TEMA 3: Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

3.1. Concepto de matriz. Operaciones con matrices.

DEFINICION 3.1 *Una **matriz** A de orden $m \times n$ en un cuerpo $\mathbb{K}$ (en particular, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) es un conjunto de $m \times n$ elementos de $\mathbb{K}$ ordenados en m filas y n columnas. Utilizaremos la notación*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*y, de forma más abreviada, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ o $A = (a_{ij})$, donde los a_{ij} son los **coeficientes** o **elementos** de la matriz A y los subíndices del coeficiente a_{ij} indican que éste se encuentra en la fila i y en la columna j de la matriz A.*

En ocasiones trabajaremos con las filas o las columnas de la matriz A y, por eso, denotaremos la i-ésima fila de A por

$$a_{i\cdot} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

y la j-ésima columna de A por

$$a_{\cdot j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

y, por tanto, la matriz A se puede escribir

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\cdot} \\ a_{2\cdot} \\ \vdots \\ a_{m\cdot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\cdot 1} & a_{\cdot 2} & \cdots & a_{\cdot n} \end{pmatrix}.$$

El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ en $\mathbb{K}$ se representa por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

DEFINICION 3.2 *Dos matrices son **iguales** si son del mismo orden y los coeficientes situados en el mismo lugar coinciden.*

DEFINICION 3.3 *Se llama **matriz cuadrada** de orden n a cualquier matriz de orden $n \times n$, es decir, una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas.*

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n, los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forman la ***diagonal principal*** *de A.*

DEFINICION 3.4 *Se llama* ***matriz nula****, y la denotaremos por O, a la que tiene todos sus coeficientes iguales a 0.*

DEFINICION 3.5 *Se dice que una matriz A cuadrada de orden n es* ***triangular superior*** *si todos los coeficientes que están por debajo de la diagonal principal son 0, es decir, $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.*

EJEMPLO 3.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior.

DEFINICION 3.7 *Se dice que una matriz A cuadrada de orden n es* ***triangular inferior*** *si todos los coeficientes que están por encima de la diagonal principal son 0, es decir, $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.*

EJEMPLO 3.8 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior.

DEFINICION 3.9 *Se dice que una matriz A cuadrada de orden n es* ***diagonal*** *si todos los elementos que no están en la diagonal principal son 0, es decir, $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.*

EJEMPLO 3.10 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal.

DEFINICION 3.11 *Se llama* ***matriz identidad*** *a una matriz diagonal en la que todos los elementos que están en la diagonal principal son 1. La matriz identidad de orden n se representa por I_n.*

EJEMPLO 3.12 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3.

Suma de matrices.

DEFINICION 3.13 *Dadas dos matrices, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, de orden $m \times n$, la* ***matriz suma*** *de A y B, denotada por $A + B$, es otra matriz de orden $m \times n$ que se obtiene sumando los coeficientes de A y B que ocupan la misma posición, es decir,*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})\,.$$

EJEMPLO 3.14 $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 4+(-4) & 2+5 \\ 0+(-7) & -2+3 & 1/2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -7 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}.$

PROPIEDADES:

1. *Conmutativa*: $A + B = B + A$. Es consecuencia de la propiedad conmutativa de la suma en el cuerpo $\mathbb{K}$.
2. *Asociativa*: $A + (B + C) = (A + B) + C$. Es consecuencia de la propiedad asociativa de la suma en el cuerpo $\mathbb{K}$.
3. El *elemento neutro* de la suma de matrices es la matriz nula O, ya que $A + O = O + A = A$.
4. Toda matriz A de orden $m \times n$ tiene *simétrico* para la suma: $-A = (-a_{ij})$, ya que se verifica que $A + (-A) = (-A) + A = O$.

PROPOSICION 3.15 $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +)$ *es un grupo abeliano.*

Producto de un escalar por una matriz.

DEFINICION 3.16 *Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, el producto del escalar λ por la matriz A, denotado por $\lambda \cdot A$, es otra matriz de orden $m \times n$ que se obtiene multiplicando cada coeficiente de A por λ, es decir,*

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})\,.$$

EJEMPLO 3.17 $5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-1) & 5\cdot 3 \\ 5\cdot 4 & 5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}.$

PROPIEDADES:

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$. Es consecuencia de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en el cuerpo $\mathbb{K}$.

2. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$. Es consecuencia de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en el cuerpo $\mathbb{K}$.

3. $\lambda (\mu A) = (\lambda \mu) A$. Es consecuencia de la propiedad asociativa del producto en el cuerpo $\mathbb{K}$.

4. $1A = A$.

PROPOSICION 3.18 *$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ con la suma y el producto por un escalar es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

Producto de matrices.

DEFINICION 3.19 *Dadas una matriz $A = (a_{ik})$ de orden $m \times p$ y una matriz $B = (b_{kj})$ de orden $p \times n$, la **matriz producto** de A y B es la matriz $AB = (c_{ij})$ de orden $m \times n$ tal que*

$$c_{ij} = a_{i\cdot} \cdot b_{\cdot j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$, es decir,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1\cdot} \cdot b_{\cdot 1} & a_{1\cdot} \cdot b_{\cdot 2} & \cdots & a_{1\cdot} \cdot b_{\cdot n} \\ a_{2\cdot} \cdot b_{\cdot 1} & a_{2\cdot} \cdot b_{\cdot 2} & \cdots & a_{2\cdot} \cdot b_{\cdot n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\cdot} \cdot b_{\cdot 1} & a_{m\cdot} \cdot b_{\cdot 2} & \cdots & a_{m\cdot} \cdot b_{\cdot n} \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 3.20 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ (-4)\cdot 3 + 6\cdot(-1) & (-4)\cdot 1 + 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}.$

NOTA 3.21 *Para calcular AB es necesario que se verifique: n^o de columnas de A = n^o de filas de B.*

PROPIEDADES:

1. No es *conmutativa*: En general $AB \neq BA$.
EJEMPLO: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, se tiene

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad BA = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

es decir, $AB \neq BA$.

2. El producto de una matriz de orden $1 \times p$ por una matriz de orden $p \times 1$ es un escalar.

3. El producto de una matriz de orden $m \times 1$ por una matriz de orden $1 \times n$ es una matriz de orden $m \times n$.

4. Si A es una matriz de orden $m \times n$, B es una matriz de orden $n \times p$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $(\lambda A) B = \lambda (AB) = A (\lambda B)$.

5. Si A es una matriz de orden $m \times n$ se verifica: $I_m A = A$ y $A I_n = A$.

PROPOSICION 3.22 *Si A, B y C son matrices de orden $m \times n$, $n \times p$ y $p \times q$, respectivamente, entonces $A(BC) = (AB)C$.*

Demostración: Supongamos $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $C = (c_{kr}) \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$.

El coeficiente ir de la matriz $D = A(BC)$ se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna r de la matriz BC, es decir,

$$d_{ir} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{p} b_{1l}c_{lr} \\ \sum_{l=1}^{p} b_{2l}c_{lr} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{p} b_{nl}c_{lr} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \sum_{l=1}^{p} b_{sl}c_{lr} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{is}(b_{sl}c_{lr}).$$

Por otra parte, el coeficiente ir de la matriz $E = (AB)C$ se obtiene multiplicando la fila i de la matriz AB por la columna r de la matriz C, es decir,

$$e_{ir} = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{s1} & \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{s2} & \cdots & \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{pr} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sl} \right) c_{lr} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{is}b_{sl}c_{lr}.$$

Puesto que $d_{ir} = e_{ir}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y para todo $r = 1, \ldots, q$, se tiene que $D = E$, es decir, $A(BC) = (AB)C$. $\square$

PROPOSICION 3.23 *Si A es una matriz de orden $m \times n$, B y C son matrices de orden $n \times p$ y D es una matriz de orden $p \times q$, entonces $A(B + C) = AB + AC$ y $(B + C)D = BD + CD$.*

Demostración: Supongamos $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $C = (c_{jk}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$.

Por una parte, el elemento ik de la matriz $A(B + C)$ se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna k de la matriz $B + C$, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} + c_{1k} \\ b_{2k} + c_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} + c_{nk} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}(b_{sk} + c_{sk}).$$

Por otra parte, el elemento ik de la matriz $AB+AC$ se obtiene sumando el resultado de multiplicar la fila i de A por la columna k de B con el resultado de multiplicar la fila i de A con la columna k de C, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix} = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk} \right) + \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} c_{sk} \right).$$

En consecuencia, $A(B+C) = AB + AC$.

La segunda igualdad se demuestra de forma análoga. $\square$

PROPOSICION 3.24 $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *es un anillo unitario no abeliano.*

Trasposición de matrices.

