



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

MECÁNICA ANALÍTICA

GRADO EN FÍSICA

---

# Prácticas de ordenador: Péndulo Doble

---

LUCAS PEYDRÓ FERRANDO  
Grupo 3

11 de mayo de 2024

## Resumen

Estudiaremos mediante un código desarrollado en Python el comportamiento de osciladores acoplados. Analizando en profundidad la dinámica del sistema, sus modos normales de oscilación, emplearemos la transformada de Fourier para analizar estos modos normales y una ampliación donde veremos como se comporta todo el sistema con rozamiento.

# Índice

<b>1. Dinámica del sistema</b>	<b>2</b>
1.1. Desplazamiento . . . . .	2
1.2. Estudio energético . . . . .	4
1.3. Fast Fourier Transform (FFT) . . . . .	6
<b>2. Modos normales</b>	<b>10</b>
2.1. Modo simétrico . . . . .	10
2.2. Modo Antisimétrico . . . . .	12
<b>3. Ampliación: Rozamiento</b>	<b>15</b>

## 1. Dinámica del sistema

En este apartado realizaremos el estudio del movimiento de las masas para diferentes valores de  $k$  y de  $k'$ . También realizaremos un estudio energético. Y por último emplearemos la Transformada Rápida de Fourier lo que nos facilitará ver patrones en las frecuencias de oscilación.

### 1.1. Desplazamiento

Para el primer caso estudiaremos el caso de un acoplamiento débil, por lo tanto necesitamos que se cumpla que  $k' \ll k$  por lo que hemos empleado  $k = 1N/m$  y  $k' = 0,1N/m$ .

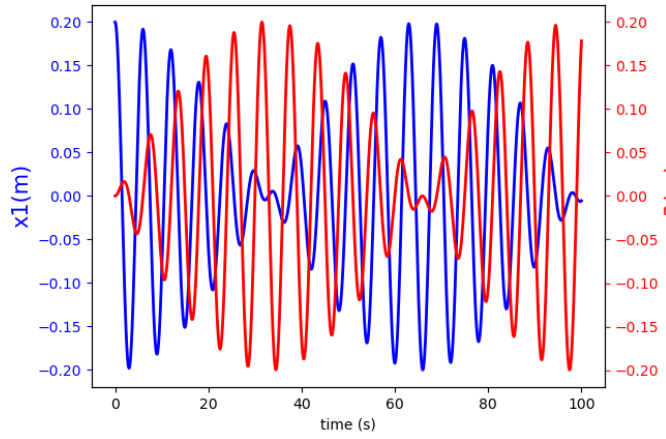


Figura 1: Desplazamientos de  $x_1$  y  $x_2$  con  $k = 1 \frac{N}{m}$  y  $k' = 0,1 \frac{N}{m}$

En el gráfico anterior se aprecia muy bien el caso del acoplamiento débil. Se puede ver como al comenzar la primera masa tiene una amplitud máxima y la segunda se encuentra en la posición de equilibrio y a medida que pasa el tiempo, poco a poco comienza el movimiento de la segunda masa, produciéndose ese intercambio de movimiento. Lográndose que finalmente, a los 30s de simulación, sea la segunda masa la que esté en una amplitud máxima y la primera masa se encuentre en su posición de equilibrio.

Esto es debido a que la interacción entre los osciladores individuales es relativamente pequeña en comparación con sus fuerzas de auto-oscilación intrínsecas, haciendo que sus frecuencias naturales puedan ser más evidentes.

En el segundo caso, igualaremos todas las constantes elásticas,  $k = k' = 1 \frac{N}{m}$ . Por lo que hemos aumentado la interacción entre las masas, veamos que ocurre:

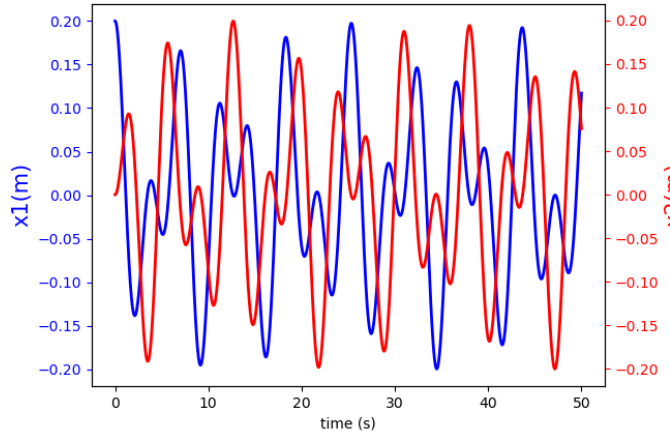


Figura 2: Desplazamientos de  $x_1$  y  $x_2$  con  $k = k' = 1 \frac{N}{m}$

Hay que señalar que para esta gráfica hemos reducido el tiempo de simulación para apreciar más las oscilaciones. Podemos observar primeramente que ha cambiado el patrón de oscilación, pero en esencia es igual que al anterior, solamente que ese intercambio de movimiento sucede más rápidamente. Para este caso a los 15s de simulación aproximadamente, la masa 1 está en su posición de equilibrio y la masa 2 se encuentra en su máxima amplitud de oscilación.

Para el último caso estudiaremos el caso de un acoplamiento fuerte, por lo tanto necesitamos que se cumpla que  $k \ll k'$  por lo que hemos empleado  $k = 1N/m$  y  $k' = 10N/m$ .

