Hoja 4 MAEDO.

Ejercicio 1. *Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones reales y continuas tales que $(f'_n)_n$ es uniformemente acotada. Demostrar que $(f_n)_n$ es equicontinua.*

Ejercicio 2. *Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones reales integrables, uniformemente acotada en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $F_n(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in [0,1]$. Demostrar que $(F_n)_n$ es equicontinua en $[0,1]$.*

Ejercicio 3. *Obtener el dominio de la solución que proporciona el Teorema de Picard (I_1) del problema de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & y^2 \\ y(0) & = & -1, \end{array} \right.$$

Dar un intervalo de longitud infinita I_2, tal que $I_1 \subset I_2$ y donde exista solución.

Ejercicio 4. *Usar el Teorema de Picard para demostrar que el problema de Cauchy*

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & x^2 + e^{-y^2} \\ y(0) & = & 0, \end{array} \right.$ *, admite una única solución maximal definida en todo $\mathbb{R}$.*

2. $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & y^3 + e^{-x^2} \\ y(0) & = & 1, \end{array} \right.$ *, admite una única solución definida en $[\frac{-1}{9}, \frac{1}{9}]$ con $y(x) \in [0,2]$, para todo $x \in [\frac{-1}{9}, \frac{1}{9}]$.*

Ejercicio 5. *Dar el intervalo máximo de definición, usando el Teorema de Picard, de la única solución del Problema de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \frac{y}{1+x^2+y^2} \\ y(0) & = & 0, \end{array} \right.$$

Ejercicio 6. *Sean $y_1, y_2 : [x_0, x_0+\delta] \to \mathbb{R}$ dos soluciones del problema de Cauchy* $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0, \end{array} \right.$ *, Demostrar que si f es decreciente en la segunda variable entonces $y_1(x) = y_2(x)$ para todo $x \in [x_0, x_0+\delta]$.*

Ejercicio 7. *Estudiar los puntos de unicidad local y global, así como los intervalos maximales de las soluciones de $y' = \sqrt{|y|}$.*

Ejercicio 8. *Sea $f(x,y) = \sin x \sin^2 y \log x$, definida en $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Consideramos el problema de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(x,y) \\ y(1) & = & 2021, \end{array} \right.$$

1. *¿Existe solución a la derecha del 1?*
2. *¿Existe solución maximal definida en todo $\mathbb{R}$?*

Ejercicio 9 (Prueba del Teorema de Peano)**.** *Demostrar que si $f(x,y)$ está definida y es continua en $[x_0, b] \times \mathbb{R}$, entonces el problema de Cauchy* $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0, \end{array} \right.$ *tiene al menos una solución. La demostración se este Teorema se puede hacer siguiendo los siguientes apartados (la realizaremos en $[0,1]$).*

1. *Definimos $y_1(x) = y_0$, $x \in [0,1]$ y ahora definimos por recurrencia*

$$y_n(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} y_0 & si & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ y_0 + \int_0^{x-\frac{1}{n}} f(t, y_n(t))dt & si & x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}], i = 1, 2 \dots, n-1 \end{array} \right. .$$

   Dar explícitamente los tres primeros términos de la sucesión.

2. *Demostrar que (y_n) es uniformemente acotada en $[0,1]$.*

3. *Demostrar que* (y_n) *es equicontinua en* $[0,1]$.

4. *Concluir el resultado.*

Ejercicio 10. *Sea* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de clase* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, *verificando que* $f(m)=0$ *para todo* $m\in\mathbb{Z}$. *Demostrar que todas las soluciones maximales de la ecuación diferencial* $y'=f(y)$ *están acotadas y defindas en todo* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 11. *Sea la ecuación diferencial* $y'=x\sin y$, *se pide*

1. *Demostrar utilizando el teorema de Picard que existe una única solución del problema de Cauchy con* $y(x_0)=y_0$, *definida en todo* $\mathbb{R}$ *para cualquier punto* $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

2. *Demostrar que si* $y(0)\in(0,\pi)$ *entonces* $y(x)\in(0,\pi)$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 12. *Consideremos el Problema de Cauchybeginejercicio Consideramos el problema de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{ccc} y' & = & f(x,y) \\ y(0) & = & y_0, \end{array}\right. ,\forall(x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R},$$

donde

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ccc} 2x & si & y\leq 0, \\ 2x-\frac{4y}{x} & si & 0<y<x^2, \\ -2x & si & x^2\leq y, \end{array}\right.$$

se pide

1. *Demostrar que exite solución.*

2. *Partiendo de* $y_0=0$ *obtener la sucesión de las iteradas de Picard y estudiar su convergencia.*

3. *Deducir que* f *no el localmente Lipschitz en el origen de coordenadas.*

Ejercicio 13. *Sea* $y'+p(x)y=q(x)$, *donde* p *y* q *son funciones continuas en* $[a,b]$. *Demostrar, usando el Teorema de Picard, la existencia de una única solución del problema de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{ccc} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0, \end{array}\right. ,\forall(x_0,y_0)\in[a,b]\times\mathbb{R},$$

Ejercicio 14. *Sea* $(x_0,y_0)\in R^2$. *Estudiar la existencia y unicidad local del problema de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{ccc} y' & = & \frac{2y}{x}, \\ y(x_0) & = & y_0, \end{array}\right. ,\forall(x_0,y_0)\in[a,b]\times\mathbb{R},$$

Ejercicio 15. *Demostrar que la única solución maximal definida en todo* $\mathbb{R}$ *de la ecuación diferencial*

$$y'=y^2+\sin^2(xy),$$

es la función nula.