BLOQUE 2 FUNCIONES ENTRE ESPACIOS EUCLÍDEOS, LÍMITES Y CONTINUIDAD

TEMA 1 – LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES Y VECTORIALES. PROPIEDADES Y CONTINUIDAD UNIFORME

- INTRODUCCIÓN

Las motivaciones son múltiples vienen de la física o de la ciencia de ingeniería.
Sean M un punto del espacio de coordenadas (x,y,z) y t el tiempo (mide la variación)

En termodinámica si hay un fluido en M podemos medir la temperatura $T(x,y,z)$ o la presión $P(x,y,z,t)$ (valores reales). Se dice que T y P son funciones escalares. (aquellas que dependen de valores reales, vs las funciones vectoriales, que trabajan con un vector)

En electromagnetismo tenemos el campo eléctrico $\vec{E}(x,y,z,t)$. Por eso necesitamos hablar de funciones con varias variables.

Limitaremos, para entenderlo mejor, nuestro trabajo a dos o tres variables, pero todo lo que vamos a ver se puede generalizar a más de tres variables, i.e. $\mathbb{R}^n$

Teníamos funciones con una variable f y ahora vamos a considerar funciones del tipo g.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to f(x)$$

$$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \underset{(x_1 \dots x_n)}{x} \to g(x) = (g_1(x_1,\dots,x_n), g_2(x_1,\dots,x_n) \dots g_n)$$

Vocabulario

Si $m=1$, f se llama campo escalar
Si $m>1$, f se llama campo vectorial

Entonces debemos ver de nuevo todas las nociones que consideramos el año pasado y lo generalizaremos a varias variables

→ Funciones de dos variables

GENERALIDADES

- **Dominio de definición**

Consideramos $\left. \begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) = z \end{array} \right\}$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \in \mathbb{R}\}$$

① $f(x,y) = ax + by + c$ donde $a,b,c \in \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R}^2$

② $g(x,y) = x^3 - 4xy + xy^3 + 1$

$D_f = \mathbb{R}^2$

③ $h(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$

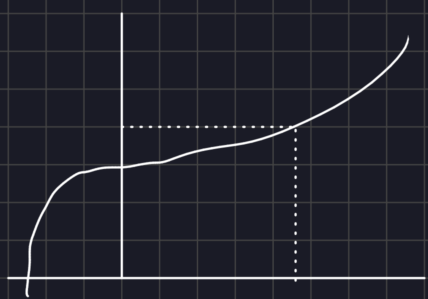
$D_f = [-1,1] \times [-1,1] \to$ (un cuadrado) $\square$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

En el caso de una variable tenemos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$R_f = \{(x, f(x)), x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2$$

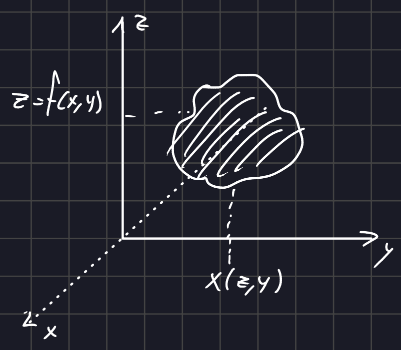


Para dos variables, z

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y)$$

Para varios puntos, tendremos una superficie

$$Rf = \{(x,y,f(x,y)),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$$



COROLARIO $\longrightarrow$ se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$

"le aplasté un robot a mi hija, ya no me habla no sé porqué"

LÍNEA Y CURVA DE NIVEL

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo, buscamos una pareja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = y$

— DEFINICIÓN

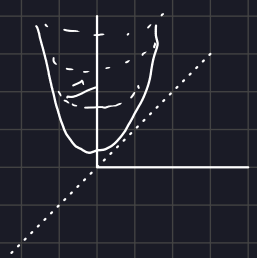
Llamamos curva de nivel λ al conjunto $C_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = \lambda\}$

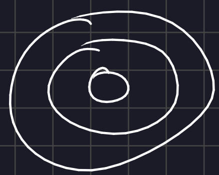
Ejemplo:

Sea f una función tq $f(x,y) = x^2+y^2$ entonces $C_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = \lambda\}$

- $\lambda \geq 0$ por ser una suma de cuadrados
- Si $\lambda = 0$, entonces $x^2+y^2=0 \iff x=y=0$
- Si $\lambda = 1$, entonces $x^2+y^2=1 \Rightarrow$ CÍRCULO DE CENTRO $(0,0)$ y RADIO 1

