E5 CORRIENTE ALTERNA: CIRCUITOS RLC SERIE. RESONANCIA

OBJETIVOS

Estudio del comportamiento de resistencias, condensadores y bobinas en circuitos de corriente alterna.

Comprobar la ley de Ohm generalizada para corriente alterna.

Análisis del fenómeno de resonancia, y determinación de la frecuencia de resonancia en circuitos RLC en serie.

MATERIAL

Generador de voltaje de tipo sinusoidal de frecuencia variable con voltímetro incorporado HAMEG HM8030, resistencias de 120 Ω y 470 Ω, condensador de 0.1 μF, bobina de 35 mH, 2 multímetros, placa de conexiones y cables.

FUNDAMENTO TEÓRICO

La corriente alterna (ca) consiste en una corriente eléctrica variable en la que las cargas eléctricas cambian el sentido del movimiento de manera periódica. Se genera mediante inducción magnética, produciéndose una fuerza electromotriz (fem) armónica con respecto al tiempo tipo sinusoidal. La corriente en una resistencia, condensador o bobina también es sinusoidal aunque en general no está en fase con la fem.

Supongamos que un generador de ca produce una fem $\mathcal{E}$, de la forma:

$$\mathcal{E} = V_{\max} \sin(\omega t) \tag{1}$$

donde $V_{\max}$ es la amplitud del voltaje de la fuente, y ω es la frecuencia angular.

Un circuito RLC es un circuito formado por resistencias, condensadores y bobinas (también llamados, respectivamente, resistores, capacitores e inductores dependiendo de la terminología o del libro utilizado), y se caracteriza porque existe una relación lineal entre la tensión y la intensidad. Las resistencias son elementos que causan pérdida de energía, los condensadores son dispositivos en los cuales se almacena la energía en un campo eléctrico, y las bobinas en un campo magnético. Antes de estudiar el comportamiento de un circuito RLC en serie con un generador de ca, vamos a evaluar cada uno de estos dispositivos por separado.

Comenzaremos analizando el comportamiento de un circuito formado por una fuente de corriente alterna ($\mathcal{E}$) en serie con una resistencia (R), según el esquema propuesto en la figura 1.

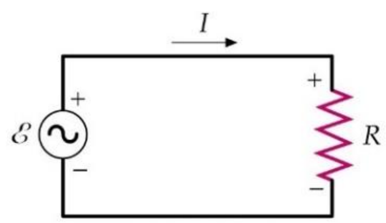

Figura 1. Generador de ca, $\mathcal{E}$, en serie con una resistencia R

La caída de tensión a través de la resistencia es $V_R = RI$, y la regla de las mallas de Kirchhoff nos dará que:

$$\mathcal{E} - V_R = 0 \tag{2}$$

y la corriente en la resistencia será:

$$I_R = \frac{V_{\max}}{R} \sin \omega t = I_{R,\max} \sin \omega t \tag{3}$$

Es interesante observar que la corriente que circula por la resistencia y la tensión aplicada tienen la misma dependencia sinusoidal con el tiempo, están en fase, y la amplitud de la intensidad en este circuito resistivo es:

$$I_{R,\max} = \frac{V_{\max}}{R} \tag{4}$$

A continuación, vamos a estudiar un circuito donde tenemos conectado una fem de ca ($\mathcal{E}$) en serie con un condensador (C), tal y como se muestra en la figura 2. Se recomienda al alumno leer el fundamento físico de la práctica "Carga y descarga de un condensador".

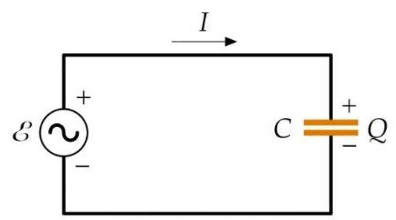

Figura 2. Generador de ca, $\mathcal{E}$, en serie con un condensador de capacidad C

