Hoja 3 - ondas electromagnéticas

1.- Escribir las ecuaciones de los campos (reales) eléctrico y magnético para una onda plana sinusoidal monocromática de amplitud E_0, frecuencia ω y ángulo de fase cero, en las siguientes situaciones:
(a) Propagándose en la dirección x, sentido negativo, y polarizada en la dirección z.
(b) Propagándose en la dirección que va desde el origen hasta el punto (1,1,1), con polarización paralela a la plano xz.
En cada caso hacer un dibujo de la onda y dar las coordenadas cartesianas del vector de onda **k** y del vector de polarización **n**.

porque sentido negativo

a) **Propagación en la dirección x, sentido negativo, polarizada en z**

- Propagación en x: $\vec{K} = -\frac{\omega}{c}\hat{u_x}$
- Polarización en z: $\vec{E} = (0,0,E_z)$
- Sea $\vec{r} = (x,y,z) \rightarrow \vec{K}\cdot\vec{r} = -\frac{\omega}{c}x$

1. Damos el campo eléctrico ($\vec{n} = \hat{u_z}$).

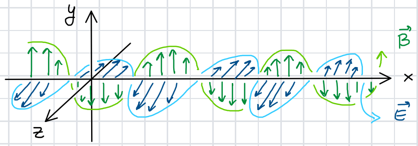
$\Rightarrow \vec{E} = E_0\cos(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t)\hat{u_z} = E_0\cos(-\frac{\omega}{c}x - \omega t)\hat{u_z}$

$= E_0\cos(\frac{\omega}{c}x + \omega t)\hat{u_z}$ (V/m)

coseno par

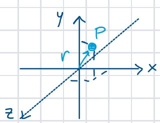
2. Damos el campo magnético con la relación entre campos:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{K}\times\vec{E} = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{\omega}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{vmatrix} = \frac{1}{c}E_0\cos(\frac{\omega}{c}x + \omega t)\hat{u_z} = B_0\cos(\frac{\omega}{c}x + \omega t)\hat{u_z} \text{ (T)}$$



b. **Propagación en la dirección que va del origen al (1,1,1), con polarización paralela a la del plano xz.**

1. Damos los vectores de propagación y de polarización:



P(1, 1, 1)

$\hat{u_r} = \hat{k} \Rightarrow \vec{r} = (1,1,1)$; $|\vec{r}| = \sqrt{3}$; $\hat{u_r} = \hat{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$\hat{n} = (0,\alpha,\beta) \Rightarrow$ ¿Cómo damos α, β?

1. $\vec{n}\perp\vec{K}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha+\beta) = 0 \rightarrow \alpha = -\beta$
2. $\|\hat{n}\| = 1$; $\alpha^2 + \beta^2 = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\beta$

2. Calculamos $\vec{E}$.

$\vec{K} = \frac{\omega}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$; $\vec{r} = (x,y,z) \Rightarrow \vec{K}\cdot\vec{r} = \frac{\omega}{c\sqrt{3}}(x+y+z)$

$\vec{E} = E_0\cos(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t)\,\hat{n} = E_0\cos(\frac{\omega}{c\sqrt{3}}(x+y+z) - \omega t)\,\hat{n} =$

$= E_0\cos(\frac{\omega}{c\sqrt{3}}(x+y+z) - \omega t)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ (V/m)

3. Calculamos $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{K}\times\vec{E} = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ K_x & K_y & K_z \\ E_x & 0 & E_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega\sqrt{6}}E_0\cos(\frac{\omega}{c\sqrt{3}}(x+y+z) - \omega t)(-1,2,-1) \text{ (T)}$$

2.- El campo magnético de una onda electromagnética plana que se propaga en el vacío es de la forma:

$$\mathbf{B} = -B_0\mathrm{sen}(kz-\omega t)\,\hat{\mathbf{u}}_x + B_0\cos(kz-\omega t)\,\hat{\mathbf{u}}_y$$

Determinar las expresiones del campo eléctrico y del vector de Poynting.

