MAEDO. TEMA1.

1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

1.1. Primeras definiciones.

Definición 1.1. *Una ecuación que involucra las derivadas ordinarias o parciales de una función incognita diremos que es una ecuación diferenecial ordinaria en el primer caso y parcial en el segundo caso.*

Ejemplos 1.2. *Algunas ecuaciones diferenciales ordinarias pueden ser*

I. $y' = y$ *ó* $y'(t) = y(t)$.
II. $y' + \sin y = 0$
III. $z'' = z$ *ó* $z''(x) = z(x)$.
IV. $r''' + r'' + yr' + r = 0$ *ó* $r'''(y) + r''(y) + yr'(y) + r(y) = 0$
V. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Definición 1.3. *Diremos que una ecuación diferencial es de* ***orden*** $n \geq 1$ *si el orden máximo de derivada que aparece en la ecuación es justamente* $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos 1.4. *Las ecuaciones* I, II *y* V *son ecuaciones diferenciales de orden* 1*. Las dos primeras son ecuaciones diferenciales ordinarias y la última es una ecuación diferencial parcial. Las ecuaciones diferencial ordinarias* III *y* IV *son de orden* 2 *y* 3 *respectivamente.*

Definición 1.5. *Sea* (a,b) *un intervalo abierto de* $\mathbb{R}$*,* $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *una subconjunto abierto y conexo, y* $F : (a,b) \times D \to \mathbb{R}$ *una función. Se llama* ***ecuación diferencial de orden*** n *a la relación*

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots y^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in (a,b), \tag{1}$$

donde t *es una variable independiente,* y *es lo que llamaremos función incógnita o variable dependiente de* t *e* y', $y'', \dots, y^{(n)}$ *son las derivadas ordinarias de* y *hasta el orden* n*, verificándose necesariamente que*

$$(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) \in (a,b) \times D.$$

Definición 1.6. *Diremos que* $z : (a,b) \to \mathbb{R}$ *es una* ***solución*** *de* (1) *si* z *es* n *veces derivable en* (a,b) *y verifica para todo* $t \in (a,b)$

I. $(t, z(t), z'(t), \dots, z^{(n)}(t)) \in (a,b) \times D$.
II. $F(t, z(t), z'(t), z''(t), \dots, z^{(n)}(t)) = 0$.

Ejemplos 1.7. *Comprobar que*

I. $z_1(t) = e^t$, $z_2(t) = 2e^t$ *y* $z_3(t) = 0$ *son soluciones de* $y' = y$, $t \in \mathbb{R}$
II. $w_1(t) = \sin t$ *y* $w_2(t) = \cos t$ *, son soluciones de* $y'' = y$, $t \in \mathbb{R}$*. Demostrar además que cualquier combinación lineal de* w_1 *y* w_2 *es también solución.*
III. $r_1(t) = t^2$ *y* $r_2(t) = t^{-4}$ *son soluciones de* $t^2 r'' + 3tr' - 8r = 0$, , $t \in \mathbb{R}^+$.

Nota 1.8. *Si podemos despejar la derivada de orden mayor en* (1)*, podremos escribir*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Nota 1.9. *Casi en toda su totalidad resolveremos dos tipos de situaciones*

I. $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

II. *Sistemas de ecuaciones diferenciales de orden* 1.

$$\left.\begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\ y_2'(t) & = & f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n'(t) & = & f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots y_n(t)) \end{array}\right\} \tag{3}$$

Nota 1.10. *Si partimos de* (2) *y hacemos el cambio*

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)},$$

obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales de orden n

$$\left.\begin{array}{lcc} y_1'(t) & = & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_3(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1}'(t) & = & y_n(t) \\ y_n'(t) & = & f(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \end{array}\right\} \tag{4}$$

Este último sistema verifica que si tenemos, $z(t)$ *una solución de* (2), $(z(t), z'(t), \dots, z^{n-1}(t))$ *es solucion de* (4) *y viceversa si* $(w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t))$ *es una solución de* (4) *entonces* $w_1(t)$ *es solución de* (2).

