Hoja 8 MAEDO.

Ejercicio 1. *Dar la solución general en forma de serie de potencias centrada en* $x_0 = 0$ *de*

1. $y'' + xy' + x^2y = 0.$
2. $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0.$

Ejercicio 2. *Determinar dos soluciones linealmente independientes en forma de serie de potencias en torno al punto* $x = 0$ *de:*

a) $y'' - xy = 0$

b) $y'' + x^2y = 0$

c) $y'' - 2xy' + y = 0$

d) $y'' - xy' + 2y = 0$

e) $y'' + x^2y' + xy = 0$

f) $(x^2-1)y'' + xy' - y = 0$

g) $y'' - xy' - (x+2)y = 0$

h) $(x-1)y'' - xy' + y = 0, y(0) = -2; y'(0) = 1$

i) $(x^2+1)y'' + 2xy' = 0, y(0) = 0; y'(0) = 1$

j) $y'' - 4y' - 4y = e^x$

Ejercicio 3. *Consideramos la ecuación diferencial*

$$y'' + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right) y = 0. \qquad (1)$$

1. *Demostrar que si* $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *es solución de (1), entonces*

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \left(p + \frac{1}{2}\right) a_n - \frac{1}{4} a_{n-2} = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

2. *Demostrar que haciendo el cambio de variable* $y(x) = w(x)e^{\frac{-x^2}{4}}$ *en (1) se la ecuación*

$$w'' - xw' + pw = 0. \qquad (2)$$

3. *Resolver en un entorno del origen la ecuación (2) y como consecuencia obtener la solución de (1).*

Ejercicio 4. *Determinar y clasificar los puntos singulares de las siguientes ecuaciones diferenciales:*

a) $x^3y'' + 4x^2y' + 3y = 0$

b) $xy'' - (x-3)^{-2}y = 0$

c) $(x^2-9)^2y'' + (x+3)y' + 2y = 0$

d) $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{(x-1)^3} = 0$

e) $(x^3+4x)y'' - 2xy' + 6y = 0$

f) $x^2(x-5)^2y'' + 4xy' + (x^2-25)y = 0$

Ejercicio 5. *Comprobando que* $x = 0$ *es un punto singular regular de las siguientes ecuaciones diferenciales, determinar dos soluciones linealmente independientes en forma de serie de potencias alrededor del punto* $x = 0$.

a) $2xy'' - y' + 2y = 0$

b) $2xy'' + 5y' + xy = 0$

c) $x(x-2)y'' + y' - 2y = 0$

d) $xy'' + 2y' - xy = 0$

e) $y'' + \frac{3y'}{x} - 2y = 0$

f) $xy'' - xy' + y = 0$

Ejercicio 6. *Demostrar que* $x_0 = 0$ *es un punto singular regular de la ecuación*

$$xy'' + (x-4)y' - y = 0,$$

y estudiar cuántas soluciones no nulas se obtienen usando el método de Frobenius.

Ejercicio 7. *Demostrar que* $x_0 = 0$ *es un punto singular regular de la ecuación*

$$xy'' - 3y' = -xy' + 2y,$$

y estudiar cuántas soluciones no nulas se obtienen usando el método de Frobenius.

Ejercicio 8. *Dar una solución en forma de serie de potencias centrada en* $x_0 = 0$ *de la ecuación*

$$x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0.$$

Ejercicio 9. *Sea* n *un número natural mayor que* 1*. Demostrar que* $x_0 = 0$ *es un punto singular regular y estudiar cuántas soluciones linealmente independientes obtenemos usando el método de Frobenius de la ecuación*

$$x^2y'' + x^2y' + \frac{1-n^2}{4}y = 0.$$

Ejercicio 10. *Sea* n *un número natural mayor que* 1*. Demostrar que* $x_0 = 0$ *es un punto singular regular y estudiar cuántas soluciones linealmente independientes obtenemos usando el método de Frobenius de la ecuación*

$$x^2y'' + x(x-p)y' + py = 0.$$