Grado en Física, Curso 2020-2021

Mecánica Estadística

Control 1

1. Para el caso de N partículas a temperatura T que interaccionan débilmente, cada partícula con momento magnético μ paralelo o antiparalelo a un campo magnético externo H, calcula:

   (a) La entropía en función de H, μ, T y N.

   (b) La capacidad calorífica en términos de H, μ, T y N.

   (c) Discute cuál será el comportamiento de la energía y de la entropía de este sistema cuando $T \to 0$.

   (5 puntos)

2. Supongamos un gas ideal clásico de N moléculas de masa m en equilibrio térmico a temperatura T, en un volumen V que cumple la distribución de velocidades de Maxwell. Calcula:

   (a) La energía media por molécula a partir de la distribución de energía $F(\epsilon)d\epsilon$. Discute el resultado con relación al principio de equipartición de la energía.

   (b) El valor más probable de la energía, $\tilde{\epsilon}$. ¿Se cumple que $\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2}m\tilde{v}^2$, donde $\tilde{v}$ es el valor más probable de la velocidad?

   La distribución de Maxwell para el vector velocidad es:

$$f(\vec{v})d\vec{v} = \frac{N}{V}(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} \exp{(-\frac{mv^2}{2kT})}d\vec{v}$$

   (5 puntos)

Relaciones de interés:

Funciones hiperbólicas:

$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$; $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$; $\tanh x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\frac{d\tanh x}{dx} = 1 - \tanh^2 x$

$$\int_0^\infty x^a e^{-bx}dx = b^{-a-1}\Gamma(a+1)$$

Donde la función Γ cumple: $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ y $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

GRADO EN FÍSICA, CURSO 2020-2021

MECÁNICA ESTADÍSTICA

Control 1

1. Para el caso de N partículas a temperatura T que interaccionan débilmente, cada partícula con momento magnético μ paralelo o antiparalelo a un campo magnético externo H, calcula:

   (a) La entropía en función de H, μ, T y N. (2 puntos)

   (b) La capacidad calorífica en términos de H, μ, T y N. (2 puntos)

   (c) Discute cuál será el comportamiento de la energía y de la entropía de este sistema cuando $T \to 0$. (1 punto)

   (5 puntos)

N y T constantes $\longrightarrow$ Colectividad canónica.

Dos estados: paralelo o antiparalelo al campo magnético H

Energías: $\varepsilon_+ = -\mu H \qquad \varepsilon_- = +\mu H$

Probabilidad de cada estado:

$$P_+ = \frac{e^{+\beta\mu H}}{Z} \qquad P_- = \frac{e^{-\beta\mu H}}{Z}$$

$$Z = e^{+\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}$$

(a) Entropía $S = f(H, \mu, T, N)$

Entropía de Gibbs para las N partículas:

$$S = -NK \sum_r P_r \ln P_r$$

En este caso sólo tenemos 2 posibles estados:

$$S = -NK\left(P_+ \ln P_+ + P_- \ln P_-\right) =$$

$$= -NK\left[\frac{e^{\beta\mu H}}{Z}\ln\left(\frac{e^{\beta\mu H}}{Z}\right) + \frac{e^{-\beta\mu H}}{Z}\ln\left(\frac{e^{-\beta\mu H}}{Z}\right)\right] =$$

$$= -\frac{NK}{Z}\left[e^{\beta\mu H}(\beta\mu H - \ln Z) + e^{-\beta\mu H}(-\beta\mu H - \ln Z)\right] =$$

$$= -\frac{NK}{Z}\left[\left(-e^{\beta\mu H} - e^{-\beta\mu H}\right)\ln Z + \beta\mu H\left(e^{\beta\mu H} - e^{-\beta\mu H}\right)\right] =$$

$$= NK\left[\underbrace{\frac{\cancel{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}}}{\cancel{Z}}}_{1} \ln Z - \beta\mu H \underbrace{\left(\frac{e^{\beta\mu H} - e^{-\beta\mu H}}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}}\right)}_{\tanh(\beta\mu H)} \right] =$$

$$= NK\left[\ln Z - \beta\mu H \tanh(\beta\mu H)\right]$$

$$\boxed{S = NK\left[\ln(2\cosh(\beta\mu H)) - \beta\mu H \tanh(\beta\mu H)\right]}$$

Otro modo de resolverlo. Si recordamos la expresión de la entropía para la colectividad canónica (o la deducimos de la de Gibbs):

$$S = NK(\ln Z + \beta\bar{\varepsilon})$$

donde Z es la función de partición para una partícula y $\bar{\varepsilon}$ la energía media de una partícula.

