Examen final de Mecánica Clásica I.

19 de enero de 2021

1. [**3 puntos**] La lagrangiana de una partícula de carga q y masa m que se mueve en el plano $x-y$ en presencia de un campo magnético en la dirección del eje z y de magnitud B es

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + \frac{qB}{2}(x\,\dot{y} - y\,\dot{x}).$$

   (a) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

   (b) Basándote en el apartado anterior, si $\ell_z = m(x\,\dot{y} - y\,\dot{x})$, obtén $\frac{\mathrm{d}\ell_z}{\mathrm{d}t}$. ¿Es ℓ_z una constante de movimiento?

   (c) Considera la transformación infinitesimal (rotación)

$$x \to x+\delta x, \quad y \to y+\delta y, \quad \dot{x} \to \dot{x}+\delta\dot{x}, \quad \dot{y} \to \dot{y}+\delta\dot{y},$$

   donde

$$\delta x = -\epsilon\, y, \quad \delta y = \epsilon\, x, \quad \delta\dot{x} = -\epsilon\,\dot{y}, \quad \delta\dot{y} = \epsilon\,\dot{x},$$

   con ϵ un parámetro infinitesimal. Comprueba que la lagrangiana es invariante bajo esta transformación. Obtén, mediante el teorema de Noether, la magnitud conservada.

   (d) Obtén la lagrangiana en coordenadas polares $L = L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})$.

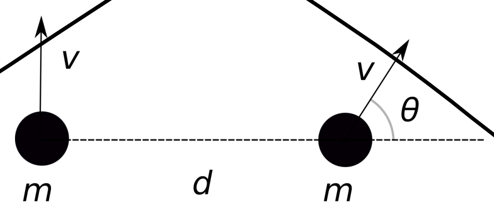
   (e) Obtén las ecuaciones de Lagrange y los momentos canónicos p_r y p_θ. ¿Son constantes de movimiento? ¿Se corresponde alguno de ellos con la constante de movimiento del apartado (c)?

   (f) Obtén la solución de las ecuaciones de Lagrange en el caso en que $r = r_0 = \text{cte}$.

2. [**2 puntos**] Considera dos partículas iguales de masa m siendo d la distancia entre ellas. Las masas se atraen debido a la fuerza de la gravedad. Inicialmente, el módulo de la velocidad de cada una de ellas es igual a v, y, mientras que la primera se mueve en dirección perpendicular al segmento que las une, la segunda tiene una velocidad que forma un álgulo θ con la dirección del segmento que las une, como muestra la figura.

   (a) Obtén el ángulo θ y el módulo de la velocidad v, en función de G, m y d para que la órbita relativa sea circular.

   (b) ¿Qué tipo de óbita relativa (circular, elíptica, etc.) realizarían las partículas si θ fuera el mismo que el obtenido en el apartado anterior pero v fuera el doble de lo obtenido en el apartado anterior? ¿Y si v fuera la mitad?



Nota: Recuerda que para **el problema de Kepler**: $e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}}$.

3. [**3 puntos**] Las tres partículas de la figura tienen la misma masa m y pueden deslizar sin rozamiento por las rectas paralelas. La distancia entre rectas consecutivas es a. Los muelles tienen una constante elástica k y longitud natural de equilibrio $\ell_0 = 0$. Usando las coordenadas indicadas, x_1, x_2 y x_3

