Examen Final de Mecánica Analítica (puntuación corregida).

11 de junio de 2024

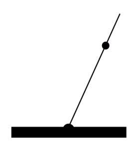
1. [**2 puntos**] Obtén la lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange de los siguientes sistemas eligiendo las coordenadas generalizadas más adecuadas.

   (a) Partícula de masa m ensartada en una varilla de masa M y longitud ℓ con un extremo fijo. La varilla se mueve en un plano vertical y actúa la gravedad de intensidad g.

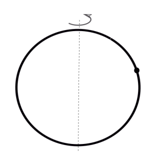
   (b) Partícula de masa m ensartada en aro de masa M y radio R que puede girar alrededor de un eje vertical fijo.

   (c) Dos partículas de igual masa m que pueden moverse en un plano horizontal unidas mediante un muelle de constante elástica k y longitud de equilibrio ℓ_0. Elige las coordenadas de manera que tres de ellas sean cíclicas.

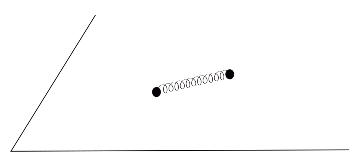
   (d) Dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas mediante una cuerda que pasa por una polea de masa despreciable actuando sobre ellas la gravedad g.



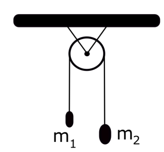
(a)



(b)



(c)



(d)

2. [**2 puntos**] La lagrangiana de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético es

$$L = \frac{1}{2} m\, \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - e\,\phi + e\,\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}.$$

Considera el caso en que la partícula se mueve en el plano x-y y $\phi = -\frac{E}{\sqrt{2}}(x+y)$, $\vec{A} = (-\frac{B}{2}\,y, \frac{B}{2}\,x, 0)$, donde E y B son constantes.

   (a) Obtén la lagrangiana para este caso y las ecuaciones de Lagrange.

   (b) Obtén los momentos canónicos y la hamiltoniana. ¿Se conservan?

   (c) Considera la transformación infinitesimal $x \longrightarrow x + \epsilon$, $y \longrightarrow y - \epsilon$ y obtén, a partir de ella, una constante de movimiento. Comprueba que es compatible con las ecuaciones de Lagrange.

   (d) Para el caso $E = 0$, y considerando la rotación infinitesimal

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x + \epsilon\, y \\ y &\longrightarrow -\epsilon\, x + y \\ \dot{x} &\longrightarrow \dot{x} + \epsilon\, \dot{y} \\ \dot{y} &\longrightarrow -\epsilon\, \dot{x} + \dot{y} \end{aligned}$$

   aplica el teorema de Noether y obtén la cantidad conservada asociada, comprobando que es compatible con las ecuaciones de Lagrange.

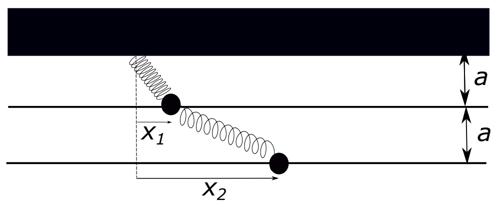
3. [**2 puntos**] Las dos partículas de la figura tienen la misma masa m y pueden deslizar sin rozamiento por las rectas paralelas. El muelle sujeto a una de las partículas tiene un extremo fijo que dista a de una de las rectas y la distancia entre las rectas es también a. Los muelles tienen una constante elástica k y longitud natural de equilibrio $\ell_0 = 0$. Usando las coordenadas indicadas, x_1 y x_2,

   (a) Obtén la lagrangiana del sistema y, a partir de la expresión de la energía potencial, obtén las coordenadas x_1 y x_2 para que el sistema esté en equilibrio.

   (b) Obtén las frecuencias propias de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.

   (c) Obtén los modos normales (sin normalizar) y dibuja esquemáticamente cómo se moverían las partículas en cada modo.

   (d) Estando el sistema en la posición de equilibrio en $t = 0$, le comunicamos a la partícula que está abajo una velocidad inicial v, ¿qué velocidad inicial le tendríamos que comunicar a la otra partícula para excitar sólo el modo de mayor frecuencia. Obtén, en ese caso, el movimiento $x_1(t)$.



4. [**2 puntos**] Un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad tiene la siguiente hamiltoniana
$$H = q_2^4(p_1 + p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2.$$

   (a) Obtén una función generatriz de tipo F_1 que genere una transformación canónica de las variables (q_1, q_2, p_1, p_2) a las variables (Q_1, Q_2, P_1, P_2) de manera que los nuevos momentos sean
$$P_1 = q_1 - q_2, \quad P_2 = 1/q_2,$$
   y la nueva hamiltoniana
$$K = P_1^2 + Q_2^2.$$

   (b) Resuelve las ecuaciones de Hamilton para esta nueva hamiltoniana.

   (c) Usa el resultado anterior para obtener $q_1(t)$, $q_2(t)$, $p_1(t)$ y $p_2(t)$ con las condiciones iniciales $q_1(0) = q_{10}$, $q_2(0) = q_{20}$, $p_1(0) = p_{10}$, $p_2(0) = p_{20}$.

5. [**2 puntos**] Una partícula de masa m se mueve en el plano x-y bajo la acción de la fuerza de la gravedad $\vec{F} = -m\,g\,\vec{e}_y$.

   (a) Escribe la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente.

   (b) Obtén una solución completa para la función principal de Hamilton.

   (c) A partir de ella obtén el movimiento de la partícula, $x(t)$, $y(t)$.