Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tema III: Electrostática en conductores y dieléctricos

Electromagnetismo I

2º Curso Grado Física

Curso 2022-2023 (2º semestre)

Universidad de Alicante – Departamento de Física Aplicada

Índice

1. Conductores en condiciones estática.
2. Sistemas de conductores.
3. Capacidad de un conductor.
4. Polarización en medios dieléctricos.
5. Teorema de Gauss en medios dieléctricos.
6. Relaciones constitutivas y condiciones de contorno.

1. Conductores en condiciones estáticas.

Conductor: Región en la que las cargas son libres de moverse bajo la influencia de un campo eléctrico.

Ejemplo: Metales (las cargas móviles son los electrones libres

Condiciones estáticas = No hay movimiento de cargas

DENTRO DEL CONDUCTOR:

1) El campo debe ser nulo, $\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0}$
2) El potencial $\Phi(\mathbf{r})$ cumple ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$), luego $\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \text{cte}}$
3) No puede haber densidad de carga (div $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \boxed{\rho_v / \varepsilon_0 = 0}$)

4) Si aplicamos el T. de Gauss en una superficie gaussiana en el interior del conductor, muy cercana a la superficie: la carga dentro es cero; la carga debe estar distribuida en la superficie.

EN LA SUPERFICIE DEL CONDUCTOR:

1) La componente tangencial del campo debe ser nula (si no, habría movimiento de cargas, $\boxed{\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = 0}$

2) El potencial debe ser constante, $\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \text{cte.}}$

3) El campo (en el caso de ser no nulo) debe ser normal a la superficie

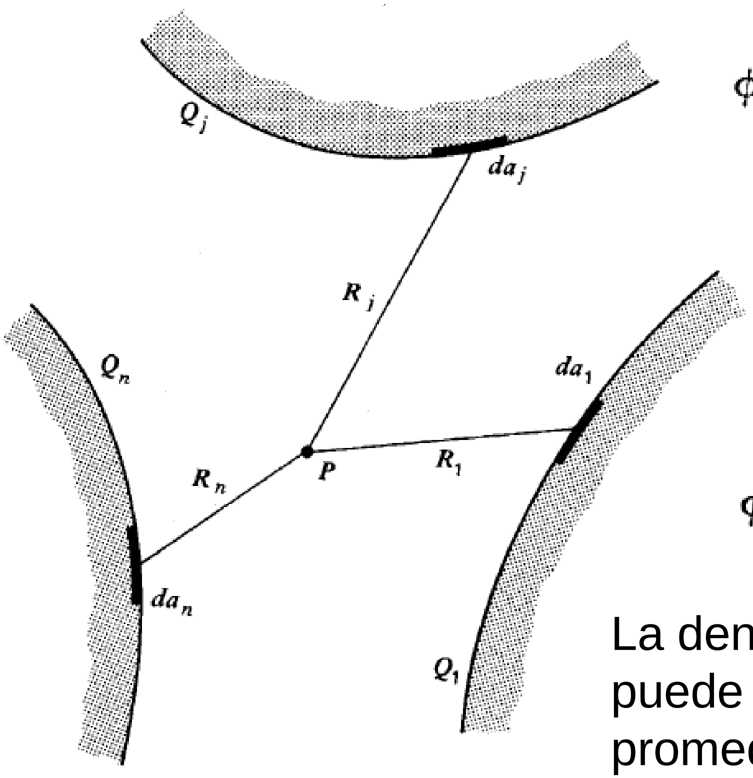
$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_n(\mathbf{r})}$$

4) Cálculo de la relación entre la densidad de carga superficial (σ) y el campo eléctrico: Usando el teorema de Gauss (se hizo en el Tema 2)

$$\boxed{E = \sigma / \varepsilon_0}$$

2. Sistemas de conductores.

Sea un sistema de n conductores (1,2,….j…n) cargados con cargas Q1, Q2,… Qj…..Qn). El potencial en un punto del espacio debido a todos ellos será



$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\mathbf{r}')da'}{R} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_j}\frac{\sigma_j(\mathbf{r}_j)da_j}{R_j}$$

En la superficie de un conductor dado:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_j}\frac{\sigma_j\, da_j}{R_{ji}} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

La densidad superficial en cada conductor se puede expresar en función de la densidad promedio (f es un factor que depende de la posición en el conductor):

$$\sigma_j = \langle\sigma_j\rangle f_j = \frac{Q_j}{S_j} f_j$$

El potencial se puede expresar entonces del siguiente modo:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 S_j} \int_{S_j} \frac{f_j \, da_j}{R_{ji}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

O mejor, en función de los coeficiente p_{ij} (solo dependen de factores geométricos)

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} Q_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 S_j} \int_{S_j} \frac{f_j \, da_j}{R_{ji}}$$

Coeficientes de potencial: hay un total de n^2

$$\boxed{\begin{array}{l} \phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + \ldots + p_{1n}Q_n \\ \phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + \ldots + p_{2n}Q_n \\ \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad\quad \ldots \\ \phi_n = p_{n1}Q_1 + p_{n2}Q_2 + \ldots + p_{nn}Q_n \end{array}}$$

El potencial de cada conductor depende linealmente de las cargas de todos los conductores

Estos coeficientes sólo dependen de factores geométricos y en general son siempre medibles.

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial Q_j} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial Q_j} \right)_{Q_1, \ldots Q_{j-1}, Q_{j+1}, \ldots Q_n} = p_{ij}$$

Se puede demostrar fácilmente que la matriz de estos coeficientes es **SIMÉTRICA**

$$p_{ji} = p_{ij}$$

EJEMPLO: Esfera conductora aislada de radio a $\phi = Q/4\pi\epsilon_0 a$

$$\phi = p_{11} Q \qquad p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}$$

3. Capacidad (o capacitancia) de un conductor

Capacidad de acumular carga = cantidad de carga que puede acumular (almacenar) un conductor; Depende de la geometría y del material.

