

PRÁCTICA 9: ANÁLOGO CLÁSICO DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

Aroa Antón Samaniego

Técnicas Experimentales II. Grado en Física
Curso 2023-2024



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Índice

	Página
1. Introducción	1
1.1. Pozo de potencial infinito	1
1.2. Ecuación de Schrödinger en 3D	3
1.3. Análogos clásicos a la mecánica cuántica	5
1.3.1. Resonancias en un tubo cerrado	5
1.3.2. Resonancias en una cavidad esférica	7
2. Desarrollo experimental y análisis de los resultados	7
2.1. Materiales	7
2.2. Caso unidimensional	7
2.3. Caso tridimensional	11
3. Conclusiones	13
4. Bibliografía	13
5. Apéndices	14
5.1. Tabla de datos	14

Resumen

En esta práctica vamos a ver como podemos modelar problemas de mecánica cuántica estudiando el comportamiento de ondas de sonido en diferentes cavidades. Los problemas en los que nos centraremos serán el pozo de potencial infinito, que modelaremos con un tubo cerrado a ambos extremos, y las soluciones de la parte angular de la Ecuación de Schrödinger en 3D, que podremos obtener con las resonancias de las ondas en una cavidad esférica. Además, en ambos casos incluiremos separadores al montaje para ver cómo afectan estos al comportamiento de las ondas dentro de las cavidades.

1. Introducción

Si consideramos una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza, el objetivo que se plantea la mecánica clásica es determinar la posición de la partícula para cualquier instante de tiempo $x(t)$, resultado que podemos obtener mediante la segunda ley de Newton ($F = ma$). El objetivo de la mecánica cuántica será el mismo. Pero en este caso lo que se buscará será la función de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ y en lugar de tener la segunda ley de Newton, buscaremos resolver la Ecuación de Schrödinger que viene dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

Si el potencial V no depende del tiempo podemos hacer una separación de variables ($\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\varphi(t)$), de tal manera que para los estados estacionarios tendremos:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = E\psi \quad (2)$$

que es la conocida como Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y cuyas soluciones serán los estados estacionarios del sistema.

1.1. Pozo de potencial infinito

Si consideramos un pozo de potencial unidimensional de longitud L :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (3)$$

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo quedará:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = E\psi \quad (4)$$

La solución a esta ecuación será una combinación lineal de un seno y un coseno:

$$\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (5)$$

, donde A y B son constantes arbitrarias que se determinarán con las condiciones de contorno y normalización.

Si aplicamos las condiciones de contorno ($\psi(L) = \psi(0) = 0$):

$$\begin{cases} \psi(0) = A\sin(0) + B\sin(0) = B \Rightarrow B = 0 \\ \psi(L) = A\sin(kL) \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L} \end{cases} \quad (6)$$

Por lo tanto, obtenemos los posibles valores de la energía:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2} \quad n = 1, 2, 3... \quad (7)$$

y de aquí podemos obtener la relación de dispersión:

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (8)$$

Finalmente, si consideramos una partícula de $E = \hbar\omega$ la función de onda con la evolución temporal queda:

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \exp(-i\omega t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (9)$$

También hay que tener en cuenta que los estados estacionarios no van a perdurar por siempre, es decir, para los niveles de energía excitados va a ocurrir un decaimiento hacia el estado fundamental, que es el de menor energía y el único que perdurará en el tiempo. Este decaimiento no se tiene en cuenta en la ecuación de Schrödinger, pero podemos introducirlo nosotros incluyendo un factor de amortiguamiento en la parte temporal de la función de onda, teniendo:

$$\Psi(x, t) = f(x) \exp((- \lambda + i\omega_0)t) \quad (10)$$

, donde λ es la constante de amortiguamiento.

Haciendo la Transformada de Fourier de esta expresión (teniendo en cuenta que para $t < 0$ la función será nula), podemos obtener la función espectral $A(\omega)$, cuyo cuadrado nos indicará la probabilidad de que al medir la partícula esta tenga una energía de $E = \hbar\omega$.

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp((- \lambda + i\omega_0)t) \exp(i\omega t) dt \quad (11)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda + i(\omega_0 - \omega)} \quad (12)$$

$$|A(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi((\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2)} \quad (13)$$

, $|A(\omega)|^2$ es conocido como pico Lorentziano.

