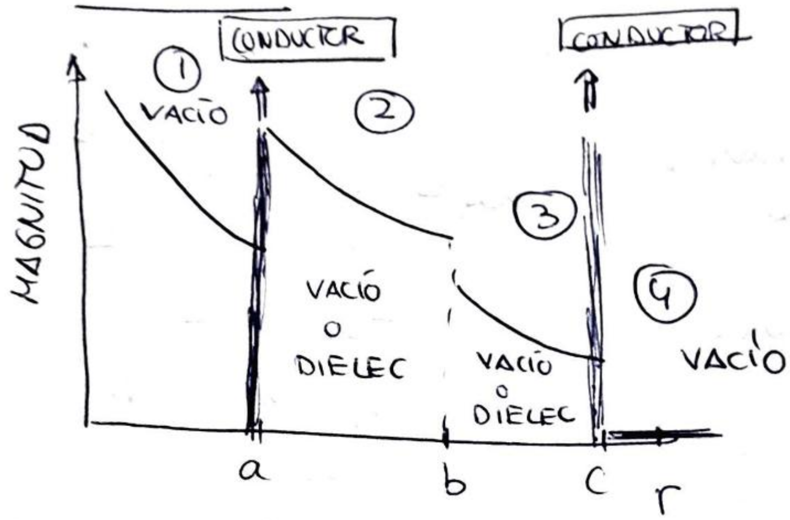
Resolución Control Curso 19/20

Cuestión ⇒ Dividimos en 4 regiones y anotamos lo que nos dice el enunciado



Varias cosas que se pueden deducir:

- En región (4) $D(o\,E)=0$ ⇒ la suma de todas las cargas que haya entre $0 \leq r \leq c$ tiene que ser cero.

(i) Lo que se representa tiene que ser E, no puede ser D

Se justifica porque en $r=b$ hay una discontinuidad de la magnitud y sabemos que a sus lados hay vacío o dieléctrico y en $r=b$ no hay conductor. En resumen, que en $r=b$ no hay densidad de carga libre σ_f (sí que podría haber ligada).

La c.c. para las comp. normales de $\vec{D}$ dice: $D_{2n}-D_{1n}=\sigma_f$

Luego si lo que se representara fuera D, en $r=b$ no debería ~~podría~~ haber una discontinuidad.

(ii) Nos dicen que $E \sim 1/r^2$ en todas las zonas de $r<c$. Eso implica que la simetría es esférica (por ejemplo el campo creado por una carga).

Si la simetría fuera cilíndrica $E \sim 1/r$

(iii) En el origen $(r=0)$ tiene que haber una carga puntual q, porque vemos que $E \to 0$ cuando $r \to \infty$

La q podría ser $(+)$ o $(-)$. Nosotros vamos a suponer a partir de ahora que es $(+)$

- $\underline{r < a}$ Hay vacío, lo dicen en el problema $\Rightarrow E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

- $\underline{r = a}$ Hay un conductor. Podría haber carga libre en principio, llamamos $Q_a^{libre} = \sigma_a^{libre} 4\pi a^2$

Vemos que hay una discontinuidad en E en esta interfase y que $E_2 > E_1$

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ \\ E_2 = \dfrac{q + Q_a^{libre}}{4\pi\epsilon_0 r^2 \kappa_2} \end{array}\right\}$$

Esto es compatible con 2 posibilidades:

$\underline{\text{OPCIÓN 1}} \Rightarrow$ Vacío en el medio 2

$\underline{\text{OPCIÓN 2}} \Rightarrow$ Dieléctrico $\epsilon_2 = \epsilon_0 \kappa_2$ en el medio 2

Campo en medio 2 suponiendo que hay dielec. de $\epsilon_2 = \epsilon_0 \kappa_2$ y en interfase Q_a

$$\left.\begin{array}{l} E_1\big|_{r=a} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \\ \\ E_2\big|_{r=a} = \dfrac{q + Q_a^{libre}}{4\pi\epsilon_0 \kappa_2 a^2} \end{array}\right]$$

Por el dibujo vemos que

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} < \frac{q + Q_a^{libre}}{4\pi\epsilon_0 \kappa_2 a^2}$$

Salto hacia arriba.

κ en un dielec. es siempre > 1 ($=1$ en vacío)

$$\boxed{q < \frac{q + Q_a^{libre}}{\kappa_2}} \Rightarrow$$

$\underline{\text{OPCIÓN 1}} \Rightarrow$ Vacío en medio 2 ; $\kappa_2 = 1 \Rightarrow \boxed{Q_a^{libre} > 0}$

↳ Positiva.

