

Apuntes de análisis de variable compleja

2023

Apuntes de las clases de *Análisis de variable compleja* dadas por *Juan Matías Sepulcre Martínez* y transcritos a L^AT_EX por *Víctor Mira Ramírez* durante el curso 2023-2024 del grado en Física de la *Universidad de Alicante*.

Índice

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos Página 3

- 1.1 Definiciones básicas 3
- 1.2 Analiticidad 5
- 1.3 Algunas funciones elementales 5
Función exponencial — 5 • Función logarítmica — 6 • Función potencia — 7 • Funciones trigonométricas — 7

Capítulo 2

Integración compleja Página 9

- 2.1 Preliminares topológicos 9
- 2.2 Integración sobre caminos 9

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1: Número complejo

Un **número complejo** z es un par ordenado de números reales a, b escrito como $z = (a, b)$ en coordenadas cartesianas. Existe una notación equivalente, la forma binómica: $z = a + ib$ siendo $i = (0, 1)$.

El conjunto de los número complejos se denota por: $\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Comentario:

Siempre que $a = 0$ sea un número imaginario puro, y $b = 0$ sea un número real.

Definición 1.1.2: Conjugado

Llamamos conjugado de un número complejo al número denotado $\bar{z} = a - ib$, siendo $z = a + ib$. Geométricamente, podemos decir que el eje real actúa de 'espejo' del número en el plano.

Comentario:

Llamamos \mathbb{C} al cuerpo de los numeros complejos. \mathbb{C} es un cuerpo conmutativo, pero no totalmente ordenado. En cambio, cualquier ecuación algebraica tiene solución en los complejos. De todas formas, el teorema fundamental del álgebra nos asegura que tendrá n soluciones en los complejos

Comentario:

Cuando los coeficientes de una ecuación algebraica son reales, las soluciones complejas vienen por pares.

Teorema 1.1.1 Operaciones elementales

SUMA	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	
RESTA	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	
PRODUCTO	$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	(teniendo en cuenta que $i^2 = -1$)
DIVISIÓN	$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$	(multiplicando por el conjugado)

Comentario:

El elemento unidad es $1 + 0i$ y el elemento inverso es $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$. Para que un número complejo tenga elemento inverso, debe ser distinto de cero. El producto de un número complejo por su elemento inverso es la unidad.

Definición 1.1.3: Componentes de los complejos

Llamamos **módulo** del número complejo $z = a + bi$ a la cantidad $\sqrt{a^2 + b^2}$ denotada $|z|$

Llamamos **argumento** del número complejo $z = a + bi$ al ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la recta que contiene el vector (a, b) . Se denota $\text{Arg } z = \alpha$ y se expresa en radianes.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a \neq 0$$

Definición 1.1.4: Módulo

Llamamos **módulo** de un número complejo $z = a + bi$, y lo denotamos $|z|$, a la cantidad

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Definición 1.1.5: Argumento

Llamamos **argumento** de un número complejo $z = a + bi$ al ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la recta que contiene al vector. El argumento de z se representa por $\text{Arg}(z) = \alpha$, y se expresa normalmente en radianes.

$$\alpha = \arctan \frac{b}{a}, \text{ si } a \neq 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ si } a = 0, b > 0$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}, \text{ si } a = 0, b < 0$$

Si el ángulo se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi)$ lo llamaremos argumento principal.

Comentario:

lol

Comentario:

forma exponencial: el desarrollo en serie de la exponencial es: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ si introducimos un número complejo en la exponencial: $e^{iy} = 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots$

Si analizamos el valor de i^n en función de n , entonces vemos como la exponencial compleja queda ahora como:

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots\right) = \cos(y) + i \sin(y)$$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \text{ con } z = x + iy$$

1.2 Analiticidad

Definición 1.2.1: Función armónica conjugada

Sea $u: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en un abierto de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diremos que $v: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función armónica conjugada** de u en \mathcal{D} si v es armónica en \mathcal{D} y satisfacen las condiciones de *Cauchy-Riemann*, (o equivalentemente la función $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en $\{x + iy \in \mathbb{C}: (x, y) \in \mathcal{D}\}$)

Comentario:

Una función armónica es aquella que satisface la ecuación de Laplace.

