Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

UA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Departamento de Óptica, Farmacología y Anatomía

# ÓPTICA I

## Grado en Física

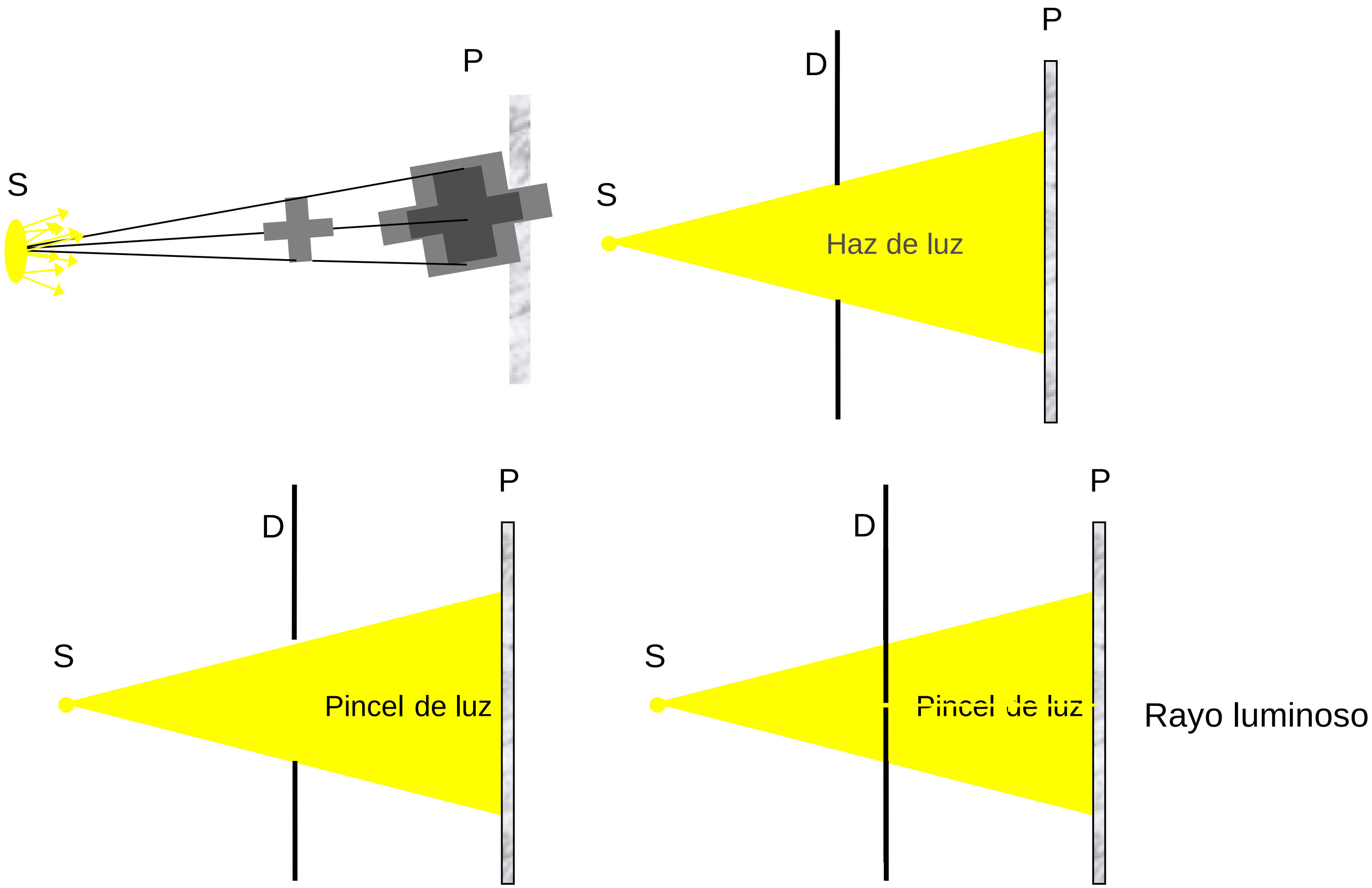
Departamento de Óptica, Farmacología y Anatomía

# Principios y leyes fundamentales

Tema 1

- 1. Rayo luminoso
- 2. Índice de refracción
- 3. Principio de Fermat
- 4. Leyes de la Óptica Geométrica
- 5. Ecuación de las trayectorias
- 6. Teorema de Malus-Dupin
- 7. Estigmatismo

# 1. Concepto de rayo luminoso



# 2. Índice de refracción

A policeman pulls over a Spanish photon.
Did you know how fast you were going?
Photon replies "c"

Velocidad de la luz → en el vacío → $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

Velocidad de la luz → en un medio → $v < c$

$$n = \frac{c}{v}$$

→ adimensional

→ superior a la unidad

frecuencia $f\,(Hz)$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c\,v}{c\,f} = \frac{c}{n\,f} = \frac{\lambda_0}{n}$$