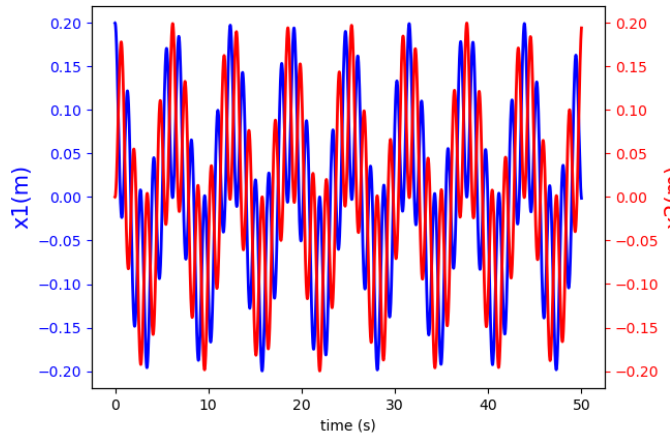


Figura 3: Desplazamientos de  $x_1$  y  $x_2$  con  $k = 1 \frac{N}{m}$  y  $k' = 10 \frac{N}{m}$

En la anterior figura observamos claramente el caso de acoplamiento fuerte. Donde también se produce ese intercambio de movimiento, pero para este caso es el más rápido, logrando que a los 5s de simulación aproximadamente se logre que la primera masa esté en el punto de equilibrio y la segunda masa esté en el punto de máxima amplitud.

Otra de este caso que observamos es ese comportamiento colectivo dominante en el sistema, donde los osciladores sincronizan sus fases y frecuencias. Esto se refleja en como las dos ondas generan a su vez una onda conjunta. Esto es debido a que la interacción entre los osciladores es más significativa en comparación con sus fuerzas de auto-oscilación individuales.

## 1.2. Estudio energético

En este apartado estudiaremos el carácter energético del sistema, estudiando en cada caso la variación de energía cinética, potencial y por lo tanto mecánica de ambas masas así como del sistema completo.

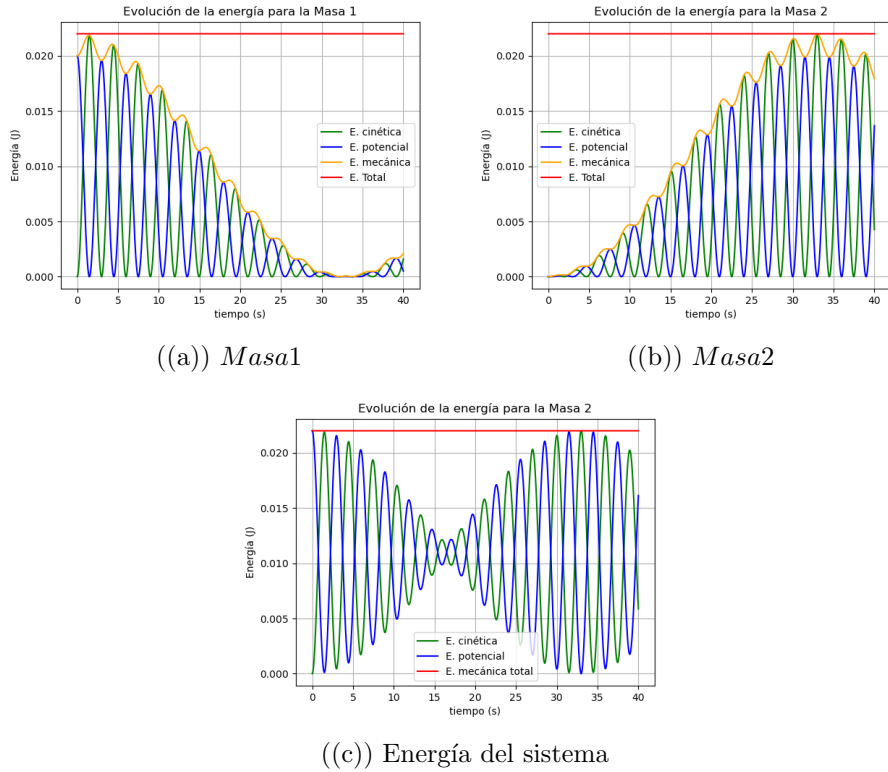
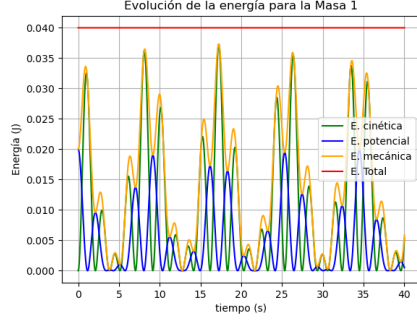
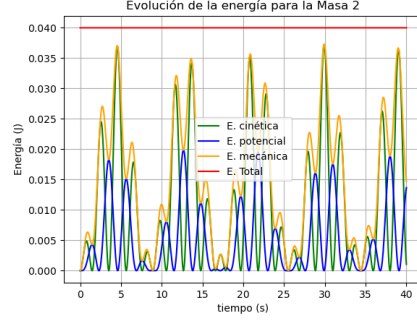


Figura 4: Acoplamiento débil  $k = 1 \frac{N}{m}$  y  $k' = 0, 1 \frac{N}{m}$

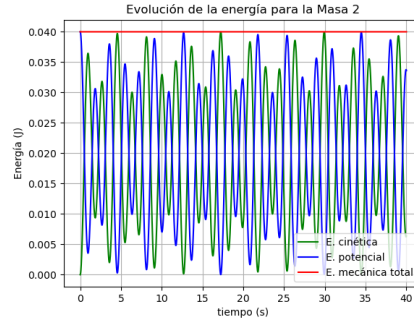
Se ve claro el intercambio de energía que hay entre las dos masas, ya que cuando en una masa alcanza una energía máxima en la otra masa alcanza el mínimo. A su vez en la energía de todo el sistema, se aprecia muy bien el intercambio entre la energía cinética y energía potencial.