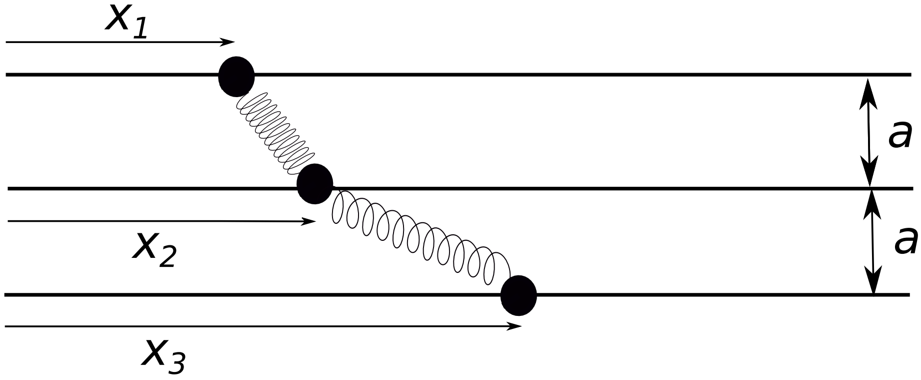
   (a) Obtén la lagrangiana del sistema.

   (b) ¿Presenta alguna simetría? Si es así, ¿cuál es la magnitud conservada asociada a esta simetría? Razona tu respuesta.

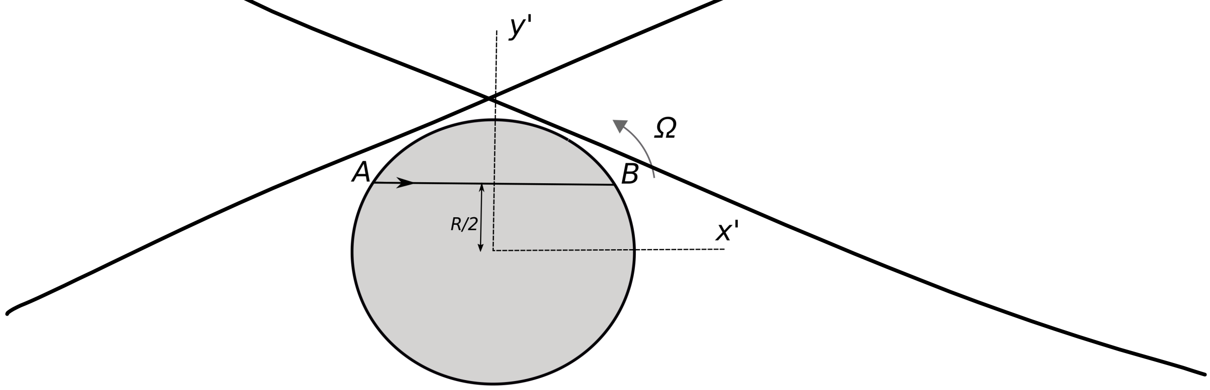
   (c) Obtén las condiciones para que el sistema esté en equilibrio.

   (d) Obtén las frecuencias propias de oscilación alrededor de la posición de equilibrio.

   (e) Obtén los modos normales (sin normalizar) y dibuja esquemáticamente cómo se moverían las partículas en cada modo.



4. [**2 puntos**] Una plataforma horizontal de radio R gira a una velocidad angular constante, Ω. Una persona de masa m se mueve a velocidad constante respecto a la plataforma, desde el punto A al B, como indica la figura. Si, en el tiempo transcurrido para ir de A a B, la plataforma ha girado $10\sqrt{3}$ radianes, obtén la fuerza horizontal que debe ejercer el suelo de la plataforma sobre la persona para realizar ese movimiento. Expresa el resultado en función del tiempo transcurrido, t, desde que se inicia el movimiento y de m, R y Ω.



1. **[3 puntos]** La lagrangiana de una partícula de carga q y masa m que se mueve en el plano $x-y$ en presencia de un campo magnético en la dirección del eje z y de magnitud B es

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + \frac{qB}{2}(x\,\dot{y} - y\,\dot{x}).$$

(a) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

(b) Basándote en el apartado anterior, si $\ell_z = m(x\,\dot{y} - y\,\dot{x})$, obtén $\frac{d\ell_z}{dt}$. ¿Es ℓ_z una constante de movimiento?

