Análisis de varias variables 2

Víctor Mira Ramírez

5 de mayo de 2023

Índice

Capítulo 1

Formas diferenciales

Introducción

Vamos a ver en este capítulo un concupto muy importante en matemáticas, que son las formas diferenciales. Como hicimos en *Análisis de varias variables 1*, empezaremos hablando de las formas diferenciales en 2 dimensiones, e iremos poco a poco ampliando el campo de nuestro estudio a dimensiones superiores.

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1: Diferencial

Sea f una función definida en un entorno del punto $M_0 = (x_0, y_0)$ tal que f admite derivadas parciales en un entorno $\mathcal{V}(M_0)$. Se llama **diferencial de f en M_0** a la aplicación lineal definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ denotado:

$$\begin{aligned} L(x_0, y_0) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (h, k) &\longmapsto h\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Comentario:

Para el caso particular $g(x, y) = x$, entonces $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$ lo que nos da $dg(x, y) = dx(h, k) = h$
(rotación $dx = h$) $\quad g(x, y) = y$, entonces $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 1$ lo que nos da $dg(x, y) = dy(h, k) = k$
Esto nos da: $df(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dy$

- Escribir $df(dx, dy)$ es un abuso de notación que debe evitarse, escribiendo en su lugar df únicamente.
- La diferencial puede existir sin que la función sea diferenciable
  ($f \in \mathcal{C}_1 \implies f$ diferenciable, pero f diferenciable $\not\Longleftarrow$ $f \in \mathcal{C}_1$)

Comentario:

Sea $f \in \mathcal{C}_1(\mathcal{V}(M_0))$ una función de una variable,

$$f'(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h) \Longleftrightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + o(h)$$

Como tenemos que $h = dx$,$df_{x_0} = f'(x_0)\,dx \Longleftrightarrow f'(x_0) = \frac{df_{x_0}}{dx}\left(\frac{dx}{dt} = x'(t) \Longleftrightarrow dx = x'(t)\,dt\right)$

Definición 1.1.2: 1-forma diferencial

Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathbb{R}$ y sea $(h,k) \in \mathcal{U}$ se llama **1-Forma diferencial** w a la aplicación

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h,k) &\longmapsto w = P(x,y)\,h + Q(x,y)\,k \end{aligned}$$

donde P y Q son funciones "suficientemente regulares".

Comentario:

Si P y Q son derivadas parciales de f, entonces la 1-forma diferencial w es la diferencial de f

Definición 1.1.3: Producto exterior

Sean dx y dy dos 1-formas diferenciales, se llama **producto exterior** a la aplicación definida por $dx \wedge dy$ ("dx exterior dy"):

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h_1,k_1) \times (h_2,k_2) &\longmapsto h_1 k_2 - h_2 k_1 \end{aligned}$$

Comentario:

Un determinante es el producto exterior de dos 1-formas diferenciales

Teorema 1.1.1

- $dx \wedge dx = 0$
- $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

A consecuencia de este teorema se obtiene la llamada "*Regla de Sarrus*", cuya demostración es inmediata.

Definición 1.1.4: 2-forma diferencial

Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $(x,y) \in \mathcal{U}$, se llama **2-forma diferencial** w a la aplicación

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{B}_i\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right) \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y)\,dx \wedge dy \end{aligned}$$

donde $\mathcal{B}_i\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ es el conjunto de las apicaciones bilineales.

Comentario:

$\forall H_1(h_1,k_1), H_1'\left(h_1',k_1'\right), H_2(h_2,k_2)$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$:
$dx \wedge dy\left(H_1 + \lambda H_1', H_2\right) = dx \wedge dy\left(\left(h_1 + \lambda h_1', k_1 + \lambda k_1'\right), (h_2,k_2)\right) = dx \wedge dy\, k_2\left(h_1 + \lambda h_1'\right) - dx \wedge dy\, h_2\left(k_1 + \lambda k_1'\right) = dx \wedge dy\,(h_1 k_2 - h_2 k_1) + \lambda dx \wedge dy\left(h_1' k_2 - h_2 k_1'\right) = dx \wedge dy\,(H_1,H_2) + \lambda dx \wedge dy\left(H_1', H_2\right) \implies$
$dx \wedge dy$ es lineal respecto a la primera variable. Idem con la segunda.
Esto implica que $dx \wedge dy$ es bilineal, y lo es tambien $f(x,y)\,dx \wedge dy$.
En conclusión, $f(x,y)\,dx \wedge dy \in \mathcal{B}_i\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$

Definición 1.1.5: Derivada exterior

Sea w una 1-forma diferencial definida en $\mathcal{U}$ abierto de $\mathbb{R}^2$. Se llama derivada exterior de w y la denotamos dw a la 2-forma diferencial definida por:

$$dw = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx \wedge dy$$

1.2 Formas diferenciales cerradas y exactas

Definición 1.2.1: Forma diferencial cerrada

Sea w una 1-forma diferencial de clase C_1 en un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ se dice que w es cerrada si $dw = 0$

Comentario:

Tenemos $w = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, si $w \in C_1$, las derivadas parciales de P y Q existen, y tenemos $dw = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$ Si $w = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, \forall (x,y) \in \mathcal{U}$

Definición 1.2.2: Forma diferencial exacta

Sea w una 1-forma diferenicial de clase C_1 en un abierto de $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, se dice que w es **exacta** si existe una función $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de clase C_1 tal que $df = w$

Comentario:

Ya sabemos que si $f \in C_1(\mathcal{U})$, entonces $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. (Si $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ tenemos la estructura de una 1-forma diferencial). Si $w = df$, tenemos que $P = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $Q = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Esto significa que para demostrar que w es exacta hay que encontrar f tal que $df = w$, es decir, buscamos $f(x,y)$ que sea solución del sistema $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Como $f \in C_1(\mathcal{U})$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas. También sabemos que $w \in C_1(\mathcal{U})$, lo que nos dice que $P, Q \in C_1(\mathcal{U}) \implies f \in C_2(\mathcal{U})$

Teorema 1.2.1

Si $w \in C_1(\mathcal{U}) \implies f \in C_2(\mathcal{U})$

Comentario:

Al ser de clase C_1, podemos determinar las derivadas parciales de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$. Tenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Y con el *Lema de Schwartz* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$, entonces sabemos que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \; \forall (x,y) \in \mathcal{U}$$

Teorema 1.2.2

Sea w una 1-forma diferencial de clase $C_1(\mathcal{U})$ y exacta en $\mathcal{U}$, entonces w es cerrada.

Comentario:

El recíproco del teorema anterior es falso, salvo si damos a $\mathcal{U}$ una cierta geometría. Por ello, vamos a volver a hablar de topología.

Definición 1.2.3: Conjunto estrellado

Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^2$, se dice que $\mathcal{U}$ es estrellado si $\exists a \in \mathcal{U}$ tal que $\forall b \in \mathcal{U}$ tenemos $[a, b] \subset \mathcal{U}$

Ejemplo 1.2.1

1. Todo convexo de $\mathbb{R}^2$ es un estrellado.
2. Si $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathcal{U}$ no es estrellado.
3. $[a, b] \in \mathbb{R}^2 = \{ta + (1-t)b, t \in [0,1]\}$ (Parametrización de un segmento)

Teorema 1.2.3 Poincaré

Si w es una 1-forma diferencial de clase C_1 en un abierto estrellado de $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $dw = 0$ (i.e w es cerrada) entonces w es exacta.

