

Estudio del movimiento de un péndulo doble: simulación y análisis usando Python

V. Mira Ramírez¹

¹ Departamento de Física Aplicada – Facultad de Ciencias, Universidad de Alicante (UA), Alicante, España.

14 Junio de 2024

RESUMEN

El péndulo doble pese a su aparente simplicidad, exhibe un comportamiento digno de análisis. En esta práctica, simularemos dicho sistema con el objetivo de profundizar en la comprensión de su dinámica desde el enfoque lagrangiano. Determinaremos la relación entre las frecuencias propias y los diversos tipos de oscilación que pueden manifestarse bajo la aproximación de ángulos pequeños. Se analizará el comportamiento caótico del sistema, que muestra una alta sensibilidad a variaciones infinitesimales en las condiciones iniciales.

Key words: Péndulo doble – caos – oscilación – mecánica lagrangiana – frecuencia propia – aproximación de ángulos pequeños – sensibilidad a condiciones iniciales

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación

El estudio del péndulo doble, pese a su simplicidad aparente, revela una complejidad dinámica que lo convierte en un sistema fascinante para el análisis tanto teórico como experimental. Un péndulo doble consiste en dos barras rígidas unidas en un extremo por un pivote, donde la segunda barra cuelga del extremo libre de la primera. La longitud de las barras así como las magnitud de las masas que situemos en sus extremos, determinarán el comportamiento del sistema. Para este informe asumiremos que la masa de las barras (que podríamos llamar también cuerdas) es nula.

Este sistema es un ejemplo clásico de un sistema no lineal y caótico, y su comportamiento ha sido objeto de numerosos estudios en el ámbito de la física y la ingeniería. Podemos hablar de que este sistema está ‘solucionado’ aunque como veremos más adelante en el informe, no es fácil predecir de forma genérica cómo se comportará este sistema en amplios intervalos de tiempo debido a la gran sensibilidad que posee a las condiciones iniciales.

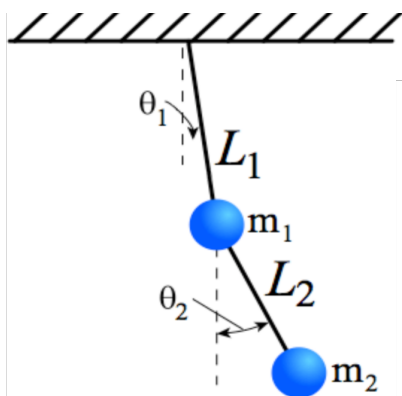


Figura 1. P. Bargueño – Guión Práctica de ordenador I Mecánica Analítica: Péndulo doble. Esquema de un péndulo doble formado por dos masas m_1 , m_2 colgando de dos cuerdas sin masa de longitud L_1 , L_2

El péndulo doble es conocido por su comportamiento caótico, especialmente cuando se consideran movimientos con grandes amplitudes. La naturaleza caótica del sistema implica que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a trayectorias completamente diferentes a lo largo del tiempo, lo que lo convierte en un excelente ejemplo para estudiar la teoría del caos en sistemas físicos para la asignatura de *Mecánica Analítica* de la *Universidad de Alicante*.

1.2 Mecánica Lagrangiana

La primera pregunta que nos atañe es porqué usar la mecánica lagrangiana para este sistema. La generalización de las coordenadas que este enfoque requiere nos simplifica el problema a dos coordenadas independientes, además de la simplicidad y elegancia de la formulación lagrangiana en sí. No hemos de olvidar la facilidad con la que se pueden obtener las simetrías y conservaciones de un sistema a partir del análisis de su lagrangiana asociada.

Para empezar, hemos de fijar nuestras coordenadas generalizadas, que en nuestro caso son los dos ángulos entre las cuerdas y el eje vertical, θ_1 y θ_2 respectivamente. Si llamamos x al eje horizontal y y al eje vertical, podemos describir la lagrangiana asociada únicamente con las coordenadas θ_i .

$$\begin{aligned} x_1 &= L_1 \sin \theta_1 & y_1 &= -L_1 \cos \theta_1 \\ x_2 &= L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 & y_2 &= -L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

De forma que calculando las derivadas temporales y sus cuadrados podemos obtener la energía cinética en nuestras coordenadas generalizadas partiendo de las cartesianas:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \implies \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

