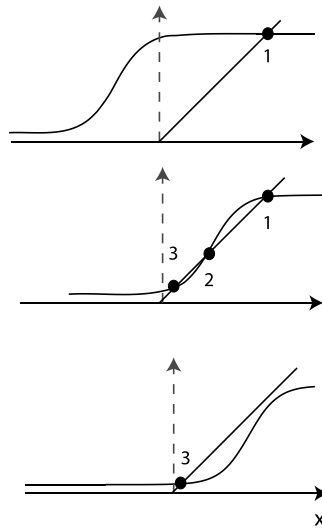
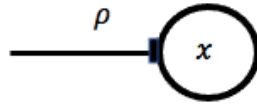


Repaso:

$$\frac{dx}{dt} = -x + S(\rho + cx) \quad \text{con} \quad S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



Evitando condiciones de bi-estabilidad, y obviando transitorios, se logra que

$$output = S(input)$$

Y se componen, en una estructura multicapa, feedforward , para generar una funcion sofisticada de “features”

1. Clasificar (CNN rule)
2. Regresiones sencillas (con “features” no ostensiblemente correlacionadas)
3. Compresiones (autoencoder)

¿Y para analizar series temporales? O sea, “features” con mucha correlación entre si...

Empecemos a hablar entonces de series temporales. Y su origen dinámico

Clase IV.

Mas allá de los puntos fijos. Dinámica en 2d, ciclos limites.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Notemos que podemos escribir los primeros dos términos de este modo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} + \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right)$$

de modo que si definimos

$$w = \frac{dx}{dt} + \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$

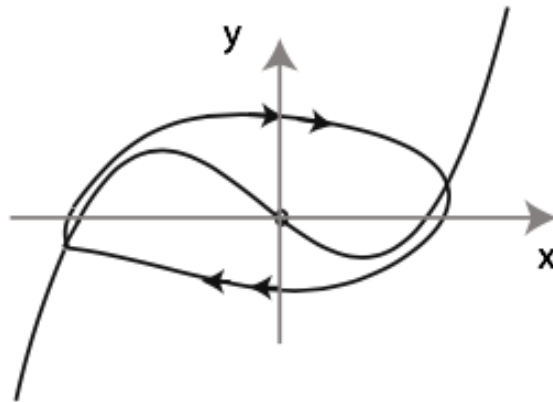
entonces la ecuación original se puede escribir como:

$$\frac{dw}{dt} = -kx$$

$$\frac{dx}{dt} = w - \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right) = \mu\left(\frac{w}{\mu} - \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right)$$

de modo que, escribiendo $y \equiv w/\mu$,

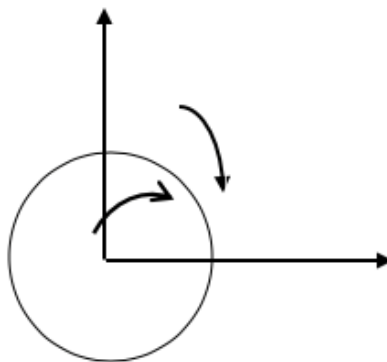
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -\frac{kx}{\mu} \\ \frac{dx}{dt} &= \mu\left(y - \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right)\end{aligned}$$



Ecuaciones paradigmáticas para la aparición de un ciclo limite.

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1$$



Y dejamos para mas adelante, si existe un modo algorítmico de llevar a una ecuación diferencial mas compleja, por medio de algún cambio de variables, a este sistema sencillo.

Bifurcaciones que dan lugar a ciclos limite

Bifurcación de Hopf

$$\frac{dz}{dt} = (\mu_r + i\mu_i)z - (c_r + ic_i)|z|^2 z,$$

con $z \in \mathbb{C}$.

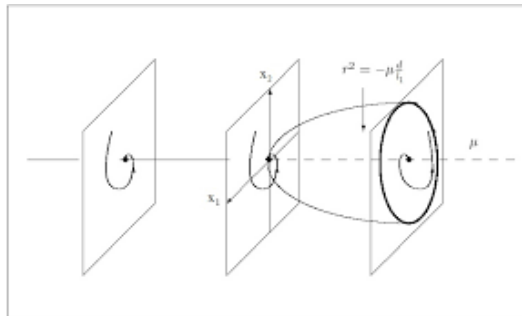
$$z = \rho e^{i\phi},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\rho}{dt} e^{i\phi} + i\rho e^{i\phi} \frac{d\phi}{dt} = i\rho e^{i\phi} (\mu_r + i\mu_i) - (c_r + ic_i)\rho^3 e^{i\phi},$$

y por lo tanto, separando parte real y parte imaginaria de la ecuación, tenemos:

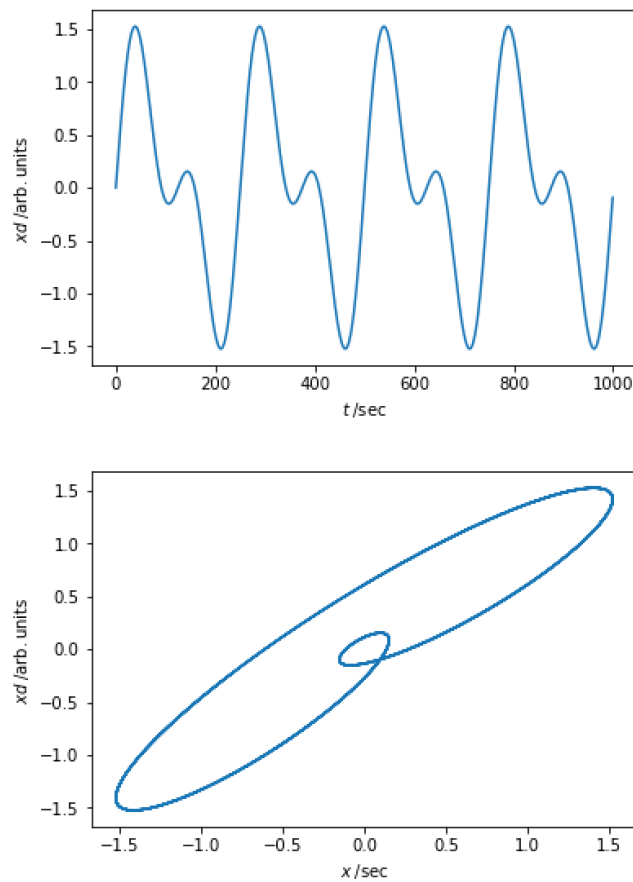
$$\frac{d\rho}{dt} = \mu_r \rho - c_r \rho^3$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \mu_i - c_i \rho^2$$



Elementos de la descripción, mas allá de la bi-dimensionalidad.

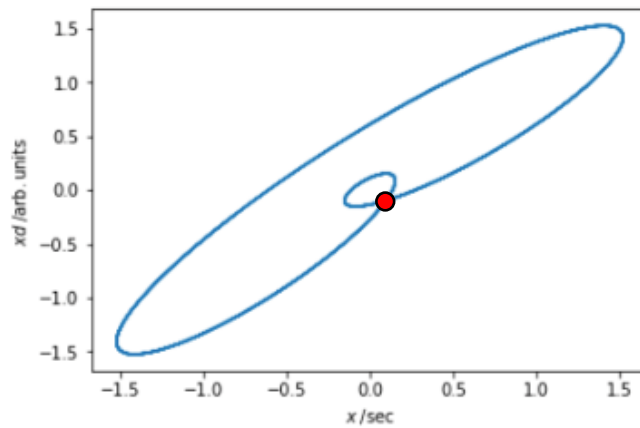
Si bien es importante entender que la primera signatura de la no linealidad es la coexistencia de soluciones aisladas, no es menor en la historia del tema la posibilidad de generar **dinámica compleja mediante reglas sencillas no lineales**.



Esto, **no** puede ser la solución de un Sistema:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y)$$



Pues el punto rojo tiene dos futuros posibles.

Si podría ser la proyección de un sistema 3d.

Por ejemplo, podríamos forzar el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y)$$

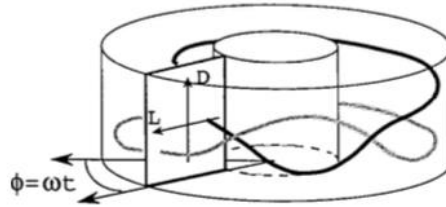
$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y) + A \cos(\omega t)$$

Lo cual es equivalente a:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y) + A \cos(\theta)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$



Comenzando por el principio: “una que sepamos tod@s”.

Oscilaciones forzadas: agitando sistemas lineales.

Un sistema lineal, con una frecuencia característica y disipativo, se rendirá siempre ante el forzante. Oscilará con la frecuencia de éste, pero con una amplitud de respuesta que dependerá de cuan cercanas sean la frecuencia del forzante y la frecuencia natural del sistema.

Este problema está en el corazón de nuestra formación básica; es el oscilador armónico amortiguado forzado, *presentando resonancias*. Si forzamos al sistema periódicamente, las ecuaciones que rigen al sistema son:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -kx - by + A \cos(\omega t + \phi_d).$$

Si proponemos una función:

$$x = x_0 \cos(\omega t - \phi)$$

donde la frecuencia ω es la frecuencia del forzante, la misma es solución en la medida en que x_0 y ϕ cumplan las siguientes condiciones:

$$x_0 = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b\omega^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b\omega}{k - \omega^2}\right) - \phi_d$$

