Grado en Física

Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal

Electromagnetismo II

Práctica 1.- Simulación de Guías de Onda

1.- Guías de Onda, ecuaciones de campo

Estudiaremos la propagación de ondas electromagnéticas en una guía de onda de sección variable como las representadas en la figura 1. Donde supondremos que las paredes de la guía son metálicas.

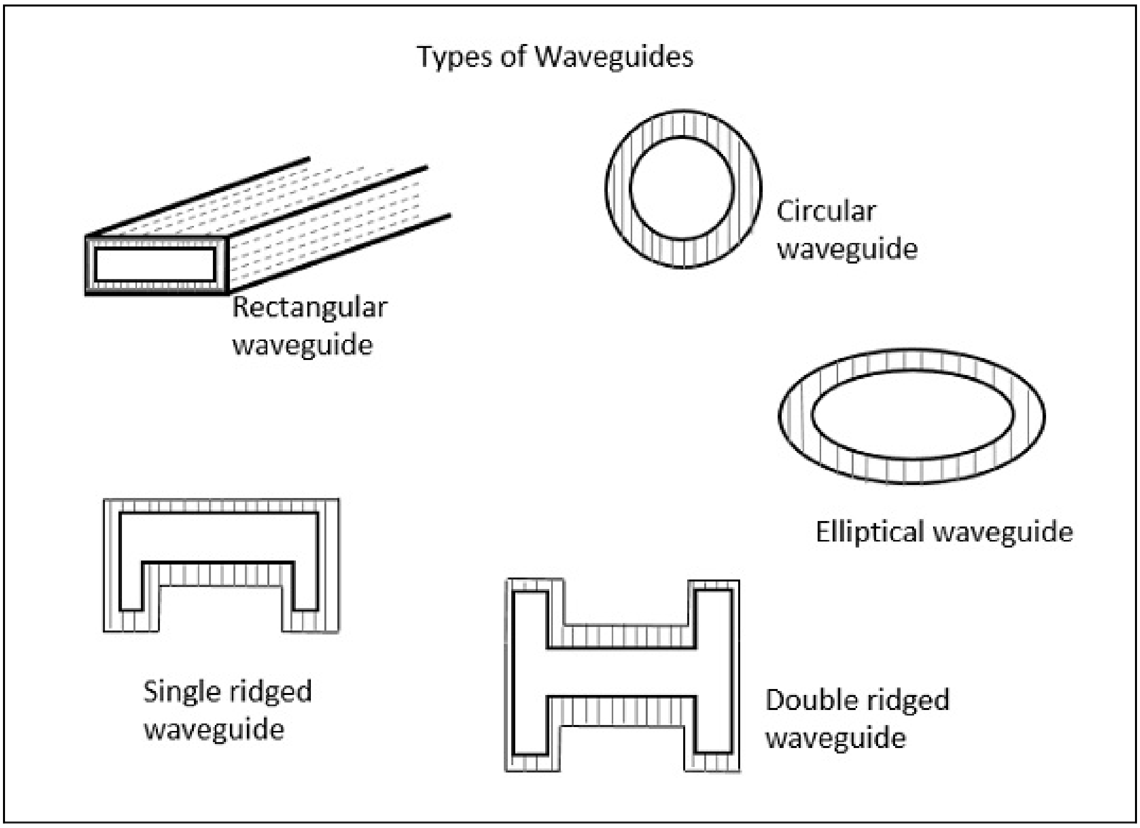

Figura 1.- Guías de onda con diferentes secciones transversales

Las condiciones de contorno son

$$\vec{E}^{\parallel} = 0$$

$$\vec{B}^{\perp} = 0$$

Los campos eléctrico y magnético deben a su vez cumplir las ecuaciones de Maxwell dentro del medio:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Supondremos la propagación de ondas monocromáticas por lo que los campos eléctrico y magnético se pueden expresar según:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y)e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \vec{B}(x,y)e^{i(kz-\omega t)}$$

