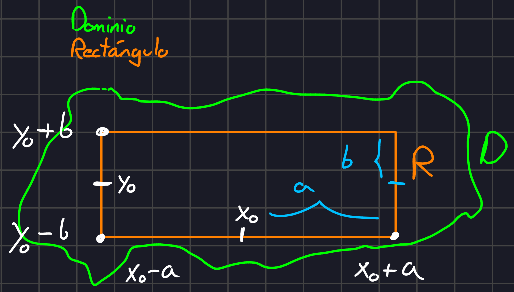
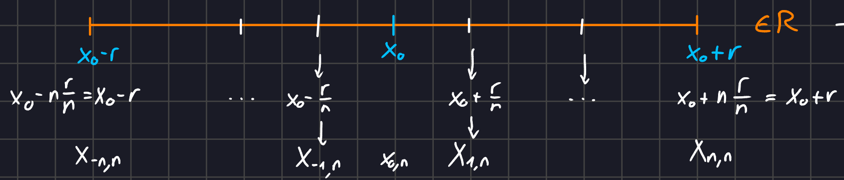
TEOREMA: PEANO – CAUCHY

$\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$ PVI (x_0, y_0) $\longrightarrow$ 1. $f(x,y)$ continua en D $\Rightarrow \exists$ sol
$\searrow$ 2. $R \subseteq D$



Sea $r = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ con $M = \max\left\{|f(x,y)| : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
sabemos que la solución de la edo sol $\in [x_0 - r, x_0 + r]$

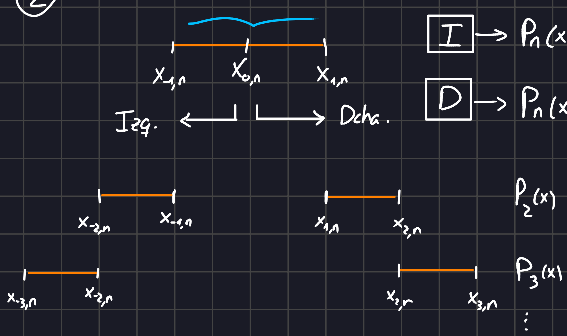
① Hacemos la partición:



$y = \underbrace{b}_{y_0} + \underbrace{x}\ \underbrace{m}_{y_0}$ ¡Recta!

¿I = D?

②



$\boxed{I} \to P_n(x) = P_n(x_0, n) + (x - x_{0,n})\, f(x_{0,n}, P_n(x_{0,n})) = y_0 + (x - x_{0,n})\, f(x_0, y_0) \overset{④}{=}$

$\boxed{D} \to P_n(x) = P_n(x_0, n) + (x - x_{0,n})\, f(x_{0,n}, P_n(x_{0,n})) = y_0 + (x - x_{0,n})\, f(x_0, y_0) \overset{④}{=}$

Ⓘ $\longleftarrow P_n(x) = P_n(x_{-i,n}) + (x - x_{-i,n})\, f(x_{-i,n}, P_n(x_{-i,n}))$

Ⓓ $\longleftarrow P_n(x) = P_n(x_{i,n}) + (x - x_{i,n})\, f(x_{i,n}, P_n(x_{i,n}))$ $i \rightharpoonup$

↳ Sucesión que sabemos que contiene la solución de la edo

¿solución?

③ Sea $\hat{r} = \sup\left\{\rho \in [0, r] : \forall x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho],\ (x, P_n(x)) \in R\right\}$ → El r_0 más grande que mantiene a toda $f(x,y)$ vaya dentro del rectángulo R

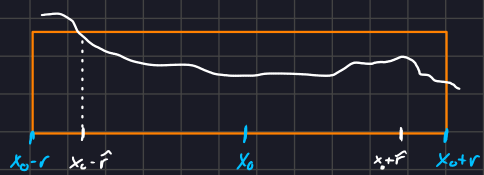
$$q_n(x) = \begin{cases} f(x_0, y_0) & \text{si } x = x_0 \\ f(x_{-i,n}, y_{-i,n}) & \text{si } Ⓘ \\ f(x_{i,n}, y_{i,n}) & \text{si } Ⓓ \end{cases}$$

