MECÁNICA NEWTONIANA

HOJA 1 :

EJERCICIO 1: Demostrar que si una partícula, sometida a la acción de una fuerza central atractiva, describe una elipse con foco el c.d.m., la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de masas. La ec. de la elipse en coord. polares es:

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

. Al ser central, sólo depende de r : $\begin{cases} F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta}) \end{cases}$

Derivamos nuestra expresión de r : $\dot{r} = \frac{-p}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\cdot(-\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot\dot{\theta}$

Volvemos a derivar: $\ddot{r} = \frac{(\varepsilon p\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \varepsilon p\cdot\mathrm{sen}\,\theta\cdot\ddot{\theta})(1+\varepsilon\cos\theta)^2 + p\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}(1+\varepsilon\cos\theta)\cdot 2\cdot\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\varepsilon}{(1+\varepsilon\cos\theta)^4}$

lo arreglamos: $\ddot{r} = \frac{p\varepsilon(\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta})\cancel{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{\cancel{4}\,2}} + \frac{p\varepsilon^2\mathrm{sen}^2\theta\cdot\dot{\theta}^2\cdot 2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}$

Ahora como $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$, agrupamos y $\ddot{r} = \frac{r^2}{p}\cdot\varepsilon(\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}\,\theta\cdot\ddot{\theta}) + 2r^3\cdot\frac{\varepsilon^2}{p^2}\,\mathrm{sen}^2\theta\cdot\dot{\theta}^2$

y lo mismo con la primera derivada: $\dot{r} = \frac{r^2}{p}\cdot\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\dot{\theta}$

Sustituimos en $\begin{cases} F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m\left(\frac{r^2}{p}\varepsilon\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{r^2}{p}\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta} + \underbrace{2r^3\cdot\frac{\varepsilon^2}{p^2}\mathrm{sen}^2\theta\cdot\dot{\theta}^2}_{2\dot{r}r\cdot\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}} - r\dot{\theta}^2\right) \\ 0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$

Queda $F(r) = m\left(\frac{r^2}{p}\varepsilon\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \underline{\frac{r^2}{p}\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\ddot{\theta}} + \underline{2\dot{r}r\frac{\varepsilon}{p}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}} - r\dot{\theta}^2\right)$

$$F(r) = m\left(\frac{r^2}{p}\varepsilon\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \cancel{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}^{\,0}\left(\frac{r}{p}\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta\right) - r\dot{\theta}^2\right)$$

Por tanto $F(r) = m\dot{\theta}^2\left(\frac{\varepsilon}{p}r^2\cos\theta - r\right)$. Necesitamos $\cos\theta$ en función de r y lo despejamos de $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta} \iff r + \varepsilon r\cos\theta = p \Rightarrow \cos\theta = \frac{p-r}{\varepsilon r}$

Sustituyendo: $F(r) = m\dot{\theta}^2\left(\frac{\cancel{\varepsilon}}{p}r^{\cancel{2}}\cdot\frac{(p-r)}{\cancel{\varepsilon r}} - r\right) = \left(\frac{r}{p}(p-r) - r\right)m\dot{\theta}^2 = \left(\cancel{r} - \frac{r^2}{p} \cancel{- r}\right)m\dot{\theta}^2$

Queda $F(r) = \frac{-m\dot{\theta}^2 r^2}{p}$, y nos queda sustituir $\dot{\theta}$ en función de r como $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$

Queda $F(r) = \frac{-L^2}{mr^2 p} \Rightarrow \boxed{F(r) \sim \frac{-1}{r^2}}$ ✓

EJERCICIO 2: Lo mismo pero con $r = \dfrac{p}{1+e\cos[(1-\varepsilon)\theta]}$. ¿Cómo depende $F(r)$ de r?

Fuerza central $\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$ y $F = F(r) \Rightarrow \begin{cases} F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \end{cases}$

Derivamos nuestra expresión de r:

$$\dot{r} = \frac{+p(e\,\text{sen}((1-\varepsilon)\theta)\cdot(1-\varepsilon)\dot{\theta}}{(1+e\cos((1-\varepsilon)\theta))^2} = \frac{r^2}{p}e(1-\varepsilon)\,\text{sen}((1-\varepsilon)\theta)\cdot\dot{\theta} \quad \text{(en función de r.)}$$

Volvemos a derivar:

$$\ddot{r} = \frac{e(1-\varepsilon)}{p}\cdot\left(2r\dot{r}\,\text{sen}((1-\varepsilon)\theta)\dot{\theta} + r^2\cos((1-\varepsilon)\theta)\dot{\theta}^2(1-\varepsilon) + r^2\,\text{sen}((1-\varepsilon)\theta)\ddot{\theta}\right)$$

Agrupamos para obtener en algún lado $(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$:

$$\ddot{r} = \frac{e(1-\varepsilon)}{p}\left(\cancelto{0}{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}\cdot(r\,\text{sen}((1-\varepsilon)\theta)) + r^2\cos((1-\varepsilon)\theta)\dot{\theta}^2(1-\varepsilon)\right)$$

por tanto, $\ddot{r} = \dfrac{e(1-\varepsilon)^2}{p}\cdot r^2\cos((1-\varepsilon)\theta)\cdot\dot{\theta}^2$ y por tanto ya tenemos que:

$$F(r) = m\left(\frac{e(1-\varepsilon)^2}{p}r^2\cos((1-\varepsilon)\theta)\dot{\theta}^2 - r\dot{\theta}^2\right) = m\dot{\theta}^2\left(\frac{e(1-\varepsilon)^2}{p}r^2\cos((1-\varepsilon)\theta) - r\right)$$

De nuevo, falta poner el coseno y $\dot{\theta}$ en función de r y por ello sustituimos: $r = \dfrac{p}{1+e\cos((1-\varepsilon)\theta)} \Rightarrow$

$\Rightarrow r + er\cos((1-\varepsilon)\theta) = p \Rightarrow \cos((1-\varepsilon)\theta) = \dfrac{p-r}{er}$ y $\dot{\theta} = \dfrac{L}{mr^2}$.

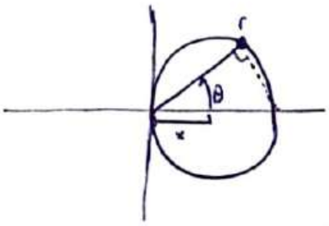
Queda: $F(r) = m\cdot\dfrac{L^2}{m^2r^4}\left(\dfrac{\cancel{e}(1-\varepsilon)^2}{p}\cdot r^{\cancel{2}}\cdot\dfrac{(p-r)}{\cancel{er}} - r\right) = \dfrac{L^2}{mr^4}\left(r\dfrac{(1-\varepsilon)^2}{p}(p-r) - r\right) =$

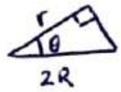
$$= \frac{L^2}{mr^4}\left(r\frac{(1-\varepsilon)^2}{\cancel{p}}\cancel{p} - \frac{(1-\varepsilon)^2}{p}r^2 - r\right) = \frac{L^2}{r^4m}\left(r\left((1-\varepsilon)^2 - r\frac{(1-\varepsilon)^2}{p} - 1\right)\right)$$

$$\boxed{F(r) = \frac{-L^2(1-\varepsilon)^2}{r^2mp} + \frac{((1-\varepsilon)^2-1)L^2}{mr^3}} \checkmark$$

$\hookrightarrow F(r) = \dfrac{L}{r^3m}\left((1-\varepsilon)^2 - \dfrac{r(1-\varepsilon)^2}{p} - 1\right)$

EJERCICIO 3: Demostrar que si una partícula, sometida a la acción de una fuerza central atractiva dirigida hacia un punto de su órbita, describe una circunferencia, la fuerza es inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia al cdm.



$\longrightarrow$ 

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{r}{2R} \Rightarrow r(\theta) = 2R\cos\theta.$

Derivamos la expresión dos veces:

$$\dot r = -2R\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot \dot\theta$$

$$\ddot r = -2R\cos\theta\,\dot\theta^2 - 2R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\ddot\theta = -r\dot\theta^2 + \dot r\,\frac{\ddot\theta}{\dot\theta}$$

Como la fuerza es central $\Rightarrow \vec F = m\vec a$ depende únicamente de $r \Rightarrow \begin{cases} F(r) = m(\ddot r - r\dot\theta^2) \\ 0 = m(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(r) = m\left(-r\dot\theta^2 + \dot r\,\dfrac{\ddot\theta}{\dot\theta} - r\dot\theta^2\right) = m\left(-2r\dot\theta^2 + \dot r\left(\dfrac{-2\dot r}{r}\right)\right) = m\left(-2r\dot\theta^2 - 2\,\dfrac{\dot r^2}{r}\right) \\ \dfrac{\ddot\theta}{\dot\theta} = \dfrac{-2\dot r}{r} \end{cases}$$

Ahora sustituimos $\dot r$ por $-2R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot\theta$ y queda: $F(r) = m\left(-2r\dot\theta^2 - \dfrac{2}{r}\cdot(4R^2\mathrm{sen}^2\theta\cdot\dot\theta^2)\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(r) = -2\dot\theta^2 m\left(+r + \frac{4R^2}{r}\mathrm{sen}^2\theta\right) = -2\dot\theta^2 m\left(r + \frac{4R^2}{r}(1-\cos^2\theta)\right).$$

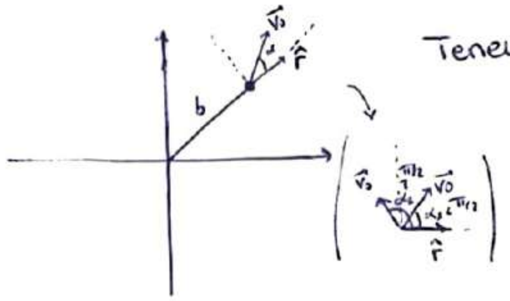
Ahora despejamos de $r = 2R\cos\theta$ el coseno en función de r y lo sustituimos.

$$F(r) = -2m\dot\theta^2\left(r + \frac{4R^2}{r}\left(1 - \frac{r^2}{(2R)^2}\right)\right) = -2m\dot\theta^2\left(r + \frac{4R^2}{r} - \frac{\cancel{4R^2}\,r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}\,\cancel{4R^2}}\right) = -2m\dot\theta^2\cdot\frac{4R^2}{r}$$

Por último despejamos $\dot\theta = \dfrac{L}{mr^2}$ y queda que $F(r) = \dfrac{-8mR^2L^2}{m^2r^5}$.