(c) Considera la transformación infinitesimal (rotación)

$$x \to x+\delta x, \quad y \to y+\delta y, \quad \dot{x} \to \dot{x}+\delta\dot{x}, \quad \dot{y} \to \dot{y}+\delta\dot{y},$$

donde

$$\delta x = -\epsilon\, y, \quad \delta y = \epsilon\, x, \quad \delta\dot{x} = -\epsilon\,\dot{y}, \quad \delta\dot{y} = \epsilon\,\dot{x},$$

con ϵ un parámetro infinitesimal. Comprueba que la lagrangiana es invariante bajo esta transformación. Obtén, mediante el teorema de Noether, la magnitud conservada.

(d) Obtén la lagrangiana en coordenadas polares $L = L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})$.

(e) Obtén las ecuaciones de Lagrange y los momentos canónicos p_r y p_θ. ¿Son constantes de movimiento? ¿Se corresponde alguno de ellos con la constante de movimiento del apartado (c)?

(f) Obtén la solución de las ecuaciones de Lagrange en el caso en que $r = r_0 =$ cte.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Longrightarrow m\ddot{x} - \frac{1}{2}qBy + \frac{1}{2}qB\dot{y} = 0 \Longleftrightarrow \ddot{x} = \frac{1}{2m}qB(\dot{y}-y)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Longrightarrow m\ddot{y} - \frac{1}{2}qBx - \frac{1}{2}qB\dot{x} = 0 \Longleftrightarrow \ddot{y} = \frac{1}{2m}qB(\dot{x}+x)$$

$$\left.\begin{array}{l} p_x = m\dot{x} \\ p_y = m\dot{y} \end{array}\right\} \Rightarrow L = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{qB}{2m}\ell_z = \frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+qB\ell_z\right)$$

$$\frac{d\ell_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(mx\dot{y} - y\dot{x}\right) = m\frac{d}{dt}(x\dot{y}) - m\frac{d}{dt}(y\dot{x}) = \cancel{m\dot{x}\dot{y}} + mx\ddot{y} - \cancel{m\dot{y}\dot{x}} - my\ddot{x} =$$
$$= m(x\ddot{y} - \ddot{x}y)$$

- $H = \sum \dot{q}_i p - L = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 - L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{qB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2-qB\ell_z) =$
  $= \frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+qB(yp_x - xp_y)\right)$
- $\ell_z = xp_y - yp_x$

Cte. de movimiento $\Longleftrightarrow [H,\ell_z]=0$

$$\frac{\partial \ell_z}{\partial x} = p_y \qquad \frac{\partial \ell_z}{\partial p_x} = -y \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{qB}{2m}p_y \qquad \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} + \frac{qB}{2m}y$$

$$\frac{\partial \ell_z}{\partial y} = -p_x \qquad \frac{\partial \ell_z}{\partial p_y} = x \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{qB}{2m}p_x \qquad \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} - \frac{qB}{2m}x$$

$$[H,\ell_z] = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial \ell_z}{\partial p_i} - \frac{\partial \ell_z}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \ell_z}{\partial p_x} - \frac{\partial \ell_z}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \ell_z}{\partial p_y} - \frac{\partial \ell_z}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} = +\frac{qB}{2m}p_y y - \frac{p_y p_x}{m} - \frac{qB}{2m}p_y y + \frac{qB}{2m}p_x x + \frac{p_x p_y}{m} - \frac{qB}{2m}p_x x = 0$$

