Dinámica en campos centrales

Autora:
Aroa Antón Samaniego

Mecánica Newtoniana y Relatividad. Prácticas de ordenador.Grado en Física.
Curso 2022-2023

Índice

1. Introducción

En esta práctica vamos a estudiar la interacción gravitatoria entre dos cuerpos, donde, mediante un programa de python, vamos a estudiar el movimiento de un satélite orbitando alrededor de la Tierra.

Esta interacción que se va a dar entre la Tierra y el satélite va a ser un campo central, es decir, la fuerza entre ambos cuerpos va a depender únicamente de la distancia que los separe, y va a estar dirigida en esa dirección.

2. Cuestiones

Para empezar estableceremos las siguientes condiciones iniciales:

```
mt= 5.9*10**(24) #masa de la Tierra
ms = 700 #masa satelite
m = (mt*ms)/(ms+mt) #masa reducida
gr= 6.67*10**(-11) #cte. de gravitación universal
Rt = 6378000 #radio de la tierra
R = 300000 #radio orbita
```

Además, al ser un campo central se conserva el momento angular,por lo que este va a ser constante en todo momento y podemos calcular su módulo con la expresión:

$$L = rmv = rm\sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{1}$$

La fuerza que se da entre ambos cuerpos es de la forma:

$$\vec{F} = \frac{-GMm}{r^2}\vec{u_r} \tag{2}$$

,donde M es la masa de la Tierra y m la del satélite.

Por lo que para describir el movimiento relativo tenemos:

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{-GMm}{r^2}\vec{u_r} \tag{3}$$

donde μ es la masa reducida.

Si rescribimos esta ecuación en coordenadas esféricas y consideramos la conservación del momento angular llegamos a:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu^2 r^3} - \frac{GMm}{r^2\mu} \tag{4}$$

Si expresamos esta ecuación como un gradiente obtenemos el potencial efectivo:

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu^2 r^2} - \frac{GMm}{r\mu} \tag{5}$$

La solución de la trayectoria del cuerpo queda:

$$r = \frac{\frac{L^2}{GMm\mu}}{1 + \epsilon cos\theta} \tag{6}$$

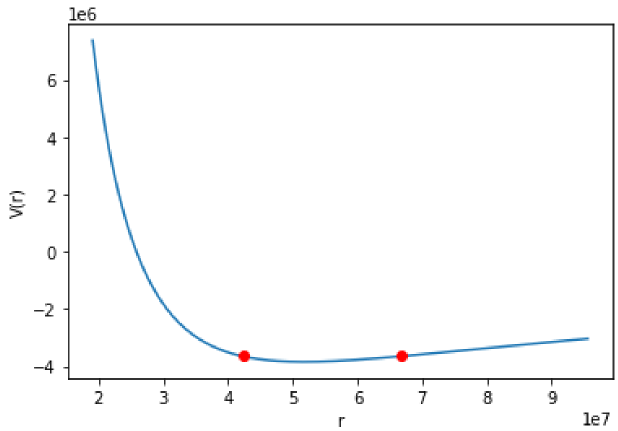
,donde ϵ es la excentricidad de la órbita.

En nuestro caso para calcular la trayectoria que sigue el cuerpo vamos a resolver (4) utilizando la rutina odeint de python y vamos a ir viendo que trayectoria describe el cuerpo si le damos distintas condiciones iniciales.También vamos a tener en cuenta la energía mecánica del sistema, que ha de conservarse, y la calcularemos mediante la expresión:

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{\frac{GmM}{r}}{m} \tag{7}$$

2.1.

