INTRODUCCIÓN

"However, a vector space is itself a very special type of space, and something much more general is needed for the mathematics of much of modern physics. Even Euclid's ancient geometry is not a vector space, because a vector space has to have a particular distinguished point, namely the origin (given by the zero vector), whereas in euclidean geometry every point is on equal footing. In fact, euclidean space is an example of what is called an **affine space**. An affine space is like a vector space but we "forget" the origin; in effect it is a space in which there is a consistent notion of **parallelogram**. As soon as we specify a particular point as origin this allows us to define vector addition by the "parallelogram law". " (Sir Roger Penrose, "The Road to Reality", 2005. P.299)

Hablar de homogeneidad e isotropía. Ejemplo, la esfera

"Basically, an FLRW model is characterized by the fact that it is completely *spatially homogeneous* and *isotropic*. Roughly speaking , 'isotropic' means that the universe looks the same in all directions, so it has an O(3) rotational symmetry group. Also, 'spatially homogeneous' means that the universe looks the same at each point of space, at any one time; accordingly, there is a group of symmetries that is transitive on each member of a family of spacelike 3-surfaces, these being the 3-surfaces T_t of 'space' at constant 'time' (giving a 6-dimensional symmetry group in all. This pair of assumptions is in good accord with observations of the matter distribution on a very large scale, and with the nature of the microwave background. Spatial isotropy is found directly to be a very good approximation (from observations of very distant sources, and primarily from the 2.7K radiation). Moreover, if the universe were *not* homogeneous, it could *appear* to be isotropic only from very particular places, so we would have to be in a very privileged location for the universo to appear to us to be isotropic unless it were also homogeneous. Of course, the observational isotropy is not exact, since we see individual galaxies, clusters of galaxies and superclusters of galaxies only in certain directions. There are uneven distributions of material, not always visible, on mind-boggling scales, such as that referred to as the 'Great Attractor' which seems to be pulling on not only our own Galaxy but several neighbouring Galaxy clusters. But it appears to be the case that the deviations from particular spatial uniformity get proportionally smaller, the farther away we look. The best information that we have for the most distant regions of the universe that are accesible to us comes from the 2.7K black-body background radiation. The COBE, BOOMERANG, and WMAP data, etc. tell us that, although there are very slight temperature deviations, at the tiny level of only a few parts in 10^5, isotropy is well supported." (Sir Roger Penrose, "The Road to Reality", 2005. P.718)

La geometría afín, proporciona una estructura que es homogénea e isotrópica. Por tanto es un buen modelo para trabajar con propiedades que son clave para la Cosmología, y en general para la Física. Además, la geometría afín, asocia a cada punto una estructura lineal que permite utilizar las técnicas sencillas del Álgebra Lineal para formular y –en muchas ocasiones- resolver los problemas.

Existen otras maneras de asociar estructuras lineales a objetos que no son espacios afines. Tal es el caso de las superficies, y en general de las variedades diferenciables. Se puede aproximar una superficie (o variedad diferenciable) en cada punto, por su espacio tangente –que es un espacio vectorial- Así se puede entender la curvatura como una medida de la variación del espacio tangente.

Éstas, y otras muchas situaciones plantean el problema de tipo filosófico de por qué aparentemente existe una relación tan estrecha entre Matemáticas y Realidad.

Uno de los científicos que ha planteado con brillantez esta cuestión fue Eugene Wigner, -premio Nobel en Física en 1963- quien publicó un famoso artículo con el título "The unreasonable effectivness of mathematics in the natural sciences" (ver el video del astrofísico israelí Mario Livio). Wigner concluye diciendo:"The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in the future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning".

Otro punto de vista al respecto es de Max Tegmark (MIT) quien ha formulado la "Ultima teoría del todo", cuyo único postulado es que "todas las estructuras que existen matemáticamente también existen físicamente". Esta simple teoría, sin ningún parámetro libre en lo absoluto, sugiere que en aquellas estructuras lo suficientemente complejas como para contener subestructuras conscientes de sí mismas (SSAS por su término en inglés), estas SSAS se percibirán subjetivamente a sí mismas como existentes en un mundo físico "real". Esta idea es formalizada como la "Hipótesis Matemática del Universo"[1]

Esta posición, depende filosóficamente del realismo platónico.

Hay otros científicos que niegan el concepto de realidad: "I don't demand that a theory correspond to reality because I don't know what it is. Reality is not a quality you can test with litmus paper. All I'm concerned with is that the theory should predict the results of measurements." (Stephen Hawking, The Nature of Space and Time, 1996).

Dejando a un lado este debate, ya que vamos a tratar de geometría afín, conviene analizar cuál es la relación de la geometría afín con otras geometrías. En el siglo XIX, tras aparecer las geometrías no euclídeas-, el concepto de geometría necesitaba de una revisión. Esta revisión la hizo Félix Klein en su Programa de Erlangen. Klein definió la Geometría como el estudio de espacios, objetos en esos espacios y propiedades de esos objetos que permanecen invariantes bajo grupos de transformaciones. Asoció de esa manera a cada geometría un grupo. La relación entre los grupos de dos geometrías, determina la relación entre las geometrías.

EL ESPACIO AFIN

En Matemáticas el espacio afín es una estructura geométrica que permite definir nociones de paralelismo e incidencia, y que, por tanto, proporciona un buen modelo para enunciar y demostrar resultados de geometría euclídea. En un espacio afín, a diferencia de lo que ocurre en espacios vectoriales, no hay un punto distinguido como el origen. Existen nociones de puntos y de direcciones determinadas por vectores, de manera que podremos sumar dos vectores y definir una noción de suma de punto y vector, pero no tendrá sentido sumar dos puntos. Es frecuente leer: "un espacio afín es lo que queda de un espacio vectorial cuando nos olvidamos del origen".

Objetivo: Desarrollar una estructura formal para estudiar Geometría.

Herramienta: El Álgebra Lineal.

En la estructura de R-espacio vectorial de R^3 sólo aparecen de manera natural rectas y planos que pasan por el origen. Necesitamos una estructura que incorpore un espacio vectorial con el origen fijado en el punto que más nos convenga.

Hay tres modos distintos de decir lo mismo:

- En el espacio afín no hay un punto distinguido.
- En el espacio afín se pueden estudiar rectas y planos que no pasen por el origen.
- En el espacio afín hay libertad para fijar el origen.

Definición.- Un **espacio afín** sobre un cuerpo K es una terna (A,V, φ) donde A es un conjunto no vacío, V es un espacio vectorial sobre K y φ es una aplicación

$$\varphi : A \times A \to V$$

$$(p,q) \to \varphi((p,q))$$

tal que

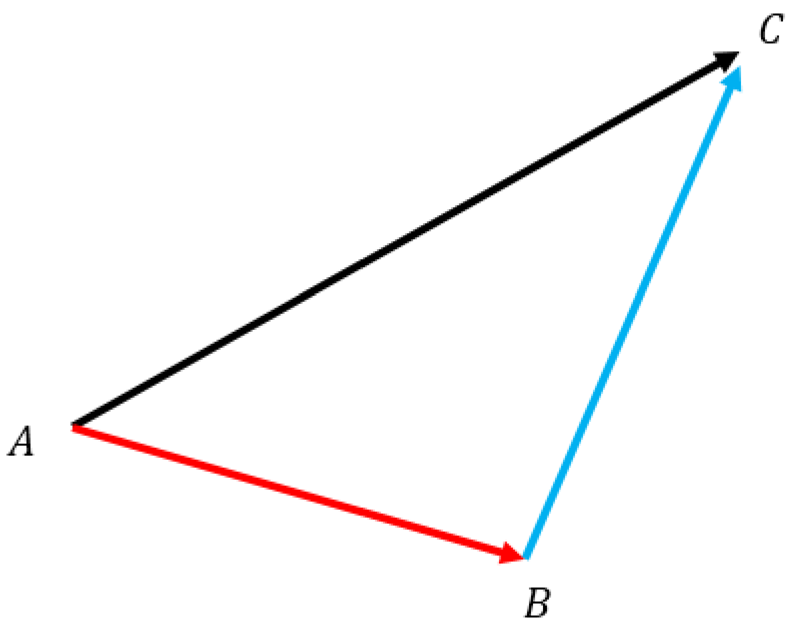
1) Para todo $p \in A$, la aplicación $\varphi_p : A \to V$, definida por $\varphi_p(q) = \varphi((p,q))$ es biyectiva.
2) Para todo p, q, r $\in$ A: $\varphi((p,q)) + \varphi((q,r)) = \varphi((p,r))$ (relación de Chasles)

La **dimensión** de un espacio afín es, por definición, la dimensión del espacio vectorial V. Llamaremos a V **espacio vectorial asociado al espacio afín** A. (También **espacio director** o **dirección**).

Observaciones: a) Durante el curso trabajaremos con espacios afines sobre R, en caso contrario lo especificaremos. b) Formalmente llamaremos espacio afín a la terna (A,V, φ), pero -si no hay confusión- hablaremos simplemente del espacio afín A.

La idea es que la aplicación φ asocia un vector a cada par de puntos (p,q). Interpretaremos este vector como el vector con origen en p y extremo en q. De hecho, frecuentemente, usaremos la notación $\varphi(p,q) = \underset{pq}{\rightarrow}$.

Para que toda la estructura sea consistente, es necesario poder relacionar los vectores que tienen orígenes en puntos diferentes del espacio afín A. Para esto precisamente sirve la regla de Chasles



Ejemplo 1: Sea V un espacio vectorial. Denotemos por A el conjunto de puntos (vectores) de V, considerado como simple conjunto, desprovisto de la estructura de espacio vectorial. Se define φ(u,v)=v-u. Entonces (A,V, φ) es un espacio afín. (EJERCICIO: Comprobar que se cumplen las condiciones exigidas en la definición). Esta estructura afín de V es canónica en el sentido de que sólo depende de la propia estructura vectorial y no de ninguna construcción adicional.

El espacio afín en que A=K^n (K, cuerpo) y la estructura afín es la canónica, descrita arriba, se conoce como **espacio afín estándar de dimensión n sobre K**.

Ejemplo 2: El tiempo es un espacio afín real (sobre R) de dimensión 1. Un instante es un punto de A, y un lapso de tiempo es un vector de V. NO HAY NINGÚN INSTANTE DISTINGUIDO. Este espacio es muy importante tanto para la Mecánica de Newton como para la Teoría de la Relatividad de Einstein.

Ejemplo 3: En la Relatividad Especial (Einstein) se estudian sucesos. Por ejemplo: la emisión de un fotón por un átomo. El conjunto de sucesos tiene lugar en un espacio afín real de dimensión 4: el espacio-tiempo.

Ejemplo 4: Considérese el siguiente subconjunto de R^2:

$L=\{(x,y)\in R^2/\ x+y-1=0\}$. Ejercicio: Demostrar que es un espacio afín. ¿Cuál es su espacio vectorial director?

Observación: Como pone de manifiesto el último ejemplo, se puede considerar que un espacio afín no es otra cosa que un trasladado paralelo de un espacio vectorial.

A partir de ahora, y a menos que haya que mencionar explícitamente la función φ, adoptaremos por comodidad la notación $\overrightarrow{pq}$ para $\varphi(p,q)$.

Proposición 1.1: En un espacio afín A se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\overrightarrow{pp}=\overrightarrow{0}$ para todo $p\in A$
2) $\overrightarrow{pq}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow p=q$
3) $\overrightarrow{pq}=-\overrightarrow{qp}$ para todo $p,q\in A$
4) $\overrightarrow{pq}=\overrightarrow{rs} \Leftrightarrow \overrightarrow{pr}=\overrightarrow{qs}$ (identidad del paralelogramo)

Demostración: Ejercicio

A veces es conveniente usar la siguiente notación: si $p,q\in A$ y $\overrightarrow{u}\in V$ es tal que $\varphi(p,q)=\overrightarrow{pq}=\overrightarrow{u}$, se escribe $q=p+\overrightarrow{u}$.

Es importante tener en cuenta que esta expresión no tiene ningún significado matemático; es sólo un modo abreviado para expresar $\overrightarrow{pq}=\overrightarrow{u}$.

Observación: Todos estos conceptos se pueden extender a estructuras discretas, que tienen también interés para la Física. Sustituyendo el concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo por el más débil de **módulo sobre un anillo**, se pueden estudiar –utilizando el anillo unitario conmutativo de los enteros- estructuras discretas como los **retículo**s. Estas estructuras son básicas para analizar otras estructuras como los **empaquetamientos**, los **cubrimientos** o las **teselaciones**.