La anchura de este pico está directamente relacionada con el tiempo de vida del estado estacionario.

1.2. Ecuación de Schrödinger en 3D

Si trabajamos en 3 dimensiones y con potenciales centrales¹ será necesario utilizar coordenadas esféricas para poder separar el hamiltoniano en tres, cada uno dependiente de una de las coordenadas. Al hacer esto podemos escribir la función de onda como producto de una parte radial (R) y una angular (Y):

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (14)$$

Sustituyendo en la ecuación (2) podemos hacer una separación de variables. Obteniendo una ecuación que depende solo de la parte radial y otra que depende solo de la parte angular. Para la parte angular la ecuación queda:

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1)Y_l^m(\theta, \phi) \quad (15)$$

La solución para la parte radial dependerá del potencial que consideremos. Sin embargo, la solución para la parte angular no dependerá del potencial, por lo que será siempre la misma y vendrá dada por:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{2(l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l-|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos(\theta)) \quad \epsilon = \begin{cases} (-1)^m & m \geq 0 \\ 1 & m \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

, donde P_l^m son las funciones asociadas de Legendre.

Las funciones Y_l^m , conocidas como armónicos esféricos, vienen caracterizadas por $l = 0, 1, 2, \dots$ y $m = -l, \dots, l$ que son los números cuánticos azimutal y magnético respectivamente. Podemos representar $|Y_l^m(\theta, \phi)|^2$ y obtenemos las siguientes figuras:

¹Potenciales que dependen de la distancia al origen

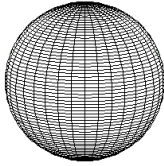


Figura 1: $|Y_0^0(\theta, \phi)|^2$

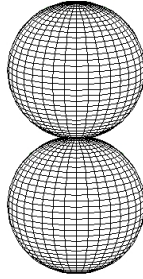


Figura 2: $|Y_1^0(\theta, \phi)|^2$

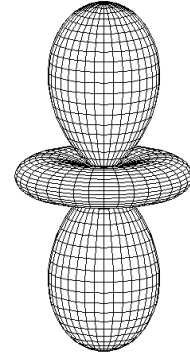


Figura 3: $|Y_2^0(\theta, \phi)|^2$

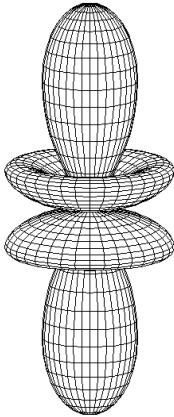


Figura 4: $|Y_3^0(\theta, \phi)|^2$

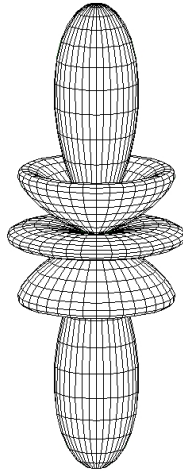


Figura 5: $|Y_4^0(\theta, \phi)|^2$

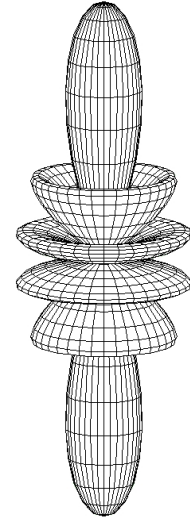


Figura 6: $|Y_5^0(\theta, \phi)|^2$

Estos se pueden clasificar según el valor de l o el número de nodos que se observan en lo que se conocen como orbitales. Por ejemplo, para un valor de $l = 0$ o 1 nodo tenemos orbitales tipo s, para $l = 1$ o 2 nodos tipo p y así sucesivamente tendremos orbitales tipo d,f,g,h...

1.3. Análogos clásicos a la mecánica cuántica

La ecuación que describe la propagación de las ondas en un medio en mecánica clásica viene dada por:

$$\frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u(\vec{r}, t) \quad (17)$$

, donde v es la velocidad de propagación de la onda en el medio.

