

Análisis de circuitos de corriente alterna

Víctor Mira Ramírez

15 de febrero de 2024

Profesor: Carlos Untiedt Lecuona
Lugar: Universidad de Alicante

Índice

1. Circuito RLC en serie sin generador	2
1.1. Oscilador no amortiguado	3
1.2. Oscilador amortiguado	4
1.2.1. Oscilación subamortiguada	4
1.2.2. Oscilación sobreamortiguada	5
1.3. Energía disipada por la resistencia	6
2. Circuito RLC en serie con generador	7
2.1. Oscilador amortiguado y forzado	8
2.2. Estudio de la resonancia	9
3. Códigos	10

Resumen

En esta práctica de ordenador vamos a estudiar mediante el uso de programas en el lenguaje python, la dinámica de circuitos RLC con o sin generador. Para ello resolveremos diferentes ecuaciones diferenciales, regulando su dinámica mediante el uso de algoritmos. Representaremos los resultados de las magnitudes obtenidas utilizando gráficas en función del tiempo.

Analizaremos oscilaciones amortiguadas, tanto subamortiguadas como sobreamortiguadas, así como el caso con oscilaciones no amortiguadas.

1. Circuito RLC en serie sin generador

El sistema que estudiaremos es el mostrado en la figura 1: Un condensador inicialmente cargado Q , una resistencia R , una bobina L y un interruptor abierto S .

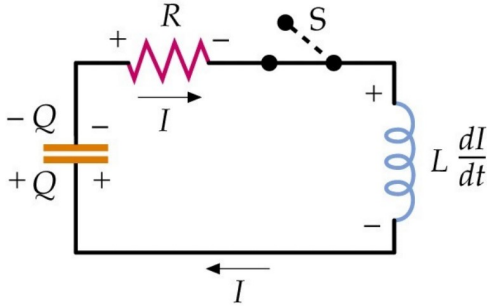


Figura 1: Circuito RLC

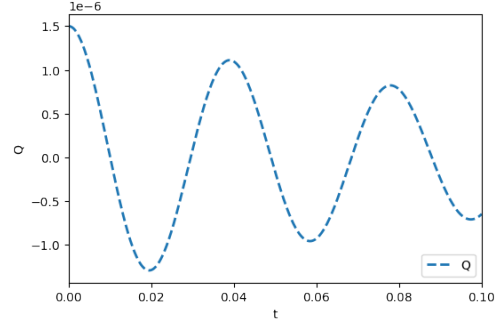


Figura 2: Q respecto de t

A tiempo cero se cierra el interruptor S y se estudia como evoluciona el sistema. Este circuito se excita con la energía inicialmente almacenada en el condensador. Tal energía está representada por la tensión inicial del condensador V_C , o análogamente, con su carga inicial como podemos observar en la figura 2, cuyo decaimiento se explica por la resistencia efectiva o impedancia.

Aplicando la regla de Kirchoff a la malla se obtiene:

$$V_C(t) - V_R(t) - V_L(t) = 0$$

donde $V_L = L \frac{dI}{dt}$ es el valor de la fem de la bobina.

Puede deducirse que la carga Q del condensador satisface la siguiente ecuación diferencial homogénea ordinaria de segundo grado:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0$$

Ahora, dividimos cada uno de los sumandos entre L y obtenemos:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0$$

Además, como la corriente que recorre el circuito es $I = \frac{dQ}{dt}$, el cambio de variable que realizaremos para tener dos ecuaciones integrales de primer orden queda de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= I \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{L} \left(RI + \frac{Q}{C} \right) \end{aligned} \right\}$$

Ahora, ya tenemos dos ecuaciones diferenciales de primer orden, integrables con la función 'odeint' de la librería de python 'scipy'.