La estructura básica de un condensador consiste en dos placas conductoras separadas por un material dieléctrico, las cuales sometidas a una diferencia de potencial, adquieren una determinada carga eléctrica, Q, positiva en una placa y negativa en la otra, lo cual da lugar a un campo eléctrico. Un condensador es un dispositivo capaz de almacenar la energía eléctrica que recibe durante el periodo de carga, y que cede después durante el periodo de descarga. En un condensador existe una relación lineal entre la carga Q y la diferencia de potencial, V_C,

$$Q = CV_C \tag{5}$$

a la constante de proporcionalidad C se le conoce como capacidad del condensador. Si aplicamos la regla de Kirchhoff al circuito de la figura 2, tendremos que:

$$\mathcal{E} - V_C = 0 \tag{6}$$

y la corriente eléctrica del circuito será:

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = \omega C\, V_{\max}\, \cos \omega t = \omega C\, V_{\max}\, \sin(\omega t + \pi/2) = I_{C,\max} \sin(\omega t + \pi/2) \tag{7}$$

donde la fase de la corriente tiene una diferencia de $\pi/2$ con respecto al voltaje, lo cual significa que la corriente precede al voltaje en una fase de $\pi/2$. Para entender esta diferencia de fase, hemos de pensar que cuando cerramos el interruptor del circuito en $t = 0$, en ese momento no hay carga en las placas del condensador, y el voltaje es nulo. La carga tiene su valor máximo y fluye con facilidad hacia las placas del condensador. Al aumentar el voltaje, ya se ha acumulado bastante carga, y las cargas posteriores son repelidas, entonces la corriente decrece hasta cero, cuando el voltaje alcanza su valor máximo.

Por otra parte, la amplitud de la intensidad o su valor máximo es:

$$I_{C,\max} = \omega C\, V_{\max} \tag{8}$$

y si comparamos este valor con la intensidad máxima del circuito resistivo, $I_{R,\max}$, dado por ec.(4), podemos definir, análogamente, una resistencia efectiva que llamaremos reactancia capacitiva de la forma

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \tag{9}$$

de tal forma que

$$I_{C,\max} = \frac{V_{max}}{X_C} \tag{10}$$

A continuación, analizamos el comportamiento de una bobina en serie con un generador de ca ($\mathcal{E}$). Cuando por un circuito circula una corriente eléctrica que varía con el tiempo, ésta produce un campo magnético variable, y, de acuerdo con la ley de Faraday, se induce una fem adicional en el circuito, que según la ley de Lenz se opone a cualquier cambio del flujo magnético. Por consiguiente, la fem inducida se opone a la fem del generador y desacelera el flujo de corriente. Como el campo magnético B que se establece alrededor de un alambre que conduce una corriente I es proporcional a I, el flujo magnético Φ_B a través de un circuito también es proporcional a I, y se define la inductancia L del circuito de la forma:

$$\Phi_B = L\,I \tag{11}$$

la ley de Faraday indica que la fem inducida, V_L, en este circuito, será la variación del flujo magnético:

$$V_L = \frac{d\Phi_B}{dt} = L\,\frac{dI}{dt} \tag{12}$$

Cualquier fem inducida en la bobina se opone al cambio de la corriente, y un generador de ca debe de efectuar trabajo para hacer que la corriente pase a través de la bobina, este trabajo que se efectúa es una medida de la energía almacenada en dicha bobina.

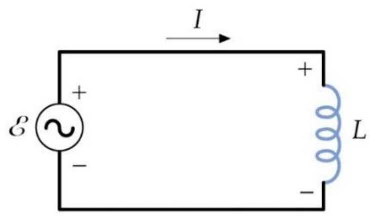

Figura 3. Generador de ca, $\mathcal{E}$, en serie con una bobina cuya inductancia es L

Si aplicamos la regla de Kirchhoff de las mallas al circuito inductivo de la Figura 3, tendremos que:

$$\mathcal{E} - V_L = 0 \tag{13}$$

donde hemos despreciado la caída de voltaje en la resistencia de la bobina. Sustituyendo los valores en la ec. (13) e integrando, podemos obtener la corriente que pasa por el inductor:

$$I_L = \frac{V_{\max}}{\omega L}\sin(\omega t - \pi/2) \tag{14}$$

obteniendo que el voltaje y la intensidad están desplazadas entre sí en un cuarto de ciclo, la corriente se retrasa con respecto al voltaje en $\pi/2$. Para entender este comportamiento, hemos de pensar que al cerrar el interruptor del circuito, el voltaje que inicialmente es nulo comienza a aumentar, pero el inductor se resiste a cualquier cambio del flujo de corriente, e inducirá una corriente opuesta, negativa. Cuando el voltaje alcanza su valor máximo y comienza a disminuir, el inductor se resiste a este cambio e induce una corriente positiva para tratar de mantener alto el voltaje. Así la corriente cambia de negativa a positiva, y se mantiene 90o desfasada con respecto al voltaje. Otra forma de explicarlo es que cuando la corriente es cero y comienza a crecer, dI/dt es máxima, y por tanto, la fem inducida en la bobina; un cuarto de ciclo después, la intensidad es máxima, $\frac{dI}{dt} = 0$ y $V_L = 0$.