Por tanto $\boxed{F(r) = \dfrac{-8R^2L^2}{mr^5} \sim \dfrac{1}{r^5}}$ ✓.

- EJERCICIO 4: Una partícula de masa m sometida al campo de fuerzas $\vec{F} = \frac{-K}{r^4}\vec{r}$, $K>0$.
Se encuentra inicialmente a una distancia b del centro de fuerzas, con velocidad $V_0^2 = \frac{K}{mb^2}$,
formando un ángulo inicial α con el versor radial.
a) Demostrar que la partícula caerá sobre el cdf. o se alejará indefinidamente, según $\alpha > \pi/2$ ó $\alpha < \pi/2$.



Tenemos $\vec{F} = \frac{-K}{r^4}\vec{r} = \frac{-K}{r^3}\hat{r}$ y podemos calcular el potencial:

$$U(r) = -\int F\,dr = -\int \frac{-K}{r^3}\,dr = -\frac{K}{2r^2}.$$

· Ahora podemos calcular el potencial effectivo:

$$V(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{2r^2} = \frac{L^2 - mK}{2mr^2}$$

Tenemos también que $L = mrv\,\mathrm{sen}\,\alpha$,
que en nuestro caso, $r=b$ y $v=v_0$ $\Rightarrow$ $V(r) = \frac{m^2b^2v_0^2\,\mathrm{sen}^2\alpha - mK}{2mr^2} = \frac{mb^2v_0^2\,\mathrm{sen}^2\alpha - K}{2r^2}$

Sustituimos ahora $V_0^2 = \frac{K}{mb^2}$ $\Rightarrow$ $V(r) = \frac{K(\mathrm{sen}^2\alpha - 1)}{2r^2} = \frac{-K\cos^2\alpha}{2r^2}$ ← dependiendo ya sólo de r.

Ahora, sabemos que la energía será $E = \frac{1}{2}m\dot{r} + V(r)$ y podemos aplicar que esta se conserva:

$$E_0 = \frac{1}{2}m\dot{r}_0 + V(r_0) = \frac{1}{2}m\dot{r} + V(r) = E$$

$$E_0 = \frac{1}{2}m\cos^2\alpha V_0^2 + V(b) = \frac{m\cos^2\alpha V_0^2}{2} - \frac{K\cos^2\alpha}{2b^2} = \frac{K\cos^2\alpha}{2b^2} - \frac{K\cos^2\alpha}{2b^2} = 0.$$ (órbita parabólica)

↳ $\boxed{E = 0 \text{ (se conserva)}}$ $\Rightarrow$ Tenemos $\dot{r} = V_0\cdot\cos\alpha$, entonces:

$\Rightarrow$
- si $\alpha < \pi/2$, tenemos $\dot{r} > 0$ porque $\cos\alpha > 0$ $\Rightarrow$ Se aleja indefinidamente
- si $\alpha > \pi/2$, tenemos $\dot{r} < 0$ porque $\cos\alpha < 0$ $\Rightarrow$ cae hacia el c.d.f.

b) Si $\alpha > \pi/2$, ¿cuánto tiempo tarda la partícula en caer?

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r} + V(r) = 0 \iff \frac{K\cos^2\alpha}{2r^2} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{K\cos^2\alpha}{mr^2} \Rightarrow \dot{r} = \frac{\pm\sqrt{K}\cos\alpha}{\sqrt{m}\,r} = \frac{dr}{dt}$$

Despejando y tomando integrales: $\int_0^t dt = \int_b^0 \frac{\pm\sqrt{m}}{\sqrt{K}\cos\alpha}\cdot r\,dr \Rightarrow t = \pm\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{K}\cos\alpha}\frac{r^2}{2}\Big|_b^0 \Rightarrow$

$\boxed{t = \frac{\sqrt{m}\,b^2}{2\sqrt{K}\cos\alpha}}$ tarda en caer al c.d.fuerzas.

c) Ecuación de la trayectoria.
Partimos también de que $\dot{r}^2 = \frac{K\cos^2\alpha}{mr^2}$ y vamos a introducir que $L^2 = m^2r^4\dot{\theta}^2$ ya que tenemos $\dot{r}^2$
y lo despejamos a raíz de que $\frac{1}{r^2} = \frac{m^2r^2\dot{\theta}^2}{L^2} \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{K\cos^2\alpha}{\cancel{m}}\cdot\frac{m^{\cancel{2}}r^2\dot{\theta}^2}{L^2}$ y despejamos

$\frac{\dot{r}^2}{\dot{\theta}^2} = \frac{Km\cos^2\alpha\, r^2}{L^2}$ y $\frac{\dot{r}^2}{\dot{\theta}^2} = \frac{(dr/dt)^2}{(d\theta/dt)^2} = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$. Tomando raíces: $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sqrt{Km}\cos\alpha\, r}{L}$ ✓

Despejamos e integramos $\int_b^r \frac{dr'}{r'} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{-\sqrt{Km}\cos\alpha}{L}\,d\theta \Rightarrow \ln\frac{r}{b} = \frac{\sqrt{Km}\cos\alpha}{L}(\theta - \theta_0) \Rightarrow \boxed{r = b\cdot e^{\frac{\sqrt{Km}\cos\alpha}{L}(\theta-\theta_0)}}$

↑ ecuación de la trayectoria $r(\theta)$

· **EJERCICIO 6**: $\vec{F} = \frac{-K}{r^n}\hat{r}$. Fuerza central proveniente de una energía potencial. ¿Para qué valores de K y n existen órbitas circulares estables?

Para que el cuerpo orbite, la fuerza debe ser atractiva, y por tanto $K>0$.

Ahora aplicamos las condiciones de órbita circular: $\begin{cases} (1) & \frac{dV}{dr} = 0 \\ (2) & \frac{d^2V}{dr^2} > 0 \end{cases}$

Calculamos el potencial y el potencial efectivo:

$$U(r) = -\int \frac{-K}{r^n}dr = \begin{cases} K \cdot \frac{1}{(1-n)\,r^{n-1}} & \text{si } n \neq 1. \\ K \ln r & \text{si } n = 1. \end{cases} \longrightarrow V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

→ <u>Si $n \neq 1$</u>: $V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{(n-1)\,r^{n-1}}$. Lo derivamos para aplicar (1):

$$\frac{dV}{dr} = \frac{-L^2}{mr^3} + \frac{K}{r^n} = 0 \Rightarrow r^n = \frac{Kmr^3}{L^2}.$$

Si volvemos a derivar para aplicar (2) tenemos $\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{3L^2}{mr^4} - \frac{Kn}{r^{n+1}}$. Sustituimos r^n de (1) y se obtiene que

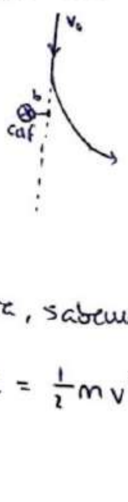
$$\frac{3L^2}{mr^4} - \frac{Kn}{\frac{Kmr^3}{L^2}\cdot r} = \frac{3L^2}{mr^4} - \frac{nL^2}{mr^4} > 0 \iff 3-n>0 \iff \underline{n<3}.$$

→ <u>Si $n=1$</u>: $V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + K\ln r \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{-L^2}{mr^3} + \frac{K}{r} \overset{(1)}{=} 0$. Despejo $r = \frac{Kmr^3}{L^2}$

y $\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{+3L^2}{mr^4} - \frac{K}{r^2} = \frac{3L^2}{mr^4} - \frac{K}{\frac{Kmr^3}{L^2}r} = \frac{3L^2}{mr^4} - \frac{L^2}{mr^4} > 0$, siempre $\Rightarrow$ $n=1$ lo cumple.

Por tanto, necesitamos imponer que $\boxed{\begin{cases} K>0 \\ n<3 \end{cases}}$ para obtener órbitas circulares. ✓

EJERCICIO 5: Una masa m está sometida a una fuerza central de magnitud mc/r^3 (c=cte), repulsiva. A una distancia muy grande de c.d.f., la velocidad es v_0. Si no fuera deflectada, pasaría a una distancia b del centro. ¿Cuál es la distancia mínima al centro en el movimiento real?



Tenemos $\vec{F} = \frac{mC}{r^2}\hat{r}$ repulsiva. Podemos calcular el potencial:

$$U(r) = -\int \frac{mC}{r^3}dr = \frac{mC}{2r^2}$$ y desde aquí calculamos el potencial efectivo.

$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{mC}{2r^2} = \frac{L^2+m^2C}{2mr^2}$$

Ahora, sabemos que se cumple la conservación de la energía, donde la energía es:

$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$. Si tomamos $r_0 \longrightarrow +\infty$, la energía debe ser la misma también

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \cancel{V(r_0)}^{0} \text{ en el infinito.}$$

→ Igualamos a la energía en un punto cercano al cdf: $E = E_0$

$\boxed{E = V(r) \text{ en el mínimo radio}} \Rightarrow E = \frac{L^2+m^2C}{2mr^2}$ y al igualar

$\frac{L^2+m^2C}{2mr^2} = \frac{1}{2}mv_0^2$. Ahora sustituimos también L que es constante ($L = mbv_0$)

Queda $\cancel{m^2}b^2v_0^2 + \cancel{m^2}C = \cancel{m^2}r^2v_0^2 \Rightarrow b^2v_0^2 + C = r^2v_0^2 \Rightarrow \boxed{r_{min} = \sqrt{b^2 + \frac{C}{v_0^2}}}$ ✓

EJERCICIO 7: Una partícula de masa m, momento angular L y sometida una fuerza central con $F = -Kr$ (elástica). ¿Radio de las órbitas circulares? ¿Periodo en condiciones ligeramente alteradas? ¿La órbita alterada sigue siendo cerrada o no?