$$Z = e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}$$

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\ln\left(e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}}\cdot\left(\mu H e^{\beta\mu H} - \mu H e^{-\beta\mu H}\right) =$$

$$= -\mu H \frac{e^{\beta\mu H} - e^{-\beta\mu H}}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}} = -\mu H \tanh(\beta\mu H)$$

$$S = NK\left(\ln Z - \beta\mu H \tanh(\beta\mu H)\right)$$

$$\boxed{S = NK\left[\ln\left(2\cosh(\beta\mu H)\right) - \beta\mu H \tanh(\beta\mu H)\right]}$$

La misma expresión de antes.
Aquí cuidado con la entropía del sistema de N partículas frente a la de una y lo mismo para la función de partición o la energía media.

(b) $$C_V = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta}\right)_V \left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right)$$

$$\bar{E} = N\bar{\varepsilon} = -N\mu H \tanh(\beta\mu H)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta}\right) \underset{\uparrow}{=} -N\mu H\left(1 - \tanh^2(\beta\mu H)\right) \cdot \mu H = -N\mu^2 H^2\left(1 - \tanh^2(\beta\mu H)\right)$$

Tenemos el valor de la derivada de tanh en las relaciones al final de la hoja del control.

$$C_V = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_V = -N\mu^2 H^2\left(1 - \tanh^2(\beta\mu H)\right) \cdot \left(-\frac{1}{KT^2}\right)$$

$$\boxed{C_V = NK(\beta\mu H)^2\left(1 - \tanh^2(\beta\mu H)\right)}$$

(c) $$\bar{E} = -N\mu H \tanh(\beta\mu H)$$

Si $T \to 0$ $\quad \tanh(\beta\mu H) \simeq 1 \quad \rightarrow \quad \bar{E} = -N\mu H$

Los espines tienden a alinearse con el campo magnético y en el caso extremo $T=0$ estamos en el estado fundamental con energía $E=-N\mu H$ y por tanto todos los espines alineados con el campo magnético.
En ese caso tendríamos una única configuración y por tanto la entropía sería cero. $T\to 0$ $S\to 0$.

$$S = NK\left(\ln\left(e^{\beta\mu H}+e^{-\beta\mu H}\right) - \beta\mu H\right) \simeq$$

$$\simeq NK\left(\beta\mu H - \beta\mu H\right) = 0$$

2. Supongamos un gas ideal clásico de N moléculas de masa m en equilibrio térmico a temperatura T, en un volumen V que cumple la distribución de velocidades de Maxwell. Calcula:

   (a) La energía media por molécula a partir de la distribución de energía $F(\epsilon)d\epsilon$. Discute el resultado con relación al principio de equipartición de la energía. (2.5 puntos)

   (b) El valor más probable de la energía, $\tilde{\epsilon}$. ¿Se cumple que $\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2}m\tilde{v}^2$, donde $\tilde{v}$ es el valor más probable de la velocidad? (2.5 puntos)

   La distribución de Maxwell para el vector velocidad es:

$$f(\vec{v})d\vec{v} = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)d\vec{v}$$

(a) Para calcular la energía media a partir de $F(\mathcal{E})\,d\mathcal{E}$:

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{\int F(\mathcal{E})\,\mathcal{E}\,d\mathcal{E}}{\int F(\mathcal{E})\,d\mathcal{E}}$$

Tendremos que obtener $F(\mathcal{E}).d\mathcal{E}$ a partir de $f(\vec{v})\,d\vec{v}$

La energía de un gas ideal es la energía cinética, por tanto relacionada con el módulo de la velocidad:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2$$

Tenemos que obtener la distribución del módulo de velocidades:

$$F(v)\,dv = 4\pi v^2 f(\vec{v})\,dv =$$

$$= 4\pi v^2\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2KT}}\,dv$$

Ahora podemos sustituir por la $\mathcal{E}$. $\quad d\mathcal{E} = mv\,dv$

$$dv = \frac{d\mathcal{E}}{mv} = \frac{d\mathcal{E}}{\sqrt{2m\mathcal{E}}}\,; \quad v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}}$$

$$F(\varepsilon)\, d\varepsilon = 4\pi \left(\frac{2\varepsilon}{m}\right)\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{KT}} \cdot \frac{d\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon m}} =$$

$$= 2\pi \left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{1}{\pi KT}\right)^{3/2} \cdot \varepsilon^{1/2}\, e^{-\varepsilon/KT} \cdot d\varepsilon$$