Si intentamos modelizar cualquier fenómeno, es lógico pensar que dependa de su estado inicial para poder ser descrito. si este fenómeno lo podemos describir mediante alguna ecuación ecuación diferencial, a ese estado inicial le llamaremos condiciones iniciales. En este caso se suele hablar del **Problema de valor inicial o Problema de Cauchy**.

$$\left.\begin{array}{ccc} y^{(n)} & = & f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) & = & y_0, \\ y'(t_0) & = & y_1, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) & = & y_{n-1}, \end{array}\right\}$$

Existen otro tipo de problemas en función de las que las condiciones iniciales sean en valores distintos de la variable independiente, a estos problemas se les denomina **problemas de contorno** y no los veremos en este curso. Con el siguiente ejemplo queremos poner de manifiesto lo que nos puede pasar con las soluciones de una `edo`.

Ejemplo 1.11. *Toda curva de la familia* $x^2 + y^2 = c$,*es solución de la* `edo` $yy' + x = 0$. *(Derivar implícitamente)*
Por lo que las soluciones están definidas de manera ***implícita***. *Para* $c > 0$ *las soluciones son circunferencias de centro el origen de coordenadas y radio* $\sqrt{c}$ *mientras que para* $c = 0$, *la circunferencia se reduce a u n punto y para* $c < 0$ *son circunferencias imaginarias. Para* $c > 0$ *la solución de manera* ***explícita*** *sería*

$$y(t) = \sqrt{c - x^2}, \quad x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c}).$$

Por otro lado si

$$\left.\begin{array}{rl} x = & c\cos u, \\ y = & c\sin u, \end{array}\right\}$$

son ***soluciones paramétricas*** *de la* `edo` *inicial.*

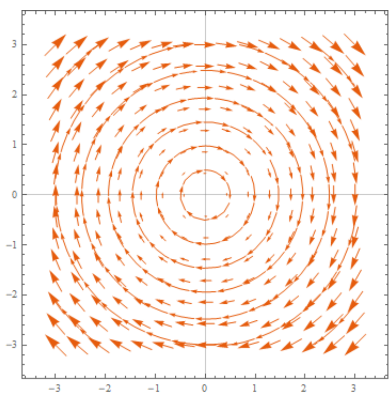
Por último, por lo que respecta al intervalo de definición de las soluciones veremos situaciones en las que únicamente nos interesará saber lo que pasa en un entorno del punto t_0, mientras que en otras ocasiones querremos saber hasta donde podemos extender la solución de la `edo`. Este problema se verá más adelante.

Consideremos ahora la `édo` de primer orden $y' = f(t, y)$. Supongamos que $z(t))$ es una solución que pasa por el punto $(t_0, z(t_0))$ entonces como $z'(t) = f(t, z(t))$ entonces

$$z'(t_0) = f(t_0, z(t_0)).$$

De esta forma podemos conocer la pendiente de la gráfica de la solución que pasa por el punto $(t_0, z(t_0))$ sin conocer la solución. Haciendo esto en una cantidad sufiente de puntos, se puede obtener una idea gráfica de las soluciones.

Ejemplo 1.12. *La siguiente figura muestra el campo de vectores del ejemplo (1.11)*



2. Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales de orden 1.

2.1. Maximal. Cuando hablamos de solución maximal de una `edo` queremos decir la solución cuyo dominio no puede extenderse más sin dejar de tener sentido para dicha `edo`. Lo primero que tenemos que hace es definir un orden en el conjunto de las soluciones, que no será total y utlizaremos el Lema de Zorn para poder obtener la existencia de dicha solución maximal.

Lema 2.1. *[Lema de Zorn] Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.*

Definición 2.2. *Sean y_1 e y_2 dos soluciones de una ecuación diferencial (o Problema de Cacuhy) se dice que y_2 es una extensión de y_1 si el grafo de y_1 está incluido en el grafo de y_2 e y_2 es solución en su dominio (intervalo abierto). Diremos que una solución es máximal si no admite ninguna extensión.*

Proposición 2.3. *Toda solución de una ecuación diferencial (o de un problema de Cauchy) o bien es maximal o bien admite una única extensión maximal, es decir existe una solución maximal que la extiende.*

2.2. VARIABLES SEPARABLES.

Teorema 2.4. *Sean f y g dos funciones continuas definidas en los intervalos I y J. Dado (x_0, y_0) un punto de $I \times J$, la `edo`*

$$y' = f(x)g(y), \tag{5}$$

admite una única solución maximal $z(x)$ definida en un intervalo $I_0 \subseteq I$ tal que $z(x_0) = y_0$.