((a)) Masa1



((b)) Masa2

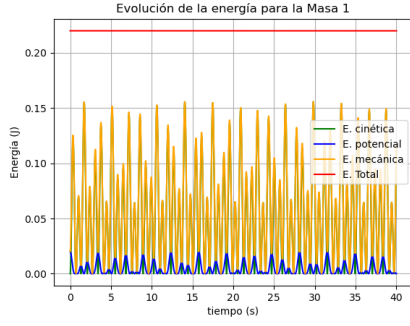


((c)) Energía del sistema

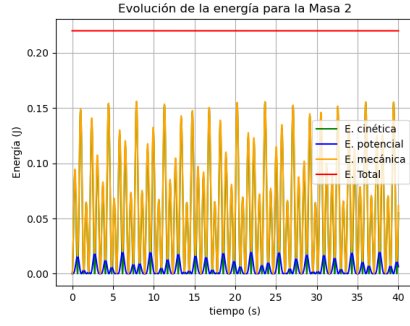
Figura 5:  $k = k' = 1 \frac{N}{m}$

Para este caso donde todos los coeficientes elásticos son iguales, vemos un cambio en el patrón de intercambio de energías. Pero se sigue cumpliendo ese intercambio de energías entre la primera y la segunda masa.

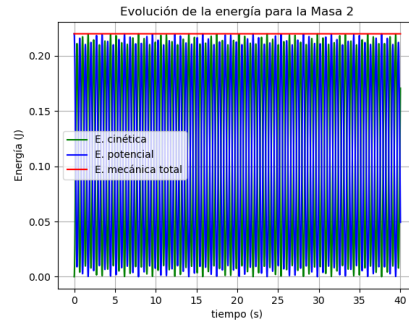
Hay que destacar que al ser  $k'$  más grande que en el caso anterior, se aprecia que ese intercambio de energía se produce en menor tiempo. A su vez vemos que al aumentar el coeficiente elástico, se ha aumentado también la energía total del sistema, esto es debido a la energía potencial elástica  $U = \frac{1}{2}kx^2$ .



((a)) Masa1



((b)) Masa2



((c)) Energía del sistema

Figura 6: Acoplamiento fuerte  $k = 1 \frac{N}{m}$  y  $k' = 10 \frac{N}{m}$

Para el acoplamiento fuerte, vemos también como se intercambian las energías entre las masas y se sigue la tendencia de esa mayor velocidad en el intercambio de energías, que podemos ver en ese mayor número de líneas en el mismo tiempo de simulación, puesto que hemos aumentado aun más el coeficiente de elasticidad. Así como de un notable aumento en la energía total del sistema.

### 1.3. Fast Fourier Transform (FFT)

En esta sección utilizaremos la transformada rápida de Fourier para analizar las frecuencias del sistema. Gracias a esta transformación seremos capaces de descomponer la señal e identificar las frecuencias características del sistema.

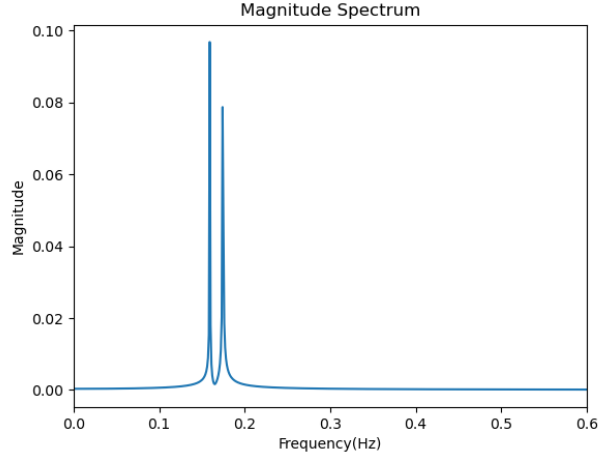


Figura 7: Frecuencias para el acoplamiento débil  $k = 1 \frac{N}{m}$  y  $k' = 0,1 \frac{N}{m}$

En el gráfico anterior identificamos dos picos. Estos picos corresponden a las frecuencias:  $f_1 = 0,159Hz$  y  $f_2 = 0,174$ . Veamos a que frecuencias angulares resultan:

$$\omega = f \cdot 2\pi \quad (1)$$

Por lo tanto:

$$\omega_1 = 0,999 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 1,093 \text{ rad/s}$$

Comparando estos resultados con las frecuencias de oscilación características del sistema obtenidas en el guión de la practica obtenemos:

$$\omega_0 = \frac{k+k'}{m} = \sqrt{1,1} = 1,049 \text{ rad/s} \approx 0,999 \text{ rad/s} \approx 1,093 \text{ rad/s}$$

Podemos ver que es una buena aproximación a una de las frecuencias de oscilación características.

Veamos ahora el caso para cuando  $k = k' = 1N/m$



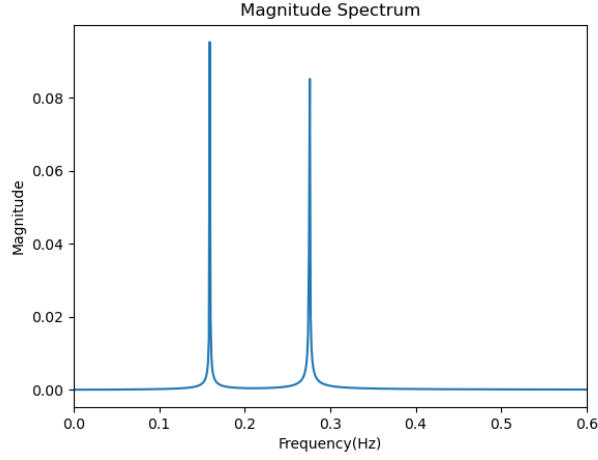


Figura 8: Frecuencias para el caso  $k = k' = 1 \frac{N}{m}$

Vemos que para este caso tenemos dos picos más separados, que corresponden a las frecuencias:  $f_1 = 0,276 Hz$  y  $f_2 = 0,159 Hz$ . Veamos a que frecuencias angulares resultan:

$$\omega_1 = 1,734 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 0,999 \text{ rad/s}$$

Comparando ahora estos resultados con los que obtenemos analíticamente resulta que:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} = \sqrt{3} = 1,732 \text{ rad/s} \approx 1,734 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{1} = 1 \text{ rad/s} \approx 0,999 \text{ rad/s}$$

Vemos que de nuevo tenemos unas buenas aproximaciones a las frecuencias características de oscilación.