<u>EJERCICIOS</u>:

1. Sea V un espacio vectorial real. Se considera la aplicación $\varphi: V\times V\rightarrow V$ dada por $\varphi(u,v)=2u-v$. Estudiar si φ induce o no una estructura de espacio afín en V.

2. Considérese el siguiente subconjunto de R^2: $M=\{(x,y)\in R^2/2x-y-3=0\}$. Demostrar que M es un espacio afín. ¿Cuál es su espacio vectorial director?

3. Considérese el siguiente subconjunto de R^3: N={(x,y,z)$\in$ R^3/ x+y+z=1}. Demostrar que N es un espacio afín. ¿Cuál es su espacio vectorial director?

VARIEDADES LINEALES

Una vez establecida la estructura de espacio afín, se pasa a estudiar los principales objetos que esta estructura permite definir –las variedades lineales-, así como las operaciones que podemos hacer con ellos y su posición relativa.

<u>Definición</u>.- Dado un **espacio afín** (A,V,φ) sobre un cuerpo K, la **variedad lineal que pasa por el punto a$\in$A, en la dirección del subespacio vectorial F$\subset$V** es el conjunto

$$a + F := \left\{ b \in A \colon \underset{ab}{\rightarrow} \in F \right\} =$$

$$= \{ b \in A \colon b = a + \underset{u}{\rightarrow}, \ \underset{u}{\rightarrow} \in F \}.$$

Se define la **dimensión de la variedad** como dim(a+F):=dim(F).

Llamaremos a F la **dirección** de a+F.

Ejemplo 1: L={(x,y)$\in$ R^2/ x+y-1=0} es una variedad afín de dimensión 1 del espacio afín estándar R^2.

A las variedades lineales se les conoce también como **subespacios afines**.

Si (A,V, φ) es un espacio afín, todo subespacio vectorial de V es una variedad lineal. ¿Es cierto el recíproco?

Se dice que una variedad lineal de dimensión 0 es un **punto**.

Se dice que una variedad lineal de dimensión 1 es una **recta**.

Se dice que una variedad lineal de dimensión 2 es un **plano**.

Se dice que una variedad lineal de dimensión n-1 es un **hiperplano**.

La mayor variedad lineal de un espacio afín A es a+V, con a un punto arbitrario de A. De hecho a+V=A.

Proposición 2.1: Si $b \in a+F$, entonces $a+F=b+F$.

Demostración: Ejercicio

Corolario 2.2: Si $p,q \in a+F$, entonces $\underset{pq}{\rightarrow} \in F$.

Demostración: Ejercicio

¿Es cierto el recíproco del Corolario anterior?

Ejemplo-Motivación: Posición relativa de dos rectas.

Definición: Se dice que dos variedades afines a+F y b+G **se cortan** si $(a+F) \cap (b+G) \neq \emptyset$.

Proposición 2.3: Dos variedades lineales a+F, b+G de un espacio afín se cortan sii $\underset{ab}{\rightarrow} \in F + G$.

Demostración: Ejercicio.

Definición: Se dice que dos variedades lineales a+F y b+G son **paralelas** si $F \subset G$ o $G \subset F$ o se dan ambas condiciones (en cuyo caso F=G).

Observa que es posible estudiar si variedades de dimensión diferente son paralelas.

Pregunta: Según la definición anterior, ¿es posible que dos variedades lineales paralelas se corten?

Proposición 2.4: Si a+F y b+G son paralelas, entonces o no se cortan o una está contenida en la otra.

Demostración: Ejercicio.

Definición: Se dice que dos variedades lineales **se cruzan** cuando ni se cortan ni son paralelas.

Las ecuaciones paramétricas de una variedad lineal vienen dadas en términos de polinomios de primer grado. Si sustituimos dichos polinomios por funciones diferenciables cualesquiera se obtiene el concepto de **curvas** (si todas las funciones dependen de un solo parámetro), **superficies** (si todas las funciones dependen de exactamente dos parámetros), o –en general- de **variedades diferenciables de dimensión n** (si las funciones dependen de exactamente n parámetros).

Definición: Se llama **curva parametrizada (diferenciable)** a una aplicación diferenciable $\alpha: I \to R^n$donde I es un intervalo abierto de la recta real.

$\forall t \in I$ $\alpha(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Se supondrá que las **funciones coordenadas** $x_i(t)$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ son funciones C^∞.

Ejemplo: $\alpha(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in R$ es una curva parametrizada llamada **hélice cilíndrica**.

Ejemplo: $\alpha(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi[$ es una curva parametrizada (**circunferencia**).

Definición: Se llama **vector velocidad** (o **vector tangente**) de una curva parametrizada $\alpha: I \to R^n$al vector $\alpha'(t)=(x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$.

Definición: Se llama **traza** de una curva parametrizada $\alpha: I \to R^n$al subconjunto $\alpha(I) \subset R^n$.

Ejemplo: $C=\{(x,y) \in R^2: x^2+y^2=1\}$ es la traza de la circunferencia $\alpha(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi[$.

El objetivo de la Geometría Diferencial es sustituir los objetos "diferenciables" por objetos "lineales" más sencillos de manejar:

Definición: Se llama **ángulo de dos curvas** $\alpha: I \to R^n$ y $\beta: J \to R^n$ que se cortan en un punto $p=\alpha(t_0)=\beta(s_0)$ al ángulo que forman sus respectivos vectores tangentes en ese punto:

$$\angle(\alpha(t_0),\beta(s_0))= \angle(\alpha'(t_0),\beta'(s_0)).$$

Del mismo modo que para definir el ángulo de dos curvas que se cortan se han sustituido las curvas por sus rectas tangentes, se define la **curvatura** de una curva como una medida de la variación de la recta tangente en un entorno de un punto de la curva.

Definición: Se llama **superficie parametrizada (diferenciable)** a una aplicación diferenciable $x: U \subset R^2 \to R^n$, donde U es un subconjunto abierto de R^2.

Ejemplo: $\mathbf{x}(u,v)=(u, v, u^2-v^2)$ $u,v \in R$ es una superficie parametrizada llamada la **silla de montar**.

Ejemplo: $\mathbf{x}(u,v)=(\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ $u \in [0, 2\pi[$, $v \in R$ es una superficie parametrizada llamada el **cilindro circular recto**.

Definición: Se llama **traza** de una superficie parametrizada $x:U\subset R^2\to R^n$ al subconjunto x(U) de R^n.

Ejemplo: $C=\{(x,y,z)\in R^3: x^2+y^2=1\}$ es la traza del cilindro **x**(u,v)=(cosu, senu, v).

Definición: Se llama **plano tangente** a una superficie parametrizada $x:U\subset R^2\to R^n$ en el punto $p=x(u_0,v_0)$ al plano afín $p+<x_u,x_v>$.

Ejemplo: El plano tangente a la silla de montar en p=x(0,0)=(0,0,0) es (0,0,0)+<(1,0,2u),(0,1,-2v)>=(0,0,0)+<(1,0,0),(0,1,0)>.

Definición: Sea $x:U\subset R^2\to R^n$ una superficie parametrizada, de modo que los vectores x_u y x_v sean linealmente independientes (tales superficies se llaman **regulares**). Se define el **vector normal unitario** como $N=\frac{x_u\wedge x_v}{|x_u\wedge x_v|}$.

Definición: Se llama **ángulo** entre dos superficies parametrizadas regulares $x:U\subset R^2\to R^3$ e $y:V\subset R^2\to R^3$ en $p=x(u_1,u_2)=y(v_1,v_2)$ al ángulo entre sus planos tangentes en p o equivalentemente al ángulo que forman sus vectores normales en p.

La **curvatura de Gauss** de una superficie, se define como una medida de la variación del plano tangente o lo que es lo mismo como una medida de la variación del vector normal: $K(p)=\det(dN_p)$.

Definición: Se llama una **variedad diferenciable** de dimensión n a un subconjunto $M\subset R^{n+m}$ (m>1) de modo que existen "k" aplicaciones C^∞ $x_i:U_i\subset R^n\to R^{n+m}$ de modo que:

1) $M=\cup_{i=1}^{k} x_i(U_i)$.
2) Para todo i,j $i\neq j$ de modo que $x_i(U_i)\cap x_j(U_j)\neq\emptyset$ se verifica que $x_i\circ x_j^{-1}:x_j(U_j\cap U_i)\to x_i(U_i\cap U_j)$ es un difeomorfismo.

Ejemplo: La "**hiperesfera**" $S^3=\{(x,y,z,t)\in R^4: x^2+y^2+z^2+t^2=1\}$ es una variedad diferenciable de dimensión 3.

Ejemplo: El "**hipercilindro**" $C^3=\{(x,y,z,t)\in R^4: x^2+y^2+z^2=1\}$ es una variedad diferenciable de dimensión 3.

<u>EJERCICIOS</u>:

1. Determinar si los puntos P=(3/2, -1/2, 0) y Q=(2, 1, 1) pertenecen a las siguientes variedades lineales de R^3:
   r=(2, 0, 1)+<(1, 1, 2)>, π=(-1, 1, 2) +<(3, 0, -1), (1, -2, 2)>.

2. Estudiar si P=(-1, -6i, -3+3i), Q=(-1+5i, 1, -2i) y R=(3, 2i, 2+i) pertenecen a algunas de las siguientes variedades lineales de C^3:
   L_1=(i, 1-i, 2) + <(1,1,2i),(3,-i,0)>; L_2=(1+i, -3, 2i) + <(1,3i,1-i)>

3. Determinar si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial correspondiente son variedades lineales:
   a) En R^4, $L_1=\{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_2=x_4=1, x_1+x_3=-1\}$.
   b) En R^n, $L_2=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_1^2+x_2^2+\ldots+ x_n^2=1\}$.
   c) En $Mat_{2\times2}(R)$, $L_3=\{A\in Mat_{2\times2}(R): A+2A^t=Id\}$.
   d) En $Mat_{2\times3}(R)$, $L_4=\{A=(a_{ij})\in Mat_{2\times3}(R): a_{11}a_{22}=0, a_{13}a_{23}=1\}$.
   e) En $R_2[x]$, $L_5=\{p(x)\in R_2[x]: p(x).(1+x-x^2)=2-4x+16x^3\}$.
   f) En $R_2[x]$, $L_6=\{p(x)\in R_2[x]$: grado de $p(x)$ es exactamente igual a $1\}$.
   g) En $R_n[x]$, $L_7=\{p(x)\in R_n[x]$: coeficiente de $p(x)$ de grado n es $1\}$.
   h) En $F(R,R)$ $L_8=\{f\in F(R,R): f(2)=-3\}$.
   i) En $F(R,R)$ $L_8=\{f\in F(R,R): f(x)=\text{sen } x + ax, a\in R\}$.

4. En $(Z_3)^2$, ¿cuántos puntos hay?, ¿cuántas rectas hay? ¿cuántos puntos tiene cada recta?

5. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano de R^3 que pasa por el punto (2,1,-2) y tiene como espacio director $E=\{(x,y,z)\in R^3: 3x-2y+z=0\}$.

6. En R^3, si $P=(4, -1, 1)$, $F=\langle(2, -3, 1),(1, 4, 0)\rangle$ y $G=\langle(1,-1,1),(2,2,-1)\rangle$, encuentra las ecuaciones implícitas de las variedades lineales P+F, P+G y $P+(F\cap G)$.

7. En $Mat_{2\times2}(R)$, considera los subespacios vectoriales $F=\{A=(a_{ij})\in Mat_{2\times2}(R): a_{11}=a_{22}, a_{21}=0\}$, y $G=\{A=(a_{ij})\in Mat_{2\times2}(R): A\binom{3}{-2}=0\}$. Determina las ecuaciones implícitas de las variedades lineales que pasan por $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y tienen espacio director F y G respectivamente.

8. En $R_3[x]$ sea $p(x)=1+x-x^3$ y el subespacio $F=\{q(x)\in R_3[x]:q(-1)=q'(-1)=0\}$. Determinar las ecuaciones implícitas de la variedad $L=p(x)+F$ e indica su dimensión. Analiza si los polinomios $r(x)=3+2x+3x^2$ y $s(x)=4+3x-x^2-x^3$ pertenecen a L.

9. En el espacio $(Z_5)^3$, calcula las ecuaciones implícitas de las variedades lineales $H=(1,1,1)+\langle(4,1,2)\rangle$ y $L=(0,3,2)+\langle(1,3,3),(2,4,1)\rangle$. Además, determina si los puntos $P=(2,0,4)$ y $Q=(3,1,1)$ pertenecen a H o a L.

