T.D. 3 : Derivación parcial y direccional.

Ejercicio 1

Justificar la existencia de las derivadas parciales de las funciones siguientes y calcularlas :

1. $f(x,y) = e^x \cos(y)$
2. $f(x,y) = (x^2 + y^2)\cos(xy)$
3. $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2y^2}$

Ejercicio 2

Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Justificar que se puede prolongar f en una función continua en $\mathbb{R}^2$. Estudiar, entonces, la existencia de derivadas parciales en $(0,0)$.

Ejercicio 3

Para las funciones siguientes, demostrar que admiten una derivada en toda dirección en $(0,0)$ sin ser continuas en este punto.

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x|, & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2.
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ejercicio 4

Calcular las derivadas parciales al orden 2 de las funciones siguientes :

1. $f(x,y) = x^2(x + y)$
2. $f(x,y) = e^{xy}$

Ejercicio 5

Probar que la función :

$$f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$$

satisface la ecuación de Laplace : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$

Ejercicio 6

Estudiar la continuidad y la existencia de las derivadas parciales de las funciones siguientes :

1.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2.

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^3+y^3}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Ejercicio 7 (Un poco más difícil)

Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}, & \text{si} \quad x\neq 0 \text{ó} y\neq 0\\[2ex] 0, & \text{si} \quad x=0 \text{ó} y=0\end{cases}$$

Estudiar la existencia de las derivadas parciales y de las derivadas parciales cruzadas.

Ejercicio 8

Dada la función :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{yx^2-y^3}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Se pide :

a) Determinar la continuidad de f.

b) Estudiar la continuidad de las derivadas parciales de f.
Se puede deducir, sin calcularlas, que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0$? .

"Los diseños del matemático, como los del pintor o el poeta, han de ser bellos : las ideas, como los colores o las palabras deben relacionarse de manera armoniosa." [G. H. Hardy (1877-1947)].