# Práctica 2

## Métodos Numéricos y Computación

### Interpolación polinómica *(Tema 2)*

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son puntos de la recta real distintos dos a dos (llamados nodos de interpolación), el problema de la interpolación polinomial de Lagrange consiste en determinar, si existe, un polinomio $P_n$ , de grado menor o igual que $n$, que pase por todos ellos ($P_n(x_i) = y_i$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n$). En muchas ocasiones, $y_i = f(x_i)$, para $i = 0, 1, \ldots, n$, donde $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$.

En las clases teóricas hemos comprobado que, en las condiciones anteriores, el polinomio interpolador siempre existe y es único. Analíticamente, su cálculo se puede realizar desde tres puntos de vista diferentes (a partir de la matriz de Vandermonde, de los polinomios fundamentales de Lagrange y de las diferencias divididas de Newton).

La librería `numpy` de Python contiene la función `polyfit`, que permite calcular el polinomio interpolador. En esta práctica, implementaremos el primer y el tercer método. Los polinomios serán representados a partir de sus coeficientes ordenados en un array (habrá que prestar atención al orden en que se presentan en cada ocasión) y la evaluación del polinomio se realizará por medio de la función `polyval` (en `numpy`).

**Ejercicio 1** *Usando la función* `polyfit`*, obtén el polinomio interpolador de grado 4 de la función:*

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

*tomando nodos equiespaciados en el intervalo* $[-1, 1]$*. Representa gráficamente los valores de la función en los nodos, la función y el polinomio.*

**Ejercicio 2** *Construye la función* `PolLagrange`*, que halle el polinomio interpolador de Lagrange a partir de la matriz de Vandermonde (usa la función* `np.vander`*) tomando como argumento* $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ *donde* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *son puntos de la recta real distintos dos a dos.*

**Ejercicio 3** *Usa la función* `PolLagrange` *para determinar el polinomio interpolador de Lagrange que pase por seis puntos generados aleatoriamente cuyas abscisas estén en orden creciente en* $[-5, 4]$ *y las ordenadas varíen entre* $[-2, 6]$*. Compara el resultado con el polinomio que proporciona la función* `polyfit` *para la interpolación (busca información sobre sus argumentos).*

**Ejercicio 4** *Dada la función* $f(x) = e^x \cos 3x$*, en el intervalo* $[-2, 3]$*, halla los valores de la función en los puntos* $\{-1.5, -0.75, 0.1, 1.5, 2, 2.7\}$*. Halla el polinomio interpolador de dicha función en los puntos obtenidos. Representa en una misma figura los puntos dados, la función y el polinomio interpolador de Lagrange.*

**Ejercicio 5** *Implementa una función* **`dif_divididas`** *que, dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots,$ $(x_n, y_n)$ donde $x_0, x_1, \dots, x_n$ son puntos de la recta real distintos dos a dos, devuelva las diferencias divididas en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$.*

**Ejercicio 6** *Usa la función* **`dif_divididas`** *para crear otra función, llamada* **`PolNewton`***, que calcule el polinomio interpolador de grado menor o igual a $n$, cuando se dan $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots,$ $(x_n, y_)$ donde $x_0, x_1, \dots, x_n$ son puntos de la recta real distintos dos a dos.*

**Ejercicio 7** *Usa la función* **`PolNewton`** *para obtener el polinomio interpolador de la función $f(x) = e^x \cos 3x$ en los nodos $\{-1.5, -0.75, 0, 1, 1.5, 2, 2.7\}$. Compara el resultado con los polinomios obtenidos con las funciones* **`polyfit`** *y* **`PolLagrange`***.*

**Ejercicio 8** *Sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador para la función $f(x) = \cos^5(x)$ en $n+1$ puntos equidistantes en el intervalo $[0, 2]$. Construye dicho polinomio para $n = 6, 8, 10$ y representa el error de interpolación $E_n(x) = |P_n(x) - f(x)|$. ¿Qué podemos observar?*

**Ejercicio 9** *Consideremos la función error de Gauss definida por:*

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

*a) Obtén el valor de $erf(x_i)$ donde $x_i = 0.2i$, para $i = 0, 1, \dots, 5$.*

*b) Usa la interpolación lineal y cuadrática para dar una aproximación de $erf(1/3)$ y evalúa el error cometido.*

Hasta ahora, en la mayoría de las ocasiones, hemos calculado el polinomio interpolador usando, o bien nodos equiespaciados, o bien un conjunto de nodos dados. Sin embargo, hay otras opciones que mejoran el resultado. Por ejemplo, los nodos de Chebyshev son las raíces del polinomio de Chebyshev en el intervalo considerado $[a, b]$ y se obtienen como:

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), i = 0, 1, \dots, n.$$

Estos nodos no son más que las raíces del polinomio de Chebyshev correspondiente en $[-1, 1]$ trasladadas al intervalo $[a, b]$.

**Ejercicio 10** *Implementa una función* **`nodCheb`** *que, dado el intervalo $[a, b]$ y un entero $n$, devuelva los $n+1$ nodos de Chebyshev en $[a, b]$.*

**Ejercicio 11** *Dada la función $f(x) = e^x \cos 3x$, en el intervalo $[-2, 3]$, obtén el polinomio interpolador de grado cinco de dicha función en los correspondientes nodos de Chebyshev. Representa en una misma figura los puntos dados por los nodos de Chebyshev, la función, el polinomio obtenido en el ejercicio 4 con los nodos dados y el polinomio obtenido con los nodos de Chebyshev.*