DEFINICION 3.25 *La **matriz traspuesta** de una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ es otra matriz, denotada por A^T, de orden $n \times m$ que se obtiene al intercambiar las filas y las columnas de A, es decir, $A^T = (a_{ji})$.*

EJEMPLO 3.26 La matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

DEFINICION 3.27 *Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $A^T = A$, es decir, si $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i = 1, \ldots, n$ y para todo $j = 1, \ldots, n$.*

DEFINICION 3.28 *Una matriz cuadrada A es **antisimétrica** si $A^T = -A$.*

EJEMPLO 3.29 La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

es simétrica, mientras que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

es antisimétrica.

PROPIEDADES:

1. $\left(A^T\right)^T = A$.

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

4. Si A es una matriz de orden $m\times n$ y B es una matriz de orden $n\times p$, entonces $(AB)^T = B^T A^T$.

Demostración: Las tres primeras propiedades se comprueban trivialmente. Para demostrar la cuarta propiedad comparamos los coeficientes que ocupan el mismo lugar en $(AB)^T$ y $B^T A^T$.

Supongamos $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. El coeficiente ki de la matriz $(AB)^T$ es igual al coeficiente ik de AB, que se obtiene multiplicando la fila i de A por la columna k de B.

Por otra parte el coeficiente ki de la matriz $B^T A^T$ se obtiene multiplicando la fila k de B^T por la columna i de A^T, que son la columna k de B y la fila i de A. Así pues, el coeficiente ki de $(AB)^T$ coincide con el coeficiente ki de $B^T A^T$, cualesquiera que sean k e i, de manera que se cumple que $(AB)^T = B^T A^T$. $\square$

Traza de una matriz.

DEFINICION 3.30 *Dada una matriz $A = (a_{ij})$ cuadrada de orden n, se define la* ***traza*** *de A como*

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

PROPIEDADES:

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$, siendo A y B matrices cuadradas del mismo orden.

2. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$.

3. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, siendo A y B matrices cuadradas del mismo orden.

3.2. Determinantes y sus propiedades.

Dada una matriz A cuadrada de orden n, le asociaremos un escalar, que denotaremos por $\det A$ o $|A|$ y que definiremos por recurrencia sobre el orden n de la matriz. Si $A = (a_{ij})$, denotaremos por A_{ij} la submatriz de orden $n-1$ obtenida al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

EJEMPLO 3.31 Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, A_{23} es la submatriz de orden 2 que se obtiene al eliminar la segunda fila y la tercera columna de la matriz A, es decir, $A_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

DEFINICION 3.32 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. Llamamos* ***determinante*** *de A, y lo denotamos* $\det A$, *al escalar*

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \textit{si } n = 1 \\ \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det (A_{i1}), & \textit{si } n > 1. \end{cases}$$

DEFINICION 3.33 *Dada la matriz $A = (a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama* ***adjunto*** *o* ***cofactor*** (i, j) *de A al escalar*

$$\mathcal{C}_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

De acuerdo con las dos definiciones anteriores, se tiene que, para $n > 1$,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \mathcal{C}_{i1}(A),$$

expresión denominada **desarrollo de Laplace** del determinante de A por la primera columna.

EJEMPLO 3.34 **1.** Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\det A = a_{11}\mathcal{C}_{11}(A) + a_{21}\mathcal{C}_{21}(A) = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

2. Si $n = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y $\det A = a_{11}\mathcal{C}_{11}(A) + a_{21}\mathcal{C}_{21}(A) + a_{31}\mathcal{C}_{31}(A) = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31}$, es decir,

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}, \end{aligned}$$

que es la llamada *regla de Sarrus.*

3. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz triangular superior de orden n, $\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.
En efecto, el caso $n = 1$ es obvio. Suponiendo que se cumple para el caso $n - 1$, se tiene que si A es una matriz de orden n de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

de la definición de determinante, se obtiene $\det A = a_{11}\det A_{11}$. Puesto que A_{11} es una matriz triangular superior de orden $n-1$, aplicando la hipótesis de inducción, se tiene que su determinante es el producto de los elementos de su diagonal, es decir,

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Propiedades de los determinantes.

Las demostraciones de todas las propiedades enunciadas a continuación se pueden encontrar en el libro de Eugenio Hernández "Álgebra y geometría".

PROPOSICION 3.35 *Si una matriz tiene una fila de ceros, su determinante es nulo.*

PROPOSICION 3.36 *Dadas las matrices* $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *tales que*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces $\det C = \det A + \det B$.

PROPOSICION 3.37 *Si* B *es la matriz que se obtiene a partir de una matriz* A *multiplicando una de sus filas por un escalar* $\lambda \in \mathbb{K}$*, entonces* $\det B = \lambda \det A$.

PROPOSICION 3.38 *Si* B *es la matriz que se obtiene a partir de una matriz* A *intercambiando dos de sus filas, entonces* $\det B = -\det A$.

PROPOSICION 3.39 *Si una matriz tiene dos filas iguales, entonces su determinante es nulo.*

PROPOSICION 3.40 *Si B es la matriz que se obtiene a partir de una matriz A sumando a una fila de A un múltiplo de otra fila de A, entonces* $\det B = \det A$.

PROPOSICION 3.41 (Desarrollo por la primera fila) *Si $A = (a_{ij})$, entonces*

$$\det A = a_{11}\mathcal{C}_{11}(A) + a_{12}\mathcal{C}_{12}(A) + \cdots + a_{1n}\mathcal{C}_{1n}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(A_{1j}).$$

PROPOSICION 3.42 (Desarrollo por la i-ésima fila) *Si $A = (a_{ij})$, entonces*

$$\det A = a_{i1}\mathcal{C}_{i1}(A) + a_{i2}\mathcal{C}_{i2}(A) + \cdots + a_{in}\mathcal{C}_{in}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}).$$

PROPOSICION 3.43 *Si A es una matriz cuadrada, entonces* $\det A = \det A^T$.

PROPOSICION 3.44 (Desarrollo por la j-ésima columna) *Si $A = (a_{ij})$, entonces*

$$\det A = a_{1j}\mathcal{C}_{1j}(A) + a_{2j}\mathcal{C}_{2j}(A) + \cdots + a_{nj}\mathcal{C}_{nj}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}).$$

Como consecuencia de la Proposición 3.43, todas las propiedades de los determinantes enunciadas para filas en las Proposiciones 3.35-3.40 se pueden obtener también para columnas.

PROPOSICION 3.45 *Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

El cálculo de determinantes se simplifica utilizando algunas de sus propiedades anteriores para conseguir el máximo número de ceros en la fila (columna) elegida para desarrollar el determinante. Veamos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.46 Para calcular $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, elegimos una fila o columna, por ejemplo la segunda fila, para efectuar el desarrollo. Usando las propiedades anteriores, haremos que sean cero los dos últimos elementos de dicha fila. Así:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (C_3 \to C_3 + C_2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (C_4 \to C_4 - 3C_2)$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \cdot |A_{21}| + 1 \cdot |A_{22}| + 0 \cdot |A_{23}| + 0 \cdot |A_{24}| = -26.$$

3.3. Matriz inversa.

DEFINICION 3.47 *Dada una matriz cuadrada A de orden n, se dice que es* ***invertible****,* ***no singular*** *o* ***regular*** *si existe otra matriz B del mismo orden tal que*

$$AB = BA = I_n.$$

A la matriz B la denominamos ***matriz inversa*** *de A y la denotamos por A^{-1}.*

EJEMPLO 3.48 La matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ya que:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PROPIEDADES:

1. Si A es una matriz regular, entonces A^{-1} también lo es y

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

2. Si A es una matriz regular y $\alpha \in \mathbb{K} \diagdown \{0\}$, entonces αA es regular y

$$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}.$$

3. Si A y B son matrices regulares del mismo orden, entonces AB también lo es y

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

4. Si A es una matriz cuadrada regular, A^T también es regular y $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

DEFINICION 3.49 *La matriz de los cofactores de los elementos de A, se denomina* ***matriz adjunta*** *de A y se denota por* $\operatorname{adj}(A)$,

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11}(A) & \mathcal{C}_{12}(A) & \cdots & \mathcal{C}_{1n}(A) \\ \mathcal{C}_{21}(A) & \mathcal{C}_{22}(A) & \cdots & \mathcal{C}_{2n}(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1}(A) & \mathcal{C}_{n2}(A) & \cdots & \mathcal{C}_{nn}(A) \end{pmatrix}.$$

PROPOSICION 3.50 *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces A es regular si, y sólo si,* $\det A \neq 0$.

Demostración: Si A es regular, existe la matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Aplicando la Proposición 3.45, se tiene que $(\det A)(\det A^{-1}) = \det I_n = 1$ lo que implica que $\det A \neq 0$.