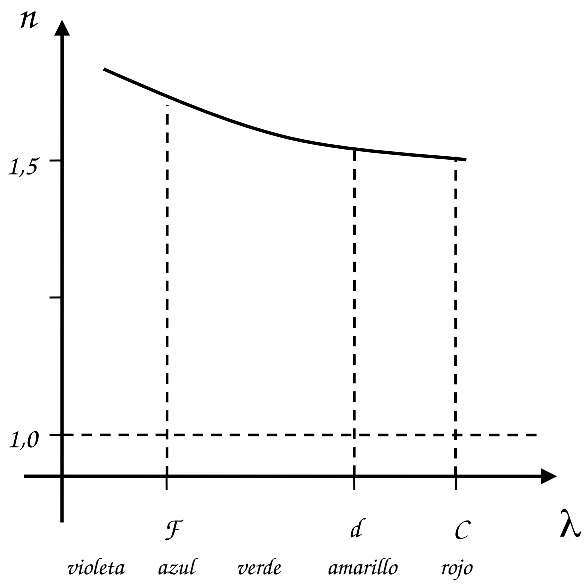
→ n = n ($\lambda$) Dispersión cromática

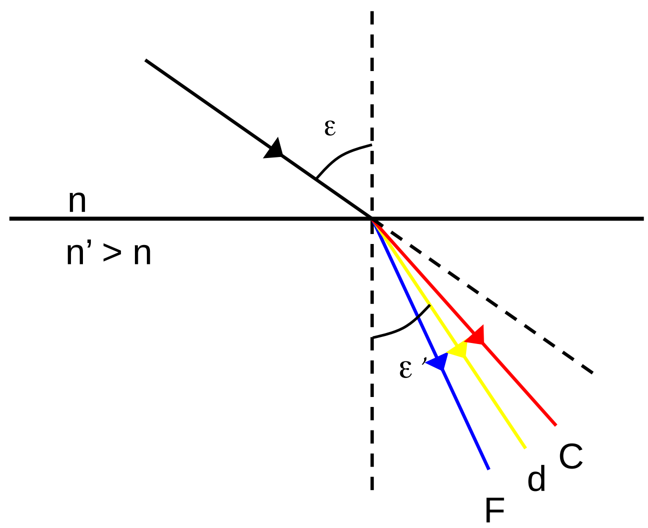
Medio → Isótropo (n escalar) → Homogéneo → n = cte. Vidrio

Medio → Isótropo (n escalar) → Heterogéneo → n = n (x, y, z) Atmósfera

Medio → Anisótropo (n tensor) → n cambia con la dirección Cristal birrefringente

# 2. Dispersión cromática. Número de Abbe




**Ecuación de Cauchy**

Empírica y Válida en el visible

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

**Número de Abbe**

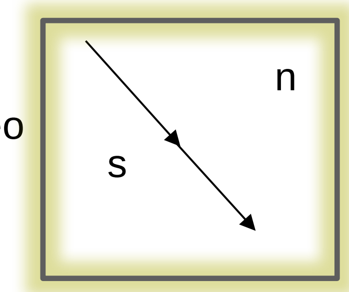
$$\nu = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

(Ver de nuevo en Aberración cromática)

A, B y C ctes características de un material transparente

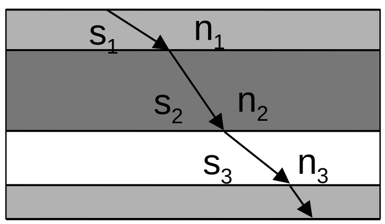
# 3. Camino óptico. Principio de Fermat

Medio homogéneo




$$(L) = n \cdot s \longrightarrow (L) = \frac{c}{v} s = c \frac{s}{v} = c\,t$$

Conjunto de medios homogéneos

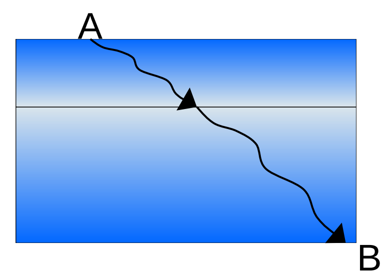



=

Medio heterogéneo

$$n = n(x, y, z)$$

$$(L) = \int_A^B n\,ds = c \cdot t$$



# 3. Camino óptico. Principio de Fermat

Principio de Fermat

“De todas las trayectorias geométricas posibles, entre dos puntos dados, sólo son trayectorias reales de luz aquellas cuyo camino óptico es estacionario”

$$\delta(L) = 0$$

$$(L) = c \cdot t \longrightarrow$$


“El tiempo requerido por la luz para recorrer su trayectoria entre dos puntos será máximo, mínimo o constante”

$$\delta(L) = \int_A^B n\, ds = 0$$

**Principio de Fermat como postulado**

# 4. Leyes de la Óptica Geométrica

1ª. Trayectoria rectilínea

2ª. Constancia del plano de incidencia

3ª. Ley de la Refracción o ley de Snell

4ª. Ley de la reflexión

5ª. Reversibilidad de la luz

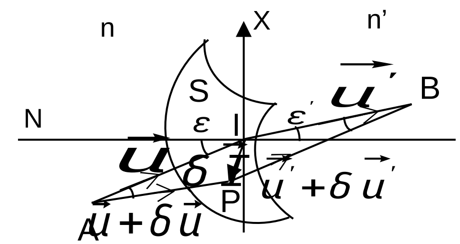
# 4. Leyes de la Óptica Geométrica

1ª. Trayectoria rectilínea

$$\delta(L)=0 \longrightarrow \delta(ns)=0 \xrightarrow{\text{Medio homogéneo}} n\delta(s)=0 \longrightarrow d_{mínima}$$

"En un medio homogéneo e isótropo la luz se propaga en línea recta"

