TEMA 13. TEORÍA DE GRUPOS.

Tª grupos relacionado con simetría.
La idea es que las Leyes de la Física mantienen la misma forma matemática bajo ciertas transformaciones.

Grupo $G = \{a, b, c\}$ es un conjunto de elementos que incluye una multiplicación (o regla de composición) t.q. $a \in G$ y $b \in G \Rightarrow ab \in G$.

Si $ab = ba$, G es abeliano

Si $ab \neq ba$, G es no abeliano

(Esa multiplicación es en sentido abstracto. La implementación de dicha operación puede variar de grupo a grupo).

Axiomas de grupo

i) Asociatividad : $(ab)c = a(bc)$

ii) Elemento identidad: $ae = ea = a$ (es único)

iii) " inverso : $\forall a \in G \ \exists \ a^{-1}$ t.q. $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

iv) El orden del grupo es el nº elementos que pertenecen a G.

Representación de un grupo

Una representación, F, es una aplicación que lleva elementos del grupo $g \in G$ a operadores lineales, F, que preservan la regla de composición de G:

$$F(a)\,F(b) = F(ab)$$

$$F(e) = I$$

Supongamos que $a, b \in G$ y $f \in H$ donde H es otro grupo. Si se satisface

$f(a)\,f(b) = f(ab)$, diremos que G es homeomorfo a H. (Vamos, que tienen una estructura similar).

Ejemplos: $(\mathbb{Z}, +)$ forma un grupo pero $(\mathbb{Z}, \times)$ no lo forma. ($1/z$ no es un entero)

Parámetros de grupo

Igual que $y = f(x)$ y decimos que x es el "input", un grupo puede ser función de varios "inputs" que llamamos parámetros.

Sea G con $g \in G$ tal que g está especificado por un conjunto finito de parámetros (digamos n parámetros). Si este conjunto de parámetros es $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$, el elemento del grupo es $g = G(\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n)$. La identidad es $e = G(0, 0, \dots, 0)$.

Vamos a estudiar brevemente unos grupos muy importantes para la Física.

Grupos de Lie

Hay grupos discretos con un nº finito de elementos pero la mayoría que consideraremos tendrán un número infinito. Pero tendrán un nº finito de parámetros que variarán de forma continua.

Si un grupo

a) depende de un conjunto finito de parámetros continuos, θ_i

b) $\exists$ las derivadas de los elementos del grupo con respecto a todos los parámetros, entonces es un grupo de Lie.

Sea un grupo con un solo parámetro, θ.

$$g(\theta)\Big|_{\theta=0} = e \quad (\text{identidad})$$

Los generadores del grupo se obtendrán así:

$$X = \frac{\partial g}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} \quad (X \text{ es un generador})$$

Si el grupo es n-paramétrico, tendremos n generadores

$$X_i = \frac{\partial g}{\partial \theta_i}\Big|_{\theta_i = 0}.$$

Para algunos θ finitos, los generadores nos permiten definir una representación del grupo, D, de la forma

$$D(\theta) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\theta X}{n}\right)^n = e^{i\theta X}$$

Si X es hermítico,

$$X_i = -i\,\frac{\partial g}{\partial \theta_i}\Big|_{\theta_i = 0}$$

y $X = X^{\dagger}$. Además, la representación del grupo será unitaria:

$$D^{\dagger}(\theta) = (e^{i\theta X})^{\dagger} = e^{-i\theta X^{\dagger}} = e^{-i\theta X}$$

$$\Rightarrow \quad D^{\dagger}(\theta)\, D(\theta) = (e^{-i\theta X})(e^{i\theta X}) = 1.$$

Los generadores de un grupo forman un espacio vectorial. Un espacio vectorial completo puede ser usado como base para representar otros espacios vectoriales (p.ej., las matrices de Pauli sirven para describir cualquier matriz 2x2).

Los generadores satisfacen una relación de conmutación

$$\boxed{[X_i, X_j] = i\, f_{ijk} X_k}$$ constantes de estructura del grupo.

↳ Esto es el álgebra de Lie del grupo

(recordad momento angular o matrices de Pauli en Mecánica Cuántica).

En lo que sigue vamos a centrarnos únicamente en unos grupos especiales.