$\vec{B} = -B_0\sin(Kz-\omega t)\hat{u_x} + B_0\cos(Kz-\omega t)\hat{u_y} \Rightarrow \vec{K} = (0,0,1)$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{K}\times\vec{E} = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \vec{K} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega}(-E_y, +E_x, 0)\cdot\vec{K} = c(-E_y, E_x, 0)$$

; $\vec{E} = cB_0\cos(Kz-\omega t)\hat{u_x} + cB_0\sin(Kz-\omega t)\hat{u_y}$

FORMA AUGUSTO (que por lo que sea estará mejor)

La relación entre E y B se puede obtener con la ley de Ampere-Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

En este caso (me ahorro los cálculos):

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \ldots = B_0 K \sin(Kz-\omega t)\hat{u}_x - B_0 K \cos(Kz-\omega t)\hat{u}_z$$

De acuerdo con la ley de Ampere-Maxwell, tenemos que integrar esta expresión en función del tiempo y finalmente tener en cuenta las siguientes relaciones para dar la expresión final del campo eléctrico.

$$\omega = Kc \qquad \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

De cualquiera de las dos formas hemos conseguido dar E y ahora ya podemos pasar al cálculo del vector de Poynting:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ E_x & E_y & 0\\ B_x & B_y & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\left[E_x B_y - E_y B_x\right]\hat{z} =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[B_0^2\cos^2(Kz-\omega t)c + cB_0^2\sin^2(Kz-\omega t)\right]\hat{z} = \frac{cB_0^2}{\mu_0}\hat{z}$$

3.- Encontrar todos los elementos del tensor de tensiones de Maxwell para una onda electromagnética plana de frecuencia ω y amplitud E_0 que se propaga en la dirección del eje z y está linealmente polarizada en la dirección del eje x. ¿Tiene sentido el valor obtenido? ¿Cómo está relacionada la densidad de flujo de momento con la densidad de energía en este caso?

Para resolver el ejercicio lo primero que tenemos que hacer es dar la expresión del campo eléctrico.

- Polarización: $\hat{u}_x$
- Dirección propagación: $+\hat{z}$

$$\left\{\vec{E} = E_0\cos(Kz-\omega t)\,\hat{u}_x \quad (V/m)\right.$$

Ahora calculamos $\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{K}\times\vec{E} = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 0 & 0 & K\\ E & 0 & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{\omega}KE\hat{\jmath} =$

$= \frac{1}{c}E_0\cos(Kz-\omega t)\,\hat{u}_y$ (T)

Con estos dos campos el tensor de tensiones queda:

- $T_{xz} = T_{zx} = T_{yz} = T_{zy} = 0 = T_{xy} = T_{yx}$
- $T_{zz} = -\frac{1}{2}\left[\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right] = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(Kz-\omega t) - \frac{1}{2\mu_0 c^2}E^2\cos^2(Kz-\omega t)$
- $T_{xx} = \varepsilon_0 E_x^2 - \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right] = \frac{1}{2}E_0^2\cos^2(Kz-\omega t)\cdot\left(\varepsilon_0 - \frac{1}{\mu_0 c^2}\right)$
- $T_{yy} = \frac{1}{\mu_0}B_y^2 - \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right] = \frac{1}{2}E_0^2\cos^2(Kz-\omega t)\cdot\left(\frac{1}{\mu_0 c^2} - \varepsilon_0\right)$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & 0 & 0\\ 0 & T_{yy} & 0\\ 0 & 0 & T_{zz}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}E_0^2\cos^2(Kz-\omega t)\begin{pmatrix}\varepsilon_0 - \frac{1}{\mu_0 c^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\mu_0 c^2} - \varepsilon_0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_0 c^2} - \varepsilon_0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}E_0^2\cos^2(Kz-\omega t)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\varepsilon_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -u\end{pmatrix}$$

$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

AUGUSTO

4.- Dos ondas planas sinusoidales, de igual frecuencia y amplitud, polarizadas en el mismo plano, se propagan en sentidos opuestos según el eje x. Determinar en función de t y x:
(a) Los campos eléctricos y magnéticos y el vector de Poynting.
(b) Los valores medios de estas magnitudes así como los valores medios de E^2 y H^2.

a) En este ejercicio (y de ahora en adelante) vamos a dar los campos en su forma compleja (exponencial).