Teorema 1.2.1

Sea $u(x, y): \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica de \mathcal{D} y consideramos v una región rectangular contenida en \mathcal{D} . Entonces existe una conjugada armónica de $u(x, y)$ en v .

1.3 Algunas funciones elementales

1.3.1. Función exponencial

Definición 1.3.1

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Teorema 1.3.1

1. $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
2. $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \quad z \in \mathbb{C}$
3. $\arg(e^z) = \{\operatorname{Im}(z) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
4. $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}} \quad z \in \mathbb{C}$
5. $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad x \in \mathbb{R}$
 $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi ki \quad z \in \mathbb{C}$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \quad x \in \mathbb{R}$
 $\nexists \lim_{|z| \rightarrow \infty} e^z = \infty \quad x \in \mathbb{R}$
7. e^x es entera (derivable en todo punto de \mathbb{C}) $(e^z)' = e^z$
8. $e^{z+\omega} = e^z \cdot e^\omega, \quad z, \omega \in \mathbb{C}$
 $(e^z)^n = e^{nz}, \quad n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$

Ejemplo 1.3.1 ($e^{iz} - e^{-iz} = 4i$)

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i \iff e^{iz} - e^{-iz} - 4i = 0 \iff e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$$

$$\text{Si } \omega = e^{iz} \implies \boxed{\omega^2 - 4i\omega - 1 = 0}$$

$$w = \frac{4i \pm \sqrt{-16 + 4}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = 2i \pm \sqrt{3} = 2 \pm \sqrt{3}i \implies \boxed{e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i}$$

1.3.2. Función logarítmica

Definición 1.3.2

Se introduce por la necesidad de solucionar ecuaciones como la anterior.

$$x = e^y \iff y = \log x, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}$$

Sea $z \in \mathbb{C} - 0$, definimos el logaritmo principal de z , y lo denotamos por $\log z$, como

$$\log z = \ln|z| + i \cdot \text{Arg}(z)$$

Vemos que $e^{\log z} = e^{\log|z| + \text{Arg}(z)} = e^{\ln|z|} e^{\text{Arg}(z)} = |z| e^{\text{Arg}(z)} = z$

El conjunto de todos los logaritmos de z será:

$$\log z = \{\ln|z| + i(\text{Arg}(z) + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 1.3.2

1. Si $z = x > 0 \Rightarrow \log z = \ln|z| + i \cdot \text{Arg}(z) = \ln x$
 $\log z = \{\ln x + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}\}$
2. Si $z = -x > 0 \Rightarrow \log z = \ln x - i \cdot (-\pi)$ (argumento de z)
 $\log z = \{\ln x + -(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}\}$
3. Si $z = ix, x > 0 \Rightarrow \log z = \ln x + i \frac{\pi}{2}$
 $\log z = \left\{ \ln x + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z} \right\}$

Comentario:

Retomando la ecuación del ejemplo anterior,

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i = \begin{cases} (2 + \sqrt{3})i \leftrightarrow iz = \log(2 + \sqrt{3})i \leftrightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) - i \ln(2 + \sqrt{3}) \\ (2 - \sqrt{3})i \leftrightarrow iz = \log(2 - \sqrt{3})i \leftrightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) - i \ln(2 - \sqrt{3}) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Teorema 1.3.2 Propiedades

1. $\log z$ es holomorfa en $\mathbb{C} - [-\infty, 0] \implies$ de hecho, no es continua en $(-\infty, 0]$
2. $\log_{\theta_0} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}, \arg(z) = \theta_0\}$
3. $e^{\log_{\theta_0} z} = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \arg(z) = \theta_0$ y $(\log_{\theta_0})' = \frac{1}{z}$
4. $\log_{\theta_0} e^z = z \quad \forall z = x + iy, \theta_0 \leq y < \theta_0 + 2\pi$ $z = x + iy, e^z = e^x e^{iy} \implies \log_{\theta_0} e^z = z$
cuando $y \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$

Definición 1.3.3

Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$, tomamos $z \neq 0, z = re^{i\theta}, r > 0, \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$ y entonces $\log_{\theta_0} z = \ln|z| + i\theta$

Si $\theta_0 = -\pi \implies \log_{\theta_0} z = \text{Log} z$

Si $\theta_0 = 0 \implies \log_0 z = \ln|z| + i\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

1.3.3. Función potencia

Definición 1.3.4: Potencia de exponente arbitrario

Sea $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, tomamos por definición z^α , llamada potencia de exponente arbitrario como el conjunto de todos los valores dados por:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} \quad (1.1)$$

Dohde $\log z$ representa el conjunto de todos los logaritmos de z .