# 4. Leyes de la Óptica Geométrica




2ª. Constancia del plano de incidencia

$$L_1 = n\,\overline{AI} + n'\,\overline{IB}$$

$$L_1 = n\vec{u}\left(\vec{I} - \vec{A}\right) + n'\vec{u}'\left(\vec{B} - \vec{I}\right)$$

+

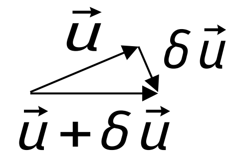
+=

= + - - - - +

Eliminamos infinitésimos de segundo orden y superiores y tenemos en cuenta que estos vectores son perpendiculares

$$\delta\vec{u} \perp \left(\vec{I} - \vec{A}\right)$$

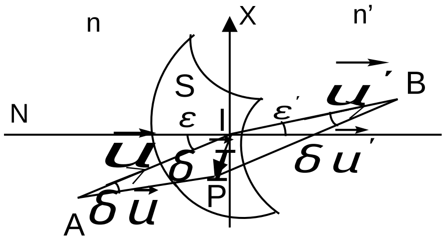
$$\delta\vec{u}' \perp \left(\vec{B} - \vec{I}\right)$$



- = 0

# 4. Leyes de la Óptica Geométrica

2ª. Constancia del plano de incidencia




- = 0

= 0

$\left(n'\vec{u}' - n\vec{u}\right) \perp \delta\vec{I}$ ya que no son nulos

Como está incluido en la superficie el otro vector es el que va en la dirección normal por tanto,

- = k

y determinan un plano en el que está contenido

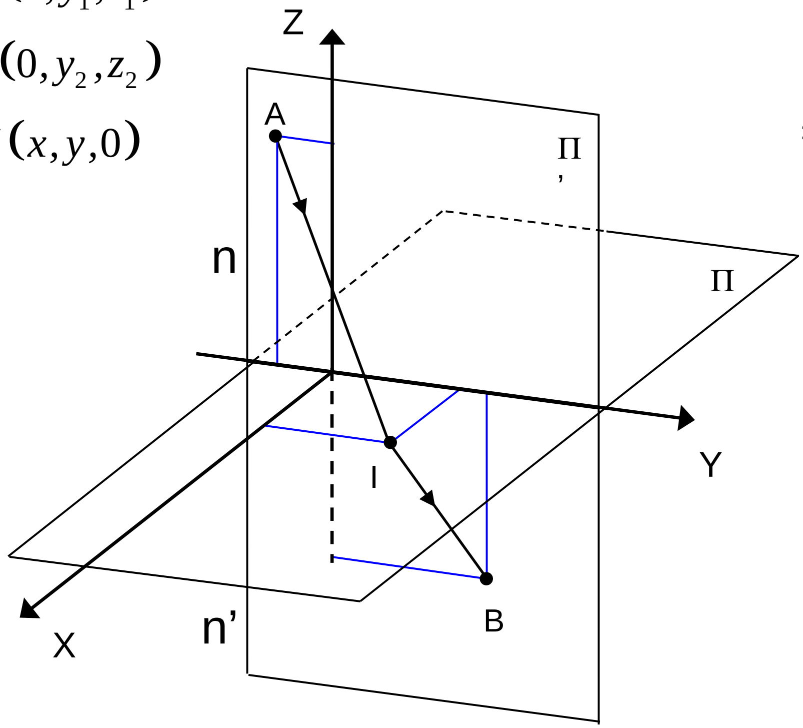
"El rayo incidente, la normal a la superficie en el punto de incidencia y el rayo refractado están en el mismo plano"

# 4. Leyes de la Óptica Geométrica: ejemplo

$A(0, y_1, z_1)$

$B(0, y_2, z_2)$

$I(x, y, 0)$




$$(L) = n\overline{AI} + n'\,\overline{IB} =$$

$$= n\sqrt{x^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2} + n'\sqrt{x^2 + (y - y_2)^2 + z_2^2}$$

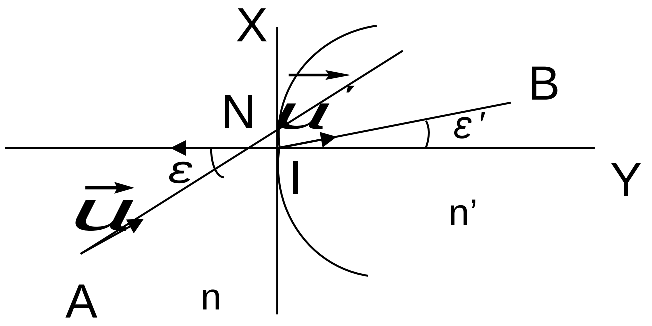
$$\delta(L) = 0$$

$$\frac{\partial (L)}{\partial x} = 0 \longrightarrow x = 0$$

2ª Constancia del plano de incidencia

# 4. Leyes de la Óptica Geométrica

3ª. Ley de la Refracción o ley de Snell




- = k

s en el eje X

$$\boxed{n \sin\varepsilon - n' \sin\varepsilon' = 0}$$

En el ejemplo de la transparencia anterior: $\frac{\partial(L)}{\partial x} = 0 - \longrightarrow x = 0$ $\quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0$