Donde k es el número de onda y ω es la frecuencia angular. Teniendo las anteriores ecuaciones en cuenta las componentes x e y del campo eléctrico y magnético verifican:

$$E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left[k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right]$$

$$E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left[k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial x}\right]$$

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left[k\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right]$$

$$B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left[k\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right]$$

Mientras que las componentes longitudinales de los campos se pueden obtener según:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right]B_z = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right]E_z = 0$$

Dependiendo de si se anula E_z o B_z habrá distintos modos de propagación dentro de la guía de onda:

1) Modo transversal eléctrico (TE) cuando $E_z = 0$
2) Modo transversal magnético (TM) cuando $B_z = 0$
3) Modo transversal electromagnático (TEM) cuando $E_z = B_z = 0$.

Electromagnetismo II

2.- Simulación mediante diferencias finitas

Es raro que los problemas de Electromagnetismo de la vida real caigan claramente en una clase que se pueda resolver mediante métodos analíticos. Las aproximaciones clásicas pueden fallar si:

- las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) no son lineales o no se pueden “linealizar” sin afectar seriamente al resultado.
- la región de la resolución es compleja
- las condiciones de frontera son de tipo mixtos.
- las condiciones de frontera dependen del tiempo
- el medio es inhomogeneo o anisótropo.

Siempre que surja un problema con tal complejidad, deben emplearse soluciones numéricas. De los métodos numéricos disponibles para resolver EDP, los que emplean diferencias finitas (DF) se entienden más fácilmente, se usan con más frecuencia y son más universales.

Las técnicas de diferencias finitas se basan en aproximaciones que permiten reemplazar ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias finitas. Estas aproximaciones de diferencias finitas son de forma algebraica; relacionan el valor de la variable dependiente en un punto de la región solución con valores en los puntos vecinos. Por ello una solución basada en la técnica de diferencias finitas consta de tres pasos.

1) dividir la región solución en un mallado de nodos
2) aproximar la ecuación diferencial dada por su equivalente en diferencias finitas, que relaciona la variable dependiente en un punto con los valores de los puntos adyacentes.
3) resolver las ecuaciones en diferencias finitas sujetas a las condiciones de la frontera y / o condiciones iniciales prescritas

El curso de la acción que se ha de adoptar en estos tres pasos es dictado por la naturaleza del problema a resolver, la región solución y las condiciones de frontera.

Antes de encontrar las soluciones de diferencias finitas para EDP específicas, veremos cómo se construyen aproximaciones de diferencias finitas a partir de una ecuación diferencial dada. Esto esencialmente implica estimar las derivadas numéricamente.

Dada una función f(x) como la mostrada en la figura 2, podemos aproximar su derivada, en P por la pendiente del arco PB, que da la fórmula de la “diferencia hacia adelante”

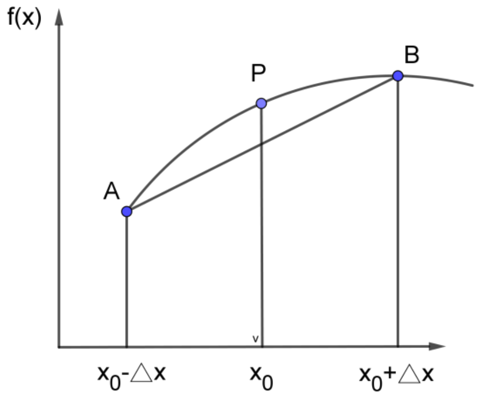

Figura 2.- Estimaciones de las derivadas de una función en un punto P

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

O la pendiente del arco AP, que produce la fórmula de la diferencia hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

O la pendiente del arco AB, lo que resulta en la fórmula de diferencia central

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Se puede también estimar la derivada segunda en P, según:

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0 + \Delta x/2) - f'(x_0 - \Delta x/2)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}\right] =$$

