

EXAMEN FINAL: C2 8/Julio/2019

CUESTIONES

1. (2.5 puntos) Considera una esfera maciza de un material conductor de radio R_1 que está envuelta por una cáscara esférica (de grosor despreciable) del mismo material de radio R_3 (siendo $R_3 = 10 R_1$). Entre ambos conductores hay dos tipos de material aislante distinto: uno de constante dieléctrica $k = 1.5$, en la zona de $R_1 < r < R_2$ ($R_2 = 5 R_1$), siendo r la distancia desde un punto dado al centro de la esfera maciza; y otro de constante dieléctrica $k = 2$, en la zona de $R_2 < r < R_3$. Entre los dos materiales conductores se aplica una diferencia de potencial $V = \text{cte}$.

Sin necesidad de realizar cálculos, contesta a las siguientes preguntas, razonando como corresponda:

- a) Dibujar de forma esquemática cómo deben variar los módulos de los campos **E** y **D** en función de r , para todos los puntos del espacio.
- b) Razonar qué tipos de densidades de carga (libre y/o ligada; volumétrica y/o superficial) hay en los distintos puntos del espacio.

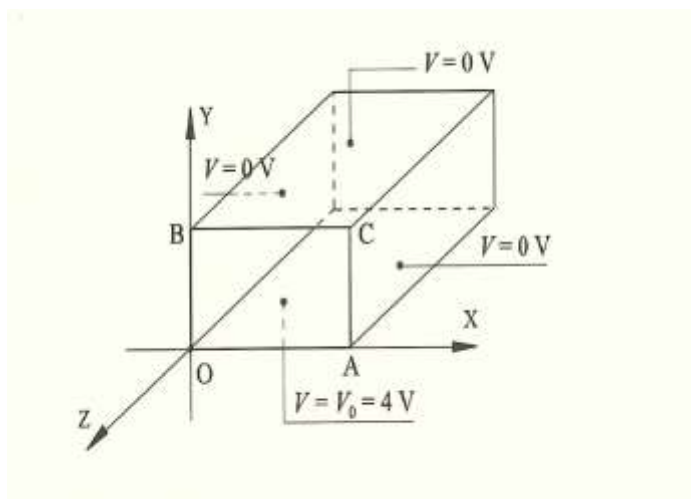
PROBLEMAS

Las magnitudes en **negrita** son vectoriales

1.(2.5 puntos) El espacio entre dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 posee una densidad de carga dada por la expresión $\rho = a / r^2$ ($a = \text{cte}$).

- Hallar la carga total, el potencial y el campo. Suponer un medio de permitividad la del vacío ϵ_0 .
- Verificar que se cumplen las condiciones de contorno para el potencial y el campo en las interfases

2. (2.5 puntos) Determinar, mediante la resolución de la ecuación de Laplace, el potencial en los puntos interiores de un recinto limitado por cuatro conductores planos constituyendo la guía de ondas de la Figura. Los conductores se consideran infinitos según la dirección z . Los conductores que ocupan la posición de los planos $x = 0$, $x = 3$ e $y = 2$, están a potencial nulo y el que ocupa la posición $y = 0$ está a un potencial de 4 V. Las coordenadas de los vértices de la sección transversal, perpendicular al eje z , que tiene forma rectangular, son en unidades del sistema internacional $O = (0,0)$, $A (3,0)$, $B(0,2)$ y $C(3,2)$ (ver figura).



3. (2.5 puntos)) Considera un sistema formado por un conductor cilíndrico muy largo con permeabilidad relativa μ_r y radio R_1 y de un solenoide recto también muy largo concéntrico con él. Considera que los ejes de ambos están a lo largo del eje z . El radio del solenoide es R_2 y su número de espiras por unidad de longitud n . Por el conductor circula una densidad de corriente homogénea $\mathbf{J} = J \mathbf{u}_z$ y por el solenoide una intensidad I .