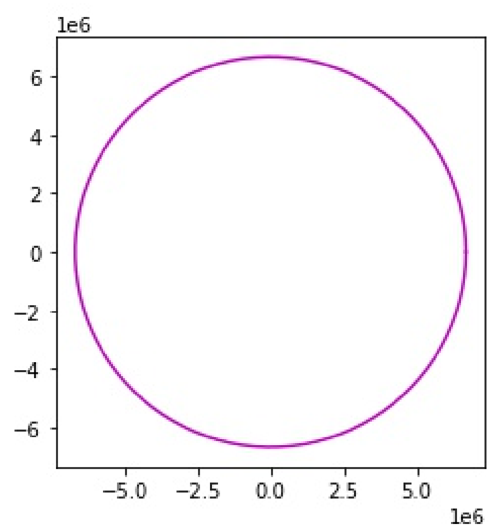
En primer lugar, si situamos el satélite de tal manera que realice una órbita de aproximadamente 300km y dibujamos el potencial efectivo obtenemos la siguiente gráfica:



En la gráfica podemos ver cómo varía el potencial efectivo dependiendo del valor de r. Si calculamos la energía mecánica, que es constante, y la representamos obtenemos los 2 puntos de corte que observamos en la figura que serán el perigeo y el apogeo respectivamente. En este caso hemos calculado la energía mecánica para una órbita elíptica, tema en el que profundizaremos más adelante.

2.2.

Si resolvemos la ecuación de movimiento (4) tomando como radio inicial el de la Tierra más 300 km y la velocidad inicial como $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ obtenemos la siguiente órbita:



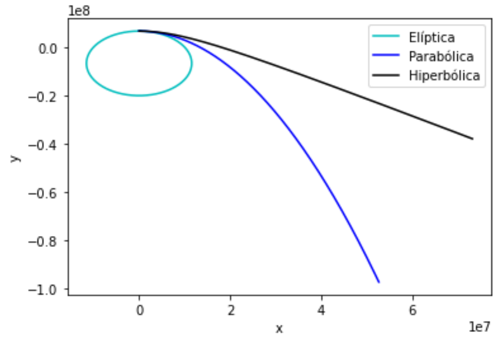
Como vemos en este caso la órbita es circular, lo que quiere decir que su radio es constante.

Si comparamos este resultado con los obtenidos analíticamente en clase vemos que efectivamente concuerdan, ya que hemos tomado como velocidad inicial la deducida para una órbita circular y efectivamente el satélite describe una órbita circular.

2.3.

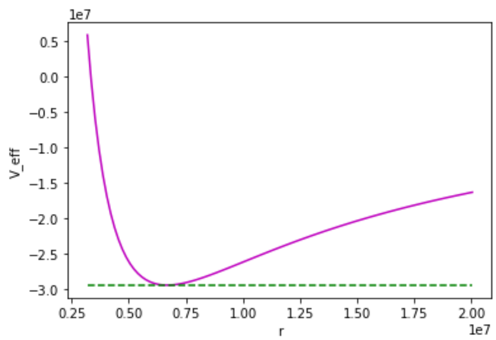
Ahora vamos a variar las condiciones iniciales, de tal manera que el satélite describa los distintos tipos de órbita que podemos tener.

Para obtener las distintas trayectorias hemos modificado la velocidad inicial con un factor, por lo que la expresión de la velocidad inicial queda $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{rf}}$ y dependiendo del valor que le demos a f obtenemos los siguientes resultados:



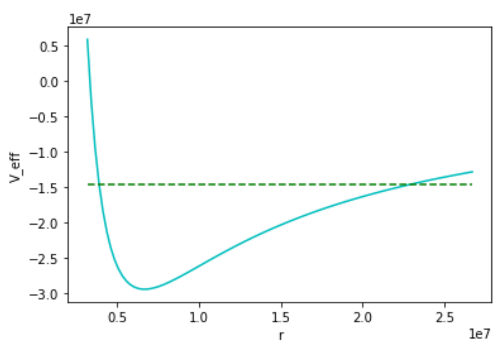
Como podemos ver en la figura depende de la velocidad inicial obtenemos distintas trayectorias.