$\underline{\text{OPCIÓN 2}} \Rightarrow$ Dielec. en medio 2 ; $\kappa_2 > 1 \Rightarrow Q_a^{libre} > q(\kappa_2 - 1)$

↳ En este caso ~~la~~ la carga libre en la interfase debe cumplir esta condición. También positiva como en opción 1. Pero mayor que una cierta cantidad $q(\kappa_2 - 1)$

$\underline{r=b}$ ⇒ Interface entre 2 dielec. (o vacío y 1 dielect)
⇒ No hay cargas libres ⇒ Si hay una discontinuidad es porque hay cargas ligadas (densidad de carga ligada) σ_b^{ligada}

En el dibujo se ve que $E_2 > E_3$

$$\left.\begin{array}{l} a<r<b \Rightarrow E_2 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 k_2}\dfrac{q+Q_a^{libre}}{r^2} \\ b<r<c \Rightarrow E_3 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 k_3}\dfrac{q+Q_a^{lib}}{r^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_2|_{r=b} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 k_2}\dfrac{q+Q_a^{libre}}{a^2} \\ E_3|_{r=b} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 k_3}\dfrac{q+Q_a^{libre}}{a^2} \end{array}$$

Luego que $E_2 > E_3$ es necesario que $\boxed{k_3 > k_2}$

$\underline{b<r<c}$ ⇒ Material dieléctrico de cte $\epsilon_3 = k_3\epsilon_0$ que
Región ③ debe ser mayor que la del medio 2.
En el medio $\underline{3 \text{ no puede haber vacío}}$

$\underline{r=c}$ ⇒ Interfase donde hay un conductor donde puede haber carga libre Q_c^{libre}

$\underline{r>c}$ Región $\underline{4}$ $E=0 \Rightarrow q + Q_a^{libre} + Q_c^{libre} = 0$

Vimos que si $q>0 \Rightarrow Q_a^{libre} > 0 \Rightarrow Q_c^{libre} < 0$

$$\boxed{Q_c^{libre} = q + Q_a^{libre}}$$

(iv) Densidades de carga volumétrica:
- Libres no hay
- Ligadas ⇒ En los materiales dieléctricos

Dens. de carga ~~libre~~ (σ) superficial
- Libres ⇒ Si en $r=a$ positiva $\sigma_a^{libre} = \dfrac{Q_a^{libre}}{4\pi a^2}$

$r=c$ negativa $\sigma_c^{libre} = \dfrac{Q_c^{libre}}{4\pi c^2}$

Cumpliendo $\boxed{q + Q_a^{libre} + Q_c^{libre} = 0}$

- Ligados ⇒ Si, en los dieléctricos

* opción 1 (sólo dieléc en medio 3) habría en $r=b$ y $r=c$

* opción 2 (dieléc. en medios 2 y 3, siendo $\kappa_2 < \kappa_3$) habría en $r=b$ y $r=c$ y tb en $r=a$.

CONCLUSION: El sistema podría ser:

- Una carga puntual positiva en el centro

Medio 1 → Vacío

- Una corteza esférica (o esfera conductora hueca de radio a). En ella habría densidad de carga superf. σ_a^{libre} positiva

Medio 2 ⇒ Vacío $\kappa_2 = 1$ o dieléctrico $\kappa_2 > 1$

Medio 3 ⇒ Dieléctrico $\kappa_3 > \kappa_2$

- Otra corteza conductora esférica de radio $r=c$ con carga negativa σ_c^{libre}.

Las cargas libres σ_a y σ_c se podrían poner conectando las esferas a una fuente de alimentación

Debe cumplirse que $\boxed{q + Q_a + Q_c = 0}$

Todas libres.

La suma de todas las cargas ligadas siempre es cero.