4ª. Ley de la reflexión

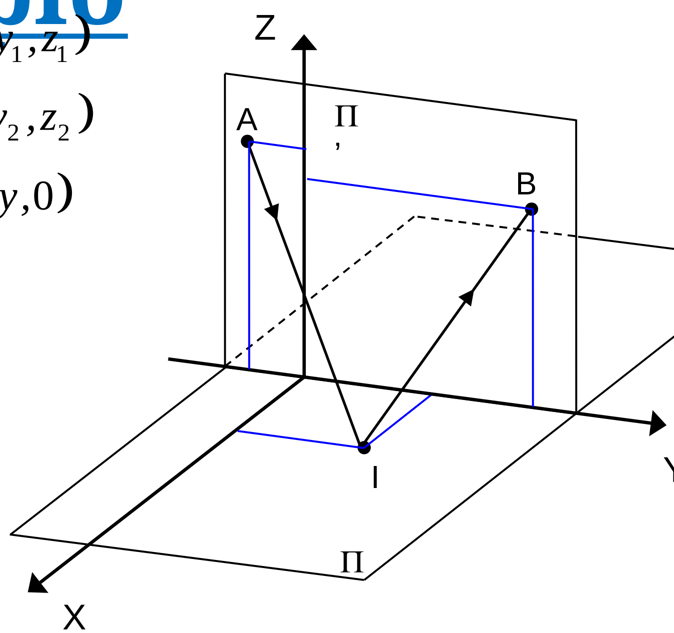
Si n = n' entonces $\boxed{\varepsilon = \varepsilon'}$

# 4. Leyes de la Óptica Geométrica: ejemplo

$A(0, y_1, z_1)$

$B(0, y_2, z_2)$

$I(x, y, 0)$



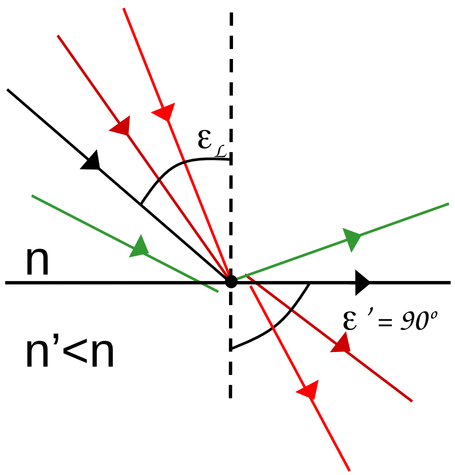

$$(L) = n\left(\overline{AI} + \overline{IB}\right) = n\left[\sqrt{x^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2} + \sqrt{x^2 + (y - y_2)^2 + z_2^2}\right]$$

$$\frac{\partial (L)}{\partial x} = 0 \longrightarrow x = 0$$

"El rayo incidente, la normal a la superficie en el punto de incidencia y el rayo reflejado están en el mismo plano"

# 4. Leyes de la Óptica Geométrica

Concepto de reflexión total




$$n\,sen\varepsilon = n'\,sen\varepsilon'$$

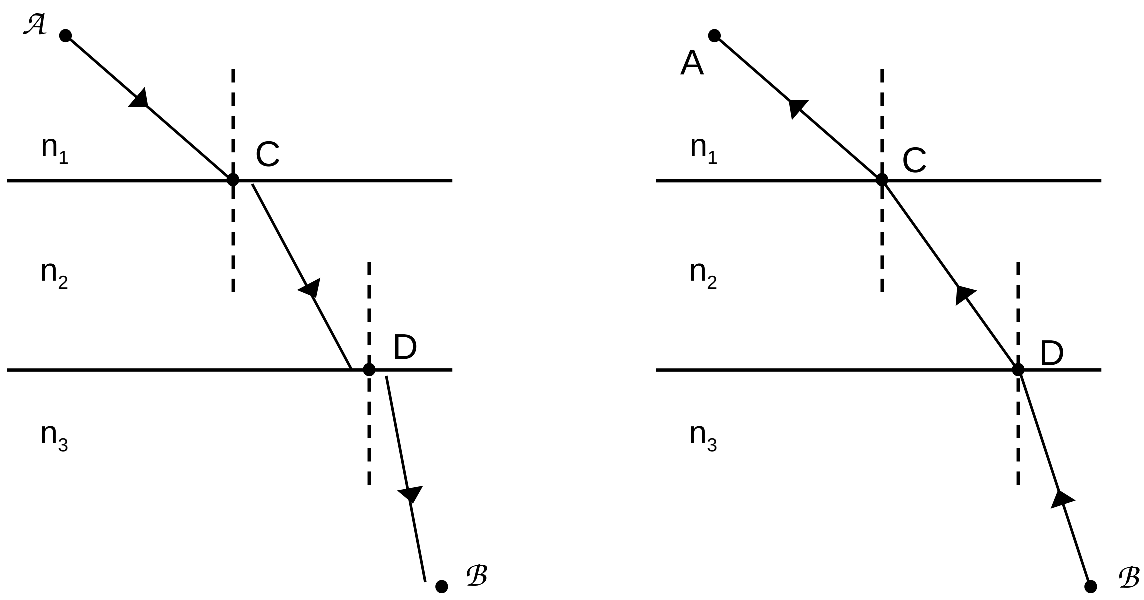
$$n > n' \longrightarrow \varepsilon < \varepsilon'$$

$$\varepsilon' = 90^o \longrightarrow n\,sen\varepsilon_L = n' \longrightarrow sen\varepsilon_L = \frac{n'}{n}$$

