Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tema II: Electrostática en el vacío

Electromagnetismo I

2º Curso Grado Física

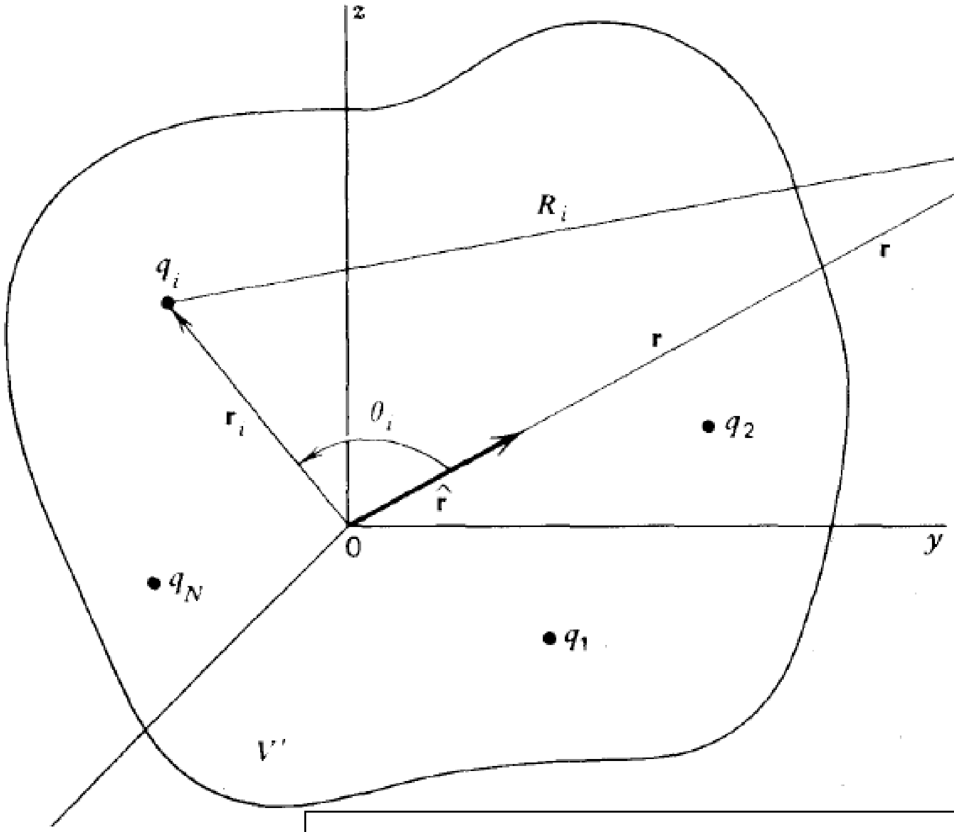
Curso 2021-2022 (2º semestre)

Universidad de Alicante – Departamento de Física Aplicada

Índice

5. Dipolo eléctrico y desarrollos multipolares

Desarrollo multipolar del potencial de una distribución de cargas



$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

Donde:

$$R_i = |\vec{r} - \vec{r_i}|$$

Introduciendo los ángulos θ_i entre las direcciones de $\vec{r}$ y $\vec{r_i}$

$$R_i = \left(r^2 + r_i^2 - 2rr_i\cos\theta_i\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\left(r^2 + r_i^2 - 2rr_i\cos\theta_i\right)^{1/2}}}$$

*R*i se puede escribir en función del parámetro t:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r(1+t)^{1/2}} \qquad\qquad t = -2\left(\frac{r_i}{r}\right)\cos\theta_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2$$

Si P se encuentra lo suficientemente alejado del volumen en el que están contenidas las cargas, se puede hacer una aproximación a la expresión anteriorhaciendo uso del desarrollo en serie de potencias siguiente (usando el signo superior):

$$(1 \pm t)^{-(1/2)} = 1 \mp \tfrac{1}{2}t + \tfrac{3}{8}t^2 \mp \tfrac{5}{16}t^3 + \ldots$$