Por último estudiaremos las frecuencias para el caso del acoplamiento fuerte.

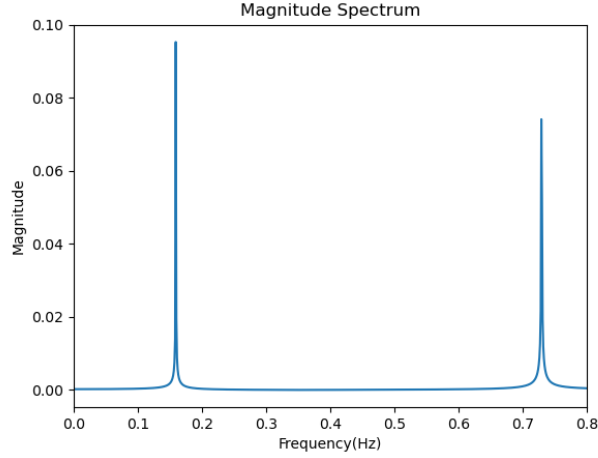


Figura 9: Frecuencias para el acoplamiento fuerte  $k = 1$  y  $k' = 10\frac{N}{m}$

Vemos que para este caso en el espectro de frecuencias encontramos también dos picos, el correspondiente a la frecuencia  $f_1 = 0,729Hz$  y el correspondiente a la frecuencia  $f_2 = 0,159Hz$ . Veamos en que frecuencia angular resulta:

$$\omega_1 = 4,581 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 0,999 \text{ rad/s}$$

Comparando estos datos obtenidos numéricamente a los teóricos resultan en:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} = \sqrt{21} = 4,583 \text{ rad/s} \approx 4,581 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{1} = 1 \text{ rad/s} \approx 0,999 \text{ rad/s}$$

Vemos que de nuevo tenemos unas buenas aproximaciones para las frecuencias características de oscilación.

Tras este apartado podemos concluir que al aumentar la constante elástica del acoplamiento  $k'$  la frecuencia asociada a  $+k'$  aumenta. Mientras que la frecuencia  $\omega_2$  que depende únicamente de  $k$  se mantiene constante. Al aumentar  $k'$  las masas se ven más fuertemente afectadas por el movimiento de la otra.

Además vemos que la Fast Fourier Transform resulta muy útil a la hora del estudio de frecuencias, ya que nos ha ayudado a obtener para los distintos movimientos oscilatorios sus frecuencias características.

## 2. Modos normales

En esta sección estudiaremos los modos normales de nuestro sistema. Lo lograremos cambiando las condiciones iniciales. Emplearemos las condiciones iniciales que vienen descritas en el gui3n de esta pr3ctica. A su vez iremos modificando los diferentes coeficiente el3sticos para ver como afectan a los distintos modos de oscilaci3n.

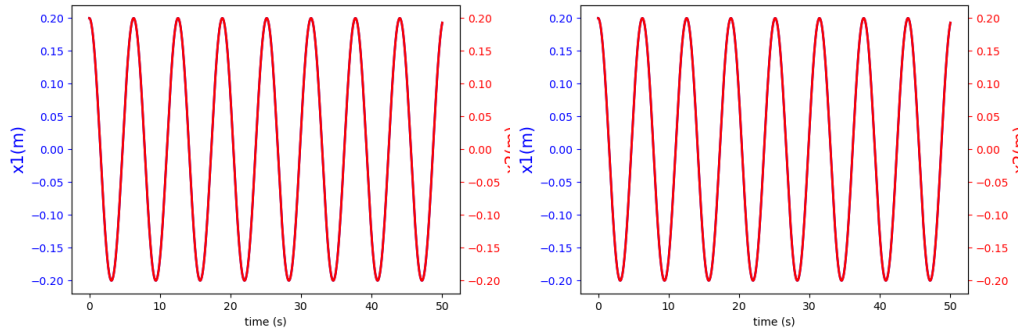
### 2.1. Modo sim3trico

Para el modo sim3trico emplearemos las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, 2$$

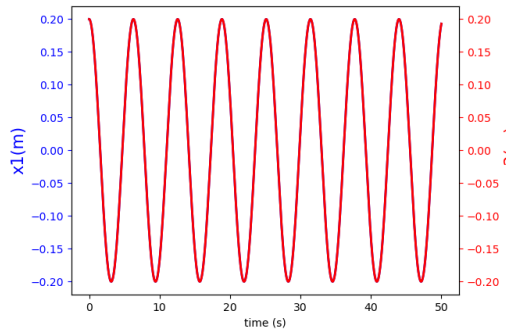
$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \text{ m/s}$$

Para los desplazamientos obtenemos los siguientes resultados:



((a))  $k = 1 \frac{N}{m}$  y  $k' = 0, 1$

((b))  $k = 1 \frac{N}{m}$  y  $k' = 1$



((c))  $k = 1 \frac{N}{m}$  y  $k' = 10$

Figura 10: Desplazamiento modo sim3trico para diferentes  $k$ 's

Observamos en la anterior figura que modificar el coeficiente elástico de interacción no varía el desplazamiento del sistema. Esto es debido a la sincronización de las masas, puesto que no se produce ninguna elongación en el muelle intermedio, por lo que no afectará a nuestro sistema.

Y observamos debido a la naturaleza de este modo de oscilación como las masas oscilan de forma sincronizada, por lo que poseen la misma amplitud y frecuencia.

Por la misma razón anterior, en el ámbito energético, por lo tanto, tampoco tendremos diferencias al modificar el coeficiente elástico. Pero si observamos como el reparto de las es uniforme entra ambas masas, por lo que ambas masas tendrán la misma energía cinética y potencial en cada instante de tiempo.