Observación: además de estructura de grupo, los grupos de Lie tienen estructura de variedad diferenciable.

Grupos unitarios

Juegan un papel importante en física de partículas porque también lo hacen en mecánica cuántica.

Observación: los operadores unitarios conservan el producto interno $\Rightarrow$ probabilidades entre estados no se ven afectadas por una transformación unitaria

$U(N)$: conjunto de matrices unitarias $N \times N$
$\hookrightarrow$ grupo unitario

$SU(N)$: conjunto de matrices unitarias $N \times N$ con det $= +1$.
$\hookrightarrow$ grupo especial unitario

Observación: $\dim[SU(N)] = N^2 - 1$

3 ($Z^0, W^{\pm}$) portadores int. débil.

agrupamiento de partículas en dobletes o tripletes

$SU(2)$ tiene $2^2 - 1 = 3$ generadores

$SU(3)$ tiene $3^2 - 1 = 8$ generadores

$U(1)$ " 1 generador

ej: $\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$

fotón (int. em.).

8 gluones portadores interacción fuerte.

Observación: al igual que discutimos con el isospin, el e^- y el ν_e se pueden intercambiar (son indistinguibles) en lo concerniente a interacciones débiles.

(Observación experimental? → agrupamiento → simetría?)

Comentarios sobre $U(1)$:

Una matriz "1x1" es un número complejo que vamos a escribir en forma polar.

- $U(1)$ tiene un único parámetro, θ y una simetría $U(1)$ tiene la forma

$$U = e^{-i\theta} \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

- $U(1)$ es abeliano:

$$U_1 U_2 = e^{-i\theta_1} e^{-i\theta_2} = e^{-i\theta_2} e^{-i\theta_1} = U_2 U_1$$

$$\left(= e^{-i(\theta_1+\theta_2)} = e^{-i(\theta_2+\theta_1)} \right)$$

- $\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$ es $U(1)$ invariante.

Es decir, la transformación

$$\varphi \to e^{-i\theta}\varphi$$

deja a $\mathcal{L}$ invariante.

• Observación: los portadores de las interacciones fundamentales (bosones gauge), se van a asociar a simetrías unitarias. [Por ejemplo, $U(1) \longleftrightarrow$ fotón].

Resumiendo, $U = e^{-i\theta} = S^1$ (círculo unitario)

Comentarios sobre $SU(2)$:

El siguiente grupo unitario no trivial es $U(2)$ (conjunto de las matrices 2×2).

Unitarias: $UU^+ = U^+U = I$

En Física, estamos interesados en un subgrupo de $U(2)$: $SU(2)$ (matrices unitarias 2×2 con $\det = +1$).

Los generadores de $SU(2)$ son las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\,\varepsilon_{jkl}\,\sigma_l$$

↳ símbolo completamente antisimétrico de Levi-Civita.

En tres dimensiones

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (1,2,3),\ (2,3,1)\ o\ (3,1,2) \\ -1 & (3,2,1),\ (1,3,2)\ o\ (2,1,3) \\ 0 & i=j\ \ o\ \ j=k\ \ o\ \ k=i \end{cases}$$

Como todas las matrices unitarias 2×2 están especificadas por dos parámetros complejos, a y b, escribimos

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}.$$

Para $SU(2)$, $\det U = +1 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1$.

debido a lo anterior, tenemos la siguiente observación: $SU(2) = S^3$.

Además, un elemento de $SU(2)$ se va a escribir como

$$U = e^{i \sigma_j \alpha_j / 2}$$

, donde σ_j es una de las matrices de Pauli y α_j es un número.

Comentarios sobre $SU(3)$:

Va a ser importante en el estudio de quarks y QCD.

Como ya dijimos, tiene 8 generadores: las matrices de Gell-Mann

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Satisfacen las reglas de conmutación

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k \qquad \text{con}$$

$$f_{123} = 1 \qquad f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

• Observación : geométricamente se tiene

$$SU(3) \xhookrightarrow{S^3 \ \text{fibra}} S^5$$

↳ base

$$\begin{pmatrix} \dim (SU(3) = 8) \\ \dim (SU(2) = 3) \\ \dim (U(1) = 1) \end{pmatrix}$$