1.3.1. Resonancias en un tubo cerrado

Si consideramos la ecuación de onda (17) para el caso unidimensional tenemos:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (18)$$

Cuya solución vendrá dada por:

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \Phi_0) \quad (19)$$

, donde A es la amplitud máxima de la onda, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ el número de onda y Φ_0 la fase.

Además, si una onda de este tipo se propaga en un tubo de longitud L cerrado por ambos extremos se darán lo que se llaman ondas estacionarias, ya que se produce una interferencia de dos ondas de la misma amplitud, dirección y frecuencia propagándose en sentidos opuestos. Estas ondas se caracterizan por tener nodos, que son puntos donde la onda siempre va a ser 0 y vienen dadas por la expresión:

$$u(x, t) = 2A \sin(kx + \Phi_0) \sin(\omega t) \quad (20)$$

Como el tubo está cerrado se debe cumplir que:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (21)$$

Por lo que obtenemos que:

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad (22)$$

Y por tanto, la expresión para nuestra onda, considerando que la fase es 0, queda:

$$u(x, t) = 2A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega t) \quad (23)$$

Además, teniendo en cuenta que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ podemos obtener las longitudes de onda y las frecuencias que se pueden dar :

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad f_n = \frac{nv}{2L} \quad (24)$$

, donde v es la velocidad del sonido en el aire que es a una temperatura de 20°C de 343,2 m/s.

La relación de dispersión para estas ondas será:

$$\omega(k) = \frac{c\pi n}{L} \quad (25)$$

Si consideramos que el emisor de ondas ejerce una fuerza externa podemos decir que el comportamiento de las ondas de sonido en la cavidad será descrito por la ecuación del oscilador armónico amortiguado forzado:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\gamma \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = K \cos(\omega t) \quad (26)$$

, donde ω_0 es la frecuencia fundamental del oscilador.

La solución a esta ecuación será la superposición de una solución transitoria, que consideraremos que se anula con el paso del tiempo, y una parte estacionaria:

$$u(t) = A_1 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \phi) + A \cos(\omega t + \phi) \quad (27)$$

Para la parte estacionaria (en notación compleja) tendremos la amplitud:

$$|A(\omega)| = \left| \frac{K \exp(i\phi)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2i\gamma\omega)} \right| = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad (28)$$

Si tenemos en cuenta el resto de resonancias podemos escribir la solución como combinación de todas:

$$|A(\omega)| = \left| \sum_{n=1}^N A_n(\omega) \right| = \left| \sum_{n=1}^N \frac{K_n \exp(i\phi_n)}{(\omega_n^2 - \omega^2) + (2i\gamma_n\omega)} \right| \quad (29)$$

Comparando estos resultados con los del caso cuántico tenemos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega t) \rightsquigarrow \Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \exp(-i\omega t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \omega(k) &= ck = \frac{c\pi n}{L} \rightsquigarrow E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ |A(\omega)| &= \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \rightsquigarrow |A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi((\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2)}} \end{aligned}$$

Podemos ver que las soluciones se asemejan pero presentan ciertas diferencias. Observamos que en el caso cuántico tenemos un factor de fase complejo que no aparece con las ondas clásicas. Al ser compleja, la solución cuántica no se podrá medir directamente sino que lo que mediremos serán probabilidades, mientras que en el otro caso si podremos medir sin problema. En cuanto a la relación de dispersión podemos ver que para el caso clásico será lineal y para el cuántico parabólica. Por último, vemos que las expresiones de amplitud se parecen bastantes por lo que podemos decir que este caso será un buen ejemplo para modelar el problema cuántico, y observar los resultados en el mundo macroscópico.

1.3.2. Resonancias en una cavidad esférica

Para estudiar el comportamiento de las ondas de sonido en una cavidad esférica partimos de la ecuación de onda (17). Como solo queremos estudiar las ondas estacionarias podemos separar la parte temporal de la forma $\tilde{u}(\vec{r}, t) = u(\vec{r})\cos(\omega t)$ que si sustituimos en la ecuación de onda:

$$\frac{-\omega^2}{v^2}u(\vec{r})\cos(\omega t) = \nabla^2 u(\vec{r})\cos(\omega t) \quad (30)$$

Si hacemos un cambio a coordenadas esféricas $u(\vec{r}) = R(r)Y(\theta, \phi)$ podemos hacer una separación de variables y obtenemos dos ecuaciones, quedando para la parte angular:

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1)Y_l^m(\theta, \phi) \quad (31)$$

Como podemos ver esta ecuación coincide con la ecuación (15) por lo que la solución a esta serán los armónicos esféricos, coincidiendo con el caso cuántico y haciendo este problema uno perfecto para observar los armónicos esféricos.