La corriente máxima a través de la bobina es:

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{\omega L} = \frac{V_{\max}}{X_L} \tag{15}$$

y análogamente al caso del circuito con un condensador, se puede definir una resistencia efectiva, llamada reactancia inductiva, de la forma:

$$X_L = \omega L \tag{16}$$

y en este caso, la resistencia efectiva al paso de la corriente se incrementa al aumentar la frecuencia, lo cual físicamente es razonable, ya que las bobinas reaccionan oponiéndose a cualquier cambio de flujo de la corriente y una frecuencia mayor implica una mayor rapidez de cambio.

Analizando el comportamiento de los circuitos presentados anteriormente podemos concluir que cuando una resistencia, un condensador o una bobina se conectan en serie a un generador de ca, la intensidad que circula por estos circuitos es también sinusoidad, aunque en el caso del condensador y de la bobina no se encuentran en fase con la fem.

Seguidamente vamos a analizar un circuito en serie RLC impulsado por una fem de ca, donde se encuentran dispuestos en serie una resistencia, una bobina y un condensador, según podemos ver en la figura 4. En este caso, aplicando la ley de las mallas de Kirchhoff, tendremos:

$$V_{\max}\sin\omega t - L\,\frac{dI}{dt} - IR_L - \frac{Q}{C} - IR = 0 \tag{17}$$

donde hemos incluido la resistencia interna de la bobina, R_L. Como $I = dQ/dt$, podemos expresar este resultado en términos de la carga en el capacitor, Q, y nos queda:

$$L\,\frac{d^2Q}{dt^2} + (R + R_L)\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_{\max}\sin\omega t \tag{18}$$

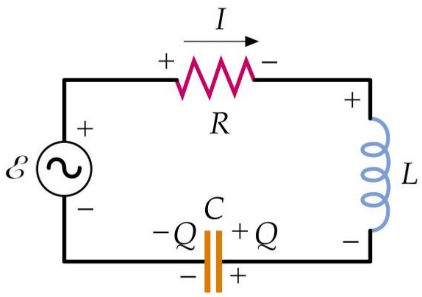

Figura 4. Circuito RLC en serie con un generador de ca

Este resultado para el circuito serie RLC se puede comprender en términos de un análogo mecánico, ya que la ecuación (18) es similar a la ecuación correspondiente al movimiento armónico amortiguado forzado de una masa fija a un muelle, tal y como se representa en la Fig.5, lo cual nos permite obtener un nuevo punto de vista físico del comportamiento de estos circuitos.

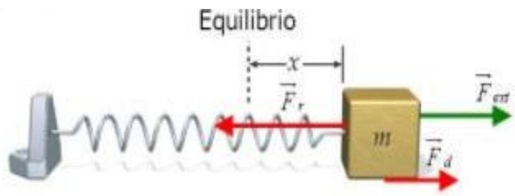

Figura 5. Movimiento de un oscilador armónico amortiguado forzado de una masa fija a un resorte y sometido a una fuerza externa

Analizamos el movimiento de una masa m fija a un resorte, de constante elástica k, que se mueve en la dirección X, correspondiente a un oscilador armónico amortiguado impulsado por una fuerza externa. Las fuerzas que actúan sobre la masa son: la fuerza recuperadora del muelle, dada por la ley de Hooke: $F_{\text{rec}} = -kx$, la fuerza de rozamiento viscoso proporcional a la velocidad: $F_{\text{roz}} = -\gamma v$, y la fuerza armónica externa $F(t) = F_{\max}\sin\omega t$. Si aplicamos la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento será:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F_{max}\sin\omega t \tag{19}$$

cuya solución nos da la elongación en función del tiempo, $x(t)$:

$$x(t) = e^{-\gamma t/2m}\left[c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{-i\omega_1 t}\right] + \left[\frac{F_{\max}/m}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2/m^2}\right]\sin(\omega t - \phi) \tag{20}$$

donde se ha definido la frecuencia propia del oscilador:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \tag{21}$$