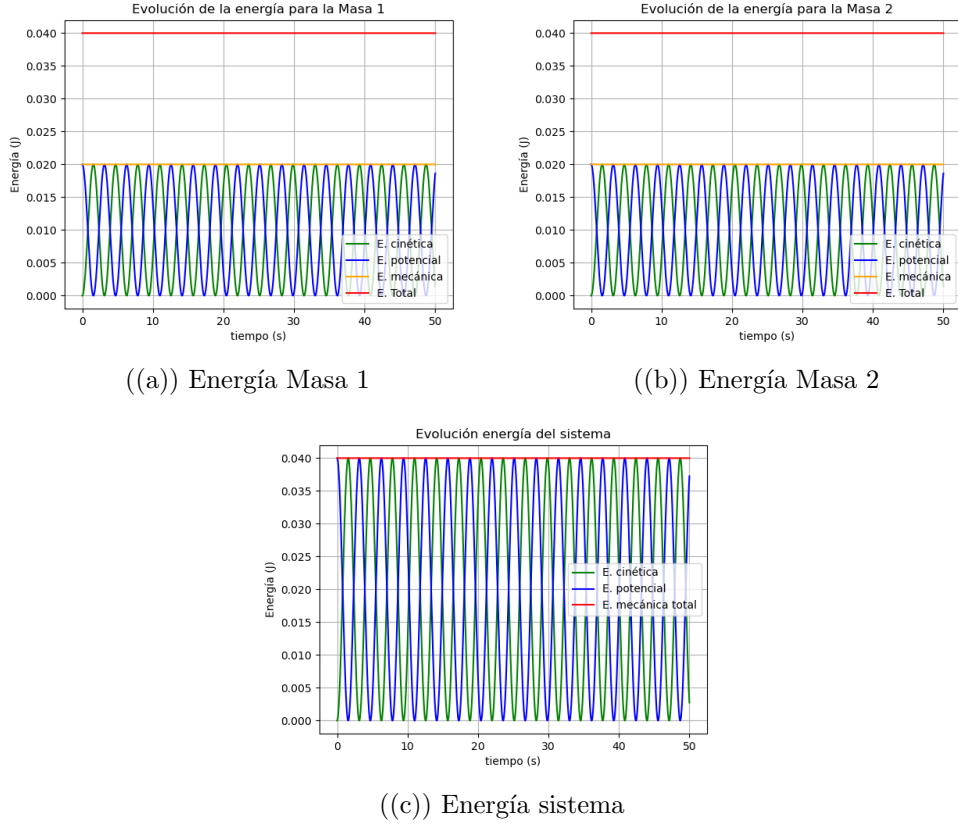


Figura 11: Energía del sistema

Pasemos ahora al estudio de frecuencias mediante la FFT:

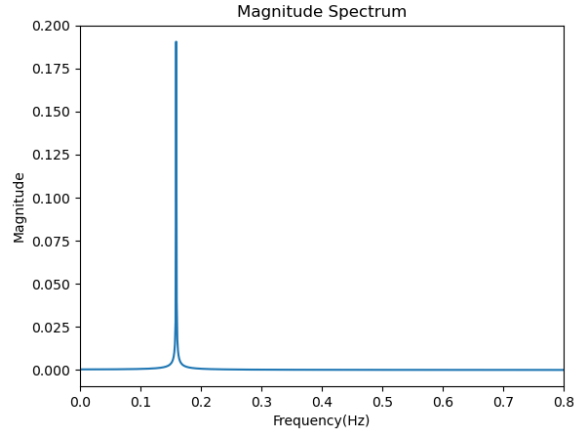


Figura 12: Frecuencias para el caso simétrico

Para este caso encontramos un solo pico a la frecuencia de  $f = 0,159$ , que resulta en una frecuencia angular de:

$$\omega = 0,999 \text{ Hz}$$

Que de nuevo comparándolo con los valores teóricos obtenemos una de las frecuencias características del sistema.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{1} = 1 \text{ rad/s} \approx 0,999 \text{ rad/s}$$

## 2.2. Modo Antisimétrico

Para el modo antisimétrico emplearemos las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = 0,2 \text{ y } x_2(0) = -0,2$$

$$\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0) = 0 \text{ m/s}$$

Para los desplazamientos del sistema obtenemos los siguientes resultados:

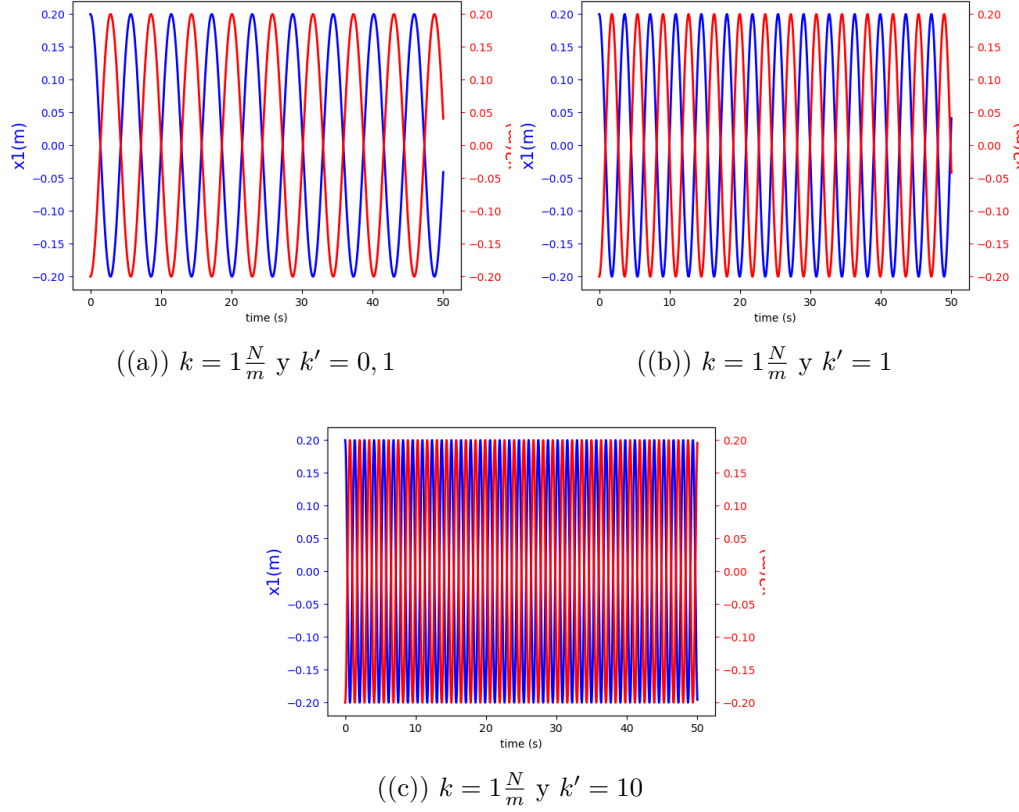


Figura 13: Desplazamiento modo antisimétrico para diferentes  $k'$

El caso simétrico es vemos que es completamente dispar al modo simétrico. Se observa que a medida que aumentamos el coeficiente elástico  $k'$  aumentamos la frecuencia de las oscilaciones. Esto es debido a que en este caso si se elonga el muelle intermedio, haciendo que este proporcione movimiento al sistema.

En el estudio de energías no es sustancialmente diferente al modo simétrico, por lo que pasaremos directamente al estudio de las frecuencias.

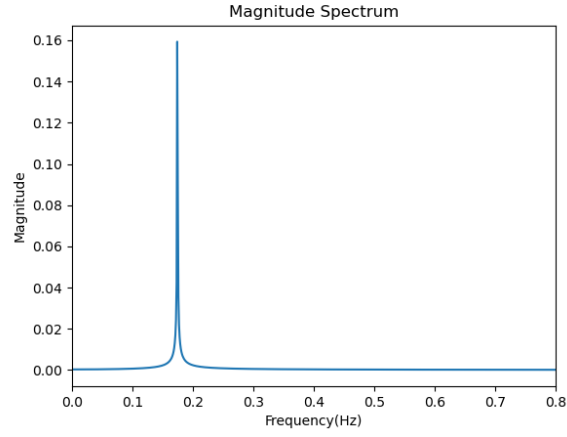


Figura 14: Frecuencias para el caso antisimétrico

Para este caso encontramos un solo pico a la frecuencia de  $f = 0,174Hz$ , que resulta en una frecuencia angular de:

$$\omega = 1,093 \text{ Hz}$$

Que de nuevo comparándolo con los valores teóricos obtenemos una de las frecuencias características del sistema.

$$\omega = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} = \sqrt{1,2} = 1,095 \text{ rad/s} \approx 1,093 \text{ rad/s}$$

### 3. Ampliación: Rozamiento

Para este apartado hemos tenido en cuenta que los muelles tienen rozamiento viscoso, por lo que añadimos nuevos términos a las ecuaciones del movimiento.

Supondremos que los muelles exteriores tienen una constante de rozamiento que llamaremos  $\gamma$  y el muelle central una constante de rozamiento  $\beta$ . Las posiciones de equilibrio no cambian y las ecuaciones de movimiento quedan de la siguiente forma:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - \gamma\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - \gamma\dot{x}_2 - k'(x_2 - x_1) - \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (3)$$

Modificando el código de python para este nuevo apartado logramos estudiar este fenómeno más detalladamente. Para este apartado, me centraré en estudiar como afecta el rozamiento en nuestro sistema, variando los coeficientes de rozamiento de los muelles y viendo como estos alteran nuestro sistema.

En primer caso estudiaremos la evolución en los desplazamientos de las masas. En particular he preferido primeramente jugar solo con los coeficientes de rozamiento, dejando los coeficientes elásticos de forma estándar,  $k = k' = 1,0$  y desplazando solo una de las dos masas.

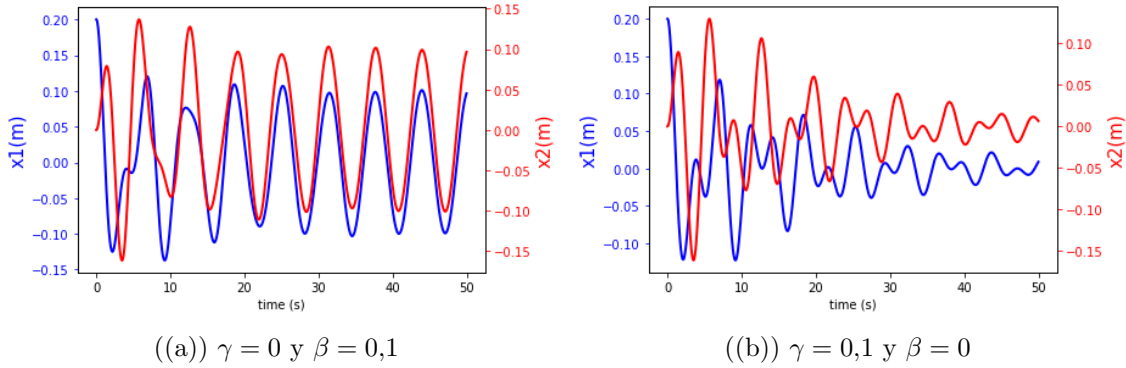


Figura 15: Desplazamiento para el caso con rozamiento

En la primera imagen, donde solo hemos añadido amortiguamiento al muelle central, observamos como sucede algo particular. En un inicio se produce el ir y venir normal de las masas que habíamos visto en los apartados anteriores, pero a medida que pasa el tiempo, el amortiguamiento del muelle central, reduce primeramente un poco la amplitud del movimiento para finalmente lograr poner en fase ambos movimientos. Esto sucede ya que de cierta forma el muelle central se está comportando más como una barra fija, que no como un muelle. Al aumentar este coeficiente



mucho lograríamos una sincronización de casi forma instantánea (barra fija).

