Halla las ecuaciones de la recta del espacio euclídeo de $\mathbb{R}^4$ que pasa por el punto $P=(1,1,0,1)$ y corta perpendicularmente a la recta r

$r := \begin{cases} x=\beta \\ y=-1+2\beta \\ z=-1 \\ t=-\beta \end{cases}$

$r := (0,-1,-1,0) + \langle (1,2,0,-1) \rangle$ $\quad P \notin r \quad Q = r \cap s$

$\vec{QP} \perp (1,2,0,-1)$

$Q = (\beta, -1+2\beta, -1, -\beta)$ para algún $\beta \in \mathbb{R}$

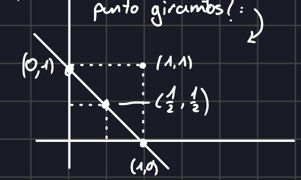
$\vec{QP} = (1-\beta, 2-2\beta, 1, 1+\beta)$

$$\langle (1-\beta, 2-2\beta, 1, 1+\beta), (1,2,0,-1) \rangle = 0 \Rightarrow 1-\beta+4-4\beta-(1+\beta)=0 \Rightarrow 4-6\beta=0 \Rightarrow \beta=\tfrac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{s := (1,1,0,1) + \langle (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, \tfrac{5}{3}) \rangle}$$

Determina el lugar geométrico de las imágenes del punto $(1,1)$ por todos los giros de $\mathbb{R}^2$ de ángulo $\frac{\pi}{2}$ y centro sobre la recta $x+y=1$

¿respecto a qué punto giramos?:

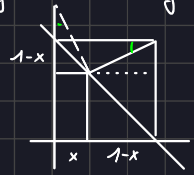


$g_{(1,0)}((1,1)) = (0,0)$

$g_{(0,1)}((1,1)) = (0,2)$

$g_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}((1,1)) = (0,1)$

Conjeturamos el eje OY como solución del problema



$x+y=1$
$y=1-x$
$(x,1-x)$

$g_{(x,1-x)}((1,1)) = (0, 2-2x)$

$g_{(1-x,x)}((1,1)) = (x-x, 1-x+1-x) = (0, 2-2x)$

Determinar el ángulo que forman los siguientes 2-planos en el espacio euclídeo standard $\mathbb{R}^3$: $\Pi_1 := x+z=1$, $\Pi_2 := x = 0 \to OYZ$

$(1,0,1) \perp \Pi_1$

$(1,0,0) \perp \Pi_2$

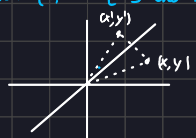
$$\cos\theta((1,0,1),(1,0,0)) = \frac{\langle (1,0,1),(1,0,0)\rangle}{\|(1,0,1)\|\cdot\|(1,0,0)\|} = \frac{1+0+0}{\sqrt{2}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Hallar las ecuaciones de la simetría de $\mathbb{R}^2$ respecto de la recta $y=x$ y dirección $(1,-1)$. ¿Es una isometría? - PROBLEMA TIPO EXAMEN

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ec. de la isometría

$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{matrix} y = ax+by \\ x = cx+dy \end{matrix}$



↳ eje de simetría

Sea $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la afinidad de ecuaciones $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Obtén los valores de K para que g sea un movimiento

b) Clasifica g

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^2+\frac{3}{4} & k+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}k+\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}+\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^2+\frac{3}{4} & k+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & k\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} & 1 \end{pmatrix} \to b)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow \text{movimiento inverso}$$

Puntos fijos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x = 2x \quad 0 = 2 \Rightarrow$$ sistema incompatible ⇒ no hay puntos fijos ⇒ simetría deslizante

$$V_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0=0 \\ -\frac{3}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}z=0 \end{matrix} \to y = \frac{z}{\sqrt{3}}$$ → un vector director del plano es $(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ $(1,0,0)$ el otro.

$V_1 = \langle (1,0,0), (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1) \rangle$

$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}$

$\vec{Pg}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} \quad 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4}\begin{pmatrix} 6 \\ 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}$

En el espacio afín euclídeo standard $\mathbb{R}^2$ se considera la afinidad g definida por: $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/5 \\ -6/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Determina si g es un movimiento. En caso afirmativo, clasifícala y calcula sus elementos geométricos.