Recíprocamente, si $\det A \neq 0$, veremos que A es regular encontrando la matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Si $A = (a_{ij})$, desarrollando su determinante por la fila i-ésima se tiene

$$\det A = a_{i1}\mathcal{C}_{i1}(A) + a_{i2}\mathcal{C}_{i2}(A) + \cdots + a_{in}\mathcal{C}_{in}(A).$$

Probaremos que $A(\operatorname{adj}(A))^T = (\det A)\, I_n = (\operatorname{adj}(A))^T A$, de donde se obtiene

$$A^{-1} = \frac{(\operatorname{adj}(A))^T}{\det A}.$$

En efecto, puesto que

$$A(\operatorname{adj}(A))^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11}(A) & \mathcal{C}_{21}(A) & \cdots & \mathcal{C}_{n1}(A) \\ \mathcal{C}_{12}(A) & \mathcal{C}_{22}(A) & \cdots & \mathcal{C}_{n2}(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{C}_{1n}(A) & \mathcal{C}_{2n}(A) & \cdots & \mathcal{C}_{nn}(A) \end{pmatrix},$$

el elemento ii de la matriz producto se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna i de la transpuesta de su matriz adjunta, es decir,

$$a_{i1}\mathcal{C}_{i1}(A) + a_{i2}\mathcal{C}_{i2}(A) + \cdots + a_{in}\mathcal{C}_{in}(A) = \det A.$$

Por otra parte, el elemento ij, con $i \neq j$, del producto de las dos matrices se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz $(\operatorname{adj}(A))^T$, es decir,

$$a_{i1}\mathcal{C}_{j1}(A) + a_{i2}\mathcal{C}_{j2}(A) + \cdots + a_{in}\mathcal{C}_{jn}(A),$$

expresión que coincide con el desarrollo por la fila j del determinante de la matriz

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ Fila } i \\ \\ \leftarrow \text{ Fila } j \\ \\ \\ \end{array}.$$

Puesto que B posee dos filas iguales, $\det B = 0$ y, por lo tanto $a_{i1}\mathcal{C}_{j1}(A) + a_{i2}\mathcal{C}_{j2}(A) + \cdots + a_{in}\mathcal{C}_{jn}(A) = 0$. Así pues,

$$A\left(\operatorname{adj}(A)\right)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11}(A) & \mathcal{C}_{21}(A) & \cdots & \mathcal{C}_{n1}(A) \\ \mathcal{C}_{12}(A) & \mathcal{C}_{22}(A) & \cdots & \mathcal{C}_{n2}(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{C}_{1n}(A) & \mathcal{C}_{2n}(A) & \cdots & \mathcal{C}_{nn}(A) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det A \end{pmatrix} = (\det A)\, I_n.$$

Del mismo modo se demuestra que $A^{-1}A = I_n$. $\square$

COROLARIO 3.51 *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si A es regular, entonces*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Demostración: Es consecuencia de la Proposición 3.50 y de la Proposición 3.45. $\square$

3.4. Rango de una matriz

DEFINICION 3.52 *Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se llama **rango** de A, y se denota $\operatorname{rg}(A)$, al máximo número de columnas de A que son linealmente independientes cuando se consideran como vectores de $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$.*

EJEMPLO 3.53 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puesto que la primera columna es combinación lineal de las otras dos, $\operatorname{rg}(A) < 3$. Puede comprobarse que las otras dos columnas son linealmente independientes, por lo que $\operatorname{rg}(A) = 2$.

DEFINICION 3.54 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y un entero r tal que $1 \leq r \leq \min\{m,n\}$, llamamos **menor de orden** r de la matriz A al determinante de cualquiera de las submatrices de A obtenidas al considerar únicamente r filas y r columnas de A.*

LEMA 3.55 *Si A es una matriz cuadrada de orden k cuyas filas (columnas) son linealmente dependientes, entonces* $\det A = 0$.

Demostración: Supongamos que A es una matriz cuadrada de orden k, cuyas filas, que denotaremos por $a_{1\cdot}, a_{2\cdot}, \ldots, a_{k\cdot}$, son linealmente dependientes. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a_{1\cdot} = \sum\limits_{i=2}^{k} \lambda_i a_{i\cdot}$. Entonces,

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=2}^{k} \lambda_i a_{i\cdot} \\ a_{2\cdot} \\ \vdots \\ a_{k\cdot} \end{pmatrix} = \sum_{i=2}^{k} \det \begin{pmatrix} \lambda_i a_{i\cdot} \\ a_{2\cdot} \\ \vdots \\ a_{k\cdot} \end{pmatrix} = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i \det \begin{pmatrix} a_{i\cdot} \\ a_{2\cdot} \\ \vdots \\ a_{k\cdot} \end{pmatrix} = 0.$$

Supongamos ahora que las columnas de A son linealmente dependientes. Entonces las filas de A^T son linealmente dependientes y $\det A^T = 0$. Como $\det A = \det A^T$, se tiene que $\det A = 0$. $\square$

LEMA 3.56 *Sea A una matriz de orden $m \times r$, con $r \leq m$. Si existe un menor no nulo de orden r de la matriz A, entonces las r columnas de la matriz A son linealmente independientes y* $\operatorname{rg}(A) = r$.

Demostración: Para simplificar la notación, supongamos que el menor no nulo de orden r de la matriz A es el formado por las r primeras filas, es decir,

$$\det(A_r) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.1}$$

Supongamos que las columnas de A, $a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot r}$, son linealmente dependientes. Entonces, una de ellas es combinación lineal de las demás y, por lo tanto, alguna columna de A_r es combinación lineal de las demás columnas de A_r. Así pues, como las columnas de A_r son linealmente dependientes, por el Lema 3.55, $\det(A_r) = 0$, lo que se contradice con (3.1). $\square$

NOTA 3.57 *En la demostración del Lema 3.56, se ha probado que las columnas de una matriz A correspondientes a las columnas de un menor no nulo de A, son linealmente independientes.*

LEMA 3.58 *Sea A una matriz cuadrada de orden k con* $\det A = 0$*. Si el adjunto del elemento a_{ij} de A, $\mathcal{C}_{ij}(A)$, es no nulo, entonces la columna j de A es combinación lineal de las demás columnas.*

Demostración: Desarrollando el $\det A$ por los elementos de la fila i, se tiene

$$\det A = a_{i1}\mathcal{C}_{i1}(A) + \cdots + a_{ij}\mathcal{C}_{ij}(A) + \cdots + a_{ik}\mathcal{C}_{ik}(A) = 0.$$

Multiplicando cada fila distinta de la i-ésima por los adjuntos de la fila i, tenemos

$$\begin{gathered} a_{11}\mathcal{C}_{i1}(A) + \cdots + a_{1j}\mathcal{C}_{ij}(A) + \cdots + a_{1k}\mathcal{C}_{ik}(A) = 0, \\ a_{21}\mathcal{C}_{i1}(A) + \cdots + a_{2j}\mathcal{C}_{ij}(A) + \cdots + a_{2k}\mathcal{C}_{ik}(A) = 0, \\ \vdots \\ a_{k1}\mathcal{C}_{i1}(A) + \cdots + a_{kj}\mathcal{C}_{ij}(A) + \cdots + a_{kk}\mathcal{C}_{ik}(A) = 0. \end{gathered}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\mathcal{C}_{i1}(A)\, a_{\cdot 1} + \cdots + \mathcal{C}_{ij}(A)\, a_{\cdot j} + \cdots + \mathcal{C}_{ik}(A)\, a_{\cdot k} = \mathbf{0},$$

donde **0** denota el elemento nulo de $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Como $\mathcal{C}_{ij}(A) \neq 0$, se obtiene

$$a_{\cdot j} = -\frac{\mathcal{C}_{i1}(A)}{\mathcal{C}_{ij}(A)} a_{\cdot 1} - \cdots - \frac{\mathcal{C}_{i(j-1)}(A)}{\mathcal{C}_{ij}(A)} a_{\cdot (j-1)} - \frac{\mathcal{C}_{i(j+1)}(A)}{\mathcal{C}_{ij}(A)} a_{\cdot (j+1)} - \cdots - \frac{\mathcal{C}_{ik}(A)}{\mathcal{C}_{ij}(A)} a_{\cdot k},$$

de manera que la columna j de la matriz A es combinación lineal de las demás columnas. □

LEMA 3.59 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si existe un menor no nulo de orden r de la matriz A y son nulos todos los menores de orden $r+1$ que resultan de añadir al menor no nulo de orden r una de las $n-r$ columnas restantes y una de las $m-r$ filas restantes, entonces $\operatorname{rg}(A) = r$.*

Demostración: Supongamos que el menor no nulo de orden r de la matriz A es

$$\det(A_r) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.2}$$

Entonces, por el Lema 3.56, las columnas $a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot r}$ son linealmente independientes. Si $r = n$, todas las columnas de A son linealmente independientes y $\operatorname{rg}(A) = r = n$. Si $r < n$, probaremos que

$$a_{\cdot j} \in \operatorname{Env}(\{a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot r}\})$$

para todo $j = r+1, \ldots, n$ y, por lo tanto, $\operatorname{rg}(A) = r$.