Derivada de $P_n(x)$

↳ por definición $\in R$

$q_n(x) \in R \to |q_n(x)| \leq M$

↳ AKA toda partición $q_n(x)$ de $f(x,y)$ será menor a su máximo



④ Reescribimos ②:

$$P_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} P_n'(t)\,dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} q_n(t)\,dt = y_0 + q_n(x - x_0) \overset{*}{=} \uparrow ②$$

$y = b + x\, m \qquad = b + x\, m \qquad = b + m x \longrightarrow$ ¡Recta!

⑤

$|P_n(x) - y_0| \leq \max\left\{|q_n(x)|\,|x - x_0|,\ |x - x_0| \leq \hat{r}\right\} \leq M\hat{r} \leq Mr \leq b$

↳ AKA, $t(x) \leq \max\{|t(x)|\}$

↳ $|\cancel{y_0} + \underbrace{q_n(x - x_0)}_{t(x)} - \cancel{y_0}|$

$|q_n(x)| \leq M$
$|x - x_0| \leq \hat{r}$

caso extremo $r = \hat{r}$

$\hookrightarrow r = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$

$\nearrow r = a : Mr = Ma < M\frac{b}{M} = b \Rightarrow r < b$ ✓ (por def. de r)

$\searrow r = \frac{b}{M} : Mr = M\frac{b}{M} = b \Rightarrow r = b$ ✓

$f(x,y)=\frac{(x+1)y^6}{(x+1)^3+y^9}$ $\quad \lim_{(x,y)\to(-1,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{(z,y)\to(0,0)\\ z=x+1}} \frac{zy^6}{z^3+y^9}$

$\lim_{(ay^3,y)\to(0,0)} \frac{ay^9}{a^3y^9+y^9} = \lim_{(ay^3,y)\to(0,0)} \frac{y^9}{y^9}\cdot\frac{a}{a^3+1} = \frac{a}{a^3+1}$

$\Rightarrow$ Depende solo de $a \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(-1,0)} f(x,y)$

⑥ Aplicamos el teorema ASCOLI – ARCELA $\longrightarrow$ Condición poligonales
- Uniformemente acotada $\boxed{1}$
- Equicontinua $\boxed{2}$

↳ Demostramos la existencia de una subsucesión convergente

Desigualdad Triangular

$\boxed{1}$ $|P_n(x) - y_0| \leq b \iff |P_n(x)| - |y_0| \leq b \iff |P_n(x)| \leq b + |y_0| = K \longrightarrow$ ¡Independiente de n!

$\boxed{2}$ $|P_n(x) - P_n(x_1)| = \left|\int_x^{x_0} q_n(t)\right| \leq M|x-x_0| \leq M\delta = \varepsilon \longrightarrow$ Si tomamos $\varepsilon = M\delta \longrightarrow$ equicontinua

↳ $|x-x_0|<\delta$

Continua $\forall n$

↳ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$

AKA, Para x, x_0 muy cercanos, las imágenes de TODAS las $f_n(x)$ están cerca

$\Rightarrow \exists$ subsucesión convergente a $y(x)$

$P_{n_j}(x) \longrightarrow y(x)$

⑦ ¿Es $y(x)$ solución de la edo?

1. $q_{n_j}(x) \longrightarrow f(x, y(x))$ uniformemente ¿? ✓ $\longrightarrow$ Demostración misco que le da igual a JayZ

2. ¿$y(x)$ solución de la edo?

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f(t, y(t))}_{=q}\, dt \longleftarrow \text{Teorema Fundamental del Cálculo}$$

$\longrightarrow y'(x) = f(x, y(x))$ ✓ $=q$

$\longrightarrow y(x_0) = y_0 \qquad y(x_0) = y_0 + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} \cancel{f(t, y(t))}\, dt}_{0}$ ✓

□