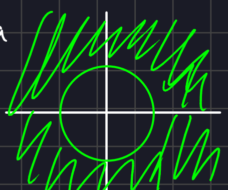
CORRECCIÓN PARCIAL 1

Ej 1.

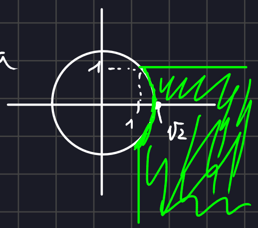
1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x^2+y^2 \geq 1\}$ 2 $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 2, \ x \geq 1, \ y \leq 1\}$

a. Representar
b. Abierto, cerrado, acotado, compacto.

1a 

1b. $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

A es cerrado ya que $Fr(A) \subset A$. Dado que se trata del exterior de la circunferencia A, no es acotado. Al no ser A acotado, A no puede ser compacto.

2a 

2b $Fr(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x^2+y^2 = 2, \ x \geq 1\} \cup \{(x,1) \in \mathbb{R}^2, \ x \geq 1\} \cup \{(1,y) \in \mathbb{R}^2, \ y \leq -1\}$

Tenemos $Fr(B) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow$ B no es un abierto
B es cerrado idem. 1b. $\Rightarrow$ B no es compacto idem. 1b.

Ej 2. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{e^{r^2}-1}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{2r e^{r^2}}{2r} = \lim_{r\to 0^+} e^{r^2} = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

pasamos a polares $\begin{cases} x = r\cos\theta & r \in \mathbb{R} \\ y = r\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$ L'Hôpital (f de 1 variable) $\Rightarrow \displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ $\square$

$\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x-y} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{(\cos\theta - \sin\theta)}$ (FI en $\theta = \frac{\pi}{4}$) $\Rightarrow$ No concluye

$\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x-y} = \lim_{(t^3+t,t)\to(0,0)} \frac{(t^3+t)^3+t^3}{t^3+t-t} = \lim_{(t^3+t,t)\to(0,0)} \frac{t^3(t^2+t)^3+t^3}{t^3} = \lim_{t\to 0} (t^2+1)+1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \nexists$

Cogiendo una curva que se acerque al origen: $\varphi(t) = (t^3+t, t)$ $\square$

Ej 3 $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$ ¿$\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ con algunas trayectorias?

1. Tomando $y = x$: $f(x,x) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$
   Tomando $y = -x$: $f(x,-x) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$
   Conjetura: $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

2. Sea $\varepsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que si $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$
   Para $(x,y) \neq (0,0)$ $\left| \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} \right| = |x^2-y^2| \leq |x^2| + |y^2| = x^2+y^2 < \delta^2$
   Cogiendo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, tenemos $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon$ lo que nos da: $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ //

Ej 4 $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2+\frac{3}{2}\pi)}{x^2+y^2} \overset{\text{polares}}{=} \lim_{r\to 0^+} \frac{\cos(r^2+\frac{3}{2}\pi)}{r^2} \overset{\text{R. L'Hôpital}}{=} \lim_{r\to 0^+} \frac{-\sin(r^2+\frac{3}{2}\pi)\cdot 2r}{2r} = \lim_{r\to 0^+} -\sin(r^2+\frac{3}{2}\pi) = -\sin(\frac{3}{2}\pi) = 1$

Ej 5 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Si $(x,y) \neq (0,0)$ f es continua por ser cociente de funciones continuas

Continuidad en $(0,0)$:

Sea $y = mx$, tenemos: $(m \in \mathbb{R})$ $\displaystyle \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\pm 1}{\sqrt{1+m^2}} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$\Rightarrow f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$