Grado en Física. Mecánica Analítica. Problemas Tema 3: Mecánica Hamiltoniana.

Curso 2023-2024

1. Escribe las ecuaciones canónicas de Hamilton para un sistema en el que, además de las fuerzas conservativas, hay fuerzas no conservativas. Considera una partícula de masa m que se deja caer y sobre la cual actúa, además de la fuerza de la gravedad, una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad. Obtén las ecuaciones canónicas de movimiento y su solución.

   Sol.: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \mathcal{F}_i'$; $\dot{x} = p/m$, $\dot{p} = -m\,g - k\,p/m$, $p(t) = m^2\,g/k + C\exp(-k\,t/m)$, $x(t) = m\,g\,t/k - C\,(m/k)\,\exp(-k\,t/m) + K$.

2. Obtén la Hamiltoniana y las ecuaciones canónicas de un péndulo esférico usando coordenadas esféricas. Obtén las ecuaciones canónicas correspondientes a pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.

   Sol.: $H = \frac{p_\theta^2}{2m\,\ell^2} + \frac{p_\phi^2}{2m\,\ell^2\sin^2\theta} - m\,g\,\ell\,\cos\theta$ (se ha tomado el eje polar hacia abajo y el origen de potenciales en el origen de coordenadas).

3. Obtén la Hamiltoniana y las ecuaciones canónicas de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa de potencial U en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.

   Sol.: $H = \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m} + U(x,y,z)$; $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m\,r^2} + \frac{p_\phi^2}{2m\,r^2\sin^2\theta} + U(r,\theta,\phi)$; $H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\,\rho^2} + \frac{p_z^2}{2m} + U(\rho,\phi,\theta)$.

4. Obtener la Hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton de un trompo simétrico con un punto fijo en un campo gravitatorio tomando como coordenadas generalizadas los ángulos de Euler.

   Sol.: $H = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + m\,g\,d\,\cos\theta$. PORRO HISTÓRICO

5. Obtener la Hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton de una partícula no relativista de masa m y carga e que se mueve en presencia de un campo electromagnético con potencial eléctrico ϕ y potencial vector $\vec{A}$.

   Sol.: $H = \frac{(\vec{p}-e\,\vec{A})^2}{2m} + e\,\phi$.

6. Obtener los corchetes de Poisson $[q_i, q_j]$, $[p_i, p_j]$ y $[q_i, p_j]$ donde $\{q_i\}$ son las coordenadas generalizadas de un sistema Hamiltoniano y $\{p_i\}$ los momentos conjugados.

   Sol.: $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$; $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$.

7. Comprueba que los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas del momento angular $\boldsymbol{\ell}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ verifican las siguientes relaciones

$$[\ell_x, \ell_y] = \ell_z, \qquad [\ell_y, \ell_z] = \ell_x, \qquad [\ell_z, \ell_x] = \ell_y.$$

8. La identidad de Jacobi para las variables dinámicas f, g y h de un sistema Hamiltoniano es la igualdad $[f,[g,h]] + [h,[f,g]] + [g,[h,f]] = 0$. Demuestra, basándote en ella, que si f, g son constantes de movimiento de un sistema Hamiltoniano, entonces $[f,g]$ también es una constante de movimiento.

9. Obtén la Hamiltoniana de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza gravitatoria $\mathbf{F} = -\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r}$. Demuestra, usando los corchetes de Poisson, que el vector de Runge-Lenz

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}$$

es constante.

Sol.: $H = \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m} - \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

10. Aplicando el principio de Fermat, realiza un programa en `python` para obtener la trayectoria de rayos de luz si el índice de refracción, n, es una función de la altura y, dada por $n = e^{y/10}$. De forma similar, aplica el principio de Maupertuis y realiza un programa en `python` para obtener la trayectoria de una partículas que se mueven en un campo gravitatorio de intensidad constante g.

1. Escribe las ecuaciones canónicas de Hamilton para un sistema en el que, además de las fuerzas conservativas, hay fuerzas no conservativas. Considera una partícula de masa m que se deja caer y sobre la cual actúa, además de la fuerza de la gravedad, una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad. Obtén las ecuaciones canónicas de movimiento y su solución.

   Sol.: $\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \mathcal{F}_i'$; $\dot x = p/m$, $\dot p = -m\,g - k\,p/m$, $p(t) = m^2\,g/k + C\exp(-k\,t/m)$, $x(t) = m\,g\,t/k - C\,(m/k)\exp(-k\,t/m) + K$.

