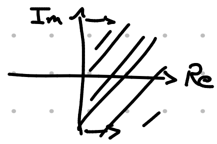
Ejercicio 5. *(0,75 puntos)* Calcular el número de raíces contenidas en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ de la ecuación

$$a - z - e^{-z} = 0, \text{ con } a \in \mathbb{R},\ a > 1.$$

T^{ma} Rouché: Sean g, h dos funciones holomorfas en un dominio simplemente conexo D y $|g(z)| > |h(z)|$ en ∂D entonces $g(z)$ y $g(z)+h(z)$ tienen el mismo número de ceros.



$\mathbb{C}$ es simplemente conexo $\Rightarrow D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} > 0\}$ simplemente conexo y su frontera será $\partial D = \{z \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R} : z = x + iy,\ x = 0\} = \{z \in \mathbb{C},\ y \in \mathbb{R} : z = iy\}$

$$\left.\begin{array}{l} g(z) = a - z \\ h(z) = -e^{-z} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} |g(z)| = |a - z| \overset{\text{en } \partial D}{=} |a - iy| = \sqrt{a^2 + y^2} > \sqrt{a^2} > 1 \\ |h(z)| = |-e^{-z}| = |-e^{-iy}| = |\cos y - i \sin y| = \sqrt{\sin^2 y + \cos^2 y} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |g(z)| > |h(z)|$ en $\partial D \Rightarrow f(z) = g(z) + h(z) = a - z - e^{-z}$ tiene el mismo número de ceros en D que $g(z) = a - z$ en D

$g(z) = a - z = 0 \iff z = a$ y como $a > 1 \Rightarrow a \in D \Rightarrow g(z)$ tiene una raíz en $D \overset{T^{ma}\text{ Rouché}}{\Longrightarrow}$

T.F.A. (grado 1 $\Rightarrow$ 1 raíz en $\mathbb{C}$) $\Rightarrow \boxed{a - z - e^{-z} \text{ tiene una raíz en } D}$

Ejercicio 6.

a) *(0,75 puntos)* Calcular formalmente el orden de la función entera $f(z) = \mathrm{senh}(\pi z)$.

$$\rho = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log(r)} \quad \text{con } M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

$$\sinh(\pi z) = \frac{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}{2} \text{ y cuando } |z| \to \infty,\ \sinh(\pi z) \simeq \frac{e^{\pi z}}{2} \Rightarrow M(r) = \max_{|z|=r} \left|\frac{e^{\pi z}}{2}\right| = \frac{1}{2} \max_{|z|=r} |e^{\pi z}| =$$

$$= \frac{1}{2} \max_{|z|=r} e^{\pi \mathrm{Re}(z)} = \frac{1}{2} e^{\pi r} \Rightarrow \log \log M(r) = \log\left(\log \tfrac{1}{2} + \log e^{\pi r}\right) = \log\left(\log \tfrac{1}{2} + \pi r\right) \text{ y en } r \to \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(r) = \log(\pi r) = \log \pi + \log r \simeq \log r \Rightarrow \boxed{\rho = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log r}{\log r} = 1}$$

b) *(0,75 puntos)* Calcular el exponente de convergencia y el producto de los factores canónicos asociados a los ceros de la función $f(z) = \mathrm{senh}(\pi z)$.

$f(z) = 0 \iff \sinh(\pi z) = 0 \Rightarrow \pi z = n\pi i \Rightarrow z_n = ni$ (de orden 1) con $n \in \mathbb{N}$, $\mu = \inf\{k > 0 : \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z_n|^k} < \infty\}$ con $|z_n| = ni$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(ni)^k}$ converge si $k > 1 \Rightarrow \boxed{\mu = 1}$