Resolución Problemas Control 2019/2020

$\boxed{1}$

Dens. volumétrica (libre) $\rho = A(a-r)$

$A = cte$

Datos: Q, a

(a) Determinamos la Cte. A

Nótese que la densidad volumétrica no es cte, por lo que $\rho \neq \frac{Q}{Vol}$

$$Q = \int_V \rho\, dV = A \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^a (a-r) r^2 dr =$$

↳ volumen de la esfera

↳ $dV = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

$$= 4\pi A \int_0^R (a-r) r^2 dr = \frac{\pi a^4}{3} A \Rightarrow \boxed{A = \frac{3Q}{\pi a^4}} \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{\pi a^4}(a-r)$$

(b) Determinamos $\vec{E}$ fuera y dentro de la esfera utilizando el T. Gauss

$$\oint_{S_G} \vec{E}\cdot\vec{da} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{V_G} \rho\, dV$$

Si las cargas no son discretas, sino continuas esta expresión es

Este es el volumen de la esfera Gaussiana

Las superficies gaussianas son esferas de radio r (y vol. V_G) ↳ S_G

Calculamos el 1er miembro del T. Gauss:

- Para $r < a$: Calculamos el 1er miembro del T. Gauss:

$$\oint_{S_G} \vec{E}\,\vec{da} = E\, 4\pi r^2 \ (*) \text{ siendo } E = E(r)$$

El 2º miembro del T. Gauss será $\frac{1}{\epsilon_0}\int_{V_G} \rho\, dV =$ ↳ las integ. en φ y θ dan 4π

$$= \frac{4\pi}{\epsilon_0}\int_0^r \frac{3Q}{\pi a^4}(a-r) r^2 dr = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 a^4}(4a-3r) \ (**)$$

Igualo ambos miembros: $(*) = (**)$ $\quad E 4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 a^4}(4a-3r)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{Qr(4a-3r)}{4\pi\epsilon_0 a^4}\vec{u}_r}$$

Scanned by TapScanner

→ Para $r>a$

El 1^er miembro del T. Gauss da lo mismo: Expresión (*)
El 2º miembro sale lo del apartado a: para todos
los puntos la carga que produce campo es Q

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$$

Nótese que $\vec{E}$ es continuo en la interfase ($r=a$)

$$\vec{E}\Big|_{\substack{r=a\\ r<a}} = \frac{Qa(4a-3a)}{4\pi\epsilon_0 a^4} = \frac{Qa^2}{4\pi\epsilon_0 a^4} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$E\Big|_{\substack{r=a\\ r>a}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Según la c.c. para comp. normal $\epsilon_0 E_{2n} - \epsilon_0 E_{1n} = \sigma_f$ (E_{2n}: $r>a$; E_{1n}: $r<a$)

Es continuo porque $\boxed{\sigma_f = 0}$

(c) Calculemos el potencial a partir de $\vec{E}$ usando $\vec{E} = -\nabla\phi$
Hay que usar la expresión del gradiente en esféricos. Como $\vec{E} = \vec{E}(r)$ solo cuenta el término radial

$$\vec{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{u}_r \qquad \phi = -\int E_r\,dr$$

• $r<a$
$$\phi = -\int \frac{Qr(4a-3r)}{4\pi\epsilon_0 a^4}dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^4}\left[\int 4ar\,dr + \int -3r^2 dr\right]$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^4}\left[4a\frac{r^2}{2} - 3\frac{r^3}{3}\right] + C_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^4}(2ar^2 - r^3) + C_1$$

• $r>a$
$$\phi = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2$$

Impongo c.c y c. iniciales:

• $\phi = 0$ si $r\to\infty$ $\quad \phi_{r>a}(r\to\infty) = C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

• $\phi_{r<a}\Big|_{r=a} = \phi_{r>a}\Big|_{r=0}$ $\quad -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^4}(2a^3 - a^3) + C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$

Este es el valor de ϕ para $r=0$

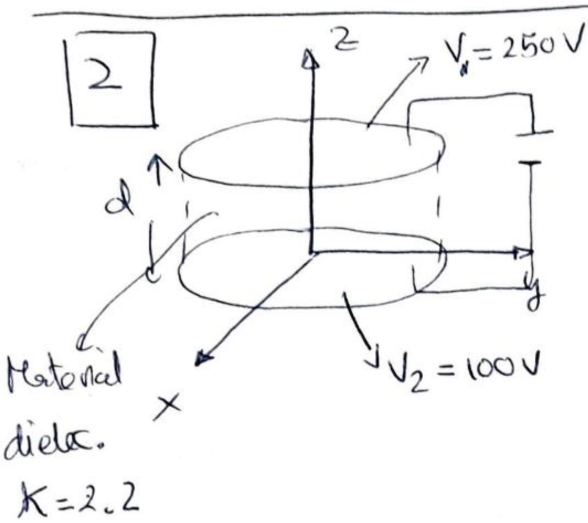
$$\Rightarrow C_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}$$

Resumiendo:

$$\boxed{\phi_{r<a} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^4}(2ar^2 - r^3)}$$

$$\boxed{\phi_{r>a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

2



$d = 5\,mm$

(a) Potencial en los puntos entre los 2 discos en zonas alejadas de bordes.