Nota 2.5 (método de resolución)**.** *En la práctica puede ser más útil actuar de la siguiente manera*

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx.$$

El problema de este método puede ser la pérdida de algunas soluciones, ,WHY?.

Ejemplos 2.6. *Resolver las siguientes ecuaciones de variables separables.*

I. $y' = e^x$.
II. $y' = \frac{y}{x+1}$.
III. $y' = \frac{-x}{y}$.
IV. $y' = y^2 - 2$.
V. $y' = \frac{y \log y}{\sin x}$

2.3. ECUACIONES HOMOGÉNEAS.

Teorema 2.7. *Sea f una función continua, definida en el intervalo $I = (a, b)$, tal que $f(z) \neq z$, para todo $z \in I$. Entonces la* `edo`

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{6}$$

admite una única solución maximal que pasa por el punto $(x_0, y_0) \in A$, siendo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax < y < bx\}.$$

Nota 2.8 (Otra forma de ver las ecuaciones diferenciales homogéneas)**.**
Se dice que una función continua $f(x, y)$ es homogénea de orden α si $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$, para todo (x, y) del dominio de f. Gracias a estas funciones podemos definir de otra forma las ecuaciones homogéneas. Diremos que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es una `edo` *Homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo orden. Además el cambio de variable $y = ux$ la transforma en euna* `edo` *de Variables separables. Observemos que*

$$M(x, ux)dx + N(x, ux)(xdu + udx)dy = x^\alpha\left((M(1, u) + u)dx + xN(1, u)du\right) = 0,$$

que claramente es de variables separable.

Ejemplos 2.9. *Resolver las siguientes ecuaciones difereniales homogéneas.*

I. $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$.
II. $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$.
III. $(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0$.
IV. $(x^4 + y^4)dx - xy^3 dy = 0$.
V. $(1 + 2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$.
VI. *Poner alguno de los exámenes.*

2.4. ECUACIONES REDUCIBLES A HOMOGÉNEAS.

Teorema 2.10. *Sea la* `edo`

$$y' = f\left(\frac{at + by + c}{mt + ny + p}\right). \tag{7}$$

I. *Si las rectas r y s de ecuaciones $at + by + c = 0$, y $mt + ny + p = 0$ respectivamente se cortan en el punto (t_0, y_0) entonces el cambio de variables (dependiente e independiente) $x = t - t_0$ y $z = y - y_0$ transforma la ecuación (7) en una* `edo` *homogénea.*
II. *En el caso de que las rectas r y s sean paralelas y $n \neq 0$, entonces el cambio de variable (dependiente) $z = mt + ny$ transforma la* `edo` *(7) en una de variables separables.*

Ejemplos 2.11. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciables reducibles a homogéneas.*

I. $y' = \frac{-t+y+1}{y+t-1}$.
II. $y' = \frac{12t+5y-9}{-2y-5t+3}$.
III. $y' = \frac{3t-y+2}{6t-2y}$.
IV. $y' = \frac{t+y+1}{y+t-1}$.

2.5. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES. Sean a_0, a_1 y b tres funciones definidas y continuas en un intervalo abierto común I. La edo

$$a_0(t)y'(t) + a_1(t)y(t) = b(t),$$

se denomina ecuación diferencial lineal de orden 1. Si además suponemos que a_0 no se anula y llamamos $p(t) = \frac{a_1(t)}{a_0(t)}$ y $f(t) = \frac{b(t)}{a_0(t)}$ la ecuación anterior se suele escribir

$$y' + p(t)y = f(t) \tag{8}$$

Ahora podemos elegir dos caminos para estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de la edo lineales. El primero es adelantar una noción que se generalizará en XXX que es la de Factor Integrante de una edo y el otro camino es resolverla pensado cómo se van a resolver las edo lineales de orden superior que se verán en XXX. Mostraremos los dos caminos.

