TEMA 5: Reducción de endomorfismos y matrices.

5.1. Valores y vectores propios.

Dado V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo en V, nos preguntamos si siempre existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada es diagonal y qué condiciones deben verificar los vectores de la base $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ de V para que $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f)$ sea diagonal.

Supongamos que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dado que

$$C_{\mathcal{V}}(\vec{v}_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow i,$$

se tendrá

$$C_{\mathcal{V}}(f(\vec{v}_i)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $C_{\mathcal{V}}(f(\vec{v}_i)) = \mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f) \cdot C_{\mathcal{V}}(\vec{v}_i) = \lambda_i C_{\mathcal{V}}(\vec{v}_i)$. Por lo tanto, debe cumplirse que $f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

DEFINICION 5.1 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Se dice que $\vec{v} \in V$ es un **vector propio** o **autovector** de f si es no nulo y existe un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. A $\lambda \in \mathbb{K}$ (que puede ser nulo) se le llama **valor propio** o **autovalor** de f. Decimos, entonces que $\vec{v}$ es un vector propio de f asociado al valor propio λ.*

NOTA 5.2 *La condición de que $\vec{v} \neq \vec{0}$ es necesaria en la definición anterior, ya que, de lo contrario, al ser $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0}$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, todos los escalares serían valores propios y, en consecuencia, no tendría sentido estudiarlos.*

EJEMPLO 5.3 Sean V un espacio vectorial real, $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de V y $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que

$$\begin{array}{rcrcrcr} f(\vec{v}_1) & = & 4\vec{v}_1 & + & 2\vec{v}_2 & + & \vec{v}_3, \\ f(\vec{v}_2) & = & \vec{v}_1 & + & 5\vec{v}_2 & + & \vec{v}_3, \\ f(\vec{v}_3) & = & -\vec{v}_1 & - & 2\vec{v}_2 & + & 2\vec{v}_3. \end{array}$$

Consideremos ahora los vectores

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \qquad \text{y} \qquad \vec{u}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3.$$

Es fácil comprobar que

$$f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_1 \qquad \text{y} \qquad f(\vec{u}_2) = 5\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 - \vec{v}_3.$$

Por lo tanto, $\vec{u}_1$ es un vector propio asociado al valor propio 3, pero $\vec{u}_2$ no es un vector propio de f, ya que $f(\vec{u}_2) \neq \lambda \vec{u}_2$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

NOTA 5.4 *Asociado a un vector propio $\vec{v} \in V \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ existe un único valor propio, ya que si existiesen $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que*

$$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \qquad \text{y} \qquad f(\vec{v}) = \mu \vec{v},$$

entonces

$$\vec{0} = \lambda \vec{v} - \mu \vec{v} = (\lambda - \mu)\vec{v}$$

y como $\vec{v} \neq \vec{0}$, necesariamente $\lambda = \mu$.

En cambio, asociado a un valor propio existe más de un vector propio como se pone de manifiesto en el siguiente resultado.

PROPOSICION 5.5 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $f \in \mathrm{End}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. λ es un valor propio de f,

2. $\mathrm{Ker}(f - \lambda id) \neq \left\{\vec{0}\right\}$.

Demostración: $(1. \Longrightarrow 2.)$ Supongamos que λ es un valor propio de f, entonces $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, para algún $\vec{v} \in V \setminus \left\{\vec{0}\right\}$. Por lo tanto,

$$(f - \lambda id)(\vec{v}) = f(\vec{v}) - \lambda id(\vec{v}) = \lambda \vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0},$$

de manera que $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f - \lambda id)$. Como $\vec{v} \neq \vec{0}$, se concluye que $\mathrm{Ker}(f - \lambda id) \neq \left\{\vec{0}\right\}$.

$(2. \Longrightarrow 1.)$ Supongamos ahora que $\mathrm{Ker}(f - \lambda id) \neq \left\{\vec{0}\right\}$ y sea $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f - \lambda id)$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$. Puesto que

$$\vec{0} = (f - \lambda id)(\vec{v}) = f(\vec{v}) - \lambda id(\vec{v}) = f(\vec{v}) - \lambda \vec{v},$$

se tiene que $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ y, en consecuencia, λ es un valor propio de f. $\square$

NOTA 5.6 *En la demostración del resultado anterior se prueba que los vectores no nulos de* $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda id)$ *son los vectores propios de* V *asociados al valor propio* λ. *Por lo tanto, asociado a un valor propio tenemos un subespacio vectorial no trivial.*

DEFINICION 5.7 *Sean* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$, $f \in \mathrm{End}\,(V)$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$ *un valor propio de* f. *Llamaremos* ***subespacio propio*** *de* f *asociado a* λ *al subespacio vectorial*

$$E_f\,(\lambda) := \mathrm{Ker}\,(f-\lambda id)\,.$$

Nótese que si $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de f, entonces $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda id)$ es un subespacio vectorial no trivial que contiene, además del vector nulo, los vectores propios de f asociados al valor propio λ.

DEFINICION 5.8 *Sean* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$, $f \in \mathrm{End}\,(V)$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$ *un valor propio de* f. *Llamaremos* ***multiplicidad geométrica*** *de* λ *a la dimensión de* $E_f\,(\lambda)$.

COROLARIO 5.9 *Sean* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$, $f \in \mathrm{End}\,(V)$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. λ es un valor propio de f,

2. $\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{V}}\,(f-\lambda id)\right) = 0$, para cualquier base $\mathcal{V}$ de V.

Demostración: $(1. \Longrightarrow 2.)$ Supongamos que λ es un valor propio de f. Por la Proposición 5.5, tenemos que $E_f\,(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda id) \neq \left\{\vec{0}\right\}$, de modo que $\dim E_f\,(\lambda) \geq 1$ y, por el Teorema 0.102,

$$\mathrm{rg}\,(f-\lambda id) = n - \dim E_f\,(\lambda) \leq n-1.$$

Aplicando la Proposición 0.135, se tiene que, para cualquier base $\mathcal{V}$ de V, $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}_{\mathcal{V}}\,(f-\lambda id) = \mathrm{rg}\,(f-\lambda id) \leq n-1$ y, por lo tanto, $\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{V}}\,(f-\lambda id)\right) = 0$.

$(2. \Longrightarrow 1.)$ Supongamos ahora que $\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{V}}\,(f-\lambda id)\right) = 0$, con $\mathcal{V}$ una base cualquiera de V. Entonces, $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}_{\mathcal{V}}\,(f-\lambda id) = \mathrm{rg}\,(f-\lambda id) \leq n-1$ y, por el Teorema 0.112, $f-\lambda id$ no es un monomorfismo. Por lo tanto, $E_f\,(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda id) \neq \left\{\vec{0}\right\}$ y, por la Proposición 5.5, λ es un valor propio de f. $\square$

EJEMPLO 5.10 Consideremos de nuevo el endomorfismo $f \in \mathrm{End}\,(V)$ del Ejemplo 5.3. Ya hemos visto que 3 es un valor propio de f. Veamos que 5 también lo es.

Para que 5 sea valor propio de f necesitamos, de acuerdo con el Corolario 5.9, que

$$\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{V}}\,(f-5id)\right) = 0$$

para cualquier base $\mathcal{V}$ de V. Claramente,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{V}}\,(f) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f-5id) &= \mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f)-5\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(id)\\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1\\ 2 & 5 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Puesto que $\det(\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f-5id))=0$, se tiene que 5 es un valor propio de f.

Para obtener el subespacio propio $E_f(5)$ hemos de determinar, de acuerdo con la Proposición 5.5 y la Definición 5.7, los vectores no nulos de $\operatorname{Ker}(f-5id)$. Ahora bien,

$$\vec{v}\in\operatorname{Ker}(f-5id) \quad \text{si, y sólo si,} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f-5id)\,C_{\mathcal{V}}(\vec{v})=\vec{0},$$

por lo que los vectores propios de f asociados al valor propio 5 son los vectores de V cuyas coordenadas en la base $\mathcal{V}$ son soluciones no triviales del sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Dado que se trata de un sistema compatible e indeterminado cuya solución general es

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\\ 2\alpha\\ \alpha\end{pmatrix},$$

con $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$E_f(5)=\{\alpha\vec{v}_1+2\alpha\vec{v}_2+\alpha\vec{v}_3 \mid \alpha\in\mathbb{R}\}=\operatorname{Env}(\{\vec{v}_1+2\vec{v}_2+\vec{v}_3\}).$$

PROPOSICION 5.11 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $f\in\operatorname{End}(V)$. Si $\lambda\in\mathbb{K}$ es un valor propio de f, entonces $E_f(\lambda)$ es un subespacio invariante por f.*

Demostración: Si $\vec{v}\in E_f(\lambda)$, entonces $(f-\lambda id)(\vec{v})=\vec{0}$. Entonces $f(\vec{v})=\lambda\vec{v}$ y, dado que $E_f(\lambda)$ es un subespacio vectorial, se tiene que $f(\vec{v})=\lambda\vec{v}\in E_f(\lambda)$. Por lo tanto, $E_f(\lambda)$ es invariante por f. $\square$

NOTA 5.12 *Si $\vec{u},\vec{v}\in E_f(\lambda)$, entonces $\vec{u}+\vec{v}\in E_f(\lambda)$. Por lo tanto, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores propios de f asociados a un mismo valor propio λ, entonces $\vec{u}+\vec{v}$ también es un vector propio asociado a λ (siempre que $\vec{u}\neq-\vec{v}$).*

Sin embargo, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores propios de f asociados a λ y μ, respectivamente, con $\lambda\neq\mu$, entonces $\vec{u}+\vec{v}$ no es un vector propio de f.

