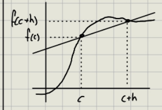
Definición Derivada

Sea I un intervalo abierto, $c\in I$, $f: I\to\mathbb{R}$ f es derivable en c si $\exists \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\text{cociente incremental}} = f'(c)$

$(c, f(c))$; $(c+h, f(c+h))$



$y = f(c) + m(x-c)$ con $m = f'(c)$

$f'(c) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

Llamaremos derivada lateral a $f'(a^+)$ ó $f'(b^-)$

$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$f'(b^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$

$\left[\alpha(h) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h} - f'(c) \iff \lim_{h\to 0}\alpha(h)=0\right] \iff f(c+h) = \underbrace{f(c)+f'(c)h}_{\text{ec. recta tang.}} + \underbrace{h\,\alpha(h)}_{\text{error}}$

f derivable en $c \iff \exists\alpha: I\to\mathbb{R}$ con $\lim_{h\to 0}\alpha(h)=0$: $f(c+h) = f(c) + \underbrace{f'(c)h}_{mh} + \underbrace{h\,\alpha(h)}_{=o(h)}$ 'o pequeña'

$\iff f(c+h) = f(c) + mh + o(h)$ $\quad m = f'(c)$

Definición o pequeña

Una función $o: I\to\mathbb{R}$ se dice que es la o pequeña de h en $c\in I$ si $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0$

Definición diferencial

$f: I\to\mathbb{R}$ es diferenciable en $c\in I$ si existe una aplicación lineal $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, llamada diferencial de f en c y denota por $Df(c)$ tal que $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)-L(h)}{h} = 0$ aka $f(c+h)-f(c)-L(h) = o(h)$

Corolario

f es derivable en $I^* \iff f$ es diferenciable en I^* $\qquad$ *en $\mathbb{R}$

Álgebra de funciones derivables

Si $f: I\to\mathbb{R}$, $g: I\to\mathbb{R}$, $c\in I$, f y g derivables en I entonces:

1. $f+g$ es derivable en c y $(f+g)'(c) = f'(c)+g'(c)$
2. $f\cdot g$ es derivable en c y $(f\cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + g'(c)f(c)$
3. f/g es derivable en c y $(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c)-g'(c)f(c)}{g(c)^2}$

Regla de la cadena

Sea $f_1: I_1\to\mathbb{R}$, $f_2: I_2\to\mathbb{R}$, $f_1(I_1)\subseteq I_2$, $c\in I_1$, f_1 derivable en c y f_2 derivable en $f_1(c)$:

$(f_2\circ f_1)$ es derivable en c y $(f_2\circ f_1)'(c) = f_2'(f_1(c))f_1'(c)$

$f(x) = x^x$ en $c>0$

$f(x) = x^x = e^{x\ln x} = (f_2\circ f_1)(x)$ $\qquad \left.\begin{matrix} f_1 = x\ln x \\ f_2 = e^x\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f_1'(x) = \log(x)+1 \\ f_2'(x) = e^x\end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x+1) = x^x(\ln x+1)$

Monotonía

- Puntual

f creciente en $c\in I$ $(f: I\to\mathbb{R})$ si $\exists\varepsilon>0$: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$ $\forall x\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ ¡Abierto!

f decreciente en $c\in I$ $\quad$ si $\exists\varepsilon>0$: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$ $\forall x\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

f estrictamente creciente en $c\in I$ $\quad$ si $\exists\varepsilon>0$: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ $\forall x\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

f estrictamente decreciente en $c\in I$ $\quad$ si $\exists\varepsilon>0$: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0$ $\forall x\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

- General

$f: I\to\mathbb{R}$ monótona creciente $\iff$ es creciente en cada $c\in I$ $\quad$ idem con decreciente

Extremos Relativos

f presenta en $c\in I$ un máximo relativo si $\exists\varepsilon>0$ tq $f(c)\geq f(x)$ $\forall x\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon)\cap I$

f presenta en $c\in I$ un mínimo relativo si $\exists\varepsilon>0$ tq $f(c)\leq f(x)$ $\forall x\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon)\cap I$

Idem con máximo/mínimo estricto o absoluto con $>$ y $<$ respectivamente

Proposición

$f: I\to\mathbb{R}$, $c\in I$, I intervalo abierto, f derivable en c

1. $f'(c)\geq 0 \iff f$ es estricta. creciente en c $\quad$ ($f'(c)>0 \Rightarrow f$ estricta. creciente en c)
2. $f'(c)\leq 0 \iff f$ es estricta. decreciente en c $\quad$ "
3. Si f tiene un extremo relativo en $c \Longrightarrow f'(c)=0$

¿$\Longleftarrow$?