Supongamos que somos capaces de encontrar una función $\mu(t)$ de manera que al multiplcar la edo (8) ocurre lo siguiente

$$\mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y(t) = (\mu(t)y(t))' = \mu(t)f(t). \tag{9}$$

Si esto ocurre observamos que

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)f(t)\,dt + k\right)$$

Es decir que tendríamos resuelta la edo lineal. Si observamos de cerca la primera igualdad de (9) observamos que se tiene que verificar que

$$\mu(t)p(t) = \mu'(t), \text{ por lo que } \mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}.$$

Como p es continua en I el factor integrante existe y al ser positivo no estamos añadiendo ni perdiendo soluciones.
Veamos el otro camino. Este lo haremos demostrando el teorema siguiente, pero antes hay que comentar que en la ecuación (8) si f es identicamente nula diremos que la ecuación lineal es homogénea y no homogénea en caso contrario.

Teorema 2.12. *Sean p y f dos funciones continuas en el intervalo I y sea $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ entonces el problema de valor inicial*

$$\left.\begin{array}{rcl} y' + p(t) & = & f(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right\}, \tag{10}$$

tiene una única solución definda en I.

Nota 2.13.

I. *Observar que la solución obtenida por el factor integrante y esta última son exactamente la misma.*
II. *La solución de una ecuacióndiferencial lineal de orden 1 se expresa como una combinación lineal de la parte homogénea y otra de la çompleta"*
III. *Si z_1 y z_2 son soluciones de la completa entonces $z = k(z_1 - z_2) + z_1$ es también solución de la completa.*

Ejemplos 2.14. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciables lineales.*

I. $y' + 3y = 0$.
II. $y' + 3y = 1$.
III. $y + y\cot t = 5e^{\cos t}$.
IV. $y' + 2y = 4x$, $y(0) = 27$.

Nota 2.15 (Lineales en $t(y)$). *En algunas ocasiones puede ser más ventajoso la búsqueda de soluciones cuando la escribimos para $t(y)$, o sea, cuando buscamos inversas de las soluciones de la ecuación inicial. Como*

$$y'(t) = \frac{1}{t'(y(t))},$$

obtenemos que la ecuación en $y(t)$

$$y' = f(t, y),$$

se transforma en $t(y)$ como

$$t'(y) = \frac{1}{f(t, y)}.$$

En el caso particular de que la `edo` $y' = f(t, y)$, pudiérase que no fuera lineal en y, pero que sí lo sea en $t(y)$ cuando buscamos inversas de las soluciones de dicha ecuación, entonces

$$t' + p(y)t = f(y).$$

Y los métodos anteriores nos proporcionan la solución general.

Ejemplo 2.16. *La `edo` $y' = \frac{y}{y+2t}$ no es lineal en $y(t)$ pero $t' = \frac{y+2t}{y}$ es lineal en $t(y)$, ya que*

$$t' - \frac{2}{y}t = 1 \text{ es lineal en } t(y).$$

Su solución es

$$t = ky^2 - y$$

nos proporciona una fórmula implícita de las soluciones de la ecuación original.

2.6. LA ECUACIÓN DE BERNOULLI.

Teorema 2.17. *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo I y sea α un número real distinto de 0 y 1. La `edo`*

$$y' = f(t)y + g(t)y^\alpha, \tag{11}$$

se denomina de Bernoulli y mediante el cambio $z = y^{1-\alpha}$ se transforma en una `edo` Lineal de orden 1.

Ejemplos 2.18. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli.*

I. $y' + 2xy + xy^4 = 0$
II. *etc*

2.7. LA ECUACIÓN DE RICCATI. La diferencia principal de este tipo de ecuaciones a la hora de encontrar la solución general radica en la necesidad de encontrar previamente, al menos una solución particular.

Teorema 2.19. *Sean f, g y h tres funciones definidas y continuas en un mismo intervalo I, y sea y_1 una solución particular de la `edo`*

$$y' = f(t) + g(t)y + h(t)y^2. \tag{12}$$

Esta `edo` se denomina ecuación diferencial de Riccati y haciendo el cambio $y = z + y_1$, la ecuación 12 se transforma en una ecuación diferencial de Bernoulli

De la prueba se desprende que siempre obtendremos una `edo` de Bernoulli de orden 2 por lo que es posible hacer siempre el mismo cambio para transformarla en lineal, como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 2.20. *Haciendo el cambio* $y = \frac{1}{z} + y_1$ *la ecuación de riccati (12) se reduce a una lineal en* $z(t)$.