EJEMPLO 5.13 Retomamos el Ejemplo 5.3 y consideramos $\vec{u}_1=\vec{v}_1-\vec{v}_2$, vector propio asociado al valor propio 3, y $\vec{u}_3=\vec{v}_1+2\vec{v}_2+\vec{v}_3$, vector propio asociado al valor propio 5. Si

$$\vec{u}_1+\vec{u}_3=2\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$$

fuese un vector propio de f, entonces existiría $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$f(\vec{u}_1+\vec{u}_3)=\lambda(\vec{u}_1+\vec{u}_3),$$

es decir,
$$8\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3 = \lambda\left(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3\right),$$
con lo que
$$8 = 2\lambda, \quad 7 = \lambda \quad \text{y} \quad 5 = \lambda$$
que claramente es una contradicción.

PROPOSICION 5.14 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f \in \operatorname{End}(V)$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ son los distintos valores propios de f, entonces la suma de los subespacios propios $E_f(\lambda_1), E_f(\lambda_2), \ldots, E_f(\lambda_r)$ es directa.*

Demostración:

Hacemos la demostración por inducción sobre p.

Supongamos en primer lugar que $p = 2$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ son los valores propios distintos de f. Sea $\vec{v} \in E_f(\lambda_1) \cap E_f(\lambda_2)$. Entonces,
$$(f - \lambda_1 id)(\vec{v}) = \vec{0} = (f - \lambda_2 id)(\vec{v})$$
o, lo que es lo mismo,
$$f(\vec{v}) - \lambda_1\vec{v} = f(\vec{v}) - \lambda_2\vec{v},$$
de donde se obtiene que $(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v} = \vec{0}$. Dado que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se tiene que $\vec{v} = \vec{0}$. Por lo tanto, $E_f(\lambda_1) \cap E_f(\lambda_2) = \left\{\vec{0}\right\}$ y la suma de $E_f(\lambda_1)$ y $E_f(\lambda_2)$ es directa.

Supongamos que el resultado es cierto para $r-1$ subespacios propios y veamos que también lo es para r. Supongamos que
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_{r-1} + \vec{v}_r = \vec{0} \tag{5.1}$$
con $\vec{v}_j \in E_f(\lambda_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, r$. Entonces,
$$\vec{0} = f\left(\vec{0}\right) = f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_{r-1} + \vec{v}_r) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) + \cdots + f(\vec{v}_{r-1}) + f(\vec{v}_r),$$
de donde
$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_{r-1}\vec{v}_{r-1} + \lambda_r\vec{v}_r = \vec{0}. \tag{5.2}$$
Multiplicando la expresión (5.1) por λ_r, se obtiene
$$\lambda_r\vec{v}_1 + \lambda_r\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_r\vec{v}_{r-1} + \lambda_r\vec{v}_r = \vec{0} \tag{5.3}$$
y, restando (5.2) menos (5.3), se tiene
$$(\lambda_1 - \lambda_r)\vec{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda_r)\vec{v}_2 + \cdots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)\vec{v}_{r-1} = \vec{0}.$$
Como $(\lambda_j - \lambda_r)\vec{v}_j \in E_f(\lambda_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, r-1$, aplicando la hipótesis de inducción, se obtiene que $(\lambda_j - \lambda_r)\vec{v}_j = \vec{0}$ para $j = 1, 2, \ldots, r-1$ y, como $\lambda_j \neq \lambda_r$, se tiene que $\vec{v}_j = \vec{0}$

para $j = 1, 2, \ldots, r-1$. Sustituyendo en (5.1), se obtiene $\vec{v}_r = \vec{0}$. Por lo tanto, la suma de $E_f(\lambda_1), E_f(\lambda_2), \ldots, E_f(\lambda_r)$ es directa. $\square$

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior tenemos el resultado siguiente que permite obtener un conjunto de vectores linealmente independientes a partir de conjuntos de vectores linealmente independientes de los subespacios propios.

COROLARIO 5.15 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $f \in \operatorname{End}(V)$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ los valores propios distintos de f. Si los vectores de $\mathcal{U}_j \subseteq E_f(\lambda_j)$, para $j = 1, 2, \ldots, r$, son linealmente independientes, entonces los vectores de $\mathcal{U} = \bigcup_{j=1}^{r} \mathcal{U}_j$ también son linealmente independientes.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{U}_j = \left\{\vec{u}_1^{(j)}, \vec{u}_2^{(j)}, \ldots, \vec{u}_{d_j}^{(j)}\right\}$ para $j = 1, 2, \ldots, r$. Probaremos que los vectores del conjunto

$$\mathcal{U} = \left\{\vec{u}_1^{(1)}, \vec{u}_2^{(1)}, \ldots, \vec{u}_{d_1}^{(1)}, \vec{u}_1^{(2)}, \vec{u}_2^{(2)}, \ldots, \vec{u}_{d_2}^{(2)}, \ldots, \vec{u}_1^{(r)}, \vec{u}_2^{(r)}, \ldots, \vec{u}_{d_r}^{(r)}\right\}$$

son linealmente independientes. Para ello, consideramos la combinación lineal nula

$$\begin{aligned} &\alpha_1^{(1)}\vec{u}_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}\vec{u}_2^{(1)} + \cdots + \alpha_{d_1}^{(1)}\vec{u}_{d_1}^{(1)} \\ &+\alpha_1^{(2)}\vec{u}_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}\vec{u}_2^{(2)} + \cdots + \alpha_{d_2}^{(2)}\vec{u}_{d_2}^{(2)} \\ &+\cdots \\ &+\alpha_1^{(r)}\vec{u}_1^{(r)} + \alpha_2^{(r)}\vec{u}_2^{(r)} + \cdots + \alpha_{d_r}^{(r)}\vec{u}_{d_r}^{(r)} = \vec{0}, \end{aligned}$$

con $\alpha_l^{(j)} \in \mathbb{K}$, para $j = 1, 2, \ldots, r$ y $l = 1, 2, \ldots, d_j$, que podemos escribir como

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_r = \vec{0}$$

donde

$$\vec{v}_j = \alpha_1^{(j)}\vec{u}_1^{(j)} + \alpha_2^{(j)}\vec{u}_2^{(j)} + \cdots + \alpha_{d_j}^{(j)}\vec{u}_{d_j}^{(j)},$$

para $j = 1, 2, \ldots, r$. Ahora bien, como $\vec{v}_j \in E_f(\lambda_j)$, para $j = 1, 2, \ldots, r$, por las Proposiciones 5.14 y 0.83, se tiene que $\vec{v}_j = \vec{0}$, para todo $j = 1, 2, \ldots, r$, es decir,

$$\alpha_1^{(j)}\vec{u}_1^{(j)} + \alpha_2^{(j)}\vec{u}_2^{(j)} + \cdots + \alpha_{d_j}^{(j)}\vec{u}_{d_j}^{(j)} = \vec{0},$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, r$, y como los vectores $\vec{u}_1^{(j)}, \vec{u}_2^{(j)}, \ldots, \vec{u}_{d_j}^{(j)}$ son linealmente independientes, se tiene que

$$\alpha_1^{(j)} = \alpha_2^{(j)} = \cdots = \alpha_{d_j}^{(j)} = 0,$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, r$. Por lo tanto, los vectores del conjunto $\mathcal{U}$ son linealmente independientes. $\square$

Evidentemente, el resultado anterior sigue siendo válido si $\mathcal{U}_j$ es una base de $E_f(\lambda_j)$, para

$j = 1, 2, \ldots, r$. Por lo tanto, como consecuencia inmediata de este resultado se tiene que

$$\sum_{j=1}^{r} \dim \left(E_f \left(\lambda_j \right) \right) \leq n = \dim V.$$

Finalmente, como consecuencia inmediata del corolario anterior se tiene que vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.

COROLARIO 5.16 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $f \in \operatorname{End}(V)$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ los valores propios distintos de f. Si $\vec{0} \neq \vec{u}_j \in E_f(\lambda_j)$, para $j = 1, 2, \ldots, r$, entonces los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots . \vec{u}_r$ son linealmente independientes.*

Demostración: Se obtiene al tomar, en el corolario anterior, $\mathcal{U}_j = \{\vec{u}_j\}$ para $j = 1, 2, \ldots, r$. $\square$

5.2. Polinomio característico

Supongamos que $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ y que $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$. Puesto que

$$C_{\mathcal{C}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

podemos identificar $\vec{x}$ con $C_{\mathcal{C}}(\vec{x})$ y escribir

$$(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{ó} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

según convenga, para referirnos al vector $\vec{x}$ de $\mathbb{K}^n$.