$\Longrightarrow \ell_z$ es constante de movimiento

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y} = \frac{1}{2}qB\dot{y}\delta x - \frac{1}{2}qB\dot{x}\delta y + \left(m\dot{x} - \frac{1}{2}qBy\right)\delta\dot{x} + \left(m\dot{y} + \frac{1}{2}qBx\right)\delta\dot{y} =$$

$$= \frac{1}{2}qB\dot{y}(-\epsilon y) - \frac{1}{2}qB\dot{x}\epsilon x + \left(m\dot{x} - \frac{1}{2}qBy\right)(-\epsilon\dot{y}) + \left(m\dot{y} + \frac{1}{2}qBx\right)\epsilon\dot{x} = -\cancel{\frac{1}{2}qB\epsilon y\dot{y}} - \cancel{\frac{1}{2}qB\epsilon x\dot{x}} - \cancel{m\epsilon\dot{x}\dot{y}} + \cancel{\frac{1}{2}qB\epsilon y\dot{y}} + \cancel{m\epsilon\dot{x}\dot{y}} + \cancel{\frac{1}{2}qB\epsilon x\dot{x}} = 0$$

$\Longrightarrow$ La lagrangiana es invariante bajo esta transformación infinitesimal

En mecánica clásica, una rotación es una transformación que preserva el origen de manera que se preserve el momento angular. Como hemos probado la invarianza de la lagrangiana para esta transformación, podemos deducir, gracias al Teorema de Noether, que esta simetría implica la conservación de una cantidad. En nuestro caso, como ya hemos demostrado, la cantidad conservada es el momento angular ℓ_z

$$x = r\cos\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta \qquad x\dot{y} \quad r\dot{r}\cos\theta\sin\theta + r^2\dot{\theta}\cos^2\theta$$

$$y = r\sin\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \qquad \dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta \qquad -y\dot{x} = -r\dot{r}\sin\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}\sin^2\theta \longrightarrow$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$
$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}$$

$$\Longrightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{qB}{2}r^2\dot{\theta} \longrightarrow \text{Euler-Lagrange} \left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Longrightarrow m\ddot{r} = qB\dot{\theta}r + mr\dot{\theta}^2 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial \theta}} = 0 \Longrightarrow mr^2\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\theta} \text{ se conserva} \end{array}\right.$$

$p_r = m\dot{r}$ $\quad p_\theta = mr\dot{\theta} + \frac{qB}{2}r^2$ se conserva, ya que su segunda parcial temporal es nula, lo cual concuerda con lo establecido por el T^ma de Noether, ya que $L(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = L(r,\dot{r},\dot{\theta})$. Además esta conservación angular es análoga a la que hemos visto antes, ya que sólo hemos hecho un cambio de coordenadas. La magnitud conservada es, también, la angular.

si $r = r_0 =$ cte. $\Rightarrow \dot{r} = 0$ $(\Rightarrow \ddot{r} = 0)$

$$mr_0^2\ddot{\theta} = 0 \Longrightarrow mr_0^2\dot{\theta} \text{ se conserva}$$

$$m\ddot{r}_0 = qB\dot{\theta}r_0 + mr_0\dot{\theta}^2 \Longleftrightarrow 0 = qB + m\dot{\theta} \Longleftrightarrow \dot{\theta} = -\frac{qB}{m} \qquad \Longrightarrow \theta = -\frac{qB}{m}t$$

$\dot{\theta} = 0$ $\qquad$ $(\theta = 0t)$

3. **[3 puntos]** Las tres partículas de la figura tienen la misma masa m y pueden deslizar sin rozamiento por las rectas paralelas. La distancia entre rectas consecutivas es a. Los muelles tienen una constante elástica k y longitud natural de equilibrio $\ell_0 = 0$. Usando las coordenadas indicadas, x_1, x_2 y x_3

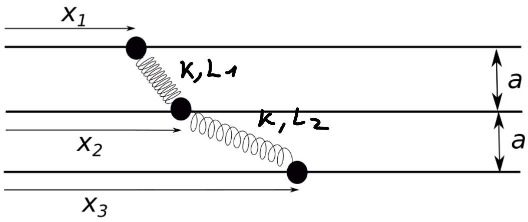
(a) Obtén la lagrangiana del sistema.

(b) ¿Presenta alguna simetría? Si es así, ¿cuál es la magnitud conservada asociada a esta simetría? Razona tu respuesta.

