

a) Enunciar y demostrar la FIC

Sea $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un conjunto abierto U que contiene un disco $\overline{D}(z_0, r)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, entonces para cualquier punto $z \in D(z_0, r)$ se tiene que:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(w)}{w-z} dz \quad \text{con } C = C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

Demostración:

Tomemos que g es holomorfa en $U \supset D(z_0, r)$ y $z \in D(z_0, r)$. Si tomamos $f(w) = \frac{g(w)}{w-z}$, como g es holomorfa en U y $z \neq w$, entonces f es holomorfa en U

[...]

b) (1 punto) Utilizar el apartado anterior para calcular

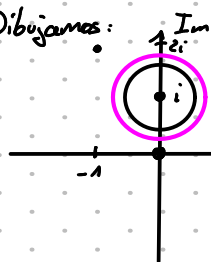
$$\int_C \frac{e^{1/(z-5)}}{z^3 + (1-3i)z^2 - (2+i)z} dz,$$

donde C viene dado por $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1/2\}$.

$C = D(i, 1/2)$. Disco centrado en i de radio $\frac{1}{2}$. Buscamos las singularidades de $f(z)$:

$$z^3 + (1-3i)z^2 - (2+i)z = 0 \iff z(z^2 + (1-3i)z - (2+i)) = 0 \iff z^2 = \frac{1}{2}(-1+3i \pm \sqrt{(1-3i)^2 + 8+4i}) = \frac{1}{2}(-1+3i \pm \sqrt{-8-6i+8+4i}) \Rightarrow \\ \Rightarrow z^2 = \frac{1}{2}(-1+3i \pm \sqrt{-2i}) = \frac{1}{2}(-1+3i \pm (1-i)) \Rightarrow z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -1+2i$$

Dibujamos:



Podemos encontrar un disco que incluya a C pero no incluya a z_1, z_3 . Si denotamos por $g(z) = \frac{e^{1/(z-5)}}{(z-z_1)(z-z_3)}$ tal que

$$g(z) = \frac{e^{1/z}}{z(z+1-2i)}$$

Sabemos que g es analítica en $U \supset D(i, \frac{1}{2})$ y

$U \not\ni \{z_1, z_3\} \Rightarrow$ Podemos aplicar la Fórmula Integral de Cauchy

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{g(z)}{z-i} dz = 2\pi i \cdot g(i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{\frac{1}{-5+i}}}{i(i+1-2i)} = \frac{2\pi i e^{\frac{1}{-5+i}}}{1-i}$$

2.- (2 puntos) Sea a el último dígito no nulo de tu DNI. Clasificar las singularidades (incluyendo $z = \infty$) de la función

$$f(z) = \frac{\log_{\frac{\pi}{2}}(i-z)}{(z^2 + aiz + 2a^2)^{2020}(z-10)^{2021}}$$

donde $\log_{\frac{\pi}{2}}(z) = \ln r + i\theta$, con $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi$.

$$\text{Log}(z) = \log_{\pi}(z) \quad \begin{array}{c} \theta \\ \nearrow \\ \circ \\ \searrow \\ r > 0 \end{array}$$

Lo No analítica para $\text{Re}(z) \leq 0$

$\log_{\frac{\pi}{2}}(z)$ no es analítica para $\text{Im}(z) \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{\pi}{2}}(i-z)$ no es analítica para $\text{Im}(z) \leq i$

Buscamos las raíces del denominador para buscar singularidades

• Singularidad en $z = \infty \Rightarrow$ como la función tiene problemas de analiticidad, esta singularidad es no aislada ya que no podremos encontrar un entorno a ella, en el cual sea la única singularidad. $\forall K \exists \epsilon > 0$ para un $K > 0$ donde f sea analítica

$$z^2 + aiz + 2a^2 = 0 \iff z^2 = \frac{1}{2}(-ai \pm \sqrt{-a^2 - 8a^2}) = \frac{1}{2}(-ai \pm 3ai) \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = ai \\ z_2 = -2ai \end{array}$$

$a \geq 1$ por ser un dígito del DNI $\Rightarrow z_1$ puede ser N.A. si $a=1$, para el resto de casos z_1 es un polo de orden 2020. z_2 tiene siempre problemas de analiticidad y es N.A.

• Singularidad en $z = 10 \Rightarrow$ Polo de orden 2021

3.- (1'5 puntos) Calcular el desarrollo en serie de Laurent centrado en $z = i$ de la función

$$f(z) = \frac{\sin(\pi iz)}{z^2 - 2iz - 1}$$

(no únicamente los primeros términos). ¿Cuál es el valor del residuo de $f(z)$ en $z = i$?

$$f(z) = \frac{\sin(\pi iz)}{z^2 - 2iz - 1} = \frac{\sin(\pi iz)}{(z-i)^2}$$

llamamos $g(z) = \sin(\pi iz)$ y calculamos su desarrollo de Laurent

$$g'(z) = \pi i \cos(\pi iz)$$

$$g''(z) = -(\pi i)^2 \sin(\pi iz)$$

$$g'''(z) = -(\pi i)^3 \cos(\pi iz)$$

$$g^{IV}(z) = (\pi i)^4 \sin(\pi iz)$$

$$\Rightarrow g^{(k)}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2m \\ (\pi i)^k & \text{si } k = 4m - 3 \\ -(\pi i)^k & \text{si } k = 4m - 1 \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \frac{\sin(\pi iz)}{(z-i)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \cos(\pi iz) = \cos(-\pi) = -1$$

$$g(z) = 0 - \pi i (z-i) - 0 + (\pi i)^3 (z-i)^3 - 0 - (\pi i)^5 (z-i)^5 + \dots = -\pi i (z-i) + (\pi i)^3 (z-i)^3 - (\pi i)^5 (z-i)^5 + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} g^{(k)}(i) (z-i)^k \Rightarrow f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\pi i)^{(2k-1)} (z-i)^{(2k-3)}$$

El término del residuo aparece cuando $2k-3 = -1 \Rightarrow k=1 \Rightarrow$ El residuo es $-\pi i$

4.- (2'25 puntos) Utilizar el teorema de los residuos en la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+4)} dx.$$

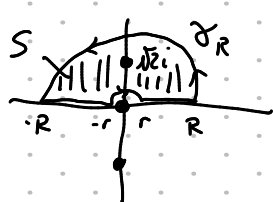
(Simplificar el resultado final.) ¿La integral es convergente?

