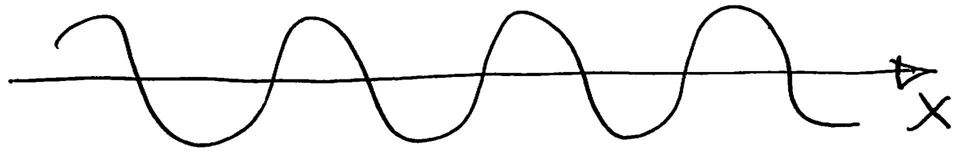
Onda plana

$t=0 \longrightarrow Ae^{ikx}$



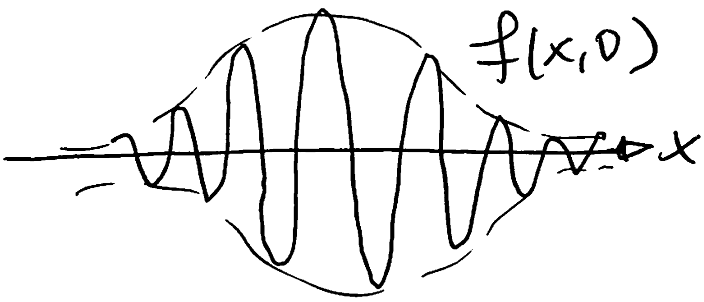
$t>0 \longrightarrow Ae^{i(kx-\omega t)}$

Sólo hay un valor de ω

Velocidad de fase

$$v=\frac{\omega}{k}$$

Paquete de ondas



Superposición de ondas planas de diferente k

$$f(x,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,e^{ikx}\,dx \quad (t=0)$$

$$f(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\,e^{i(kx-\omega(k)t)}\,dk \quad (t>0)$$

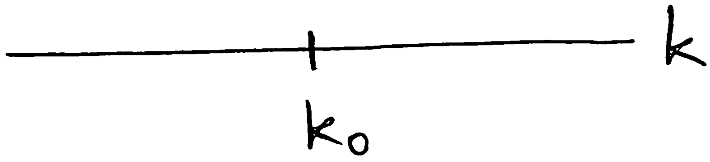
$\omega=\omega(k)$

Si sólo hubiera una frecuencia espacial k_0 (onda plana)

$$F(k)=A\,\delta(k-k_0) \rightarrow f(x,t)=A\,e^{i(k_0x-\omega_0)t}$$

$\equiv \omega(k_0)$

Supongamos que los valores de k están centrados en un valor k_0



desarrollamos $\omega(k)$ en torno a k_0 considerando que el paquete viaja en un medio no muy dispersivo:

$$\omega(k) \cong \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} + \underbrace{\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}}_{} (k-k_0)$$

Velocidad de grupo $\Big\}$ $$v_g \equiv \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}$$

$$\omega(k) \cong \overbrace{\omega(k_0)}^{\omega_0} + v_g (k-k_0)$$

Sustituyendo en $f(x,t)$:

$$f(x,t) \cong \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{i[kx-\omega_0 t - v_g (k-k_0)t]}\, dk =$$

$$= \underbrace{e^{i(v_g k_0 - \omega_0)t}}_{\text{Término de fase}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{ik(x-v_g t)}\, dk$$

La ecuación inicial $f(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)}\, dk$

en $t=0$ vale:

$$f(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{ikx}\, dx$$

luego comparando con

$$f(x,t) \cong e^{i(v_g k_o - \omega_o)t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{ik(x-v_g t)}\, dk}_{f(x-v_g t,\,0)}$$

es decir:

$$\underline{\underline{f(x,t) \cong e^{i(v_g k_o - \omega_o)t}\, f(x-v_g t,\,0)}}$$

y la función $f(x,t)$ se propaga como una onda sin distorsionar, excepto la fase $e^{i(v_g k_o - \omega_o)t}$, a una velocidad v_g (<u>velocidad de grupo</u>), cuyo valor es:

$$v_g \equiv \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_o}$$