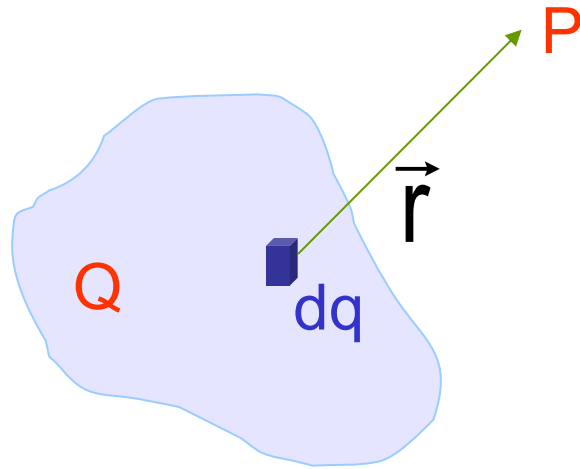


## CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA .



En este caso dividimos la distribución en pequeños elementos diferenciales de carga,  $dq$ , de forma que la diferencial de campo eléctrico que crea cada una de ellas es

$$d\vec{E} = K \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo eléctrico total para toda la distribución será

$$\vec{E} = \int K \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r$$

# DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

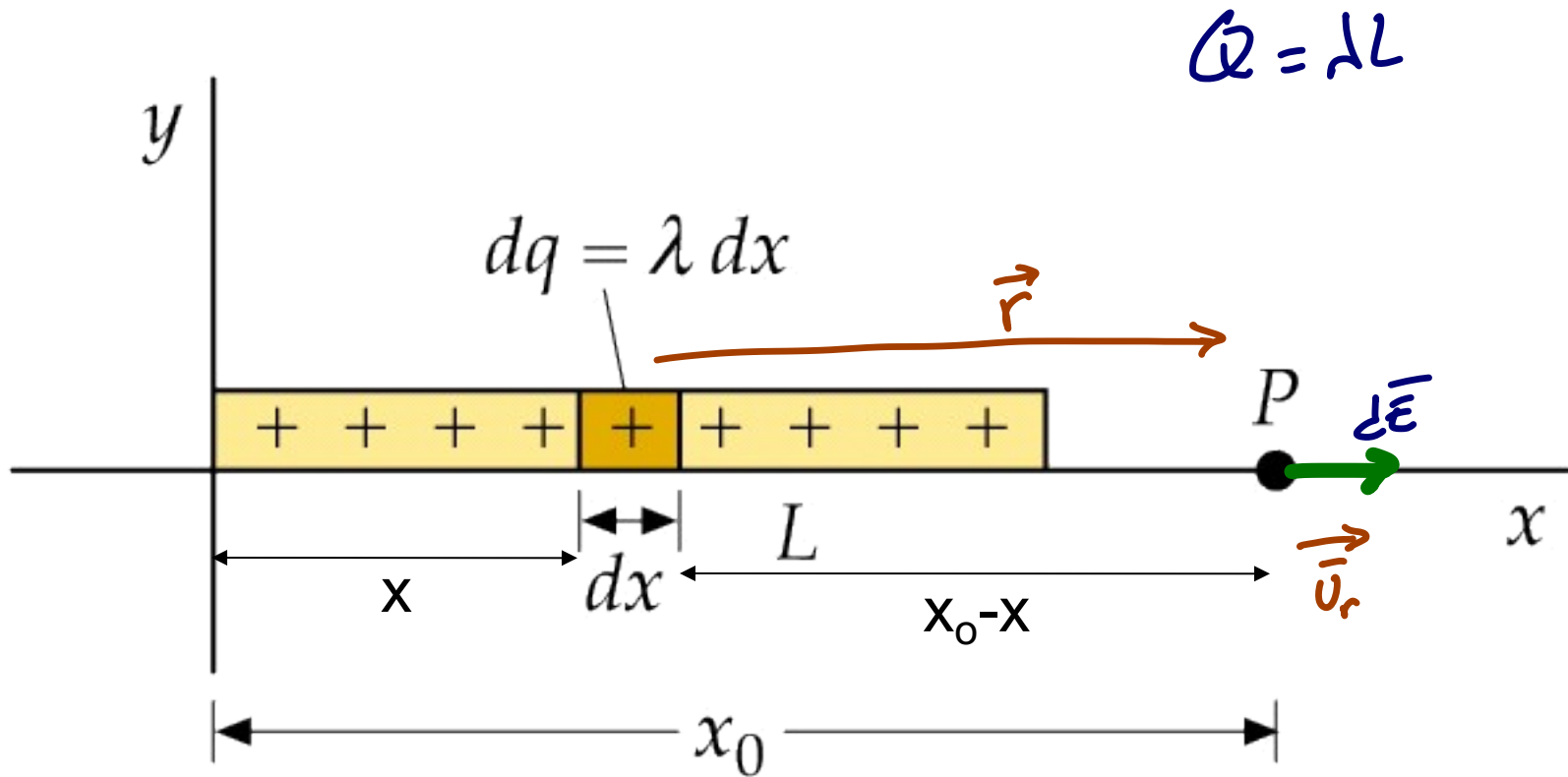
Consideremos primero distribuciones LINEALES de carga, con una densidad lineal de carga

