

Apuntes de mecánica cuántica 1

2023

Apuntes de las clases de *Mecánica Cuántica I* dadas por *María José Caturla* y transcritos a L^AT_EX por *Víctor Mira Ramírez* durante el curso 2023-2024 del grado en Física de la *Universidad de Alicante*.

ÍNDICE

CAPÍTULO	INTRODUCCIÓN	PÁGINA	3
1.1	Radiación de cuerpo negro		3
1.2	Efecto fotoeléctrico		4
1.3	Espectro de rayos X		4
1.4	Espectros atómicos		5
1.5	Experimento de Franck-Hertz		6
1.6	Longitud de onda de De Broglie		6
1.7	Ondas Clásicas		7
1.8	Difracción, doble rendija de Young		10
CAPÍTULO	LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER I	PÁGINA	11
CAPÍTULO	LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER II	PÁGINA	12

Capítulo 1

Introducción

1.1 Radiación de cuerpo negro

En el siglo XIX se buscaba el filamento que más radiación emitía (más luz), lo que propició el desarrollo de la física relacionada. Era posible medir el espectro de radiación de distintos cuerpos para estudiarlos. Aquí nace el concepto de cuerpo negro, un cuerpo que absorbe todas las radiaciones idélicamente. La emisión de radiación es una gráfica de energía frente a longitud de onda. Experimentalmente se obtuvieron dos leyes:

Definición 1.1.1: Ley de desplazamiento de Wien

La longitud de onda emitida depende de la temperatura del cuerpo emisor. A mayor temperatura, la longitud de onda emitida será menor (el pico).

$$\lambda_m \cdot T = B \quad (1.1)$$

donde B es la *Constante de Wien* $B = 2,898 \times 10^{-3} m \cdot k$

Comentario:

Si $\lambda_m = 500$, ¿Cuál es la temperatura de la superficie del Sol? $T = 6000k$

Definición 1.1.2: Ley de Stefan-Boltzmann

$$P \propto T^4 \quad (1.2)$$

Permite calcular la potencia irradiada en función de la temperatura.

Una manera de teorizar un cuerpo negro es considerando una esfera con un agujero muy pequeño. La luz que entra por un agujero se ve atrapada dentro, simulando un cuerpo negro. Cuando calcularon la densidad energética de este modelo, sucedía un problema: la **Catástrofe Ultravioleta**. El modelo no podía simular las longitudes de onda más pequeñas, la energía tendía a infinito con una asíntota vertical. Clásicamente se denomina a este modelo el modelo de Rayleigh-Jeans: $u(\lambda)d\lambda = 8\pi\lambda^{-4}KTd\lambda$.

Para resolver este problema, Max Planck tuvo un enfoque mucho más pragmático. Buscó una función que se aproximara a los datos experimentales para después deducir una posible teoría física de ahí. Él sabía que era necesario cambiar la constante de Boltzmann por otra que se acomodara mejor. Es en este punto donde introduce el concepto de la energía como cuantos. Nace aquí la famosa ecuación $\epsilon = h \cdot f$. Hoy en día ya le hemos puesto nombre a esta constante, la **Constante de Planck**. Como la energía es discreta, no se puede usar una integral, debemos hacer uso de sumatorios, lo cual resuelve la catástrofe.

El enfoque cuántico de Planck: $u(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi\lambda^{-5}hc}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}d\lambda$.

Planck no se contentó con esta explicación teórica y dedicó su vida a tratar de buscar teorías alternativas. La constante de Planck es: $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$. El hecho de que la constante sea tan pequeña explica porqué a nivel macroscópico no observamos fenómenos cuánticos.

1.2 Efecto fotoeléctrico

El primero en observar este fenómeno fue Hertz, mientras realizaba un experimento en el que trataba de probar que la luz era una onda. En dicho experimento, encontró un fenómeno que parecía demostrar lo contrario, que la luz se comportaba como una partícula: el efecto fotoeléctrico. Es remarcable el hecho de que Hertz publicara sus resultados a pesar de ser contradictorios.

