TEMA 2: Espacios vectoriales.

2.1. Introducción.

En Física, hay ciertas magnitudes, como la masa, el tiempo y la temperatura, que quedan completamente definidas por un número y las unidades utilizadas para su medida. Son las **magnitudes escalares**.

Sin embargo, otras magnitudes físicas, como la velocidad, la aceleración o las fuerzas, necesitan algo más que un número para estar completamente definidas. Se trata de las **magnitudes vectoriales**, que se caracterizan por medio de una cantidad (o módulo), una dirección y un sentido. Estas magnitudes vectoriales se representan en el plano o en el espacio mediante vectores.

Dados dos puntos A y B del plano o del espacio, llamamos **vector fijo** $\overrightarrow{AB}$ al segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B. Dado un vector fijo $\overrightarrow{AB}$, se llama:

- **Módulo** a la longitud del vector y se representa por $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.
- **Dirección** del vector $\overrightarrow{AB}$, a la dirección de la recta que lo contiene. Dos vectores paralelos tienen la misma dirección.
- **Sentido** al que va del origen al extremo. Una dirección tiene dos sentidos posibles.

Se dice que dos **vectores** son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Todos los vectores equipolentes entre sí representan a un mismo vector que llamaremos **vector libre**.

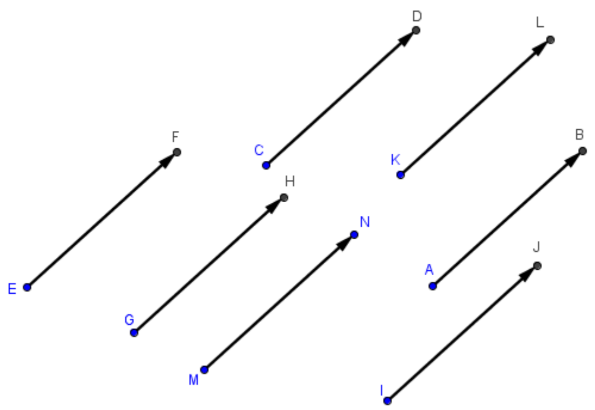


Figura 2.1:

Todos los vectores de la Figura 2.1 tienen el mismo módulo, dirección y sentido, o lo que es lo mismo, son equipolentes. También se dice que son representantes de un vector libre $\overrightarrow{u}$.

Llamaremos **vector nulo**, y lo denotaremos por $\overrightarrow{0}$, al vector libre que tiene su origen y su extremo en el mismo punto.

Dado un vector libre $\overrightarrow{u}$, llamaremos **vector opuesto** de $\overrightarrow{u}$, y lo denotaremos por $-\overrightarrow{u}$, al vector libre que tiene la misma dirección y el mismo módulo que $\overrightarrow{u}$, pero sentido contrario al de $\overrightarrow{u}$.

Suma de vectores libres.

Para sumar dos vectores libres $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, se toma un representante de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AB}$, y el representante de $\overrightarrow{v}$ que tiene su origen en el punto B, $\overrightarrow{BC}$. El vector que tiene su origen en A y su extremo en C, $\overrightarrow{AC}$, es un representante del vector libre $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

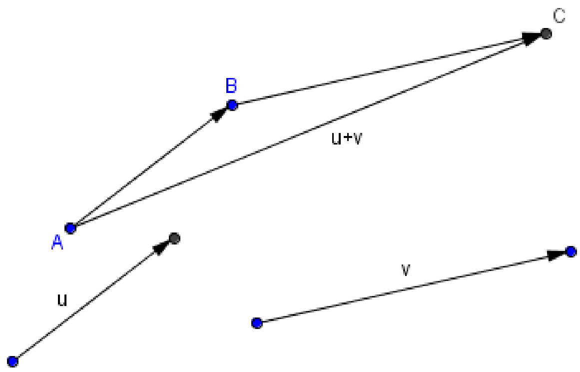


Figura 2.2:

Producto de un escalar por un vector libre.

Dados un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y un vector libre $\overrightarrow{u}$, el producto de λ por $\overrightarrow{u}$ es un vector, que denotaremos por $\lambda\overrightarrow{u}$, que tiene la misma dirección que $\overrightarrow{u}$, el mismo sentido que $\overrightarrow{u}$ si $\lambda > 0$ y sentido contrario si $\lambda < 0$, y cuyo módulo es $|\lambda|$ veces la longitud de $\overrightarrow{u}$.

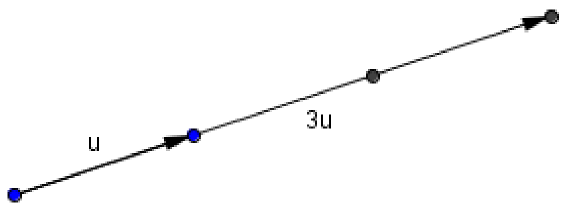


Figura 2.3:

Componentes de un vector libre.

Para representar los puntos del plano utilizamos el sistema de coordenadas cartesianas en el que cada punto viene representado por un par ordenado de números reales. Así pues, podemos identificar el plano con el conjunto de todos los puntos (x_1, x_2) con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, es decir, con el conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}\,.$$

Del mismo modo, consideramos el espacio como el conjunto de todos los puntos (x_1, x_2, x_3) con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, es decir, como el conjunto

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}\,.$$

Ya hemos dicho que un vector en el plano o en el espacio es un segmento orientado entre dos puntos llamados origen y extremo del vector. Todos los vectores con el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido son distintas representaciones del mismo vector libre. Para cada vector libre $\overrightarrow{u}$ del plano o del espacio podemos tomar la representación que tiene su origen en el origen de coordenadas $\overrightarrow{OP}$ (le llamaremos **representante canónico** de $\overrightarrow{u}$) y llamaremos **componentes** del vector $\overrightarrow{u}$ a las coordenadas del punto P. Las componentes de $\overrightarrow{u}$ también se pueden calcular restando las coordenadas del extremo menos las del origen de cualquier vector fijo que represente a $\overrightarrow{u}$.

Cualquier vector libre en el plano, $\overrightarrow{u}$, queda determinado por sus dos componentes, por lo que podemos identificar el conjunto de todos los vectores libres del plano con el conjunto $\mathbb{R}^2$. Escribiremos $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$.

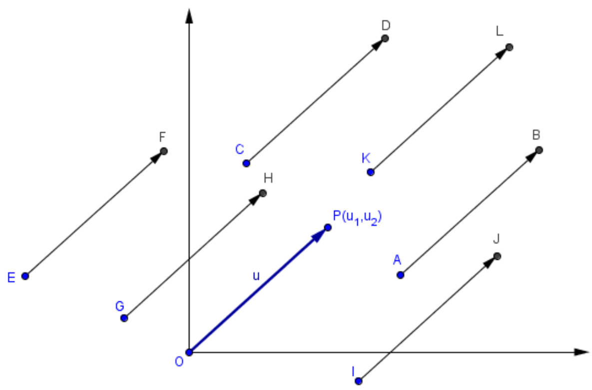
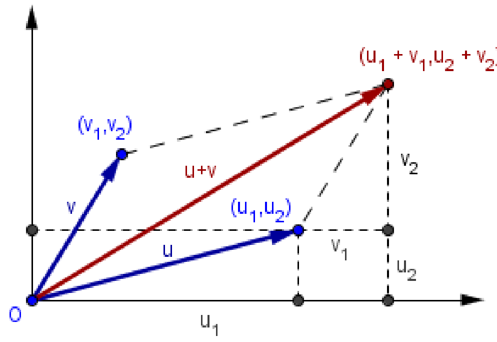


Figura 2.4:

Asimismo, cualquier vector libre en el espacio, $\overrightarrow{u}$, queda determinado por sus tres componentes y podemos identificar el conjunto de todos los vectores libres del espacio con el conjunto $\mathbb{R}^3$. Escribiremos $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Además, tanto en el plano como en el espacio, la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector, definidos anteriormente, se pueden identificar también con la suma y el producto por un escalar en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, respectivamente. En la Figura 2.5 se puede ver que, dados dos vectores del plano, $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, y un escalar, $\lambda \in \mathbb{R}$, se cumple que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ y $\lambda \overrightarrow{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$.



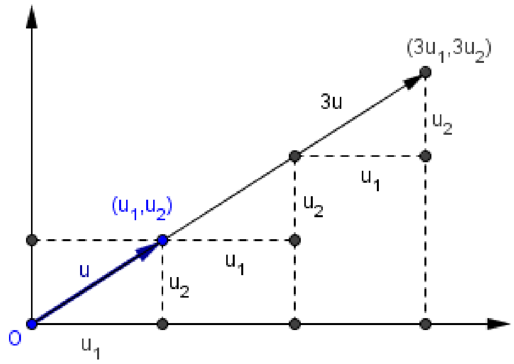


Figura 2.5:

Propiedades de las operaciones con vectores en el plano o en el espacio.

TEOREMA 2.1 *Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores en el plano o en el espacio y sean λ y μ escalares. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (propiedad conmutativa).

2. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ (propiedad asociativa).

3. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ (existencia de elemento neutro).

4. $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ (existencia de elemento opuesto).

5. $\lambda\,(\mu\,\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\,\overrightarrow{u}$.

6. $(\lambda + \mu)\,\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\,\overrightarrow{u}$.

7. $\lambda\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.

8. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

Demostración. La demostración de la propiedad asociativa de la suma de vectores en el plano utiliza la propiedad asociativa de la suma de números reales. En efecto, sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ y

$\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} &= [(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] + (w_1, w_2) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) \\
&= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2) \\
&= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2)) \\
&= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\
&= (u_1, u_2) + [(v_1, v_2) + (w_1, w_2)] = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).
\end{aligned}$$

Las demás propiedades se pueden demostrar de manera similar. $\square$

Cualquier conjunto dotado de una operación suma y de un producto por escalares, que satisfaga las ocho propiedades del Teorema 2.1, se dice que es un **espacio vectorial**.

