

1. Enunciar y demostrar el teorema de Caserati-Weierstrass. (1pto)

— Si  $z_0$  es una singularidad esencial de  $f$ , probar que no existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  en  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . (0.5 pts)

Sea  $z_0$  una singularidad esencial de  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en  $D \setminus \{z_0\}$   
 $z \rightarrow z_0$  y  $|f(z) - w| < \varepsilon \quad \forall w \in D$   
 $\hookrightarrow |z - z_0| < \delta \quad \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0$

Es decir, que en las proximidades de una singularidad esencial la función se aproxima arbitrariamente a cualquier número complejo. Una singularidad se dice esencial si no es un polo ( $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ ) ni un  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = k$

R. Abs.

Si  $|z - z_0| < \delta$  pero  $|f(z) - w| \geq \varepsilon$  y  $g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$  holomorfa en  $D$  excepto en los polos de  $f$

$$\iff f(z) = \frac{1}{g(z)} + w$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0 \Rightarrow f(z) \text{ tiene un polo en } z_0 \quad \nexists$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0 \Rightarrow z_0 \text{ no es singularidad de } f \quad \nexists$$

R. Abs

(1) Asumimos que  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = k$ , pero por definición de  $z_0$  como singularidad esencial,  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \neq \infty$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \neq k \quad \nexists$

(2) Asumimos que  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ , pero por definición de  $z_0$  como singularidad esencial,  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \neq k$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \neq \infty \quad \nexists$

Por (1) y (2)  $\Rightarrow$  Si  $z_0$  es singularidad  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq k$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq \infty \Rightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  en  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

2. Sea  $f(z) = \frac{\log(\sinh(z))}{z^2 + 2}$ . Clasificar sus singularidades incluyendo infinito. (1.5 pts)

— Hallar el residuo de sus singularidades aisladas. (0.5 pts)

$$f(z) = \frac{\log(\sinh(z))}{z^2 + 2} \quad \text{singularidades en } z^2 + 2 = 0 \iff z^2 = -2 \iff z = \pm i\sqrt{2} \rightarrow \text{Aisladas, polos orden 1}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\log(\sinh(z))}{z^2 + 2} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\log(\sinh(\frac{1}{w}))}{\frac{1}{w^2} + 2} = 0 \Rightarrow \text{Aislada, no es un polo porque } \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \neq \infty$$

$\log(z)$  tiene problemas de analiticidad en  $\text{Re}(z) \leq 0$   $\rightarrow \log(\sinh(z))$  tendrá problemas de analiticidad para  $\sinh(z) \leq 0$

$$\text{arcsinh}(0) = 0$$

falta encontrar cuándo  $\text{Re}(\sinh(z)) < 0$

$$\text{Re}(\sinh(z)) = \text{Re}\left(\frac{1}{2}(e^z - e^{-z})\right) < 0 \iff \text{Re}(e^z - e^{-z}) < 0 \iff \text{Re}(e^{2z} - 1) < 0 \iff \text{Re}(e^{2z}) < 1 \iff$$

$$\iff 2x < 0 \iff x < 0 \quad \text{con } z = x + yi$$

$\Rightarrow \text{Re}(z) \leq 0$  singularidades no aisladas

$$\text{Res}(\infty, f), \text{Res}(i\sqrt{2}, f), \text{Res}(-i\sqrt{2}, f)$$

$$z^2 + 2 = 0 \iff z = \pm i\sqrt{2} \iff z^2 + 2 = (z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2})$$

$$\text{Res}(i\sqrt{2}, f) = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2}} (z - i\sqrt{2}) f(z) = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2}} (z - i\sqrt{2}) \frac{\log(\sinh(z))}{z^2 + 2} = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2}} \frac{\log(\sinh(z))}{(z + i\sqrt{2})} = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2}} \frac{\log(\sinh(z))}{z + i\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\log(\sinh(i\sqrt{2}))}{i2\sqrt{2}}$$

$$\text{Res}(-i\sqrt{2}, f) = \frac{\log(\sinh(-i\sqrt{2}))}{-i2\sqrt{2}}$$

$$\text{Res}(\infty, f) = \lim_{w \rightarrow 0} w \frac{\log(\sinh(\frac{1}{w}))}{\frac{1}{w^2} + 2} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w^3 \log(\sinh(\frac{1}{w}))}{1 + 2w^2} = 0$$

