Una carga puntual dependiente del tiempo $q(t)$ situada en el origen, $\rho(\vec{\mathbf{r}},t) = q(t)\delta^3(\vec{\mathbf{r}})$, está alimentada por una corriente:

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\frac{\dot{q}\vec{\mathbf{r}}}{4\pi r^3}$$

donde $\dot{q} \equiv dq/dt$.

(a) Verificar que la carga se conserva confirmando que se verifica la ecuación de continuidad.

(b) Encontrar los potenciales escalar y vector en el *gauge* de Coulomb.

(c) Obtener los campos y comprobar que éstos satisfacen las ecuaciones de Maxwell.

(a) Tenemos que comprobar que se cumple:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Calculamos $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\dot{q}}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{\dot{q}}{4\pi}\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right] =$$

usamos $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \rightarrow \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$ $\quad r \equiv |\vec{r}|$

$$= -\frac{\dot{q}}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -\dot{q}\,\delta^{\cancel{3}}(\vec{r}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

delta de Dirac

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \rightarrow \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^{\cancel{3}}(\vec{r})$$

Luego se cumple la <u>ecuación de continuidad</u>:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r})$ (delta de Dirac)

(b) En el gauge de Coulomb ($\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$) el potencial escalar vale:

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3x'$$

es decir:

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{q\,\delta^{\cancel{3}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3x'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q(t)}{r}$$

Podemos descomponer la corriente $\vec{J}$:

$$\vec{J}=\vec{J}_{longitudinal}+\vec{J}_{transversal}$$

de modo que:

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_{transversal}&=0\quad\text{(solenoidal)}\\ \vec{\nabla}\times\vec{J}_{longitudinal}&=0\quad\text{(irrotacional)}\end{aligned}\right\}$$

En nuestro caso tenemos:

$$\vec{\nabla}\times(\psi\vec{a})=(\vec{\nabla}\psi)\times\vec{a}+\psi(\vec{\nabla}\times\vec{a})$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=\underbrace{\underbrace{\left(\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right)}_{=-\frac{3\vec{r}}{r^5}}\times\vec{r}}_{=0}+\frac{1}{r^3}\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{r})}_{=0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{J}=-\frac{\dot{q}}{4\pi}\,\underbrace{\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)}_{=0}=0$$

luego: $\vec{J}_{longitudinal}=\vec{J}$; $\quad\vec{J}_{transversal}=\vec{0}$

En el gauge de Coulomb ($\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$) tenemos:

$$\Box\vec{A}=\mu_0\vec{J}_t \xrightarrow[\vec{J}_t=\vec{0}]{} \Box\vec{A}=0$$

es decir:

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$$

y de la ecuación:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}_{=0\text{ (gauge Coulomb)}}-\nabla^2\vec{A}$$

queda:

$$\vec{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{\vec{B}}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

Por simetría de la densidad de corriente $\vec{J}$ tiene que ser $\vec{B}=\vec{0}$, luego $\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$. Además $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ (gauge de Coulomb), y $\vec{A}\to\vec{0}$ en el infinito, luego $\vec{A}=\vec{0}$:

$$\underline{\underline{\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(t)}{r}\;;\quad\vec{A}=\vec{0}}}$$

(c) Los valores de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)}_{= -\frac{\vec{r}}{r^3}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(t)}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$$

es decir:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(t)}{r^3}\vec{r}\,; \qquad \vec{B} = \vec{0}$$

<u>Ecuaciones de Maxwell:</u>

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)}_{= -4\pi\,\delta^{\cancel{3}}(\vec{r})} =$$

$$= \frac{q(t)\,\delta^{\cancel{3}}(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \quad ✓$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{0} \quad ✓$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ✓$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{0} \\ \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\left(-\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\dot{q}}{r^3}\vec{r}\right) + \mu_0\varepsilon_0\left(\dfrac{\dot{q}}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0 \end{array}\right.$$

[Nótese que la corriente de desplazamiento cancela exactamente a la corriente de conducción. Físicamente se trata de una carga puntual en el origen que varía con el tiempo como corriente fluyendo simétricamente (desde el infinito)].