O bien:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Para aplicar el método de las diferencias finitas y encontrar la solución de una función Φ (x, y), dividimos la región de resolución en pequeños rectángulos de dimensiones Δx y Δy como en la figura 3. Las coordenadas de un punto del mallado o nodo serán:

$$x = i\Delta x \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

$$y = j\Delta y \qquad j = 0,1,2,\ldots$$

Y el valor de Φ en P será:

$$\Phi_P = \Phi(i\Delta x, j\Delta y) = \Phi(\mathrm{i},\mathrm{j})$$

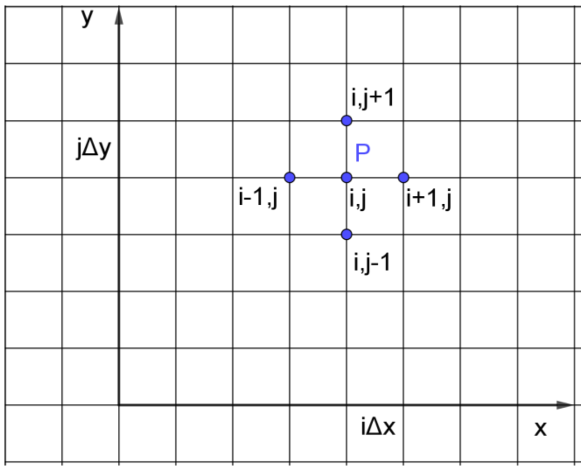

Figura 3.- Mallado de diferencias finitas para las variables x e y

Con esta notación las aproximaciones de diferencias centrales a las derivadas de Φ se pueden reescribir como:

$$\Phi_{\mathrm{x}|\mathrm{i,j}} \approx \frac{\Phi(i+1,j)-\Phi(i-1,j)}{2\Delta x} \quad (1)$$

$$\Phi_{\mathrm{y}|\mathrm{i,j}} \approx \frac{\Phi(i,j+1)-\Phi(i,j-1)}{2\Delta y} \quad (2)$$

$$\Phi_{\mathrm{xx}|\mathrm{i,j}} \approx \frac{\Phi(i+1,j)-2\Phi(i,j)+\Phi(i-1,j)}{(\Delta x)^2} \quad (3)$$

$$\Phi_{\mathrm{yy}|\mathrm{i,j}} \approx \frac{\Phi(i,j+1)-2\Phi(i,j)+\Phi(i,j-1)}{(\Delta y)^2} \quad (4)$$

3.- Aplicación de las diferencias finitas a guías de onda:

La solución de problemas de la guía de ondas es adecuada para esquemas de diferencias finitas. Es necesario resolver una ecuación del tipo:

$$\nabla^2\Phi + \mathrm{k_c}^2\Phi = 0 \quad (5)$$

Donde $\Phi = E_z$ para los modos TM y $\Phi = H_z$ para los modos TE, mientras que k_c es el número de onda dado por

$$k_c{}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2$$

La ecuación corresponde a un problema de autovalores donde se debe determinar k_c y Φ. Para cada solución del número de onda de corte existe una solución de la autofunción Φ.

Para aplicar el método de las diferencias finitas se discretiza la sección transversal de la guía de onda por una mallado adecuado y aplicando las ecuaciones (1-5) se obtiene:

$$\Phi(\mathrm{i}+1,\mathrm{j})+\Phi(\mathrm{i}-1,\mathrm{j})+\Phi(\mathrm{i},\mathrm{j}+1)+\Phi(\mathrm{i},\mathrm{j}-1)-(4-\mathrm{h}^2\mathrm{k}^2)\Phi(\mathrm{i},\mathrm{j})=0 \quad (6)$$