$\mathcal{L}=\mathcal{L}(q_i,\dot q_i,t)$

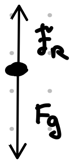
Partiendo de las ecuaciones de Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial \mathcal L}{\partial q_i}=\tilde{\mathcal F}_i \Longleftrightarrow \frac{\partial \mathcal L}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal L}{\partial \dot q_i}-\tilde{\mathcal F}_i=\dot p_i-\tilde{\mathcal F}_i$

$$\Rightarrow d\mathcal L=\sum_i \frac{\partial \mathcal L}{\partial q_i}dq_i+\sum_i\frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot q_i}d\dot q_i+\frac{\partial\mathcal L}{\partial t}dt=\sum_i\dot p_i\, dq_i+\sum_i p_i\, d\dot q_i+\frac{\partial \mathcal L}{\partial t}dt+\underbrace{\sum_i\dot q_i\, dp_i-\sum_i \dot q_i\, dp_i}_{0}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow d\mathcal L=\sum_i(\dot p_i-\tilde{\mathcal F}_i)dq_i+d\left(\sum_i p_i\dot q_i\right)+\frac{\partial\mathcal L}{\partial t}dt-\sum_i\dot q_i\, dp_i \Longleftrightarrow d\left(\mathcal L-\sum_i p_i\dot q_i\right)=\sum_i\dot p_i\, dq_i+\frac{\partial\mathcal L}{\partial t}dt-\sum_i \dot q_i\, dp_i\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -dH=\sum_i(\dot p_i-\tilde{\mathcal F}_i)dq_i+\frac{\partial\mathcal L}{\partial t}dt-\sum_i\dot q_i\, dp_i\Longleftrightarrow dH=\sum_i\dot q_i\, dp_i-\sum_i(\dot p_i-\tilde{\mathcal F}_i)dq_i-\frac{\partial\mathcal L}{\partial t}dt\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial q_i}=\tilde{\mathcal F}_i-\dot p_i\\ \frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot q_i\end{cases}} \longrightarrow$$



$\tilde{\mathcal F}_R=-kv$ $\quad T=\frac12 m\dot x^2$ $\quad U=mgh=-mgx$

$\mathcal L=T-U=\frac12 m\dot x^2-mgh\Longleftrightarrow \mathcal L=\frac{p^2}{2m}+mgx$

$H=p\dot q-\mathcal L=p\frac{p}{m}-\mathcal L=\frac{p^2}{m}-\frac12\frac{p^2}{m}+mgx=\frac12\frac{p^2}{m}+mgx=\mathcal L\Rightarrow H=E$

$p=\frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot x}=m\dot x\Longleftrightarrow \dot x=\frac pm$

$$\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial x}=\tilde{\mathcal F}-\dot p \Longleftrightarrow mg=-k\dot x-\dot p\Longleftrightarrow\\ \Longleftrightarrow \dot p=-k\dot x-mg\\ \frac{\partial H}{\partial p}=\dot x=\frac pm\end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot p=-k\frac pm-mg\Longleftrightarrow \dot p=p\left(\frac{-k}{m}\right)-mg\Longleftrightarrow p=-\frac{gm^2}{k}+Ae^{-\frac{kx}{m}}$$

$\dot x=\frac pm\Rightarrow x=\frac pm t+B$

2. Obtén la Hamiltoniana y las ecuaciones canónicas de un péndulo esférico usando coordenadas esféricas. Obtén las ecuaciones canónicas correspondientes a pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.

   Sol.: $H = \frac{p_\theta^2}{2m\,\ell^2} + \frac{p_\phi^2}{2m\,\ell^2\sin^2\theta} - m\,g\,\ell\cos\theta$ (se ha tomado el eje polar hacia abajo y el origen de potenciales en el origen de coordenadas).

$\rho=L$ cte.

$$(x,y,z)=(L\sin\theta\cos\varphi, L\sin\theta\sin\varphi, L\cos\theta)\Rightarrow(\dot x,\dot y,\dot z)=(L\dot\theta\cos\theta\cos\varphi-L\dot\varphi\sin\theta\sin\varphi,\ L\dot\theta\cos\theta\sin\varphi+L\dot\varphi\sin\theta\cos\varphi,\ -L\dot\theta\sin\theta)$$

$$\Rightarrow(\dot x^2,\dot y^2,\dot z^2)=(L^2\dot\theta^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+L^2\dot\varphi^2\sin^2\theta\sin^2\varphi-2L^2\dot\theta\dot\varphi\cancel{\sin\theta\cos\theta}\sin\varphi\cos\varphi,\ L^2\dot\theta^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+L^2\dot\varphi^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+2L^2\dot\theta\dot\varphi\cancel{\sin\theta\cos\theta}\sin\varphi\cos\varphi,\ L^2\dot\theta^2\sin^2\theta)$$

