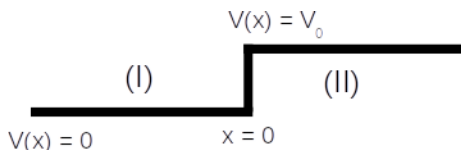
Grado en Física

Mecánica Cuántica I

Problemas

Tema 3: La ecuación de Schrödinger (II) continuación

1. Considera un potencial escalón, de forma que $V(x) = 0$ para $x < 0$ y $V(x) = V_0$ para $x > 0$, como muestra la figura, y una corriente de partículas incidentes desde la izquierda (esto es, la solución asintótica en $x \to -\infty$ está definida por una onda plana de momento definido):



Problema 1

(a) Para valores de la energía $E > V_0$:

i. Escribe la expresión de $\psi(x)$ en cada una de las dos regiones (I) y (II).

ii. Considerando que $\psi(x)$ y su derivada son continuas, calcula la relación entre las amplitudes de la onda transmitida y la reflejada con respecto a la amplitud de la onda incidente.

iii. Calcula la corriente de probabilidad para la onda incidente, reflejada y transmitida.

iv. Calcula los coeficientes de transmisión (T) y de reflexión (R). Comprueba que $R+T = 1$. Representa T y R en función de E/V_0 y explica su significado comparándolo con un sistema clásico.

(b) Para valores de la energía $0 < E < V_0$:

i. Escribe la expresión de $\psi(x)$ en cada una de las dos regiones (I) y (II).

ii. Considerando que $\psi(x)$ y su derivada son continuas, calcula la relación entre las amplitudes de la onda transmitida y la reflejada con respecto a la amplitud de la onda incidente.

iii. Calcula la corriente de probabilidad para la onda incidente, reflejada y transmitida.

iv. Calcula los coeficientes de transmisión (T) y de reflexión (R).

2. Consideremos una partícula cuántica que se mueve en una dimensión, en un potencial:

$$V(x) = +\infty \qquad x < 0$$
$$V(x) = -|V_0| \qquad 0 < x < L$$
$$V(x) = 0 \qquad x > L$$

   (a) Discute cómo será la expresión de $\psi(x)$ para los estados de energía $E < 0$.
   (b) Discute cómo deberá ser la expresión de $\psi(x)$ para los estados de energía $E > 0$.
   (c) Discute cómo deberán ser los valores de la corriente de probabilidad para estados de $E > 0$ y para estados con $E < 0$.

3. Considera un pozo de potencial centrado en x = 0 y localizado a través de una delta de Dirac:

$$V(x) = -V_0\, b\, \delta(x)$$

   donde V_0 y b son constantes reales positivas. Para el caso de $E > 0$ (estados de scattering) y considerando un haz de partículas incidente desde la izquierda, determina:

   (a) La forma de $\psi(x)$ a la izquierda y a la derecha del potencial.
   (b) El valor de las amplitudes de las ondas transmitida y reflejada en relación a la amplitud de la onda incidente.
   (c) Los coeficientes de transmisión y de reflexión.
   (d) Repite el ejercicio para el caso de una barrera localizada en $x = a$: $V(x) = V_0\, b\, \delta(x - a)$

4. Considera un potencial localizado a través de una función delta centrada en a:

$$V(x) = V_0\, b\, \delta(x - a)$$

   ¿Cuántos estados ligados existen para este potencial? ¿Qué dificultad aparece a la hora de obtener la función de onda de una partícula sometida a este potencial? Representa de forma aproximada $\psi(x)$ del estado fundamental. Describe las similitudes y diferencias entre este potencial y el pozo cuadrado finito.

5. Considera un potencial con dos funciones delta:

$$V(x) = -V_0\, b\, [\delta(x + a) + \delta(x - a)]$$

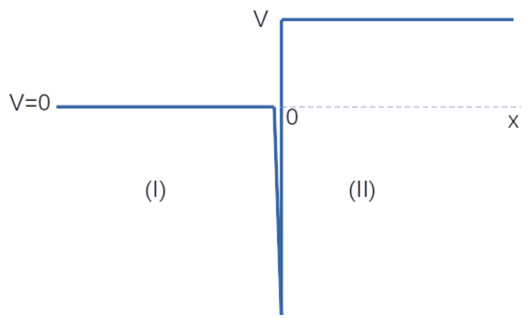
   siendo V_0, a y b constantes reales positivas.

   (a) Describe la forma de la función de onda para estados ligados.

(b) Determina el número de estados ligados y sus energías para el caso de la función de onda par $\psi(x) = \psi(-x)$ y para el caso de la función de onda impar $\psi(x) - \psi(-x)$. Utiliza una representación gráfica para su resolución.

(c) Representa de forma esquemática las funciones de onda para los estados ligados.

6. Supongamos un potencial unidimensional que consiste en una función escalón de altura V para $x \geq 0$ y un pozo de potencial localizado en $x = 0$ a través de una delta de Dirac $-\alpha\,\delta(x)$, donde α es una constante positiva, tal y como se representa en la figura.



Problema 6

(a) Considera partículas incidentes desde la izquierda (esto es, la solución asintótica en $x \to -\infty$ está definida por una onda plana de momento definido). Si la energía es mayor que V, $E > V$:

i. Escribe la expresión de $\psi(x)$ en cada una de las dos regiones (I) y (II).

ii. Calcula la corriente de probabilidad para la onda incidente, reflejada y transmitida.

iii. Calcula los coeficientes de reflexión y de transmisión.

iv. Estima la dependencia del coeficiente de reflexión con la energía de la partícula en el límite en que esta energía es mucho mayor que V, $E \to \infty$.

(b) Considera el caso en el que $E < 0$. Determina las autofunciones y autovalores de los estados ligados, si existen.

7. Describe las diferencias en la separación entre los niveles de energía en un potencial armónico y un pozo cuadrado infinito. Representa de forma aproximada la densidad de probabilidad del estado fundamental para estos dos potenciales y describe sus similitudes y diferencias.

8. Considera una partícula cuántica de masa m en un potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

. La partícula se encuentra en el estado de mínima energía.

   (a) Calcula el punto x' tal que si $|x| > |x'|$ la energía potencial es mayor que la energía del estado fundamental, y por tanto define la frontera con la zona prohibida clásicamente.

   (b) Calcula la probabilidad de que la partícula se encuentre en la zona prohibida y demuestra que no depende ni de k ni de m.

9. Considera el problema de una partícula cuántica en 1D sometida al potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2 + gx$$

Introduciendo un cambio de coordenadas $x - x_0$, demuestra que

$$V(x) = \frac{1}{2}\,k\,(x - x_0)^2 + V_0$$

Calcula x_0 y V_0 en función de k y g. Obtén el espectro de energías del problema.

Expresiones de utilidad

Corriente de probabilidad:

$$J(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\big(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\big)$$

Discontinuidad en la derivada para $V(x) = -\alpha\,\delta(x - x_d)$:

$$\Delta\big(\frac{d\psi}{dx}\big) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(x_d)$$