Boletín

1. Calcula las líneas de corriente, la trayectoria de una partícula del fluido y el campo de aceleraciones para los campos de velocidades siguientes:

   a) Movimiento de traslación rígido: $\vec{v}(t,\vec{r}) = \vec{v}(t)$

   b) Movimiento de rotación rígido: $\vec{v}(t,\vec{r}) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$

LÍNEAS DE CORRIENTE: definidas como la línea tg al vector velocidad en un instante dado. Por lo general, se calculan como la $\cap$ de dos superficies

TRAYECTORIAS: $\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{v}$ (para cada componente)

CAMPO DE ACELERACIONES: $\hat{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{v}, \frac{\partial}{\partial y}\vec{v}, \frac{\partial}{\partial z}\vec{v}\right)$$

$$div(\vec{v}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}v_x + \frac{\partial}{\partial y}v_y + \frac{\partial}{\partial z}v_z\right)$$

MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN RÍGIDO: $\vec{v}(t,\vec{r}) = \vec{v}(t)$

La velocidad en este caso no depende de la posición, solo del tiempo.

- Las líneas de corriente se calculan a partir de:

$$\lambda = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Las daremos como la $\cap$ de 2 superficies. Para ello, integramos dos a dos:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{v_x} = \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{v_y} \;;\; \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} \Longrightarrow y = \frac{v_y}{v_x}(x-x_0) + y_0$$

dejarlo todo despejado en función de x

v_x, v_y constantes, no depende de la posición

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{v_x} = \int_{z_0}^{z}\frac{dz}{v_z} \;;\; \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{z-z_0}{v_z} \Longrightarrow z = \frac{v_z}{v_x}(x-x_0) + z_0$$

Por lo tanto, las líneas de corriente serán la intersección de los planos siguientes:

$$\lambda := \begin{cases} \frac{v_y}{v_x}(x-x_0) + y_0 \\ \frac{v_z}{v_x}(x-x_0) + z_0 \end{cases}$$

- Para dar la trayectoria de las partículas, sea $\vec{\theta}$ la función trayectoria:

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{v} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = v_x \;;\; \frac{dy}{dt} = v_y \;;\; \frac{dz}{dt} = v_z$$

Si nos centramos en el primer caso y luego lo generalizamos:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \;;\; \int_{t_0}^{t} dx = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt \;;\; x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt$$ (ídem para el resto de componentes)

- Por último calculamos el campo de aceleraciones como:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \Longrightarrow$$ $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$ nos expresa las derivadas de $\vec{v}$ respecto a la posición. Sin embargo, $\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}(t)$, por lo que este término es nulo.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

MOVIMIENTO DE ROTACIÓN RÍGIDO: $\vec{v}(t,\vec{r}) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$

Lo primero que haremos será dar la velocidad en una forma con la que podamos trabajar:

$$\vec{v}(t,\vec{r}) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\hat{\imath} - (\omega_x z - \omega_z x)\hat{\jmath} + (\omega_x y - \omega_y x)\hat{k}$$

- Líneas de corriente

$$\lambda = \frac{dy}{v_y} = \frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z} \Longrightarrow \text{integramos dos a dos:}$$

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{v_y} = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{v_x} \;;\; \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\omega_y z - \omega_y y} = \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{(\omega_z x - \omega_x z)} \;;\; \frac{(x-x_0)}{(\omega_y z - \omega_z y)} = \frac{(y-y_0)}{(\omega_z x - \omega_x z)} \;;$$

$$;\; y = \frac{\omega_z x - \omega_x z}{\omega_y z - \omega_z y}\cdot(x-x_0) + y_0$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{v_x} = \int_{z_0}^{z}\frac{dz}{v_z} \;;\; \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\omega_y z - \omega_y y} = \int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\omega_x y - \omega_y x} \;;\; \frac{(x-x_0)}{(\omega_y z - \omega_z y)} = \frac{(z-z_0)}{(\omega_x y - \omega_y x)} \;;$$

$$;\; z = \frac{(\omega_x y - \omega_y x)}{(\omega_y z - \omega_z y)}\cdot(z-z_0) + x_0$$

Las líneas de corriente son las rectas intersección de estos dos planos.

