Grado en Física, Curso 2019-2020

Mecánica Estadística

Examen Final

13 de Enero 2020

1. Utilizando la definición de entropía de Gibbs y las probabilidades para las colectividades canónica y macrocanónica (o gran canónica), deduce la relación entre las funciones de partición de estas dos colectividades.
   (1 punto)

2. Considera un sistema de N partículas no interactuantes, cada una con momento magnético μ que puede estar alineado paralela o antiparalelamente a un campo magnético externo H. Supongamos que el sistema está en contacto con un baño térmico de temperatura T.

   (a) Calcula la energía media del sistema en función de T, H y N.

   (b) Calcula la entropía en función de T, H y N.

   (c) Discute cuál será el comportamiento de la energía y de la entropía de este sistema para $T \to 0$.

   (d) Calcula la relación entre la energía magnética y la térmica, $\frac{\mu H}{KT}$, para que el 80% de las partículas tengan sus momentos paralelos al campo magnético.

   (e) Si las partículas interaccionan entre ellas, discute qué tipo de interacción podríamos introducir en nuestro modelo para que la magnetización persista incluso en ausencia del campo magnético.

   (3 puntos)

3. Supongamos un gas ideal clásico de N moléculas de masa m en equilibrio térmico a temperatura T, en un volumen V que cumple la distribución de velocidades de Maxwell. Calcula:

   (a) El número medio de moléculas por unidad de volumen con energía entre ϵ y $\epsilon + d\epsilon$, $F(\epsilon)d\epsilon$.

   (b) La energía media por molécula a partir de la distribución de energía del apartado anterior. Discute el resultado con relación al principio de equipartición de la energía.

   (c) El valor más probable de la energía, $\tilde{\epsilon}$. ¿Se cumple que $\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2}m\tilde{v}^2$, donde $\tilde{v}$ es el valor más probable de la velocidad?

La distribución de Maxwell para el vector velocidad es:

$$f(\vec{v})d\vec{v} = \frac{N}{V}(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}\exp(-\frac{mv^2}{2kT})d\vec{v}$$

(3 puntos)

4. (a) Deduce la distribución de Planck para fotones a partir de la función de partición de la colectividad canónica y la relación:

$$\overline{n_s} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_s}$$

   (b) Discute las diferencias y similitudes entre la distribución de Planck y la distribución de Bose-Einstein. ¿Qué particularidad tienen las partículas que, siendo bosones, cumplen la distribución de Planck?

   (2 puntos)

5. Considera un gas ideal clásico a temperatura y presión ambientales ($300\,K$ y $1\,atm$). Si el radio típico de una partícula es del orden de $10^{-8}\,cm$ y consideramos un modelo de esferas rígidas para el cálculo de la sección eficaz de colisión:

   (a) Estima el recorrido libre medio de una partícula.

   (b) Estima la probabilidad de que se produzca una colisión tras recorrer una distancia de $0.1\,\mu m$.

   (c) Si la velocidad media de las partículas es de $4 \times 10^4\,cm/s$, estima el número medio de colisiones por segundo.

   Datos: Constante de Boltzmann, $K = 1.38 \times 10^{-23}\,J/K$, $1\,atm \approx 10^5\,Pa$

   (1 punto)

Relaciones de interés:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$$\int_0^{\infty} x^a e^{-bx} dx = b^{-a-1}\Gamma(a+1)$$

Donde la función Γ cumple: $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ y $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.