1. Sea $f(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 1 \\ 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$ Estudiar la existencia y la unicidad de soluciones del PVI

¿Existe alguna solución definida en todo $\mathbb{R}$?

Por el corolario 1.38 "romántico", sabemos que si $f(x,y)$ es continua y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ es continua, podemos garantizar la existencia y unicidad de soluciones en un intervalo $[x_0-r, x_0+r]$

Sea (t_0, y_0) un punto de $D \subset \mathbb{R}^2$ y f continua en $D \Rightarrow \exists r>0$: PVI tiene solución en $[t_0-r, t_0+r]$
Si además $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(t_0,y_0)$ y es continua en $(t_0,y_0) \Rightarrow \exists r'$: $0<r'\leq r$ $\rightarrow$ tenemos unicidad en $[t_0-r', t_0+r']$

Observamos una discontinuidad en $x_0=1$ por lo que tratamos 3 casos:

- Caso 1 $x_0>1$

  $\left.\begin{array}{l} f(x,y) \text{ continua en } \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x_0 \in \mathbb{R}: x_0>1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \rightarrow \text{continua en } \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Por el corolario 'romántico' $\Rightarrow \exists!$ Solución del PVI en el intervalo $[x_0-r', x_0+r']$

- Caso 2 $x_0<1$

  $\left.\begin{array}{l} f(x,y) \text{ continua en } \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x_0 \in \mathbb{R}: x_0<1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \rightarrow \text{continua en } \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Por el corolario 'romántico' $\Rightarrow \exists!$ Solución del PVI en el intervalo $[x_0-r', x_0+r']$

- Caso 3 $x_0=1$

  Estudiamos si es localmente Lipschitz en $x_0=1$

  $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = 0 \leq L|y_1-y_2| \Rightarrow f(x,y)$ es localmente Lipschitz en $x_0=1$; $f(x,y)$ no es continua en $x_0=1$ $\Big\} \Rightarrow$ No puedo aplicar el Tma. Picard ni Tma. Peano

  Resolviendo la edo por variables separables:

  - Para $x_0 \leq 1$

  $f(x,y)=0$ si $x<1$ $\quad \{ \; y'=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow dy=0 \Leftrightarrow y(x)=0 \rightarrow$ Solución Singular

  - Para $x_0>1$

  $y'=1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=1 \Leftrightarrow dy=dx \Leftrightarrow y(x)=x+c_1$

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 1 \\ x+c_1 & si \quad x>1 \end{cases}}$$

Podemos garantizar la existencia en todos los reales, pero la unicidad solo es garantizable en $x_0 \neq 1$

2. Sea el PVI $\begin{cases} y'(x) = -x\sqrt{|y|} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ Estudiar la unicidad local de soluciones. Si y_0 es la solución que pasa por (x_0,y_0) con $y_0>0$, demostrar que dicha solución corta a la solución constante. Dar el intervalo de definición de y_0 donde dicha solución es única.

Por el corolario 1.38 "romántico", sabemos que si $f(x,y)$ es continua y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ es continua, podemos garantizar la existencia y unicidad de soluciones en un intervalo $[x_0-r, x_0+r]$

Sea (t_0, y_0) un punto de $D \subset \mathbb{R}^2$ y f continua en $D \Rightarrow \exists r>0$: PVI tiene solución en $[t_0-r, t_0+r]$
Si además $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(t_0,y_0)$ y es continua en $(t_0,y_0) \Rightarrow \exists r'$: $0<r'\leq r$ $\rightarrow$ tenemos unicidad en $[t_0-r', t_0+r']$

Puesto que $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$ estudiamos $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ y su respectiva continuidad:

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{x_0 y_0}{2(\sqrt{|y_0|})^3} \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}^2$ tal que $y_0 \neq 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Por el corolario 'romántico' $\exists!$ solución en el intervalo $[x_0-r', x_0+r']$ si $y_0 \neq 0$

Si $y_0=0$, tendremos la solución singular, es decir, la solución constante. Observamos como la solución dada por el corolario VIP está definida en $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ya que en 0 una solución posible es la solución singular

Esta solución debe, por tanto, cortar a la solución dada por el corolario.

Corolario "ROMÁNTICO" 1.38 → (Antiguo Corolario 24)

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) un punto de D y $f(x,y)$ una función continua en $D \Rightarrow \exists$ sol del PVI en $[x_0-r, x_0+r]$ con $r>0$

Si $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ y es continua en $(x_0,y_0) \Rightarrow \exists r' : 0<r'\leq r$ donde $\exists!$ sol del PVI en $[x_0-r', x_0+r']$