10. Halla las ecuaciones de la variedad lineal de R^4 que pasa por el punto (1,0,0,0) y cuyo subespacio director es el núcleo del endomorfismo $T:R^4\rightarrow R^4$ cuya matriz en la base canónica es
$$T=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 5 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

11. Determina las ecuaciones paramétricas de la variedad lineal $H=\{(x,y,z,t)\in R^4: 2x+y-t=1, x-y+3z=-2\}$.

12. Halla la posición relativa de las siguientes parejas de planos de R^3:

a) $\pi_1 \equiv x+y-2z=-1$ y $\pi_2 \equiv -2x-2y+4z=5$.
b) $\pi_3 \equiv x-2y=4$ y $\pi_4 \equiv 2x+y+z=-4$.
c) $\pi_5 \equiv -x+y-z=2$ y $\pi_6 \equiv 2x-2y+2z=-4$

13. Halla la posición relativa de la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} -x-y+z=1 \\ 2x+z=-2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv -x+y+2z=-1$.

14. Dar un ejemplo de dos planos en R^4 que se crucen.

15. Sean las siguientes variedades lineales de R^4:
$r \equiv (1,0,-1,2)+\langle(2,3,1,-1)\rangle$
$L \equiv (0,-2,-1,4)+\langle(0,2,0,1),(1,-1,1,0)\rangle$
$\pi \equiv (1,0,2,1)+\langle(1,5,4,0),(1,1,1,1),(3,0,-1,1)\rangle$
Determinar las posiciones relativas de r y L, r y π, L y π

16. En $Mat_{2\times 2}(R)$ sean las variedades lineales: $r \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $s \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Calcular sus ecuaciones implícitas y su posición relativa.

17. En $R_3[x]$, determinar la posición relativa de $H_1=\{p(x)\in R_3[x]: p(1)=p(-1)+2\}$ y $H_2=\{a+bx+cx^2+dx^3: 3a-2b+4c=-3\}$.

18. Calcular la posición relativa de las rectas de $(Z_5)^3$ dadas por las ecuaciones: $r \equiv 3x+2y=3$ y $s \equiv x+2y=4$.

19. Estudiar la posición relativa de las siguientes variedades lineales de $Mat_{2\times 2}(R)$: $L_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $L_2 \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

20. Determinar la posición relativa en $(Z_5)^4$ de la recta y el plano dados por las ecuaciones:
$r \equiv \begin{cases} x+z+t=0 \\ 2x+y+z=0 \\ y+2z+2t=1 \end{cases}$ y $\pi \equiv \begin{cases} x+z+t=4 \\ x+4y+z=0 \end{cases}$

21. Calcular el ángulo que forman las curvas $\alpha(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ y $\beta(s)=(\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$ en el punto (1,0,0).

22. Determinar la intersección de las superficies $S=\{(x,y,z)\in R^3: z=x^2+y^2\}$ con el plano P (y=0). ¿Con qué ángulo se cortan S y P?

OPERACIONES CON VARIEDADES LINEALES

Una vez definido el concepto de variedad lineal, se pasa a estudiar las principales operaciones que se pueden efectuar con variedades lineales: la intersección y la suma.

Motivación-ejemplo.- En un espacio afín estándar de dimensión tres:

i) Si dos rectas se cortan, o bien son iguales o se cortan en un punto.
ii) Si dos planos diferentes se cortan, lo hacen en una recta.

En general, ¿cómo es la intersección de dos variedades lineales? ¿Es una variedad lineal?

Proposición 3.1.- Dadas dos variedades lineales a+F, b+G de un espacio afín A, si $c \in (a+F) \cap (b+G)$, entonces $(a+F) \cap (b+G) = c+(F \cap G)$.

Demostración: Ejercicio.

Pregunta: En general la unión de variedades lineales no es una variedad lineal ¿Puedes dar un ejemplo?

Sin embargo, sí tiene sentido pensar en la menor variedad lineal que contiene a otras dadas.

Ejemplo: Dados dos puntos p,q, la mínima variedad lineal que los contiene es $p+(\underset{pq}{\rightarrow})$, la recta que pasa por p y está dirigida por $\underset{pq}{\rightarrow}$.

Proposición-Definición 3.2.- Dados k puntos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ en un espacio afín A, existe una variedal lineal mínima que los contiene. Llamaremos a esta variedad la **variedad lineal generada** por $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Demostración: Ejercicio.

Observación: Este proceso descrito para puntos, se puede generalizar para un número finito de variedades lineales. (¡¡Recuerda que la simple unión de variedades lineales no es una variedad lineal!!).

Definición: Llamaremos **suma de dos variedades lineales** L=a+F y M=b+G a la variedad lineal $L+M=a+(F+G+<\underset{ab}{\rightarrow}>)$.

Proposición 3.3: L+M es la mínima variedad lineal que contiene a las variedades lineales L y M.

Demostración: Ejercicio.

Proposición 3.4: (Fórmulas de Grassman) Dadas L=a+F y M=b+G, dos variedades lineales de un espacio afín A, se tiene que:

a) Si $L \cap M \neq \emptyset$, dim(L+M)=dim(L)+dim(M)-dim($L \cap M$).
b) Si Si $L \cap M = \emptyset$, dim(L+M)=dim(L)+dim(M)-dim($F \cap G$)+1.

Demostración: Ejercicio.

Atención!!: En el apartado b) aparece dim($F \cap G$) y no dim($L \cap M$), ya que $L \cap M = \emptyset$.

EJERCICIOS:

1. Determinar las ecuaciones implícitas de la variedad lineal de R^4 generada por los puntos P=(1,1,0,-2), Q=(2,0,0,3) y R=(0,-1,1,1). ¿Cuál es su dimensión?

2. Encuentra las ecuaciones paramétricas e implícitas de la intersección de las siguientes variedades lineales de R^3:

   a) $r \coloneqq \begin{cases} x+2y=3 \\ 3y+z=2 \end{cases}$ y s:=$\begin{cases} x+z=0 \\ y+2z=-1 \end{cases}$
   b) r y t:=$\begin{cases} 2x-z=0 \\ x+y+3z=-1 \end{cases}$
   c) s y π:=y-z=5.

3. Calcula la intersección de las siguientes variedades lineales de R^4:
   a) L:=(3,2,5/2,3)+<(1,1,-2,2),(2,0,0,3)> y M:=((1,4,3,-1)+<(2,2,1,0),(1,3,0,-1),(0,0,1,0)>
   b) M y N:=(0,3,1/2,-1)+<(1,9,-5/2,-4)>.

4. En $R_3[x]$ considera las variedades lineales: H={p(x): p(1)=0, p'(0)=-1} y $L=x^3+<1,x,x^2>$. Determina las ecuaciones implícitas de H, L y $H \cap L$. Indica la dimensión de cada una de ellas.

5. Da las ecuaciones de la mínima variedad lineal de R^3 que contiene a las rectas

a) $r_1 \equiv \begin{cases} x-2y+3z=-1 \\ x+y-z=2 \end{cases}$ y $s_1 \equiv \begin{cases} x-2y=-10 \\ y+z=8 \end{cases}$

b) $r_2 \equiv \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ y $s_2 \equiv \begin{cases} x-2y=-2 \\ y+z=3 \end{cases}$.

6. Halla la mínima subvariedad afín de R^4, indicando su dimensión, que contiene a las subvariedades

   a) $r_1 \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z=0 \\ 3x-t=0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=-1 \\ t=0 \end{cases}$

b) $\pi_1 \equiv \begin{cases} 6x-5y+3t=1 \\ -3x+2y+3z=-4 \end{cases}$ y $r_3 \equiv (1,3,-1,2)+<(1,2,1,0)>$.

c) π_1 y $\pi_2 \equiv \begin{cases} 6x-3y+t=-1 \\ x-y+z+t=-1 \end{cases}$.

7. En $Mat_{2\times2}(R)$ considera las subvariedades

$$r=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\langle\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rangle,$$

$$s=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\{A\in Mat_{2\times2}(\mathrm{R}): A^t=A\}.$$

Obtener las ecuaciones de la mínima subvariedad que las contiene y también de la máxima subvariedad que está contenida en ambas, indicando, además, las dimensiones. Determinar si los puntos $P=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ y $Q=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & -9\end{pmatrix}$ pertenecen a alguna de las subvariedades obtenidas.

8. En $R_4[x]$ considera las rectas:
$r\equiv 1-x^2+\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4: a_0=a_1=a_2=a_3=a_a\}$ y
$s\equiv 2x+x^3+\langle 3+x^2-x^3+x^4\rangle$.
Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la mínima subvariedad afín que pasa por r y por s.

9. Halla la dimensión de la mínima subvariedad afín que contiene a dos planos bidimensionales que se cruzan.

10. Calcular la dimensión de la mínima subvariedad afín que pasa por los puntos: (-1,2,-1,0,4), (0,-1,3,5,1), (4,-2,0,0,-3) y (3,-1,2,5,2).

11. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r de ecuaciones $r\equiv \begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases}$ y al punto P=(1,-1,2).

12. Hallar la ecuación del plano de R^3 que pasa por los puntos A=(-1,2,1) y B=(1,0,2) y por el punto de intersección de r y π:

$$r\equiv \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ -2x-2y+z=-3 \end{cases},\ \pi\equiv x+y-3z=-1.$$

13. Hallar la ecuación del plano de $R_2[x]$ que pasa por $p(x)=2+x^2$ y contiene a la recta $1-3x+ <2+x-x^2>$.

14. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P=(1,-2,1) y es paralela a los planos: $\pi_1\equiv 2x+3y-z=2$ y $\pi_2\equiv x-y-2z=-1$.

15. Una recta está contenida en el plano x+y+z=4 y pasa por el punto (2,1,1). Hallar su ecuación sabiendo que es paralela al plano x-y+z=0.

16. Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3}$ y es paralelo a la recta x=3λ, y=1+2λ, z=λ.

17. Halla la ecuación del haz de hiperplanos que contiene al plano que pasa por los puntos P=(1,-2,-3,1), Q=(0,0,1,5) y R=(3,-1,5,0).

18. Una recta que pasa por el punto (1,1,1), es coplanaria con la recta $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ y es paralela al plano $-x+2y+z=0$. Calcular sus ecuaciones implícitas.

19. Dados dos planos $\pi_1 \equiv 3x+4y+5z=1$ y $\pi_2 \equiv 2x+y+z=2$ y los puntos A=(1,0,1) y B=(-1,4,2), hallar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los dos planos y por el punto medio del segmento AB.

20. En $Mat_{2\times 2}(R)$ encontrar la ecuación del hiperplano que pasa por los puntos $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ y $S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

21. Determinar la ecuación del 2-plano de $Mat_{2\times 2}(R)$ que contiene a la recta $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\langle\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\rangle$ y que pasa por el punto $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

22. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta que pasa por los puntos A=(1,2,1) y B=(1,-3,-2) y además es paralelo a la recta de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x+4y+z=-1 \end{cases}.$$

23. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (1,1,1) y son paralelas a los ejes de coordenadas.

24. Los puntos A=(1,1,-1), B=(2,-1,2), C=(0,2,2) y D=(-1,-2,-2) son vértices de un paralelepípedo. Sabiendo que los segmentos AB, AC y AD son tres aristas del mismo, calcular los restantes vértices.

COORDENADAS EN ESPACIOS AFINES. REFERENCIAS.

Las coordenadas permiten una representación numérica de los puntos de un espacio afín: a cada punto del espacio afín se le hace corresponder una n-tupla de números. Esto permite resolver problemas geométricos por medio del cálculo y del álgebra. Tradicionalmente se ha usado el nombre de Geometría Analítica para denominar este enfoque de la Geometría.

<u>Motivación-ejemplo</u>.- En un espacio vectorial de dimensión n, dada una base B (n vectores linealmente independientes), un vector cualquiera puede expresarse de manera única usando sus coordenadas en la base B.

¿Ocurre algo similar en un espacio afín?

La idea es utilizar los sistemas de referencia del espacio director del espacio afín.

Se verán dos tipos de sistemas de referencia: **cartesianos** y **baricéntricos**.

Definición: Un **sistema de referencias cartesiano** de un espacio afín n-dimensional (A,V,φ) es un conjunto R={p; $\mathbf{e_1},\dots,\mathbf{e_n}$}, donde p es un punto de A y { $\mathbf{e_1},\dots,\mathbf{e_n}$ } es una base de V.

