Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tema 6: Medios materiales magnéticos

Electromagnetismo

2º Curso Grado Física

Universidad de Alicante – Departamento de Física Aplicada

Índice

1. Multipolos magnéticos

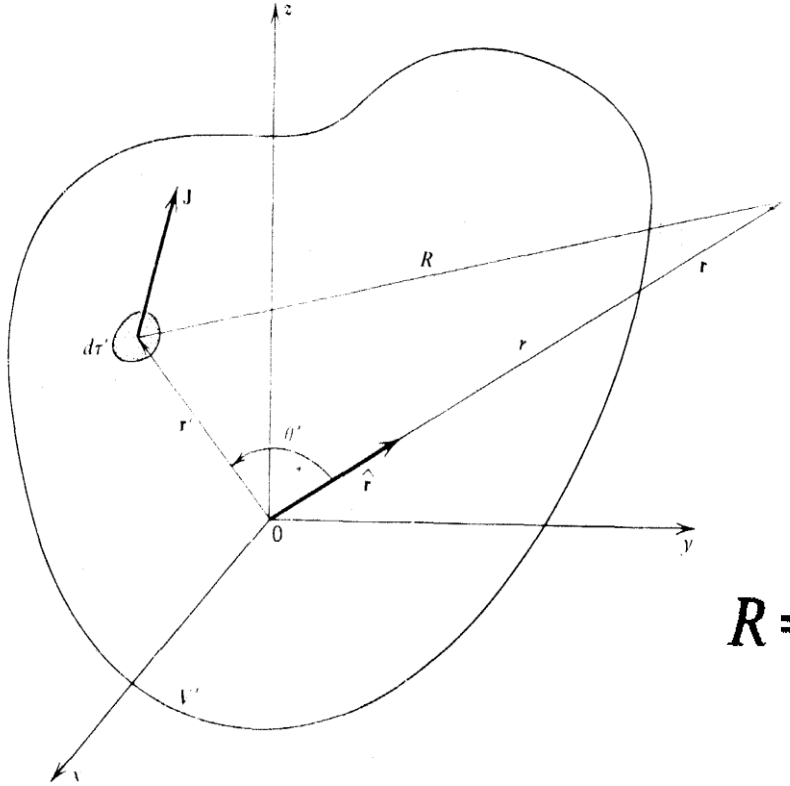
    - Desarrollo multipolar del potencial vector.
    - Dipolo magnético de una corriente filamental.

2. Magnetismo en presencia de materia

    - Vector magnetización (**M**), corrientes de magnetización y campo B que crean. Ejemplos.
    - Campo H y condiciones de contorno.
    - Relaciones constitutivas (relación entre B y H): tipos de materiales magnéticos.

Multipolos magnéticos

Sea una distribución de corriente con densidad **J´**, deseamos obtener el potencial vector **A**, para a partir de él, obtener **B**



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\,d\tau'}{R}$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'\right)^{1/2}$$

Si la distribución es muy compleja, calcular A es muy dificil
ALTERNATIVA: Hacemos un **desarrollo multipolar de A .** A distancias suficientemente alejadas, los primeros términos son buena aproximación.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') r'^l P_l(\cos\theta') d\tau'$$

TÉRMINO MONOPOLAR T. DIPOLAR T. CUADRIPOLAR

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_M(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_D(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_Q(\mathbf{r}) + \ldots$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\tau'$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{V'} \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2\right] d\tau' + \ldots$$

Término monopolar

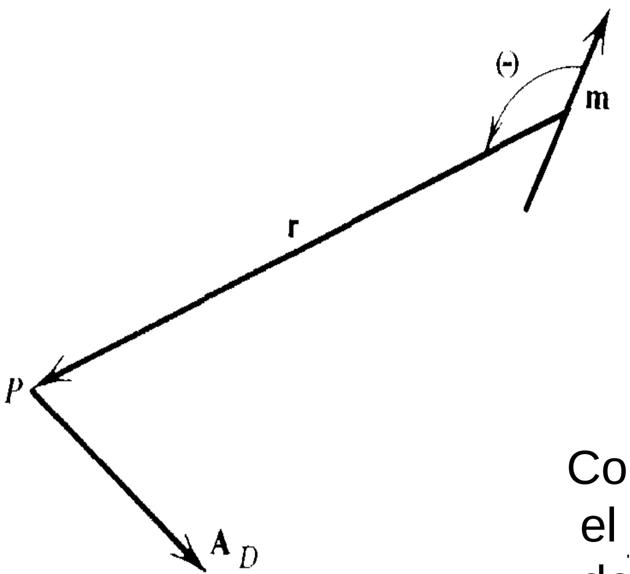
$$\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}')\,d\tau' = \sum_j I_j \oint_{C_j} d\mathbf{s}_j = 0$$

$$\boxed{\mathbf{A}_M(\mathbf{r}) = 0}$$

El término monopolar es nulo porque no existen monopolos magnéticos

Término dipolar

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\underbrace{\left[\frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')\,d\tau'\right]}_{\text{Vector Momento dipolar magnético: } \mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{r}}$$

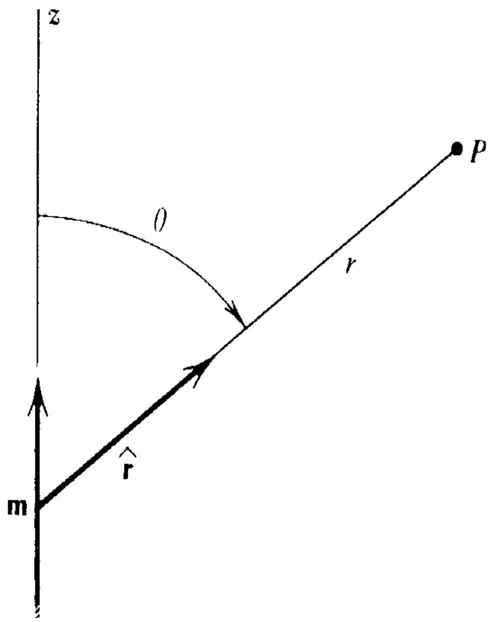


$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

El momento dipolar es perpendicular al plano que forman **A** y **r**

Como el término monopolar es nulo siempre, el término dipolar es siempre independiente del origen de coordenadas elegido.