Tenemos que $\vec{F} = -Kr \cdot \hat{r}$ → sacamos el potencial y el potencial efectivo:

$$U(r) = -\int -Kr = \frac{Kr^2}{2} \Rightarrow V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{Kr^2}{2}.$$

Vamos a obligar a que la órbita sea circular aplicando las condiciones. $\frac{dV}{dr} = 0$:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{-L^2}{mr^3} + Kr = 0 \Rightarrow r^4 = \frac{L^2}{mK} \Rightarrow \boxed{r = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt[4]{mK}}}$$ radio de las órbitas circulares (r_c) ✓

→ Sabemos que la energía es igual al potencial efectivo en el mínimo pero cuando se perturba un poco la órbita, ya no se cumple, ya que se añade un poco de velocidad radial.

↳ Tomamos el desarrollo en serie de Taylor de $V(r)$ y nos quedamos sólo con el primer término.

$$V(r) = V(r_c) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\bigg|_{r_c} (r - r_c)^2 \Rightarrow r - r_c = A\cos(wt + \varphi)$$ ya que oscilará.

Calculamos la segunda derivada de $V(r)$ → $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{-L^2}{mr^3} + Kr\right) = \frac{3L^2}{mr^4} + K$, y la evaluamos

en r_c el radio de órbita circular calculado: $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\bigg|_{r_c} = \frac{3L^2}{m \cdot \frac{L^2}{mK}} + K = \frac{3L^2K}{L^2} + K = 4K$

Sabemos que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y $\omega_r = \sqrt{G/m}$ con $G = \frac{d^2V}{dr^2}\bigg|_{r_c} = 4K \Rightarrow \omega_r = \sqrt{4K/m} = 2\sqrt{\frac{K}{m}}$.

Ahora sacamos ω_θ sabiendo que $\omega_\theta = \dot{\theta}$ y $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$, evaluando el radio r_c:

$$\omega_\theta = \frac{L}{m \cdot \frac{L}{\sqrt{mK}}} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{m}}.$$

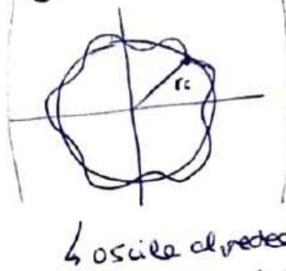
Por tanto, podemos observar que $\boxed{\omega_r = 2 \cdot \sqrt{K/m} = 2 \cdot \omega_\theta}$ → $\boxed{\text{Órbita cerrada.}}$ ✓

el radio se mueve con el doble de velocidad que el ángulo, pero es conmensurable ⇒ se vuelven a unir en algún punto (a dar 2 vueltas).

Tenemos el periodo (T):

por tanto, $T = \frac{2\pi}{\omega_r} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{2\sqrt{K/m}} = \frac{\pi}{\sqrt{K/m}}}$ el periodo. ✓

(*) Algo así:



↳ oscila alrededor del la órbita circular!

→ es una perturbación centrada en r_c

·EJERCICIO 8: Un planeta de masa m y momento angular L, orbita circularmente en torno al sol. Si perturbamos ligeramente la órbita, ¿cuál es su periodo?, ¿la órbita perturbada es cerrada?

Al tratarse de un planeta, la fuerza central que sufre es la gravitatoria: $\vec{F} = \frac{-K}{r^2}\hat{r}$

Calculamos el potencial: $U(r) = -\int \frac{-K}{r^2}dr = \frac{-K}{r}$ y de aquí se obtiene el potencial efectivo $V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}$. Como la órbita es circular, debe cumplir $\frac{dV}{dr} = 0$, por tanto derivamos: $\frac{dV}{dr} = \frac{-L^2}{mr^3} + \frac{K}{r^2} = 0 \iff Kmr = L^2 \iff \boxed{r_c = \frac{L^2}{Km}}$ (radio de la órbita circular).

Ahora, para la perturbación, tomamos el primer término del desarrollo en serie de Taylor de V, es decir, $\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{-L^2}{mr^3} + \frac{K}{r^2}\right) = \frac{3L^2}{mr^4} - \frac{2K}{r^3} = \frac{3L^2 - 2Kmr}{mr^4}$.

Podemos sustituir que $r_c Km = L^2 \Rightarrow \frac{d^2V}{dr^2} = \frac{3L^2 - 2L^2}{mr^4} = \frac{L^2}{mr^4}$

Que podemos dejar, sustituyendo nuestro r_c, como: $\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{L^2}{m \cdot \frac{L^8}{K^4m^4}} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{K^4 m^3}{L^6} = C}$

Entonces tenemos la aproximación $V(r) = V(r_c) + \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{r_c^3}(r - r_c)^2$

$V(r_c) = \frac{r_c Km}{2m r_c^2} - \frac{K}{r_c} = \frac{K}{2r_c} - \frac{K}{r_c} = \frac{-K}{2r_c}$

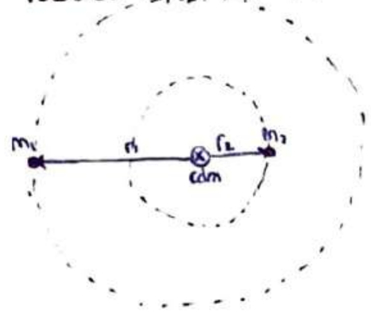
$\Rightarrow$ Podemos calcular el periodo:
$$\left\{\begin{array}{l} \omega_r = \sqrt{C/m} = \sqrt{\frac{m^2K^4}{L^6}} = \frac{mK^2}{L^3} \\ \omega_\theta = \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m \cdot \frac{L^4}{K^2m^2}} = \frac{mK^2}{L^3} \end{array}\right\}$$
Si comparamos $\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = 1$

$\Rightarrow \omega_r = \omega_\theta \Rightarrow$ Órbita cerrada

El periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega_r}$.

Por tanto $\boxed{T = \frac{2\pi}{\frac{mK^2}{L^3}} = \frac{2\pi L^3}{mK^2}}$

EJERCICIO 9: Un sistema binario m_1, m_2, orbitando una en torno a la otra, con radios r_1, r_2 en torno al cdm. Demostrar que $T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}(r_1+r_2)^3$.



Tomamos el cdm. como punto origen $\Rightarrow \frac{m_1\vec{r_1}+m_2\vec{r_2}}{m_1+m_2}=0$.

Consideramos $r_T = r_1 + r_2$ el radio total que separa las masas.

Además, sabemos que $r_1 \cdot m_1 = r_2 \cdot m_2$, lo que nos permite despejar un radio en función del otro $\rightarrow r_1 = \frac{m_2}{m_1}\cdot r_2$

Entonces $r_T = \frac{r_2 m_2}{m_1} + r_2 = r_2\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right) = r_2\left(\frac{m_2+m_1}{m_1}\right) \Rightarrow r_2 = \frac{m_1 \cdot r_T}{m_1+m_2}$

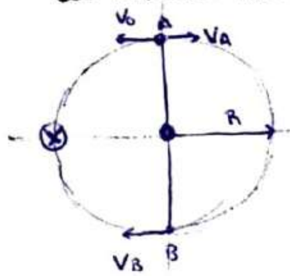
De manera análoga, si despejo $r_2 = \frac{m_1}{m_2}r_1 \Rightarrow$ nos lleva a $r_1 = \frac{m_2 \cdot r_T}{m_1+m_2}$.

→ Como están orbitando, sabemos que $F_1(r) = m_1 \cdot a_n$ y además $F_1(r) = \frac{Gm_1m_2}{r_T^2}$.

De la primera se obtiene que $F_1(r) = m_1 \cdot \frac{V_1^2}{r_1} = m_1 \frac{r_1^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}{r_1} = \frac{4m_1r_1\pi^2}{T^2}$. Ahora lo igualamos a esta segunda y queda $\frac{G\cancel{m_1}m_2}{r_T^2} = \frac{4\pi^2\cdot \cancel{m_1}\cdot r_1}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r_1 r_T^2}{Gm_2}$.

Sustituimos la expresión de r_1 y queda $T^2 = \frac{4\pi^2 \cancel{m_2}\cdot r_T^3}{G\cancel{m_2}(m_1+m_2)} \Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\cdot(r_1+r_2)^3}$ ✓

EJERCICIO 10: Dos astronautas están en la misma órbita de radio R, en puntos opuestos de la misma. El A tiene un objeto quiere hacer llegar a B. ¿Cómo puede lanzarlo? ¿Cuánto tardará en llegar a B en términos del periodo de la órbita? ¿Cómo es la órbita que describe el objeto?



Como están en órbita, se cumple que $F = \cancel{m}a = \frac{GM\cancel{m}}{r^2} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$.

Queda $V_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. El punto de encuentro entre B y el objeto será justo a mitad de camino, si lanzamos el objeto con la velocidad que lleva B.

Como tardaría T en recorrer 1 vuelta entera $(2\pi R) \Rightarrow$ en recorrer $\frac{\pi}{2}R$ tarda $\boxed{t = T/4}$ ✓

Para lanzarlo con la velocidad que lleva B, $V_B = V_A$, debemos darle una velocidad tal que $V_0 - V_A = V_B$

Por tanto $\boxed{V_0 = 2V_B}$ → suponiendo $V_A = V_B$.

Como lo lanzamos a la velocidad de órbita, el objeto describirá también una órbita circular hasta cruzarse con B.

