Teorías gauge no abelianas

Recordemos que la teoría dada por

$$\mathcal{L} = (D^\mu \psi)^+ (D_\mu \psi) - m^2 \psi^+ \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

con $D_\mu \psi = (\partial_\mu \psi + i q A_\mu \psi)$ es invariante gauge local bajo las transformaciones

$$\psi \to \psi e^{i\alpha(x)}$$

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x)$$

Hagámoslo usando transformaciones infinitesimales (que es lo que vamos a estudiar después)

$$\psi \to (1 + i\alpha) \psi$$

$$\partial_\mu \psi \to \partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \alpha) \psi + i\alpha (\partial_\mu \psi)$$

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x)$$

Vamos hasta $O(\alpha)$:

$$\psi^\dagger\psi \to (\psi^\dagger - i\alpha\psi^\dagger)(\psi + i\alpha\psi^+) = \psi^\dagger\psi + O(\alpha^2)$$

$$D_\mu\psi \to [\partial_\mu\psi + i(\partial_\mu\alpha)\psi + i\alpha(\partial_\mu\psi) +$$

$$+ iq\left(A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha\right)(\psi + i\alpha\psi)]$$

$$= [\partial_\mu\psi + iqA_\mu\psi] + i\alpha[\partial_\mu\psi + iqA_\mu\psi] + O(\alpha^2)$$

$$= (1 + i\alpha)D_\mu\psi + O(\alpha^2)$$

luego $(D^\mu\psi^+)(D_\mu\psi) \to (D^\mu\psi^+)(D_\mu\psi) + O(\alpha^2)$ y la teoría es invariante.

¿Qué ocurre si el grupo de simetría no es abeliano? Yang-Mills (1954) se preguntaron qué ocurría en el caso de $U(1) \to SU(2)$.

Consideremos una teoría de Dirac con dos tipos de fermiones de igual masa.

$$\mathcal{L} = \bar{f}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)f + \bar{g}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)g$$

Si definimos

$$\Psi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \qquad \overline{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{f} & \bar{g} \end{pmatrix} \text{, queda}$$

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\Psi$$

Introduzcamos ahora las matrices de Pauli de isospin, $\vec{\tau}$. Son las mismas que $\vec{\sigma}$ pero así recordamos que actúan sobre dos tipos de fermiones (recordad p y n: dobletes de isospin).

$\mathcal{L}$ es invariante bajo una transformación de SU(2) global

$$\Psi \to e^{\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}}\,\Psi$$

$$\overline{\Psi} \to \overline{\Psi}\, e^{-\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}}$$

$(\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z))$.

Para seguir profundizando en la teoría, consideremos transformaciones infinitesimales

$$\Psi \to \left(1 + \frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}\right)\Psi$$

Ejemplo sencillo: demostrar que $\mathcal{L}$ es invariante bajo SU(2) global usando transformaciones infinitesimales.

Vayamos ahora al caso de invariancia SU(2) local: $\alpha \to \alpha(x)$. Como vimos antes:

- El término de masa no es problemático.
- La derivada sí lo es:

$$\partial_\mu \Psi \to \partial_\mu \Psi + \frac{i}{2}\left(\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}(x)\right)\partial_\mu \Psi + \underbrace{\frac{i}{2}\left(\vec{\tau}\cdot\partial_\mu\vec{\alpha}(x)\right)\Psi}_{\text{recordemos que este era el término problemático}}$$

- ¿Qué hicimos?

$U(1) \longrightarrow$ introducimos un campo gauge, A_μ

$\dim(U(1)) = 1 \longrightarrow 1$

• Como $\dim(SU(2)) = 3$, vamos ahora a introducir <u>3 campos gauge vectoriales</u>

(necesitamos 3 porque tenemos 3 derivadas "que arreglar").

índices internos $= 1, 2, 3$

$$\vec{W}_\mu(x) = \left(W_\mu^1(x), W_\mu^2(x), W_\mu^3(x)\right)$$

índices de Minkowski $= 0, 1, 2, 3$.

• Igual que habíamos hecho para $U(1)$:

$D_\mu = \partial_\mu + iq A_\mu$, ahora tenemos

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} g \, \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu(x)}$$

constante de acoplamiento (carga de la teoría)

Convenio (pudiera ser el opuesto)

La idea es la de siempre: <u>quiero que la derivada transforme como el campo</u>