Grado en Física. Mecánica Analítica. Problemas Tema 5: Teoría de Hamilton-Jacobi.

Curso 2022-2023

1. Obtén la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre de masa m que se mueve a lo largo del eje x. Comprueba que las funciones

$$S = \frac{m(x-\alpha)^2}{2t}$$

y

$$S = x\sqrt{2m\,\alpha} - \alpha\, t$$

son soluciones completas de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Obtén, para cada caso, el movimiento $x(t)$ y el momento $p(t)$ de la partícula. Interpreta el significado de las constantes α y β en cada caso.

2. Obtén la ecuacón de Hamilton-Jacobi para la función principal de Hamilton en el caso del oscilador armónico unidimensional, cuya hamiltoniana es

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k\, q^2.$$

Obtén la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo para la función característica de Hamilton. Resuelve esta ecuación y obtén a partir de la solución el movimiento de la partícula $q(t)$ y $p(t)$.

3. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x bajo la acción de una fuerza constante F. Obtén el movimiento $x(t)$ de la partícula usando el método de Hamilton-Jacobi.

4. Obtén el movimiento de una partícula que se mueve en dos dimensiones bajo la acción de un campo gavitatorio constante de intensidad $\vec{g}$ usando el método de Hamilton-Jacobi.

5. Usando las variables ángulo-acción en el oscilador armónico simple unidimensional obtén la frecuencia de oscilación.

6. Obtén el movimiento de una partícula que se mueve en dos dimensiones bajo la acción de una fuerza central con potencial $\frac{1}{2}k\, r^2$ usando el método de Hamilton-Jacobi. Obtén el periodo del movimiento.

1. Obtén la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre de masa m que se mueve a lo largo del eje x. Comprueba que las funciones

$$S = \frac{m(x-\alpha)^2}{2t}$$

y

$$S = x\sqrt{2m\,\alpha} - \alpha\, t$$

son soluciones completas de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Obtén, para cada caso, el movimiento $x(t)$ y el momento $p(t)$ de la partícula. Interpreta el significado de las constantes α y β en cada caso.

1. Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

2. Ecuación Hamilton - Jacobi

Buscamos una función generatriz $S = S(q, \alpha, t)$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 0$$

3. Separación de variables

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) + g(t)$$

$$\dot{g}(t) + \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\hookrightarrow \dot{g}(t) = -\alpha \Leftrightarrow g(t) = -\alpha t \\ &\hookrightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = \alpha \Leftrightarrow W = q\sqrt{2m\alpha} \end{aligned}\right\} S = q\sqrt{2m\alpha} - \alpha t$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha = -H = -E \Rightarrow \boxed{E = \alpha}$$

ecuación Hamilton-Jacobi

$$S = q\sqrt{2mE} - Et$$

4. Comprobar que $S=\frac{m(q-\alpha)^2}{2t}$ es solución

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = \frac{-m(q-\alpha)^2}{2t^2} + \frac{1}{2\cancel{m}}\left(\frac{2m}{\cancel{2}t}(q-\alpha)\right)^2$$

$$= \frac{-m(q-\alpha)^2}{2t^2} + \frac{m(q-\alpha)^2}{2t^2} = 0$$

5. Saco $x(t)$ y $p(t)$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{qm}{\sqrt{2m\alpha}} - t = \beta \Rightarrow q = (\beta+t)\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} = x(t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{m(q-\alpha)}{t} = p(t)$$

6. ¿α? ¿β?

Ya hemos visto que $\alpha = E$

$\beta = -t_0$

(Hay que sacarlo para los dos casos : )

2. Obtén la ecuacón de Hamilton-Jacobi para la función principal de Hamilton en el caso del oscilador armónico unidimensional, cuya hamiltoniana es

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k\, q^2.$$

Obtén la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo para la función característica de Hamilton. Resuelve esta ecuación y obtén a partir de la solución el movimiento de la partícula $q(t)$ y $p(t)$.

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kq^2$$

1. Ecuación Hamilton – Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 \frac{1}{2m} + \frac{1}{2} kq^2 = 0$$

2. Saco $S = W(q) + T(t)$

$$\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 \frac{1}{2m} + \frac{1}{2} kq^2 = \alpha \iff \frac{dW}{dq} = \sqrt{2m\left(\alpha - \frac{1}{2} kq^2\right)}$$

$$W(\alpha, q) = \sqrt{m} \int \sqrt{2\alpha - kq^2}\, dq$$

$$S(q,\alpha,t) = W(\alpha,q) - E\cdot t = \sqrt{m} \int \sqrt{2\alpha - kq^2}\, dq \quad - E\cdot t$$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = P = \sqrt{m}\left(\sqrt{2\alpha - kq^2}\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\alpha - kq^2}} - t \Rightarrow \beta + t = \frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

$*$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} - t$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \sqrt{m} \int \frac{\partial}{\partial \alpha} \sqrt{2\alpha - kq^2}\, dq = \sqrt{m} \int \frac{2}{\sqrt{2\alpha - kq^2}}\, dq =$$

$$= 2\sqrt{m} \int \frac{dq}{\sqrt{2\alpha\left(1 - \frac{kq^2}{2\alpha}\right)}} = \sqrt{\frac{2m}{\alpha}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{kq^2}{2\alpha}}} =$$

$$u = \sqrt{\frac{k}{2\alpha}}\, q$$

$$dq = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}}\, du$$

$$= \sqrt{\frac{2m}{\alpha}} \int \frac{\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}\, du}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{\frac{4m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsen(u) =$$

$$= 2\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsen \sqrt{\frac{k}{2\alpha}}\, q$$ despejo q.

3. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x bajo la acción de una fuerza constante F. Obtén el movimiento $x(t)$ de la partícula usando el método de Hamilton-Jacobi.

1. Hamiltoniana

$$\left.\begin{aligned} &F = cte \Rightarrow U = -\int_{x_0}^{x} F\, dr = -F\cdot x \\ &T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \end{aligned}\right\} L = T - U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + F\cdot x$$

$$H = T + U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - F\cdot x = \frac{p^2}{2m} - Fx$$

2. Ecuación Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - Fx = 0$$

4. separación de variables

$$S(x,\alpha,t) = W(x,\alpha) - \alpha t$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{2m} - Fx = \alpha \Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2m(\alpha + Fx)}$$

$$W = \int \sqrt{2m(\alpha + Fx)}\, dx = \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha + Fx}\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{F} \int F (\alpha + Fx)^{1/2} dx = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2m}}{F} (\alpha + Fx)^{3/2}$$

$$S(x,\alpha,t) = \frac{2\sqrt{2m}}{3F} (\alpha + Fx)^{3/2} - \alpha t$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha = -H = -E \Rightarrow \boxed{\alpha = E}$$

5. Hallamos $x(t)$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \beta = \frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{2\sqrt{2m}}{3F}(E+Fx)^{3/2} - Et\right) = \frac{\cancel{2}\sqrt{2m}}{\cancel{3}F}\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(E+Fx)^{1/2} - t$$

$$= \frac{\sqrt{2m(E+Fx)}}{F} - t = \beta \quad (\text{despejo } x)$$

$$\sqrt{E+Fx} = \frac{(\beta+t)F}{\sqrt{2m}} \iff E+Fx = \frac{(\beta+t)^2F^2}{2m}$$

$$\iff x(t) = \left(\frac{(\beta+t)^2F^2}{2m} - E\right)\frac{1}{F} = \frac{(\beta+t)^2F}{2m} - \frac{E}{F}$$

4. Obtén el movimiento de una partícula que se mueve en dos dimensiones bajo la acción de un campo gavitatorio constante de intensidad $\vec{g}$ usando el método de Hamilton-Jacobi.

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$U = mgy$$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

$$P_x = m\dot{x} \qquad P_y = m\dot{y}$$

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + mgy = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + mgy$$

1. Ecuación Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{2m} + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{2m} + mgy = 0$$

2. separación variables:

$$S(x, y, \alpha, t) = W(x, \alpha) + W(y, \alpha) - \alpha t$$

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2}_{\alpha_x} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + mgy}_{\alpha_y} = \underbrace{-\frac{\partial S}{\partial t}}_{E = \alpha_x + \alpha_y}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = \alpha_x \Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2m\alpha_x} \Leftrightarrow W_x = x\sqrt{2m\alpha_x}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = \alpha_y - mgy \Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{2m(\alpha_y - mgy)}$$

$$\Leftrightarrow W_y = \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha_y - mgy}\, dy = -\frac{2\sqrt{2m}}{3\, mg} (\alpha_y - mgy)^{3/2}$$

3. Saco $x(t)$, $y(t)$

$$S(x,y,\boxed{\alpha_x,\alpha_y},t) = W_x(x,\alpha_x,\alpha_y) + W_y(y,\alpha_x,\alpha_y) - E\cdot t$$

tantos α
como coord.

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = \frac{\partial W_x}{\partial \alpha_x} + \cancel{\frac{\partial W_y}{\partial \alpha_x}}^{\,0} - \frac{\partial(\alpha_x+\alpha_y)}{\partial x}\cdot t = \frac{2mx}{\sqrt{2m\alpha_x}} - t = \beta_x$$

$$= x\sqrt{\frac{2m}{\alpha_x}}$$

$$\Rightarrow x(t) = (\beta_x + t)\sqrt{\frac{\alpha_x}{2m}}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_y} = \frac{\partial W_y}{\partial \alpha_y} - t = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\frac{\sqrt{2m}}{mg}\,\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(\alpha_y - mgy)^{1/2} - t = \beta_y$$

$$\sqrt{\alpha_y - mgy} = (\beta_y + t)\frac{mg}{\sqrt{2m}} \iff \alpha_y - mgy = (\beta_y + t)^2\frac{mg^2}{2}$$

$$\iff y(t) = \left(\alpha_y - \frac{(\beta_y + t^2)\,mg^2}{2}\right)\frac{1}{mg}$$