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) = {}& \overbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{i=1}^{N} q_i}^{\text{Término monopolar}} + \overbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \cos\theta_i}^{\text{Término dipolar}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i r_i{}^2}{2}(3\cos^2\theta_i - 1)}_{\text{Término cuadripolar}} + \ldots\end{aligned}}$$

Desarrollo multipolar del potencial electrostático

La expresión anterior tiene la dificultad de que depende de los cosenos De los ángulos, que dependen de ambas variables r y ri. Sería mejor poner La expresión de manera que estas variables aparecieran explicitamente separadas.

$$\cos\theta_i = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{rr_i} = \hat{\mathbf{r}}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}_i}{r_i}\right) = \frac{l_x x_i + l_y y_i + l_z z_i}{r_i}$$

Donde l_x, l_y y l_z, son los cosenos directores del vector unitario. Las coordenadas x_i, y_i z_i son las coordenadas cartesianas de la carga q_i

El término monopolar

Este término solo depende de r, y no de ri

$$\boxed{\phi_M(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = Q_{\text{total}} = Q$$

Q es la carga neta del sistema. Aquí se llama MOMENTO MONOPOLAR

que es la característica más importante de la distribución de cargas para el término monopolar

Si las cargas se encuentran distribuidas de forma continua, Q se puede calcular a partir de la siguiente integral:

$$Q = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}')\,d\tau'$$

El término dipolar

$$\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \cos\theta_i = \sum_{i=1}^{N} q_i(l_x x_i + l_y y_i + l_z z_i)$$

$$= l_x\left(\sum_i q_i x_i\right) + l_y\left(\sum_i q_i y_i\right) + l_z\left(\sum_i q_i z_i\right)$$

$$= \hat{\mathbf{r}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i\right)$$

MOMENTO DIPOLAR DE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS

$$\boxed{\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i}$$

Si las cargas están distribuidas de forma continua

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\, d\tau'$$

$$\boxed{\phi_D(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}}$$

TÉRMINO DIPOLAR ESCRITO EN FUNCIÓN DEL MOMENTO DIPOLAR

Escrito como un producto escalar de cantidades, una que sólo depende de la posición del punto en el campo, y la otra sólo de los detalles de la distribución de carga.

El término cuadripolar

$$\sum_i q_i r_i^2 (3\cos^2\theta_i - 1)$$

$$= l_x^2 \sum_i q_i(3x_i^2 - r_i^2) + l_x l_y \sum_i q_i 3x_i y_i + l_x l_z \sum_i q_i 3x_i z_i$$

$$+ l_y l_x \sum_i q_i 3y_i x_i + l_y^2 \sum_i q_i(3y_i^2 - r_i^2) + l_y l_z \sum_i q_i 3y_i z_i$$

$$+ l_z l_x \sum_i q_i 3z_i x_i + l_z l_y \sum_i q_i 3z_i y_i + l_z^2 \sum_i q_i(3z_i^2 - r_i^2)$$

$$\boxed{Q_{jk} = \sum_{i=1}^{N} q_i(3j_i k_i - r_i^2 \delta_{jk})} \quad (j,k = x,y,z)$$

Cada término es el producto de una cantidad que sólo depende del punto del campo, es decir, de su dirección; y de otra cantidad que sólo depende de los detalles de la distribución de cargas. Por ello, se puede definir un conjunto de cantidades: las componentes del **TENSOR MOMENTO CUADRIPOLAR**

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Función delta de Kronecker

$$\boxed{\phi_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=x,y,z} \sum_{k=x,y,z} l_j l_k Q_{jk}}$$

TÉRMINO CUADRIPOLAR EN FUNCIÓN DEL MOMENTO CUADRIPOLAR

6. Ecuaciones de Poisson y de Laplace

Combinando la 1ª Ecuación de Maxwell (se obtuvo en Apartado 4)

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

1ª ECUACIÓN DE MAXWELL
(forma diferencial)
EQUIVALENTE A LA LEY DE COULOMB 9

Con la ecucación que relaciona el campo con el potencial

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})}$$

Se obtiene la **ECUACIÓN DE POISSON**

$$\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Ecuación diferencial que permite calcular el potencial conocida la densidad de carga y dos condiciones de contorno.
Esto constituye un método alternativo de obtener el potencial.