Supongamos que $A \in M_n(\mathbb{K})$ y sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{K}^n)$ tal que

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f).$$

Si $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, de acuerdo con la identificación anterior, tenemos que

$$f(\vec{x}) = C_{\mathcal{C}}(f(\vec{x})) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)\, C_{\mathcal{C}}(\vec{x}) = A\vec{x}$$

y, por el Corolario 5.9, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de f si, y sólo si, $\det(A - \lambda I) = 0$. Además, si $\vec{v} \in \mathbb{K}^n \backslash \left\{ \vec{0} \right\}$ es un vector propio de f asociado al valor propio λ, entonces

$$\lambda\vec{v} = f(\vec{v}) = A\vec{v}$$

y, por lo tanto,

$$E_f(\lambda) = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{K}^n \mid (A - \lambda I)\, \vec{v} = \vec{0} \right\}.$$

Estos hechos motivan la siguiente definición:

DEFINICION 5.17 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un* ***valor propio*** *de A si $\det(A - \lambda I) = 0$. Se dice que $\vec{v} \in \mathbb{K}^n \backslash \left\{\vec{0}\right\}$ es un* ***vector propio*** *de A asociado al valor propio λ si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Llamamos* ***subespacio propio*** *de A asociado al valor propio λ al subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$*

$$E_A(\lambda) = \left\{\vec{v} \in \mathbb{K}^n \mid (A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}\right\}.$$

EJEMPLO 5.18 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 8 & 4 \\ -8 & 7 & 4 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -9-\lambda & 8 & 4 \\ -8 & 7-\lambda & 4 \\ -4 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1\right).$$

Ahora, si resolvemos la ecuación

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

obtenemos que las soluciones de la misma son 1 y -1, por tanto, éstos son los valores propios de la matriz A.

Para obtener el subespacio propio $E_A(1)$, resolvemos, de acuerdo con los comentarios anteriores, el sistema lineal homogéneo $(A - 1I)\,\vec{x} = \vec{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -10 & 8 & 4 \\ -8 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, se obtiene

$$E_A(1) = \{(2\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Env}(\{(2,2,1)\}).$$

Claramente $\{(2,2,1)\}$ es una base de $E_A(1)$, con lo que $\dim E_A(1) = 1$, es decir, la multiplicidad geométrica de 1 es 1.

Análogamente, para obtener el subespacio propio $E_A(-1)$ resolvemos el sistema lineal homogéneo $(A + 1I)\,\vec{x} = \vec{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -8 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, se obtiene

$$E_A(-1) = \{(\alpha + \beta, \alpha, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Env}(\{(1,1,0), (1,0,2)\}).$$

Claramente $\{(1,1,0), (1,0,2)\}$ es una base de $E_A(-1)$, con lo que $\dim E_A(-1) = 2$, es decir, la multiplicidad geométrica de -1 es 2.

Como λ es un valor propio de A si y sólo si $\det(A - \lambda I) = 0$ o, equivalentemente, si y sólo si $\det(\lambda I - A) = 0$, podemos construir la matriz polinómica $xI - A$ en la variable x y resolver la ecuación polinómica

$$\det(xI - A) = 0$$

para obtener los valores propios de A. Este hecho motiva la siguiente definición:

DEFINICION 5.19 *Supongamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Llamaremos* ***polinomio característico*** *de A al polinomio*

$$c_A(x) := \det(xI - A)$$

y ***ecuación característica*** *de A a la ecuación*

$$c_A(x) = 0.$$

NOTA 5.20 *1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $c_A(x)$ es un polinomio de grado n en la variable x.*
2) Los valores propios de A son las raíces en $\mathbb{K}$ del polinomio característico de A.
3) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, por el Teorema Fundamental del Álgebra, el polinomio característico tendrá n raíces (no necesariamente distintas) y, por lo tanto, A tendrá n valores propios.
4) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el polinomio característico puede tener raíces no reales que no nos servirán como valores propios de A.

EJEMPLO 5.21 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

cuyo polinomio característico es

$$c_A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1,$$

que no tiene raíces reales. Por lo tanto, A no tiene valores propios (en $\mathbb{R}$).

Ahora bien, si consideramos que $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, entonces $c_A(x) = (x - i)(x + i)$, por lo que i y $-i$ son valores propios de A. Además,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

por lo que se tiene que $(1, -i), (1, i) \in \mathbb{C}^2$ son vectores propios de A asociados a los valores propios i y $-i$, respectivamente.

Dado que un valor propio de una matriz es una raíz de su polinomio característico y las raíces de un polinomio pueden tener distintas multiplicidades, podemos dar la siguiente definición:

DEFINICION 5.22 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de A. Llamamos* ***multiplicidad algebraica*** *de λ a la multiplicidad de λ como raíz de $c_A(x)$.*

EJEMPLO 5.23 Consideremos la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que

$$c_A(x)=\begin{vmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ -1 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=(x+2)(x-1)^2.$$

Por lo tanto, los valores propios de A son -2 y 1 con multiplicidades algebraicas 1 y 2, respectivamente.

Para obtener el subespacio propio $E_A(-2)$, resolvemos el sistema lineal homogéneo $(A+2I)\vec{x}=\vec{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, se obtiene

$$E_A(-2)=\{(9\alpha,\alpha,-3\alpha)\mid \alpha\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Env}\left(\{(9,1,-3)\}\right).$$

Claramente $\{(9,1,-3)\}$ es una base de $E_A(-2)$, con lo que $\dim E_A(-2)=1$, es decir, la multiplicidad geométrica de -2 es 1.

Análogamente, para obtener el subespacio propio $E_A(1)$ resolvemos el sistema lineal homogéneo $(A-1I)\vec{x}=\vec{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, se obtiene

$$E_A(1)=\{(0,\alpha,0)\mid \alpha\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Env}\left(\{(0,1,0)\}\right).$$

Claramente $\{(0,1,0)\}$ es una base de $E_A(1)$, con lo que $\dim E_A(1)=1$, es decir, la multiplicidad geométrica de 1 es 1.

EJEMPLO 5.24 Consideremos la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$c_A(x)=\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ -1 & x-3 & -1 \\ -1 & -2 & x-2 \end{vmatrix}=(x-5)(x-1)^2.$$

Por lo tanto, los valores propios de A son 5 y 1 con multiplicidades algebraicas 1 y 2, respectivamente.

Para obtener el subespacio propio $E_A(5)$, resolvemos el sistema lineal homogéneo $(A-5I)\vec{x}=\vec{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, se obtiene

$$E_A(5) = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Env}(\{(1,1,1)\}).$$

Claramente $\{(1,1,1)\}$ es una base de $E_A(5)$, con lo que $\dim E_A(5) = 1$, es decir, la multiplicidad geométrica de 5 es 1.

Análogamente, para obtener el subespacio propio $E_A(1)$ resolvemos el sistema lineal homogéneo $(A - I)\vec{x} = \vec{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, se obtiene

$$E_A(1) = \{(-2\alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Env}(\{(-2,1,0), (-1,0,1)\}).$$

Así $\{(-2,1,0), (-1,0,1)\}$ es una base de $E_A(1)$, con lo que $\dim E_A(1) = 2$, es decir, la multiplicidad geométrica de 1 es 2.

PROPOSICION 5.25 *Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular, entonces los valores propios de A son $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.*

Demostración: Supongamos que $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular superior. Entonces,

$$c_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x - a_{nn} \end{vmatrix} = (x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn}),$$

de donde se obtiene que los valores propios de A son los elementos de su diagonal. $\square$

PROPOSICION 5.26 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces A y A^T tienen el mismo polinomio característico y, por tanto, los mismos valores propios.*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces,

$$\begin{aligned} c_{A^T}(x) &= \det\left(xI - A^T\right) = \det\left(xI^T - A^T\right) = \det\left((xI)^T - A^T\right) \\ &= \det\left((xI - A)^T\right) = \det(xI - A) = c_A(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, los polinomios característicos de A y A^T coinciden. $\square$

PROPOSICION 5.27 *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A y B son semejantes, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico y, en consecuencia los mismos valores propios.*

Demostración: Si A y B son semejantes, entonces existe una matriz P regular tal que $B = P^{-1}AP$.

Entonces,

$$\begin{aligned} c_B(x) &= \det(xI-B) = \det\left(xP^{-1}IP - P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}(xI-A)P\right) \\ &= (\det P)^{-1}\det(xI-A)\det P = c_A(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, los polinomios característicos de A y B coinciden. $\square$

En (0.29) se establece que las matrices, respecto de distintas bases, de un mismo endomorfismo son semejantes. Por lo tanto, podemos dar la siguiente definición:

DEFINICION 5.28 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f \in \operatorname{End}(V)$. Llamamos* ***polinomio característico*** *de f, y escribimos $c_f(x)$, al polinomio característico de la matriz de f en cualquier base.*

De esta forma, los valores propios de f son los valores propios de cualquier matriz asociada a f.

