Potenciales de Liénard-Wiechert

Los potenciales retardados son

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3x'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3x'$$

Para una <u>carga puntual</u> cuya posición es $\vec{r}_q(t)$:

$$\rho(\vec{r}',t') = q\,\delta(\vec{r}' - \vec{r}_q(t'))$$

$$\vec{J}(\vec{r}',t') = q\,\vec{v}(t')\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t'))$$

$$t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} = t - \frac{|\vec{R}|}{c}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

t y t' están evaluados con respecto al mismo sistema de referencia.

Ponemos

$$\rho(\vec{r}',t') = q\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_q(\tau))\,\delta(\tau - t')\,d\tau$$

$$\vec{J}(\vec{r}',t) = q\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v}(\tau)\,\delta(\vec{r}' - \vec{r}_q(\tau))\,\delta(\tau - t')\,d\tau$$

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_q(\tau))\,\delta\left(\tau-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3x'd\tau$$

Integrando en el volumen V':

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta\left(\tau-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(\tau)|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_q(\tau)|}d\tau$$

De las propiedades de la función delta:

$$\delta[F(\tau)]$$

$$F(\tau)=\tau-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(\tau)|}{c}$$

$$\delta[F(\tau)]=\sum_j\frac{\delta(\tau-t_j)}{F'(t_j)}$$

t_j representa tiempos para los que $F(\tau)$ se anula.
Los tiempos t_j satisfacen la ecuación:

$$t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t')|}{c}$$

Definimos

$$\vec{v}\equiv\frac{d\vec{r}_q(\tau)}{d\tau}$$

$$\vec{R}(\tau)\equiv\vec{r}-\vec{r}_q(\tau)$$

$$R^2=\vec{R}\cdot\vec{R}\rightarrow R\frac{dR}{dt}=\vec{R}\cdot\frac{d\vec{R}}{dt}=-\vec{R}\cdot\vec{v}$$

Por tanto

$$F'(\tau) = 1 + \frac{1}{c}\frac{d}{d\tau}R(\tau) = 1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{R}(\tau)\cdot\vec{v}(\tau)}{R(\tau)}$$

de donde:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(\tau - t')}{1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{R}(\tau)\cdot\vec{v}(\tau)}{R(\tau)}}\,\frac{q}{R(\tau)}\,d\tau$$

De donde se obtienen los potenciales creados por una partícula cargada en movimiento arbitrario, que se denominan <u>potenciales de Liénard-Wiechert</u>(*)

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{\left[R - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c}\right]_{ret}} \\[1em] \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\vec{v}}{\left[R - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c}\right]_{ret}} \end{aligned}}$$

$$\vec{R} \equiv |\vec{r} - \vec{r}\,'|$$

donde los segundos miembros tienen que ser evaluados en los tiempos $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}_q(t')|/c$.

(*) Obtenidos por el francés Alfred-Marie Liénard (1869-1958) in 1898 e independientemente por el alemán Emil Johann Wiechert (1861-1928) en 1900.