EXÁMENES MECÁNICA ESTADÍSTICA

NO TENÍA LOS ENUNCIADOS CUANDO LO RESOLVÍ !!
Muchos besitos y mucho ánimo ♡♡

PARCIAL 2023/2024: no tengo los enunciados, tiro d
se corrigió en clase.

EJERCICIO 1. Sistema de N partículas con espín alinead ... cho de un campo H externo aplicado. Misma probabilidad de estar alineado que antialineado.

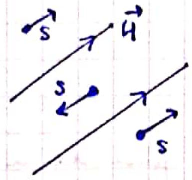
a) Probabilidad alineado?

b) $\langle n_1 \rangle$?

c) Probabilidad del mismo número alineado que antialin?

d) Stirling en a) $\Longrightarrow \log N! = N\log N - N + \log\sqrt{2\pi N}$

PARAMAGNETISMO



- n_1 = "nº partículas espín alineado", $E_+ = -\mu H$
- n_2 = "nº partículas espín antialineado", $E_- = \mu H$

$N = n_1 + n_2$
$E = n_1 E_+ + n_2 E_-$

a) Para dar la probabilidad de estar alineado tenemos que pensar en el las combinaciones posibles. Vamos a tomar este problema como un ejercicio de camino aleatorio donde hay dos opciones con la = probabilidad:

- p: probabilidad alineado
- q: probabilidad antialineado

$\Big\} \; p+q=1 \Rightarrow p=q=\frac{1}{2}$

combinatoria posible

$$P(n_1) = \Omega(E_+) = \frac{N!}{n_1!\,n_2!}\cdot p^N = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\,p^N = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\cdot\frac{1}{2^N}$$

$\hookrightarrow p^N = p^n q^{N-n}$ (se desarrolla así desde la binomial)

¡¡ RECORDAR: en la colectividad microcanónica, la probabilidad se relaciona con el número de microestados accesibles (combinatoria)

b) Para dar $\langle n_1\rangle$, podemos usar los resultados del camino aleatorio en una dimensión (distribución binomial).

$\langle n_1\rangle = p\cdot N = \frac{1}{2}N \Rightarrow$ vamos a ver desde la definición de media cómo se hace el desarrollo

TRUCO $\quad n_1 p^{n_1} = p\frac{\partial}{\partial p}p^{n_1}$

$$\langle n\rangle = \sum_{n_1=0}^{N} n_1\cdot P(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N} n_1\cdot\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\,p^{n_1}q^{N-n_1} = \sum_{n_1=0}^{N}\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\cdot p\frac{\partial}{\partial p}(p^{n_1})q^{N-n_1} =$$

$$= p\frac{\partial}{\partial p}\sum_{n_1=0}^{N}\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\,p^{n_1}q^{N-n_1} \underset{\text{BINOMIO NEWTON}}{=} p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N = Np(p+q)^{N-1} \underset{p+q=1}{=} Np = \frac{1}{2}N$$

c) Vamos a ver cómo damos la probabilidad de $n_1 = n_2$:

$N = n_1 + n_2 = 2n_1 \iff n_1 = \frac{N}{2}$

$$P\left(n_1 = \frac{N}{2}\right) = \frac{N!}{\frac{N}{2}!\,\frac{N}{2}!} \cdot p^{\frac{N}{2}} q^{\frac{N}{2}} = \frac{N!}{N/2!\,N/2!} \cdot \frac{1}{2^N}$$

d) ¿Cómo desarrollamos esto con Stirling? $\ln N! = N\ln N - N + \ln\sqrt{2\pi N}$

$$\ln P\left(n_1 = \frac{N}{2}\right) = \ln N! - 2\ln\frac{N}{2}! + N\ln\frac{1}{2} \underset{\text{STIRLING}}{\uparrow}{=} N\ln N \cancel{-N} + \ln\sqrt{2\pi N} - 2\frac{N}{2}\ln\frac{N}{2} +$$

$$\cancel{+2\frac{N}{2}} - 2\ln\sqrt{2\pi\frac{N}{2}} + N\ln\frac{1}{2} = \cancel{N\ln N} + \frac{1}{2}\ln 2\pi N - \cancel{N\ln N} + \cancel{N\ln 2} - \ln\pi N -$$

$$-\cancel{N\ln 2} = \frac{1}{2}\ln 2\pi N - \ln\pi N = \ln\sqrt{\frac{2}{\pi N}}$$

¿Cómo queda este límite cuando N grande?

$$\ln P\left(n_1 = \frac{N}{2}\right) = \ln\sqrt{\frac{2}{\pi N}} \Rightarrow P\left(n_1 = \frac{N}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

El significado físico de esto es que cuando $N \to +\infty$, hemos pasado a un continuo, y la probabilidad de un punto es 0.