Datos numéricos: $\mu_r = 30$; $R_1 = 1 \text{ cm}$; $R_2 = 3 \text{ cm}$; $n = 1000 \text{ m}^{-1}$; $J = 4000 \text{ A m}^{-2}$; $I = 1 \text{ A}$

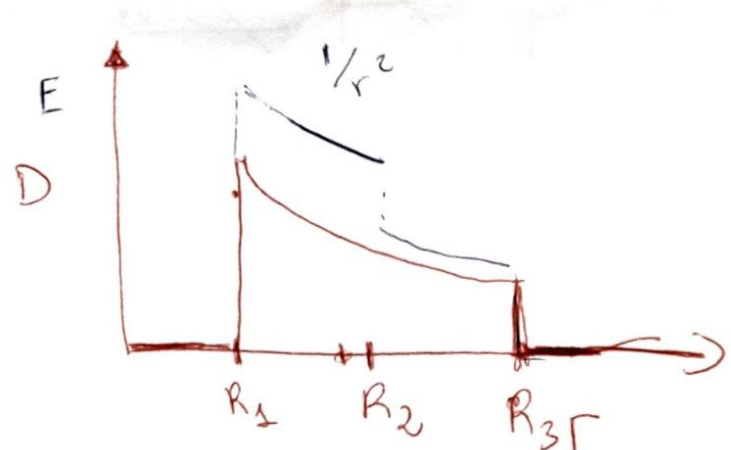
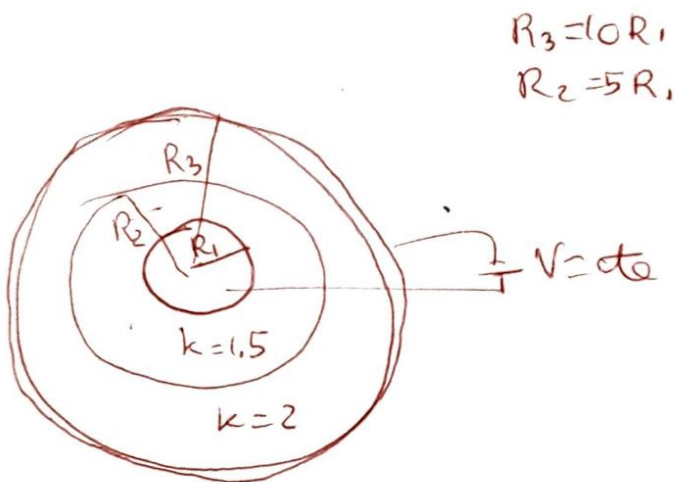
- Calcular el campo \mathbf{H} y la inducción magnética \mathbf{B} en todas las regiones del espacio.
- Dibujar las componentes no nulas de \mathbf{H} y \mathbf{B} en función de su distancia al eje del z .
- Verificar que se cumplen las condiciones de frontera para ambos campos en las distintas interfases.

CUESTIONES

1. (2.5 puntos) Considera una esfera maciza de un material conductor de radio R_1 que está envuelta por una cáscara esférica (de grosor despreciable) del mismo material de radio R_3 (siendo $R_3 = 10 R_1$). Entre ambos conductores hay dos tipos de material aislante distinto: uno de constante dieléctrica $k = 1.5$, en la zona de $R_1 < r < R_2$ ($R_2 = 5 R_1$), siendo r la distancia desde un punto dado al centro de la esfera maciza; y otro de constante dieléctrica $k = 2$, en la zona de $R_2 < r < R_3$. Entre los dos materiales conductores se aplica una diferencia de potencial $V = \text{cte.}$

Sin necesidad de realizar cálculos, contesta a las siguientes preguntas, razonando como corresponda:

- Dibujar de forma esquemática cómo deben variar los módulos de los campos \mathbf{E} y \mathbf{D} en función de r , para todos los puntos del espacio.
- Razonar qué tipos de densidades de carga (libre y/o ligada; volumétrica y/o superficial) hay en los distintos puntos del espacio.

