**1.-** a) (1'5 puntos) Enunciar y demostrar de dos formas distintas (haciendo uso de teoremas diferentes de clase) el Teorema Fundamental del Álgebra.

T.F.A.

Enunciado 1: Todo polinomio $p$ con coeficientes complejos tiene almenos una raíz en $\mathbb{C}$ si $p$ no es constante

Enunciado 2: Todo polinomio $p$ de grado $n \geq 1$ tiene $n$ raíces en $\mathbb{C}$

Demostración 1:

Reducción al absurdo: Asumimos que $p$ es un polinomio sin raíces. Entonces $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ es una función holomorfa en $\mathbb{C} \Rightarrow f$ es entera. Como $\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \infty \Rightarrow \exists M > 0 : |p(z)| > 1 \ \forall |z| > M \Rightarrow |f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} < 1$ $\forall |z| > M \Rightarrow f$ es acotada. Como $f$ acotada y entera $\xRightarrow{\text{Liouville}}$ $f$ constante $\to p(z)$ constante ↯

Demostración 2:

Por el enunciado 1, nuestro polinomio $p$ de grado $\geq 1$ tendrá almenos una raíz en $\mathbb{C}$ $\alpha_1$: $p(z) = p_1(z-\alpha_1)$ y a su vez $p_1$ tendrá almenos 1 raíz si no es una constante y su grado es estrictamente $m = n-1$ ya que hemos factorizado una raíz. Ahora, podemos factorizar la raíz de $p_1$ y así sucesivamente hasta que el polinomio sea de grado $0 \equiv A$ cte.: $p(z) = \prod_i^n (z-\alpha_i) A$ de forma que tendremos $n$ raíces $\equiv$ grado del polinomio $p$ $\square$

b) (0'5 puntos) Dado $w_0 \in \mathbb{C}$, ¿puede una función entera no constante $f(z)$ tener asociada una cantidad infinita de valores $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ localizados en un conjunto acotado tales que $f(z_j) = w_0$ para $j = 1, 2, \ldots$? Razonar la respuesta.

$f(z) = e^z$ $\quad f(i) = e^i = 1 = e^{2\pi i} = f(2\pi i) = f(2\pi i k)$ con $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists f$ asociada a $k \in \mathbb{Z}$ conjunto infinito tales que $f(z_j) = 1$ para $j \in \mathbb{N}$

Mal: ¡No acotado! $(2\pi i k)$

Cauchy-Weierstrass $\Rightarrow \{z_n\}$ conjunto acotado e infinito tiene almenos un punto de acumulación

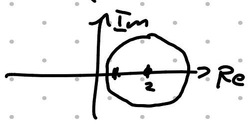
¿/

**2.-** (0'75 puntos) i) Describir geométricamente el conjunto de números complejos

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 1 + 4\,\mathrm{Re}\, z = |z|^2\}.$$

$z = x+iy \Rightarrow 1 + 4\mathrm{Re}(x+iy) = |x+iy|^2 \iff 1+4x = x^2+y^2 \iff x^2-4x+y^2+1 = 0 \iff$

$\iff x^2-4x+4+y^2+1 = 4 \iff (x-2)^2+y^2 = (\sqrt{3})^2 \iff \boxed{D = C(2, \sqrt{3})}$




ii) (0'5 puntos) Sea $f(z) = \log_{\theta_0}(z)$ la determinación del logartitmo que hace que el ínfimo de su parte imaginaria sea $\frac{5}{2}\pi$. Señalar el valor de $f(1+i)$.

$\log_{\theta_0}(z) = \log(r) + i\theta$ $\quad \inf\{\mathrm{Im}(\log_{\theta_0}(z))\} = \inf\{\theta\} = \frac{5}{2}\pi \Rightarrow \theta = \frac{5}{2}\pi \to \boxed{f(z) = \log_{\frac{5}{2}\pi}(z)}$

$|1+i| = \sqrt{2}$ $\quad \theta = \arg(1+i) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\log_{\frac{5}{2}\pi}(z) = \log(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}$ pero $\frac{\pi}{4} \notin \left[\frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi\right] = [2'5\pi, 4'5\pi]$ $\quad \left(\frac{1}{4}+2\right)\pi = 2'25\pi \notin \left[\frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi\right]$

$\left(\frac{1}{4}+4\right)\pi = 4'25\pi \in \left[\frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi\right]$