$\int F(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{N}{V}$ (o podemos calcularlo)

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\int F(\varepsilon)\, \varepsilon\, d\varepsilon}{\int F(\varepsilon)\, d\varepsilon} = 2\pi \left(\frac{1}{\pi KT}\right)^{3/2} \int \varepsilon^{3/2} \cdot e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

En la hoja tenemos la solución de integrales de este tipo:

$$\int \varepsilon^{3/2} \cdot e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = \left(\frac{1}{KT}\right)^{-\frac{3}{2}-1} \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{KT}\right)^{-5/2} \cdot \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = (KT)^{5/2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}} = (KT)^{5/2} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot 3}{4}$$

$$\overline{\varepsilon} = 2\pi \left(\frac{1}{\pi KT}\right)^{3/2} \cdot (KT)^{5/2} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot 3}{4} = \frac{3}{2} KT$$

$$\boxed{\overline{\varepsilon} = \frac{3}{2} KT}$$

Esta es la solución que se espera obtener del principio de equipartición por el cual cada término de energía cuadrático (como la energía cinética) contribuye con $\frac{1}{2}KT$.
En 3D $\rightarrow$ $\frac{3}{2}KT$.

(b) $\tilde{\varepsilon}$

$$\left.\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\tilde{\varepsilon}} = 0$$

$$F(\varepsilon) = \frac{N}{V} 2\pi \left(\frac{1}{\pi KT}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{KT}\right)$$

$$\frac{\partial F(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{N}{V} 2\pi \left(\frac{1}{\pi KT}\right)^{3/2} \left[\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2} \cdot e^{-\varepsilon/KT} + \varepsilon^{1/2} \cdot e^{-\varepsilon/KT} \cdot \left(-\frac{1}{KT}\right)\right] = 0$$

$\uparrow$
$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$

$$\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{-1/2} - \frac{1}{KT} \cdot \tilde{\varepsilon}^{1/2} = 0$$

$$\boxed{\tilde{\varepsilon} = \frac{KT}{2}}$$

Para ver si se cumple que $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} m \tilde{v}^2$ tenemos que obtener $\tilde{v}$ por el mismo procedimiento.

$$\left.\frac{dF(v)}{dv}\right|_{v=\tilde{v}} = 0$$

$$\left.\frac{dF(v)}{dv}\right| = 4\pi \frac{N}{V} \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \left[2v\, e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} - v^2 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} \cdot \beta m v\right]$$

$$2v - v^3 \beta m = 0$$

$$\tilde{v}^2 = \frac{2KT}{m} \qquad \tilde{v} = \sqrt{\frac{2KT}{m}} \rightarrow \frac{1}{2} m \tilde{v}^2 = \underline{KT}$$

No coincide.

EXÁMENES - ESTUDIO PARCIAL 1 DIC 2023

PARCIAL 1 2020 - 2021

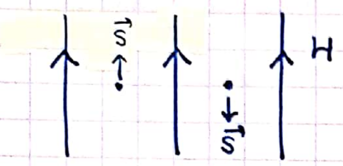
EJERCICIO 1: para el caso de N partículas a temperatura T que interaccionan débilmente, cada partícula con momento magnético μ paralelo o antiparalelo a un campo magnético externo H, calcula:

(2p) a) Entropía en función de H, μ, T y N.

(2p) b) Capacidad calorífica en términos de H, μ, T y N.

(1p) c) Discutir el comportamiento de la energía y de la entropía si $T \to 0$.

a) Nos hablan de temperatura $T \Rightarrow$ COLECTIVIDAD CANÓNICA



- Espín paralelo a $\vec{H}$: $s = +\frac{1}{2}$, $\epsilon_+ = -\mu H$
- Espín antiparalelo a $\vec{H}$: $s = -\frac{1}{2}$, $\epsilon_- = \mu H$

Para conocer la entropía vamos a emplear la entropía de Gibbs, porque sabemos más acerca de las probabilidades que de $\Omega(E) \Rightarrow$ colectividad canónica.