- Trayectoria de una partícula

$\frac{dx}{dt} = v_x = \omega_y z - \omega_z y \ ; \ \int_{t_0}^{t} dx = \int_{t_0}^{t} (\omega_y z - \omega_z y) dt \ ; \ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (\omega_y z - \omega_z y) dt$

(Idem con y, z)

- Campo de aceleraciones

$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{\partial \vec{\omega}(t) \times \vec{r}}{\partial t} + \overbrace{((\vec{\omega}(t) \times \vec{r}).\vec{\nabla})(\vec{\omega}(t) \times \vec{r})}^{\text{caga vector}}$

$\left. \begin{array}{l} ((\vec{\omega}(t) \times \vec{r}).\vec{\nabla})(\vec{\omega}(t) \times \vec{r}) \\ \vec{\omega}(t) \times \vec{r} = ((\omega_y z - \omega_z y), -(\omega_x z - \omega_z x), + (\omega_x y - \omega_y x)) \end{array} \right\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left((\omega_y z - \omega_z y)\frac{\partial}{\partial x} + (\omega_z x - \omega_x z)\frac{\partial}{\partial y} + (\omega_x y - \omega_y x)\frac{\partial}{\partial z}\right)((\omega_y z - \omega_z y), -(\omega_x z - \omega_z x), + (\omega_x y - \omega_y x)) =$

$= (\omega_y z - \omega_z y)($

: desarrollo

2. Considera el campo de velocidades estacionario

$$\vec{v}(x, y) = x\vec{i} + ky\vec{j}$$

a) Determina las líneas de corriente para los diferentes valores de k y represéntalas en un diagrama para los casos (i) $k = 0$; (ii) $k = 1$ y (iii) $k = -1$. → hablar de la velocidad

b) Determina los movimientos asociados al campo $\vec{v}$ y comprueba que las trayectorias coinciden con las líneas de corriente.

c) Para el caso $k = -1$ calcula:

- El campo de aceleraciones en las descripciones de Euler ~~y de Lagrange.~~
- Si $c(t, x, y, z) = \beta x^2 |y| e^{-t}$ es la concentración de un cierto componente en el fluido, calcula la derivada temporal de la concentración de dicho componente en los diferentes elementos de fluido.
- ~~Escribe c en función de las variables lagrangianas.~~

a) Las líneas de corriente se calculan como:

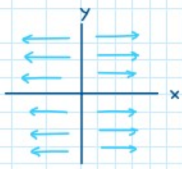
$\lambda = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \rightarrow$ integramos

$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v_x} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{v_y} \ ; \ \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} \ ; \ \ln\left|\frac{x}{x_0}\right| = \frac{1}{k} \cdot \ln\left|\frac{y}{y_0}\right| \Longrightarrow$

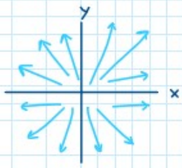
$\Longrightarrow$ despejamos y en función de x (por ser un caso bidimensional ya no hemos de dar las rectas como $\cap$ de planos)

$\frac{x}{x_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1/k} \ ; \ y(x) = \frac{y_0}{x_0^k} \cdot x^k = A x^k$

$\boxed{k=0}$ $y(x) = y_0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ la velocidad será nula para el eje y y constante para el eje x. Las líneas de corriente parten del origen y se mueven con velocidad constante en la dirección de x



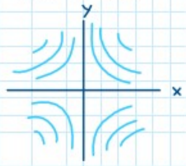
$\boxed{k=1}$ $y(x) = \frac{y_0}{x_0} \cdot x = Ax \rightarrow$ movimiento lineal, la velocidad en ambas componentes será constante. El fluido se desplazará radialmente desde el origen



$\boxed{k=-1}$ $y(x) = y_0 \cdot x_0 \cdot \frac{1}{x} \rightarrow$ tendremos líneas de campo con forma hiperbólica con una asíntota en $x=0$.

y

$\boxed{k=-1}$ $y(x) = y_0 \cdot x_0 \cdot \frac{1}{x} \rightarrow$ tendremos líneas de campo con forma hiperbólica con una asíntota en $x=0$.



b) Primero vemos el caso genérico y luego estudiamos para cada valor de K.

$$\frac{dx}{dt} = v_x = x \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{1}{x}\,dx = \int_{t_0}^{t} dt \;;\; \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = t - t_0 \;;\; x(t) = x_0 \cdot e^{t-t_0}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = ky \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{1}{ky}\,dy = \int_{t_0}^{t} dt \;;\; \frac{1}{k}\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = t - t_0 \;;\; y(t) = y_0 \cdot e^{(t-t_0)\cdot k}$$

$\boxed{k=0}$ $y(t) = y_0$ ✓

$\boxed{k=1}$ $y(t) = y_0 \cdot e^{(t-t_0)} = y_0 \cdot \frac{x(t)}{x_0}$ ✓

$\boxed{k=-1}$ $y(t) = y_0 \cdot e^{-(t-t_0)} = y_0 \cdot \frac{x_0}{x(t)}$ ✓

c) i) El campo de aceleraciones en el formalismo de Euler es el que describimos con la derivada convectiva.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}^{\,0} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{v} = \left(x \overset{1}{\cancel{\frac{\partial}{\partial x}}} x + \overset{0}{\cancel{ky\frac{\partial}{\partial y}x}},\; \overset{0}{\cancel{x\frac{\partial}{\partial x}ky}} + \underbrace{ky}_{-y}\overset{k}{\frac{\partial}{\partial y}}\underbrace{ky}_{-y}\right) =$$