$\Rightarrow \mathcal L=T-U=\frac12 mL^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)+mgL\cos\theta$ $\qquad p_\theta=\frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot\theta}=mL^2\dot\theta\Longleftrightarrow\dot\theta=\frac{p_\theta}{mL^2}$ $\qquad p_\varphi=\frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot\varphi}=mL^2\dot\varphi\sin^2\theta$

$$H=p_i\dot q_i-\mathcal L=mL^2\dot\theta^2+mL^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2-\frac12 mL^2\dot\theta^2-\frac12 mL^2\dot\varphi^2\sin^2\theta-mgL\cos\theta=\frac{\dot\theta p_\theta+\dot\varphi p_\varphi}{2}-mgL\cos\theta\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\boxed{H=\frac{p_\theta^2}{2mL^2}+\frac{p_\varphi^2}{2mL^2\sin^2\theta}-mgL\cos\theta}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial q_i}=\cancel{\tilde{\mathcal F}_i}^{\,0}-\dot p_i \Longleftrightarrow \boxed{\dot p_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial\varphi}=0};\quad \dot p_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=-\left(\frac12\dot\theta mL^2\cos\theta+mgL\dot\theta\sin\theta\right)=\boxed{-\frac{p_\theta}{2}\cos\theta-\frac g2 p_\theta\sin\theta}\\ \frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot q_i\Longleftrightarrow\boxed{\dot\theta=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mL^2}}\ ;\quad \boxed{\dot\varphi=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{p_\varphi}{2mL^2\sin^2\theta}}\end{cases}$$

3. Obtén la Hamiltoniana y las ecuaciones canónicas de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa de potencial U en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.

Sol.: $H = \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m} + U(x,y,z)$; $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m\,r^2} + \frac{p_\phi^2}{2m\,r^2\sin^2\theta} + U(r,\theta,\phi)$; $H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\,\rho^2} + \frac{p_z^2}{2m} + U(\rho,\phi,\theta)$.

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) - U(x,y,z) \qquad p_x = m\dot x \quad p_y = m\dot y \quad p_z = m\dot z$$

$$H = p\dot q - \mathcal{L} = m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) - \frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) + U = \frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) + U = \boxed{\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m} + U(x,y,z)}$$

$$(x,y,z) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta) \Rightarrow (\dot x,\dot y,\dot z) = (\dot\rho\sin\theta\cos\varphi + \rho\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - \rho\dot\varphi\cos\theta\sin\varphi,$$
$$\dot\rho\sin\theta\sin\varphi + \rho\dot\theta\cos\theta\cos\varphi + \rho\dot\varphi\cos\theta\sin\varphi, \dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta) \Rightarrow$$

$$(\dot x^2,\dot y^2,\dot z^2) = (\dots) \Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2+\rho^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2) \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2+\rho^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2) - U$$

$$p_\rho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho} = m\dot\rho \quad p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = m\rho^2\dot\theta \quad p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = m\rho^2\sin^2\theta\,\dot\varphi \quad H = p\dot q - \mathcal{L} = m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2+\rho^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2) - \frac{1}{2}(\cdots) + U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \mathcal{L} + 2U(\rho,\theta,\varphi) = \frac{1}{2}(p_\rho\dot\rho + p_\theta\dot\theta + p_\varphi\dot\varphi) + U = \boxed{\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\theta^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right) + U(\rho,\theta,\varphi)}$$

$$(x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \Longleftrightarrow (\dot x,\dot y,\dot z) = (\dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta, \dot\rho\sin\theta + \rho\dot\theta\cos\theta, \dot z) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\dot x^2,\dot y^2,\dot z^2) = (\dot\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\dot\theta^2\sin^2\theta - 2\dot\rho\rho\dot\theta\sin\theta\cos\theta, \dot\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\dot\theta^2\cos^2\theta + 2\dot\rho\rho\dot\theta\sin\theta\cos\theta, \dot z^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2+\dot z^2) \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2+\dot z^2) - U \Rightarrow p_\rho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho} = m\dot\rho \quad p_\theta = m\rho^2\dot\theta \quad p_z = m\dot z$$

$$H = p\dot q - \mathcal{L} = m\dot\rho^2 + m\rho^2\dot\theta^2 + m\dot z^2 - \frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2+\dot z^2) + U = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2+\dot z^2) + U = \boxed{\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\theta + p_z^2\right) + U(\rho,\theta,z)}$$

6. Obtener los corchetes de Poisson $[q_i,q_j]$, $[p_i,p_j]$ y $[q_i,p_j]$ donde $\{q_i\}$ son las coordenadas generalizadas de un sistema Hamiltoniano y $\{p_i\}$ los momentos conjugados.

