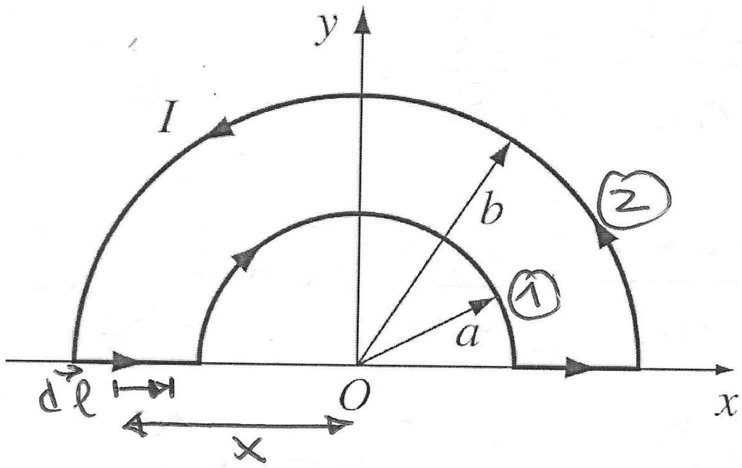
La espira que se muestra en la figura tiene carga neta nula y transporta una corriente cuya intensidad I aumenta linealmente con el tiempo t de modo que:

$$I(t) = kt \ \ (-\infty < t < +\infty), \qquad k = \text{constante}$$

(a) Determinar los potenciales retardados ϕ y **A** en el punto O.

(b) Encontrar el valor del campo eléctrico **E** en el punto O. ¿Por qué a pesar de que la carga neta de la espira es nula, ésta produce un campo eléctrico?

(c) ¿Por qué no se puede determinar el campo magnético **B** creado por la espira de la expresión del potencial vector **A** obtenida en el apartado (a)?



(a) $\phi = 0$ porque la espira no tiene carga neta

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(t')}{R} d^3x' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(t')}{R} \vec{dl}$$

$$\left. \begin{array}{l} t' = t - \frac{R}{c} \\ R = |\vec{r} - \vec{r}\,'(t')| \\ \vec{r} = \vec{0} \text{ en } O. \end{array} \right\}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{k t'}{R} \vec{d\ell} = \frac{\mu_0 k}{4\pi} \int \frac{t - \frac{R}{c}}{R} \vec{d\ell} =$$

$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi} \left[t \int \frac{\vec{d\ell}}{R} - \frac{1}{2} \int \vec{d\ell} \right]$$

Para la espira completa:

$$\int d\vec{l} \equiv \oint d\vec{l} = 0$$

luego:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 k t}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{R} =$$

$$= \frac{\mu_0 k t}{4\pi} \left[\frac{1}{a} \int_1 d\vec{l} + \frac{1}{b} \int_2 d\vec{l} + 2\hat{u}_x \int_a^b \frac{dx}{x} \right]$$

$$\int_1 d\vec{l} = 2a\hat{u}_x \; ; \quad \int_2 d\vec{l} = -2b\hat{u}_x \; ; \quad \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 k t}{4\pi} \left[\frac{1}{a}(2a) + \frac{1}{b}(-2b) + 2\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] \hat{u}_x$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 k t}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{u}_x}$$

(b) $$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{u}_x$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0 k}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{u}_x}$$

El campo eléctrico $\vec{E}$ es debido al campo magnético variable con el tiempo.

(c) Como sólo conocemos $\vec{A}$ en un punto (el centro), no podemos calcular $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ para obtener $\vec{B}$.