Francisca Vera Juan Moll

MOVIMIENTO EN UN CAMPO CENTRAL

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En esta práctica vamos a analizar el movimiento de dos cuerpos, cada uno de los cuales ejerce sobre el otro una fuerza central (en ausencia de fuerzas externas). Los campos centrales de fuerza son conservativos, conservan el momento angular y solo dependen de la distancia. A partir de las ecuaciones mencionadas en el guion de la práctica (fuerza gravitatoria, potencial gravitatorio y momento angular entre otros) trataremos de responder las cuestiones siguientes con la ayuda del código elaborado en Python.

CUESTIÓN 1

Sitúa el satélite de forma que haga una órbita de radio medio aproximadamente 300 km sobre la superficie terrestre. Dibuja el potencial efectivo en ese caso e indica en el gráfico la distancia mínima y máxima al centro de la tierra.

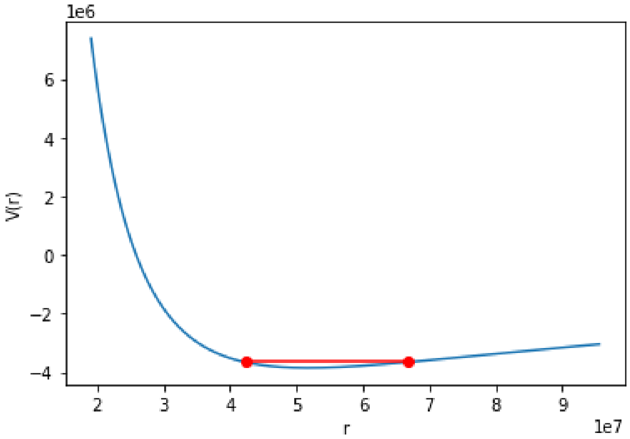
Para empezar a programar primero hemos definido las constantes que vamos a usar como las siguientes:

```
MT = 5.972*(10**(24))                    #Masa de la Tierra
Rt = 6371000                             #Radio de la Tierra
Ms = 1000                                #La masa típica de un satélite
G = 6.67*(10**(-11))                     #Constante de gravedad universal
mr = Ms*MT/(Ms+MT)                       #Masa reducida
v0 = 3400                                #Velocidad inicial
h = 300000                               #Altura inicial
R = h0 + RT                              #Radio de órbita inicial
L = mr*r0*v0*np.sin(np.pi/2)             #Momento angular
E = ((1/2)*mr*(v0**2)-(G*Ms*MT)/r0)/Ms   #Energía mecánica
```

Para poder hacer la gráfica hemos partido de la ecuación del potencial efectivo proporcionada en el guion, es decir:

$$Veff = \frac{L^2}{2\mu^2 r^2} - \frac{GMm}{\mu r}$$

Obtenemos:



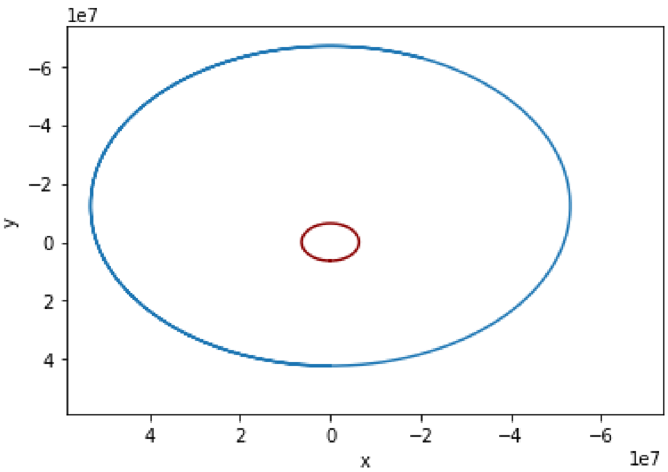
PERIGEO: 42381000 m

APOGEO: 66671770 m

CUESTIÓN 2:

Calcula la órbita resolviendo numéricamente las ecuaciones de movimiento. Debes obtener r(t) y v(t). Utiliza para ello la rutina odeint de Python. Dibuja la órbita que has obtenido y compárala con el resultado analítico que viste en clase.

Hemos resuelto numéricamente las ecuaciones de movimiento mediante odeint en Python con las mismas constantes mencionadas anteriormente (que se utilizarán a lo largo de la práctica) obteniendo la siguiente gráfica donde se representa la órbita obtenida.



