DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE.
Asignatura: ELECTROMAGNETISMO I - 2º Curso Grado en Física Curso 2020-21

EXAMEN FINAL C1: 10/6/2020

CUESTIONES

1. (2 puntos) Sea un sistema con simetría cilíndrica infinitamente largo, consistente en: i) un hilo conductor de sección despreciable colocado en el eje de los cilindros; ii) material dieléctrico IHL de constante dieléctrica k_1 hasta un valor de radio del cilindro R1; iii) material dieléctrico IHL de constante dieléctrica k_2 ($k_2 > k_1$) en la región entre R1 y R2 (R2>R1); iv) material conductor de grosor despreciable en R2; v) vacío para radio mayor que R2. Ambos materiales conductores se conectan mediante unos cables a una fuente de alimentación de corriente continua, aplicando una diferencia de potencial de V voltios. El borne negativo de la fuente está conectado al hilo conductor.
a) ¿Existe alguna región donde el campo eléctrico sea nulo? Decir dónde y por qué. ¿En qué regiones o puntos el potencial es nulo?
b) Dibuja esquemáticamente como varían (especifica el tipo de dependencia) los módulos de E y D en función del radio cilíndrico. Justificar la continuidad o discontinuidad de los campos en las interfases entre los distintos medios.
c) Decir que tipos de densidades de carga, y su signo, hay en cada región del espacio.

2. (2 puntos) Sea un material magnético situado en una región del espacio en la que hay una inducción magnética externa de forma desconocida. Debido a ésta, el material se magnetiza y se realiza un experimento que permite determinar el vector magnetización **M**.
a) Discute si sería posible determinar el vector inducción magnética **Bext** que lo ha magnetizado y si fuera posible decir cómo.
b) Considera un punto exterior al material ¿el valor de inducción en ese punto vendrá dado por **Bext** evaluado en ese punto? ¿O se verá afectado por la presencia del material magnético? Si consideras que la respuesta correcta es la segunda, indica si sería posible determinarlo y de qué modo.

PROBLEMAS

Las magnitudes en negrita son vectoriales

1. **(2 puntos)** Dos esferas metálicas concéntricas de radios R y 2R se ponen ambas a potencial cero y en el espacio comprendido entre ambas (de constante dieléctrica ε_0) se introduce una distribución de carga cuya densidad viene dada por:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) coul/m^3$$

Donde *r* es la distancia al centro de las esferas.

a) Mediante la resolución de la ecuación de Laplace y/o Poisson, determinar el potencial electrostático en la región entre las dos esferas.

b) Determinar los campos E y D en dicha región, así como las densidades de carga y las cargas (si existen) en la esferas metálicas.

2. **(1.5 puntos)** Por una espira circular de radio a circula una intensidad de corriente *I*.

a) A partir de la ley de Biot y Savart demuestra que la inducción magnética **B** en un punto arbitrario de su eje de revolución (tomado en la dirección z) viene dada por:

$$\boldsymbol{B}(z) = \left(\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\right)\boldsymbol{u_z}$$

b) Supón ahora una espira por la que circula una corriente *I*. Determinar para que valor de la relación a/z el módulo de B tendría un valor máximo y obtener el valor de éste.

3. **(2.5 puntos)** Sea un tubo cilíndrico muy largo de un material lineal de susceptibilidad magnética χ_m y de radio interior a y exterior b (para radio menos que a hay vacío). En el eje del tubo hay un hilo recto muy largo por el que circula una corriente *I.*

a) Empleando la Ley de Ampere para el campo **H**, obtén el valor de éste en las diferentes regiones del espacio y, a partir de él, determinar el campo **B** y la magnetización **M**. Dibuja esquemáticamente como varían sus módulos en función del radio y verifica que se cumplen las condiciones de contorno en las interfases.

b) Determina las densidades de corriente de magnetización existentes en el material magnético y dibuja con flechas esquemáticamente en qué dirección y sentido estarían dirigidas y en qué zonas

c) Utiliza ahora la Ley de Ampere para el campo **B** para determinar su valor en el material magnético y comprueba que obtuviste en el apartado a) a partir de **H**.

