GRADO EN FÍSICA, CURSO 2021-2022

MECÁNICA CUÁNTICA I

Examen Final, 28 de enero de 2022

1. Una partícula de masa m se encuentra en un pozo de potencial cuadrado infinito de anchura a. Su estado inicial ($t = 0$) viene dado por:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A, & 0 \leq x \leq a/2 \\ 0, & a/2 < x \leq a \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Calcula el valor de la constante A

   (b) Calcula la probabilidad de que en un tiempo posterior, t, al medir la energía se obtenga el valor: $\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$

   (c) Si se vuelve a medir la energía en un tiempo inmediatamente posterior ¿qué valor se obtendría y por qué? Escribe la función de onda resultante.

   Recuerda que para el pozo infinito las autofunciones $\psi(x)$ de energía definida $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ son $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$.

   (2 puntos)

2. Calcula las siguientes relaciones de conmutación entre operadores:
   (a) $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ (b) $[\hat{x}, \hat{p}_y]$ (c) $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$

   Explica qué implica, desde un punto de vista físico, que dos operadores conmuten o no y qué se puede inferir sobre sus autoestados o autovectores. (2 puntos)

3. Considera dos sistemas A y B de forma que un estado genérico de A será: $|A>= a_+|+> + a_-|->$ y uno de B será: $|B>= b_\uparrow|\uparrow> + b_\downarrow|\downarrow>$

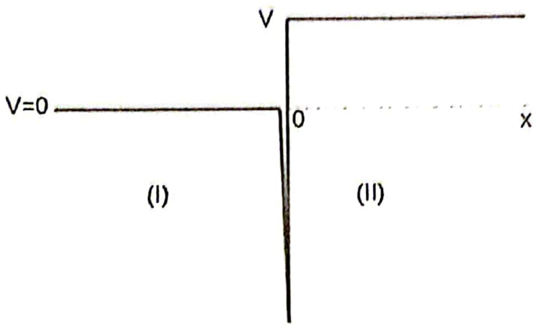
   (a) ¿Cuándo podemos decir que el estado $|AB>$ del sistema compuesto es no correlacionado?

   (b) ¿Cómo calcularías la probabilidad de que B se encuentre en el estado $|\uparrow>$ sabiendo que A se encuentra en el estado $|+>$?

   (c) ¿Cuándo podemos decir que son sistemas correlacionados? Explica qué implicaciones tiene para el sistema B realizar una medida en A y viceversa.

   (2 puntos)

4. Supongamos un potencial unidimensional que consiste en una función escalón de altura V para $x \geq 0$ y un pozo de potencial localizado en $x = 0$ a través de una delta de Dirac $-\alpha\delta(x)$, donde α es una constante positiva, tal y como se representa en la figura.



Problema 4

(a) Considera partículas incidentes desde la izquierda (esto es, la solución asintótica en $x \to -\infty$ está definida por una onda plana de momento definido). Si la energía es mayor que V, $E > V$:

i. Escribe la expresión de $\psi(x)$ en cada una de las dos regiones (I) y (II).

ii. Calcula la corriente de probabilidad para la onda incidente, reflejada y transmitida.

iii. Calcula los coeficientes de reflexión y de transmisión.

iv. Estima la dependencia del coeficiente de reflexión con la energía de la partícula en el límite en que esta energía es mucho mayor que V, $E \to \infty$.

(b) Considera el caso en el que $E < 0$. Determina las autofunciones y autovalores de los estados ligados, si existen.

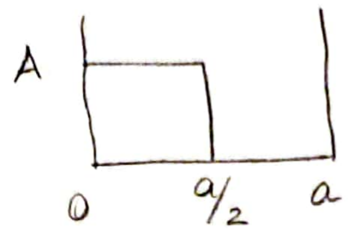
Corriente de probabilidad: $J(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$

Discontinuidad en la derivada: $\Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(x_d)$;
donde x_d depende de la posición de la función delta.

(4 puntos)

① m, a

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A & 0 < x \leq a/2 \\ 0 & a/2 < x \leq a \end{cases}$$



ⓐ Calcula A.