El efecto fotoeléctrico se basa en que al irradiar con una onda electromagnética un metal se emiten electrones (o fotoelectrones) en algunas condiciones concretas. Al conectar un ánodo con una diferencia de potencial cercano al metal que irradiamos, observamos una corriente eléctrica generada, positiva si colocamos un potencial positivo, y al ir reduciendo el potencial llegamos a un potencial límite donde deja de haber corriente eléctrica, el llamado **Potencial de frenado** (V_0). La frecuencia de la luz incidente es directamente proporcional con la intensidad de corriente.

Teorema 1.2.1 Problemas clásicos del efecto fotoeléctrico

1. No se entendía cómo el potencial de frenado es independiente de la intensidad de la luz.
2. Tampoco podía explicarse clásicamente cómo la emisión de los electrones no sucedía para cualquier longitud de onda, independientemente de la intensidad. Llamamos a la frecuencia por debajo de la cual no se producen fotoelectrones **frecuencia umbral**.
3. Por último, la ausencia de tiempo de retardo entre la llegada de la radiación al metal y la producción de fotoelectrones era inexplicable también.

Fue Einstein quien resolvió este problema, basándose en la teoría de Planck. Einstein postuló que para poder empezar a arrancar electrones de un metal, debíamos superar una función de trabajo Φ dependiente del metal y del tratamiento de su superficie. El rigor en los experimentos era imprescindible para mantener una coherencia en los resultados.

La energía incidente era proporcional a la constante de Planck multiplicado por la frecuencia, hf . La energía cinética que tendrán los electrones emitidos será hf menos la función de trabajo: $E_c = hf - \Phi$ y como $E_c = e|V_0|$, entonces $e|V_0| = hf - \Phi$. La frecuencia umbral será cuando la energía incidente sea exactamente igual a la función de trabajo, pudiendo despejar la frecuencia umbral $hf_u = \frac{\Phi}{h}$.

1.3 Espectro de rayos X

Fueron descubiertos también en el siglo XIX de forma accidental mientras estudiaba rayos catódicos. Se dio cuenta que al hacer incidir electrones sobre un material, aparecía una radiación que no supo describir, y la bautizó como **Rayos X**. Se observó como estos rayos atravesaban materiales en mayor o menor grado en función de su densidad.

No se entendían los picos de la gráfica, así como la aparición de una frecuencia umbral. Fue Einstein quien se dio cuenta de la similitud de esta gráfica con la del efecto fotoeléctrico. Al acelerar electrones, obtenemos una radiación asociada, siguiendo la ecuación anterior: $e|V_0| = hf - \Phi$.

Definición 1.3.1: Ley de Duane-Hunt

Longitud de onda mínima a partir de la cuál aparece una radiación X asociada:

$$\lambda_m = \frac{1,24 \times 10^3}{V} m \quad (1.3)$$

Suponiendo: $e|V_0| \geq \Phi$ $e|V_0| = hf$ $c = \lambda f$

1.4 Espectros atómicos

Se aplicaba a ciertos gases un voltaje para que emitiesen luz. No se veía todo el espectro, sino solo líneas discretas (luz de forma no continua sino discreta). Estos eran los espectros de emisión, también en espectros de absorción: luz blanca impacta en un material y al reflejarse (según el material) faltaban ciertas líneas que correspondían a lo que absorbía y reflejaba el material.

Para cada material se tienen determinadas longitudes de onda. En el estudio de esta sucesión de longitudes de onda se llega a la siguiente expresión que puede describir de forma empírica la posición de dichas líneas: (Por ejemplo la serie del hidrógeno sólo tenía 4 líneas).

Definición 1.4.1: Ecuación de Balmer

$$\lambda_m = \frac{m^2}{m^2 - 4} \cdot 364,6nm \quad (1.4)$$

Donde m es un entero. Sea $m = 3, 4, 5, 6...$ esto funcionaba fenomenal. No sólo daba las líneas ya conocidas, sino que predecía las que se descubrieron posteriormente.