Existen otros cambios cuando se conocen dos soluciones particulares, mientras que en el caso de conocer tres ya no es necesario ninguún método de cuadraturas para dar la solución general. Esto lo mostramos en el siguiente resultado.

Proposición 2.21. *Si de la* `edo` *(12) se conocen* y_1, y_2 *e* y_3 *tres soluciones particulares, se puede obtener la solución general de ésta sin necesidad de realizar ninguna cuadratura.*

Ejemplos 2.22. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Riccati.*

I. $y' = \cos t - y - y^2$.
II. $(1 + x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$.

2.8. ECUACIONES EXACTAS. La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ se puede escribir de la forma

$$P(t, y) + Q(t, y)y' = 0, \tag{13}$$

aunque por razones históricas y también pragmáticas se suele ver como

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0.$$

Supongamos que partimos de $P(t, y) + Q(t, y)y' = 0$, y que existe una función $F(t, y)$ diferenciable tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = P(t, y) \text{ y } \frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = Q(t, y),$$

entonces diremos que la ecuación es exacta.

Teorema 2.23. *Si la ecuación (13) es exacta entonces la familia de curvas*

$$F(t, y) = c \ (cte),$$

es la familia uniparamétrica de soluciones. Y recíprocamente, si $y(t)$ *es verifica la ecuación (13) entonces* $F(t, y(t)) = C$ *para alguna constante real* C.

Prueba. Supongamo primero que $y_C(t)$ es la curva $F(t, y(t)) = C$, entonces

$$0 = \frac{dF(t, y(t))}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y(t))y'(t) = P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y'(t),$$

luego $y(t)$ verifica la ecuación. Mientras que si ahora suponemos que $y(t)$ verifica la ecuación, entonces

$$\frac{dF(t, y(t))}{dt} = 0,$$

por lo que $F(t, y(t))$ es constante e $y(t)$ es una de las curvas de la familia

$$F(t, y) = C.$$

∎

Teorema 2.24. *Sea* $R \subset \mathbb{R}^2$ *un rectángulo abierto donde* $P(t, y)$ *y* $Q(t, y)$ *admite derivadas parciales continuas. Son equivalentes*

I. *La* `edo` $P(t, y) + Q(t, y)y' = 0$ *es exacta;*
II. $\frac{\partial P}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t, y)$.

Prueba. Veamos la doble implicación.

- Supongamos que $P(t,y) + Q(t,y)y' = 0$ es exacta, entonces existe F tal que $\frac{\partial F}{\partial t} = P(t,y)$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(t,y)$. Gracias a la continuidad de las derivadas parciales de P y Q podemos aplicar el Teorema de Schwarz y asegurar que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

- Supongamos ahora que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ y construyamos una función F que nos asegure que la ecuación es exacta. Como P es continua ponemos

$$F(t,y) = \int P(t,y)dt + g(y),$$

donde g es una función independiente de t, derivamos y obligamos a que $\frac{\partial F}{y} = Q$.

$$\frac{\partial}{\partial y} F(t,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(t,y)dt + g'(y),$$

$$g'(y) = Q(t,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(t,y)dt.$$

Debemos comprobar que este segundo término no depende de t

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t,y) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \int P(t,y)dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} Q(t,y) - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} Q(t,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(t,y) = 0$$

Por lo que

$$F(t,y) = \int P(t,y)dt + \int \left(Q(t,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(t,y)dt \right) dy.$$

La primitiva debe ser la misma ($\int P \, dt$) y F es diferenciable gracias a la continuidad de las derivadas parciales primeras.

■

Ejemplos 2.25. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas.*

I. $3x^2 y + (x^3 - 1)y' = 0$.
II. $(e^{2y} - y \cos xy) + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y)y' = 0$.
III. $y' = \frac{-2x}{y}$.
IV. $-\sqrt[4]{xy} + y' = 0$

Nota 2.26. *Si el rectángulo R se substituye por un conjunto simplemente conexo, el teorema 2.24 sigue siendo cierto. Se necesita integral de líneal y el Teorema de Green, además del cocepto topológico de simplemente conexo. Además esta reducción en las hipótesis es la mejor posible. Hay un ejemplo en rojo.*

2.9. FACTORES INTEGRANTES.. En general, si tenemos una edo $y' = f(t,y)$ no exacta podríamos pensar en multiplicar o dividir la ecuación por una función $\mu(t,y)$ de manera que

$$\mu(t,y)y'(t,y) = \mu(t,y)f(t,y),$$

sea exacta. Lo primero que habría que pensar es qué pasa con las soluciones, añadimos, perdemos?. Razonar.

