Mecánica Newtoniana y Relatividad
Curso 2022 - 2023

Práctica de ordenador III

Estudio del efecto del teorema de la raqueta de tenis

Rocío Ponsoda Orgilés
Grupo 3

Índice

1. Resumen y objetivos

El objetivo de esta práctica es el estudio del conocido como teorema de la raqueta de tenis, y en concreto del momento angular y la velocidad angular del cuerpo sometido a este.

2. Marco teórico

El teorema de la raqueta de tenis o del eje intermedio fue descubierto por el astronauta ruso Vladimir Dzhanibekov durante una misión soviética en los años ochenta.

Sin embargo, este efecto no fue estudiado hasta la publicación en 1989 de un artículo donde se describía este fenómeno, caracterizado por el movimiento irregular pero cíclico de un cuerpo rígido con tres momentos de inercia distintos.

Tomamos un sistema no inercial ligado al cuerpo, de forma que los ejes de inercia roten al mismo tiempo que este. Tendremos la siguiente relación entre el momento angular, la velocidad angular y el momento de fuerzas:

$$(\frac{d\vec{L}}{dt})_{rot} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M}$$

Desarrollando esta expresión y suponiendo que el cuerpo no está sometido a ninguna fuerza externa, llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$I_1\dot{\omega_1} = -(I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \quad (1)$$

$$I_2\dot{\omega_2} = -(I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \quad (2)$$

$$I_3\dot{\omega_3} = -(I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 \quad (3)$$

Si vamos derivando y sustituyendo, vamos a obtener las siguientes ecuaciones para cada uno de los ejes:

<u>Eje 1</u>

$$I_2I_3\ddot{\omega_2} = (I_2 - I_1)(I_1 - I_3)\omega_1^2\omega_2$$
$$I_2I_3\ddot{\omega_3} = (I_2 - I_1)(I_1 - I_3)\omega_1^2\omega_3$$

<u>Eje 2</u>

$$I_1I_3\ddot{\omega_1} = (I_3 - I_2)(I_2 - I_1)\omega_2^2\omega_1$$
$$I_1I_3\ddot{\omega_3} = (I_3 - I_2)(I_2 - I_1)\omega_2^2\omega_3$$

Eje 3

$$I_1 I_3 \ddot{\omega}_1 = (I_3 - I_2)(I_1 - I_3)\omega_3^2 \omega_1$$
$$I_2 I_3 \ddot{\omega}_2 = (I_3 - I_2)(I_1 - I_3)\omega_3^2 \omega_2$$

En los casos de los ejes de inercia 1 y 3, vemos cómo el factor que multiplica a la componente velocidad angular es negativo. Como la derivada segunda de dicha velocidad angular también es negativo, la rotación alrededor de estos ejes será estable para el cuerpo.

Sin embargo, en el caso del eje 2 - eje intermedio - la componente es positiva, y como la derivada segunda de la velocidad angular es negativa, la rotación ya no será estable, sino que presentará un comportamiento exponencial. Es por ello que cualquier perturbación a lo largo de los otros ejes provocará giros inesperados.

3. Cuestiones

Las cuestiones planteadas son las siguientes:

1. Comprueba en los casos estables si las variaciones de las componentes angulares no principales cumplen el comportamiento armónico predicho. Es decir, que su oscilaciones tienen una frecuencia angular que para el primer eje será:

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3}} \omega_1 \tag{4}$$

2. Comprueba que la energía cinética y que el módulo del momento angular se conservan en este caso. Comprueba que existe una ligera precesión en el eje de giro.

3. Comprueba en el caso del eje intermedio cuál es el comportamiento inicial de las componentes de la velocidad angulares respecto a los eje 1 y 3.

4. Comprueba que la energía cinética y que el módulo del momento angular se conservan en el caso del eje intermedio.

5. Dibuja la trayectoria del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$. Intenta estimar el valor del periodo y de qué factores depende.

6. Siempre se ha definido que la Tierra es una esfera achatada por los polos. Por lo que tendría dos ejes de simetría iguales y no se aplicaría el teorema. Pero, si no fuera exactamente así, ¿nos deberíamos preocupar por una posible inversión de la rotación del planeta?

3.1. Cuestión 1

Para resolver esta cuestión hemos de graficar las velocidades angulares no principales para los ejes 1 y 3. Esto lo hemos conseguido gracias a la rutina odeint de Python que nos ha permitido resolver las ecuaciones diferenciales planteadas en el apartado anterior.