Sea $j \in \{r+1, \ldots, n\}$ y supongamos que $r < m$. Entonces, por hipótesis,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

para cualquier $i = r+1, \ldots, m$.

Puesto que el adjunto del elemento a_{ij} en la matriz de (3.3) viene dado por $\det(A_r)$ que es no nulo, se tiene, por el Lema 3.58, que la última columna de dicha matriz es combinación lineal de las demás, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ a_{ij} \end{pmatrix} \in \operatorname{Env}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \\ a_{i1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{r2} \\ a_{i2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{rr} \\ a_{ir} \end{pmatrix} \right\}\right) \tag{3.4}$$

para cada $i = r+1, \ldots, m$.

Por otra parte, de (3.2), aplicando el Lema 3.55, se tiene que las columnas de A_r son linealmente independientes y, por lo tanto,

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{pmatrix} \right\}$$

constituyen una base del espacio vectorial $\mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{K})$. Por lo tanto, existen escalares únicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Por lo tanto, como consecuencia de (3.4), también debe cumplirse

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ a_{ij} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \\ a_{i1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{r2} \\ a_{i2} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{rr} \\ a_{ir} \end{pmatrix}$$

para cualquier $i = r+1, \ldots, m$, de modo que

$$a_{\cdot j} = \lambda_1 a_{\cdot 1} + \lambda_2 a_{\cdot 2} + \cdots + \lambda_r a_{\cdot r}.$$

Por último, si $r = m < n$, de (3.5), se obtiene la misma conclusión. $\square$

PROPOSICION 3.60 *El rango de una matriz A de orden $m \times n$ coincide con el máximo orden de sus menores no nulos.*

Demostración: Sea $r \leq \min\{m, n\}$ el máximo orden de sus menores no nulos. Suponemos que

$$\det(A_r) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aplicando el Lema 3.56, se obtiene que las r primeras columnas de la matriz A son linealmente independientes. Si $r = n$, todas las columnas de A son linealmente independientes y $\operatorname{rg}(A) = r = n$. Si $r = m < n$, se tiene que las $r = m$ primeras columnas de la matriz A forman una base para el espacio vectorial $\mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{K})$ y, por lo tanto, cualquier otra columna de A es combinación lineal de ellas, con lo que $\operatorname{rg}(A) = r = m$.

Supongamos ahora que $r < \min\{m, n\}$. Como por hipótesis, cualquier menor de orden mayor que r es nulo, se tiene, en particular, que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

para todo $i = r+1, \ldots, m$ y para todo $j = r+1, \ldots, n$. Aplicando el Lema 3.59, se tiene que $\mathrm{rg}\,(A) = r$. $\square$

NOTA:

Dado que los menores de una matriz y los de su traspuesta coinciden, el rango de una matriz es también el máximo número de filas que son linealmente independientes.

Cálculo del rango de una matriz

Como consecuencia del Lema 3.59, se obtiene un nuevo método para calcular el rango de una matriz. Aunque la Proposición 3.60 exige calcular todos los menores de A hasta encontrar un entero positivo r tal que exista un menor no nulo de orden r y que todos los menores de orden $r+1$ sean nulos, en la práctica, si encontramos un menor no nulo de orden r y son nulos todos los menores de orden $r+1$ que se obtienen a partir de dicho menor no nulo, podemos afirmar que el rango de A es r. Así pues, podemos calcular el rango de una matriz de la siguiente manera:

1. Se busca un menor de orden 1 no nulo:

- Si no existe, entonces $\mathrm{rg}(A) = 0$ y se termina el proceso.
- Si existe, entonces $\mathrm{rg}(A) \geq 1$ y se continúa con el paso siguiente.

2. Se calculan los menores de orden 2 que se obtienen a partir del menor de orden 1 no nulo.

- Si no existen o son todos cero, entonces $\mathrm{rg}(A) = 1$ y se termina el proceso.
- Si alguno de ellos es no nulo, entonces $\mathrm{rg}(A) \geq 2$ y se continúa con el paso siguiente.

3. Se calculan los menores de orden 3 que se obtienen a partir del menor de orden 2 no nulo.

- Si no existen o son todos cero, entonces $\mathrm{rg}(A) = 2$ y se termina el proceso.
- Si alguno de ellos es no nulo, entonces $\mathrm{rg}(A) \geq 3$ y se continúa con el paso siguiente.

4. Se repite el proceso hasta que se obtiene un menor de orden r no nulo y los menores de orden $r+1$ obtenidos a partir de dicho menor o bien no existen, o bien son cero. En este caso se tiene que $\text{rg}(A) = r$.

EJEMPLO 3.61 Vamos a calcular el rango de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ siguiendo los pasos del procedimiento anterior:

1. El menor de orden 1 formado por la primera fila y primera columna es $|2| = 2 \neq 0$, por tanto $\text{rg}(A) \geq 1$, Veamos qué ocurre con los menores de orden dos que se obtienen a partir de este menor.

2. Al añadir la 2^a fila y la 2^a columna de A, se obtiene $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, por tanto $\text{rg}(A) \geq 2$. Veamos qué ocurre con los de orden 3 que se obtienen a partir de este menor.

3. Con la 3^a fila y la 3^a columna de A, se obtiene $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Como es nulo, añadimos al menor de orden dos la 3^a fila y la 4^a columna de A, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$. Al ser nulo y haber considerado todas las filas y columnas de A se tiene que $\text{rg}(A) = 2$.

3.5. Sistemas de ecuaciones lineales.

DEFINICION 3.62 *Un **sistema de** m **ecuaciones lineales con** n **incógnitas** en un cuerpo $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma*

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}, \tag{3.6}$$

*donde $a_{ij} \in \mathbb{K}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ y para todo $j = 1, \ldots, n$, y $b_i \in \mathbb{K}$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Llamamos **coeficientes** del sistema a los a_{ij}, para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, **términos independientes** del sistema a los $b_i \in \mathbb{K}$, con $i = 1, \ldots, m$, e **incógnitas** del sistema a los x_j, $j = 1, \ldots, n$.*
*Se dice que el sistema tiene **solución** si existen n elementos de $\mathbb{K}$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$, tales que al sustituir x_j por s_j en la expresión anterior, se satisfacen todas las ecuaciones.*

DEFINICION 3.63 *Los sistemas que tienen alguna solución se llaman **compatibles** y los que no tienen ninguna solución se llaman **incompatibles**. Los sistemas que tienen una única solución se* *llaman **compatibles determinados** y los que tienen más de una solución se llaman **compatibles indeterminados**.*

DEFINICION 3.64 *Las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad y \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

*se denominan **matriz de coeficientes**, **matriz de términos independientes** y **matriz ampliada**, respectivamente. Si denotamos por*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

*el sistema se puede expresar en la forma $Ax = b$, que es la **forma matricial** del sistema (3.6).*

DEFINICION 3.65 *Se dice que un **sistema** es **homogéneo** si su matriz de términos independientes es nula.*

EJEMPLO 3.66 Consideremos el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcr} -2x + y & = & 2 \\ 5x - 2y & = & -1 \end{array}\right\}.$

Su expresión matricial es

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y la matriz ampliada del sistema es

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sistemas equivalentes. Método de eliminación de Gauss.

DEFINICION 3.67 *Se dice que dos **sistemas** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.*

PROPOSICION 3.68 *Sea*

$$Ax = b, \tag{3.7}$$

con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ y $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$, un sistema compatible. Entonces, este sistema es equivalente al sistema

$$BAx = Bb, \tag{3.8}$$

siendo B cualquier matriz no singular de orden m.

Demostración: Para demostrar que los sistemas (3.7) y (3.8) son equivalentes, basta probar que ambos tienen el mismo conjunto de soluciones.

Si $s \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ es solución de (3.7), entonces

$$As = b$$

y, multiplicando por la izquierda ambos miembros de la igualdad por la matriz B, se tiene que

$$BAs = Bb,$$

por lo que s también es solución del sistema (3.8).