$\vec{v} = (x, ky)$ no depende de t

$$= (x, y)$$

ii) $c(t,x,y,z) = \beta x^2 |y| e^{-t} \rightarrow$ derivada temporal en los diferentes elementos

Tenemos que calcular la derivada convectiva:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})c = -\beta x^2 |y| e^{-t} + \left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)c =$$

$$= -\beta x^2|y|e^{-t} + 2\beta x^2 |y| e^{-t} - y\beta x^2 e^{-t} = 0 \Rightarrow \text{concentración constante}$$

3. Demuestra las siguientes identidades vectoriales

a)

$$\nabla\cdot(f\vec{v}) = \vec{v}\cdot\nabla f + f\nabla\cdot(\vec{v})$$

b)

$$\nabla\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$$

a) $\nabla\cdot(f\vec{v}) = \vec{v}\cdot\nabla f + f\nabla\cdot(\vec{v})$

$$\nabla\cdot(f\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}f\vec{v} + \frac{\partial}{\partial y}f\vec{v} + \frac{\partial}{\partial z}f\vec{v} = \vec{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x}f + f\frac{\partial}{\partial x}\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{\partial}{\partial y}f +$$

$$+ f\frac{\partial}{\partial y}\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{\partial}{\partial z}f + f\cdot\frac{\partial}{\partial z}\vec{v} = \vec{v}\left(\frac{\partial}{\partial x}f + \frac{\partial}{\partial y}f + \frac{\partial}{\partial z}f\right) +$$

$$+ f\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{v} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{v} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{v}\right) = (\vec{v}\cdot\nabla f) + f(\nabla\cdot\vec{v})$$

b) $\nabla\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{v} - \vec{v}\times(\quad) =$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}v_z - \frac{\partial}{\partial z}v_y,\; \frac{\partial}{\partial z}v_x - \frac{\partial}{\partial x}v_z,\; \frac{\partial}{\partial x}v_y - \frac{\partial}{\partial y}v_x\right)$$

$$\left(v_x\frac{\partial}{\partial x}\vec{v} + v_y\frac{\partial}{\partial y}\vec{v} + v_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\vec{v}\right) - \left(v_x\frac{\partial}{\partial z}v_x - v_x\frac{\partial}{\partial x}\right.$$??

4. Considera un fluido en equilibrio hidrostático en el seno de un campo gravitatorio en la dirección z, $\vec{g} = -g\vec{k}$ (siendo g una constante positiva).

   a) Partiendo de la ecuación de Euler, escribe la ecuación de equilibrio hidrostático para estas condiciones.

   b) Si se trata de un fluido incompresible (densidad constante), calcula la dependencia de la presión con z.

   c) Si el fluido satisface la ecuación de estado adiabática del tipo: $P = K\rho^\gamma$ donde P es la presión, ρ la densidad, y K y γ son dos constantes positivas, calcula la dependencia de la densidad con z y el valor de z para el que la densidad es cero.

a) La ecuación de Euler es

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\rho\vec{g} - \nabla\vec{P}$$

La condición de equilibrio hidrostático es que las fuerzas del gradiente vertical de presión y la gravedad están en equilibrio. Matemáticamente, se expresa como:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho\vec{g} \Longrightarrow z \text{ es la coordenada vertical}$$

Integramos esta ecuación teniendo en cuenta que $\vec{g} = -\bar{g}k$ en z

$$\int_{P_0}^{P} \partial P' = \int_{z_0}^{z} \rho\vec{g}k\,\partial z \Rightarrow P = P_0 + \int_{z_0}^{z} \rho k\bar{g}\,\partial z$$

b) Si es un fluido incompresible ($\rho = cte$), la integral queda de la siguiente forma:

$$P(z) = P_0 + \int_{z_0}^{z} \rho kg\,\partial z = P_0 + \rho kg\int_{z_0}^{z} \partial z = P_0 + \rho kg(z - z_0)$$

c) $P = K\rho^\gamma$; $K, \gamma > 0 \Longrightarrow$ calcular la dependencia de ρ con z y el valor de z para que sea z $\quad \rho = \left(\frac{P}{K}\right)^{1/\gamma} \rightarrow$ igual si se integra esto respecto a P y luego se sustituye

Volvemos a la condición inicial que hemos impuesto. Ahora, P no depende de z sino de ρ:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho\vec{g}\ ;\ \frac{\partial P}{\rho} = \frac{K\rho^{\gamma-1}\cdot\gamma\cdot\partial\rho}{\rho} = K\rho^{\gamma-2}\cdot\gamma\cdot\partial\rho = -\vec{g}\,\partial z \Longrightarrow$$