SOLUCIONES EXAMEN FINAL EM 11/06/2021

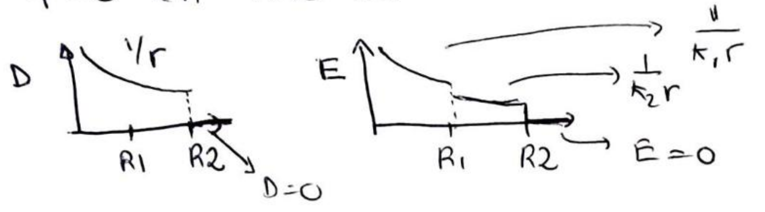
CUESTIONES

Se indican las soluciones esquemáticamente. El alumno en el examen debe justificar adecuadamente las respuestas

$\boxed{1}$ a) $\vec{E}=0$ para $r > R2$ siendo r la distancia al eje del cilindro

$\phi = 0$ en hilo conductor

b)



Poner cond. contorno y justificar saltos en base a existencia de dens. carga sup en interfaces

c) Volumétricas $\begin{cases} \text{Libre } \rho_f = 0 \text{ en todo lugar} \\ \text{Ligada } \rho_b \text{ podría ser } \neq 0 \text{ en dielec. porque hay } \vec{P}, \\ \text{pero } = 0 \text{ porque } \rho_f = 0 \text{ y los materiales son IHL} \end{cases}$

Superficiales $\begin{cases} \text{Libres} \begin{cases} \text{lineal } \lambda_f < 0 \text{ en hilo} \\ \text{sup } \sigma_f > 0 \text{ en conductor en R2} \end{cases} \\ \text{Ligadas} \begin{cases} \text{Dielec 1} \begin{cases} \sigma_b > 0 \text{ al lado del hilo} \\ \sigma_b < 0 \text{ pegado a interfase R1} \end{cases} \\ \text{Dielec. 2} \begin{cases} \sigma_b > 0 \text{ pegado a interfase R1} \\ \sigma_b < 0 \text{ '' '' '' R2} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$

$\boxed{2}$ a) Responder en base a relaciones constitutivas $M(B_{ext})$ ó $M(H_e)$. En general esta relación es compleja a través de χ_m que es un tensor. Si los medios son IHL si existe una relación

b) $\vec{B}_{TOT} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{ind}$

↳ Debido al material magnetizado

Conocido $\vec{M}$ se determina $\vec{J}_m$ y $\vec{K}_m$ y con estos se determina Bind con

$$\vec{B}_{ind} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}_m \times \vec{u}_R}{R^2}\, d\tau + \int_S \frac{\vec{K}_m \times \vec{u}_R}{R^2}\, da$$

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad y \quad \vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{n}$$

SOLUCIONES EXAMEN FINAL EM 11/06/2021 ①

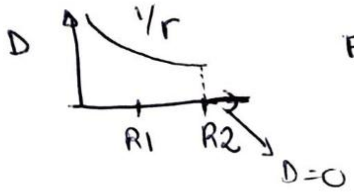
CUESTIONES

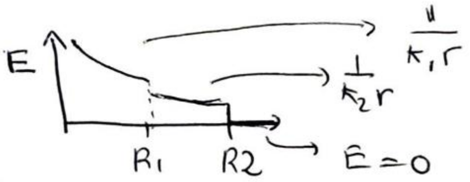
Se indican las soluciones esquemáticamente. El alumno en el examen debe justificar adecuadamente las respuestas

1 a) $\vec{E}=0$ para $r>R2$ siendo r la distancia al eje del cilindro

$\phi=0$ en hilo conductor

b)





Poner cond. contorno y justificar saltos en base a existencia de dens. carga sup en interfaces

c) Volumétricas
- Libre $\rho_f=0$ en todo lugar
- Ligada ρ_b podría ser $\neq 0$ en dielec. porque hay $\vec{P}$, pero $=0$ porque $\rho_f=0$ y los materiales son IHL

Superficiales
- Libres
  - lineal $\lambda_f<0$ en hilo
  - sup $\sigma_f>0$ en conductor en R2
- Ligadas
  - Dielec 1
    - $\sigma_b>0$ al lado del hilo
    - $\sigma_b<0$ pegado a interfase R1
  - Dielec. 2
    - $\sigma_b>0$ pegado a interfase R1
    - $\sigma_b<0$ " " " R2

---

2 a) Responder en base a relaciones constitutivas $M(B_{ext})$ ó $M(H_e)$. En general esta relación es compleja a través de χ_m que es un tensor. Si los medios son IHL sí existe una relación

b) ~~Bext~~ $\vec{B}_{TOT}=\vec{B}_{ext}+\vec{B}_{ind}$

↳ Debido al material magnetizado

Conocido $\vec{M}$ se determina $\vec{J}_m$ y $\vec{K}_m$ y con estas se determina Bind con

$\vec{B}_{ind}=$

PROBLEMAS

1 a) Ec. Poisson en esféricas para 1 variable (r)

Soluc. general: $\phi = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{r^2}{6} + R^2 \ln r\right) - \frac{A}{r} + B$