Campo creado por un dipolo magnético

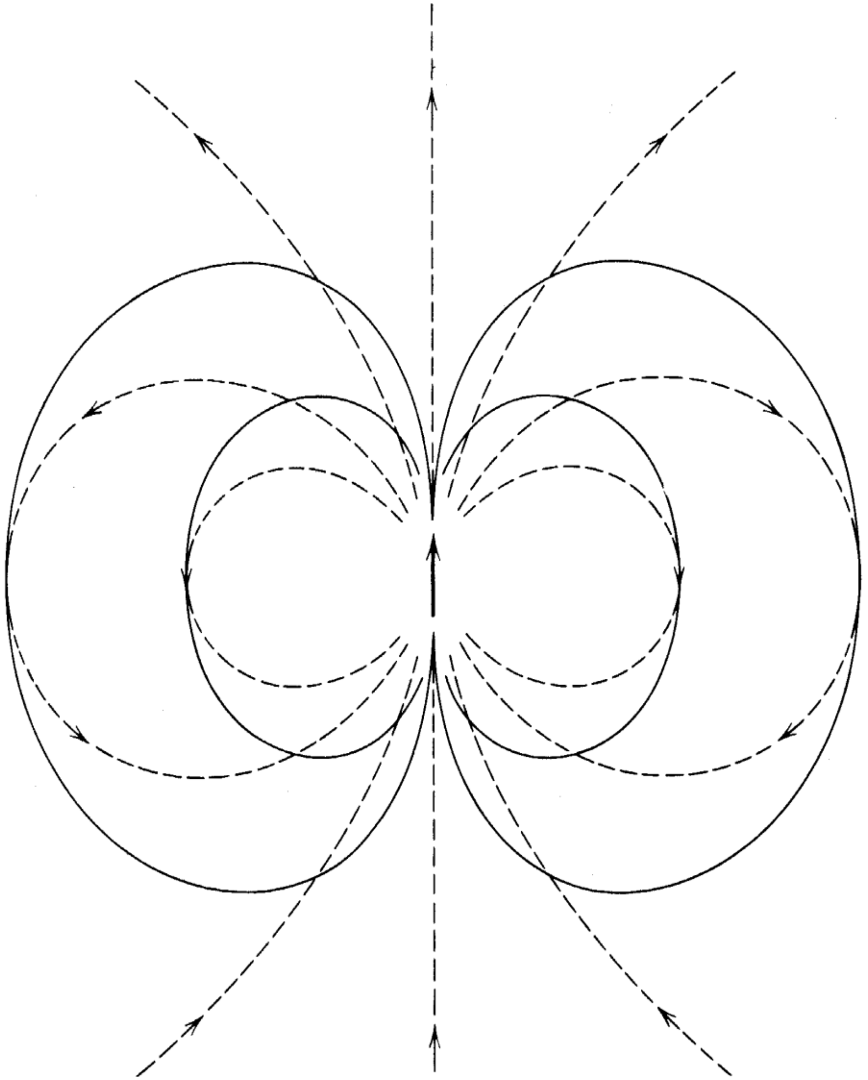


Sea un momento dipolar colocado en el origen y dirigido en la dirección z.

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 m \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$$\left\{\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta A_{D\varphi}\right) = \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi}\right)\frac{2\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_{D\varphi}\right) = \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi}\right)\frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3} \\ B_\varphi &= 0. \end{aligned}\right.$$



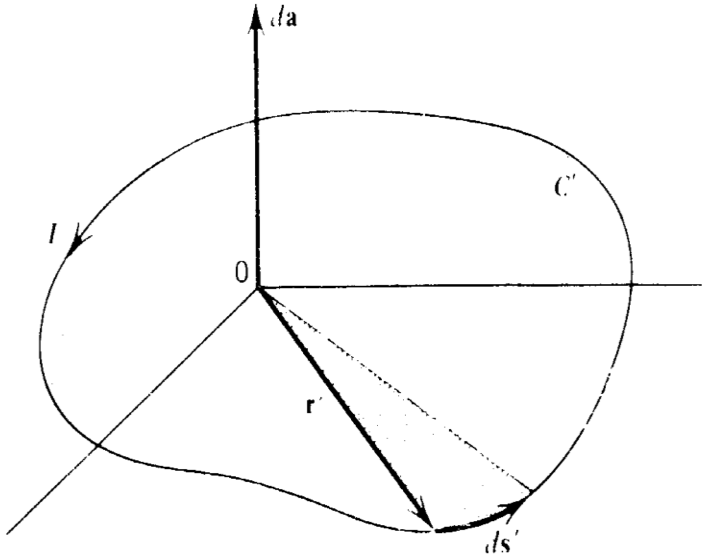
Campo B: líneas punteadas

Líneas continuas: líneas con valor del potencial vector constante

Dipolo magnético de una corriente filamental *I*

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2}\oint_{C'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{s}'$$

Si la corriente filamental *I* descansa sobre un plano



$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = IS\hat{\mathbf{n}}$$

S: Área concatenada por
el circuito.

El momento dipolar es perpendicular
Al plano sobre el que está *I*

2. Magnetismo en presencia de materia
Vector magnetización **M**

Suponemos que el material está formado por un conjunto de dipolos magnéticos **m**

Cuantificación de esta hipótesis:

MAGNETIZACIÓN, M: Momento dipolar magnético por unidad de volumen

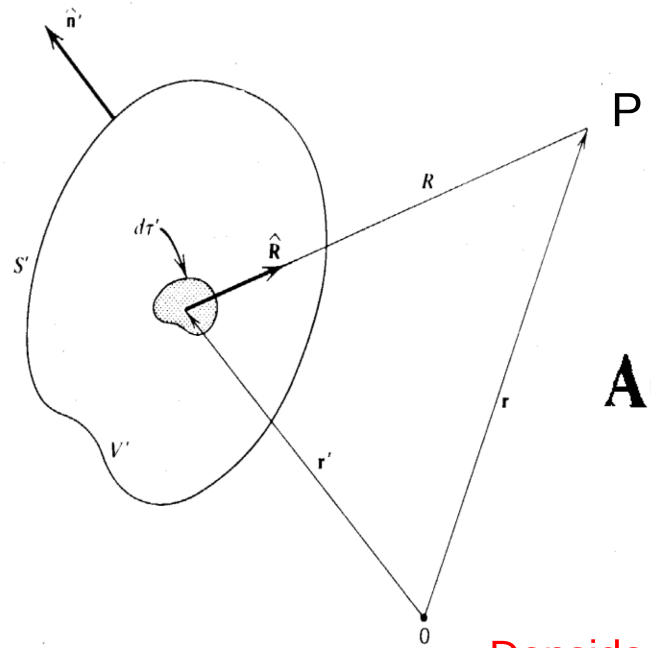
$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r})\, d\tau$$

$$\mathbf{m}_{\text{total}} = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r})\, d\tau$$

En algunos materiales (imanes permanentes) existe **M** sin campo aplicado.

