8.4 Problemes

Problema 8.1: Considereu els subconjunts F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9 i F_{10} del problema 5.32. Per a cada parell (i, j), amb $1 \le i < j \le 10$, descriviu $F_i \cap F_j$ i observeu que es tracta d'un subespai vectorial solament quan F_i i F_j són subespais vectorials.

Problema 8.2: Suposeu que $\mathscr{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ és una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i considereu els subconjunts

$$F = \{(\alpha_1 + \alpha_2)\boldsymbol{a}_1 + \alpha_1 \boldsymbol{a}_3 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_4 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$G = \{x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + x_3 \boldsymbol{a}_3 + x_4 \boldsymbol{a}_4 \mid x_1 - x_4 = 0, x_3 = 0\}.$$

(a) Proveu que F i G són subespais vectorials de E i obteniu una base de cadascun d'ells.
(b) Obteniu una base de $F \cap G$.

Problema 8.3: Considereu els subespais vectorials F i G de $\mathbb{C}^2$ considerat com a $\mathbb{R}$-espai vectorial:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x - iy = 0\}, \qquad G = \operatorname{Env}\big(\{(3, -i), (3 + i, 1 - i)\}\big).$$

Obteniu una base de $F \cap G$.

Problema 8.4: Suposeu que $\mathscr{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ és una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i considereu els subespais vectorials

$$F = \operatorname{Env}\big(\{\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3, 3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3\}\big) \text{ i } G = \operatorname{Env}\big(\{\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3, 3\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3\}\big).$$

Obteniu una base de $F \cap G$.

Problema 8.5: Suposeu que $\mathscr{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ és una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E. Proveu que els subespais vectorials

$$F = \operatorname{Env}\big(\{\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3\}\big) \text{ i } G = \operatorname{Env}\big(\{\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2\}\big)$$

són independents.

Problema 8.6: Suposeu que E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Si S i T són sistemes no buits de vectors de E, proveu que:

(a) $\operatorname{Env}(S \cap T) \subseteq \operatorname{Env}(S) \cap \operatorname{Env}(T)$
(b) $\operatorname{Env}(S) \cup \operatorname{Env}(T) \subseteq \operatorname{Env}(S \cup T)$

Proporcioneu exemples per als quals:

- $\operatorname{Env}(S \cap T) = \operatorname{Env}(S) \cap \operatorname{Env}(T)$
- $\operatorname{Env}(S \cap T) \subset \operatorname{Env}(S) \cap \operatorname{Env}(T)$
- $\operatorname{Env}(S) \cup \operatorname{Env}(T) = \operatorname{Env}(S \cup T)$
- $\operatorname{Env}(S) \cup \operatorname{Env}(T) \subset \operatorname{Env}(S \cup T)$

Problema 8.7: Suposeu que E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita i considereu dos sistemes de vectors linealment independents S i T de E. Proveu que les propietats següents són equivalents:

(a) Els vectors de $S \cap T$ són linealment independents.
(b) $\operatorname{Env}(S \cap T) = \operatorname{Env}(S) \cap \operatorname{Env}(T)$.

Problema 8.8: Considereu els subespais vectorials F i G del problema 8.2. Obteniu una base de $F+G$.

Problema 8.9: Considereu els subespais vectorials F i G del problema 8.3. Obteniu una base de $F+G$.

Problema 8.10: Considereu els subespais vectorials F i G del problema 8.4. Obteniu una base de $F+G$.

Problema 8.11: Suposeu que $\mathscr{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ és una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i considereu els subconjunts

$$\begin{aligned} F &= \{\alpha \boldsymbol{a}_1 + \beta \boldsymbol{a}_2 + \gamma \boldsymbol{a}_3 + \alpha \boldsymbol{a}_4 \in E \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \\ G &= \{\alpha \boldsymbol{a}_2 - \alpha \boldsymbol{a}_3 + \beta \boldsymbol{a}_4 \in E \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Proveu que F i G són subespais vectorials de E i obteniu les dimensions de F, G, $F \cap G$ i $F+G$.