- Si $f = 1$ tenemos una órbita circular



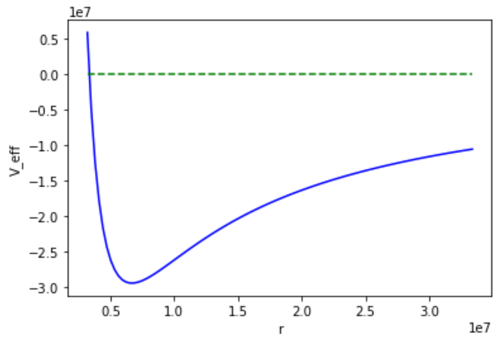
Como vemos si representamos el potencial y la energía mecánica estos se cortan en un único punto, el radio de la órbita, en nuestro caso $6,678 \times 10^6 m$

- Si $1 < f < 2$ tenemos una órbita elíptica



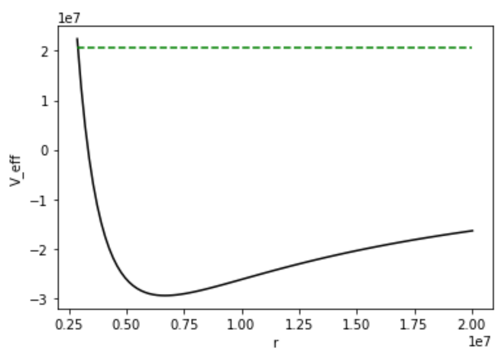
Los puntos de intersección en este caso son el perigeo y el apogeo, es decir, los puntos de la órbita donde el satélite se encuentra más cerca y más lejos de la Tierra, respectivamente.

- Si $f = 2$ tenemos una órbita parabólica



Como vemos en este caso hay un único punto de corte y el potencial tiende asintóticamente al valor de la energía mecánica que es 0.

- Si $f > 2$ tenemos una órbita hiperbólica



En este caso, al igual que en el anterior, hay un único punto de corte.

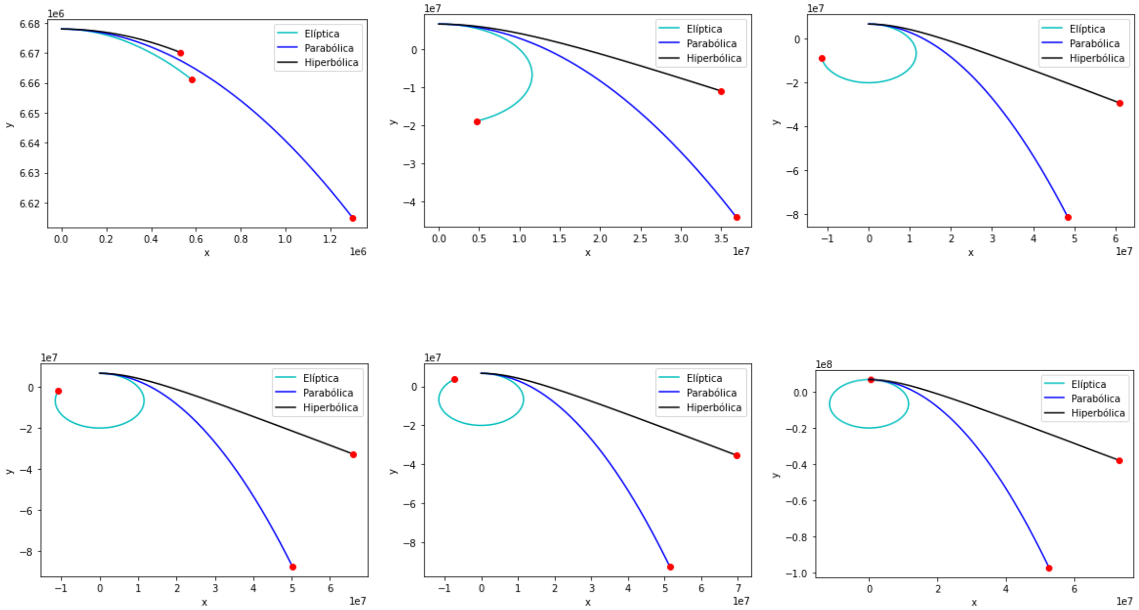
Observando las gráficas podemos ver que podemos clasificar las distintas trayectorias gracias al valor de su energía. Por ejemplo, si tenemos una energía menor que 0 estamos hablando de una órbita acotada y si , en cambio, esta es mayor o igual a 0 estamos hablando de órbitas no acotadas.

Además, si la energía mecánica está entre la energía de la órbita circular y 0 estamos hablando de una órbita elíptica, si esta es igual a 0, tendremos una órbita parabólica, mientras que si tenemos una energía mecánica mayor que 0 esta órbita será hiperbólica.

