1. (3 puntos) Suponed que $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ es una base de un espacio euclídeo V y considerad los vectores

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - 5\mathbf{a}_3 - 8\mathbf{a}_4, \quad \mathbf{v}_1 = -\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 + 3\mathbf{a}_4 \text{ y } \mathbf{v}_2 = -\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_3 + 5\mathbf{a}_3 + 7\mathbf{a}_4.$$

Si

$$G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y $W = \mathrm{Env}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, calculad $\|\mathbf{u} - p_W(\mathbf{u})\|$. $= \|p_{W^\perp}\| = dist_W(\bar u)$

$p_W(\bar u) = \sum_i^2 \alpha_i \bar w_i$ con $\alpha_i = \frac{\langle \bar u, \bar w_i \rangle}{\|\bar w_i\|^2}$

Hay que encontrar W^+ tal que $v_1 \perp v_2$

$\iff \langle w_1, w_2 \rangle = 0$

$W = Env\{(-1\ -2\ 3\ 3), (-1\ -3\ 5\ 7)\}$

• $w_1 = v_1$ • $w_2 = v_2 + \mu w_1$ $\quad \langle w_1, w_2 \rangle = 0 \iff \langle w_1, v_2 + \mu w_1 \rangle = 0 \iff \langle w_1, v_2 \rangle + \mu \langle w_1, w_1 \rangle = 0 \iff$

$\iff \mu = -\frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\|w_1\|^2} \quad \langle w_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = v_1^T G v_2 = -12 \quad \|w_1\|^2 = -6 \iff \mu = \frac{-12}{6} = -2 \iff$

$\iff w_2 = v_2 - 2w_1 = (-1,-3,5,7) - 2(-1,-2,3,3) = (1\ 1\ -1\ 1) \implies W^\perp = Env\{(-1,-2,3,3), (1\ 1\ -1\ 1)\}$

$p_{W^\perp}(\bar u) = \sum_i^2 \alpha_i \bar w_i^\perp = \frac{\langle \bar u, \bar w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle \bar u, \bar w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \frac{7}{-6}(-1,-2,3,3) - 5(1\ 1\ -1\ 1) = \left(\frac{-23}{6}, -\frac{8}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{17}{2}\right)$

$\|u - p_W(u)\| = \|p_{W^\perp}(u)\| = \sqrt{\frac{611}{6}}$

2. Suponed que $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ es una base de un espacio vectorial V y

$$q(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + \alpha x_3 x_4,$$

para todo $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 \in V$.

(a) (1 punto) Probar que q es una forma cuadrática.

(b) (1 punto) Calcular el valor de α para que q no sea degenerada (es decir, para que $\mathrm{rg}(q) = \dim V$).

$M_{f_p}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 2 \end{pmatrix}$

$q(\bar x) = \bar x^T M_{f_p}(q) \bar x = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + \alpha x_3 x_4 \quad \square$

para que $rg(q) = dim V = 4 \quad |M_{f_p}(q)| \neq 0 \implies \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \implies q$ es degenerada $\implies$

$\nexists \alpha \in \mathbb{R}: q$ es no degenerada

3. (1.5 puntos) Suponed que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$ con $m < n$. Si las filas de A forman una base ortogonal de $\mathcal{M}_{1\times n}(R)$ respecto al producto escalar canónico de $\mathcal{M}_{1\times n}(R)$, probad que $(A^TA)^2 = A^TA$.

* Ver última hoja

(Base Ortonormal $\implies A^TA = I \implies (A^TA)^2 = I^2 = I = A^TA \ \square$)

Entiendo que quiere decir ortonormal porque si es ortogonal no es cierto: $\quad 16 \neq 4$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ si es ortonormal $(1^2)^2 = 1^2$ sino $(2^2)^2 \neq 2^2$ ↯

4. Decide si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, demostrándola en el primer caso, o buscando un contraejemplo en el segundo:

(a) (1 punto) Dadas dos formas bilineales $f, g \in \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^2)$ con formas cuadráticas q_f y q_g, si $f \neq g$ entonces $q_f \neq q_g$.

(b) (1.5 puntos) Sea $\mathcal{V} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base del espacio vectorial V y $\mathcal{V}^* = \{\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^n\}$ la base dual de $\mathcal{V}$. Entonces para todo $\mathbf{v} \in V$ se cumple que

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \gamma^j(\mathbf{v})\mathbf{u}_j.$$

a) $f, g \in Bil(\mathbb{R}^2)$

$\begin{cases} f(\bar x, \bar y) = x_1 y_2 \implies q_f(\bar x) = f(\bar x, \bar x) = x_1 x_2 \\ g(\bar x, \bar y) = x_2 y_1 \implies q_g(\bar x) = g(\bar x, \bar x) = x_1 x_2 \end{cases}$

↯ $f \neq g$ pero $q_f = q_g$ $\quad \square$

b) $\mathcal{V} = \{\bar u_1, \ldots, \bar u_n\}$, $\mathcal{V}^* = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^n\}$

$\sum_{j=1}^{n} \gamma^j(\bar v)\bar u_j = \sum_{j=1}^{n} \gamma^j(\cancel{\alpha_1 \bar u_1} + \cancel{\dots} + \alpha_j \bar u_j + \cancel{\dots} + \cancel{\alpha_n \bar u_n})\bar u_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bar u_j = \bar v$

↳ Combinación lineal de elementos de la base $\square$

5. (1 punto) Sea $(E, <>)$ un espacio vectorial hermítico y $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$. Demuestra que

$$||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^2 + ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||^2 = 2(||\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{b}||^2).$$

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle + \langle a-b, a-b\rangle = \langle a, a+b\rangle + \langle b, a+b\rangle + \langle a, a-b\rangle - \langle b, a-b\rangle =$$

$$= \langle a,a\rangle + \cancel{\langle a,b\rangle} + \cancel{\langle b,a\rangle} + \langle b,b\rangle + \langle a,a\rangle - \cancel{\langle a,b\rangle} - \cancel{\langle b,a\rangle} + \langle b,b\rangle = 2\langle a,a\rangle + 2\langle b,b\rangle =$$

$$= 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \quad \square$$

3. (1.5 puntos) Suponed que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$ con $m < n$. Si las filas de A forman una base ortogonal de $\mathcal{M}_{1\times n}(R)$ respecto al producto escalar canónico de $\mathcal{M}_{1\times n}(R)$, probad que $(A^TA)^2 = A^TA$.

(Base Ortonormal $\Rightarrow A^TA = I \Rightarrow (A^TA)^2 = I^2 = I = A^TA \ \square$)

Entiendo que quiere decir ortonormal porque si es ortogonal no es cierto:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \langle (0,1,0), (0,0,2)\rangle = (0\,1\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ortogonales}$$

$$(A^TA)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A^TA \quad \lightning$$

DEFINICION 2.29 *Diremos que una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es **ortogonal** si es invertible y $P^{-1} = P^T$.*

¿ortonormal? No

Matriz ortogonal $\neq$ Base ortogonal

PROPOSICION 2.26 *Sea V un espacio euclídeo de dimensión finita y sea $\mathcal{V}$ una base de V. Entonces, se cumple:*

1. $\mathcal{V}$ es una base ortogonal si, y sólo si, $G_{\mathcal{V}}$ es diagonal.

2. $\mathcal{V}$ es una base ortonormal si, y sólo si, $G_{\mathcal{V}} = I$.