La mayoría de materiales: si B=0, M=0 (los m están orientados al azar)
En presencia de B, los m se orientan y el material se magnetiza (M no nulo)

¿Efecto de un material magnetizado en un punto P externo del material?



Calculamos potencial vector A en punto P

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{(\nabla' \times \mathbf{M})\, d\tau'}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'} \frac{\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}'\, da'}{R}$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla' \times \mathbf{M}$$

Densidad corriente volumétrica de magnetización

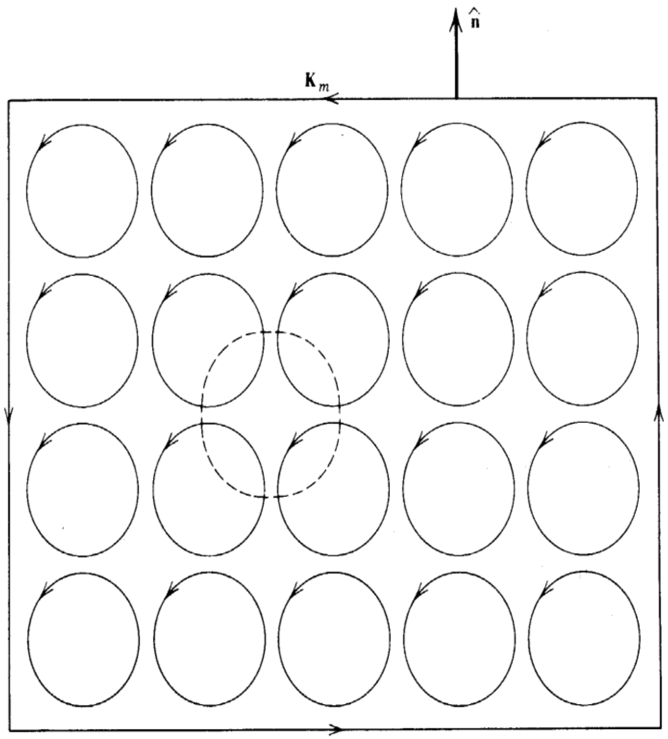
$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}'$$

Densidad corriente superficial de magnetización

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')\, d\tau'}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'} \frac{\mathbf{K}_m(\mathbf{r}')\, da'}{R}$$

CASO PARTICULAR: M UNIFORME

Ejemplo con M perpendicular al papel y saliente

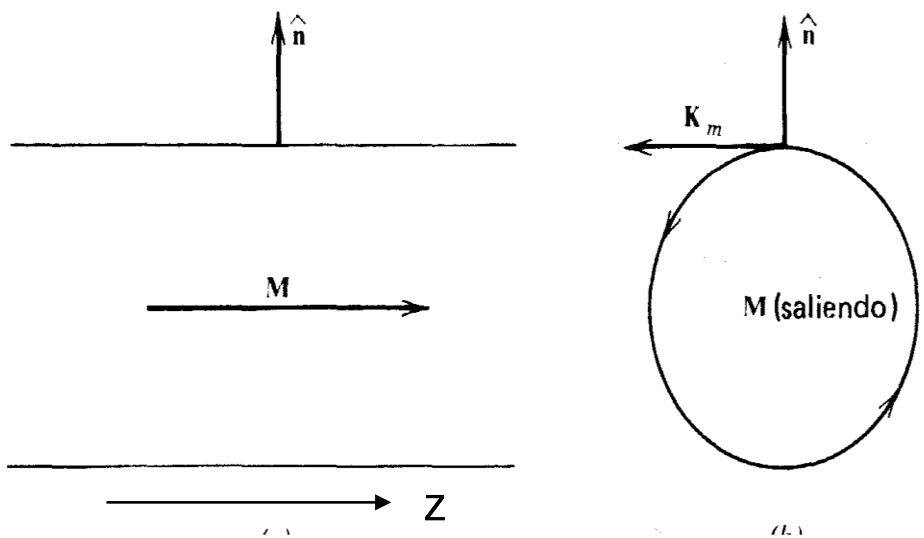


$\mathbf{J_m} = 0$

Solo hay densidad de corriente superficial

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE DENSIDADES DE CORRIENTE

CILINDRO DE LONGITUD INFINITA CON M UNIFORME



$\mathbf{J}_m = 0$

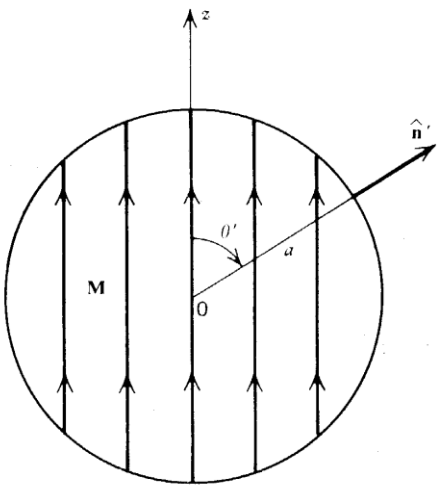
$$K_m = M$$

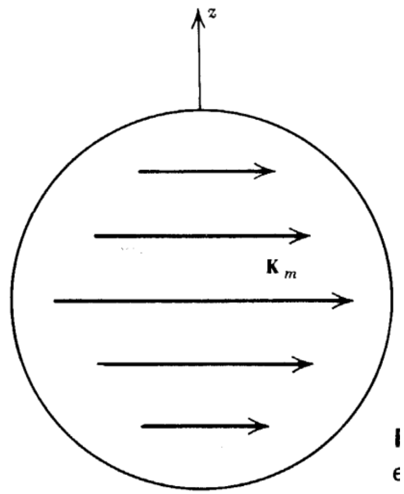
K = Vector tangente en cada punto del perímetro de la sección circular