Análogamente para la energía potencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \implies \\ \mathcal{U} &= -m_1 g L_1 \cos(\theta_1) - m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2) \end{aligned}$$

2 V. Mira Ramírez

Con lo que la lagrangiana del sistema para nuestras coordenadas generalizadas quedará como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) + m_1 g L_1 \cos(\theta_1) + m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2)$$

1.3 Ecuaciones de Lagrange

Ahora, vamos a obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para conseguir dos ecuaciones diferenciales de segundo orden que describan el sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= \frac{-m_2 L_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)g \sin \theta_1}{(m_1 + m_2)L_1} \\ \ddot{\theta}_2 &= \frac{-L_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin(\theta_2)}{L_2} \end{aligned}$$

Y como las dos ecuaciones obtenidas dependen simultáneamente de la una de la otra, podemos sustituir una ecuación en la otra y de ahí despejar las velocidades generalizadas de cada coordenada para obtener:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{1}{(m_1 + m_2)L_1 - m_2 L_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} (-m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + \\ &\quad + g m_2 \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)g \sin \theta_1) \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{1}{(m_1 + m_2)L_2 - m_2 L_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} (m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + \\ &\quad + g \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)(m_1 + m_2) + L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(m_1 + m_2) - (m_1 + m_2)g \sin \theta_2) \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones de segundo grado pueden ser reducidas a cuatro ecuaciones de primer grado gracias a un cambio de variable que vimos en la asignatura de *MAEDO* que detallamos a continuación:

$$\begin{aligned} z_1 &= \theta_1 & z_2 &= \dot{\theta}_1 & z_3 &= \dot{\theta}_1 & z_4 &= \dot{\theta}_2 \\ \dot{z}_1 &= \dot{\theta}_1 & \dot{z}_6 &= \dot{\theta}_2 & \dot{z}_7 &= \ddot{\theta}_1 & \dot{z}_8 &= \ddot{\theta}_2 \end{aligned}$$

$$\dot{z}_1 = z_3$$

$$\dot{z}_2 = z_4$$

$$\dot{z}_3 = \frac{1}{(m_1 + m_2)L_1 - m_2 L_1 \cos^2(z_1 - z_2)} (-m_2 L_1 z_3^2 \sin(z_1 - z_2) \cos(z_1 - z_2) + g m_2 \sin(z_2) \cos(z_1 - z_2) - m_2 L_2 z_4^2 \sin(z_1 - z_2) - (m_1 + m_2)g \sin(z_1))$$

$$\dot{z}_4 = \frac{1}{(m_1 + m_2)L_2 - m_2 L_2 \cos^2(z_1 - z_2)} (-m_2 L_2 z_4^2 \sin(z_1 - z_2) \cos(z_1 - z_2) + g m_2 \sin(z_1) \cos(z_1 - z_2)(m_1 + m_2) + L_1 z_3^2 \sin(z_1 - z_2)(m_1 + m_2) - (m_1 + m_2)g \sin(z_2))$$

Finalmente, como hemos logrado reducir el sistema a ecuaciones diferenciales de primer orden, podemos hacer uso de la librería de *python* llamada *odeint* para resolver este tipo de ecuaciones numéricamente, y obtener la simulación que queríamos.

2 DINÁMICA

2.1 Ángulos pequeños

Una vez tenemos las ecuaciones podemos plantearnos simular el comportamiento del sistema en *python*. Para ello vamos a usar

las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 = 10\text{cm} & m_1 &= m_2 = 1\text{kg} & g &= 9,8\text{m/s}^2 \\ \theta_{1,0} &= \theta_{2,0} = 20^\circ & \dot{\theta}_{1,0} &= \dot{\theta}_{2,0} = 0 & t_{\text{simul}} &= 10\text{s} \end{aligned}$$

Si graficamos la trayectoria que describen las dos masas en el espacio real obtendremos la figura (2). en ella, podemos observar que al ser el ángulo inicial pequeño, las oscilaciones observadas serán bastante similares a las que observaríamos en un péndulo simple. Aun así, es apreciable una mayor distorsión en la trayectoria del péndulo acoplado que en la del primer péndulo debido a su interacción.