Una aplicación en física puede ser, por ejemplo, en mecánica de fluidos, ya que si en $(0,0)$ hay un obstáculo y hay un flujo alrededor de un cilindro (definido en un entorno de $(0,0)$) entonces no se pueden usar los teoremas de la mecánica de fluidos.

La demostración se hará con integrales de línea (curvilíneas o de camino).

Ejemplo 1.2.2 (Sea $w = x\,dx + y\,dy$ y $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, ¿La forma diferencial w es cerrada?)

Claro que sí, vamos a demostrarlo. Tenemos $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = y$ entonces $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$, lo que implica que $dw = 0$, es decir, que w es cerrada.

Además, como $\mathbb{R}^2$ es estrellado, tenemos gracias al *Teorema de Poincaré* que w es exacta.

Ejemplo 1.2.3 (Usando la anterior forma diferencial, encuentra la función f tal que $df = w$)

Tenemos $w = x\,dx + y\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, lo que nos da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y$$

De aquí, obtenemos que $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + g(y)$, y derivando respecto a y:
$\frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) = y \implies f(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + C$ y tenemos $w = df$.

Comentario:

En $\mathbb{R}^3$, una 1-forma diferencial w se escribe $w = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ donde P, Q, R son tres funciones definidas en un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$. Si además $\mathcal{U}$ es un estrellado de $\mathbb{R}^3$, entonces w es exacta.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Teorema 1.2.4

Sea w una 1-forma diferencial de clase $\mathcal{C}_1(\mathcal{U})$, donde $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$, suponemos el cambio de variable:

$$x = f(u,v) \qquad y = g(u,v) \qquad \text{con} f, g \in \mathcal{C}_1$$

$$w = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = P_1(u,v)\,du + Q_1(u,v)\,dv$$

$$\text{con } P_1(u,v) = P\frac{\partial f}{\partial u} + Q\frac{\partial f}{\partial u} \qquad Q_1(u,v) = P\frac{\partial f}{\partial v} + Q\frac{\partial f}{\partial v}$$

Ejemplo 1.2.4

Sea $w = x\ dx + y\ dy$, tenemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \implies \begin{cases} dx = \cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \\ dy = \sin\theta\ dr + r\cos\theta\ d\theta \end{cases}$$

y por tanto, $w = d\left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right) = d\left(\frac{r^2}{2}\right) = r\ dr$

Capítulo 2

Campo de gradiente, divergencia y rotacional

2.1 Campo escalar, campo vectorial

Definición 2.1.1: Campo de gradiente

Sea $\overline{V}$ un campo vectorial con componentes P y Q de clase $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que $\overline{V}$ es un campo de gradiente si existe un campo escalar φ de clase $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{D}$ tal que:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M(x,y) &\longmapsto \varphi(M) = \varphi(x,y) \end{aligned} \qquad \overline{V} = \overline{grad}\ \varphi = \overline{\nabla}\varphi \qquad \text{i.e.} \overline{V} = \begin{cases} P(x,y) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x(x,y)} \\ Q(x,y) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y(x,y)} \end{cases}$$

Teorema 2.1.1

Sea $\overline{V}$ un campo vectorial con componentes P y Q de clase $\mathcal{C}_1(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^2$:
$\overline{V}$ campo de gradiente $\Longleftrightarrow$ la 1-forma diferencial $w = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ es exacta en $\mathcal{D}$, i.e. $w = df$.
Como consecuencia, sabemos que si $\overline{V}$ es un campo de gradiente $\Longrightarrow \forall (x,y) \in \mathcal{D}, \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

Comentario:

1. Si $\mathcal{D}$ es un abierto estrellado, entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Longleftrightarrow w$ es cerrada $\overset{\text{Poincaré}}{\Longleftrightarrow} w$ es exacta $\Longleftrightarrow \overline{V} = \overline{\nabla}\varphi$
2. Si $\mathcal{D}$ es un abierto 'simplemente conexo' de $\mathbb{R}^3$, entonces $dw = 0 \Longleftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{C}_1(\mathcal{D})$ tal que $d\varphi = w$
   i.e. w cerrada $\Longleftrightarrow w$ exacta. $\mathcal{D}$ simplemente conexo $\Longleftrightarrow \mathcal{D}$ no tiene huecos

Teorema 2.1.2

- Los abiertos estrellados son simplemente conexos.
- En $\mathbb{R}^3$, un campo vectorial $\overline{V}(P,Q,R)$ con $P,Q,R \in \mathcal{C}_1(\mathcal{D})$ donde $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$,

$$\overline{V} = \overline{\nabla}\varphi \Longleftrightarrow w = Pdx + Qdy + Rdz \text{ es exacta.}$$

- $$\begin{cases} \mathcal{D} \text{ estrellado} \\ \text{ó} \\ \mathcal{D} \text{ simplemente conexo} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Definición 2.1.2: Rotacional

Sea $\overline{V}(P,Q,R)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}_1\left(\mathcal{D}\in\mathbb{R}^3\right)$, llamamos rotacional de $\overline{V}$ a:

$$\overline{rot}\overline{V}=\overline{\nabla}\times\overline{V}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Teorema 2.1.3
Sea $\overline{V}(P,Q,R)$ de clase $\mathcal{C}_1\left(\mathcal{D}\in\mathbb{R}^3\right)$, si $\overline{V}$ es un campo de gradiente, entonces $\overline{\nabla}\times\overline{V}=\bar{0}$

Comentario:
Si $\mathcal{D}$ es simplemente conexo (sin huecos) entonces el recíproco es cierto, $\overline{rot}\overline{V}=\bar{0}\Rightarrow\overline{V}=\overline{\nabla}\varphi$ donde $\varphi\in\mathcal{C}_1(\mathcal{D})$

Definición 2.1.3: Divergencia

Sea $\overline{V}(P,Q,R)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}_1\left(\mathcal{D}\in\mathbb{R}^3\right)$, llamamos divergencia de $\overline{V}$ al escalar:

$$\overline{div}\overline{V}=\overline{\nabla}\cdot\overline{V}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Teorema 2.1.4
Sea $\overline{V}(P,Q,R)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}_2\left(\mathcal{D}\in\mathbb{R}^3\right)$, entonces $\nabla\cdot\nabla\times\overline{V}=0$

Teorema 2.1.5
Si $\mathcal{D}$ es simplemente conexo y $\nabla\cdot\overline{V}=0\implies\overline{V}=\overline{\nabla}\times\overline{A}$ (donde $\overline{A}$ es un campo vectorial definido en $\mathcal{D}$)