Vemamos un ejemplo.

Ejemplo 2.27. *Comprobar que no es exacta la* `edo`

$$(t+y)dt + (t\log t)dy = 0,$$

pero si la `edo`

$$\left(\frac{t+y}{t}\right)dt + (\log t)dy = 0.$$

Estudiar si las soluciones obtenidas en la segunda ecuación son soluciones de la primera.

Si buscamos factores integrantes generales $\mu(t,y)$ de la ecuación $P(t,y)+Q(t,y)y' = 0$ debería resultar que al multiplicarla por μ debe ser exacta, es decir

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial t}.$$

o lo que es equivalente, hechando las cuentas,

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial t} + Q\frac{\partial \mu}{\partial t}.$$

o equivalentemente

$$Q(t,y)\frac{\partial \mu}{\partial t}(t,y) - P(t,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(t,y) = \mu(t,y)\left(\frac{\partial P}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)\right). \tag{14}$$

Ejemplos 2.28. *Buscar factores integrantes de la forma que se indica en cada caso. Resolver la ecuación.*

I. $\mu(t,y) = y^\alpha$, *para la* `edo` *no exacta,* $(y^2+2xy)dx - x^2dy = 0$.
II. $\mu(t,y) = f(t+y^2)$, *para la* `edo` *no exacta,* $3y^2 - t + (2y^3 - 6ty)y' = 0$.

2.9.1. ALGUNOS FACTORES INTEGANTES.

En esta sección partimos de una `edo` no exacta $P(t,y)+Q(t,y)y' = 0$ y tendremos presente la ecuación (14). Examinaremos diferentes posibilidades.

- Factores Integantes del forma $\mu(t)$.
  En este caso sabemos que $\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu'(t)$ y $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ por lo que llevando esto a (14) nos queda que

$$\mu(t) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)}{Q(t,y)}.$$

  Por lo que tendremos una factor integrante dependiente de t cuando $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)}{Q(t,y)}$, dependa únicamente de t.
- Factores Integantes del forma $\mu(y)$.
  En este caso sabemos que $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(y)$ y $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ por lo que llevando esto a (14) nos queda que

$$\mu(t) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)}{Q(t,y)}.$$

Por lo que tendremos una factor integrante dependiente de t cuando $\frac{\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(t,y)}{Q(t,y)}$, dependa únicamente de y.

- Factores Integantes del forma $\mu(t+y)$.
  Si llamamos $z = x + y$ y hacemos el abuso de notación de llamar $\mu(x + y) = \mu(z)$ tenemos que $\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(z)$. Por lo que llevando esta información a (14) obtenemos
  $$\frac{\mu'(z)}{\mu z} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)}{Q(t,y) - P(t,y)} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)}{P(t,y) - Q(t,y)}.$$
  Por lo que tendremos una factor integrante dependiente de $t+y$ cuando $\frac{\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(t,y)}{P(t,y)-Q(t,y)}$, dependa únicamente de $t+y$.
- Factores Integantes del forma $\mu(t-y)$.
  Idem.
  Por lo que tendremos una factor integrante dependiente de $t+y$ cuando $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}(t,y)-\frac{\partial Q}{\partial x}(t,y)}{P(t,y)+Q(t,y)}$, dependa únicamente de $t-y$.
- Factores Integantes del forma $\mu(ty)$ Otra vez podemos hacer el abuso de notación $\mu(xy) = \mu(z)$. y en este caso tenemos
  $$\frac{\partial \mu}{\partial t} = y\mu'(z) \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = t\mu'(z),$$
  por lo que usando todo esto en (14) concluimos que
  $$\frac{\mu'(z)}{\mu z} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)}{tP(t,y) - yQ(t,y)}.$$
  Por lo que tendremos una factor integrante dependiente de ty cuando $\frac{\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(t,y)}{tP(t,y)-yQ(t,y)}$, dependa únicamente de ty.
- Si P y Q son homogéneas con el mismo orden (ecuación diferecial homogénea) entonces
  $$\mu(t,y) = \frac{1}{tP(t,y) + yQ(t,y)}$$
  es un factor integrante para la ecuación diferencial, siempre que $t(P(t,y) + yQ(t,y) \neq 0$.
  Para comprobar esto necesitaremos el Teorema de Euler para funciones homogéneas que dice

