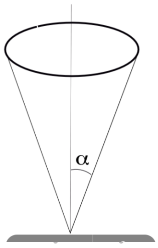
1. Una partícula de masa m puede deslizar sin rozamiento sobre la superficie de un cono como muestra la figura. Sobre la partícula actúa la fuerza de la gravedad. a) Obtén, usando las coordenadas generalizadas adecuadas, la Lagrangiana del sistema y las ecuaciones de Lagrange. b) Obtén los momentos canónicos y discute si alguno de ellos se conserva. c) Explica cómo se puede reducir el problema a un problema unidimensional conservativo, obteniendo el potencial (efectivo) asociado. d) Representa esquemáticamente ese potencial y discute los posibles movimientos. e) Si inicialmente la partícula está a una distancia d del vértice, ¿qué velocidad y en qué dirección le comunicarías para que realizara un movimiento circular?



Partimos de esféricas, con θ fijo a α y φ, r libres ya que tenemos dos grados de libertad a causa de la ligadura holónoma-escleródoma a restringirnos a la superficie del cono:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\alpha\cos\varphi \\ y=\rho\sin\alpha\sin\varphi \\ z=\rho\cos\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot x=\dot\rho\sin\alpha\cos\varphi-\rho\dot\varphi\sin\alpha\sin\varphi \\ \dot y=\dot\rho\sin\alpha\sin\varphi+\rho\dot\varphi\sin\alpha\cos\varphi \\ \dot z=\dot\rho\cos\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dot x^2=\dot\rho^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi+\rho^2\dot\varphi^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi-2\rho\dot\rho\dot\varphi\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi \\ \dot y^2=\dot\rho^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi+\rho^2\dot\varphi^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi+2\rho\dot\rho\dot\varphi\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi \\ \dot z^2=\dot\rho^2\cos^2\alpha \end{cases} \longleftrightarrow \dot x^2+\dot y^2+\dot z^2=(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2\sin^2\alpha) \longleftrightarrow$$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)=\frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2\sin^2\alpha) \quad U=mg\rho\cos\alpha \quad \boxed{L=\frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2\sin^2\alpha)-mg\rho\cos\alpha}$$

Gracias al T^{ma} de Noether sabemos que la independencia de la lagrangiana respecto de una coordenada indica una simetría subyacente, en este caso la conservación del momento conjugado de φ: p_φ

$p_\varphi=cte=A$

Euler-Lagrange

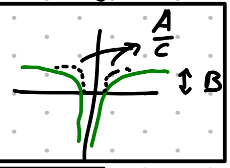
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\rho}-\frac{\partial L}{\partial\rho}=0 \longleftrightarrow \boxed{m\ddot\rho-m\rho\dot\varphi^2\sin^2\alpha-mg\cos\alpha=0}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}-\overset{0}{\cancel{\frac{\partial L}{\partial\varphi}}}=0 \longleftrightarrow \boxed{m\rho^2\dot\varphi\sin^2\alpha=0} \longleftrightarrow p_\varphi=\dot\varphi m\rho^2\sin^2\alpha \text{ se conserva}$$

$$p_\varphi=\dot\varphi m\rho^2\sin^2\alpha \longleftrightarrow \dot\varphi=\frac{p_\varphi}{m\rho^2\sin^2\alpha} \quad \text{y sustituyendo en } L=\frac{1}{2}m\dot\rho^2+\frac{p_\varphi}{m\rho^2\sin^2\alpha}\frac{p_\varphi}{\cancel{m\rho^2\sin^2\alpha}}\cdot\frac{1}{2}\cancel{m\rho^2\sin^2\alpha}-mg\rho\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow L=\frac{1}{2}m\dot\rho^2+\frac{A^2}{2m\rho^2\sin^2\alpha}-mg\rho\cos\alpha \Longrightarrow \boxed{U_{eff}(\rho)=mg\rho\cos\alpha-\frac{A^2}{2m\rho^2\sin^2\alpha}}$$

$Bx-\dfrac{A}{Cx^2}$:

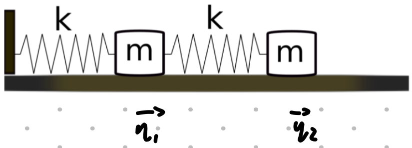


Si $\rho(0)=R$, $\dot\rho(0)=0$ y $\ddot\rho(0)=0 \Longrightarrow$ Ecs. de Lagrange:

$$m\ddot\rho-m\rho\dot\varphi^2\sin^2\alpha-mg\cos\alpha=0 \Longleftrightarrow mR\dot\varphi^2\sin^2\alpha=mg\cos\alpha \Longleftrightarrow \dot\varphi^2(0)=\frac{g}{R}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \boxed{\dot\varphi(0)=\sin\alpha\sqrt{g\sec\alpha/R}}$$

Aplicaría una velocidad angular acimutalmente de $\sin\alpha\sqrt{g\sec\alpha/R}$ con R el radio de la trayectoria deseada.

3. Los bloques de masa m de la figura pueden deslizar sin rozamiento. Los dos muelles son iguales y tienen constante elástica k. a) Obtén razonadamente las frecuencias propias de oscilación del sistema. b) Obtén los modos normales de oscilación correspondientes (sin necesidad de normalizarlos). c) Estando en la posición de equilibrio, ¿qué velocidades comunicarías a los bloques para excitar sólo el modo de vibración con menor frecuencia?



$$T=\frac{1}{2}m(\dot\eta_1^2+\dot\eta_2^2)$$

$$U=\frac{1}{2}k\eta_1^2+\frac{1}{2}k(\eta_2-\eta_1)^2=\frac{1}{2}k(2\eta_1^2+\eta_2^2-2\eta_1\eta_2)$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial\dot\eta_1^2}(0)=m \quad \frac{\partial^2T}{\partial\dot\eta_2^2}(0)=m \quad \frac{\partial^2T}{\partial\dot\eta_1\partial\dot\eta_2}(0)=\frac{\partial^2T}{\partial\dot\eta_2\partial\dot\eta_1}(0)=0 \Longrightarrow T'=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2U}{\partial\eta_1^2}(0)=2k \quad \frac{\partial^2U}{\partial\eta_2^2}(0)=k \quad \frac{\partial^2U}{\partial\eta_1\partial\eta_2}(0)=-k=\frac{\partial^2U}{\partial\eta_2\partial\eta_1}(0) \Longrightarrow U=\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k\end{pmatrix}$$

$$|U-\omega^2T'|=0 \longleftrightarrow \begin{vmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & k-m\omega^2\end{vmatrix}=0 \longleftrightarrow (2k-m\omega^2)(k-m\omega^2)-k^2=0 \longleftrightarrow m^2\omega^4-3km\omega^2+k^2=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \omega^2=\frac{3km\pm\sqrt{9k^2m^2-4m^2k^2}}{2m^2}=\frac{k}{2m}(3\pm\sqrt5) \Longrightarrow \begin{cases} \omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)} \\ \omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)} \end{cases}$$

$$Ker(U-\omega_1^2T')=Env\left\{\left(\frac{\sqrt5-1}{2},1\right)\right\}$$

$$\begin{pmatrix} k\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} kx_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)=kx_2 \\ kx_2\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)=kx_1 \end{cases} \longleftrightarrow x_1=\frac{\sqrt5-1}{2}x_2$$

$$k\frac{\sqrt5-1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt5}{2}x_2=kx_2 \Longrightarrow x_2=x_2$$

$$Ker(U-\omega_2^2T')=Env\left\{\left(1,\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\right\}$$

$$\begin{pmatrix} k\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) & -k \\ -k & -k\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} kx_2=k\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)x_1 \\ kx_1=-k\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)x_2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow x_2=\frac{1-\sqrt5}{2}x_1$$

$$x_1=-\frac{1+\sqrt5}{2}\cdot\frac{1-\sqrt5}{2}x_1 \Longrightarrow x_1=x_1$$

3. [**3 puntos**] Las tres partículas de la figura tienen la misma masa m y pueden deslizar sin rozamiento por las rectas paralelas. La distancia entre rectas consecutivas es a. Los muelles tienen una constante elástica k y longitud natural de equilibrio $\ell_0 = 0$. Usando las coordenadas indicadas, x_1, x_2 y x_3