$x\to c$

$f'(c)>0$

Demostración

1. f derivable en $c \Rightarrow f'(c) = f(c) + f'(c)(x-c) - o(x-c) \Longrightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) + \frac{o(x-c)}{x-c} > 0$ ¿en $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ para algún $\varepsilon>0$?

?

$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x\sin\frac{1}{x} + 2x^2\cos\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 1+4x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h+2h^2\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(1+2h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right) = 1 \Longrightarrow$ f es estrictamente creciente en cero y además f no es creciente en $(-\varepsilon, \varepsilon)$ para $\varepsilon>0$

- ¿Qué tipos de discontinuidad puede tener la derivada de una función?
- Sea $f: [-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3+x^2+1$ Calcula los máximos y mínimos de f

Teorema de Rolle

Sea $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). $\qquad f(a)=f(b) \Longrightarrow \exists c\in[a,b]: f'(c)=0$

Teorema del valor medio de Cauchy

Sea $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). $\qquad \exists c\in(a,b): (f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$

Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). $\qquad \exists c\in(a,b): f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

Corolario

Sea $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b), entonces:

1. $f'(x)=0$ en $[a,b]$ $\Rightarrow f$ es constante en (a,b)
2. $f'(x)\geq 0$ en $[a,b]$ $\Rightarrow f$ es creciente en (a,b)
3. $f'(x)\leq 0$ en $[a,b]$ $\Rightarrow f$ es decreciente en (a,b)
4. $f'(x)>0$ en (a,b) $\Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a,b]$
5. $f'(x)<0$ en (a,b) $\Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a,b]$

Corolario T$^{\text{ma}}$ de los incrementos finitos

$f: [a,b]\to\mathbb{R}$ continua, derivable en (a,b)

Si $|f'(x)|\leq M$ $\forall x\in(a,b)$ entonces $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$ $\forall x,y\in[a,b]$

Corolario

Sea $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b)

Si $f'(c)=0$ y $\exists\delta>0$: $f'(x)\geq 0$ si $x\in(c-\delta, c)\cap(a,b)$ y $f'(x)\leq 0$ si $x\in(c, c+\delta)\cap(a,b) \Rightarrow f$ tiene máximo relativo en c

El desarrollo de orden $n-1$ de f' se puede obtener derivando el desarrollo de orden n de f y bajando una unidad el orden del resto de Landau

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1})$

Condición suficiente de extremo

$f: I\to\mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I, $x_0\in I$, existe la derivada $n-1$ de f en I, y la derivada n-ésima de f en x_0 $\quad f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0)\neq 0$

a) Si n es par en x_0 hay un máximo relativo si $f^{(n)}(x_0)<0$ o un mínimo relativo si $f^{(n)}(x_0)>0$

b) Si n es impar, no hay extremo relativo en x_0

ejemplo: extremos relativos de $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos(x)$

$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin(x)$ $\qquad x_0 = 0$

$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos(x)$ $\qquad f''(x_0) = 0$

$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin(x)$ $\qquad f'''(x_0) = 0$

$f^{IV}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos(x)$ $\qquad f^{IV}(x_0) = 4 > 0 \Rightarrow$ min rel.

Convexidad y concavidad

Sea $f: I\to\mathbb{R}$ definida en un intervalo I se dice:

1. f es convexa en I si $\forall x_0, x_1\in I$ $\forall t\in[0,1]$ se cumple $f(\underbrace{(1-t)x_0 + tx_1}_{\text{puntos en } [x_0,x_1]}) \leq \underbrace{(1-t)f(x_0) + tf(x_1)}_{\text{segmento que une } (x_0,f(x_0)) \text{ con } (x_1,f(x_1))}$
2. f es cóncava en I si $\forall x_0, x_1\in I$ $\forall t\in[0,1]$ se cumple $f((1-t)x_0 + tx_1) \geq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$