Si damos a λ otros valores reales positivos obtenemos un paraboloide de revolución





$\longrightarrow$ Curvas de nivel

☆ Ej. 5-6 sin diferenciación, usar desigualdad Cauchy-Schwarz

$\rightarrow$ Límites

$\rightarrow$ Generalizable a $\mathbb{R}^n$

Consideraremos un campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tq $(x,y) \longrightarrow f(x,y)$

DEFINICIÓN

(x_0, y_0)

Sea $M_0(x_0,y_0)$ tq f puede ser definida en este punto. Se dice que f admite un límite ℓ en M_0 si:

All — Exists

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \ (|x-x_0| < \eta ; |y-y_0| < \eta) \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

↳ cambiar ε cambia a η, η depende de ε

↳ se cumplen las 2 condiciones

↳ no hace falta abs() porque ε es estrictamente >0

☆ Notación (internacional (lim vs lím))

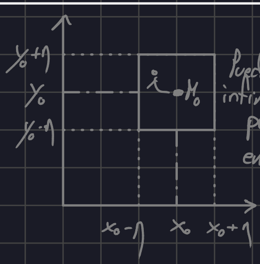
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \quad \text{ó} \quad \lim_{M \to M_0} f(M) = \ell$$

↳ Como coordenadas

↳ Como punto en un plano

☆ Comentarios

1) $\ell \in \mathbb{R}$ 2)



Puedes aproximarte de infinitas formas a los puntos M, $\square$ es un entorno

Consideramos a todas las trayectorias M que se acercan a M_0. El entorno no tiene porqué ser un cuadrado. Hay una infinidad de maneras de acercarse a M_0. Esta 'riqueza' nos dará más propiedades

3) Todas las propiedades de los límites de las funciones de UNA variable son generalizables a funciones de varias variables

4) UNICIDAD DEL LÍMITE, si el límite existe, es único

"hay que alejarse para torturarlo, pero sin gritos"

Ejemplos:

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$$

$f(x,y)$ definida $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \iff (x,y) = (0,0)$

el y del numerador es el que cambia posiblemente el signo

Lo trabajamos acotando $f(x,y)$ $$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2|y|}{x^2} = |y|$$

Lo ($\leq$) va a ser siempre =

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, por el teorema de la guardia civil,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

$$0 = -(x^2+y^2) \leq f(x,y) \leq (x^2+y^2) = 0$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} (1-\cos(x+y))^{\tan(x+y)} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t))^{\tan(t)} =$$

$1^{\pm\infty}$

Trabajamos con un cambio de variable $(x+y) = t$

Fórmula de Euler generalizada

Sea $h(t)$ una función tq $\lim_{t\to t_0} h(t) = 0$, entonces $\lim_{t\to t_0} (1+h(t))^{1/h(t)} = e$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (1-\cos t)^{\frac{\sin t}{\cos t}} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (1+(-\cos t))^{-\frac{1}{\cos t}\cdot(-\cos t)\tan t}$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (1-\cos t)^{-\frac{1}{\cos t}\cdot(-\sin t)} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \left((1-\cos t)^{-\frac{1}{\cos t}}\right)^{-\sin t} =$$

$a^{b\cdot c} = (a^b)^c$

si existe el lim

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \left((1-\cos t)^{-\frac{1}{\cos t}}\right)^{\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} -\sin t} = e^{-1}_1$$

$$\longrightarrow \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} (1-\cos t)^{\tan t} = e^{-1}_2$$

Por 1 y 2 $\iff \lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} f(x,y) = \frac{1}{e}$

(si $1 \neq 2$ el límite no existiría)

Lo es único por com 4.

④ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{x^2y^2\frac{1}{(x^2+y^2)x^2y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left((1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}\right)^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} =$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\quad \Downarrow$ con la fórmula de Euler

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} = e^{\alpha} = 1 \quad \alpha = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \lambda = 0 \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{x^2y^2}{y^2} = x^2$

↳ / Cambio a polares $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ con $r \geq 0$ $\quad \theta \in [0, 2\pi]$

⑤ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

Cambio de Variable : polares

$x = r\cos(\theta)$
$y = r\sin(\theta)$ con $r \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ $\xrightarrow{\text{entonces}}$ $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{r^2(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))}{r^2} = \underbrace{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}_{\text{depende de } \theta}$

eso implica que el límite no existe.