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

Cálculo del campo eléctrico:

$$\vec{E} = \int_L K \lambda \frac{dl}{r^2} \vec{u}_r$$

**Ejemplo 1:** Campo eléctrico sobre el eje de una carga lineal finita.

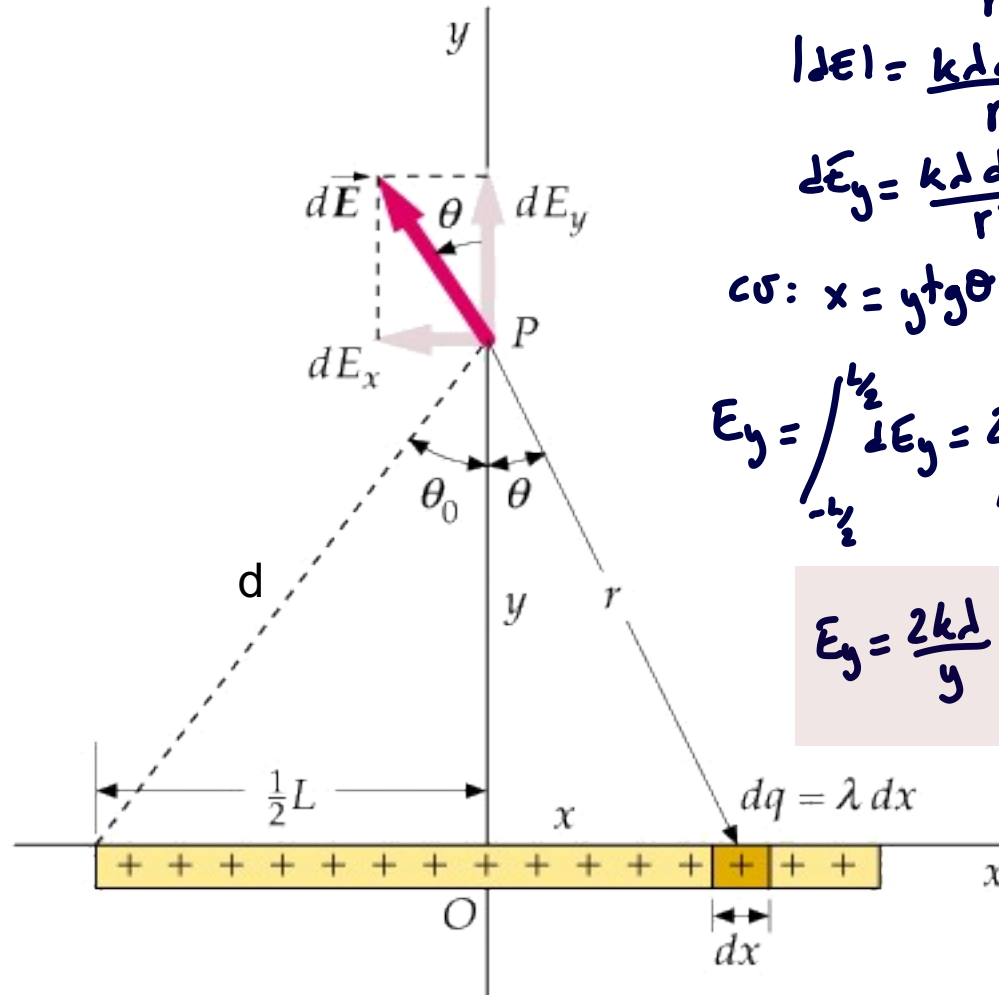


$$\vec{E} = \frac{k\lambda L}{(x_0 - L)x_0} \vec{u}_x = \frac{kQ}{(x_0 - L)x_0} \vec{u}_x$$

si  $x \gg L$

$$\vec{E} \sim \frac{kQ}{x_0^2} \vec{u}_x$$

**Ejemplo 2:** Campo eléctrico fuera del eje de una carga lineal finita. *sobre su bisectriz*



$$d\vec{E} = \frac{k\lambda dx}{r^2} \vec{u}_r$$

$$|dE| = \frac{k\lambda dx}{r^2}$$

$$dE_y = \frac{k\lambda dx}{r^2} \cos\theta = \frac{k\lambda}{y} \cos\theta d\theta$$

$$\text{con: } x = y \tan\theta \rightarrow dx = \frac{r^2}{y} d\theta$$

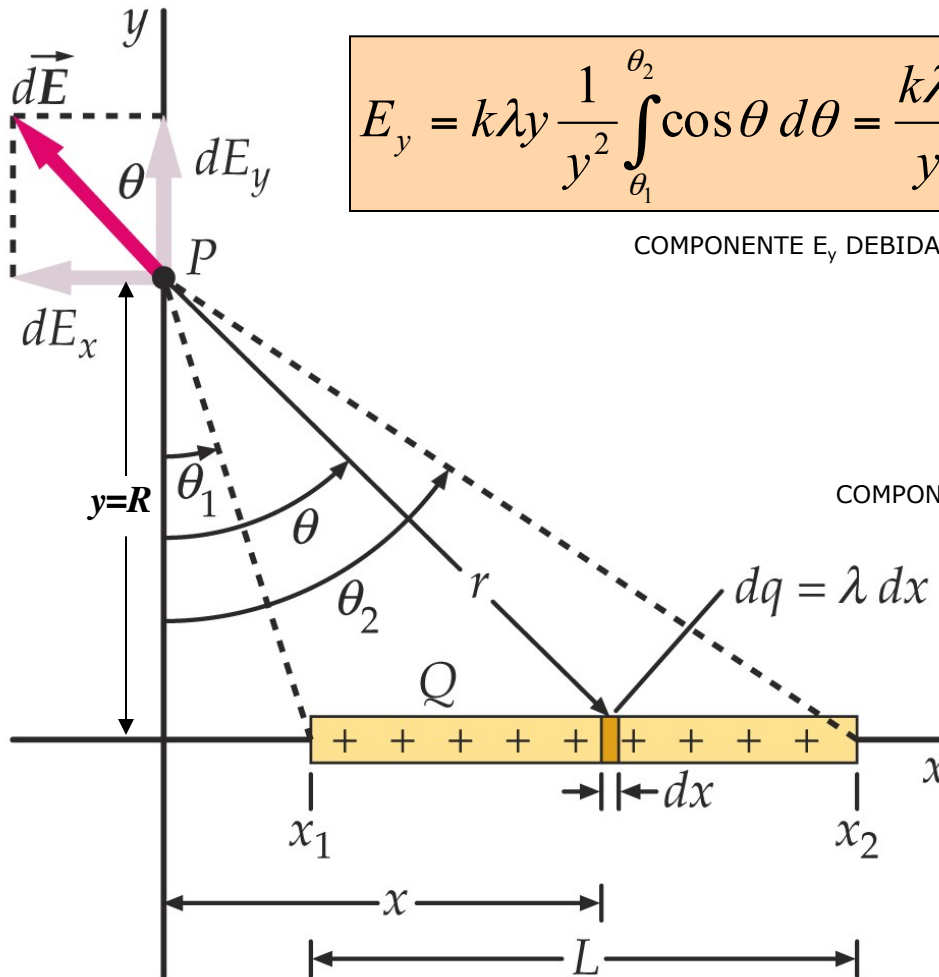
$$E_y = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dE_y = 2 \int_0^{\theta_0} dE_y = \frac{2k\lambda}{y} \int_0^{\theta_0} \cos\theta d\theta$$