Recíprocamente, si s es solución del sistema (3.8), entonces

$$BAs = Bb$$

y como B es regular, se pueden multiplicar por la izquierda ambos miembros de la igualdad por la matriz B^{-1},

$$B^{-1}BAs = B^{-1}Bb,$$

de donde se obtiene que

$$As = b,$$

es decir, s es solución del sistema (3.7). $\square$

El **método de eliminación de Gauss** consiste en reducir un sistema dado a otro equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior, mediante las siguientes operaciones elementales:

1. Intercambiar dos ecuaciones.

2. Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo.

3. Sustituir una ecuación por el resultado de sumarle o restarle un múltiplo de otra.

Estas tres operaciones elementales pueden realizarse multiplicando por la izquierda ambos miembros del sistema de ecuaciones por los siguientes tipos de matrices:

1. $P_{ij}^{(k)}$ que es la matriz que se obtiene al aplicar a la matriz I_k la operación elemental $F_i \leftrightarrow F_j$ (notación utilizada para el intercambio entre las filas i y j).

2. $E_i^{(k)}(\alpha)$, con $\alpha \neq 0$, que es la matriz que se obtiene al aplicar a la matriz I_k la operación elemental $F_i \longleftarrow \alpha F_i$ (notación utilizada para la sustitución de la fila i por la fila i multiplicada por α).

3. $E_{ij}^{(k)}(\beta)$ es la matriz que se obtiene al aplicar a la matriz I_k la operación elemental $F_i \longleftarrow$

$F_i + \beta F_j$ (notación utilizada para la sustitución de la fila i por la fila i sumada con la fila j multiplicada por β).

A estas matrices se les da el nombre de **matrices elementales**.

EJEMPLO 3.69 Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Intercambiando la primera y la tercera fila de I_3 se obtiene la matriz elemental

$$P_{13}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si se multiplica la primera fila de I_3 por $1/2$ se obtiene la matriz elemental

$$E_1^{(3)}(1/2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si sumamos a la segunda fila de I_3 la primera fila multiplicada por -2 se obtiene la matriz elemental

$$E_{21}^{(3)}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cuando no hay posibilidad de confusión con el orden de las matrices elementales consideradas, escribimos

$$P_{ij}, \qquad E_i(\alpha) \qquad \text{y} \qquad E_{ij}(\beta).$$

PROPOSICION 3.70 *Si A es una matriz de orden $m \times n$ y E es una matriz elemental de orden m, entonces EA es la matriz que se obtiene al aplicar a A la misma operación elemental aplicada a I_m para obtener E.*

Demostración: Demostramos solamente el resultado para $E = E_i(\alpha)$. La demostración para $E = P_{ij}$ o $E = E_{ij}(\beta)$ es igual de sencilla. Así pues, si $E = E_i(\alpha)$ y denotamos las filas de la matriz I_m por $e_{1\cdot}, e_{2\cdot}, \ldots, e_{m\cdot}$ y las de la matriz A por $a_{1\cdot}, a_{2\cdot}, \ldots, a_{m\cdot}$ se tiene

$$E_i(\alpha)A = \begin{pmatrix} e_{1\cdot} \\ e_{2\cdot} \\ \vdots \\ e_{(i-1)\cdot} \\ \alpha e_{i\cdot} \\ e_{(i+1)\cdot} \\ \vdots \\ e_{m\cdot} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e_{1\cdot}A \\ e_{2\cdot}A \\ \vdots \\ e_{(i-1)\cdot}A \\ \alpha e_{i\cdot}A \\ e_{(i+1)\cdot}A \\ \vdots \\ e_{m\cdot}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1\cdot} \\ a_{2\cdot} \\ \vdots \\ a_{(i-1)\cdot} \\ \alpha a_{i\cdot} \\ a_{(i+1)\cdot} \\ \vdots \\ a_{m\cdot} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

COROLARIO 3.71 *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, con $\alpha \neq 0$, se cumple:*

1. $P_{ij}P_{ij} = I.$

2. $E_i\left(\alpha^{-1}\right) E_i(\alpha) = I$.

3. $E_{ij}(-\beta) E_{ij}(\beta) = I$.

Este resultado pone de manifiesto que las matrices elementales son regulares y que la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental del mismo tipo. En otras palabras

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}, \qquad E_i(\alpha)^{-1} = E_i\left(\alpha^{-1}\right) \qquad \text{y} \qquad E_{ij}(\beta)^{-1} = E_{ij}(-\beta).$$

Como consecuencia de las Proposiciones 3.68 y 3.70 y del Corolario 3.71, los sucesivos sistemas obtenidos al aplicar el Método de eliminación de Gauss, son todos equivalentes.

EJEMPLO 3.72 Aplicamos el método de eliminación de Gauss al sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Si sumamos a la segunda ecuación la primera ecuación multiplicada por 2 y a la tercera ecuación le restamos la primera, obtenemos el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & & & 9x_3 & = & 9 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \end{array}\right\}.$$

Si ahora intercambiamos la posición de las dos últimas ecuaciones, se obtiene el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ & & & & 9x_3 & = & 9 \end{array}\right\}$$

y multiplicando la tercera ecuación por el número real no nulo $1/9$, se obtiene

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right\},$$

de donde es fácil deducir que la solución del sistema es $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 1$.

Las operaciones elementales afectan solamente a los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones del sistema, por lo que podemos realizar dichas operaciones sobre las filas de la matriz ampliada.

EJEMPLO 3.73 La matriz ampliada del sistema del ejemplo anterior es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Aplicamos las operaciones elementales del ejemplo anterior a esta matriz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \longleftarrow F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \longleftarrow F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow (1/9) F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Si expresamos en forma matricial las operaciones elementales realizadas sobre la matriz ampliada, se tiene

$$E_3\,(1/9)\,P_{23}E_{31}\,(-1)\,E_{21}\,(2)\,A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

DEFINICION 3.74 *Sean A y B matrices de orden $m \times n$. Se dice que A es **equivalente por filas** a B, y escribimos $A \equiv_F B$, si existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_p$ de orden $m \times m$ tales que*

$$B = E_p \cdots E_2 E_1 A.$$

Como las matrices elementales son regulares y el producto de matrices regulares también es regular, se tiene que la matriz

$$P = E_p \cdots E_2 E_1$$

es regular y su inversa es

$$P^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_p^{-1}$$

que, por el Corolario 3.71, resulta ser producto de matrices elementales. Como consecuencia, se puede establecer el siguiente resultado:

PROPOSICION 3.75 *Sean A, B y C matrices de orden $m \times n$. Se cumple:*

1. *$A \equiv_F A$.*
2. *Si $A \equiv_F B$, entonces $B \equiv_F A$.*
3. *Si $A \equiv_F B$ y $B \equiv_F C$, entonces $A \equiv_F C$.*

DEFINICION 3.76 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, llamaremos **pivote** de una fila (o columna) de A al primer elemento no nulo de dicha fila (columna), si es que hay alguno. Se dice que A es **escalonada por filas** si verifica las siguientes condiciones:*

(i) Si A tiene filas compuestas enteramente por ceros (filas nulas), éstas están agrupadas en la parte inferior de la matriz.

(ii) El pivote de cada fila no nula es 1.

(iii) El pivote de cada fila no nula está a la derecha del de la fila anterior.

(iv) Los elementos que aparecen en la misma columna que el pivote de una fila y debajo de él, son todos cero.

*A es **escalonada reducida por filas** si además de ser escalonada por filas se cumple que los elementos que aparecen en la misma columna que el pivote de una fila son todos cero.*

EJEMPLO 3.77 Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ no son escalonadas por filas. La matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ es escalonada por filas pero no es reducida y la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ es escalonada reducida por filas.

PROPOSICION 3.78 *Cualquier matriz no nula es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida por filas.*

Demostración: Supongamos que A es una matriz no nula de orden $m \times n$. Leyendo de izquierda a derecha, la primera columna no nula de A contiene, al menos, un elemento no nulo. Por tanto, mediante un intercambio de filas (si fuera necesario), es decir multiplicando la matriz elemental P_{1j}, para algún j, por la matriz A, podemos obtener una matriz de la forma

$$P_{1j}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix}$$

con $b_{11} \neq 0$. Ahora, mediante la sucesión de matrices elementales

$$E_1\left(\frac{1}{b_{11}}\right), E_{21}\left(-b_{21}\right), \ldots, E_{m1}\left(-b_{m1}\right)$$

se obtiene

$$E_{m1}\left(-b_{m1}\right) \cdots E_{21}\left(-b_{21}\right) E_1\left(\frac{1}{b_{11}}\right) P_{1j}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}.$$

Si $c_{ij} = 0$ para $i = 2, \ldots, m$ y para $j = 2, \ldots, k$, entonces la matriz anterior es escalonada por filas. En caso contrario, repetimos el mismo proceso con esta última matriz pero sin considerar la primera fila. Claramente, después de repetir, a lo sumo m veces este proceso, obtenemos una matriz que es escalonada por filas.