En lo que corresponde a los valores inciales, hemos tomado $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$ y $\omega_{1_0} = 2$ rad/s, $\omega_{2_0} = 0{,}1$ rad/s, $\omega_{3_0} = 0{,}1$ rad/s. Nos quedan los siguientes gráficos:

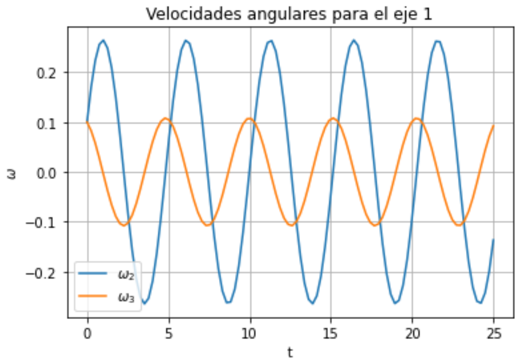


Figura 1: Variación de la velocidad angular en el eje 1

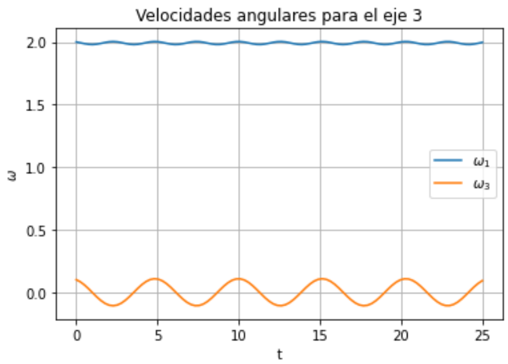


Figura 2: Variación de la velocidad angular en el eje 2

Gráficamente se ve que el periodo de las velocidades angulares es aproximadamente $T = 5$ s. Por definición, la frecuencia de un movimiento armónico como el que tenemos es $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Así:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5} = 1{,}256$$

Veamos ahora el valor de la frecuencia angular calculada con la expresión (4):

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3}}\omega_1 = \sqrt{\frac{(1-2)(1-4)}{2 \cdot 4}} \cdot 2 = 1{,}225$$

La frecuencia experimental teórica y la experimental se diferencian con un error menor a $e = 0{,}01$.

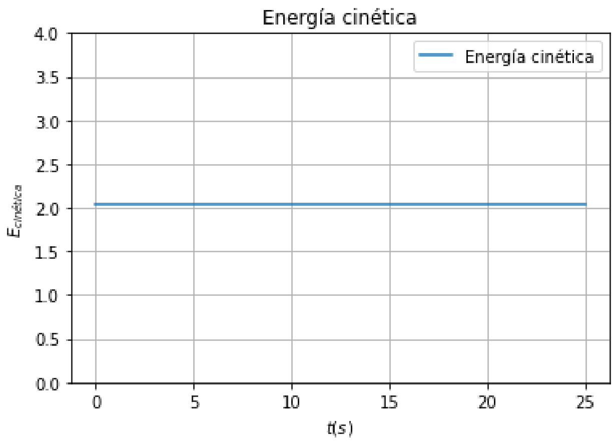
3.2. Cuestión 2

Para este movimiento la energía cinética y el momento angular se definen, respectivamente, como:

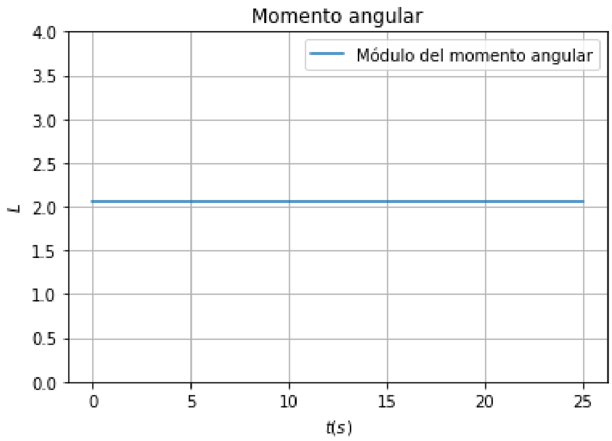
$$K = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \tag{5}$$

$$L = \sqrt{I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2} \tag{6}$$

De nuevo graficamos para los ejes 1 y 3 estas magnitudes:

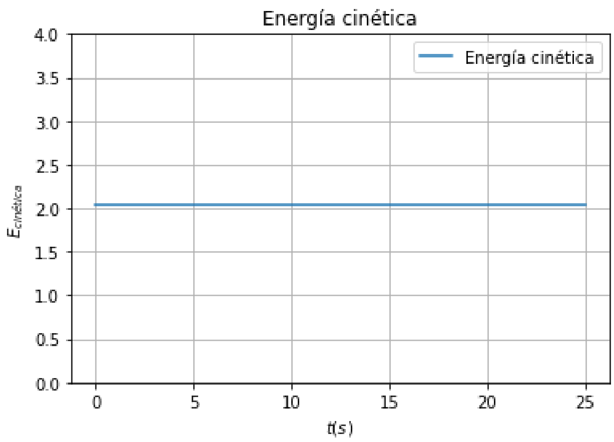


(a) Energía cinética

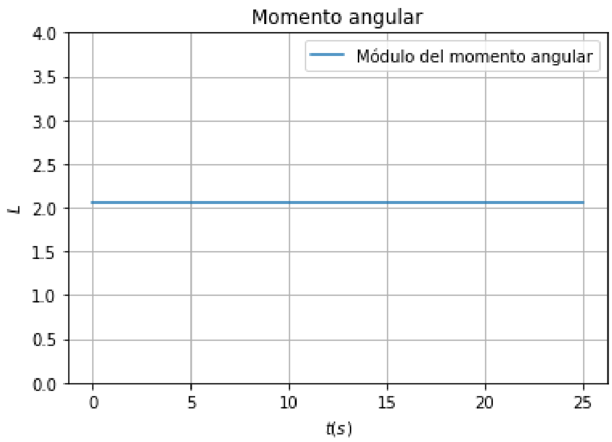


(b) Momento angular

Figura 3: Variación en el eje 1



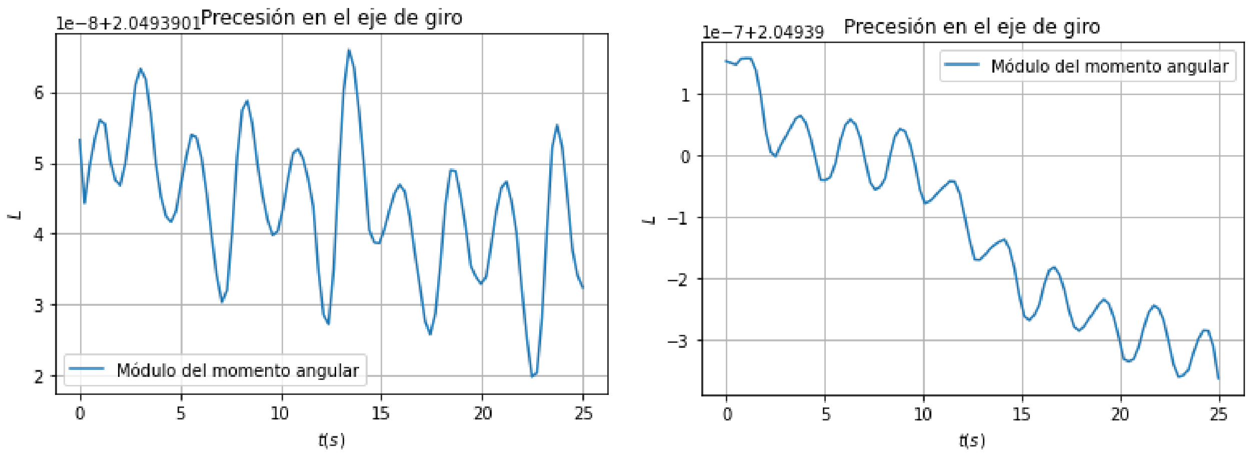
(a) Energía cinética



(b) Momento angular

Figura 4: Variación en el eje 3

Podemos ver perfectamente que en todos los casos el módulo de funciones estudiadas es constante con el tiempo. Finalmente queda estudiar que hay una leve precesión en el eje de giro, es decir, que el momento angular no es exactamente constante sino que se da una pequeña variación:



(a) Eje 1

(b) Eje 3

Figura 5: Precesión del ángulo de giro

Más allá de gráficamente, de forma numérica podemos ver que hay una pequeña diferencia entre los valores iniciales y finales de $L(t)$. En concreto, $L_0 = 2{,}049$ y $L_f = 2{,}046$.