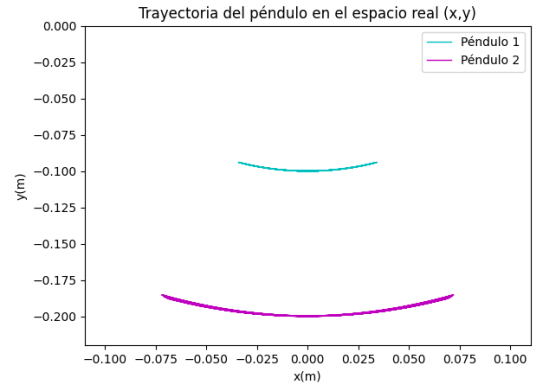


Figura 2: Trayectoria en el espacio real (x,y) para $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 20^\circ$

Ahora, vamos a estudiar el espacio de fases del sistema. El espacio de fases representa la coordenada frente a su velocidad generalizada. Cabe destacar de esta clase de gráficos, que resulta fácil observar cuándo una trayectoria conserva el momento angular. Esto sucede cuando las trayectorias graficadas son cerradas, es decir, que llega un punto en el que la gráfica es la misma por mucho que aumentemos el tiempo de simulación. Vamos a hacer esto mismo y ver si existe esta conservación en el péndulo doble.

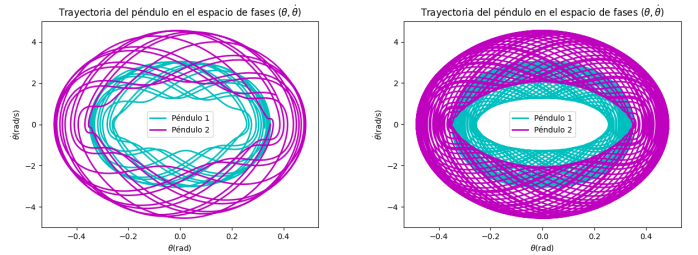


Figura 3: Trayectoria en el espacio de fases $(\theta, \dot{\theta})$ para $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 20^\circ$ con $t = 10\text{s}$ (izq.) y $t = 30\text{s}$ (dcha.)

Si nos fijamos en la figura 3, aunque es algo difícil, podemos localizar el inicio o el final de la trayectoria en las dos gráficas, pero por mucho que aumentemos el tiempo de simulación, el final no se une con el inicio. Esto supone que la gráfica no representa una curva cerrada, y que con el paso del tiempo, esta varía mínimamente pero nunca coincide. Esto es apreciable ya que vemos una mayor densidad de líneas en la segunda imagen que no va a hacer más que aumentar conforme el tiempo pase. Concluimos por tanto que en el péndulo doble, no se conserva el momento angular.

Vamos a pasar ahora a hacer un análisis de la evolución de los ángulos con el tiempo. Para ello graficamos nuestra coordenada generalizada $(\theta_1 \text{ y } \theta_2)$ frente al tiempo en la figura 4.

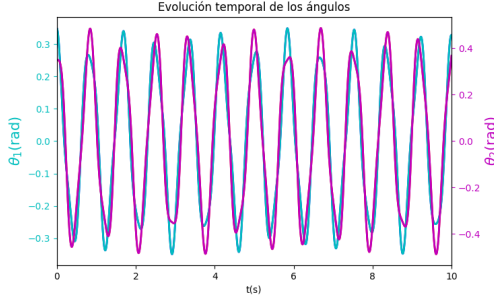


Figura 4: Evolución de los ángulos para $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 20^\circ$

Podemos observar como claramente ambas coordenadas presentan un comportamiento sinusoidal, en el cual los ángulos están en fase, ya que vemos coincidir en el tiempo los picos y valles de ambas funciones. Esto vuelve a sugerir que el comportamiento de nuestro sistema en ángulos bajos está estrechamente relacionado con el del péndulo simple. La intuición nos dice que la segunda masa tendrá una velocidad angular mayor por estar más alejada del punto desde el que se cuelgan los muelles, pero no llega a apreciarse una diferencia notoria en la amplitud entre las dos gráficas.

Sin embargo, al aumentar el tiempo de simulación como hacemos en la figura 5 podemos observar un patrón en este cambio de las amplitudes, por lo que no podemos atribuirlo a un error numérico. Entiendo que es un comportamiento intrínseco al sistema que me resulta curioso.