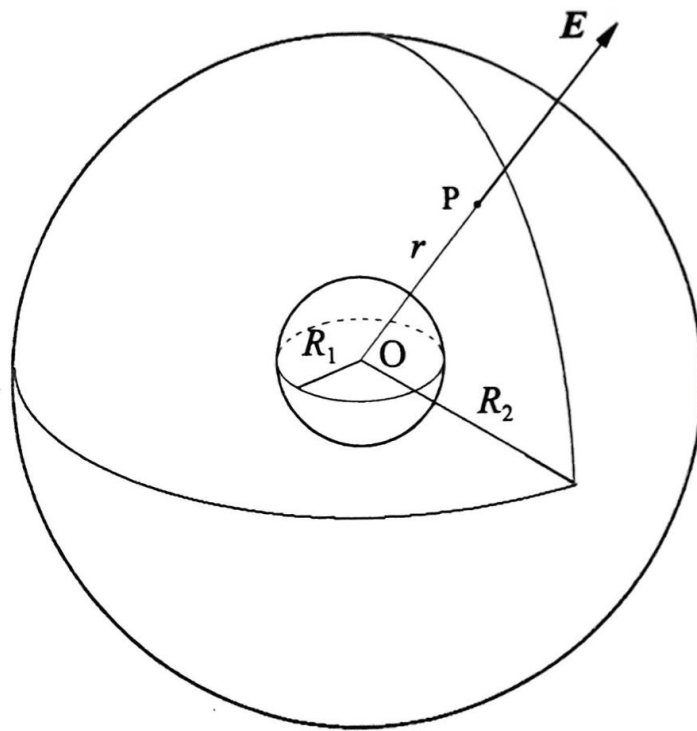


Cargas libres } Volumen \Rightarrow NO HAY
 } Sup \Rightarrow En sup del cond. interno en R_1
 " cond. externo en R_3

Cargas ligadas } Volumen \rightarrow En volumen de los 2 dieléctricos
 } Sup \rightarrow En interfaces

Esto es un resumen. Hay que justificar las respuestas con cond. cont. o con expresiones de dens. carga ligada a partir de \vec{P}

1 Solución:



1. Carga total Q de la distribución.

$$Q = \iiint_V \rho \cdot dV = \int_{R_1}^{R_2} \rho 4\pi r^2 \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \rho 4\pi r^2 \frac{a}{r^2} dr = 4\pi a(R_2 - R_1)$$

2. Campo eléctrico.

Como se ha hecho ya en numerosas ocasiones en distribuciones con simetría esférica, se aplica la ley de Gauss a esferas concéntricas con la dada. Llamando al vector de posición del punto P : $\vec{r} = r\vec{r}_0 \equiv \vec{OP}$, se pueden distinguir tres regiones:

2a) $r < R_1 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$, pues no hay carga en el interior de la esfera gaussiana.

2b) $R_1 < r < R_2$, ver figura 3.26.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{E}(r) \cdot d\vec{\sigma} &= \frac{q(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^r 4\pi a \cdot dr \Rightarrow E(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi a}{\epsilon_0} (r - R_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{E}(r) &= \frac{a}{\epsilon_0} \cdot \frac{r - R_1}{r^2} \vec{r}_0 \end{aligned}$$

2c) $r > R_2$, como toda la carga de la distribución queda ahora en el interior de la esfera:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_0}{r^2} = \frac{a(R_2 - R_1)}{\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_0}{r^2}$$

3. Cálculo del potencial.

3a) Dominio $r \leq R_1$, el potencial V_1 en cualquier punto del hueco es constante, pues el campo en ese dominio ya se ha visto que es nulo, y se calculará más adelante en el apartado 3c), teniendo en cuenta la continuidad de este al atravesar las diversas regiones.