Si $\varepsilon > \varepsilon_L$ **Reflexión total**

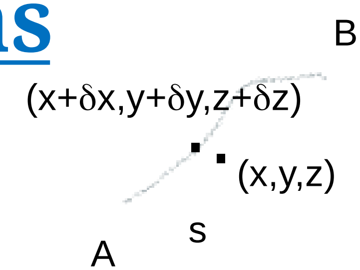
# 4. Leyes de la Óptica Geométrica

5ª. Reversibilidad de la luz




"Las trayectorias que sigue la luz a través de los diferentes medios son reversibles"

# 5. Ecuación de las trayectorias




Si $n = n(x, y, z)$

$$\delta(L) = \delta \int_A^B n\, ds = 0$$

$$\delta(L) = \int_A^B \delta n\, ds + \int_A^B n\, \delta ds = 0$$

ds es el elemento de trayectoria y tiene la expresión $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

y al tomar incrementos se calcula $\delta ds$:

+ +

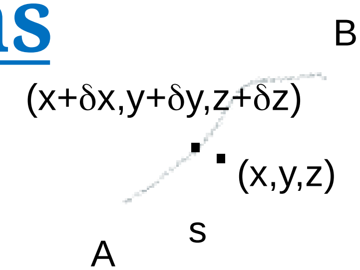
Se obtiene,

$$\delta(L) = \left[ \int_A^B \frac{\partial n}{\partial x} \delta x\, ds + \int_A^B n \frac{dx}{ds} \delta dx \right]_{x,y,z}$$

La segunda integral se calcula por partes, $\int u dv = uv - \int v du \longrightarrow$ $\begin{pmatrix} u = n \frac{dx}{ds} \\ du = \frac{d}{ds}\left(n \frac{dx}{ds}\right) \\ v = \delta x \\ dv = \delta dx = d\,\delta x \end{pmatrix}$

=

# 5. Ecuación de las trayectorias




Sustituyendo y agrupando,

$$\delta(L)=\left[\left[n\frac{dx}{ds}\delta x\right]_A^B+\int_A^B\left[\frac{\partial n}{\partial x}-\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right)\right]\delta x\,ds\right]_{xyz}$$ ¿ O

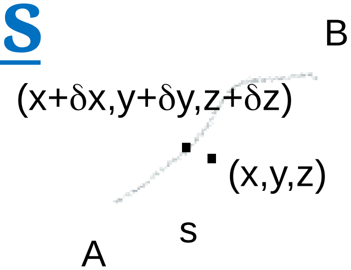
$\downarrow$ ¿ O

Puntos A y B fijos, todas las trayectorias pasan por ellos $\Rightarrow$ $\delta x_A = \delta x_B = 0$

$$\frac{\partial n}{dx}-\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right)=0 \qquad \frac{\partial n}{dy}-\frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right)=0 \qquad \frac{\partial n}{dz}-\frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right)=0$$

Ecuaciones diferenciales en forma escalar

# 5. Ecuación de las trayectorias




Sustituyendo,

$$\delta(L) = \left[ \left[ n \frac{dx}{ds} \delta x \right]_A^B + \int_A^B \left[ \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{d}{ds}\left( n \frac{dx}{ds} \right) \right] \delta x \, ds \right]_{xyz}$$

Si designamos por,

**T**, vector unitario tangente
**N**, vector unitario normal
$\rho$, radio de curvatura de la trayectoria en x, y, z
**r**, vector de coordenadas

$$\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{\mathbf{N}}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds} = \vec{\mathbf{T}}$$

$$\delta(L) = \left[ n \vec{\mathbf{T}} \delta \vec{\mathbf{r}} \right]_A^B + \int_A^B \left[ \vec{\nabla} n - \frac{d}{ds}\left( n \vec{\mathbf{T}} \right) \right] \delta \vec{\mathbf{r}} \, ds$$

# 5. Ecuación de las trayectorias

$$\delta(L) = \left[n\vec{\mathbf{T}}\,\delta\vec{\mathbf{r}}\right]_A^B + \int_A^B \left[\vec{\nabla} n - \frac{d}{ds}\left(n\vec{\mathbf{T}}\right)\right]\delta\vec{\mathbf{r}}\,ds \text{ ¿ } 0$$

¿ 0

Según el principio de Fermat

Puntos A y B fijos, todas las trayectorias pasan por ellos $\delta\vec{r}_A = \delta\vec{r}_B = 0$

$$\vec{\nabla} n - \frac{d}{ds}\left(n\vec{T}\right) = \vec{\nabla} n - \frac{dn}{ds}\vec{T} - n\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{\nabla} n - \frac{dn}{ds}\vec{T} - n\frac{\vec{N}}{\rho} = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} n = \frac{dn}{ds}\vec{\mathbf{T}} + n\frac{\vec{\mathbf{N}}}{\rho}}$$

Ecuación de las trayectorias de los rayos en forma vectorial

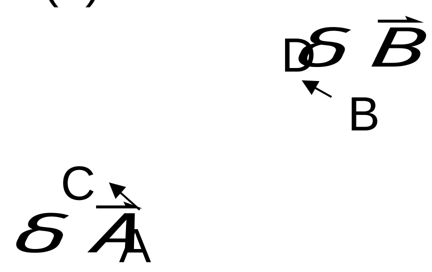
Medio homogéneo
n = cte

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla}n = 0$, $(dn/ds) = 0$, $(n\vec{\mathbf{N}}/\rho) = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\rho = \infty}$