CONDUCTOR AISLADO

$$\phi = p_{11} Q$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{\phi} = \frac{1}{p_{11}}}$$

Caso particular de esfera conductora: $C_{\text{esfera}} = 4\pi\epsilon_0 a$

SISTEMA DE DOS CONDUCTORES

$$\phi_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2$$

$$\phi_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$$

$$p_{12} = p_{21}$$

Cuando dos conductores se usan como capacitor, sus cargas son Iguales y de signo contrario

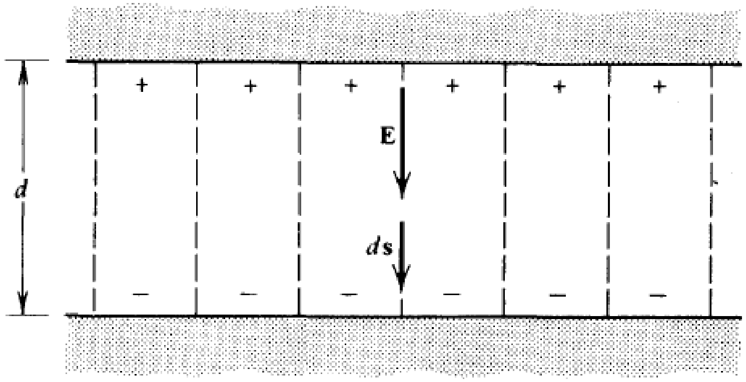
$$Q_1 = Q \text{ y } Q_2 = -Q$$

La diferencia de potencial entre ambos conductores será:

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = (p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21})Q$$

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} \qquad\qquad C = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$$

EJEMPLO: **Capacitor (o condensador) de placas (infinitas) plano-paralelas;** A = area de una placa; d = espaciado entre las placas



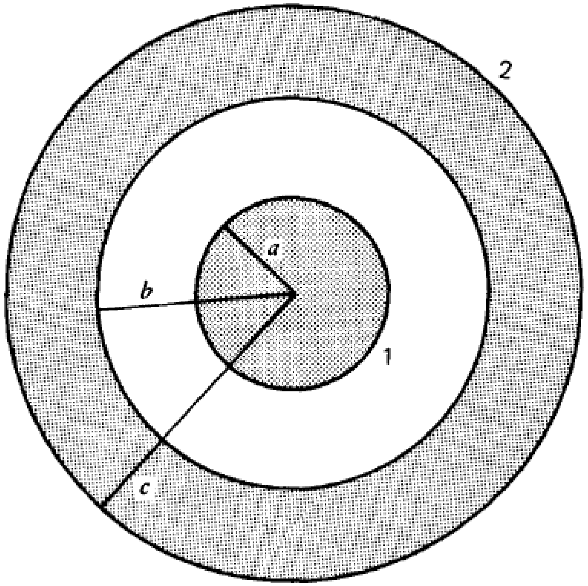
$$\Delta\phi = \int_+^- \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\int_+^- ds = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \left(\frac{d}{\epsilon_0 A}\right)Q = \frac{Q}{C}$$

$$\sigma = Q/A$$

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

EJEMPLO: **Capacitor esférico**

Dos conductores (zona sombreada en figura) limitados por esferas concéntricas de radios a, b y c. Carga de la esfera interior +Q y de la exterior -Q

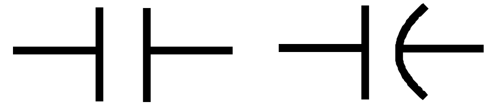


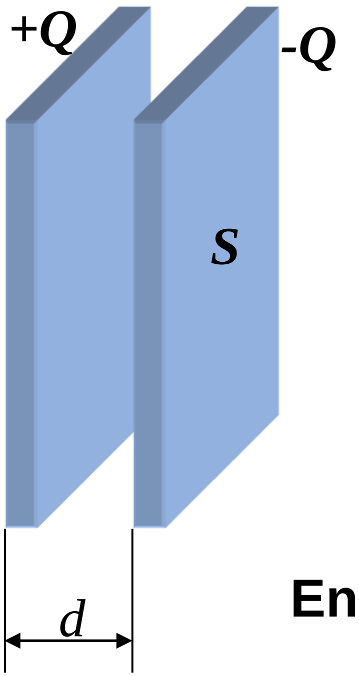
$$\Delta\phi = \int_{+}^{-} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{Q\,dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{1}{p_{11} - p_{22}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

Condensador de placas paralelas (aspectos prácticos)

Símbolo en circuitos:





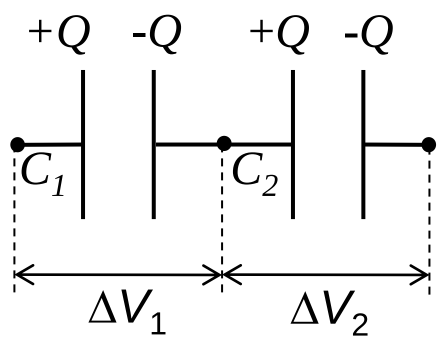
$$\left.\begin{array}{l} Q = CV \\[2ex] V = E\,d = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} d = \dfrac{Q\,S}{\varepsilon} d \end{array}\right\} \quad C = \frac{\varepsilon\, S}{d}$$

Energía potencial almacenada en un condensador cargado

$$E_p = \int_0^Q V\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C\,\Delta V^2$$

