

T.D. 1 : Formas diferenciales. Integral de linea.

Ejercicio 1

Calcular el trabajo hecho por una fuerza $\vec{F} = x^2\vec{j}$ cuyo punto de suporte se desplaza sobre el arco Γ_{AB} de la parábola $y^2 = 1 - x$ de $A(1, 0)$ hacía $B(0, 1)$.

Ejercicio 2

Encontrar el trabajo de la fuerza $\vec{F}$ que se desplaza de un punto M hacía un punto N en una curva C en los casos siguientes :

1. $\vec{F}(x, y) = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$ con C es el segmento $[MN]$ con $M(-4; 0)$ y $N(0; 2)$.
2. $\vec{F}(x, y) = (x + y)\vec{i} + 2x\vec{j}$ con $C : x^2 + y^2 = 4;\ (y \geq 0)$ y $M(2; 0);\ N(-2; 0)$.

Ejercicio 3

Consideramos la forma diferencial $\omega = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ definida en el semi-plano $U = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$. Demostrar que w es exacta. Buscar sus primitivas en U.

Ejercicio 4

Se considera la 1-forma diferencial ω tal que :

$$\omega = \frac{2x}{y}\,dx - \frac{x^2}{y^2}\,dy$$

definida en $U = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$.

1. Demostrar que ω es cerrada en U.
2. Demostrar de dos maneras distintas que ω es exacta.
3. Calcular la integral de linea $\int_C \omega$ donde C es una curva de clase C^1 de origen $A(1; 2)$ y de punto final $B(3; 8)$.

Ejercicio 5

Consideramos ω la forma diferencial definida en $\mathbb{R}^2$ por :

$$\omega = (x^2 + y^2 - a^2)\,dx - 2ay\,dy$$

donde $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Demostrar que ω no es exacta.
2. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ con valores en $\mathbb{R}$. Sea $\alpha(x, y) = f(x).\omega(x, y)$.
   ¿Que condición debe cumplir f para que α sea exacta ? ¿Es una condición suficiente ? Determinar una función f que cumpla la condición anterior.
3. Determinar una primitiva de α en $\mathbb{R}^2$.
4. Sea Γ el círculo de radio R y de centro $(0; 0)$. Calcular $\int_\Gamma \alpha$.

Ejercicio 6

Calcular la integral de linea de $\omega = x^2\, dx - xy\, dy$ en las curvas siguientes

1. el segmento $C_1 = [OB]$ con $O(0;0)$ y $B(1;1)$.
2. el arco de parábola $C_2 : x = y^2;\ 0 \leq x \leq 1$ orientado en el sentido que x tome valores crecientes.
   ¿Que se puede deducir respeto a la forma diferencial ω?
   Encontrar este resultado usando otro método.

Ejercicio 7

Se considera Γ el arco de la hélice orientado por :

$$x = R\cos(t),\ y = R\sin(t),\ z = ht$$

para $t \in [0; 2\pi]$. Calcular :

$$I = \int_{\Gamma} (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz.$$

Ejercicio 8

Calcular la integral de linea $\int_{\Gamma} y^2\, dx + x^2\, dy$ cuando Γ es la curva de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} - 2\frac{y}{b} = 0$ orientada en el sentido trigonométrico positivo.

Ejercicio 9

Calcular $\int_C \omega$ donde ω es la forma diferencial definida por :

$$\omega = \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}$$

y C es el cuadrado orientado con vértices consecutivos $A(a;a), B(-a;a), C(-a;-a)$ y $D(a;-a)$. Deducir que la forma diferencial no es exacta.

Ejercicio 10

Calcular la integral de linea de $\omega = y\, dx + 2x\, dy$ sobre el borde del dominio definido por :

$$x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \text{ y } x^2 + y^2 - 2y \leq 0$$

descrito una vez en el sentido directo.

Ejercicio 11

Calcular la integral de linea de $\omega = (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$ en la semi-cardoide C de ecuación polar $\rho = a(1 + \cos(\theta))$ con $a > 0$ fijo y $\theta \in [0, \pi]$.

"La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques." [Blaise Pascal (1623-1662)].