Problema 8.12: En cada cas, trobeu dos subespais vectorials F i G de $\mathbb{R}^3$ tals que:

(a) $\dim(F \cap G) = \min\{\dim F, \dim G\}$.
(b) $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$.
(c) $\dim(F \cap G) < \min\{\dim F, \dim G\}$ i $\dim(F+G) < \dim F + \dim G$.

Problema 8.13: Suposeu que E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita. Si F i G són subespais vectorials de E, proveu que

$$\dim(F \cap G) \leq \min\{\dim F, \dim G\} \quad \text{i} \quad \dim(F+G) \leq \dim F + \dim G.$$

Problema 8.14: Suposeu que E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial i que F, G i H són subespais vectorials de E. Proveu que $(F \cap H) + (G \cap H) \subseteq (F+G) \cap H$. És certa la igualtat?

Problema 8.15: Suposeu que F i G són subespais vectorials d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Si $\dim(F+G) - \dim(F \cap G) = 1$, proveu que $F+G = F$ i $F \cap G = G$ (o $F+G = G$ i $F \cap G = F$).

Problema 8.16: Suposeu que $A \in \mathscr{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ i que $B \in \mathscr{M}_{q\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Proveu que $\operatorname{Fil}(A) + \operatorname{Fil}(B) = \operatorname{Fil}\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$
(b) Proveu que $\operatorname{Nul}(A) \cap \operatorname{Nul}(B) = \operatorname{Nul}\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$

(c) Utilitzeu els apartats anteriors per a calcular

$$\dim\big(\mathrm{Fil}\,(A) \cap \mathrm{Fil}\,(B)\big) \quad \text{i} \quad \dim\big(\mathrm{Nul}\,(A) + \mathrm{Nul}\,(B)\big)$$

en funció de $\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{rg}(B)$ i $\mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$.

(d) Deduïu de l'apartat anterior que

$$\dim\big(\mathrm{Nul}\,(A) + \mathrm{Nul}\,(B)\big) + \dim\big(\mathrm{Fil}\,(A) \cap \mathrm{Fil}\,(B)\big) = n.$$

Problema 8.17: Considereu les matrius

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 8 & -2 & 6 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}).$$

(a) Obteniu una base de cadascun dels subespais vectorials $\mathrm{Fil}\,(A)$, $\mathrm{Fil}\,(B)$, $\mathrm{Fil}\,(A) + \mathrm{Fil}\,(B)$ i $\mathrm{Fil}\,(A) \cap \mathrm{Fil}\,(B)$.

(b) Obteniu una base de cadascun dels subespais vectorials $\mathrm{Nul}\,(A)$, $\mathrm{Nul}\,(B)$, $\mathrm{Nul}\,(A) \cap \mathrm{Nul}\,(B)$ i $\mathrm{Nul}\,(A) + \mathrm{Nul}\,(B)$.

Problema 8.18: En l'espai vectorial real $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ de les funcions reals de variable real considereu els conjunts F, G i H següents:

$$\begin{aligned} F &= \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ és acotada}\}, \\ G &= \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ ès polinòmica}\}, \\ H &= \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ és polinòmica sense terme independent}\}. \end{aligned}$$

(a) Proveu que F, G i H són subespais vectorials de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.

(b) Proveu que F i G no són independents.

(c) Proveu que F i H són independents.

Problema 8.19: Demostreu el teorema 8.5.

Problema 8.20: (a) Suposeu que E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita i que F és un subespai vectorial de E. Proveu que existeix un subespai vectorial G de E que és complementari de F.

(b) Suposeu que $E = \mathbb{R}^2$ i que $F = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$. Trobeu dos subespais vectorials G i H de E tals que $G \neq H$ i ambdós subespais siguen complementaris de F.

Problema 8.21: En el $\mathbb{K}$-espai vectorial $\mathbb{K}^n$ considereu els subconjunts

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_n = 0\}, \\ G &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0\}. \end{aligned}$$

Proveu que F i G són subespais vectorials de $\mathbb{K}^n$ que són complementaris.

