Examen Final de Mecánica Clásica I.
16 de julio de 2020

Importante: Debes explicar y justificar todos los pasos seguidos en el desarrollo del problema así como los cálculos realizados. Si hubiera cálculos omitidos o expresiones no debidamente justificadas, la evaluación se vería afectada.

1. En el sistema de la figura la cuerda es inextensible y tiene una longitud fija ℓ_c, y el muelle, con constante elástica k, tiene una longitud natural de equilibrio ℓ_0. El bloque sobre el plano horizontal puede deslizar sin rozamiento y su masa es m_1, mientras que el bloque que pende del muelle tiene una masa m_2 y puede moverse verticalmente. Considera que la intensidad de la gravedad es g y que despreciamos la masa de la polea.

   (a) Determina los grados de libertad del sistema razonando la respuesta. Elige unas coordenadas generalizadas adecuadas explicando claramente lo que representan.

   (b) Obtén la energía potencial del sistema en función de las coordenadas elegidas. A partir de la energía potencial, discute si existen valores de las coordenadas generalizadas para los cuales el sistema está en equilbrio.

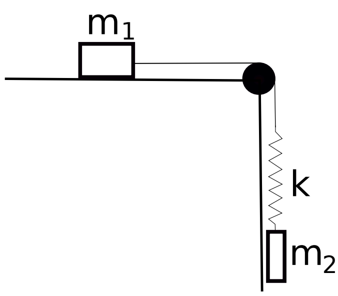
   (c) Obtén la Lagrangiana del sistema usando las coordenadas elegidas.

   (d) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

   (e) Obtén los momentos conjugados a las coordenadas generalizadas y estudia si alguno se conserva.

   (f) Obtén la Hamiltoniana del sistema y la energía y analiza si se conservan. Razona el porqué de ese resultado.

   (g) Si ahora consideramos que la polea es un cilindro homogéneo que tiene una masa M, radio R y momento de inercia $MR^2/2$, obtén la nueva Lagrangiana del sistema.



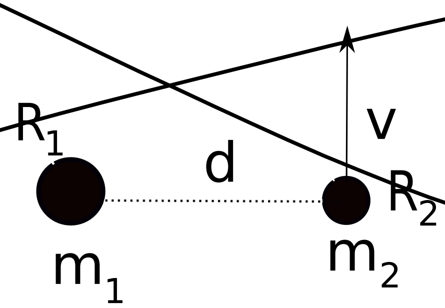
2. Dos esferas homogéneas de masas m_1 y m_2 tienen radios respectivos R_1 y R_2. Las masas se atraen bajo la acción de la gravedad e inicialmente la distancia entre sus centros es $d > R_1 + R_2$. Si le comunicamos a la masa m_2 una velocidad v en dirección perpendicular al vector que une los centros de las esferas.

   (a) Obtén v para que la órbita relativa sea circular.

   (b) Obtén, en ese caso, el módulo de la velocidad del centro de masas.

   (c) Obtén v para que las masas lleguen a rozarse pero sin colisionar.

Nota: Los resultados se darán en función de las masas, radios, constante de gravitación y distancia inicial.



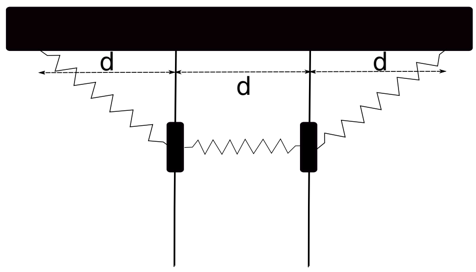
3. Considera el sistema de la figura en el que los bloques, de masa m, ensartados en los raíles, pueden moverse verticalmente sin rozamiento. Los muelles tienen constantes elásticas iguales, k, y longitud natural de equilibrio $\ell_0 = 0$. Dos de ellos tienen uno de sus extremos fijo y el otro unido a un bloque, como muestra la figura. El otro muelle tiene sus extremos unidos a los bloques. Suponiendo que actúa la gravedad, cuya intensidad es g,

   (a) Elige coordenadas generalizadas adecuadas y obtén la energía cinética y potencial del sistema.

   (b) A partir de la energía potencial obtén la posición de equilibrio del sistema.

   (c) Obtén las frecuencias de oscilación y los modos normales de oscilación (no hace falta normalizar).

   (d) Haz un esquema del movimiento de los bloques para cada modo.



