Hoja 3 MAEDO.

Ejercicio 1. *Resolver para cualquier valor real de* a, b $y' = \frac{xy+ay+bx+ab}{xy+by+ax+ab}$.

Ejercicio 2. *Demostrar que el cambio de variable* $z(t) = ty(t)$ *reduce la ecuación diferencial* $y' = \frac{yf(ty)}{tg(ty)}$ *a variables separables.*

Ejercicio 3.

1. *Resolver, cuando sea posible,* $y' = \frac{2y-x}{x}$ *con la condición inicial* $y(x_0) = y_0$.
2. *Dar la solución de la ecuación diferencial* $y' = \frac{-y}{x+y}$ *que pasa por el punto*
   a) $(1, 3)$.
   b) $(1, 0)$.
   c) $(1, -2)$.
3. *Dar la solución de la ecuación diferencial* $y' = \frac{2x^2+xy+y^2}{2x^2+3xy-y^2}$ *que pasa por el punto*
   a) $(1, 1)$.
   b) $(1, -1)$.
   c) $(1, -2)$.

Ejercicio 4. *Demostrar que las soluciones de* $y' = y^4 + 1$ *son monótonas crecientes.*

Ejercicio 5. *Dada la ecuación diferencial* $y' = g(y)$, *donde* g *es una función continua en algún intervalo* I, *se pide demostrar que cualquier solución de dicha ecuación es monótona en cualquier intervalo de extremos* $x_0 < x_1$, *donde* x_0 *y* x_1 *son dos ceros consecutivos en* I *de la función* g.

Ejercicio 6. *De la ecuación diferencial lineal* $y' + y = b(t)$ *sabemos que* b *es continua y* $lim_{t\to+\infty} b(t) = \lambda \in [-\infty, +\infty]$. *Demostrar que si* $y(t)$ *es una solución de la ecuación diferencial entonces se verifica*

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lambda$$

Ejercicio 7. *Resolver la ecuación diferencial* $(3xy^2 - 4y) + (3x - 4x^2y)y' = 0$ *buscando un factor integrante de la forma* $\mu(x, y) = x^n y^m$.

Ejercicio 8. *Sea* g *una función continua en todo* $\mathbb{R}$. *Demostrar que* $x(t) = \int_0^t e^{k(t-s)} g(s)ds$ *resuelve la ecuación diferencial* $x' = kx + g$ *para* $k \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9. *Dar las soluciones, cuando sea posible, de la ecuación diferencial* $y' = t \tan y$ *que pasan por el punto* (x_0, y_0).

Ejercicio 10. *Dar la ecuación diferencial de*

1. *la familia de rectas tangentes a la parábola* $y = 4x^2$.
2. *la famiia de circunferencias con centros en la recta* $y = x$ *que son tangentes a ambos ejes coordenados.*

Ejercicio 11. *Demostrar que las soluciones de* $y' = 1 + t^2 + \sin^2 y$ *son crecientes.*

Ejercicio 12. *Demostrar que si* y_1 *e* y_2 *son dos soluciones de la ecuación diferencial de Riccati* $y' = f(t) + g(t)y + h(t)y^2$ *entonces el cambio de variable* $y = \frac{y_1 - ty_2}{1-t}$ *la reduce a exacta.*

Ejercicio 13. *Probar que la ecuación de Bernoulli* $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$ *tiene un factor integrante de la forma* $y^{-m} e^{(1-m)\int a(x)dx}$.

Ejercicio 14. *Encontra los valores de m y n para los que $\mu(x,y) = x^n y^m$ es un factor integrante de la ecuación diferencial*

$$y + x^2y^2 + (3x^3y - 2x)y' = 0.$$

Ejercicio 15. *Sea p un polinomio en y de grado impar. Demostar que la ecuación diferencial $y' = x^2p(y)$ siempre admite una solución constante.*

Ejercicio 16. *Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y T-periódica. consideramos la ecuación diferencial $y' = f(x)y$. Demostrar que la ecuación diferencial admite soluciones periódicas no triviales si y sólo si $\int_0^T f(z)dz = 0$.*