En la segunda imagen vemos el suceso que cabría esperar más, cuando pensamos en añadir amortiguamiento a los muelles, ya que todo el sistema sufre una decaída en la amplitud, llegando a frenarse completamente al cabo de varios segundos. esto se debe a que estamos añadiendo rozamiento a los muelles que se encargan de la auto-oscilación individual, por lo que se frenan ambas masas por igual.

En cuanto al análisis energético sucede los mismos comportamientos descubiertos en los desplazamientos, haciendo que en un cierto punto se estabilice el sistema para el rozamiento en el muelle interno y una pérdida total de la energía del sistema cuando aplicamos el rozamiento a los muelles laterales.

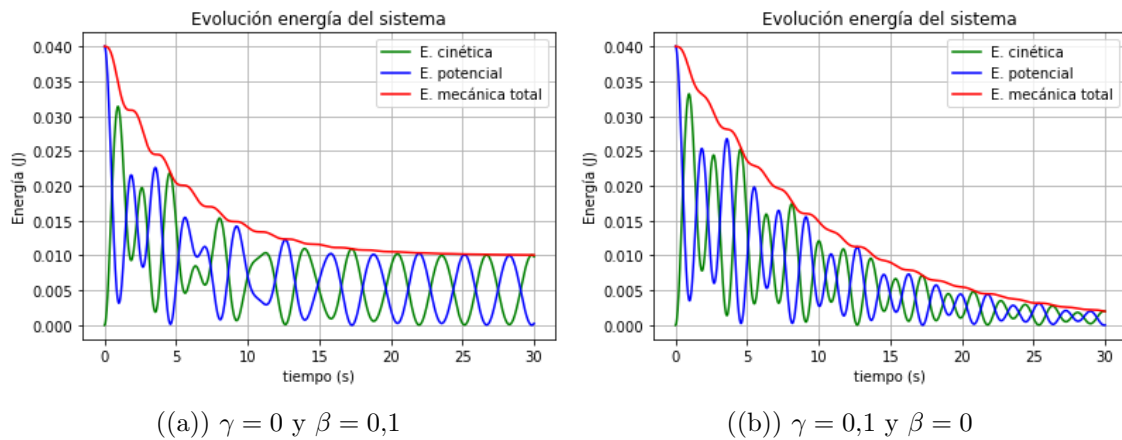


Figura 16: Energía del sistema para el caso con rozamiento

A continuación variaremos también los coeficientes elásticos de los muelles, para estudiar como es que estas dos variables se afectan la una a la otra. Y así poder comparar como afecta el rozamiento para los distintos acoplamientos.

Observamos en todas las imágenes anteriores como en un inicio se produce el efecto de cada uno de los acoplamientos. Pero a medida que avanza el tiempo se ven los efectos que producen los diferentes amortiguamientos.