Donde asumiremos que $\Delta x = \Delta y = h$ es el tamaño del mallado. La ecuación se aplica a todos los nodos interiores. En los puntos de frontera se aplicará o bien la condición de Dirilecht ($\Phi = 0$) para los modos TM o la condición de Neumann ($\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0$) para los modos TE. Esto implica por ejemplo que para el punto A de la figura 4 para los modos TM se impondrá:

$$\Phi_{\mathrm{A}}=0 \qquad (7)$$

Mientras que para los modos TE la condición implica:

$$\Phi_{\mathrm{B}}+\Phi_{\mathrm{C}}+2\Phi_{\mathrm{D}}-(4-\mathrm{h}^2\mathrm{k}^2)\Phi_{\mathrm{A}}=0 \qquad (8)$$

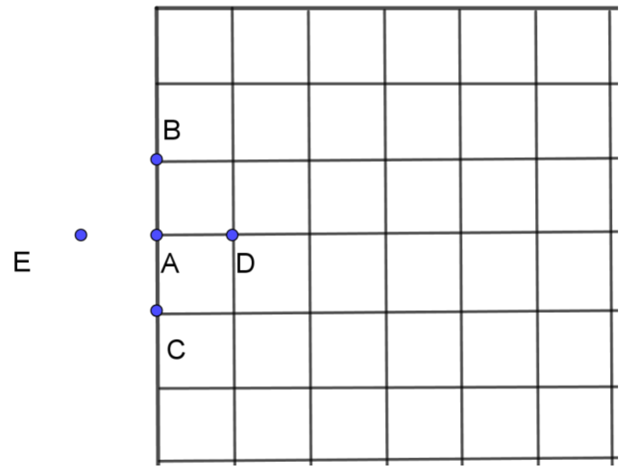

Figura 4.- Mallado de diferencias finitas para una guía de onda

Aplicando sucesivamente las ecuaciones (6) y o bien (7) o (8) a todos los puntos del mallado se obtienen m ecuaciones simultáneas involucrando las m incógnitas (Φ_1, Φ_2, $\ldots\Phi_m$). Estas ecuaciones simultáneas se pueden disponer de la siguiente forma:

$$(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})\Phi=0$$

O

$$\mathrm{A}\Phi=\lambda\Phi \qquad (9)$$

Siendo A una matriz mxm con coeficientes enteros conocidos, I es la matriz identidad, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots\Phi_m)$ es el autovector y

$$\lambda = (k_c h)^2$$

el autovalor correspondiente

4.- Prácticas de programación utilizando PYTHON

1) Sea la función f(x) = sin (2π/100x). Aproximar la derivada de la función mediante diferencias finitas centrales en el intervalo [0, 100]. Representar la función y su derivada en dicho intervalo.

2) Dada una guía de onda rectangular cuya sección es rectangular de dimensiones axb sabiendo que el campo magnético longitudinal (modos TEmn) es: $B_z(x,y) = B_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})$ calcular el campo eléctrico transversal (normalizado) aplicando las ecuaciones de la sección 1 para los modos (10,01,11,12,21) utilizando el método de las diferencias finitas. Representar el campo eléctrico en la sección transversal. Utilizar los valores a = 15, b =10.

