Grado en Física, Curso 2022-2023

Mecánica Cuántica I

Control, 11 de noviembre de 2022

1. Una partícula de masa m se encuentra confinada a moverse entre $0 < x < L$. La función de onda de esta partícula para $t = 0$ es:

$$\Psi(x,0) = A\sin^3(\frac{\pi x}{L})$$

   (a) Calcula el valor de la constante A *(1 puntos)*
   (b) Calcula $\Psi(x,t)$. ¿Se trata de un estado estacionario? Razona tu respuesta. *(0.5 punto)*
   (c) Calcula el valor esperado de la energía. ¿Varía en el tiempo? Razona tu respuesta. *(0.5 puntos)*
   (d) ¿Cuál es la probabilidad de que al medir la energía del sistema se obtenga el valor $\frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ *(0.5 puntos)*
   (e) En un determinado instante de tiempo se mide la energía del sistema y esta es: $\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ Si se vuelve a medir la energía de esta partícula en un tiempo inmediatamente posterior ¿qué valor se obtendría y por qué? Escribe la función de onda resultante. *(0.5 puntos)*
   (f) Calcula la probabilidad de encontrar a la partícula entre $0 < x < L/2$ en t=0. *(1 punto)*

2. Consideremos una partícula cuántica que se mueve en una dimensión, en un potencial:

$$\begin{aligned} V(x) &= +\infty \qquad && x < 0 \\ V(x) &= -|V_0| \qquad && 0 < x < L \\ V(x) &= 0 \qquad && x > L \end{aligned}$$

   (a) Obtén la relación que determina los posibles valores de la energía de los estados ligados de este sistema $-V_0 < E < 0$ *(2.5 puntos)*
   (b) Discute la forma que tendría el estado fundamental en este caso. Represéntala de forma esquemática. *(1.0 punto)*
   (c) Discute qué ocurre para el caso de $E > 0$. *(1.0 punto)*

3. Discute las similitudes y diferencias entre las autofunciones y los autovalores de los estados ligados en un pozo cuadrado infinito y un potencial armónico. Representa de forma esquemática la autofunción para el estado fundamental y describe las diferencias más significativas con relación a un caso clásico. *(1.5 punto)*

Relaciones de utilidad:

$\sin^3(\theta) = \frac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4}$

$\int_0^a \sin^2(\frac{n\pi x}{a})\, dx = \frac{1}{4} a \left(2 - \frac{\sin(2\pi n)}{\pi n}\right)$

$\int_0^a \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{m\pi x}{a})\, dx = \frac{an\sin(\pi m) cos(\pi n) - amcos(\pi m) sin(\pi n)}{\pi m^2 - \pi n^2}$

Pozo infinito de anchura a:

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

.

① (a) $$\Psi(x,0) = A \cdot \text{sen}^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Podemos escribirlo como:

$$\text{sen}^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4}$$

$$\Psi(x,0) = A\cdot\frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{A}{4}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

Es decir, podemos escribir esta función como una combinación lineal de dos estados estacionarios del pozo cuadrado infinito.

$$\int_0^L |\Psi(x,0)|^2\,dx = 1 \qquad \int_0^L |A|^2\left(\frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\right| dx = 1$$

Resolviendo las integrales con la información que nos dan en el control obtenemos:

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{16}{5L}}}$$

(b) $$\Psi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_n \cdot \psi_n \cdot e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}}$$

En este caso podemos escribir la función para $t=0$ como combinación lineal de los estados ψ_1 y ψ_3 del pozo cuadrado infinito.

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\psi_3 = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \qquad E_3 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\Psi(x,t) = c_1\cdot\psi_1\cdot e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} + c_3\cdot\psi_3\, e^{\frac{-iE_3 t}{\hbar}}$$

Tenemos que obtener c_1 y c_3:

$$\Psi(x,0) = A\cdot\frac{3}{4}\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{A}{4}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

$$\Psi(x,0) = c_1\cdot\sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + c_3\sqrt{\frac{2}{L}}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

$$c_1 = A\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\frac{L}{2}} \qquad c_3 = -A\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{L}{2}}$$

$C_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}$ $\qquad$ $C_3 = \frac{-1}{\sqrt{10}}$

(Se debe cumplir que $|C_1|^2 + |C_3|^2 = 1$. Comprobamos: $\frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1$)

$$\boxed{\Psi(x,t) = \frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cdot e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\cdot e^{\frac{-iE_3 t}{\hbar}}}$$

No se trata de un estado estacionario ya que si calculamos $|\Psi(x,t)|^2$ obtenemos términos cruzados dependientes del tiempo que no se cancelan ya que las energías E_1 y E_3 no son iguales.

(c) $$\langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \cdot E_n = 0{,}9\,\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} + 0{,}1\,\frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\boxed{\langle H \rangle = 1{,}8\,\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL}}$$

No cambia en el tiempo porque tenemos un sistema de energía constante.

