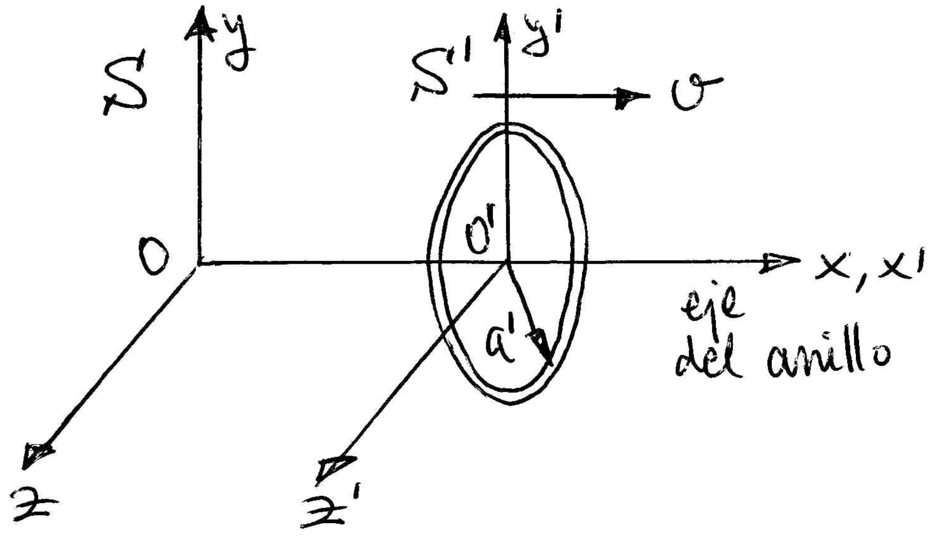
Partiendo de la expresión del tetrapotencial creado en puntos de su eje por un anillo de radio a y carga q en reposo, obtener:

(a) Los potenciales eléctrico y vector si el anillo se mueve con velocidad constante v en la dirección de su eje. Expresar el resultado tanto en términos de las coordenadas del sistema de referencia del anillo en reposo como en las del sistema de referencia respecto al cual el anillo se mueve con velocidad v. ¿Cuánto valen en el límite en el que el radio del anillo tiende a cero?

(b) Los campos eléctrico y magnético creados por el anillo en el sistema respecto al cual el anillo se mueve con velocidad v a partir de los valores de los potenciales obtenidos en el apartado (a).

(c) Las expresiones de los campos eléctrico y magnético creados por el anillo en el sistema de referencia respecto al cual se mueve el anillo, usando las expresiones de estos campos en el sistema del anillo en reposo y aplicando las ecuaciones de transformación de los campos.

(a) Consideremos un sistema de referencia S' que se mueve solidariamente con el anillo cargado. En este sistema de referencia S' el anillo está en reposo y sólo hay potencial eléctrico ϕ':



$$\left.\begin{aligned} \phi' &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x'^2+a'^2}} \\ \vec{A}' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad a' \text{ es el radio del anillo en el sistema } S'$$

La carga es un invariante por lo que $q'=q$.
Para calcular ϕ y $\vec{A}$ en el sistema S respecto al cual se mueve el anillo aplicamos las transformaciones de Lorentz ("boost" con velocidad v a lo largo del eje x) al tetrapotencial:

$$S \xleftarrow{\text{Paso de } S' \text{ a } S} S'$$

$$A^{\mu}=(\phi,\vec{A}) \qquad A'^{\mu}=(\phi',\vec{A}')$$

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \gamma(\phi' + vA'_x) \\ A_x &= \gamma\left(A'_x + \frac{v}{c^2}\phi\right) \\ A_y &= A'_y \\ A_z &= A'_z \end{aligned}\right\}$$

Teniendo en cuenta que en el sistema S' tenemos:

$$\phi' \neq 0 \qquad A'_x = A'_y = A'_z = 0$$

queda:

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \gamma(\phi' + vA'_x) = \gamma\phi' \\ A_x &= \gamma\left(A'_x + \frac{v}{c^2}\phi'\right) = \gamma\frac{v}{c^2}\phi' \\ A_y &= A'_y = 0 \\ A_z &= A'_z = 0 \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo la expresión de ϕ':

$$\phi = \gamma \phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\gamma}{\sqrt{x'^2 + a'^2}}$$

$$A_x = \gamma \frac{v}{c^2} \phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{q\gamma v}{\sqrt{x'^2 + a'^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\gamma v}{\sqrt{x'^2 + a'^2}}$$

$$A'_y = 0 \qquad A'_z = 0$$

Como $\vec{v} = v_x \hat{u}_x$, tenemos $\vec{A} = A_x \hat{u}_x$, luego:

$$\left.\begin{aligned} \phi(x', y', z') &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\gamma}{\sqrt{x'^2 + a'^2}} \\ \vec{A}(x', y', z') &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\gamma \vec{v}}{\sqrt{x'^2 + a'^2}} \end{aligned}\right\}$$

Para dar el resultado referido a las coordenadas espacio-temporales (x, y, z, t) del sistema S tenemos en cuenta las transformaciones de Lorentz:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \quad t' \text{ no aparece en } \phi, \vec{A}$$

Como las componentes de los vectores no cambian en el plano perpendicular a la dirección del "boost", en este caso el plano x'y' (o bien xy), el radio a' del anillo no cambia y por tanto:

$$a' = a$$

Sustituyendo en las expresiones de ϕ y $\vec{A}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(x,y,z,t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2+a^2}} \\ \vec{A}(x,y,z,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\gamma\vec{v}}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2+a^2}} \end{aligned}}$$

En el límite cuando el radio del anillo tiende a cero ($a \to 0$):

$$\lim_{a\to 0}\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x-vt|}$$

valor absoluto (es el módulo de un vector)

$$\lim_{a\to 0}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\gamma\vec{v}}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{|x-vt|}$$

que corresponden al potencial eléctrico y el potencial vector de una carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en la dirección del eje x, calculados en puntos del eje x

(b) A partir de las expresiones de $\phi(\vec{r},t)$ y $\vec{A}(\vec{r},t)$ podemos determinar los valores de los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ en el sistema S en el que el anillo se mueve con velocidad $\vec{v}$ a lo largo del eje x:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\\ \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A}\end{aligned}\right\}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{A}$ y ϕ sólo dependen de (x,t):

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{u}_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\gamma^3(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2+a^2]^{3/2}}\hat{u}_x$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial A_x}{\partial t}\hat{u}_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-qv(-v)\gamma^3(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2+a^2]^{3/2}}\hat{u}_x =$$

$$\underset{\mu_0=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{q\gamma^3 v^2(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2+a^2]^{3/2}}\hat{u}_x =$$

$$\underset{\beta=\frac{v}{c}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\beta^2\gamma^3(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2+a^2]^{3/2}}\hat{u}_x$$

de donde podemos calcular $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\gamma^3(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2+a^2]^{3/2}}\hat{u}_x -$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\beta^2\gamma^3(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2+a^2]^{3/2}}\hat{u}_x =$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\gamma^3(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2+a^2]^{3/2}}\underbrace{\left(1-\beta^2\right)}_{\frac{1}{\gamma^2}}\hat{u}_x =$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\gamma(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2+a^2]^{3/2}}\hat{u}_x$$

Para calcular $\vec{B}$ tenemos en cuenta que $\vec{A} = A_x\hat{u}_x$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times(A_x\hat{u}_x) = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{u}_y - \frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{u}_z = 0$$

A_x no es función de (y,z)
para puntos del eje del anillo (x)

De donde:

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\gamma(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2+a^2]^{3/2}} & B_x = 0 \\ E_y = 0 & B_y = 0 \\ E_z = 0 & B_z = 0 \end{array}}$$

(c) Si partimos de las expresiones de los campos, en el sistema S' tenemos en puntos del eje del anillo:

$$S' \rightarrow \begin{cases} \vec{E}' = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q x'}{[x'^2 + a'^2]^{3/2}} \hat{u}_x \\ \vec{B}' = 0 \end{cases}$$