Asociación de condensadores

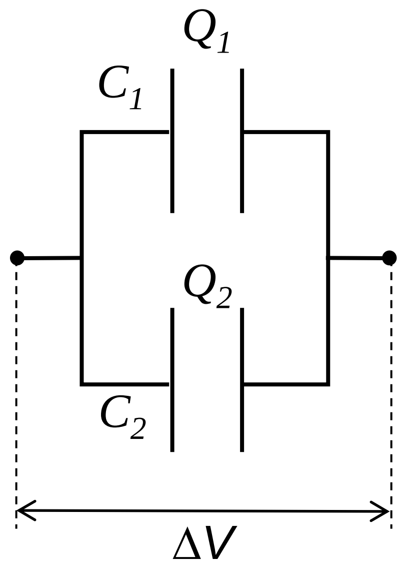
Serie



La carga es igual a la de su condensador equivalente

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Paralelo

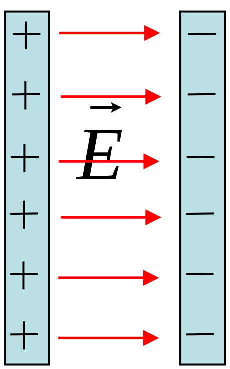


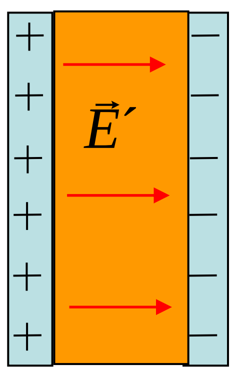
La diferencia de potencial es igual a la de su condensador equivalente

$$C_{eq} = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

Introducción de un dieléctrico (aislante) entre los conductores de un condensador

1) Resuelve el problema mecánico de mantener dos grandes láminas metálicas a distancia muy pequeña sin contacto alguno.
2) Consigue aumentar la diferencia de potencial máxima que el condensador es capaz de resistir sin que salte una chispa entre las placas (**ruptura dieléctrica**).
3) **La capacidad del condensador aumenta.**





$$\textit{Vacío} \quad E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Medio aislante} \quad E_m = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon´}$$

$$E_m = \frac{E_0}{\varepsilon´} \quad \text{como } \varepsilon´ > 1 \Rightarrow E_m < E_0$$

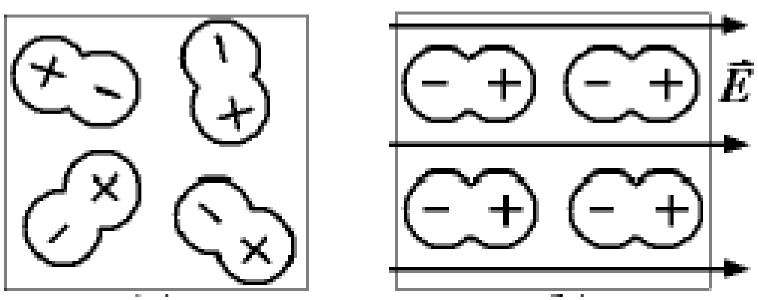
La capacidad C es directamente proporcional a la cte dieléctrica

4. Polarización en medios dieléctricos.

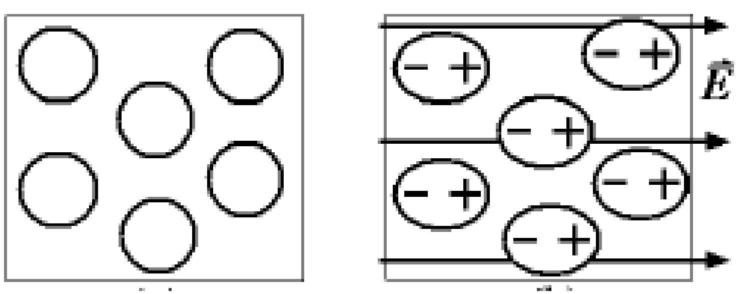
Dieléctrico: Material caracterizado porque no posee cargas libres y los electrones están fuertemente ligados.
Es aislantes de la electricidad (no conduce).

<u>¿ Qué le ocurre al material al aplicar un campo eléctrico?</u>:

Las cargas eléctricas se mueven levemente, formándose dipolos y orientándolos (sustancias no polares), y orientando los dipolos si ya existían antes de aplicar el campo, aunque orientados al azar (sustancias polares)



Material dieléctrico con
sustancias polares
N_2O, H_2O



Material dieléctrico con
sustancias no polares
O_2, N_2, H_2

ELECTRETOS:

Sustancias en las que las moléculas poseen momentos dipolares permanentes que tienen un cierto grado de orientación aún en ausencia de campo aplicado. Ejemplos: Cuarzo, algunos polímeros.

Estos no se van a considerar de aquí en adelante.

Aunque en general puede haber momentos multipolares de orden superior al dipolar, no los consideramos.

HIPÓTESIS (PARA PROCEDER AL OBJETIVO DE DAR UNA DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA DE LA MATERIA EN FUNCIÓN DEL COMPORTAMIENTO MICROSCÓPICO PROMEDIO DE SUS CONSTITUYENTES):

En promedio, las características dominantes de la materia para este objetivo son las relacionadas con los momentos dipolares eléctricos

En relación a sus propiedades eléctricas la materia neutra es equivalente a una configuración de dipolos eléctricos

VECTOR POLARIZACIÓN P: Momento dipolar por unidad de volumen.

Consideramos el dieléctrico como un conjunto de dipolos puntuales.

El momento monopolar es nulo, luego el momento dipolar es independiente del sistema de referencia elegido (se pueden sumar todos).