Si estamos en el vacío, o en regiones en las que la densidad de carga es nula, la ecuación de Poisson se llama

ECUACIÓN DE LAPLACE

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

MÉTODOS PARA OBTENER EL POTENCIAL ELÉCTRICO DE UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS

El problema fundamental de la electrostática es la determinación del **potencial electrostático (o eléctrico).**
A partir de él se puede obtener el campo, la fuerza y la energía potencial.

Existen diversos métodos para resolver este problema

1. A partir de la definición (integrando).

Posible si se conoce la distribución de las cargas puntuales
y/o de las densidades de cargas (volumétrica, superficial y lineal)

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\, d\tau'}{R}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')\, da'}{R}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}')\, ds'}{R}$$

2. Resolviendo la Ecuación de Poisson y/o Laplace.

Cuando no se conoce la distribución de las cargas y/o densidades de cargas (por ejemplo en el caso de conductores cargados), o cuando se conoce la distribución de cargas sólo en una zona determinado del espacio, pero no en la otra.

Consideraciones necesarias para la resolución:

- En todos los puntos donde hay densidad de carga, el potencial verifica la Ecuación de Poisson.
- En todos los puntos donde no hay densidad de carga, el potencial verifica la Ecuación de Laplace.
- En el infinito el potencial tiende a cero.
- La ecuación a resolver es una ecuación diferencial de segundo orden, por lo que la solución tendrá dos constantes arbitrarias.
- Para determinar dichas constantes arbitrarias es necesario tener dos condiciones, denominadas **condiciones de contorno o de frontera** (establecen el valor del potencial o de sus derivadas en las superficies de discontinuidad que separan dos medios).

DOS FORMAS DE RESOLVER LA EC. DE LAPLACE:

A) Dar la solución como combinación lineal de varias soluciones independientes.

A) Usando el método de las imágenes.

TEOREMA DE UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN A LA EC. DE LAPLACE:

Si una función es una solución de la ecuación de Laplace que satisface las condiciones de contorno, esa función es única y no puede existir otra distinta que verifique las mismas condiciones

Este teorema es clave para el método de las imágenes

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE CON UNA SOLA VARIABLE

La ecuación de Laplace para una sola variable en coordenadas cartesianas

$$\nabla^2\phi(x) = 0 \qquad\qquad \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

Las soluciones de esta ecuación tienen la forma: $\phi(x) = a + bx$

Siendo a y *b* constantes arbitrarias. Para determinarlas es preciso tener dos condiciones de contorno, por ejemplo conocer el valor del potencial para dos valores de la variable x.

<u>Ejemplos (desarrollo en pizarra): Condensador plano</u>.
Calcular el potencial $\phi(x)$ en la región del espacio comprendida entre dos placas metálicas paralelas y perpendiculares al eje x, sabiendo que entre ambas placas no hay cargas.
Las condiciones de contorno son los valores del potencial en las placas.

Condensador esférico y condensador cilíndrico

ECUACIÓN DE LAPLACE PARA VARIAS VARIABLES: MÉTODO SEPARACIÓN DE VARIABLES

La mayoría de ejemplos en los que el cálculo del potencial requiere la resolución de la ecuación de Laplace (o de Poisson) es cuando hay materiales conductores. En el tema 3 veremos materiales conductores y dieléctricos y se justificará la razón de las condiciones de contorno.

En esta sección nos centramos en el método matemático de resolver la ecuación, para unas condiciones de contorno dadas.

ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS CARTESIANAS

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Suponemos que la solución es de la forma:

$$\phi(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

Que sustituyendo en la ecuación de Laplace resulta:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

Para que la ecuación anterior se cumpla es necesario que ambos miembros sean iguales a una misma constante

Cumpliéndose:

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\gamma^2 \qquad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\alpha^2 \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\beta^2$$

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0}$$

Para que se cumpla esta **condición**:

- α, β y γ, no pueden ser todas positivas ni todas negativas.
- No pueden ser todas reales ni todas imaginarias