La reactancia inductiva $X_L = \omega L$ y la reactancia capacitiva $X_C = \frac{1}{\omega C}$ desempeñan el papel de una resistencia efectiva en los circuitos puramente inductivos y capacitivos, respectivamente. En el circuito RLC en serie, la resistencia efectiva es la impedancia, Z , definida así:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

1.1. Oscilador no amortiguado

Cuando $R = 0$, la ecuación diferencial de la carga queda así:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q$$

Puede ponerse la ecuación anterior de la misma forma escribiendo ω^2 en lugar de $1/LC$. Siendo la solución de la ecuación:

$$Q = A \cos(\omega t - \delta)$$

La corriente se halla derivando esta solución:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \delta)$$

Escogiendo las condiciones iniciales que sean $Q = Q_0$ e $I = 0$ en $t = 0$, la constante de fase δ es nula y $A = Q_0$. Las soluciones quedan de la siguiente forma:

$$Q = Q_0 \cos(\omega t) \quad I = -\omega Q_0 \sin(\omega t) = -I_0 \sin \omega t$$

Obtenemos para las energías eléctrica y magnética respectivamente, las siguientes ecuaciones:

$$U_e = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad U_m = \frac{1}{2} LI^2$$

y para la frecuencia:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Con valores aleatorios obtenidos aleatoriamente representamos la intensidad y la carga frente al tiempo (Figuras 3 y 4), además de la energía magnética y eléctrica y su suma (Figuras 5 y 6). Obtenemos de las gráficas una frecuencia de oscilación de 25,700 hz que coincide con el cálculo numérico, de 25,704 hz . En la figura 6 no obtenemos una línea completamente horizontal a causa del arrastre de errores en el código, aunque este error sea del orden de $10^{-8} J$

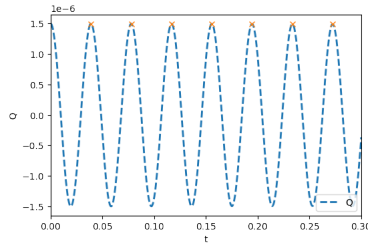


Figura 3: Q respecto de t

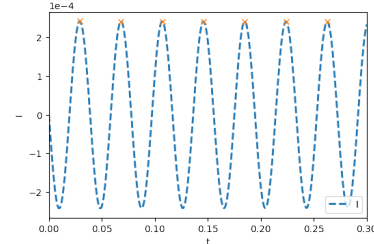


Figura 4: I respecto de t

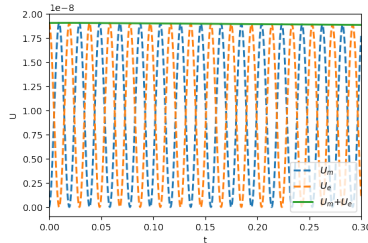


Figura 5: Energías

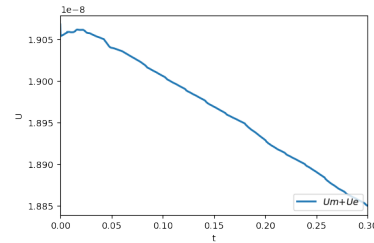


Figura 6: Suma de ambas

1.2. Oscilador amortiguado

1.2.1. Oscilación subamortiguada

Con los mismos valores de C , L y Q_0 usados en el apartado anterior, cambiaremos el valor de R poniendo un valor tal que $R^2 < \frac{4L}{C}$. Representaremos $Q = f(t)$, $I = f(t)$ y $U_m + U_e = f(t)$. de la misma forma.