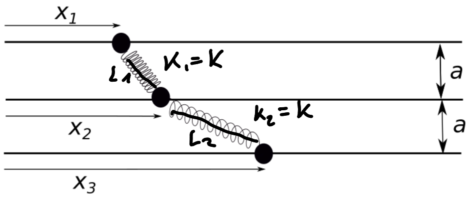
(a) Obtén la lagrangiana del sistema.

(b) ¿Presenta alguna simetría? Si es así, ¿cuál es la magnitud conservada asociada a esta simetría? Razona tu respuesta.

(c) Obtén las condiciones para que el sistema esté en equilibrio.

(d) Obtén las frecuencias propias de oscilación alrededor de la posición de equilibrio.

(e) Obtén los modos normales (sin normalizar) y dibuja esquemáticamente cómo se moverían las partículas en cada modo.



$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

a, L_1, $x_2 - x_1$ $\Rightarrow L_1 = \sqrt{a^2 + (x_2 - x_1)^2}$ a, L_2, $x_3 - x_2$ $L_2 = \sqrt{a^2 + (x_3 - x_2)^2}$

$$U = U_{K_1} + U_{K_2} = \frac{1}{2}k(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2) = \frac{1}{2}k\left[(L_1 - \overset{0}{\cancel{\ell_0}})^2 + (L_2 - \overset{0}{\cancel{\ell_0}})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}k\left(a^2 + (x_2 - x_1)^2 + a^2 + (x_3 - x_2)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}k(2a^2 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_1)$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{1}{2}k(2a^2 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_2)$$

Se observa una invarianza respecto a traslaciones en el eje x, por lo que se conservará el momento lineal total $p_x = p_{x_1} + p_{x_2} + p_{x_3} = m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3)$. También hay una simetría temporal por la invarianza lagrangiana respecto al tiempo/traslaciones temporales.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = k = \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 2k \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -k = \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_2} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\vec{\nabla} U = \vec{0} \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}\right) = (0,0,0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (kx_1 - kx_2, 2kx_2 - kx_3 - kx_1, kx_3 - kx_2) = (0,0,0) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}| = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow m^3\omega^6 - 4km^2\omega^4 + 3k^2m\omega^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

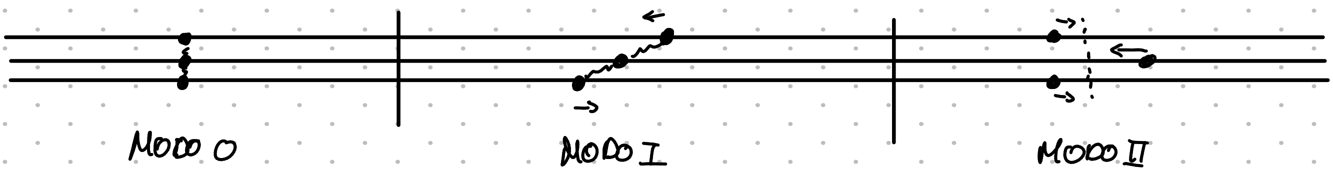
$\omega^2 = 0$ (Modo no oscilatorio)

$$\Longleftrightarrow \omega^2 = \frac{4km^2 \pm \sqrt{16k^2m^4 - 4m^3 \cdot 3mk^2}}{2m^3} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4km^2 \pm \sqrt{4k^2m^4}}{2m^3} = \frac{4km^2 \pm 2km^2}{2m^3} = \frac{k}{m}(2 \pm 1) \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(\mathbb{U} - \omega_1^2 \mathbb{T}) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Env}\{(1\ 0\ -1)\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}y = z \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(\mathbb{U} - \omega_2^2 \mathbb{T}) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2k & -k & 0 \\ -k & -k & -k \\ 0 & -k & -2k \end{pmatrix} = \mathrm{Env}\{(-1\ 2\ -1)\}$$



