Electromagnetismo II

Tema 4. DINÁMICA DE PARTÍCULAS RELATIVISTAS EN CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

1.- En mecánica clásica no relativista, la segunda ley de Newton se escribe en la forma familiar $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, donde $\vec{\mathbf{a}} \equiv d\vec{\mathbf{v}}/dt$ es la aceleración ordinaria. Sin embargo, la ecuación relativista $\vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$, no puede expresarse de forma tan simple. Mostrar que:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[\vec{\mathbf{a}} + \frac{\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{a}})}{c^2 - v^2}\right]$$

2.- Mostrar que la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ (ordinaria) de una partícula de masa m y carga q, que se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ debido a la acción de campos electromagnéticos $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, viene dada por:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{q}{m}\sqrt{1-v^2/c^2}\left[\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c^2}\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{E}})\right]$$

3.- Si $a^\mu = du^\mu/d\tau$, demostrar que:

$$a_\mu a^\mu = \gamma^6\left[\frac{(\vec{\mathbf{v}}\times\dot{\vec{\mathbf{v}}})^2}{c^2} - \dot{\vec{\mathbf{v}}}^2\right]$$

4.- Demostrar que si un sistema de referencia *S'* se mueve respecto a un sistema *S* con una velocidad arbitraria $\vec{\mathbf{v}}$ ($\vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\mathbf{v}}/c$) pero los ejes de ambos sistemas permanecen paralelos, entonces la generalización de las transformaciones de Lorentz es:

$$\left.\begin{aligned} (x')^0 &= \gamma(x^0 - \vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\mathbf{x}}) \\ \vec{\mathbf{x}}' &= \vec{\mathbf{x}} + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}(\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\mathbf{x}})\vec{\boldsymbol{\beta}} - \gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}x^0 \end{aligned}\right\}$$

5.- Una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z)$ en un sistema de referencia inercial. Conociendo que el tetravector impulso p^μ tiene por componentes $p^\mu = (\varepsilon/c, \vec{\mathbf{p}})$, obtener las ecuaciones de transformación de la energía ε y el trimomento lineal $\vec{\mathbf{p}}$ bajo las transformaciones de Lorentz considerando un "boost" de velocidad V a lo largo del eje x, sentido positivo. ¿Cuáles serían las ecuaciones de transformación para el trivector fuerza $\vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$? [Ponemos V para la velocidad del "boost" para no confundir con la velocidad $\vec{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z)$ de la partícula].

6.- Demostrar que el intervalo $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ es invariante bajo una transformación de Lorentz consistente en un "boost" de velocidad v a lo largo del eje x, sentido positivo.

7.- Un onda plana, en un cierto sistema de referencia inercial *S,* puede ser representada en la forma: $A(x) = \exp(-ik^{\mu}x_{\mu})$, donde $k^{\mu} = (\omega / c, \vec{\mathbf{k}})$. Suponiendo que en un nuevo sistema inercial *S'* la transformación de $A(x)$ sea también una onda plana, determinar:
(a) Las ecuaciones de transformación de la frecuencia angular ω y el número de onda $\vec{\mathbf{k}}$ bajo un "boost" de velocidad v a lo largo del eje *x*, sentido positivo. El fenómeno de cambio en la frecuencia de un sistema de referencia a otro se conoce como Efecto Doppler.
(b) La ecuación del cambio de frecuencia en el límite no relativista.

8.- Una partícula de carga *q* y masa *m* se haya inicialmente en reposo en un sistema inercial de referencia, en el cual hay un campo electromagnético descrito por el tensor ($L > 0$):

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -L/c & 0 \\ 0 & 0 & -L & 0 \\ L/c & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Interprétese geométricamente dicho campo.
(b) Hallar las ecuaciones de movimiento de dicha partícula en la forma $f_i(x^0, \vec{\mathbf{x}}) = 0$, $i = 1, 2, 3$.
(c) Discútase la posibilidad de encontrar algún sistema de referencia en el que el campo sea puramente eléctrico ($\vec{\mathbf{B}} = 0$), puramente magnético ($\vec{\mathbf{E}} = 0$) o nulo ($\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{B}} = 0$).

9.- Una línea infinita situada en el eje *z* está cargada con densidad lineal de carga λ y se mueve en la dirección +*z* con velocidad v. Construir el tensor campo electromagnético y el tensor dual para el punto (x,0,0).

10.- Obtener mediante las transformaciones de Lorentz el potencial eléctrico y el potencial vector para una carga puntual que se mueve con velocidad constante en la dirección del eje *x*. A partir de estos valores de los potenciales, determinar las expresiones de los campos eléctrico y magnético.