5. Usando las variables ángulo-acción en el oscilador armónico simple unidimensional obtén la frecuencia de oscilación.

1. Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} w^2 m q^2$$

$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

2. Ecuación H-J.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 \frac{1}{2m} + \frac{1}{2} w^2 m q^2 = 0$$

3. Separación variables

$$S(q, \alpha, t) = \frac{\partial W}{\partial q} - \alpha t$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 \frac{1}{2m} = \alpha - \frac{1}{2} m w^2 q^2 \Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\left(\alpha - \frac{1}{2} m w^2 q^2\right)}$$

4. Variables ángulo-acción

$$J_i = \oint p_i dq_i = \oint \frac{\partial W_i}{\partial q_i} dq_i$$

$$J = \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \oint \sqrt{2Em - m^2 w^2 q^2}\, dq = 2 \int_{-A}^{A} \sqrt{2Em - m^2 w^2 q^2}\, dq$$

para tener ciclo

$$= 2 \int_{-A}^{A} \sqrt{\left(\frac{2Em}{m^2 w^2} - q^2\right) m^2 w^2}\, dq =$$

Saco A teniendo en cuenta: $q = A \Rightarrow p = 0$ (inicial)

$$p = 2Em - m^2 w^2 A^2 = 0 \Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{2Em}{m^2 w^2}} = \sqrt{\frac{2E}{m w^2}}$$

cambio variable : $q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen} u \; / \; dq = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cos u \, du$

$\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ "A

límites integración

$A = A \operatorname{sen} u \iff \operatorname{sen} u = \frac{\pi}{2}$

$-A = A \operatorname{sen} u \iff \operatorname{sen} u = -\frac{\pi}{2}$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} m\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - \frac{2E}{m\omega^2} \operatorname{sen}^2 u} \; \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cos u \, du =$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2E}{\cancel{m}\omega^{\cancel{2}}} \cancel{m\omega} \cos^2 u \, du = \frac{4E}{\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, du = \frac{4E}{\omega} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{2\pi E}{\omega}}$$

$$\boxed{J = \frac{2\pi E}{\omega}} \Rightarrow E = \frac{J\omega}{2\pi} = H(J)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial J} = \boxed{\frac{\omega}{2\pi} = \nu}$$

6. Obtén el movimiento de una partícula que se mueve en dos dimensiones bajo la acción de una fuerza central con potencial $\frac{1}{2}k\,r^2$ usando el método de Hamilton-Jacobi. Obtén el periodo del movimiento.

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$U = \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2)$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} k (x^2 + y^2)$$

$$H = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} k (x^2 + y^2)$$

$\Rightarrow$ Ecuación Hamilton-Jacobi

$$S(x, y, \alpha_x, \alpha_y, t) = W_x(x, \alpha_x, \alpha_y) + W_y(y, \alpha_x, \alpha_y) - Et$$

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = +\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 + \left(\frac{\partial W_y}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{2m} + \frac{1}{2} k y^2$$

$$+E = \alpha_x + \alpha_y$$

$$\Rightarrow W_x \qquad \left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right) = \sqrt{\left(\alpha_x - \frac{1}{2} k x^2\right) 2m}$$

$$W_x = \int \sqrt{\left(\alpha_x - \frac{1}{2} k x^2\right) 2m} \; dx$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = \beta_x = \frac{\partial W_x}{\partial \alpha_x} - t$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial \alpha_x} = \int \frac{\partial}{\partial \alpha_x} \left(\sqrt{\left(\alpha_x - \frac{1}{2} k x^2\right) 2m} \right) dx = \sqrt{2m} \int \frac{dx}{2\sqrt{\alpha_x - \frac{1}{2} k x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha_x \left(1 - \frac{k x^2}{2\alpha_x}\right)}} = \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{\alpha_x}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{K}{2\alpha_x}}\, x\right)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{\cancel{\alpha_x}}} \sqrt{\frac{2\cancel{\alpha_x}}{k}} \arcsen\left(\sqrt{\frac{k}{2\alpha_x}}\, x\right) = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsen\left(\sqrt{\frac{k}{2\alpha_x}}\, x\right)$$

Despejo x ✓

(Idem con y)

$$\Rightarrow J_x = \oint \frac{\partial W}{\partial x} dx = \dots = 2\pi \alpha_x \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\Rightarrow J_y = \oint \frac{\partial W}{\partial y} dy = \dots = 2\pi \alpha_y \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\alpha_x = \frac{J_x}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow E = \alpha_x + \alpha_y = \sqrt{\frac{k}{m}}\, \frac{1}{2\pi}\left(J_x + J_y\right)$$

$$\alpha_y = \frac{J_y}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial J_x} = \dfrac{\partial H}{\partial J_x} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\, \dfrac{1}{2\pi} = \nu_x \\[2ex] \dfrac{\partial E}{\partial J_y} = \dfrac{\partial H}{\partial J_y} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\, \dfrac{1}{2\pi} = \nu_y \end{cases}$$

Periodo: $\boxed{T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{w}}$