Problema 3

Un disco delgado de radio R, espesor h y baja conductividad σ se somete a un campo magnético uniforme lentamente variable con el tiempo de la forma $B(t) = B_0 \operatorname{sen} \omega t$ y perpendicular al disco.

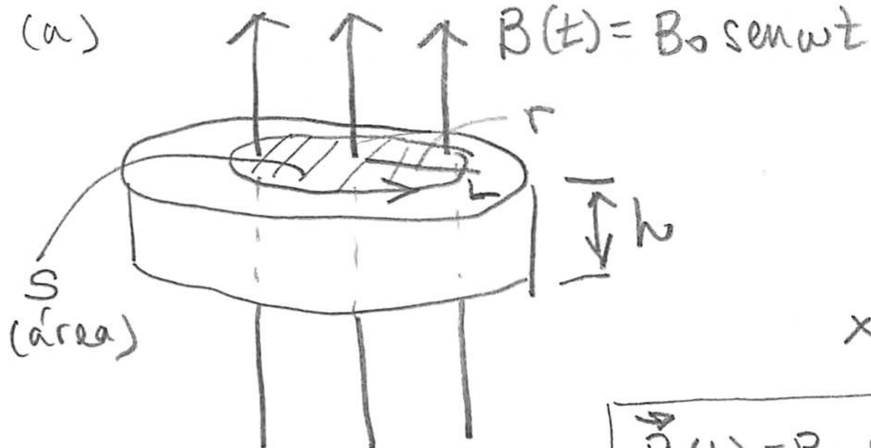
(a) Determinar el vector campo eléctrico inducido en el disco. ¿Por qué se pueden despreciar las corrientes inducidas en el disco, así como el campo magnético inducido? Razonar la respuesta.

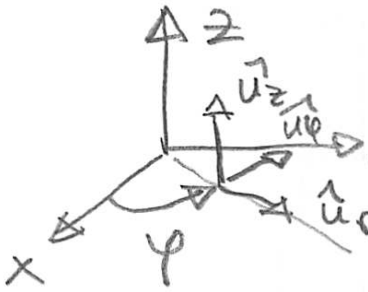
(b) Obtener la potencia disipada en el disco y su valor medio.

(c) Escribir la expresión del vector de Poynting y calcular su valor medio.

(d) A la vista del resultado obtenido para los valores medios de la potencia disipada y del vector de Poynting, y teniendo en cuenta el teorema de Poynting, comentar lo que sucede.

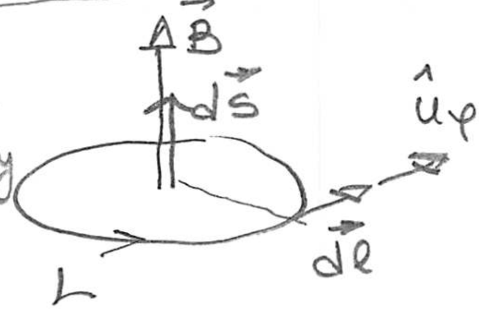
(a)





$$\boxed{\vec{B}(t) = B_0 \operatorname{sen}\omega t \, \hat{u}_z}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}$$ ley de Faraday



$\vec{E} = E\,\hat{u}_\varphi$

$$E\, 2\pi r = -\frac{d}{dt}\int_S B(t)\, dS = -\frac{d}{dt}(B_0 \operatorname{sen}\omega t)\pi r^2$$

$$E\, 2\pi r = -B_0 \omega \pi r^2 \cos\omega t \rightarrow E = -\frac{1}{2} B_0 \omega r \cos\omega t$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{2} B_0 \omega r \cos\omega t \, \hat{u}_\varphi}$$

Corrientes inducidas:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\frac{1}{2} B_0 \underbrace{\sigma\omega} r \cos\omega t \, \hat{u}_\varphi \qquad \boxed{J \propto \sigma\omega}$$

se pueden despreciar porque ω es pequeño y si σ también es pequeño.

(b) Densidad de potencia disipada (efecto Joule)

$$\frac{dP}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{1}{4}\sigma B_0^2 \omega^2 r^2 \cos^2\omega t$$

dV ↑ volumen

$$\left\langle \frac{dP}{dV} \right\rangle = \frac{1}{4}\sigma B_0^2 \omega^2 r^2 \underbrace{\langle \cos^2\omega t \rangle}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\sigma B_0^2 \omega^2 r^2$$

$$\langle P\rangle = \int_V \left\langle \frac{dP}{dV}\right\rangle dV = \frac{1}{8}\sigma B_0^2 \omega^2 \int_0^R r^2 \underbrace{2\pi r h dr}_{dV} =$$

$$= \frac{1}{8}\sigma B_0^2\omega^2 2\pi h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{16} B_0^2 \omega^2 \pi h R^4$$

$$\boxed{\langle P\rangle = \frac{1}{16} B_0^2 \omega^2 \pi h R^4}$$

(c) $\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B} = -\frac{1}{2\mu} B_0^2 \omega r \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t \underbrace{\hat{u}_\varphi \times \hat{u}_z}_{\hat{u}_r}$

$$\boxed{\vec{S} = -\frac{1}{2\mu} B_0^2 \omega r \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t\, \hat{u}_r}$$

$$\langle \vec{S}\rangle = -\frac{1}{2\mu} B_0^2 \omega r \underbrace{\langle \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t\rangle}_{=0} \hat{u}_r = 0$$

$$\boxed{\langle \vec{S}\rangle = 0}$$

(d) $T^{\underline{ma}}$ Poynting $\quad \frac{dW_{EM}}{dt} = -\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{s} - \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\, dV$

$$\left\langle \frac{dW_{EM}}{dt}\right\rangle = -\underbrace{\left\langle \oint_S \vec{S}\cdot d\vec{s}\right\rangle}_{=0} - \underbrace{\left\langle \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\, dV\right\rangle}_{\langle P\rangle}$$

$$\boxed{\left\langle \frac{dW_{EM}}{dt}\right\rangle = -\langle P\rangle = -\frac{1}{16} B_0^2 \omega^2 \pi h R^4}$$

El valor medio de la variación de la energía en función del tiempo sólo depende del valor medio de la potencia disipada por efecto Joule.

Realmente, el valor medio de la variación de la variación temporal de la energía del campo electromagnético es igual al valor medio de la potencia disipada en el disco por efecto Joule, sin depender del valor medio del flujo del vector de Poynting que es nulo.