# B.3 - LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE 1VR

Una función es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

$f: D \longrightarrow B$

A cada elemento del dominio le asignamos un único punto de B que llamamos $f(x) \in B$

$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = x^2 \end{array}\right\}$ i.e.

$D \subseteq \mathbb{R}$ A, D lo llamamos dominio
$B \subseteq \mathbb{R}$ A, B lo llamamos codominio

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \equiv$ recta real ampliada

## Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ Decimos que $x \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de $A$ si cualquier intervalo abierto que contiene a $x$ corta a $A$.

### Ejercicio

Sea $A = [0, 1]$ $x$ es punto de acumulación de $A \Longleftrightarrow x \in [0, 1]$
$\equiv [(a,b) \cap A] \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \equiv [(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A] \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$

Sea $A = (0, 1)$ $x$ es punto de acumulación de $A \Longleftrightarrow x \in [0, 1]$
$\equiv [(a,b) \cap A] \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \equiv [(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A] \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$

Sea $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ $x$ es punto de acumulación de $A \Longleftrightarrow x = 0$
$\equiv [(a,b) \cap A] \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \equiv [(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A] \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$

## Proposición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un punto $x \in \mathbb{R}$ es de acumulación de $A$ sí y solo si existe una sucesión $(x_n)_n$ en $A \setminus \{x\}$ convergente a $x$

$$x \text{ punto de acumulación} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_n \rightsquigarrow x \text{ en } A \setminus \{x\}$$

## Definición

Sea $f: D \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación en $D$, decimos que $f$ converge a $L$ en $c$ ($L = \lim_{x \to c} f(x)$) si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\underbrace{|x-c|}_{d(x,c)} < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x-c| < \delta \mid |f(x) - L| < \varepsilon$$

## Proposición

Sea $f: D \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ punto de acumulación de $D$, entonces

$$L = \lim_{x \to c} f(x) \Longleftrightarrow L = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \ \forall \text{sucesión } (x_n)_n \text{ en } D \setminus \{c\} \text{ convergente a } c$$

# Condición de Cauchy

Si $\exists \lim_{x\to c} f(x) \iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ : si $0<|x-c|<\delta$, $0<|y-c|<\delta$ con $x,y\in D \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

## Definición

Sea $f: D\to\mathbb{R}$ y $c\in\mathbb{R}$ un punto de acumulación en $D\cap(-\infty,c)$, decimos que el límite de $f$ en $c$ por la derecha es $L$ si: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0: 0< x-c <\delta \mid |f(x)-L|<\varepsilon$ $\quad L=\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(c^+)$

Sea $f: D\to\mathbb{R}$ y $c\in\mathbb{R}$ un punto de acumulación en $D\cap(c,+\infty)$, decimos que el límite de $f$ en $c$ por la izquierda es $L$ si: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0: 0< x-c <\delta \mid |f(x)-L|<\varepsilon$ $\quad L=\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(c^-)$

Corolario: $\exists \lim_{x\to c} f(x) \iff \exists \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$

## Propiedades

Sea $f: D\to\mathbb{R}$ y $g: D\to\mathbb{R}$ funciones y $c$ un punto de acumulación de $D$.

- $f(x)\leq g(x)$ para cada $x\in D \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$
- Regla del Sandwich si $h: D\to\mathbb{R}$, $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ $\forall x\in D$ y $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L \Rightarrow$
  $\Rightarrow \exists \lim_{x\to c} h(x) = L$

Punto aislado punto perteneciente a $D$ que no es punto de acumulación de $D$

## Definición

Sea $f: D\to\mathbb{R}$ y $c\in\mathbb{R}$ un punto de acumulación en $D$, decimos que $f$ es continua en $c$ si:
$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0: |x-c|<\delta \mid \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon$

## Teorema

Sea $f: D\to\mathbb{R}$ y $c\in\mathbb{R}$ punto de acumulación de $D$, entonces

$f$ es continua en $c \iff \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Sea $f: D\to\mathbb{R}$ y $c\in\mathbb{R}$ punto aislado de $D$, entonces $f$ es continua en $c$

Demostración

Si $c\in D$ es aislado $\Rightarrow \exists\varepsilon>0$: $D$ no tiene puntos en $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ más que $c$ $((c-\varepsilon,c+\varepsilon)\cap D=\{c\}$

## Teorema

Sea $f: D\to\mathbb{R}$ y $c\in\mathbb{R}$ punto de acumulación de $D$, entonces

$f$ es continua en $c \iff \lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(c)$ para cada sucesión $(x_n)_n$ en $D$ convergente a $c$

Ejemplo

1. $\lim_{x \to c} \sin(x) = \sin(c)$ (si f es seno, coseno, tangente, exponencial, logaritmo ... y $c \in D$) $\Rightarrow$ Son funciones continuas en todo punto de su dominio

2. $\lim_{x \to c} \lfloor x \rfloor =$ sa rallao q flipas