Grado en Física. Mecánica Newtoniana y Relatividad.
Cinemática y dinámica del sólido rígido.
Curso 2022-2023

1. Estamos situados en el centro de una plataforma circular giratoria de radio 10 m y deseamos movernos hasta un punto situado en la periferia siguiendo una línea recta y a velocidad constante. Tardamos 5 s en realizar el trayecto y la plataforma gira a un ritmo de 1 un radián por segundo. Obtén la fuerza en función del tiempo que debe ejercer el suelo de la plataforma sobre nuestros pies para realizar ese trayecto. Considera una masa de 70 kg. Representa el vector fuerza en los instantes de tiempo 0, 2 y 5 s. Nota: en este problema despreciamos la rotación de la Tierra.

   Sol.: $\vec{F}(t) = -140\, t\, \vec{e}\,'_x + 280\vec{e}\,'_y$ N.

2. Continuando con el problema anterior, supongamos que hemos llegado a la periferia de la plataforma y permanecemos en reposo respecto a ella. Lanzamos entonces una pelota de tenis con una velocidad de 20 m/s dirigida hacia el centro de la plataforma. Describe la componente horizontal del movimiento de la pelota tanto en el sistema inercial como en el giratorio. ¿A qué distancia de la vertical trazada desde el centro pasará la pelota? Nota: en este problema despreciamos la rotación de la Tierra y consideramos solo el movimiento horizontal de la pelota.

   Sol.: Distancia $2\sqrt{5}$ m.

3. Una bolita está ensartada en un alambre horizontal de longitud d y puede deslizar sin rozamiento. El alambre gira respecto a un eje vertical que pasa por uno de sus extremos con una velocidad angular Ω. Plantea la ecuación de la dinámica de la partícula en el sistema en rotación. Si la bolita está inicialmente a una distancia $d/2$ del extremo del alambre obtén la velocidad respecto al sistema inercial cuando sale del alambre.

   Sol.: Módulo de la velocidad a la salida $\frac{\sqrt{7}}{2}\,\Omega\, d$.

4. Un tren de 2000 toneladas se desplaza de norte a sur (sobre el meridiano) a una velocidad de 50 m/s en un lugar de latitud 40°. Obtén la fuerza lateral que se ejerce sobre los raíles. ¿Y si viajara de sur a norte?

   Sol.: $F \approx 9.37 \times 10^3$ N hacia el oeste.

5. Obtén el tensor de inercia respecto al centro de masas y los ejes y momentos principales de inercia de un rotor: dos partículas de masa m unidas mediante una varilla de masa despreciable y longitud d.

   Sol.: Tomando el eje z alineado con la varilla, $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}\, m\, d^2$. Todos los demás elementos de matriz son cero.

6. Tres partículas de masa m ocupan los vértices de un triángulo equilátero de lado d. Las partículas están unidas por por varillas de masa despreciable. Obtén el tensor de inercia respecto al centro de masas y los ejes y momentos principales de inercia.

   Sol.: Tomando el eje z perpendicular al plano del triángulo, $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}\, m\, d^2,\ I_{zz} = m\, d^2$. Todos los demás elementos de matriz son cero.

7. Obtén el tensor de inercia, respecto a uno de sus vértices, de un cubo homogéneo de masa M y lado a tomando como ejes los lados del cubo. Obtén también los ejes y momentos principales de inercia.

   Sol.: Tensor simétrico con $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = 2I_0/3,\ I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = -I_0/4$, siendo $I_0 = M\, a^2$.

8. Demuestra que el tensor de inercia respecto a un punto es igual al tensor de inercia respecto al centro de masas más el tensor de inercia de una partícula puntual con la masa total situada en el centro de masas (teorema de Steiner). Usa el resultado del problema anterior y aplica este teorema para obtener el tensor de inercia de un cubo homogéneo respecto a su centro de masas.

   Sol.: $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{6}\, M\, a^2$. Todos los demás elementos de matriz son cero.

9. Obtén el tensor de inercia de una esfera sólida homogénea de masa M y radio R tomando el origen en el centro de masas.

   Sol.: $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}\, M\, R^2$. Todos los demás elementos de matriz son cero.

10. Una barra rígida de longitud d y masa m gira en un plano manteniendo fijo uno de sus extremos con una velocidad angular Ω. Obtén las componentes del tensor de inercia respecto al extremo fijo, tanto en el sistema de referencia en rotación como en el sistema de referencia inercial. Obtén las componentes del momento angular en los dos sistemas así como la energía cinética.

    Sol.: Eje $z = z'$ perpendicular al plano de giro, eje x' alineado con la barra. Sistema en rotación $I_{y'y'} = I_{z'z'} = I_0$, con $I_0 = \frac{1}{3} m\, d^2$. Todos los demás elementos de matriz son cero. Sistema fijo $I_{xx} = I_0 \sin^2\theta$, $I_{yy} = I_0 \cos^2\theta$, $I_{zz} = I_0$, $I_{xy} = I_{yx} = -I_0 \sin\theta\cos\theta$, donde θ es el ángulo formado con el eje x. $T = \frac{1}{6} m\, d^2 \Omega^2$.

