Grado en Física, Curso 2023-2024

Mecánica Cuántica I

Control Final, 8 de noviembre de 2023

1. Supongamos una barrera infinita en $x = 0$ y a una distancia L de esta un pozo de potencial descrito por una función delta $V = -\alpha\delta(x - L)$ donde α es una constante real positiva. Considera partículas incidentes desde la derecha (esto es, la solución asintótica en $x \to \infty$ está definida por una onda plana de momento definido) con energía $E > 0$.

   (a) Escribe la función para los estados estacionarios $\psi(x)$ (1.0 punto)

   (b) Calcula la relación entre las amplitudes de la onda reflejada y la onda incidente para $x > L$. Explica el significado del resultado. (2.0 puntos)

2. Los operadores creación y destrucción para el oscilador armónico unidimensional vienen dados por las expresiones:

$$\hat{a}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\mp i\hat{p} + m\omega\hat{x}\right)$$

   (a) Utilizando las expresiones anteriores, obtén el operador posición $\hat{x}$ en función de los operadores creación y destrucción. (0.5 puntos)

   (b) Calcula el valor esperado de x en el estado ψ_n del oscilador armónico teniendo en cuenta la expresión del operador $\hat{x}$ del apartado anterior y las relaciones:

$$\hat{a_+}\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$$
$$\hat{a_-}\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$$

   Razona tu respuesta. (1.0 punto)

3. (a) Enuncia el principio de Heisenberg generalizado y explica su significado. En particular, explica qué implicaciones tiene que dos operadores, asociados a observables, conmuten para el valor de sus incertidumbres y sus autovectores. (1 punto) (b) Si la posición x de un electrón se mide con una precisión de $0.01nm$ ¿cuál es la incertidumbre en su velocidad v_x? ¿Qué puedes decir sobre la incertidumbre en la posición x y del momento en la dirección y, p_y? Razona tu respuesta. (1 punto).
   Datos: $m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$; $\hbar = 6.63 \times 10^{-34} J.s$

4. Considera un sistema A que puede encontrarse en dos estados ortonormales $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. El Hamiltoniano de este sistema viene dado por el siguiente operador:

$$\hat{H} = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   con ϵ un número con dimensiones de energía.

(a) Obtén los autovalores y autovectores del Hamiltoniano en función del parámetro ϵ (1.5 puntos)

(b) Explica cómo calcularías la función de onda $\psi(x)$ en el espacio de posiciones asociada a un estado $|\psi\rangle$ del sistema A (0.5 puntos).

(c) Considera un sistema compuesto BA formado por el subsistema A anterior con los estados $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ y un subsistema B con estados $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$. Si el sistema BA se encuentra en el estado

$$|BA\rangle = c_{0\uparrow}|0\rangle|\uparrow\rangle + c_{0\downarrow}|0\rangle|\downarrow\rangle + c_{1\downarrow}|1\rangle|\downarrow\rangle + c_{2\downarrow}|2\rangle|\downarrow\rangle$$

con $c_{0\uparrow} = 0.25$; $c_{0\downarrow} = 0.2$; $c_{1\downarrow} = 0.5$; $c_{2\downarrow} = 0.8$

i. ¿Se trata de un estado correlacionado? Justifica tu respuesta. (0.5 puntos)

ii. Si medimos el subsistema A y se encuentra en un determinado instante de tiempo en el estado $|\downarrow\rangle$, ¿cuál será la probabilidad de que al medir subsecuentemente en el sistema B este se encuentre en el estado $|2\rangle$. (1 punto)

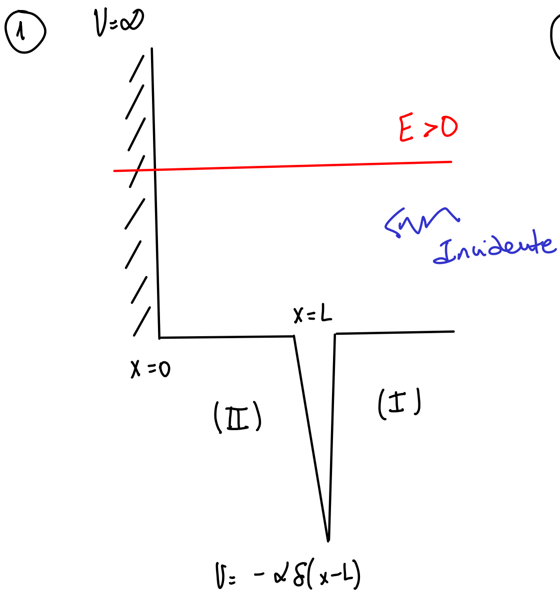
Relaciones de utilidad:

Discontinuidad en la derivada para una función delta:

$$\Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(x_d)$$

donde x_d depende de la posición de la función delta.

1



a

$$\psi_I(x) = \underbrace{Ae^{-ikx}}_{\text{onda incidente}} + \underbrace{Be^{ikx}}_{\text{onda reflejada}} \qquad x > L$$

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-ikx} + De^{ikx} \qquad 0 \leq x < L$$

Con la condición: $\psi(x=0) = 0$

$$\psi_{II}(x=0) = C + D = 0 \rightarrow C = -D$$

$$\psi_{II}(x) = C\left(e^{-ikx} - e^{ikx}\right)$$

ó $\psi_{II}(x) = C' \operatorname{sen}(kx)$

(1 punto)

b $\dfrac{B}{A}$ y su significado.

