Grado en Física. Mecánica Analítica. Problemas Tema 4: Transformaciones canónicas.

Curso 2023-2024

1. En un sistema hamiltoniano con un grado de libertad se realiza una *transformación de escala* $Q = \alpha\, q$, $P = \beta\, p$, donde α y β son constantes. Obtener las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables y la nueva hamiltoniana. ¿Y si además cambiamos t por $T = \gamma\, t$, con γ constante?

2. Probar que la transformación $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$ dada por $Q = q\, t$, $P = p\, t$ no es canónica, usando como hamiltoniana, H, la correspondiente al oscilador armónico.

3. Probar que la transformación afín

$$\begin{aligned} Q &= a_{11}\, q + a_{12}\, p \\ P &= a_{21}\, q + a_{22}\, p, \end{aligned}$$

donde $\det(a_{ij})$=1, es una transformación canónica de valencia unidad. ¿Bajo qué condiciones podemos encontrar funciones generatrices de los diferentes tipos? Obtenerlas en los casos posibles. Comprobar que podemos cambiar el tipo de función generatriz mediante la transformada de Legendre.

4. Demostrar que las siguientes transformaciones son canónicas y obtener, si es posible, funciones generatrices de tipo F_1 y F_2.

   (a)

$$\begin{aligned} Q &= q^2/2 + (p/q)^2 \\ P &= p/q \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} Q &= q^2 + p \\ P &= -q \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} Q &= q\, t \\ P &= p/t - 3q^2\, t^3 \end{aligned}$$

5. Un oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω tiene como hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\,\omega^2}{2} q^2.$$

Considera la transformación canónica generada por la función

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m\,\omega\, q^2\, \cot(Q + \omega\, t).$$

Obtén la nueva hamiltoniana, resuelve las ecuaciones de Hamilton y, deshaciendo la transformación, obtén q y p en función del tiempo.

6. Para un oscilador armónico unidimensional la posición x y el momento p en función del tiempo vienen dados por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega\, t) + (p_0/m\omega) \sin(\omega\, t) \\ p(t) &= -m\, \omega\, x_0 \sin(\omega\, t) + p_0 \cos(\omega\, t) \end{aligned}$$

donde x_0 y p_0 son, respectivamente, la posición y el momento en el instante $t = 0$. Demostrar que la transformación $(x, p) \longrightarrow (x_0, p_0)$ es canónica para cualquier t. Obtener la función generatriz de tipo F_1, comprobando que la nueva hamiltoniana es nula.

7. Toda variable dinámica, $f(\vec{r}, \vec{p})$, del espacio fásico de una partícula que presente simetría esférica en el espacio fásico sólo puede ser función de los escalares $\vec{r}\cdot\vec{r}$, $\vec{r}\cdot\vec{p}$, $\vec{p}\cdot\vec{p}$. Justifica que el corchete de Poisson de cualquier función f, que cumpla esta condición, con cualquiera de las componentes del momento angular de la partícula, ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z, es cero. Si la función f fuera la hamiltoniana, ¿qué conclusión obtendrías?

8. Considera un sistema hamltoniano y G una variable dinámica que no depende explícitamente del tiempo. Si el corchete de Poisson de G con la hamiltoniana H es igual a la derivada total respecto al tiempo de una función $\Lambda(\underline{q}, \underline{p}, t)$,

$$[G, H] = \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t},$$

¿qué constante de movimiento se obtiene?

Basandote en este resultado, considera una partícula de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza que deriva del potencial

$$U(\vec{r}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}.$$

Obtén $[\vec{r}\cdot\vec{p}, H]$ y, a partir de este resultado, encuentra una constante del movimiento.

9. En el instante $t_0 = 0$ un gran número de partículas de masa m ocupan el segmento del eje x comprendido entre $x_0 = 0$ y $x = x_0 + \Delta x$, con momentos $p_x \in [p_0, p_0 + \Delta p]$. Representar en el espacio fásico x, p_x la región ocupada por las partículas. Si éstas se mueven libremente, representar en el espacio fásico la región ocupada en un instante $t_1 > m\,\Delta x/p_0$. Obtén el área en el espacio fásico ocupado por las partículas en los instantes t_0 y t_1, comprobando que son iguales. Interpreta el resultado.