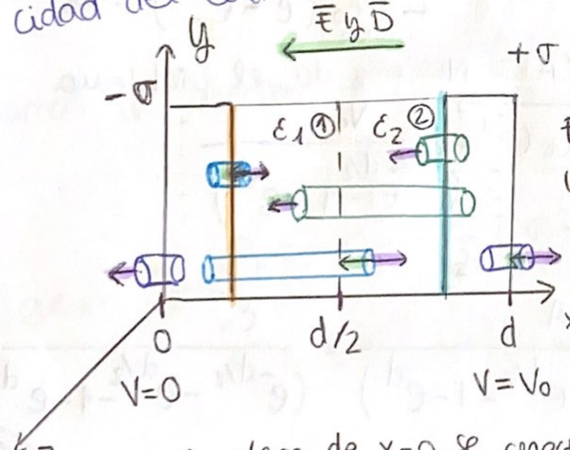
REPETICIÓN FINAL 22-23

1) Condensador de placas plano-paralelas cuyas superficies perpendiculares al eje x, tienen un valor S y están separadas entre sí una distancia d, siendo $d << S$. Entre ambas placas se establece una diferencia de potencial V_0. La placa situada en $x = 0$ se conecta a tierra. Entre ambas placas hay un material dieléctrico lineal, isotrópico e inhomogéneo, cuya permitividad dieléctrica absoluta viene dada por: [siendo ε_0 la permitividad dieléctrica del vacío.]

$0 < x < d/2 : \varepsilon_1 = \varepsilon_0 e^{x}$

$d/2 < x < d : \varepsilon_2 = \varepsilon_0 e^{-x}$

a) Utilizando Gauss calcular $\bar{E}$ y $\bar{D}$. Calcula también la capacidad del condensador. $\bar{n}$



Por el teorema de Gauss:

$$\int D\, da = Q_{f,enc} \rightarrow Q_f = \sigma \cdot A$$

Escogemos como superficie Gaussiana un cilindro de la longitud que nos interese. Pero como sabemos que el campo $\bar{D}$ va en el eje x tendremos

$$\int_{\text{cuerpo del cilindro}} D(-\bar{i}) \cdot da(\cdot \bar{j}) = 0$$

$$\int_{\text{tapas}} D(-\bar{i}) \cdot da(\pm \bar{i}) = \pm 1$$

como la placa de x=0 se conecta a tierra, ésta tiene V=0, y como el campo se desplaza hacia potenciales decrecientes, y de ⊕ a ⊖, la placa en x=0 es la cargada negativa.

por tanto solo tenemos en cuenta las tapas para calcular $\bar{D}$.

① $0 < x < d/2$

$$\int (-D\bar{i} \cdot \overset{\bar{n}}{+\bar{i}})\, da = \frac{-\sigma}{2} A \rightarrow -DA = \frac{-\sigma}{2} A \rightarrow D = \frac{\sigma}{2}$$

$$\int (-D\bar{i} \cdot -\bar{i})\, da = \frac{+\sigma}{2} A \rightarrow DA = \frac{\sigma}{2} A \rightarrow D = \frac{\sigma}{2}$$

$$\rightarrow D = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sigma = \sigma \rightarrow \text{vectorizamos } D = -\sigma\bar{i}$$

(igual)

② $d/2 < x < 0$

$$\int (-D\bar{i} \cdot +\bar{i})\, da = \frac{-\sigma}{2} A \rightarrow -DA = \frac{-\sigma}{2} A \rightarrow D = \frac{\sigma}{2}$$

$$\int (-D\bar{i} \cdot -\bar{i})\, da = \frac{+\sigma}{2} A \rightarrow DA = \frac{\sigma}{2} A \rightarrow D = \frac{\sigma}{2}$$

$$\rightarrow D = \sigma \rightarrow \text{vectorizamos } D = -\sigma\bar{i}$$

De esta forma hemos tenido en cuenta la contribución de cada placa en cada región ① y ②.