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y} \sin\theta_0 = \frac{2k\lambda}{y} \frac{\frac{1}{2}L}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{si } L \rightarrow \infty : \theta_0 = 90^\circ$$

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y}$$

# Campo eléctrico fuera de una carga lineal finita



$$E_y = k\lambda y \frac{1}{y^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{k\lambda}{y} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = \frac{kQ}{Ly} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

COMPONENTE  $E_y$  DEBIDA A UN SEGMENTO CON DENSIDAD DE CARGA LINEAL UNIFORME

$$E_x = \frac{k\lambda}{y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

COMPONENTE  $E_x$  DEBIDA A UN SEGMENTO DE CARGA LINEAL UNIFORME

**Carga lineal infinita:**

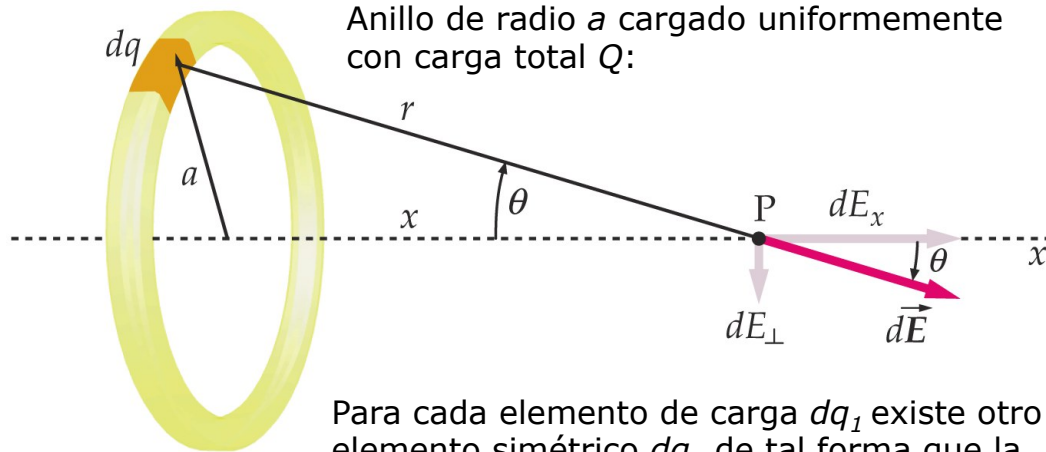
$\theta_1 \rightarrow -\pi/2$  ( $x_1 = -\infty$ );  $\theta_2 \rightarrow \pi/2$  ( $x_2 = \infty$ )

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y}$$

$$E_x = 0$$

CAMPO  $\mathbf{E}$  DEBIDO A UNA CARGA LINEAL INFINITA

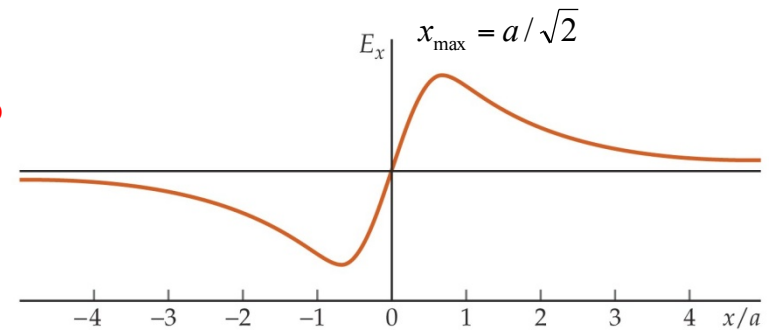
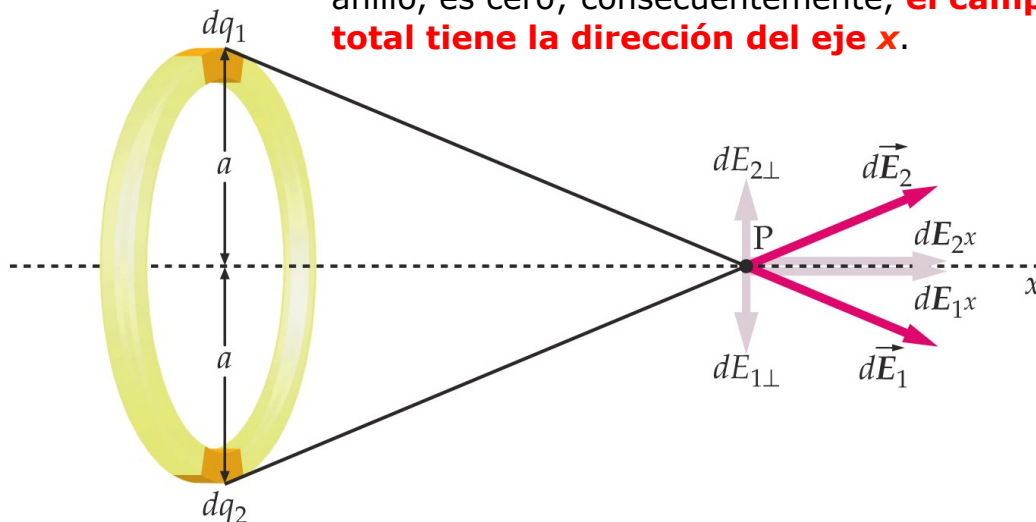
# Campo eléctrico sobre el eje de un anillo cargado