2.2. Espacio vectorial. Propiedades.

DEFINICION 2.2 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo cualquiera y supongamos que V es un conjunto no vacío, cuyos elementos se denotan mediante $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, ... Se dice que V es un* ***espacio vectorial*** *sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, si en él se ha definido una operación binaria, llamada* ***suma*** *y que denotaremos por $+$, y una operación externa definida mediante una aplicación de $\mathbb{K} \times V$ en V, llamada* ***producto por un escalar*** *y que denotaremos por $\cdot$, que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$, entonces $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (propiedad conmutativa).

2. Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$, entonces $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ (propiedad asociativa).

3. Existe un vector $\overrightarrow{0} \in V$ tal que para todo $\overrightarrow{u} \in V$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ (existencia de elemento neutro).

4. Si $\overrightarrow{u} \in V$, existe un vector $-\overrightarrow{u} \in V$ tal que $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ (existencia de elemento opuesto).

5. Si $\overrightarrow{u} \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda (\mu \overrightarrow{u}) = (\lambda\mu) \overrightarrow{u}$.

6. Si $\overrightarrow{u} \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, entonces $(\lambda + \mu) \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{u}$.

7. Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}$.

8. Si $\overrightarrow{u} \in V$, entonces $1 \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

A los elementos de un espacio vectorial les llamaremos vectores. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se dice que V es un espacio vectorial real y, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se dice que V es un espacio vectorial complejo.

Nótese que, según la definición de espacio vectorial, $(V, +)$ es un grupo abeliano.

EJEMPLO 2.3 El conjunto de los vectores libres en el plano (en el espacio) es un espacio vectorial real.

EJEMPLO 2.4 Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, definimos

$$\mathbb{K}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{K},\, j = 1, \ldots, n\}$$

con las operaciones

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

y

$$\lambda\,(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

para $(x_1, \ldots, x_n)\,, (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces, $\mathbb{K}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. En particular, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real y $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial complejo.

EJEMPLO 2.5 En el conjunto

$$\mathbb{K}\,[x] := \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p \mid a_i \in \mathbb{K},\, i = 1, \ldots, p,\, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

de los polinomios en la variable x con coeficientes en $\mathbb{K}$, consideramos la suma y el producto por un escalar usuales definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p) + (b_0 + b_1 x + \ldots + b_q x^q) \\ = \; & (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\,x + \ldots + (a_p + b_p)\,x^p + b_{p+1} x^{p+1} + \ldots + b_q x^q \end{aligned}$$

si $p \leq q$, y

$$\lambda\,(a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)\,x + \ldots + (\lambda a_p)\,x^p.$$

Entonces $\mathbb{K}\,[x]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

EJEMPLO 2.6 Si consideramos el subconjunto de $\mathbb{K}\,[x]$ de los polinomios en la variable x con coeficientes en $\mathbb{K}$ de grado menor o igual que n, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{K}_n\,[x] := \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{K},\, i = 1, \ldots, n\}\,,$$

con las operaciones suma y producto por un escalar definidas en el ejemplo anterior, se tiene que $\mathbb{K}_n\,[x]$ también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

EJEMPLO 2.7 En el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}\,(\mathbb{R})$ de las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes reales, consideramos las operaciones suma y producto por un escalar usuales. Se puede comprobar fácilmente que $\mathcal{M}_{m\times n}\,(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real.

PROPOSICION 2.8 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si $\overrightarrow{v} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces se cumple:*
(i) $0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$,
(ii) $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$,
(iii) $(-1)\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$.

Demostración:

(i) Dado el vector $\overrightarrow{v} \in V$, se tiene que

$$\overrightarrow{v} = 1\overrightarrow{v} = (0+1)\overrightarrow{v} = 0\overrightarrow{v} + 1\overrightarrow{v} = 0\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \tag{2.1}$$

y, sumando $-\overrightarrow{v}$ a ambos lados de (2.1), se obtiene

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = (0\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}) + (-\overrightarrow{v}) = 0\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v})) = 0\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{v}.$$

(ii) Para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene

$$\lambda\overrightarrow{0} = \lambda\left(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}\right) = \lambda\overrightarrow{0} + \lambda\overrightarrow{0} \tag{2.2}$$

y, sumando $-\lambda\overrightarrow{0}$ a ambos lados de (2.2), se obtiene

$$\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{0} + \left(-\lambda\overrightarrow{0}\right) = \left(\lambda\overrightarrow{0} + \lambda\overrightarrow{0}\right) + \left(-\lambda\overrightarrow{0}\right) = \lambda\overrightarrow{0} + \left(\lambda\overrightarrow{0} + \left(-\lambda\overrightarrow{0}\right)\right) = \lambda\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{0}.$$

(iii) Sumando $\overrightarrow{v}$ con $(-1)\overrightarrow{v}$ se tiene

$$\overrightarrow{v} + (-1)\overrightarrow{v} = 1\overrightarrow{v} + (-1)\overrightarrow{v} = (1+(-1))\overrightarrow{v} = 0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Puesto que $(V,+)$ es un grupo, el opuesto de un vector es único y, por lo tanto, $(-1)\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$.
□

DEFINICION 2.9 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que un vector $\overrightarrow{v} \in V$ es* ***combinación lineal*** *de los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p} \in V$, si*

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \lambda_p\overrightarrow{v_p}$$

para algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.

EJEMPLO 2.10 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ el vector $(5,-3,8)$ es combinación lineal de los vectores

$$(4,-1,3), \qquad (0,5,2), \qquad (-1,7,-6) \qquad \text{y} \qquad (1,2,0)$$

ya que

$$(5,-3,8) = 2\,(4,-1,3) + 1\,(0,5,2) + 0\,(-1,7,-6) + (-3)\,(1,2,0).$$

EJEMPLO 2.11 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$, el vector $3 - x + x^2$ es combinación lineal de los vectores

$$1 - x, \qquad 2 + x + 2x^2 \qquad \text{y} \qquad 1 + x^2$$

ya que

$$3 - x + x^2 = 2\,(1-x) + 1\left(2 + x + 2x^2\right) + (-1)\left(1 + x^2\right).$$

2.3. Subespacios vectoriales.

DEFINICION 2.12 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y W un subconjunto no vacío de V. Se dice que W es un* ***subespacio vectorial*** *de V si W dotado de las mismas operaciones definidas en V es, a su vez, un espacio vectorial.*

EJEMPLO 2.13 En el Ejemplo 2.6 se ha visto que $\mathbb{K}_n[x]$ es un subconjunto no vacío del espacio vectorial $\mathbb{K}[x]$ que con las operaciones definidas en $\mathbb{K}[x]$ es, a su vez, un espacio vectorial. Así pues, $\mathbb{K}_n[x]$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}[x]$.

PROPOSICION 2.14 *Sea W un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$. Entonces, W es un subespacio vectorial de V si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones siguientes:*
(i) si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W$, entonces $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in W$,
(ii) si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{v} \in W$, entonces $\lambda\overrightarrow{v} \in W$.

Demostración: Supongamos que W es un subespacio vectorial de V. Entonces, por definición, W, con las operaciones suma y producto por un escalar definidas en V, es también un espacio vectorial y, por lo tanto, la operación suma debe ser una operación binaria sobre W y la operación producto por un escalar debe ser una aplicación definida de $\mathbb{K} \times W$ en W. Así pues, se cumplen las condiciones (i) y (ii).

Recíprocamente, supongamos que se cumplen las condiciones (i) y (ii). Entonces, W es un conjunto no vacío en el que la suma es una operación binaria, debido a la condición (i), y el producto por un escalar es una operación externa, debido a la condición (ii). Veamos que se cumplen las ocho propiedades de la Definición 2.2.

Puesto que $W \subseteq V$ y se cumplen las propiedades 1, 2, 5, 6, 7 y 8 para todos los elementos de V, también se cumplen, en particular, para los elementos de W.

Sea $\overrightarrow{v} \in W$. Por la propiedad (ii) de la hipótesis, se tiene que $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{v} \in W$ y, por lo tanto, se cumple la propiedad 3 de la Definición 2.2.

Finalmente, si $\overrightarrow{v} \in W \subseteq V$, por la Proposición 2.8 (iii) y aplicando la condición (ii) de la hipótesis, se tiene que $-\overrightarrow{v} = (-1)\overrightarrow{v} \in W$, por lo que también se cumple la propiedad 4 de la definición de espacio vectorial. $\square$

COROLARIO 2.15 *Sea W un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$. Entonces, W es un subespacio vectorial de V si, y sólo si, $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in W$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W$.*

Demostración: Se deja como ejercicio. $\square$

EJEMPLO 2.16 Dado cualquier espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ y V son subespacios vectoriales de V, a los que llamaremos **subespacios vectoriales impropios**. Cualquier otro subespacio vectorial de V se dice que es un **subespacio propio**.

EJEMPLO 2.17 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$, consideramos el subconjunto

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

Claramente $W \neq \emptyset$ ya que $(0,0,0) \in W$ puesto que $0 - 4 \cdot 0 + 0 = 0$.

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W$. Si $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces

$$u_1 - 4u_2 + u_3 = 0 \qquad \text{y} \qquad v_1 - 4v_2 + v_3 = 0.$$

Como

$$\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, \lambda u_3 + \mu v_3)$$

y

$$(\lambda u_1 + \mu v_1) - 4(\lambda u_2 + \mu v_2) + (\lambda u_3 + \mu v_3) = \lambda(u_1 - 4u_2 + u_3) + \mu(v_1 - 4v_2 + v_3) = \lambda 0 + \mu 0 = 0,$$

se tiene que $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in W$ y, por el Corolario 2.15, W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 2.18 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, los subespacios vectoriales propios son cada una de las rectas que pasan por el origen.

En $\mathbb{R}^3$, los subespacios propios son cada una de las rectas y cada uno de los planos que pasan por el origen.

