1. Un hilo inextensible de longitud L une dos partículas de igual masa m. Una de ellas está sobre una mesa y puede deslizar sobre ella sin rozamiento. El hilo pasa por un agujero practicado en la mesa de manera que la otra masa pende del hilo y puede realizar un movimiento vertical, como se muestra en la figura.

???

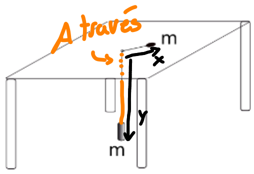
(a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? Elige coordenadas generalizadas adecuadas y obtén la lagrangiana del sistema.

(b) Obtén las ecuaciones de movimiento.

Entiendo que hay gravedad

(c) Obtén la hamiltoniana del sistema. ¿Se conserva constante? ¿Es igual a la energía? ¿Por qué?

(d) A partir de las ecuaciones de movimiento, deduce cuál debe ser el movimiento de la partícula que está sobre la mesa para que la partícula que pende del hilo no se mueva.



1 grado de libertad

Ligadura escleróonoma y holónoma: $L = y + x$

$$\begin{cases} x = x \\ y = L - x \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \dot{y} = -\dot{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}^2 = \dot{x}^2 \\ \dot{y}^2 = \dot{x}^2 \end{cases} \Rightarrow T = m\dot{x}^2$$

$$U = -mgy = mg(x-L) \Rightarrow \mathcal{L} = T - U = m\dot{x}^2 + mg(L-x)$$

$$\text{E-L: } \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \cancel{F_i} = 0 \Rightarrow 2m\ddot{x} + mg = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\frac{g}{2}}$$

$$\dot{y} = -\dot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = -\ddot{x} = \frac{g}{2}}$$

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} = \dot{x} p_x - \mathcal{L} = \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} = 2m\dot{x}^2 - m\dot{x}^2 + mg(x-L) = m\dot{x}^2 + mg(x-L) = T + U = E$$ (la ligadura es holónoma y escleróonoma)

$$\ddot{x} = -\frac{g}{2} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{g}{2}t + K_1 \Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{1}{4}gt^2 + Kt + K_2}$$

$$y(t) = L - x(t) \Rightarrow \boxed{y(t) = L - K_2 - K_1 t + \frac{1}{4}gt^2}$$

Si fijamos $y(t) = 0$, buscamos $x \rightarrow \boxed{\dot{y}(t) = -\dot{x}(t) = 0}$ Ambas deben de estar estáticas

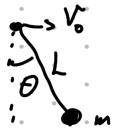
2. Un péndulo formado por un hilo rígido sobre el que pende una partícula de masa m puede oscilar en el plano $x - y$. El punto de suspensión del péndulo lo movemos a velocidad constante $v \neq 0$ en dirección horizontal.

(a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

(b) Elige coordenadas adecuadas y obtén la Lagrangiana del sistema.

(c) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

(d) Compáralas con las que se obtendrían si el punto de suspensión permaneciera fijo. Explica el resultado.



hay 1 grado de libertad

$$\begin{cases} x = v_0 t + L\sin\theta \\ y = L\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 + \dot{\theta}L\cos\theta \\ \dot{y} = -\dot{\theta}L\sin\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$U = mgh = mg(-L\cos\theta) = -mgL\cos\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^2 = v_0^2 + \dot{\theta}^2L^2\cos^2\theta + 2v_0\dot{\theta}L\cos\theta \\ \dot{y}^2 = \dot{\theta}^2L^2\sin^2\theta \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{2}m(v_0^2 + \dot{\theta}^2L^2 + 2v_0\dot{\theta}L\cos\theta) \Rightarrow \mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(v_0^2 + \dot{\theta}^2L^2 + 2v_0\dot{\theta}L\cos\theta) + mgL\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \cancel{m}L^{\cancel{2}}\ddot{\theta} - \cancel{mv_0\dot{\theta}L\sin\theta} + \cancel{mv_0\dot{\theta}L\sin\theta} + \cancel{m}g\cancel{L}\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{L\ddot{\theta} = -\sin\theta\, g}$$