$$E_x = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

COMPO ELÉCTRICO SOBRE EL EJE DE UN ANILLO CARGADO

Para cada elemento de carga  $dq_1$  existe otro elemento simétrico  $dq_2$  de tal forma que la suma de las componentes perpendiculares al eje  $x$ , generadas por todos los elementos del anillo, es cero; consecuentemente, **el campo total tiene la dirección del eje  $x$ .**



Los elementos diferenciales de la componente perpendicular del campo se anulan por pares.

# DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

Dependiendo de la forma de la distribución, se definen las siguientes distribuciones de carga

**Lineal**

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

**Superficial**

$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$

**Volumétrica**

$$\rho = \frac{dq}{dv}$$

Cálculo del campo eléctrico en cada caso:

$$\vec{E} = \int_L K \lambda \frac{dl}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = \int_S K \sigma \frac{ds}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = \int_v K \rho \frac{dv}{r^2} \vec{u}_r$$

# Campo eléctrico en el eje de un disco uniformemente cargado

El disco se puede considerar como si estuviera formado por una serie de **cargas anulares concéntricas**.

$$E_x = 2\pi k\sigma \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right), \quad x > 0; \quad E_x = -2\pi k\sigma \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right), \quad x < 0$$

CAMPO ELÉCTRICO  $\mathbf{E}$  EN EL EJE DE UN DISCO UNIFORMEMENTE CARGADO

Para valores de **x grandes** ( $x \gg R$ ),  $E_x$  se aproxima al valor de una carga puntual  $Q$  colocada en el origen:

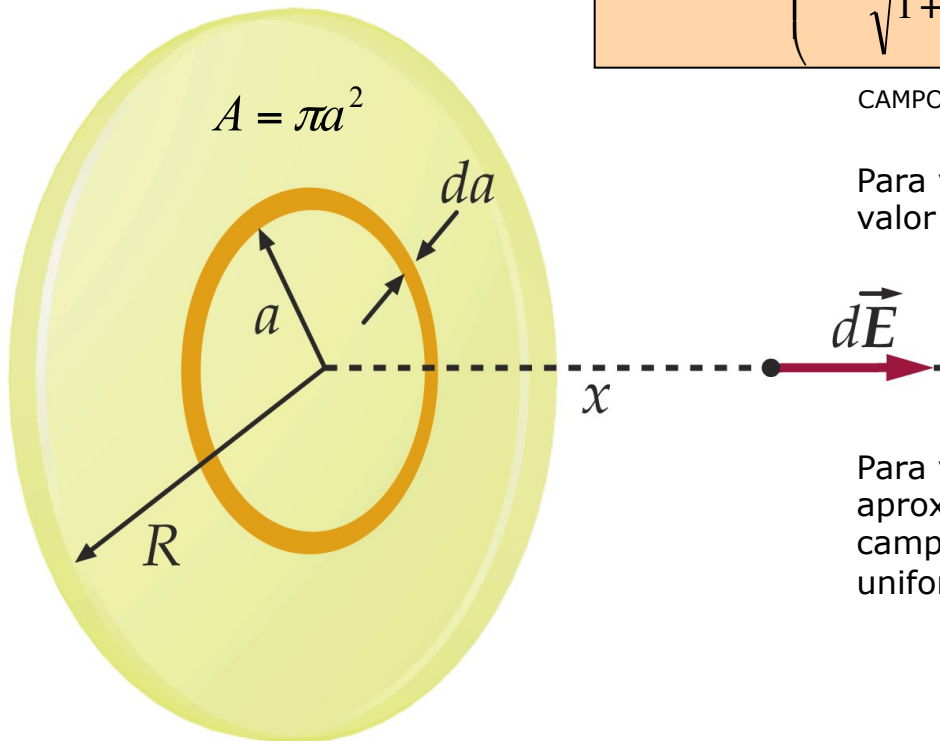
$$E_x = \frac{kQ}{x^2}, \quad x \gg R$$

Se utiliza el desarrollo en serie del binomio  $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$  para  $|\varepsilon| \ll 1$ :  
 $\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{R^2}{2x^2}$

Para valores de **x pequeños** ( $R/x \rightarrow \infty$ ,  $n/\infty = 0$ ),  $E_x$  se aproxima al valor de un plano infinito de carga. El campo no depende de  $x$  (es decir, el campo eléctrico es uniforme) y existe una discontinuidad en  $E_x$  de  $4\pi k\sigma$ :