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+4)} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+4)} dx \right)$$

↑ periodicidad del seno

$f(z)$ extensión a \mathbb{C}

$$x(x^2+4)=0 \Rightarrow x_1=0 \vee x_2=2i \vee x_3=-2i$$



$$\Gamma_R = \gamma_R + \gamma_r + [-R, -r] + [r, R]$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_r^R f(x) dx$$

Γ_R regular, cerrada simple.

$$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i) \frac{e^{iz}}{z(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{e^{iz}}{z(z+2i)} = \frac{e^{-2}}{-8} \rightarrow \text{7 Residuos}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = -\frac{\pi i}{4} e^{-2}$$

$$g(z) = \frac{1}{z(z^2+4)} \quad |g(z)| \leq \frac{1}{|z(z^2+4)|} = \frac{1}{|z^3+4z|} \stackrel{\text{DTI}}{\leq} \frac{1}{|z|^3-|4z|} \leq \frac{1}{R^3-4R} \quad |z| \leq R$$

$$\text{Lema de Jordan: } \left| \int_{\gamma_R} g(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{\pi M_g(\gamma_R)}{\alpha} (1 - e^{-R\alpha}) \text{ con } M_g(\gamma_R) = \max_{z \in \gamma_R} |g(z)|$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

Como x_1 es un polo de orden 1 y $\gamma_r(H) = z_0 + r e^{i(\pi-t)} \quad t \in [0, \pi] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = -\pi i \text{Res}(f, z_0) = -\frac{\pi i}{4}$$

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} (z-0) \frac{e^{iz}}{z(z^2+4)} = \frac{1}{4}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_r^R f(x) dx \xrightarrow[r \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} -\frac{\pi i}{4} e^{-2} = -\frac{\pi i}{4} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = -\frac{\pi i}{4} (e^{-2} - 1) \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+4)} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \left(-\frac{\pi i}{4} (e^{-2} - 1) \right) = -\frac{\pi}{8} (e^{-2} - 1)$$

5.- Consideremos la función entera $f(z) = e^z - 2021$.

i) (0'75 puntos) Calcular formalmente el exponente de convergencia asociado a los ceros de $f(z)$.

ii) (0'5 puntos) Si la expresión factorizada de $f(z)$ es de la forma $e^{a+bz} \prod_{n \in \mathbb{Z}} E_h\left(\frac{z}{a_n}\right)$ para algunos $a, b \in \mathbb{C}$, ¿cuál es el valor de h ? ($E_m(z)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, son los factores canónicos o elementales). Justificar la respuesta.

$$f(z) = 0 \iff e^z - 2021 = 0 \iff e^z = 2021 \rightarrow z_n = \ln(2021) + 2\pi i n \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$

$$M = \inf\left\{k > 0 : \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z_n|^k} < \infty\right\}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z_n|^k} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{|z_n|^k} + \frac{1}{|z_0|^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^k} = \frac{1}{|z_0|^k} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^k}$$

$$L_0 |z_n| = \sqrt{\ln^2(2021) + (2\pi n)^2} \rightarrow \text{Como el signo de } n \text{ da igual, son la misma serie}$$

$$\text{Criterio de comparación: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{|z_n|^k}}{\frac{1}{(2\pi n)^k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\pi n)^k}{|z_n|^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\pi n)^k}{(\ln^2(2021) + (2\pi n)^2)^{k/2}} = 1 \Rightarrow$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z_n|^k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2\pi n)^k} \text{ converge si } k > 1 \Rightarrow M = 1$$

Si la expresión factorizada de $f(z) = e^{az+b} \prod_{n \in \mathbb{Z}} E_h\left(\frac{z}{z_n}\right)$ h debe ser tal que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z_n|^h}$ converja.

Del apartado anterior concluimos que $h = 1$

6.- (0'75 puntos) Si $f(z)$ es una función entera tal que $|f(z)| = 2021$ para todo z con $|z| = 1$, probar que $f(z) = kz^n$ para algún $n \geq 0$ y alguna constante $k \in \mathbb{C}$ tal que $|k| = 2021$.

2 casos: f acotada y f no acotada

Acotada:

f entera $\Rightarrow f$ holomorfa en \mathbb{C} $\xrightarrow{\text{Liouville}}$ f es una función constante con $|k| = 2021$
 f acotada $\Rightarrow f(z) = k$ con $|k| = 2021 \Rightarrow f(z) = k z^n$ con $n=0$ $|k| = 2021$

No acotada

f no acotada
 f entera $\Rightarrow f$ holomorfa en \mathbb{C} Invocamos el Principio del Máximo: Si una función holomorfa no cte. alcanza su máximo en el interior de un dominio, entonces debe ser cte.

Como $|f(z)| = 2021$ en el disco unidad y f es holomorfa $\Rightarrow f$ es cte. $f(z) = k$ con $|k| = 2021$
 $\Rightarrow f(z) = k z^n$ con $n=0$ y $|k| = 2021$ ($D(0,1) \subset D(0,2021)$)

$$|f(z)| = |k z^n| = |k| |z^n| = 2021 \cdot 1 = |2021|$$