EJERCICIO 2. En colectividad canónica, demostrar las siguientes expresiones:

a) $\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}$

En la colectividad canónica, $P = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_r}$, con $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$. Por la definición de valor esperado:

$$\langle E\rangle = \sum_r E_r \cdot \frac{1}{Z}e^{-\beta E_r} = -\frac{1}{Z}\sum_r \frac{\partial}{\partial E_r} e^{-\beta E_r} = -\frac{\sum_r \frac{\partial}{\partial E_r} e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}$$

b) $\langle \Delta E^2\rangle = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2$

$$\langle E^2\rangle = \sum_r E_r^2 \cdot \frac{1}{Z}e^{-\beta E_r} = \sum_r E_r \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial e^{-\beta E_r}}{\partial\beta} = \sum_r E_r \cdot \frac{Z}{Z^2} \cdot \frac{\partial e^{-\beta E_r}}{\partial\beta} = \frac{1}{Z}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2} =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2 = -\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta} + \langle E\rangle^2$$

se puede dejar así, pero para calcular $\langle\Delta E^2\rangle$ viene mejor buscarlo en función de $\langle E\rangle$

$$\langle\Delta E^2\rangle = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 = -\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta} + \langle E\rangle^2 - \langle E\rangle^2 = -\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta} = \frac{\partial^2\ln Z}{\partial\beta^2}$$

c) $S = -k\sum_r P_r \ln P_r \Rightarrow$ llegar a canónica con $P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{Z}$

$$S = -k\sum_r P_r\ln P_r = -k\sum_r P_r \ln\frac{e^{-\beta E_r}}{Z} = -k\sum_r P_r\left[\ln e^{-\beta E_r} - \ln Z\right] =$$

$$= -k\sum_r P_r\left[-\beta E_r - \ln Z\right] = k\left[\sum_r P_r\beta E_r + \underbrace{\sum_r P_r}_{1}\ln Z\right] = k(\beta\langle E\rangle + \ln Z)$$

EJERCICIO 3. Tenemos un volumen V a temperatura T con N partículas con energía $E = \frac{1}{4} a x^4$. Dar el valor medio de E para el caso del gas ideal y discute las diferencias con el principio de equipartición.

A pelo con la definición de la función de partición:

$$Z = \frac{1}{h^3} \iint d^3x\, d^3p\, e^{-\beta E(x,p)}$$

no pongo los límites pq no recuerdo bien el enunciado

En nuestro caso, $E(x,p) = \frac{1}{4} a x^4$:

$$Z = \frac{1}{h^3} \iint d^3x\, d^3p\, e^{-\frac{1}{4}\beta a x^4} = \frac{V}{h^3} \iiint dx\,dy\,dz\, e^{-\frac{1}{4}\beta a x^4} = \frac{V \cdot \tilde{y} \cdot \tilde{z}}{h^3} \int dx\, e^{-\frac{1}{4}\beta a x^4} =$$

volumen del espacio fásico

$\tilde{y}, \tilde{z}$ constantes

$$= G \int dx\, e^{-\frac{1}{4}\beta a x^4} = G \left(\frac{1}{4}\beta a\right)^{-1/4} \int du\, e^{-u^4} \Rightarrow \text{esta integral no la sabemos}$$

* CAMBIO VARIABLE

$$u^4 = +\frac{1}{4}\beta a x^4 \longrightarrow u = x\left(+\frac{1}{4}\beta a\right)^{1/4}$$

$$du = dx\left(\frac{1}{4}\beta a\right)^{1/4}$$

resolver, pero no pasa nada ü. Lo que queremos es $\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ y la integral no depende de β, así que la llamamos I, tomamos el logaritmo y derivamos:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln\left[G\left(\frac{1}{4}\beta a\right)^{-1/4} I\right] = -\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\ln G - \frac{1}{4}\ln \frac{1}{4}\beta a + \ln I\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1/4\, a}{1/4\, \beta a} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{4} kT$$

Si la energía fuera cuadrática, tendríamos $\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT$ por el principio de equipartición $\Rightarrow$ el cambio en la constante viene asociado al cambio de variable * que hagamos en la integral (al pous hay que desarrollarle más).