, tal que a un número real $t \in [a, b]$ le corresponde un número complejo $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones reales y continuas.

- La **traza o trayectoria** de la curva $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t) \colon a \leqslant t \leqslant b\}$ será representado por γ^*
- Diremos que la curva es **cerrada** cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$

Definición 2.2.2: Camino

Una curva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ es **diferenciable** cuando γ es derivable en todo punto de $[a,b]$. Una curva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ es **suave** si es diferiencable (o de clase $C^1([a,b])$), si γ es derivable en $[a,b]$ y su derivada es continua. Llamamos **camino** a una curva suave a trozos (diferenciable con continuidad a trozos).

Comentario:

Los casos de curvas rectificables (aquellas curvas parametrizadas por $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$), con $t \in [a,b]$, para las que existe:

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2}\right\}$$

Con P en el conjunto de posibles particiones de $[a,b]$. En estos casos, la longitud de la curva se calcula como:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}\ dt$$

Definición 2.2.3: Integral compleja

Sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y f una función continua en $\gamma^* \in \mathbb{C}$, definimos la **integral conmpleja** de f a lo largo γ por:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt$$

Nota: Cuando no se diga nada, se supondra que el sentido de recorrido sobre un camino cerrado será el antihorario.

Ejemplo 2.2.1 ($\int_\gamma \bar{z}\ dz$, donde γ^* es el segmento $[1+i, 2+4i]$)

$\gamma(t) = (1-t)(1+i) + t\cdot(2+4i) \implies \gamma'(t) = -(1+i) + 2 + 4i = 1 + 3i$ con $t \in [0,1]$.

Si separamos en parte real y imaginaria nos queda:
$\gamma(t) = 1+t+i(1+3t) \implies \int_\gamma \bar{z}\ dz = \int_0^1 (1+t-i(1+3t))(1+3i)\ dt = \int_0^1 (1+t-i(1+3t)+3i+3it+3+9t)\ dt =$ $\int_0^1 (4+10t+2i)\ dt = \left[(4+2i)t + 5t^2\right]_0^1 = 4+2i+5 = 9+2i$

Ejemplo 2.2.2 ($\int_\gamma \bar{z}\ dz$, donde γ_2 es el trozo de parábola que une $1+i$ con $2+4i$)

$\gamma(t) = t + it^2 \implies \gamma'(t) = 1 + 2it$ con $t \in [1,2] \implies$
$f(\gamma_2(t)) = t - it^2 \implies \int_{\gamma_2} \bar{z}\ dz = \int_1^2 (t-it^2)(1+2it)\ dt = 9 + \frac{7}{3}i$