Para calcular A aplicamos la normalización de la función:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 dx = 1 \rightarrow \int_0^{a/2} |A|^2 dx = 1$$

$$|A|^2 \frac{a}{2} = 1 \rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{2}{a}}} \quad (0,5 \text{ puntos})$$

ⓑ Probabilidad de medir una energía $E = \frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$

La función es superposición de estados de energía definida: $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

En este caso la energía se corresponde a $n=2$.

y la probabilidad de medir esta energía vendrá dada por el coeficiente $|c_2|^2$, con

$$c_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2^* \Psi(x,0)\, dx$$

con $\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$

$$c_2 = \int_0^{a/2} \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sqrt{\frac{2}{a}}\, dx = \frac{2}{a} \int_0^{a/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx =$$

$$= -\frac{2}{a}\frac{a}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{a}{2}\right)+\frac{2}{a}\cdot\frac{a}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{a}\cdot 0\right)=\frac{2}{\pi}$$

$$\boxed{|c_2|^2=\frac{4}{\pi^2}}$$ (1 punto)

(c) Colapso de la función de onda. Explicar. (0,5 puntos)

(2) (a) $[\hat{x},\hat{p}_x]$ $\qquad \hat{x}=x\ ;\ \hat{p}_x=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

$$[\hat{x},\hat{p}_x]f=-i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}f+i\hbar\frac{\partial}{\partial x}xf=$$

$$=\cancel{-i\hbar x\frac{\partial f}{\partial x}}+\cancel{i\hbar x\frac{\partial f}{\partial x}}+i\hbar f=i\hbar f$$

$$\boxed{[\hat{x},\hat{p}_x]=i\hbar}$$ (0,25 puntos)

(b) $$[\hat{x},\hat{p}_y]f=-i\hbar x\frac{\partial f}{\partial y}+i\hbar\frac{\partial}{\partial y}xf=$$

$$=-i\hbar x\frac{\partial f}{\partial y}+i\hbar x\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

$$\boxed{[\hat{x},\hat{p}_y]=0}$$ (0,25 puntos)

(c) $[\hat{L}_x,\hat{L}_y]$ $\qquad \vec{L}=\vec{r}\wedge\vec{p}$

$$\vec{L}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z\end{vmatrix}=(\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\cdot\hat{p}_y)\vec{i}+(\hat{z}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_z)\vec{j}+(\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\cdot\hat{p}_x)\vec{k}$$

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$$
$$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z] =$$
$$= [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z] +$$
$$+ [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] = \hat{y}\underbrace{[\hat{p}_z, \hat{z}]}_{-i\hbar}\hat{p}_x + \underbrace{[\hat{z}, \hat{p}_z]}_{i\hbar}\hat{p}_y\hat{x} =$$
$$= -i\hbar(\hat{y}\hat{p}_x - \hat{p}_y \cdot \hat{x}) = i\hbar(\underbrace{\hat{p}_y \cdot \hat{x} - \hat{y}\hat{p}_x}_{\hat{L}_z})$$

$$\boxed{[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z}$$ (0,5 puntos)

Explicar la relación entre conmutación entre operadores y el principio de incertidumbre de Heisenberg generalizado. Explicar la existencia de un conjunto completo de autofunciones simultaneas en el caso de operadores que conmutan.

(1 punto)

3

(a) Si el estado $|AB\rangle$ puede escribirse como el producto de $|A\rangle|B\rangle$ el sistema es no correlacionado. Para el caso del problema:

$$|AB\rangle = a_+ b_\uparrow |+\uparrow\rangle + a_+ b_\downarrow |+\downarrow\rangle + a_- b_\uparrow |-\uparrow\rangle + a_- b_\downarrow |-\downarrow\rangle$$

(0,5 punto)

(b) $$P(B\uparrow, A+) = \frac{|a_+ b_\uparrow|^2}{|a_+ b_\uparrow|^2 + |a_+ b_\downarrow|^2} = \frac{1}{1 + \left|\frac{b_\downarrow}{b_\uparrow}\right|^2}$$

Si no son correlacionados. La probabilidad no depende de a_+. (1 punto)

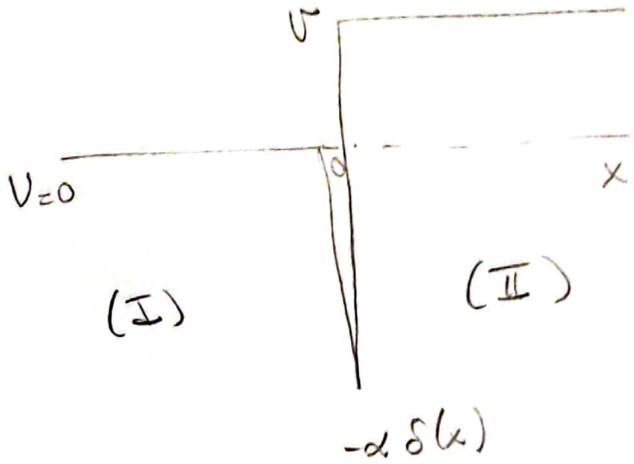
(c) Cuando el estado A depende de B y no podemos escribirlo como el producto.