Problema 8.22: En el $\mathbb{K}$-espai vectorial $\mathbb{K}[\mathrm{x}]$ considereu els subconjunts

$$F = \{a_0 + a_2\mathrm{x}^2 + a_4\mathrm{x}^4 + \cdots \mid a_{2i} \in \mathbb{K} \text{ per a } i = 0,1,2\dots\}$$
$$G = \{a_1\mathrm{x} + a_3\mathrm{x}^3 + a_5\mathrm{x}^5 + \cdots \mid a_{2i+1} \in \mathbb{K} \text{ per a } i = 0,1,2\dots\}.$$

Proveu que F i G són subespais vectorials de $\mathbb{K}[\mathrm{x}]$ que són complementaris.

Problema 8.23: Suposeu que E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial i que F i G són subespais vectorials de E. Suposeu també que $\mathscr{V}$ i $\mathscr{W}$ són bases de F i G respectivament.

(a) Si $\mathscr{V} \cap \mathscr{W} = \emptyset$, proveu que F i G són independents.
(b) Si $\mathscr{V} \cap \mathscr{W} = \emptyset$ i $\mathscr{V} \cup \mathscr{W}$ és una base de E, proveu que F i G són complementaris.

Problema 8.24: Demostreu el teorema 8.6.

Problema 8.25: Suposeu que E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial i que F_1, F_2 i F_3 són subespais vectorials de E. Proveu que:

(a) $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$.
(b) $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$.
(c) $F_3 \cap \big(F_2 + (F_1 \cap F_3)\big) = (F_1 \cap F_3) + (F_2 \cap F_3)$.
(d) Si $F_1 \subseteq F_3$, aleshores $F_3 \cap (F_2 + F_1) = F_1 + (F_2 \cap F_3)$.

Problema 8.26: Suposeu que $\mathscr{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ és una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i considereu el subconjunt

$$F = \{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

(a) Proveu que F és un subespai vectorial de E.
(b) Obteniu una base $\mathscr{V}$ de F.
(c) Si $G = \mathrm{Env}\big(\{\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_4\}\big)$, obteniu una base de $F + G$ i una altra de $F \cap G$.
(d) Són F i G independents? Són F i G complementaris?

Problema 8.27: Suposeu que $\mathscr{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ és una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i considereu el subconjunt $F = \{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 \in E \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

(a) Proveu que F és un subespai vectorial de E.
(b) Obteniu una base $\mathscr{V}$ de F.
(c) Si $G = \mathrm{Env}\big(\{\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3\}\big)$, obteniu una base de $F + G$ i una altra de $F \cap G$.
(d) Són F i G independents? Són F i G complementaris?

Problema 8.28: Suposeu que $\mathscr{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ és una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i considereu el subconjunt $F = \{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 \in E \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.

(a) Proveu que F és un subespai vectorial de E.
(b) Obteniu una base $\mathscr{V}$ de F.

(c) Obteniu una base $\mathscr{U}$ de E tal que $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$.

(d) Utilitzeu els apartats anteriors per a obtenir un subespai vectorial G de E que siga complementari de F.

Problema 8.29: Suposeu que $\mathscr{U} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ és una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i considereu els subespais vectorials F_1 i F_2 de E tals que:

$$F_1 = \{x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 + x_4\boldsymbol{u}_4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ y } x_3 + x_4 = 0\},$$
$$F_2 = \operatorname{Env}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_4, 3\boldsymbol{u}_1 + 7\boldsymbol{u}_4\}).$$

Proveu que F_1 i $F2$ són complementaris.

Problema 8.30: En l'espai vectorial $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ considereu els subespais vectorials S i W de les matrius simètriques i antisimètriques respectivament (vegeu el problema 5.40). Proveu que S i W són complementaris.

Problema 8.31: En el conjunt $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ considereu els subespais vectorials L i U formats per les matrius triangulars inferiors i superiors respectivament (vegeu el problema 5.41). Proveu que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = L + U$. Són L i U complementaris?

Problema 8.32: En l'espai vectorial $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ considereu els subespais vectorials S, de les matrius simètriques, i $T = \{[a_{ij}] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0, \text{ si } i \le j\}$. Proveu que S i T són complementaris.