Los factores canónicos son $E_m\left(\frac{z}{z_n}\right) = \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\frac{z}{z_n} + \frac{z^2}{2 z_n^2} + \dots + \frac{z^m}{m z_n^m}\right)$ y como el exponente de convergencia de f es $1 \Rightarrow E_0\left(\frac{z}{z_n}\right) = \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^0 = \left(1 - \frac{z}{ni}\right)$

$$\prod_{n=-\infty, \neq 0}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{ni}\right) = \prod_{-\infty}^{-1} \left(1 - \frac{z}{ni}\right) + \prod_{1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{ni}\right) = \prod_{1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{ni}\right) + \prod_{1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{ni}\right) = \prod_{1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{ni}\right)\left(1 - \frac{z}{ni}\right) =$$

$$= \boxed{\prod_{1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)}$$

c) *(0,75 puntos)* Utilizando los apartados anteriores, calcular la factorización de la función $g(z) = \mathrm{senh}\, z$.

los ceros ahora son en $z_n = \pi n i$

Por el T^{ma} de Factorización de Weiestrass, sabemos que $\Rightarrow f(z) = z \prod_{n=-\infty, \neq 0}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi i}\right) = z \prod_{1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$

d) *(0,75 puntos)* Aplicar el teorema de factorización de Hadamard para probar que no existe una función entera de orden $\frac{3}{2}$ cuyo conjunto de ceros sea $\{n^2 + in^2,\ n = 1, 2 \dots\}$.

$\mu = \inf\{k > 0 : \frac{1}{|z_n|^k} < \infty\}$

Si $z_n = n^2(1+i) \Rightarrow |z_n| = n^2\sqrt{2}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n^2\sqrt{2})^k} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2}^k n^{2k}}$ converge si $2k > 1 \Rightarrow k > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ ✓

[...]

Ejercicio 2.

2.1) *(0,75 puntos)* Enunciar el teorema de clasificación de singularidades.

T^{ma} de Clasificación de Singularidades

- Decimos que una singularidad es aislada si existe un entorno en el plano complejo que la contiene únicamente
- Decimos que una singularidad es esencial si $\lim_{z \to z_0} \neq \infty$ y $\lim_{z \to z_0} \neq k$
- Decimos que una singularidad es un polo si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ y su orden es el exponente de crecimiento en este límite
- Decimos que una singularidad aislada es evitable si f es extensible analíticamente a z_0, es decir, que $\exists g$ definida en un entorno de z_0 tal que $f(z) = g(z)$ si $z \neq z_0$

2.2) *(0,75 puntos)* Sea f una función entera. Demostrar que

i) f tiene una singularidad evitable en ∞ si, y sólo si, f es constante;

- $(\Longrightarrow)$ Si f tiene una singularidad evitable en ∞ entonces $\exists \lim_{z \to \infty} f(z) = L$, es decir, que f es extensible analíticamente a ∞

  Tomamos $g(z) = f(\frac{1}{z})$, g es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. f extensible analíticamente a $\infty \Longrightarrow$ $\Longrightarrow g$ extensible analíticamente a $0 \Longrightarrow \exists \lim_{z \to 0} g(z) = L \Longrightarrow g$ analítica en $\mathbb{C}$ y como g es extensible analíticamente a $\mathbb{C}$ definiendo $g(0) = L$, g es entera. g está acotada en un entorno de 0, y como es entera, entonces es acotada en $\mathbb{C}$. Por el T^{ma} de Liouville, al ser g acotada y entera $\Longrightarrow g$ es constante $\Longrightarrow f$ es constante

- $(\Longleftarrow)$ si $f(z) = k \in \mathbb{C} \Longrightarrow \lim_{z \to \infty} f(z) = k \Longrightarrow f$ es extensible analíticamente a $\infty \Longrightarrow$ la singularidad de f en ∞ es aislada $\square$

ii) f tiene un polo en ∞ si, y sólo si, f es un polinomio no constante;

- $(\Longrightarrow)$ Asumimos que f tiene un polo en ∞ y además es constante, $\Longrightarrow f(z) = k \Longrightarrow \lim_{z \to \infty} f(z) = k$ pero entonces f no tiene un polo en ∞ $\lightning$
- $(\Longleftarrow)$ f es un polinomio no constante $\left(f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : a_n \neq 0 \text{ para algún } n > 0\right)$ y asumimos que f no tiene un polo en $\infty \Longrightarrow \lim_{z \to \infty} f(z) = k = \lim_{z \to \infty} \sum_n a_n z^n$ pero este límite diverge con la definición de f y por tanto f tiene un polo en ∞ $\lightning$ $\square$

iii) f tiene una singularidad esencial en ∞ si, y sólo si, f no es un polinomio.