La matriz escalonada reducida por filas se obtiene realizando operaciones elementales sobre las filas para obtener ceros por encima de los pivotes. $\square$

NOTA 3.79 *La proposición anterior muestra que, dado un sistema, siempre se puede encontrar un sistema equivalente cuya matriz ampliada sea escalonada por filas (método de eliminación de Gauss) o escalonada reducida por filas (método de eliminación de Gauss-Jordan).*

EJEMPLO 3.80 En el Ejemplo 3.73 se ha obtenido la matriz escalonada por filas equivalente a A^*. Para encontrar la matriz escalonada reducida por filas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \longleftarrow F_2+3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftarrow F_1-4F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \longleftarrow F_1+3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Si expresamos en forma matricial las operaciones elementales realizadas sobre la matriz ampliada, se tiene

$$E_{12}(3)\, E_{13}(-4)\, E_{23}(3)\, E_3(1/9)\, P_{23} E_{31}(-1)\, E_{21}(2)\, A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

El sistema equivalente encontrado, ahora por el Método de eliminación de Gauss-Jordan, es

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 \quad\quad\quad & = & 1 \\ x_2 \quad\; & = & 1 \\ x_3 & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Teoremas de Rouche-Frobenius y de Cramer.

TEOREMA 3.81 (de Rouche-Frobenius) *Sea el sistema de m ecuaciones con n incógnitas $Ax = b$. Entonces:*

(i) El sistema es compatible determinado si, y sólo si, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = n$.

(ii) El sistema es compatible indeterminado si, y sólo si, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) < n$.

(iii) El sistema es incompatible si, y sólo si, $\operatorname{rg}(A) < \operatorname{rg}(A^*)$.

Demostración: Si denotamos por $a_{\cdot j}$, con $j = 1, \ldots, n$, las n columnas de la matriz A, que el sistema sea compatible es equivalente a que existan escalares $x_1, \ldots, x_n$ tales que $b = x_1 a_{\cdot 1} + x_2 a_{\cdot 2} + \cdots + x_n a_{\cdot n}$, es decir, b es combinación lineal de $a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot n}$, es decir,

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = r.$$

Esto es equivalente a decir que A posee un menor no nulo de orden r y, reordenando las ecuaciones y las incógnitas del sistema, podemos suponer que el menor no nulo de A es el correspondiente a las r primeras filas y r primeras columnas. Esto implica que los r primeros vectores fila de A^* son linealmente independientes y, puesto que $\operatorname{rg}(A^*) = r$, el resto de sus vectores fila son combinación lineal de los r primeros. Por lo tanto, las últimas $m-r$ ecuaciones del sistema son combinación lineal de las r primeras y, eliminándolas, se obtiene el sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{array}\right\} . \tag{3.9}$$

Si suponemos que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = n$, es decir, $r = n$, el sistema (3.9) tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y, denotando por C su matriz de coeficientes y por d su matriz de términos independientes, el sistema se reescribe en forma matricial como $Cx = d$. Puesto que $\det C \neq 0$, la matriz C es regular, por lo que la única solución del sistema es $x = C^{-1}d$. Así pues, el sistema $Ax = b$ es compatible determinado.

Recíprocamente, supongamos que $r < n$. Entonces, para cualquier elección de valores $x_{r+1} = \lambda_{r+1}, \ldots, x_n = \lambda_n$ de las últimas $n - r$ incógnitas, consideramos el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}\lambda_{r+1} - \cdots - a_{1n}\lambda_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}\lambda_{r+1} - \cdots - a_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}\lambda_{r+1} - \cdots - a_{rn}\lambda_n \end{array}\right\} , \tag{3.10}$$

cuya matriz de términos independientes denotamos por e y cuya matriz de incógnitas denotamos por y. Así pues, el sistema (3.10) se puede expresar en forma matricial como $Cy = e$ y su única solución es $y = C^{-1}e$. Ahora bien, como esto es así para cualquier elección de los parámetros λ, el sistema (3.9) y, por lo tanto, el sistema $Ax = b$, tiene más de una solución, es decir, es compatible indeterminado. $\square$

Para un sistema homogéneo los rangos de las matrices A y A^* coinciden, por lo que dichos sistemas son siempre compatibles (de hecho, $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ es una solución, denominada **trivial**). Por lo tanto, un sistema homogéneo con n incógnitas tiene solución no nula si, y sólo si, $\operatorname{rg} A \neq n$. En particular, todo sistema homogéneo con menos ecuaciones que incógnitas admite alguna solución no trivial.

TEOREMA 3.82 (Regla de Cramer) *Sea el sistema*

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} .$$

Si $\det A \neq 0$, *entonces la única solución del sistema es, para cada* $i = 1, \ldots, n$,

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A}. \tag{3.11}$$

Demostración: Escribimos el sistema en forma matricial $Ax = b$ y, como A es regular,

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} (\operatorname{adj} A)^T b.$$

Por lo tanto, tenemos que comprobar que el elemento d_i de la fila i-ésima y de la única columna de $(\operatorname{adj} A)^T b$ es el numerador de (3.11). Para obtener el elemento d_i hemos de multiplicar la fila i-ésima de la matriz $(\operatorname{adj} A)^T$ por la matriz columna b o, lo que es lo mismo, la columna i-ésima de la matriz $\operatorname{adj} A$ por la matriz columna b. Así pues, se tiene que

$$d_i = \mathcal{C}_{1i}(A)\, b_1 + \mathcal{C}_{2i}(A)\, b_2 + \cdots + \mathcal{C}_{ni}(A)\, b_n,$$

que es el desarrollo del numerador de (3.11) por la columna i-ésima. $\square$

3.6. Cálculo de la matriz inversa mediante operaciones elementales.

En esta sección veremos cómo puede obtenerse la matriz inversa de una matriz no singular A realizando operaciones elementales sobre las filas de la matriz A.

PROPOSICION 3.83 *Sean* A *y* B *matrices de orden* $m \times n$. *Si* A *y* B *son equivalentes por filas, entonces* $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

Demostración: Si A y B son equivalentes por filas, entonces existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_p$ de orden $m \times m$ tales que

$$B = E_p \cdots E_2 E_1 A,$$

es decir, la matriz B se obtiene realizando una serie de operaciones elementales sobre las filas de A. Veamos que los tres tipos de operaciones elementales sobre las filas de una matriz no modifican el rango de la matriz.

En primer lugar, dado que el rango de una matriz se puede definir como el máximo número de filas que son linealmente independientes, se tiene que al intercambiar filas en una matriz el rango no varía, es decir,

$$\operatorname{rg}(P_{ij}A) = \operatorname{rg}(A) .$$

Supongamos ahora que $A = (a_{ij})$ con $\operatorname{rg}(A) = r$,

$$\det(A_r) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

para todo $i = r+1, \ldots, m$ y para todo $j = r+1, \ldots, n$. Dado un escalar $\alpha \neq 0$, se tiene que $\operatorname{rg}(E_k(\alpha) A) = \operatorname{rg}(A) = r$, ya que, si $k \in \{1, \ldots, r\}$, entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{k1} & \alpha a_{k2} & \cdots & \alpha a_{kr} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} = \alpha \det(A_r) \neq 0$$

y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{k1} & \alpha a_{k2} & \cdots & \alpha a_{kr} & \alpha a_{kj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

para todo $i = r+1, \ldots, m$ y para todo $j = r+1, \ldots, n$, y si $k \in \{r+1, \ldots, m\}$, se tiene

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ \alpha a_{k1} & \alpha a_{k2} & \cdots & \alpha a_{kr} & \alpha a_{kj} \end{vmatrix} = 0.$$

Por último, dado $\beta \in \mathbb{K}$, $\operatorname{rg}(E_{kl}(\beta) A) = \operatorname{rg}(A) = r$, ya que los determinantes no varían cuando a una fila se le suma un múltiplo de otra. $\square$

PROPOSICION 3.84 *Si A es una matriz cuadrada de orden n de máximo rango, entonces A es equivalente por filas a la matriz identidad.*

Demostración: Supongamos que A es una matriz cuadrada de orden n tal que $\operatorname{rg} A = n$. Por la

Proposición 3.78, sabemos que A es equivalente por filas a una matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ escalonada reducida por filas. Además, por la Proposición 3.83, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = n$, por lo que $\det B \neq 0$ y B no tiene filas nulas, es decir, todas las filas tienen pivote y, puesto que B tiene el mismo número de columnas que de filas, la única posibilidad es que los pivotes estén en la diagonal. Por lo tanto, $B = I$. $\square$

COROLARIO 3.85 *Toda matriz cuadrada no singular es producto de matrices elementales.*