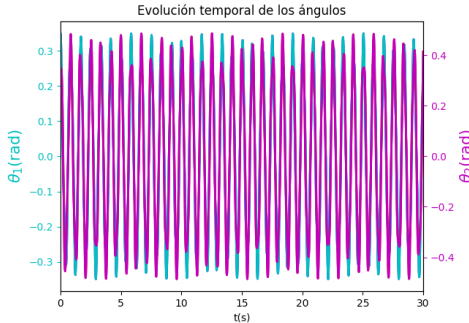


Figura 5: Evolución de los ángulos para $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 20^\circ$ en $t = 30$ s

Finalmente, vamos a graficar la energía cinética y potencial de las masas de ambos péndulos y a verificar que se conserva la energía mecánica en la figura 6.

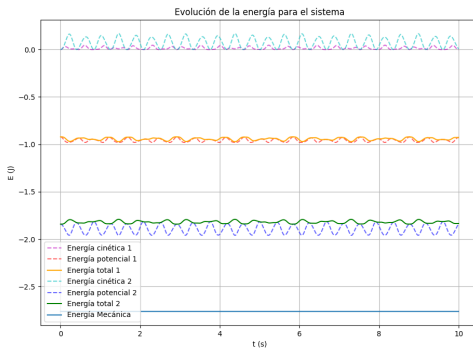


Figura 6: Evolución de la energía del sistema en $t = 10$ s

Las líneas discontinuas representan las energías cinética y potencial de ambas masas, las rojizas para la primera masa y las azuladas para la segunda. Las líneas continuas representan la suma de las anteriores. Finalmente la última línea que aparece en la gráfica es la energía mecánica, suma de las dos totales anteriores.

Cabe destacar que la diferencia entre la energía cinética y potencial parece la misma para ambas masas solo que reescalada. El comportamiento sinusoidal de ambos péndulos coincide en la fase, que concuerda con lo que habíamos visto en la evolución temporal de los ángulos. La mayor contribución de a la energía total de cada masa se debe a la energía cinética y no a la potencial. La energía total no es una constante para cada masa independientemente, pero sí lo es cuando sumamos las dos y obtenemos la energía mecánica. Concluimos que en efecto, la energía mecánica se conserva.

2.2 Ángulos grandes

Ahora vamos a repetir este análisis para estas segundas condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 = 10\text{cm} & \quad m_1 = m_2 = 1\text{kg} & \quad g = 9,8\text{m/s}^2 \\ \theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 130^\circ & \quad \dot{\theta}_{1,0} = \dot{\theta}_{2,0} = 0 & \quad t_{\text{simul}} = 10\text{s} \end{aligned}$$

Esta vez, al usar un ángulo inicial más grande, observamos el comportamiento errático del péndulo doble, completamente alejado de la similitud con el péndulo simple que había a bajos ángulos. Graficamos el espacio real para ilustrar este movimiento caótico.

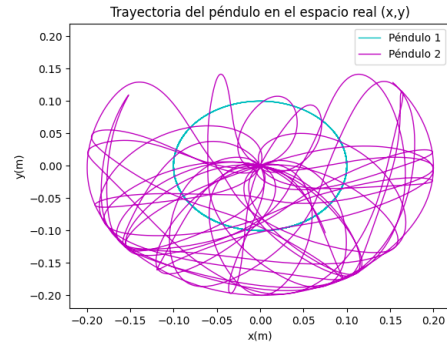


Figura 7: Trayectoria en el espacio real (x, y) $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 130^\circ$ para

Como hemos visto en la introducción, es un sistema muy sensible a las condiciones iniciales, por lo que cambios en el diferencial de tiempo usado para la simulación o mínimos cambios en las condiciones iniciales en general, cambiarán las gráficas obtenidas. Veremos esto en mayor profundidad en el apartado de Teoría del Caos. Análogamente al espacio real, el espacio de fases es anárquico y las trayectorias son claramente abiertas.

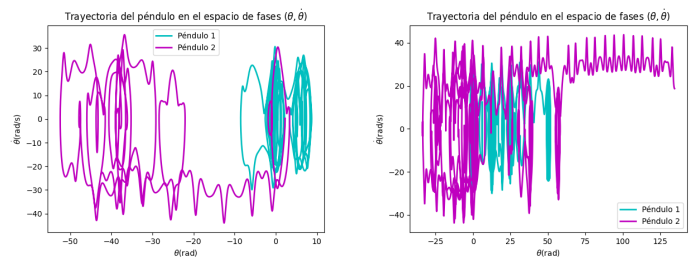


Figura 8: Trayectoria en el espacio de fases $(\theta, \dot{\theta})$ para $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 130^\circ$ con $t = 10$ s (izq.) y $t = 30$ s (dcha.)