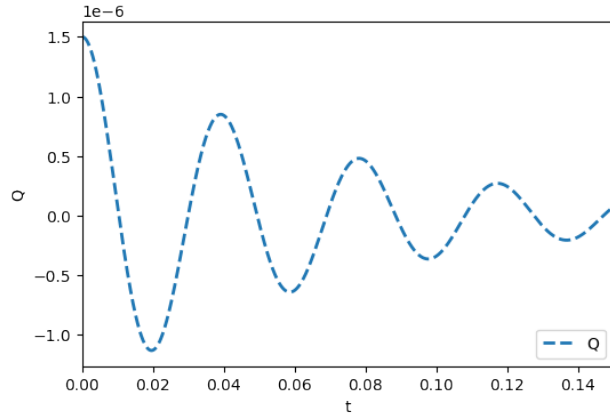


Figura 7: Q respecto de t

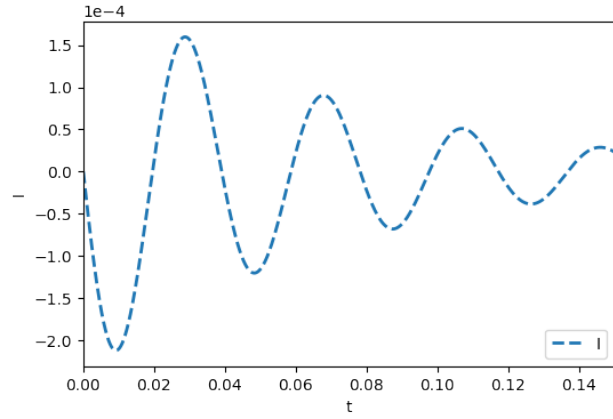


Figura 8: I respecto de t

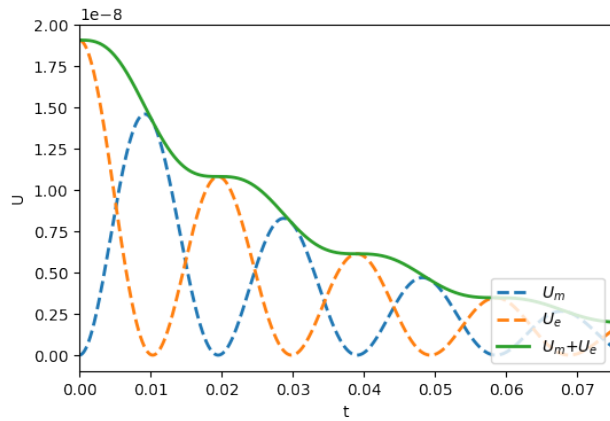


Figura 9: Energías

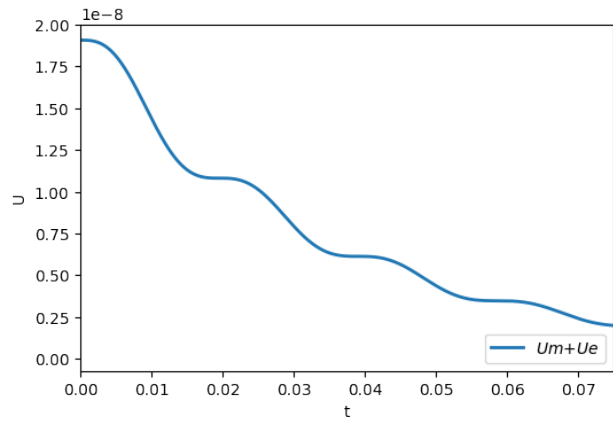


Figura 10: Suma de ambas

1.2.2. Oscilación sobrearmortiguada

Con los mismos valores de C , L y Q_0 usados en el apartado anterior, cambiaremos el valor de R poniendo un valor tal que $R > \frac{4L}{C}$. Representaremos $Q = f(t)$, $I = f(t)$ y $U_m + U_e = f(t)$ de la misma manera.