De forma paralela se consigue otra expresión válida para elementos alcalinos:

Definición 1.4.2: Ecuación de Rydberg-Ritz

$$\frac{1}{\lambda_n} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n > m \quad n, m = 1, 2, 3... \quad (1.5)$$

Donde R es la **Constante de Rydberg**, casi independiente del material. ($R_H = 1,096776 \cdot 10^7 m^{-1}$, $R > mf = 1,097373 \cdot 10^7 m^{-1}$)

Esto funciona con el hidrógeno: el espectro es visible, pero además también puede predecir las líneas espectrales que se hallan en el espectro no visible (infrarrojos, UV). La ecuación de Balmer se puede deducir a partir de esta.

Todo esto lleva a que Bohr desarrolle su teoría atómica, pero había dos problemas:

- El momento angular de los electrones de las órbitas había de estar cuantizado.
- Al estar el electrón orbitando alrededor de una carga, se pierde energía, cayendo en espiral y chocando contra el núcleo.

Teorema 1.4.1 Postulados del Modelo atómico de Bohr

1. Los electrones orbitan alrededor del núcleo en estados estacionarios donde no se emite radiación (no siguiendo la mecánica clásica), es decir, son estables.
2. La diferencia de energía entre niveles será aquella de la radiación que se emita.
3. El momento angular del electrón está cuantizado. Consecuentemente, la energía de los estados está cuantizada.

A consecuencia de la cuantización de los radios vamos a demostrar la cuantización de la energía de los electrones $E_c = K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{kze^2}{mr} \right) = \frac{1}{2} \frac{kze^2}{r} = -\frac{1}{2}U \implies E = U + E_c = U - \frac{1}{2}U = \frac{1}{2}U = -\frac{1}{2} \frac{kze^2}{r}$

De aquí obtenemos una ecuación para la energía en función de n :

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{kze^2}{r_n} = -\frac{1}{2} \frac{mk^2e^4}{\hbar^2} \frac{z^2}{n^2} \quad (1.6)$$

Si llamamos E_0 a $-\frac{1}{2} \frac{kze^2}{r_n} = -\frac{1}{2} \frac{mk^2e^4}{\hbar^2}$, entonces obtenemos que $E_n = -E_0 \frac{z^2}{n^2}$ y como $h\nu = E_i - E_j \Rightarrow h\nu = -E_0 \frac{z^2}{n_i^2} + E_0 \frac{z^2}{n_f^2} = E_0 z^2 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{E_0 z^2}{hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$ notando que $R_H = \frac{E_0}{hc}$ es la constante de Raylberg.

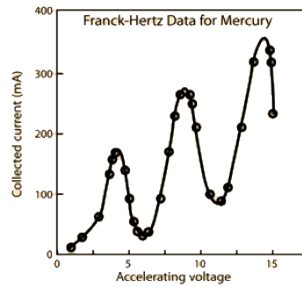
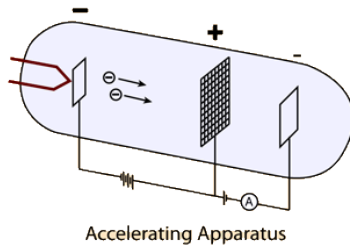
Esto validó el postulado de Bohr.

Hemos llegado a la misma expresión que teníamos antes. Esto implica que tenemos distintos niveles energéticos estacionarios, es decir, que todas las transiciones de $n > 2$ van a emitir fotones con cierta longitud de onda discreta (esto ya se veía experimentalmente, espectro de onda visible).

La teoría de Bohr de nuevo es capaz de predecir el espectro, así como las longitudes de onda en el espectro no visible.

1.5 Experimento de Franck-Hertz

Cápsula con dos placas: cátodo que se calienta y de donde se desprenden electrones, se acelera con cierta diferencia de potencial a una red metálica y detrás otra placa para detectar electrones. Con esto se generaba una corriente eléctrica que se medía con un amperímetro.