PROPOSICION 2.19 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea I un conjunto no vacío de índices. Si $\{W_i,\ i \in I\}$ es una familia de subespacios vectoriales de V, entonces $W = \bigcap_{i\in I} W_i$ es un subespacio vectorial de V.*

Demostración: Dado que W_i es un subespacio vectorial para cualquier $i \in I$, se tiene que $\overrightarrow{0} \in W_i$, para todo $i \in I$, y, por lo tanto $\overrightarrow{0} \in W$ y W es un subconjunto no vacío de V.

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W$. Entonces, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W_i$, para todo $i \in I$, y aplicando el Corolario 2.15, se obtiene que $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in W_i$, para todo $i \in I$. Así pues, $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in W$ y W es un subespacio vectorial de V. $\square$

2.4. Envoltura lineal.

DEFINICION 2.20 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto no vacío de V. Llamaremos **envoltura lineal** de S, y lo denotaremos por $\operatorname{Env}(S)$, al conjunto de todos los vectores de V que se pueden escribir como combinación lineal de un subconjunto finito de vectores de S.*

EJEMPLO 2.21 En $\mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{Env}(\{(1,0,0)\}) = \left\{ \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{v} = \lambda(1,0,0),\ \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

que es la recta que pasa por el origen y tiene como vector director $(1,0,0)$.
De forma análoga,

$$\operatorname{Env}(\{(1,0,0),(0,1,0)\}) = \left\{ \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{v} = \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R} \right\},$$

que es el plano de ecuación $z = 0$.

La envoltura lineal de S también se suele llamar **subespacio engendrado** o **generado** por S, y también se suele denotar por $\langle S \rangle$.

PROPOSICION 2.22 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto no vacío de V. Entonces,* $\operatorname{Env}(S)$ *es un subespacio vectorial de V que contiene a S.*

Demostración: Si $\overrightarrow{v} \in S$, como $\overrightarrow{v} = 1\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}$ es combinación lineal de vectores de S y, por lo tanto, $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Env}(S)$. Así pues, $S \subseteq \operatorname{Env}(S)$ y $\operatorname{Env}(S) \neq \emptyset$. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \operatorname{Env}(S)$. Si

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{u_p} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{v} = \beta_1\overrightarrow{v_1} + \beta_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \beta_q\overrightarrow{v_q},$$

con $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{v_j} \in S$ para $i = 1,2,\ldots,p$ y $j = 1,2,\ldots,q$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} &= \lambda(\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{u_p}) + \mu\left(\beta_1\overrightarrow{v_1} + \beta_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \beta_q\overrightarrow{v_q}\right) \\
&= (\lambda\alpha_1)\overrightarrow{u_1} + (\lambda\alpha_2)\overrightarrow{u_2} + \ldots + (\lambda\alpha_p)\overrightarrow{u_p} + (\mu\beta_1)\overrightarrow{v_1} + (\mu\beta_2)\overrightarrow{v_2} + \ldots + \left(\mu\beta_q\right)\overrightarrow{v_q},
\end{aligned}$$

con lo que $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in \operatorname{Env}(S)$, ya que es combinación lineal de vectores de S. Así pues, $\operatorname{Env}(S)$ es un subespacio vectorial de V. $\square$

PROPOSICION 2.23 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto no vacío de V. Entonces,* $\operatorname{Env}(S)$ *coincide con la intersección de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a S.*

Demostración: Supongamos que $\{W_i,\ i \in I\}$ es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a S. Como $V \in \{W_i,\ i \in I\}$, entonces $I \neq \emptyset$.

Por la Proposición 2.22, sabemos que $\operatorname{Env}(S)$ es un subespacio vectorial que contiene a S, por lo que $\operatorname{Env}(S) \in \{W_i,\ i \in I\}$ y $\bigcap\limits_{i\in I} W_i \subseteq \operatorname{Env}(S)$.

Por otra parte, si $\overrightarrow{u} \in \operatorname{Env}(S)$, entonces

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{u_p},$$

con $\alpha_i \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u_i} \in S$ para $i = 1,2,\ldots,p$. Como $S \subseteq W_i$ para todo $i \in I$, entonces $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\} \subseteq W_i$ para todo $i \in I$ y, dado que W_i es un subespacio vectorial para todo $i \in I$,

$\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{u_p} \in W_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $\overrightarrow{u} \in \bigcap\limits_{i\in I} W_i$ y se obtiene la inclusión $\mathrm{Env}\,(S) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} W_i$. $\square$

PROPOSICION 2.24 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto no vacío de V. Entonces, si W es un subespacio vectorial de V y $S \subseteq W$, entonces* $\mathrm{Env}\,(S) \subseteq W$.

Demostración: Supongamos, de nuevo, que $\{W_i,\ i \in I\}$ es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a S. Si W es un subespacio vectorial tal que $S \subseteq W$, se tiene que $W \in \{W_i,\ i \in I\}$ y, por lo tanto, $\mathrm{Env}\,(S) = \bigcap\limits_{i\in I} W_i \subseteq W$. $\square$

La proposición anterior afirma que $\mathrm{Env}\,(S)$ es el "menor" subespacio vectorial de V que contiene a S. Por lo tanto, los dos siguientes corolarios son consecuencia inmediata de dicha proposición.

COROLARIO 2.25 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si W es un subespacio vectorial de V, entonces* $\mathrm{Env}\,(W) = W$.

COROLARIO 2.26 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que S_1 y S_2 son subconjuntos no vacíos de V. Si $S_1 \subseteq S_2$, entonces* $\mathrm{Env}\,(S_1) \subseteq \mathrm{Env}\,(S_2)$.

EJEMPLO 2.27 En $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Env}\,(\{(1,0,0)\})$ es la recta que pasa por el origen y cuyo vector director es $(1,0,0)$. En efecto, los subespacios de $\mathbb{R}^3$ que contienen a $\{(1,0,0)\}$ son $\mathbb{R}^3$, los planos que pasan por el origen y por $(1,0,0)$ y la recta que pasa por el origen y por $(1,0,0)$ y la intersección de todos ellos es este último.
De forma análoga, puede verse que $\mathrm{Env}\,(\{(1,0,0)\,,(0,1,0)\})$ es igual al plano de ecuación $z = 0$.

DEFINICION 2.28 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que un subconjunto no vacío S de V es un* ***conjunto generador*** *de V si* $V = \mathrm{Env}\,(S)$.

NOTA 2.29 *Obsérvese que S es un conjunto generador de V si, y sólo si, todo vector de V es combinación lineal de un subconjunto finito de vectores de S.*

EJEMPLO 2.30 Consideremos de nuevo el subespacio del Ejemplo 2.17,

$$W = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

Puesto que para cualquier vector $\overrightarrow{x} = (x_1,x_2,x_3) \in W$ se cumple que $x_1 = 4x_2 - x_3$, se tiene que

$$\overrightarrow{x} = (4x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2\,(4,1,0) + x_3\,(-1,0,1)\,.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} W &= \{(4x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_2(4,1,0) + x_3(-1,0,1) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Env}(\{(4,1,0), (-1,0,1)\}) \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $\{(4,1,0), (-1,0,1)\}$ es un conjunto generador de W.

EJEMPLO 2.31 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$, consideramos el conjunto $S = \{1 + x, 1 - x^2\}$. Veremos que S no es un conjunto generador de $\mathbb{R}_2[x]$.

En efecto, si tomamos cualquier polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x],$$

$p(x)$ debería ser combinación lineal de los vectores de S, es decir, deberían existir escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \alpha(1 + x) + \beta\left(1 - x^2\right).$$

Entonces, igualando los coeficientes correspondientes a términos del mismo grado, se obtiene

$$\begin{array}{rclcc} a_0 &=& \alpha &+& \beta \\ a_1 &=& \alpha && \\ a_2 &=& &-& \beta \end{array}$$

de donde surge la relación $a_0 = a_1 - a_2$, de modo que sólo los polinomios que cumplan esta condición se podrán poner como combinación lineal de los vectores de S. Así, por ejemplo, el polinomio

$$p(x) = 1 + x + x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$$

no pertenece al espacio $\operatorname{Env}(S)$ y, por lo tanto, S no es un conjunto generador de $\mathbb{R}_2[x]$.

DEFINICION 2.32 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que V está* ***finitamente generado*** *si existe un subconjunto finito no vacío S de V tal que $V = \operatorname{Env}(S)$.*

EJEMPLO 2.33 $\mathbb{R}[x]$ es un espacio vectorial real que no está finitamente generado. En efecto, si tomamos cualquier subconjunto finito S de $\mathbb{R}[x]$ y denotamos como p el máximo de los grados de los polinomios pertenecientes a S, se tiene que el polinomio $x^{p+1} \in \mathbb{R}[x]$ no se puede expresar como combinación lineal de los vectores de S.

PROPOSICION 2.34 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y consideremos los vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p} \in V$. Si $\overrightarrow{u} \in \operatorname{Env}(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\})$, entonces*

$$\operatorname{Env}(\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}) = \operatorname{Env}(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}).$$

Demostración: Puesto que $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\} \subseteq \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}$, por el Corolario 2.26, tenemos que $\operatorname{Env}(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}) \subseteq \operatorname{Env}(\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\})$.