Trayectorias rectilíneas

# 5. Ecuación de las trayectorias

Si dos trayectorias muy próximas no tienen extremos comunes, $\delta(L) \neq 0$

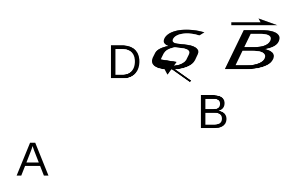



$$\delta(L) = \left[ n\vec{\mathbf{T}}\,\delta\vec{\mathbf{r}} \right]_A^B + \int_A^B \left[ \vec{\nabla} n - \frac{d}{ds}\left( n\vec{\mathbf{T}} \right) \right] \delta\vec{\mathbf{r}}\, ds$$

Si la trayectoria de A a B corresponde a un camino real de luz el segundo término:

-

Considerando solo la variación del camino óptico del primer término se tendrá,




$$\delta(L) = n_B \vec{\mathbf{T}}_B \delta\vec{\mathbf{B}} - n_A \vec{\mathbf{T}}_A \delta\vec{\mathbf{A}}$$

Si A fuera común a las dos trayectorias, = 0

$$\delta(L) = n_B \vec{\mathbf{T}}_B \delta\vec{\mathbf{B}}$$

# 6. Teorema de Malus Dupin

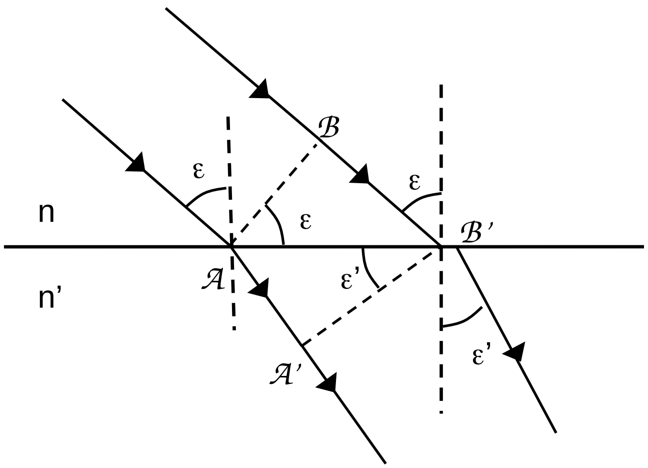
Si sobre cada uno de los rayos que emite un punto luminoso tomamos caminos ópticos iguales, el conjunto de los puntos que limitan dichas trayectorias forman una superficie denominada superficie o frente de onda.

$$\delta(L) = n_B \vec{\mathbf{T}}_B \delta\vec{\mathbf{B}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathbf{T}}_B \delta\vec{\mathbf{B}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathbf{T}}_B \perp \delta\vec{\mathbf{B}}$$

El teorema de Malus–Dupin establece que el frente de onda es perpendicular a todos los rayos en el punto de contacto.

# 6. Teorema de Malus Dupin

Refracción de la luz según el teorema de Malus-Dupin




$$n\overline{BB'} = n'\,\overline{AA'}$$

Del triángulo $ABB'$ $\longrightarrow$ $\overline{BB'} = \overline{AB'}sen\varepsilon$

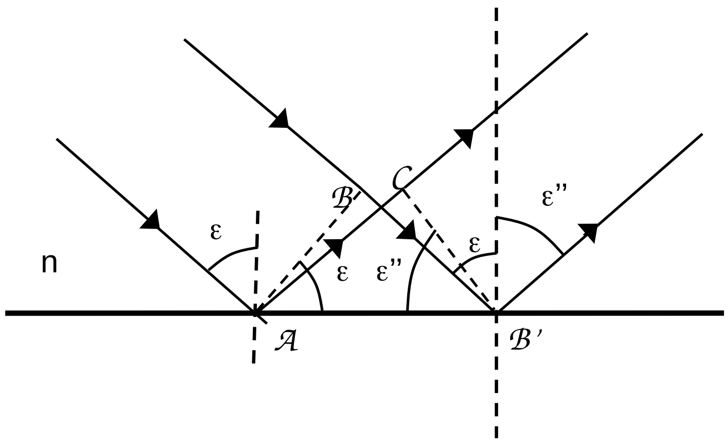
Del triángulo $AA'B'$ $\longrightarrow$ $\overline{AA'} = \overline{AB'}sen\varepsilon'$