EJERCICIO 11: En un sistema solar hipotético los planetas se mueven en órbitas circulares y la razón de sus periodos es como la razón de sus radios al cuadrado. ¿Cómo es la Fuerza central en este caso? Nos dicen que $\frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$.

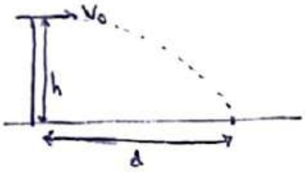
Como describen órbitas circulares, $F = ma = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$

Ahora aplicamos la definición de ω como $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow F = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$

Como $\frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \Rightarrow T_1 = \underbrace{\frac{T_2}{R_2^2}}_{cte (C)} \cdot R_1^2 \Rightarrow T_1 = C \cdot R_1^2$.

Por tanto, nos queda $F = m \cdot \frac{4\pi^2}{C^2 r^4} r \Rightarrow \boxed{F = \frac{m4\pi^2}{C^2} \cdot \frac{1}{r^3}}$ ✓ (Depende de la distancia al cubo)

EJERCICIO 12: Se arroja una pelota con una velocidad paralela a la superficie de la Tierra, a una distancia h de la misma. Describe la trayectoria que sigue la pelota antes de caer al suelo.



Sobre la pelota actúa la fuerza de la gravedad (en el eje Y) que se añade a la velocidad inicial $\vec{v_0} = v_0 \hat{x}$.

La trayectoria que sigue es la de un tiro parabólico.

Separamos el movimiento en los dos ejes (componentes):

$$\begin{cases} \cdot \text{ Eje X: } x = \cancel{x_0}^{0} + v_0 t \Rightarrow d = v_0 t \rightarrow (v_0 \text{ cte}) \\ \cdot \text{ Eje Y: } y = h - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

De la segunda despejamos el tiempo que tarda en caer: $\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$

y sustituyendo en la primera tenemos la distancia a la que llega:

$$\boxed{d = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

EJERCICIO 13: A partir de la igualdad $\vec{A}\cdot\vec{r} = |\vec{A}|\cdot r\cdot\cos\theta$, donde $\vec{A}$ es el vector de Runge-Lenz, demuestra que las órbitas son cónicas. Relaciona el módulo del vector de Runge-Lenz con la excentricidad de la órbita.

Sabemos que la fuerza es $F = m\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ y que $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$, por tanto $\vec{P} = m\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Escribimos $\vec{r} = r\cdot\hat{r}$ y derivamos: $\vec{P} = m\dot{r}\hat{r} + mr\frac{d\hat{r}}{dt}$.

Ahora, usamos que $\vec{P}\times\vec{L} \underset{(P\ cte)}{\uparrow}= \frac{d}{dt}(\vec{P}\times\vec{L}) \Rightarrow \frac{F(r)}{r}(\vec{r}\times\vec{L}) = \frac{F(r)}{r}(\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{P})) = \frac{F(r)}{r}(\vec{r}mr\dot{r} - \vec{P}r^2)$

Podemos sustituir el valor de $\vec{P}$ y queda: $\frac{F(r)}{r}\left(\bar{r}mr\dot{r} - \left(m\dot{r}\hat{r} + mr\frac{d\hat{r}}{dt}\right)r^2\right)$

desarrollamos: $\frac{F(r)}{r}\left(\cancel{\bar{r}mr\dot{r}} - \cancel{m\dot{r}\bar{r}r} - mr^3\frac{d\hat{r}}{dt}\right) = \frac{-F(r)}{r}mr^3\frac{d\hat{r}}{dt} = -mr^3\cdot\frac{d\hat{r}}{dt}\left(\frac{-K}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{r} =$

$= \frac{d}{dt}(m\cdot K\cdot\hat{e}_r)$

Por tanto $\frac{d}{dt}(\bar{P}\times\bar{L}) = \frac{d}{dt}(mK\hat{e}_r) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\underbrace{\bar{P}\times\bar{L} - mK\hat{e}_r}_{\bar{A}=cte.}) = 0.$

$\bar{A} = \bar{P}\times\bar{L} - mK\hat{e}_r$ constante, el vector de Runge-Lenz, que sabemos que $\vec{A}\perp\vec{L}$

por tanto $\bar{A}\cdot\bar{L} = 0$.

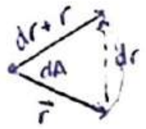
El enunciado nos dice $\bar{A}\cdot\bar{r} = |\bar{A}|\cdot r\cos\theta$ y $\bar{A}\cdot\bar{r} = \underbrace{(\bar{P}\times\bar{L})\cdot\bar{r}}_{L^2} - mKr$

Queda $|\bar{A}|\cdot r\cos\theta = L^2 - mKr \Rightarrow r = \frac{L^2}{|A|\cos\theta + mK}$.

Se puede escribir como $\boxed{r = \frac{L^2/mK}{1+\epsilon\cos\theta}}$ donde $\epsilon = \frac{|A|}{mK}$ la excentricidad.

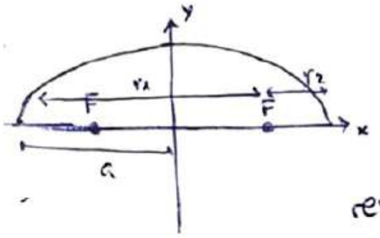
EJERCICIO 14: Demostrar que la velocidad areolar de una partícula, $\frac{dS}{dt}$, en el problema de Kepler (ritmo al cual el vector posición de la partícula barre áreas) es constante e igual a $\frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2m}$.
donde $m \equiv$ masa de la partícula y $\ell \equiv$ momento angular.

La clave es definir $dr = v\,dt$ y tomar el área como si fuese un triángulo.



$$\Rightarrow dA = \frac{1}{2}\vec{r}\times d\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}\,dt \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v} = \frac{\vec{r}\times m\vec{v}}{2m} = \frac{\ell}{2m}}$$

EJERCICIO 15: Demostrar que, para órbitas elípticas en el problema de Kepler, el semieje mayor de la órbita es $a = -\frac{\alpha}{2E}$, donde $\alpha = GMm$ y $E \equiv$ energía de la partícula.



→ Sabemos que $r_1 + r_2 = 2a$

Buscamos r_{min}. Como es elíptica, $V(R) = E$ y tendrá dos resultados (r_1 y r_2) $\Rightarrow a = \frac{r_1+r_2}{2}$

La fuerza es $F = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \Rightarrow U(r) = -\frac{GMm}{r} = \frac{-\alpha}{r} \Rightarrow V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$

Entonces. $r_{min} \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow E = \cancel{\frac{1}{2}m\dot{r}^2} + V(R) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{L^2 - 2mr\alpha}{2mr^2}$.

Despejamos $\frac{L^2 - 2mr\alpha}{2mr^2} - E = 0 \Rightarrow L^2 - 2mr\alpha - E2mr^2 = 0$.

Resolvemos la ecuación $2Emr^2 + 2m\alpha r - L^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{-2m\alpha \pm \sqrt{4m^2\alpha^2 + 8Em^2L^2}}{4Emr^2} \Rightarrow$

$$r = \frac{-\alpha \pm \overbrace{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2EL^2}{m}}}^{C}}{2E} \quad r_1 = \frac{-\alpha + C}{2E}, \quad r_2 = \frac{-\alpha - C}{2E} \Rightarrow \boxed{a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{-\alpha + \cancel{C} - \alpha - \cancel{C}}{4E} = \frac{-\alpha}{2E}}$$

EJERCICIO 16: Haciendo uso de la ley de las áreas y de que el área de una elipse es πab, demostrar que para órbitas elípticas en el problema de Kepler se cumple que $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$.

Partimos de $A = \pi ab$ y $V = \frac{\ell}{2m} = cte. = \frac{dA}{dt} \Rightarrow \frac{\ell}{2m}dt = dA \Rightarrow \frac{\ell}{2m}T = A$ integrando.

Entonces $T = \frac{2m}{\ell}\cdot\pi ab$. Sustituimos ahora que $b = a\cdot\sqrt{1-e^2}$: $T = \frac{2m}{\ell}a^2\pi\sqrt{1-e^2}$.

Ahora sustituimos $e = \sqrt{1 + \frac{E\cdot 2\cdot \ell^2}{m\alpha^2}} \Rightarrow T = \frac{2m}{\ell}a^2\pi\sqrt{\cancel{1} - \cancel{1} - \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}} = \frac{2m}{\cancel{\ell}}\cdot a^2\pi\cdot\frac{\cancel{\ell}}{\alpha}\sqrt{\frac{-2E}{m}}$.

Elevando al cuadrado, $T^2 = \frac{4\pi^2 m^{\cancel{2}} a^4}{\alpha^2}\left(\frac{-2E}{\cancel{m}}\right) = \frac{4\pi^2 m a^4}{\alpha}\left(\frac{-2E}{\alpha}\right) = \frac{4\pi^2 m a^4}{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)$

Queda $T^2 = a^3\cdot\frac{4\pi^2 m}{\alpha} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{\alpha}{4\pi^2 m}$ y como $\alpha = GMm$

→ Se concluye que $\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}}$.

EJERCICIO 17. Se desea poner un satélite de masa m en órbita circular alrededor de la Tierra a altura h sobre la superficie. Se traslada a esa altura y se le comunica una velocidad.

a) Obtener esa velocidad.

Si orbita circularmente $\Rightarrow \begin{cases} E = E_{min} \\ \frac{dV}{dr} = 0 \\ \frac{dV}{dr'} > 0 \end{cases}$

Calculamos la velocidad necesaria para que orbite a esa altura $r = R_T + h$.

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad y \quad F = ma = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{GM}{r} = v^2 \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{GM/r}}$$

(con r)

b) Si le hubiéramos comunicado una velocidad un 20% mayor, ¿qué órbita describiría?

Para ver el tipo de órbita, estudiamos la energía E.