PROPOSICION 5.29 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $f \in \operatorname{End}(V)$. Si W es un subespacio vectorial de V invariante por f, entonces $c_{f|_W}(x)$ divide a $c_f(x)$.*

Demostración: Supongamos que $\dim V = n$, $\dim W = p$ y $\mathcal{W}$ es una base de W. Por el teorema de la base incompleta, podemos encontrar un subconjunto $\mathcal{U}$ de V tal que $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cup \mathcal{U}$ es una base de V. Ahora, como W es invariante por f, es fácil comprobar que

$$M_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{W}}(f|_W) & A_{21} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

con $M_{\mathcal{W}}(f|_W) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A_{21} \in \mathcal{M}_{p\times(n-p)}(\mathbb{K})$ y $A_{22} \in \mathcal{M}_{(n-p)\times(n-p)}(\mathbb{K})$. Por lo tanto,

$$xI_n - M_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} xI_p - M_{\mathcal{W}}(f|_W) & -A_{21} \\ O & xI_{n-d} - A_{22} \end{pmatrix}$$

y, por las propiedades de los determinantes,

$$c_f(x) = c_{f|_W}(x)\, c_{A_{22}}(x)$$

$\square$

PROPOSICION 5.30 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, $f \in \operatorname{End}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de f. Si d y m son las multiplicidades geométrica y algebraica de λ, respectivamente, entonces*

$$1 \leq d \leq m.$$

Demostración: Como λ es un valor propio de f, se tiene que $E_f(\lambda) \neq \left\{\vec{0}\right\}$ y, por lo tanto, $d = \dim E_f(\lambda) \geq 1$.

Si $\mathcal{V}$ es una base de $E_f(\lambda)$, entonces $M_{\mathcal{V}}\left(f\left|_{E_f(\lambda)}\right.\right) = \lambda I_d$ con lo que

$$c_{f\left|_{E_f(\lambda)}\right.}(x) = (x-\lambda)^d.$$

Ahora bien, como $E_f(\lambda)$ es invariante por f, por la proposición anterior, tenemos que $(x-\lambda)^d$ divide a $c_f(x)$ y, por lo tanto, $d \leq m$. $\square$

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que si la multiplicidad algebraica de un valor propio es 1, entonces también es 1 la multiplicidad geométrica.

5.3. Diagonalización de endomorfismos y matrices.

DEFINICION 5.31 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $f \in \mathrm{End}(V)$. Se dice que f es **diagonalizable** si existe una base $\mathcal{V}$ de V tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f)$ es una matriz diagonal.*

EJEMPLO 5.32 Sean V un espacio vectorial real, $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de V y $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que

$$\begin{array}{rcrcrcr} f(\vec{v}_1) & = & 4\vec{v}_1 & + & 2\vec{v}_2 & + & \vec{v}_3, \\ f(\vec{v}_2) & = & \vec{v}_1 & + & 5\vec{v}_2 & + & \vec{v}_3, \\ f(\vec{v}_3) & = & -\vec{v}_1 & - & 2\vec{v}_2 & + & 2\vec{v}_3. \end{array}$$

Consideremos ahora los vectores

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \qquad \vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3 \qquad \text{y} \qquad \vec{u}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3.$$

Es fácil comprobar que $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de V y que

$$f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_1, \qquad f(\vec{u}_2) = 3\vec{u}_2 \qquad \text{y} \qquad f(\vec{u}_3) = 5\vec{u}_3.$$

Por lo tanto,

$$M_{\mathcal{U}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

y, en consecuencia, f es diagonalizable.

PROPOSICION 5.33 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y $f \in \mathrm{End}(V)$. Entonces, f es diagonalizable si, y sólo si, existe una base $\mathcal{V}$ de V formada por vectores propios de f. En tal caso, la matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f)$ es diagonal y los elementos de la diagonal son los valores propios de f.*

Demostración: Por definición, f es diagonalizable si existe una base $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de V tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f)$ es diagonal o, lo que es lo mismo,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

lo cual es equivalente a que $f(\vec{v}_j) = \lambda_j \vec{v}_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, es decir, a que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base de V formada por vectores propios de f. $\square$

PROPOSICION 5.34 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ y $f \in \mathrm{End}(V)$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ todos los valores propios distintos de f. Entonces, f es diagonalizable si, y sólo si,*

$$\sum_{j=1}^{r} \dim E_f(\lambda_j) = n. \tag{5.4}$$

Demostración: Supongamos que f es diagonalizable. Entonces, por la Proposición 5.33, V admite una base $\mathcal{V}$ formada por vectores propios de f. Por lo tanto, podemos afirmar que

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{V}_r$$

con $\mathcal{V}_j \subset E_f(\lambda_j)$, para $j = 1, 2, \ldots, r$, un conjunto formado por vectores linealmente independientes. Dado que, por la Proposición 5.14, la suma de subespacios propios es directa, se tiene que

$$n = \mathrm{card}\, \mathcal{V} = \sum_{j=1}^{r} \mathrm{card}(\mathcal{V}_j) \leq \sum_{j=1}^{r} \dim E_f(\lambda_j) \leq n,$$

por lo que se satisface la igualdad (5.4).

Supongamos ahora que se cumple (5.4). Dado que, por la Proposición 5.14, la suma de subespacios propios es directa, se tiene que

$$n = \sum_{j=1}^{r} \dim E_f(\lambda_j) = \dim\left(E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E_f(\lambda_r)\right).$$

Entonces, $E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E_f(\lambda_r) = V$ y si $\mathcal{V}_j$ es una base de $E_f(\lambda_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, r$, se tiene que

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{V}_r$$

es una base de V formada por vectores propios de f y, por la Proposición 5.33, f es diagonalizable. $\square$

COROLARIO 5.35 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ y $f \in \mathrm{End}(V)$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ todos los valores propios distintos de f. Entonces, f es diagonalizable si, y sólo si,*

$$V = E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E_f(\lambda_r).$$

COROLARIO 5.36 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ y $f \in \mathrm{End}(V)$. Si f tiene n valores propios distintos, entonces f es diagonalizable.*

Demostración: Supongamos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ son los n valores propios distintos de f. Puesto que todos tienen multiplicidad algebraica igual a 1, por la Proposición 5.30, se tiene que $\dim E_f(\lambda_j) = 1$, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} \dim E_f(\lambda_j) = n$$

y, por la Proposición 5.34, se concluye que f es diagonalizable. □

TEOREMA 5.37 (Teorema fundamental de diagonalización) *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ y $f \in \operatorname{End}(V)$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ los distintos valores propios de f con multiplicidades algebraicas respectivas $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Entonces, f es diagonalizable si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:*

1. $\sum_{j=1}^{r} m_j = n$,

2. $\dim E_f(\lambda_j) = m_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, r$.

Demostración: Supongamos que f es diagonalizable. Entonces, por las Proposiciones 5.34 y 5.30, se tiene que

$$n = \sum_{j=1}^{r} \dim E_f(\lambda_j) \leq \sum_{j=1}^{r} m_j \leq n,$$

por lo que necesariamente se satisfacen las condiciones 1. y 2.

Recíprocamente, supongamos ahora que se cumplen las condiciones 1. y 2. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{r} \dim E_f(\lambda_j) = n$$

y, por la Proposición 5.34 concluimos que f es diagonalizable. □

DEFINICION 5.38 *Se dice que una **matriz** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es **diagonalizable** si el único endomorfismo $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ tal que $A = \mathcal{M}_{\mathrm{Can}(\mathbb{K}^n)}(f)$ es un endomorfismo diagonalizable.*

PROPOSICION 5.39 *Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si, y sólo si, existe una matriz diagonal D tal que A y D son semejantes.*

Demostración: Supongamos que A es diagonalizable. Entonces, el único endomorfismo $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ tal que $A = \mathcal{M}_{\mathrm{Can}(\mathbb{K}^n)}(f)$ es un endomorfismo diagonalizable y, por la Proposición 5.33, esto es equivalente a que exista una base $\mathcal{V}$ de $\mathbb{K}^n$ (formada por vectores propios) tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f) = D$ es diagonal. Como A y D son matrices asociadas al mismo endomorfismo respecto de bases distintas, por la Proposición 0.144, A y D son semejantes.

Recíprocamente, supongamos que A es semejante a una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Entonces existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $D = P^{-1}AP$.

Consideremos $\mathcal{U}$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$ y $\mathcal{V}$ la base de $\mathbb{K}^n$ formada por los vectores cuyas componentes en la base canónica de $\mathbb{K}^n$ son las columnas de P. Entonces $P = P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ y $P^{-1} = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$.

Sea $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ el único homomorfismo tal que $M_{\mathcal{U}}(f) = A$ (véase Teorema 0.136). Entonces, por la Proposición 0.131, se tiene que

$$M_{\mathcal{V}}(f) = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} M_{\mathcal{U}}(f) P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = P^{-1}AP = D. \tag{5.5}$$

Si $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, de la igualdad (5.5), se tiene que

$$f(\vec{v}_j) = \lambda_j \vec{v}_j,$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$ y, como cada $\vec{v}_j \neq \vec{0}$, entonces $\vec{v}_j$ es un vector propio de f. Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios y f es diagonalizable. $\square$

5.4. Forma canónica de Jordan.

EJEMPLO 5.40 Consideramos la matriz cuadrada de orden 2 con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene fácilmente que $c_A(x) = (x-2)^2$, de modo que la matriz A tiene un único valor propio $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 2. Puesto que $\dim E_A(2) = 1$, se tiene que A no es diagonalizable.