(c) Obtén las condiciones para que el sistema esté en equilibrio.

(d) Obtén las frecuencias propias de oscilación alrededor de la posición de equilibrio.

(e) Obtén los modos normales (sin normalizar) y dibuja esquemáticamente cómo se moverían las partículas en cada modo.



$$(x_2-x_1)^2+a^2 = L_1^2 \iff L_1=(a^2+(x_2-x_1)^2)^{1/2}$$
$$(x_3-x_2)^2+a^2 = L_2^2 \iff L_2=(a^2+(x_3-x_2)^2)^{1/2}$$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2) \qquad l_0=0$$
$$U=\frac{1}{2}k\left((L_1-l_0)^2+(L_2-l_0)^2\right)=\frac{1}{2}k\left(L_1^2+L_2^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2}k\left(a^2+(x_2-x_1)^2+a^2+(x_3-x_2)^2\right)=\frac{1}{2}k\left(2a^2+(x_2-x_1)^2+(x_3-x_2)^2\right)=$$
$$=k\left(a+x_2^2-x_2(x_1+x_3)+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_3^2\right)$$
$$\mathcal{L}=T-U=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-k\left(a+x_2^2-x_2(x_1+x_3)+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_3^2\right)$$

$$\nabla U=\bar{0}=\left(\frac{\partial U}{\partial x_1},\frac{\partial U}{\partial x_2},\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)=\bar{0} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_1}=0 \Rightarrow kx_2-kx_1=0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2}=0 \Rightarrow -2kx_2+kx_1+kx_3=0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_3}=0 \Rightarrow kx_2-kx_3=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{x_1=x_2=x_3}$$
$$\Rightarrow \text{Equilibrio}$$

Por la definición del problema vemos que es invariante respecto a traslaciones en el eje x, lo que implica la conservación del momento lineal total en el eje x, $p=p_x+p_y+p_z=m(\dot{x}_1+\dot{x}_2+\dot{x}_3)$

La independencia temporal de la lagrangiana también nos dice que el sistema será invariante bajo transformaciones del tiempo.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2}=m=\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2}=\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_3^2} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}=0 \text{ para } i\neq j \Rightarrow \mathbb{T}=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}=-K \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_2}=K \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_3}=0$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}=-2K \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2\partial x_1}=K \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2\partial x_3}=K \Rightarrow \mathbb{U}=\begin{pmatrix} -K & K & 0 \\ K & -2K & K \\ 0 & K & -K \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}=-K \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_3\partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_3\partial x_2}=K$$

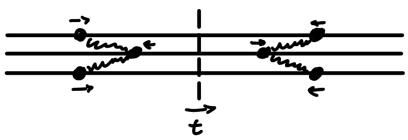
$$|\mathbb{U}-\omega^2\mathbb{T}|=0 \iff \begin{vmatrix} -K-\omega^2 m & K & 0 \\ K & -2K-\omega^2 m & K \\ 0 & K & -K-\omega^2 m \end{vmatrix}=0 \iff$$

$$\iff (k^2+\omega^2 m)^2(-2K-\omega^2 m)+2k^2(k+\omega^2 m)=0 \iff -\omega^2(m^3\omega^4+4km^2\omega^2+3k^2m)=0 \iff$$

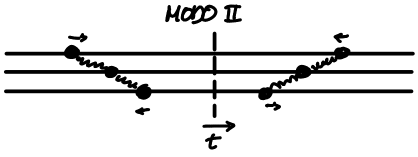
$\omega^2=0$ (modo no oscilatorio)

$$\iff \omega^2=\frac{-4km^2\pm\sqrt{16k^2m^4-4m^3 3k^2m}}{2m^3}=\frac{-4km^2\pm 2km^2}{2m^3}=\frac{k}{m}(-2\pm 1) \Rightarrow \omega\notin R \to \text{Algo he hecho mal}$$

MODO I



MODO II



MODO III