EXAMEN FINAL CONVOCATORIA C2. MAEDO. GRADO EN MATEMÁTICAS.

14 DE ENERO DE 2022.

Nombre y apellidos ....

Ejercicio 1. *(2'5 puntos) Resolver los siguientes problemas de valor inicial, dando los intervalos máximales de la solución.*

a) $\left.\begin{array}{c} xy' + 2y = x^3y^2 \sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi^2}, \end{array}\right\}$, *b)* $\left.\begin{array}{c} (y^2 - x)dx + 2y\, dy = 0 \\ y(2) = 1, \end{array}\right\}$, *c)* $\left.\begin{array}{c} (\sin x)^{2022}y' - 3x^2y^2 = -3x^2 \\ y(1) = -1, \end{array}\right\}$.

Ejercicio 2. *(1'5 puntos) Consideramos la ecuación diferencial* $y' + 3 - \sqrt{3x + y} = 0$*. Se pide*

1. *Demostrar que existe una única solución verificando* $y(x_0) = y_0$ *con* $3x_0 + y_0 > 0$ *y obtenerla.*
2. *Demostrar que existen infinitas soluciones verificando* $y(x_0) = y_0$ *con* $3x_0 + y_0 = 0$.

Ejercicio 3. *(1'5 puntos) Consideramos, para* $k > 0$*, el PVI* $\left.\begin{array}{c} y' = 1 + k^2y^2 \\ y(0) = 0, \end{array}\right\}$*. Se pide*

1. *Demostrar que existe una única solución.*
2. *Dar el intervalo, que nos proporciona el Teorema de Picard, de la solución de este PVI.*
3. *Obtener el intervalo maximal de la solución de este PVI.*

Ejercicio 4. *(2 puntos) Se pide para la ecuación diferencial*

$$2y'' - (a + 2)y' + ay = e^x, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

1. *La solución general, usando el método de coefientes indeterminados, de la ecuación (1), para* $a = 2$.
2. *La solución general, usando el método de variación de parámetros, de la ecuación (1), para* $a \neq 2$.

Ejercicio 5. *(1'5 puntos) Consideremos la ecuación diferencial con coeficientes continuos sobre un intervalo* I

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{2}$$

de la que conocemos una solución particular no nula en I, $y_1(x)$*. Demostrar que el cambio de variable* $y(x) = y_1(x)z(x)$*, reduce la ecuación diferencial (2) a una lineal de orden 1 en la variable* $w(x) = z'(x)$ *que nos permite obtener junto a* $y_1(x)$ *un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial (2) en* I*. Como aplicación de este ejercicio, se pide dar la solución general y los posibles intervalos de definición de las soluciones, sabiendo que un polinomio de grado 1 es solución de la ecuación diferencial*

$$(x - 1)^2y'' - 2(x - 1)y' + 2y = 0.$$

Ejercicio 6. *(1 punto) Demostrando previamente que* $x_0 = 0$ *es un punto singular regular de la ecuación* $x^2y'' + 3xy' + 4x^4y = 0$*, dar la solución general.*