3b) Designando al potencial en la zona: $R_1 \leq r \leq R_2$ por V_2 se tendrá que:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{dV_2}{dr} \Rightarrow dV_2 = -E \cdot dr \Rightarrow \int dV_2 = - \int E \cdot dr + C_2 \text{ (Cte.)} \Rightarrow \\ V_2 &= - \int \frac{a}{\epsilon_0} \cdot \frac{r - R_1}{r^2} dr + C_2 \Rightarrow V_2 = -\frac{a}{\epsilon_0} \left(\ln r + \frac{R_1}{r} \right) + C_2 \end{aligned}$$

3c) Para: $r \geq R_2$ el potencial designado por V_3 , es ya conocido: $V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + C_3$, y tomando el potencial en el infinito ($r = \infty$) nulo, queda $C_3 = 0$, luego:

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{a}{\epsilon_0} \cdot \frac{R_2 - R_1}{r}$$

El potencial en $r = R_2$ será: $V_3(R_2) = \frac{a}{\epsilon_0} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_2}$ y $V_2(R_2) = -\frac{a}{\epsilon_0} \left(\ln R_2 + \frac{R_1}{R_2} \right) + C_2$ y por continuidad: $V_2(R_2) = V_3(R_2) \Rightarrow \frac{a}{\epsilon_0} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_2} = -\frac{a}{\epsilon_0} \left(\ln R_2 + \frac{R_1}{R_2} \right) + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{a}{\epsilon_0} (1 + \ln R_2)$, que sustituyendo en la expresión de V_2 se tiene para $R_1 \leq r \leq R_2$:

$$V_2 = -\frac{a}{\epsilon_0} \left(\ln r + \frac{R_1}{r} \right) + \frac{a}{\epsilon_0} (1 + \ln R_2) = \frac{a}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{r} + \frac{a}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{R_1}{r} \right)$$

y de este resultado se obtiene que para $r = R_1 \Rightarrow V_2(r = R_1) = \frac{a}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = V_1$, luego para: $r \leq R_1$ el potencial es:

$$V_1 = \frac{a}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

2.

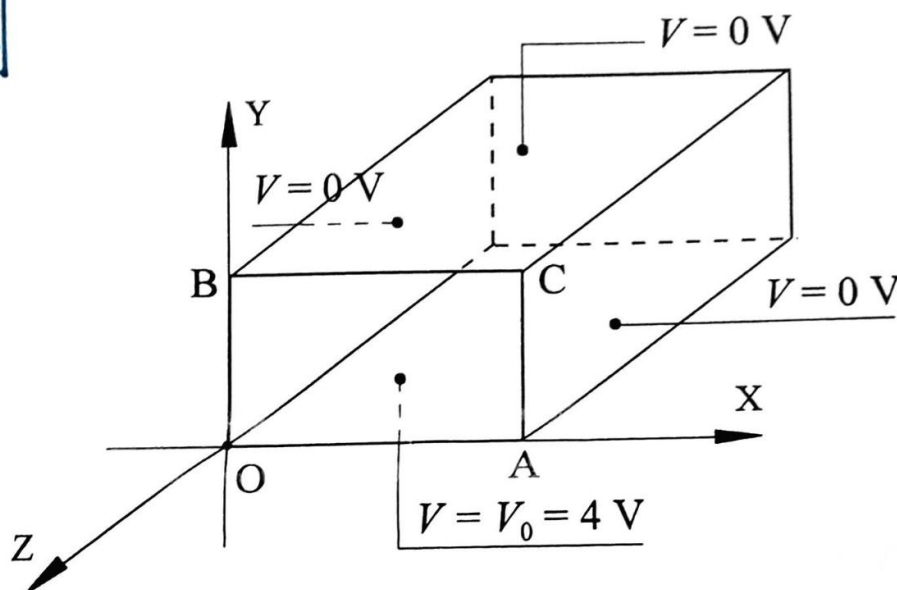


Figura 6.19

Solución:

El potencial solo depende de x e y , luego la ecuación de Laplace es: $\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$. Se busca la solución de la forma: $V(x, y) = U(x)W(y)$, luego $\nabla^2 V = W \frac{d^2 U}{dx^2} + U \frac{d^2 W}{dy^2} = 0$, dividiendo esta última ecuación por $U \cdot W$, queda: $\frac{1}{U} \cdot \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{1}{W} \cdot \frac{d^2 W}{dy^2} = 0$, entonces: $\frac{1}{U} \cdot \frac{d^2 U}{dx^2} = -\frac{1}{W} \cdot \frac{d^2 W}{dy^2}$, donde cada miembro es función de una sola variable independiente, luego para que esa igualdad sea posible, los sumandos deben de ser constantes, así se deberá tener:

$$\frac{1}{U} \cdot \frac{d^2 U}{dx^2} = -\frac{1}{W} \cdot \frac{d^2 W}{dy^2} = \text{Cte} = -K^2, \quad \text{siendo } K \text{ un número real}$$

donde la constante para la ecuación diferencial en U , como se ve es un número negativo¹⁰; se elige así porque al tomar los mismos valores, en este caso nulos, para diferentes valores de x , la función U debe ser senoidal. Si la constante fuera positiva, la U sería una función exponencial, que no podría anularse a la vez, en los límites $x = 0$ y $x = 3$. La constante para la ecuación diferencial en W , será por tanto positiva y esta función será exponencial, lo que es compatible con los valores diferentes que toma en los límites $y = 0$ e $y = 2$, como se verá a continuación. Así pues, se llega a las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + K^2U = 0 \quad \text{ecuación característica: } r^2 + K^2 = 0 \Rightarrow r = \pm K.i$$

$$\frac{d^2W}{dy^2} - K^2W = 0 \quad \text{ecuación característica: } r^2 - K^2 = 0 \Rightarrow r = \pm K$$

luego las soluciones de estas ecuaciones son¹¹:

$$U(x) = A_K \sin(Kx) + A'_K \cos(Kx)$$

$$W(y) = B_K \exp(Ky) + B'_K \exp(-Ky) \quad \text{o} \quad W(y) = B_K \sinh(Ky) + B'_K \cosh(Ky)$$

por tanto, la solución para $V(x, y)$ será de la forma: $V(x, y) = (A_K \sin(Kx) + A'_K \cos(Kx))(B_K \sinh(Ky) + B'_K \cosh(Ky))$ o una combinación lineal finita o infinita de este producto de funciones, esto dependerá de si las condiciones de contorno (C.C.) requieren un sistema finito de autofunciones o requieren un sistema infinito de estas, para obtener la solución completa de la ecuación de Laplace.

Imponiendo las C.C.:

1ª. Potencial nulo en $x = 0$, o sea:

$$V(0, y) = 0 = A'_K (B_K \sinh(Ky) + B'_K \cosh(Ky)) \Rightarrow A'_K = 0.$$

2ª. Potencial nulo en $x = 3$, o sea:

$$V(3, y) = 0 = A_K \sin 3K (\sinh(Ky) + B'_K \cosh(Ky)) \Rightarrow \sin 3K = 0 \Rightarrow 3K = n\pi$$

donde n es un número entero.

El conjunto de valores de n nos conduce al conjunto de autofunciones: $\sin \frac{n\pi x}{3}$ para n natural, por tanto, el potencial tendrá como expresión:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{n\pi x}{3} (B_n \sinh(\frac{n\pi}{3}y) + B'_n \cosh(\frac{n\pi}{3}y))$$

donde las constantes A_n han sido integradas en las B_n y B'_n .