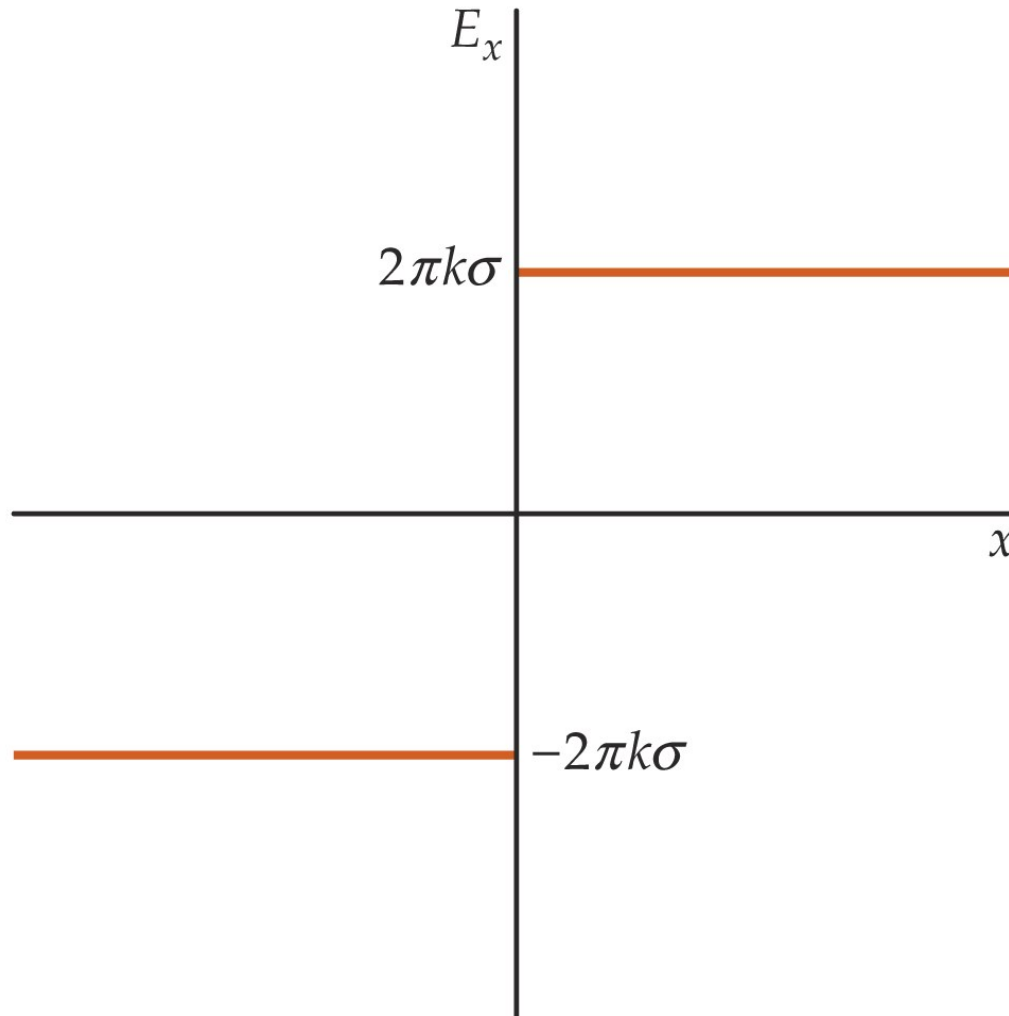
$$E_x = 2\pi k\sigma, \quad x > 0$$

$$E_x = -2\pi k\sigma, \quad x < 0$$



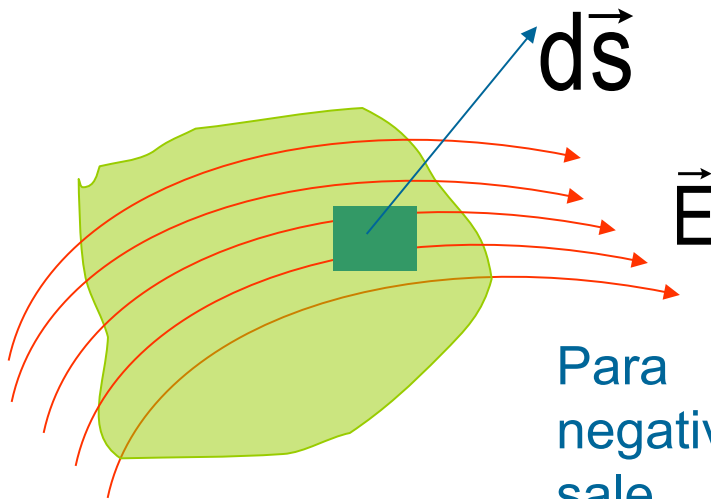


# Discontinuidad de $\mathbf{E}$ en un plano infinito de carga



# FLUJO ELÉCTRICO

El flujo eléctrico da idea del número de líneas de campo que atraviesa cierta superficie. Si la superficie considerada encierra una carga, el número de líneas que atraviesa dicha superficie será proporcional a la carga neta.

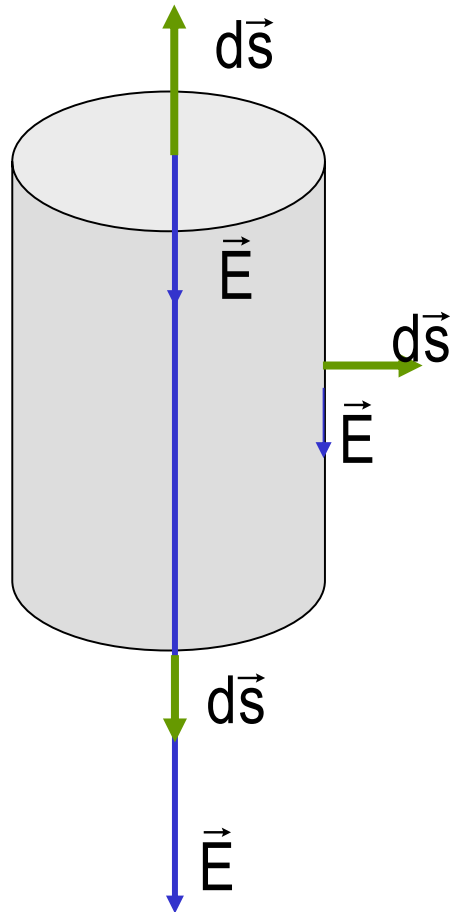


$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Para una superficie cerrada el flujo será negativo si la línea de campo entra y positivo si sale. En general, el flujo neto para una superficie cerrada será

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

**Ejemplo 2.-** Supongamos un cilindro de radio  $R$  colocado en el seno de un campo eléctrico uniforme con su eje paralelo al campo. Calcula el flujo de campo eléctrico a través de la superficie cerrada.