De igual manera, al graficar la evolución temporal de los ángulos, vemos una clara diferencia con el caso de ángulos pequeños. Se elimina el comportamiento sinusoidal y por tanto no hay ningún tipo de simetría en la fase de el movimiento de ambos péndulos. Como podemos ver en la gráfica del espacio real, figura (7) el primer péndulo llega a dar una vuelta completa al origen mientras que el segundo es completamente impredecible.

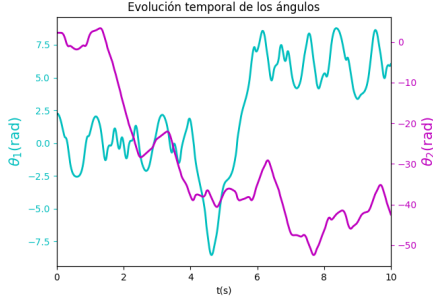


Figura 9: Evolución de los ángulos para $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 20^\circ$

También se puede observar como los ejes superan los $2\pi \text{ rad}$. Esto se debe a que hemos completado más de una vuelta alrededor del origen como ya hemos comentado.

Finalmente, el estudio energético nos repite lo que venimos viendo en todos los gráficos anteriores, el comportamiento enmarañado de el sistema arroja unos resultados turbulentos para las energías cinética, potencial y total de cada péndulo. Sin embargo la energía mecánica se conserva de igual manera que en ángulos pequeños ya que carecemos de fuerzas no conservativas.

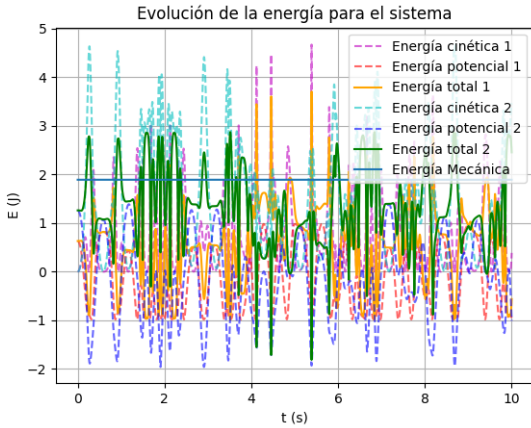


Figura 10: Evolución de la energía del sistema en $t = 10 \text{ s}$

3 MODOS NORMALES

Ahora, vamos a obtener las frecuencias propias de las oscilaciones pequeñas de este sistema. Para ello haremos el desarrollo de orden 1 del coseno y de la resta de ángulos del coseno alrededor del 0.

$$\cos \theta \equiv 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad \cos(\theta_1 - \theta_2) \equiv 1$$

Para simplificar los cálculos, asumiremos que $L_1 = L_2 = L$ y que $m_1 = m_2 = m$. Como sabemos que el sistema tiene dos grados de libertad, tendremos dos modos normales asociados al sistema con

sus respectivas frecuencias propias. Para obtener los modos, hemos de resolver la siguiente ecuación:

$$(\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T})\mathbb{A} = 0 \iff |\mathbb{U} - \omega^2 \mathbb{T}| = 0$$

Tras lo cual obtenemos los modos de oscilación y sus frecuencias, es decir, los autovectores y autovalores de la matriz:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1^T &= (-1, \sqrt{2}) & \omega_1 &= \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \\ \mathbb{A}_2^T &= (1, \sqrt{2}) & \omega_2 &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \end{aligned}$$

Que corresponden con un modo simétrico y un modo antisimétrico, ya que los autovectores asociados tienen las dos coordenadas positivas en un caso, y una coordenada positiva y una negativa en el otro. \mathbb{A}_1 corresponderá con el modo antisimétrico, y \mathbb{A}_2 con el modo simétrico. Sus respectivas ecuaciones de movimiento serán:

$$\theta_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \sigma_2)$$

$$\theta_2(t) = C_1 - \sqrt{2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \sqrt{2} C_2 \cos(\omega_2 t + \sigma_2)$$