Primero calculamos el potencial y el potencial efectivo: $U(r) = -\int F dr = \frac{-K}{r}$ con $K = GMm$.

y por tanto $V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}$.

Calculamos la energía con v calculada en (a) $\Rightarrow E = E_c + V(r)$.

$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}$. Calculamos el radio mínimo: $\frac{dV}{dr} = \frac{-L^2}{mr^3} + \frac{K}{r^2} = 0$

Sustituimos en E la velocidad y el radio calculados. $r_m = \frac{L^2}{mK}$ (radio mínimo)

$E_m = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow E_m = -0'5\left(\frac{GMm}{r}\right)$ (en la circular)

Ahora, sea $V_1 = 1'2 \cdot V \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} \cdot 1'2^2 V^2 - \frac{GMm}{r} = -0'28 \cdot \left(\frac{GMm}{r}\right) \Rightarrow \boxed{E_1 > E_m \text{ pero } E_1 < 0} \Rightarrow \boxed{\text{Órbita elíptica}}$

c) ¿Y si hubiera sido un 20% menor?

Ahora tenemos $V_2 = 0'8V \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} \cdot 0'8^2 V^2 - \frac{GMm}{r} = -0'68\left(\frac{GMm}{r}\right) \Rightarrow \boxed{E_2 < E_m}$

No puede llegar a orbitar, se cae al suelo

d) ¿Cuánto deberíamos aumentar la velocidad de la de la órbita circular para que realizara una parabólica?

Será órbita parabólica $\Leftrightarrow E = 0 \Rightarrow$ Necesitamos $\frac{1}{2}V_3^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow V_3^2 = 2\frac{GM}{r}$

Teníamos $v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow \boxed{V_3 = \sqrt{2} \cdot V}$

e) ¿En cuánto deberíamos disminuirla para que realizara una órbita que en el punto más cercano (perigeo) rozara la superficie de la Tierra?

HOJA 3:

EJERCICIO 1: Considera dos sistemas de referencia inerciales, S y S'. Con S' moviéndose con velocidad v constante en el eje $\hat{x}$. En t=0 s., los sistemas coinciden, y en es instante se produce un destello en el origen. Según el observador de S, un frente de onda esférico se expande con velocidad c. Muestra que el observador de S' observa un frente de onda similar desde su origen.

En el sistema S, el frente de onda es esférico, por lo que se expande como:
$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$. Ahora vamos a aplicar las transformaciones de Lorentz sobre t y sobre la coordenada x (ya que $z=z'$, $y=y'$). $\gamma(v)=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Tenemos: $\begin{cases} x=\gamma(v)\cdot(x'-vt') \\ t=\gamma(v)\cdot\left(t'-\frac{vx'}{c^2}\right)\end{cases}$ y lo sustituimos en la ecuación del frente de onda:

$$x^2+y^2+z^2=\gamma^2(v)\cdot(x'-vt')^2+y'^2+z'^2=c^2\cdot\left(\gamma(v)\cdot\left(t'-\frac{vx'}{c^2}\right)\right)^2$$

$$\gamma^2(v)\cdot\left(x'^2-2x'vt'+v^2t'^2\right)+y'^2+z'^2=c^2\cdot\gamma^2(v)\cdot\left(t'^2-2\frac{vx'}{c^2}t'+\frac{v^2x'^2}{c^4}\right)$$

$$\gamma^2(v)\cdot x'^2-\cancel{2\gamma^2(v)x'vt'}+\gamma^2(v)v^2t'^2+y'^2+z'^2=\gamma^2(v)c^2t'^2-\cancel{2vx't'\gamma^2(v)}+\gamma^2(v)\frac{1}{c^2}v^2x'^2$$

Agrupamos los términos que llevan x' y t' para dejarlo de la forma:

$$\left(\gamma^2(v)-\frac{v^2\gamma^2(v)}{c^2}\right)x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2\left(\gamma^2(v)-\frac{v^2\gamma^2(v)}{c^2}\right).$$

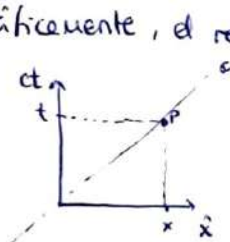
Vamos a calcular el valor del paréntesis a parte: $\gamma^2(v)-\frac{v^2}{c^2}\gamma^2(v)=\gamma^2(v)\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\dfrac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1.$

Por tanto nos queda $\boxed{x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2}$ ✓ → un frente de onda esférico con centro el origen de S'!

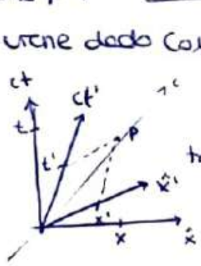
EJERCICIO 2: Un suceso tiene lugar en x = 60 m., $t=8\cdot10^{-8}$ s. en el sistema S (y=0, z=0). El sistema S' posee una velocidad $\frac{3}{5}c$ en el eje X. Los orígenes de S y S' coinciden en t=t'=0. ¿Cuáles son las coordenadas espacio-temporales del suceso en S'? Obtenlos de forma gráfica también.

Aplicamos las transformaciones de Lorentz sobre nuestros datos en S. Como $v=\frac{3}{5}c \Rightarrow \gamma(v)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(3/5)^2}}=$
$=5/4 \Rightarrow \begin{cases} x'=\gamma(v)\cdot(x-vt) \\ t'=\gamma(v)\cdot\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x'=5/4\cdot\left(60-\frac{3}{5}\cdot3\cdot10^8\cdot8\cdot10^{-8}\right)=57\,m} ✓ \\ \boxed{t'=5/4\left(8\cdot10^{-8}-\frac{\frac{3}{5}\cdot3\cdot10^8\cdot60}{(3\cdot10^8)^2}\right)=-5\cdot10^{-8}\ s}\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y'=y=0 \\ z'=z=0\end{cases}.$

Gráficamente, el resultado del suceso en el esquema viene dado como:



. Y si tenemos los ejes $(ct',\hat{x}')$ ⇒



trazando rectas paralelas a los ejes (que no son ahora perpendiculares)

EJERCICIO 3: Los coordenadas espacio-tiempo de dos sucesos medidas en S son, para el 1°, $x_1 = x_0$, $t_1 = \frac{x_0}{c}$; y para el 2°, $x_1 = 2x_0$, $t_2 = \frac{x_0}{2c}$, y el resto todas nulas.

(a) Demostrar que existe un sistema en el cuál, los sucesos tienen lugar en el mismo instante. Hallar la velocidad de este sistema respecto a S.

Buscamos S' donde $t_1' = t_2'$. Aplicamos las Transformaciones de Lorentz.

$$\begin{cases} t_1' = \gamma(v)\cdot\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = \gamma(v)\cdot\left(\frac{x_0}{c} - \frac{v}{c^2}x_0\right) \\ t_1' = \gamma(v)\cdot\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = \gamma(v)\cdot\left(\frac{x_0}{2c} - \frac{v}{c^2}\cdot 2x_0\right) \end{cases}$$

. Ahora igualamos ambas expresiones:

$$\cancel{\gamma(v)}\left(\frac{x_0}{c} - \frac{v}{c^2}x_0\right) = \cancel{\gamma(v)}\cdot\left(\frac{x_0}{2c} - \frac{2v}{c^2}x_0\right) \iff \cancel{x_0}\left(\frac{1}{c} - \frac{v}{c^2}\right) = \cancel{x_0}\left(\frac{1}{2c} - 2\frac{v}{c^2}\right).$$

Despejando queda $\frac{c-v}{c^2} = \frac{c-4v}{2c^2} \iff 2c - 2v = c - 4v \iff \boxed{v = \frac{-c}{2}}$ ✓ Se mueve en el eje $\hat{x}$ negativo.

(b) ¿Cuál es el valor del tiempo para el que ambos sucesos ocurren a la vez en el nuevo sistema?

Sabemos que $t_1' = \gamma(v)\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = \gamma\left(\frac{-c}{2}\right)\cdot\left(\frac{x_0}{c} - \frac{v}{c^2}x_0\right) = \frac{1}{\sqrt{1-1/4}}\cdot\left(\frac{cx_0 - vx_0}{c^2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{cx_0 + \frac{c}{2}x_0}{c^2}\right)$

Queda $t_1' = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot x_0 \frac{3/2}{c} \Rightarrow \boxed{t_1' = \frac{\sqrt{3}\cdot x_0}{c}}$ ✓

EJERCICIO 4: A las 14:00h cae un rayo en cierto lugar. A 1760km de distancia cae un segundo rayo, 0'003 segundos más tarde. ¿Qué velocidad debe tener una nave que observe el orden de caídas invertido? Razónalo gráficamente.

Sabemos que $\Delta t = 0'003$ s. y $\Delta x = 1'76\cdot 10^6$ m, entonces podemos fijar $t_1 = 0$, $x_1 = 0$ y tomar así $t_2 = \Delta t$ y $x_2 = \Delta x$. Buscamos ahora un sistema S' donde $t_1' > t_2'$, y para ello aplicamos las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{cases} t_1' = \gamma(v)\cdot\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = 0 \\ t_2' = \gamma(v)\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) = \gamma(v)\cdot\left(0'003 - \frac{v}{c^2}\cdot 1'76\cdot 10^6\right) \end{cases}$$

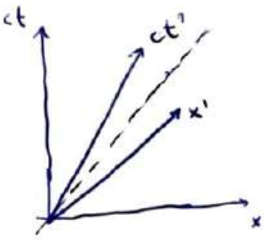
Entonces hacemos $t_2' = \gamma(v)\cdot\left(0'003 - \frac{v}{c^2}1'76\cdot 10^6\right) < 0 = t_1'$.

Como $\gamma(v)$ es un factor siempre positivo, necesitamos que el paréntesis sea negativo.