Definición 1.3.5: Función exponencial general

Sea $a \in \mathbb{C} \setminus 0$, tomaremos por definición a^z , llamada función exponencial general como el conjunto de todos los valores dados por:

$$a^z = \exp(z \log a) \quad (1.2)$$

Donde $\log a$ es el conjunto de todos los logaritmos de a .

Ejemplo 1.3.3

- $(-2)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \log(-2)} = e^{\frac{1}{2}(\ln 2 + i(\pi + 2\pi k))}$, con $k \in \mathbb{Z}$ (tomando la primera definición, $z = -2$ y $\alpha = \frac{1}{2}$)
- $2^i = e^{i \log(2)} = e^{i(\ln 2 + 2\pi k i)} = e^{-2\pi k} e^{i \ln 2} = e^{-2\pi k(\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2))}$ con $k \in \mathbb{Z}$
- $(-1)^{\frac{1}{\pi}} = e^{\frac{1}{\pi} \log(-1)} = e^{\frac{1}{\pi}(\pi + 2\pi k i)} = e^i \cdot e^{2ki} = e^{(2k+1)i}$, con $k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 1.3.4 (Potencia de exponente entero)

Sea $\alpha \in \mathbb{Z}$, entonces $f(z) = z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\ln|z| + i(Arg(z) + 2\pi k))} = e^{\alpha \ln|z|} \cdot e^{i\alpha Arg(z)} \cdot e^{i\alpha 2\pi k} = |z|^\alpha \cdot e^{i\alpha Arg(z)}$ función univaluada

Comentario:

Cuando tomemos $k = 0$ en la función logarítmica, entonces obtenemos la denominada **rama principal**.

Ejemplo 1.3.5 (Función multiforme/aplicación multivaluada)

$f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ con $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ Tomando $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $-\pi \leq \theta < \pi$ La llamada rama principal de $z^{\frac{1}{2}}$ es $f_1(z) = e^{\frac{1}{2}(\ln(r) + i\theta)} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{\theta}{2}i}$ Otra rama con el i ? $\arg(z) = \pi$ viene dada por $-f_1(z) = f_2(z) = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{\theta+2\pi}{2}i}$

Si $k = 2 \rightarrow e^{\frac{1}{2}(\ln r + i(\theta + 4\pi))} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot e^{2\pi i} = f_1(z)$

1.3.4. Funciones trigonométricas

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \quad \text{es holomorfa en } \mathbb{C} \text{ excepto en } \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

Hiperbólicas

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

Teorema 1.3.3 Propiedades

1. $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
2. $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$
3. $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
4. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
5. $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi i, n \in \mathbb{Z}$
6. $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}i, n \in \mathbb{Z}$
7. $\sinh(z) = -i \sin(iz)$
8. $\cosh(z) = \cos(iz)$

Comentario:

Comparación con el caso real:

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$
- $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Capítulo 2

Integración compleja

2.1 Preliminares topológicos

Definición 2.1.1: Entorno perforado

Llamamos **entorno perforado** de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ a un abierto de la forma $\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$, con $\epsilon > 0$

