Energía electrostática, W_E

Carga puntual $\rightarrow$ $W_E = q\phi$

ϕ: potencial eléctrico

Conjunto de cargas puntuales, debido al campo de las mismas cargas, debe dividirse por 2 para no contar las cargas dos veces:

$$W_E = \sum_{i>j} q_i \phi_i^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} q_i \phi_i^{(j)}$$

Distribución continua de carga:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi \, dV$$

Ley de Gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi \, dV = \frac{1}{2} \int_V \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \, d^3V$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}(\phi \vec{D}) &= (\vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{D} + \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \\ \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) &= \vec{\nabla}(\phi \vec{D}) - (\vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{D} \end{aligned}\right\}$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \vec{\nabla}(\phi \vec{D}) \, dV - \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \underbrace{(\vec{\nabla}\phi)}_{= -\vec{E}} dV =$$

$$= \frac{1}{2} \oint_S \phi \vec{D} \cdot \hat{n} \, ds + \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV$$

Si el volumen de integración V es suficientemente grande y la carga está limitada a un volumen finito:

$$\left.\begin{array}{l} \phi \rightarrow \dfrac{1}{r} \\[2ex] D \rightarrow \dfrac{1}{r^2} \\[2ex] S \rightarrow r^2 \end{array}\right\} \oint_S \phi \vec{D}\cdot\hat{n}\, ds \rightarrow 0$$

y queda:

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\, dV}$$

Podemos escribir:

$$dW_E = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\, dV$$

y definir la densidad de energía eléctrica por unidad de volumen:

$$u_E = \frac{dW_E}{dV} = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

es decir:

$$\boxed{u_E = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$$

Energía magnética, W_M

Autoinducción $\longrightarrow$ $W_M = \frac{1}{2} L I^2$

L: coeficiente de autoinducción
I: intensidad de la corriente

En función del flujo magnético Φ_M:

$\Phi_M = L I \rightarrow \quad W_M = \frac{1}{2} I \Phi_M$

Conjunto de autoinducciones:

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_j I_j \Phi_{Mj}$$

El flujo magnético Φ_M es:

Tma Stokes

$$\Phi_M = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A})\, d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

potencial vector

luego:

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_j I_j \oint_{C_j} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Para una única corriente:

$$W_M = \frac{1}{2} \oint_C \vec{A}\, I\, d\vec{l}$$

Para una distribución arbitraria de corriente se puede generalizar sustituyendo

$$I\,d\vec{l} \rightarrow \vec{J}\,dV$$

y queda:

$$W_M = \frac{1}{2}\int_V \vec{J}\cdot\vec{A}\,dV$$

Tenemos en cuenta que:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{H}\times\vec{A}) = \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) - \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

y que $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$ (campo de variación lenta)

$$W_M = \frac{1}{2}\int_V (\vec{\nabla}\times\vec{H})\vec{A}\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\,\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{=\vec{B}}\,dV + \frac{1}{2}\int_V \vec{\nabla}(\vec{H}\times\vec{A})\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}\,dV + \frac{1}{2}\oint_S (\vec{H}\times\vec{A})\hat{n}\,ds$$

Cuando el volumen de integración es suficientemente grande y $\vec{J}$ está limitada a un volumen finito, para $r\rightarrow\infty$, $\vec{A}\rightarrow 1/r$, $H\rightarrow 1/r^2$, $S\rightarrow r^2$, la integral de superficie tiende a cero:

$$\boxed{W_M = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}\,dV}$$

$$u_m = \frac{dW_m}{dV} \rightarrow \boxed{u_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}}$$ densidad de energía magnética