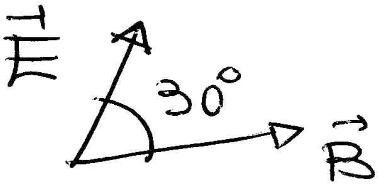
En un sistema de referencia S los campos eléctrico y magnético forman un ángulo de 30º y además la relación entre sus módulos es $E = 2cB$. Determinar, en función de c y B, los módulos de los campos eléctrico y magnético, E' y B', respectivamente, en un nuevo sistema de referencia S' en el que los campos eléctrico y magnético forman un ángulo de 45º.

Sistema de referencia S

$\vec{E}, \vec{B}$

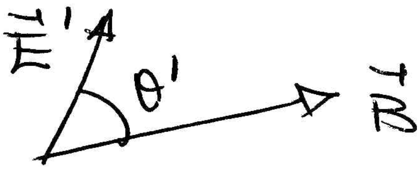


$\theta = 30^\circ$

$E = 2cB$

Sistema de referencia S'

$\vec{E}', \vec{B}'$



$\theta' = 45^\circ$

E', B'

$\vec{E} \cdot \vec{B}$ es un invariante del campo electromagnético de modo que:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}'$$

Entonces:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E B \cos\theta = E B \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} E B$$

Como $E = 2cB$:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\sqrt{3}}{2} 2cBB = \sqrt{3}\, c B^2$$

$$\underline{\underline{\vec{E} \cdot \vec{B} = \sqrt{3}\, c B^2}}$$

También es invariante la cantidad $|\vec{E}|^2 - c^2|\vec{B}|^2$, luego en el sistema S:

$$|\vec{E}|^2 - c^2|\vec{B}|^2 = 4c^2B^2 - c^2B^2 = 3c^2B^2$$

$$\underline{\underline{|\vec{E}|^2 - c^2|\vec{B}|^2 = 3c^2B^2}} \qquad (2)$$

Calculamos los invariantes del campo electromagnético en el sistema S':

$$\vec{E}' \cdot \vec{B}' = E'B'\cos\theta' = E'B'\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}E'B'$$

$$\underline{\underline{\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \frac{\sqrt{2}}{2}E'B'}} \qquad (3)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (3):

$$\sqrt{3}\,c\,B^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}E'B'$$

despejando B':

$$\underline{\underline{B' = 2\sqrt{\frac{3}{2}}\,c\,\frac{B^2}{E'}}}$$

Entonces:

$$|\vec{E}'|^2 - c^2|\vec{B}'|^2 = E'^2 - c^2\,4\,\frac{3}{2}\,c^2\frac{B^4}{E'^2} =$$

$$= E'^2 - 6c^4\frac{B^4}{E'^2}$$

y como $|\vec{E}'|^2 - c^2|\vec{B}'|^2 = |\vec{E}|^2 - c^2|\vec{B}|^2$, de la ecuación (2):

$$E'^2 - 6c^4 \frac{B^4}{E'^2} = 3c^2B^2$$

multiplicando por E'^2 y reordenando:

$$E'^4 - 3c^2B^2E'^2 - 6c^4B^4 = 0$$

que es una <u>ecuación bicuadrada en E'</u>, cuya solución es:

$$E'^2 = \frac{3c^2B^2 \pm \sqrt{9c^4B^4 + 24c^4B^4}}{2} =$$

$$= \frac{3c^2B^2 \pm \sqrt{33}\, c^2B^2}{2} = \frac{3+\sqrt{33}}{2} c^2B^2$$

(sólo es válida la solución (+) pues $E'^2 > 0$)

de donde:

$$E' = \sqrt{\frac{3+\sqrt{33}}{2}}\, cB = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{33}}{2}}\, \overbrace{2cB}^{E}$$

$$B' = 2\sqrt{\frac{3}{2}}\, c\, \frac{B^2}{E'} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{33}}}\, \frac{cB^2}{cB} =$$

finalmente:

$$= 2\sqrt{\frac{3}{3+\sqrt{33}}}\, B$$

$$\boxed{E' = \sqrt{\frac{3+\sqrt{33}}{2}}\, cB; \quad B' = 2\sqrt{\frac{3}{3+\sqrt{33}}}\, B}$$