Si queremos excitar un modo de oscilación, hemos de hacer cumplir su autovector asociado con las condiciones iniciales. Por tanto:

$$\text{MODO SIMÉTRICO:} \quad \theta_{2,0} = \sqrt{2}\theta_{1,0}$$

$$\text{MODO ANTISIMÉTRICO:} \quad \theta_{2,0} = -\sqrt{2}\theta_{1,0}$$

Vamos a realizar estas gráficas para $\theta_{1,0} = 20^\circ$ pues hemos utilizado una aproximación para ángulos pequeños y no sería sensato poner valores grandes de θ . Vamos a ver la trayectoria en el espacio real:

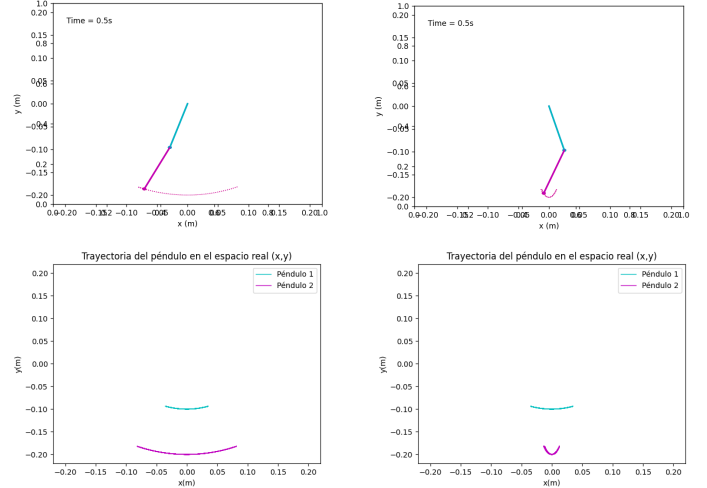


Figura 11: Trayectoria en el espacio real (x, y) para el modo simétrico (izq.) y el modo antisimétrico (dcha.)

Como habíamos descrito, en el modo simétrico las dos masas se mueven conjuntamente y en el modo antisimétrico cuando una masa se desplaza hacia el sentido positivo del eje OX, la otra se mueve hacia el negativo.

Vemos ahora la evolución temporal de los ángulos, donde observamos el comportamiento sinusoidal asociado a las pequeñas oscilaciones. Para el modo simétrico vemos como las masas coinciden en la fase, mientras que en el modo antisimétrico están desplazadas perfectamente por media fase.

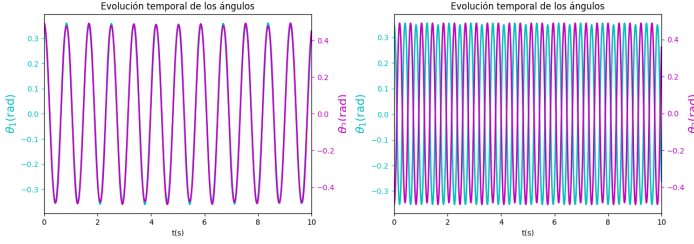


Figura 12: Trayectoria en el espacio de fases $(\theta, \dot{\theta})$ para el modo simétrico (izq.) y el modo antisimétrico (dcha.)

Si graficamos ahora la trayectoria en el espacio de fases, obtendremos curvas cerradas ya que los modos de oscilación son periódicos. Las curvas se superponen parcialmente porque seguimos estando en una aproximación, pero claramente la gráfica nos sugiere que el momento angular se conserva. Esta diferencia con lo que sucedía con unas condiciones iniciales aleatorias como las de la sección anterior se debe a que antes teníamos una combinación lineal de estos dos modos, que al ser excitados independientemente dan un resultado mucho más limpio que nos da estas curvas cerradas.

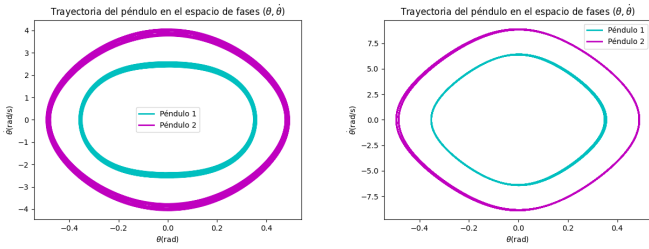


Figura 13: Trayectoria en el espacio de fases $(\theta, \dot{\theta})$ para el modo simétrico (izq.) y el modo antisimétrico (dcha.)