Por otro lado, por la Proposición 2.22, tenemos que

$$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\} \subseteq \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}\right)$$

y como $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}\right)$, podemos afirmar que

$$\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\} \subseteq \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}\right).$$

Entonces, por la Proposición 2.24, se tiene

$$\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}\right) \subseteq \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}\right).$$

Así pues, $\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}\right) = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}\right)$. $\square$

2.5. Independencia lineal.

DEFINICION 2.35 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p} \in V$ son* ***linealmente dependientes*** *sobre $\mathbb{K}$, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que*

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}.$$

En caso contrario, se dice que los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}$ son ***linealmente independientes*** *sobre $\mathbb{K}$.*

NOTA 2.36 *Un mismo conjunto V puede ser espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y también espacio vectorial sobre $\mathbb{K}'$, con $\mathbb{K}$ y $\mathbb{K}'$ dos cuerpos distintos. En ese caso, los vectores de un mismo subconjunto no vacío de V pueden ser linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$ y linealmente dependientes sobre $\mathbb{K}'$ (véase como ejemplo el Problema 2.4). En lo que sigue, nosotros indicaremos sobre qué cuerpo $\mathbb{K}$ estamos considerando el espacio vectorial V y hablaremos de vectores linealmente dependientes o independientes, sobreentendiendo que lo son sobre $\mathbb{K}$.*

NOTA 2.37 *Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, los vectores de un subconjunto finito de V que contenga al vector nulo, son linealmente dependientes. En efecto, si tomamos el conjunto $\left\{\overrightarrow{0}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\right\}$ con $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}$ vectores arbitrarios de V, podemos tomar $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ y*

$$\lambda\overrightarrow{0} + 0\overrightarrow{v_1} + 0\overrightarrow{v_2} + \ldots + 0\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0},$$

por lo que $\overrightarrow{0}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}$ son vectores linealmente dependientes.

EJEMPLO 2.38 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$, los vectores

$$(1,0,0), \quad (0,1,0) \quad \text{y} \quad (0,0,1),$$

son linealmente independientes, ya que si

$$\alpha_1\,(1,0,0)+\alpha_2\,(0,1,0)+\alpha_3\,(0,0,1)=(0,0,0)\,,$$

los únicos valores posibles para los escalares son $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Sin embargo, si consideramos los vectores

$$(1,0,0)\,,\qquad (0,3,0)\,,\qquad (0,0,2)\quad \text{y}\quad (0,1,1)$$

y una combinación lineal de ellos igualada al vector nulo,

$$\alpha_1\,(1,0,0)+\alpha_2\,(0,3,0)+\alpha_3\,(0,0,2)+\alpha_4\,(0,1,1)=(0,0,0)\,,\tag{2.3}$$

se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0,\\ \alpha_2 &= -\frac{1}{3}\alpha_4,\\ \alpha_3 &= -\frac{1}{2}\alpha_4,\end{aligned}$$

por lo que, en la expresión (2.3), podemos tomar escalares no todos nulos, por ejemplo, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_3=-3$ y $\alpha_4=6$. Por lo tanto, estos cuatro vectores no son linealmente independientes.

PROPOSICION 2.39 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Los vectores $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}\in V$ son linealmente dependientes si, y sólo si, al menos uno de ellos es combinación lineal de los restantes.*

Demostración: Supongamos que los vectores $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}$ son linealmente dependientes. Entonces existen escalares $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$, no todos nulos, tales que

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}+\ldots+\alpha_p\overrightarrow{v_p}=\overrightarrow{0}\,.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_1\neq 0$. Entonces

$$\overrightarrow{v_1}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{v_2}-\ldots-\frac{\alpha_p}{\alpha_1}\overrightarrow{v_p}$$

lo que pone de manifiesto que $\overrightarrow{v_1}$ es combinación lineal de $\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}$.

Recíprocamente, supongamos, ahora, que alguno de los vectores, por ejemplo $\overrightarrow{v_1}$, es combinación lineal de los demás. Entonces

$$\overrightarrow{v_1}=\beta_2\overrightarrow{v_2}+\ldots+\beta_p\overrightarrow{v_p}$$

para ciertos escalares $\beta_2,\ldots,\beta_p\in\mathbb{K}$. Por lo tanto,

$$-\overrightarrow{v_1}+\beta_2\overrightarrow{v_2}+\ldots+\beta_p\overrightarrow{v_p}=\overrightarrow{0}$$

con lo que los vectores $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}$ son linealmente dependientes ya que en la combinación lineal anterior al menos el coeficiente de $\overrightarrow{v_1}$ es no nulo. $\square$

PROPOSICION 2.40 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que S_1 y S_2 son subconjuntos finitos no vacíos de V tales que $S_1 \subseteq S_2$. Entonces, se cumple:*
(i) Si los vectores de S_1 son linealmente dependientes, entonces los vectores de S_2 también lo son.
(ii) Si los vectores de S_2 son linealmente independientes, entonces los vectores de S_1 también lo son.

Demostración:

(i) Supongamos que $S_1 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}$ y $S_2 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{v_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{v_q}\}$.

Si los vectores de S_1 son linealmente dependientes, entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0},$$

pero entonces podemos escribir

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{v_p} + 0\overrightarrow{v_{p+1}} + \ldots + 0\overrightarrow{v_q} = \overrightarrow{0},$$

que es una combinación lineal nula donde alguno de los escalares es distinto de cero, con lo que los vectores de S_2 son linealmente dependientes.

(ii) Si los vectores de S_2 son linealmente independientes, los vectores de S_1 también lo son, ya que si fuesen linealmente dependientes, por el apartado (i), los vectores de S_2 serían también linealmente dependientes en contra de la hipótesis. $\square$

PROPOSICION 2.41 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y consideremos los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{v} \in V$. Si $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}$ son linealmente independientes y $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{v}$ son linealmente dependientes, entonces $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Env}(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\})$.*

Demostración: Como $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{v}$ son linealmente dependientes, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{v_p} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Si $\beta = 0$, entonces

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}$$

y, como $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}$ son linealmente independientes, necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\beta \neq 0$ y obtenemos la expresión

$$\overrightarrow{v} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\overrightarrow{v_1} - \frac{\alpha_2}{\beta}\overrightarrow{v_2} - \ldots - \frac{\alpha_p}{\beta}\overrightarrow{v_p}.$$

Así pues, $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Env}(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\})$. $\square$

PROPOSICION 2.42 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y consideremos los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_q} \in V$. Si $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_q}$ son linealmente independientes y*

$$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_q} \in \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right),$$

entonces $q \leq p$.

Demostración: Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que $p < q$. Dado que $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_q}$ son linealmente independientes, $\overrightarrow{v_j} \neq \overrightarrow{0}$ para todo $j = 1, 2, \ldots, q$. Como $\overrightarrow{v_1} \in \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right)$, por la Proposición 2.34, se tiene que

$$\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right) = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right). \tag{2.4}$$

Por otra parte, al ser $\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{0}$, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, no todos nulos, tales que

$$\overrightarrow{v_1} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{u_p}.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_1 \neq 0$. Entonces

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\alpha_1}\overrightarrow{v_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{u_2} - \ldots - \frac{\alpha_p}{\alpha_1}\overrightarrow{u_p}$$

lo que pone de manifiesto que $\overrightarrow{u_1} \in \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right)$ y, aplicando de nuevo la Proposición 2.34, se tiene

$$\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right) = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right). \tag{2.5}$$

De (2.4) y (2.5), se obtiene

$$\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right) = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right). \tag{2.6}$$

De nuevo por hipótesis, $\overrightarrow{v_2} \in \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right) = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right)$ y, por la Proposición 2.34, se tiene que

$$\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right) = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right). \tag{2.7}$$

Por otra parte, al ser $\overrightarrow{v_2} \neq \overrightarrow{0}$, existen escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, con $\beta_2, \ldots, \beta_p$ no todos nulos (ya que si fuesen nulos, sería $\beta_1 \neq 0$ y $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ serían linealmente dependientes), tales que

$$\overrightarrow{v_2} = \beta_1 \overrightarrow{v_1} + \beta_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \beta_p \overrightarrow{u_p}.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\beta_2 \neq 0$. Entonces

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\beta_2}\overrightarrow{v_2} - \frac{\beta_1}{\beta_2}\overrightarrow{v_1} - \frac{\beta_3}{\beta_2}\overrightarrow{u_3} - \ldots - \frac{\beta_p}{\beta_2}\overrightarrow{u_p}$$

lo que pone de manifiesto que $\overrightarrow{u_2} \in \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u_3}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right)$ y, aplicando de nuevo la Proposición 2.34, se tiene

$$\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right) = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u_3}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right). \tag{2.8}$$

De (2.6),(2.7) y (2.8), se obtiene

$$\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right) = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u_3}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right).$$

Repitiendo el mismo razonamiento p veces, se llega a

$$\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\ldots,\overrightarrow{u_p}\}\right)=\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}\}\right).$$

Ahora, como

$$\overrightarrow{v_{p+1}}\in\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\ldots,\overrightarrow{u_p}\}\right)=\mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p}\}\right),$$

se llega a la contradicción de que $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_p},\overrightarrow{v_{p+1}}$ son linealmente dependientes. $\square$

Terminamos esta sección definiendo la dependencia e independencia lineal de subconjuntos infinitos de un espacio vectorial.

DEFINICION 2.43 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que los vectores de un subconjunto infinito S de V son **linealmente independientes**, si los vectores de cualquier subconjunto finito de S son linealmente independientes. En caso contrario, se dice que los vectores de S son **linealmente dependientes.** Un espacio vectorial V en el que se puede encontrar un subconjunto infinito de vectores linealmente independientes, se dice que tiene **dimensión infinita**.*

EJEMPLO 2.44
En $\mathbb{R}[x]$, los vectores del conjunto $\{x^n,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ son linealmente independientes, por lo que $\mathbb{R}[x]$ es un espacio vectorial de dimensión infinita.

2.6. Base de un espacio vectorial.

DEFINICION 2.45 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que un subconjunto no vacío $\mathcal{V}$ de V es una **base de Hamel** de V si los vectores de $\mathcal{V}$ son linealmente independientes y $\mathcal{V}$ es un conjunto generador de V.*

EJEMPLO 2.46 En el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^n$, es fácil comprobar que el conjunto $\mathrm{Can}\left(\mathbb{K}^n\right)=\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n}\}$, donde $\overrightarrow{e_i}$ para $i=1,2,\ldots,n$, es el vector que tiene todas las componentes iguales a 0 excepto la $i-$ésima componente que es igual a 1, es una base de Hamel a la que llamaremos **base canónica** de $\mathbb{K}^n$.