Pregunta: ¿Cómo se dan coordenadas en un sistema de referencia cartesiano?

Dado un punto q$\in$A, para dar sus coordenadas en R, la idea es usar las coordenadas del vector $\underset{pq}{\rightarrow}$, ¿cómo?

Definición: Decimos que k puntos $a_1,\dots,a_k$ de un espacio afín (A,V,φ) son **afínmente independientes** si los k-1 vectores $\underset{a_1a_2}{\longrightarrow}, \dots, \underset{a_1a_k}{\longrightarrow}$ son linealmente independientes.

Ejemplos: Tres puntos no alineados del plano son afínmente independientes; cuatro puntos no coplanarios de R^3 son afínmente independientes.

Algunas preguntas: Dados dos puntos diferentes, ¿son afínmente independientes? ¿Cuál es el máximo número de puntos afínmente independientes de un espacio afín de dimensión n? ¿Se puede elegir algún punto diferente de a_1 para definir el sistema de referencia?

Proposición 4.1.- Sean $a_1,\dots,a_k$ puntos de un espacio afín (A,V,φ). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Los vectores $\underset{a_1a_2}{\longrightarrow}, \dots, \underset{a_1a_k}{\longrightarrow}$ son linealmente independientes en V.

ii) Para cualquier i entre 1 y k, {$\underset{a_ia_h}{\longrightarrow}$ h$\neq$i } es un conjunto de vectores linealmente independientes de V.

iii) Para todo punto p$\in$A,

$$\left\{\lambda_1 \underset{pa_1}{\longrightarrow} + \cdots + \lambda_k \underset{pa_k}{\longrightarrow} = \underset{0}{\rightarrow};\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0\right\} \Leftrightarrow\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$$

Demostración: Ejercicio.

Proposición 4.2.- Sea (A,V,φ) un espacio afín de dimensión n, y sean $a_0,\dots,a_k$ puntos afínmente independientes de A, entonces existen $a_{k+1},\dots,a_n$ puntos de A tales que $a_0,\dots,a_n$ son puntos afínmente independientes.

Demostración: Ejercicio.

Definición: Un **sistema de referencia baricéntrico** de un espacio afín (A,V,φ) de dimensión n es un conjunto de n+1 puntos afínmente independientes. También se denominará a este mismo objeto un **sistema de referencia afín**.

Pregunta: Dado un sistema de referencia baricéntrico, ¿cómo se dan coordenadas?

Proposición 4.3.- Sean $p_0,\ldots,p_k$ puntos de un espacio afín (A,V,φ) de dimensión n. Dado $x\in A$, supóngase que existe $p\in A$ y $x_0,\ldots,x_k\in K$ tales que

$$\overrightarrow{px}= x_0 \overrightarrow{pp_0} + \cdots + x_n \overrightarrow{pp_k}$$

Y

$$1 = x_0 + \cdots + x_k$$

Entonces

1) La misma expresión es válida, con los mismos coeficientes, cambiando el punto p por cualquier otro punto $q\in A$.
2) Los valores $x_0, \ldots, x_k$ son únicos si $p_0, \ldots , p_k$ son afínmente independientes.

Demostración: Ejercicio.

Notación: Dados $p_0, \ldots , p_k$ puntos de un espacio afín (A,V,φ) de dimensión n y un punto $x\in A$, si se cumple

$$\begin{cases} \overrightarrow{px} = x_0 \overrightarrow{pp_0} + \cdots + x_k \overrightarrow{pp_k} \\ 1 = x_0 + \cdots + x_k \end{cases}$$

para algún $p\in A$, se escribirá $x = x_0p_0 + \cdots + x_kp_k$.

Atención: La expresión anterior es sólo notación: no existe ninguna estructura en A que permita calcular una combinación lineal semejante.

Relacion entre coordenadas cartesianas y baricéntricas: Sea *R*=$\{a_0, \ldots , a_n\}$ una referencia baricéntrica en un espacio afín (A,V,φ). Si x es un punto de A con **coordenadas baricéntricas** $(x_0,\ldots,x_n)$ en *R*, entonces $\overrightarrow{px} = x_0 \overrightarrow{pa_0} + \cdots + x_n \overrightarrow{pa_n}$ para cualquier $p\in A$. Si se toma $p = a_0$, entonces $\overrightarrow{a_0x} = x_1 \overrightarrow{a_0a_1} + \cdots +x_n \overrightarrow{a_0a_n}$, es decir, $(x_1,\ldots,x_n)$ son las **coordenadas cartesianas** de x en la referencia cartesiana $R_0=\{a_0, \overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_n}\}$.

Análogamente, (x_1,…,x_{k-1},x_{k+1},…,x_n) son las coordenadas de x en la referencia cartesiana R_k={a_k, $\overrightarrow{a_k a_0}$, … ,$\overrightarrow{a_k a_n}$}.

Recíprocamente Sea R_c={p,$\vec{v_1}$, … ,$\vec{v_n}$} una referencia cartesiana. Si x es un punto en A con **coordenadas cartesianas** (λ_1,…,λ_n) en R_c, entonces $\vec{px} = \lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n}$**

Si se toma $p_0 = p, p_1 = p + \vec{v_1}, \ldots,\ \ p_n = p + \vec{v_n}$, entonces

R={p_0,…,p_n}

es una referencia baricéntrica. Se puede escribir
$\overrightarrow{p_0 x} = (1 - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n))\, \overrightarrow{p_0 p_1} + \lambda_2 \overrightarrow{p_0 p_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{p_0 p_n}$

y

$$\big((1 - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)), \lambda_2, \ldots, \lambda_n\big)$$

son las **coordenadas baricéntricas** de x en R.

Definición: Dados $a_1, \ldots, a_m$ puntos de un espacio afín A, se llamará **baricentro** de $a_1, \ldots, a_m$ al punto b$\in$A dado por $\frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}$.

Ejemplo: El baricentro de un par de puntos diferentes es el punto medio del segmento que los une.

Pregunta: ¿Existe algún caso en el que la definición anterior no tiene sentido?

<u>EJERCICIOS</u>:

1. Considérese en el plano afín real el punto D que tiene corrdenadas cartesianas (3,5) respecto a la referencia cartesiana canónica. Determinar las coordenadas baricéntricas de D respecto a la referencia R={A(-1,4), B=(-3,1), C(3,2)}.

2. Considérese el punto P del plano afín real cuyas coordenadas baricéntricas respecto de la referencia R={A(-1,4), B=(-3,1), C(3,2)} son (5/4,-1/2,1/4). Determinar sus coordenadas cartesianas respecto de la referencia canónica. Considérese ahora la referencia cartesiana C={A; $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ }; determinar las coordenadas cartesianas de P respecto a esta nueva referencia cartesiana.

LA RAZÓN SIMPLE. TEOREMAS DE MENELAO Y CEVA.

En el ámbito de los espacios afines se puede definir de un modo natural la noción de **proporción**:

Definición: Sean a_1, a_2 y a_3 tres puntos alineados (no afínmente independientes) en un espacio afín (A,V,φ), la **razón simple** de a_1, a_2 y a_3 que se denotará por (a_1, a_2, a_3), es el escalar r∈K tal que $\underset{a_1a_3}{\longrightarrow} = r \underset{a_1a_2}{\longrightarrow}$.

La razón simple está bien definida si $a_1 \neq a_2$. Además (a_1, a_2, a_1)=0 y (a_1, a_2, a_2)=1.

Pregunta: Entonces, ¿cuál es la relación entre razón simple y proporción? Si, por ejemplo, (a_1, a_2, a_3)=3, entonces , es decir, el vector $\underset{a_1a_3}{\longrightarrow}$ es tres veces más grande que el vector $\underset{a_1a_2}{\longrightarrow}$, pero ¡atención! **En un espacio afín no se pueden medir distancias**.

En la práctica, la razón simple se calcula en función de las coordenadas del primer punto en la referencia baricéntrica constituida por los dos últimos puntos.

Proposición 5.1.- Si $a_2 \neq a_3$ y (α,β) son las coordenadas de a_1 respecto de $\{a_2,a_3\}$, entonces $(a_1,a_2, a_3)=-\frac{\alpha}{\beta}$.

Demostración: Ejercicio.

Teorema de Menelao: Sean a_0, a_1 y a_2 puntos afínmente independientes de un espacio afín (A,V,φ) de dimensión 2. Se consideran puntos b_0, b_1 y b_2 que están respectivamente en las rectas determinadas por a_1 y a_2, a_0 y a_2, y a_0 y a_1, de modo que estén alineados, y sean diferentes de , a_0, a_1 y a_2. Entonces, (b_0, a_1, a_2). (b_1, a_2, a_0).(b_2, a_0, a_1)=1.

Demostración: Ejercicio.

Teorema de Ceva: Sean a_0, a_1 y a_2 puntos afínmente independientes de un espacio afín A,V,φ) de dimensión 2. Dado otro punto p∈A con $p \neq a_i$, i=0,1,2, se consideran los puntos b_i (i=0,1,2) intersección de la recta $p + < \underset{pa_i}{\longrightarrow} >$ con la recta $a_k + < \underset{a_ka_h}{\longrightarrow} >$, (k,h≠i). Entonces

$(b_0a_1a_2)(b_1a_2a_0)(b_2a_0a_1) = -1.$

Demostración: Ejercicio

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales, R, y $B=\left\{\underset{e_1}{\rightarrow},\dots,\underset{e_n}{\rightarrow}\right\}$ una base de V, sea $B'=\left\{\underset{v_1}{\rightarrow},\dots,\underset{v_n}{\rightarrow}\right\}$ otra base. Si P es la matriz de cambio de base, se dice que *B* y *B′* **tienen la misma orientación** si det(P)>0.

Consecuencia: Sólo hay dos orientaciones posibles; **orientar** V es elegir una de ellas. Se llamará **orientación positiva** a la elegida y **orientación negativa** a la otra.

Observación: Un espacio afín real se puede considerar orientado sin más que elegir una orientación para el especio vectorial real subyacente.

EJERCICIOS:

1. Sea un triángulo ABC. Sobre el lado AB se inserta un punto M de modo que 2AM=3MB, y sobre el lado BC se inserta un punto N de modo que BN=3NC. Si MN y AC se prolongan, se cortan en un punto P. Si AC=14, calcular CP.
2. Una recta secante a un triángulo ABC, trazada por el baricentro de un triángulo corta a AB en P y a BC en Q. Supóngase que BQ=10, QC=4 y PB=9. Calcular AP.
3. Demostrar que las tres medianas de un triángulo son concurrentes.
4. Demostrar que las tres bisectrices de un triángulo son concurrentes.

AFINIDADES.

Del mismo modo que al estudiar espacios vectoriales nos interesábamos por las aplicaciones que respetaban la estructura de espacio vectorial (aplicaciones lineales), ahora nos preguntamos cuáles son las aplicaciones que respetan la estructura de espacio afín: las **aplicaciones afines** o **afinidades.**

Definición: Sean (A,V,φ) y (B,W,ψ) dos espacios afines sobre el mismo cuerpo K. Una **aplicación afín**, o **afinidad** entre ellos es un par formado por una aplicación g:A$\rightarrow$B y una aplicación lineal γ:V$\rightarrow$W de modo que para todo a,b$\in$A $\gamma(\underset{ab}{\rightarrow})=\underset{g(a)g(b)}{\longrightarrow}$.

Equivalentemente se puede decir que el siguiente diagrama

$$A\times A\overset{g\times g}{\longrightarrow}B\times B \qquad\qquad (a,b)\rightarrow\quad (g(a),g(b))$$

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi\downarrow & & \downarrow\psi & \qquad & \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\gamma} & W & & \varphi(a,b) & \xrightarrow{\gamma} & \psi(g(a),g(b)) \end{array}$$

conmuta.

En ocasiones se dirá simplemente que g es una aplicación afín si existe γ tal que el diagrama anterior conmute. Se llamará a γ la aplicación lineal asociada a g.

Proposición 6.1.- Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\gamma\left(\underset{ab}{\rightarrow}\right) = \underset{g(a)g(b)}{\longrightarrow}$ para todo a,b$\in$A.
b) $g(a + \underset{u}{\rightarrow}) = g(a) + \gamma(\underset{u}{\rightarrow})$ para todo a$\in$A y para todo $\underset{u}{\rightarrow} \in V$.