$\boxed{\log_{\frac{5}{2}\pi}(z) = \log(\sqrt{2}) + i\frac{17}{4}\pi}$

**3.-** i) (1 punto) Clasificar las singularidades (incluyendo $z = \infty$) de la función

$$f(z) = \frac{-1 + \cos z^2}{5z^9}.$$

Como $\cos(z^2) - 1$ es entera (holomorfa en $\mathbb{C}$) buscamos cuándo se anula el denominador

$$5z^9 = 0 \Longrightarrow z = 0 \quad \lim_{z \to 0} z \frac{-1 + \cos z^2}{5z^9} = \infty \ldots \lim_{z \to 0} z^5 \frac{-1+\cos z^2}{5z^9} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{5z^5}(\cos z^2 - 1) =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{-1}{5z^4}\left(\frac{z^4}{2}\right) = -\frac{1}{10} \in \mathbb{C} \Longrightarrow z = 0 \text{ es un polo de orden } 5$$

$$\lim_{z \to \infty} \frac{-1 + \cos z^2}{5z^9} = \lim_{z \to 0} \frac{-1 + \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)}{5\frac{1}{z^9}} = \lim_{z \to 0} -\frac{z^9}{5}\left(1 - \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \longrightarrow$$

Habría que demostrar que $\nexists \rightarrow$ singularidad esencial

---

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \Longrightarrow \frac{1}{5z^9}(\cos z^2 - 1) = \frac{1}{5z^9} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{4n}\right) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5(2n)!} z^{4n-9} = \sum_{m=-5}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{4}(m+9)}}{5(\frac{1}{2}(m+9))!} z^m$$

$$m = 4n - 9 \Longrightarrow n = \tfrac{1}{4}(m+9)$$

$\Longrightarrow$ Polo de orden 5 en $z = 0$

Probamos en $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \displaystyle\sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{4}(n+9)}}{5(\frac{1}{2}(n+9))!} z^{-n} = \sum_{m=5}^{-\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{4}(9-m)}}{5(\frac{1}{2}(9-m))!} z^m$

Como tengo $\infty$ términos con coeficientes $\neq 0$ en los que tenemos $\frac{1}{z^i} \Longrightarrow$ singularidad esencial en $\infty$

ii) (0'25 puntos) Calcular el valor del residuo $\text{Res}(f, 0)$.

Por definición, $\text{Res}(f,0) = a_{-1} = \dfrac{(-1)^{\frac{1}{4}(-1+9)}}{5(\frac{1}{2}(-1+9))!} = \dfrac{(-1)^2}{5 \cdot 4!} = \dfrac{1}{120}$

iii) (0'5 puntos) Calcular la integral $\int_\Gamma f(w)w^3 dw$, siendo $\Gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$ para algún $r > 0$.

Por Residuos $\int_\Gamma f(w) w^3 dw$ con $\Gamma$ círculo centrado en $0$ de radio $r$ $C(0,r)$

$$g(w) = f(w)w^3 = \frac{\cos w^2 - 1}{5w^6} \longrightarrow \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \Longrightarrow \frac{\cos z^2 - 1}{5z^6} = \frac{1}{5z^6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{4n}\right) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5 \cdot (2n)!} z^{4n-6} =$$

$$4n - 6 = m \Longrightarrow n = \tfrac{1}{4}(m+6)$$

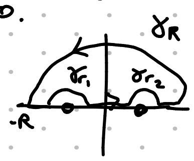
$$= \sum_{m=-2}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{4}(m+6)}}{5 \cdot (\frac{1}{2}(m+6))!} z^m \longrightarrow \text{Res}(g,0) = \frac{(-1)^{\frac{1}{4}(-1+6)}}{5 \cdot (\frac{1}{2}(-1+6))!} = \frac{(-1)^{\frac{5}{4}}}{5 \cdot (\frac{5}{2})!} \leftarrow \text{Rarete}$$

$$\int_\Gamma g(w) dw = \text{Res}(g,0) 2\pi i \qquad \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z^2 - 1}{5z^4}\right) = \lim_{z \to 0} \frac{-10 z^5 \sin z^2 - 20 z^3 (\cos z^2 - 1)}{25 z^8}$$

**4.-** (2 puntos) Utilizar el método de los residuos en la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{9\pi}{2}x\right)}{x^2 - 1}$. ¿Es convergente?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{9\pi}{2}x\right)}{x^2 - 1} dx = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{9}{2}\pi x}}{x^2 - 1} dx \qquad \bullet\, f(z) = \frac{e^{i\frac{9}{2}\pi z}}{z^2 - 1} \text{ extensión analítica en } \mathbb{C}$$

Raíces del denominador $z^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow z = \pm 1$ Tomamos una semicircunferencia de radio $R > 1$ en el semiplano positivo además de dos semicircunferencias de radio $r < 1$ y los segmentos que los unen. $\Gamma$ simple, regular y cerrada. Su interior es simplemente conexo.




$$\cancel{\int_\Gamma f(z) dz}^{\,0} = \cancel{\int_{\gamma_R} f(z) dz}^{\,0} + \int_{\gamma_{r_1}} f(z) dz + \int_{-R}^{-1-r} f(x) dx + \int_{-1+r}^{1-r} f(x) dx + \int_{\gamma_{r_2}} f(z) dz + \int_{1+r}^{R} f(x) dx$$

