Ejercicio 1 — T. Hanoi 8 discos

(n) Nº de discos	Movimientos (m_n)
1	1
2	3
3	7
⋮	⋮

1) Las **torres de Hanoi** o torres de Benarés es un rompecabezas inventado en 1883 por el matemático Édouard Lucas. El juego comienza con 8 discos colocados de manera creciente sobre una varilla (como en la foto). Con sólo tres varillas, se debe colocar la pila de discos en otra varilla moviendo sólo un disco en cada turno y de manera que cada disco no puede colocarse sobre un disco más pequeño. ¿En cuántos pasos eres capaz de resolver el rompecabezas?

Sea $n \in \mathbb{N}$ el número de discos en cada iteración y $m_n \in \mathbb{N}$ el número de movimientos necesarios para resolver el problema para cada n

En cada iteración, hemos de:

1. Mover el disco más pequeño a otra barra
2. Mover el disco n a la barra final
3. Mover el disco del paso 1 a la barra final

Observamos que los pasos 1 y 3 toman n-1 movimientos y el paso 2 toma 1 movimiento por lo que:

$\{\forall n \in \mathbb{N}, \exists m_n \in \mathbb{N} \mid m_n \leq 2m_{n-1}+1\}$

Ahora, probamos por inducción. Tomamos como HI $m_n = 2^n - 1$ y tratamos de llegar a $m_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

Caso $n=1$ $\quad 2^1 - 1 = 1$ ✓

Caso $n+1$ $\quad 2^{n+1} - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2m_n + 1$ ✓

□

$2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$ movimientos.

$2 \cdot 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1}$

S_n = nº de movimientos necesarios para resolver el puzle de n discos

$S_{n+1} = 2S_n + 1$

$S_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1$

$S_3 = 2(2+1) + 1 = 1 + 2 + 2^2$

$S_4 = 2(1 + 2 + 2^2) + 1 = 1 + 2 + 2^2 + 3^2$ ...

$\to S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

↳ Progresión geométrica

$S_n = \frac{1 - 2^{n-1} \cdot 2}{1-2} = \frac{1-2^n}{1-2} = \frac{1-2^n}{-1} =$

Progresión geométrica con término inicial

$\left(a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \dots + a_0 r^n = \frac{a_0 - (a_0 r^n) r}{1-r}\right)$