4. Un sistema está formado por una esfera homogénea de masa M y radio R con una partícula puntual de masa M pegada en un punto de su superficie.

   (a) Obtén razonadamente los momentos principales de inercia respecto al centro de la esfera, comprobando que $I_1 = I_2 = (7/5)MR^2$, $I_3 = (2/5)MR^2$.

   (b) Aplica el teorema de Steiner y obtén los momentos principales de inercia respecto al centro de masas del sistema, comprobando que $I_1 = I_2 = (9/10)MR^2$, $I_3 = (2/5)MR^2$.

   (c) Si el sistema gira libremente con una velocidad angular Ω que forma un ángulo de 45° con el eje de simetría, obtén el módulo del momento angular y el ángulo que forma éste con el eje de simetría.

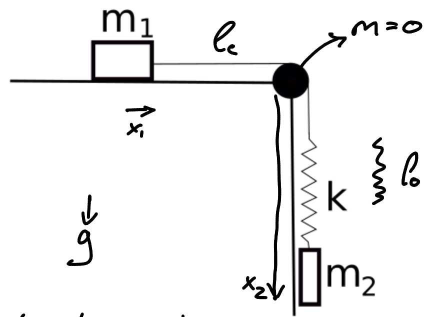
   (d) Si hacemos girar el sistema con velocidad angular Ω alrededor de un eje fijo que pasa por el centro de masas del sistema y forma un ángulo de 45° con el eje de simetría del sistema, utiliza las ecuaciones de Euler para obtener el módulo del momento que debemos aplicar.

Expresiones que pueden resultar útiles para algunos ejercicios modificando lo que haya que modificar:

$$p = \ell^2/(m\alpha); \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell}{m\alpha^2}}; \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

$$\begin{aligned}
\dot{\ell}'_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}\ell'_2\ell'_3 + M'_1 \\
\dot{\ell}'_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1}\ell'_3\ell'_1 + M'_2 \\
\dot{\ell}'_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}\ell'_1\ell'_2 + M'_3
\end{aligned}$$

1. En el sistema de la figura la cuerda es inextensible y tiene una longitud fija ℓ_c, y el muelle, con constante elástica k, tiene una longitud natural de equilibrio ℓ_0. El bloque sobre el plano horizontal puede deslizar sin rozamiento y su masa es m_1, mientras que el bloque que pende del muelle tiene una masa m_2 y puede moverse verticalmente. Considera que la intensidad de la gravedad es g y que despreciamos la masa de la polea.



2 grados de libertad x_1, x_2

(a) Determina los grados de libertad del sistema razonando la respuesta. Elige unas coordenadas generalizadas adecuadas explicando claramente lo que representan.

(b) Obtén la energía potencial del sistema en función de las coordenadas elegidas. A partir de la energía potencial, discute si existen valores de las coordenadas generalizadas para los cuales el sistema está en equilbrio.

(c) Obtén la Lagrangiana del sistema usando las coordenadas elegidas.

(d) Obtén las ecuaciones de Lagrange.

(e) Obtén los momentos conjugados a las coordenadas generalizadas y estudia si alguno se conserva.

(f) Obtén la Hamiltoniana del sistema y la energía y analiza si se conservan. Razona el porqué de ese resultado.

(g) Si ahora consideramos que la polea es un cilindro homogéneo que tiene una masa M, radio R y momento de inercia $MR^2/2$, obtén la nueva Lagrangiana del sistema.

$$U = m_2 g x_2 + \frac{1}{2}K(x_2-\ell_0)^2 = -m_2 g x_2 + \frac{1}{2}k(x_2^2+\ell_0^2-2x_2\ell_0) \qquad T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$\nabla U = \vec{0} \iff \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}\right) = (0,0) \iff \frac{\partial U}{\partial x_2} = m_2 g + kx_2 - \ell_0 = 0 \iff x_2 = \frac{1}{k}(\ell_0 - m_2 g) \quad x_1 \text{ libre}$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - m_2 g x_2 - \frac{1}{2}k(x_2^2+\ell_0^2-2x_2\ell_0)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}}^{0} = 0 \iff m_1\ddot{x}_1 = 0 \Rightarrow p_{x_1} = m_1\dot{x}_1 \text{ se conserva} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff m_2\ddot{x}_2 - m_2 g + kx_2 - k\ell_0 = 0 \iff m\ddot{x}_2 = m_2 g + k\ell_0 - kx_2 \quad p_{x_2} = m\dot{x}_2 \text{ no se conserva} \end{cases}$$