Calculamos $\bar{E} = \frac{1}{\varepsilon} D$

① $0 < x < \frac{d}{2}$ $\quad \bar{E} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_1} \bar{\imath} = -\sigma \frac{1}{\varepsilon_0} e^{-x} \bar{\imath}$

② $\frac{d}{2} < x < d$ $\quad \bar{E} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_2} \bar{\imath} = -\sigma \frac{1}{\varepsilon_0} e^{x} \bar{\imath}$

Ahora vamos a calcular la capacidad del condensador.

de 1 placa

$$C = \frac{Q_{total}}{\Delta V} \qquad Q_{total} = \sigma \cdot A$$

Sabemos que $\bar{E} = -\nabla\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{k}\right)$

$$\bar{E}\bar{\imath} = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{\imath} \to \phi = -\int_{x_1}^{x_2} \bar{E}\, dx$$

$$\phi = \int_0^d -E\,dx = \int_0^{d/2} -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} e^{-x} dx + \int_{d/2}^{d} -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} e^{x} dx = +\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(e^{-d/2} - 1\right) + -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(e^{d} - e^{d/2}\right) = V_0$$

vamos a despejar σ, que es lo que NO nos da el problema

$$\sigma\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\left(e^{-d/2} - 1 - e^{d} + e^{d/2}\right)\right] = V_0 \to \sigma = \frac{V_0}{\left(e^{-d/2} - e^{d/2} - 1 - e^{d}\right)}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma \cdot A}{V_0} = \frac{\sigma \cdot A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(e^{-d/2} - e^{d/2} - 1 - e^{d}\right)} = \frac{\varepsilon_0}{\left(e^{-d/2} - e^{d/2} - 1 - e^{d}\right)}$$

b) Calcular el vector polarización para todo punto del espacio situado entre las placas, así como las densidades de carga ligada existentes en el dieléctrico.

Tenemos $\bar{E}$ y $\bar{D}$ así que podemos sacar $\bar{P}$ con la relación:

$$\bar{P}_1 = \bar{D} - \varepsilon_0\bar{E} = -\sigma\bar{\imath} - \cancel{\varepsilon_0}\left(-\sigma \frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}} e^{-x}\right) = \sigma\left(\frac{1}{e^{x}} - 1\right)\bar{\imath}$$

donde

$$\bar{P}_2 = \bar{D} - \varepsilon_0\bar{E} = -\sigma\bar{\imath} - \cancel{\varepsilon_0}\left(-\sigma \frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}} e^{+x}\right) = \sigma\left(e^{x} - 1\right)\bar{\imath}$$

$$\left[\sigma = \frac{V_0}{\left(e^{-d/2} - e^{d/2} - 1 - e^{d}\right)}\right]$$

densidades de carga ligada en el dieléctrico:

sabemos que hay densidad de carga volumétrica libre porque

$\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ varían con la x. Además sabemos que por ser lineal si hay ρ_f → entonces hay ρ_b, y porque el vector polarización depende de x, eso también puede hacernos intuirlo

en homogéneos → $\bar{P} = \underbrace{x_e \mathcal{E}_0}_{\mathcal{E}=cte} \bar{E}$, ahora tenemos $\mathcal{E}(x)$ pero →

→ $\mathcal{E}(x) = x_e \mathcal{E}_0$ → ① $\mathcal{E}_0 e^x = x_e \mathcal{E}_0 \rightarrow x_e = e^x$

→ ② $\mathcal{E}_0 e^{-x} = x_e \mathcal{E}_0 \rightarrow x_e = e^{-x}$

$\bar{P} = x_e \mathcal{E}_0 \bar{E}$

$(K_e = 1 + x_e)$

$(\mathcal{E}_0 = K_e \mathcal{E}_0)$

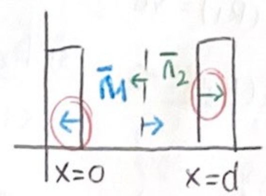
↓

$\boxed{\rho_b = -\frac{(K_e - 1)}{K_e} \rho_f}$

por tanto definitivamente sí, como hay $\rho_f \rightarrow \rho_b$

vamos a calcular $\rho_b = -\overset{\text{gradiente}}{\nabla} \cdot P$ // ~~① $0<x<d/2$~~

$\sigma_b = \bar{P} \cdot \bar{n}$ → vector normal al dieléctrico



① $0 < x < \frac{d}{2}$

• $\rho_b = -\nabla \bar{P} = \frac{-\partial}{\partial x}(\sigma(e^{-x} - 1)) = \sigma e^{-x}$