* Comentario

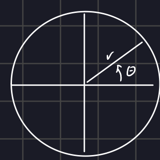
Consideraremos a los límites iterados:

Calculamos: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$

¿Qué pasa si?

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{y^2}\right) = -1$

Dos límites distintos entonces no hay límite



$\forall \theta \in \mathbb{R}$

TEOREMA ↱ generalizable a $\mathbb{R}^n$

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Si f admite como límite ℓ en (x_0, y_0) entonces,

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right) = \ell$

Ejemplo:

Dada la función g tq $g(x,y) = \frac{3xy}{x^2+y^2}$

① Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ en los casos siguientes:

(i) A lo largo de la recta de la ecuación $x=0$
(ii) A lo largo de la recta de la ecuación $y=x$
(iii) A lo largo de la recta de la ecuación $x = \frac{y}{2}$
(iv) A lo largo de la recta de la ecuación $y = x^2$
(v) Concluir

② Estudiar el comportamiento de $g(x,y)$ alrededor de $(0,0)$ a lo largo del haz de rectas de ecuación $y=ax$. Concluir

$\to$ ① $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0$ ③ $\lim\limits_{(\frac{y}{2},y)\to(0,0)} g(\frac{y}{2},y) = \frac{6}{5}$

② $\lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$ ④ $\lim\limits_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{3x^3}{x^2+x^4} = 0$

$\Rightarrow$ No existe porque no coinciden!

② Si $y = ax$ entonces tenemos

$\lim\limits_{(x,ax)\to(0,0)} \frac{3ax^2}{(1+a^2)x^2} = \frac{3a}{1+a^2} \Rightarrow$ el límite depende de a y por ello de la trayectoria

↳ $\Rightarrow$ tendría que ser independiente de $a \Rightarrow \nexists \lim$

Ejercicio

Comprobar que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy^2}{x^2+y^4}$ no existe

$$\lim_{(x,a\sqrt{x})\to(0,0)} \frac{5a^2x^2}{x^2(1+a^4)} = \lim_{(x,a\sqrt{x})\to(0,0)} \frac{5a^2}{1+a^4} = \frac{5a^2}{1+a^4}$$

$\longrightarrow$ depende de a, el valor del límite flúctúa en función de a

Ejercicio

En cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; -1<x<1, -1<y<1\}$
b) $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1<x^2+y^2<4\}$
c) $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y>0\}$

Se pide

1. Determinar la frontera de A
2. Demostrar que A es abierto
3. Sea $X_0\in A$ determinar un valor de δ tq $E(X_0,\delta)\subset A$

1. a) $fr(A) = \{(1,y)\in\mathbb{R}^2, y=[-1,1]\} \cup \{(x,1), x\in[-1,1]\} \cup \{(-1,y), y=[-1,1]\} \cup \{(x,-1), x=[-1,1]\}$
   b) $fr(A) = \{[(x,y): 1 = x^2+y^2] \cup [(x,y): 4 = x^2+y^2]\}$

2. a) b) y c) son abiertos ya que no contienen a sus fronteras $\{A\cap fr(A) = \emptyset\}$

3. a) $\delta = \|(1,1) - (|x_0|, |y_0|)\|_2 - \varepsilon \quad \forall\varepsilon>0$
   b)

-DEFINICIÓN

Si $\forall\theta$ tenemos

$\lim_{r\to0^+} g(r,\theta) = l$, diremos que el límite l es uniformemente independiente de θ si:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ (independiente de θ) tq si $(\theta,r)\in dom(g)$ y $0<r<\delta \Rightarrow |g(r,\theta)-l| < \varepsilon$

- TEOREMA

Sea $f: A\longrightarrow\mathbb{R}$ con $A\subseteq\mathbb{R}^2$ y (a,b) un punto de acumulación de A, si $\exists \lim_{r\to0^+} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ y es, además, uniformemente independiente de $\theta \Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

- TEOREMA

Si $\exists$ una función $h: E(0,\delta)\longrightarrow\mathbb{R}^{(+)}$ tq: $\forall(\theta,r)\in dom(g), |g(r,\theta)-l| \leq h(r)$ y si $\lim_{r\to0^+} h(r) = 0, \Rightarrow \lim_{r\to0^+} g(r,\theta) = l$ (debes conocer l antes de empezar)