Para un "boost" a lo largo del eje x con velocidad v, las transformaciones de los campos son:

$$\left.\begin{array}{ll} E_x = E'_x & B_x = B'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + v B'_z) & B_y = \gamma\left(B'_y - \dfrac{v}{c^2} E'_z\right) \\ E_z = \gamma(E'_z - v B'_y) & B_z = \gamma\left(B'_z + \dfrac{v}{c^2} E'_y\right) \end{array}\right\}$$

Vemos como las componentes de los campos en la dirección del "boost" (eje x) no cambian. En nuestro caso tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} E_x = E'_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q x'}{[x'^2 + a'^2]^{3/2}} \hat{u}_x \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = 0 \end{array}}$$

Teniendo en cuenta que ya hemos visto que se cumple:

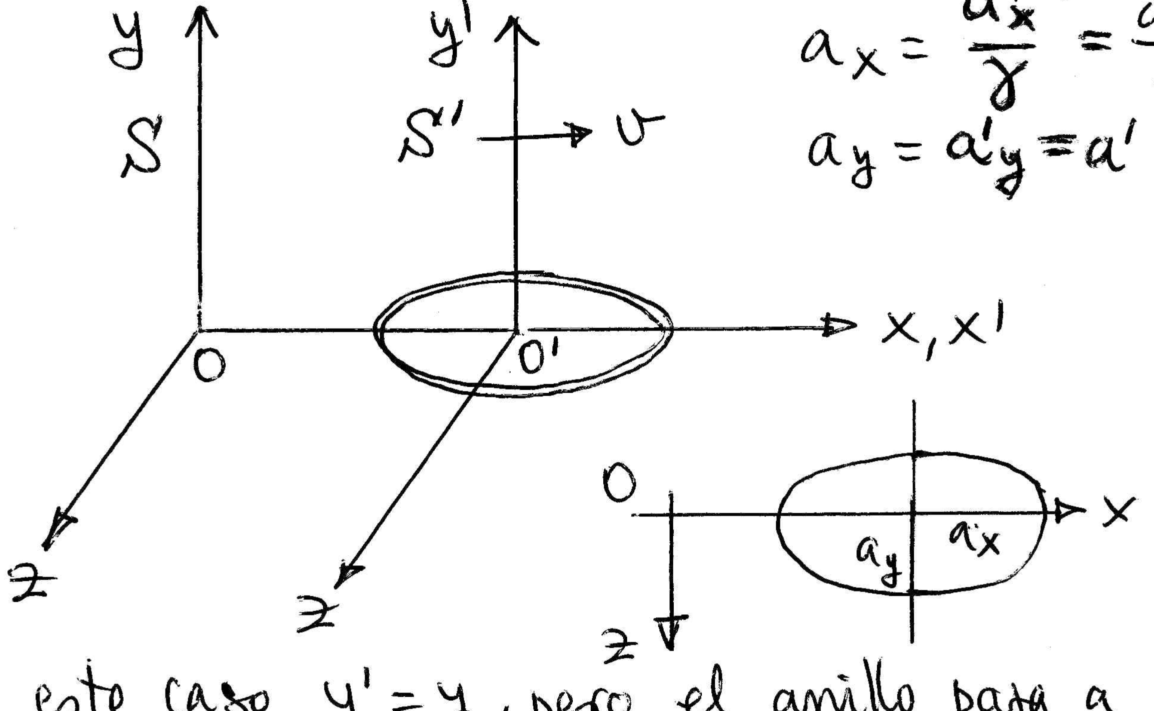
$$\left.\begin{aligned} x' &= x - vt \\ a' &= a \end{aligned}\right\}$$

nos queda para puntos del eje del anillo:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(x,t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\gamma(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2+a^2]^{3/2}}\,\hat{u}_x \\ \vec{B}(x,t) &= 0 \end{aligned}}$$

La situación sería distinta si el eje de anillo es paralelo, por ejemplo, al eje y:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{a'_x}{\gamma} = \frac{a'}{\gamma} \\ a_y &= a'_y = a' \end{aligned}\right\}$$



En este caso $y' = y$, pero el anillo pasa a ser una elipse en el sistema S por la contracción de Lorentz en el eje x ($a_x = a'/\gamma$).