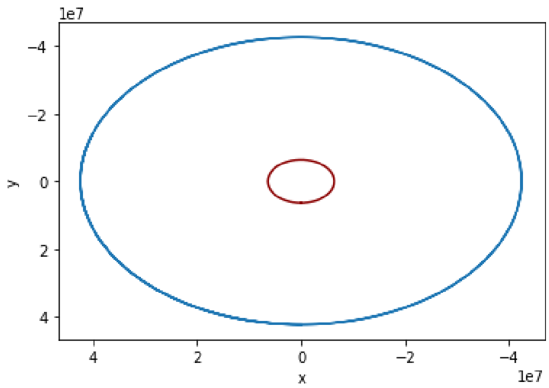
Comparada con los resultados vistos en clase vemos que es una órbita elíptica (lo cual coincide con lo visto en la gráfica del potencial, ya que la energía mecánica corta dos puntos del potencial).

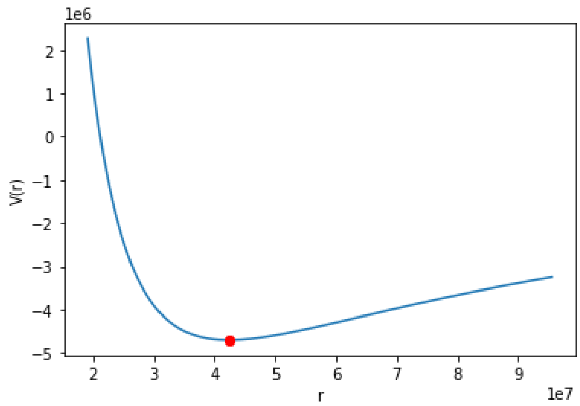
CUESTIÓN 3:

Varía las condiciones iníciales para representar los tres tipos de trayectoria que pueden darse en este problema. Siempre dibuja el potencial efectivo, situando la energía total en el gráfico.

Las gráficas de los anteriores apartados se han realizado programando el cuerpo en un punto =(R,0) y como velocidad (0,v). Por tanto, la condición inicial que hemos tenido que variar para identificar los diferentes tipos de órbita es la velocidad. A continuación, encontramos las gráficas de la órbita y del potencial para cada velocidad (y el nombre respectivo que recibe la órbita):

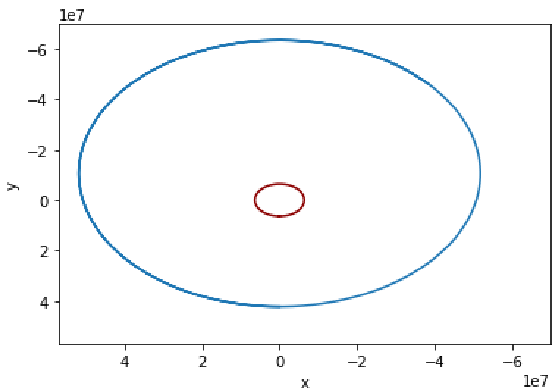
- **ÓRBITA CIRCULAR** $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

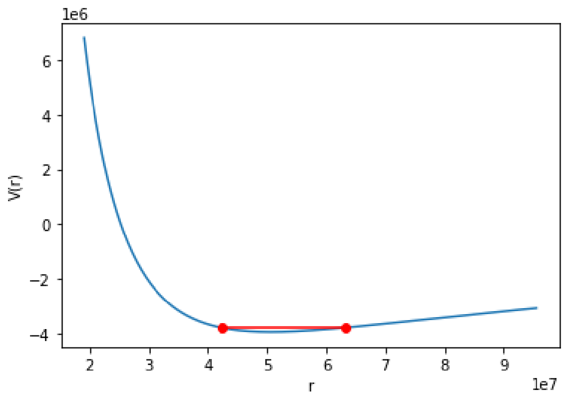




Podemos ver en la gráfica del potencial que para la órbita circular encontramos un único punto de equilibrio estable.

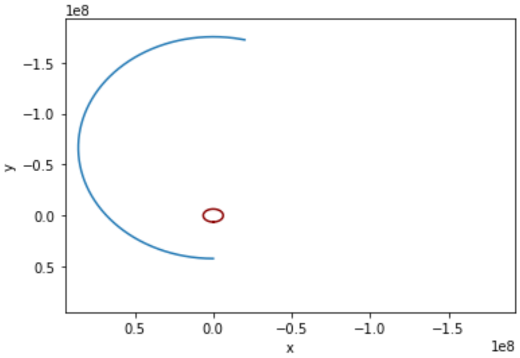
- **ÓRBITA ELÍPTICA** $v = \sqrt{\frac{GM}{R \cdot f}}$ con 1< f < 2