Demostración: Ejercicio

Una aplicación afín está completamente determinada por su aplicación lineal asociada y la acción sobre un punto:

Proposición 6.2.- Si g y h son dos afinidades definidas entre dos espacios afines A y B tales que g(p)=h(p) para algún p$\in$A y sus aplicaciones lineales asociadas coinciden, entonces g=h.

Demostración: Ejercicio

Recíprocamente, elegir la imagen de un punto y una aplicación lineal determina de manera unívoca una afinidad.

Proposición 6.3.- i) Dada una aplicación lineal φ:A$\rightarrow$B y un par de puntos p$\in$A y q$\in$B, existe una única afinidad g:A$\rightarrow$B tal que g(p)=q y γ=φ.

ii) Si dim(A)=n y $a_0, \dots, a_n$ son n+1 puntos afínmente independientes (son una referencia afín) en A y $b_0, \dots, b_n$ son n+1 puntos arbitrarios en B, entonces existe una única afinidad g:A$\rightarrow$B tal que $g(a_i) = b_i$ para i=0,…,n.

Demostración: Ejercicio

Proposición 6.4.- Dada una afinidad (g,γ) de (A,V,φ) en (B,W,ψ), se cumple:

A) g es inyectiva si y sólo si γ es inyectiva.
B) g es sobreyectiva si y sólo si γ es sobreyectiva.
C) g es biyectiva si y sólo si γ es biyectiva.

Demostración: Ejercicio

Del resultado anterior se deduce fácilmente que la inversa de una afinidad biyectiva es una afinidad:

Proposición 6.5.- Si g es una afinidad biyectiva de (A,V,φ) en (B,W,ψ) con aplicación lineal asociada γ, entonces g^{-1} es una afinidad con aplicación lineal asociada γ^{-1}.

Demostración: Ejercicio

Definición: Una afinidad biyectiva se llama un **isomorfismo afín**. Dos espacios afines son **isomorfos** si existe un isomorfismo afín entre ellos.

Observación: Es fácil comprobar que dos espacios afines de dimensión finita son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.

<u>EJERCICIOS</u>:

3. Sea *R*={O; **u**,**v**} un sistema de referencia cartesiana en un espacio afín. Calcular las ecuaciones de las aplicaciones afines g:X$\rightarrow$X respecto de *R* tales que g(O)=O', γ(**u**)=**u'**, γ(**v**)=**v'**, donde
    a. O'=(0,0), **u'**=**u**+**v**, **v'**=**u**-**v**
    b. O'=(1,-1), **u'**=3**u**-**v**, **v'**=-3**u**+**v**
    c. O'=(2,1), **u'**=-2**u**, **v'**=-2**v**
    d. O'=(-1,0), **u'**=-**u**, **v'**=**v**.

(Las coordenadas de O' siempre vienen dadas respecto de *R*). Deducir en qué casos son isomorfismos afines.

4. En el plano afín X se consideran las siguientes aplicaciones g:X$\rightarrow$X. Deducir si son o no aplicaciones afines, y en su caso isometrías afines:
    1) g(x,y)=((x+1,y-1)
    2) g(x,y)=(2x,2y)
    3) g(x,y)=(2x-1,3y+2)
    4) g(x,y)=(3x+1,0)
    5) g(x,y)=(x^2+1,y)

5. Demostrar que las aplicaciones afines conservan los subespacios afines.

6. Demuestra que una afinidad envía variedades lineales paralelas sobre variedades lineales paralelas.

7. Demuestra que las afinidades preservan la razón simple.

8. Demuestra que una afinidad envía el baricentro de un conjunto de puntos en el baricentro del conjunto de las imágenes correspondientes.

9. Demostrar que el conjunto de puntos fijos de una aplicación afín es una subvariedad lineal.

10. Demostrar que la composición de aplicaciones afines es una aplicación afín.

11. Comprobar que existe una única afinidad g:$R^3 \to R^3$ tal que g((1,-1,2))=(-1,1,1), g((2,-1,3))=(0,1,0), g((2,0,4))=(2,3,2) y g((1,0,2))=(-1,0,0). Hallar la matriz de la afinidad g.

ALGUNAS AFINIDADES IMPORTANTES.

Definición: Sean (A,V,φ) un espacio afín. Dado $\underset{v}{\rightarrow} \in V$, la aplicación $T_{\underset{v}{\rightarrow}}$ que envía un punto p al único punto q tal que $\underset{pq}{\rightarrow} = \underset{v}{\rightarrow}$, se llama traslación de vector $\underset{v}{\rightarrow}$ en A.

Preguntas:¿Es la traslación una afinidad? ¿Cuál es su aplicación lineal asociada?

Proposición 7.1.- Una afinidad g de (A,V,φ) en sí mismo verifica que $\gamma = Id_V$ si y sólo si g es una traslación.

Demostración: Ejercicio

Definición: Sea (A,V,φ) un espacio afín, se dice que una afinidad g:A→A es una **homotecia de razón r** (r≠0,1)si su aplicación lineal asociada es $\gamma = rId_V$.

Preguntas: ¿Las homotecias dejan fijo algún punto? ¿Cuántos?

Definición: Sea (A,V,φ) un espacio afín, se dice que una afinidad g:A→A es una **proyección** si $g^2 = g$.

Preguntas: ¿Cuántos puntos quedan fijos por una proyección? Su aplicación lineal asociada, ¿cumple la misma propiedad que g?

Observación: Atendiendo a su polinomio mínimo, ¿cuáles son las posibilidades para una proyección?

Definición: Sea (A,V,φ) un espacio afín, se dice que una afinidad g:A→A es una **simetría** si $g^2 = Id_A$.

Preguntas: ¿Cuántos puntos quedan fijos por una simetría? ¿Cuál es aplicación lineal asociada a una simetría?

Observación: Atendiendo a su polinomio mínimo, ¿cuáles son las posibilidades para una simetría?

EJERCICIOS:

12. Hallar la matriz de la simetría de eje el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 3$ y dirección vectorial generada por el vector (1,1,2).

13. Calcular, si existe, la matriz de la simetría axial s verificando que los puntos A=(2,0,-1) y B=(1,-2,0) son simétricos, respectivamente, de los puntos A'=(-4,2,1) y B'=(3,0,2).

14. En el espacio afín de dimensión tres, se pide:

    a) Hallar la matriz de la homotecia de centro el punto P=(1,0,-2) y razón -3.

Hallar el transformado del plano 2x-y+z=5 por dicha homotecia

ESPACIOS AFINES EUCLIDEOS.

Un producto escalar o hermítico <.,.>, además de permitirnos hablar de ortogonalidad, nos permite dar una noción de tamaño de los vectores **v**, mediante el cálculo de <**v**,**v**>. De hecho, se obtiene así un caso particular de norma.

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre R o C. Una **norma** en V es una aplicación

$$\| \quad \| : V \to R$$

$$\vec{v} \to \left\|\vec{v}\right\|$$

tal que:

1) $\left\|\vec{v}\right\| = 0 \leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
2) $\left\|k\vec{v}\right\| = |k|\left\|\vec{v}\right\|$
3) $\left\|\vec{v} + \vec{w}\right\| \leq \left\|\vec{v}\right\| + \left\|\vec{w}\right\|$ (desigualdad triangular).

Entonces un producto escalar (o hermítico) <.,.>, induce de modo natural una norma:

Proposición 8.1.- Sea V un espacio vectorial euclídeo, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \|\ \|: V &\to R \\ \vec{v} &\to \sqrt{<\vec{v},\vec{v}>} = \left\|\vec{v}\right\| \end{aligned}$$

es una norma.

Demostración: Ejercicio

El espacio en el que tiene lugar la geometría euclídea es un espacio afín en el que el espacio vectorial subyacente está dotado de un producto escalar.

Definición: Sea (A,V,φ) un espacio afín real. Si V es un espacio vectorial euclídeo, se dirá que (A,V,φ) es un **espacio afín euclídeo**.

La ventaja de tener un producto escalar en V (nos permite calcular el tamaño de los vectores), es que nos va a servir para medir distancias en A.

Definición: Sea X un conjunto, una **distancia** en X es una aplicación

$$d: X \times X \to R$$

tal que para todo p,q,r∈X

i) $d(p,q) \geq 0$ y $d(p,q) = 0 \leftrightarrow p = q$.
ii) $d(p,q) = d(q,p)$ (Simetría)
iii) $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$. (Desigualdad triangular)

Proposición.- Si (A,V,φ) un espacio afín euclídeo, entonces la aplicación $d(p,q) = \sqrt{<\underset{pq}{\rightarrow}, \underset{pq}{\rightarrow}>}$ es una distancia.

Demostración: Ejercicio

Combinando las nociones de distancia y ortogonalidad se obtiene uno de los resultados más populares de las Matemáticas:

Teorema de Pitágoras.- (Versión general) Sean p, q y r tres puntos de un espacio afín euclídeo. Si $\langle \underset{pq}{\rightarrow}, \underset{pr}{\rightarrow} \rangle = 0$, entonces se cumple que $d(p,q)^2 + d(p,r)^2 = d(q,r)^2$.

Demostración: Ejercicio

Si se sustituye en la definición de producto escalar el axioma de "ser definida positiva" por el más débil de "ser no degenerada", se obtiene un concepto más general de "producto escalar" que origina geometrías diferentes a la euclídea. Entre estas geometrías merece especial mención la Geometría de Lorentz por sus importantes aplicaciones a la Teoría de la Relatividad.

Definición: Una forma bilineal simétrica b:V×V→R es

A) **definida positiva** si para v≠0, b(v,v)>0,

B) **semidefinida positiva** si b(v,v)≥0 ∀v∈V.

C) **no-degenerada** si b(v,w)=0 ∀w∈V⇒v=0.

Ejemplos: Si V=R^2, b((x,y),(z,t))=x.z+y.t es una forma bilineal simétrica definida positiva.

- Si V=R^2, b((x,y),(z,t))=x.z es una forma bilineal simétrica semidefinida positiva. No es no-degenerada ni definida positiva. (Ejercicio).
- Si V=R^2, b((x,y),(z,t))=x.z-y.t es una forma bilineal simétrica no degenerada. No es definida positiva, ni semidefinida positiva. (Ejercicio).

Existe una relación importante entre los tres conceptos anteriores:

Proposición: 1) Si b:V×V→R es una forma bilineal simétrica definida positiva, es a la vez semidefinida positiva y no degenerada.

2) El recíproco es cierto.

Demostración: (Ejercicio)

Definición: El **índice** υ de una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial V es el mayor número natural que sea la dimensión de un subespacio W de V en el que la forma bilineal simétrica sea DEFINIDA NEGATIVA ($b(v,v)<0 \ \forall v \in W,\ v \neq 0$).

Así $0 \leq \upsilon \leq \dim(V)$, y $\upsilon=0$ si y sólo si b es semidefinida positiva.

Definición: La función $q:V \to R$ definida por $q(v)=b((v,v))$ se llama la **forma cuadrática asociada** de b. En ocasiones es más sencillo tratar con q que con b, y no se pierde información ya que b se puede recuperar a partir de q por la fórmula de "polarización":

$$b((v,w))=(1/2)[q(v+w)-q(v)-q(w)].$$

Definición: Si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de V, la matriz $n \times n$ $(b_{ij})=(b((e_i,e_j)))$ se llama la **matriz de** b **relativa** a $\{e_1,\dots,e_n\}$. Como b es simétrica, esta matriz es simétrica.

Claramente determina a b ya que $b((\sum v_i e_i, \sum w_j e_j))=\sum b_{ij} v_i w_j$.

Lema: Una forma bilineal simétrica es no-degenerada si y sólo si la matriz relativa a una de sus bases es regular.

Demostración: (ejercicio).

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales. Se llama **producto escalar (generalizado)** a una forma $g:V \times V \to R$ bilineal, simétrica y no degenerada. Algunos autores usan en este caso la notación **producto escalar**, y reservan el término **producto interior** para las formas bilineales simétricas definidas positivas.

Ejemplo: Se llama el **plano de Lorentz** al par (R^2,g) donde g se define por $g((x_1,y_1),(x_2,y_2))=x_1.x_2-y_1.y_2$.

- Comprobar que g es bilineal y simétrica.
- Es no-degenerada ya que $g((x,y),(z,t))=0 \ \forall (z,t) \in R^2 \Rightarrow xz-yt=0 \ \forall (z,t) \in R^2$, y tomando primero (z,t)=(1,0), se concluye que x=0, y tomando después (z,t)=(0,1), se tiene que y=0, de donde (x,y)=(0,0) c.s.q.d.
- Así g es un producto escalar generalizado y su forma cuadrática asociada es $q((x,y))=x^2-y^2$.