  Teorema 2.29. *[Euler] Si tenemos una función diferenciable en un abierto de $\mathbb{R}^2$ y homogénea de orden α entonces*
  $$t\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \alpha f(t,y).$$

Ejemplos 2.30. *Buscar un factor integrante para las siguientes ecuaciones diferenciales y resolverlas.*

I. $y(x + y + 1)dx + (x + 2t)dy = 0$.
II. $(6ty)dt + (4y + 9t^2 = 0$.
III. $(4t - 2y)dt + (2t - 4y)dy = 0$.
IV. $(3t - y - 3ty + 3y^2)dt + (5ty - t^2 - 4y^2 - 2t)dy = 0$.
V. $(2y^2 - 3ty)dx + (3ty - 2t^2)dy = 0$.
VI. $\left(1 + e^{\frac{t}{y}}\right) dt + 2e^{\frac{t}{y}} \left(1 - \frac{t}{y}\right) dy = 0$.

Nota 2.31. *Las ecuaciones separables y las lineales también admiten factores integrantes.*

3. Ecuaciones de primer orden no lineales en y'

3.1. Ecuación diferencial de Lagrange y Clairaut.

Teorema 3.1 (La ecuación de Lagrange). *Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo abierto I.La* `edo`

$$y = tf(y') + g(y'), \tag{15}$$

se denomina la ecuación diferencial de Lagrange. El cambio de variable $y' = p$ la transforma en una ecuación diferencial lineal en la variable $t(p)$ con solución general $t = F(p, C)$. Además

I. *El conjunto*

$$\left.\begin{array}{rcl} t &=& F(p,C); \\ y &=& F(p,C)f(p) + g(p); \end{array}\right\}, \tag{16}$$

determina las soluciones de (15) en forma paramétrica.

II. *Si p_0 es un cero de $f(p) - p = 0$ y existe $g(p_0)$ entonces*

$$y = p_0 t + g(p_0)$$

es una solución de (15)*, que será singular si no se puede obtener de la familia (16).*

Ejemplos 3.2. *Resuelva las siguientes ecuaciones de Lagrange.*

I. $y = -t + \frac{1-y'}{1+y'}$.
II. $y = 2ty' + \sin y'$.

Nota 3.3. *Dada una familia uniparamétrica de curvas $F(x, y, C) = 0$ se denomina envolvente de esta familia, al lugar geométrico de puntos que verifican el sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,C) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial C}(x,y,C) = 0 \end{array}\right. \tag{17}$$

La curva envolvente tiene la propiedad de ser tangente a cada curva de la familia en el punto común definido por el sistema (17).

Ejemplo 3.4. *El movimiento de un proyectil lanzado en el vacío desde el origne de coordenadas a velocidad v que form un ángulo α con la horizontal tiene la ecuación*

$$y = x \tan\alpha - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v^2\cos^2\alpha}.$$

La curva envolvente es la llamada parábola de seguridad

$$y = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2}.$$

Teorema 3.5 (La ecuación de Clairaut). *Sea f una función derivable en un intervalo I, a la ecuación*

$$y = ty' + f(y') \tag{18}$$

se denomina ecuación de Caliraut. El vambio $y' = p$, permite obtener

I. *La solución general de (18), $y = Ct + f(C)$.*
II. *La envolvente de la familia de curvas anterior como solución singular de (18), cuya ecuación se obtiene eliminando C de*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& Ct + f(C) \\ 0 &=& t + f'(C) \end{array}\right.$$

Ejemplos 3.6. *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Clairaut*

I. $y = ty' - 2(y')^2$.

II. $y = ty' + \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$.
III. $y = ty' - \log y'$