$$c_{ij} \neq a_i a_j$$

La medida en uno de ellos determina el estado del segundo. (0,5 punto)

Scanned with CamScanner

4



(a) $E > V$ partículas desde la izquierda

i. $\psi(x)$ en las regiones (I) y (II)

(I) $V=0$ $\quad \psi_I \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2}\psi$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi$$

Soluciones: $\psi_I = \underbrace{Ae^{ikx}}_{\text{onda incidente}} + \underbrace{Be^{-ikx}}_{\text{onda reflejada}}$.

(II) V $\quad \psi_{II} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\underbrace{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}_{l^2}\psi$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -l^2\psi$$

Soluciones: $\psi_{II} = \underbrace{Ce^{ilx}}_{\text{onda transmitida}} + \cancel{De^{-ilx}}$ si viene de la izquierda.

$$\boxed{\begin{array}{l} (I) \quad \psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ (II) \quad \psi_{II} = Ce^{ilx} \end{array}}$$

(0,5 puntos)

ii. J_{in}, J_{ref}, J_{tran}.

$$\psi_{in} = A e^{ikx} \qquad \psi_{in}^{*} = A e^{-ikx}$$

$$\boxed{J_{in} = \frac{i\hbar}{2m}\left(-|A|^2 e^{ikx} ik e^{-ikx} - |A|^2 e^{-ikx} ik e^{ikx}\right) = \frac{\hbar}{m} k |A|^2}$$

$$\psi_{ref} = B e^{-ikx} \; ; \; \psi_{ref}^{*} = B e^{ikx}$$

$$\boxed{J_{ref} = -\frac{\hbar}{m} k |B|^2}$$

$$\psi_{tran} = C e^{i\ell x} \; ; \; \psi_{tran}^{*} = C e^{-i\ell x}$$

$$\boxed{J_{tran} = \frac{\hbar}{m} \ell |C|^2}$$

(0,5 puntos)

iii. $$R = \left|\frac{J_{ref}}{J_{in}}\right| = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

$$T = \left|\frac{J_{tran}}{J_{in}}\right| = \frac{\ell}{k}\frac{|C|^2}{|A|^2}$$

Calculamos la relación entre A y B ; A y C.

Aplicamos condiciones de contorno:

$$\psi_{I}(x=0) = \psi_{II}(x=0)$$

$$A + B = C \qquad (1)$$

La primera derivada tiene una discontinuidad por existir una función delta:

$$\Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(x=0)$$

Scanned with CamScanner

$$\left.\frac{d\Psi_{II}}{dx}\right|_{x=0} - \left.\frac{d\Psi_{I}}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\cdot C$$

$$② \quad i\ell C - (ikA - ikB) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\cdot C$$

Con las ecuaciones ① y ②:

$$① \quad A + B = C$$

$$② \quad \left(i\ell + \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\right)C = ikA - ikB$$

$$\left(i\ell + \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\right)C = ikA - ikC + ikA$$

$$\left(i\ell + \frac{2m\alpha}{\hbar^2} + ik\right)C = 2ikA$$

$$C = \frac{2ik}{i\ell + \frac{2m\alpha}{\hbar^2} + ik}\cdot A$$

$$B = C - A = \left(\frac{2ik}{i\ell + \frac{2m\alpha}{\hbar^2} + ik} - 1\right)A$$

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \left(\frac{2ik}{i\ell + \frac{2m\alpha}{\hbar^2} + ik} - 1\right)^2 \\ T &= \frac{\ell}{k}\left(\frac{2ik}{i\ell + \frac{2m\alpha}{\hbar^2} + ik}\right)^2 \end{aligned}}$$

(1 punto)

iv.) $E >> U$ $\quad E \to \infty$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad l = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} \longrightarrow k \simeq l$$

$$R = \left(\frac{2ik}{il + \frac{2m\alpha}{\hbar^2} + ik} - 1 \right)^2 \simeq \left(\frac{2ik}{2ik + \frac{2m\alpha}{\hbar^2}} - 1 \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\cancel{2ik} - \cancel{2ik} - \frac{2m\alpha}{\hbar^2}}{2ik + \frac{2m\alpha}{\hbar^2}} \right)^2 = \left(\frac{-2m\alpha/\hbar^2}{2ik + \frac{2m\alpha}{\hbar^2}} \right)^2$$

