$\Longrightarrow$ Reordenamos los operadores para que aparezcan los operadores de creación a la izquierda (ojo: estamos con bosones, si tuviéramos fermiones saldría un factor $(-1)^P$, donde P es el nº de permutaciones necesarias para ordenar normalmente una cadena de operadores.

Ejemplos:

$$N[\hat{a}\hat{a}^+] = \hat{a}^+\hat{a}$$

$$N[\hat{a}^+\hat{a}] = \hat{a}^+\hat{a}$$

$$N[\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}\hat{a}\hat{a}^+] = \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}$$

$$N[\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}'')] = \hat{a}^+(\vec{k}')\underbrace{\hat{a}(\vec{k}'')\hat{a}(\vec{k})}$$

estos conmutan. Su orden no importa.

para fermiones:

$$N[\hat{b}(\vec{k})\hat{b}^+(\vec{k}')\hat{b}(\vec{k}'')]$$
$$= -\hat{b}^+(\vec{k}')\hat{b}(\vec{k})\hat{b}(\vec{k}'')$$

Si lo aplicamos para nuestro $\hat{H}$, obtenemos:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3k\, w_k \left(\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{k}) + \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \right)$$

$\hookrightarrow$ $$N[\hat{H}] = \frac{1}{2}\int d^3k\, w_k \left(\hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}^+(\vec{k}) + \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \right)$$

$$= \int d^3k\, w_k\, \hat{a}^+(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})$$

$$= \int d^3k\, w_k\, \hat{N}(\vec{k})$$

$N[\hat{H}]|\Psi\rangle$ nos dice cuantas excitaciones con nº onda k hay en el estado $|\Psi\rangle$.

[A veces se denota $:\hat{H}:$ en vez de $N[\hat{H}]$]

Con esta prescipción,

$$:\hat{H}:|0\rangle = 0 .$$

¿Por qué ocurre este "problema"?

Consideremos a nuestro viejo amigo:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}w^2\hat{q}^2 \quad \text{con} \quad [q,p] = i$$

Definimos

$$\left.\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\frac{w}{2}}\,\hat{q} + \frac{i}{\sqrt{2w}}\,\hat{p} \\ \hat{a}^+ &= \sqrt{\frac{w}{2}}\,\hat{q} - \frac{i}{\sqrt{2w}}\,\hat{p} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \hat{q} &= \frac{1}{\sqrt{2w}}(\hat{a} + \hat{a}^+) \\ \hat{p} &= -i\sqrt{\frac{w}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^+) \end{aligned}\right.$$

Entonces, $[\hat{q},\hat{p}] = i \Rightarrow [\hat{a},\hat{a}^+] = 1$ y

nuestro Hamiltoniano es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}w(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a})$$

$$= w\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

¿Y si hubiéramos escogido

$$H_{cl}^{(1)} = \frac{1}{2}(wq - ip)(wq + ip) \quad \text{en vez}$$

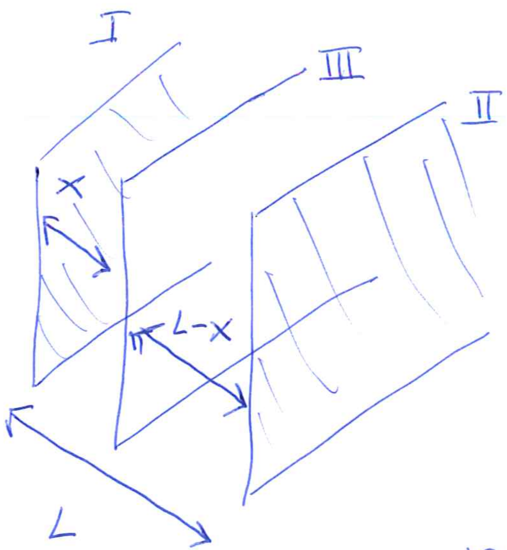
de $H_{cl}^{(2)} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}w^2q^2$?

Curioso: $H_{cl}^{(1)} \longrightarrow \hat{H}^{(1)} = \omega \hat{a}^{+}\hat{a}$ y nos evitamos el posible problema de la energía del estado fundamental.

El efecto Casimir

Hemos dicho que la energía del vacío no es observable; podemos escoger un "buen origen" de energías y eliminarla. Pero, ¿qué ocurre con la diferencia, o con cambios, en la energía del vacío?