Las otras dos C.C. nos dan:

3ª. Potencial igual a 4 V en $y = 0$; desarrollando apropiadamente en serie de Fourier

¹⁰Aunque en este caso la constante es un número real, en el caso más general puede ser un número complejo

¹¹sinh y cosh significan seno hiperbólico y coseno hiperbólico respectivamente

la constante 4, se tiene para $x \in (0, 3)$:

$$V(x, 0) = 4 = \sum_{m \geq 0} \frac{16}{(2m+1)\pi} \operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi x}{3} = \sum_{n \geq 1} B'_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} \Rightarrow$$

$$B'_{2m} = 0 \quad y \quad B'_{2m+1} = \frac{16}{(2m+1)\pi}$$

La igualdad, para $x \in (0, 3)$: $4 = \sum_{m \geq 0} \frac{16}{(2m+1)\pi} \operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi x}{3}$, se deduce en los comentarios del final del problema.

4ª. De la otra C.C., potencial en $y = 2$ nulo, o sea $V(x, 2) = 0$, se tiene:

$$\sum_{n \geq 1} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} \left(B_n \sinh \frac{2n\pi}{3} + B'_n \cosh \frac{2n\pi}{3} \right) = 0$$

y de la condición de contorno anterior y de esta última se tiene:

$$B_{2m} = 0$$

$$B_{2m+1} \sinh \frac{2(2m+1)\pi}{3} + B'_{2m+1} \cosh \frac{2(2m+1)\pi}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$B_{2m+1} = -B'_{2m+1} \frac{\cosh[2(2m+1)\pi/3]}{\sinh[2(2m+1)\pi/3]}$$

y sustituyendo en la expresión del potencial queda:

$$V(x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi x}{3} \left(-\frac{16}{(2m+1)\pi} \cdot \frac{\cosh(2(2m+1)\pi/3)}{\sinh(2(2m+1)\pi/3)} \operatorname{senh} \frac{(2m+1)\pi y}{3} + \frac{16}{(2m+1)\pi} \cosh \frac{(2m+1)\pi y}{3} \right)$$

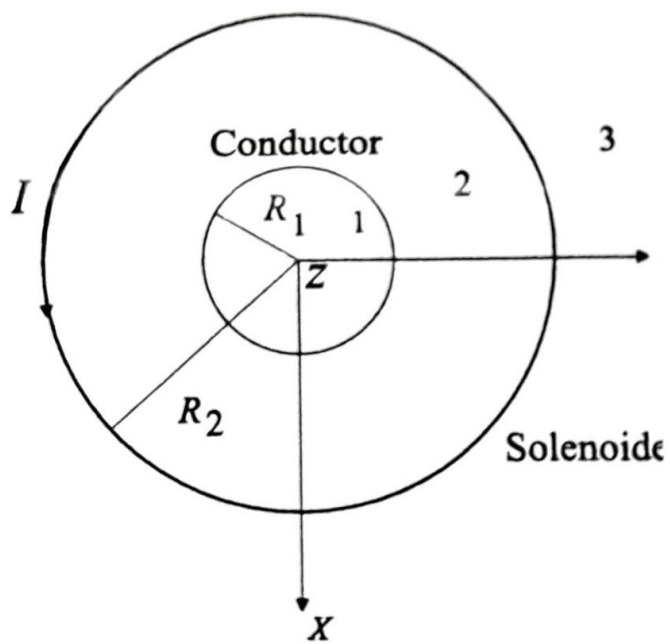
reordenando algunos términos se tiene:

$$V(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16}{(2m+1)\pi} \operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi x}{3} \left(\frac{\sinh \frac{2(2m+1)\pi}{3} \cdot \cosh \frac{(2m+1)\pi y}{3}}{\sinh \frac{2(2m+1)\pi}{3}} - \frac{\cosh \frac{2(2m+1)\pi}{3} \cdot \sinh \frac{(2m+1)\pi y}{3}}{\sinh \frac{2(2m+1)\pi}{3}} \right)$$

y teniendo en cuenta la igualdad: $\sinh(a-b) = \sinh a \cdot \cosh b - \cosh a \cdot \sinh b$, se obtiene finalmente:

$$V(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16}{(2m+1)\pi} \times \operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi x}{3} \times \frac{\sinh((2m+1)\frac{\pi}{3}(2-y))}{\sinh(2(2m+1)\frac{\pi}{3})}$$

3



Conductor cilíndrico de radio R_1 concéntrico con un solenoide de radio R_2 .

a) Para resolver este ejercicio, distinguiremos, desde el principio, las tres regiones en las que se pide el campo magnético.

