EXAMEN FINAL CONVOCATORIA C4. MAEDO. GRADO EN MATEMÁTICAS.

01 de julio de 2022.

Nombre y apellidos ....

Ejercicio 1. *(1 punto) Consideramos el polinomio $p(x) = x - 1$. Dar la solución del PVI*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & p(x)p(y)^2 \\ y(0) & = & k \end{array}\right. . \tag{1}$$

Dar los valores de k para los cuales la dolución de (1) está definida en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. *(1'5 puntos) Sea*

$$f(x,y) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & si & (x,y) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R} \\ y & si & (x,y) \in (-\infty,0) \times \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Demostrar que f es localmente Lipschitz, en la variable y, en los puntos $(0, y_0)$ con $y_0 \in \mathbb{R}$ y estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & f(x,y) \\ y(0) & = & y_0 \end{array}\right. . \tag{2}$$

Justificar el resultado obtenido con el Teorema de Picard.

Ejercicio 3. *(2 puntos) Se tienen los siguientes PVI*

$$a) \left\{\begin{array}{rcl} y' & = & \sin^2(x-y+1) \\ y(0) & = & k_1 \end{array}\right. , \qquad b) \left\{\begin{array}{rcl} xy' & = & x\tan\frac{y}{x} + y \\ y(1) & = & k_2 \end{array}\right. .$$

Discutir la existencia de solución, en función de los parámetros k_1 y k_2 de los PVI anteriores y dar la solución cuando exista.

Ejercicio 4. *(1'5 puntos) Sen f y g dos funciones definidas en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ tales que*

$$f'(z) + g(z) = 4\sec\frac{z}{2} \text{ y } 4g'(z) - f(z) = 8\cot\frac{z}{2}.$$

Resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x' - y & = & f(z) \\ x + y' & = & g(z) \end{array}\right. .$$

NOTA, $\int \csc z\, dz = -Log(\csc z + \cot z) + k$.

Ejercicio 5. *(1 punto) Sea f una función impar derivable en un entorno del origen. Demostrad que si $f'(0) > 0$ entonces la soulción del PVI*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & e^{f(x)(y+1)} - \cos(f(x)) \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right. ,$$

tiene un máximo relativo en $x_0 = 0$.

Ejercicio 6. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$y'' - (\alpha^2 + \alpha)y' + \alpha^3 y = x\, e^{\alpha x} \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Se pide

1. *(0'5 puntos) Dar la solución de la parte homogénea de la ecuación (3), en función del parámetros α.*

2. *(1 punto) Para $\alpha \notin \{0, 1\}$, dar la solución particular de la ecuación (3).*

Ejercicio 7. *(1'5 puntos)*
Sea f una función continua y localmente lipschitz en la segunda variable en la banda $(a,b) \times \mathbb{R}$. Supongamos que existe g una función continua definda en (a,b) tal que $|f(x,y)| \leq g(x)$ para todo $(x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R}$. Demostrar que todas las soluciones de $y' = f(x,y)$ están definidas en (a,b).