3.3. Cuestión 3

Nos centraremos ahora en el eje intermedio, que será el causante del movimiento irregular del cuerpo. Veamos gráficamente el comportamiento de las componentes angulares 1 y 3:

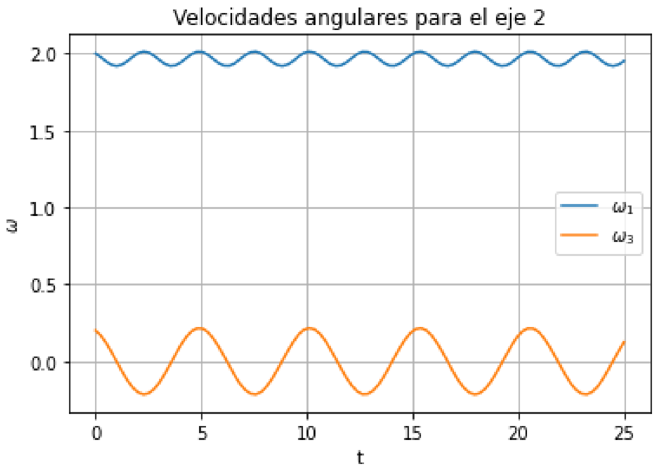


Figura 6: Velocidades angulares en el eje 2

Tenemos de nuevo un comportamiento armónico.

3.4. Cuestión 4

Vamos a ver que, de nuevo, la energía cinética y el momento angular se conservan. Graficando de nuevo las ecuaciones 5 y 6, pero ahora con las velocidades angulares correspondientes a este eje:

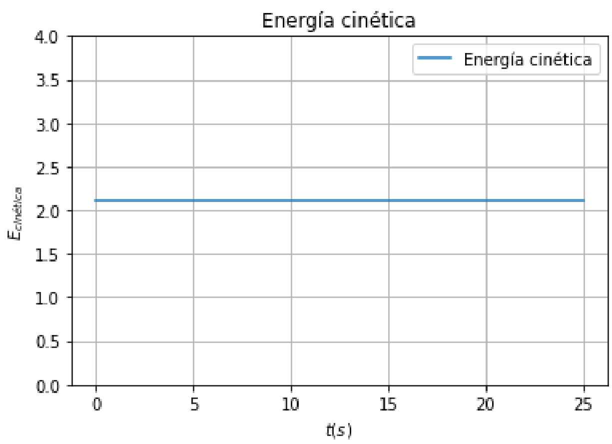


Figura 7: Energía cinética en el eje 2

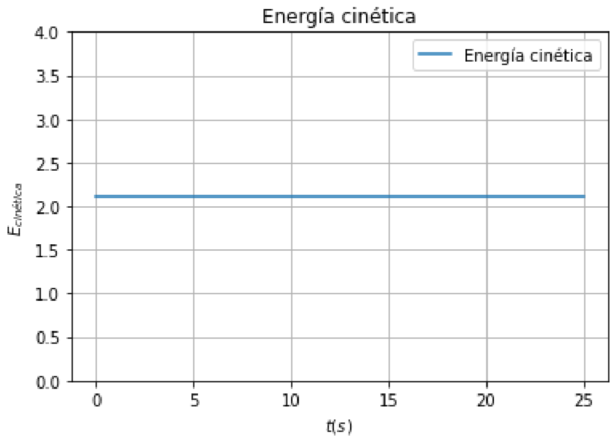


Figura 8: Energía cinética en el eje 2

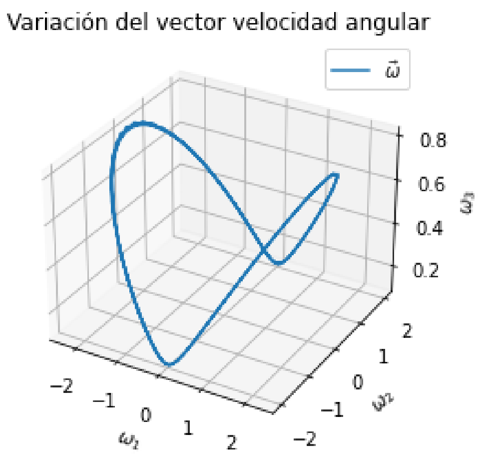
3.5. Cuestión 5

Vamos a representar los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$ teniendo en cuenta que:

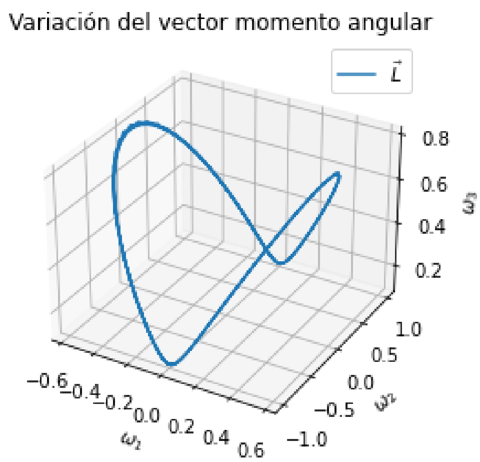
$$\vec{\omega} = (\omega_1 \vec{e_1}, \omega_2 \vec{e_2}, \omega_3 \vec{e_3})$$

$$\vec{L} = \frac{1}{|L|}(I_1\omega_1, I_2, \omega_2, I_3\omega_3)$$

Conseguimos las gráficas siguientes. El vector momento angular será proporcional al de la velocidad angular, puesto que no es más que este vector multiplicado por las constantes I_j.



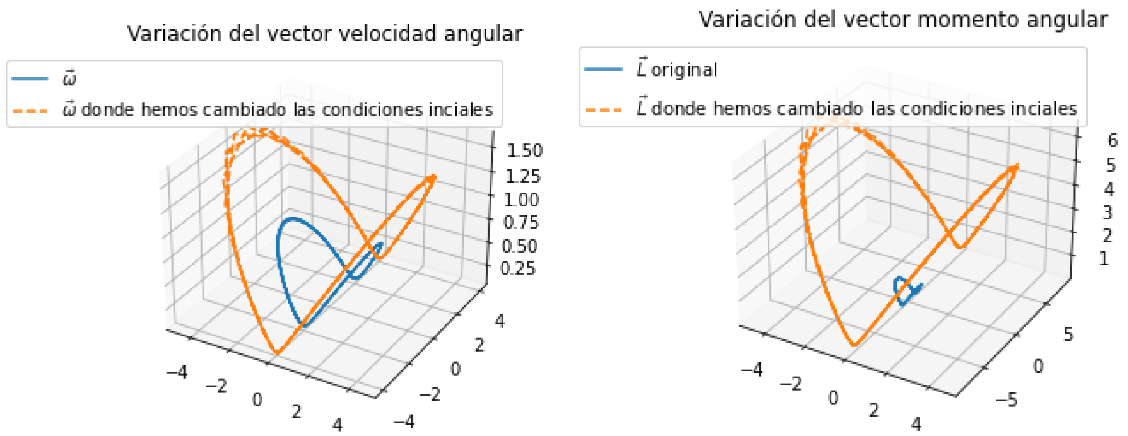
(a) Velocidad angular



(b) Momento angular

Figura 9: Vectores momento angular y velocidad angular

Para variar el periodo, no hace falta más que variar las condiciones iniciales, ya que de estas es de las que depende cada componente de $\vec{\omega}$ y por ello también $\vec{L}$.



(a) Velocidad angular (b) Momento angular

Figura 10: Comparación de los vectores velocidad angular y momento angular con distintas velocidades iniciales

3.6. Cuestión 6

Si la Tierra no fuera una esfera achatada por los polos - con dos ejes de simetría iguales - se plantea la cuestión de si podría ser afectada por el teorema del eje intermedio.

Sin embargo, un estudio en profundidad acerca de ello nos lleva a descartar esta hipótesis, dado a que la Tierra no rota sobre su eje intermedio sino que lo hace sobre su eje con mayor momento de inercia.

Para que se cumpla el teorema del efecto de la raqueta de tenis, el cuerpo afectado debe tener una forma determinada. Es por ello que, por ejemplo, las esferas no se ven afectadas por este, ya que son cuerpos simétricos entorno a sus tres ejes.

Según los experimentos realizados en esta materia, los cuerpos cilíndricos llenos de líquido no rotan entorno a su eje intermedio, sino que lo hacen respecto a aquel que tiene mayor momento de inercia. Esto se explica porque, de forma diferente a otro tipo de objetos, su naturaleza hace que su energía cinética no sea constante, sino que se disipe por medios como el calor. Así, el cuerpo girará respecto a este eje porque es su estado menos energético.

Para la Tierra, que consideramos un cuerpo con líquido y por ello con energía cinética no constante, este eje es el tercero - es decir, que como no rota respecto a su eje intermedio no es susceptible a posibles inversiones.