1. **[3 puntos]** La lagrangiana de una partícula de carga q y masa m que se mueve en el plano $x-y$ en presencia de un campo magnético en la dirección del eje z y de magnitud B es

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{qB}{2}(x\,\dot{y}-y\,\dot{x}).$$

(a) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

(b) Basándote en el apartado anterior, si $\ell_z = m(x\,\dot{y}-y\,\dot{x})$, obtén $\frac{d\ell_z}{dt}$. ¿Es ℓ_z una constante de movimiento?

$= xp_y - yp_x$

(c) Considera la transformación infinitesimal (rotación)

$$x\to x+\delta x,\quad y\to y+\delta y,\quad \dot{x}\to\dot{x}+\delta\dot{x},\quad \dot{y}\to\dot{y}+\delta\dot{y},$$

donde

$$\delta x = -\epsilon\,y,\quad \delta y = \epsilon\,x,\quad \delta\dot{x} = -\epsilon\,\dot{y},\quad \delta\dot{y} = \epsilon\,\dot{x},$$

con ϵ un parámetro infinitesimal. Comprueba que la lagrangiana es invariante bajo esta transformación. Obtén, mediante el teorema de Noether, la magnitud conservada.

(d) Obtén la lagrangiana en coordenadas polares $L = L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})$.

(e) Obtén las ecuaciones de Lagrange y los momentos canónicos p_r y p_θ. ¿Son constantes de movimiento? ¿Se corresponde alguno de ellos con la constante de movimiento del apartado (c)?

(f) Obtén la solución de las ecuaciones de Lagrange en el caso en que $r=r_0=$ cte.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0 \Longleftrightarrow m\ddot{x}-\frac{qB}{2}y-\frac{qB}{2}\dot{y}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=0 \Longleftrightarrow m\ddot{y}+\frac{qB}{2}x+\frac{qB}{2}\dot{x}=0$$

$$\frac{d\ell_z}{dt}=\frac{d}{dt}(m(x\dot{y}-y\dot{x}))=m(\dot{x}\dot{y}+x\ddot{y}-\dot{y}\dot{x}-y\ddot{x})=m(x\ddot{y}-y\ddot{x})$$

$$H=\sum\dot{q}_ip_i-\mathcal{L}=\dot{x}p_x+\dot{y}p_y-\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{qB}{2m}\ell_z=$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{qB}{2m}(xp_y-yp_x)=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)-\frac{qB}{2m}(xp_y-yp_x)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{qB}{2m}p_y\qquad \frac{\partial H}{\partial y}=\frac{qB}{2m}p_x\qquad \frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m}+\frac{qB}{2m}y\qquad \frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{p_y}{2}-\frac{qB}{2m}x$$

$$\frac{\partial\ell_z}{\partial x}=p_y\qquad \frac{\partial\ell_z}{\partial y}=-p_x\qquad \frac{\partial\ell_z}{\partial p_x}=-y\qquad \frac{\partial\ell_z}{\partial p_y}=x$$

$$[H,\ell_z]=\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial\ell_z}{\partial p_i}-\frac{\partial\ell_z}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial\ell_z}{\partial p_x}-\frac{\partial\ell_z}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial\ell_z}{\partial p_y}-\frac{\partial\ell_z}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y}=\cancel{\frac{qB}{2m}p_y(-y)}-\left(\cancel{p_yp_x\frac{1}{m}}+\cancel{\frac{qB}{2m}yp_y}\right)+\cancel{\frac{qB}{2m}p_xx}+\left(\cancel{p_xp_y\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{qB}{2m}xp_x}\right)=0$$