2. Desarrollo experimental y análisis de los resultados

Una vez introducidos los conceptos teóricos podemos pasar a llevar a cabo nuestra experiencia donde se utilizarán los siguientes materiales:

2.1. Materiales

- Generador de ondas.
- Cavidades de aluminio con altavoz y micrófono.
- Separadores de distintos diámetros.
- Ordenador con el programa Spectrum SLC.

2.2. Caso unidimensional

En primer lugar vamos a estudiar las resonancias de ondas sonoras en un tubo cerrado. Para ello tendremos el siguiente montaje (Figura 7) donde tenemos un tubo formado por varios tubos de 7,5 cm de largo. Al inicio del tubo hay un emisor de ondas sonoras conectado al ordenador y al final un receptor que será quién envíe los datos al ordenador donde podremos ver los resultados con el programa *Spectrum SLC*.



Figura 7: Montaje experimental para el caso unidimensional

Primero vamos a observar el espectro de frecuencias que obtenemos para tubos de distintas longitudes haciendo barridos desde 100 a 10000 Hz .

En la Figura (11) podemos ver el espectro de frecuencias de dos tubos de longitudes 60cm (azul) y 30cm (rojo). Observamos que si tenemos un tubo más largo vamos a tener más frecuencias de resonancia, esto se debe a que las frecuencias cumplen la ecuación (24). Además, también podemos ver que para las frecuencias más altas la amplitud ha disminuido. Esto se debe a que el sistema se está comportando como un oscilador amortiguado como vimos en 1.3.1.

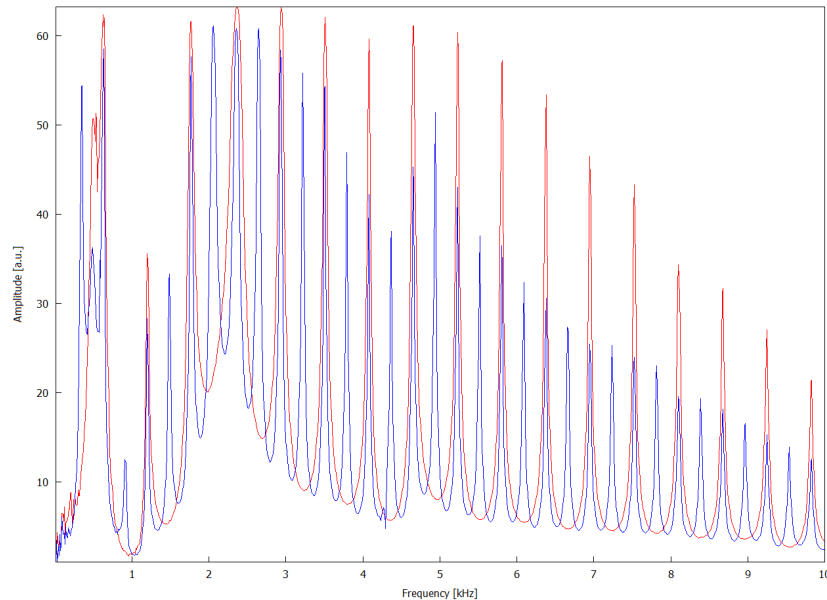


Figura 8: Frecuencias para tubos de longitudes 60cm y 30cm

Si para estas mismas longitudes de los tubos cogemos un rango de frecuencias para abarcar un solo pico y hacemos un ajuste con una Lorentziana obtenemos lo siguiente:

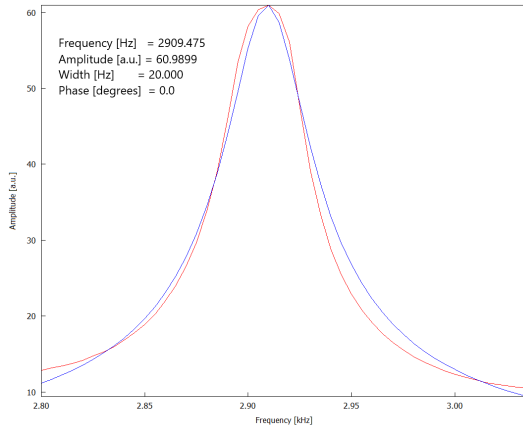


Figura 9: Ajuste para tubo de 60cm

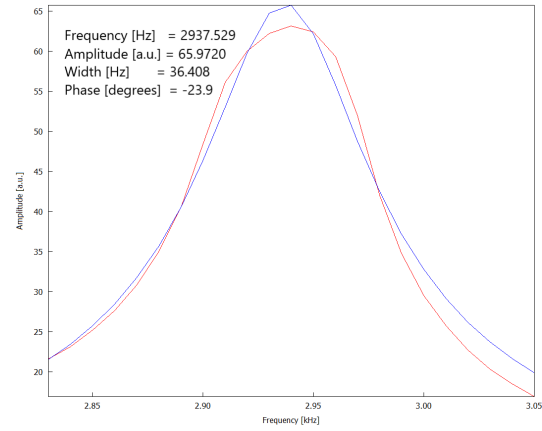


Figura 10: Ajuste para tubo de 30cm

Si miramos los ajustes obtenidos podemos ver que la diferencia más notable es la anchura del pico siendo para el tubo de mayor longitud de 20Hz y para el más corto de 36.408Hz.

Esto está relacionado con las pérdidas de energía y el factor de calidad Q que podemos calcular teniendo en cuenta la anchura del pico y la frecuencia de resonancia. Cuanto más lato sea el valor de Q menores pérdidas de energía tendremos. Si calculamos el factor de calidad para los dos picos que tenemos:

$$Q = \frac{\sqrt{3} f}{2\pi \gamma} \quad (32)$$

, donde γ es la anchura del pico.

$$Q_{L=60} = 527,7 \quad Q_{L=30} = 292,7 \quad (33)$$

Por lo tanto, vemos que para el tubo más largo vamos a tener menores pérdidas de energía.

Ahora vamos a registrar los datos de las primeras 20 frecuencias de resonancia para el tubo de longitud de 60cm y vamos a representar las frecuencias (en radianes) frente al número de onda para obtener la velocidad del sonido en el aire ya que se cumple que $\omega = kv$.

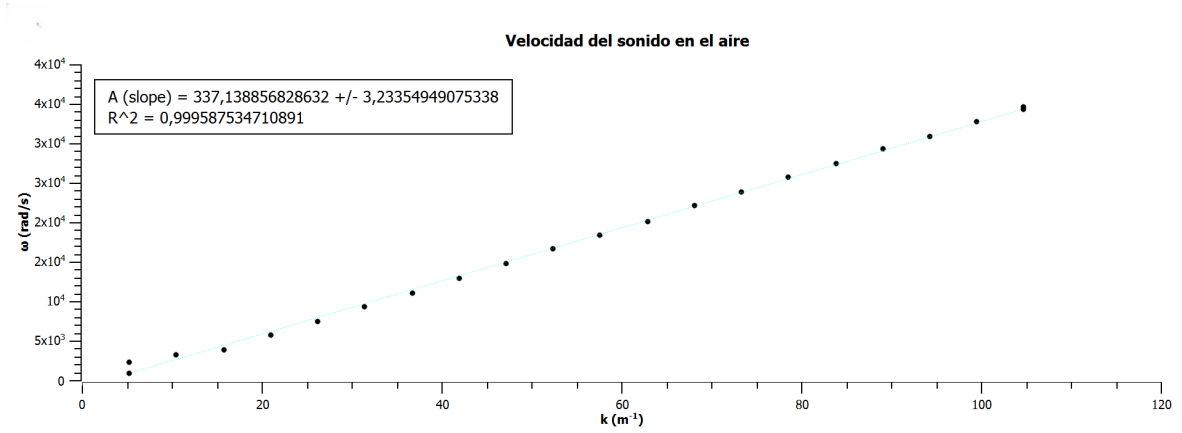


Figura 11: Velocidad del sonido en el aire

De la regresión lineal hemos obtenido un valor de:

$$v = 337,1 \pm 3,2 m/s \quad (34)$$

La velocidad del sonido en el aire presenta una dependencia con la temperatura:

$$v = 331 + 0,6T \cdot ^\circ C^{-1} \quad (35)$$

A una temperatura de $T = 21^\circ C$ (medida en el laboratorio) obtenemos un valor de la velocidad de:

$$v = 343,6 m/s \quad (36)$$

Si calculamos el error relativo entre este valor y el obtenido mediante la regresión lineal tenemos $\varepsilon = 2 \%$ por lo que podemos decir que nuestros resultados han sido buenos.

Por último, vamos a ver qué ocurre con las frecuencias de resonancia si situamos un separador de diámetro $\phi = 1 cm$ entre dos tubos de 7.5cm.

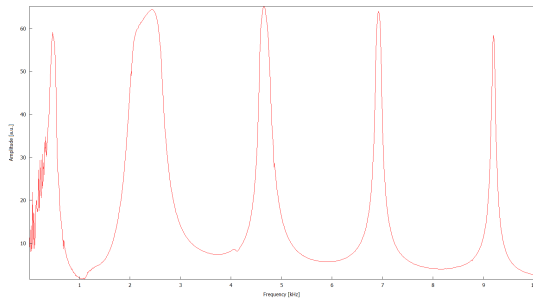


Figura 12: Tubo de $L = 7,5 cm$

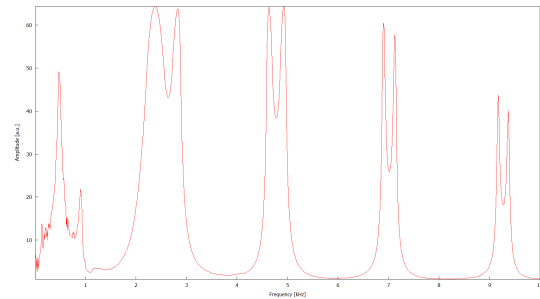


Figura 13: 2 tubos de 7,5 cm con separador de $\Phi = 1 cm$

En las Figuras (12) y (13) podemos ver que al introducir el separador los picos se van a situar en el mismo sitio que para un único tubo pero que van a tener dos frecuencias

de resonancia. Esto se debe a que al introducir el separador se producen modos acoplados, es decir, que las frecuencias que vemos son la combinación de las frecuencias de resonancia de cada uno de los tubos.

2.3. Caso tridimensional

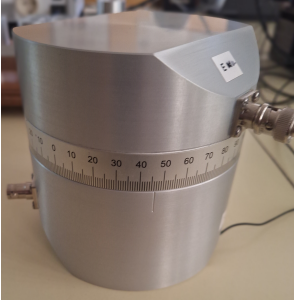


Figura 14: Cavidad esférica montaje experimental

A continuación, vamos a estudiar las resonancias de las ondas sonoras en una cavidad esférica. El montaje en este caso será el mismo, pero sustituyendo el tubo por la cavidad esférica que podemos ver en la Figura (14). Como ya hemos visto en este caso tenemos una componente angular, por lo que vamos a medir los picos de resonancia individualmente variando el ángulo entre el receptor y el emisor. Cada pico será un valor de l , por lo que podremos obtener los armónicos esféricos para distintos valores de l y $m = 0$. Para ello vamos a ir girando la semiesfera superior del montaje y representando la amplitud en un gráfico polar para cada ángulo. Mediremos para ángulos de 0 a 90 grados.

En la siguiente imagen podemos ver cómo es el espectro de frecuencias cuando tenemos un ángulo de 90 grados entre el emisor y el receptor.