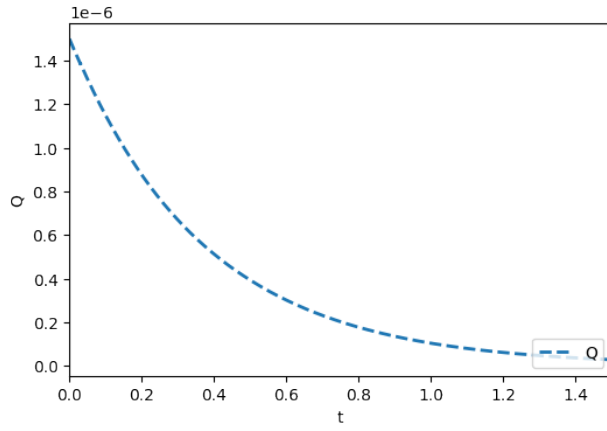


Figura 11: Q respecto de t

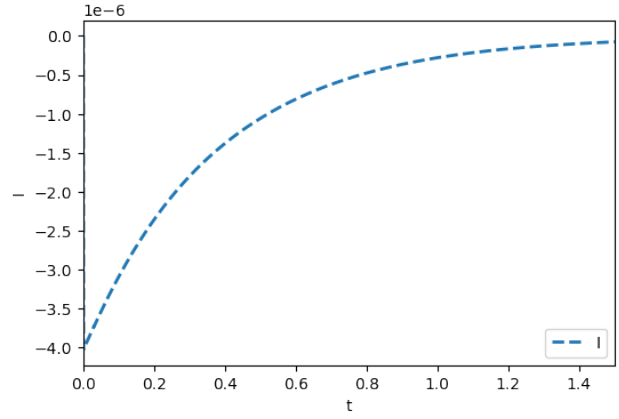


Figura 12: I respecto de t

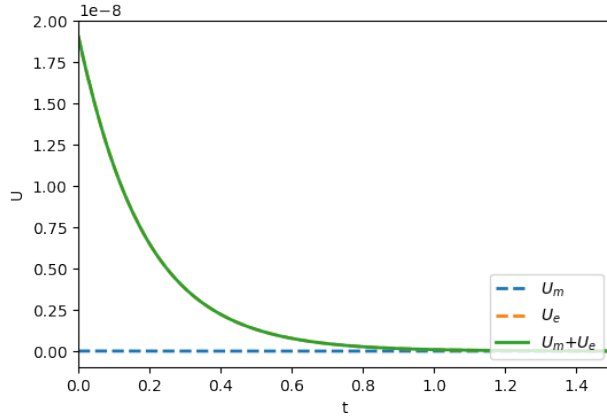


Figura 13: Energías

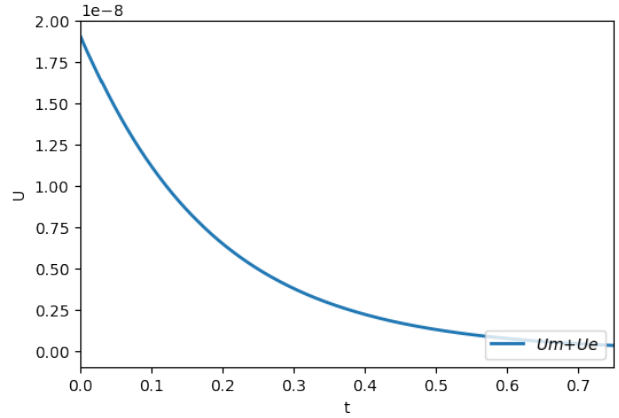


Figura 14: Suma de ambas

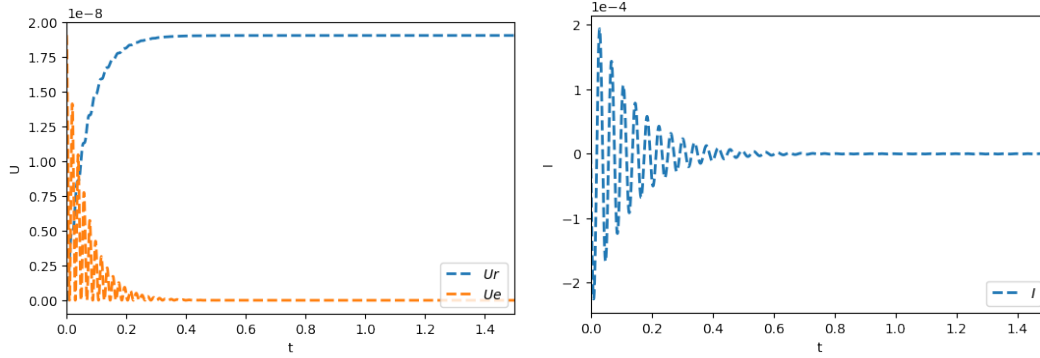
1.3. Energía disipada por la resistencia

Conociendo $I(t)$ podemos calcular la energía total disipada en la resistencia como