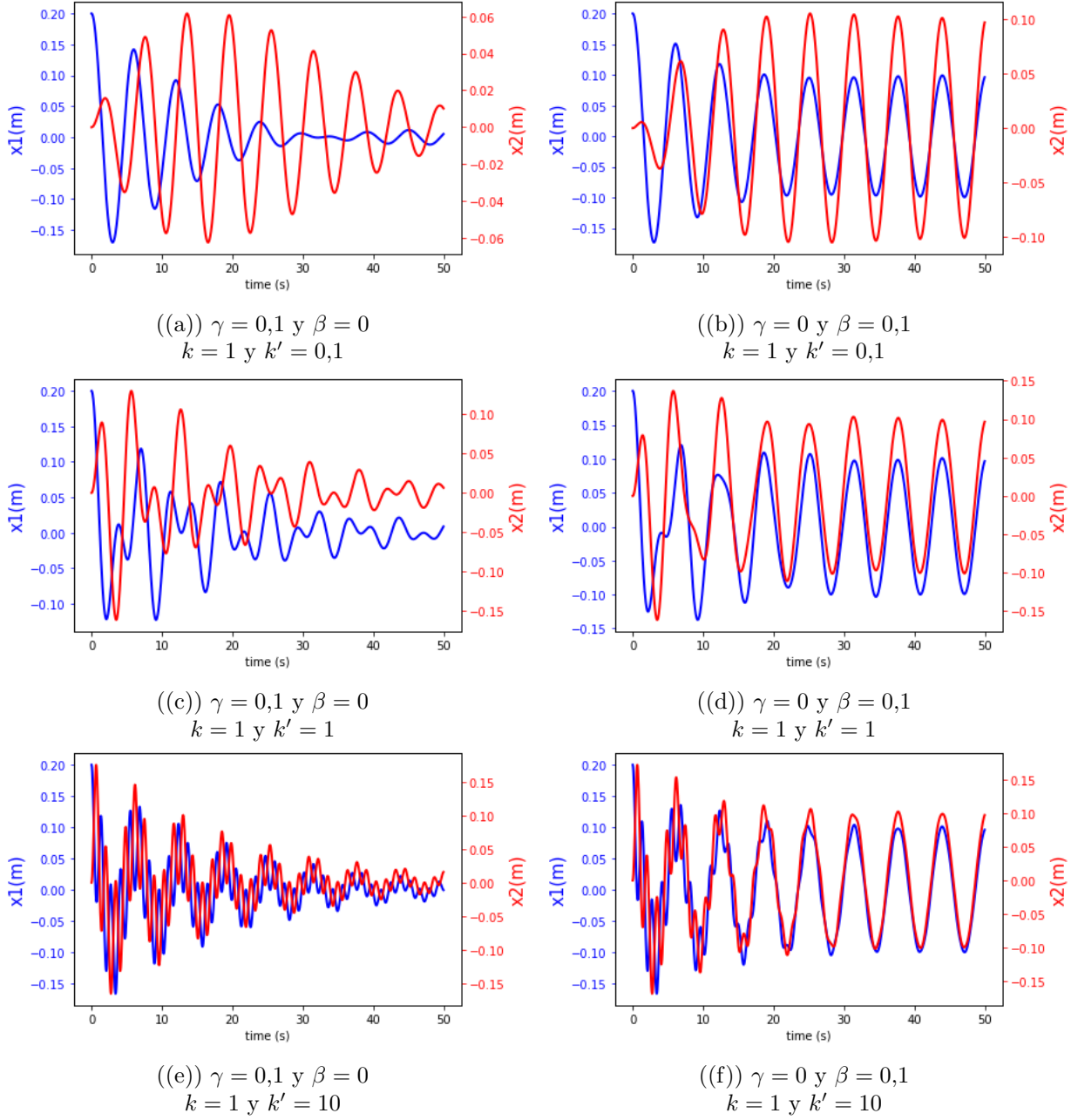


Figura 17: Desplazamientos para distintos valores de  $\gamma$ ,  $\beta$  y  $k'$

La columna de la izquierda corresponde al amortiguamiento en los muelles de los lados, y en todos los gráficos observamos el fuerte decaimiento de la amplitud, tal y como habíamos visto antes

para este caso. En la segunda columna corresponde al amortiguamiento en el muelle central, y también observamos que ocurre esa sincronización al cabo del tiempo.

Veamos ahora como afecta el amortiguamiento a los modos normales de vibración:

Comenzaremos con el **modo simétrico**:

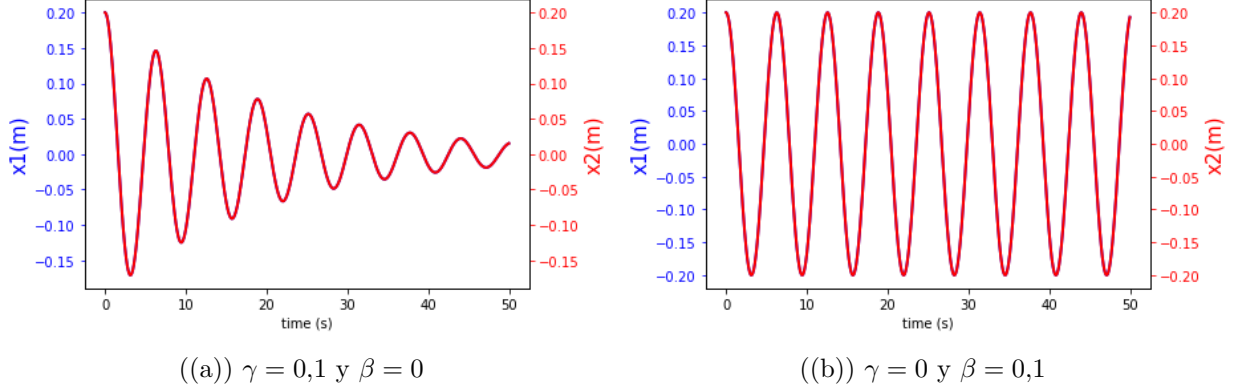


Figura 18: Desplazamientos para el modo simétrico para valores de  $\gamma, \beta$

Para el amortiguamiento en los muelles laterales vemos que para el modo simétrico afecta al movimiento, frenando ambas masas por igual, llegando finalmente a frenarlas por completo. Mientras tanto cuando aplicamos el amortiguamiento al muelle central, el movimiento no se ve en absoluto afectado, esto confirma el hecho visto anteriormente, el cual nos daba a entender que en este modo de vibración al estar las masas sincronizadas el muelle central no participa en el movimiento.

Pasemos ahora al **modo antisimétrico**:

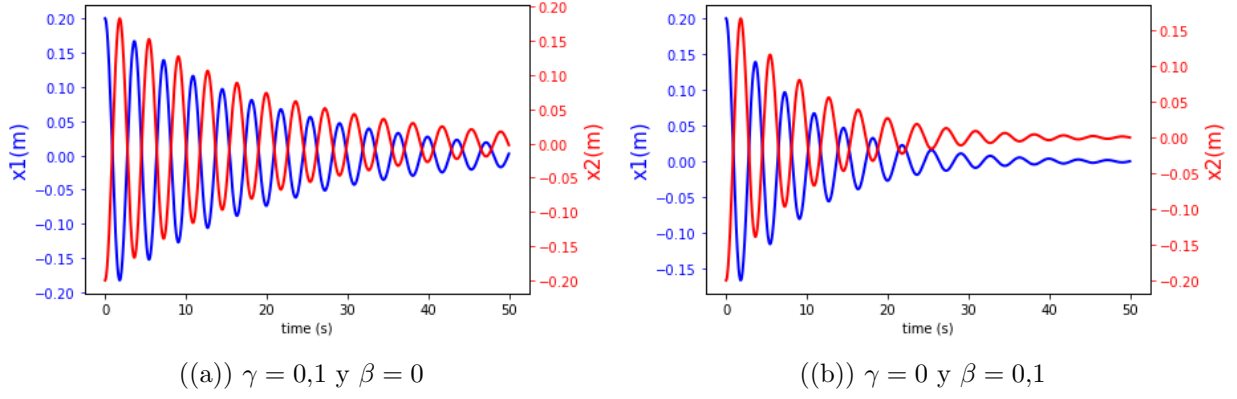


Figura 19: Desplazamientos para el modo antisimétrico para valores de  $\gamma, \beta$

Para el modo antisimétrico observamos como ambos amortiguamientos afecta al movimiento. Esto se debe a que en este modo empleamos ambos muelles para realizar el movimiento. Pero se ve un efecto más significativo cuando aplicamos el amortiguamiento en el muelle central, lo que nos hace ver que el muelle central tiene un mayor peso en este movimiento.