Aplicamos las condiciones de contorno:

1. $\psi_{II}(x=L) = \psi_I(x=L)$
2. $\psi'_I(x=L) - \psi'_{II}(x=L) = -\dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi_{II}(x=L)$

1. $Ae^{-ikL} + Be^{ikL} = C' \operatorname{sen}(kL) \rightarrow C' = \dfrac{Ae^{-ikL} + Be^{ikL}}{\operatorname{sen}(kL)}$

ó $Ae^{-ikL} + Be^{ikL} = c'\left(e^{-ikL} - e^{ikL}\right) \rightarrow C' = \dfrac{Ae^{-ikL} + Be^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}}$

2. $-ikAe^{-ikL} + ikBe^{ikL} - kC'\cos(kL) = -g\,C' \operatorname{sen}(kL)$ con $g = \dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}$

ó $-ikAe^{-ikL} + ikBe^{ikL} - c'\left(-ike^{-ikL} - ike^{ikL}\right) = -g\,c'\left(e^{-ikL} - e^{ikL}\right)$

Sustituyendo 1 en 2 se llega al siguiente resultado:

$$\boxed{\frac{B}{A} = e^{-2ikL}\,\frac{ik\,tg(kL) + k - g\,tg(kL)}{ik\,tg(kL) - k + g\,tg(kL)}}$$

ó

$$\boxed{\frac{B}{A} = e^{-2ikL} \frac{ik - g - ik\left(\dfrac{e^{ikL}+e^{-ikL}}{e^{-ikL}-e^{ikL}}\right)}{ik + g + ik\left(\dfrac{e^{ikL}+e^{-ikL}}{e^{-ikL}-e^{ikL}}\right)}}$$

Resultado equivalente ya que $\dfrac{e^{ikL}+e^{-ikL}}{e^{-ikL}-e^{ikL}} = \dfrac{i}{tg(kL)}$

Interpretación: $\left|\dfrac{B}{A}\right|^2 = R$ coeficiente de reflexión. $R = 1$

La onda se ve reflejada, el efecto del pozo δ es un retardo en la reflexión (situación similar a lo que vimos en clase con un pozo cuadrado frente a una barrera infinita).

(2 puntos)

2 a $$\hat{x} = \frac{\sqrt{2\hbar m\omega}}{2m\omega}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)$$ (0,5 puntos)

b $$\langle \psi_n | \hat{x} | \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \hat{x}\, \psi_n\, dx = g^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* (\hat{a}_+ + \hat{a}_-) \psi_n\, dx =$$

$$= g^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \hat{a}_+ \psi_n\, dx + g^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \hat{a}_- \psi_n\, dx =$$

$$= g^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_{n+1}\, dx + g^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_{n-1}\, dx = 0$$

ya que las autofunciones deben ser ortonormales.

con $g = \dfrac{\sqrt{2\hbar m\omega}}{2m\omega}$

(1 punto)

③ ⓐ Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son dos operadores Hermíticos (asociados a observables) el principio de incertidumbre generalizado indica que

$$\sigma_A^2 \cdot \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2$$

Si los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ no conmutan $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ es imposible determinar simultáneamente de forma exacta los valores de los observables asociados a estos operadores. Si $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ los dos observables se pueden determinar simultáneamente de forma exacta. Existe un conjunto completo de autofunciones común para $\hat{A}$ y $\hat{B}$.

(1 punto)

ⓑ $$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_p}{m} \geq \frac{\hbar}{2\sigma_x m} = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{2(1 \times 10^{-11})(9,11 \times 10^{-31})} = \boxed{3,6 \times 10^{7}\ m/s}$$

$$\sigma_x \cdot \sigma_{p_y} \rightarrow \sigma_x^2 \sigma_{p_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{x}, \hat{p}_y] \rangle \right)^2$$

Conmutador $[\hat{x}, \hat{p}_y]$

$$\hat{p}_y = i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \longrightarrow [\hat{x}, \hat{p}_y] = \hat{x} \cdot \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{x}$$

$$(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{x}) f(x,y) = i\hbar x \frac{\partial f}{\partial y} - i\hbar \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot f(x,y)) =$$

$$= i\hbar x \frac{\partial f}{\partial y} - i\hbar x \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{operadores compatibles} \rightarrow$$

→ se pueden conocer sus valores de forma exacta simultáneamente.

(1 punto)

4 (a) Autovalores $\boxed{E = \pm \varepsilon \sqrt{2}}$

Autovectores $|E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$

$$|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(hay otras posibles soluciones). Deben ser ortonormales. (1,5 puntos)

(b) $\Psi(x)$ se puede obtener como la proyección del estado $|\Psi\rangle$ sobre $|x\rangle$ autovector de posiciones

$$\Psi(x) = \langle x | \Psi \rangle$$

ya que el estado $|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi(x)\, |x\rangle$ superposición de una base continua.

(0,5 puntos)

(c) Correlacionado. Si se mide uno de los subsistemas el segundo queda determinado. (0,5 puntos)

(b) Se mide $|\downarrow\rangle$ colapsa $|BA\rangle'$ después de normalizar el nuevo estado:

$$P(|B\rangle \text{ en } |2\rangle) = |\langle 2 | BA\rangle'|^2 = \frac{0.8^2}{0.2^2 + 0.5^2 + 0.8^2} = 0.7 \simeq 70\%$$

(1 punto)