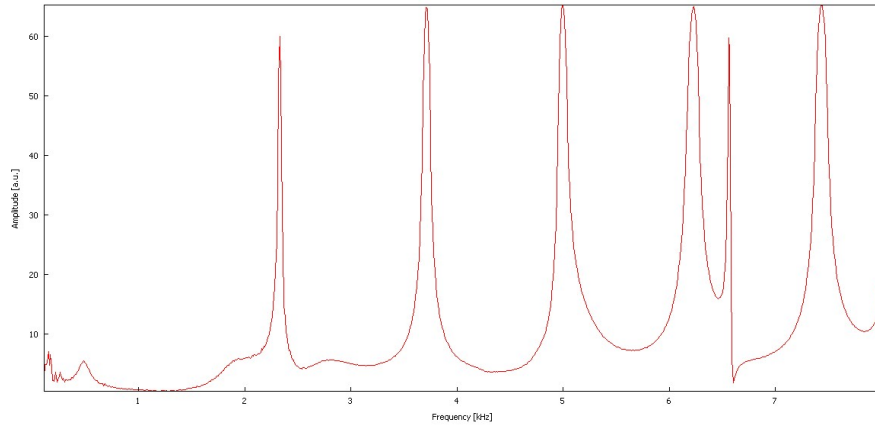


Figura 15: Espectro para un ángulo de 90 grados entre el emisor y el receptor

Además, en la Figura (16) donde hemos graficado el espectro de resonancias para distintos ángulos podemos ver como la amplitud del pico depende del ángulo que consideremos.

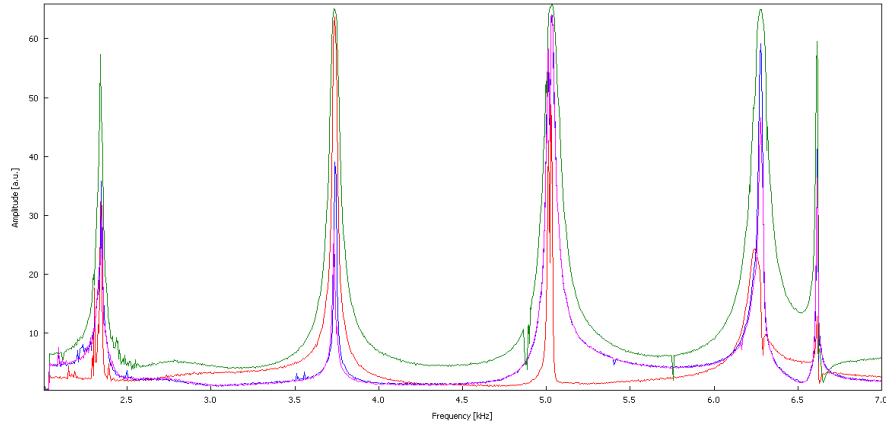


Figura 16: Espectro para un ángulo de 90 grados entre el emisor y el receptor

Al seleccionar cada uno de estos picos y graficar para los ángulos medidos, teniendo en cuenta la simetría obtenemos lo siguiente:

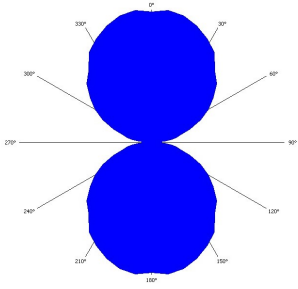


Figura 17: $l = 1$

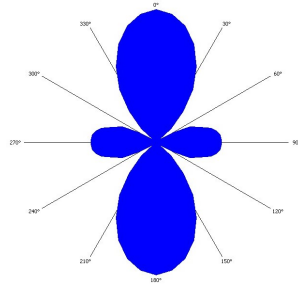


Figura 18: $l = 2$

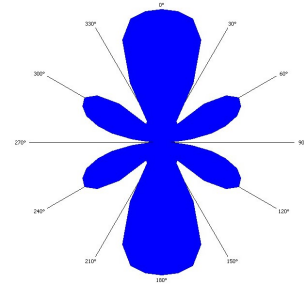


Figura 19: $l = 3$

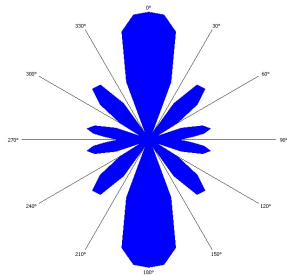


Figura 20: $l = 4$

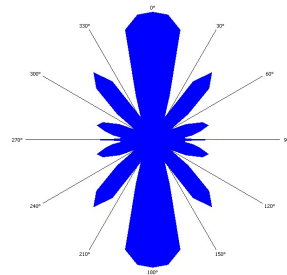


Figura 21: $l = 5$

Como podemos ver hemos obtenido la representación de los armónicos esféricos.

