Movimiento relativo: el tiro

1 Introducción

Podemos considerar que el tiro parabólico ha sido siempre uno de los problemas típicos de la cinemática. Es fácil visualizarlo en la vida cotidiana, como por ejemplo en la trayectoria de un balón. El tiro parabólico es una primera aproximación, al movimiento que un objeto que cruza la atmósfera si ningún sistema de propulsión o sustentación.

Dentro de esta definición entran los proyectiles de artillería clásicos. Hace poco más de un siglo, se desarrollaron cañones que tenían alcances de una o dos decenas de kilómetros. Esto comportó el problema de como apuntarlos.

El problema no era sencillo, se tenía que tener en cuenta múltiples factores, tanto en el alcance (velocidad inicial, desgaste del cañón, temperatura, densidad del aire, viento, curvatura de la Tierra, rotación de la Tierra...) como en la deriva (autogiro del proyectil, viento, rotación de la Tierra,...) del proyectil. Para intentar resolver este problema, se utilizaron lo que podríamos llamar como computadoras mecánicas. A pesar de ello, La complejidad era tal, que en general la única forma de saber dónde caería un proyectil era disparándolo. A partir del punto observado de caida se introducciían correcciones. De hecho, el procedimiento se consideraba ideal, si a la tercera salva se "centraba el blanco" [1]

Uno de esos factores que tuvieron que preocuparse era la rotación de la Tierra. En esta práctica vamos a intentar analizar cuál es su efecto sobre un tiro parabólico puro, con velocidades similares a aquellos proyectiles[2] .

2 Tiro sistemas de referencia en rotación relativa

Al disparar a grandes distancias el movimiento de rotación de la Tierra se ha de tener en cuenta.

Partimos de un sistema de referencia que rota con la Tierra y otro fijo (que denotaremos por '). Estos dos sistemas de referencia comparten origen, siendo su eje zeta coincidente con el eje de rotación de la Tierra.

Partiendo del caso general

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{r} \times \vec{\alpha} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \omega + 2\vec{v} \times \vec{\omega} \tag{1}$$

donde el término $(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \omega$ es llamado centrípeto y $2\vec{v} \times \vec{\omega}$ es la llamada fuerza de Coriolis.

Para el caso terrestre, donde la rotación no sufre alteraciones ($\alpha = 0$) y donde $\vec{a'} = \vec{g}$ queda reducida a

[1] Es decir, los proyectiles caían alrededor del blanco.
[2] En el programa se omite los efectos de la curvatura del planeta.

$$\vec{a} = \vec{g} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \omega + 2\vec{v} \times \vec{\omega} \tag{2}$$

El término centrípeto solo depende de la latitud ϕ quedando [3]

$$/(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \omega/ = 0.3373 \cdot \cos(\phi) \tag{3}$$

dentro del plano definido por el vector velocidad angular del planeta y el vector posición del punto, es por tanto, perpendicular al vector velocidad angular.

Para poder trabajar, hemos definido en el sistema de referencia local, el eje x mirando al sur, el eje y al este y z el vertical. Debemos dar 2 ángulo el de alzada (ángulo sobre la horizontal) y el de orientación (plano XY).

El término de Coriolis se ha de calcular en cada momento. En este sistema de referencia la velocidad angular es

$$\vec{\omega} = (\omega_x, 0, \omega_y) = \omega(-\cos(\phi), 0, \sin(\phi)) \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ -\omega_x & 0 & \omega_z \end{vmatrix} \tag{5}$$

3 Cuestiones

1) La aceleración se ha modificado con dos términos, fuerza centrípeta y fuerza de Coriolis. Utilizando el programa tiro10.py y un poco "a mano" puedes indicar cuál de ellas es más importantes. ¿Sucede lo mismo con proyectiles de alta velocidad ($v > 700$ m/s) y de baja ($v < 350$ m/s).(Prueba a anular una u otra y ver cómo sería el movimiento y los errores.)

2) El programa tiro20.py nos permite hacer un estudio direccional del lanzamiento. ¿La dirección afecta al error del tiro? Intenta razonar cuál es el origen de esta diferencia si la hay o si no la hay porqué no se debería producir.

3) Con el progrma tiro20.py, prueba a modificar la latitud y analiza cómo afecta. Si nos desplazamos al hemisferio Sur (latitudes negativas) se observa algún cambio en las curvas.

4) Con el programa tiro30.py vamos a intentar emular a los artilleros de hace un siglo encontrando una solución de tiro: Entrando un valor concreto de ángulos definimos un tiro parabólico puro. Suponiendo que el punto de impacto es nuestro blaco, utilizando las variables correalz y correpla modifica los ángulos de lanzamiento para que el tiro real caiga lo más cerca posible de la posición predicha por el tiro parabólico. Para ser más realistas, se ha introducido el rozamiento [4]. Si se decide no anular el rozamiento, se recomienda no dar valores superiores a unos 20º al ángulo de alzamiento.

[3] Tomando la velocidad angular de la Tierra $\pi/43200$ rad/s y el radio de la Tierra por 6378 km.

[4] El valor dado es compatible con los datos balísticos de la pieza 30.5 cm SK L/50