Comentario:
El campo $\overline{A}$ no es único, de la misma manera que un campo escalar φ asociado a un campo de vectores.
Si $\overline{V}=\overline{\nabla}\varphi=\overline{\nabla}(\varphi+\text{cte})$ De la misma manera, tenemos que si $\overline{A}f=\overline{A}+\overline{\nabla}f$, entonces $\overline{\nabla}\times\overline{A}f=\overline{\nabla}\times\left(\overline{A}+\overline{\nabla}f\right)=\overline{\nabla}\times\overline{A}+\overline{\nabla}\times\left(\overline{\nabla}f\right)$. Es decir, si $\overline{V}=\overline{\nabla}\times\overline{A}$, existe f tal que $\overline{V}=\overline{\nabla}\times\left(\overline{A}+\overline{\nabla}f\right)$

Definición 2.1.4: Laplaciano Cartesiano

Sea φ un campo de clase $\mathcal{C}_2$ en $\mathbb{R}^2$, llamamos **Laplaciano de** φ al campo escalar $\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

Comentario:
Podemos decir que $\Delta\varphi$ se escribe como

$$\Delta\varphi=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\Longleftrightarrow\Delta\varphi=\overline{div}\left(\overline{grad}\varphi\right)=\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}\varphi$$

Teorema 2.1.6
Sea $\overline{V}$ un campo de gradiente tal que $\overline{\nabla}\cdot\overline{V}=0$, tomando φ un campo escalar $\varphi\in\mathcal{C}_2(\mathcal{D})$ tal que $\overline{V}=\overline{\nabla}\varphi$, entonces $\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}\varphi=\Delta\varphi=0$

2.2 Aplicaciones a la física

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \overline{M} &\longmapsto \varphi(M)\end{aligned} \qquad \text{ý} \qquad \begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \overline{M} &\longmapsto \overline{\varphi(M)}\end{aligned} \text{ donde } \overline{\varphi(M)} \begin{pmatrix} \varphi_x(M) \\ \varphi_y(M) \\ \varphi_z(M) \end{pmatrix} \text{ vectorial}$$

Operador Nabla (operador diferencial)

$$\overline{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ en la base canónica de } \mathbb{R}^3$$

Gradiente

$$\overline{\text{grad}}\varphi = \overline{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ (Campos escalares)}$$

Divergencia

$$\text{div}\overline{\varphi} = \overline{\nabla} \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \text{(Producto escalar)}$$

Rotacional

$$\overline{\text{rot}}\overline{\varphi} = \overline{\nabla} \times \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Laplaciano Escalar

$$\Delta\varphi = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla}\varphi = \overline{\nabla}\overline{\nabla}\varphi = \overline{\nabla}^2\varphi \text{ (ecuación de difusión)}$$

Laplaciano Vectorial

$$\overline{\Delta}\overline{\varphi} = \left(\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z\right)$$

(Vector cuyas componentes son Laplacianos). Se usa en mecánica de fluidos, (Ecuación de Navier-Stokes), en electromagnetismo (ecuación de d'Alembert)

Significado del gradiente

Leyes en física

Ley de Holm local (potencial)	Ley de Fourier (temperatura)
$\overline{f} = -\gamma\overline{\text{grad}}V$	$\overline{f} = -\lambda\overline{\text{grad}}T$

Relaciones fundamentales

$$\overline{\nabla}(\overline{A} + \overline{B}) = \overline{\nabla}A + \overline{\nabla}B \qquad \overline{\nabla} \times (\overline{A} + \overline{B}) = \overline{\nabla} \times \overline{A} + \overline{\nabla} \times \overline{B}$$

$$\overline{\nabla} \cdot \varphi\overline{A} = \overline{\nabla}\varphi \cdot \overline{A} + \varphi\overline{\nabla} \cdot \overline{A} \qquad \overline{\nabla} \times (\varphi\overline{A}) = \overline{A} \times \overline{\nabla}\varphi + \varphi(\overline{\nabla} \times \overline{A})$$

$$\overline{\nabla} \cdot (\overline{A} \times \overline{B}) = \overline{B} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{A}) - \overline{A} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{B}) \qquad \Delta\overline{A} = \overline{\nabla}\overline{\nabla} \cdot A - \overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \times A \iff \Delta\overline{A} = \overline{\nabla}^2 A - \overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \times A$$

Capítulo 3

Integrales de línea

3.1 Curvas paramétricas

Definición 3.1.1: Curva paramétrica

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, f y g dos funciones defindas en I "suficientemente regulares".
Sea $C = \left\{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in I, M(t) = (x(t), y(t))\right\}$.Llamamos a C una **curva paramétrica** en $\mathbb{R}^2$.
Tenemos $x = f(t)$, $y = g(t)$

Ejemplo 3.1.1

Tenemos $t \subset I \in \mathbb{R}(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$ dados $\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \end{cases}$ tenemos $t = \frac{x-b_1}{a_1}$ lo que nos da $y = a_2\left(\frac{x-b_1}{a_1}\right) + b_2 \iff y = \frac{a_2}{a_1}x + b_2 - \frac{a_2 b_1}{a_1}$ (ecuación de una recta) i.e. $y = F(x)$

Ejemplo 3.1.2

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi]$ tenemos $x^2 + y^2 = 1$, la parametrización de un círcula en el plano.

Definición 3.1.2: Curva paramétrica tangente

Sea $C = \left\{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in I, M(t) = (f(t), g(t))\right\}$ con f,g derivables en I.
Entonces, la curva paramétrica con $t_0 \in I$

$$\begin{cases} x = f'(t_0)\, t + f(t_0) \\ y = g'(t_0)\, t + g(t_0) \end{cases}$$

es la tangente a C en $M(t_0) = (f'(t_0), g'(t_0)) \neq (0,0)$

Comentario:

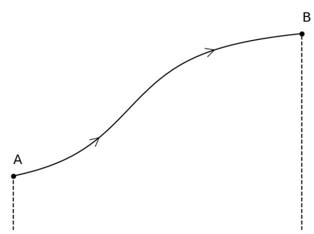
Como $f'(t_0) \neq 0$, gracias a que $x = f'(t_0)\,t + f(t_0)$, $t = \frac{x - f(t_0)}{f'(t_0)}$, entonces si la ponemos en $y = g'(t_0)\,t + g(t_0)$,
$y = g'(t_0)\left(\frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)}\right) + g(t_0) = \left[\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}x - \frac{g'(t_0)f(t_0)}{f'(t_0)} + g(t_0)\right] = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}(x - f(t_0)) + g(t_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}(x - x_0) + g(t_0)$
Si $y = F(x) \implies g(t) = F(f(t))$ $\quad g'(t_0) = F'(f(t_0) \cdot f'(t_0)) \iff F'(x_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$ y finalmente, $[y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0)]$ ecuación de una tangente [...]

Interpretación vectorial:
Considerando la parametrización de la definición $(x_0 = f(t_0), y_0 = g(t_0))$ y sean $M(x,y), M_0(x_0,y_0) \Longrightarrow \overline{T} = (f'(t_0), g'(t_0))$

$$\begin{cases} x = f'(t_0)\,t + x_0 \\ y = g'(t_0)\,t + y_0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = f'(t_0)\,t \\ y - y_0 = g'(t_0)\,t \end{cases} \Longleftrightarrow M_0\overline{M} = t\overline{T}, \text{ entonces } \overline{T} \text{ es tangente a } C \text{ en } M_0.$$

3.2 Integrales de línea

Introducción



$C = \{M \in \mathbb{R}^2 \colon \exists t \in [a,b], M(f(t), g(t))\}$ con f, g derivables en $[a,b]$, $A(f(a), g(a))$ y $B(f(b), g(b))$.

