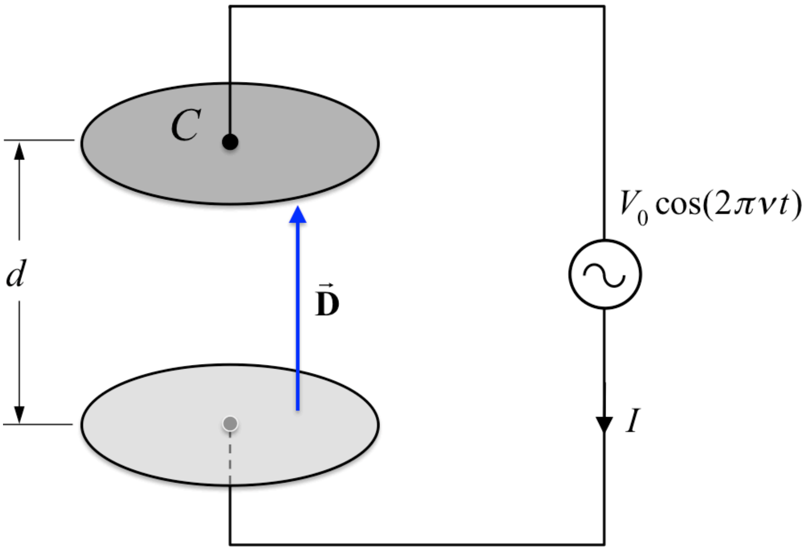
El agua de mar a frecuencia $\nu = 4 \times 10^8$ Hz tiene permitividad $\varepsilon = 81\varepsilon_0$, permeabilidad $\mu = \mu_0$, y resistividad $\rho = 0.23\ \Omega\cdot\text{m}$. Considerando un condensador de láminas plano paralelas en agua de mar con un voltaje entre sus extremos $V_0\cos(2\pi\nu t)$, determinar la relación entre la corriente de conducción y la corriente de desplazamiento.




$\varepsilon = 81\varepsilon_0$

$\mu = \mu_0$

$\rho = 0{,}23\ \Omega\cdot m$

$E = \dfrac{V}{d}$

La corriente de desplazamiento será:

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E) = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{V}{d}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon V_0}{d}\frac{d}{dt}(\cos 2\pi\nu t) = -\frac{2\pi\nu\varepsilon V_0}{d}\,\text{sen}\,2\pi\nu t$$

La corriente de conducción viene dada por:

$$J_c = \sigma E = \frac{1}{\rho}\frac{V}{d} = \frac{V_0}{\rho d}\cos 2\pi\nu t$$

Entonces:

$$\frac{J_c}{J_d} = \frac{V_0 \cos 2\pi\nu t\ d}{\rho d\left[-2\pi\nu\varepsilon V_0\,\text{sen}\,2\pi\nu t\right]} = -\frac{1}{2\pi\nu\rho\varepsilon\,\text{tg}\,2\pi\nu t}$$

La relación de amplitudes será:

$$\left(\frac{J_c}{J_d}\right)_{amplitudes} = \frac{V_o}{\rho d}\,\frac{d}{2\pi\nu\varepsilon V_o} = \frac{1}{2\pi\nu\varepsilon\rho} =$$

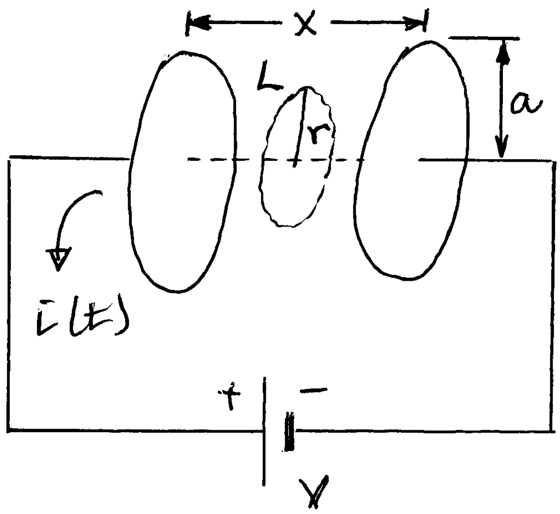
$$= \frac{1}{2\pi(4\times10^8)(81)(\underbrace{8,85\times10^{-12}}_{\varepsilon_o})(0,23)} = 2,41$$

$$\left(J_c/J_d\right)_{amplitudes} = 2,41$$

Un condensador de capacidad $C$ está formado por dos placas circulares paralelas de radio $a$ y está conectado a una diferencia de potencial $V$.

(a) Determinar el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ en el interior del condensador cuando sus placas se separan lentamente con velocidad constante $v$.

(b) Repetir los cálculos considerando el condensador aislado.