En el modo simétrico, la energía se distribuye entre las masas de manera que ambas alcanzan sus extremos al mismo tiempo. Esto da lugar a trayectorias más circulares en el espacio de fases porque las amplitudes y velocidades de ambos péndulos están sincronizadas. En el modo antisimétrico la distribución energética es diferente, la diferencia en las fases de los movimientos de los péndulos implica que las velocidades angulares y las posiciones angulares varían de manera más descoordinada comparada con el modo simétrico, dándonos trayectorias elípticas de mayor excentricidad.

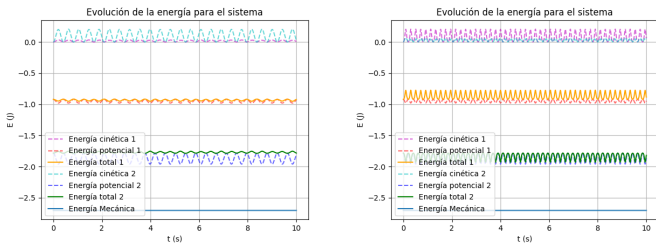


Figura 14: Evolución energética para el modo simétrico (izq.) y el modo antisimétrico (dcha.)

La energía cinética y la energía potencial de ambos péndulos muestran oscilaciones regulares. En el modo simétrico la energía total de los péndulos parece no variar significativamente para cada uno individualmente, lo cual sugiere que no hay una transferencia de energía entre los péndulos. Esto no sucede en el modo antisimétrico, donde si que observamos una oscilación en la energía

total de cada péndulo, que sugiere que en este modo sí que hay una transferencia energética entre los péndulos. La energía mecánica se conserva tal y como se esperaba de un sistema aislado sin fuerzas no conservativas.

4 TEORÍA DEL CAOS

Vamos a comprobar el comportamiento caótico en lo que se refiere a la alta sensibilidad a las variaciones infinitesimales en las condiciones iniciales del sistema. Para ello vamos a buscar el ángulo a partir del cual el comportamiento del péndulo doble se vuelve muy dispar con lo que esperamos de un péndulo simple. Si hacemos una gráfica representando los valores finales de θ frente al ángulo inicial para 10 segundos de simulación obtenemos la siguiente figura.

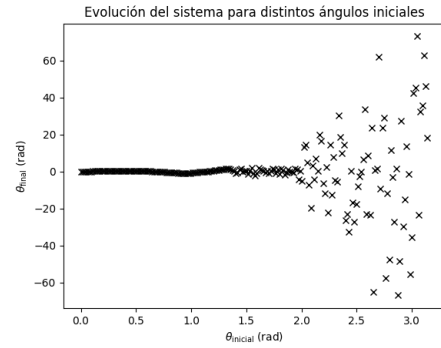


Figura 15: Evolución energética para el modo simétrico (izq.) y el modo antisimétrico (dcha.)

En la figura podemos ver cómo a partir de 1.5 radianes el sistema comienza a ser algo caótico, pero a partir de 2 radianes podemos decir que el sistema es completamente caótico y en cierta manera impredecible.

A continuación, vamos a representar dos simulaciones con condiciones iniciales mínimamente dispares, para compararlas y ver cuanto tiempo ha de pasar para que se diferencien significativamente.

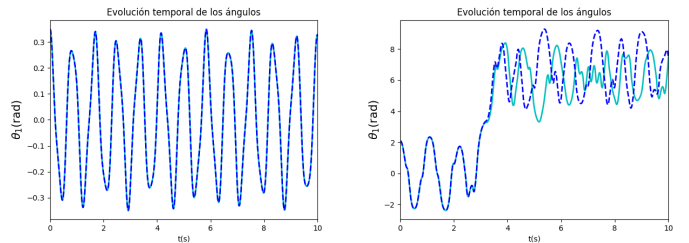


Figura 16: Evolución de θ_1 en $t = 10$ s para cambios infinitesimales en ángulos pequeños (20°) (izq.) y para ángulos grandes (120°) (dcha.)

Vemos como para ángulos pequeños el cambio infinitesimal en las condiciones iniciales no afecta prácticamente al comportamiento del sistema ya que, como hemos visto, para esos ángulos todavía no es caótico. Sin embargo, al introducir un ángulo inicial mayor, vemos como a partir de cierto momento el comportamiento de los dos péndulos con cambios mínimos en las condiciones iniciales difiere muchísimo. Veámoslo también en la trayectoria en el espacio real.