1. $f(x) = ax+b$ $\quad$ convexa y cóncava
2. $f(x) = x^2$ $\quad$ convexa
3. $f(x) = |x|$ $\quad$ convexa

Teorema

Si $f: I\to\mathbb{R}$ definida en un intervalo

f convexa en $I \Rightarrow f$ continua en el interior de I

Proposición

Sea $f: I\to\mathbb{R}$ derivable en un abierto I es equivalente:

- f convexa en I
- Para cada punto de I la gráfica de I está por encima de la recta tangente en ese punto
- f' es creciente
- f derivable 2 veces $\Rightarrow f''(x)\geq 0$ $\forall x\in I$

Definición

Sea $f: I\to\mathbb{R}$ derivable en $x_0\in I$, decimos que

1. f es convexa en x_0 si $\exists\delta>0$: $f(x)\geq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{recta tang en } x_0}$ $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$
2. f es cóncava en x_0 si $\exists\delta>0$: $f(x)\leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$
3. x_0 es un punto de inflexión si $\exists\delta>0$: $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\quad x\in(x_0-\delta, x)$

$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\quad x\in(x, x_0+\delta)$

Proposición

Sea $f: I\to\mathbb{R}$, I intervalo abierto, f derivable en un entorno de x_0 y tal que existe $f''(x_0)$. Entonces:

1. Si $f''(x_0)>0$ entonces f es convexa en x_0
2. Si $f''(x_0)<0$ entonces f es cóncava en x_0
3. Si x_0 es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0)=0$
4. Si f es $n-1$ veces derivable en x_0, existe $f^{(n)}(x_0)$ y $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ $\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0$, Entonces:
   a) si n es par y $f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow f$ es convexa en x_0
   b) si n es par y $f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow f$ es cóncava en x_0
   c) si n es impar $\Rightarrow x_0$ es un punto de inflexión

Proposición

Sea $f: I\to\mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto y derivable:

f es convexa en $I \iff f$ es convexa en cada punto de I

Si $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ es continua y convexa en $(a,b) \Rightarrow f$ es convexa en $[a,b]$ $\quad$ (aplicable a concavidad también)

Ejemplo: $x\log 2 \geq \log(1+x^2)$ $\forall x\in[0,1]$

Sea $f(x) = \log(1+x^2)$ $\qquad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ $\qquad f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} > 0$ $\forall x\in[0,1)$ $\quad$ en 1 se anula pero comprobándolo en $\ast$, la desigualdad se cumple

$\Rightarrow f(x)$ es convexa en $[0,1)$

$f(tx + (1-t)x') \leq tf(x) + (1-t)f(x')$ $\quad \forall x,x'\in I=[0,1]$ $\quad \forall t\in[0,1]$ $\qquad$ de $\ast$ $f(z)\leq z f(1) + (1-z)f(0)$ $\forall z\in[0,1]$

$\log(1+(1-t)^2) = f((1-t)) \leq tf(0) + (1-t)f(1) = (1-t)\log 2$ $\quad \forall t\in[0,1]$ $\qquad f(1) = \log 2$ $\quad f(0) = \log(1) = 0$

si $x=0$, $x'=1$

Ejercicio: Comprueba si se cumple la desigualdad de Bernouilli generalizada $(1+x)^\alpha > 1+\alpha x$ si $x>-1$, $x\neq 0$, $\alpha>1$

$h(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x) > 0$ $\qquad h'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\left[(1+x)^{\alpha-1}-1\right] > 0$ si $x>0$

$h'(x)>0$ si $-1<x<0$ $\qquad h'(0)=0$ $\qquad \left.\begin{matrix} h \text{ estr. creciente en } (0,+\infty) \\ h \text{ estr. decreciente en } (-\infty, 0) \\ h(0)=0\end{matrix}\right\}$ $h(x)>0$ si $x>-1$ y $x\neq 0$

Proposición

Sea $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b), $\quad x,y\in(a,b)$ y $f'(x)<\eta<f'(y) \Rightarrow \exists c\in(a,b)$: $f'(c)=\eta$

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ $\forall y$

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, sea $f: I\to\mathbb{R}$ una función derivable en I tal que:

$\forall x\in I$, $f'(x)\neq 0$. Entonces f^{-1} existe, es derivable en $f(I)$ y tenemos: $\forall x\in I$, $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$