El flujo total es la suma de tres términos, dos que corresponden a las bases (b1 y b2) mas el que corresponde a la superficie cilíndrica. En ésta última el flujo es cero ya que los vectores superficie y campo son perpendiculares. Así

$$\Phi = \int_{b1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{b2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Phi = \int E ds \cos \pi + \int E ds \cos 0 = 0$$

El flujo sólo es proporcional a la carga que encierra una superficie, no a la forma de dicha superficie.

# TEOREMA DE GAUSS

---

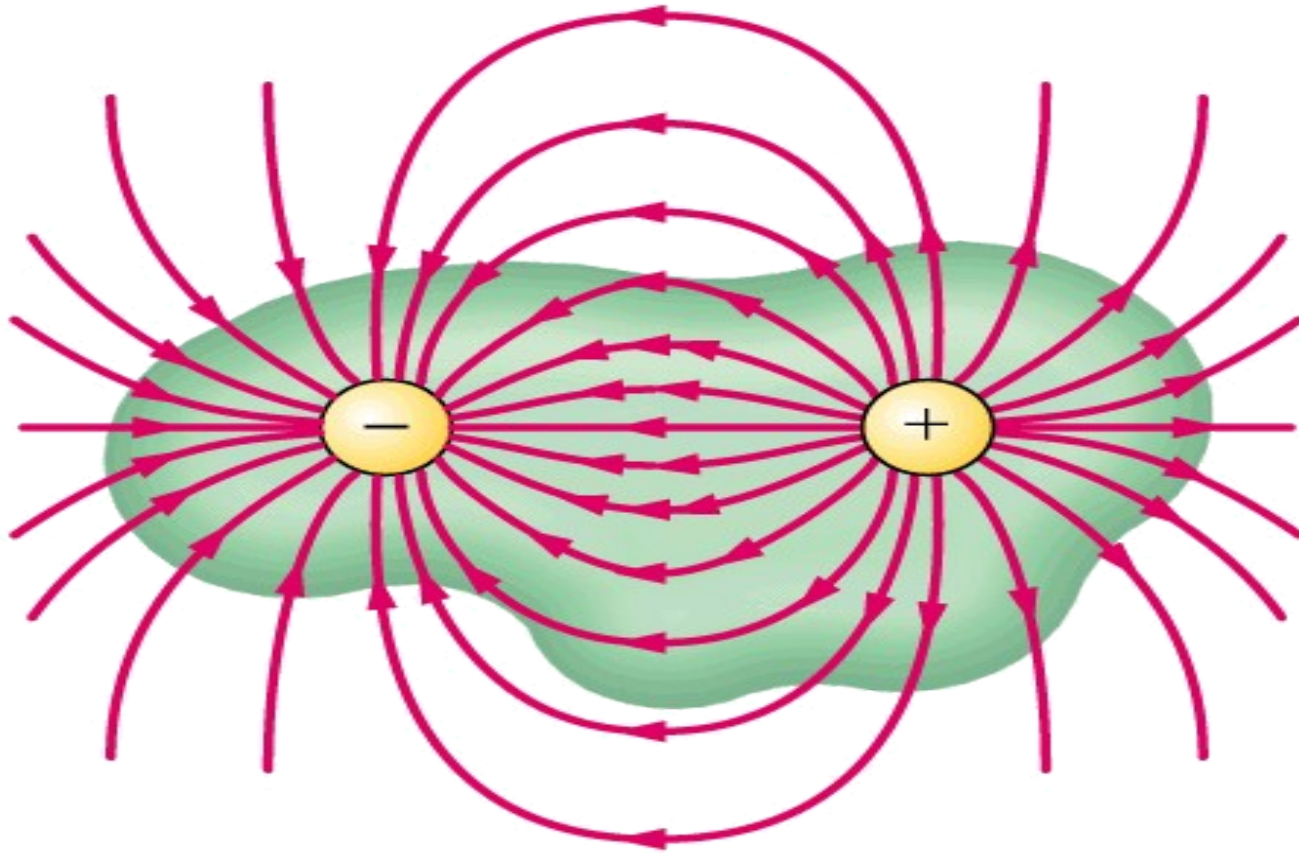
Este teorema da una relación general entre el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada y la carga encerrada por ella.

*El flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta que se encuentre dentro de ella, dividida por la permitividad del vacío.*