11.- A partir de las ecuaciones de transformación de los campos eléctrico y magnético cuando la velocidad tiene la dirección *x*, determinar las ecuaciones de transformación para cualquier dirección de la velocidad:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}' &= \gamma\left(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{\mathbf{E}}) \\ \vec{\mathbf{B}}' &= \gamma\left(\vec{\mathbf{B}} - \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c^2} \times \vec{\mathbf{E}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{\mathbf{B}}) \end{aligned}\right\}$$

¿Cuáles serían las transformaciones inversas?

12.- Un dipolo magnético ideal de momento magnético dipolar $\vec{\mathbf{m}}$ se encuentra situado en el origen de un sistema inercial *S'* que se mueve con velocidad *v* en la dirección del eje *x* con respecto a otro sistema inercial *S*. En el sistema inercial *S'* el potencial vector es

$$\vec{\mathbf{A}}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{r}}'}{r'^2} \qquad \hat{\mathbf{r}}' = \frac{\vec{\mathbf{r}}'}{r'}$$

y el potencial escalar $\phi' = 0$.
(a) Demostrar que el potencial escalar en el sistema *S* vale

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{R}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{m}})}{c^2R^2} \frac{1-v^2/c^2}{[1-(v^2/c^2)\mathrm{sen}^2\theta]^{3/2}}$$

donde $\vec{\mathbf{R}}$ es el vector (en *S*) de la posición (instantánea) del dipolo al punto de observación y es el ángulo que forma $\vec{\mathbf{R}}$ con el eje *x*.

(b) En el límite no relativista demostrar que el potencial escalar en *S* corresponde a un dipolo *eléctrico* localizado en *O'* de valor $\vec{\mathbf{p}} = (\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{m}})/c^2$.

13.- En un cierto sistema de referencia inercial *S*, el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ y el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ no son ni paralelos ni perpendiculares, en un punto determinado del espacio-tiempo. Mostrar que en un sistema de referencia inercial diferente *S'*, que se mueve respecto a *S* con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ dada por

$$\vec{\mathbf{v}} = \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}}{B^2+E^2/c^2}$$

los campos $\vec{\mathbf{E}}'$ y $\vec{\mathbf{B}}'$ son *paralelos* en ese punto. ¿Hay algún sistema de referencia en el que los dos campos son *perpendiculares*?

14.- Sabemos que:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left(\left|\vec{\mathbf{B}}\right|^2 - \left|\vec{\mathbf{E}}\right|^2/c^2\right)$$

es un invariante del campo electromagnético. A partir de las ecuaciones de transformación de los campos eléctrico y magnético para un "boost" con velocidad *v* a lo largo del eje *x,* demostrar que:

$$c^2\left|\vec{\mathbf{B}}'\right|^2 - \left|\vec{\mathbf{E}}'\right|^2 = c^2\left|\vec{\mathbf{B}}\right|^2 - \left|\vec{\mathbf{E}}\right|^2$$

15.- Determinar por integración directa el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que envuelve una carga puntual que se desplaza con velocidad constante.

16.- Estudiar el movimiento de una partícula de carga *q* y masa *m* bajo la acción de un campo eléctrico uniforme y estático.

17.- Estudiar el movimiento de una partícula de carga *q* y masa *m* bajo la acción de un campo magnético uniforme y estático.

18.- Estudiar el movimiento de una partícula de carga *q* y masa *m* bajo la acción de un campo eléctrico y otro magnético paralelos, uniformes y estáticos.

19.- Una partícula de carga *q* y masa *m*, inicialmente en reposo, se haya sometida a la acción de una fuerza exterior, de dirección constante, en la forma $\vec{\mathbf{f}} = 2t\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ (fuerza proporcional al tiempo).

(a) Demostrar que la velocidad viene dada por la expresión $\vec{\boldsymbol{\beta}}(t) = h(t)(\vec{\boldsymbol{\alpha}}/\alpha)$.

donde *h*(*t*) es función del tiempo (determínese) y $\alpha \equiv \left|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\right|$.

(b) Suponiendo que $(mc/\alpha t^2) << 1$, comprobar que puede escribirse $h(t) \cong 1-(mc/\alpha t^2)^2$.

(c) Comprobar que siempre $\left|\vec{\boldsymbol{\beta}}(t)\right| < 1$.

20.- Estudiar el movimiento de una partícula de carga *q* y masa *m* bajo la acción de un campo magnético estático no uniforme de variación suave y con simetría axial (botella magnética).