Consideremos $\overline{V}(P(x,y), Q(x,y))$ y sea w la 1-forma diferencial, i.e. $w = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

Definición 3.2.1: Integral de línea

$\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} \overline{V}(M) \cdot \overline{dM} = \int_{\overline{AB}} (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = \int_{\overline{AB}} w$ y tenemos

$$\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} w = \int_a^b [P(f(t), g(t)) f'(t) + Q(f(t), g(t) g'(t))]\,dt \longrightarrow \text{¡Integral de Riemann!}$$

Donde $dx = f'(t)\,dt$, $dy = g'(t)\,dt$

Ejemplo 3.2.1 (Sea $w = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy, (x,y) = (0,0)$, necesistamos una curva parametrizada.)

Sea $C = \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, denotamos C^+ a la curva en el sentido trigonométrico.

Nos piden calcular $\gamma_{C^+} = \int_{C^+} w$.

Volvemos a la definición: $\int_{C^+} w = \int_0^{2\pi} [\sin\theta(-\sin\theta) - \cos\theta(\cos\theta)]\,d\theta = -\int_0^{2\pi d\theta} = -2\pi$

Donde $P(f(\theta), g(\theta)) = \sin\theta$ y $Q(f(\theta), g(\theta)) = -\cos\theta$. Y también,$f'(\theta) = -\sin\theta$ y $g'(\theta) = \cos\theta$

Comentario:

$\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} \overline{V}(M)\,dM(t) = \int_a^b \overline{V}(M(t)) \cdot \overline{T}(t) \cdot dt$ Donde $\overline{V}(M(t))$ puede ser un campo de fuerzas.

Ejemplo 3.2.2 (Sea $w = xy\ dx + y^2\ dy + dz$ una 1-forma diferencial en $\mathbb{R}^3$ y sea C la curva orientada en $\mathbb{R}^3$ con la parametrización $\overline{V}(t) = (t^2, t^3, 1)$ con $t \in [0,1]$. Calcular $\int_C w$)

$\int_C w = \int_0^1 \left[t^5(2t) + t^6(3t^2) + 0\right] dt = \frac{13}{21}$

Teorema 3.2.1
Si $\overline{V}$ es un **campo de gradiente** (i.e. $\overline{V} = \overline{\text{grad}}\varphi = \overline{\nabla}\overline{V}$), $\gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} \overline{V}(M) \cdot \overline{dM} = \int_{\overline{AB}} \overline{\nabla}\varphi(M) \cdot \overline{dM} = \int_{\overline{AB}} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$

Comentario:

- La circulación de un campo de gradiente no depende del camino, solamente de los valores del campo escalar φ definido por $\overline{V} = \overline{\nabla}\varphi$ en los extremos del camino $\overline{AB}$.
- $\gamma_{\overline{AB}} = 0$ si A y B están en la misma curva de nivel de φ

Teorema 3.2.2

$\int_{\overline{AB}} (w_1 + w_2) = \int_{\overline{AB}} w_1 + \int_{\overline{AB}} w_2$ $\qquad$ $\left(\overline{V_1}(M) + \overline{V_2}(M)\right)\overline{dM} = \int_{\overline{AB}} \overline{V_1}(M)\, dM + \int_{\overline{AB}} \overline{V_2}(M)\, dM$

$\forall\lambda \in \mathbb{R} \int_{\overline{AB}} \lambda w_1 = \lambda \int_{\overline{AB}} w_1$ $\qquad$ $\forall\lambda \in \mathbb{R} \int_{\overline{AB}} \lambda\overline{V_1}(M)\, dM = \lambda \int_{\overline{AB}} \overline{V_1}(M)\, dM$

Si $C \in \overline{AB}$, entonces $\int_{\overline{AB}} w = \int_{\overline{AC}} w + \int_{\overline{CB}} w$ $\qquad$ $\int_{\overline{AB}} \overline{V_1}(M)\, dM = \int_{\overline{AC}} \overline{V_1}(M)\, dM + \int_{\overline{CB}} \overline{V_1}(M)\, dM$

$\int_{\overline{AB}} w = -\int_{\overline{BA}} w$ (Hay que cambiar la parametrización para mostrarlo)

Corolario 3.2.1
Si $\overline{AB}$ es una curva cerrada, entonces $A = B$, y si $\overline{V}$ es un campo de gradiente, entonces $\int_{\overline{AB}} \overline{V}(M)\, \overline{dM} = 0$

Definición 3.2.2: Campo conservativo

Se dice que un campo vectorial es conservativo si la circulación del campo vectorial es nula en toda curva cerrada.

Teorema 3.2.3
Sean A y B dos puntos del plano, la circulación de un campo conservativo no depende del camino para ir de A a B.

Teorema 3.2.4
Si $\overline{V}$ es un campo de gradiente, entonces $\overline{V}$ es un campo conservativo.

Ejercicio 3.2.1 Sea $\overline{V}(M) = \frac{3x^2+y^2}{y^2}\hat{x} - \frac{2x^3}{y^3}\hat{y}$

- Sean $A(-1,1)$ y $B(1,1)$ calcular $\gamma_{\overline{AB}}$ con $\overline{AB} = [A\ B]$ (segmento).
- Idem con $\overline{AB} \equiv$ semicírculo de centro $\Omega(0,1)$

Ver TD2

Teorema 3.2.5
Si $\overline{V}$ es un campo conservativo, entonces $\overline{V}$ es un campo de gradiente.

Comentario:
Destacar que ahora tenemos la doble implicación entre campo conservativo y de gradiente.

3.3 Longitud de una curva

Definición 3.3.1: Longitud de una curva

Sea $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva paramétrica de clase C_1, la **longitud de** γ viene dada por la expresión:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Comentario:

Si $\gamma(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ en coordenadas cartesianas, entonces $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \ldots x_2'(t)^2} dt$

Ejercicio 3.3.1 Halla la longitud de arco de la siguiente curva: $\gamma(t) = \left(3t, 3t^2, 2t^3\right)$ entre los puntos $(0,0,0)$ y $(3,3,2)$

$L(\gamma) = \int_{(0,0,0)}^{(3,3,2)} \sqrt{3^2 + 36t^2 + 36t^4} dt = \int_0^1 \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} dt = 3\int_0^1 \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} dt = 3\int_0^1 \left(2t^2 + 1\right) dt = \left[2t^3 + 3t\right]_0^1 = 5$

Ejercicio 3.3.2 Halla la longitud de arco de la siguiente curva: $\gamma(t) = \begin{cases} (\cos(t), \sin(t), 3t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ (-1, -t + \pi, 3t) & \text{si } \pi \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases}$

Tenemos $\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\gamma_1(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 3^2} = \sqrt{10}$ y $\|\gamma_2(t)\| = \sqrt{10}$,