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$
$(x,y)\longrightarrow f(x,y) = \frac{x^2(1+2y)+y^2}{x^2+y^2}$ } $\to$ por eso quita el pto $(0,0)$

Calcula $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \forall(x,y)\neq(0,0)$

Fijamos una variable a 0 y vemos cómo se comporta el límite, en este caso tomamos como conjetura $l=1$

1. Pasamos a Polares:

$$g(r,\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta(1+2r\sin\theta)+r^2\sin\theta}{r^2} = \underbrace{\cos^2\theta(1+2r\sin\theta)+\sin^2\theta}_{\cos^2+\sin^2} = 1+2r\cos^2\theta\sin\theta$$

$\boxed{x=r\cos\theta;\ y=r\sin\theta}$

Veamos que podemos decir de $|g(r,\theta)-1|$. Tenemos: $|g(r,\theta)-1| = |2r\cos^2\theta\sin\theta| \leq \underbrace{2r}_{h(r)}$ (r es radio y $r\geq 0$)

tenemos $\lim_{r\to 0^+}(2r) = 0$ Concluimos q $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

— Teorema

Sean $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \in \mathbb{R}^n$ y a un punto de acumulación de A

ⓐ Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ entonces $f(x)$ está acotada en algún entorno de a

ⓑ Si además $l \neq 0$ entonces $\exists$ entorno reducido de a en el cual f y l tienen el mismo signo

— Teorema

Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea a un punto de acumulación de A f vector de funciones

Tenemos $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Son equivalentes

ⓐ Existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$

ⓑ Existe el límite de $f_i(x)$ cuando $x \to a$ $\forall i = 1, \dots, n$

En tal caso: $\lim_{x\to a} f(x) = (\lim_{x\to a} f_1(x), \lim_{x\to a} f_2(x), \dots, \lim_{x\to a} f_n(x))$

Demostración

ir a ver ej 1 hoja 1

"Trabajáis, dirijo"

Vamos a usar el siguiente resultado (cf TD nº = 1)

$$|f_i(x) - l_i| \underset{①}{\leq} \| f(x) - l \| \underset{②}{\leq} |f_1(x) - l_1| + |f_2(x) - l_2| + \dots + |f_n(x) - l_n|$$

$a \Rightarrow b$

Sea $\varepsilon > 0$ si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ existe sigifica que existe $\delta > 0$ tq si $x \in A$ y $0 < \|x - a\| < \delta$

$\Longrightarrow \| f(x) - l \| < \varepsilon$. Usando la desigualdad ① tenemos $|f_i(x) - l_i| < \varepsilon$ $\forall i = 1, \dots, m$ lo que implica $\lim_{x\to a} f_i(x) = l_i$

$b \Rightarrow a$

Dado $\varepsilon > 0$, si $\lim_{x\to a} f_i(x) = l_i$ $\exists \delta_i$ tq si $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - l_i| < \frac{\varepsilon}{n}$ $\forall i = 1, \dots, n$

Si $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, si $l = (l_1, \dots, l_n)$, entonces $\forall x \in A$, $0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - l_i| < \frac{\varepsilon}{n}$ $\forall i = 1, \dots, n$

$\underset{②}{\Rightarrow} \| f(x) - l \| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = l$

Continuidad

— Definición

Se dice que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en $M_0(x_0, y_0)$ si $\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

$$\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)\right)$$

TEOREMA

Todas las propiedades de continuidad para las funciones de una variable se generalizan a funciones con varias variables

TEOREMA

Si f es continua en M_0, entonces está acotada en un entorno de M_0

Ejemplos

① Las funciones

polinomiales de la forma:

$$f(x,y)=\sum_{i,j=1} \underbrace{a_{ij}}_{\in\mathbb{R}} x^i y^j$$ son continuas en $\mathbb{R}^2$

② Sea g una función continua en $I\subset\mathbb{R}$ $g: I\to\mathbb{R}$. Sea $f: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,y)\longmapsto f(x,y)=g(x)$

entonces f es continua en $I\times\mathbb{R}$

③ Sean f y g continuas en (x_0,y_0) sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\longmapsto F(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$ entonces F es continua en (x_0,y_0)