Dentro de un elemento diferencial de volumen dentro del dieléctrico $\Delta\tau$, el momento dipolar será:

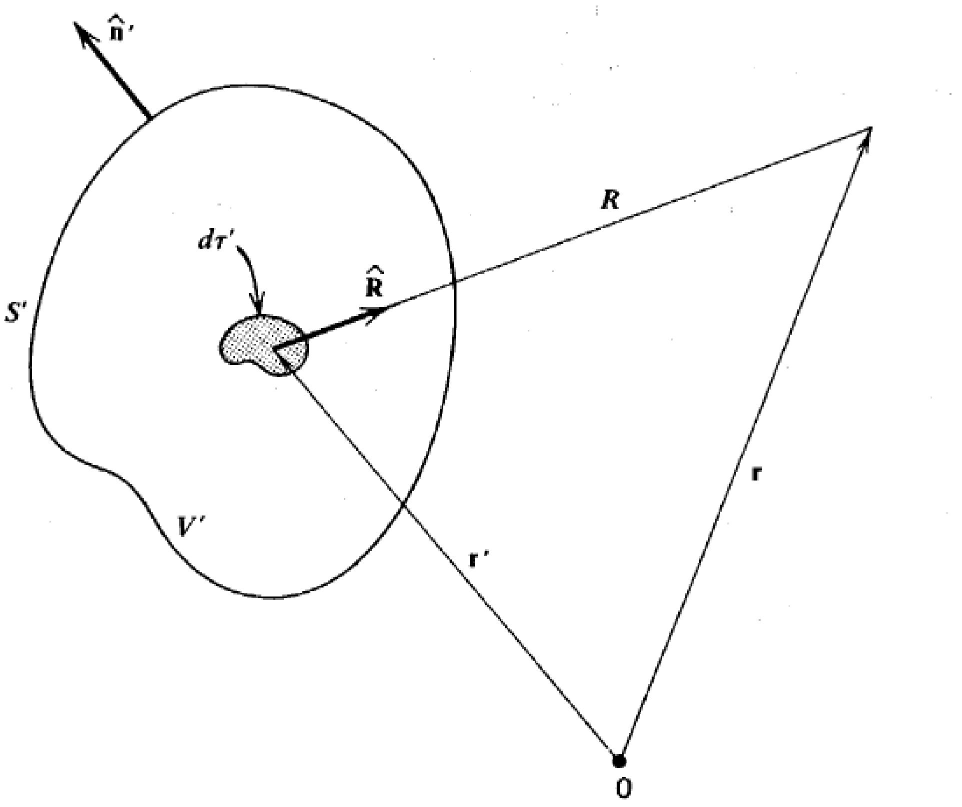
$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r})\, d\tau$$

En un volumen V dado de material el momento dipolar será:

$$\mathbf{p}_{\text{total}} = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r})\, d\tau$$

Unidades de **P**: Coulomb/m^2

Potencial producido por un material dieléctrico polarizado: concepto de densidad de carga ligada



Calculamos el potencial en puntos del espacio exteriores al material dieléctrico. Para ello consideramos el término dipolar del potencial

(desarrollo en pizarra)

$$\underbrace{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{(-\nabla'\cdot\mathbf{P})\,d\tau'}{R}}_{} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S'}\frac{\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}'\,da'}{R}}_{}$$

Potencial creado por una densidad de carga volumétrica ρ_b distribuida en el volumen V´

$$\boxed{\rho_b = -\nabla'\cdot\mathbf{P}}$$

Potencial creado por una densidad de carga superficial σ_b sobre la superficie S´ que envuelve al volumen V´

$$\boxed{\sigma_b = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}' = P_n}$$

Para efectos en el exterior, el dieléctrico puede ser reemplazado por **densidades de carga volumétrica y superficial LIGADAS (el subíndice b del inglés "bound")**, que están relacionadas con la polarización, mediante las ecuaciones recuadradas.

Así, el potencial se puede expresar:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_b\,d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S'}\frac{\sigma_b\,da'}{R}$$

La carga total ligada es cero

$$Q_b = \int_{V'} \rho_b \, d\tau' + \oint_{S'} \sigma_b \, da' = -\int_{V'} \nabla' \cdot \mathbf{P} \, d\tau' + \oint_{S'} \sigma_b \, da'$$

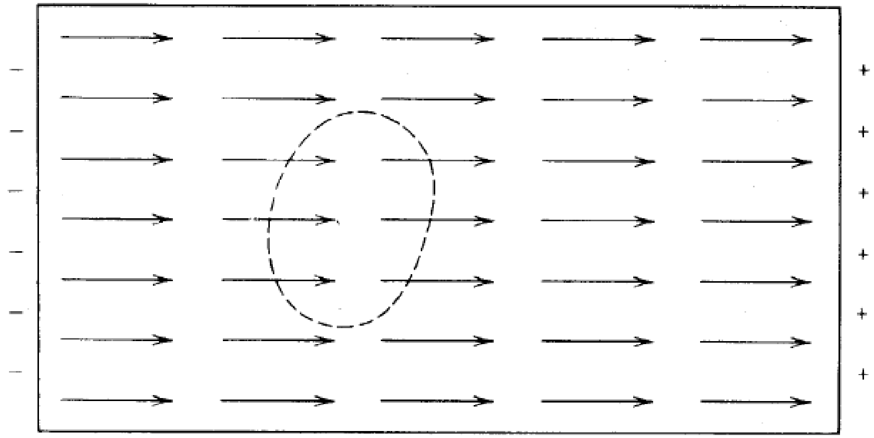
$$= -\oint_{S'} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, da' + \oint_{S'} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, da' = 0$$