Dado que A no es semejante a una matriz diagonal, nos planteamos ahora si es posible encontrar una matriz de la forma

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

que sea semejante a la matriz A. Si así fuese, existiría una matriz regular P tal que $A = P^{-1}JP$ y $A^k = P^{-1}J^kP$, demostrándose por inducción en k que

$$J^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}.$$

Veamos cómo encontrar en este caso la matriz J. Puesto que A y J son matrices semejantes, ambas deben tener los mismos valores propios. Puesto que $c_J(x) = (x-a)^2$, debe cumplirse que $a = 2$ y

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si consideramos $f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$ con $\mathcal{C} = \mathrm{Can}\left(\mathbb{R}^2\right)$, entonces $J = \mathcal{M}_{\mathcal{V}}(f)$ para $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ que debe cumplir que $f(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1$ y $f(\vec{v}_2) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, de donde se deduce que $\vec{v}_1$ es un vector propio de f asociado al valor propio 2 y

$$(f - 2\,\mathrm{id})(\vec{v}_2) = f(\vec{v}_2) - 2\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

Dado que

$$(f - 2\,\mathrm{id})^2(\vec{v}_2) = (f - 2\,\mathrm{id})(\vec{v}_1) = \vec{0},$$

se tiene que $\vec{v}_1 \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$ y $\vec{v}_2 \in \mathrm{Ker}\left((f - 2\,\mathrm{id})^2\right)$.

DEFINICION 5.41 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $f \in \mathrm{End}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de f. Se dice que el conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\} \subseteq V$ es una cadena de Jordan de f de longitud k asociada a λ si se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

1. $\vec{u}_1$ es un vector propio de f asociado a λ, es decir, $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ y $f(\vec{u}_1) = \lambda\vec{u}_1$,

2. $f(\vec{u}_j) = \lambda\vec{u}_j + \vec{u}_{j-1}$, para $j = 2, 3, \ldots, k$.

Nótese que un vector propio es una cadena de Jordan de longitud 1. Además, de la definición anterior resulta que

$$\begin{aligned}
(f - \lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_k) &= f(\vec{u}_k) - \lambda\vec{u}_k = \vec{u}_{k-1}, \\
(f - \lambda\,\mathrm{id})^2(\vec{u}_k) &= (f - \lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_{k-1}) = \vec{u}_{k-2}, \\
(f - \lambda\,\mathrm{id})^3(\vec{u}_k) &= (f - \lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_{k-2}) = \vec{u}_{k-3}, \\
&\vdots \\
(f - \lambda\,\mathrm{id})^{k-2}(\vec{u}_k) &= (f - \lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_3) = \vec{u}_2, \\
(f - \lambda\,\mathrm{id})^{k-1}(\vec{u}_k) &= (f - \lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_2) = \vec{u}_1, \\
(f - \lambda\,\mathrm{id})^{k}(\vec{u}_k) &= (f - \lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_1) = \vec{0}.
\end{aligned}$$

PROPOSICION 5.42 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $f \in \mathrm{End}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de f. Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\} \subseteq V$ es una cadena de Jordan de f de longitud k asociada a λ, entonces:*

1. los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ son linealmente independientes,

2. $\mathrm{Env}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\})$ es un subespacio invariante por f.

Demostración:

1. Consideremos la combinación lineal nula

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{u}_k = \vec{0}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Las expresiones que siguen a la Definición 5.41 nos permiten escribir la expresión anterior como

$$\alpha_1 (f - \lambda \operatorname{id})^{k-1} (\vec{u}_k) + \alpha_2 (f - \lambda \operatorname{id})^{k-2} (\vec{u}_k) + \cdots + \alpha_{k-1} (f - \lambda \operatorname{id}) (\vec{u}_k) + \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0}. \tag{5.6}$$

Aplicando $(f - \lambda \operatorname{id})^{k-1}$ sobre los dos miembros de (5.6), tenemos que

$$\alpha_k (f - \lambda \operatorname{id})^{k-1} (\vec{u}_k) = \alpha_k \vec{u}_1 = \vec{0}$$

y dado que $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$, se obtiene que $\alpha_k = 0$.

Análogamente, aplicando $(f - \lambda \operatorname{id})^{k-2}$ sobre los dos miembros de (5.6), tenemos que

$$\alpha_{k-1} (f - \lambda \operatorname{id})^{k-1} (\vec{u}_k) = \vec{0}$$

y, como en el caso anterior, $\alpha_{k-1} = 0$.

Siguiendo con este razonamiento, obtenemos también que

$$\alpha_{k-2} = \alpha_{k-3} = \cdots = \alpha_2 = \alpha_1 = 0.$$

Por lo tanto, los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ son linealmente independientes.

2. Si $\vec{u} \in \operatorname{Env}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\})$, entonces

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{u}_k$$

para ciertos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \alpha_2 f(\vec{u}_2) + \cdots + \alpha_k f(\vec{u}_k) \\ &= \alpha_1 \lambda \vec{u}_1 + \alpha_2 (\lambda \vec{u}_2 + \vec{u}_1) + \cdots + \alpha_k (\lambda \vec{u}_k + \vec{u}_{k-1}) \\ &= (\alpha_1 \lambda + \alpha_2) \vec{u}_1 + (\alpha_2 \lambda + \alpha_3) \vec{u}_2 + \cdots + (\alpha_{k-1} \lambda + \alpha_k) \vec{u}_{k-1} + \alpha_k \lambda \vec{u}_k, \end{aligned}$$

de manera que $f(\vec{u}) \in \operatorname{Env}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\})$ y, así, $\operatorname{Env}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\})$ es un subespacio vectorial invariante por f. $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior, la matriz de la restricción de f a $\operatorname{Env}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\})$ en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ es

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}). \tag{5.7}$$

DEFINICION 5.43 *Llamamos* ***bloque de Jordan*** *de tamaño k asociado a $\lambda \in \mathbb{K}$, a la matriz $J_k(\lambda)$ de la expresión (5.7).*

LEMA 5.44 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $f \in \operatorname{End}(V)$. Si k es un entero positivo, entonces se verifican las siguientes condiciones:*

1. $\operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k}\right)$;

2. $f\left(\operatorname{Ker}\left(f^{k}\right)\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right)$.

Demostración:

1. Sea $\vec{u} \in \operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right)$. Entonces, $f^{k-1}(\vec{u}) = \vec{0}$, con lo que

$$f^{k}(\vec{u}) = f\left(f^{k-1}(\vec{u})\right) = f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$$

y, por lo tanto, $\vec{u} \in \operatorname{Ker}\left(f^{k}\right)$. Así, $\operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k}\right)$.

2. Supongamos que $\vec{v} \in f\left(\operatorname{Ker}\left(f^{k}\right)\right)$. Entonces $\vec{v} = f(\vec{u})$ para algún $\vec{u} \in \operatorname{Ker}\left(f^{k}\right)$, con lo que

$$\vec{0} = f^{k}(\vec{u}) = f^{k-1}(f(\vec{u})) = f^{k-1}(\vec{v})$$

y, por lo tanto $\vec{v} \in \operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right)$. En consecuencia, $f\left(\operatorname{Ker}\left(f^{k}\right)\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k-1}\right)$. $\square$

TEOREMA 5.45 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ y $f \in \operatorname{End}(V)$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ todos los valores propios distintos de f con multiplicidades respectivas $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Si $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $c_f(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_r)^{m_r}$.

2. $V = \operatorname{Ker}\left((f-\lambda_1\,\mathrm{id})^{m_1}\right) \oplus \operatorname{Ker}\left((f-\lambda_2\,\mathrm{id})^{m_2}\right) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}\left((f-\lambda_r\,\mathrm{id})^{m_r}\right)$.

3. $\dim \operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right) = m_j$, para $j = 1, 2, \ldots, r$.

4. $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right)$ es un subespacio invariante por f, para $j = 1, 2, \ldots, r$.

5. $c_{f|_{\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right)}}(x) = (x-\lambda_j)^{m_j}$, para $j = 1, 2, \ldots, r$.

NOTA 5.46 *En las condiciones del Teorema 5.45, si $\mathcal{U}_j$ es una base de $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right)$, para $j = 1, 2, \ldots, r$, entonces $\mathcal{U} = \bigcup_{j=1}^{r} \mathcal{U}_j$ es una base de V. Además, como $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right)$ es invariante por f, por la Proposición 0.153, se tiene que*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{U}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_r \end{pmatrix},$$

donde $A_j = \mathcal{M}_{\mathcal{U}_j}\left(f|_{\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right)}\right) \in \mathcal{M}_{m_j}(\mathbb{K})$, ya que $m_j = \dim \operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right)$, para $j = 1, 2, \ldots, r$.