Región 1 ($0 < \rho < R_1$)

Con la idea de utilizar el teorema de Ampère para el cálculo del campo \mathbf{H} de la corriente cilíndrica, tomemos $\mathbf{H} = (H_\rho, H_\phi, H_z)$ y $d\mathbf{l} = dl \mathbf{u}_\phi = (0, dl, 0)$, sobre una curva circular de radio ρ centrada en el origen de coordenadas. Si recorremos la curva Γ_1 (∂S_1) en sentido antihorario, la normal que orienta la superficie cuya delimitación es Γ_1 es $\mathbf{n}_1 = \mathbf{u}_z$ y $d\mathbf{S}_1 = dS_1 \mathbf{u}_z = (0, 0, 1)dS_1$. Substituyendo todos estos valores en la Ecuación (6.11), se tiene:

$$\oint_{\partial S_1} (H_\rho, H_\phi, H_z)(0, dl, 0) = \int_{S_1} (0, 0, j)(0, 0, 1)dS_1 \Rightarrow \oint_{\partial S_1} H_\phi dl = \int_{S_1} j_c dS_1.$$

Debido a la simetría de rotación del sistema en torno al eje OZ , la componente H_ϕ debe ser la misma en cualquier punto de la curva elegida, por lo que podemos sacarla del integrando, encontrando que,

$$H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = j_c \int_{S_1} dS_1 \Rightarrow 2\pi \rho H_\phi = j_c S_1 \Rightarrow 2\pi \rho H_\phi = j_c \pi \rho^2 \Rightarrow H_\phi = \frac{j_c \rho}{2},$$

o sea,

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{j_c \rho}{2} \mathbf{u}_\phi,$$

y al ser el conductor un material magnéticamente lineal de permeabilidad relativa μ_r , el campo \mathbf{B} viene dado por

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\mu_0 \mu_r j_c \rho}{2} \mathbf{u}_\phi.$$

Para el solenoide muy largo, en esta región, empleando la Ecuación (5.41), se encuentra,

$$\mathbf{B}_s = \mu_0 \mu_r n I \mathbf{u}_z.$$

Con todo ello, el campo resultante es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu_r j_c \rho}{2} \mathbf{u}_\phi + \mu_0 \mu_r n I \mathbf{u}_z,$$

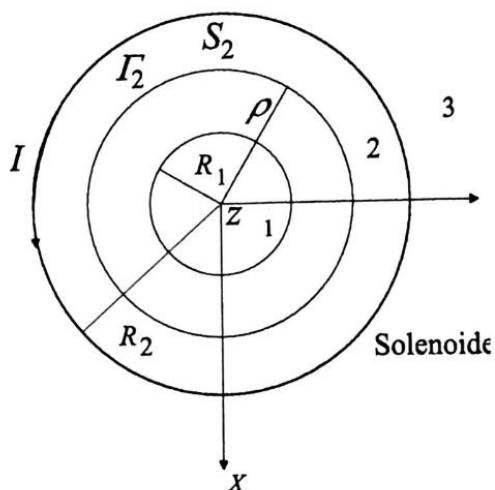
y con los datos numéricos del ejercicio, da

$$\mathbf{B} = 7,5 \times 10^{-2} \rho \mathbf{u}_\phi + 3,7 \times 10^{-2} \mathbf{u}_z.$$