CASO PARTICULAR: DIELÉCTRICO UNIFORMEMENTE POLARIZADO

P = cte. $\Rightarrow$ $\rho_b = -\nabla' \cdot \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $\rho_b = 0$

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = P_n$$

$\sigma_b = P_n < 0$



$\sigma_b = P_n > 0$

5. Teorema de Gauss en medios dieléctricos: el vector desplazamiento eléctrico D o campo D

En la definición del campo eléctrico **E**, las cargas son todas las presente (sean del tipo que sean, sin importar su origen o tipo)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\, d\tau'}{R^2}$$

DOS TIPOS PRINCIPALES DE CARGAS:

LIBRES (f, "free") Y **LIGADAS ("b", bound)**

- Resto de cargas no debidas a constituyentes de la materia.
- En general, se puede controlar su distribución.
- Incluye las cargas móviles de los conductores

- Origen en los elementos que constituyen la materia.
- En general, no se tiene control sobre su distribución.

$$\rho_{\text{total}} = \rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

Sustituyendo esta expresión para la densidad de carga total en la forma diferencial de la ley de Coulomb : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f$$

Solo aparece la densidad de carga libre!!

Resulta útil definir un nuevo campo vectorial $\mathbf{D}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

VECTOR DESPLAZAMIENTO o VECTOR **D**

En función de **D**, la forma diferencial de la ley de Coulomb queda:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f}$$

La divergencia de D sólo depende de la densidad de carga libre

La ley de Gauss para **D** queda:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho_f \, d\tau = Q_{f,\,\mathrm{en}}$$

$Q_{f,en}$ Es la carga libre neta contenida dentro del volumen V encerrado dentro de la superficie S.

Esta expresión permite calcular **D** de forma sencilla, en el caso de alta simetría.

6. Relaciones constitutivas y condiciones de contorno

RELACIONES CONSTITUTIVAS
Relaciones funcionales entre el vector polarización **P** y el vector campo (**E** y **D**)

La forma de estas funciones no puede ser predicha por la teoría electromagnética macroscópica

¿Cómo determinamos las funciones P(E), P(D) y D(E)?

Experimentalmente

Calculadas teóricamente a partir de propiedades microscópicas de la materia usando otras ramas de la Física (Mec. Estadística o Mec. Estado Sólido)

La combinación de teoría y experimentos muestras que la mayoría de los materiales pertenece a alguna de las clases de materiales siguientes. Las relaciones constitutivas para cada clase son diferentes.

Clasificación de dieléctricos

1. **ELECTRETOS:** Con polarización permanente. $\mathbf{P}(0) \neq 0$.

2. **DIELÉCTRICOS NO LINEALES.**

Asumiendo que no hay polarización permanente: $\mathbf{P}(0) = 0$.

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j + \sum_j \sum_k \beta_{ijk} E_j E_k + \cdots \qquad i,j,k = x,\ y,\ z$$

El dieléctrico es <u>no lineal</u> si son necesarios términos de orden 2 con **E** o superiores para describir el material.

3. **DIELÉCTRICOS LINEALES**

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0(\chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z) \\ P_y &= \epsilon_0(\chi_{yx} E_x + \chi_{yy} E_y + \chi_{yz} E_z) \\ P_z &= \epsilon_0(\chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + \chi_{zz} E_z) \end{aligned}}$$

χ_{ij}: componentes del tensor **SUSCEPTIBILIDAD ELÉCTRICA**

En general, los vectores **P** y **E** no son paralelos. Y por tanto tampoco **D** y **E**

3a. CASO PARTICULAR: DIELÉCTRICOS ISOTRÓPICOS LINEALES

ISOTROPÍA: en un punto dado, las propiedades eléctricas son independientes de la dirección de **E**

P y **E** paralelos; $\chi_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $y\ \chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$

$$\mathbf{D} = (1+\chi_e)\epsilon_0 \mathbf{E} = \kappa_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \qquad \boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}}$$ **ECUACIÓN CONSTITUTIVA**

χ_e: Susceptibilidad eléctrica

$\kappa_e = 1 + \chi_e$ = constante dieléctrica = capacidad inductiva específica relativa

$\epsilon = \kappa_e \epsilon_0$ = capacidad inductiva específica (absoluta) o permitividad dieléctrica del medio

ε_0 = capacidad inductiva específica (o permitividad dieléctrica) del espacio libre

$$K = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}$$ *K*: Constante eléctrica

Para todas las sustancias conocidas $\chi_e > 0$, luego $\kappa_e > 1$

Ecuación diferencial para el potencial escalar

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \epsilon \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \epsilon = -\rho_f$$

$\boxed{\varepsilon \text{ puede aún ser función de la posición } \varepsilon(\mathbf{r})}$

3b. CASO PARTICULAR: DIELÉCTRICOS ISOTRÓPICOS LINEALES HOMOGÉNEOS

HOMOGENEO: las propiedades eléctricas son independientes de la posición ε = cte.

Se siguen cumpliendo las expresiones siguientes del apartado 3a

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \qquad \mathbf{D} = (1 + \chi_e)\epsilon_0 \mathbf{E} = \kappa_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \qquad \kappa_e = 1 + \chi_e \qquad \epsilon = \kappa_e \epsilon_0$$

La Ecuación diferencial para el potencial escalar se simplifica

$$\boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}}$$

Como la Ecuación de Poisson, pero con ε en lugar de ε_0 y con densidad de carga libre, ρ_f en lugar de la total ρ

Para todas las sustancias conocidas χ_e >0, luego κ_e > 1

Cuadro 2. Valores de ε y K para distintos medios a 20°C (unidades SI).