Si $\boxed{v_0 = 0}$

$$\begin{cases} x = L\sin\theta \\ y = -L\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{\theta}L\cos\theta \\ \dot{y} = -\dot{\theta}L\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^2 = \dot{\theta}^2L^2\cos^2\theta \\ \dot{y}^2 = \dot{\theta}^2L^2\sin^2\theta \end{cases} \Rightarrow T' = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2L^2 \quad U' = -mgL\cos\theta \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathcal{L}' = T' - U' = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2L^2 + mgL\cos\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \cancel{m}L^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{m}g\cancel{L}\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{L\ddot{\theta} = -\sin\theta\, g}$$

$\Rightarrow$ llegamos a lo mismo

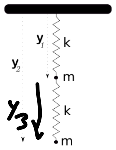
4. Considera el sistema de la figura. Si la longitud de equilibrio de cada muelle es ℓ_0,

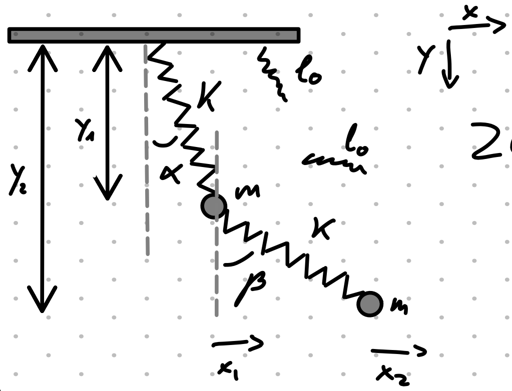
(a) Obtén la Lagrangiana del sistema.

(b) Obtén las ecuaciones de Lagrange correspondientes.

(c) Obtén las coordenadas y_1 e y_2 en la posición de equilibrio.

(d) Estudia las perturbaciones lineales alrededor de la posición de equilibrio del sistema, obteniendo, razonadamente, las frecuencias y los modos normales de vibración. Interpreta el resultado.





2 Grados de Libertad

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)=\frac{1}{2}mL^2(2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha+\dot{\beta}^2\cos^2\beta)$$

$$\begin{cases} x_1 = L\sin\alpha \\ x_2 = L(\sin\alpha+\sin\beta)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = L\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \dot{x}_2 = L\dot{\alpha}\cos\alpha + L\dot{\beta}\cos\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1^2 = L^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha \\ \dot{x}_2^2 = L^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha + L^2\dot{\beta}^2\cos^2\beta\end{cases}$$

$$U = U_g + U_e = -2mgL\cos\alpha - mgL\cos\beta + \frac{1}{2}k(\quad - \ell_0)^2$$

NO ES UN PÉNDULO

No se puede hacer así si lo que tengo son muelles ya que L no es constante, es otra coordenada para cada uno de los muelles. Este sistema tiene 4 grados de libertad, lo cual es bastante más complicado que empezar directamente con y1, y2 como coordenadas sin movimiento "pendular".

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{y}_1^2+\dot{y}_3^2) \qquad U=U_g+U_e = mg(y_1+y_3)+\frac{1}{2}k\left[(y_1-\ell_0)^2+(y_3-\ell_0)^2\right]$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{y}_1^2+\dot{y}_3^2)-mg(y_1+y_3)-\frac{1}{2}k\left[(y_1-\ell_0)^2+(y_3-\ell_0)^2\right]$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}_1}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_1}=0 \Rightarrow m\ddot{y}_1+mg+k(y_1-\ell_0)=0 \Longleftrightarrow \ddot{y}_1=\frac{k}{m}(\ell_0-y_1)-g$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}_3}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_3}=0 \Longrightarrow m\ddot{y}_3+mg+k(y_3-\ell_0)=0 \Longleftrightarrow \ddot{y}_3=\frac{k}{m}(\ell_0-y_3)-g$$