Físicamente, el primer término de la ecuación (20) representa los efectos transitorios y determina el comportamiento del sistema en los instantes iniciales, desapareciendo rápidamente con el tiempo, mientras que el segundo término representa los efectos estacionarios que se mantienen indefinidamente. Por tanto, a tiempos grandes, tendremos que:

$$x(t) = A\sin(\omega t - \phi) \tag{22}$$

donde A la amplitud de las oscilaciones y ϕ el desfase con la fuerza aplicada, viene dado por:

$$A = \frac{F_{max}/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2/m^2}} \tag{23}$$

$$\tan\phi = \frac{\gamma\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{24}$$

El significado físico de este resultado es que cuando se le aplica una fuerza oscilante a una masa atada a un muelle, la masa oscila, y además lo hace con la frecuencia de la señal aplicada, ω, aunque fuera de fase.

Hemos de destacar que este sistema muestra el importante fenómeno físico de la resonancia, caracterizado por una gran amplitud cuando la frecuencia impulsora ω es cercana a la frecuencia natural o propia del oscilador ω_0. Si no hubiera amortiguamiento $\gamma = 0$ la amplitud sería infinita cuando $\omega = \omega_0$, lo cual demuestra que en la resonancia, la respuesta de un sistema armónico a una fuerza impulsora armónica puede ser catastróficamente grande. Hemos de notar que los parámetros A y ϕ pueden obtenerse también de forma sencilla mediante el uso de fasores.

Teniendo en cuenta que la ecuación diferencial (18) en la variable Q para el circuito RLC en serie es formalmente análoga a la que hemos analizado para el oscilador armónico amortiguado forzado, debe de tener una solución similar, cuya parte estacionaria de la solución será:

$$Q = Q_{\max}\sin(\omega t - \phi) \tag{25}$$

donde la amplitud y el desfase vienen dados por:

$$Q_{\max} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{L^2(\omega^2-\omega_0^2)^2+(R+R_L)^2\omega^2}} \tag{26}$$

$$\tan\phi = \frac{(R+R_L)\omega}{L(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{27}$$

Comparando con el análogo mecánico, el término de amortiguamiento corresponde a las resistencias del circuito $(R + R_L)$, mientras que la frecuencia propia del circuito será:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{28}$$

que corresponde a un circuito LC puro, sin resistencias, es decir, sin amortiguamiento. La corriente, I, que circula por el circuito será:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \omega Q_{\max}\cos(\omega t - \phi) \tag{29}$$

Análogamente a cómo hemos definido la reactancia capacitiva e inductiva anteriormente, definimos la impedancia Z, que desempeña el papel de una resistencia efectiva, de la forma:

$$Z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + (R + R_L)^2} = \sqrt{(X_C - X_L)^2 + (R + R_L)^2} \tag{30}$$

y el valor máximo de la intensidad será:

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{Z} \tag{31}$$

esta ecuación es análoga a la ley de Ohm para corriente continua (cc), y se puede entender como la ley de Ohm generalizada para circuitos de ca. Desde este punto de vista, la asociación en serie y en paralelo de varias impedancias, seguirán las mismas normas que las que se verifican en los circuitos de cc para las resistencias.

Es importante destacar que la amplitud de corriente de un circuito RLC presenta el fenómeno de resonancia, ya que para valores pequeños de la impedancia Z, la amplitud de corriente se maximiza o resuena. Esto sucede cuando la frecuencia impulsora del generador, ω, tiene un valor cercano a la frecuencia propia o natural, ω_0 ,sin amortiguamiento, y que depende del valor de la autoinducción y de la capacidad del condensador, de la forma $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Como en el caso del oscilador mecánico, la agudeza de la resonancia dependen del factor de amortiguamiento, es decir, de la resistencia del circuito, y cuanto menor sea la resistencia mayor y más agudo será el pico de resonancia. Sin resistencia, las amplitudes serían infinitas cuando $\omega = \omega_0$, aunque en los circuitos reales la resistencia es inevitable.