(d) $\boxed{|c_3|^2 = 0{,}1}$

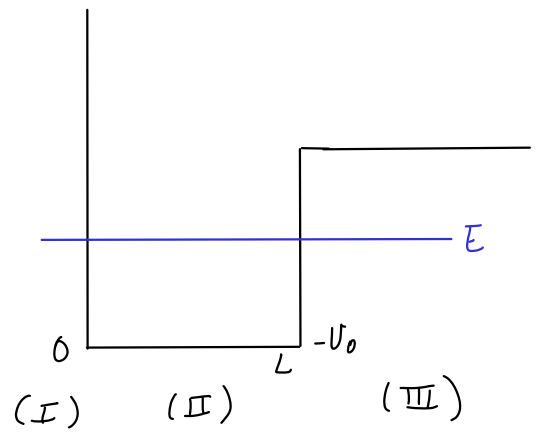
(e) Se obtendría el mismo valor debido al colapso de la función de onda después de realizar una medida. Obtendríamos en este caso la función correspondiente al estado fundamental.

(f) $$\int_0^{L/2} |\Psi(x,0)|^2\,dx = \frac{1}{2}$$

Se puede obtener con argumentos de simetría de la función, a partir de los resultados que ya tenemos en el apartado (a) o volviendo a calcular las integrales.

(2)

(a)



(I) $\psi_I(x) = 0$

(II) $\psi_{II}(x) = A \cdot e^{-iKx} + B e^{iKx}$

con $K^2 = \dfrac{2m(V_0 - |E|)}{\hbar^2}$

(III) $\psi_{III}(x) = C e^{-\ell x} + D e^{\ell x}$

con $\ell^2 = \dfrac{2m|E|}{\hbar^2}$ $\quad D = 0$ para que sea normalizable

Aplicamos condiciones de contorno:

$\psi_I(x=0) = 0$; $\psi_{II}(x=0)$

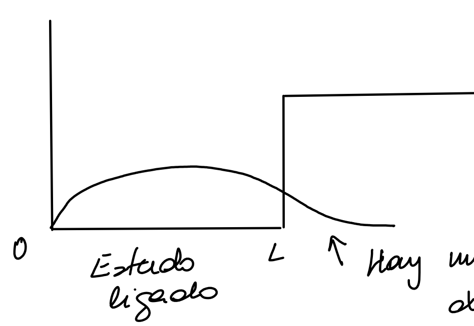
$\psi_{II}(x=L) = \psi_{III}(x=L)$ $\longrightarrow$ $\boxed{tg(KL) = -\dfrac{K}{\ell}}$

$\psi'_{II}(x=L) = \psi'_{III}(x=L)$

Se puede llegar a este resultado resolviendo lo anterior de dos formas:

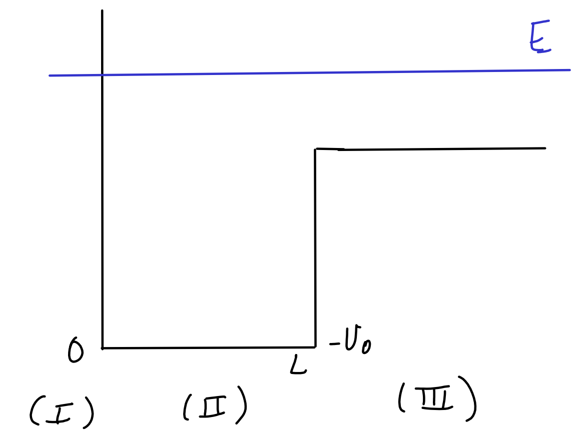
$\psi_I(x) = 0$	$\psi_I(x) = 0$
$\psi_{II}(x) = A \cdot e^{-iKx} + B \cdot e^{iKx}$	$\psi_{II}(x) = A' \cdot \operatorname{sen} Kx + B' \cdot \cos Kx$
$\psi_{III}(x) = C e^{-\ell x}$	$\psi_{III}(x) = C e^{-\ell x}$

(b) Estado fundamental:



Hay una cierta probabilidad de encontrar a la partícula en esta región.

(c) Si $E>0$



Discutir estados de scattering, onda que se propaga de derecha a izquierda, posibilidad de reflexión en $x=L$, transmisión en $x<L$.

La presencia de un potencial ∞ en $x=0$ impone una condición de contorno $\psi_I(x)=0$ que hace que tengamos una onda incidente y reflejada con la misma amplitud.

3 Puntos más importantes:

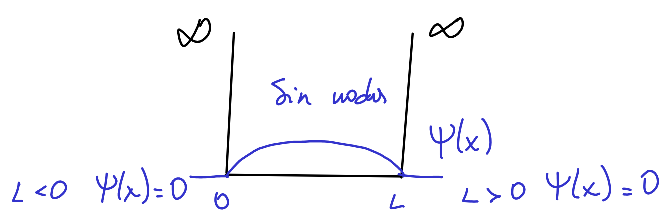
- Estados ligados en un pozo cuadrado infinito y uno armónico se alternan simétrico y antisimétrico por ser el potencial simétrico.
- Energías equiespaciadas para el potencial armónico:

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \quad \Delta E = \hbar\omega$$

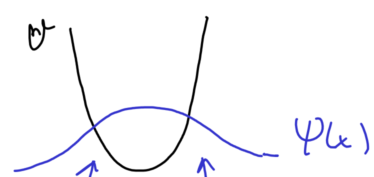
pero no para el pozo cuadrado infinito $E_n \propto n^2$ con $n>0$ para el pozo cuadrado infinito.

- Estado fundamental:

Pozo cuadrado infinito



Potencial armónico



Existe una cierta probabili. de encontrar a la partícula en una región 'prohibida' clásica.

- Caso clásico: la probabilidad de encontrar a la partícula es mayor en el centro de la caja, cosa que no ocurre clásicamente. Para $n>>1$ nos acercamos al caso clásico.