$L(\gamma_1(t)) = \int_0^\pi \sqrt{10} = \pi\sqrt{10}$ $\quad L(\gamma_2(t)) = \pi\sqrt{10} \implies L(\gamma(t)) = L(\gamma_1(t)) + L(\gamma_2(t)) = \pi\sqrt{10} + \pi\sqrt{10} = 2\pi\sqrt{10}$

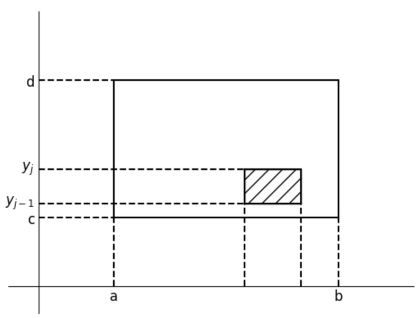
Capítulo 4

Integrales dobles

4.1 Introducción

Sea $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ (con $a < b$ y $c < d$) un rectángulo. Como se hizo con la integral simple, vamos a subdividir los intervalos de los ejes (abcisas y ordenadas). Sean las particiones de $[a,b]$ y $[c,d]$

$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \\ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d \end{cases}$ Obtenemos así las mallas, o Rectángulos Elementales: $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times \left[y_{j-1}, y_j\right]$



4.2 Teoremas de Fubini

Teorema 4.2.1 Fubini en un rectángulo (versión débil)
Sea R un rectángula de $\mathbb{R}^2$, $R = [a,b] \times [c,d]$ y sea f una función integrable sobre R, tenemos:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

(las integrales dobles son permutables)

Ejemplo 4.2.1 (Calcular $I = \iint_A e^{x+y}dxdy$ con $A = [0,1] \times [0,2]$)
$I = \iint_A e^x e^y dxdy = \int_0^1 e^x dx \cdot \int_0^2 e^y dy = [e^x]_0^1 \cdot [e^y]_0^2 = (e-1)\left(e^2-1\right)$

Ejemplo 4.2.2 (Calcular $I = \iint_R f(x,y)\,dxdy$ con $R = [0,2] \times [0,2]$ y f definida en R por $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$)
$I = \iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 \int_0^2 16 - x^2 + 2y^2 dxdy = \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x\right]_0^2 dy = \int_0^2 32 - \frac{8}{3} - 4y^2 dy = \left[32y - \frac{8}{3}y - \frac{4}{3}y^3\right]_0^2 = 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = 48$

Teorema 4.2.2 Fubini versión fuerte

- Sean φ_1 y φ_2 dos funiciones continuas en un rectángulo compacto de $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ (uniformemente continuas) tales que:
  $\forall x \in [a,b], \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ y sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\right\}$
  Si $f\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $\mathcal{D}$ (entonces f es integrable en $\mathcal{D}$) tenemos:

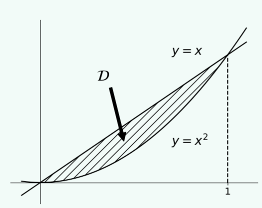
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

- Sean ψ_1 y ψ_2 dos funciones continuas en un rectángulo compacto de $[c,d]$ de $\mathbb{R}$ tales que:
  $\forall x \in [c,d], \psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ y sea $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{D}' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon c \leqslant y \leqslant d, \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\right\}$
  Si $f\colon \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $\mathcal{D}'$ tenemos:

$$\iint_{D'} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

  (la integral se hace de forma horizontal).

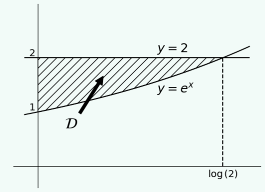
Ejemplo 4.2.3 (Calcular $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy$ con $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant x\right\}$ (no es un rectángulo), sobre la función $f(x,y) = x + y$)



$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x,y)\,dydx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx =$
$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{3}{20}$

Ejemplo 4.2.4 (Calcular $\iint_{\mathcal{D}} e^x dxdy$ con $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \log(y), 1 \leqslant y \leqslant 2\right\}$)

Como $f(x,y) \in C_0\left(\mathbb{R}^2\right) \Rightarrow$ Podemos aplicar el *Teorema de Fubini*



$$\begin{cases} \iint_{\mathcal{D}} e^x dxdy = \int_1^2 \int_0^{\log y} e^x dxdy = \int_1^2 (y-1)\, dy = \left[\dfrac{y^2}{2} - y\right]_1^2 = \dfrac{1}{2} \\ \iint_{\mathcal{D}} e^x dxdy = \int_0^{\log y} \int_1^2 e^x dydx = \int_0^{\log 2} e^x dydx = \int_0^{\log 2} e^x\left(2 - e^x\right) dx = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

4.3 Teorema de Green-Riemann

4.4 Superficies parametrizadas

4.4.1. Introducción

Definición 4.4.1: Plano tangente

Si una superficie S es suave (i.e. $\overline{T_u} \times \overline{T_v} \neq \bar{0}$) definimos **el plano tangente de** S en $\Phi(u_0, v_0)$ como el plano determinado por $\overline{T_u}$ y $\overline{T_v}$ y con vector normal $\bar{n} = \overline{T_u} \times \overline{T_v}$
Una ecuación del plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0) es:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \bar{n} = 0 \tag{4.1}$$

con $\bar{n}$ evaluado en (u_0, v_0)
Si $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ entonces 4.1 se escribe:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

Ejemplo 4.4.1 (Sea $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$ ¿Existe un plano tangente?

Hallar el plano tangente en $\Phi(0,1)$)

$\overline{T_u} = \cos(v)\,\bar{i} + \sin(v)\,\bar{j} + 2u\bar{k}$
$\overline{T_v} = -\sin(v)\,\bar{i} + \cos(v)\,\bar{j} + 2v\bar{k}$
El plano tangente en $\Phi(u,v)$ es el conjunto de vectores que pasen por $\Phi(u,v)$ perpendiculares a $\overline{T_u} \times \overline{T_v}$
Tenemos:

$$\overline{T_u} \times \overline{T_v} \neq \bar{0} = \begin{pmatrix} -2u^2\cos(v) + 2v\sin(v) \\ -2u^2\sin(v) - 2v\cos(v) \\ u \end{pmatrix} \qquad \overline{T_u} \times \overline{T_v} = \bar{0} \Longleftrightarrow (u,v) = (0,0)$$

Entonces el plano tangente en $\Phi(0,0)$ pero sí en los otros puntos. Por ejemplo en $\Phi(0,1) = (1,0,1)$ tenemos $\bar{n} = \overline{T_u} \times \overline{T_v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ así que una ecuación del plano tangente es: $-2(x-1) + (z-1) = 0$ es decir, $z = 2x - 1$

4.4.2. Área de una superficie

En esta sección, consideraremos sólo superficies suaves a trozos que sean uniones de imágenes de superficies parametrizadas $\Phi_i : \mathcal{D}_i \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que: (Los 'quizás' son a causa de medidas matemáticas que se definen en *Análisis Funcional*)

1. $\mathcal{D}_i$ es una región elemental del plano.
2. Φ_i es de clase $\mathcal{C}_1$ y biyectiva, excepto, quizá, en $\partial\mathcal{D}$.
3. La imagen de Φ_i es suave, excepto, quizá, en un número finito de puntos.