Por otra parte, para cada $j = 1, 2, \ldots, r$, dado que $f|_{\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right)} \in \operatorname{End}\left(\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right)\right)$, se tiene también que $(f-\lambda_j\,\mathrm{id})|_{\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right)} \in \operatorname{End}\left(\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right)\right)$ y, por el Lema 5.44,

$$\left\{\vec{0}\right\} \subseteq \operatorname{Ker}(f-\lambda_j\,\mathrm{id}) \subseteq \operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{2}\right) \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j-1}\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\,\mathrm{id})^{m_j}\right).$$

DEFINICION 5.47 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita n, $f \in \operatorname{End}(V)$ con n valores propios (iguales o distintos) y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de f con multiplicidad algebraica m. Llamamos* ***índice*** *de f asociado a λ al menor entero positivo $q \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $\operatorname{Ker}((f - \lambda \operatorname{id})^q) = \operatorname{Ker}((f - \lambda \operatorname{id})^m)$ y* ***subespacio propio generalizado*** *de f asociado a λ al subespacio vectorial $\operatorname{Ker}((f - \lambda \operatorname{id})^q)$.*

PROPOSICION 5.48 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita n, $f \in \operatorname{End}(V)$ con n valores propios (iguales o distintos) y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de f con índice asociado q. Entonces,*

$$\left\{\vec{0}\right\} \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}) \subset \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^2\right) \subset \cdots \subset \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{q-1}\right) \subset \operatorname{Ker}((f - \lambda \operatorname{id})^q).$$

Demostración: Por el Lema 5.44, se tiene que

$$\left\{\vec{0}\right\} \subseteq \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}) \subseteq \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^2\right) \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{q-1}\right) \subseteq \operatorname{Ker}((f - \lambda \operatorname{id})^q).$$

Veremos que todas las inclusiones son estrictas.

Supongamos que $\operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{k-1}\right) = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{k}\right)$ para algún $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Entonces, para todo $\vec{u} \in \operatorname{Ker}((f - \lambda \operatorname{id})^q)$ se tiene que

$$\vec{0} = (f - \lambda \operatorname{id})^q (\vec{u}) = (f - \lambda \operatorname{id})^k \left((f - \lambda \operatorname{id})^{q-k} (\vec{u})\right)$$

con lo que $(f - \lambda \operatorname{id})^{q-k} (\vec{u}) \in \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{k}\right) = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{k-1}\right)$, es decir,

$$\vec{0} = (f - \lambda \operatorname{id})^{k-1} \left((f - \lambda \operatorname{id})^{q-k} (\vec{u})\right) = (f - \lambda \operatorname{id})^{q-1} (\vec{u})$$

con lo que $\vec{u} \in \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{q-1}\right)$, es decir, $\operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{q-1}\right) = \operatorname{Ker}((f - \lambda \operatorname{id})^q)$, lo que resulta ser una contradicción, ya que el índice asociado a λ sería en este caso $q - 1$.

Por lo tanto, $\operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{k-1}\right) \neq \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{k}\right)$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$. $\square$

PROPOSICION 5.49 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita n, $f \in \operatorname{End}(V)$ con n valores propios (iguales o distintos), $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de f con índice asociado q y $k \in \{2, 3, \ldots, q\}$. Si se satisfacen las siguientes propiedades:*

- los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r \in \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{k}\right)$ son linealmente independientes,
- $\operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{k-1}\right) \cap \operatorname{Env}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}) = \left\{\vec{0}\right\}$,

entonces también se satisfacen:

- los vectores $(f - \lambda \operatorname{id})(\vec{u}_1), (f - \lambda \operatorname{id})(\vec{u}_2), \ldots, (f - \lambda \operatorname{id})(\vec{u}_r) \in \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{k-1}\right)$ son linealmente independientes,
- $\operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id})^{k-2}\right) \cap \operatorname{Env}(\{(f - \lambda \operatorname{id})(\vec{u}_1), (f - \lambda \operatorname{id})(\vec{u}_2), \ldots, (f - \lambda \operatorname{id})(\vec{u}_r)\}) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Demostración: Como $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r \in \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^k\right)$, por el apartado 2 del Lema 5.44, tenemos que

$$(f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_1), (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_2), \ldots, (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_r) \in \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-1}\right).$$

Supongamos que

$$\alpha_1 (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_1) + \alpha_2 (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_2) + \cdots + \alpha_r (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_r) = \vec{0}$$

para ciertos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$. Entonces,

$$(f-\lambda\,\mathrm{id})(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r) = \vec{0}$$

con lo que

$$\begin{aligned} \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r &\in \operatorname{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id}) \cap \operatorname{Env}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}) \\ &\subseteq \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-1}\right) \cap \operatorname{Env}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}) = \left\{\vec{0}\right\} \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r = \vec{0}.$$

Ahora, como los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ son linealmente independientes, se concluye que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ y, en consecuencia, los vectores $(f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_1), (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_2), \ldots, (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_r)$ son linealmente independientes.

Supongamos ahora que

$$\vec{u} \in \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-2}\right) \cap \operatorname{Env}(\{(f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_1), (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_2), \ldots, (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_r)\}).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \beta_1 (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_1) + \beta_2 (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_2) + \cdots + \beta_r (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_r) \\ &= (f-\lambda\,\mathrm{id})(\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \cdots + \beta_r\vec{u}_r) \end{aligned}$$

para ciertos escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in \mathbb{K}$ y

$$\begin{aligned} \vec{0} &= (f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-2}(\vec{u}) = (f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-2}((f-\lambda\,\mathrm{id})(\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \cdots + \beta_r\vec{u}_r)) \\ &= (f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-1}(\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \cdots + \beta_r\vec{u}_r) \end{aligned}$$

con lo que

$$\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \cdots + \beta_r\vec{u}_r \in \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-1}\right) \cap \operatorname{Env}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}) = \left\{\vec{0}\right\},$$

es decir, $\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \cdots + \beta_r\vec{u}_r = \vec{0}$, y la independencia lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ implica que $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = 0$, con lo que $\vec{u} = \vec{0}$. En consecuencia,

$$\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-2}\right) \cap \operatorname{Env}(\{(f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_1), (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_2), \ldots, (f-\lambda\,\mathrm{id})(\vec{u}_r)\}) = \left\{\vec{0}\right\}.$$

$\square$

PROPOSICION 5.50 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita$n$, $f \in \operatorname{End}(V)$ con n valores propios (iguales o distintos) y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de f con índice asociado q. Entonces, existen subespacios vectoriales $W_1, W_2, \ldots, W_{q-1}, W_q$ de V tales que:*

1. $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^k\right) = \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-1}\right) \oplus W_k$, para $k = 1, 2, \ldots, q$,

2. $(f-\lambda\,\mathrm{id})|_{W_k} : W_k \longrightarrow W_{k-1}$, para $k = 2, 3, \ldots, q$, es un monomorfismo y, por lo tanto,

$$\dim W_k \leq \dim W_{k-1},$$

3. $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^q\right) = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_{q-1} \oplus W_q$.

Demostración: Como λ es un valor propio de f con índice asociado q, por la Proposición 5.48, se tiene que

$$\left\{\vec{0}\right\} \subset \operatorname{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^2\right) \subset \cdots \subset \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right) \subset \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^q\right).$$

Dado que $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right) \subset \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^q\right)$, si $\mathcal{K}_{q-1}$ es una base de $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right)$, por el teorema de la base incompleta, podemos encontrar un conjunto de vectores linealmente independientes $\mathcal{W}_q = \left\{\vec{u}_1^{(q)}, \vec{u}_2^{(q)}, \ldots, \vec{u}_{t_q}^{(q)}\right\} \subseteq \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^q\right)$ tales que $\mathcal{K}_{q-1} \cup \mathcal{W}_q$ es una base de $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^q\right)$. Por lo tanto, si $W_q = \operatorname{Env}(\mathcal{W}_q)$, tenemos que

$$\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^q\right) = \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right) \oplus W_q$$

y se satisface la propiedad 1 para $k = q$.

De la independencia lineal de los vectores del conjunto $\mathcal{W}_q$ y del hecho de que $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right) \cap W_q = \left\{\vec{0}\right\}$ tenemos, por la Proposición 5.49, que

- los vectores del conjunto $(f-\lambda\,\mathrm{id})(\mathcal{W}_q) \subseteq \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right)$ son linealmente independientes y
- $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-2}\right) \cap \operatorname{Env}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})(\mathcal{W}_q)\right) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{K}_{q-2}$ es una base de $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-2}\right)$. Dado que $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-2}\right) \subset \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right)$, de las dos propiedades anteriores tenemos que los vectores del conjunto $\mathcal{K}_{q-2} \cup (f-\lambda\,\mathrm{id})(\mathcal{W}_q) \subseteq \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right)$ son linealmente independientes. Así, por el teorema de la base incompleta, podemos encontrar (si hace falta) vectores linealmente independientes por el teorema de la base incompleta, podemos encontrar un conjunto de vectores linealmente independientes $\vec{u}_1^{(q-1)}, \vec{u}_2^{(q-1)}, \ldots, \vec{u}_{t_{q-1}}^{(q-1)} \in \operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right)$ tales que

$$\mathcal{K}_{q-2} \cup (f-\lambda\,\mathrm{id})(\mathcal{W}_q) \cup \left\{\vec{u}_1^{(q-1)}, \vec{u}_2^{(q-1)}, \ldots, \vec{u}_{t_{q-1}}^{(q-1)}\right\}$$

es una base de $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right)$. Por lo tanto, si

$$\mathcal{W}_{q-1}=(f-\lambda\,\mathrm{id})\,(\mathcal{W}_q)\cup\left\{\vec{u}_1^{(q-1)},\vec{u}_2^{(q-1)},\ldots,\vec{u}_{t_{q-1}}^{(q-1)}\right\}$$

y $W_{q-1}=\operatorname{Env}(\mathcal{W}_{q-1})$, tenemos que

$$\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right)=\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-2}\right)\oplus W_{q-1}$$

y se satisface la propiedad 1 para $k=q-1$.