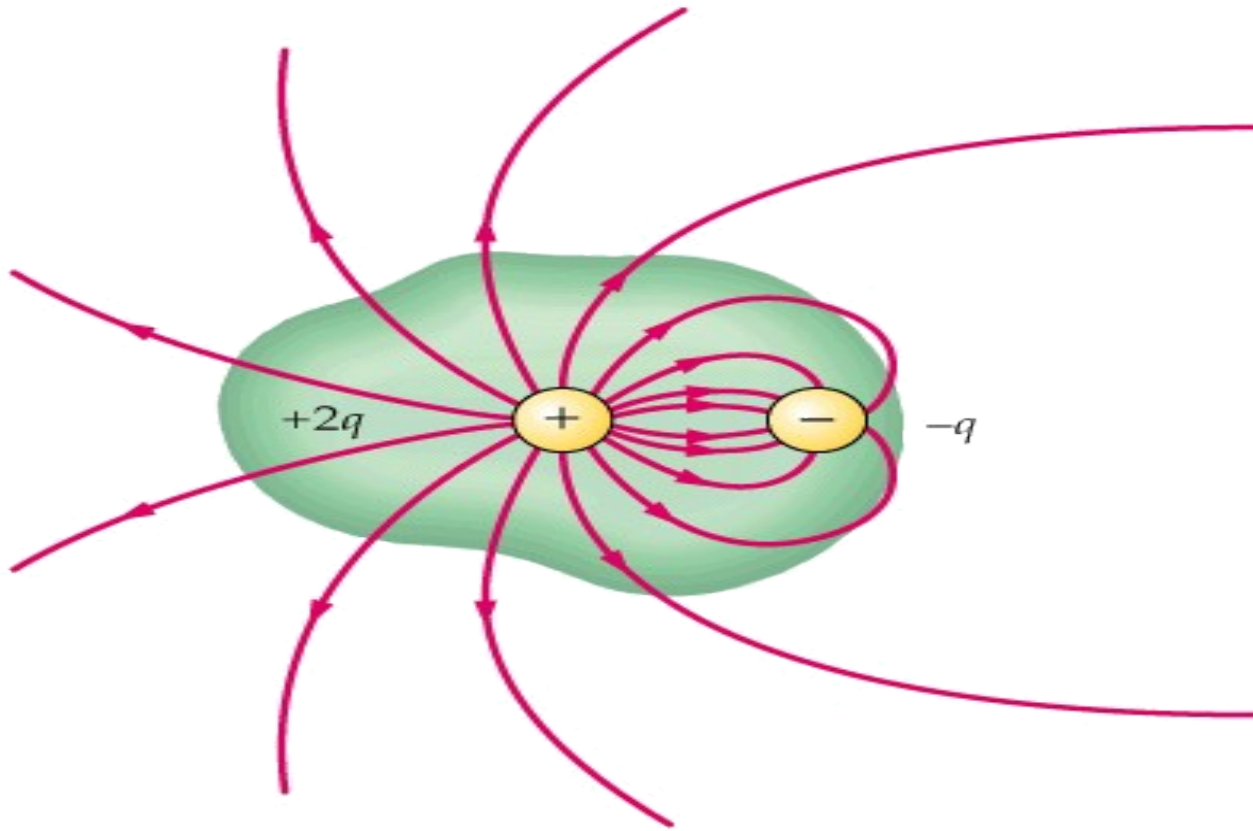
$$\Phi = 4\pi K q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

El flujo es independiente de la forma de la distribución. Sólo depende de la carga que haya en el interior.

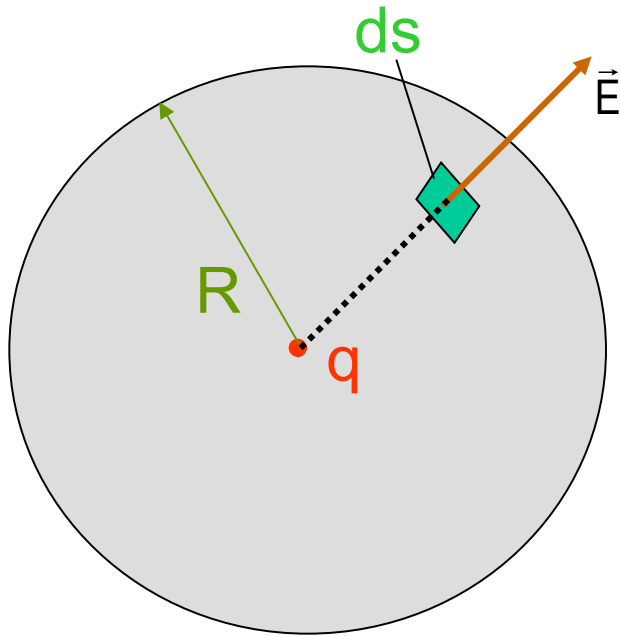
Dipolo eléctrico encerrado en una superficie de forma arbitraria



Superficie de forma arbitraria que incluye las cargas  $+2q$  y  $-q$ .



**Ejemplo 1.-** Una carga puntual  $q$  está situada en el centro de una superficie esférica de radio  $R$ . Calcula el flujo neto de campo eléctrico a través de dicha superficie.



El campo eléctrico creado por una carga puntual viene dado por

$$\vec{E} = K \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

En la superficie de la esfera se cumple que  $r = R$ , luego

$$\vec{E} = K \frac{q}{R^2} \vec{u}_r$$

Para calcular el flujo a través de la superficie esférica, tenemos en cuenta que el campo eléctrico es paralelo al vector superficie en cada punto, por lo tanto

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint K \frac{q}{R^2} ds = K \frac{q}{R^2} \oint ds$$