$$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$$

$$nsen\varepsilon = n'\,sen\varepsilon'$$

# 6. Teorema de Malus Dupin

Reflexión de la luz según el teorema de Malus-Dupin




$$\overline{AC} = \overline{BB'}$$

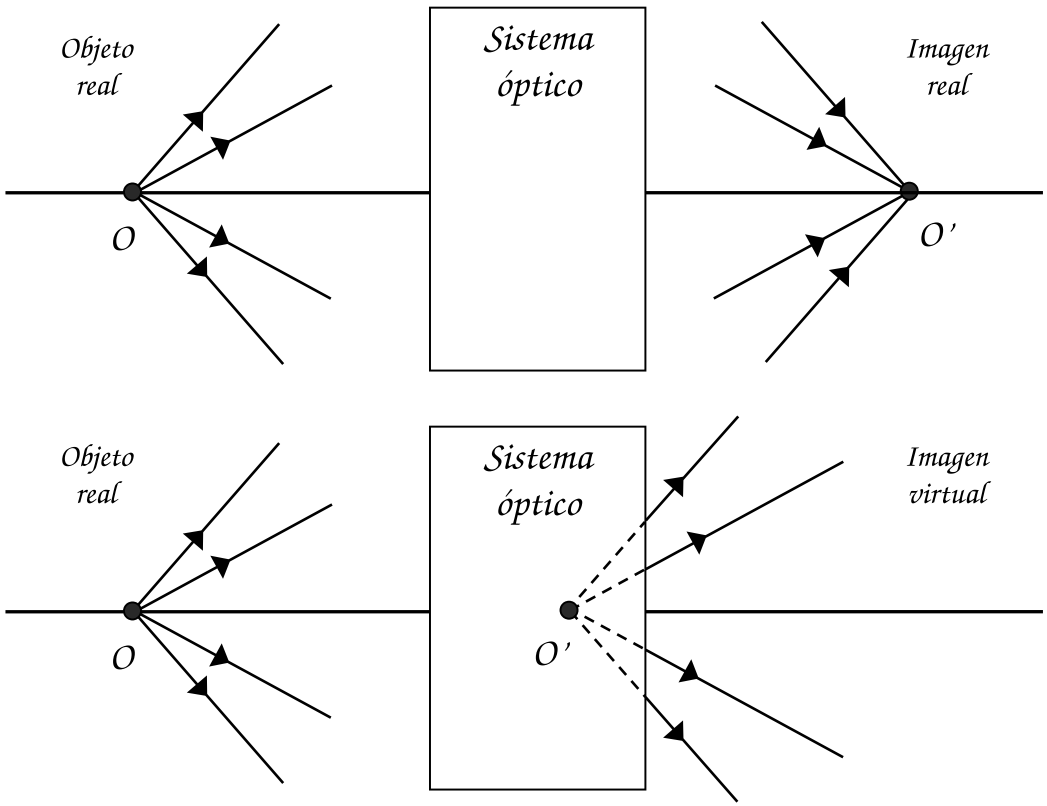
De $ACB'$ $\longrightarrow$ $\overline{AC} = \overline{AB'} sen \varepsilon''$

De $ABB'$ $\longrightarrow$ $\overline{BB'} = \overline{AB'} sen \varepsilon$

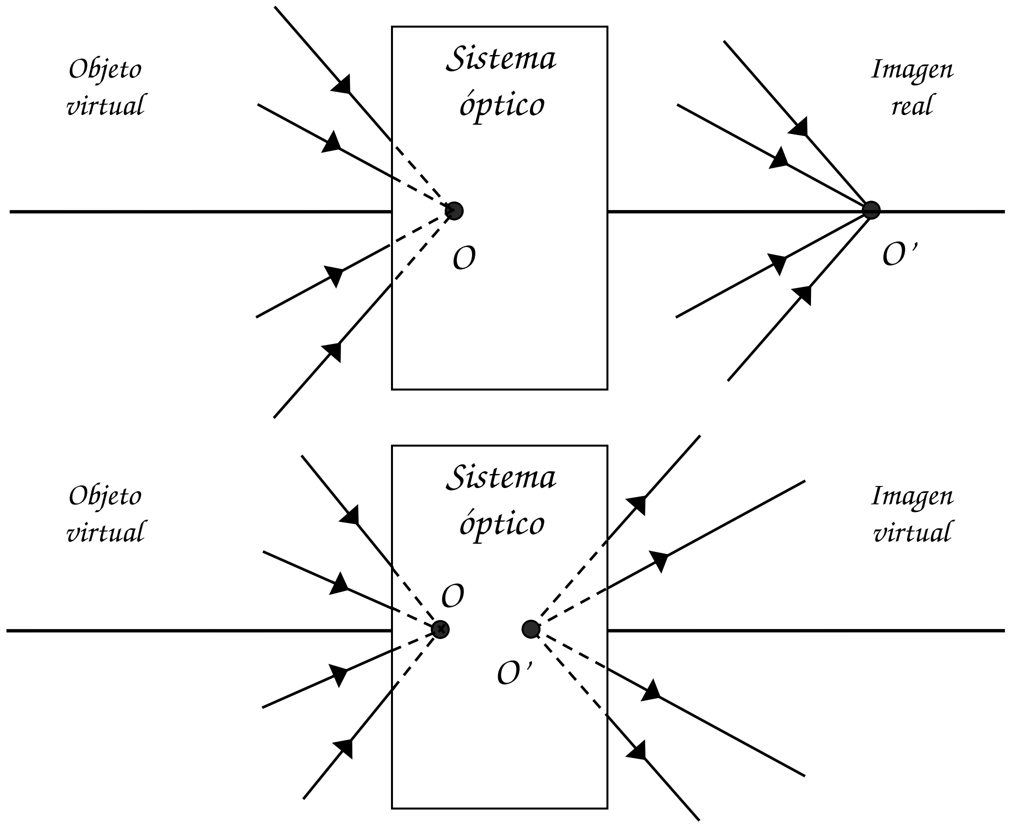
$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = \varepsilon''$$