Cond. contorno $\left\{ \begin{array}{l} \phi(r=R)=0 \\ \phi(r=2R)=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ Resolver sist. de 2 ec. con 2 incógnitas

$A = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^3 (1 + 2\ln 2)$, de ahí se saca B

b) $\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{dr} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{r}{3} + \frac{R^2}{r} - \frac{R^3}{r^2} - 2\frac{R^3}{r^2}\ln 2\right)\vec{u}_r$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} = \rho_0\left(\frac{r}{3} + \frac{R^2}{r} - \frac{R^3}{r^2} - 2\frac{R^3}{r^2}\ln 2\right)\vec{u}_r$

Nos piden dens. carga y carga total en esferas conductoras, es decir, σ_f (esf. int) y σ_f (esf ext). Se sacan de las C.C. de $\vec{D}$ en interfases R1 y R2 respect.

En R_1: $\sigma_f(\text{esf. int}) = D_{2n} - D_{1n} = \rho_0 R\left(\frac{1}{3} - 2\ln 2\right) - 0$

D_{2n}: Región entre R y 2R evaluado en R

D_{1n}: metal

$\sigma_f(\text{esf. int}) = \rho_0 R\left(\frac{1}{3} - 2\ln 2\right)$

$Q_{TOT}(\text{esf. int}) = \underbrace{4\pi R^2}_{\text{área esf. int}} \cdot \sigma_{f\,int} = 4\pi\rho_0 R^3\left(\frac{1}{3} - 2\ln 2\right)$ coul

En R_2 → Se hace igual $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$ (esf. ext)

$D_{2n} = 0$

D_{1n} → D en región entre R y 2R evaluado en 2R

$Q_{TOT}(\text{esf ext}) = 4\pi(2R)^2 \cdot \sigma_{f\,ex}$

---

2 a) Resuelto en el libro

b) Se trata de encontrar el a, para un z dado que maximiza B

luego $\frac{dB}{da} = 0 \Rightarrow \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left[\frac{2a(a^2+z^2)^{3/2} - 3(a^2+z^2)^{1/2}a^3}{(a^2+z^2)^3}\right] = 0$

Solucs. $\left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ a^2 = -z^2 \\ a = \sqrt{2}\,z \end{array} \right.$ ⇒ Esto es lo único con sentido físico, aunque hay que comprobar que B para este a es un máximo

$\left.\frac{d^2B}{da^2}\right|_{a=\sqrt{2}z} < 0$ ⇒ Es un máximo ⇒ $B(a=\sqrt{2}z) = \frac{\mu_0 I}{z(3)^{3/2}}\vec{u}_z$

$\boxed{3}$ a) $\vec{H}_{\varphi} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{u}_\varphi \quad \forall \rho$; $\vec{M} = 0 \; \begin{cases} \rho < a \\ \rho > b \end{cases}$

$\vec{M} = \frac{\chi_m I}{2\pi\rho}\vec{u}_\varphi$ para $a < \rho < b$

$\vec{B} = \frac{I\mu_0}{2\pi\rho}\vec{u}_\varphi \; \begin{cases} \rho < a \\ \rho > b \end{cases}$ $\qquad \vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0(1+\chi_m)I}{2\pi\rho}\vec{u}_\varphi$

Hacer dibujos y verificar discont. en interfaces con C.C.

b) En región $a < \rho < b$

$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho M_\varphi)\vec{u}_z = 0$

Rot. en esféricas

$\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{n} \Rightarrow \begin{cases} \text{en } \\ \text{cara lateral} \end{cases} \begin{cases} \text{Sup. } \rho = a, \; \vec{n} = -\vec{u}_\rho \\ \text{Sup } \rho = b, \; \vec{n} = \vec{u}_\rho \end{cases}$

$\vec{K}_{m,r=a} = \frac{\chi_m I}{2\pi a}\vec{u}_z$; $\vec{K}_{m,r=b} = -\frac{\chi_m I}{2\pi b}\vec{u}_z$

c) $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int_S \vec{K}_{m,r=a}\, d\vec{s} + \mu_0 I = \mu_0\left(\frac{\chi_m I}{2\pi a}\right)2\pi a + \mu_0 I$

La intersección de sup. curva con con las $\vec{K}_m \Rightarrow$ circulo

$B_\varphi \int_0^{2\pi} \rho\, d\varphi = B_\varphi 2\pi\rho = \mu_0\left(\chi_m I + I\right) = I\mu_0(\chi_m + 1)$

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I(\chi_m+1)}{2\pi\rho}\vec{u}_\varphi$