Ejemplo: (**El espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski**)

Considérese en $R^4=\{(t,x,y,z), t,x,y,z\in R\}$ el producto escalar generalizado definido por $g((t,x,y,z).(t',x',y',z'))=-tt'+xx'+yy'+zz'$.

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales, y sea $g:V\times V\to R$ un producto escalar generalizado. Se dice que un vector $v\in V$ es

- **espacial** si $g((v,v))>0$ ó $v=0$,
- **temporal** si $g((v,v))<0$,
- **nulo ó luminoso** si $g((v,v))=0$ y $v\neq 0$.

Dicha condición se llama el **carácter causal** de v.

Ejercicio:

Encontrar ejemplos de vectores espaciales, temporales y luminosos en el plano de Lorentz y en el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski.

Definición: Se dice que dos vectores $v,w\in V$ son **ortogonales**, y se escribe $v\perp w$, si $g((v,w))=0$. Se dice que dos subconjuntos A y B de V son **ortogonales** –y se escribe $A\perp B$- si $v\perp w$ $\forall v\in A$ y $\forall w\in B$.

Observación: Si $g:V\times V\to R$ no es definido positivo, la ortogonalidad no se corresponde con el concepto de ángulo recto: En el plano de Lorentz: (1,2) y (2,1) son ortogonales; (1,1) es ortogonal a sí mismo.

Definición: Si W es un subespacio vectorial de V, $W^{\perp}=\{v\in V:v\perp W\}$ es un subespacio vectorial de V, que se llama el subespacio **ortogonal ó perpendicular** a W. No se le puede llamar el "complemento ortogonal" ya que –generalmente- $W+W^{\perp}$ no es todo V.

Ejemplo: En el Plano de Lorentz, si $W=\{(x,x), x\in R\}$, $W+W^{\perp}=W$.

Proposición: Si W es un subespacio de un espacio vectorial con producto escalar generalizado (V,g), entonces:

1) $\dim V+\dim V^{\perp}=n=\dim V$.
2) $(W^{\perp})^{\perp}=W$.

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales, y sea $g:V\times V\to R$ un producto escalar generalizado; sea W un subespacio vectorial de V; se dice que W es **no degenerado** si la restricción de g a W es un producto escalar generalizado.

Observación: Si g no es definida (positiva) en V siempre habrá subespacios vectoriales degenerados (por ejemplo, la envoltura lineal de cada vector luminoso).

Lema: Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales, y sea g un producto escalar generalizado. Un subespacio vectorial W de V es no degenerado si y sólo si V es la suma directa de $W \oplus W^{\perp}$.

Corolario: Como $(W^{\perp})^{\perp}=W$, se sigue que W es no degenerado si y sólo si W es no degenerado.

Definición: Como g((v,v)) puede ser negativo, se define la **norma** de v de un vector $v \in V$ como $q(v)=|g((v,v))|^{1/2}$. Se llama un **vector unitario** a un vector u cuya norma es 1, esto es $g((u,u))=\pm 1$. Como es habitual, un conjunto de vectores unitarios mutuamente ortogonales se llama un conjunto **ortonormal**.

Observación: Cualquier conjunto de n=dimV vectores ortonormales es necesariamente una base de V.

Proposición: Un espacio vectorial no trivial V ($V \neq \{0\}$) tiene una base ortonormal.

La matriz de un producto escalar generalizado g relativa a una base ortonormal $\{e_1, \dots , e_n\}$ es una matriz diagonal; de hecho $g(e_i, e_j)=\delta_{ij}\varepsilon_j$, donde $\varepsilon_j=g(e_j,e_j)=\pm 1$. Siempre que sea conveniente se ordenarán los vectores de una base ortonormal de modo que los signos negativos –si existen- vengan primero en la llamada **signatura** $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$. Dicho número de signos negativos se lama el **índice** de g.

Definición: La **proyección ortogonal** π de V sobre un subespacio no degenerado W es la aplicación lineal que envía $W^{\perp}$ al {0} y deja invariante cada vector de W. Una base ortonormal $\{e_1, \dots , e_k\}$ de W siempre se puede completar hasta formar una base de V.

Es habitual referirse al índice υ de un producto escalar generalizado como el **índice** de V, y se escribe υ=ind(V).

Lema: El índice de un espacio vectorial con producto escalar generalizado es la dimensión del mayor subespacio en el que la restricción del producto escalar es definido negativo.

Definición: Sean V y V' dos espacios vectoriales con productos escalares generalizados g y g' respectivamente. Se dice que una aplicación lineal $T:V \to V'$ es una **transformación ortogonal** si $g'(Tv,Tw)=g(v,w)\ \forall v,w \in V$. (es ortogonal $\Leftrightarrow$ conserva el producto escalar).

Corolario: Una transformación ortogonal es necesariamente inyectiva: ya que si Tv=0, entonces g(v,w)=0 para todo $w \in V$, y por la no degeneración de g eso implica que v=0.

Obsérvese que una aplicación lineal conserva el producto escalar si y sólo si conserva sus formas cuadráticas asociadas, esto es: $q'(Tv)=q(v)\ \forall v \in V$.

Una implicación es obvia, la otra se sigue por polarización.

Definición: Un isomorfismo lineal $T:V\rightarrow W$ que es ortogonal se llama una **isometría lineal**.

Por las observaciones anteriores una aplicación lineal $T:V\rightarrow W$ es una isometría lineal sii $\dim V=\dim W$ y T conserva el producto escalar (ó equivalentemente sus formas cuadráticas asociadas).

Si existe una isometría lineal entre dos espacios vectoriales con producto escalar generalizado, se dice que dichos espacios vectoriales son **(linealmente) isométricos**.

Proposición: Dos espacios vectoriales V y W con producto escalar generalizado son isométricos si y sólo si tienen la misma dimensión y el mismo índice.

Definición: Se llama espacio **semi-euclídeo** R^n_υ al espacio afín standard R^n dotado del producto escalar generalizado $g((x,y))=-\sum_{i=1,\dots,\upsilon}v^i w^i+\sum_{j=\upsilon+1,\dots,n}v^j w^j$. Su producto escalar generalizado tiene índice υ. Si $\upsilon=0$, es el espacio euclídeo standard; si $n\geq 2$, y $\upsilon=1$, se llama el **espacio de Lorentz-Minkowski n-dimensional**.

Se puede definir la **Geometría (Afín) de Lorentz**, como el estudio de espacios afines de dimensión mayor o igual que 2 en cuyo espacio vectorial director V se ha definido un producto escalar generalizado de índice 1. En ese- caso se dice que el espacio vectorial director es un **espacio vectorial de Lorentz**.

Sea W un subespacio vectorial de un espacio vectorial de Lorentz, y sea g el producto escalar de V. Existen tres posibilidades mutuamente excluyentes para W:

- - la restricción de g a W es definida positiva; en ese caso se dice que W es un **subespacio espacial**.
- - la restricción de g a W es no degenerada de índice 1; en ese caso se dice que W es un **subespacio temporal**.
- - la restricción de g a W es degenerada; en ese caso se dice que W es un **subespacio luminoso**.

El tipo que corresponde a cada uno de estos tres casos se llama el **carácter causal** del subespacio W.

- LEMA: Si z es un vector temporal en un espacio vectorial de Lorentz V, entonces el subespacio $z^\perp$es espacial y $V=\langle z\rangle\oplus(z^\perp)$.

El argumento anterior prueba –de un modo más general- que un subespacio W es temporal si y sólo si $W^\perp$ es espacial.

Como $(W^\perp)^\perp=W$, las palabras *espacial* y *temporal* se pueden intercambiar en la afirmación anterior.

Se sigue que W es luminoso si y sólo si $W^\perp$ es luminoso.

Los subespacios espaciales son los más fáciles de tratar, ya que –por ejemplo- todo subespacio de un subespacio espacial W es también espacial, y la desigualdad de Cauchy-Schwarz también se verifica: $|g(v,w)|\leq||v||.||w||$.

Ejercicio: Probar que en un espacio vectorial de Lorentz V, si u y v son vectores nulos linealmente independientes, entonces $g(u,v)\neq 0$.

Ahora consideramos algunos criterios para que un subespacio W sea temporal, omitiendo el caso trivial (dimW=1).

Proposición: Sea W un subespacio de dimensión mayor o igual que 2 en un espacio vectorial de Lorentz. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) W es temporal, por tanto es él mismo un espacio vectorial de Lorentz.

2) W contiene dos vectores nulos linealmente independientes.

3) W contiene un vector temporal.

Proposición: Para un subespacio W de un espacio vectorial de Lorentz las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) W es luminoso, esto es: es degenerado.

2) W contiene un vector nulo, pero no contiene ningún vector temporal.

3) $W\cap\Lambda=L-\{0\}$, donde L es un subespacio 1-dimensional y Λ es el cono nulo de V.

Definición: Sea *T* el conjunto de todos los vectores temporales en un espacio vectorial de Lorentz V. Para $u\in T$, se define

$C(u):=\{v\in T : g(u,v)<0\}$ como el **cono temporal** de V conteniendo a u. El cono temporal **opuesto** es

$C(-u)=-C(u)=\{v\in T : g(u,v) >0\}$.

Como $u^\perp$ es espacial, *T* es la unión disjunta de estos dos conos.

Lema: Dos vectores temporales v y w en un espacio vectorial de Lorentz están en el mismo cono temporal si y sólo si $g(v,w)<0$.

Se sigue que para los vectores temporales $u\in C(v)\Leftrightarrow v\in C(u) \Leftrightarrow C(u)\equiv C(v)$.

Más aún, los conos temporales son convexos, ya que si $v,w\in C(u)$ y $a\geq 0$, $b\geq 0$ (sin ser ambos nulos), es fácil probar que av+bw está en C(u).

Muchos hechos relativos a los espacios afines euclídeos tienen sus “análogos” en los espacios de Lorentz. Por ejemplo, en un espacio afín euclídeo, la desigualdad de Cauchy-Schwarz permite definir los ángulos. Un resultado “análogo” en la Geometría de Lorentz es el siguiente:

Proposición: Sean v y w vectores temporales en un espacio vectorial de Lorentz. Entonces:

1) $|g(v,w)|\geq ||v||.||w||$, donde la igualdad se da si y sólo si v y w son colineales.

2) Si v y w están en el mismo cono temporal de V, existe un único número $\varphi \geq 0$, llamado el **ángulo hiperbólico** entre v y w, tal que $g(v,w)=-||v||.||w||.ch\varphi$.

Del mismo modo que la desigualdad de Cauchy-Schwarz invierte su sentido, también lo hace así la desigualdad triangular:

Proposición: Si v y w son dos vectores temporales que están en el mismo cono temporal de un espacio vectorial de Lorentz, entonces $||v||+||w|| \leq ||v+w||$, y la igualdad se da si y sólo si v y w son colineales.

Para nuestra intuición euclídea puede ser una sorpresa –al principio- que un segmento de línea recta ya no sea más el camino más corto entre dos puntos y que "atajando" a lo largo de una esquina haga el trayecto más largo y no más corto. Sin embargo, el resultado anterior es clave tanto en la Geometría de Lorentz como en sus aplicaciones a la Teoría de la Relatividad.

Ejercicio: Probar que en un espacio vectorial de Lorentz V, si u y v son vectores nulos linealmente independientes, entonces $g(u,v)\neq 0 \Leftrightarrow$ si u y v son vectores nulos ortogonales entonces son linealmente dependientes.

Los puntos de un espacio-tiempo se llaman **acontecimientos** (**events**) y las curvas parametrizadas se llaman **partículas**.

Una partícula representa la historia vital de un objeto que en el contexto cósmico se puede considerar pequeño. Cada partícula se puede suponer que viene equipada con un reloj (mecánico, atómico, biológico,…) que mide su tiempo propio.

Definición: Una **partícula material** en el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski M es una curva temporal que apunta hacia el futuro $\alpha:I\rightarrow M$ tal que $|\alpha'(\tau)|=1$ para todo $\tau\in I$. El parámetro τ se llama el **tiempo propio** de la partícula.

Definición: Una **partícula luminosa** en el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski es una geodésica nula $\gamma:I\rightarrow M$ que apunta hacia el futuro.

Ejercicio: En el espacio semieuclídeo 3-dimensional de índice 1 con producto escalar generalizado $g((x,y,z),(x',y',z'))= =xx'+yy'-zz'$, encontrar una recta que pase por el punto $P=(0,1,2)$ y corte ortogonalmente al 2-plano $\pi=<(1,0,0),(0,2,1)>$.