$\Rightarrow \ell_z$ es cte. de movimiento

$$\delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\delta\dot{y}=\frac{1}{2}qB\dot{y}\delta x+\left(m\dot{x}-\frac{1}{2}qBy\right)\delta\dot{x}-\frac{1}{2}qB\dot{x}\delta y+\left(m\dot{y}+\frac{1}{2}qBx\right)\delta\dot{y}=$$

$$=\cancel{\frac{1}{2}qB\dot{y}(-\epsilon y)}+\cancel{m\dot{x}(\epsilon\dot{y})}+\cancel{\frac{1}{2}qB\epsilon y\dot{y}}-\cancel{\frac{1}{2}qB\epsilon x\dot{x}}+\cancel{m\epsilon\dot{y}\dot{x}}+\cancel{\frac{1}{2}qB\epsilon x\dot{x}}=0$$

Como la lagrangiana es invariante respecto a una transformación de rotación, sabemos gracias al Tma. de Noether que habrá una simetría subyacente. En este caso la magnitud que se conserva es el momento conjugado asociado a esta rotación, es decir, que el momento angular se conserva, lz = cte. Lo cual concuerda con lo que hemos demostrado en el apartado anterior.

$$\begin{matrix}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta\\ \dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\dot{x}^2=\dot{r}^2\cos^2\theta+r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta-2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\\ \dot{y}^2=\dot{r}^2\sin^2\theta+r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\end{matrix}\Longrightarrow\begin{matrix}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\\ (x\dot{y}-y\dot{x})=r^2\dot{\theta}\end{matrix}\Longrightarrow$$

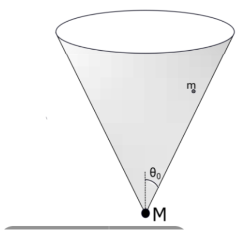
$$\Rightarrow \mathcal{L}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta})=\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\theta})=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{qB}{2}r^2\dot{\theta}\qquad p_\theta=m\dot{\theta}-\frac{qB}{2}r^2\qquad p_r=m\dot{r}$$

$\longrightarrow$ (T^{ma} Noether) p_θ cte asociada a lo que era ℓ_z

Si $r=r_0$ entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}-\cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}}^{0}=0\Rightarrow m\ddot{\theta}=0\quad(\dot{\theta}=\text{cte})$

$$p_\theta=A=m\dot{\theta}-\frac{qB}{2}r_0^2\Longleftrightarrow\dot{\theta}=\frac{A}{m}+\frac{qB}{2m}r_0^2\Longrightarrow\theta(t)=\frac{2A+qB}{2m}r_0^2t$$

1. Una partícula de masa m puede deslizar sin rozamiento por la superficie de un cono con semi-ángulo de apertura θ_0. En el vértice del cono hay una partícula de masa M fija que ejerce una fuerza de atracción gravitatoria sobe la otra partícula. i) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? ii) Usa las coordenadas generalizadas más apropiadas y obtén la lagrangiana. iii) ¿Hay momentos conservados? iv) A partir de las ecuaciones de Lagrange reduce el problema a un sistema unidimensional conservativo, obteniendo el potecial efectivo. v) Obtén, a partir de las ecuaciones de Lagrange, unas condiciones iniciales para que la partícula describa un movimiento circular uniforme de radio R.



Hay dos grados de libertad, usando esféricas con θ fijo tal que $\theta=\alpha$:

$$\begin{matrix}x=r\sin\alpha\cos\varphi\\ y=r\sin\alpha\sin\varphi\\ z=r\cos\alpha\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\dot{x}=\dot{r}\sin\alpha\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\alpha\sin\varphi\\ \dot{y}=\dot{r}\sin\alpha\sin\varphi+r\dot{\varphi}\sin\alpha\cos\varphi\\ \dot{z}=\dot{r}\cos\alpha\end{matrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}\dot{x}^2=\dot{r}^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi-2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi\\ \dot{y}^2=\dot{r}^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi+2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi\\ \dot{z}^2=\dot{r}^2\cos^2\alpha\end{matrix}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha)\\ U=mgh=mgr\sin\alpha\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}=T-U=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha)-mgr\sin\alpha\quad\text{como }\mathcal{L}=\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi})\ p_\varphi\text{ cte}$$