Medio	ε $(C^2N^{-1}m^{-2})$	$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ (Nm^2C^{-2})
Vacío	$8{,}854\cdot10^{-12}$	$9\cdot10^{9}$
Aire	$8{,}859\cdot10^{-12}$	$\approx9\cdot10^{9}$
Poliestireno	$2{,}267\cdot10^{-11}$	$3{,}5\cdot10^{9}$
Papel	$3{,}276\cdot10^{-11}$	$\approx2{,}4\cdot10^{9}$
Vidrio pirex	$4{,}958\cdot10^{-11}$	$1{,}6\cdot10^{9}$
Porcelana	$6{,}198\cdot10^{-11}$	$\approx1{,}3\cdot10^{9}$
Agua	$7{,}083\cdot10^{-10}$	$1{,}1\cdot10^{8}$

P y **E** son paralelos entre sí; **D** y **P** también

$$\mathbf{P} = \frac{\chi_e}{\kappa_e}\mathbf{D} = \frac{(\kappa_e - 1)}{\kappa_e}\mathbf{D}$$

La susceptibilidad eléctrica (χ_e) y la constante dieléctrica (κ_e) son constantes

$\chi_e > 0$, $\kappa_e > 1$ $\Longrightarrow$ $|\mathbf{P}| < |\mathbf{D}|$.

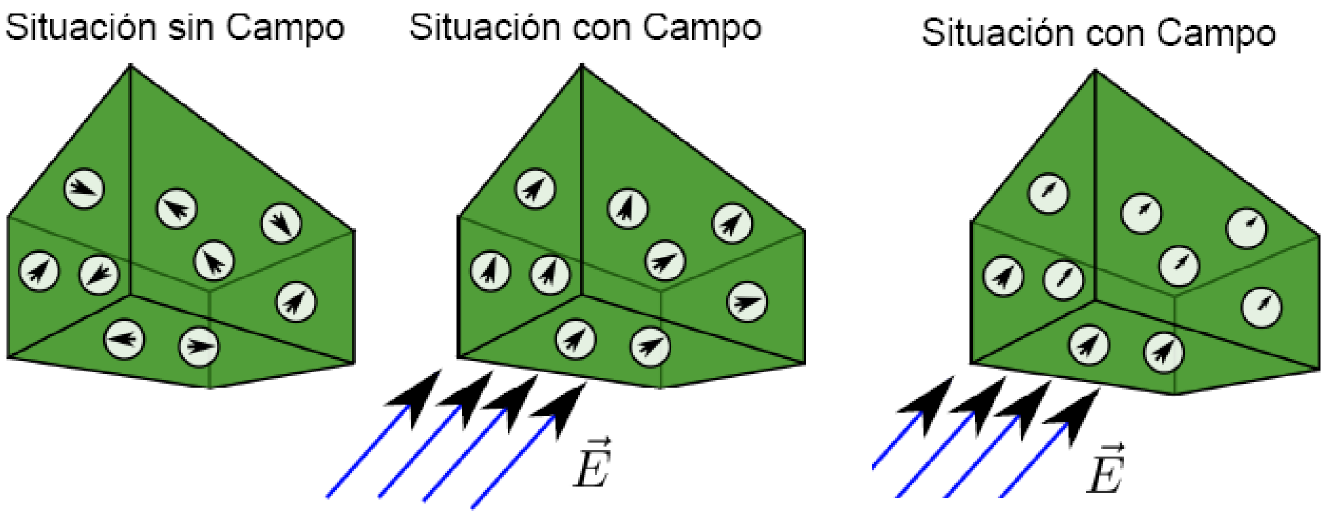
$$\rho_b = -\frac{(\kappa_e - 1)}{\kappa_e}\rho_f \quad \Longrightarrow \quad |\rho_b| < |\rho_f|$$

$$\rho = \frac{\rho_f}{\kappa_e} = -\frac{\rho_b}{\kappa_e - 1}$$

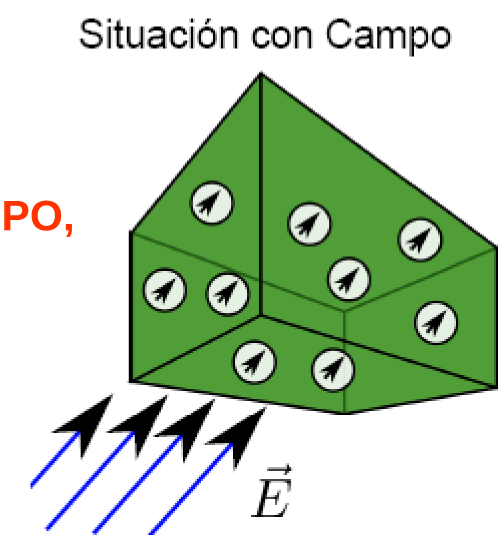
ILUSTRACIÓN DE LA RESPUESTA DE DISTINTOS TIPOS DE DIELÉCTRICOS A UN CAMPO ELÉCTRICO E