EJEMPLO 2.47 Para $\mathbb{K}_n[x]$, espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, el conjunto $\mathrm{Can}\left(\mathbb{K}_n[x]\right)=\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ es una base de Hamel (la base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$).

EJEMPLO 2.48 En el espacio vectorial de dimensión infinita $\mathbb{R}[x]$, el conjunto

$$\mathcal{B}=\{x^n,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$$

es una base de Hamel. En efecto, por un lado los vectores de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes, por serlo cualquier subconjunto finito, y por otro lado, cualquier polinomio de $\mathbb{R}[x]$ es combinación lineal de un subconjunto finito de vectores de $\mathcal{B}$.

PROPOSICION 2.49 *Todo espacio vectorial tiene, al menos, una base de Hamel.*

La demostración de esta proposición para un espacio vectorial cualquiera excede los contenidos de esta asignatura, por lo que particularizaremos el resultado al caso de espacios vectoriales finitamente generados, en los que a las bases de Hamel les llamaremos simplemente bases.

PROPOSICION 2.50 *Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $V \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ y $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}$ es un conjunto de generadores de V, entonces existe $\mathcal{V} \subseteq \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}$ tal que $\mathcal{V}$ es una base de V.*

Demostración: Supongamos, pues, que $V = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}\right)$.

Si $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}$ son linealmente independientes, entonces es una base de V y la proposición queda demostrada.

Si $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}$ son linealmente dependientes, por la Proposición 2.39, al menos uno de los vectores es combinación lineal de los demás. Supongamos, por comodidad, que $\overrightarrow{v_p} \in \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_{p-1}}\}\right)$. Entonces, por la Proposición 2.34, tenemos que $V = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_{p-1}}\}\right)$.

Si los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_{p-1}}$ son linealmente independientes, entonces forman una base de V y $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_{p-1}}\}$. En caso contrario, repetimos el razonamiento anterior y obtenemos que $V = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_{p-2}}\}\right)$.

Siguiendo con este razonamiento, llegará un momento en el que los vectores del conjunto generador resultante sean linealmente independientes, pues de lo contrario obtendríamos, después de repetir el razonamiento anterior $p-1$ veces, que $V = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{v_1}\}\right)$ con $\overrightarrow{v_1}$ linealmente dependiente, lo que significaría que $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$ y, por lo tanto, $V = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ en contra de la hipótesis. $\square$

PROPOSICION 2.51 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente generado. Si $\mathcal{V}$ es una base de V, entonces cada vector de V se expresa de forma única como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{V}$.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}$ es una base de V y sea $\overrightarrow{v} \in V$. Como $\mathcal{V}$ es un conjunto generador de V, se tiene que $V = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}\right)$ y cualquier vector de V es combinación lineal de los vectores de $\mathcal{V}$.

Para demostrar la unicidad, suponemos que

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{u_p}$$

y

$$\overrightarrow{v} = \beta_1 \overrightarrow{u_1} + \beta_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \beta_p \overrightarrow{u_p}$$

para algunos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p \in \mathbb{K}$. Entonces

$$(\alpha_1 - \beta_1)\,\overrightarrow{u_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\,\overrightarrow{u_2} + \ldots + \left(\alpha_p - \beta_p\right)\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$$

y como los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}$ son linealmente independientes, necesariamente

$$\alpha_i - \beta_i = 0, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, p;$$

es decir, $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, 2, \ldots, p$. $\square$

PROPOSICION 2.52 *Sea V un espacio vectorial de dimensión infinita sobre $\mathbb{K}$. Si $\mathcal{V}$ es una base de Hamel de V, entonces para todo $\overrightarrow{v} \in V$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, existen $n \in \mathbb{N}$, $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n} \in \mathcal{V}$ vectores únicos y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ escalares no nulos únicos, tales que*

$$\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i}.$$

Demostración: Supongamos que $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{u_i}, i \in I\}$ es una base de Hamel de V y $\overrightarrow{v} \in V$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Como $\mathcal{V}$ es un conjunto generador de V, cualquier vector de V es combinación lineal de un subconjunto finito de vectores de $\mathcal{V}$.

Para demostrar la unicidad, supongamos que

$$\overrightarrow{v} = \sum_{i \in J} \alpha_i \overrightarrow{u_i} \tag{2.9}$$

y

$$\overrightarrow{v} = \sum_{i \in K} \beta_i \overrightarrow{u_i} \tag{2.10}$$

para J y K subconjuntos finitos no vacíos de I y α_i, $i \in J$, β_i, $i \in K$ escalares no nulos.

Restando (2.10) a (2.9), se obtiene

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i \in J \setminus K} \alpha_i \overrightarrow{u_i} + \sum_{i \in J \cap K} (\alpha_i - \beta_i)\,\overrightarrow{u_i} - \sum_{i \in K \setminus J} \beta_i \overrightarrow{u_i},$$

que es una combinación lineal de un subconjunto finito de vectores de $\mathcal{V}$. Puesto que cualquier subconjunto finito de vectores de $\mathcal{V}$ es linealmente independiente, se tiene que $\alpha_i = 0$, para todo $i \in J \setminus K$, $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i \in J \cap K$ y $\beta_i = 0$, para todo $i \in K \setminus J$ y, dado que estamos suponiendo que todos los escalares son no nulos, debe cumplirse que $J = K$ y $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i \in J = K$. Por lo tanto, si tomamos $n = \operatorname{card} J$, se obtiene el resultado. $\square$

En lo que sigue, sólo consideraremos espacios vectoriales finitamente generados y bases con un número finito de vectores.

DEFINICION 2.53 *Dada una base $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}$ de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, llamamos* ***coordenadas*** *(o* ***componentes****) de un vector $\overrightarrow{v} \in V$ en la base $\mathcal{V}$, a los únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tales que $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{u_p}$.*

EJEMPLO 2.54 En el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^n$, las coordenadas de un vector $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ en la base canónica son $x_1, \ldots, x_n$, ya que

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n}.$$

Diremos que $x_1, \ldots, x_n$ son las **coordenadas canónicas** del vector $\overrightarrow{x}$.

PROPOSICION 2.55 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ son bases de V, entonces* $\operatorname{card}(\mathcal{V}) = \operatorname{card}(\mathcal{V}')$.

Demostración: Supongamos que $\operatorname{card}(\mathcal{V}) = p$ y $\operatorname{card}(\mathcal{V}') = q$.

Como los vectores de $\mathcal{V}$ son linealmente independientes y $\mathcal{V} \subseteq V = \operatorname{Env}(\mathcal{V}')$, por la Proposición 2.42, se tiene que $p \leq q$.

Del mismo modo, los vectores de $\mathcal{V}'$ son linealmente independientes y $\mathcal{V}' \subseteq V = \operatorname{Env}(\mathcal{V})$, así que aplicando el mismo resultado, se obtiene que $q \leq p$. Por lo tanto, $p = q$. $\square$

DEFINICION 2.56 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Llamamos* ***dimensión*** *de V, y lo denotamos como $\dim V$, al cardinal de cualquier base de V.*

EJEMPLO 2.57 $\dim \mathbb{K}^n = n$.

EJEMPLO 2.58 $\dim \mathbb{K}_n[x] = n + 1$.

EJEMPLO 2.59 En el Ejemplo 2.30, hemos visto que $\mathcal{W} = \{(4,1,0), (-1,0,1)\}$ es un conjunto generador del subespacio

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

Además, se prueba facilmente que los vectores de $\mathcal{W}$ son linealmente independientes, por lo que $\mathcal{W}$ es una base de W y, por lo tanto, $\dim W = 2$.
Por otra parte, si tomamos el vector $\overrightarrow{u} = (1,1,3) \in W$, podemos expresar

$$\overrightarrow{u} = (1,1,3) = 1 \cdot (4,1,0) + 3 \cdot (-1,0,1),$$

de modo que las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ en la base $\mathcal{W}$ son $(1,3)$.

PROPOSICION 2.60 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que $\mathcal{V}$ es un subconjunto de V tal que $\operatorname{card}(\mathcal{V}) = \dim V$. Entonces,*
(i) Si $\mathcal{V}$ es un conjunto generador de V, entonces $\mathcal{V}$ es una base de V.
(ii) Si los vectores de $\mathcal{V}$ son linealmente independientes, entonces $\mathcal{V}$ es una base de V.

Demostración:

(i) Supongamos que $\mathcal{V}$ es un conjunto generador de V. Si $\mathcal{V}$ no es una base, entonces, por la Proposición 2.50, existe $\mathcal{V}' \subsetneq \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}'$ es una base de V, pero entonces

$$\dim V = \operatorname{card}(\mathcal{V}') < \operatorname{card}(\mathcal{V}) = \dim V,$$

que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es una base.

(ii) Sea $\overrightarrow{v} \in V$. Si $\overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$, puesto que $\mathcal{V} \subseteq \operatorname{Env}(\mathcal{V})$, se tiene que $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Env}(\mathcal{V})$.

Si $\overrightarrow{v} \notin \mathcal{V}$, entonces

$$\operatorname{card}(\mathcal{V} \cup \{\overrightarrow{v}\}) = \operatorname{card}(\mathcal{V}) + 1 = \dim V + 1 > \dim V = \operatorname{card}(\mathcal{V}'),$$

con $\mathcal{V}'$ una base de V. Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{V} \cup \{\overrightarrow{v}\} \subseteq V = \operatorname{Env}(\mathcal{V}')$ y $\operatorname{card}(\mathcal{V} \cup \{\overrightarrow{v}\}) > \operatorname{card}(\mathcal{V}')$ y, aplicando la Proposición 2.42, concluimos que los vectores de $\mathcal{V} \cup \{\overrightarrow{v}\}$ son linealmente dependientes y, dado que, por hipótesis, los vectores de $\mathcal{V}$ son linealmente independientes, por la Proposición 2.41, tenemos que $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Env}(\mathcal{V})$. Por lo tanto, $V = \operatorname{Env}(\mathcal{V})$ y $\mathcal{V}$ es una base de V. $\square$

TEOREMA 2.61 (Teorema de la base incompleta) *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si $\mathcal{A} \subseteq V$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces existe una base $\mathcal{V}$ de V tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$.*

Demostración: Supongamos que $\dim V = n$ y que $\mathcal{A} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}$.