Problema 8.33: En el $\mathbb{K}$-espai vectorial U de les matrius triangulars superiors (vegeu el problema 5.41), considereu els subconjunts F i G tals que

$$F = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ es diagonal}\} \quad \text{i} \quad G = \{[a_{ij}] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0, \text{ si } i < j\}.$$

Proveu que F i G són subespais vectorials de U que són complementaris.

Problema 8.34: Suposeu que $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_5\}$ és una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i considereu els subespais vectorials:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \operatorname{Env}\big(\{\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3 + 2\boldsymbol{b}_4 + 3\boldsymbol{b}_5, \boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2 - 3\boldsymbol{b}_3 + 4\boldsymbol{b}_4 + 2\boldsymbol{b}_5,\\
&\qquad\qquad 2\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3 - 2\boldsymbol{b}_4 + 9\boldsymbol{b}_5\}\big),\\
F_2 &= \operatorname{Env}(\{\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_4 + \boldsymbol{b}_5, \boldsymbol{b}_1 + 5\boldsymbol{b}_2 - 6\boldsymbol{b}_3 + 6\boldsymbol{b}_4 + 3\boldsymbol{b}_5\}),\\
G_1 &= \{x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3 + x_4\boldsymbol{b}_4 + x_5\boldsymbol{b}_5 \mid 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, x_4 - 3x_5 = 0\},\\
G_2 &= \{x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3 + x_4\boldsymbol{b}_4 + x_5\boldsymbol{b}_5 \mid 3x_1 - 3x_2 - x_4 = 0, 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}.
\end{aligned}$$

Obteniu les dimensions dels subespais vectorials:

(a) F_1, F_2, $F_1 \cap F_2$ i $F_1 + F_2$.

(b) G_1, G_2, $G_1 \cap G_2$ i $G_1 + G_2$.

(c) $F_1 \cap G_1$ i $F_1 + G_1$.

(d) $F_2 \cap G_2$ i $F_2 + G_2$.

(e) $F_1 + F_2 + G_1 + G_2$.

(f) $F_1 + G_1 + F_2 + G_2$.

Problema 8.35: Proporcioneu un $\mathbb{K}$-espai vectorial E i subespais vectorials F_1, F_2, F_3 de E tals que $E = F_1 + F_2 + F_3$, $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{\mathbf{0}\}$, però $F_1 \cap F_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, $F_1 \cap F_3 \neq \{\mathbf{0}\}$ i $F_2 \cap F_3 \neq \{\mathbf{0}\}$.

Problema 8.36: En el $\mathbb{K}$-espai vectorial $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ considereu el subespai vectorial L, de les matrius triangulars inferiors (vegeu el problema 5.41), i els subespais vectorials F i G del problema 8.33. Proveu que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = L \oplus F \oplus G$.

Problema 8.37: Suposeu que E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial i que $F_1, F_2, \ldots, F_p$ són subespais vectorials de E. Si $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, proveu que $F_i \cap F_j = \{\mathbf{0}\}$ per a $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ amb $i \neq j$.

Problema 8.38: Demostreu el teorema 8.10.

Problema 8.39: Demostreu el teorema 8.11.

Problema 8.40: Suposeu que E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial i que F_1, F_2 i F_3 són subespais vectorials de E. Proveu que

$$\begin{aligned}\dim(F_1 + F_2 + F_3) \leq \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 - \dim(F_1 \cap F_2)\\ - \dim(F_1 \cap F_3) - \dim(F_2 \cap F_3) + \dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3)\,.\end{aligned}$$

Proporcioneu un exemple on la desigualtat siga estricta.

Problema 8.41: Suposeu que F_1, F_2, F_3, F_4 són subespais vectorials d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Proveu que

$$\begin{aligned}&\dim F_{i_1} + \dim F_{i_2} + \dim F_{i_3} + \dim F_{i_4}\\ &\quad - \dim\left(F_{i_1} \cap F_{i_2}\right) - \dim\left((F_{i_1} + F_{i_2}) \cap F_{i_3}\right) - \dim\left((F_{i_1} + F_{i_2} + F_{i_3}) \cap F_{i_4}\right)\end{aligned}$$

és independent de la permutació (i_1, i_2, i_3, i_4) de $(1, 2, 3, 4)$.