Definición 2.1.2: Tipos de conjuntos

- Diremos que dos conjuntos A y B de \mathbb{C} están **espaciados** si $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$. Siendo \bar{A} la clausura, la adherencia de A .
- Diremos que un conjunto del plano es **conexo** si no puede ser escrito como unión de dos subconjuntos no vacíos y separados.
- Diremos que un conjunto $P \in \mathbb{C}$ es **poligonalmente conexo** si cada par de puntos de P pueden ser unidos mediante una poligonal contenida en P . (una poligonal es una unión finita de segmentos).
- Un conjunto $E \in \mathbb{C}$ es **estrellado** si existe un punto $a \in E$ tal que $[a, z] \subset E \quad \forall z \in E$
- Un conjunto $C \in \mathbb{C}$ es **convexo** si $[z, w] \subset C \quad \forall z, w \in C$ (cualquier segmento formado por puntos del conjunto está dentro del conjunto).
Nota: Sea $U \in \mathbb{C}$ un conjunto abierto, entonces U es conexo si y sólo si es poligonalmente conexo.
- Llamamos **simplemente conexo** al conjunto $S \subset \mathbb{C}$ del cual cada curva cerrada simple (sin autointersecciones) en S puede contraerse dentro del conjunto hasta ser un punto (no tiene agujeros).

2.2 Integración sobre caminos

Definición 2.2.1: Curva

Llamamos **curva** a una aplicación continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ con $a < b$, tal que a un número real $t \in [a, b]$ le corresponde un número complejo $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones reales y continuas.

- La **traza o trayectoria** de la curva $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t): a \leq t \leq b\}$ será representado por γ^*
- Diremos que la curva es **cerrada** cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$

Definición 2.2.2: Camino

Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es **diferenciable** cuando γ es derivable en todo punto de $[a, b]$. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es **suave** si es diferenciable (o de clase $C^1([a, b])$), si γ es derivable en $[a, b]$ y su derivada es continua. Llamamos **camino** a una curva suave a trozos (diferenciable con continuidad a trozos).

Comentario:

Los casos de curvas rectificables (aquellas curvas parametrizadas por $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, con $t \in [a, b]$, para las que existe:

$$\sup \left\{ \sum_{j=1}^n \sqrt{(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2} \right\}$$

Con P en el conjunto de posibles particiones de $[a, b]$. En estos casos, la longitud de la curva se calcula como:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)} dt$$

Definición 2.2.3: Integral compleja

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino y f una función continua en $\gamma^* \in \mathbb{C}$, definimos la **integral compleja** de f a lo largo γ por:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Nota: Cuando no se diga nada, se supondrá que el sentido de recorrido sobre un camino cerrado será el antihorario.

Ejemplo 2.2.1 ($\int_{\gamma} \bar{z} dz$, donde γ^* es el segmento $[1 + i, 2 + 4i]$)

$$\gamma(t) = (1 - t)(1 + i) + t \cdot (2 + 4i) \implies \gamma'(t) = -(1 + i) + 2 + 4i = 1 + 3i \quad \text{con } t \in [0, 1].$$

Si separamos en parte real y imaginaria nos queda:

$$\begin{aligned} \gamma(t) = 1 + t + i(1 + 3t) &\implies \int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^1 (1 + t - i(1 + 3t))(1 + 3i) dt = \int_0^1 (1 + t - i(1 + 3t) + 3i + 3it + 3 + 9t) dt = \\ &= \int_0^1 (4 + 10t + 2i) dt = [(4 + 2i)t + 5t^2]_0^1 = 4 + 2i + 5 = 9 + 2i \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.2 ($\int_{\gamma} \bar{z} dz$, donde γ_2 es el trozo de parábola que une $1 + i$ con $2 + 4i$)

$$\gamma(t) = t + it^2 \implies \gamma'(t) = 1 + 2it \quad \text{con } t \in [1, 2] \implies$$

$$f(\gamma_2(t)) = t - it^2 \implies \int_{\gamma_2} \bar{z} dz = \int_1^2 (t - it^2)(1 + 2it) dt = 9 + \frac{7}{3}i$$

Teorema 2.2.1 Propiedades básicas de integrabilidad

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino, y consideremos dos funciones continuas f y g continuas en γ^* , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$
2. $\int_{\gamma} cf(z) dz = c \int_{\gamma} f(z) dz \quad \forall c \in \mathbb{C}$
3. $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$, donde $-\gamma$ es el camino opuesto a γ : $(-\gamma)(t) = \gamma(b + a - t)$ con $t \in [a, b]$
4. Si β es otro camino tal que $\gamma + \beta$ está definido (el punto inicial de β coincide con el punto final de γ) y la función f es también continua en β^* y $(\gamma + \beta)^*$, entonces:

$$\int_{\beta+\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\beta} f(z) dz$$

5. La integral sobre un camino es invariante bajo una parametrización.

Teorema 2.2.2 Propiedades

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino y f una función continua en γ^* entonces $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq M_f(\gamma)L(\gamma)$ siendo $M_f(\gamma) = \max\{|f(z)|, z \in \gamma^*\}$ y $L(\gamma)$ la longitud de γ .