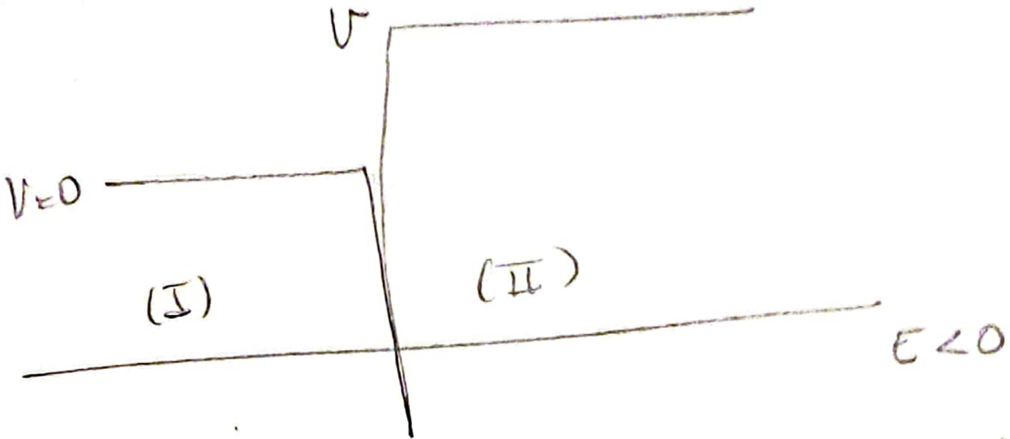
$$\text{Si } E \to \infty \to R \simeq \left(\frac{-2m\alpha/\hbar^2}{2ik} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{-2m\alpha^2/\hbar^2}{2i\sqrt{2mE}/\hbar} \right)^2 \propto \frac{1}{E}$$

Si $E \to \infty$ $\quad R \to 0$

Recuperamos el caso clásico, en el que la transmisión es 1 y no hay partículas reflejadas. (0,5 puntos).

(b)



$E<0$, estados ligados, autovalores y autoestados.

(I) $\psi_I \to \quad -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = -|E|\psi$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \underbrace{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}_{K^2}\psi$$

Soluciones: $\psi_I = A e^{Kx} + \cancel{B e^{-Kx}}$ $\to 0$ para ser normalizable.

(II) $\psi_{II} \quad -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = -|E|\psi$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \underbrace{\frac{2m(|E|+V)}{\hbar^2}}_{\ell^2}\psi$$

Soluciones: $\psi_{II} = \cancel{C e^{\ell x}} + D e^{-\ell x}$

0 para ser normalizable.

Continuidad: $\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \to A = D$

Discontinuidad en la derivada

$$\left.\frac{d\psi_{II}}{dx}\right|_{x=0} - \left.\frac{d\psi_I}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}A$$

$$-\ell A - KA = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}A$$

$$-\ell - K = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}$$

$$\boxed{\ell + K = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}}$$ Determina la energía del estado ligado.

$$\frac{\sqrt{2m(|E|+V)}}{\hbar} + \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}$$

$$\sqrt{2m(|E|+V)} + \sqrt{2m|E|} = 2m\alpha$$

$$\sqrt{2m(|E|+V)} = 2m\alpha - \sqrt{2m|E|}$$

$$2m(\cancel{|E|}+V) = 4m^2\alpha^2 + \cancel{2m|E|} - 4m\alpha\sqrt{2m|E|}$$

$$2mV = 4m^2\alpha^2 - 4m\alpha\sqrt{2m|E|}$$

$$\sqrt{2m|E|} = \frac{4m^2\alpha^2 - 2mV}{4m\alpha}$$

$$\boxed{|E| = \frac{1}{2m}\left(\frac{m\alpha^2 - \frac{1}{2}V}{\alpha}\right)^2}$$ Autovalor. (1 punto)

Para obtener A normalizamos la función:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2dx = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{0}|A|^2e^{2Kx}dx + \int_{0}^{\infty}|A|^2e^{-2\ell x}dx =$$

$$= |A|^2\frac{1}{2K} + \frac{1}{2\ell}|A|^2 = 1$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{2K\ell}{\ell+K}}}$$ (0,5 punto)

$$\boxed{\begin{aligned}\psi_I &= \sqrt{\frac{2K\ell}{\ell+K}}\,e^{Kx}\\ \psi_{II} &= \sqrt{\frac{2K\ell}{\ell+K}}\,e^{-\ell x}\end{aligned}}$$ Autoestado