Si $p = n$, por la Proposición 2.60 (ii) tenemos que $\mathcal{V} = \mathcal{A}$ es una base.

Si $p < n$, entonces $V \neq \operatorname{Env}(\mathcal{A})$, con lo que existe $\overrightarrow{v} \in V$ tal que $\overrightarrow{v} \notin \operatorname{Env}(\mathcal{A})$ y, por la Proposición 2.41, tenemos que los vectores de $\mathcal{A} \cup \{\overrightarrow{v}\}$ son linealmente independientes.

Si $p + 1 = n$, por la Proposición 2.60 (ii) tenemos que $\mathcal{V} = \mathcal{A} \cup \{\overrightarrow{v}\}$ es una base de V.

Si $p + 1 < n$, repetimos el razonamiento anterior y así sucesivamente. Después de repetir este razonamiento $n - p$ veces, se obtiene un conjunto de vectores linealmente independientes $\mathcal{V} = \mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ que, por la Proposición 2.60 (ii) es una base de V. $\square$

COROLARIO 2.62 *Sea W un subespacio vectorial de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$. Si $\mathcal{W}$ es una base de W, entonces existe una base $\mathcal{V}$ de V tal que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.*

Demostración: Puesto que los vectores de $\mathcal{W}$ son linealmente independientes y $\mathcal{W} \subseteq W \subseteq V$, por el Teorema de la base incompleta, existe una base $\mathcal{V}$ de V tal que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. $\square$

COROLARIO 2.63 *Si W es un subespacio vectorial de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, entonces $\dim W \leq \dim V$.*

Demostración: Si $\mathcal{W}$ es una base de W, por el corolario 2.62, existe una base $\mathcal{V}$ de V tal que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Por lo tanto,

$$\dim W = \operatorname{card}(\mathcal{W}) \leq \operatorname{card}(\mathcal{V}) = \dim V. \qquad \square$$

COROLARIO 2.64 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V tales que $W_1 \subseteq W_2$ y $\dim W_1 = \dim W_2$, entonces $W_1 = W_2$.*

Demostración: Sea $\mathcal{W}_1$ una base de W_1, por el corolario 2.62, existe una base $\mathcal{W}_2$ de W_2 tal que $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$. Por lo tanto,

$$\dim W_1 = \operatorname{card}(\mathcal{W}_1) \leq \operatorname{card}(\mathcal{W}_2) = \dim W_2$$

y, como $\dim W_1 = \dim W_2$, necesariamente $\operatorname{card}(\mathcal{W}_1) = \operatorname{card}(\mathcal{W}_2)$ y $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2$. Por lo tanto, $W_1 = \operatorname{Env}(\mathcal{W}_1) = \operatorname{Env}(\mathcal{W}_2) = W_2$. $\square$

2.7. Suma de subespacios vectoriales.

EJEMPLO 2.65 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$, consideramos los subespacios vectoriales

$$W_1 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\right\}$$

y

$$W_2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\right\}.$$

Si denotamos $W = W_1 \cup W_2$ y tomamos los vectores $(1,0) \in W_1 \subseteq W$ y $(0,1) \in W_2 \subseteq W$, se tiene que $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin W$. Por lo tanto, W no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, es decir, la unión de subespacios vectoriales no es, en general, un subespacio vectorial.

DEFINICION 2.66 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V, llamamos **suma** de dichos subespacios al conjunto*

$$W_1 + W_2 := \{\overrightarrow{v} \in V \mid \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \text{ con } \overrightarrow{v_i} \in W_i \text{ para } i = 1,2\}.$$

PROPOSICION 2.67 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V, entonces $W_1 + W_2$ también es un subespacio vectorial de V.*

Demostración: Dado que W_i es un subespacio vectorial para $i = 1,2$, se tiene que $\overrightarrow{0} \in W_i$, para $i = 1,2$, y, por lo tanto $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} \in W_1 + W_2$ y $W_1 + W_2$ es un subconjunto no vacío de V.

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W_1 + W_2$. Entonces,

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2},$$

con $\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{v_i} \in W_i$ para $i = 1, 2$, y aplicando el Corolario 2.15, se obtiene que $\lambda\overrightarrow{u_i} + \mu\overrightarrow{v_i} \in W_i$, para $i = 1, 2$. Así pues,

$$\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \lambda\left(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\right) + \mu\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right) = \left(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{v_1}\right) + \left(\lambda\overrightarrow{u_2} + \mu\overrightarrow{v_2}\right) \in W_1 + W_2$$

y $W_1 + W_2$ es un subespacio vectorial de V. $\square$

PROPOSICION 2.68 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V. Si $W_i = \mathrm{Env}\left(\mathcal{W}_i\right)$ para $i = 1, 2$, entonces $W_1 + W_2 = \mathrm{Env}\left(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2\right)$.*

Demostración: Si $\overrightarrow{u} \in W_1 + W_2$, entonces $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ con $\overrightarrow{u_i} \in W_i$ para $i = 1, 2$ y como $W_i = \mathrm{Env}\left(\mathcal{W}_i\right)$, necesariamente $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Env}\left(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2\right)$, por tanto, $W_1 + W_2 \subseteq \mathrm{Env}\left(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2\right)$.

Supongamos ahora que $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Env}\left(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2\right)$, entonces $\overrightarrow{u}$ es combinación lineal de vectores de $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$. Agrupando por una parte los vectores de $\mathcal{W}_1$ y por otra los de $\mathcal{W}_2$, se tiene que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$, con $\overrightarrow{u_i} \in \mathrm{Env}\left(\mathcal{W}_i\right) = W_i$ para $i = 1, 2$, es decir, $\overrightarrow{u} \in W_1 + W_2$ y, por tanto, $\mathrm{Env}\left(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2\right) \subseteq W_1 + W_2$.

De esta inclusión y de la anterior, tenemos que $W_1 + W_2 = \mathrm{Env}\left(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2\right)$. $\square$

PROPOSICION 2.69 (Fórmula de Grassmann) *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V, entonces*

$$\dim\left(W_1 + W_2\right) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim\left(W_1 \cap W_2\right). \tag{2.11}$$

Demostración: Supongamos que $\mathcal{A} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\}$ es una base del subespacio vectorial $W_1 \cap W_2$. Entonces $\dim\left(W_1 \cap W_2\right) = p$.

Como $W_1 \cap W_2$ es subespacio vectorial de W_1 y también de W_2, por el Corolario 2.62, existe una base $\mathcal{W}_i$ de W_i tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}_i$ para $i = 1, 2$.

Sean

$$\mathcal{W}_1 = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{v_{p+q}}\}$$

y

$$\mathcal{W}_2 = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{w_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{w_{p+r}}\},$$

en cuyo caso $\dim W_1 = p + q$ y $\dim W_2 = p + r$.

Ahora, por la Proposición 2.68, tenemos que $W_1 + W_2 = \mathrm{Env}\left(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2\right)$, es decir,

$$W_1 + W_2 = \mathrm{Env}\left(\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{v_{p+q}}, \overrightarrow{w_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{w_{p+r}}\}\right).$$

Por lo tanto, si probamos que los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{v_{p+q}}, \overrightarrow{w_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{w_{p+r}}$ son linealmente independientes, entonces formarán una base de $W_1 + W_2$, con lo que

$$\dim (W_1 + W_2) = (p+q) + (p+r) - p = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2).$$

Supongamos que

$$\alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{u_p} + \beta_1 \overrightarrow{v_{p+1}} + \ldots + \beta_q \overrightarrow{v_{p+q}} + \gamma_1 \overrightarrow{w_{p+1}} + \ldots + \gamma_r \overrightarrow{w_{p+r}} = \overrightarrow{0},$$

entonces

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{u_p} + \beta_1 \overrightarrow{v_{p+1}} + \ldots + \beta_q \overrightarrow{v_{p+q}} = -\gamma_1 \overrightarrow{w_{p+1}} - \ldots - \gamma_r \overrightarrow{w_{p+r}} \in W_1 \cap W_2 \quad (2.12)$$

y como $W_1 \cap W_2$ está generado por los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}$, se tiene

$$\overrightarrow{v} = \delta_1 \overrightarrow{u_1} + \delta_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \delta_p \overrightarrow{u_p}. \quad (2.13)$$

De (2.12) y (2.13), obtenemos

$$\delta_1 \overrightarrow{u_1} + \delta_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \delta_p \overrightarrow{u_p} + \gamma_1 \overrightarrow{w_{p+1}} + \ldots + \gamma_r \overrightarrow{w_{p+r}} = \overrightarrow{0}$$

y como $\mathcal{W}_2$ es una base, tenemos que

$$\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_p = \gamma_1 = \ldots = \gamma_r = 0$$

con lo que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, es decir,

$$\alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{u_p} + \beta_1 \overrightarrow{v_{p+1}} + \ldots + \beta_q \overrightarrow{v_{p+q}} = \overrightarrow{0}.$$

Dado que los vectores de $\mathcal{W}_1$ son linealmente independientes, se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \ldots = \beta_q = 0$. $\square$

EJEMPLO 2.70 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ consideramos los subespacios vectoriales

$$W_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$$

y

$$W_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

Buscamos un conjunto generador para cada uno de los subespacios. Tenemos

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -x_2 - x_3\right\} = \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2 (-1, 1, 0) + x_3 (-1, 0, 1) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Env}\left(\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} W_2 &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 - x_3\right\} = \{(x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2 (1, 1, 0) + x_3 (-1, 0, 1) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Env}\left(\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}\right). \end{aligned}$$

Se puede probar fácilmente que los vectores del conjunto generador de W_i son linealmente independientes para $i = 1, 2$, por lo que forman una base y $\dim W_i = 2$ para $i = 1, 2$.