LINEAL, ANISÓTROPO, INHOMOGÉNEO

LINEAL, ISÓTROPO, INHOMOGÉNEO

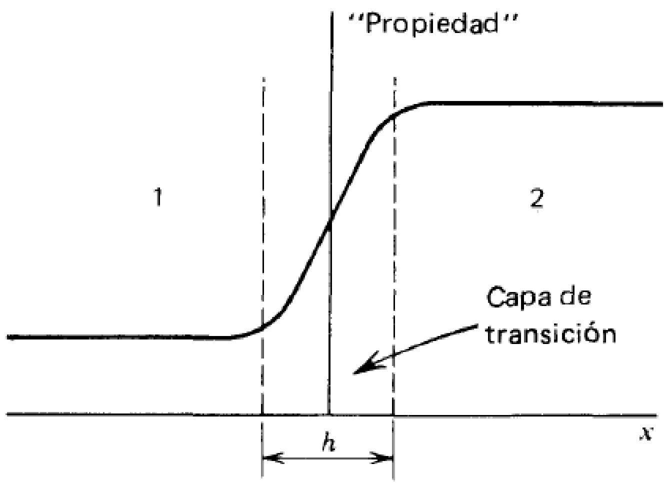


LINEAL, ISÓTROPO, HOMOGÉNEO

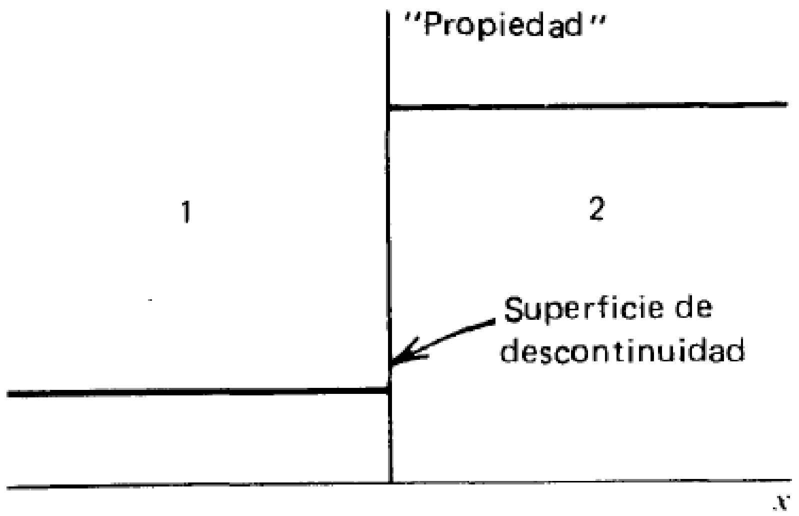


Condiciones de contorno (o frontera) en una superficie de discontinuidad (GENERAL)

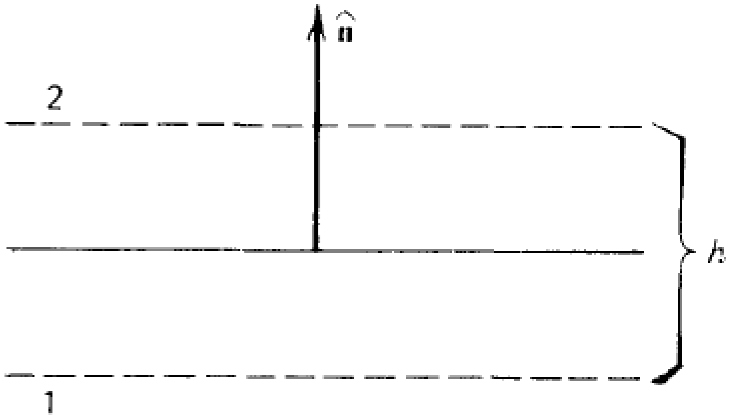
Los medios materiales de distinto tipo tienen en general propiedades distintas. En las situaciones en las que hay varios de estos materiales, es útil conocer cómo cambia una determinada propiedad (el campo, o el potencial) en la superficie de contacto entre ellos = **CONDICIONES DE FRONTERA O CONTORNO**



Situación real de como varía una propiedad en una superficie de discontinuidad entre dos medios



Situación idealizada considerada para establecer la condiciones de frontera



CONVENCIÓN DE SIGNOS
Definición de la normal a la superficie de discontinuidad

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_{\text{de 1 a 2}}$$

Condiciones de contorno para el campo eléctrico
La divergencia y las componentes normales

Combinamos: - la ley de Coulomb en forma diferencial $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

- Teorema de la Divergencia $\oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{a} = \int_V \nabla\ \mathbf{E}\, d\tau$

Calculamos el flujo a través de una superficie cerrada que encierra la superficie de discontinuidad entre dos medios (un cilindro con sus paralelas a la superficie de discontinuidad). **Desarrollo en pizarra (libro)**

$$\boxed{\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA PARA LAS COMPONENTES NORMALES DE **E**

Existe una discontinuidad en las componentes normales sólo si en la superficie de discontinuidad hay una densidad de carga.

VÁLIDO BAJO CUALQUIER CIRCUNSTANCIA

Condiciones de contorno para el campo eléctrico: el rotacional y las componentes tangenciales