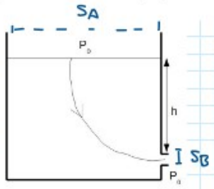
$$\Longrightarrow \int_{\rho_0}^{\rho} K\rho^{\gamma-2}\cdot\gamma\cdot\partial\rho = \int_{z_0}^{z} Kg\,\partial z\ ;\ K\left.\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}\cdot\gamma\right]_{\rho_0}^{\rho} = +Kg(z - z_0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow K\frac{\gamma}{\gamma-1}(\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1}) = -Kg(z - z_0)\ ;\ \rho(z) = \left(\frac{Kg(z-z_0)\cdot(\gamma-1)}{K\cdot\gamma}\right)^{1/\gamma-1} + \rho_0$$

Para que se anule:

$$\rho(z) = 0 \Longleftrightarrow \rho_0 = -\left(\frac{Kg(z-z_0)(\gamma-1)}{K\cdot\gamma}\right)^{1/\gamma-1}\ ;\ z = \frac{-\rho_0^{\gamma-1}\cdot K\cdot\gamma}{K\cdot g\cdot(\gamma-1)} + z_0$$

5. Problema de Torricelli: Considera un recipiente lleno de agua con un pequeño agujero en la parte inferior, tal y como se muestra en la figura. Determina la velocidad de salida del fluido por el agujero considerando que se trata de un flujo incompresible, cuasi-estacionario y que el área de la parte superior es mucho mayor que la sección del agujero.



- Flujo incompresible: $\rho = cte$, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$
- Flujo cuasi-estacionario
- $S_A \gg S_B$

Problema de Torricelli

Para dar una expresión de v_B, vamos a emplear el Teorema de Bernoulli, según el cual:

$$\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho gh + P = cte$$

Aplicando el teorema: $\quad$ consideramos $h_B = 0$ y h_A como la diferencia de altura $\rightarrow \Delta h$

$$\frac{1}{2}\rho_A\vec{v}_A^2 + \rho_A g h_A + P_A = \frac{1}{2}\rho_B\vec{v}_B^2 + \cancel{\rho_B h_B g} + P_B$$

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho_A\Delta hg + P_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + P_B \qquad \rho_A = \rho_B \text{ (incompresible)}$$

$$\cancel{\rho}g\cdot\Delta h + \frac{1}{2}\cancel{\rho}v_A^2 = \frac{1}{2}\cancel{\rho}v_B^2$$

$P_A = P_B = P_{atm}$ (pto A está en la superficie y B tmb $\rightarrow$ es el punto de salida al exterior)

$\Downarrow$

$$\cancel{\rho} g \cdot \Delta h + \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_A^2 = \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_B^2$$

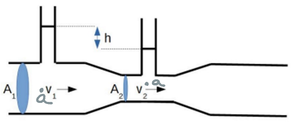
($P_A = P_B = P_{atm}$ (pto A está en la superficie y B tubo → es el punto de salida al exterior)

$$\Downarrow$$

$$v_B = \sqrt{2\Delta h g + v_A^2} = \sqrt{2\Delta h g}$$

v_A es una velocidad inicial que consideramos nula

6. Un venturímetro es un aparato que tiene la forma que se muestra en la figura y que permite medir la velocidad de un fluido a partir de la diferencia de alturas h en los dos tubos que se encuentran uno sobre la sección más ancha y el segundo en la sección más estrecha. Deduce la ecuación de la velocidad en la sección estrecha en función de: h, de la relación entre las dos secciones A_2/A_1 y de la densidad del fluido ρ. $\to v_2$?



Venturímetro

Volvemos a aplicar el Teorema de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \rho g h + P = cte$$

1. CONSERVACIÓN DE FLUJO: nos permite relacionar las velocidades

$$\dot{m} = \rho(\vec{v} \cdot A) \Longrightarrow \rho_1 \vec{v}_1 A_1 = \rho_2 \vec{v}_2 A_2 \Longrightarrow \vec{v}_1 = \frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1}\vec{v}_2 = \frac{A_2}{A_1}\vec{v}_2$$

$\rho_2 = \rho_1$

2. Suponemos $h_2 = 0$ como punto de referencia de forma que $h_1 = \Delta h$.

supongamos flujo incompresible

3. Suponemos la densidad constante en todos los puntos del fluido, y como ambos puntos se hallan a la misma altura, $P_1 = P_2$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\vec{v}_1^2 + \rho_1 g h_1 + P_1 = \frac{1}{2}\vec{v}_2^2 + \rho_2 g h_2 + P_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \vec{v}_2^2 + \rho g \Delta h = \frac{1}{2}\vec{v}_2^2 \longrightarrow \vec{v}_2^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) = -\rho g \Delta h$$

$$\vec{v}_2 = \sqrt{\frac{2\rho g \Delta h}{1 - A_2^2/A_1^2}}$$