Demostración: Supongamos que A es una matriz cuadrada de orden n no singular. Entonces, $\det A \neq 0$ y $\operatorname{rg} A = n$, por lo que, aplicando la Proposición 3.84, se tiene que A es equivalente por filas a la matriz identidad. Sean $E_1, E_2, \ldots, E_p$ matrices elementales de orden $n \times n$ tales que

$$I = E_p \cdots E_2 E_1 A. \tag{3.12}$$

Entonces, multiplicando la expresión anterior por A^{-1} por la derecha, se obtiene

$$A^{-1} = IA^{-1} = (E_p \cdots E_2 E_1 A)\, A^{-1} = E_p \cdots E_2 E_1 I, \tag{3.13}$$

cuya inversa es

$$A = (E_1)^{-1}(E_2)^{-1} \cdots (E_p)^{-1},$$

que es un producto de matrices elementales. $\square$

NOTA 3.86 *En (3.12) y (3.13) podemos observar que las mismas operaciones elementales sobre filas que convierten la matriz A en la matriz I, se pueden utilizar para convertir la matriz I en la matriz A^{-1}. Esto nos proporciona una forma de calcular la matriz inversa, como podemos ver en el siguiente ejemplo.*

EJEMPLO 3.87 Dada la matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

vamos a obtener su inversa mediante operaciones elementales sobre filas.

Consideramos una matriz en la que estén incluidas la matriz A y la matriz identidad simultáneamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Realizamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz anterior, hasta convertir la matriz A en la matriz identidad. La transformada de la matriz identidad por las mismas operaciones elementales es A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \longleftarrow F_3 - 3F_1]{F_2 \longleftarrow F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \longleftarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \longleftarrow F_3\left(\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & 1/5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \longleftarrow F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -11/5 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & 1/5 \end{array} \right).$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11/5 & 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

3.7. Matrices equivalentes.

DEFINICION 3.88 *Dadas dos matrices A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se dice que A es* ***equivalente*** *a B si existen matrices regulares $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tales que $A = PBQ$.*

PROPOSICION 3.89 *La equivalencia de matrices es una relación binaria de equivalencia.*

Demostración: Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es equivalente a sí misma (sólo hay que tomar $P = I_n$ y $Q = I_m$).

Dadas dos matrices A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, si A es equivalente a B, existen matrices regulares P y Q tales que $A = PBQ$. Por ser P y Q regulares, se tiene que P^{-1} y Q^{-1} también lo son y, además, $B = P^{-1}AQ^{-1}$, de modo que B es equivalente a A.

Por último, dadas tres matrices A, B, $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, si A es equivalente a B y B es equivalente a C, entonces existen matrices regulares P, Q, R y S tales que $A = PBQ$ y $B = RCS$. Sustituyendo la segunda igualdad en la primera, se obtiene

$$A = P(RCS)Q = (PR)C(SQ)$$

y, dado que el producto de matrices regulares es una matriz regular, se tiene que A es equivalente a C. $\square$

DEFINICION 3.90 *Sean A y B matrices de orden $m \times n$. Se dice que A es* ***equivalente por columnas*** *a B, y escribimos $A \equiv_C B$, si existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_p$ de orden $n \times n$ tales que*

$$B = AE_1E_2\cdots E_p.$$

PROPOSICION 3.91 *Sean A, B y C matrices de orden $m \times n$. Se cumple:*
(i) $A \equiv_C A$.
(ii) Si $A \equiv_C B$, entonces $B \equiv_C A$.
(iii) Si $A \equiv_C B$ y $B \equiv_C C$, entonces $A \equiv_C C$.

PROPOSICION 3.92 *Dos matrices A y B son equivalentes por columnas si, y sólo si, A^T y B^T son equivalentes por filas.*

Demostración: Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y sean $E_1, E_2, \ldots, E_p$ matrices elementales de orden $n \times n$ tales que

$$B = AE_1E_2 \cdots E_p.$$

Entonces,

$$B^T = E_p^T \cdots E_2^T E_1^T A^T$$

y, dado que la traspuesta de una matriz elemental es una matriz elemental, se tiene que A^T y B^T son equivalentes por filas. $\square$

NOTA 3.93 *Obsérvese que $P_{ij}^T = P_{ij}$, $E_i(\alpha)^T = E_i(\alpha)$ y $E_{ij}(\beta)^T = E_{ji}(\beta)$.*

PROPOSICION 3.94 *Si A es una matriz de orden $m \times n$ y E es una matriz elemental de orden n, entonces se cumple:*
(i) Si $E = P_{ij}$, entonces AE es la matriz que se obtiene al intercambiar las columnas i y j de A.
(ii) Si $E = E_i(\alpha)$, entonces AE es la matriz que se obtiene al multiplicar por α la columna i de A.
(iii) Si $E = E_{ij}(\beta)$, entonces AE es la matriz que se obtiene al sumar a la columna j de A la columna i multiplicada por β.

Demostración: Para cualquier matriz elemental E, las matrices A y AE son equivalentes por columnas o, lo que es lo mismo, A^T y $(AE)^T = E^TA^T$ son equivalentes por filas.

(i) Si $E = P_{ij}$, entonces $E^T = P_{ij}$ y $(AE)^T = P_{ij}A^T$ es la matriz que se obtiene al intercambiar las filas i y j de la matriz A^T, por lo que AE es la matriz que se obtiene al intercambiar las columnas i y j de la matriz A.

(ii) Si $E = E_i(\alpha)$, entonces $E^T = E_i(\alpha)$ y $(AE)^T = E_i(\alpha)A^T$ es la matriz que se obtiene al multiplicar por α la fila i de A^T, por lo que AE es la matriz que se obtiene al multiplicar por α la columna i de A.

(iii) Si $E = E_{ij}(\beta)$, entonces $E^T = E_{ji}(\beta)$ y $(AE)^T = E_{ji}(\beta)A^T$ es la matriz que se obtiene al sumar a la fila j de A^T la fila i multiplicada por β, por lo que AE es la matriz que se obtiene al sumar a la columna j de A la columna i multiplicada por β. $\square$

DEFINICION 3.95 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se dice que A es* ***escalonada por columnas*** *si verifica las siguientes condiciones:*

(i) Si A tiene columnas compuestas enteramente por ceros (columnas nulas), éstas están agrupadas en la parte derecha de la matriz.

(ii) El pivote de cada columna no nula es 1.

(iii) El pivote de cada columna no nula está por debajo del de la columna anterior.

(iv) Los elementos que aparecen en la misma fila que el pivote de una columna y a la derecha de él, son todos cero.

A es ***escalonada reducida por columnas*** *si además de ser escalonada por columnas se cumple que los elementos que aparecen en la misma fila que el pivote de una columna son todos cero.*

EJEMPLO 3.96 La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es escalonada reducida por columnas, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es escalonada por columnas y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es escalonada por columnas pero no es reducida.

PROPOSICION 3.97 *Cualquier matriz no nula es equivalente por columnas a una matriz escalonada reducida por columnas.*

Demostración: Supongamos que A es una matriz no nula de orden $m \times n$. Entonces A^T es una matriz no nula de orden $n \times m$ que, por la Proposición 3.78, es equivalente por filas a una matriz B escalonada reducida por filas. Entonces, por la Proposición 3.92, A es equivalente por columnas a B^T, que es una matriz escalonada reducida por columnas. $\square$

PROPOSICION 3.98 *Si A y B son matrices equivalentes por filas (columnas), entonces A y B son matrices equivalentes.*

Demostración: Supongamos que A y B son matrices equivalentes por filas. Entonces, existen $E_1, E_2, \ldots, E_p$ matrices elementales de orden $m \times m$ tales que

$$B = E_p \cdots E_2 E_1 A.$$

Tomando $P = E_p \cdots E_2 E_1$ y $Q = I_n$, se tiene que $B = PAQ$ con P y Q matrices regulares, por lo que A y B son matrices equivalentes.

Del mismo modo, se demuestra que dos matrices equivalentes por columnas son equivalentes. $\square$

TEOREMA 3.99 (Forma canónica equivalente) *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriz de rango r. Entonces A es equivalente a la matriz*

$$C_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right),$$

donde I_r denota la matriz identidad de tamaño $r \times r$ y O denota matrices nulas de dimensiones apropiadas.

Demostración: Dado que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es una matriz no nula de rango r, por las Proposiciones 3.78 y 3.83, A es equivalente por filas a una matriz B escalonada reducida por filas de rango r. Entonces, por la Proposición 3.98, A y B son matrices equivalentes.