Definición 4.4.2: Área de una superficie

Se define el **área de una superficie** $\mathcal{A}(S)$ de una superficie parametrizada por:

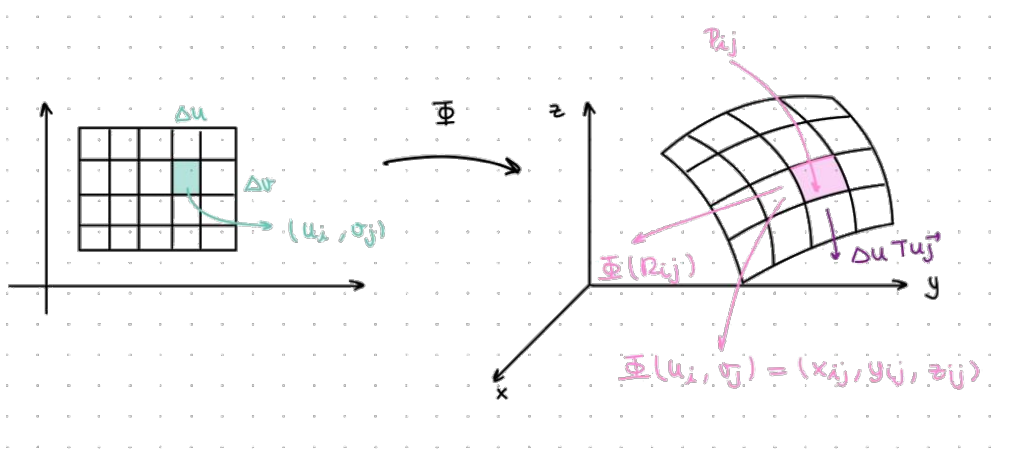
$$\boxed{\mathcal{A}(S) = \iint_{\mathcal{D}} \|\overline{T_u} \times \overline{T_v}\| \; du \; dv}$$

Comentario:

En el caso que S fuera unión de superficies S_i su área será la suma de las áreas de las S_i.

Entonces tenemos:

$$\mathcal{A}(A) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2} \; du \; dv \qquad \text{donde } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$



Hay que considerar una porción de $\mathcal{D}$ y sea R_{ij} el ij-ésimo rectángulo con vértices $(u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1}) \; (u_{i+1}, v_{j+1})$. Los valores de $\overline{T_u}$ y $\overline{T_v}$ en (u_i, v_i) serán determinados $\overline{T_{u_i}}$ y $\overline{T_{v_j}}$. Podemos pensar los vectores $\Delta_u \overline{T_u}$ y $\Delta_v \overline{T_v}$ como tangentes a la superficie en $\Phi(u_i, v_j) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ donde $\Delta_u = u_{i+1} - u_i$ y $\Delta_v = v_{j+1} - v_j$

Entonces, estos vectores forman un paralelogramo P_{ij} que está en el plano tangente a la superficie en (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}). Para n grande, (es una subdivisión de n trozos), el área de P_{ij} es una buena aproximación al área de $\Phi(R_{ij})$. Como el area del paralelogramo generado por dos vectores $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$ es $\|\overline{v_1} \times \overline{v_2}\|$ entonces $\mathcal{A}(P_{ij}) = \|\Delta_u \overline{T_{uj}} \times \Delta_v \overline{T_{vj}}\| = \Delta u \Delta v \cdot \|\overline{T_{ui}} \times \overline{T_{vj}}\|$

Por lo tanto, el área total es $\mathcal{A}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{A}(P_{ij})$ y cuando $n \to \inf$, $\mathcal{A}_n \to \iint_{\mathcal{D}} \|\overline{T_u} \times \overline{T_v}\| \; du \; dv$

Ejemplo 4.4.2 (Sea $\mathcal{D}$ la región determinada por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant r \leqslant 1$ y sea $\Phi\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

Sea la parametrización del cono S: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r \end{cases}$ hallar su área de superficie.)

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = -r\cos\theta$ y $\frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = r\sin\theta \implies$

$\implies \|\overline{T_r} \times \overline{T_\theta}\| = \sqrt{r^2 + r^2\cos^2\theta + r^2 sin^2\theta} = \sqrt{2}r$

$\mathcal{A} = \int_0^2 \pi \int_0^1 \sqrt{2}r\ dr\ d\theta = \sqrt{2}\pi$

Comentario:

Para confirmar que es el area de $\Phi(\mathcal{D})$ debemos comprobar que Φ es biyectiva para puntos que no están en la frontera de Φ

Sea $\mathcal{D}_0$ el conjunto de (r,θ) tales que $0 < r < 1$ y $0 < \theta < 2\pi$ i.e. $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}\partial\mathcal{D}$

Para ver que Φ es biyectiva, suponemos que $\Phi(r,\theta) = \Phi(r',\theta')$ pero $(r,\theta), (r',\theta') \in \mathcal{D}_0$

Tenemos:

$$\begin{cases} r\cos\theta = r'\cos\theta' \\ r\sin\theta = r'\sin\theta' \\ r = r' \end{cases} \implies \begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases} \implies \theta = \theta' \text{ ó } \theta = \theta'\,(2\pi)$$

En conclusión, $\begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \end{cases}$ y eso nos dice que Φ es biyectiva.

Ejemplo 4.4.3 (Una helicoide se define como $\Phi\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$ con $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \theta \end{cases}$ y $\mathcal{D}$ es la región donde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant r \leqslant 1$. Hallar su área.)

Calculamos $\frac{\partial(x,y)}{\partial(1,0)} = r \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(1,0)} = \sin\theta \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(1,0)} = \cos\theta$

$\mathcal{A} = \iint_D \|\overline{T_r} \times \overline{T_\theta}\|\ dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} \int_\theta^1 \sqrt{r^2+1}\ dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{r^2+1}\ dr = \pi\left(\sqrt{2} + \log\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$

Comentario:

Si consideramos una superficie $\mathcal{S}$ dada con $z = f(x,y)$ donde $(x,y) \in \mathcal{D}$ admite la parametrización $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$ con $(u,v) \in \mathcal{D}$.