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} = \dot{x}_1 p_{x_1} + \dot{x}_2 p_{x_2} - \frac{1}{2}\dot{x}_1 p_{x_1} - \frac{1}{2}\dot{x}_2 p_{x_2} + m_2 g x_2 + \frac{1}{2}k(x_2^2+\ell_0^2-2x_2\ell_0) =$$
$$= \frac{1}{2m}(p_{x_1}^2+p_{x_2}^2) + m_2 g x_2 + \frac{1}{2}k(x_2^2+\ell_0^2-2x_2\ell_0) = T+U = E$$

$$\frac{d}{dt}H = H \Rightarrow E \text{ se conserva}$$

$$v_1 = \omega_1 R \iff \omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{\dot{x}_1}{R} \qquad T_p = \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\frac{\dot{x}_1^2}{R^2} = \frac{1}{4}M\dot{x}_1^2 \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = \dot{x}_1^2\left(\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{4}M\right) + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - m_2 g x_2 - \frac{1}{2}k(x_2^2+\ell_0^2-2x_2\ell_0)$$

3. Considera el sistema de la figura en el que los bloques, de masa m, ensartados en los raíles, pueden moverse verticalmente sin rozamiento. Los muelles tienen constantes elásticas iguales, k, y longitud natural de equilibrio $\ell_0 = 0$. Dos de ellos tienen uno de sus extremos fijo y el otro unido a un bloque, como muestra la figura. El otro muelle tiene sus extremos unidos a los bloques. Suponiendo que actúa la gravedad, cuya intensidad es g,

(a) Elige coordenadas generalizadas adecuadas y obtén la energía cinética y potencial del sistema.

(b) A partir de la energía potencial obtén la posición de equilibrio del sistema.

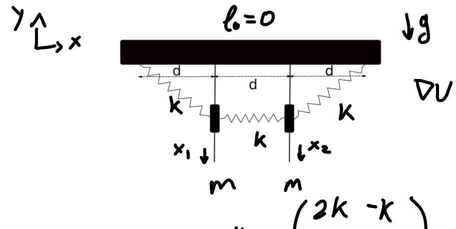
(c) Obtén las frecuencias de oscilación y los modos normales de oscilación (no hace falta normalizar).

(d) Haz un esquema del movimiento de los bloques para cada modo.

2gdl

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)$$

$$U = -mg(x_1+x_2) + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2+x_1^2} - \cancel{\ell_0}^{0}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2+x_2^2} - \cancel{\ell_0}^{0}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2+(x_2-x_1)^2} - \cancel{\ell_0}^{0}\right)^2$$
$$= -mg(x_1+x_2) + \frac{1}{2}k(3d^2+x_1^2+x_2^2+(x_2-x_1)^2) =$$
$$= -mg(x_1+x_2) + \frac{1}{2}k(3d^2+2x_1^2+2x_2^2-2x_2x_1)$$



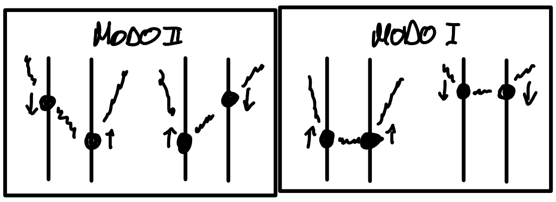
$$\nabla U = \vec{0} \iff \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}\right) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_1} = -mg + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} = -mg + 2kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2k & -k & mg \\ -k & 2k & mg \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2} = m = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} = 0 \qquad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$|\mathbb{V} - \omega^2\mathbb{T}| = \begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \iff (2k-\omega^2 m)^2 = k^2 \iff \omega^4 m^2 - \omega^2 4km + 3k^2 = 0 \iff \frac{4km \pm \sqrt{16k^2m^2 - 12m^2k^2}}{2m^2} = \omega^2 \iff$$

$$\iff \omega^2 = \frac{k}{m}(2\pm 1) \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases}$$

$$\text{Ker}(\mathbb{V} - \omega_1^2\mathbb{T}) = \text{Ker}\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} = \text{Env}(\{(1,1)\})$$



$$\text{Ker}(\mathbb{V} - \omega_2^2\mathbb{T}) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} = \text{Env}(\{(-1,1)\})$$