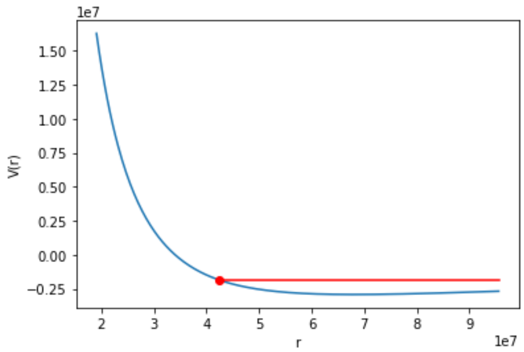




En este caso observamos que existen dos puntos con los que el potencial coincide con la energía mecánica. Estos se llaman puntos de retorno y en este caso serán el perigeo y el apogeo. El satélite solo se moverá en la región que existe entre estos puntos con un movimiento armónico simple.

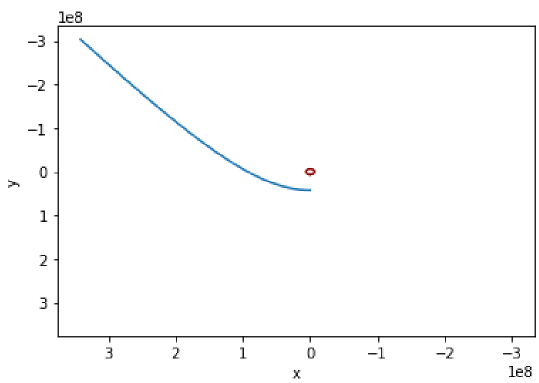
- **ÓRBITA PARABÓLICA** $v = \sqrt{\frac{GM}{R \cdot 2}}$

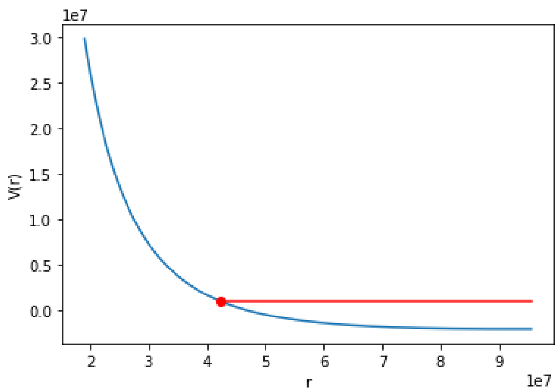




Sabemos que la gráfica del potencial tenderá asintóticamente a 0 cuando r tienda a infinito. En este caso en concreto podemos ver que solo hay un punto en el que la energía mecánica coincide con algún valor del potencial y luego tiende asintóticamente a la linea de potencial cuando r tiende a infinito. En el caso de la órbita vemos que no es acotada.

- **ÓRBITA HIPERBÓLICA** $v = \sqrt{\frac{GM}{R \cdot f}}$ con $2 < f$





En este caso vemos más claramente que la órbita no es acotada. En cuanto a la gráfica del potencial, solo tiene un punto de retorno y vemos que la energía está por encima de la linea de potencial cuando r tiende a infinito.

Podemos clasificar las 4 órbitas existentes de 3 formas distintas: según su energía, su excentricidad o su velocidad. La excentricidad viene definida por:

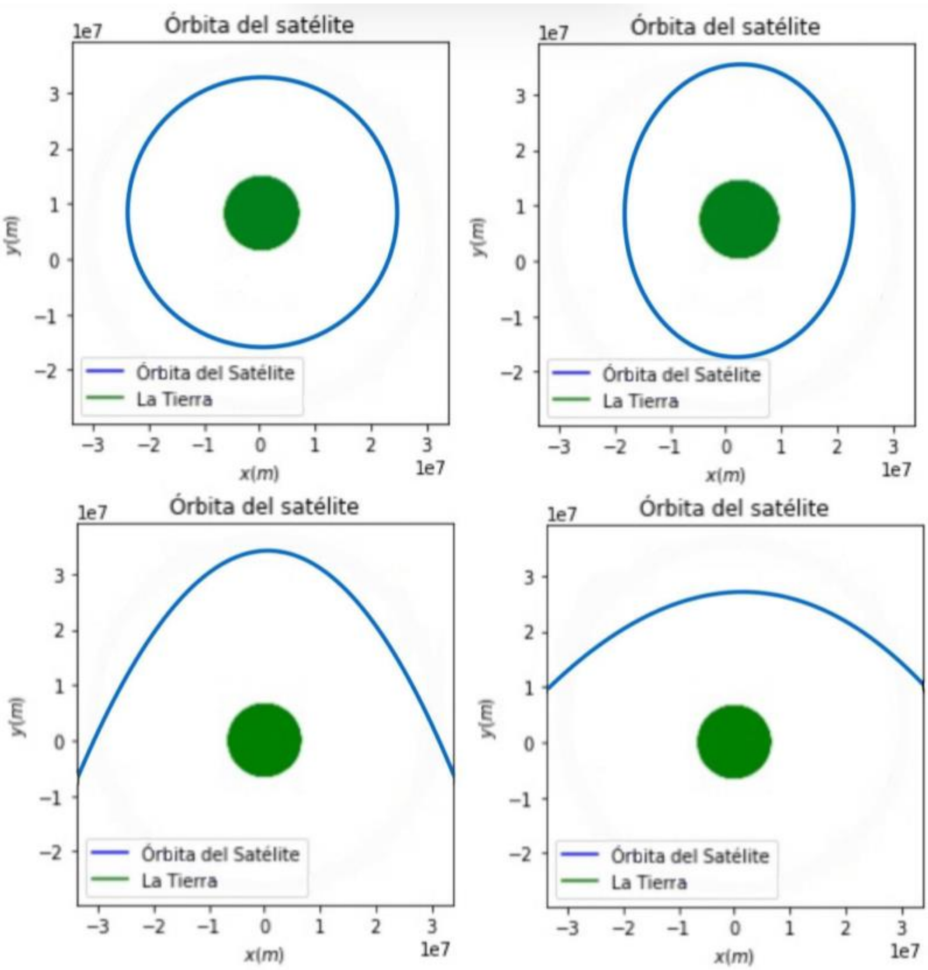
$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(GMm)^2}}$$

	ENERGÍAS (J)	EXCENTRICIDAD	VELOCIDAD (m/s)
CIRCULAR	$E_{total} = E_{mínima}$	$\epsilon = 0$	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$
ELÍPTICA	$0 > E_{total} > E_{mínima}$	$0 < \epsilon < 1$	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R \cdot 1'5}}$
PARABÓLICA	$E_{total} = 0$	$\epsilon = 1$	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R \cdot 2}}$
HIPERBÓLICA	$E_{total} > 0$	$\epsilon > 1$	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R \cdot 3}}$

CUESTIÓN 4:

Haz una animación de cada trayectoria, de tal manera que se vea la trayectoria del satélite a medida que avanza el tiempo.

De nuevo modificando las velocidades en el código obtenemos las siguientes figuras: (se omite la parte de la animación a causa de su complejidad)



CUESTIÓN 5:

En el caso de las órbitas acotadas, resuelve las ecuaciones considerando el potencial que obtuviste en el problema 3 del boletín 1 y haz una animación de lo que sucede en este caso.

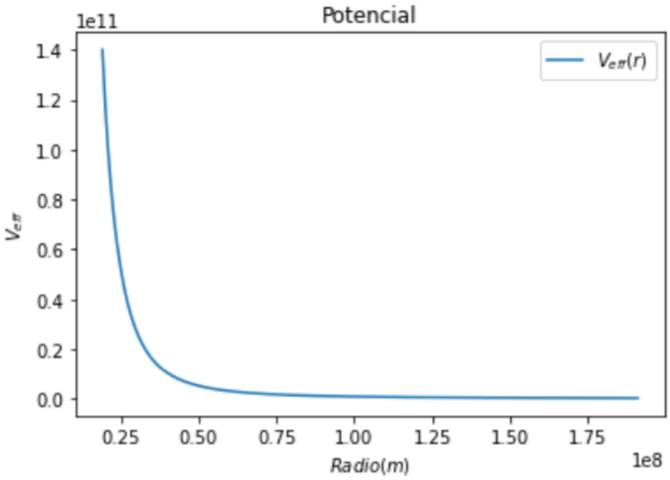
El ejercicio 3 del boletín 1 nos dice: "Demostrar que si una partícula, sometida a la acción de una fuerza central atractiva dirigida hacia un punto de su órbita, describe una circunferencia, la fuerza es inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia al centro de fuerzas.". La fuerza que obtuvimos al resolver el ejercicio fue la siguiente:

$$F = -\frac{8 \cdot R^2 \cdot L^2}{m \cdot r^5}$$

A partir de la fuerza obtenemos el potencial por definicion:

$$U(r) = \int F dr \, + \frac{L^2}{2 \cdot m \cdot r^2}$$

Haciendo la gráffica de este potencial en concreto obtenemos:



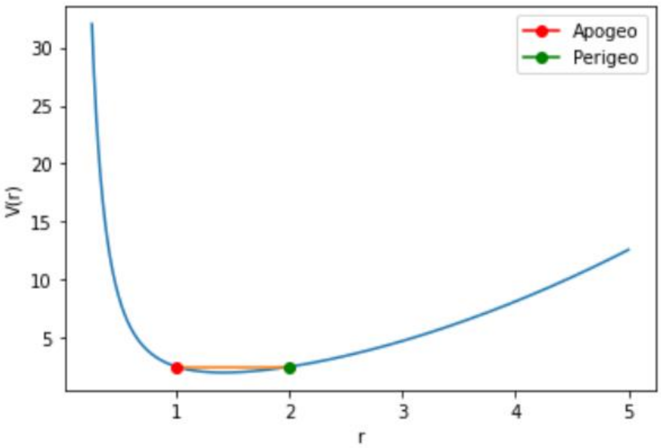
CUESTIÓN 6:

Repite el análisis para el potencial de un muelle. ¿Cuántos tipos de trayectoria hay en este caso?

Para estudiar el potencial de un muelle utilizamos el desarrollo limitado de orden dos del potencial efectivo siguiente:

$$V_{eff}(r) = V_{eff}(r_{min}) + 0.5k(r - r_{min})^2$$

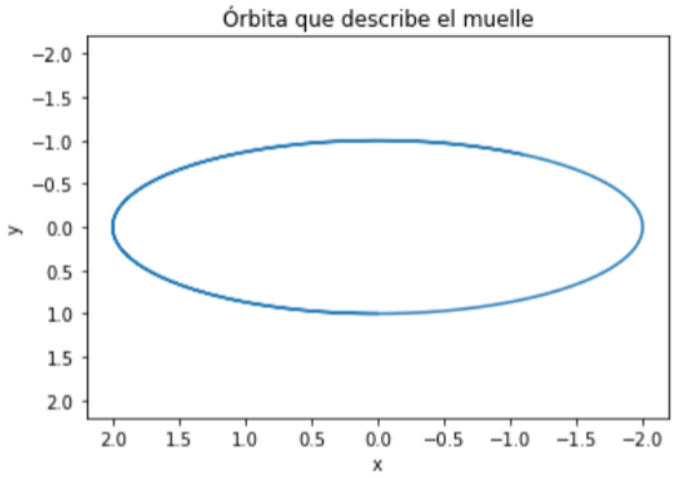
Sabemos que el movimiento de un muelle es oscilatorio, por lo tanto, podemos describir el potencial de una órbita ligeramente perturbada como el de un muelle. Tomando las siguientes constantes obtenemos el resultado:



K=1

m=1kg

Entonces, graficando la trayectoria del muelle sabemos que tiene una trayectoria elíptica:



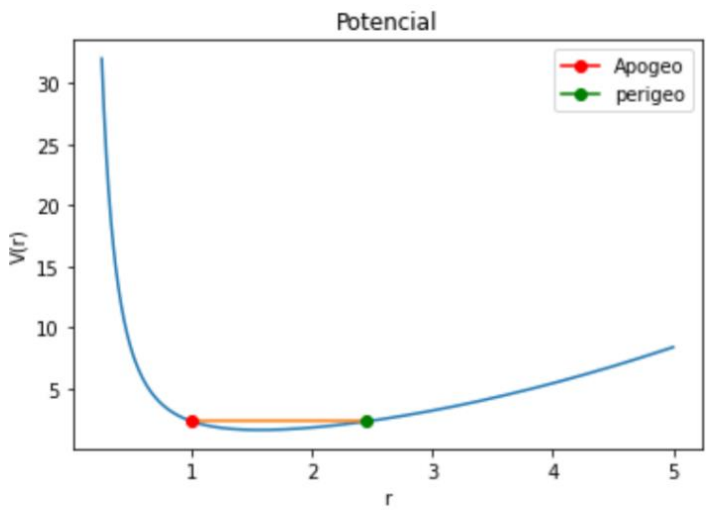
CUESTIÓN 7:

Por último, agrega al potencial del muelle un término proporcional a r3. Haz una animación de la trayectoria en este caso y explica lo que sucede.

Como en el apartado 4, omitiremos la parte de la animación por su complejidad. Para este caso añadiremos al potencial del muelle un término proporcional a r^3, entonces tenemos la expresión siguiente:

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{3}kr^3$$

Sustituyendo esta misma expresión en el programa utilizado para graficar en la cuestión anterior obtenemos:



Podemos observar que es similar al resultado anterior, sin embargo, la gráfica obtenida de la trayectoria ha sido distinta:

Podemos ver que existe un gran cambio, ya que esta no describe un movimiento elíptico simple. Tenemos que aunque los radios sigan siendo los mismos, la órbita va rotando a medida que avanza el tiempo.