Ejercicio: En el plano de Lorentz, calcular el ángulo hiperbólico entre los vectores temporales u=(0,1) y v=(1,2).

Ley de adición de velocidades:

(**)

$v=(v\_1+v\_2)/(1+v\_1.v\_2)$.ENSORES

La noción de "tensor" generaliza conceptos geométricos muy importantes (función, campo vectorial, 1-forma, producto escalar, …) y proporciona las herramientas para describir objetos incluso más complejos. Los tensores aparecen de un modo natural en muchos contextos tanto físicos como matemáticos, pero –en todos los casos- su propiedad característica es la **multilinealidad**. La definición que voy a usar hace énfasis en ese hecho y se convierte fácilmente en la descripción clásica de un tensor por coordenadas:

Sean $V_1, \ldots ,V_s$ módulos sobre un anillo K. Entonces $V_1 \times \ldots \times V_s$ es el conjunto de todas las s-tuplas $(v_1, \ldots ,v_s)$ con $v_i \in V_i$. Las definiciones usuales –trabajando con las componentes- de suma y de multiplicación por un escalar dotan a $V_1 \times \ldots \times V_s$ de estructura de módulo sobre K, llamado el **producto directo** o la **suma directa**. Si W es otro módulo sobre K, se considera una aplicación K-multilineal A: $V_1 \times \ldots \times V_s \to W$.

Si V es un módulo sobre K , sea V* el conjunto de todas las aplicaciones K-lineales de V en K. Las definiciones usuales de suma y producto por un escalar dotan a V* de estructura de módulo sobre K, llamado el **módulo dual** de V.

Si $V_i=V$ para $1\leq i\leq s$, la notación $V_1 \times \ldots \times V_s$ se abrevia como V^s

Para enteros $r\geq 0$, $s\geq 0$ no ambos nulos, una función K-multilineal A: $(V^*)^r x V^s \to K$ se llama un **tensor de tipo (r,s)** sobre V.

El conjunto $T^r{}_s(V)$ de todos los tensores de tipo (r,s) sobre V es a su vez un módulo sobre K.

Un tensor de tipo (0,0) sobre V es simplemente un elemento de K.

Definición: Un **campo vectorial** sobre una variedad diferenciable M es una aplicación X diferenciable que asocia a cada punto $p\in M$ un vector $X(p)\in T_pM$. El conjunto de los campos vectoriales diferenciables sobre una variedad diferenciable M se representa por $\Xi(M)$.

Definición: Una **1-forma** sobre una variedad diferenciable M es una aplicación θ diferenciable que asocia a cada punto $p\in M$ un covector $\theta(p)\in T_pM^*$. El conjunto de las 1-formas sobre una variedad diferenciable M se representa por $\Xi^*(M)$.

Con las operaciones naturales, tanto los campos vectoriales como las 1-formas tienen estructura de módulo sobre el anillo de las funciones reales continuas $C^\infty(M)$.

Definición: Un **campo tensorial** sobre una variedad diferenciable M es un tensor sobre el módulo $\Xi(M)$. El conjunto de los campos tensoriales de tipo (r,s) sobre una variedad diferenciable M se representa por $T^r{}_s(M)$.

Ejemplo: La función evaluación E: $\Xi^*(M)\times\Xi(M)\to C^\infty(M)$ definida por $E(\theta,X)=\theta(X)$ es un campo tensorial de tipo (1,1).

Ejemplo: El producto escalar g: $\Xi(M)\times\Xi(M)\to C^\infty(M)$ es un campo tensorial de tipo (0,2).

De un modo natural se define la suma de tensores de un mismo tipo.

Cualquier par de tensores se puede multiplicar:

Definición: Sean $A\in T^r{}_s(M)$ y $B\in T^{r'}{}_{s'}(M)$, se define el **producto tensorial** $A\otimes B$ como el tensor de tipo (r+r',s+s') definido por $A\otimes B(\theta^1,\ldots,\theta^{r+r'},X_1,\ldots,X_{s+s'})=A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s).B(\theta^{r+1},\ldots,\theta^{r+r'},X_{s+1},\ldots,X_{s+s'})$.

El producto tensorial, en general, no es conmutativo.

$T^0{}_1(M)=\Xi^*(M)$

$T^1{}_0(M)=\Xi(M)$

Los tensores de tipo (0,s) se dice que son **covariantes** y los de tipo (r,0), con $r\geq 1$ se dice que son **contravariantes**.

La ortogonalidad de variedades lineales de un espacio afín se define en términos de ortogonalidad de espacios vectoriales euclídeos.

Definición: Dos variedades lineales a+F y b+G de un espacio afín de dimensión n son **ortogonales** o **perpendiculares** cuando se dan una de las condiciones siguientes:

i) $\langle \underset{u}{\rightarrow}, \underset{v}{\rightarrow}\rangle = 0$ para todo $\underset{u}{\rightarrow} \in F$ y para todo $\underset{v}{\Rightarrow} \in G$ (por tanto $F\subset G^{\perp}$, y necesariamente $dimF + dimG \leq n$).

ii) $dimF + dimG \geq n$ y $F^{\perp}$ y $G^{\perp}$ son ortogonales.

Definición (Vector perpendicular a un hiperplano): Sea $\left\{p,\underset{e_1}{\rightarrow},\ldots,\underset{e_n}{\rightarrow}\right\}$ una referencia ortonormal (es decir, $\left\{\underset{e_1}{\rightarrow},\ldots,\underset{e_n}{\rightarrow}\right\}$ es una base ortonormal del espacio vectorial euclídeo V) de un espacio afín euclídeo de dimensión n. Si $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ es la ecuación de un hiperplano en dicha referencia, el vector de coordenadas $(a_1,\ldots,a_n)$ es ortogonal a cada vector del espacio vectorial director del hiperplano.

Definición (Perpendicular común a dos rectas): Si $a + \langle\underset{u}{\rightarrow}\rangle$ y $b + \langle\underset{v}{\rightarrow}\rangle$ son dos rectas que se cruzan en un espacio afín euclídeo de dimensión 3, la recta perpendicular que corta a ambas se puede calcular como

$$a + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \cap b + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

donde $\vec{w} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^{\perp}$.

Los puntos de corte de la perpendicular común con las dos rectas se llaman **pies** de la perpendicular común.

Observación: La condición de que el espacio afín euclídeo sea de dimensión 3 no es esencial, ¿por qué?

Definición (Distancia entre dos variedades lineales): Dadas L y M variedades lineales, se define la **distancia** entre ambas como $d(L, M) = min\{d(p, q): p \in L, q \in M\}$.

Observación: Usando argumentos topológicos, puede verse que el mínimo que aparece en la definición anterior siempre existe, y siempre existen a∈L, b∈M tales que d(L,M)=d(a,b).

Definición (Distancia de un punto a un hiperplano): Sea p∈A y a+F un hiperplano de A. Si q∈a+F es la proyección ortogonal de p sobre el hiperplano, entonces d(p,a+F)=d(p,q).

Observación: Si la ecuación del hiperplano a+F en una referencia ortonormal es $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ y $p = (p_1, \dots, p_n)$, entonces

$$d(p, a + F) = \frac{|a_1p_1 + \cdots + a_np_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

¿Por qué?

Definición (Distancia entre variedades paralelas): Sean L=a+F y M=b+G dos variedades lineales paralelas de un espacio afín A; supóngase sin pérdida de generalidad que $F \subset G$. L es la variedad de dimensión menor; sea p∈L, y sea q∈M su proyección ortogonal, entonces

d(L,M)=d(p,q).

¿Depende esta definición del punto p que se elija?

Definición (Distancia entre dos rectas que se cruzan en dimensión tres): Si r≡$a + \langle \vec{u} \rangle$ y s≡$b + \langle \vec{v} \rangle$ son dos rectas que se cruzan en un espacio afín euclídeo de dimensión 3 y $b + \langle \vec{v} \rangle$ son dos rectas que se cruzan en un espacio afín euclídeo de dimensión 3 y p∈ $a + \langle \vec{u} \rangle$ y q∈ $b + \langle \vec{v} \rangle$ son los pies de la perpendicular común a ambas rectas, entonces

d(r,s)=d(p,q).

EJERCICIOS:

15. Hallar las ecuaciones de la recta del espacio euclídeo R^4 que pasa por el punto P=(1,1,0,1) y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x=\beta \\ y=-1+2\beta \\ z=-1 \\ t=-\beta \end{cases}.$$

16. Dadas las rectas del espacio euclídeo tridimensional

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+3\gamma \\ y = 1+\gamma \\ z = 1+2\gamma \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}.$$

Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s.

b) Hallar la distancia de r a s.

c) Hallar el lugar geométrico de las rectas que se apoyan en r y s, y son paralelas al plano x=y.

17. Determinar la recta del espacio afín euclídeo de dimensión 4 que pasa por el punto P=(0,1,2,3) y corta perpendicularmente al plano

$$\pi \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ y+z+t=1 \end{cases}.$$

18. En el espacio afín euclídeo R^3 se consideran las variedades lineales $L \equiv (-1,0,1) + \langle(0,0,1)\rangle$ y $M \equiv y = 1$. Calcular d(L,M).

ISOMETRIAS.

Después de introducir la noción de distancia, se estudiarán las aplicaciones que la conservan.

Definición: Una aplicación $f: A \to B$ entre dos espacios afines euclídeos es una **isometría** si para todo par a,b$\in$A d(f(a),f(b))=d(a,b).

Observación: Una isometría es una aplicación inyectiva.

Proposición 9.1.- Una aplicación $g: A \to B$ entre dos espacios afines (A,V,φ) y y (B,W,ψ) es una isometría si y sólo si g es una afinidad, y su aplicación lineal asociada γ conserva el producto escalar, es decir: $\langle \gamma\left(\underset{u}{\to}\right), \gamma(\underset{v}{\to})\rangle = \langle \underset{u}{\to}, \underset{v}{\to}\rangle$, para todo $\underset{u}{\to}, \underset{v}{\to} \in V$.

Demostración: Ejercicio. Indicación: Probar previamente que una aplicación que conserva el producto escalar es lineal.

Observación: Se puede interpretar la proposición anterior del siguiente modo: Las isometrías son aplicaciones que conservan el paralelismo (por ser afinidades) y la ortogonalidad (por conservar el producto escalar)

Definición: Se dice que dos espacios afines euclídeos son **isomorfos** si existe una isometría biyectiva entre ellos.

A continuación interesa describir las isometrías de un espacio afín euclídeo en sí mismo. Para ello, primero se estudiarán las aplicaciones de un espacio vectorial euclídeo en sí mismo que conservan el producto escalar.

Definición: Sea V un espacio vectorial euclídeo, entonces una aplicación h:V→V es **ortogonal** si $\langle h\left(\underset{u}{\to}\right), h(\underset{v}{\to})\rangle = \langle \underset{u}{\to}, \underset{v}{\to}\rangle$, para todo $\underset{u}{\to}, \underset{v}{\to} \in V$.

Proposición 9.2.- Si h es una aplicación ortogonal de un espacio vectorial euclídeo V en sí mismo, se cumple:

i) $\left\|h\left(\underset{u}{\to}\right)\right\| = \left\|\underset{u}{\to}\right\|$para todo $\underset{u}{\to} \in V$.

ii) $\underset{u}{\to}$ y $\underset{v}{\to}$ son ortogonales si y sólo si $h(\underset{u}{\to})$ y $h(\underset{v}{\to})$ son ortogonales.

iii) h es biyectiva.

iv) Si k es un autovalor, entonces $\|k\| = 1$.

v) Si $\underset{u}{\to}$ y $\underset{v}{\to}$ son autovectores correspondientes a autovalores diferentes, entonces $\underset{u}{\to}$ y $\underset{v}{\to}$ son ortogonales.

Demostración: Ejercicio.

Se puede comprobar cuándo una aplicación lineal es ortogonal usando coordenadas.

Proposición 9.3.- Si A es la matriz de una aplicación lineal h en una cierta base $\left\{\underset{e_1}{\to}, \dots, \underset{e_n}{\to}\right\}$, entonces son equivalentes:

a) h es ortogonal.

b) $\langle h\left(\underset{e_i}{\rightarrow}\right), h\left(\underset{e_j}{\rightarrow}\right)\rangle = \langle \underset{e_i}{\rightarrow}, \underset{e_j}{\rightarrow}\rangle$ para todo i,j

c) $A^tGA = G$, donde G es la matriz del producto escalar en la base dada.