CAMPO ELÉCTRICO

Vamos a suponer que solo se polariza en la dirección del eje z (para facilitar cálculos... me parece muy por la cara)

- ONDA 1: propagación $+x \Rightarrow \vec{K} = \frac{\omega}{c}\hat{x}$; polarización $\hat{n} = \hat{u}_z$

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{i\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \delta_1\right)}\hat{z}$$

- ONDA 2: propagación $-x \Rightarrow \vec{K} = -\frac{\omega}{c}\hat{x}$, polarización $\hat{n} = \hat{u}_z$

$\vec{E_2} = E_0 e^{i(\frac{\omega}{c}x + \omega t + \delta_2)}\,\hat{z}$

- SUPERPOSICIÓN: CAMPO TOTAL

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0\, e^{i(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \delta_1)} + E_0 e^{i(\frac{\omega}{c}x + \omega t + \delta_2)} =$

$= E_0 e^{i\frac{\omega}{c}x}\cdot[e^{i\omega t}\cdot e^{i\delta_1} + e^{i\omega t}\cdot e^{i\delta_2}] = E_0 e^{i\frac{\omega}{c}x} e^{i\delta_1}[e^{i\omega t} + e^{i\omega t} e^{i(\delta_2 - \delta_1)}] =$

$= E_0 e^{i\frac{\omega}{c}x}[e^{-i\omega t} + e^{i\omega t} e^{i\delta}] = E_0 e^{i\frac{\omega}{c}x - i\omega t}[1 + e^{i(2\omega t + \delta)}] =$

Sea $\delta_2 - \delta_1 = \delta$ (diferencia de fase) y tomando $\delta_1 = 0$

$= E_0[\cos(\frac{\omega}{c}x - \omega t) + i\sin(\frac{\omega}{c}x - \omega t)][1 + \cos(2\omega t + \delta) + i\sin(2\omega t + \delta)] =$

FÓRMULA EULER

$= E_0 \cos(\frac{\omega}{c}x - \omega t)(1 + \cos(2\omega t + \delta)) \Rightarrow$

Nos quedamos solo con la parte real porque es la única con sentido físico

CORRECCIÓN AUGUSTO

$\vec{E}(x,t) = 2E_0\cos(kx + \frac{\varphi}{2})\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})\,\hat{u}_z$

↳ por la cara lo escribe así y no de otra forma

CAMPO MAGNÉTICO (a partir de la corrección)

$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}$; $\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu_0}\vec{k}\times\vec{E} \Rightarrow$ hay que dividirlo en 2, se da $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ con $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ y luego se suma. POR QUÉ NO SE PUEDE HACER DIRECTAMENTE?

5.- Una onda electromagnética plana se propaga en el espacio libre en la dirección positiva del eje x, tiene una intensidad máxima del campo eléctrico de 6×10^3 V/m y una longitud de onda $\lambda = 2$ m Si la onda está polarizada linealmente según el eje y, determinar:
(a) Las expresiones de los campos eléctrico y magnético que describen la onda.
(b) El vector de Poynting, la densidad de momento lineal y la densidad de energía de la onda electromagnética.
(c) La intensidad media de energía que transporta la onda y la presión de radiación si la onda incide perpendicularmente sobre una superficie absorbente perfecta. ¿Cómo se modificaría la expresión de la presión de radiación si la incidencia de la onda electromagnética sobre la superficie fuera oblicua?

- $\hat{k} = +\hat{x}$
- $I_{max} = 6\cdot 10^3$ V/m $\Rightarrow$ AMPLITUD DE LA ONDA (intensidad máxima cuando $t=0$ por el máximo en el coseno
- $\lambda = 2m \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi$; $\omega = kc = \pi c$
- Polarización: $\hat{n} = \hat{y}$

a) $\vec{E}, \vec{B}$

CAMPO ELÉCTRICO

$\vec{E} = E_0\cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = 6\cdot 10^3\cos(\pi x - \pi c t)\,\hat{y}$ (V/m)

escribimos directamente con el coseno para quedarnos con la parte real

CAMPO MAGNÉTICO

$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}$; $\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ k & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi c\mu_0}\cdot\pi\cdot 6\cdot 10^3\cos(\pi x - \pi c t)\,\hat{z} = \varepsilon_0 c\, 6\cdot 10^3\cos(\pi x - \pi c t)\,\hat{z}$ (A/m)

b) $\vec{S}, \vec{g}, u_{EM}$

VECTOR DE POYNTING

$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix} = EH\,\hat{i} = \varepsilon_0 c\, 6\cdot 10^6\cos^2(\pi x - \pi c t)\,\hat{x}$

DENSIDAD MOMENTO LINEAL

$\vec{g} = \mu_0\varepsilon_0\vec{S} = \frac{\varepsilon_0}{c}6\cdot 10^6\cos^2(\pi x - \pi c t)\,\hat{x}$

DENSIDAD ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA

$u_{EM} = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0\vec{H}^2 = \varepsilon_0 3\cdot 10^3\cos(\pi x - \pi c t)\,\hat{y} + \frac{1}{c}3\cdot 10^3\cos(\pi x - \pi c t)\,\hat{z}$

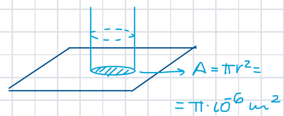
c. Intensidad media, presión de radiación sobre una superficie absorbente perfecta (incide perpendicular). ¿Si incide oblicua?