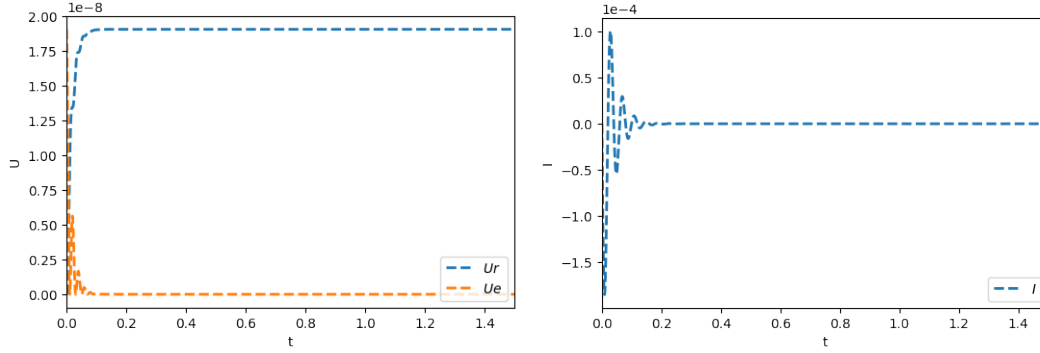
$$U_R = \int_0^\infty I^2(t) R dt$$

Graficamos $I(t)$ y calculamos U_R eligiendo como intervalo superior un tiempo largo de manera que I se haya hecho muy pequeña. Verificamos que U_R es igual a la energía inicial del circuito que corresponde a la U_e que tenía el condensador inicialmente. Presentamos gráficos tanto para casos subamortiguados como sobreamortiguados:

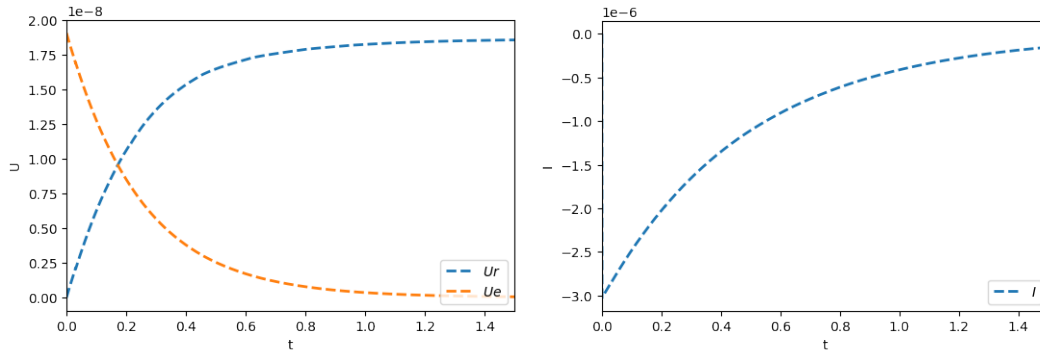
$R = 10 \, \Omega$, $U_r = 1,904 \cdot 10^{-8} \, J$):



$R = 40 \, \Omega$, $U_r = 1,906 \cdot 10^{-8} \, J$):



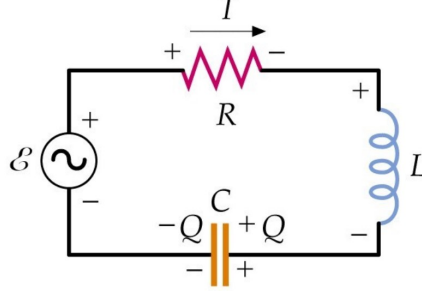
$R = 4000 \, \Omega$, $U_r = 1,892 \cdot 10^{-8} \, J$):



2. Circuito RLC en serie con generador

Cuando conectamos una fuente de voltaje a un circuito RLC, se proporciona energía para compensar para compensar la disipación de energía en la resistencia, de modo que la oscilación no atenúa.

Estudiaremos ahora el caso de un generador de voltaje alterno conectado en serie con un condensador (inicialmente descargado), una resistencia y una bobina como indica la figura.