6. Dado  $\alpha \in \mathbb{N}$  y  $f(z) = \sinh(\pi z^\alpha)$

i) Calcular formalmente el exponente de convergencia. (0.75 pts)

ii) Si  $\alpha = 1$ , hallar la factorización de Hadamard de  $f$ . (1 pto)

$$f(z) = 0 \iff \sinh(\pi z^\alpha) = 0 \iff z^\alpha = \frac{1}{\pi} n \pi i = n i \iff z = \sqrt[\alpha]{n i}$$

$$M = \inf\{k > 0 : \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z_n|^k} < \infty\} \text{ con } |z_n| = \sqrt[\alpha]{n i}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n i)^{k/\alpha}} \text{ converge si } \frac{k}{\alpha} > 1 \Rightarrow k > \alpha \Rightarrow M = \alpha$$

$g(z)?$

$$\text{Si } \alpha = 1 \quad f(z) = \sinh(\pi z) \quad f(z) = e^{g(z)} \prod_k (1 - \frac{z}{z_k}) = e^{g(z)} \prod_k (1 - \frac{z}{(n i)^k})$$

5. Determinar el número de raíces de  $e^z - 5z^3 + 2 = 0$  en  $D(0, 1)$  (0.75 pts)

D disco centrado en cero y de radio uno (disco unidad)

Vamos a usar el Tma de Rouché, que si  $g, h$  son holomorfas en un dominio simplemente conexo  $D$ ,  $|g(z)| > |h(z)|$  en  $\partial D$ , entonces  $g(z)$  y  $g(z) + h(z)$  tienen el mismo número de ceros en  $D$ .

$$f(z) = g(z) + h(z) = e^z - 5z^3 + 2 \Rightarrow g(z) = -5z^3 \quad h(z) = e^z + 2$$

$\hookrightarrow$  holomorfa en  $\mathbb{C}$  por ser un polinomio

$$e^z = e^{x+iy}, \text{ verificamos holomorfía con Cauchy-Riemann} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$g(z) = u(x, y) + i v(x, y) = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y) = e^x \cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow e^z \text{ es holomorfa en } \mathbb{C}$$

Como  $g, h$  son holomorfas en  $\mathbb{C}$ , lo son también en  $D \Rightarrow$  Podemos aplicar el Tma de Rouché  
El disco unidad es simplemente conexo

$$|g(z)| = |-5z^3| = 5 > e + 2 = |e^z + 2| = |h(z)| \Rightarrow f(z) = g(z) + h(z) \text{ tiene el mismo número de ceros en } D \text{ que } g(z) \text{ en } D$$

Como  $g(z) = -5z^3$  es un polinomio de grado 3, por el Tma Fundamental del Álgebra, sabemos que tendrá 3 raíces

$$g(z) = 0 \Rightarrow -5z^3 = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ con multiplicidad 3 y } 0 \in D \Rightarrow f(z) \text{ tiene 3 ceros en } D$$

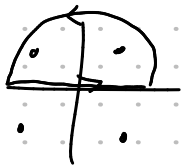
4. Utilizar el teorema de los residuos en la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{9x \sin(\pi x)}{x^4 + 4} dx. \quad (2 \text{ pts})$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{9x \sin(\pi x)}{x^4 + 4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{9x (e^{i\pi x} - e^{-i\pi x})}{2i(x^4 + 4)} dx = \frac{9}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{i\pi x}}{x^4 + 4} dx - \frac{9}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-i\pi x}}{x^4 + 4} dx$$

$$\text{Tendremos problemas de analiticidad cuando } x^4 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = i+1 \\ x_2 = -i+1 \\ x_3 = -i-1 \\ x_4 = i-1 \end{cases}$$



$$\text{Solo tendremos en cuenta } x_1 \text{ y } x_4 \quad f(x) = \frac{x e^{i\pi x}}{x^4 + 4}$$