INTENSIDAD MEDIA: $I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$

PRESIÓN DE RADIACIÓN: $P_{rad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$ si incide $\perp$

9.- Un haz colimado proveniente de un láser de He-Ne de longitud de onda 632.8 nm y polarizado linealmente, incide normalmente sobre una superficie totalmente absorbente. El haz tiene una potencia media de 15 mW y una sección circular de 2 mm de diámetro. Determinar:
(a) Las amplitudes de los campos eléctrico y magnético.
(b) La energía electromagnética por unidad de longitud del haz.
(c) La fuerza que ejerce el haz sobre la superficie absorbente.

- $\lambda = 632'8$ nm $= 632'8 \cdot 10^{-9}$ m $= 6'328 \cdot 10^{-7}$ m
- Polarizado linealmente $\Rightarrow$
- $P_{media} = 15 \cdot 10^{-3}$ W



a) Amplitudes $\vec{E}$ y $\vec{B}$?

Por ser una onda plana, podemos relacionar las amplitudes (o valores máximos) de los campos con las siguientes relaciones:

$$\langle I \rangle = \langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 \Rightarrow \frac{P_{med}}{A} = \frac{1}{2\mu_0} \cdot c B_0^2 \; ; \; B_0 = \sqrt{\frac{1}{Ac} \cdot 2 P_{med} \mu_0} = 6'33 \cdot 10^{-6} \text{ (T)}$$

$E_0 = c B_0$

$\langle I \rangle = \frac{P_{med}}{A}$

$E_0 = c \cdot B_0 = c \cdot 6'33 \cdot 10^{-6} = 1896'74$ (V/m)

b) Energía EM por unidad de longitud del haz.

$$P_{med} = \frac{\langle W_{EM} \rangle}{t} \Rightarrow \langle W_{EM} \rangle = t \cdot P_{med} = P_{med} \cdot \frac{\ell}{c} \; ;$$

$$\frac{\langle W_{EM} \rangle}{\ell} = \frac{P_{med}}{c} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ (J/m)}$$

c) Fuerza que ejerce el haz sobre la superficie.

se refiere a la potencia

Hemos de calcular la presión de radiación teniendo en cuenta que la superficie es un absorbente perfecto. Esta expresión quedará, por tanto:

$$P_{rad} = \frac{\langle I \rangle}{c} = \frac{P_{med}}{c \cdot A} = 1'6 \cdot 10^{-5} \text{ (Pa)} \Rightarrow F = P \cdot A = 5 \cdot 10^{-11} \text{ (N)}$$

10.- Mostrar que en un buen conductor los campos **E** y **H** oscilan desfasados 45º.

Un buen conductor se caracteriza porque $\tau/\omega > 10^2 \Leftrightarrow \varepsilon_0/\sigma \cdot \omega > 10^2$. Esto influye en el número de onda complejo:

$$\tilde{k} = k + i\beta \Rightarrow \tilde{k} = K e^{i\phi}, \; K = \omega \sqrt{\varepsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}} \text{ y } \phi = \arctan \frac{\beta}{k}$$

Para ver la relación entre las fases de E y B, solo tenemos que fijarnos en sus amplitudes complejas:

$\tilde{E}_0 = E_0 e^{i\delta_E}$

$\tilde{B}_0 = B_0 e^{i\delta_B}$ $\Rightarrow$ RELACIÓN ENTRE AMPLITUDES

$$\tilde{E}_0 = c \cdot \tilde{B}_0 \underset{\omega = Kc}{=} \frac{\omega}{\tilde{k}} \tilde{B}_0 \; ; \; \tilde{B}_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0 = \frac{K e^{i\phi}}{\omega} \tilde{E}_0 \; ;$$

$$B_0 e^{i\delta_B} = \frac{1}{\omega} \cdot K e^{i\phi} \cdot E_0 e^{i\delta_E} \Rightarrow \phi = \delta_B - \delta_E$$