• $\sigma_b = \sigma\left(\frac{1}{e^x} - 1\right)\bar{i} \cdot -\bar{i} = -\sigma(\cancel{1} - 1) = 0$

↓ x=0

② $\frac{d}{2} < x < d$

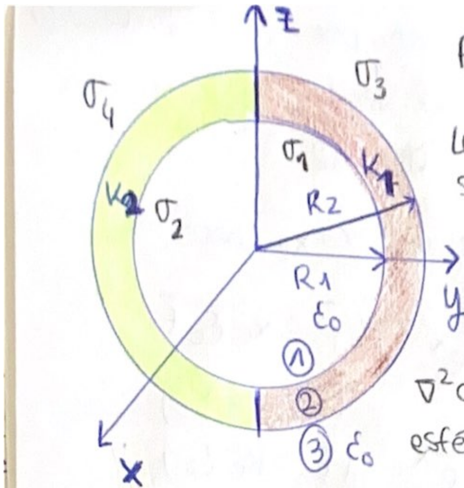
• $\rho_b = -\nabla \bar{P} = \frac{-\partial}{\partial x}(\sigma(e^x - 1)) = -\sigma e^{-x}$

• $\sigma_b = \sigma(e^x - 1)\bar{i} \cdot \bar{i} = \sigma(e^d - 1)$

↓ x=d

② Sean dos esferas de material conductor de radios R_1 y R_2 separados por dos dieléctricos IHL de constantes dieléctricas relativas K_1 y K_2 respectivamente, cuya superficie de contacto es un plano ecuatorial, tal como se indica en la figura. Entre las esferas conductoras se establece una diferencia de potencial V_0, conectándose la esfera exterior a tierra.

ⓐ Resolviendo la ecuación de Poisson o Laplace, según corresponda, determina el potencial en todos los puntos del espacio.



Poisson $\rightarrow \nabla^2\phi = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ Laplace $\rightarrow \nabla^2\phi = 0$ (4)

Las esferas no tienen carga libre por tanto solo hay carga ligada, tenemos que hacer Laplace entre los conductores y fuera de ellos

IHL $\rightarrow \left[\nabla^2\phi = \dfrac{\rho_f}{\varepsilon}\right]$ $\rho_f = 0 \rightarrow \nabla^2\phi = 0$

$$\nabla^2\phi \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0 \rightarrow r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} = C_1 \rightarrow \phi = \frac{-C_1}{r} + C_2$$

esféricos

En las regiones en las que no hay diferencia de potencial no hay campo eléctrico, sabemos que el potencial es constante.

$\boxed{\varepsilon = K_e\varepsilon_0}$

① $\phi_1(r) = \cancel{\dfrac{-C_1}{r}}^{\,0} + C_2$ porque $\dfrac{C_1}{0} = \infty$, entonces ϕ_1 no estaría definido, el potencial fuera del condensador es constante, por tanto no puede depender de r.

$0 < r < R_1$

por el enunciado

② $\phi_2(r) = \dfrac{-C_3}{r} + C_4$

$R_1 < r < R_2$

$\phi(R_1) = V_0$

$\phi(R_2) = 0$

③ $\phi_3(r) = \cancel{\dfrac{-C_5}{r}}^{\,0} + C_6$

$R_2 < r$

Aplicamos condiciones de interfase

① $\phi_1(R_1) = V_0 = C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = V_0}$

② $\phi_2(R_1) = \dfrac{-C_3}{R_1} + C_4 = V_0 \rightarrow C_4 = V_0 + \dfrac{C_3}{R_1}$

$\phi_2(R_2) = \dfrac{-C_3}{R_2} + C_4 = 0 \rightarrow C_3\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) + V_0 = 0$

③ $\phi_3(R_2) = C_6 = 0 \rightarrow \boxed{C_6 = 0}$

$$C_3 = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)} \; ; \; C_4 = V_0 + \frac{1}{R_1}\frac{V_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)} = V_0\left(1 + \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} - 1}\right) = V_0\left(\frac{\frac{R_1}{R_2} - 1 + 1}{\frac{R_1}{R_2} - 1}\right)$$

$$= V_0\left(\frac{\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right)}\right) = \frac{V_0}{\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

nos queda:

$$\begin{cases} ①\ \phi_1(r) = V_0\,[V] \\ ②\ \phi_2(r) = \dfrac{-V_0}{r\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)} + \dfrac{V_0}{\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)}\,[V] \\ ③\ \phi_3(r) = 0\,[V] \end{cases}$$