Sol.: $[q_i,q_j] = [p_i,p_j] = 0$; $[q_i,p_j] = \delta_{ij}$.

$$[f,g] = \sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \Rightarrow [q_i,q_j] = \sum_k\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\cancelto{0}{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}} - \frac{\partial q_j}{\partial q_k}\cancelto{0}{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}\right) = [p_i,p_j] = \sum_k\left(\cancelto{0}{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \cancelto{0}{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\right) = 0$$

$$[q_i,p_j] = \sum_k\left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}}\underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} - \cancelto{0}{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}\right) = \delta_{ik}$$

7. Comprueba que los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas del momento angular $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ verifican las siguientes relaciones

$$[\ell_x,\ell_y] = \ell_z, \qquad [\ell_y,\ell_z] = \ell_x, \qquad [\ell_z,\ell_x] = \ell_y.$$

$$\begin{vmatrix}\hat x & \hat y & \hat z\\ x & y & z\\ p_x & p_y & p_z\end{vmatrix} = \ell_x\hat x + \ell_y\hat y + \ell_z\hat z \Rightarrow \begin{aligned}\ell_x &= yp_z - zp_y\\ \ell_y &= zp_x - xp_z\\ \ell_z &= xp_y - yp_x\end{aligned}$$

$$[\ell_x,\ell_y] = \sum_i\left(\frac{\partial\ell_x}{\partial q_i}\frac{\partial\ell_y}{\partial p_i} - \frac{\partial\ell_y}{\partial q_i}\frac{\partial\ell_x}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial\ell_x}{\partial x}\frac{\partial\ell_y}{\partial p_x} - \frac{\partial\ell_y}{\partial x}\frac{\partial\ell_x}{\partial p_x} + \frac{\partial\ell_x}{\partial y}\frac{\partial\ell_y}{\partial p_y} - \frac{\partial\ell_y}{\partial y}\frac{\partial\ell_x}{\partial p_y} + \frac{\partial\ell_x}{\partial z}\frac{\partial\ell_y}{\partial p_z} - \frac{\partial\ell_y}{\partial z}\frac{\partial\ell_x}{\partial p_z} = p_y x - p_x y = \ell_z$$

$$[\ell_y,\ell_z] = \frac{\partial\ell_y}{\partial x}\frac{\partial\ell_z}{\partial p_x} - \frac{\partial\ell_z}{\partial x}\frac{\partial\ell_y}{\partial p_x} + \frac{\partial\ell_y}{\partial y}\frac{\partial\ell_z}{\partial p_y} - \frac{\partial\ell_z}{\partial y}\frac{\partial\ell_y}{\partial p_y} + \frac{\partial\ell_y}{\partial z}\frac{\partial\ell_z}{\partial p_z} - \frac{\partial\ell_z}{\partial z}\frac{\partial\ell_y}{\partial p_z} = p_z y - p_x y = \ell_x$$

$$[\ell_z,\ell_x] = \frac{\partial\ell_z}{\partial x}\frac{\partial\ell_x}{\partial p_x} - \frac{\partial\ell_x}{\partial x}\frac{\partial\ell_z}{\partial p_x} + \frac{\partial\ell_z}{\partial y}\frac{\partial\ell_x}{\partial p_y} - \frac{\partial\ell_x}{\partial y}\frac{\partial\ell_z}{\partial p_y} + \frac{\partial\ell_z}{\partial z}\frac{\partial\ell_x}{\partial p_z} - \frac{\partial\ell_x}{\partial z}\frac{\partial\ell_z}{\partial p_z} = p_x z - p_z x = \ell_y$$

$\square$

8. La identidad de Jacobi para las variables dinámicas f, g y h de un sistema Hamiltoniano es la igualdad $[f,[g,h]]+[h,[f,g]]+[g,[h,f]]=0$. Demuestra, basándote en ella, que si f, g son constantes de movimiento de un sistema Hamiltoniano, entonces $[f,g]$ también es una constante de movimiento.

Una función r es constante de movimiento si $[r,h]=0$

Si $[f,h]=[g,h]=0$ entonces $[f,0]+[h,[f,g]]+[g,[h,f]]=0$ y como $[p,q]=-[q,p]$

$[f,0]-[[f,g],h]+[g,0]=0$ y como $[f,0]=[g,0]=0 \Rightarrow -[[f,g],h]=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [[f,g],h]=0 \Rightarrow [f,g]$ es una constante de movimiento □

9. Obtén la Hamiltoniana de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza gravitatoria $\mathbf{F}=-\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r}$. Demuestra, usando los corchetes de Poisson, que el vector de Runge-Lenz

$$\mathbf{A}=\mathbf{v}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p})-\alpha\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$-\frac{\alpha}{r^3}(r\cdot\hat{r}) = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$

es constante.