Las soluciones de las tres ecuaciones serán:

$$\boxed{\begin{aligned} X(x)&=a_1e^{\alpha x}+a_2e^{-\alpha x}\\ Y(y)&=b_1e^{\beta y}+b_2e^{-\beta y}\\ Z(z)&=c_1e^{\gamma z}+c_2e^{-\gamma z}\end{aligned}}$$

La solución general para la función potencial será una combinación lineal de estas, donde el sumatorio se extiende a todos los posibles valores de α, β y γ, que verifiquen la condición anterior

$$\phi(x,y,z)=\sum\left[a_1(\alpha)e^{\alpha x}+a_2(\alpha)e^{-\alpha x}\right]\left[b_1(\beta)e^{\beta y}+b_2(\beta)e^{-\beta y}\right]$$

$$\left[c_1(\gamma)e^{\gamma z}+c_2(\gamma)e^{-\gamma z}\right]$$

El tipo de solución anterior es válido para cualquier ejemplo de potencial de tres variables que se pueda expresar en coordenadas rectangulares.

La resolución completa de un problema concreto consistirá en imponer las condiciones de contorno para determinar las constantes α, β y γ, así como a_1, a_2 , b_1, b_2, c_1, c_2. Nótese que estas últimas en general pueden depender de las primeras.

EJEMPLO (Desarrollo en la pizarra):

Considérese una región limitada por (1) un plano conductor semi-infinito en $x = 0$ que ocupa la mitad del plano yz correspondiente a y positiva (así, $0 \leqslant y \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant z \leqslant \infty$); (2) un plano similar en $x = L$; y (3) la franja del plano xz entre ellos ($0 \leqslant x \leqslant L$). La figura