Este tipo de corriente es la que se tiene en el caso de un **solenoide ideal infinito**

INTERIOR $\mathbf{B}_i = \mu_0 K\hat{\mathbf{z}} = \mu_0 n I\hat{\mathbf{z}}$ **EXTERIOR** $\mathbf{B}_{ext} = 0$

ESFERA UNIFORMEMENTE MAGNETIZADA





$$\mathbf{K}_m = M\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}' = M \operatorname{sen}\theta' \hat{\boldsymbol{\varphi}}'$$

m = Momento dipolar total de la esfera

EXTERIOR $$B_{zo}(z) = \frac{2\mu_0 M a^3}{3z^3} \qquad B_{zo}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{z^3}$$

$$\mathbf{m} = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \mathbf{M}$$

INTERIOR $$B_{zi}(z) = \tfrac{2}{3}\mu_0 M$$

En ambos casos **B** dirigido en dirección positiva de z (misma dirección de **M**)

Campo **H** y ley de Ampere

Forma diferencial de la Ley Ampere para **B**

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\mathbf{J}_{\text{total}} = \mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m$$

Libre De magnetización

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 (\mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M})$$

$$\nabla \times \underbrace{\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right)}_{\mathbf{H}} = \mathbf{J}_f$$

Forma diferencial de la Ley Ampere para **H**

Campo magnético
o campo H

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{a} = I_{f,\text{enc}}$$

Forma integral de la Ley Ampere para **H**

Condiciones de contorno para **H** en superficies de discontinuidad

COMPONENTES NORMALES

Se combina la definición de H con la condición de contorno de las componentes normales de **B**

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=-\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1)$$

DIVERGENCIA DE H $\nabla\cdot\mathbf{H}=-\nabla\cdot\mathbf{M}$

COMPONENTES TANGENCIALES

Necesaria la ecuación fuente de **H** $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f$

$$\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{K}_f$$

$$\mathbf{H}_{2t}-\mathbf{H}_{1t}=\mathbf{K}_f\times\hat{\mathbf{n}}$$

Relaciones constitutivas (relación entre **B** y **H**)

En presencia de un **B**, un material se magnetiza (magnetización **M**)

El tipo de funcionalidad **M (B)**, depende del tipo de material

En realidad en magnetismo, en lugar de intentar encontrar este tipo de relación, se intenta encontrar la relación **M(H)**

1) Imanes permanentes (materiales ferromagnéticos):
Hay **M** no nula cuando **H** = 0
Muchos de estos son no lineales

2) Materiales no lineales
M no es lineal con H, pues depende tb de potencias de H de orden superior

$$M = \chi H + \beta H^2 + \gamma H^3 + \ldots\ldots$$

3) Materiales lineales $M_i = \chi_{ij} H_j$ $\quad i = x, y, z$

χ_{ij} Tensor susceptibilidad magnética

Diamagnetismo: $X_m < 0$, **M** sentido opuesto al de **H**

Debido orbital de los electrones alterado por la presencia de un campo.
Presente en todos los materiales

Paramagnetismo: $X_m > 0$ **M**, mismo sentido de **H**

Debido a la existencia de momentos dipolares magnéticos permanentes

$|X_m| \ll 1$ Diferente de la susceptibilidad eléctrica, que era mayor de 1

EJEMPLOS

Ferromagnéticos: Compuestos de Fe y aleaciones con Co,Ni, ---

Diamagnéticos: Cobre y Helio y otros gases nobles
No hay contribución paramagnética
Paramagnéticos: Aire, magnesio, aluminio, titanio, Wolframio
La contribución paramagnética domina sobre la diamagnética

MATERIALES LINEALES, HOMOGENEOS E ISOTRÓPICOS

Lineales: M es lineal con H
Isótropos: M es independiente de la dirección de H
$\chi_{ij} = 0$ si $i \neq j$; $\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz}$
Homogéneo: M es independiente de la posición; χ es una constante (número entre -1 y 1).

$$\boxed{\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m)\mathbf{H} = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}}$$

RELACIÓN CONSTITUTIVA

$$\kappa_m = 1 + \chi_m = \text{permeabilidad relativa}$$

$$\mu = \kappa_m \mu_0 = \text{permeabilidad (absoluta)}$$

MAT. DIAMAG: $0 < \kappa_m < 1$; $\mu < \mu_0$

MAT. PARAMAG: $1 < \kappa_m < 2$; $\mu > \mu_0$

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\kappa_m \mu_0}\mathbf{B} = \frac{\chi_m}{(1+\chi_m)\mu_0}\mathbf{B}$$

M también es lineal con **B**

Como μ = cte

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{M} = 0$$

Relación sencilla entre **J** (= $\mathbf{J}_\mathbf{f}$ +$\mathbf{J}_\mathbf{m}$) y $\mathbf{J}_\mathbf{f}$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{J}_m = \nabla' \times \mathbf{M} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \end{array}\right\} \quad \mathbf{J}_m = \chi_m \mathbf{J}_f = (\kappa_m - 1)\mathbf{J}_f$$

$$\boxed{\mathbf{J} = (1+\chi_m)\mathbf{J}_f = \kappa_m \mathbf{J}_f}$$

Condiciones de contorno en discontinuidades para medios i.h.l.

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

Comp. Normales **B**

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = \mathbf{K}_f$$

Comp. Tangenciales **B**

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0$$

Comp. Normales **H**

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f$$

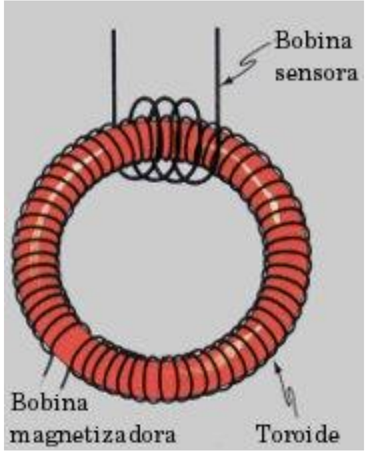
Comp. Tangenciales **H**

Materiales ferromagnéticos

Fe, Co, Ni y aleaciones

Relación entre M y H **NO LINEAL** y compleja: determinación **EXPERIMENTAL** (en realidad experimentalmente se determina la relación entre **B** y **H**)