# 7. Relación objeto-imagen. Estigmatismo

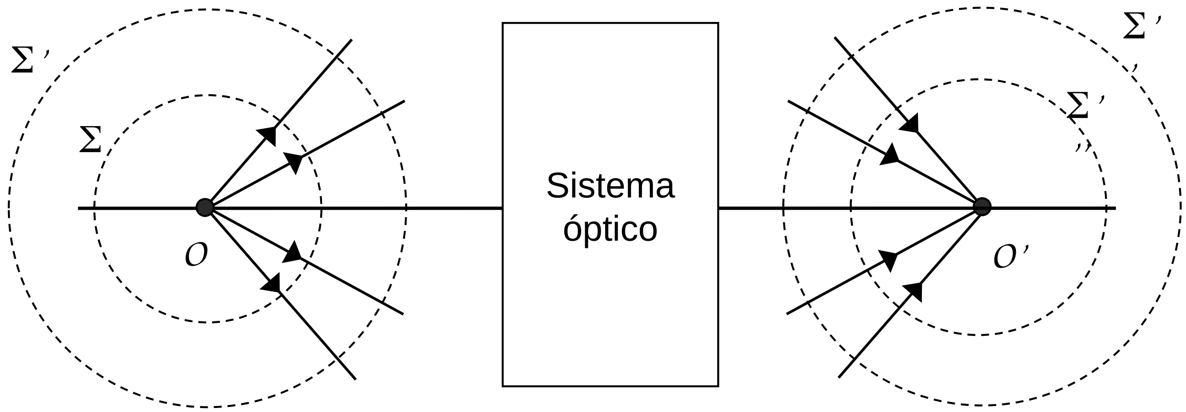


# 7. Relación objeto-imagen. Estigmatismo




Objeto e imagen son puntos conjugados respecto al sistema óptico

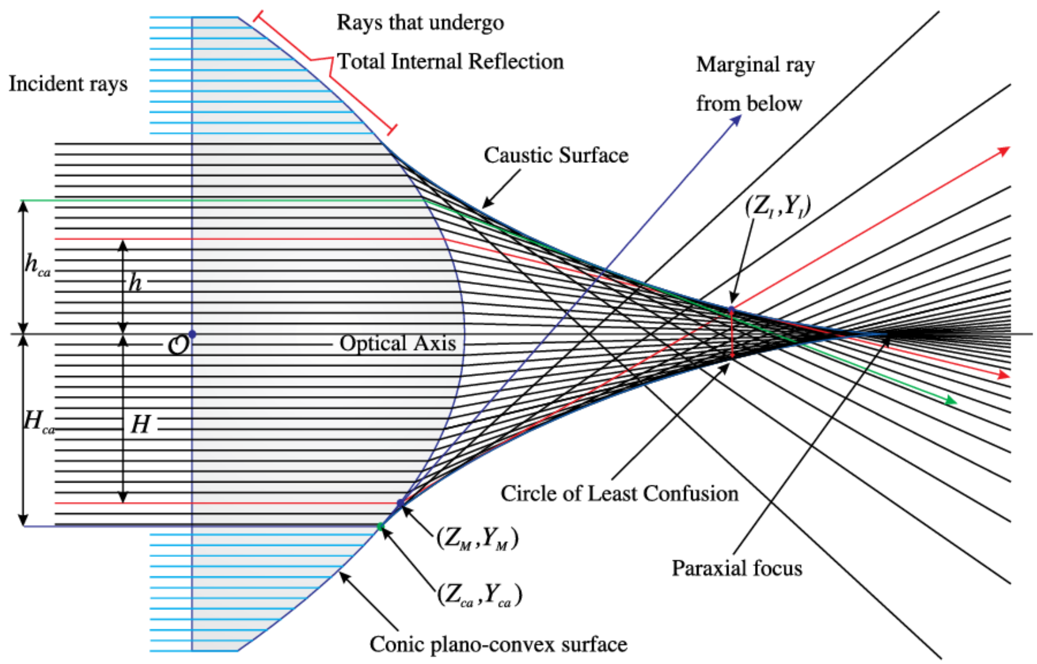
# 7. Relación objeto-imagen. Estigmatismo



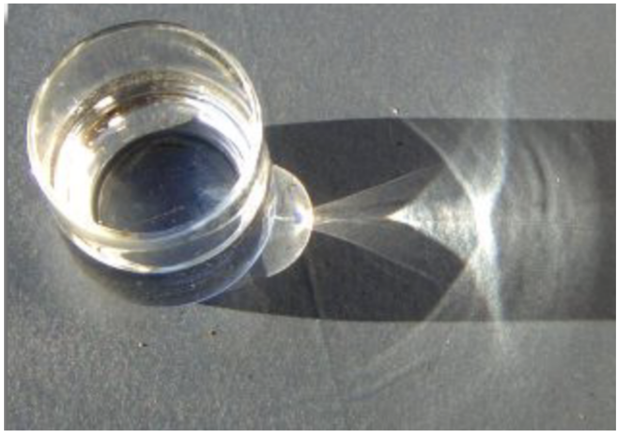

Un sistema óptico es estigmático para O y O’ cuando todos los rayos que salen de O pasan por O’ real o virtualmente

Medio homogéneo e isótropo, superficies de onda esféricas

# 7. Relación objeto-imagen. Caústica




Caustic produced by a plano-convex lens when the point source is located at infinity. Also shown



Un sistema óptico no estigmático da lugar a la caústica