El área de una superficie esférica viene dada por  $S = 4\pi R^2$ , luego

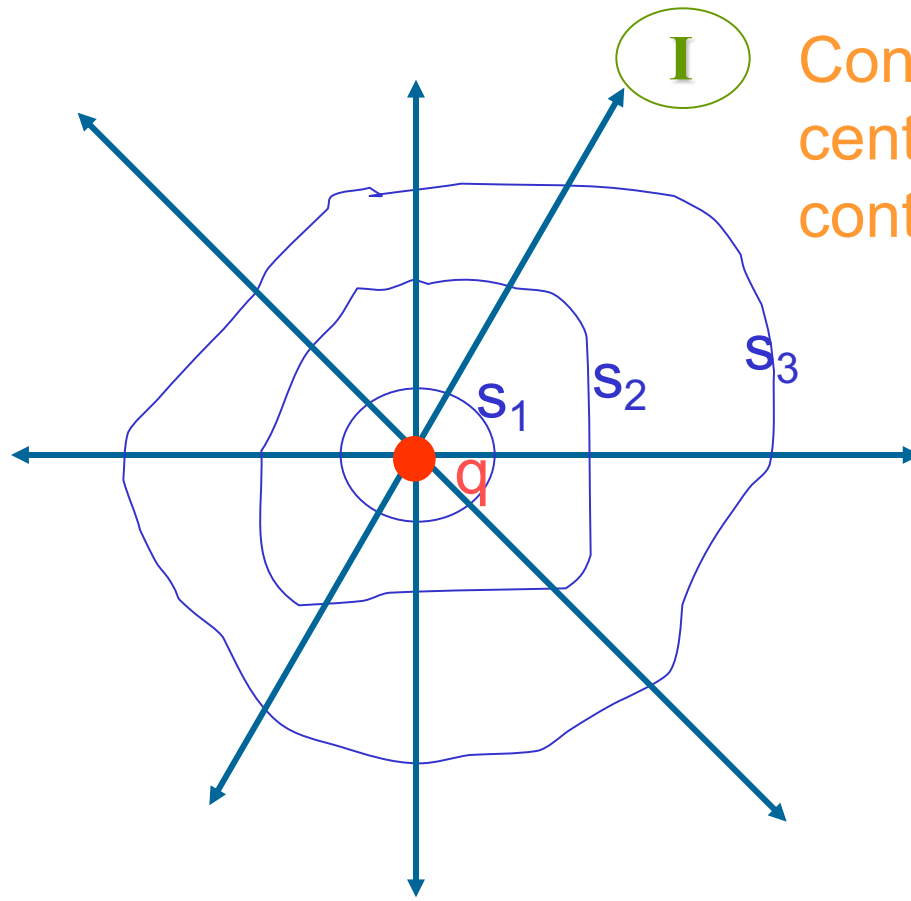
$$\Phi = \frac{K q}{R^2} 4\pi R^2$$

Independiente de R

**Flujo total**

$$\Phi = 4\pi K q = \frac{q}{\epsilon_0}$$





Consideremos varias superficies centradas en una esférica que contiene una carga  $q$ .

El flujo a través de la superficie esférica es

$$\Phi = 4\pi K q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

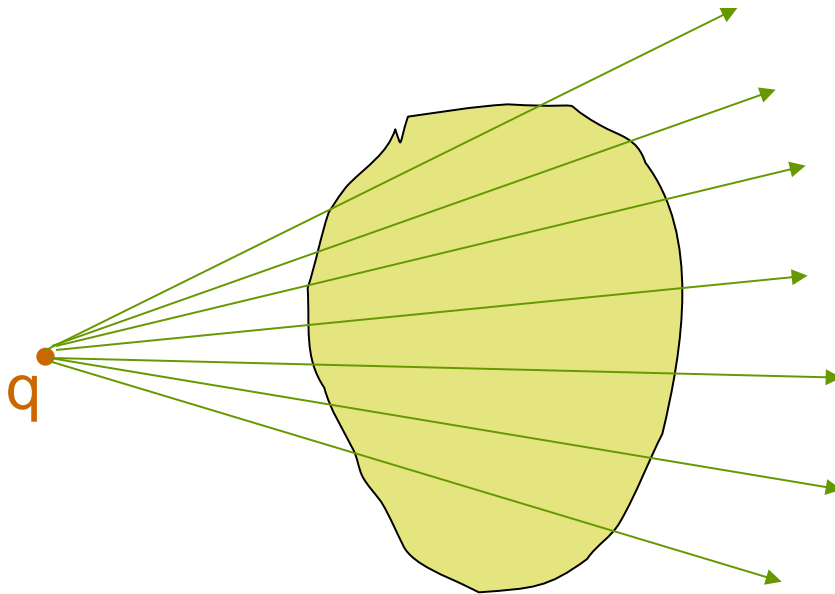
Como el número de líneas que atraviesan las tres superficies es el mismo, se cumple que

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$$

***Por lo tanto el flujo es independiente de la forma de la superficie.***

## II

Supongamos ahora una carga  $q$  próxima a una superficie cerrada de forma arbitraria. En este caso el número neto de líneas de campo que atraviesa la superficie es cero (entran el mismo número de líneas que salen), por lo tanto

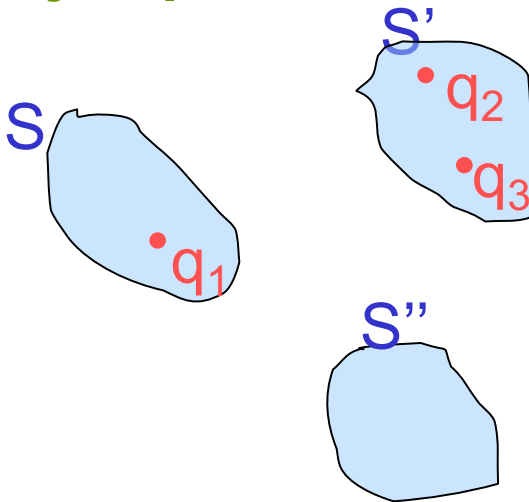


***El flujo a través de una superficie que no encierra carga es nulo.***

## ✓ Generalización de los resultados

Para distribuciones de carga, ya sean discretas o continuas, podemos aplicar el principio de superposición.

**Ejemplo:**



$$\Phi(S) = \frac{q_1}{\epsilon_o}$$

$$\Phi(S') = \frac{(q_2 + q_3)}{\epsilon_o}$$

$$\Phi(S'') = 0$$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_o}$$

Esta ley es especialmente útil para aplicarse a problemas con gran simetría.

## ■ Procedimiento para aplicar el teorema de Gauss

Dada una distribución de carga, buscar una superficie (o varias) que cumplan:

$\vec{E}$  paralelo a  $d\vec{s}$

$E$  constante

en todos los puntos  
de la superficie