Sistema que permita medir o determinar B y H de forma independiente



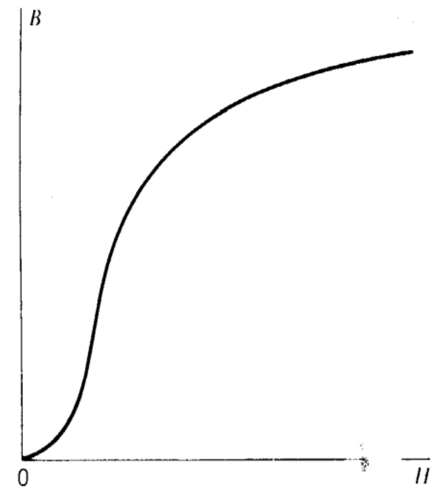
Se puede obtener la expresión para obtener H dentro de un toroide con la ley de Ampere (calculo similar al que se hizo en clase para B)

$$H_\varphi(\rho) = \frac{NI}{2\pi\rho}$$

a = sección circular del anillo del toroide; b = radio central del toroide

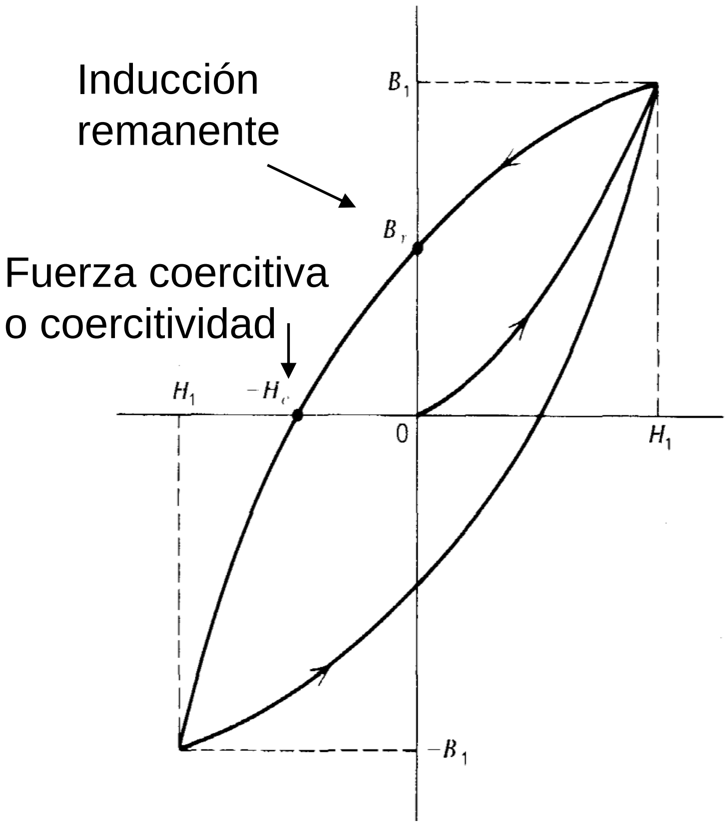
Si a<< b: $$H = \frac{NI}{2\pi b}$$

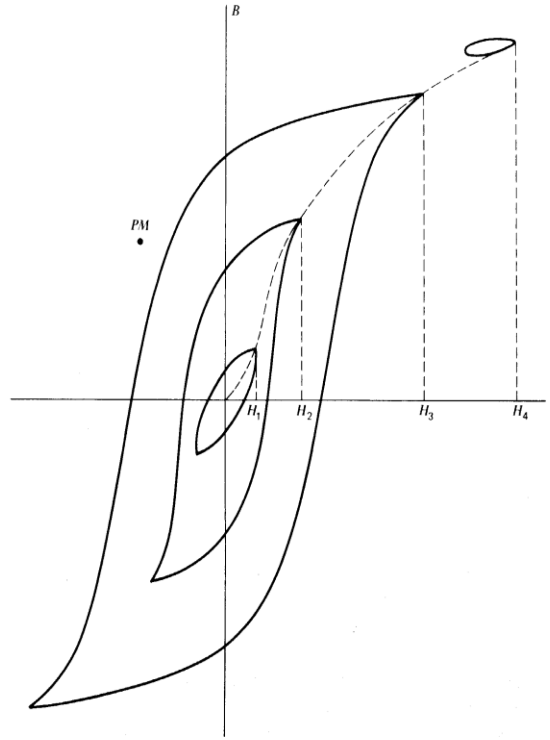
Se puede ir variando H cambiando la I
Por otro lado se mide la variación de B debido a esos cambios en H, determinando la fem inducida en otra bobina enrollada en el toroide



CURVA DE MAGNETIZACIÓN

La relación entre **B** y **H** a menudo no es unívoca
(depende de la historia del material): **CICLO DE HISTÉRESIS**





EJEMPLOS

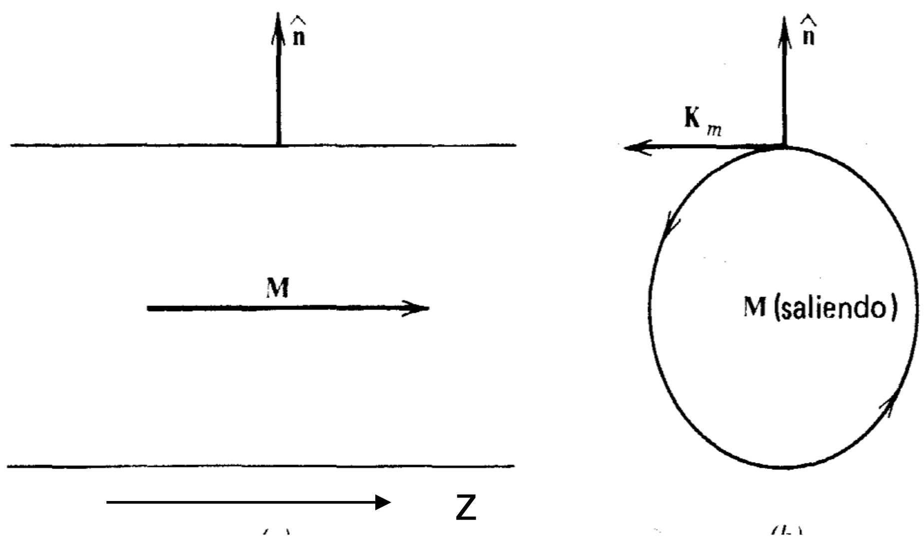
1. Campo H de diversos sistemas (sin medio material = vacío en todo lugar).