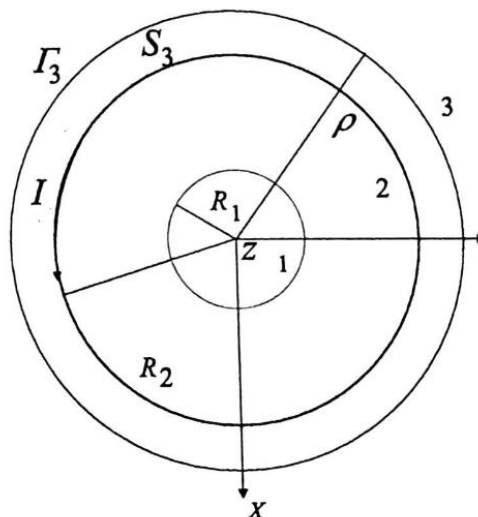
Región 2 ($R_1 < \rho < R_2$)

Considerando ahora una curva Γ_2 similar a la del apartado anterior, pero de radio $\rho < R_2$, y procediendo de igual modo, se tiene [Figura 6.28(a)]:

$$H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = \int_{S_2} j_c dS_2 = j_c \int_{S_c} dS,$$



(a)



(b)

en donde S_c representa la superficie de la sección del conductor de radio R_1 . Como puede observarse, la superficie efectiva que aparece en la integral referente a la intensidad no es la superficie S_2 considerada originalmente, sino, como ya se ha visto en otras ocasiones, la que corresponde a la intersección de dicha superficie S_2 con el volumen V_j de la corriente, o sea, $S_c = \pi R_1^2$. Despejando H_ϕ de la relación anterior, encontramos

$$2\pi\rho H_\phi = j_c S_c \Rightarrow 2\pi\rho H_\phi = j_c \pi R_1^2 \Rightarrow H_\phi = \frac{j_c R_1^2}{2\rho}.$$

Escribiendo este valor en forma vectorial, y empleando la relación $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, obtenemos para el conductor

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{j_c R_1^2}{2\rho} \mathbf{u}_\phi \Rightarrow \mathbf{B}_\phi = \frac{\mu_0 j_c R_1^2}{2\rho} \mathbf{u}_\phi.$$

El campo H_s creado por el solenoide es idéntico al encontrado en el caso anterior, esto es, $H_s = nI \mathbf{u}_z$, viniendo el campo magnético B dado por: $\mathbf{B}_s = \mu_0 n I \mathbf{u}_z$, y el campo resultante en esta región,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j_c R_1^2}{2\rho} \mathbf{u}_\phi + \mu_0 n I \mathbf{u}_z.$$

Introduciendo ahora los datos del ejercicio, tenemos:

$$\mathbf{B} = \frac{2,5 \times 10^{-7}}{\rho} \mathbf{u}_\phi + 1,2 \times 10^{-3} \mathbf{u}_z.$$

Región 3 ($\rho > R_2$)

Consideremos, primeramente, el campo creado por el conductor cilíndrico. Para ello, se emplea la ley de Ampère para H exactamente igual que se ha hecho para ($R_1 < \rho < R_2$), con la única diferencia que, en este caso, la superficie S_3 corresponde al radio $\rho > R_2$ [curva Γ_3 , Figura 6.28(b)],

$$H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = \int_{S_2} j_c dS_2 = j_c \int_{S_c} dS_c \Rightarrow$$

$$2\pi\rho H_\phi = j_c S_c \Rightarrow 2\pi\rho H_\phi = j_c \pi R_1^2 \Rightarrow H_\phi = \frac{j_c R_1^2}{2\rho},$$

en donde con S_c hemos vuelto a denotar la sección del conductor. Obsérvese cómo, formalmente, la expresión hallada es idéntica a la del caso anterior.

Respecto del solenoide, no es necesario realizar ningún cálculo, pues, como se sabe del tema anterior (Problema Propuesto 5.23), el campo magnético creado por una bobina de longitud muy grande, en su exterior, es cero. Por todo ello, concluimos que el campo total en esta tercera región es:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j_c R_1^2}{2\rho} \mathbf{u}_\phi,$$

y numéricamente,

$$\mathbf{B} = \frac{2,5 \times 10^{-7}}{\rho} \mathbf{u}_\phi.$$