Conforme se aumenta el potencial, más electrones llegan a la placa que registra y mayor la corriente. Se observa que a cierto valor de voltaje, baja: tenemos el metal a estudiar en gas, y lo que ocurre es que tenemos T suficiente para que los electrones salten.

Por tanto, la energía que gana la pierde al pasar de un estado 1 a 2, los electrones salen sin T y por haber potencial que los repele no llegan a la placa. Con esto se demuestra la cuantización de los estados.

1.6 Longitud de onda de De Broglie

Llegado a este punto entra De Broglie, que propone que no solo las ondas se pueden comportar como corpúsculo, sino corpúsculo como onda.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ENERGÍA} \\ \text{FOTÓN} \end{array} \right\} E = pc \quad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{hc}{\lambda} = pc \quad \boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \quad (1.7)$$

Propuso que las partículas se pueden comportar como ondas y que su longitud de onda viene determinada por su momento lineal (y por ello su velocidad).

Nos queda ver cómo los postulados de Bohr solucionan el hecho de que las órbitas de los electrones no irradian.

$$L_n = n\hbar \quad mrv = n\hbar \quad 2\pi r(mv) = n\hbar \xrightarrow{1,7} 2\pi r \cdot \frac{h}{\lambda} = n\hbar \quad \boxed{2\pi r = n\lambda} \quad (\text{la } \lambda \text{ es proporcional a } r).$$

Podemos decir que la onda que forma el electron es **estacionaria** (el origen y final están quietos, si los unimos la onda es circular).

$$\text{VECTOR DE ONDA} \rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} < \quad \vec{k} = [\vec{k}] = \frac{2\pi}{\lambda}$$

1.7 Ondas Clásicas

Vamos a trabajar con una onda sinusoidal de longitud de onda λ , periodo T y fase inicial en una única dimensión. Las expresiones que describen este movimiento son las siguientes:

$$y(x, t) = y_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi_0) \quad \text{CONVENIO DE SIGNOS: } < 0 \text{ mueve hacia la derecha} \quad (1.8)$$

Teorema 1.7.1

Número de onda:	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Frecuencia angular:	$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$
Velocidad/fase de propagación:	$v_f = \lambda\nu = \frac{\omega}{k}$

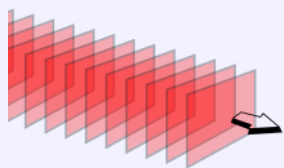
Se puede comprobar que la expresión dada cumple la ecuación de onda, lo cual una vez aplicado De Broglie implica que el momento p está bien definido:

$$\text{ECUACIÓN DE ONDA} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v_f^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

Aquí hallamos el principio de incertidumbre de Heisemberg, puesto que conocemos su momento lineal p pero no su posición, ergo la onda está deslocalizada.

Definición 1.7.1: Onda plana

Llamamos onda plana a aquella onda cuyo frente de onda se ve en un plano.



$$y(x, y) = a_0 e^{i(kx \pm \omega t)} \quad a_0 = y_0 e^{il_0}$$

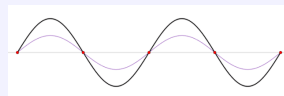
Está expresada en forma compleja (notación que usaremos de ahora en adelante, puesto que la parte compleja cobra sentido físico en la mecánica cuántica), y para obtener la onda clásica nos quedamos solo con la parte real:

$$\text{Re}[y(x, y)] = \text{Re}[y_0 e^{kx \pm \omega t + l_0}] = y_0 \cos(kx \pm \omega t + l_0)$$

Teorema 1.7.2 Principio de superposición

Si y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación de onda, una combinación lineal de ellas también lo será.

Definición 1.7.2: Ondas estacionarias



Se llama onda estacionaria a aquella onda cuyos nodos permanecen inmóviles. Llamamos nodos a los puntos de la onda cruzan el eje de abscisas y son por tanto estáticos en las ondas estacionarias.