11. Un rotor, formado por dos partículas de masa m unidas por una varilla de masa despreciable y longitud d, gira con una velocidad angular Ω alrededor de un eje que pasa por el centro de masas y forma un ángulo θ con el eje del rotor. Obtén las componentes del momento angular tanto en un sistema de referencia fijo al rotor como en uno inercial. Obtén también la energía cinética. ¿Podría darse este movimiento si el rotor fuera libre?

    Sol.: Sistema en rotación: eje z' en la dirección de la varilla, $I_{x'x'} = I_{y'y'} = I$, con $I = \frac{1}{2} m\, d^2$, y todos los demás elementos de matriz son cero. Sistema fijo: eje z en la dirección del eje de giro, $I_{xx} = I(\sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\theta)$, $I_{yy} = I(\sin^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta)$, $I_{zz} = I\sin^2\theta$, $I_{xy} = -I\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi$, $I_{xz} = -I\sin^2\theta\cos\theta\cos\phi$, $I_{yz} = -I\sin^2\theta\cos\theta\sin\phi$. Momento angular: Sistema fijo $\ell_x = -I\Omega\sin\theta\cos\theta\cos\Omega t$, $\ell_y = -I\Omega\sin\theta\cos\theta\sin\Omega t$, $\ell_z = -I\Omega\sin^2\theta$. Sistema en rotación $\ell_{x'} = -I\Omega\sin\theta$.

12. Una placa rectangular de lados a y b y masa m gira alrededor de una de sus diagonales con una velocidad angular constante de magnitud Ω. Usando las ecuaciones de Euler obtén las componentes del momento externo que debe aplicarse para matener ese movimiento.

    Sol.: $M_{z'} = \frac{1}{12} m\, \Omega \frac{a\, b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$, donde el eje z' es perpendicular al plano de la placa y el resto de componentes son cero.

13. Un cono homogéneo y macizo, de masa m, altura h y radio de la base R, rueda sin deslizar por un plano horizontal manteniéndose el vértice fijo. Encuentra el centro de masa del cono. Encuentra una terna de ejes que sean ejes principales de inercia del cono y calcula el tensor de inercia para esa terna respecto del centro de masa y respecto del vértice. Si la velocidad angular de precesión (precesión del eje de simetría alrededor de un eje vertical que pasa por el vértice) es $\Omega_{\rm pre}$, obtén las velocidades angulares $\dot\phi$, $\dot\psi$ definidas en clase y las componentes del vector velocidad angular ω en el sistema de coordenadas fijo al cono (toma z' como el eje de simetría del cono y z en la misma dirección y sentido que $\Omega_{\rm pre}$). Obtén también las componentes del vector momento angular y la energía cinética del sólido.

    Sol.: El centro de masa se encuentra a $\frac{3}{4}\, h$ desde el vértice, y sobre el eje de simetría.
    $I^{CM}_{z'z'} = \frac{3}{10}\, m\, R^2$, $I^{CM}_{x'x'} = I^{CM}_{y'y'} = I'^{CM} = \left(\frac{3}{20}\, R^2 + \frac{3}{80}\, h^2\right) m$
    $I^{V}_{z'z'} = \frac{3}{10}\, m\, R^2$, $I^{V}_{x'x'} = I^{V}_{y'y'} = I'^{V} = \left(\frac{3}{20}\, R^2 + \frac{3}{5}\, h^2\right) m$

$\dot{\phi} = \Omega_{\rm pre}$, $\dot{\psi} = -\sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}}\,\Omega_{\rm pre}$, $\omega_3' = -\frac{h^2}{R\sqrt{R^2+h^2}}\,\Omega_{\rm pre}$, $\omega_1' = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\,\Omega_{\rm pre}$, $L_3' = -\frac{3}{10}\,\frac{m\,R\,h^2}{\sqrt{R^2+h^2}}\,\Omega_{\rm pre}$, $L_1' = \left(\frac{3}{20}\,R^2 + \frac{3}{5}\,h^2\right)\,\frac{m\,h}{\sqrt{R^2+h^2}}\,\Omega_{\rm pre}$, $T = \frac{1}{2}m\,\Omega_{\rm pre}^2\,\frac{h^4}{(R^2+h^2)}\left(\frac{9}{10} + \frac{3}{20}\,\frac{R^2}{h^2}\right)$.

14. Una moneda de 1 cm de radio y una masa de 8 g gira libremente alrededor de su centro de masas. Si tiene una velocidad angular inicial de módulo 8 π rad/s que forma un ángulo de 45° con el eje de la moneda, obtén las componentes de la velocidad angular y del momento angular en el sistema del sólido. Obtén el módulo del momento angular así como la energía cinética. Obtén las velocidades angulares $\Omega_{\rm b}$, $\Omega_{\rm pre}$ y ω_3'.