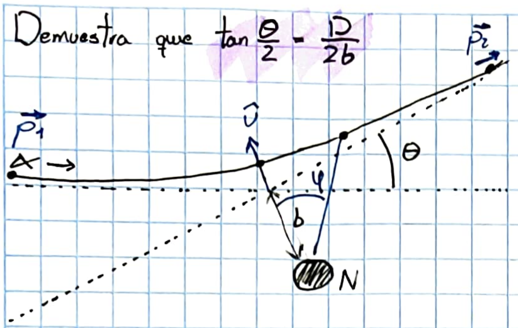
EJERCICIO ENTREGABLE I - F. Nuclear y de Partículas   Víctor Mira

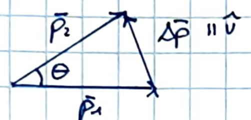
Demuestra que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{D}{2b}$



Definimos $\hat{u}$ vector unitario en la dirección radial al núcleo que pasa por el punto de máximo acercamiento en la trayectoria que describe la partícula. Su sentido será saliente del núcleo y perpendicular a la trayectoria.

Definimos también el ángulo φ que representará el ángulo que forma en todo momento la partícula incidente respecto al vector unitario $\hat{u}$ que hemos definido. De esta forma, $\varphi_0 = \varphi(t\to\infty)$. Llamaremos $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ a los momentos incidente y reflejado respectivamente, de forma que $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$ (Proceso elástico)

Con la definición de los ángulos φ y θ podemos ver la relación $2\varphi_0 = \theta \longleftrightarrow 2\varphi_0 + \theta = \pi \longleftrightarrow \boxed{\varphi_0 = \frac{1}{2}(\pi - \theta)}$ *



Gráficamente, si dividimos θ entre 2, obtenemos dos triángulos rectángulos tal que:

$\Longrightarrow \frac{|\Delta\vec{p}|}{2} = p\sin\frac{\theta}{2} \Longleftrightarrow \boxed{|\Delta\vec{p}| = 2p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ (1)

También podemos definir el momento como $|\Delta\vec{p}| = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}\,dt$, donde F es la fuerza Coulombiana en la dirección $\hat{u}$, la cual vemos que dependerá del ángulo φ tal que $F = kzeZ_1e \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos(\varphi)$

Tenemos la integral con un diferencial de tiempo, pero nos interesa tenerlo respecto al ángulo, por lo que hacemos el cambio de variable $dt = d\varphi/\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = d\varphi/\dot{\varphi}$. Como el potencial Coulombiano genera una fuerza central, el momento angular se conserva. Esto es $mr^2\dot{\varphi} \equiv$ const. con dicha constante siendo $p\cdot b \Longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{pb}{mr^2} \Longrightarrow dt = d\varphi \cdot \frac{mr^2}{pb}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\,dt = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{kzZ_1e^2}{\cancel{r^2}}\cos\varphi \cdot \frac{m\cancel{r^2}}{pb}\,d\varphi = \frac{kzZ_1e^2m}{pb}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{kzZ_1e^2m}{pb}\,2\sin\varphi_0 \overset{*}{=} \frac{km\cdot zZ_1e^2}{pb}\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{km\cdot zZ_1e^2}{pb}\cdot 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = |\Delta\vec{p}|} \quad (2)$$

$$\left(T = \frac{zZ_1e^2}{4\pi\varepsilon_0 D} = \frac{zZ_1e^2}{D}k \Longrightarrow \frac{k}{T} = \frac{D}{zZ_1e^2}\right)$$

$$(1) = (2) \Longrightarrow \cancel{2}p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{km\cdot zZ_1e^2}{pb}\cdot \cancel{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Longrightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{km}{p^2b}\cdot zZ_1e^2 = \frac{k}{mv^2b}\cdot zZ_1e^2 = \frac{k}{2Tb}zZ_1e^2 =$$

$$= \frac{D}{2b}\cdot\frac{zZ_1e^2}{zZ_1e^2} = \boxed{\frac{D}{2b} = \tan\frac{\theta}{2}} \quad \square$$