$$\text{Euler-Lagrange: }\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=F_i=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}-\cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}}^{0}=0\Rightarrow mr^2\sin^2\alpha\,\ddot{\varphi}=0\quad\left(p_\varphi=\dot{\varphi}mr^2\sin^2\alpha=A\Rightarrow\dot{\varphi}=\frac{A}{mr^2\sin^2\alpha}\right)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}=0\Rightarrow\ddot{r}=r\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha-g\sin\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}'=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{A^2}{(mr^2\sin^2\alpha)^2}\cancel{mr^2\sin^2\alpha}-mgr\sin\alpha=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{A^2}{mr^2\sin^2\alpha}-mgr\sin\alpha}_{-U_{eff}}\Rightarrow U_{eff}(r)=mgr\sin\alpha-\frac{A^2}{2mr^2\sin^2\alpha}$$

si $r=R\Rightarrow\dot{r}=0\Rightarrow\ddot{r}=0$

$$\Rightarrow\dot{\varphi}=\frac{A}{mR^2\sin^2\alpha}\Rightarrow\varphi(t)=\frac{At}{mR^2\sin^2\alpha}$$

4. Dada la transformación $(q,p) \longrightarrow (Q,P)$

$$\begin{aligned} Q &= q + t\,e^p \\ P &= p, \end{aligned}$$

(a) Demuestra que es una transformación canónica.

(b) Obtén una función generatiz de tipo F_2 de la transformación.

(c) Si la hamiltoniana de un sistema es

$$H = q + t\,e^p,$$

usa la transformación dada para obtener la nueva hamiltoniana y las ecuaciones de hamilton correspondientes.

(d) Obtén la solución de las ecuaciones de hamilton del apartado anterior y úsala para obtener $q(t)$ y $p(t)$ con las condiciones iniciales $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$.

Transformación canónica $\longleftrightarrow \begin{cases} [Q,Q] = [P,P] = 0 \\ [Q,P] = \delta_{ij} \end{cases}$

$[P,P] = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 0$

$[Q,Q] = [q+te^p, q+te^p] = \frac{\partial}{\partial q}(q+te^p)\frac{\partial}{\partial p}(q+te^p) - \frac{\partial}{\partial q}(q+te^p)\frac{\partial}{\partial p}(q+te^p)$

$[Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = 1\cdot 1 - 0 = 1 \Longrightarrow (q,p) \to (Q,P)$ es una transformación canónica

$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q} = p \\ \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q \end{cases}$ $\quad F_2 = \int p\,dq = \int P\,dq = Pq + g(P,t)$

$\frac{\partial F_2}{\partial q} = P = p$ ✓ $\quad \frac{\partial F_2}{\partial P} = q + \frac{\partial g}{\partial P} \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial P}(P,t) = te^p = te^P \Longrightarrow g(P,t) = \int te^P dP = te^P$

$\longrightarrow \boxed{F_2(q,P,t) = Pq + te^P}$

$\frac{\partial F_2}{\partial t} = K - H \Longrightarrow K = \frac{\partial F_2}{\partial t} + H = e^P + q + te^P = \boxed{e^P(1+t) + q = K}$

$Q = q + te^P \Rightarrow q = Q - te^P \Longrightarrow K = e^P(1+t) + Q - te^P = \boxed{e^P + Q = K}$

$\frac{\partial K}{\partial Q} = \dot{p}_i - \dot{P} = -\dot{P} \Longleftrightarrow \dot{P} = -1 \Longrightarrow P = -t + C_1 \Longrightarrow p(t) = -t + C_1 \quad p(0) = p_0 \Longrightarrow C_1 = p_0 \Rightarrow \boxed{p(t) = p_0 - t}$

$\frac{\partial K}{\partial P} = \dot{Q} \Longleftrightarrow \dot{Q} = e^P \Longrightarrow Q = te^P + C_2 \longrightarrow q(t) + te^P = te^P + C_2 \Longrightarrow q(t) = C_2 \quad q(0) = q_0 \to \boxed{q(t) = q_0}$