CONDICIONES DE CONTORNO

en $x=0$ $\qquad \phi(0,y,z)=0$

en $x=L$ $\qquad \phi(L,y,z)=0$

en $y=\infty$ $\qquad \phi(x,\infty,z)=0$

en $y=0$ $\qquad \phi(x,0,z)=f(x)$

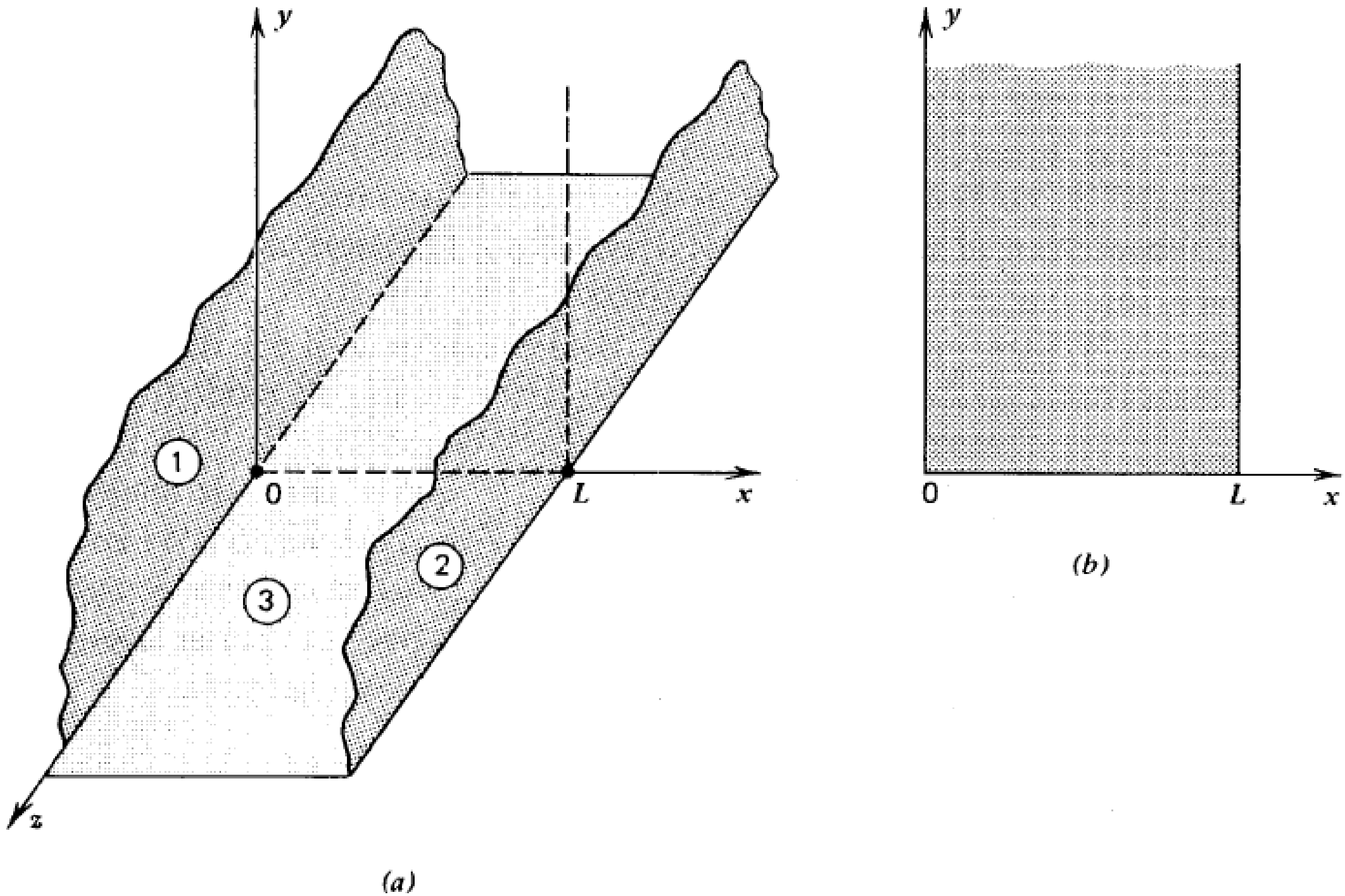


Figura 11-11 (*a*) Dos planos conductores semiinfinitos paralelos al plano yz. (*b*) Su proyección sobre el plano xy.

ECUACIÓN DE LAPLACE: SEPARACIÓN DE VARIABLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

La ecuación de Laplace en Coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0$$

Examinamos el caso particular más sencillo de dos variables en el que hay simetría axial (es decir que el potencial es independiente del ángulo φ), esto es para $\phi=\phi\ (r,\ \theta)$

La ecuación de Laplace para este caso queda:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=0$$

Se buscan soluciones de la forma (separación variables):

$$\phi(r,\theta)=R(r)T(\theta)$$

Imponiendo que esta solución verifique la ecuación diferencial y siguiendo un método similar al anterior se llega a dos ecuaciones diferenciales diferentes de una sóla variable, una dependiente de *r* y otra del ángulo θ

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-KR=0$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dT_l}{d\theta}\right)+l(l+1)T_l=0$$

Soluciones de la forma:

$$R_l(r)=A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}$$

$$l=0,1,2,3,\ldots$$

Las soluciones son los polinomios de Legendre: $T_l(\theta)=P_l(\cos\theta)$

$$P_0(\cos\theta)=1 \qquad P_1(\cos\theta)=\cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta)=\tfrac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$$

Forma general de la solución

$$\boxed{\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)}$$

7. El método de las imágenes

En base al **teorema de unicidad** que vimos, podemos "inventar" cualquier método que nos lleve a una solución válida de la ecuación de Laplace y que cumpla las condiciones de contorno, y estaremos seguros de que esa es la única posible solución.

Este método consiste en sustituir parte de las cargas (o densidades de carga) del sistema que se quiere resolver, por otras ficticias ("cargas imagen") que permiten llevar a misma solución del problema real completo, pero simplificando la resolución del problema.

