Un condensador de láminas planoparalelas de capacidad C y separación entre las placas d, se encuentra inicialmente descargado. Se conecta a una batería de fem V_0 y a una resistencia R y se carga totalmente.

(a) ¿Qué fracción de la energía almacenada finalmente en el condensador es radiada durante el proceso de carga?

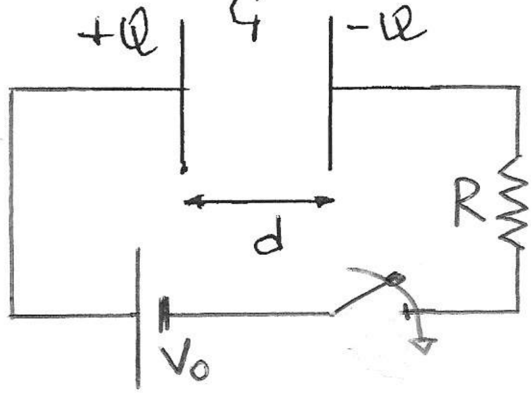
(b) Si C = 1 pF, R = 1000 Ω y d = 0.1 mm, ¿cuál es el valor de esta fracción? En electrónica normalmente no nos preocupamos sobre las pérdidas por radiación, ¿es esto razonable en este caso?

(a) La potencia radiada en todas direcciones viene dada por la fórmula de Larmor:

$$I = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} = \frac{dW_{rad}}{dt}$$

En este caso el momento dipolar eléctrico vale:

$$\underline{\underline{p = Qd}}$$



Para el proceso de carga del condensador:

$$Q(t) = Q_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

donde $Q_0 = CV_0$. Tendremos:

$$\left.\begin{aligned} p(t) &= Q_0 d \left(1 - e^{-t/RC}\right) \\ \ddot{p}(t) &= -\frac{Q_0 d}{R^2 C^2} e^{-t/RC} \end{aligned}\right\}$$

que al sustituir en la expresión de dW_{rad}/dt nos proporciona la expresión:

$$\frac{dW_{rad}}{dt} = \frac{1}{6\pi \varepsilon_0 c^3} |\ddot{p}|^2 = \frac{1}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \frac{Q_0^2 d^2}{R^4 C^4} e^{-2t/RC}$$

Integrando se obtiene la energía total radiada:

$$W_{rad} = \frac{Q_0^2 d^2}{6\pi \varepsilon_0 c^7 R^4} \int_0^\infty e^{-2t/RC}\, dt =$$

$$= \frac{Q_0^2 d^2}{6\pi \varepsilon_0 c^7 R^4} \left[-\frac{1}{2} RC\, e^{-2t/RC} \right]_0^\infty =$$

$$= \frac{Q_0^2 d^2}{6\pi \varepsilon_0 c^7 R^4} \frac{RC}{2} = \frac{1}{12\pi \varepsilon_0 c^3} \frac{(Q_0 d)^2}{(RC)^3}$$

Si la energía inicial es

$$W_0 = \frac{Q_0^2}{2C}$$

La fracción f de la energía inicial que es radiada es entonces:

$$f = \frac{W_{rad}}{W_0} = \frac{(Q_0 d)^2}{12\pi \varepsilon_0 c^3 (RC)^3} \frac{2C}{Q_0^2} = \frac{d^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3 R^3 C^2}$$

$$\boxed{f = \frac{d^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3 R^3 C^2}}$$

[Técnicamente, $\dot{Q}(t)$ es discontinua en $t=0$, y $\ddot{Q}$ corresponde a una función delta. Pero todo circuito real tiene una cierta autoinducción, que suaviza el brusco cambio en $\dot{Q}$].

(b) Sustituyendo los valores numéricos:

$$f = \frac{d^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3 R^3 G^2} = \frac{(10^{-4})^2}{6\pi \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} (3\cdot 10^8)^3 (10^3)^3 (10^{-12})^2} =$$

$$= 2{,}22 \times 10^{-9}$$

es decir:

$$\underline{\underline{f = 2.22 \times 10^{-9}}}$$

Este valor es tan sumamente pequeño que no es necesario preocuparse por las pérdidas por radiación.