Calculamos ahora $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

Si $(x_1, x_2, x_3) \in W_1 \cap W_2$, entonces

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 (-1, 1, 0) + \beta_1 (-1, 0, 1)$$

y

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_2 (1, 1, 0) + \beta_2 (-1, 0, 1) \, ,$$

por lo tanto,

$$\alpha_1 (-1, 1, 0) + \beta_1 (-1, 0, 1) = \alpha_2 (1, 1, 0) + \beta_2 (-1, 0, 1) \, ,$$

de donde

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} -\alpha_1 & - & \beta_1 & - & \alpha_2 & + & \beta_2 & = & 0 \\ \alpha_1 & & & - & \alpha_2 & & & = & 0 \\ & & \beta_1 & & & - & \beta_2 & = & 0 \end{array}\right\} .$$

Sustituyendo $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\beta_1 = \beta_2$ en la primera ecuación, se tiene $-2\alpha_2 = 0$, de donde $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Por lo tanto, $(x_1, x_2, x_3) = \beta_2 (-1, 0, 1)$ y

$$W_1 \cap W_2 = \mathrm{Env} \left(\{(-1, 0, 1)\} \right) .$$

Como $(-1, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$, $\{(-1, 0, 1)\}$ es una base de $W_1 \cap W_2$ y $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$.

Aplicando (2.11), se obtiene que $\dim (W_1 + W_2) = 3$ y como $W_1 + W_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ con la misma dimensión que $\mathbb{R}^3$, por el Corolario 2.64, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

2.8. Suma directa de subespacios vectoriales.

DEFINICION 2.71 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V. Se dice que el subespacio vectorial $W_1 + W_2$ es* ***suma directa*** *de los subespacios W_1 y W_2 si para todo $\overrightarrow{u} \in W_1 + W_2$ existe un único par de vectores $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \in W_1 \times W_2$ tal que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$. Cuando la suma es directa, escribimos $W_1 \oplus W_2$.*

EJEMPLO 2.72 En $\mathbb{R}^3$, si consideramos la suma de los subespacios W_1, un plano que pasa por el origen, y W_2, una recta que pasa por el origen y no está contenida en W_1, cualquier vector $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar de forma única como suma de un vector $\overrightarrow{u_1} \in W_1$ y un vector $\overrightarrow{u_2} \in W_2$ (véase Figura 2.6). Así pues, en este caso, $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

EJEMPLO 2.73 En $\mathbb{R}^3$, si consideramos la suma de los subespacios W_1 y W_2, dos planos distintos que pasan por el origen, cualquier vector $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como suma de un vector $\overrightarrow{u_1} \in W_1$ y un vector $\overrightarrow{u_2} \in W_2$, pero en este caso la expresión no es única (véase Figura 2.7). Así pues, en este caso, $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ pero la suma no es directa.

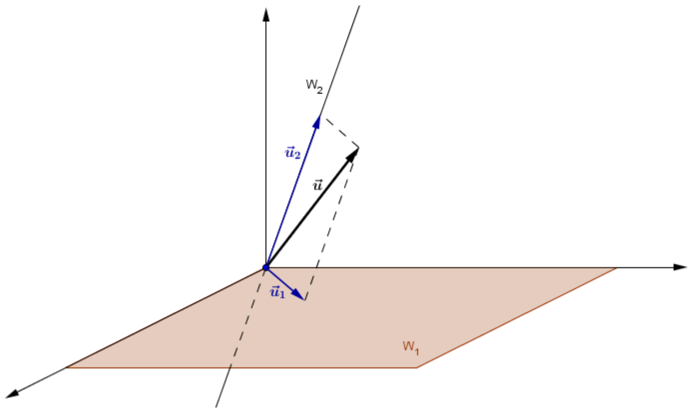


Figura 2.6:

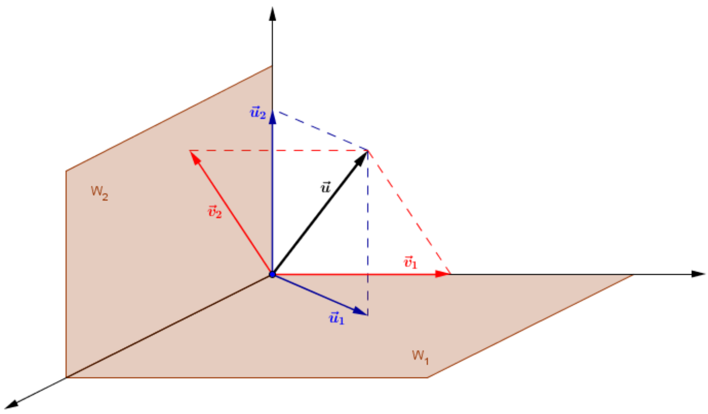


Figura 2.7:

PROPOSICION 2.74 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V. Son equivalentes:*

(i) La suma $W_1 + W_2$ es directa.

(ii) $W_1 \cap W_2 = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.

Demostración: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Supongamos que la suma $W_1 + W_2$ es directa y sea $\overrightarrow{u} \in W_1 \cap W_2$. Entonces, $\overrightarrow{u} \in W_1$ y $\overrightarrow{u} \in W_2$ y, puesto que $\overrightarrow{0} \in W_1 \cap W_2$ (ya que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales), podemos expresar $\overrightarrow{u}$ como suma de $\overrightarrow{u} \in W_1$ y $\overrightarrow{0} \in W_2$ o como suma de $\overrightarrow{0} \in W_1$ y $\overrightarrow{u} \in W_2$. Al ser la suma $W_1 + W_2$ directa, la expresión de $\overrightarrow{u}$ como suma de un vector de W_1 con un vector de W_2 debe ser única y, por lo tanto, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supongamos que $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ con $\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{v_i} \in W_i$ para $i = 1, 2$. Entonces,

$$\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{u_2} \in W_1 \cap W_2 = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$$

con lo que $\overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{v_i}$ para $i = 1, 2$.

Por lo tanto, la suma $W_1 + W_2$ es directa. $\square$

COROLARIO 2.75 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V. Supongamos que $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son bases de W_1 y W_2, respectivamente. Si la suma $W_1 + W_2$ es directa, entonces $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ es una base de $W_1 \oplus W_2$ y*

$$\dim (W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2. \tag{2.14}$$

Demostración: Por la Proposición 2.74, sabemos que si la suma $W_1 + W_2$ es directa, entonces $W_1 \cap W_2 = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$, por lo que $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ y

$$\dim (W_1 \cap W_2) = 0. \tag{2.15}$$

Sustituyendo (2.15) en (2.11), se obtiene (2.14). Además,

$$\dim (W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 = \operatorname{card} \mathcal{W}_1 + \operatorname{card} \mathcal{W}_2 = \operatorname{card} (\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2).$$

Dado que $W_i = \operatorname{Env} (\mathcal{W}_i)$, para $i = 1, 2$, por la Proposición 2.68 se tiene que

$$W_1 \oplus W_2 = \operatorname{Env} (\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2),$$

de modo que, $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ es un conjunto generador de $W_1 + W_2$. Finalmente, aplicando la Proposición 2.60 (i), se tiene que $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ es una base de $W_1 + W_2$. $\square$

EJEMPLO 2.76 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ consideramos los subespacios vectoriales

$$W_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

y

$$W_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = \lambda (1, 1, 0) \right\}.$$

Buscamos un conjunto generador para cada uno de los subespacios. En el ejemplo 2.70 obtuvimos un conjunto generador de W_1,

$$W_1 = \operatorname{Env} (\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}),$$

y para W_2 se tiene

$$W_2 = \operatorname{Env} (\{(1, 1, 0)\}).$$

En ambos casos, los vectores del conjunto generador son linealmente independientes, por lo que forman una base y $\dim W_1 = 2$ y $\dim W_2 = 1$.

Calculamos ahora $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

Si $(x_1, x_2, x_3) \in W_1 \cap W_2$, entonces

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 (-1, 1, 0) + \beta_1 (-1, 0, 1)$$

y

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_2 (1, 1, 0),$$

por lo tanto,

$$\alpha_1 (-1, 1, 0) + \beta_1 (-1, 0, 1) = \alpha_2 (1, 1, 0),$$

de donde

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -\alpha_1 & - & \beta_1 & - & \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 & & & - & \alpha_2 & = & 0 \\ & & \beta_1 & & & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Sustituyendo $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\beta_1 = 0$ en la primera ecuación, se tiene $-2\alpha_2 = 0$, de donde $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Por lo tanto, $(x_1, x_2, x_3) = 0\,(1,1,0) = (0,0,0)$ y

$$W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}\,.$$

Aplicando (2.11), se obtiene que $\dim(W_1 + W_2) = 3$ y como $W_1 + W_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ con la misma dimensión que $\mathbb{R}^3$, por el Corolario 2.64, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. Así pues, $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

DEFINICION 2.77 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si $W_1, W_2, \ldots, W_p$ son subespacios vectoriales de V, llamamos **suma** de dichos subespacios al conjunto*

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_p := \{\overrightarrow{v} \in V \mid \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \ldots + \overrightarrow{v_p} \text{ con } \overrightarrow{v_i} \in W_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, p\}$$

PROPOSICION 2.78 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si $W_1, W_2, \ldots, W_p$ son subespacios vectoriales de V, entonces $W_1 + W_2 + \ldots + W_p$ también es un subespacio vectorial de V.*

Demostración: Es una mera extensión de la demostración de la Proposición 2.67. □

PROPOSICION 2.79 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que $W_1, W_2, \ldots, W_p$ son subespacios vectoriales de V. Si $W_i = \mathrm{Env}\,(\mathcal{W}_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, p$, entonces*

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_p = \mathrm{Env}\,(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{W}_p)\,.$$

Demostración: La prueba es similar a la de la Proposición 2.68. □

DEFINICION 2.80 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que $W_1, W_2, \ldots, W_p$ son subespacios vectoriales de V. Se dice que el subespacio vectorial $W_1 + W_2 + \ldots + W_p$ es **suma directa** de los subespacios $W_1, W_2, \ldots, W_p$ si para todo $\overrightarrow{u} \in W_1 + W_2 + \ldots + W_p$ existe un único*

$$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \in W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_p$$

tal que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \ldots + \overrightarrow{u_p}$. Cuando la suma es directa, escribimos $W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_p$.