Repetimos el procedimiento hasta obtener un conjunto de vectores linealmente independientes $\mathcal{W}_2$ tal que

$$\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{2}\right)=\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})\right)\oplus W_2$$

con $W_2=\operatorname{Env}(\mathcal{W}_2)$. Ahora, de la independencia lineal de los vectores del conjunto $\mathcal{W}_2$ y del hecho de que $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})\right)\cap W_2=\left\{\vec{0}\right\}$ tenemos, por la Proposición 5.49, que los vectores del conjunto $(f-\lambda\,\mathrm{id})\,(\mathcal{W}_2)\subseteq\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})\right)$ son linealmente independientes. Así, por el teorema de la base incompleta, podemos encontrar (si hace falta) vectores linealemente independientes $\vec{u}_1^{(1)},\vec{u}_2^{(1)},\ldots,\vec{u}_{t_1}^{(1)}\in\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})\right)$ tales que

$$\mathcal{W}_1=(f-\lambda\,\mathrm{id})\,(\mathcal{W}_2)\cup\left\{\vec{u}_1^{(1)},\vec{u}_2^{(1)},\ldots,\vec{u}_{t_1}^{(1)}\right\}$$

es una base de $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})\right)$. De esta forma,

$$\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})\right)=\operatorname{Env}(\mathcal{W}_1)=W_1,$$

con lo que se satisface la propiedad 1 para $k=1$, ya que $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{0}\right)=\operatorname{Ker}(\mathrm{id})=\left\{\vec{0}\right\}$.

Ahora, de la propiedad 1, se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q}\right)&=\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-1}\right)\oplus W_q\\&=\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{q-2}\right)\oplus W_{q-1}\oplus W_q\\&=\cdots\\&=\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})\right)\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_{q-1}\oplus W_q\\&=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_{q-1}\oplus W_q\end{aligned}$$

y, por lo tanto, se satisface la propiedad 3.

Finalmente, por la forma en que hemos definido los subespacios vectoriales W_k, para $k=1,2,\ldots,q$, tenemos que

$$\begin{aligned}(f-\lambda\,\mathrm{id})\,(W_k)&=\operatorname{Env}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})\,(\mathcal{W}_k)\right)\\&\subseteq\operatorname{Env}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})\,(\mathcal{W}_k)\cup\left\{\vec{u}_1^{(k-1)},\vec{u}_2^{(k-1)},\ldots,\vec{u}_{t_{k-1}}^{(k-1)}\right\}\right)\\&=\operatorname{Env}(\mathcal{W}_{k-1})=W_{k-1},\end{aligned}$$

con lo que podemos afirmar que $(f-\lambda\,\mathrm{id})|_{W_k} : W_k \longrightarrow W_{k-1}$ es una aplicación lineal. Además, como

$$\mathrm{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})|_{W_k}\right) = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda\,\mathrm{id}) \cap W_k \subseteq \mathrm{Ker}\left((f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-1}\right) \cap W_k = \left\{\vec{0}\right\},$$

concluimos que $(f-\lambda\,\mathrm{id})|_{W_k}$ es un monomorfismo y, en consecuencia, $\dim W_k \leq \dim W_{k-1}$, con lo que se satisface la propiedad 2. $\square$

Nótese que, con la notación de la proposición anterior, $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{W}_q$ es una base de $\mathrm{Ker}\,((f-\lambda\,\mathrm{id})^q)$, que se conoce como **base de Weyr**.

PROPOSICION 5.51 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita n, $f \in \mathrm{End}\,(V)$ con n valores propios (iguales o distintos) y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de f con índice asociado q. Entonces, existe una base $\mathcal{J}$ de $\mathrm{Ker}\,((f-\lambda\,\mathrm{id})^q)$ formada por cadenas de Jordan de f asociadas a λ y, por lo tanto, $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}\left(f|_{\mathrm{Ker}((f-\lambda\,\mathrm{id})^q)}\right)$ es diagonal por bloques de Jordan.*

Demostración: Consideremos $\mathcal{W}$ la base de Weyr de $\mathrm{Ker}\,((f-\lambda\,\mathrm{id})^q)$. Para cada $k \in \{1,2,\ldots,q\}$ y cada $j \in \{1,2,\ldots,t_k\}$, se tiene que los vectores

$$(f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-1}\left(\vec{u}_j^{(k)}\right), (f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-2}\left(\vec{u}_j^{(k)}\right), \ldots, (f-\lambda\,\mathrm{id})^{2}\left(\vec{u}_j^{(k)}\right), (f-\lambda\,\mathrm{id})\left(\vec{u}_j^{(k)}\right), \vec{u}_j^{(k)}$$

forman una cadena de Jordan de f de longitud k asociada a λ. Denotando

$$\mathcal{J}_j^{(k)} = \left\{(f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-1}\left(\vec{u}_j^{(k)}\right), (f-\lambda\,\mathrm{id})^{k-2}\left(\vec{u}_j^{(k)}\right), \ldots, (f-\lambda\,\mathrm{id})^{2}\left(\vec{u}_j^{(k)}\right), (f-\lambda\,\mathrm{id})\left(\vec{u}_j^{(k)}\right), \vec{u}_j^{(k)}\right\},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} \;=\; & \mathcal{J}_1^{(q)} \cup \mathcal{J}_2^{(q)} \cup \ldots \cup \mathcal{J}_{t_q}^{(q)} \\
& \cup \mathcal{J}_1^{(q-1)} \cup \mathcal{J}_2^{(q-1)} \cup \ldots \cup \mathcal{J}_{t_{q-1}}^{(q-1)} \\
& \cup \mathcal{J}_1^{(q-2)} \cup \mathcal{J}_2^{(q-2)} \cup \ldots \cup \mathcal{J}_{t_{q-2}}^{(q-2)} \\
& \cup \ldots \\
& \cup \mathcal{J}_1^{(2)} \cup \mathcal{J}_2^{(2)} \cup \ldots \cup \mathcal{J}_{t_2}^{(2)} \\
& \cup \mathcal{J}_1^{(1)} \cup \mathcal{J}_2^{(1)} \cup \ldots \cup \mathcal{J}_{t_1}^{(1)}
\end{aligned}$$

es una reordenación de los vectores de $\mathcal{W}$ y, por lo tanto, $\mathcal{J}$ es también una base de $\mathrm{Ker}\,((f-\lambda\,\mathrm{id})^q)$.

Así,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\operatorname{id})^q\right) &= \operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_1^{(q)}\right)\oplus\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_2^{(q)}\right)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_{t_q}^{(q)}\right)\\ &\quad\oplus\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_1^{(q-1)}\right)\oplus\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_2^{(q-1)}\right)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_{t_{q-1}}^{(q-1)}\right)\\ &\quad\oplus\cdots\\ &\quad\oplus\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_1^{(2)}\right)\oplus\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_2^{(2)}\right)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_{t_2}^{(2)}\right)\\ &\quad\oplus\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_1^{(1)}\right)\oplus\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_2^{(1)}\right)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_{t_1}^{(1)}\right)\end{aligned}$$

y dado que, por el apartado 2 de la Proposición 5.42, $\operatorname{Env}\left(\mathcal{J}_j^{(k)}\right)$ es un subespacio invariante por f para cada $k\in\{1,2,\ldots,q\}$ y cada $j\in\{1,2,\ldots,t_k\}$, se tiene que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{J}}\left(f|_{\operatorname{Ker}((f-\lambda\operatorname{id})^q)}\right)=\begin{pmatrix} M_q & & & & \\ & M_{q-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & M_2 & \\ & & & & M_1\end{pmatrix}$$

donde, para $k\in\{1,2,\ldots,q\}$,

$$M_k=\begin{pmatrix} J_k(\lambda) & & & \\ & J_k(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k(\lambda)\end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal por bloques con t_k bloques de Jordan de tamaño k en la diagonal. $\square$

La matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}\left(f|_{\operatorname{Ker}((f-\lambda\operatorname{id})^q)}\right)$ recibe el nombre de forma de Jordan de $f|_{\operatorname{Ker}((f-\lambda\operatorname{id})^q)}$ en la base $\mathcal{J}$, a la que denominamos base de Jordan de $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\operatorname{id})^q\right)$. Además, debe tenerse en cuenta que si q es el índice asociado al valor propio λ de multiplicidad algebraica m, entonces $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\operatorname{id})^q\right)=\operatorname{Ker}\left((f-\lambda\operatorname{id})^m\right)$.