Si f es de clase C_1, entonces la superficie es suave, y el cálculo del área se reduce a:

$$\boxed{\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ dx\ dy}$$

Ejemplo 4.4.4 (Calcular el área de la superficie de la esfera $\mathcal{S}$ definida por $x^2+y^2+z^2 = 1$ (Indicación: calcular el área del hemisferio superior $\mathcal{S}^+$ (i.e. con $z \geqslant 0$)))

Tenemos $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ con $\left(x^2+y^2 \leqslant 1\right)$ Sea $\mathcal{D}$ la región de $(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 \leqslant 1$

$$\mathcal{A}\left(\mathcal{S}^{+}\right) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2+y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1}\ dx\ dy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ dx\ dy$$

Aplicamos el *Teorema de Fubini*:

$$\mathcal{A}\left(\mathcal{S}^{+}\right) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ dy\ dx = \int_{-1}^{1}\left[\arcsin\left(\frac{y}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\ dx = 2\pi$$

Por simetría, $\mathcal{A}\left(\mathcal{S}^{-}\right) = 2\pi$ y finalmente $\mathcal{A}\left(\mathcal{S}^{+}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{S}^{-}\right) = 4\pi$

4.5 Integrales de funciones escalares sobre superficies

Definición 4.5.1

Sea f una función continua con valores reales definida en $\mathcal{S}$, La integral de f sobre $\mathcal{S}$ se define: $\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\ d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} f\ d\mathcal{S}$ (donde $d\mathcal{S}$ es un diferencial de superficie)

$\iint_{\mathcal{S}} f\ d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} f\left(\Phi(u,v)\right) \|\overline{T_u} \times \overline{T_v}\|\ du\ dv$

Comentario:

1. Si $f \equiv 1$ volvemos a encontrar la fórmula del área
2. La integral de superficie, como el área de superficie, no depende de la parametrización elegida.
3. Si $\mathcal{S}$ es una unión de superficies parametrizadas, si $i = 1, \ldots, N$ que no se intersecan excepto quizá, a lo largo de curvas que definen sus fronteras, entonces: $\iint_{\mathcal{S}} f\ d\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{N} \iint_{\mathcal{S}_i} f\ d\mathcal{S}_i$

Ejemplo 4.5.1 (Consideramos el helicoide $\mathcal{S}$ anterior. Sea $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1}$. Hallar $\iint_{\mathcal{S}} f\ d\mathcal{S}$)

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 2$ $\quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \sin\theta$ $\quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = \cos\theta$ $\quad$ con $r \in [0,1)$, $\theta \in [0,2\pi)$

Tenemos $f(r\cos\theta, r\sin\theta, 0) = \sqrt{r^2+1}$ lo que nos da
$\iint_{\mathcal{D}} f\ d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} f\left(\Phi(r,\theta)\right) \|\overline{T_r} \times \overline{T_\theta}\|\ dr\ d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\sqrt{r^2+1}\ dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3}\ d\theta = \frac{8}{3}\pi$

Comentario:

Si $z = g(x,y)$ con $g \in C_1$ tenemos: $\boxed{\iint_{\mathcal{S}} f\ d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y,g(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\ dx\ dy}$

Ejemplo 4.5.2 (Sea $\mathcal{S}$ una superficie definida por $z = x^2 + y$ donde $\mathcal{D}$ es la región caracterizada por $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Calcular $\iint_{\mathcal{D}} x\ d\mathcal{S}$)

Tenemos $\iint_{\mathcal{S}} x d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} x\sqrt{1+4x^2+1}\ dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 x\sqrt{4x^2+2}dx\right)dy = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 8x\left(4x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}dx\right)dy =$
$\frac{2}{3}\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[\left(2+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 dy = \frac{1}{12}\int_{-1}^{1}\left(6^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right)dy = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right)$

Comentario:

Si $z = g(x, y)$

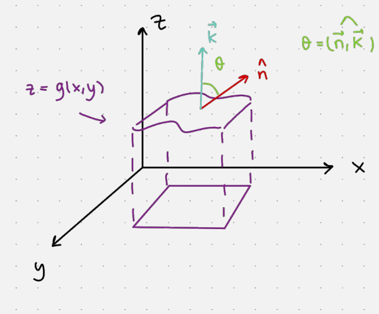
$\Phi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$

Un vector normal a Φ es $\bar{n} = \bar{\nabla}\Phi$ es decir, $\boxed{\bar{n} = -\frac{\partial g}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\bar{j} + \bar{k}}$

$\bar{n}, \bar{k} = \|\bar{n}\| \cdot \|\bar{k}\| \cdot \cos(\bar{n}, \bar{k}) \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\bar{n}\cdot\bar{k}}{\|\bar{n}\|\cdot\|\bar{k}\|} = \frac{\bar{n}\cdot\bar{k}}{\|\bar{n}\|} = \frac{1}{\|\bar{n}\|} \Leftrightarrow \|\bar{n}\| = \frac{1}{\cos\theta}$

(sabiendo que $\bar{k}$ es unitario y es $(0, 0, 1)$)

Al final obtenemos, $\boxed{\iint_{\mathcal{S}} f \; d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos\theta}} \; dxdy$



Ejemplo 4.5.3 (Calcular $\iint_{\mathcal{S}} x \; d\mathcal{S}$ donde $\mathcal{S}$ es el triángulo con vértices $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ (indicación: encontrar un vector normal $\bar{n}$ unitario, tendriámos $\bar{n} \cdot \bar{k} = \cos\theta$))

Esta superficie es el plano dado por $x + y + z = 1$. Un vector normal $\bar{n}$ a este plano tiene coordenadas $(1, 1, 1)$. Tenemos $\|\bar{n}\| = \sqrt{3}$ lo que nos da un vector normal unitario a este plano $\bar{n} = \frac{\bar{n}}{\|\bar{n}\|}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ esto va vertical. Con la fórmula del comentario anterior, tenemos $\iint_{\mathcal{S}} x \; d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{\bar{n}\cdot\bar{k}} \; dxdy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ donde $\bar{n} \cdot \bar{k} = \|\bar{n}\|\|\bar{k}\| \cos\theta \Leftrightarrow \bar{n} \cdot \bar{k} = \cos\theta$ porque $\|\bar{n}\|\|\bar{k}\| = 1$ por unitarios.

$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} x \; dydx = \frac{\sqrt{3}}{6}$

4.6 Integrales de superficie de funciones vectoriales

Definición 4.6.1: Superficie orientada

Una superficie suave $\mathcal{S}$ es una **superficie orientada** si existe una función normal unitaria $\bar{n}$ definida en cada punto (x, y, z) sobre la superficie. El campo vectorial $\bar{n}(x, y, z)$ recibe el nombre de **orientación** de $\mathcal{S}$.

Puesto que una normal unitaria a $\mathcal{S}$ puede ser $\bar{n}(x, y, z)$ o $-\bar{n}(x, y, z)$, una superficie **orientada** tiene dos orientaciones.

Comentario:

Tenemos $\bar{n} = \frac{\bar{T_u}\times\bar{T_v}}{\|\bar{T_u}\times\bar{T_v}\|}$ Una superficie $\mathcal{S}$ definida por $z = g(x, y)$ tiene una orientación hacia arriba cuando las normales unitarias están dirigidas hacia arriba.

Definición 4.6.2: Superficie cerrada

Una superficie **cerrada** se define como la frontera de un sólido finito.