Combinamos: - $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

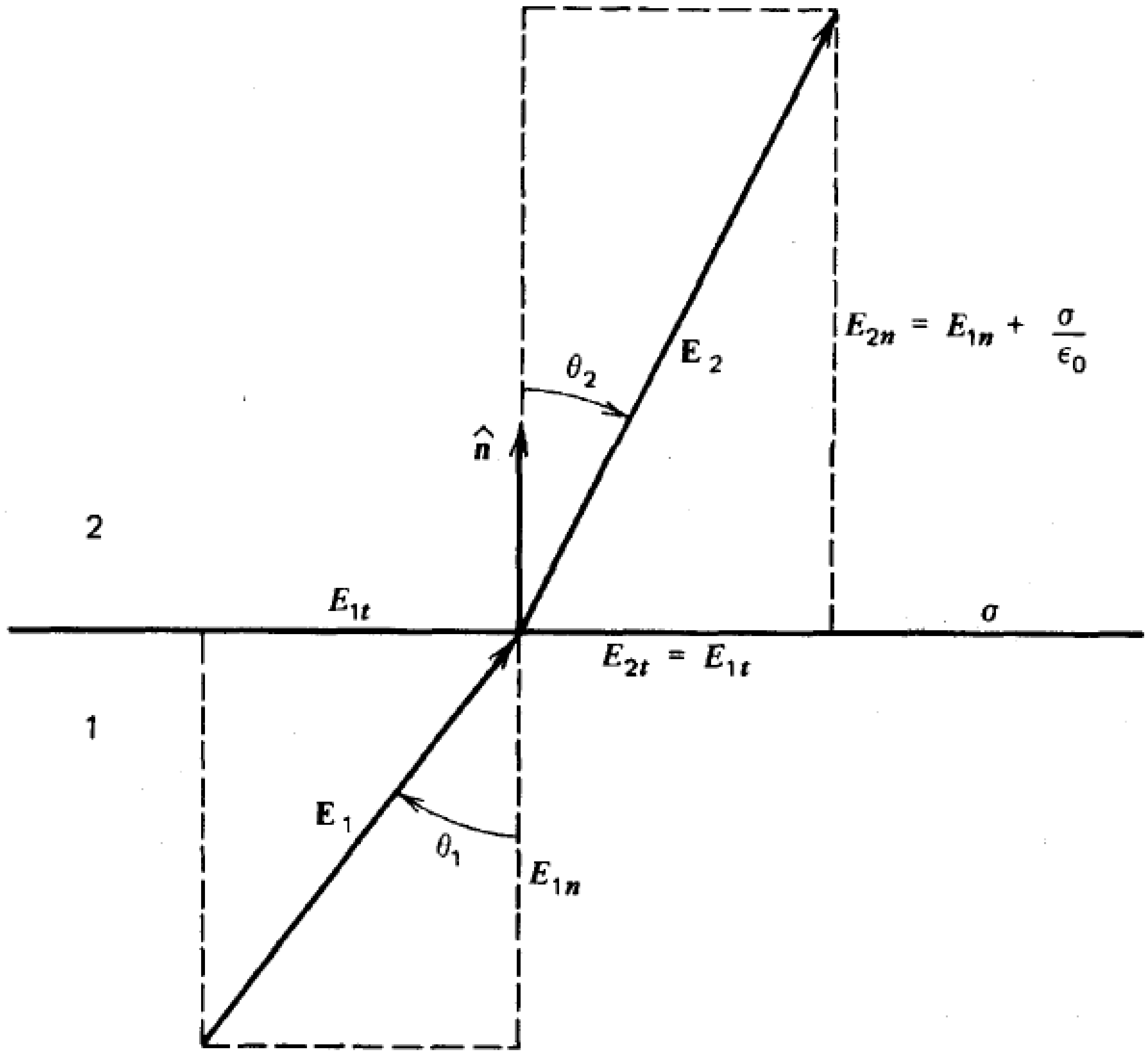
- Teorema de la Stokes $$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) d\vec{a}$$

Calculamos la circulación a través de una trayectoria cerrada C que encierra un trozo de la línea de unión entre dos medios (un rectángulo tal que el área que encierra es perpendicular a la superficie de discontinuidad). **Desarrollo en pizarra (libro)**

Las componentes tangenciales de **E** no cambian (son continuas) al pasar de un medio a otro. **VERDADERO BAJO CUALQUIER CIRCUNSTANCIA**

$$\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = 0 \qquad \boxed{E_{2t} = E_{1t}}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA PARA LAS COMPONENTES TANGENCIALES DE **E**


$E_{2n} = E_{1n} + \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
θ_2
$\mathbf{E}_2$
$\hat{n}$
2
E_{1t}
σ
$E_{2t} = E_{1t}$
1
$\mathbf{E}_1$
θ_1
E_{1n}

Condiciones de contorno para el potencial

Si ϕ_1 y ϕ_2 son los potenciales en cada lado de la superficie de discontinuidad

$$\phi_2 - \phi_1 = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

La integración es sobre una trayectoria conveniente que atraviese la superficie de discontinuidad. Si se elige una trayectoria normal a la superficie

$$\phi_2 - \phi_1 = -\int_1^2 E_n \, ds = -\langle E_n \rangle h$$

Promedio de la E_n en la capa de transición entre los dos medios (anchura h). Siempre finito

$$\lim_{h\to 0} < E_n > h = 0 \Rightarrow \boxed{\phi_2 = \phi_1}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA PARA EL POTENCIAL

El potencial es continuo a través de la discontinuidad, pero las derivadas del potencial normales a la superficie no necesariamente lo son!!

$$E_n = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi \qquad \boxed{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi)_2 - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi)_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA PARA LAS DERIVADAS DEL POTENCIAL

Condiciones de contorno para el campo D (generales, cualquier tipo material)

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\boxed{\mathbf{D}_{2t} - \mathbf{D}_{1t} = \mathbf{P}_{2t} - \mathbf{P}_{1t}}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA PARA LAS COMPONENTES TANGENCIALES DE **D**

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

Por similitud como campo **E**

CONDICIÓN DE FRONTERA PARA LAS COMPONENTES NORMALES DE **D**

$$\boxed{\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f}$$

Densidad de carga libre superficial

Condiciones de contorno: medios isotrópicos, homogéneos y lineales

$$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$$

En la condición de contorno de **D** general

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$

Introducimos que para medios ihl se cumple: **D** = ε **E**

$$\boxed{\hat{\mathbf{n}} \cdot (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) = \sigma_f}$$

En este caso se puede poner la condición de frontera con **E** (en lugar de con **D**)