Ahora usamos la definición de argumento en complejos:

$$\phi = \delta_B - \delta_E = \arctan \frac{\beta}{k} \; ; \; \frac{\beta}{k} = \frac{\sigma\mu\omega}{\varepsilon\mu\omega^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \underset{\uparrow}{=} 1 \Rightarrow \delta = 45º$$

BUEN CONDENSADOR

$\frac{\varepsilon}{\sigma\omega} > 10^2 ; \; \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$

11.- La conductividad del agua de mar es alrededor de 4.3 $(\Omega \text{m})^{-1}$. Suponiendo que $\mu = \mu_0$ y $\varepsilon \approx 80\varepsilon_0$, determinar la profundidad de penetración en el agua de mar de una onda de muy baja frecuencia de 100 Hz. Comentar la posibilidad de que las ondas de radio de baja frecuencia como medio de comunicación con o entre submarinos.

- $\sigma_{agua\ mar} = 4'3\ (\Omega \cdot m)^{-1}$
- $\mu = \mu_0$ $\Longrightarrow$ ¿Profundidad de penetración de una onda con $f = 100\ Hz$?
- $\varepsilon \approx 80\varepsilon_0$

1. Calculamos β:

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2} \underset{\omega = 2\pi f}{=} 2\pi f \cdot \sqrt{\frac{80\varepsilon_0\mu_0}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{80\varepsilon_0 2\pi f}\right)^2}\right]^{1/2} =$$

$$= 0'0412\ m^{-1}$$

2. Calculamos $\delta = 1/\beta = 24'27\ m$

13.- Una onda electromagnética plana de frecuencia ω se propaga a lo largo del eje y en un buen conductor de conductividad σ y permeabilidad μ.
(a) Calcular el valor medio del vector de Poynting en el plano $y = 0$ y en otro plano, paralelo al anterior, que está a una distancia igual a la profundidad de penetración δ ($y = \delta$). Obtener la diferencia de flujo a través de un cilindro de sección A y eje el de propagación.
(b) Comprobar que la potencia disipada por efecto Joule en el cilindro conductor de sección A y espesor δ es igual a la diferencia entre los valores obtenidos en el apartado anterior, (a).

- Frecuencia ω
- Propagación: $\hat{k} = \hat{y}$
- Buen conductor: $\varepsilon/\sigma\omega > 10^2$; $\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2 \gg 1$
- Conductividad σ
- Permeabilidad μ

a) Valor medio del vector de Poynting en $y = 0$. También en otro plano paralelo a distancia la distancia de penetración. Diferencia de flujo a través de un cilindro de sección A y el eje de propagación.

Primero tenemos que calcular el valor de los campos $\vec{E}, \vec{H}$. Suponemos que $\vec{E}$ se polariza únicamente en el eje z.

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \cos(ky - \omega t + \delta_E) \cdot e^{-\beta y} \cdot \hat{u_z} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu}\vec{B} = \frac{1}{\mu} B_0 \cos(ky - \omega t + \delta_E + \phi)\, e^{-\beta y}\, \hat{u_x}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} =$$

$$= \frac{1}{\mu} B_0 E_0 \cos(ky - \omega t + \delta_E) \cdot \cos(ky - \omega t + \delta_E + \phi)\, e^{-2\beta y}\, \hat{u_y} =$$

$$= \frac{1}{\mu} B_0 E_0 \cdot \frac{1}{2}\left[[\cos(2ky - 2\omega t + 2\delta_E + \phi)] + \cos(\phi)\right] \cdot e^{-2\beta y}\, \hat{u_y}$$

$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

¡SOLO VALE PARA ESTE TÉRMINO!

Cuando calculemos $\langle S \rangle$ nos queda $\langle \cos(\ldots) \rangle = 0$, de forma que el valor promedio de $\vec{S}$ es:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2\mu} B_0 E_0 \cos\phi\, e^{-2\beta y}\, \hat{u_y}$$

Ahora tenemos que seguir desarrollando esta expresión con lo que sabemos de un buen conductor y con los planos que nos indican.

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu} E_0^2 \cdot \frac{K}{\omega} \cos\phi\, e^{-2\beta y}\, \hat{u_y} = \frac{\sqrt{\sigma\mu\omega}}{2\mu\omega}$$