$$\text{Res}(f, x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1) \frac{x e^{i\pi x}}{x^4 + 4} = \lim_{x \rightarrow i+1} (x - i - 1) \frac{x e^{i\pi x}}{(x - i - 1)(x + i - 1)(x + i + 1)(x - i + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow i+1} \frac{x e^{i\pi x}}{(x + i - 1)(x + i + 1)(x - i + 1)} = \frac{(i+1) e^{\pi(i+1)}}{2i(2i+2) \cdot 2} = \frac{e^{\pi(i+1)}}{8i}$$

$$\text{Res}(f, x_4) = \lim_{x \rightarrow i-1} (x - i + 1) \frac{x e^{i\pi x}}{(x - i - 1)(x + i - 1)(x + i + 1)(x - i + 1)} = \frac{(i-1) e^{-\pi(i+1)}}{-2 \cdot 2i \cdot 2 \cdot 2i} = \frac{e^{-\pi(i+1)}}{-8i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{i\pi x}}{x^4 + 4} dx = \frac{2\pi i}{8i} (e^{\pi(i+1)} - e^{-\pi(i+1)}) = \frac{\pi}{4} (e^{\pi(i+1)} - e^{-\pi(i+1)})$$

Análogamente para  $g(x) = \frac{x e^{-i\pi x}}{x^4 + 4}$

$$\text{Res}(g, x_1) = \lim_{x \rightarrow i+1} \frac{x e^{-i\pi x}}{(x+i-1)(x+i+1)(x-i+1)} = \frac{e^{-\pi(i-1)}}{8i} \quad \text{Res}(g, x_2) = \frac{e^{\pi(i+1)}}{-8i} \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-i\pi x}}{x^4 + 4} dx = \frac{2\pi i}{8i} (e^{-\pi(i-1)} - e^{\pi(i+1)}) = \frac{\pi}{4} (e^{-\pi(i-1)} - e^{\pi(i+1)})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q x \sin(\pi x)}{x^4 + 4} dx = \frac{q}{2i} \cdot \frac{\pi}{4} \left( (e^{\pi(i-1)} - e^{-\pi(i+1)}) - (e^{-\pi(i-1)} - e^{\pi(i+1)}) \right) =$$

$$= \frac{q\pi}{8i} \left( \underbrace{e^{\pi(i-1)}}_{-e^{-\pi}} - \underbrace{e^{-\pi(i+1)}}_{e^{\pi}} + \underbrace{e^{\pi(i+1)}}_{-e^{\pi}} - \underbrace{e^{-\pi(i-1)}}_{e^{-\pi}} \right) = 0$$

3. Calcular las siguientes integrales.

i)  $\int_{C(i,3)} \frac{1}{(z^2+9)^3} dz$  mediante fórmulas de Cauchy. (1 pto)

$$(z^2+9)^3 = 0 \Rightarrow z^2+9=0 \rightarrow z = \pm 3i$$

Dos polos de orden 1

$$\int_{C(i,3)} \frac{1}{(z^2+9)^3} dz = \int_{C(i,3)} \frac{1}{((z-3i)(z+3i))^3} dz = \int_{C(i,3)} \frac{1}{(z-3i)^3 (z+3i)^3} dz = \int_{C(i,3)} \left( \frac{A}{(z-3i)^3} + \frac{B}{(z+3i)^3} \right) dz =$$

$$\left[ \begin{aligned} \frac{A}{(z-3i)^3} + \frac{B}{(z+3i)^3} &= \frac{A(z+3i)^3 + B(z-3i)^3}{(z-3i)^3 (z+3i)^3} \Rightarrow A(z+3i)^3 + B(z-3i)^3 = 1 \Rightarrow \\ \rightarrow A(z^3 + 9iz^2 - 27z - 27i) + B(z^3 - 9iz^2 - 27z + 27i) &\Rightarrow \begin{cases} A(9z^2 - 27) + B(-9z^2 + 27) = 0 \Rightarrow A = B \\ A(z^3 - 27z) + B(z^3 - 27z) = 1 \Leftrightarrow \end{cases} \\ \Leftrightarrow A = B = \frac{1}{2z(z^2 - 27)} \end{aligned} \right]$$

$$= \int_{C(i,3)} \frac{1}{2z(z^2-27)(z-3i)^3} dz + \int_{C(i,3)} \frac{1}{2z(z^2-27)(z+3i)^3} dz =$$