Por otro lado, también hemos podido comprobar que si la velocidad inicial es mayor o igual que $v = \sqrt{\frac{GM}{r2}}$ el cuerpo no es capaz de describir una trayectoria cerrada, por lo que el cuerpo escapará de la órbita.

2.4.

Veamos ahora como es el movimiento del satélite dependiendo de su trayectoria:



Como vemos a medida que avanza el tiempo el satélite que describe una órbita elíptica continúa orbitando alrededor de la Tierra mientras que los otros 2 pasan cerca de ella y luego escapan de la órbita.

2.5.

Ahora vamos a resolver las ecuaciones de movimiento para:

$$F = \frac{-8R^2L^2}{r^5m}\vec{u_r} \tag{8}$$

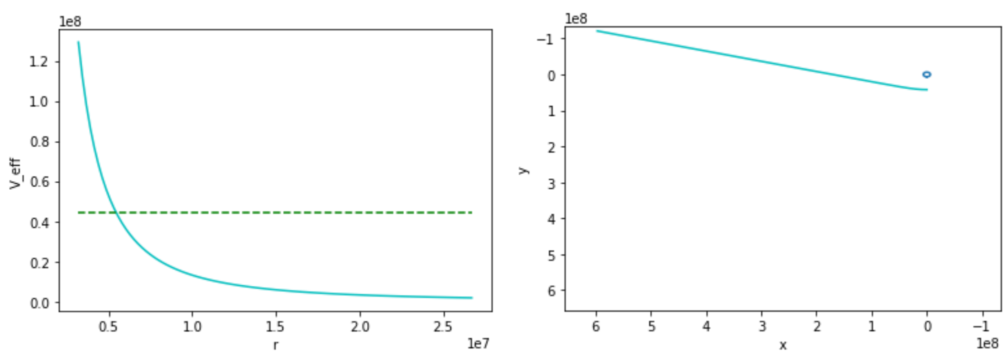
Entonces ahora tenemos:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu^2r^3} - \frac{8R^2L^2}{r^5m\mu} \tag{9}$$

Si expresamos esta ecuación como un gradiente obtenemos el potencial efectivo:

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu^2r^2} - \frac{8R^2L^2}{r^5m\mu} \tag{10}$$

Resolviendo estas ecuaciones en nuestro programa obtenemos:



Como podemos ver ahora ya la órbita no es acotada ya que,a pesar de ser las mismas condiciones iniciales, hemos cambiado la ecuación y por lo tanto la energía es mayor que 0 y la órbita ya no es acotada, por lo que la masa se aproximará para luego escapar de la órbita.

2.6.

Ahora vamos a trabajar con el potencial de un muelle.Tenemos la expresión de su potencial:

$$V = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{kr^2}{2} \tag{11}$$

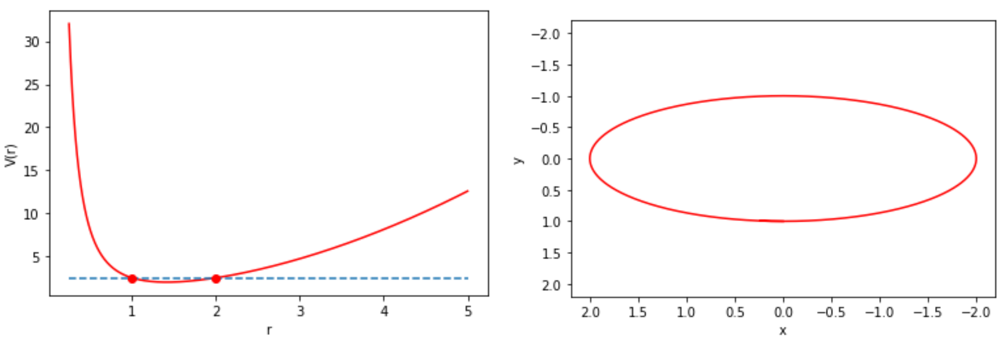
donde k es la constante de elasticidad del muelle. Además, ahora cambiamos también la expresión para calcular la energía mecánica tal que:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{kr^2}{2} \tag{12}$$