- FUNCIÓN DE PARTICIÓN: $Z = \sum_r e^{-\beta E_r} = e^{-\beta E_+} + e^{-\beta E_-} = e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}$
- $P_+ = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_+} = \frac{e^{\beta\mu H}}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}} = \frac{1}{1+e^{-2\beta\mu H}}$
- $P_- = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_-} = \frac{e^{-\beta\mu H}}{e^{-\beta\mu H} + e^{\beta\mu H}} = \frac{1}{1+e^{2\beta\mu H}}$
- ENTROPÍA DE GIBBS: $-NK \sum_{i=1}^{r} P_i \ln P_i = S$

Borregada de manual y 5 ptos a tomar x culo!

$$S = -NK \sum_{i=1}^{r} P_i \ln P_i = -NK \cdot \left[P_+ \ln P_+ + P_- \ln P_- \right] =$$

$$= -NK \cdot \left[\frac{e^{\beta\mu H}}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}} \cdot \ln \frac{e^{\beta\mu H}}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}} + \frac{e^{-\beta\mu H}}{e^{-\beta\mu H} + e^{\beta\mu H}} \ln \frac{e^{-\beta\mu H}}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}} \right] =$$

$$= -NK \cdot \left[\frac{e^{\beta\mu H} \cdot \beta\mu H - e^{-\beta\mu H} \beta\mu H}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}} \right] = -NK\beta\mu H \left[\frac{e^{2\beta\mu H} - 1}{e^{2\beta\mu H} + 1} - \ln Z \right] =$$

$$= -NK\beta\mu H \left[\tanh(\beta\mu H) - \ln Z \right] = -N\frac{\mu H}{T} \left[\tanh\left(\frac{\mu H}{kT}\right) - \ln(2\cosh(\beta\mu H)) \right]$$

falta + ln Z !!

b) Para dar la capacidad calorífica necesitamos el valor medio de la energía y para ello tenemos que derivar la función de partición respecto de β.

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta}\ln\left(e^{-\beta\mu H}+e^{\beta\mu H}\right) = -\frac{-\mu H e^{-\beta\mu H}+\mu H e^{\beta\mu H}}{e^{-\beta\mu H}+e^{\beta\mu H}} =$$

$$= -\mu H\,\frac{e^{2\beta\mu H}-1}{e^{2\beta\mu H}+1} = -\mu H\cdot\tanh\beta\mu H = -\mu H\tanh\left(\frac{\mu H}{KT}\right)\cdot N$$

Con lo que $C_V = -\frac{\partial}{\partial\beta}\langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\mu H\tanh(\beta\mu H)\right) = \frac{\mu^2 H^2}{T}\left[1-\tanh^2\left(\frac{\mu H}{KT}\right)\right]\cdot N$

truco! DERIVADA tanh

$f(x)=\tanh x \Rightarrow f'(x)=(1-\tanh^2 u)u'$

!!! Cuando nos hablen de N partículas hay que multiplicar por N!!

+ no sé derivar

c) Pregunta más teórica, la copio de la resolución de Pons ü

$\langle E\rangle = -N\mu H\tanh(\beta\mu H) \Longrightarrow$ Si $T\to 0$ $\tanh(\beta\mu H)\simeq 1 \Rightarrow \boxed{\langle E\rangle = -N\mu H}$

Los espines tienden a alinearse con el campo magnético y en el caso extremo $T=0$ estamos en el estado fundamental, con energía $\boxed{E=-N\mu H}$, y por tanto todos los espines están alineados con el campo magnético. En ese caso, tendríamos una única configuración y por tanto la entropía sería 0. $T\to 0 \Rightarrow S\to 0$

$$S = Nk\left(\ln\left(e^{\beta\mu H}+e^{-\beta\mu H}\right)-\beta\mu H\right)\simeq Nk(\beta\mu H-\beta\mu H)=0$$

Apunte mío para entenderlo: la entropía es la medida del desconocimiento del sistema. Si están todos los espines alineados, conocemos todos los microestados $\Longrightarrow S=0$ (no hay desconocimiento).

EJERCICIO 2: supongamos un gas ideal clásico de N moléculas de masa m en equilibrio térmico a temperatura T, en un volumen V que cumple la distribución de velocidades de Maxwell. Calcula:

a) Energía media por partícula a partir de $F(E)d(E)$. Discute el resultado con relación al principio de equipartición de la energía. (2'5p)

b) El valor más probable de la energía, $\langle E\rangle$. ¿Se cumple que $\langle E\rangle = \frac{1}{2}m\tilde{v}^2$, donde $\tilde{v}$ es el valor más probable de la velocidad? (2'5p)

a) En el examen nos dan la distribución de Maxwell para el vector velocidad:

$$f(\vec{v})d\vec{v} = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d\vec{v} \Rightarrow$$ necesitamos obtener a partir de esta distribución $F(v)dv$, la distribución para el módulo de la velocidad. La relación entre distribuciones es:

$$F(v)dv = 4\pi v^2 f(\vec{v})d\vec{v} = 4\pi v^2 \cdot \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