Separación entre las placas:

$$x(t) = x_0 + vt$$

Capacidad de un condensador de láminas plano paralelas:

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{x}}$$

Como $S = \pi a^2 \rightarrow C = \varepsilon_0 \dfrac{\pi a^2}{x} \rightarrow C(t) = \varepsilon_0 \dfrac{\pi a^2}{x_0 + vt}$

(a) Al alejarse las placas la capacidad disminuye. Como el condensador está conectado a la batería, su ddp es fija y vale $V$ (la fem de la batería). De la definición de capacidad de un condensador:

$$C = \frac{q}{V}$$

como $V$ es fijo y $C$ disminuye al alejarse las placas, entonces debe reducirse la carga $q$ del condensador, dando lugar a una corriente de descarga $i(t)$ que será la responsable del campo magnético alrededor del cableado:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

Sin embargo, como queremos determinar el campo magnético $\vec{B}$ entre las placas del condensador debemos tener en cuenta que entre las placas no hay corriente de transporte de cargas, sino que sólo hay corriente de desplazamiento.

De la cuarta ecuación de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

como entre las láminas del condensador hay aire:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} \end{array}\right\} \vec{\nabla} \times \vec{B} + \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Entre las láminas del condensador $\vec{J} = \vec{0}$ y la ley de Ampère-Maxwell queda:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En esta ecuación $\partial \vec{E} / \partial t$ está relacionada con la disminución de la carga $q$ del condensador y en última instancia con el aumento de la distancia entre sus placas.

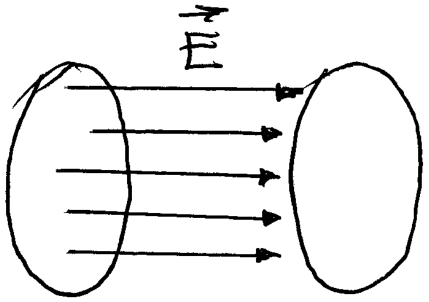
Integrando en un lazo L de radio r, situado en el interior del condensador, paralelo a sus placas centrado en el eje de simetría

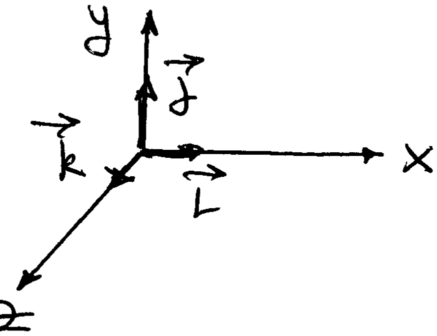
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \rightarrow \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0\int_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{B})d\vec{S} = \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

Tma Stokes

Como el movimiento se realiza lentamente y con velocidad constante supondremos que el campo eléctrico $\vec{E}$ es uniforme (aunque depende de t):




entonces

$$E(t) = \frac{V}{x(t)} \qquad \vec{E} = E(t)\,\vec{i}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0\int_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}d\vec{S} \rightarrow B2\pi r = \mu_0\varepsilon_0\frac{dE}{dt}\pi r^2$$

es decir:

$$B2\pi r = \mu_0\varepsilon_0\pi r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{V}{x_0+vt}\right)$$

$$2B = \mu_0 \varepsilon_0 r V \frac{-v}{(x_0+vt)^2}$$

despejando $B$:

$$B = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0 r V}{2(x_0+vt)^2} v$$

y en forma vectorial:

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0 r V}{2(x_0+vt)^2} v \, \hat{u}_\varphi}$$

Es importante que la distancia entre las placas varíe lentamente, es decir, que la velocidad $v$ es muy pequeña. De este modo:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r V v^2}{(x_0+vt)^3} = \frac{r V v^2}{c^2 (x_0+vt)^3} \approx 0 \rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx 0}}$$

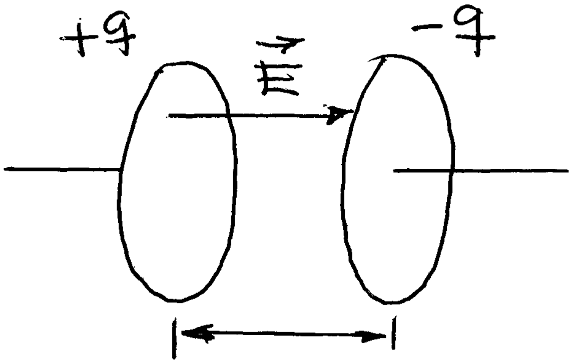
además

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{V}{x_0+vt} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V}{x_0+vt}\right)\vec{j} +$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{x_0+vt}\right) = 0 \rightarrow \underline{\underline{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}}$$

de este modo se cumple la <u>tercera ecuación de Maxwell</u>: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(b) Si el condensador está aislado de la batería (condensador aislado), la carga en sus placas no cambiará ($q = cte$), tendremos:




$$V(t) = E \cdot x$$

$$x = x_0 + vt$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q/S}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\pi \varepsilon_0 a^2}$$

(campo eléctrico independiente del tiempo $t$).

Entonces V vale:

$$V = \frac{q x}{\pi \varepsilon_0 a^2}$$

La capacidad será:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q x}{\pi \varepsilon_0 a^2}} = \frac{\pi \varepsilon_0 a^2}{x} = \frac{\pi \varepsilon_0 a^2}{x_0 + vt}$$

Como $\vec{E}$ no depende del tiempo, la corriente de desplazamiento es nula:

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

y consecuentemente el campo magnético $\vec{B}$ también es nulo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \rightarrow \underline{\underline{\vec{B} = 0}}$$