Por sencillez, vamos a considerar un problema en una dimensión. Tenemos dos placas metálicas y ponemos una tercera entre ambas.



Si recordamos nuestras clases de Mecánica Cuántica, al imponer condiciones de frontera de Dirichlet sobre el campo φ:

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = 0 \,,$$ los

números de onda resultaban estar cuantizados:

(recordad una partícula confinada entre dos paredes infinitas)

$$k_n = \frac{n\pi}{x} \qquad \text{ó} \qquad k_n = \frac{n\pi}{L-x}$$

La relación de dispersión para un campo escalar sin masa es $E_n = k_n$ y la

energía total del punto cero será $\frac{1}{2}w_n$ por cada modo:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{L-x}\right)\right]$$

$$\equiv f(x) + f(L-x).$$

Ambas ~~sumas~~ divergen. Vamos con un argumento físico para eliminar esas divergencias.

. Las placas reales no pueden reflejar radiación con frecuencias arbitrariamente altas (los modos de más alta energía se filtran).

Quitemos entonces estos modos.

parámetro de corte arbitrario

$$\frac{n\pi}{2x} \longrightarrow \frac{n\pi}{2x} \underbrace{e^{-n\pi a/x}}_{\text{quita modos con } \lambda \ll a}$$

↳ no debe salir al final del cálculo

Sumemos:

$$f(x) = \sum_n \frac{n\pi}{2x} e^{-n\pi a/x}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a} \sum_n e^{-n\pi a/x}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{1-e^{\pi a/x}} = \frac{\pi}{2x} \frac{e^{\pi a/x}}{(1-e^{\pi a/x})^2}$$

$$\underset{\text{Taylor}}{\simeq} \frac{x}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24x} + O(a^2)$$

De esta manera, la energía total del punto cero, será:

$$E = f(x) + f(L-x) = -\frac{\pi}{24x} + \frac{x}{2\pi a^2} + \frac{L-x}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24(L-x)} + O(a^2)$$

$$= \frac{L}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x}\right) + O(a^2)$$

Ahora bien, si $x \ll L$, entonces

$$\boxed{-\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\pi}{24x^2} = F_{casimir}}$$

→ Fuerza atractiva entre las placas

<u>Otra deducción (tal vez más sorprendente)</u>

$$E = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{L-x}\right)\right]$$

como $x \ll L$, $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\pi}{2x^2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n}$

densidad de energía del vacío

¿y si $\sum_{n=1}^{\infty} n \hat{=} -\frac{1}{12}$? ya lo tendríamos todo.

¿Es eso posible?

Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920)

- 1887 Erode $\xrightarrow{+2\text{ años}}$ Madras (Chennai)
- sin ninguna formación. No fue al colegio.
- Descubrió expresiones tan asombrosas como

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{99^2} \sum_{n \geq 0} \frac{(4n)!}{(4^n n!)^4} \, \frac{1103 + 26390\,n}{99^{4n}}$$

con

$$|\pi - \pi_0| \simeq 7.6 \cdot 10^{-8}$$

$$|\pi - \pi_1| \simeq 6.4 \cdot 10^{-16}$$

$$|\pi - \pi_2| \simeq 5.7 \cdot 10^{-24}$$

- Decía que la diosa Namagiri le susurraba en sueños.
- En 1913 escribió a G. Hardy, eminente matemático en el Trinity College (Cambridge)

• Una de las primeras cosas que le escribió, fue:

$$\sum_{n\geq 1} n = 1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12}$$

• Hardy reconoció fácilmente la función zeta de Riemann. Para $\operatorname{Re} z > 1$, es

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

• Riemann llevó a cabo la continuación analítica en $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, obteniendo

$$\zeta(z) = \frac{(2\pi)^z}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z)\, \zeta(1-z)$$

números de Bernoulli.

$$\Longrightarrow \qquad \zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}$$

que coincide para $k=1$ con la suma "mágica" de Ramanujan.

• El uno de la función ζ es, hoy en día, común, para tratar procesos de renormalización. (p. ej. en gravedad cuántica)

. No sabemos cómo llegó a ello Ramanujan. Usaba una pizarra y únicamente anotaba los resultados finales que le parecían interesantes.