El generador produce un voltaje alterno del tipo $V_\varepsilon(t) = V_0 \cos(\omega t)$

Aplicando la regla de Kirchhoff a la malla se obtiene:

$$V_\varepsilon(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = V_\varepsilon(t) - IR - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

que reordenando los términos conduce a la siguiente ecuación diferencial:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_0 \cos(\omega t)$$

Suponiendo que el condensador está inicialmente descargado la ecuación anterior para la carga del condensador se puede reescribir como:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos(\omega t)$$

El sistema tendrá un estado transitorio que ignoraremos, y al cabo de un tiempo llegará a un estado estacionario en el que oscilará con la frecuencia ω del generador. Ahora la ecuación diferencial que controla el sistema es equivalente a la de un oscilador armónico amortiguado y forzado. Una posible solución a la ecuación es:

Para la carga, su amplitud y fase:

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t - \delta)$$

$$Q_0 = \frac{V_0/L}{\sqrt{(R\omega/L)^2 + (\omega^2 - 1/LC)^2}} = \frac{V_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{V_0}{\omega \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$\tan \delta = \frac{1}{R}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Para la correspondiente corriente y su amplitud:

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = Q_0 \omega \sin(\omega t - \delta)$$

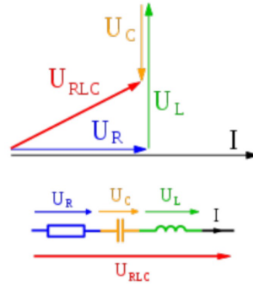
$$I_0 = Q_0 \omega = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_0}{Z}$$

2.1. Oscilador amortiguado y forzado

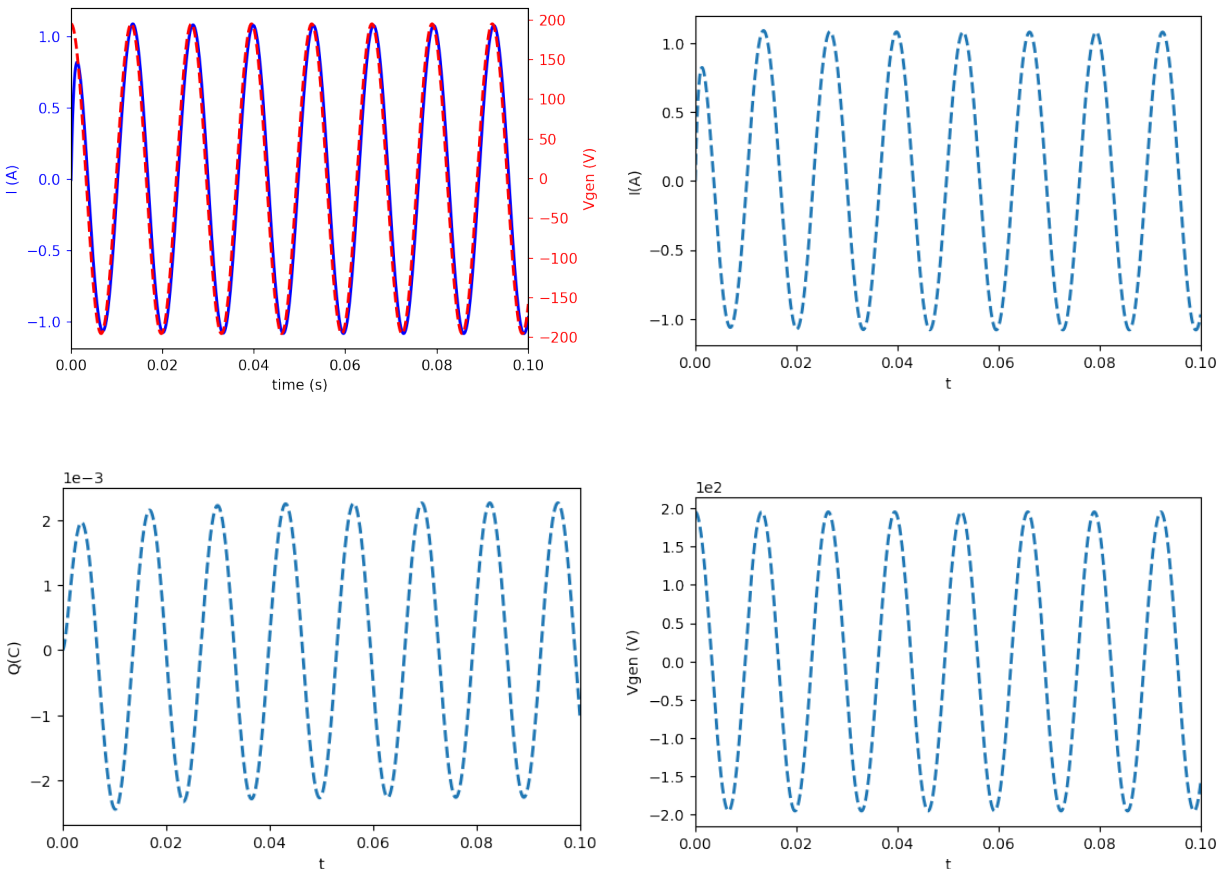
Una vez calculados los valores teóricos de I y δ con el método de los fasores, usaremos el siguiente script con los valores de R , C , L , V_{ef} y f generados. Graficaremos el voltaje aplicado y la corriente en el circuito en función del tiempo.