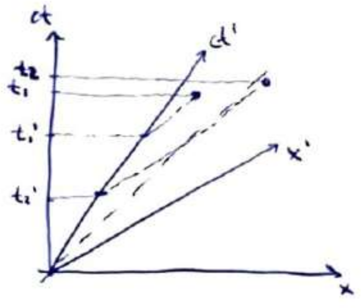
$$0'003 < \frac{v}{c^2}1'76\cdot 10^6 \Rightarrow v > \frac{0'003}{1'76\cdot 10^6}c^2 = \frac{0'003}{1'76\cdot 10^6}\cdot 3\cdot 10^8 c = 0'51\cdot c \Rightarrow \boxed{v > 0'51c}$$ ✓

Por tanto, concluimos que para velocidades superiores a 0'51c se invierte el orden de caída.

· Gráficamente: Si $v > 0'51c$, la gráfica tiene la forma:



La pendiente será mayor a 0'51, y por tanto podemos poner dos sucesos que lo cumplan de la siguiente manera:



→ se observa $t_2 > t_1$ y $t_1' > t_2'$!

EJERCICIO 5: Muestra que una transformación de Lorentz de velocidad v en el eje x que se puede escribir como $\begin{cases} x' = x\cdot\cosh\theta - ct\cdot\operatorname{senh}\theta \\ ct' = -x\operatorname{senh}\theta + ct\cdot\cosh\theta \end{cases}$ donde θ viene dado por $\tanh\theta = \frac{v}{c}$.

Si definimos la coordenada temporal como $y = i\cdot ct$, entonces la transformación es una 'rotación' en un espacio bidimensional $\begin{cases} x' = x\cos i\theta + y\sin i\theta \\ y' = -x\sin i\theta + y\cos i\theta \end{cases}$ Usaremos θ el ángulo definido.

Calculemos el factor γ teniendo en cuenta que $\frac{v}{c} = \tanh\theta \longrightarrow \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\theta}} =$

Entonces, aplicamos ahora la transformación de Lorentz: $= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\operatorname{senh}^2\theta}{\cosh^2\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cosh^2\theta-\operatorname{senh}^2\theta}{\cosh^2\theta}}} = \cosh\theta$.

$$x' = \gamma(v)(x - vt) = \cosh\theta\left(x - \frac{v}{c}\cdot ct\right) = x\cdot\cosh\theta - \tanh\theta\cdot ct\cdot\cosh\theta$$

$$= x\cosh\theta - ct\cdot\operatorname{senh}\theta$$

$$ct' = c\cdot\gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \cosh\theta\left(ct - \frac{v}{c}x\right) = ct\cdot\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta\cdot x$$

· Ahora definimos $y = i\cdot ct$. Aplicamos la definición trigonométrica de los senos y cosenos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad y \quad \operatorname{senh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}.$$ Si evaluamos el seno en $i\theta$, entonces queda

$$\operatorname{sen} i\theta = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = \frac{-(e^{\theta} - e^{-\theta})}{2i} = \frac{-1}{i}\cdot\operatorname{senh}\theta = i\cdot\operatorname{senh}\theta$$

· Con el coseno: $\cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ y $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \cos i\theta = \frac{e^{-\theta}+e^{\theta}}{2} = \cosh\theta$.

Por tanto, como hemos definido $y = i\cdot ct$, sustituyendo se consigue la segunda expresión, que define claramente una rotación como las vistas en geometría, con matriz asociada: $\begin{pmatrix} \cos i\theta & \sin i\theta \\ -\sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix}$.

· EJERCICIO 6: La velocidad de la propagación del sonido en un cable es $v = \sqrt{T/\mu}$, donde μ es la masa por unidad de longitud y T la tensión. ¿Cuál es la restricción sobre los valores de la tensión que puede soportar un cable de acero de 1 mm. de radio de acuerdo con la relatividad? La densidad del acero es $7'8\cdot10^3\ kg/m^3$.

Compare con la tensión de rotura, que es $1'6\cdot10^3 N$.

Buscamos el máximo de la tensión que nos proporciona la relatividad. Como $v = \sqrt{T/\mu} \Rightarrow v^2 = T/\mu$ y por tanto $T = \mu v^2$ (son proporcionales). El máximo teórico que nos proporcionan las leyes de la relatividad se alcanzará cuando $v = c \Rightarrow T_{max} = \mu\cdot c^2$. Calculamos μ con la densidad.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{l\cdot\pi r^2} = \frac{m/l}{\pi r^2} = \frac{\mu}{\pi r^2} \Rightarrow \mu = \rho\cdot\pi r^2 \Rightarrow \mu_{acero} = 7'8\cdot10^3\cdot\pi\cdot10^{-6} = 0'02450.$$

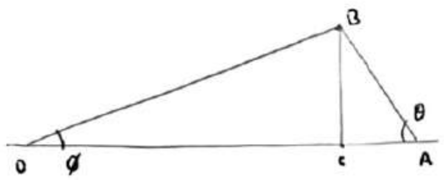
(cable = cilindro)

Por tanto $\boxed{T_{max} = 0'0245\cdot c^2 = 2'21\cdot10^{15} N}$ ✓

Comparando con la tensión máxima empírica (de rotura), que es $T_{rot} = 1'6\cdot10^3 N$, vemos que es muchísimo menor que la obtenida por la relatividad, es decir, la tensión máxima obtenida no sirve de mucho ya que el cable se rompe mucho antes

$$\boxed{\frac{T_{max}}{T_{rot}} = \frac{2'21\cdot10^{15}}{1'6\cdot10^3} = 1'38\cdot10^{12}}$$ veces más grande!

EJERCICIO 7: Un objeto situado en una galaxia distante se mueve a lo largo de la dirección AB con velocidad v, como muestra la figura. En t_1, parte desde A y emite un fotón en dirección de O. En t_2 ha llegado a B y emite un segundo fotón en la dirección O. Los fotones son recibidos a tiempos t_1' y t_2' en O. Supón que el ángulo ϕ es suficientemente pequeño y calcule la velocidad transversal, debida al desplazamiento aparente en la dirección BC que percibe el observador de O. Encuentra el valor máximo de v respecto a θ y muestra que puede ser mayor que c. ¿Qué ocurre?



Sabemos que $\left.\begin{aligned} AB &= v(t_2-t_1) \\ OB &= c(t_2'-t_2) \\ OA &= c(t_1'-t_1) \end{aligned}\right\}$ según lo descrito por el enunciado

Supondremos que $\phi \approx 0°$.

Ahora utilizando trigonometría en el triángulo de vértices A, B, C $\Rightarrow \begin{cases} CA = AB\cos\theta \\ BC = AB\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

También, como $\phi \approx 0 \Rightarrow OC \approx OB = (t_2'-t_2)c$

Sabemos que $V_{BC} = \dfrac{BC}{t_2'-t_1'}$, entonces buscamos esos valores.

Como $BC = AB\,\text{sen}\,\theta$ y $AB = v(t_2-t_1) \Rightarrow BC = v(t_2-t_1)\,\text{sen}\,\theta$

Ahora, $OA = OC + CA \iff c(t_1'-t_1) = c(t_2'-t_2) + AB\cos\theta$

Despejamos $c(t_1'-t_1-t_2'+t_2) = v\cdot(t_2-t_1)\cos\theta$

y se saca que $(t_2'-t_1')+(t_1-t_2) = \dfrac{-v}{c}(t_2-t_1)\cos\theta$

$$(t_2'-t_1') = \frac{-v}{c}(t_2-t_1)\cos\theta + (t_2-t_1)$$

$$(t_2'-t_1') = \left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\cdot(t_2-t_1)$$

Y ahora podemos sustituir ambos en V_{BC} obteniendo que:

$V_{BC} = \dfrac{v(t_2-t_1)\,\text{sen}\,\theta}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)(t_2-t_1)}$ y simplificando $\boxed{V_{BC} = \dfrac{v\cdot\text{sen}\,\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)}}$ ✓

· El valor máximo de v con respecto a θ:

EJERCICIO 8: Une nave espacial viaja sobre el eje x con $v = 0'3c$. Se pide:

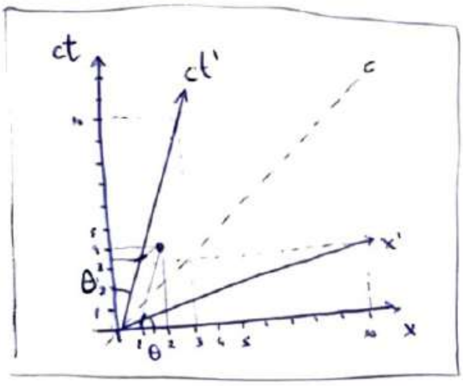
(a) Dibujar los ejes $(ct; x)$, (ct', x') en el mismo gráfico. Marcar correctamente los ángulos de los ejes y calibra las escalas adecuadamente.

Para calcular los ejes se toma $x' = \gamma(v)(x - vt) = 0 \iff x = vt \iff t = \frac{x}{v}$.

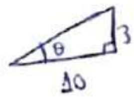
Multiplicamos por c para dejar $ct = \frac{c}{v}x = \frac{1}{0'3}x \Rightarrow \underbrace{ct = 3'33\,x}_{\text{pendiente: } 10/3}$

Entonces $ct' = \frac{10}{3}x$. Y por tanto $x' = \underbrace{\frac{3}{10}}_{\text{pendiente: } 3/10} x$

Entonces dibujamos:



Para obtener los ángulos se miran las pendientes.



$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{3}{10} \Rightarrow \boxed{\theta = 0'29 \text{ rad.}}$ ✓

$\left.\begin{array}{l} 0'29 \text{ rad} - x \\ \pi \text{ rad} - 180 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 16'7°$

b) Ubica el punto $(ct = 4, x = 2)$ y determina gráficamente sus coordenadas en el sistema de la nave espacial. Comprueba los valores calculando la transformación de Lorentz.