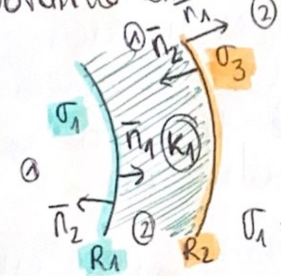
(b) Determina las densidades de carga de las esferas conductoras así como la carga de cada una de ellas. (5)

Debido a la disposición de los materiales IHL las densidades de carga superficiales en los conductores no serán las mismas, vamos a calcularlas con las condiciones de contorno.

$\bar{n}(\varepsilon_2 \bar{E}_2 - \varepsilon_1 \bar{E}_1) = \sigma_f$ en primer lugar $\bar{E} = -\nabla\phi$, a partir del potencial obtenido en cada región en el apartado anterior

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = 0 \\ \bar{E}_2 = \dfrac{V_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) r^2}\bar{r} \\ \bar{E}_3 = 0 \end{cases}$$

$\varepsilon = K_e \varepsilon_0$

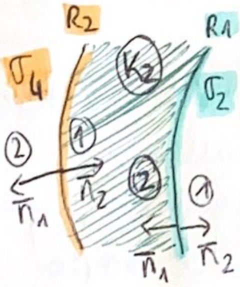


$$K_1\varepsilon_0 \cdot \frac{V_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) R_1^2} + \hat{r} - \cancel{\varepsilon_0 \cdot 0} = \sigma_1$$

$$\sigma_1 = \frac{K_1 \varepsilon_0 V_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) R_1^2} \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$\cancel{\varepsilon_0 0} \cdot -\hat{r} - \frac{V_0 K_1 \varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) R_2^2} + \hat{r} = \sigma_3$$

$$\sigma_3 = \frac{-K_1 \varepsilon_0 V_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) R_2^2} \left[\frac{C}{m^2}\right]$$



$$K_2\varepsilon_0 \frac{V_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) R_1^2} \cdot + \hat{r} - \cancel{\varepsilon_0 0} \cdot -\hat{r} = \sigma_2 \rightarrow \sigma_2 = \frac{+K_2 \varepsilon_0 V_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) R_1^2}$$

$$\varepsilon_0 \cdot 0 \cdot + \hat{r} - K_2\varepsilon_0 \frac{V_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) R_2^2}(-\hat{r}) = \sigma_4 \rightarrow \sigma_4 = \frac{-K_2 \varepsilon_0 V_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) R_2^2}$$

placa interior $\sigma_{int} = \sigma_1 + \sigma_2 = +\left(\dfrac{V_0 \varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}\left[\dfrac{K_1}{R_1^2} + \dfrac{K_2}{R_2^2}\right]\right)$

placa exterior $\sigma_{ext} = -\left(\dfrac{V_0 \varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}\left[\dfrac{K_1}{R_1^2} + \dfrac{K_2}{R_2^2}\right]\right)$

CARGA TOTAL

$\sigma = \dfrac{Q}{A} \rightarrow Q_T = \sigma \cdot A$

$A_{circunf} = \pi r^2$

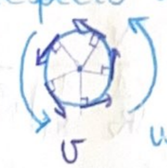
$$Q_{int} = \frac{+\pi V_0 \varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}\left[K_1 + K_2 \frac{R_1^2}{R_2^2}\right] [C] \qquad Q_{ext} = \frac{-\pi V_0 \varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}\left[K_1 \frac{R_2^2}{R_1^2} + K_2\right] [C]$$

3 Una esfera de radio R contiene una carga total Q distribuida homogéneamente en su volumen. La esfera está girando en torno a uno de sus diámetros con velocidad angular constante w. Suponiendo que la distribución de carga no se ve afectada por la rotación.

a) calcular el momento dipolar magnético de la esfera.