EJEMPLO 2.81 En $\mathbb{R}^3$, si consideramos la suma de los subespacios W_1, W_2 y W_3 tres rectas distintas que pasan por el origen y tales que ninguna de ellas está contenida en el plano determinado por las otras dos, se tiene que cualquier vector $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar de forma única como

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$$

con $\overrightarrow{u_i} \in W_i$, $i = 1, 2, 3$ (véase Figura 2.8). Así pues, en este caso, $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

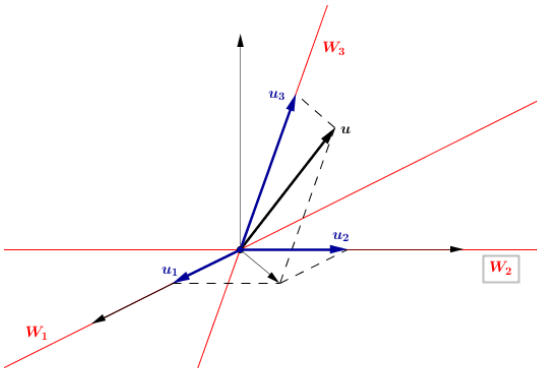


Figura 2.8:

PROPOSICION 2.82 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que $W_1, W_2, \ldots, W_p$ son subespacios vectoriales de V. Son equivalentes:*

(i) La suma $W_1 + W_2 + \ldots + W_p$ es directa.

(ii) $W_i \cap \left(\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} W_j \right) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ para $i = 1, 2, \ldots, p$.

Demostración: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Supongamos que la suma $W_1 + W_2 + \ldots + W_p$ es directa y sea $\overrightarrow{u} \in W_i \cap \left(\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} W_j \right)$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Entonces, $\overrightarrow{u} \in W_i$ y $\overrightarrow{u} = \sum\limits_{j \neq i} \overrightarrow{u_j}$, con $\overrightarrow{u_j} \in W_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, p$, $j \neq i$. Puesto que $\overrightarrow{0} \in W_i \cap \left(\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} W_j \right)$, podemos escribir

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} + \cdots + \overrightarrow{0}$$

con $\overrightarrow{u} \in W_i$ y $\overrightarrow{0} \in W_j$ cuando $j \neq i$, o bien

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} + \sum_{j \neq i} \overrightarrow{u_j}$$

con $\overrightarrow{0} \in W_i$ y $\overrightarrow{u_j} \in W_j$ cuando $j \neq i$. Al ser la suma $W_1 + W_2 + \ldots + W_p$ directa, la expresión de $\overrightarrow{u}$ debe ser única y, por lo tanto, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supongamos que tenemos dos expresiones para un mismo vector

$$\overrightarrow{u_1} + \cdots + \overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{v_1} + \cdots + \overrightarrow{v_p}$$

con $\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{v_i} \in W_i$ para todo $i = 1, \ldots, p$. Entonces, para cualquier $i \in \{1, \ldots, p\}$ podemos escribir

$$\overrightarrow{u_i} - \overrightarrow{v_i} = \sum_{j \neq i} \left(\overrightarrow{v_j} - \overrightarrow{u_j} \right) \in W_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} W_j \right) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\},$$

con lo que $\overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{v_i}$. $\square$

COROLARIO 2.83 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $W_1, W_2, \ldots, W_p$ subespacios vectoriales de V. Supongamos que $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_p$ son bases de $W_1, W_2, \ldots, W_p$, respectivamente. Si la suma $W_1 + W_2 + \ldots + W_p$ es directa, entonces $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{W}_p$ es una base de $W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_p$ y*

$$\dim (W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_p) = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_p.$$

Demostración: Se demuestra por inducción en p. $\square$

2.9. Problemas.

PROBLEMA 2.1 Estudia si el conjunto
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a - b + c + d = 0 \right\}$$
es un espacio vectorial real con las mismas operaciones que las definidas en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

PROBLEMA 2.2 Estudia si las siguientes familias de vectores son linealmente dependientes o independientes:

1. $\{(1,2), (0,1)\}$ en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$.

2. $\{(1,i), (i,-1)\}$ en el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$.

3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

PROBLEMA 2.3 Demuestra que en $\mathbb{C}^2$ puede definirse una estructura de espacio vectorial real. ¿Cuál es la dimensión de este espacio?

PROBLEMA 2.4 Prueba que los vectores del conjunto $\{(i,0), (1+i,0)\} \subset \mathbb{C}^2$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ y linealmente dependientes sobre $\mathbb{C}$.

PROBLEMA 2.5 Estudia si los siguientes conjuntos son bases del espacio vectorial real dado:

1. $\left\{1, x+3, (x+3)^2, (x+3)^3\right\}$ en $\mathbb{R}_3[x]$.

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

PROBLEMA 2.6 Encuentra una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(0,0,1,1)$ y $(1,1,0,0)$.

PROBLEMA 2.7 Sean $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)$ polinomios, y supongamos que
$$\begin{vmatrix} p_1(a_1) & p_2(a_1) & & p_k(a_1) \\ p_1(a_2) & p_2(a_2) & & p_k(a_2) \\ & & & \\ p_1(a_k) & p_2(a_k) & & p_k(a_k) \end{vmatrix} \neq 0$$

para algunos números reales a_j. Demuestra que el conjunto $\{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)\}$ es linealmente independiente en el espacio vectorial real $\mathbb{R}[x]$.

PROBLEMA 2.8 Demuestra que el conjunto

$$T = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid traza(A) = 0\}$$

es un espacio vectorial real con las operaciones definidas en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. ¿Cuál es la dimensión del espacio T cuando $n = 3$?

PROBLEMA 2.9 Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ una base de V. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $\det(A) \neq 0$. Demuestra que

$$\overrightarrow{v}'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overrightarrow{v}_i, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

es una base de V.

PROBLEMA 2.10 Los siguientes subconjuntos y familias de vectores de algunos espacios vectoriales son subespacios y bases de éstos. Verifica la verdad o falsedad de esta afirmación en los ejemplos siguientes:

1. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = 1\}$ y $\{(2, 1)\}$ en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$.

2. $\{p(x) \in \mathbb{C}_3[x] \mid (x-1)$ divide a $p(x)\}$ y $\{x-1, x^2-1\}$ en el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}_3[x]$.

3. $\mathrm{com}(B) = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid BA = AB\}$, con $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, y $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ en el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4. $R = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid r(A) = 1\}$, donde $r(A)$ designa el rango de A, y $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ en el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

PROBLEMA 2.11 Encuentra la dimensión del subespacio generado por los siguientes conjuntos de vectores:

1. $\{(1, 2), (0, 1), (-1, 3)\}$ en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$.

2. $\left\{ \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ en el espacio vectorial complejo $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

PROBLEMA 2.12 Halla en cada uno de los ejemplos siguientes la suma y la intersección del par de subespacios dados, y comprueba que se cumple la fórmula de Grassmann:

1. $W_1 = \mathrm{com}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $W_2 = \mathrm{com}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (véase el Problema 2.10 para la definición de $\mathrm{com}\,(B)$).

2. $W_1 = \{p(x) \in \mathbb{C}_3[x] \mid (x+1)$ divide a $p(x)\}$ y $W_2 = \{p(x) \in \mathbb{C}_3[x] \mid (x-1)$ divide a $p(x)\}$ en el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}_3[x]$.

PROBLEMA 2.13 Sean U y W los siguientes subespacios del espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(a,b,c,d) \mid b+c+d=0\}$$
$$W = \{(a,b,c,d) \mid a+b=0,\ c=2d\}.$$

Encuentra una base y la dimensión de U, W, $U \cap W$ y $U+W$.

PROBLEMA 2.14 Sea $V = \mathbb{R}_n[x]$ el espacio vectorial real de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n. Se pide:

1. Demostrar que el polinomio x^n y sus n primeras derivadas forman una base de V.

2. Estudiar si los vectores $p_1(x) = 1+3x+5x^2$, $p_2(x) = -1+2x^2$ y $p_3(x) = 3+3x+x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

3. Sean $r_1(x) = 1+x^2$, $r_2(x) = 1-x^2$ y $W_1 = \mathrm{Env}\{r_1(x), r_2(x)\}$. Sean $p(x) = 1+5x^2$ y $r(x) = 1+x$. ¿Pertenecen $p(x)$ y $r(x)$ a W_1?

4. Sea $W_2 = \mathrm{Env}\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$. Calcula $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

PROBLEMA 2.15 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$, se considera el subconjunto

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z=0\right\}.$$

Se pide:

1. Demuestra que U es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

2. Determina una base de dicho subespacio.

3. Completa dicha base para formar una base de $\mathbb{R}^3$.

4. Calcula las componentes del vector $\overrightarrow{v} = (-21,3,5)$ en la base de $\mathbb{R}^3$ encontrada en el apartado anterior.

PROBLEMA 2.16 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$, se considera el subconjunto

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0\right\}.$$

Se pide:

1. Demuestra que U es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

2. Determina una base de dicho subespacio.

3. Calcula las componentes del vector $\overrightarrow{v} = (2, -3, 1)$ en dicha base.

4. Dado $W = \text{Env}\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$, encontrar una base de $U + W$ y de $U \cap W$.

PROBLEMA 2.17 Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de orden 2. Se pide:

1. Demuestra que
$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a+b+c+d=0 \right\},$$
es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Determina una base de dicho subespacio.

3. Dado el subespacio
$$W_2 = \text{Env}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$
determina una base de $W_1 + W_2$. ¿Es $W_1 + W_2$ suma directa?