Prueba

$$|\int_{\gamma} f(z) dz| = |\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq M_f(\gamma) \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M_f(\gamma)L(\gamma)$$

Ejemplo 2.2.3

Si $\gamma(t) = 2e^{it}$ para $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ entonces $|\int_{\gamma} \frac{1}{z^3+1} dz| \leq \frac{2\pi}{21} \iff \frac{1}{|z^3+1|} \leq \frac{1}{|z^3|+1} \leq \frac{1}{8-1} = \frac{1}{7} \quad \forall z \in \gamma^*$

Usando la propiedad $|z^3+1| \geq |z^3|-1$.

$$\text{Finalmente: } |\int_{\gamma} \frac{1}{z^3+1} dz| \leq \frac{1}{7} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{21}$$

Definición 2.2.4: Primitiva compleja de f

Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto abierto U , diremos que $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una primitiva de f en U si F es holomorfa en U y $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in U$.

Ejemplo 2.2.4

Tomando la función $f: U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{1}{z}$, entonces $F(z) = \text{Log} z + C$ con $c \in \mathbb{C}$ es una primitiva de f en U .

Teorema 2.2.3 Extensión del 2º Teorema Fundamental del Cálculo

Supongamos que $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$ y que F es una primitiva de f en U . Si $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ es un camino en U , entonces:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z) \Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}$$

En particular, bajo las hipótesis anteriores tenemos que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall \gamma$ camino cerrado en U .

Prueba

Definamos $G(t) = F(\gamma(t))$ con $t \in [a, b]$, que es una función continua en $[a, b] \implies G'(t) = F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ (excepto a la suma, una cantidad finita de puntos).

Por el 2º TFC, tenemos que: $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b G'(t) dt = G(b) - G(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Corolario 2.2.1

Supongamos que $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en un conjunto abierto y conexo U y además $f'(z) = 0 \quad \forall z \in U$, entonces f es constante en U .

Prueba

Tomamos $F(z) = f(z)$: Como $f'(z) = 0$ es continua en U , tenemos que $0 = \int \gamma f'(z) dz = f(z_2) - f(z_1) \quad \forall z_1, z_2 \in U$.
 γ une z_1 y $z_2 \Rightarrow f$ es constante.

Ejemplo 2.2.5

Si γ representa cualquier camino que conecte los puntos 0 y $1+i$, por el teorema anterior:

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{2}{3}(-1+i)$$

Ejemplo 2.2.6

$\int_{\gamma} P(z) dz = 0$ cuando γ es un camino cerrado y P es un polinomio.

Teorema 2.2.4 Independencia del camino

Supongamos que $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua en un conjunto abierto y conexo $U \subset \mathbb{C}$, las siguientes propiedades son equivalentes:

- $\int_{\gamma} f(z) dz$ es independiente del camino (por dos puntos prefijados).
- $\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall \gamma$ camino cerrado en U .
- f admite una primitiva en U .

Comentario:

Una propiedad importante de las integrales de línea para el caso de campos vectoriales es la vinculada con los llamados **campos conservativos** (los que admiten función potencial). El principio físico que hay detrás de estos campos es que el trabajo realizado cuando una partícula recorre la trayectoria de la curva sometida al campo de fuerzas es igual del potencial de campo entre los extremos de la trayectoria.

En el caso de la integral compleja, el valor depende generalmente del camino elegido, sin embargo, el teorema anterior afirma que la independencia del camino se puede caracterizar a través de la existencia de una primitiva del integrando continuo f en el conjunto U , esto es, la existencia de una función F holomorfa en U con $F' = f(z) \quad \forall z \in U$. Además, sabemos que $F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = f(z)$.

Por tanto, $\overline{F'(z)} = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = U(x, y) - iU(x, y)$ y deducimos que $\Delta U = \bar{f}$, con $\bar{f} = (u, -v)$