Lema de Jordan: $\left|\int_{\gamma_r} g(z) e^{iaz} dz\right| \leq \frac{\pi M_g(\gamma_r)}{a}(1 - e^{-Ra})$ con $M_g = \max\{|g(z)|, z \in \gamma_r^*\}$

$$\left|\frac{1}{z^2-1}\right| = \frac{1}{|z^2-1|} \underset{\substack{\nearrow\\ DTI}}{\leq} \frac{1}{||z|^2-|-1||} = \frac{1}{|z|^2-1} \underset{\substack{\nearrow\\ |z|\leq R}}{\leq} \frac{1}{R^2-1} \quad \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^2-1}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{i\frac{9}{2}\pi z}}{z^2-1}dz\right| \leq 0 \Rightarrow \int_{\gamma_R}\frac{e^{i\frac{9}{2}\pi z}}{z^2-1}dz = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\gamma_{r_1}} f(z)dz = -\pi i\,Res(f,-1) = -\pi i \lim_{z\to -1} \cancel{(z+1)}\frac{e^{i\frac{9}{2}\pi z}}{\cancel{(z+1)}(z-1)} = \pi i\,\frac{e^{-i\frac{9\pi}{2}}}{2} \\ \displaystyle\int_{\gamma_{r_2}} f(z)dz = -\pi i\,Res(f,1) = -\pi i \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)}\frac{e^{i\frac{9}{2}\pi z}}{(z+1)\cancel{(z-1)}} = -\pi i\,\frac{e^{i\frac{9}{2}\pi}}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} A) \\ \\ B) \end{array}$$

$$\int_{P} \cancel{f(z)dz}^{\,0} = \int_{\gamma_R}\cancel{f(z)dz}^{\,0} + \int_{\gamma_{r_1}} f(z)dz + \int_{-R}^{-1-r} f(x)dx + \int_{-1+r}^{1-r} f(x)dx + \int_{\gamma_{r_2}} f(z)dz + \int_{1+r}^{R} f(x)dx \iff$$

$$\iff \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}}\left(\int_{-R}^{-1-r}\int_{-1+r}^{1-r}\int_{1+r}^{R} f(x)dx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -\int_{\gamma_{r_1}} f(z)dz - \int_{\gamma_{r_2}} f(z)dz =$$

$$f(x) = \frac{e^{i\frac{9}{2}\pi x}}{x^2-1}$$

$$= -\frac{\pi i}{2}e^{-i\frac{9}{2}\pi} + \frac{\pi i}{2}e^{i\frac{9}{2}\pi} = \frac{\pi i}{2}\left(e^{i\frac{9}{2}\pi} - e^{-i\frac{9}{2}\pi}\right) = \frac{\pi i}{2}\left(\cancel{\cos(\tfrac{9}{2}\pi)} + i\sin(\tfrac{9}{2}\pi) - \cancel{\cos(\tfrac{9}{2}\pi)} + i\sin(\tfrac{9}{2}\pi)\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\,2i\sin(\tfrac{9}{2}\pi) = -\pi\sin(\tfrac{9}{2}\pi) = -\pi\sin\left(\pi(\tfrac{1}{2}+4)\right) = -\pi\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -\pi \,//$$

**5.-** (1'25 puntos) Determinar el número de soluciones de la ecuación $e^z = 2z+1$ en el disco unidad abierto $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

T$^{ma}$ de Rouché

Sean $g$ y $h$ holomorfas en un dominio simplemente conexo $D$ y $|g(z)| > |h(z)|$ en $\partial D \Rightarrow g(z)$ y $g(z)+h(z)$ tienen el mismo número de ceros en $D$

$f(z) = g(z)+h(z) = 2z+1-e^z$ con $g(z) = 2z+1$, $h(z) = -e^z$

$|2z+1| = 2|z|+1 \leq 2+1 = 3$

$|-e^z| \leq e^{Re z} = e$ ← en $\partial D$ y como $3 > e \Rightarrow g(z)$ y $f(z)$ tienen el mismo número de ceros en $D$

Como $g$ es un polinomio de grado 1 por el TFA tendrá una única raiz $2z+1=0 \Rightarrow z_0 = -\frac{1}{2}$ y como $z_0 \in D(0,1) \Rightarrow f(z) = 2z+1-e^z$ tiene un cero en $D \Rightarrow$ la ecuación $e^z = 2z+1$ tiene una solución en $D$

**6.-** (1'75 puntos) Aplicar el teorema de factorización de Hadamard para probar la igualdad

$$\cosh z = \prod_{n\geq 1}\left(1 + \frac{4z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right).$$