   - Cilindro infinito con magnetización uniforme.
   - Esfera con magnetización uniforme a lo largo de z

2. Aplicación de Ley de Ampere con H en sistemas que incluyen medios materiales

   - Cable coaxial.

CILINDRO DE LONGITUD INFINITA CON M UNIFORME



$$K_m = M$$

Corriente de magnetización

K = Vector tangente en cada punto del perímetro de la sección circular

No hay corrientes libres

INTERIOR $\mathbf{B}_i = \mu_0 K\hat{\mathbf{z}} = \mu_0 nI\hat{\mathbf{z}}$ **EXTERIOR** $\mathbf{B}_{ext} = 0$

Calculamos H: $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$

INTERIOR $\mathbf{H}_i = M - M = 0$ **EXTERIOR** $\mathbf{H}_{ext} = 0 - 0 = 0$

H es cero en todo lugar

Nótese que B está dirigido en la dirección z, luego en la interfase entre
Los dos medios consitutuye la componente tangencial a esta.

En la interfase**, B no es continuo** y **H** si. En la interfase hay corriente superficial de magnetización $\mathbf{K_m}$, no hay corrientes libres $\mathbf{K_f}$ =0

CONDICIONES DE CONTORNO para componentes tangenciales

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

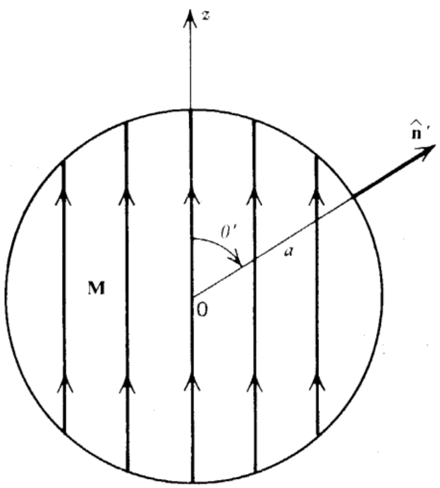
$\mathbf{K_f}$ = 0, por eso H es continuo en interfase.

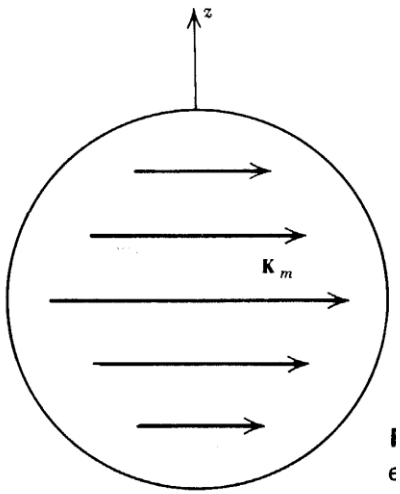
$$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$$

$\mathbf{K = K_m + K_f} = \mathbf{K_m} = \mathrm{M}$

Hay discontinuidad en **B** porque hay densidad de corriente en la interfase,
Que en este caso, es solo de magnetización

ESFERA UNIFORMEMENTE MAGNETIZADA





$$\mathbf{K}_m = M\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}' = M \operatorname{sen}\theta' \hat{\boldsymbol{\varphi}}'$$

m = Momento dipolar total de la esfera

EXTERIOR $$B_{zo}(z) = \frac{2\mu_0 M a^3}{3z^3} \qquad B_{zo}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{z^3}$$

$$\mathbf{m} = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \mathbf{M}$$

INTERIOR $$B_{zi}(z) = \tfrac{2}{3}\mu_0 M$$

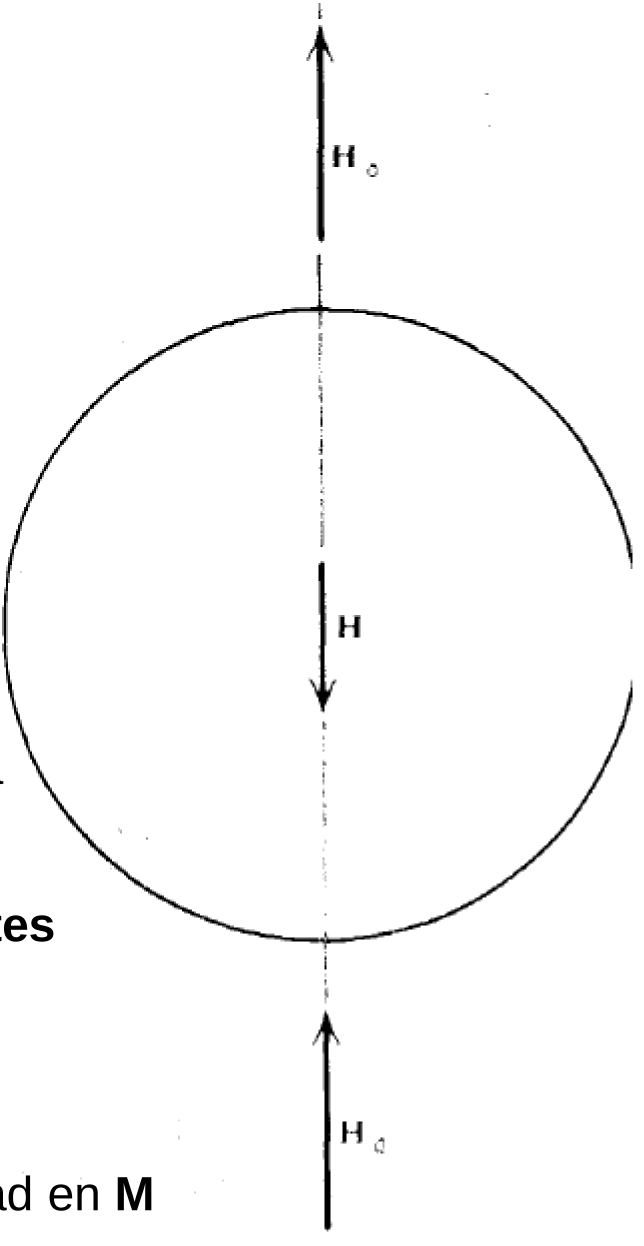
En ambos casos **B** dirigido en dirección positiva de z (misma dirección de **M**)