PROPOSICION 5.52 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con $\dim V=n$ y $f\in\operatorname{End}(V)$. Sean $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r\in\mathbb{K}$ todos los valores propios distintos de f con multiplicidades algebraicas respectivas $m_1,m_2,\ldots,m_r$. Si $m_1+m_2+\cdots+m_r=n$, entonces V admite una base $\mathcal{J}$ formada por cadenas de Jordan y, en consecuencia, $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}(f)$ es una matriz diagonal por bloques donde los bloques de la diagonal son bloques de Jordan asociados a los distintos valores propios de f.*

Demostración: Por el Teorema 5.45, se tiene que

$$V=\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_1\operatorname{id})^{m_1}\right)\oplus\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_2\operatorname{id})^{m_2}\right)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_r\operatorname{id})^{m_r}\right)\tag{5.8}$$

y si, para $j=1,2,\ldots,r$, q_j el índice asociado al valor propio λ_j de f, se tiene que $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\operatorname{id})^{q_j}\right)=\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\operatorname{id})^{m_j}\right)$. Entonces, por la Proposición 5.51, $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda_j\operatorname{id})^{m_j}\right)$ admite una base $\mathcal{J}_j$ formada por cadenas de Jordan de f asociadas al valor propio λ_j. Entonces, de (5.8) se tiene que $\mathcal{J}=\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2\cup\ldots\cup\mathcal{J}_p$ es una base de V formada por cadenas de Jordan de f y, en consecuencia,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{J}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

con A_j diagonal por bloques, siendo los bloques, bloques de Jordan asociados al valor propio λ_j, para $j = 1, 2, \ldots, r$. $\square$

DEFINICION 5.53 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ y $f \in \operatorname{End}(V)$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ todos los valores propios distintos de f con multiplicidades algebraicas respectivas $m_1, m_2, \ldots, m_r$ tales que $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$. Llamamos **forma canónica de Jordan** de f, a la matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}(f)$ donde $\mathcal{J}$ es la base de V obtenida de acuerdo con el teorema anterior.*

DEFINICION 5.54 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Llamamos **forma canónica de Jordan** de A a la forma canónica de Jordan del endomorfismo $f \in \operatorname{End}(\mathbb{K}^n)$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = A$ con $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$.*

PROPOSICION 5.55 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es la forma canónica de Jordan de A, entonces existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no singular tal que $P^{-1}AP = J$.*

Demostración: Ejercicio. $\square$

5.5. Problemas

PROBLEMA 5.1 Sea $f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tal que $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(10x_1 + 2x_3, 6x_2, 2x_1 + 7x_3\right)$. Halla el polinomio característico, los valores propios, una base de cada subespacio propio y las multiplicidades algebraica y geométrica de cada valor propio. ¿Es f diagonalizable? En caso afirmativo, halla la base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal.

PROBLEMA 5.2 Sea $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de un espacio vectorial real V y sea $f \in \mathrm{End}\left(V\right)$ tal que:

$$f\left(\vec{u}_1\right) = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \qquad f\left(\vec{u}_2\right) = -\vec{u}_2, \qquad f\left(\vec{u}_3\right) = -\vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

Se pide:

1. Obtener los valores propios de f.

2. Obtener una base de cada uno de los subespacios propios de f.

3. ¿Es f diagonalizable? En caso afirmativo, halla la base de V respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal.

PROBLEMA 5.3 Halla los valores propios y los correspondientes subespacios propios de las siguientes matrices:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 5.4 Halla todos los valores del ángulo θ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

tiene valores propios reales. Determina, para tales casos, los valores propios y sus correspondientes subespacios propios.

PROBLEMA 5.5 Halla los valores propios de los siguientes endomorfismos, determina, si existe, una base que los diagonalice y, en caso afirmativo, halla la matriz diagonal asociada.

1. $f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que $f\left(x_1, x_2\right) = \left(-3x_2, -2x_1 - x_2\right)$.

2. $f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que $f\left(x_1, x_2\right) = \left(4x_1 + 3x_2, 3x_1 - 4x_2\right)$.

3. $f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que $f\left(x_1, x_2\right) = \left(2x_1, x_1 + 3x_2\right)$.

4. $f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que $f\left(x_1, x_2\right) = \left(-x_1, 3x_1 - x_2\right)$.

5. $f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tal que $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(-x_2 - 3x_3, 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, -2x_1 + x_2 + x_3\right)$.

6. $f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^4\right)$ tal que $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = (4x_1 + x_2 + x_4, 2x_1 + 3x_2 + x_4, -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4, 2x_1 -$

PROBLEMA 5.6 Determina si las siguientes matrices son o no diagonalizables y, en caso afirmativo, halla una matriz diagonal semejante a ellas y una matriz P regular de paso.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 5.7 Determina para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ la siguiente matriz A es diagonalizable. Para tales casos, determina una matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 5.8 Determina para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la siguiente matriz A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 5.9 Sea $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de un espacio vectorial real V y sea $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que:

$f\left(\vec{u}_1\right) = (\alpha + 1)\,\vec{u}_1 - \alpha\vec{u}_2 + \alpha\vec{u}_3, \qquad f\left(\vec{u}_2\right) = (\alpha + \beta)\,\vec{u}_1 - \alpha\vec{u}_2 + (\alpha - 1)\,\vec{u}_3, \qquad f\left(\vec{u}_3\right) = \beta\vec{u}_1 - \vec{u}_2.$

Se pide:

1. Obtener los valores propios de f.

2. ¿Para qué valores de α y β es f diagonalizable? Halla, para dichos valores, una base de V respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal.

PROBLEMA 5.10 Demuestra que si una matriz A es diagonalizable, entonces la matriz A^k (con $k \geq 1$) también es diagonalizable.

PROBLEMA 5.11 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el endomorfismo que tiene como valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$ y tal que $\vec{v}_1 = (3, -2)$ es un vector propio asociado a λ_1 y $\vec{v}_2 = (1, 1)$ es un vector propio asociado a λ_2. Halla la expresión general de f.

PROBLEMA 5.12 Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que tiene como valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$ y tiene como vectores propios, $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 2)$ y $\vec{v}_3 = (1, 2, 1)$. Halla la expresión general de f.

PROBLEMA 5.13 Determina para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la siguiente matriz A es diagonalizable. Para tales casos, determina la matriz D y una matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 5.14 Halla la forma canónica de Jordan, así como una matriz de paso, de las siguientes matrices:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

2. $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$

5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 5.15 Sea V un espacio vectorial sobre.$\mathbb{K}$ con $\dim V = 6$ y sea f un endomorfismo de V del que sabemos:

1. Tiene 3 valores propios distintos λ_1, λ_2 y λ_3, con multiplicidades algebraicas $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ y $m_3 = 3$, respectivamente.

2. $\dim E_f(\lambda_2) = 1$ y $\dim E_f(\lambda_3) = 2$.

Construye, de forma razonada, la forma canónica de Jordan J de f, así como una base de V respecto de la cual la matriz asociada al endomorfismo f sea J.

PROBLEMA 5.16 Sea $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de un espacio vectorial real V y consideremos $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que

$$M_{\mathcal{U}}(f) = A = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta & 0 & 2\alpha - 2\beta \\ 1 & \alpha & 2 \\ -\alpha + \beta & 0 & -\alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Demuestra que el polinomio característico es $c_f(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$.

2. ¿Para qué valores de α y β es diagonalizable? En tales casos obtén una base $\mathcal{V}$ de V tal que $M_{\mathcal{V}}(f)$ sea diagonal.

3. Calcula la forma canónica de Jordan J de f, y una base $\mathcal{V}$ de V tal que $M_{\mathcal{V}}(f) = J$, en los casos en los que f no es diagonalizable.

PROBLEMA 5.17 Sea f un endomorfismo de $\mathbb{K}^4$ con un único valor propio cuádruple λ. Describe, justificando todas tus respuestas, las diferentes formas que puede tomar la forma canónica de Jordan de f e indica en cada caso como se construiría la base asociada.

PROBLEMA 5.18 Sea $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ una base de un espacio vectorial real V y consideremos $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que

$$M_{\mathcal{U}}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2b & 1 + b & -b & b \\ 2b & 1 + b & 1 - b & b \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $b \in \mathbb{R}$.

1. Demuestra que el polinomio característico es $c_f(x) = (x-1)^4$.

2. ¿Para qué valores de b es diagonalizable? En tales casos, calcula una matriz diagonal que sea semejante a la matriz A.

3. Calcula la forma canónica de Jordan J de f, y, para $b = 1$ una base $\mathcal{V}$ de V tal que $M_{\mathcal{V}}(f) = J$.

PROBLEMA 5.19 Se considera $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ una base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y $f \in \operatorname{End}(E)$ tal que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{U}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales existe la forma canónica de Jordan de f.

2. Calcula J en los casos en que sea posible.

PROBLEMA 5.20 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 3 & -2 \\ 0 & d & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

donde a, b, c y d son parámetros reales. Se pide:

1. Calcular los valores propios de A y razonar que siempre existe la forma canónica de Jordan de A.

2. Estudiar bajo qué condiciones de los parámetros a, b, c y d se cumple que cada valor propio de A tiene un único bloque de Jordan.

3. Para $a = c = d = 2$ y $b = -2$, calcular la matriz de Jordan J y una matriz P de manera que $P^{-1}AP = J$.