Teorema 1.7.3 Interferencia de una onda consigo misma

- Hacia la derecha: $y_1 = y_0 \sin(kx - \omega t)$
- Hacia la izquierda: $y_2 = y_0 \sin(kx + \omega t)$

Para ver la onda resultante de la interferencia de ambas, las sumamos: $y = y_1 + y_2 = y_0 [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] = 2y_0 \sin\left(\frac{kx - \omega t + kx + \omega t}{2}\right) \cdot \left(\frac{kx - \omega t - kx + \omega t}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{y = 2y_0 \sin(kx) \cos(\omega t)}$

Sabiendo que $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

Ahora, aplicamos las condiciones de contorno: $t = 0, y(x = L) \Leftrightarrow \boxed{k \cdot L = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots}$

Donde cada valor de n se le llama **armónico**. Esta relación puede cambiar si se dan condiciones de contorno distintas.

Como $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot L = n\pi$ entonces, $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{n}}$

Definición 1.7.3: Paquete de ondas

Llamamos **paquete de ondas** a un conjunto de ondas sinusoidales de igual amplitud pero distinta longitud de onda y frecuencia.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ y_2 &= A \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} y(x, y) &= y_1 + y_2 = A [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)] = \\ &2A \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Siendo los **valores medios**: $\langle k \rangle = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\langle \omega \rangle = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

Cada onda se mueve con velocidad $v_1 = \frac{\omega_1}{k_1}$ y $v_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$ respectivamente. Además, podemos calcular la velocidad de fase con los valores medios que acabamos de definir:

$$v_f = \frac{\langle \omega \rangle}{\langle k \rangle}$$

También podemos calcular la velocidad de grupo, que es la velocidad a la que se mueve el paquete de ondas:

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

Cuando hacemos una superposición sí que podemos localizar la partícula, pero perdemos información sobre su momento. Esto nos vuelve a llevar otra vez al principio de incertidumbre de Heisemberg.

Ejemplo 1.7.1 (Consideramos las siguientes tres ondas y calculamos la superposición de su interferencia (sumándolas))

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(x) &= \psi_0 e^{ik_0 x} \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{2} \psi_0 e^{i(k_0 - \frac{\Delta k}{2})x} \\ \psi_3(x) &= \frac{1}{2} \psi_0 e^{i(k_0 + \frac{\Delta k}{2})x} \end{aligned} \right\} \psi(x) = \psi_0 e^{ik_0 x} \left(1 + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Delta k}{2}x} + \frac{1}{2} e^{i\frac{\Delta k}{2}x} \right) \Rightarrow \left. \begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned} \right\} 2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

$$\boxed{\psi(x) = \psi_0 e^{ik_0 x} \left(1 + \cos \left(\frac{\Delta k}{2} x \right) \right)}$$

En los extremos tenemos que la función se anula y en el centro, que tiene un máximo. Se dice que la onda está localizada y tiene anchura Δx .

La representación de una partícula se puede dar como un paquete de ondas, donde se sabe que la partícula está en Δx (relación con Schrödinger porue perdemos informaciño sobre el momento).

Podemos construir un paquete de ondas sumando tantas ondas como queramos. Una suma infinita de ondas planas con distintios valores de número de onda o de momento se denomina *Serie de Fourier*.

Definición 1.7.4: Series de Fourier

Cualquier función periódica se puede escribir como suma de senos y cosenos.

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{ik_n x} \quad (1.11)$$

Donde A_n son las amplitudos de las ondas, el peso que cada onda tiene en la función.

Vamos a ver que k puede tomar cualquier valor continuo no discreto:

$$k \text{ continua} \Rightarrow \boxed{\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) e^{ikx} dk} \quad (1.12)$$

$g(k)$ tiene el mismo papel que los coeficientes A_n en el caso discreto. $g(k)$ es la *transformada de Fourier* de $\psi(x)$.

Teorema 1.7.4 Plancherel

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx \quad (1.13)$$

El valor de k estará relacionado con la energía de la partícula, será continua en el caso de una partícula libre (puesto que no tiene ningún tipo de restricción). Si quiero hacer un paquete de onda para esa partícula libre, se ha de hacer una integral.