Como f es entera, ∞ puede ser un polo, una singularidad evitable o una singularidad esencial.

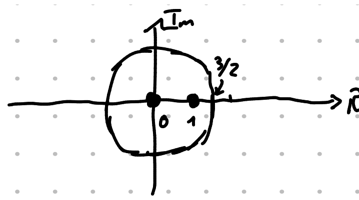
Por i) f no constante $\Longleftrightarrow \infty$ no es una singularidad evitable $((a \Longleftrightarrow b) \Longrightarrow (\bar{a} \Longleftrightarrow \bar{b}))$

ii) f no constante $\Longleftrightarrow$

Ejercicio 3. Calcular las siguientes integrales:

3.1) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$ (*1 punto*);

$z(1-z)^3=0 \Rightarrow z_2=0 \vee (1-z)^3=0 \Rightarrow z_1=1$ polo de orden 3



$z_1, z_2 \in D(0,3/2) \Rightarrow f(z)=\frac{e^z}{z(1-z)^3}$: $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j^{2} Res(f, z_j)$ con

γ el círculo centrado en 0 de radio $3/2$ curva cerrada, simple, regular por lo que podemos aplicar el T^{ma} de los Residuos (D es simplemente conexo)

- $Res(f,0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(1-z)^3} = 1$

- $Res(f,1) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3\frac{e^z}{z(1-z)^3}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left(\cancel{(z-1)^3}\frac{-e^z}{z\cancel{(z-1)^3}}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z}\right) =$

$= -\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z z - e^z}{z^2}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2} + \frac{(z-1)}{z^2}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z z^2 - 2ze^z}{z^4} + \frac{z^2-2z(z-1)}{z^4}\right) =$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e-2e}{1} + \frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2}(-e+1) = \frac{e-1}{2}$

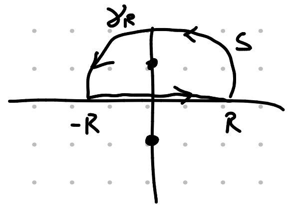
$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = 2\pi i\left(\frac{e-1}{2}+1\right) = \pi i(e+1)$

3.2) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$ (*1,5 puntos*).

cos(x) es par

$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx = Re\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx\right)$

Sea $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ la extensión a $\mathbb{C}$ $(z^2+1)^2=0 \Rightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow$ $z=\pm i$ polos de orden 2 $\Rightarrow$ 2 polos $z_j = \{i,-i\}$ de orden 2



Tomando el semicírculo de radio $R>1$ centrado en el origen y el segmento que une los extremos del semicírculo a través del eje real recorrido en sentido positivo, obtenemos una curva Γ regular, cerrada y simple que encierra una singularidad únicamente. Como el conjunto que forma su interior es simplemente conexo $\Rightarrow$ podemos aplicar el T^{ma} de los Residuos.

$Res(f,i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\right) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-i)^2}\frac{e^{iz}}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dx}\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} =$

$= \lim_{z\to i}\frac{ie^{iz}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{iz}}{(z+i)^4} = e^{-1}\left(\frac{i(2i)^2-4i}{(2i)^4}\right) = -e^{-1}\left(\frac{i}{4}+\frac{4}{16i^3}\right) = -e^{-1}\left(\frac{i}{4}-\frac{1}{4i}\right) = -e^{-1}\left(\frac{i}{4}+\frac{i}{4}\right) = \frac{-i}{2e}$