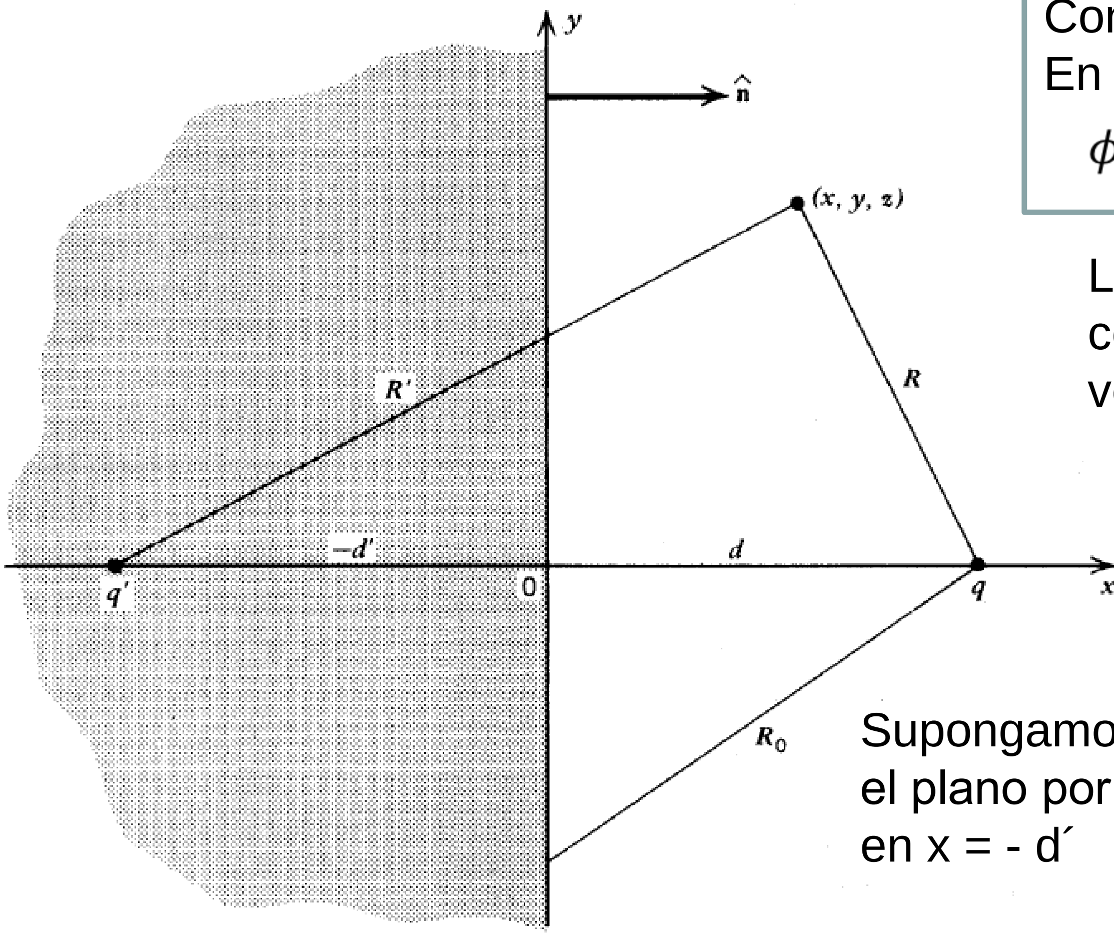
La idea es calcular el potencial según la expresión:

$$\phi = \sum_{\text{real}} \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 R_a} + \sum_{\text{imagen}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

Las cargas "imagen" deben simular las otras cargas o el material presente de modo que se llegue a la misma solución

7. El método de las imágenes. Ejemplo

OBTENER POTENCIAL ϕ DEBIDO A CARGA PUNTUAL, q, Y PLANO CONDUCTOR SEMI-INFINITO CONECTADO A TIERRA



Condición de contorno:
En x = 0, ϕ = cte = 0 (con tierra)

ϕ (0,y,z) = 0

La justificación de esta condición de contorno se verá en el Tema 3.

Supongamos que es posible sustituir el plano por una carga "imagen" q´ situada en x = - d´

Para este sistema ficticio el potencial sería:

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}+\frac{q'}{\left[(x+d')^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}\right\}$$

Imponiendo que este potencial satisfaga la condición de contorno se obtiene:

$$\frac{q}{(d^2+y^2+z^2)^{1/2}}+\frac{q'}{(d'^2+y^2+z^2)^{1/2}}=0$$

Esta condición se cumple si q = -q´ y d = d´. Poniendo estos valores en la expresión del potencial obtenemos la solución, válida para x > 0

$$\boxed{\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}-\frac{1}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}\right\}}$$