Para este apartado, el caso de un oscilador amortiguado y forzado, Graficaremos el voltaje aplicado y la corriente en el circuito respecto al tiempo.

En segundo lugar, mediante el uso de los fasores, calcularemos la reactancia inductiva y capacitiva, la impedancia, el desfase y la intensidad pico y eficaz. Tal como muestra la figura:



Una vez calculados los valores teóricos de I y δ con el método de los fasores, usaremos el siguiente script con los valores de R , C , L , V_{ef} y f generados. Recordar que los valores eficaces se relacionan con los valores máximos según $V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$.



Por el método de los fasores obtenemos los siguientes datos:

$$I_{\max} = 1,081 \text{ A}$$

$$I_{\text{eficaz}} = 0,7644 \text{ A}$$

$$\text{Periodo de } I(t) = 0,01316 \text{ s}$$

$$\text{Frecuencia de } I(t) = 76 \text{ Hz}$$

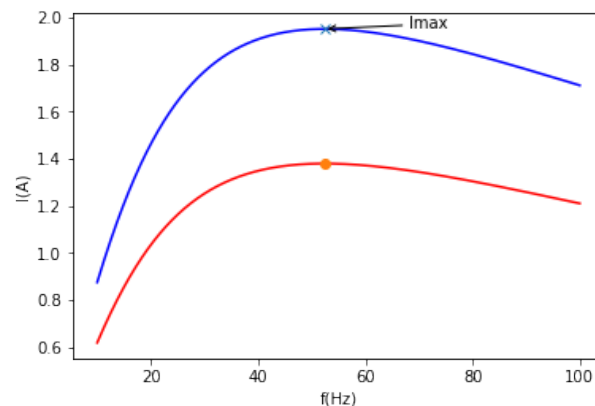
$$\text{Desfase} = 0,0266 \text{ rad} = 1,524^\circ$$

Destacar que existe un pequeño desfase entre el voltaje y la intensidad, que podemos observar en la pequeña distancia entre la curva azul y la roja de la figura. Podemos afirmar que el desfase entre ambas es muy pequeño y por tanto ambas magnitudes se comporten de manera muy parecida.

2.2. Estudio de la resonancia

Con los valores introducidos anteriormente (modificando la resistencia a pocos Ω) realizamos la gráfica de I en función de la frecuencia. Destacar que el máximo de I se obtiene para la frecuencia de resonancia $f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Obtenemos valores para la frecuencia de resonancia analíticamente y numéricamente y observamos que coinciden en $f_{\text{res}} = 52,36 \text{ Hz}$



En la figura graficamos la intensidad frente a la frecuencia, siendo la curva azul la intensidad máxima (que se obtiene para la frecuencia de resonancia) y la curva roja la intensidad efectiva.

3. Códigos

Adjunto en este apartado los códigos en python utilizados para la realización de esta práctica. Recordar que los siguientes enlaces están restringidos a lectores con correos electrónicos asociados a la Universidad de Alicante:

Circuito RLC en serie sin generador: Código sin generador

Circuito RLC en serie con generador: Código con generador