En equilibrio $\ddot{y}_1=\ddot{y}_3=0 \Rightarrow g=\frac{k}{m}(\ell_0-y_1) \rightarrow y_1=-\frac{gm}{\ell_0 k}=y_3 \qquad y_2=y_1+y_3=-\frac{2gm}{\ell_0 k}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{y}_1^2}(0)=\frac{\partial}{\partial\dot{y}_1}\Big|_0(m\dot{y}_1)=m=\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{y}_3^2} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{y}_1\partial\dot{y}_3}=\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{y}_3\partial\dot{y}_1}=0 \Rightarrow T'=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2}(0)=\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_0(mg+k(y_1-\ell_0))=k=\frac{\partial^2 U}{\partial y_3^2}(0) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y_1\partial y_3}=\frac{\partial^2 U}{\partial y_3\partial y_1}=0 \Longrightarrow U=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow |U-\omega^2 T'|=0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} k-\omega^2 m & 0 \\ 0 & k-\omega^2 m\end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow (k-\omega^2 m)^2=0 \Longleftrightarrow k^2+\omega^4m^2-2k\omega^2m=0$$

$$\Longleftrightarrow \omega^2=\frac{2km\pm\sqrt{4k^2m^2-4m^2k^2}}{2m^2}=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Falta un modo !!

casa con que el Ker tenga dimensión 2

$$Ker\left(U-\frac{k}{m}T'\right)=Ker\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=Env\{(1,0),(0,1)\}$$

Parece que faltan las cruzadas en U por una mala elección de coordenadas. $y_3=y_1-y_2$ (sin usar y_3)

5. Considera un disco homogéneo de masa M y radio R. Newtoniana

(a) Obtén razonadamente los momentos principales de inercia respecto al centro del disco, comprobando que son $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}M\,R^2$ y $I_3 = \frac{1}{2}M\,R^2$, donde el tercer eje coincide con el eje de simetría.

(b) Si el disco gira libremente con una velocidad angular $\vec{\omega}$ que forma un ángulo de 45° con el eje de simetría y cuyo módulo es Ω, obtén la energía cinética del disco en función de M, R y Ω.

6. Responde a las siguientes cuestiones.

(a) Razona por qué las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x \\ \dot{p} &= p + x \end{aligned}$$

NO pueden representar las ecuaciones de un sistema Hamiltoniano en el que sólo actúan fuerzas conservativas.

(b) Basándote en la invariancia de los corchetes de Poisson bajo transformaciones canónicas, demuestra que la transformación

$$\begin{aligned} Q &= q^2 + p^2 \\ P &= -q \end{aligned}$$

NO es canónica. ¿Será canónica la transformación

$$\begin{aligned} Q &= q^2 + p \\ P &= -q? \end{aligned}$$

Justifica tu respuesta. En caso de serlo, encuentra una función generadora de tipo F_1.

Por las ecuaciones de Hamilton, $\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = \tilde{F}_i - \dot{p}_i \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \end{cases}$ Entonces

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$ si es conservativo, ya que $\tilde{F}_i = 0$

Tmb. podemos decir que como la cruzada $\neq \Rightarrow$ $\Rightarrow \nexists H$

entonces $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} = 3x &\iff H = \int 3x\,dp = 3xp + g(x) \\ \frac{\partial H}{\partial x} = -p - x &\iff H = -\int (p+x)\,dx = -px - \frac{x^2}{2} + h(p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Como no son iguales para ninguna función $g(x)$, $h(p)$ no es posible que defina un hamiltoniano ↯

b) $$[Q,Q] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = 0 = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} = [P,P]$$

$$[Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\cancel{\frac{\partial P}{\partial p}}^{0} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = 2p \neq 1 \Rightarrow \text{No es canónica}$$

$$[Q,Q] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = 0 = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} = [P,P]$$

$$[Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\cancel{\frac{\partial P}{\partial p}}^{0} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = 1 \Rightarrow \text{Es canónica}$$

$$\begin{cases} Q = q^2 + p \iff p = Q - q^2 \\ P = -q \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \int p\,dq = \int (Q - q^2)\,dq = Qq - \tfrac{1}{3}q^3 + g(Q) \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q} &= q + \frac{\partial g}{\partial Q} = -P = q \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial Q} = 0 \Rightarrow g(Q) = cte = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{F_1(q,Q) = Qq - \tfrac{1}{3}q^3}$$