B es continuo en interfase

Calculamos H: $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$

INTERIOR $H_{zi}(z) = \dfrac{B_{zi}}{\mu_0} - M = -\dfrac{1}{3} M$

EXTERIOR $H_{zo}(z) = \dfrac{B_{zo}}{\mu_0} - 0 = \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{2m}{z^3} = \dfrac{2Ma^3}{3z^3}$



Ahora en la interfase z = a, el campo constituye la componente normal a ella

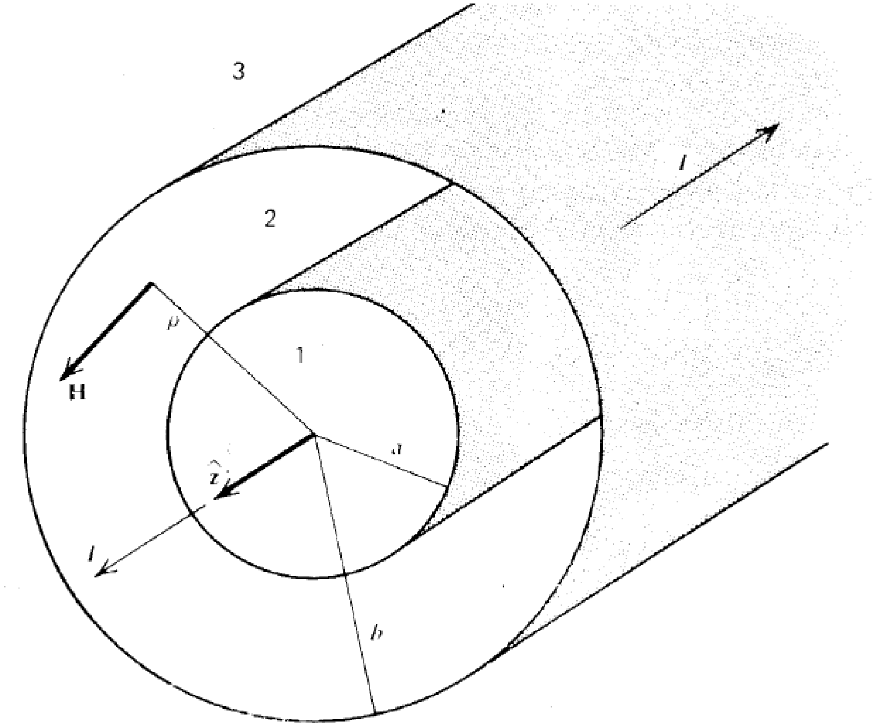
CONDICIONES DE CONTORNO para componentes normales

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = -\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)$$

Hay discontinuidad en **H** porque hay discontinuidad en **M**

LEY DE AMPERE PARA EL CAMPO H

CABLE COAXIAL



ρ : coordenada radial en cilíndricas

REGION 1: **ρ <a**, Conductor cilíndrico de radio a, de material no magnético, por el que circula corriente I

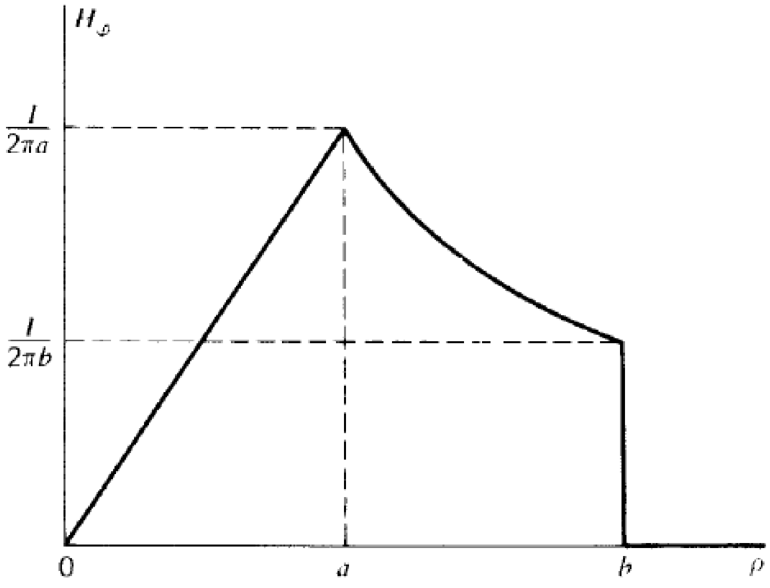
REGION 2: Material magnético entre **a < ρ < b**, de permeabilidad $\mu = K_m \mu_0$.

En ρ = b: Conductor cilíndrico de radio b, de grosor despreciable de material no magnético, por el
que circula corriente – I

REGIÓN 3: **ρ > b**, Vacío

Trayectorias de Ampere: cículos de radio ρ, concéntricos con el cilindro.

$$H_{\varphi 1} = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \qquad H_{\varphi 2} = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad H_{\varphi 3} = 0$$

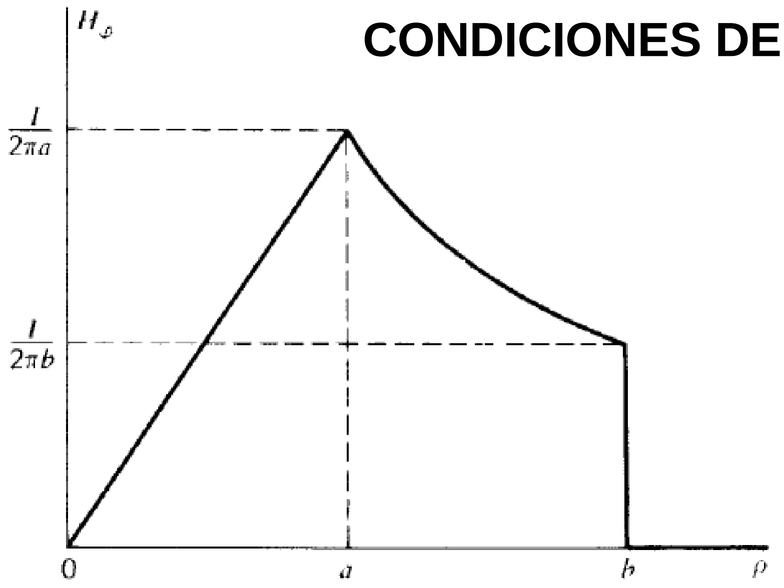


H constituye la componente tangencial a la interfase

Trayectorias de Ampere: cículos de radio r, concéntricos con el cilindro.