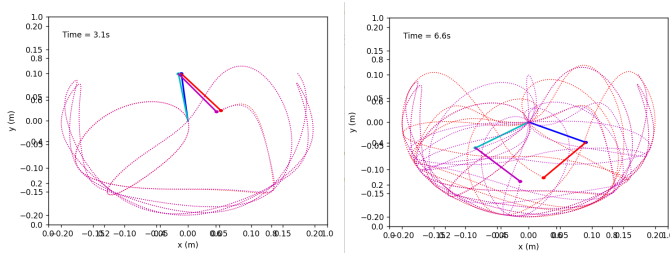


Figura 17: Posición de dos péndulos dobles para un cambio infinitesimal en ángulos grandes en $t = (\text{izq.})$ y $t = (\text{dcha.})$

Podemos ver en la figura de la izquierda como hasta los tres segundos ambos péndulos han seguido una trayectoria muy similar, pero a partir de ahí empiezan a separarse sus trayectorias hasta acabar en dos completamente distintas, como podemos ver tan solo tres segundos más tarde en la imagen de la derecha.

5 EXTRA: PÉNDULO TRIPLE

El primer sistema caótico que se nos viene a la cabeza a los físicos suele ser el péndulo doble a causa de su simplicidad aparente pero su complejo trasfondo en relación con las condiciones iniciales y qué definimos como un problema resuelto. Quizás con falta de originalidad vamos a simular un péndulo triple, es decir, un sistema con dos péndulos acoplados con masas en sus extremos.

El código ha resultado algo complicado, sobretodo por el tema de conseguir la Lagrangiana correcta y obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange adecuadas. Pero he conseguido realizar una simulación y animación de un péndulo triple a partir del código del péndulo doble, cuyo script dejo en este link a *Github*.

El análisis del péndulo doble que hemos realizado es análogo, siendo quizás este problema más caótico incluso como podemos ver en la siguiente figura. El caos empieza para ángulos iniciales más pequeños que en el caso del péndulo doble.

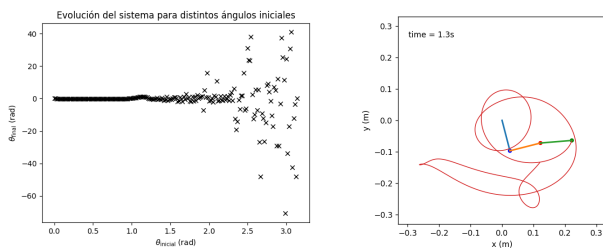


Figura 18: Caos para diferentes ángulos iniciales del péndulo triple $t = (\text{izq.})$ y espacio real para unas condiciones iniciales aleatorias del péndulo triple (dcha.)

Considero que también hubiera sido interesante simular un sistema de N péndulos acoplados y analizar el comportamiento, que se asemejaría al de una cuerda conforme vayamos subiendo el valor de N . Resulta análogo a las comparaciones que se nos hacen a los alumnos en las asignaturas de Mecánica Cuántica cuando estudia el potencial armónico unidimensional en el límite clásico, es decir, cuando la constante reducida de Planck tiende a cero y se recupera la mecánica clásica, se observa que el potencial armónico unidimensional se asemeja al potencial de un resorte en la mecánica clásica.

Adjunto en este link un enlace a *Overleaf* con el código de \LaTeX que genera este documento.

BIBLIOGRAFÍA

- Lichtenberg, A.J., & Lieberman, M.A. *Chaos in the double pendulum*, Non-linear Dynamics, Springer, DOI: 10.1007/s11071-020-05697-1.
- Murad, J. *The double pendulum: Equations of Motion & Lagrangian Mechanics*, www.jousefmurad.com.
- SciPython. *The double pendulum: Derivation of the equations of motion*, www.scipython.com/blog/the-double-pendulum/.
- Daniel, M., & Rajasekar, S. *An investigation into the chaotic behavior of the double pendulum*, Physica D, Elsevier, DOI: 10.1016/j.physd.2005.06.004.
- Chen, J. *Chaos from Simplicity: An Introduction to the Double Pendulum*, 5 February 2008.
- Noll, R.B. *The chaotic motion of the double pendulum*, American Journal of Physics, DOI: 10.1119/1.17335.
- Strogatz, S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd Edition, CRC Press, 2018.
- Guckenheimer, J., & Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- Ott, E. *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.
- Meirovitch, L. *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, 1970.
- Hilborn, R.C. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, 2000.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., & Kurths, J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, 2001.