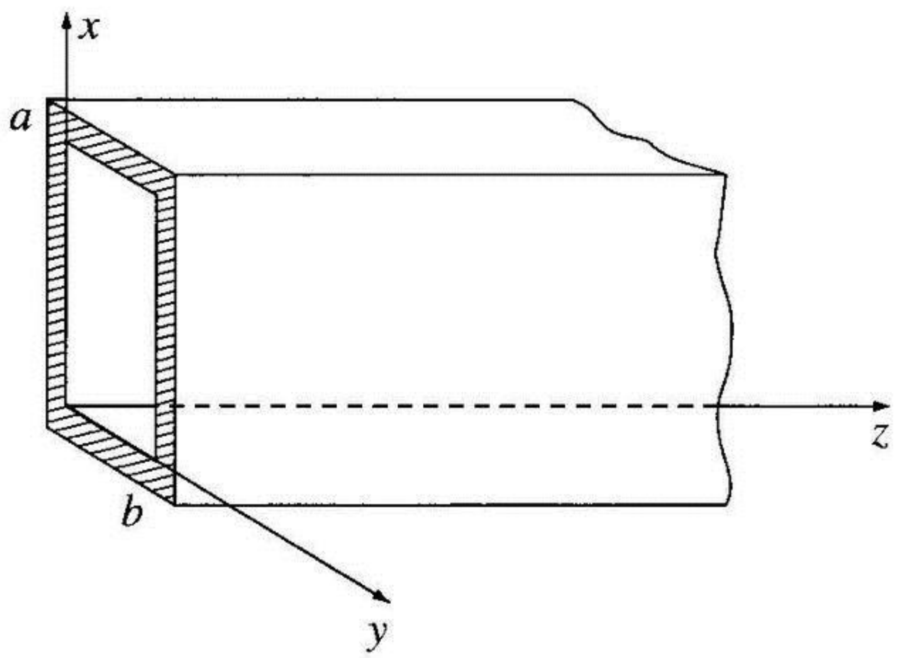

Figura 5.-Guía de onda rectangular

3) Utilizando el método de diferencias finitas resolver el problema de una guía de onda rectangular cuya sección es rectangular de dimensiones axb, calculando primero el campo magnético longitudinal H_z mediante las ecuaciones (6) y (9), calcular el campo eléctrico transversal (normalizado) aplicando las ecuaciones de la sección 1 para los modos (10,01,11,12,21) utilizando el método de las diferencias finitas. Representar el campo eléctrico en la sección transversal. Utilizar los valores a = 15, b =10.

ANEXO 1.- INSTRUCCIONES PARA LA PRESENTACIÓN DE LAS PRÁCTICAS Y ACLARACIONES.-

1) Las soluciones de las tres prácticas propuestas se entregarán mediante cuatro archivos con extensión .py (Python) de acuerdo con las instrucciones que se presentarán a continuación. La primera práctica se denotará “practica1.py”, la segunda: “practica2.py” y para la tercera se entregarán dos archivos: “guia_de_onda_DF.py” y “Matriz_DF.py” (por razones que después se detallarán). Una vez creados los cuatro archivos, el alumno los copiará en una carpeta que comprimirá posteriormente (preferiblemente con winrar). Éste archivo comprimido será el que se debe entregar a través de UAcloud.
2) En relación a la práctica 2, como hablamos de campo normalizado se está indicando que $B_0 = 1$ y que las expresiones que utilizaremos para las componentes del campo eléctrico son:

$$E_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} \quad \text{y} \quad E_y = -\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

   Estamos interesados en la variación espacial del campo y no en el módulo.

3) La práctica 3 está prácticamente resuelta con el código que se adjunta en la carpeta comprimida que el alumno descargará de UAcloud. En la carpeta descomprimida habrá cuatro archivos con extensión “.py”. De ellos dos están relacionados con la acción de dibujar los modos (“dibujaEn.py” y “Modes_Count.py”), mientras que “guia_de_onda_DF.py” es el archivo principal; asimismo el archivo “Matriz_DF.py” se encarga de definir la matriz A de la ecuación (9). Aunque es interesante que el alumno intente entender el código del archivo “guia_de_onda_DF.py”, sólo debe modificar las líneas 20 y 21, donde se modifican las dimensiones de la guía, y la ecuación 87 donde se llama a la función “dibuja” del módulo “dibujaEn”. En la llamada a esta función se especifica en los dos últimos argumentos el modo correspondiente (por defecto 10). Finalmente, para que el programa funcione correctamente el alumno debe rellenar los campos, inicialmente vacíos, correspondientes al “borde superior” y “borde derecho” de la matriz A definida en “Matriz_DF.py”. Es decir, debe aplicar la ecuación (6) correctamente para estos puntos, apoyándose en la descripción de la Figura 4 (con la ecuación (8)) y en los campos ya rellenados del “borde inferior” y “borde izquierdo”.