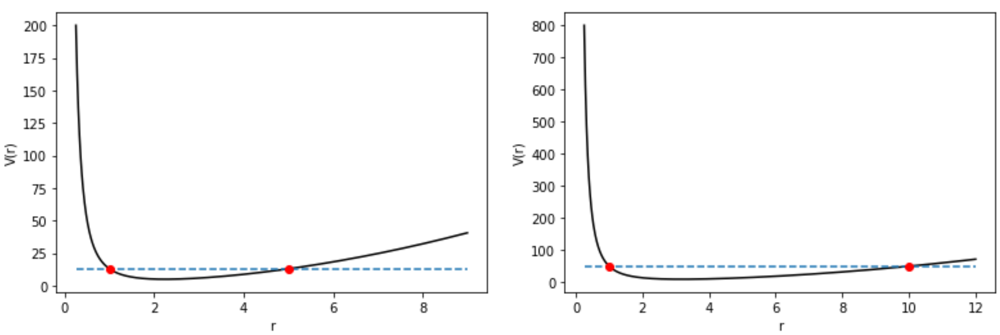
Al igual que antes, la energía mecánica se tiene que conservar, por lo que observemos que ocurre si variamos las condiciones iniciales como la velocidad o la constante del muelle. Partimos de las condiciones iniciales:

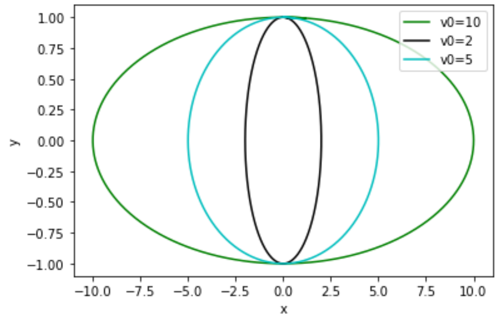
```
k  = 1          #Constante del muelle
m  = 1
v0 = 2          #velocidad inicial
r0 = 1          #radio inicial
```

Con estos datos si resolvemos nuestras ecuaciones obtenemos:

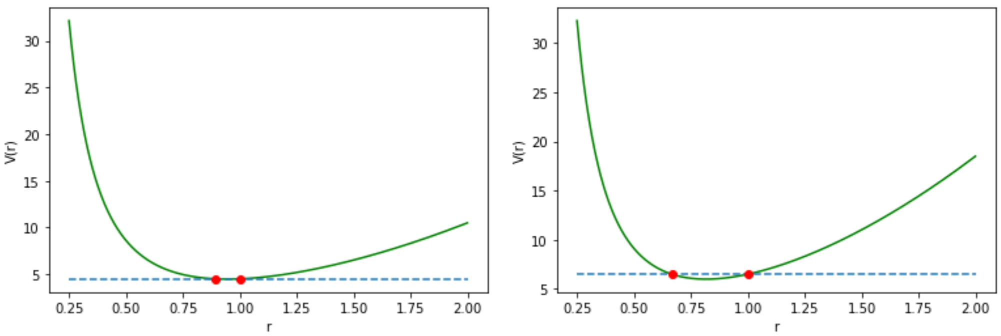


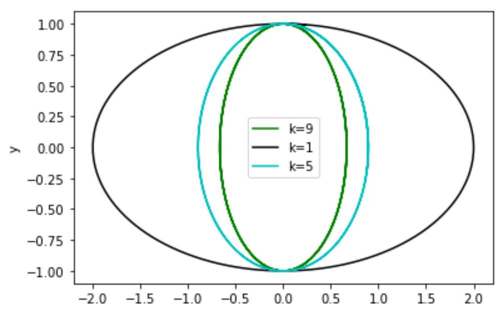
Si vamos variando la velocidad inicial:





Como podemos observar en las gráficas a medida que aumentamos la velocidad la masa hace más recorrido pero sigue manteniendo una trayectoria acotada. Si ahora variamos la constante del muelle:





Podemos ver que si aumentamos la constante del muelle la masa recorre menos, esto es debido a que la fuerza que ejerce el muelle es igual a:

$$F = -kx \tag{13}$$

Por lo que comprobamos que conforme vayamos aumentando esta constante la masa va a tener menos recorrido.