$$H_{\varphi 1} = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \qquad H_{\varphi 2} = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad H_{\varphi 3} = 0$$

H constituye la componente tangencial a la interfase



CONDICIONES DE CONTORNO para comp tangenciales

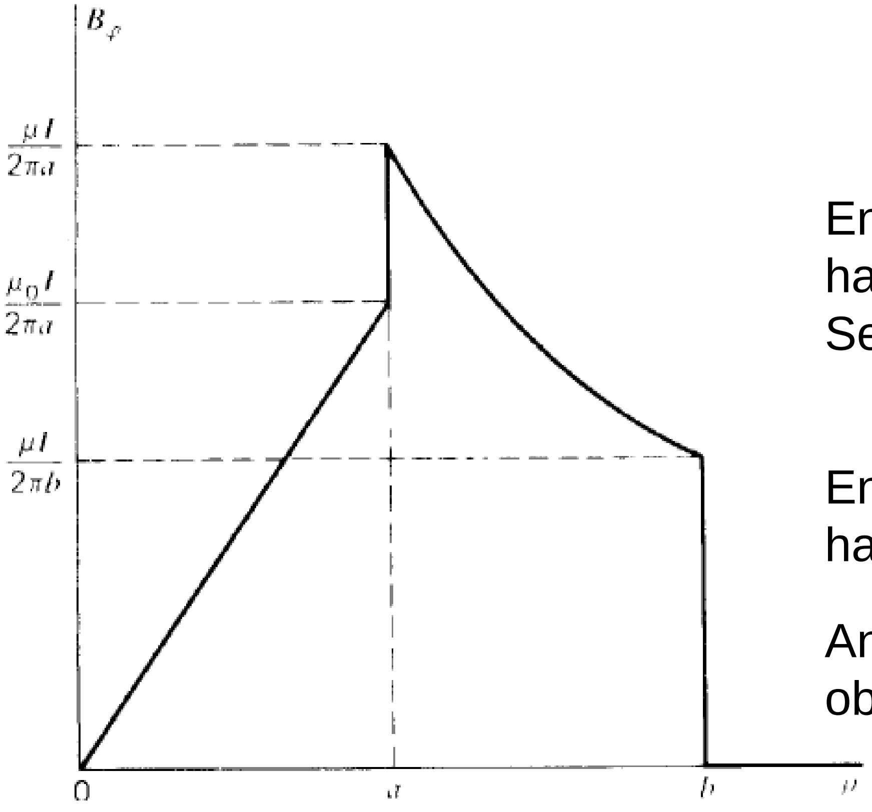
$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

Solo hay densidad de corriente libre superficial en ρ = b, por eso hay disc. Se puede obtener K_f

En región 1 hay corriente libre, pero es Volumétrica. En ρ = a no hay densidad de corriente libre superficial

Calculamos B, considerando que el material en región 2 es IHL $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$

$$B_{\varphi 1} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \qquad B_{\varphi 2} = \frac{\mu I}{2\pi\rho} \qquad B_{\varphi 3} = 0$$



$$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$$

$K = k_f + K_m$

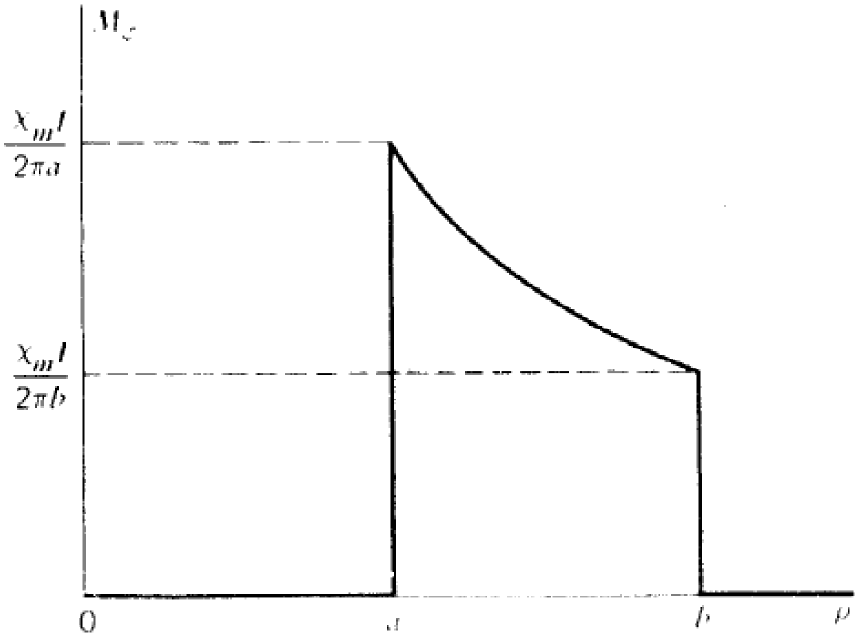
En ρ = a: hay discontinuidad porque hay $K = K_m$ ($k_f = 0$)
Se podría determinar K_m

En ρ = b: hay discontinuidad porque hay $K = K_m + K_f$

Antes se obtuvo K_f, luego se podría obtener K_m

A partir de las expresiones de **H** y **B**, se puede obtener **M**

$$M_{\varphi 1} = 0 \qquad M_{\varphi 2} = \frac{\chi_m I}{2\pi\rho} \qquad M_{\varphi 3} = 0$$



M es discontinuo en a y en b, lo cual implica que en esas superficies habrá densidad de corriente de Magnetización.

A partir de M, se pueden támbién obtener las densidades de corriente de magnetización en las interfases (el vector normal va hacia fuera del material magnético):

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}'$$

$$\mathbf{K}_{m2}(a) = M_{\varphi 2}(a)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times (-\hat{\boldsymbol{\rho}}) = \frac{\chi_m I}{2\pi a}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{K}_{m2}(b) = M_{\varphi 2}(b)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\chi_m I}{2\pi b}\hat{\mathbf{z}}$$