El punto se coloca en la gráfica como se hacía en $\mathbb{R}^2$. Para encontrar gráficamente las coordenadas en el sistema de la nave se trazan paralelas de los ejes que pasen por el punto y donde corte será el valor de la coordenada.

Gráficamente, más o menos, vemos que el punto cae por $(ct' = 3'5, x' = 0'9)$, aprox.

Calculemos mediante transformaciones de Lorentz.

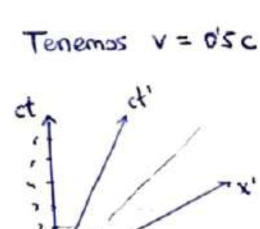
$$\gamma(v) = \gamma(0'3c) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0'3^2c^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0'09}} = 1'0483.$$

Por tanto $\boxed{ct' = c \cdot \gamma(v) \cdot \left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = 1'0483 \cdot (4 - 0'3 \cdot 2) = 3'56}$ ✓

$$\boxed{x' = \gamma(v)(x - vt) = 1'0483(2 - 0'3 \cdot 4) = 0'8386}$$

c) Dibuja la trayectoria de un electrón que se mueve, respecto del laboratorio, con velocidad $c/2$. Determina su velocidad respecto de la nave.

Tenemos $v = 0'5c \Rightarrow$ Ahora tenemos $ct' = \frac{c}{v}x = 2x \Rightarrow$ Hay pendientes 2 y 1/2 ahora.



La trayectoria será moverse

$$\boxed{v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} = \frac{0'5c - 0'3c}{1 - \frac{0'5c \cdot 0'3c}{c^2}} = \frac{0'2c}{1 - 0'15} = 0'24c}$$ ✓ tras aplicar la ley de adición de velocidades.

EJERCICIO 9: Se instalan espejos alrededor del ecuador, de tal manera que podemos hacer que un pulso de luz dé la vuelta al planeta. Desde un punto se emiten dos pulsos de luz, uno hacia el este y otro hacia el oeste. Teniendo en cuenta la rotación terrestre, ¿cuál de los dos retorna primero al punto de partida? ¿Por qué este resultado cuestiona el principio de que la velocidad es independiente del sistema de referencia? ¿Se pueden sincronizar relojes mediante señales de luz en un sistema rotante?

· Llegará primero el que se lanza en dirección oeste gracias a la rotación de la Tierra, ya que el punto O se desplaza en sentido opuesto y por tanto el retorno se producirá sin necesidad de que ese pulso recorra una vuelta completa, mientras que el otro pulso, deberá dar 1 vuelta y un poquito más para volver a alcanzar el punto de partida.

· Podríamos decir que cuestiona el principio de independencia de la velocidad ya que los pulsos de luz son emitidos en el mismo instante y a la misma velocidad, y sin embargo, uno llega antes que el otro. Esto ocurre porque en el sistema rotante, el punto O se desplaza, haciendo que un pulso recorre menos distancia que el otro y a pesar de ir a la misma velocidad, se obtiene ese resultado.

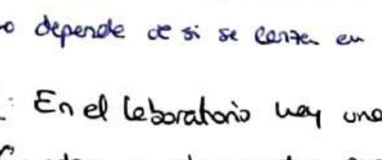
· No se pueden sincronizar relojes en un sistema rotante porque el tiempo que tarda la luz en llegar de un punto a otro depende de si se lanza en el sentido de la rotación o no.

EJERCICIO 10: En el laboratorio hay una rueda de radio R que rota con velocidad angular ω respecto al eje x. Considera un observador que se mueve a lo largo del eje x con velocidad v respecto del laboratorio. ¿Cuánto vale la velocidad angular para dicho observador?

No se puede utilizar la ley de adición de velocidades, puesto que necesitaríamos velocidades lineales y constantes en la dirección del movimiento del observador.

Debemos usar el periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y $T' = \gamma \cdot T$ la transformación que sufre el periodo, por ser desfase temporal. Por tanto, la velocidad angular que observa es $\boxed{\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{\gamma \cdot T} = \frac{1}{\gamma}\cdot\omega}$ ✓

EJERCICIO 11: Considera dos ruedas unidas a los extremos de un eje de longitud L ubicado a lo largo del eje x. Las ruedas giran con velocidad ω de modo que los radios están siempre paralelos. Un observador se mueve con velocidad v hacia la derecha por el eje x. ¿Qué desfase observa entre los dos radios?



Primero calculamos el desfase temporal que ve el observador, aplicando la transformación de Lorentz:

$$\boxed{\Delta t' = \gamma(v)\cdot\left(\cancel{\Delta t}^{\,0} - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = -\gamma(v)\cdot\frac{vL}{c^2}}$$

Ahora calculamos el desfase angular, ayudándonos de $\Delta t'$ y de ω', que como hemos visto en el anterior ejercicio, $\omega' = \frac{1}{\gamma}\cdot\omega$. Por tanto: $\Delta\phi' = \omega'\cdot\Delta t' = \frac{1}{\cancel{\gamma(v)}}\cdot\omega\cdot\left(-\cancel{\gamma(v)}\cdot\frac{vL}{c^2}\right)$

Queda $\boxed{\Delta\phi' = \frac{-\omega v L}{c^2}}$ ✓

· EJERCICIO 12: Muestra que una combinación de dos transformaciones de Lorentz sucesivas con velocidades v_1, v_2 a lo largo del eje x, equivalen a una única transformación de velocidad

$V = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$. Hacemos ambas cosas por separado:

① Dos transformaciones de velocidad v_1 y v_2:

Partimos de una velocidad v $\Rightarrow v' = \dfrac{v - v_1}{1 - \frac{v v_1}{c^2}} = \dfrac{c^2(v - v_1)}{c^2 - v v_1}$

Ahora hacemos otra sobre v' $\Rightarrow v'' = \dfrac{v' - v_2}{1 - \frac{v_2 v'}{c^2}} = \dfrac{\frac{c^2(v-v_1)}{c^2 - v v_1} - v_2}{1 - \frac{v_2(v-v_1)}{c^2 - v v_1}} = \dfrac{c^2(v - v_1) - (c^2 - v v_1)v_2}{c^2 - v v_1 - v_2(v - v_1)} = \dfrac{c^2 v - c^2 v_1 - c^2 v_2 + v v_1 v_2}{c^2 - v v_1 - v v_2 + v_1 v_2}$

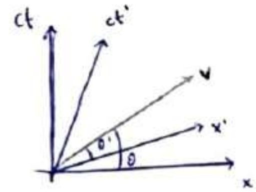
② Una transformación de velocidad V:

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} = \frac{v - \frac{(v_1+v_2)}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}}{1 - \frac{v \cdot \frac{(v_1+v_2)}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}}{c^2}} = \frac{c^2\left(v - \frac{(v_1+v_2)}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}\right)}{c^2 - \frac{v(v_1+v_2)}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}} = \frac{c^2 v\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) - c^2(v_1+v_2)}{c^2\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\right) - v(v_1+v_2)} = \frac{c^2 v + v v_1 v_2 - c^2 v_1 - c^2 v_2}{c^2 + v_1 v_2 - v_1 v - v_2 v}.$$

Comparando lo obtenido en ① y en ②, podemos ver que es idénticamente igual.

EJERCICIO 13: En un sistema de referencia que se mueve con velocidad V a lo largo del eje x en sentido positivo, una partícula se mueve con velocidad v', formando un ángulo θ' con el eje x'. Muestra que su dirección de propagación forma un ángulo θ con el eje x, tal que $\tan\theta = \dfrac{v'\sqrt{1 - V^2/c^2} \cdot \sin\theta'}{v'\cos\theta' + V}$.

Supón que hay una fuente que emite partículas en todas direcciones en el origen del sistema de referencia móvil. ¿Cómo se ve desde el laboratorio cuando su velocidad tiende a c?



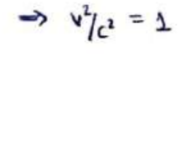
Tenemos que las dos velocidades son:

$$\begin{cases} V = V\hat{e_x} \\ V' = V_x'\hat{e_{x'}} + V_y'\hat{e_{y'}} \end{cases} \rightarrow$$ v será la resultante de aplicar la ley de adición de velocidades (por separado) en ambos ejes.

· En el eje x: $V_x = \dfrac{V_x' + V}{1 + \frac{V_x' V}{c^2}} = \dfrac{v'\cos\theta' + V}{1 + \frac{v'\cos\theta' \cdot V}{c^2}}$

· En el eje Y: $V_Y = \dfrac{V_Y'}{\gamma\left(1 + \frac{V_x' V}{c^2}\right)} = \dfrac{v'\text{sen}\,\theta'}{\gamma\cdot\left(1 + \frac{v'\cos\theta' V}{c^2}\right)}$

$\Rightarrow$ Por tanto tenemos



$\Rightarrow tg\,\theta = \dfrac{V_y}{V_x} = \dfrac{\frac{v'\text{sen}\,\theta'}{\gamma\left(1 + \frac{v'\cos\theta' V}{c^2}\right)}}{\frac{v'\cos\theta' + V}{1 + \frac{v'\cos\theta' V}{c^2}}} = \dfrac{v'\,\text{sen}\,\theta'}{\gamma\cdot(v'\cos\theta + V)}$

Queda exactamente $\boxed{tg\,\theta = \dfrac{v'\text{sen}\,\theta' \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{v'\cos\theta' + V}}$

· Si suponemos $V \rightarrow c \Rightarrow V^2/c^2 = 1 \Rightarrow tg\,\theta = 0 \rightarrow \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0, \theta = \pi.$

EJERCICIO 25: En un sincrotrón, los electrones son mantenidos en órbita circular de radio 15 cm. Los electrones son acelerados desde una energía cinética de 2 MeV hasta 40 MeV. ¿Cuánto vale el campo magnético al comienzo y al final? ¿Cuánto vale la frecuencia del campo eléctrico que acelera las partículas al comienzo y al final? Explica por qué estas frecuencias son muy parecidas.