Ejemplos

① Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $\longrightarrow$ Pasamos a Polares $\longrightarrow$

$$g(r,\theta)=\frac{r^2\cos^2\theta\cdot r\sin\theta}{r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta}=\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$$

$$\lim_{r\to 0} g(r,\theta)=\frac{\cos^2\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$$ depende de θ $\Rightarrow\nexists$ el lim

4,5 F

$\Rightarrow$ No es continua en $(0,0)$

② Sea g tq

$$g(x,y)=\begin{cases}-x\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\longrightarrow$ Valor Absoluto $\longrightarrow$ $0\leq|g(x,y)|\leq|x|$

y como $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$, lo q implica q

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0=g(0,0)$$

$\Rightarrow$ Es continua en $(0,0)$

③

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\longrightarrow$ Polares $\longrightarrow$ $g(r,\theta)=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$ $\rightarrow$ lim no depende de r, no existe

$\Rightarrow$ no es continua

④

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\rightarrow\left(\frac{r^4\cos^2\theta\sin\theta}{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta-2r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\sin^2}-\frac{r^2\cos^2\sin}{r^2\cos^2\sin^2-\sin 2\theta}\right)$$

$$\begin{cases}x=t\\ y=t\,h(t)\end{cases}$$ y vemos que $\lim_{t\to 0} t\,h(t)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{t^4h^4(t)}{t^4h^4(t)+(t-th(t))^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2h^2(t)}{t^2h^2(t)+(1-h(t))^2}$$

- Hay que ver qué ocurre con $h(t)$. Para ello, hay que hacer 3 estudios:

1. Si $h(t)\xrightarrow[t\to 0]{} 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\frac{0}{1}=0$
2. Si $h(t)\xrightarrow[t\to 0]{}\infty$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\frac{\text{"}0\text{"}}{\infty}=0$
3. Si $h(t)\xrightarrow[t\to 0]{} K\neq 1$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\frac{0}{(1-K)^2}=0$

El problema está en si $k=1$ el límite anterior es una FI

(5) Estudiar la continuidad en $(0,0)$ de f:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Sea $\begin{cases} x=t \\ y=th(t)\end{cases}$ y $\lim_{t\to 0} th(t)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{t^3+t^3h^3(t)}{t^2+t^2h^2(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t(1+h^3(t))}{1+h^2(t)}$$

1. $h(t)\xrightarrow[t\to 0]{} 0$ $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$
2. $h(t)\xrightarrow[t\to 0]{}\infty$ $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\frac{"0"}{\infty}=0$
3. $h(t)\xrightarrow[t\to 0]{} K$ $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\frac{0}{K}=0$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

$\Rightarrow$ Es continua !!

Teorema

Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, son equivalentes

1. f es continua en $\mathbb{R}^n$
2. si V es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$
3. si V es un cerrado de $\mathbb{R}^n$, entonces $f^{-1}(V)$ es cerrado de $\mathbb{R}^n$

Teorema de valores medios

Sea $f:A\to\mathbb{R}$ con $A\subseteq\mathbb{R}^n$ una función continua

Sean $a,b\in A$ tales $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}^n, x=a+t(b-a), 0\leq t\leq 1\}\subset A$ y $f(a)<f(b)$

Entonces $\forall z\in[f(a),f(b)]$, $\exists c\in[a,b] \mid f(c)=z$

"mi Adèle Sdèle"

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$$

Teorema de Weiestrass

Sea $f:A\to\mathbb{R}^n$ con $A\in\mathbb{R}^n$

Si f es continua en A y si A es conjunto, entonces $f(A)$ es también compacto

La definición de continuidad para 1 variable es generalizable a varias (Continua en cada uno de los puntos del conjunto)

- Definición

Se dice que $f:A\to\mathbb{R}^n$ con $A\subseteq\mathbb{R}^n$ es uniformemente continua en A si:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon\ \forall x,a\in A\ \|x-a\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$$

Teorema de Heine

Sea $f:A\to\mathbb{R}^n$ con $A\subseteq\mathbb{R}^n$

si f es continua en A y A es compacto, entonces f es uniformemente continua en A

"Espera un momento, estoy muriéndome... ...es que respirar tiza..."

Teorema

Sea $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una aplicación lineal es equivalente

1. T es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$
2. Existe un $K>0$ tq $\underbrace{\|T(x)\|}_{\text{lo en } \mathbb{R}^n} \leq K\|x\|$