Hemos definido dos velocidades distintas para los paquetes de ondas, una velocidad de fase v_f (ondas dentro del paquete) y una de grupo v_g (de todo el paquete). ¿Cómo las calculamos si tenemos un caso donde k es continuo?

- Velocidad de grupo: $v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \xrightarrow{k \text{ continua}} v_g = \frac{d\omega}{dk}$

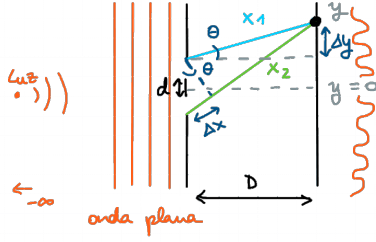
A esta relación entre ω y k se le llama **Relación de dispersión**.

- Relación entre la velocidad de grupo y la velocidad de fase:

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \quad \omega = v_f \cdot k \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_f \cdot k)}{dk} = v_f + k \cdot \frac{dv_f}{dk} \Rightarrow \boxed{v_g = v_f + k \cdot \frac{dv_f}{dk}}$$

Si v_f no varía, la onda no cambia de forma, pero si varía, se le llamará **Onda Dispersiva**.

1.8 Difracción, doble rendija de Young



Dos rendijas separadas una distancia d y una pantalla a una distancia D tal que $D \gg d$. Cuando se llega a la doble rendija, se producen nuevas ondas que interfieren entre ellas. Se espera encontrar un patrón de interferencia. Para que se produzca un máximo, la diferencia de caminos debe ser un múltiplo de la longitud de onda λ .

$$\Delta x = x_2 - x_1 = n\lambda \quad n \in \mathbb{Z}$$

Vamos a ver la distancia entre dos máximos Δy en función de algún dato que nos sea conocido.

$$\Delta x = d \cdot \sin \theta \Rightarrow \text{Condición máximo: } \boxed{d \cdot \sin \theta = n\lambda} \quad \frac{\Delta y}{D} = \tan \theta \simeq \sin \theta, \quad \boxed{\Delta y = \frac{n\lambda D}{d}}$$

Vamos a estudiar cómo se presenta el patrón de interferencia:

$$\text{Intensidad} \propto |\psi|^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \psi_1 &= \psi_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ \psi_2 &= \psi_0 e^{i(kx_2 - \omega t)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\psi|^2 = (\psi_1 + \psi_2) \cdot (\psi_1 + \psi_2) = \psi_1 \cdot \psi_1 + \psi_2 \cdot \psi_2 + \psi_1 \cdot \psi_2 + \psi_2 \cdot \psi_1 = \\ |\psi_0|^2 \left(e^{-i(kx_1 - \omega t)} \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} + e^{-i(kx_2 - \omega t)} \cdot e^{i(kx_2 - \omega t)} + e^{-i(kx_1 - \omega t)} \cdot e^{i(kx_2 - \omega t)} + e^{-i(kx_2 - \omega t)} \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} \right) = \\ |\psi_0|^2 e^{-i\omega t} \cdot e^{i\omega t} \left(2 + e^{ik(x_2 - x_1)} + e^{ik(x_1 - x_2)} \right) = \quad (1.14) \\ |\psi_0|^2 \left(2 + e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} \right) = \\ |\psi_0|^2 (2 + 2 \cos(k\Delta x)) = \\ |\psi_0|^2 \cdot 4 \cos^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \end{aligned}$$

Sabiendo que por Euler $e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} = 2 \cos(k\Delta x)$ y que $\cos(2\theta) + 1 = 2 \cos^2 \theta$

En conclusión, la función que se observa en el patrón:

$$\boxed{|\psi_0|^2 \cdot 4 \cos^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right)} \quad (1.15)$$

¿Por qué aparece este patrón de interferencia y no solo partículas por donde pasan los electrones? Por los **términos de interferencia**, que no se cancelan (si lo hicieran, tendríamos únicamente dos bandas por donde pasan los rayos).

Capítulo 2

La ecuación de Schrödinger I

Capítulo 3

La ecuación de Schrödinger II