Sol.: $H=\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}-\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

$U=-\int F\,dr=\alpha\int\frac{1}{r^2}dr=-\frac{\alpha}{r}$ $\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}=T-U=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{\alpha}{r}$ $\quad p_x=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}$ $\quad p_y=m\dot{y}$ $\quad p_z=m\dot{z}$

$\Rightarrow H=\sum_i p_i\dot{q}_i-\mathcal{L}=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-\mathcal{L}=\boxed{\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)-\frac{\alpha}{r}}$

$\bar{A}=\bar{v}\times(\bar{r}\times\bar{p})-\alpha\frac{\bar{r}}{r}$; $\quad \bar{r}\times\bar{p}=(l_x,l_y,l_z)=(yp_z-zp_y,\ zp_x-xp_z,\ xp_y-yp_x)\Longrightarrow$

$\bar{A}=\bar{v}\times\bar{l}-\alpha\frac{\bar{r}}{r}$; $\quad \bar{v}\times\bar{l}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \dot{x}&\dot{y}&\dot{z}\\ l_x&l_y&l_z\end{vmatrix}=(l_z\dot{y}-l_y\dot{z},\ l_x\dot{z}-l_z\dot{x},\ l_y\dot{x}-l_x\dot{y})$

Para que sea cte. de movimiento $[\bar{A},H]=0$

$\bar{A}=(l_z\dot{y}-l_y\dot{z}-\alpha,\ l_x\dot{z}-l_z\dot{x}-\alpha,\ l_y\dot{x}-l_x\dot{y}-\alpha)=$

$(\dot{y}xp_y-\dot{y}yp_x-\dot{z}zp_x+\dot{z}xp_z-\frac{\alpha x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}},\ \dot{z}yp_z-\dot{z}zp_y-\dot{x}xp_y+\dot{x}yp_x-\frac{\alpha y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}},\ \dot{x}zp_x-\dot{x}xp_z-\dot{y}yp_z+\dot{y}zp_y-\frac{\alpha z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}})$

$[\bar{A},H]=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial p_x}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial p_y}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial p_z}-\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial A}{\partial p_z}=$

$=\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{p_x}{m}+\frac{\alpha x}{r^3}\frac{\partial A}{\partial p_x}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{p_y}{m}-\frac{\alpha y}{r^3}\frac{\partial A}{\partial p_y}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{p_z}{m}-\frac{\alpha z}{r^3}\frac{\partial A}{\partial p_z}=$ $\quad$ voy a calcular solo la 1ª compo

$=(\dot{y}p_y+\dot{z}p_z+\frac{\alpha x^2}{r^3}-\frac{\alpha}{r},\ -p_y\dot{x}-\frac{\alpha xy}{r^3},\ -\dot{x}p_z-\frac{\alpha xz}{r^3})\cdot\frac{p_x}{m}+\frac{\alpha x}{r^3}\cdot(\ \cdots\ )=\bar{0}$ □

Solo 1ª compo

$\rightarrow\ (\dot{y}p_y+\dot{z}p_z+\frac{\alpha x^2}{r^3}-\frac{\alpha}{r})\cdot\frac{p_x}{m}-(\dot{y}y+\dot{z}z)\frac{\alpha x}{r^3}-(\dot{y}p_x+\frac{\alpha xy}{r^3})\frac{p_y}{m}-(x\dot{y})\frac{\alpha y}{r^3}-(\dot{z}p_x+\frac{\alpha zx}{r^3})\frac{p_z}{m}-(x\dot{z})\frac{\alpha z}{r^3}=$

$=\cancel{p_xp_y}\cdot\frac{\dot{y}}{m}+\cancel{p_xp_z}\cdot\frac{\dot{z}}{m}+p_x\frac{\alpha x^2}{mr^3}-p_x\frac{\alpha}{mr}-\dot{y}\frac{\alpha xy}{r^3}-\dot{z}\frac{\alpha xz}{r^3}-\cancel{p_xp_y}\frac{\dot{y}}{m}-p_y\frac{\alpha xy}{mr^3}-\dot{y}\frac{\alpha xy}{r^3}-$

$-\cancel{p_xp_z}\frac{\dot{z}}{m}-p_z\frac{\alpha xz}{mr^3}-\dot{z}\frac{\alpha xz}{r^3}=$ jaja no da cero