Problema 8.42: Demostreu el teorema 8.12

Problema 8.43: Suposeu que $\mathscr{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ és una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i considereu el subespai vectorial F de E tal que

$$F = \{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 \in E \mid x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0\}\,.$$

(a) Obteniu una base de F i una altra de E/F.

(b) Obteniu les coordenades de $(\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 + 6\boldsymbol{a}_4) + F$ en la base obtinguda en l'apartat anterior.

Problema 8.44: Suposeu que $\mathscr{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5\}$ és una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i considereu els subespais vectorials

$$\begin{aligned}G &= \mathrm{Env}\left(\{\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_5,\ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_4\}\right),\\ H &= \mathrm{Env}\left(\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5\}\right).\end{aligned}$$

Obteniu bases de:

(a) $G,\ H,\ G\cap H$ i $G+H$.
(b) E/G i E/H.
(c) $G/(G\cap H)$ i $(G+H)/G$. Existeix alguna relació entre tots dos espais vectorials?

Problema 8.45: En l'espai vectorial real $\mathbb{R}_3[\mathrm{x}]$ considereu el subconjunt

$$F=\left\{\mathfrak{a}(\mathrm{x})\in\mathbb{R}_3[\mathrm{x}]\mid \mathfrak{a}(-1)=\mathfrak{a}(1)=0\right\}.$$

(a) Proveu que F és un subespai vectorial de $\mathbb{R}_3[\mathrm{x}]$.
(b) Defineixen els polinomis $1+3\mathrm{x}-7\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}^3$ i $-2+2\mathrm{x}-4\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}^3$ la mateixa classe de congruència en $\mathbb{R}_5[\mathrm{x}]/F$?
(c) Obteniu una base i la dimensió de $\mathbb{R}_5[\mathrm{x}]/F$.
(d) Obteniu les coordenades, en la base de l'apartat anterior, de la classe de congruència definida pel polinomi $1+2\mathrm{x}+3\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}^3$.

Problema 8.46: Considereu l'espai vectorial real $\mathbb{R}_3[\mathrm{x}]$ com a subespai vectorial de l'espai vectorial real $\mathbb{R}_5[\mathrm{x}]$.

(a) Si $\mathfrak{a}(\mathrm{x}),\mathfrak{b}(\mathrm{x})\in\mathbb{R}_5[\mathrm{x}]$, establiu les condicions perquè $\mathfrak{a}(\mathrm{x})$ i $\mathfrak{b}(\mathrm{x})$ definisquen la mateixa classe de congruència de $\mathbb{R}_5[\mathrm{x}]/\mathbb{R}_3[\mathrm{x}]$.
(b) Obteniu una base i la dimensió de $\mathbb{R}_5[\mathrm{x}]/\mathbb{R}_3[\mathrm{x}]$.

Problema 8.47: En l'espai vectorial real $\mathbb{R}_2[\mathrm{x}]$ considereu el subconjunt

$$F=\left\{\mathfrak{a}(\mathrm{x})\in\mathbb{R}_3[\mathrm{x}]\mid \int_{-1}^{1}\mathfrak{a}(\mathrm{x})=0\right\}.$$

(a) Proveu que F és un subespai vectorial de $\mathbb{R}_2[\mathrm{x}]$.
(b) Obteniu una base de F i una altra de $\mathbb{R}_2[\mathrm{x}]/F$.

Problema 8.48: Suposeu que E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial i que F, G són subespais vectorials de E tals que $F\subseteq G$ i considereu $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\in E$.

(a) Si $\boldsymbol{u}_1+F,\boldsymbol{u}_2+F,\ldots,\boldsymbol{u}_p+F$ són linealment dependents en E/F, proveu que $\boldsymbol{u}_1+G,\boldsymbol{u}_2+G,\ldots,\boldsymbol{u}_p+G$ són linealment dependents en E/G.
(b) Deduïu de l'apartat anterior que $\dim(E/F)\geq\dim(E/G)$.