Por último, realizando operaciones elementales sobre las columnas de B, se obtiene la matriz equivalente por columnas C_r y, por la Proposición 3.98, B y C_r son equivalentes. Dado que se cumple la propiedad transitiva para la equivalencia de matrices, se concluye que A es equivalente a C_r. $\square$

3.8. Problemas.

PROBLEMA 3.1 Determina dos matrices cuadradas de orden 2, A y B, tales que

$$2A-5B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad -A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: $A=\begin{pmatrix} -12 & -3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 3.2 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, halla todas las matrices X de orden 2 tales que $AX=X^TB$.

Sol.: $X=\lambda\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

PROBLEMA 3.3 Prueba que $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$ si, y sólo si, $AB=BA$.

PROBLEMA 3.4 Sean A y B dos matrices simétricas de orden n. Prueba que AB es simétrica si, y sólo si, A y B conmutan.

PROBLEMA 3.5 Dada una matriz cuadrada A, se pide:

1. Probar que $A+A^T$ es simétrica.

2. Probar que $A-A^T$ es antisimétrica.

3. Descomponer A como suma de una matriz simétrica y de una antisimétrica.

4. Demostrar que la descomposición de A, como suma de una matriz simétrica y de una antisimétrica, es única.

5. Si $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, descomponerla en suma de una matriz simétrica con otra antisimétrica.

PROBLEMA 3.6 Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Halla, en cada caso, las matrices cuadradas tales que:

1. $AB=O$. Sol.: $B=\begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

2. $BA = O$. Sol.: $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

3. $AB = BA$. Sol.: $B = \begin{pmatrix} 2a+b & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 3.7 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

calcula A^2 y A^{-1}.

Sol.: $A^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$, $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{25} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 3.8 Sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

verifica la igualdad $A^2 = A + I$, calcula A^{-1} y A^4.

Sol.: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\quad A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 6 & -3 \\ 21 & 14 & 3 & -18 \\ -27 & -6 & 5 & 21 \\ 6 & 15 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 3.9 Calcula los siguientes determinantes usando sus propiedades y efectuando un número reducido de operaciones:

$a)$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ $\qquad b)$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\qquad c)$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$d)$ $\begin{vmatrix} i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{vmatrix}$.

Sol.: $a)$ -228. $\quad b)$ 1. $\quad c)$ $(1-x)(1-y)$. $\quad d)$ $8i$.

PROBLEMA 3.10 Demuestra, sin necesidad de calcularlos, que los siguientes determinantes son nulos:

$a)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ $\qquad b)\quad \begin{vmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{vmatrix}$ $\qquad c)\quad \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \operatorname{sen}^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \operatorname{sen}^2 c & 1 & \cos^2 c \end{vmatrix}$

$d)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ $\qquad e)\quad \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$ $\qquad f)\quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

$g)\quad \begin{vmatrix} yz & 1/x & x \\ zx & 1/y & y \\ xy & 1/z & z \end{vmatrix}.$

PROBLEMA 3.11 Resuelve las siguientes ecuaciones en la variable x, aplicando las propiedades de los determinantes:

$a)\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0.$ $\qquad b)\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & x & 2c \\ a^2 & ab & x \end{vmatrix} = 0.$ $\qquad c)\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & x & 2c \\ x & -b & -c \end{vmatrix} = 0.$

Sol.: $a)$ $x = b$ o $x = c$ si $a \neq 0$. $\qquad b)$ $x = 2b$ o $x = ac$ si $a \neq 0$. $\qquad c)$ $x = -a$ o $x = 2b$ si $c \neq 0$.

PROBLEMA 3.12 Sin desarrollar los determinantes, demuestra la identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

PROBLEMA 3.13 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

obtén razonadamente el valor de los siguientes determinantes:

$a)$ $\det(A+B)$ y $\det\left(\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right)$. $\qquad$ Sol.: 24 y $\frac{1}{192}$.

$b)$ $\det\left((A+B)^{-1}A\right)$ y $\det\left(A^{-1}(A+B)\right)$. $\qquad$ Sol.: $\frac{1}{6}$ y 6.

$c)$ $\det\left(2ABA^{-1}\right)$ y $\det\left(A^3B^{-1}\right)$. $\qquad$ Sol.: -32 y -16.

PROBLEMA 3.14 Sabiendo que los números 58786, 30628, 12831, 80743 y 16016 son todos divisibles por 13, demuestra que el determinante de la siguiente matriz es también divisible por 13:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 3.15 Encuentra, si es posible, la inversa de las siguientes matrices:

$a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad c)\quad \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$d)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Sol.: $a)\quad \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11/5 & 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \qquad c)\quad \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$d)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

PROBLEMA 3.16 Calcula el rango de las siguientes matrices:

$a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & -5 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & -9 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$c)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad d)\quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$

Sol.: $a)$ 3 $\quad b)$ 4 $\quad c)$ 3 $\quad d)$ 3.

PROBLEMA 3.17 Calcula el rango de las siguientes matrices en función de los parámetros correspondientes:

$a)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & t & t \end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 3 & m & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ m & -1 & m \end{pmatrix} \qquad c)\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda+1 & -2 \\ -2 & \lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1 & \mu & 1 \end{pmatrix}.$

Sol.: $a)$ $\operatorname{rg}(A) = 3$ si $t \neq 1$ y $\operatorname{rg}(A) = 2$ si $t = 1$.

$b)$ rg $(A) = 3$ si $m \neq -1/2$ y $m \neq -2$ y rg $(A) = 2$ si $m = -1/2$ o $m = -2$.
$c)$ rg $(A) = 3$ si $\lambda \neq 1$ o $\mu \neq 1$ y rg $(A) = 2$ si $\lambda = 1$ o $\mu = 1$).

PROBLEMA 3.18 Resuelve, por el Método de Gauss, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

(Sol.: Sistema incompatible.)

PROBLEMA 3.19 Resuelve, por el Método de Gauss, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

(Sol.: $x_1 = 13/4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3/4$).

PROBLEMA 3.20 Resuelve, por el Método de Gauss, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

(Sol.: $x_1 = 1 - \lambda$, $x_2 = -1 - \lambda$, $x_3 = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$).

PROBLEMA 3.21 Encuentra, si es posible, la inversa de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss:

$$a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

$$a) \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11/5 & 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} -17 & 23 & -5/2 & -10 \\ 5 & -8 & 1/2 & 4 \\ 4 & -5 & 1/2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 3.22 Discutir y resolver por el Método de Cramer, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

(Sol.: Sistema incompatible).

PROBLEMA 3.23 Discutir y resolver por el Método de Cramer, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

(Sol.: $x_1 = 13/4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3/4$).

PROBLEMA 3.24 Discutir y resolver por el Método de Cramer, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

(Sol.: $x_1 = 1 - \lambda$, $x_2 = -1 - \lambda$, $x_3 = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$).

PROBLEMA 3.25 Estudiar la compatibilidad del sistema siguiente en función del parámetro real m. Resolver cuando sea posible.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & = & m \\ mx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2m \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

(Sol.: Sistema incompatible para $m = 1$, sistema compatible determinado para $m \neq 1$ con $x_1 = \dfrac{-2m+5}{1-m}$, $x_2 = \dfrac{-m^2+3m-5}{1-m}$, $x_3 = -m+5$).

PROBLEMA 3.26 Estudiar la compatibilidad del sistema siguiente en función del parámetro real m. Resolver cuando sea posible.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & m \\ x_1 & & & - & 3x_3 & = & m \\ & & x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

(Sol.: Sistema incompatible para $m \neq 0$, sistema compatible indeterminado para $m = 0$ con $x_1 = 3\lambda$, $x_2 = -7\lambda$, $x_3 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

PROBLEMA 3.27 Estudiar la compatibilidad del sistema siguiente en función del parámetro real λ. Resolver cuando sea posible.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ mx_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & m \\ 3x_1 & + & mx_2 & + & x_3 & = & m \end{array}\right.$$

(Sol.: Sistema incompatible para $m = \sqrt{5}$ o $m = -\sqrt{5}$, sistema compatible determinado para $m \neq \sqrt{5}$ y $m \neq -\sqrt{5}$, con $x_1 = \dfrac{m^2 - 3m}{m^2 - 5}$, $x_2 = \dfrac{m^2 - m}{m^2 - 5}$, $x_3 = \dfrac{-2m^2 + 4m}{m^2 - 5}$).

y

$$W_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0,\ x_3 - x_4 = 0 \right\},$$

y el endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \frac{1}{2}\left(3x_1 + x_2 - x_3 - x_4, 4x_1 - 2x_3, -2x_1 + 4x_3 - 2x_4, -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right).$$

Se pide:

1. Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios invariantes para f.

2. Encontrar una base de $W_1 + W_2$ y otra de $W_1 \cap W_2$.

3. Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal a trozos.