Demostración: Ejercicio.

Corolario 9.4: Si A es la matriz de una aplicación lineal h en una base ortonormal, entonces h es ortogonal si y sólo si A es una matriz ortogonal (AA^t=Id).

Corolario 9.5: La matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales es una matriz ortogonal.

Observación: Si una matriz A es ortogonal, entonces det(A)=1. ¿Es cierto el recíproco?

El siguiente resultado de Álgebra Lineal nos será de gran utilidad para la clasificación de las isometrías:

Teorema 9.6 (Forma canónica de una aplicación ortogonal).- Sea V un espacio vectorial euclídeo y h:V→V una aplicación ortogonal. Existe una base ortonormal de V tal que la matriz de h en ella es

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_r \end{pmatrix}$$

Es decir una matriz diagonal por cajas donde las submatrices A_i son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ con $a^2+b^2=1$.

Demostración: Ejercicio.

Definición: Un **movimiento** o **desplazamiento** de un espacio afín euclídeo A es una isometría de A en sí mismo. Se dirá que es un **movimiento directo** si su parte lineal tiene determinante 1 y se dirá que es un **movimiento inverso** si su parte lineal tiene determinante -1.

Observación: Los movimientos son siempre afinidades biyectivas. Además, si se elige un sistema de referencia adecuado (un sistema ortonormal bien adaptado al movimiento que se quiere estudiar), los movimientos son aplicaciones que se pueden expresar en coordenadas como

$$f(x_1, \dots, x_n) = (p_1, \dots, p_n) + M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

siendo M la forma canónica de una aplicación ortogonal.

Proposición 9.7 (Movimientos de la recta euclídea).- Sea g:A→A una isometría de un espacio afín euclídeo de dimensión 1 en sí mismo. Entonces: o bien g es la identidad, o bien una traslación de vector no nulo o bien es una homotecia de razón -1.

Demostración: Ejercicio

Movimientos del plano euclídeo.

Sea A un espacio afín euclídeo de dimensión 2, y sea g:A→A un movimiento en A. Las posibilidades para la forma canónica de γ:V→V son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observación: las dos primeras corresponden a θ=0 y a $\theta=\pi$.

CASO DIRECTO: Cuando γ tiene como matriz la identidad, entonces g es una **traslación**.

Cuando γ tiene como matriz $\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$, g tiene un único punto fijo p y es un **giro** o **rotación** de **centro** p y **ángulo** θ. Si cosθ=-1, entonces $\theta=\pi$ y g es una **simetría central** de **centro** p.

CASO INVERSO: La matriz de γ en una base ortonormal adecuada es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se distinguen dos posibilidades:

1. Si existe un punto fijo p, las ecuaciones de g en la referencia ortonormal son $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$. Entonces g es una **simetría axial**. El **eje de simetría** es la recta de puntos fijos $p + \langle \underset{e_1}{\rightarrow} \rangle$.
2. Si g no tiene puntos fijos, las ecuaciones en una referencia ortonormal son $\begin{cases} x' = x + c \\ y' = -y + d \end{cases}$ con c≠0. La recta y=d/2 es invariante. Con un cambio de referencia, las ecuaciones se pueden reescribir como $\begin{cases} x' = x + c \\ y' = -y \end{cases}$. Entonces g es una **simetría deslizante**, es decir la composición de una simetría con una traslación. ¿Es una simetría en el sentido usual?

Pasos para determinar si una afinidad es un movimiento.

Si g:A$\rightarrow$A es una afinidad en un espacio afín euclídeo de dimensión dos, con ecuación x'=Mx+b en una referencia cualquiera

A) g es un movimiento si y sólo si γ es ortogonal ($M^tGM=G$, donde G es la matriz del producto escalar en la base de partida).
B) Calcular el determinante para decidir si se trata de un movimiento directo o inverso. (¿importa la referencia?)
C) Si g es un movimiento directo: C1) Si M=Id y **b**=**0**, entoces g es la identidad. C2) Si M=Id y **b**$\neq$**0**, entonces g es una traslación. C3) En otro caso, g es un giro de centro el único punto fijo y ángulo dado por la igualdad tr(M)=2cosθ (la traza es invariante por cambios de base)
D) Si g es un movimiento inverso: D1) g es una simetría axial si hay una recta de puntos fijos (el eje de simetría). D2) Si no hay puntos fijos g es una simetría deslizante. $g = T_{\vec{u}} \circ S$ donde S es una simetría respecto de la única recta invariante por g cuya dirección es el subespacio W de autovectores de autovalor 1 de γ. El eje de simetría es el conjunto de puntos $\left\{x: \overrightarrow{xg(x)} \in W\right\}$. El vector desplazamiento es $\vec{u} = \overrightarrow{xg(x)}$ tomando x en cualquier punto del eje.

<u>EJERCICIOS</u>:

19. Considérese el grupo de las rotaciones en el plano SO(2,R). ¿Es abeliano?

20. Considérese el grupo de las rotaciones en el espacio tridimensional SO(3,R). ¿Es abeliano?

21. En el plano afín euclídeo nos dan un movimiento directo f:$R^2\rightarrow R^2$ tal que f((1,-1))=(1,1) y f(($\sqrt{2}$,0))=(0, $\sqrt{2}$). a) Determinar de qué movimiento se trata. b) Descomponerlo como producto de dos simetrías, una de las cuales transforma el punto (1,0) en el punto (0,1).

22. Comprobar que la aplicación f:$R^3\rightarrow R^3$ dada por la matriz

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$ es un movimiento. Decir de qué movimiento se trata. Dar un sistema de referencia respecto del cual la matriz de f sea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & cos\theta & -sen\theta & 0 \\ b & sen\theta & cos\theta & 0 \\ c & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

CÓNICAS Y CUÁDRICAS.

El matemático griego Apolonio de Perge (Perge, 262 a.C. - Alejandría, 190 a. C.) estudió intensamente las secciones cónicas, más conocidas como cónicas, en una serie de 8 libros, de los cuales el vol. VIII se ha perdido. El nombre de secciones cónicas proviene de estudiar las curvas que surgen al cortar un cono circular recto con diversos planos. De hecho, se conoce como Cono de Apolonio a la Figura de un cono con una circunferencia, una elipse, una parábola y una hipérbola. Posteriormente, una vez que se acepta la tercera dimensión muchos siglos más tarde, aparece el estudio de las superficies cuádricas, como las superficies que engloban las soluciones de polinomios de grado dos con tres variables. Joseph-Louis Lagrange (Turín, 25 de enero de 1736 - París 10 de abril de 1813) [bautizado como Giuseppe Lodovico Lagrangia] obtuvo las formas canónicas de las cuádricas en 1793. Las hipercuádricas aparecen de manera natural si se consideran como el conjunto de los ceros de un polinomio de grado dos de varias variables. A lo largo de la Historia, las cónicas y las cuádricas han tenido y siguen teniendo muchas aplicaciones artísticas, arquitectónicas, industriales, etc.

Definición: En el espacio afín R^n una **hipercuádrica** es un subconjunto de la forma $C = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0\right\}$ donde $M = m_{ij} \neq 0_{n\times n}$ es una matriz simétrica, $a_1, \dots, a_n, b \in R$. Cuando n=2, hablamos de **cónicas**, mientras que si n=3 se les llama simplemente **cuádricas**.

La expresión matricial de una hipercuádrica es:

$$C = \left\{x \in R^n : (1, x) N \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix} = 0\right\}, \quad N = \begin{pmatrix} b & a_1 \dots a_n \\ a_1 & \\ \dots & M \\ a_n & \end{pmatrix}$$

$$C = \{x \in R^n : xNx^t + 2xa^t + b = 0\}, \ a = (a_1, \dots, a_{n)}.$$

Proposición 10.1.- Sea g:$R^n \rightarrow R^n$ una biyección afín, y C una hipercuádrica. Entonces g(C) es otra hipercuádrica.

Demostración: Ejercicio.

Recordemos el Teorema de Sylvester que sirve para diagonalizar matrices simétricas.

Teorema 10.2 (Teorema de Sylvester).- Sea M una matriz simétrica de orden n, entonces existe una matriz regular P de orden n tal que

$P^tMP = \begin{pmatrix} -I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & 0_c \end{pmatrix}$, donde a es el índice de M, c es la nulidad y a+b+c=n.

Lema 10.3 (Regla de Descartes).- El número de raíces positivas de un polinomio con coeficientes reales es, como máximo, el número de cambios de signo entre sus coeficientes.

Lema 10.4.- .- Sea g:$R^n \to R^n$ una aplicación afín. Entonces existen $P \in M_n(R)$ y $v \in R^n$ tales que para cada $x \in R^n$, se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ g(x)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ v^t & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix}.$$

Demostración: Ejercicio.

Definición: Dos hipercuádricas C y D de R^n se dicen **equivalentes** si existe una biyección afín g:$R^n \to R^n$ tal que g(C)=D.

Lema 10.5.- Toda hipercuádrica C de R^n es equivalente a otra hipercuádrica cuya matriz asociada es de la forma

$$\begin{pmatrix} b & & 0 \dots 0 & & d_{r+1} \dots d_n & \\ 0 & c_1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 & \\ 0 & & & c_r & & \\ d_{r+1} & & & & 0 & \\ \vdots & & 0 & & & \ddots \\ d_n & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

donde $d_{r+1}, \dots, d_n, b \in R, c_i = \pm 1, i = 1, \dots, r.$

Demostración: Ejercicio

Teorema 10.6.- Toda hipercuádrica es equivalente a otra hipercuádrica cuya matriz asociada es una de las siguientes:

$$I.\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & c_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & c_r & \\ & & & & 0_{n-r} \end{pmatrix} \qquad II.\quad \begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & c_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & c_r & \\ & & & & 0_{n-r} \end{pmatrix} \quad \mu\neq 0,$$

$$III.\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \\ 0 & c_1 & & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & c_r & & 0 \\ -1 & 0 & \dots & & 0_{n-r-1} & \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Donde $c_i = \pm 1, i = 1, \dots, r$ y el número de -1 es menor o igual que el número de +1 e n las constantes c_i.

Demostración: Ejercicio.

Teorema 10.7 (Clasificación afín de las cónicas).- Existen 9 clases afines de cónicas:

$x^2=0$	recta doble
$x^2+1=0$	vacío (par de rectas imaginarias)
$x^2-1=0$	par de rectas paralelas
$x^2-2y=0$	parábola
$x^2+y^2=0$	punto
$x^2-y^2=0$	par de rectas secantes
$x^2+y^2+1=0$	vacío (elipse imaginaria)
$x^2+y^2-1=0$	elipse
$x^2-y^2-1=0$	hipérbola

Demostración: Ejercicio.

Teorema 10.8 (Clasificación afín de las cuádricas).- Existen 17 clases afines de cuádricas:

$x^2=0$	plano doble
$x^2+1=0$	vacío (par de planos imaginarias)
$x^2-1=0$	par de planos paralelas
$x^2-2z=0$	cilindro parabólico
$x^2+y^2=0$	recta
$x^2-y^2=0$	par de planos secantes
$x^2+y^2+1=0$	vacío (cilindro imaginario)

$x^2+y^2-1=0$	cilindro elíptico
$x^2+y^2\pm 1=0$	cilindro hiperbólico
$x^2+y^2-2z=0$	paraboloide elíptico
$x^2-y^2-2z=0$	paraboloide hiperbólico
$x^2+y^2+z^2=0$	punto
$x^2+y^2-z^2=0$	cono
$x^2+y^2+z^2+1=0$	vacío (elipsoide imaginario)
$x^2+y^2+z^2-1=0$	elipsoide
$x^2+y^2-z^2+1=0$	hiperboloide de 2 hojas
$x^2+y^2-z^2-1=0$	hiperboloide de 1 hoja

Demostración: Ejercicio.

EJERCICIOS:

1. Dar un ejemplo de una hipercuádrica que no sea unión de planos afines y que contenga rectas afines.

2. Clasificar afínmente la siguiente cónica: $2x^2-y^2+2x-2y-1=0$.

3. Clasificar afínmente la siguiente cónica: $x^2-4xy+y^2-3x+4y-1=0$.

4. Clasificar afínmente la siguiente cuádrica: $2x^2-y^2+z^2+2xz-2yz+2x-2y-1=0$.

5. Clasificar afínmente la siguiente cuádrica: $x^2+y^2+z^2-4xy-3x+4y+z-1=0$.