$\boxed{\text{Teoría}}$ $I = q \cdot \vec{v}$ → velocidad lineal

al tener una velocidad angular $w\hat{z}$, v es tangente al movimiento de rot respecto a z, va en dirección y sentido $+\varphi$, visto desde arriba:



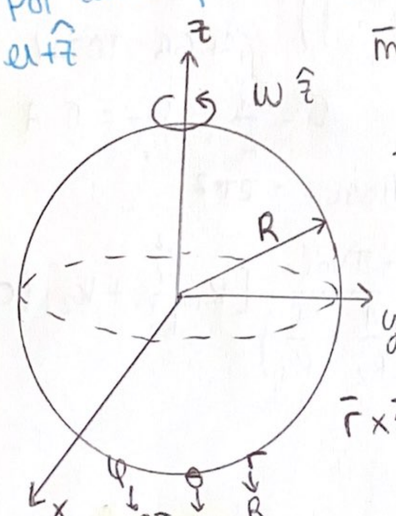
por tanto I generada tiene dirección y sentido $+\hat{\varphi}$

Queremos calcular $\vec{m}$, el momento dipolar magnético que es análogo al "dipolo" en el campo eléctrico, para entender mejor este concepto nos imaginamos un conjunto de espiras rodeando la esfera, es decir:

vector?

Magnetismo de espiras (similar a nuestra esfera con corriente en $+\hat{\varphi}$), $\bar{m}$ representa el momento magnético resultante de un bucle de corriente. Determina la orientación e intensidad del campo magnético generado por la distribución de corriente.

Por tanto por la regla de la mano derecha, si $\bar{I}$ va en $+\hat{\varphi}$, m va en $+\hat{z}$



$$\bar{m} = \frac{1}{2}\int_V \bar{r} \times \bar{J}(\bar{r})\,dv \qquad \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$J(\bar{r}) = \rho \bar{v} = \frac{3Qwr}{4\pi R^3}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\bar{v} = w\hat{z} \times r\hat{r} = w(\cos\theta\,\hat{r} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\theta}) \times r\hat{r} = $$
$$= wr\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\bar{r} \times \bar{J}(\bar{r}) = r\hat{r} \times \frac{3Qwr}{4\pi R^3}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\varphi} = \frac{-3wr^2Q}{4\pi R^3}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\theta}$$

$$\bar{m} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{-3wr^2Q\hat{\theta}}{4\pi R^3}\,r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr = \frac{1}{2}\,\frac{-3wQ}{4\pi R^3}\int_0^R r^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\theta \; d\theta$$

$dv_{est} = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$

como $\bar{m}$ por el sentido de la mano derecha va en dirección $\hat{z}$, nos quedamos con la componente $\hat{z}$, pero no hace falta suponerlo, al hacer la integral vamos a ver que $\hat{x}$ e $\hat{y}$ se van. Descomponemos $\hat{\theta}$ en cartesianas porque la integral integra respecto al eje θ, $(d\theta)$ entonces la única forma de integrar $\hat{\theta}\, d\theta$ es descomponiéndolo a cartesianas. $\boxed{\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{y} - \text{sen}\,\theta\,\hat{z}}$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{-3\omega r^4 Q}{4\pi R^3}\left(\cos\theta\,\text{sen}^2\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{y} - \text{sen}^3\theta\,\hat{z}\right) d\theta\, dr\, d\varphi =$$

- $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta\,\text{sen}^2\theta\cos\varphi\,\hat{x}\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi} \cos\theta\,\text{sen}^2\theta\,\left[\overset{0}{\cancel{\text{sen}\,\varphi}}\right]_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{\pi} 0\, d\theta = 0\,\hat{x}$$

- $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{y}\, d\theta\, d\varphi = \int \cos\theta\,\text{sen}^2\theta\left[\overset{0}{\cancel{-\cos\varphi}}\right]_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{\pi} 0\, d\theta = 0\,\hat{y}$$

$$-\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$

- $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\text{sen}^3\theta\,\hat{z}\, d\theta\, d\varphi = -2\pi\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\,(1-\cos^2\theta)\, d\theta = -2\pi\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\theta - \cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$= -2\pi\left(\overset{2}{\left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi}} + \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi}\right) = -2\pi\left[2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{4}{3}(-2\pi)$$

$$\boxed{2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}} \qquad \cos^3(2\pi) - \cos^3(0) = -1 - 1 = -2$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{-3\omega Q}{\cancel{4\pi} R^{\cancel{3}}}\,\frac{R^{\cancel{5}\,2}}{5}\,\frac{-\cancel{4\pi}}{\cancel{3}}\,\cancel{2} = \frac{+Q\omega R^2}{5}\,\hat{z} \checkmark$$

b) Determinar el potencial vector A en puntos muy alejados de la esfera (se sugiere utilizar la aproximación dipolar) y la inducción magnética B.