$R = 0'15 m$
$E_0 = 2 MeV$
$E_f = 40 MeV$
$q = 1'6 \cdot 10^{-19} C$
$m = 9'1 \cdot 10^{-31} kg$

Lo primero pasamos las energías a Julios, multiplicando por $1'602 \cdot 10^{-13} J$

$$\left.\begin{array}{l} E_0 = 2 \cdot 1'602 \cdot 10^{-13} J \\ E_f = 40 \cdot 1'602 \cdot 10^{-13} J \end{array}\right\}$$ y utilizamos que $E = \frac{m}{2} v^2$, sacamos

las velocidades inicial y final: $v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$ y $v_f = \sqrt{\frac{2E_f}{m}}$.

Ahora utilizamos que la fuerza es $F = quB$ y la igualamos a la centrípeta.

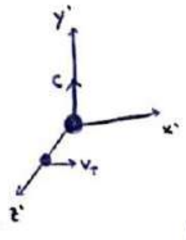
$$quB = m_0 \frac{v^2}{R} = \frac{\gamma m v^2}{R} \Rightarrow \text{Despejamos } B = \frac{\gamma m v}{qR} = \frac{p'}{Rq}.$$

Utilizamos que $p' = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c}$ y con esto calculamos el campo magnético al comienzo y al final:

$$\boxed{B_0 = \frac{\sqrt{(2 \cdot 1'602 \cdot 10^{-13})^2 - (9'1 \cdot 10^{-31})^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^4}}{3 \cdot 10^8 \cdot 0'15 \cdot 1'6 \cdot 10^{-19}} = \frac{3'098 \cdot 10^{-13}}{7'2 \cdot 10^{-12}} = 0'043}$$

$$\boxed{B_f = \frac{\sqrt{(40 \cdot 1'602 \cdot 10^{-13})^2 - (9'1 \cdot 10^{-31})^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^4}}{3 \cdot 10^8 \cdot 0'15 \cdot 1'6 \cdot 10^{-19}} = \frac{6'41 \cdot 10^{-12}}{7'2 \cdot 10^{-12}} = 0'89}$$

EJERCICIO 14: Considera el fenómeno de aberración de la luz estelar, en la configuración de incidencia perpendicular. En el sistema de referencia x', y', z', centrado en el sol, la luz se emite a lo largo del eje y', perpendicularmente a la velocidad de traslación de la Tierra. Muestra que el sistema de referencia de la Tierra percibe la luz con un ángulo ϕ con el eje y tal que $tg\,\phi = \gamma \cdot \frac{V}{c}$.

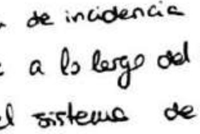


Sabemos que el sol emite luz con velocidad $V_{luz}' = c \cdot \hat{e}_{y'}$, por tanto podemos obtener esa velocidad en el sistema de referencia de la Tierra mediante la ley de adición de velocidades.

La aplicamos sobre el eje x y sobre el y:

$$V_x = \frac{\cancel{V_{x'}}^{0} + V_T}{1 + \frac{\cancel{V_{x'}}^{0} \cdot V_T}{c^2}} = V_T \quad ; \quad V_y = \frac{V_{y'}}{\gamma\left(1 + \frac{V_{x'} V_T}{c^2}\right)} = \frac{V_{y'}}{\gamma} = \frac{c}{\gamma}$$

Entonces V_{luz}' vista desde la tierra es $\boxed{V_{luz} = V_T \cdot \hat{e}_x + \frac{1}{\gamma} \cdot c\, \hat{e}_y}$



Si buscamos el ángulo con el eje y, tenemos el siguiente esquema:

el ángulo ϕ cumplirá que $\boxed{tg\,\phi = \frac{V_x}{V_y} = \frac{V_T}{\gamma c}}$.

EJERCICIO 16: Considera una nave espacial que acelera con aceleración constante a_x', en el sistema de referencia propio, partiendo del reposo. Muestra que: $x = \frac{c^2}{a_x'}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}} - 1\right)$. Muestra también que para velocidades bajas, esta expresión se reduce a $v_x'^2 = 2a_x' x$.

* Los ejs. de aceleración se hacen con el momento lineal

La variación del momento lineal con el tiempo es:

$$\frac{dP_x}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \gamma \cdot v_x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv_x}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}\right) = F$$ (Sólo hay velocidad en el eje x)

Por tanto $a_x' = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}\right)$. Integramos respecto a t: $\boxed{a_x' t = \frac{v_x}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}} = \gamma v_x}$

· Aplicamos a t la transformación de Lorentz: $ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x) = \gamma ct - \gamma\frac{v}{c}x$

Despejamos x: $(\gamma ct - ct') \cdot \frac{c}{v} \cdot \frac{1}{\gamma} = x$.

$$x = \left(ct - \frac{ct'}{\gamma}\right) \cdot \frac{c}{v} \Rightarrow x = \frac{c^2}{v}t - \frac{c^2}{v\gamma}t'$$. Sustituyo $t' = \frac{t}{\gamma}$

$$x = \frac{c^2}{a_x'\cancel{t}}\cancel{t} \cdot \gamma - \frac{c^2}{a_x'\frac{\cancel{t}}{\gamma}}\frac{\cancel{t}}{\gamma} \Rightarrow \boxed{x = \frac{c^2}{a_x'}(\gamma - 1)}$$ ✓

EJERCICIO 17: La velocidad orbital de la tierra alrededor del sol es de 30 km/s. Calcula cuántos segundos pierde en un año un reloj que orbita con la tierra (sin participar de la rotación sobre su eje) respecto de uno que se halle fijo al sol.

Consideramos el Sol en reposo y la tierra rotando a velocidad $v = 30\ km/s = 3 \cdot 10^4\ m/s$.

Buscamos la diferencia temporal al hacer 1 rotación completa (1 año). Para ello utilizamos la dilatación del tiempo: $\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t$.

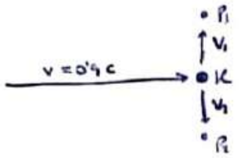
Calculamos $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(3\cdot10^4)^2}{(3\cdot10^8)^2}}} = 1'000000005$ años.

Como comparamos con 1 año de tiempo en la tierra $\Rightarrow \Delta t' = 1'000000005$ años.

Le restamos un año para ver lo que se pierde. Nos da $5 \cdot 10^{-9}$ años.

$$5 \cdot 10^{-9}\text{ años} \cdot \frac{365\text{ días}}{1\text{ año}} \cdot \frac{24h}{1\text{ día}} \cdot \frac{3600s}{1h} = \boxed{0'1577s.}$$ ✓

· EJERCICIO 22: Cuando se mueve a velocidad $v = 0'9 \cdot c$ respecto del laboratorio un mesón K decae en dos piones de masa $140\ MeV/c^2$ y energía cinética 110 MeV que se mueven en sentidos opuestos en el sistema de referencia del mesón. ¿Cuál es la energía cinética y el impulso de cada pión en el sistema del laboratorio? Calcule el impulso inicial del mesón K de dos maneras diferentes.



Calculamos la energía de los piones: $E_1 = T_1 + m_1 c^2 = 110 + 140 = 250\ MeV$

y $E_2 = 250\ MeV$ porque los datos son los mismos para ambos.

Con ello calculamos el impulso de cada pión, usando $E^2 = p^2c^2 + m_0^2 c^4$.

Por tanto $pc = \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} = \sqrt{250^2 - 140^2} = 207\ MeV$. (también el mismo en ambos).

Ahora lo pasamos todo al sistema del laboratorio mediante transformaciones de Lorentz, para lo cual usamos

$\gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 0'9^2c^2/c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 0'9^2}} = 2'29 \Rightarrow \begin{cases} E_1' = \gamma \cdot (E_1 + P V_1) = 2'29\left(250 + \frac{207}{c} \cdot 0'9c\right) = 999'1\ MeV \\ E_2' = \gamma(E_2 + P V_2) = 2'29 \cdot \left(250 - \frac{207}{c} \cdot 0'9c\right) = 146\ MeV \end{cases}$

Calculamos también: $\begin{cases} \boxed{Pc_1' = \gamma\left(Pc + \frac{V_1}{c}E\right) = 2'29\,(207 + 0'9 \cdot 250) = 989'3\ MeV} \\ \boxed{Pc_2' = \gamma\left(Pc + \frac{V_2}{c}E\right) = 2'29\,(207 - 0'9 \cdot 250) = 41'22\ MeV} \end{cases}$ ✓

(*) Estamos teniendo en cuenta que $V_2 < 0$ porque se dirige en sentido opuesto a P_1 con $V_1 > 0$.

Ahora, podemos utilizar la energía de los piones en el sistema del laboratorio y así obtener la energía cinética de cada uno:

$\boxed{T_1' = E_1' - m_1 c^2 = 999'1 - 140 = 859'1\ MeV}$ ✓

$\boxed{T_2' = E_2' - m_2 c^2 = 146 - 140 = 6\ MeV}$

· Por último, calculamos el impulso inicial del mesón K de dos formas distintas.

① Calculamos en el sistema del mesón y lo pasamos al del laboratorio:

$Pc' = 0$ (porque $v' = 0$ en el sistema del propio mesón)

$\Rightarrow \boxed{Pc = \gamma\left(Pc' + \frac{V}{c}E\right) = 2'29 \cdot \left(0 + \frac{0'9c}{c} \cdot 250\right) = 1030'5\ MeV}$ ✓

② Utilizando la conservación del momento lineal:

Sabemos que $P = P_1 + P_2$, y multiplicando la ecuación por c, se obtiene $Pc = P_1c + P_2c$ y hemos calculado antes ambos valores

$\begin{cases} P_1c = 989'3\ MeV \\ P_2c = 41'22\ MeV \end{cases} \longrightarrow \boxed{Pc = 989'3 + 41'22 = 1030'52\ MeV}$

Como vemos da lo mismo.