El problema se resuelve utilizando la Ec. Laplace (o Poisson)

Esto porque en ~~el~~ la zona entre las dos placas no hay cargas

Importante $\Rightarrow$ Podemos usar la Ec. Laplace (o Poisson)

$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$ siendo $\epsilon = k\epsilon_0$ porque el medio es IHL

Aunque no se diga, el hecho de que $k = cte$ lo implica (ver transp. 15 de diapositivas)

En principio habría que usar la ec. en cilíndricas, pero vemos que en zonas lejos de bordes ϕ no depende de la posición radial. En ningún caso depende de la angular, luego $\phi = \phi(z)$. Además no hay ρ_f

Hay que resolver la Ec. Laplace 1D (variable z)

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \Rightarrow \text{Solución de la forma } \boxed{\phi = Az + B}$$

Las ctes A y B se determinan con las c.c.

C.C. $\left\{ \begin{array}{l} z=0 \;\; // \;\; \phi = V_2 = 100\,V \\ z = d = 5\,mm \;\; // \;\; \phi = V_1 = 250\,V \end{array} \right\} \Rightarrow B = 100\,V$

$\phi(z=d) = 250\,V = A\cdot(5\,mm) + 100\,V \Rightarrow A = \dfrac{(250-100)\,V}{(5\times10^{-3})\,m}$

$A = 3\times10^{4}\ V/m$

$\boxed{\phi = 3\times10^{4}\cdot z + 100}$ En el S.I. z en m ; ϕ = Voltios

b) Calculamos $\vec{E}$ a partir de ϕ $\quad \vec{E} = -\nabla\phi$

~~Dentro~~ ~~esfera~~ Entre placas

$\vec{E} = -\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z = -3\times10^{4}\,\vec{u}_z\ (V/m)$

$\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\kappa\vec{E} = -5.84\times10^{-7}\,\vec{u}_z\ (C/m^2)$

Nótese que $\vec{E}$ (y $\vec{D}$) son ctes (no dependen de z)

~~Fuera de las placas~~

- Densidades de carga volumétrica libre no hay
- " " " superficial libre hay en las 2

placas. Las determinamos con las C.C. para las componentes normales de $\vec{D}$ en las interfases (~~la normal~~

Placa arriba $\quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{s1} \quad 0 + 5.84\times10^{-7} = \sigma_{s1}$

(D_{2n}: vacío; D_{1n}: medio)

$\boxed{\sigma^{libre}_{s1} = 5.84\times10^{-7}\ C/m^2}$

Nótese que $\vec{D}$ va en la dirección z, y la normal a las superf. es la direc. z, luego $\vec{D}$ solo tiene comp. normal

Placa abajo $\quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{s2} \quad -5.84\times10^{-7} - 0 = \sigma_{s2}$

(D_{2n}: medio; D_{1n}: vacío)

$\boxed{\sigma^{libre}_{s2} = -5.84\times10^{-7}\ C/m^2}$

c) Densidades de carga ~~volum~~ ligadas?

Calculo $\vec{P}$: $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E}$

$\vec{P} = \epsilon_0\kappa\vec{E} - \epsilon_0\vec{E} = \epsilon_0\vec{E}(\underset{2.2}{\kappa}-1) = 1.2\times\epsilon_0\vec{E} = -1.2\times\epsilon_0\,3\times10^{4}\,\vec{u}_z$

Las unidades de $\vec{P}$ son las mismas que $\vec{D}$ $\quad = -3.6\times10^{4}\,\epsilon_0\,\vec{u}_z$

Dens. volum. carga ligado $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$

$\uparrow$

$\vec{P} = cte$

Dens. carga ligado

Placa sup. : $\boxed{\sigma_{b,S1}} = \vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \vec{u_z} = \boxed{-3.6 \times 10^4 \epsilon_0 \, (C/m^2)}$

Placa inf : $\boxed{\sigma_{b,S2}} = \vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot (-\vec{u_z}) = \boxed{+3.6 \times 10^4 \epsilon_0 \, (C/m^2)}$

$\boxed{3}$ Resuelto en el libro Pags. 157 y 158

NOTA : El examen del año pasado duró 2 h.
Aquí la cuestión se ha desarrollado en mucho detalle
Este año será más corto que este porque durará
1 h y media