Ahora vamos a relacionar v y E de la siguiente forma:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 \Longleftrightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$dE = mv\,dv = m\sqrt{\frac{2E}{m}}\,dv = \sqrt{2mE}\,dv$$

Por tanto, la distribución de probabilidad de la energía queda:

$$F(E)dE = \cancel{4}\pi \cdot \frac{2E}{\cancel{m}} \cdot \frac{N}{V}\left(\frac{m}{\cancel{2}\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m \cdot 2E/m}{2kT}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cancel{2m}E}}\,dE =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{E} \cdot \frac{N}{V}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} dE = \frac{2N}{\sqrt{\pi}V}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \cdot (E)^{1/2} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} dE$$

La energía media por partícula será:

$$\langle E\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}} (E)^{3/2} dE$$

↳ RAZÓN DE POR QUÉ NO SE INCLUYE $\frac{N}{V} \Rightarrow \langle E\rangle = \dfrac{\int E\,F(E)dE}{\int F(E)\,dE}$ y $\int F(E)\,dE = \frac{N}{V}$

RESOLUCIÓN INTEGRAL → donde se mueve el módulo de la velocidad

$$\langle E\rangle = \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} e^{-E/kT}(E)^{3/2}\,dE =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \beta^{3/2} e^{-\beta E}(E)^{3/2}\,dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta^{3/2}\int_0^\infty e^{-\beta y^2} y^4\cdot 2dy =$$

CV: $y^2 = E \rightarrow dE = 2y\,dy$

CV: $z = \beta y^2;\ y = \sqrt{\frac{z}{\beta}}$, $dz = 2\beta y\,dy$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta^{3/2}\int_0^\infty e^{-z}\cdot\frac{2\cdot(z/\beta)^2}{2\cdot\beta\cdot\sqrt{\frac{z}{\beta}}}\,dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\beta}\int_0^\infty e^{-z} z^{3/2}\,dz =$$

① FORMA LARGA: haciendo partes ⟹ NO PUEDO PORQUE NO ESTOY TRABAJANDO CON z^n $n\in\mathbb{Z}$

TRUCO: propiedades función gamma

② FORMA CORTA: $\boxed{\text{FUNCIÓN GAMMA}}$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\beta}\int_0^\infty e^{-z}z^{3/2}dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\beta} = \frac{3}{2}kT$$

⟹ coincide con el resultado que se obtiene por el principio de equipartición para una partícula libre (3 grados de libertad)

b) Para ver el valor con mayor probabilidad, derivamos la función de distribución y la igualamos a 0.

$$F(E)\,dE = \frac{N}{V}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} e^{-E/kT}\sqrt{E} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta^{3/2}e^{-\beta E}E^{1/2}\cdot\frac{N}{V}$$

$$\frac{\partial F(E)}{\partial E} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{N}{V}\cdot\beta^{3/2}\cdot\left[\frac{1}{2}E^{-1/2}e^{-\beta E} + E^{1/2}\cdot(-\beta)e^{-\beta E}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\beta E}\left(\frac{1}{2}E^{-1/2} - \beta E^{1/2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}E^{-1/2} = \beta E^{1/2} \Leftrightarrow \frac{1}{4E} = \beta^2 E$$

$$\Leftrightarrow E^2 = \frac{1}{4\beta^2} \Rightarrow \tilde{E} = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2}kT$$

Vamos a buscar $\tilde{v}$ para ver si se cumple $\tilde{E} = \frac{1}{2}m\tilde{v}^2$:

$$F(v)\,dv = \frac{N}{V}\cdot 4\pi v^2\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{kT}}\,dv$$

$$\frac{\partial F(v)}{\partial v} = \frac{N}{V}\cdot 4\pi\left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2}\left[2v\cdot e^{-m\beta v^2} + v^2(-2\beta_m v)e^{-m\beta v^2}\right] = 0$$

$$2v\,e^{-m\beta v^2}\left[1 - v^2\beta\right] = 0 \longrightarrow \tilde{v} = 0$$

$$\hookrightarrow \tilde{v} = \sqrt{\frac{1}{\beta m}} = \sqrt{\frac{kT}{m}} \Rightarrow \tilde{E} \neq \frac{1}{2}m\tilde{v}^2$$