Podemos observar que para el caso del muelle la energía siempre va a ser mayor que 0 y que, además, la trayectoria siempre va a ser cerrada.

2.7.

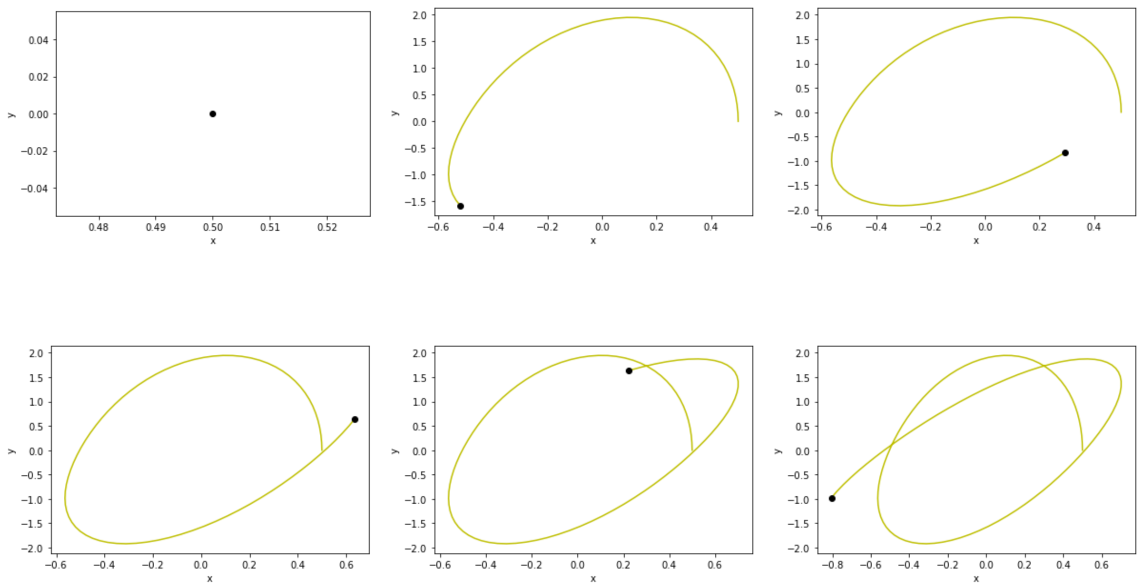
Ahora vamos a agregarle al potencial un término de tal manera que nos queda:

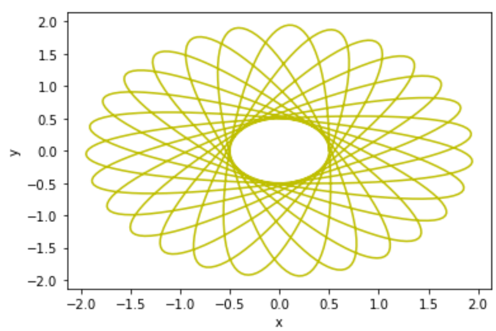
$$V = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{kr^3}{3} \tag{14}$$

Tomando como condiciones iniciales:

```
k  = 1          #Constante del muelle
m  = 1
v0 = 3          #velocidad inicial
r0 = 0.5        #radio inicial
```

Resolvemos las ecuaciones y obtenemos el siguiente movimiento:





Al incorporar el término cúbico al potencial del muelle vemos que la trayectoria sigue siendo cerrada, siendo esta parecida a una trayectoria elíptica que va rotando.

3. Conclusiones

Como hemos podido ver en la interacción gravitatoria podemos conocer la trayectoria que va a seguir el satélite dependiendo de la energía mecánica y determinar si va a ser una órbita cerrada o no. También hemos podido ver que si cambiamos la expresión de nuestro potencial la órbita también varía, como nos ha ocurrido en el apartado 2.5, donde hemos pasado de una órbita elíptica a una órbita hiperbólica.

Por último, hemos visto que pasaba si trabajabamos con un muelle y hemos podido ver que la trayectoria de este siempre ha sido cerrada y que si variamos el potencial podemos obtener distintas trayectorias para este, que continuan siendo cerradas.