Ejemplo 4.6.1

La superficie de una esfera es una superficie cerrada

Comentario:

1. Si una superficie **suave** $\mathcal{S}$ está definida por $f(x, y, z) = 0$ entonces la normal es **unitaria** $\bar{n} = \frac{\bar{\nabla} f}{\|\bar{\nabla} f\|}$

2. Si f está definida de forma explícita. $z = g(x, y)$ podemos escribir

Capítulo 5

Integrales Triples

5.1 Introducción

Como lo hicimos con la integral doble, vamos a definir la integral de una función en el paralelepípedo (rectángulo). $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Sean N_1, N_2, N_3 tres enteros dados: $\begin{cases} x_i - x_{i-1} = \dfrac{b_1 - a_1}{N_1} \\ y_j - y_{j-1} = \dfrac{b_2 - a_2}{N_2} \\ z_k - z_{k-1} = \dfrac{b_3 - a_3}{N_3} \end{cases}$

lo que nos da **paralelepípedos elementales** $w_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times \left[y_{j-1}, y_j\right] \times [z_{k-1}, z_k]$

Definición 5.1.1: Integral Triple

Sea $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}(f) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_3} f\left(x_i, y_j, z_k\right)(x_i - x_{i-1})\left(y_j - y_{j-1}\right)(z_k - z_{k-1})$ si N_1, N_2 y N_3 se van al infinito, entonces $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}(f)$ admite un límite en $\mathbb{R}$. Este límite se llama **Integral Triple** de f en $\mathcal{V}$y se escribe:

$$\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z,)\ dx\ dy\ dz$$

Comentario:

Como lo hicimos con la integral doble, la integral triple se puede calcular gracias a tres integrales simples.

Teorema 5.1.1 Cálculo directo

1. Si $\mathcal{V}$ es de la forma siguiente:

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant x \leqslant b : g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) : h_1(x, y) \leqslant z \leqslant h_2(x, y)\right\}$$

y entonces, $$\iiint_m cVf(x, y, z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\ dz\right) dy\right) dx$$

2. Si $\mathcal{V}$ es de la forma siguiente:

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant x \leqslant b : g_1(x) \leqslant z \leqslant g_2(x) : h_1(x, z) \leqslant y \leqslant h_2(x, z)\right\}$$

entonces, $$\iiint_m cVf(x, y, z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x, y, z)\ dy\right) dz\right) dx$$

3. *Idem.*

5.2 Cambio de variables

Consideramos $\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$ y supongamos que tenemos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{cases} x = a(u,v,w) \\ y = b(u,v,w) \\ z = c(u,v,z) \end{cases} \qquad \text{con } (u,v,w) \in \Omega \text{ biyección de } \mathcal{V}$$

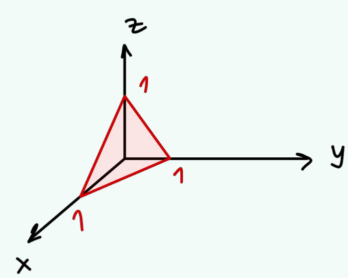
Podemos, entonces, definir una nueva función g tal que: $g(u,v,w) = f(a(u,v,w), b(u,v,w), c(u,v,w))$ lo que nos permite escribir:

Teorema 5.2.1

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iiint_{\Omega} g(u,v,w)\left|J_g(u,v,w)\right|\ du\ dv\ dw$$

Ejemplo 5.2.1 (Calcular $\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{V}} xyz(1-x-y-z)\ dx\ dy\ dz$ con $\mathcal{V}$ delimitado por los planos $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$ con el cambio de variable propuesto: $\begin{cases} x = u(1-u) \\ y = uv(1-w) \\ z = uvw \end{cases}$)

Tenemos $g(u,v,w) = (u - uv, uv - uvw, uvw)$



$$\text{y además: } \begin{cases} u = x+y+z \\ v = \dfrac{y+z}{x+y+z} \\ w = \dfrac{z}{y+z} \end{cases}$$

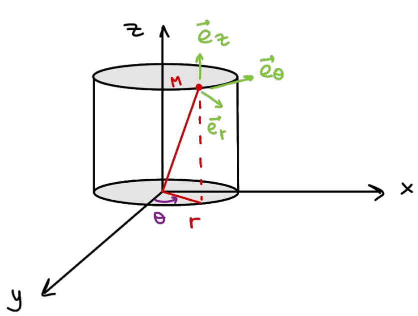
$$\left|J_g(u,v,w)\right| = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v(1-w) & u(1-w) & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2 v$$

$$g(u,v,w) = f(u(1-v), uv(1-w), uvw) = u^3v^2w(1-u)(1-v)(1-w)$$

$$\mathcal{I} = \iiint u^5v^3w(1-u)(1-v)(1-w)\,dudvdw = \int_0^1 u^5(1-v)\,dv \int_0^1 w(1-w)\,dw = \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7}\right)\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right)$$

5.2.1. Algunos cambios de variable

Cambio en coordenadas cilíndricas



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{con } r \geqslant 0,\ \theta \in [0, 2\pi] \qquad g(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

$$\left|J_g(r.\theta,z)\right| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\ \iiint_V (x,y,z)\ dx\ dy\ dz =$$

$$= \iiint_{\Omega} g(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\ dr\ d\theta\ dz$$

Comentario:

Si $\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in \mathcal{D}, \varphi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x,Y)\right\}$ la proyección de $\mathcal{V}$ sobre (Oxy) es el dominino $\mathcal{D}$ tal que: $\mathcal{D} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \theta < \beta, h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\right\}$ Entonces si f es una función continua en $\mathcal{V}$ tenemos:

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_1(\theta)} \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dzdrd\theta$$

Ejemplo 5.2.2 (Calcular $\iiint_{\mathcal{V}} \left(x^2+y^2+1\right)\ dxdydz$ donde $\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leqslant 1 \text{ y } 0 \leqslant z \leqslant 2\right\}$)

Vamos a utilizar las coordenadas cilíndricas $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ e integramos en $\Delta = [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,2]$.

Tenemos $f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = r^2+1$ lo que nos da $\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_{\Delta} (1+r^2)r\ drd\theta dz = \int_0^\pi dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1+r^2)r\ dr = 4\pi \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 4\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 3\pi$

5.2.2. Coordenadas Esféricas

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \\ \rho^2 = x^2+y^2+z^2 \end{cases} \quad \text{con } \rho \geqslant 0,\ \theta \in [0,2\pi],\ \varphi \in [0,\pi]$$

El Jacobiano será $\boxed{\rho^2\sin\varphi}$

Comentario:

Si ponemos $\begin{cases} r = \rho\sin\varphi \\ \theta = \theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$ entonces podemos transformar las coordenadas esféricas en cilíndricas (r,θ,z)

Ejemplo 5.2.3 (Sea $\mathcal{B}$ la bola unidad y $a > 1$, calcular $\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{B}} \frac{dx\ dy\ dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}$)

Pasamos a coordenadas esféricas: $\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$ y obtenemos

$\mathcal{I} = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2a\rho\cos\varphi}} d\varphi d\theta d\rho$ Hacemos el cambio de variable: $\begin{cases} t = \rho^2+a^2-2a\rho\cos\varphi \\ dt = 2a\rho\sin\varphi\ d\varphi \end{cases}$

y $\mathcal{I} = 2\pi \int_0^1 \rho^2 \left(\int_{(a-\rho)^2}^{(a+\rho)^2} \frac{dt}{2a\rho\sqrt{t}} \right) d\rho = \frac{4\pi}{a} \int_0^1 \rho^2\ d\rho = \frac{4\pi}{3a}$