$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\, Res(f,i) = 2\pi i\left(-ie^{-1}\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{e} = \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{\Gamma_R} f(z)$

Lema de Jordan $\left|\int_{\gamma_R} g(z)e^{iaz}dz\right| \leq \frac{\pi M_g(\gamma_R)}{a}(1-e^{-Ra})$ con $M_g(\gamma_R) = \max\{|g(z)|, z\in\gamma_R^*\}$

Si definimos $h(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} \Rightarrow \left|\frac{1}{(z^2+1)^2}\right| = \frac{1}{|z^2+2z+1|} \leq \frac{1}{|z^2|-|2z+1|} \leq \frac{1}{|z^2|-|1|-2|z|} \leq \frac{1}{R^2-2R-1}$

DTI: $|a+b| \geq |a|-|b|$

$|z|\leq R$

$|2z+1| \geq |2z|-|1| \Leftrightarrow -|2z+1| \leq |1|-|2z|$

$\Rightarrow M_g(\gamma_R) = \frac{1}{R^2-2R-1} \Rightarrow \left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{\gamma_R} g(z)e^{iz}dz\right| \leq \frac{\pi}{R^2-2R-1}(1-e^{-R}) \xrightarrow{R\to\infty} 0$

$\Rightarrow \int_{-R}^{R} f(x)dx \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\Gamma_R} f(z)dz - \cancelto{0}{\int_{\gamma_R} f(z)dz} =$

$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}Re\left(\frac{2\pi i}{e}+\frac{\pi}{2e}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{e} = \frac{\pi}{2e}$

Ejercicio 4. (0,75 *puntos*) De una función entera f se sabe que $|f(z)| < 5|e^z|$ $\forall z \in \mathbb{C}$ y que $f(0) = 1$. Calcular la función f.

Definimos $g(z) = \frac{f(z)}{e^z} \Rightarrow |g(z)| < 5 \Rightarrow$ al ser f y e^z enteras su composición también lo es y como g está acotada $\Rightarrow$ g es constante (Liouville)

$g(z) = K = \frac{f(z)}{e^z} \Longleftrightarrow f(z) = Ke^z$ y usando que $f(0) = 1$, $f(0) = Ke^0 = K = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{f(z) = e^z}$ – holomorfa en $\mathbb{C} \rightarrow$ entera

– $f(0) = e^0 = 1$ ✓

– $|f(z)| = |e^z| < 5|e^z|$ $\forall z \in \mathbb{C}$ ✓

Ejercicio 1.

1.1) (1,2 *puntos*) Enunciar y demostrar el principio de identidad.

Sea $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa sobre U abierto conexo y $Z(f)$ tiene algún punto de acumulación en U $(\exists \{z_n\} \subseteq Z(f) : \lim_{n \to \infty} z_n \in U) \Longrightarrow f(z) = 0$ $\forall z \in U$

↳ A consecuencia tendremos el Principio de Prolongación Analítica:

Sean f, g dos funciones holomorfas en $D \subset \mathbb{C}$, si tienen al menos un punto de acumulación en común, entonces f y g son iguales en D

La demostración se basa en el hecho de que una función g holomorfa que no es idénticamente cero tiene ceros que son aislados (Teorema de los ceros aislados – los ceros de una función holomorfa no son acumulativos a menos que la función sea idénticamente cero). Si estos ceros aislados tienen un punto de acumulación, la única posibilidad es que la función sea idénticamente cero en todo el dominio.

1.2) (0,3 *puntos*) Sea f una función entera tal que $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$. Utilizando el apartado anterior probar que f tiene, a lo sumo, una cantidad finita de ceros.

Suponemos que f tiene una cantidad infinita de ceros: $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$

Por Bolzano-Weiestrass sabemos que un conjunto infinito y acotado tiene al menos un punto de acumulación $\Rightarrow \{z_n\}$ tiene al menos un punto de acumulación y por el T^{ma} de Identidad sabemos que entonces $f \equiv 0$ pero entonces es imposible que $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$ ↯