

Examen final de Mecánica Clásica I.

19 de enero de 2021

1. [3 puntos] La lagrangiana de una partícula de carga q y masa m que se mueve en el plano $x - y$ en presencia de un campo magnético en la dirección del eje z y de magnitud B es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

- (a) Obtén las ecuaciones de Lagrange.
(b) Basándote en el apartado anterior, si $\ell_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$, obtén $\frac{d\ell_z}{dt}$. ¿Es ℓ_z una constante de movimiento?
(c) Considera la transformación infinitesimal (rotación)

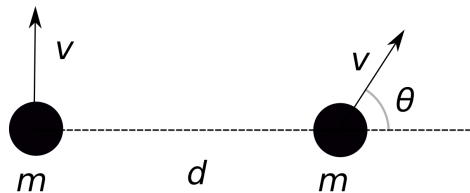
$$x \rightarrow x + \delta x, \quad y \rightarrow y + \delta y, \quad \dot{x} \rightarrow \dot{x} + \delta \dot{x}, \quad \dot{y} \rightarrow \dot{y} + \delta \dot{y},$$

donde

$$\delta x = -\epsilon y, \quad \delta y = \epsilon x, \quad \delta \dot{x} = -\epsilon \dot{y}, \quad \delta \dot{y} = \epsilon \dot{x},$$

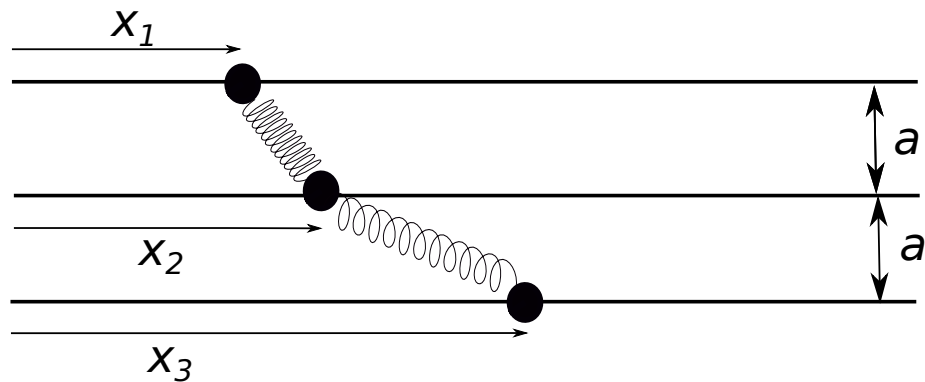
con ϵ un parámetro infinitesimal. Comprueba que la lagrangiana es invariante bajo esta transformación. Obtén, mediante el teorema de Noether, la magnitud conservada.

- (d) Obtén la lagrangiana en coordenadas polares $L = L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$.
(e) Obtén las ecuaciones de Lagrange y los momentos canónicos p_r y p_θ . ¿Son constantes de movimiento? ¿Se corresponde alguno de ellos con la constante de movimiento del apartado (c)?
(f) Obtén la solución de las ecuaciones de Lagrange en el caso en que $r = r_0 = \text{cte}$.
2. [2 puntos] Considera dos partículas iguales de masa m siendo d la distancia entre ellas. Las masas se atraen debido a la fuerza de la gravedad. Inicialmente, el módulo de la velocidad de cada una de ellas es igual a v , y, mientras que la primera se mueve en dirección perpendicular al segmento que las une, la segunda tiene una velocidad que forma un ángulo θ con la dirección del segmento que las une, como muestra la figura.
- (a) Obtén el ángulo θ y el módulo de la velocidad v , en función de G , m y d para que la órbita relativa sea circular.
(b) ¿Qué tipo de órbita relativa (circular, elíptica, etc.) realizarían las partículas si θ fuera el mismo que el obtenido en el apartado anterior pero v fuera el doble de lo obtenido en el apartado anterior? ¿Y si v fuera la mitad?



Nota: Recuerda que para el problema de Kepler: $e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}}$.

3. [3 puntos] Las tres partículas de la figura tienen la misma masa m y pueden deslizar sin rozamiento por las rectas paralelas. La distancia entre rectas consecutivas es a . Los muelles tienen una constante elástica k y longitud natural de equilibrio $\ell_0 = 0$. Usando las coordenadas indicadas, x_1 , x_2 y x_3
- Obtén la lagrangiana del sistema.
 - ¿Presenta alguna simetría? Si es así, ¿cuál es la magnitud conservada asociada a esta simetría? Razona tu respuesta.
 - Obtén las condiciones para que el sistema esté en equilibrio.
 - Obtén las frecuencias propias de oscilación alrededor de la posición de equilibrio.
 - Obtén los modos normales (sin normalizar) y dibuja esquemáticamente cómo se moverían las partículas en cada modo.



4. [2 puntos] Una plataforma horizontal de radio R gira a una velocidad angular constante, Ω . Una persona de masa m se mueve a velocidad constante respecto a la plataforma, desde el punto A al B , como indica la figura. Si, en el tiempo transcurrido para ir de A a B , la plataforma ha girado $10\sqrt{3}$ radianes, obtén la fuerza horizontal que debe ejercer el suelo de la plataforma sobre la persona para realizar ese movimiento. Expresa el resultado en función del tiempo transcurrido, t , desde que se inicia el movimiento y de m , R y Ω .