METODOLOGÍA

La primera parte de la práctica la dedicaremos a analizar experimentalmente el comportamiento de los diferentes elementos del circuito RLC por separado con una fuente de alimentación de ca. Vamos a comprobar experimentalmente la relación entre el voltaje y la intensidad de corriente dado por las ecs.(4), (10) y (15) relativas a los circuitos de las figuras 1, 2 y 3.

Antes de proseguir, es necesario resaltar que la mayoría de los amperímetros y voltímetros están diseñados para medir valores eficaces de la corriente o de la tensión en vez de los valores máximos o de pico, los cuales están relacionados de la forma:

$$I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{max} \qquad \text{y} \qquad V_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{max} \tag{32}$$

para señales de tipo sinusoidal, lo cual significa que todas las expresiones correspondientes a intensidades máximas y/o voltajes máximos son válidas también para sus valores eficaces.

Antes de comenzar el montaje, uno se debe de familiarizar con los diferentes materiales que se utilizarán en esta práctica (ver Fig. 6): resistencias, condensadores, bobinas, multímetros cuya descripción y funcionamiento se encuentra en el Apéndice I, y en especial con el funcionamiento del generador de voltaje sinusoidal de frecuencia variable HAMEG HM8030 y del voltímetro que lleva incorporado, descrito en el apéndice III. No se debe de olvidar que estamos realizando una experiencia de corriente alterna, y en todos los aparatos de medida se debe de elegir esta opción (ca o $\sim$). Es muy importante que entendáis que el amperímetro siempre se tienen que conectar en serie y el voltímetro en paralelo, y que antes de realizar el montaje experimental, debéis de realizar un esquema del circuito y seguir sus indicaciones.

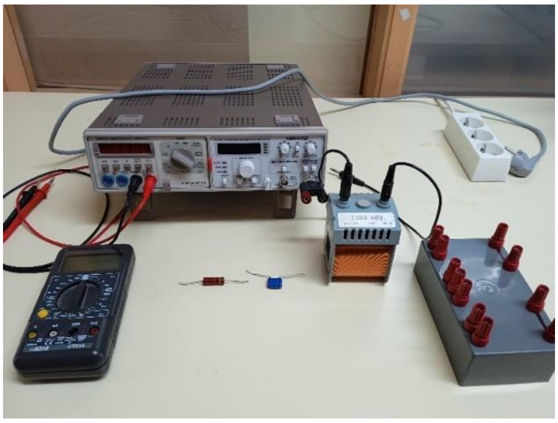

Figura 6. Material disponible para realizar los diferentes montajes experimentales

La elección de las escalas en los instrumentos de medida, debido a las características intrínsecas del circuito construido como detección de señales espurias o falta de aislamiento eléctrico en algunas partes del circuito, es conveniente que sea la de 20 V en el voltímetro y la de 200 mA o 20 mA en el amperímetro. Debido al acoplamiento de impedancias entre medidores, no conviene cambiar de escala en el amperímetro una vez elegida la adecuada. Se ha de tener en cuenta que aunque estemos trabajando con un circuito de corriente alterna y no se atienda a la polaridad en la conexión de los instrumentos, hay que considerar que el propio generador tiene dos terminales, uno es tierra y el otro es la señal de medida (cable tipo BNC). En estos casos, el fabricante aconseja para una correcta medida conectar el terminal "com" del multímetro al punto más cercano a tierra del circuito cuando se quiera medir un voltaje entre los extremos de un elemento o una corriente que fluya por él. Es importante que al finalizar una serie de medidas o cuando se quiera modificar el circuito se coloque el mando "amplitude" del generador de ca en su posición de mínimo, esto evitará cortocircuitos y accidentes que estropeen los instrumentos y el generador.

Comenzaremos esta práctica con el montaje de un circuito de ca resistivo (ver Fig.1) con una resistencia $R = 120\ \Omega$, manteniendo fija la frecuencia del generador $f \cong 1$ kHz mediante el botón giratorio (2) de la fuente Hameg HM 8030-5, la cual se visualiza en la pantalla. Seguidamente vamos variando el voltaje de la fuente de alimentación mediante el mando "amplitude" de la fuente para V =1 - 4 V, a intervalos de 0.5 V (medido con el voltímetro Hameg HM 8011-3) midiendo la intensidad de corriente que pasa por la resistencia con el amperímetro. Comprobaremos si se verifica la ec.(4).