$$\bar{m} = \frac{+Q\omega R^2}{5}\,\hat{z} \qquad A_D(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\bar{m}\times r}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\bar{m}\times\bar{r}}{r^2}$$

$$\bar{r} = r\hat{r} \qquad (\hat{z}\times\hat{r}) = (\cos\theta\,\hat{r} - \text{sen}\,\theta\,\hat{\theta})\times\hat{r} = \text{sen}\,\theta\,\hat{\varphi}$$

↳ hacerlo en cartesianas

$$\hat{\theta}\times\hat{r} = -\hat{\varphi}$$

$$A_D(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\frac{1}{5} QWR^2 \cancel{r} \operatorname{sen}\theta}{r^{\cancel{3}}} \hat{\varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{QWR^2 \operatorname{sen}\theta}{5r^2} \hat{\varphi}$$

$$\overline{B} = \overline{\nabla} \times \overline{A} = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial (A_\varphi \operatorname{sen}\theta)}{\partial \theta} - \cancel{\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\cancel{\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}} + \right.$$

↓ esféricas

$$\left. - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\cancel{\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r}} - \cancel{\frac{\partial A_r}{\partial \theta}}\right)\hat{\varphi}$$

$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\hat{y} + -\operatorname{sen}\theta\,\hat{z}$

$\hat{r} = \frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y} + \frac{z}{r}\hat{z}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qwr^2 \operatorname{sen}\theta}{5r^{\cancel{2}}}\right)\hat{\theta} = \frac{-\mu_0}{4\pi}\frac{QwR^2 \operatorname{sen}\theta}{5r^3}\hat{\theta}$$

$$\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{QwR^2 \operatorname{sen}^2\theta}{5r^2}\right)\right)\hat{r} = \frac{1}{r\cancel{\operatorname{sen}\theta}}\,\cancel{2}\cancel{\operatorname{sen}\theta}\cdot\cos\theta\;\frac{\mu_0}{\underset{2}{\cancel{4}}\pi}\frac{QWR^2}{5r^2}\hat{r} =$$

$$= \frac{-\mu_0}{4\pi}\frac{QWR^2 \operatorname{sen}\theta}{5r^3}\overbrace{(\cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\hat{y} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{z})}^{\hat{\theta}} +$$

$$+ \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{QWR^2\cos\theta}{5r^3}\underbrace{\left(\frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y} + \frac{z}{r}\hat{z}\right)}_{\hat{r}}$$

me voy a pegar un tiro !!

momento magnético debido a un momento dipolar magnético

$$\overline{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3r(m\cdot r)}{r^5} - \frac{m}{r^3}\right]$$

$\overline{m} = (\overline{m}_x, \overline{m}_y, \overline{m}_z)$

↳ no sé aplicar

$$\overline{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

vamos a hacerlo en cartesianas porque es un punto muy alejado entonces podemos coger $\bar{r}$ como un punto "cualquiera"

$$\bar{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\bar{m} = \frac{Q\omega R^2}{5}\hat{z}$$

$$\bar{m}\times\bar{r} = -\frac{Q\omega R^2 x}{5}\hat{y} - \frac{Q\omega R^2 y}{5}\hat{x}$$

$$\hat{z}\times(x\hat{x}) = -x\hat{y}$$
$$\hat{z}\times(y\hat{y}) = -y\hat{x}$$

$$\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{z}$$

$$A_D(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\bar{m}\times r}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\bar{m}\times\bar{r}}{r^2} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(\frac{-Q\omega R^2 x}{5}\hat{y} - \frac{Q\omega R^2 y}{5}\hat{x}\right)$$

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A} = \left(\cancel{\frac{\partial A_z}{\partial y}} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial A_z}{\partial x}}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

tendríamos que derivar todo esto !!!