Ahora vamos a ver qué ocurre si introducimos un anillo separador del mismo diámetro que la esfera entre las dos semiesferas.

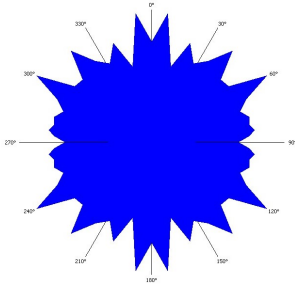


Figura 22: $l = 1$

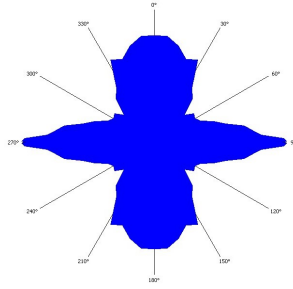


Figura 23: $l = 2$

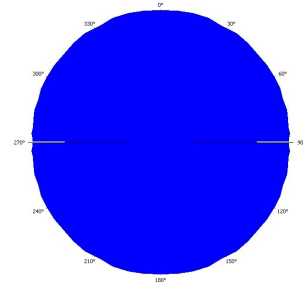


Figura 24: $l = 3$

Como podemos ver nuestros resultados ya no representan los armónicos esféricos. Esto se debe al que al introducir el separador hemos roto la simetría del problema.

3. Conclusiones

En resumen hemos podido estudiar como se comportan las ondas acústicas en cavidades tanto en una dimensión como en tres estudiando las resonancias. En particular, en el caso unidimensional hemos podido ver cómo varían las frecuencias de resonancia para distintas longitudes del tubo y como se dan modos acoplados si introducimos un anillo separador. En el caso tridimensional hemos podido ver como varía la amplitud en función del ángulo, obteniendo así los armónicos esféricos.

Por último, lo más importante es que, como hemos visto en la introducción, estos dos problemas modelan problemas de la mecánica cuántica. Por lo que al estudiar estos resultados también nos estamos concienciando a escala macroscópica de como se comporta una partícula, en el caso unidimensional, en un pozo de potencial y en el caso tridimensional, sometida a un potencial central. En conclusión, el experimento nos ha servido para visualizar y entender mejor estos problemas de mecánica cuántica.

4. Bibliografía

1. Gratton, J. (2003). Introducción a la mecánica cuántica. Buenos Aires, Argentina
2. Griffiths, D. J. (2005). Introduction to quantum mechanics (2nd ed.). Pearson Prentice Hall.
3. Matzdorf, R. Quantum Analogs: Acoustic experiments modeling quantum phenomena. Student manual. Universidad de Kassel.

5. Apéndices

5.1. Tabla de datos

n	Frecuencia (Hz)	k_n	ω rad/s
1	365,842	5,23598776	2298,65308
2	516,078	10,4719755	3242,61371
3	617,259	15,7079633	3878,35268
4	926,841	20,943951	5823,51375
5	1.188,796	26,1799388	7469,42556
6	1.498,379	31,4159265	9414,59292
7	1772,241	36,6519143	11135,31861
8	2.069,917	41,887902	13005,67208
9	2.367,592	47,1238898	14876,01927
10	2.653,361	52,3598776	16671,55885
11	2.939,130	57,5958653	18467,09843
12	3.212,992	62,8318531	20187,82413
13	3.522,574	68,0678408	22132,98520
14	3.796,436	73,3038286	23853,71089
15	4.094,112	78,5398163	25724,06436
16	4.367,974	83,7758041	27444,79006
17	4.665,650	89,0117919	29315,14353
18	4.927,604	94,2477796	30961,04905
19	5.225,280	99,4837674	32831,40252
20	5.511,049	104,719755	34626,94210

Tabla 1: Datos extraídos del programa Spectrum SLC para calcular la velocidad del sonido en el aire