IMPORTANTE: NO CONECTES EL GENERADOR DE VOLTAJE DE FRECUENCIA VARIABLE A LA RED ELÉCTRICA ANTES DE QUE EL CIRCUITO HAYA SIDO REVISADO POR UN/A PROFESOR/A

En segundo lugar realizaremos las medidas correspondientes a un circuito de ca con un condensador de capacidad C =0.1 μF. El circuito y las características serán igual que en el caso anterior, pero donde hemos sustituido la resistencia por el condensador (ver figura 2). Obtendremos parejas de datos voltaje - intensidad y verificaremos si se cumple la ec.(10).

En tercer lugar, analizaremos el comportamiento de una bobina de $L = 35$ mH en un circuito de ca. Repetiremos el procedimiento descrito anteriormente donde hemos sustituido la resistencia o el condensador por una bobina, obteniendo parejas de datos voltaje - intensidad, con las cuales podremos comprobar la ec.(15).

La segunda parte de la práctica consiste en estudiar para un circuito RLC en serie la variación de la corriente con la frecuencia del generador y determinar la frecuencia de resonancia del circuito. Realizaremos el montaje de un circuito de ca RLC en serie, tal y como aparece en la Fig.4, con los valores $R = 120\ \Omega$, $C = 0.1\ \mu$F, y $L = 35$ mH. En este caso, mantenemos siempre constante la fem del generador $V = 1$ V. Vamos variando la frecuencia, f, del generador 1 kHz a 10 kHz en intervalos de 1 kHz, y medimos con el amperímetro en serie la intensidad de corriente que circula por el circuito, utilizando la escala de 20 mA. De esta manera se obtendrán datos de la intensidad de corriente en función de la frecuencia del generador, lo cual permitirá obtener la frecuencia de resonancia, ω_0, del circuito. Se recomienda calcular teóricamente la frecuencia de resonancia del circuito y hacer más medidas alrededor de la misma. Hemos de resaltar que $\omega = 2\pi f$, siendo ω la frecuencia angular en rad/s y f la frecuencia en hercios. Vuelve a realizar estas medidas cambiando la resistencia por otra de valor $R = 470\ \Omega$.

Es interesante comprobar experimentalmente si en un circuito de ca RCL serie, la fuerza electromotriz del generador es o no la suma algebraica del voltaje en cada uno de los componentes como sucede en circuitos de cc.

RESULTADOS

Representa gráficamente los datos experimentales de la intensidad y voltaje que has medido en el caso del circuito resistivo. Comprueba si se verifica la ley de Ohm generalizada para ca, ver ec.(4) , y obtén la resistencia R a partir de la gráfica correspondiente. Compara este valor de R con el valor de la resistencia obtenido directamente con el multímetro y con el código de colores.

Analiza los datos intensidad-voltaje obtenidos en el circuito con el condensador, realiza una representación gráfica y comprueba si se verifica la ley de Ohm generalizada para ca, ver ec.(10). A partir de la representación gráfica obtén la reactancia capacitiva, X_C, y la capacidad del condensador. Compáralo con su valor nominal.

Evalúa el comportamiento del circuito con una bobina en ca. Realiza una representación gráfica de $I - V$ que te permita calcular la reactancia inductiva X_L y comprobar la ley de Ohm generalizada, ver ec.(15). Calcula su inductancia L.

Determina la frecuencia de resonancia del circuito RLC en serie a partir de las medidas de la intensidad en función de la frecuencia. Compárala con las predicciones teóricas. Representa en la misma figura los datos correspondientes a las medidas para las dos resistencias que has usado, y discute el resultado.

Para el circuito serie RLC busca la relación teórica entre el voltaje en el generador y en cada uno de los componentes del circuito, y comprueba si se verifica experimentalmente.

CUESTIONES

1. Explica cómo se pueden producir generadores de ca.
2. Discute por qué la mayor parte de las líneas de transmisión de energía eléctrica de larga distancia utilizan altas tensiones y corriente alterna.
3. Comenta algunas aplicaciones tecnológicas de los circuitos de ca.
4. Explica el funcionamiento de un transformador y su utilidad.
5. Discute algunas aplicaciones de los fenómenos de resonancia en circuitos de ca.