La posibilidad de encontrar siempre una solución con la frecuencia del forzante es una característica de los sistemas lineales; la única rebeldía que les queda es la amplitud de la respuesta. Si la frecuencia del forzante es similar a la frecuencia natural, el sistema responde con una gran amplitud, fenómeno conocido como resonancia. La búsqueda de resonancias es la estrategia más habitual para dilucidar la dinámica de un sistema cuyo apartamiento del equilibrio revele fuerzas restitutivas. Surge entonces, de modo natural, la pregunta sobre qué sucede “más allá” de estos límites en los cuales los sistemas pueden aproximarse como lineales. Es decir:

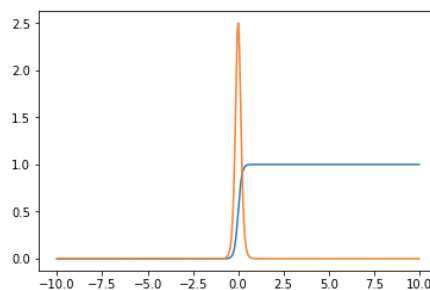
¿Cómo responden los sistemas no lineales a los forzantes periódicos?

Agitando sistemas no lineales

Sea un sistema que presenta una solución de tipo ciclo límite, al cual perturbamos periódicamente mediante “coscorrones”:

$$\frac{dz}{dt} = (1 + i\eta)z - |z|^2 z + i\epsilon \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT).$$

(Disgresion: la delta de Dirac)



$$s(x) = \frac{1}{1 + e^{-cx}}$$

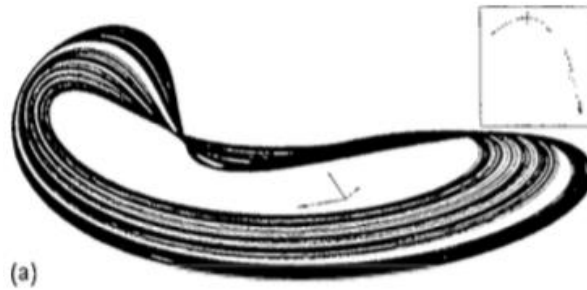
$$S(x)' = c S(x)(1 - S(x))$$

(cuanto mas grande c, mas violento el escalon, mas picuda la derivada)

Una funcion picuda en la derivada de una variable expresa que la variable sufrió un salto discreto.

La estrategia:

Construcción de mapas. Realizar una inspección estroboscópica.



Que se gana, al describir la dinámica en este subespacio:

$$(x_1^{n+1}, x_2^{n+1}) = F(x_1^n, x_2^n)$$

Es una relación **algebraica**

Ejemplo. Una órbita periódica de periodo 1 del flujo, se calcula como

$$(x_1^{n+1}, x_2^{n+1}) = F(x_1^n, x_2^n) = (x_1^n, x_2^n)$$

Que es una relación algebraica (y por lo tanto, en ppio, fácil de resolver)

Este sistema entonces consiste en la forma normal de una bifurcación de Hopf, a la que se perturba con periodo T mediante la adición de ϵ a la variable imaginaria del problema. Con esto decimos que el sistema evoluciona guiado por las ecuaciones del siguiente sistema homogéneo de ecuaciones reales:

$$\frac{dR}{dt} = R(1 - R^2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \eta$$

(con $z = Re^{i\theta}$), y que cada vez que el tiempo sea un múltiplo de T , tomaremos la coordenada $y = R \sin(\theta)$, y la reemplazaremos por $y = R \sin(\theta) + \epsilon$.

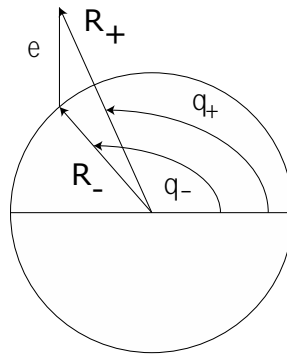
Lo interesante de este problema es que entre distintos “coscorrónes”, la dinámica del sistema puede integrarse exactamente:

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{(1 - R_0^2)}{R_0^2} \right) e^{-2t}}}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \eta t$$

Por otro lado, el efecto del “coscorrón” puede representarse matemáticamente de modo muy sencillo. Si z_- y z_+ representan los valores de z antes y después del “coscorrón” respectivamente, la acción del mismo se puede escribir como

$$Im(z_+) = Im(z_-) + \epsilon,$$



y si preferimos escribir el efecto de la perturbación en términos de R y θ , podemos escribir:

$$R_+ = \sqrt{R_-^2 + 2R_- \epsilon \sin(\theta_-) + \epsilon^2},$$

$$\theta_+ = \tan^{-1}(\tan(\theta_-) + \epsilon/(R_- \cos(\theta_-)))$$

Ahora estamos en condiciones de estudiar qué es lo que ocurre con el sistema entre el momento previo a un coscorrón dado (llamémoslo el n -ésimo coscorrón) y el momento previo al siguiente ($n+1$ -ésimo) coscorrón. A diferencia de lo que vimos hasta ahora, debemos considerar **tanto el efecto de la perturbación como el de la evolución del sistema autónomo**, hasta justo antes de ser nuevamente perturbado.

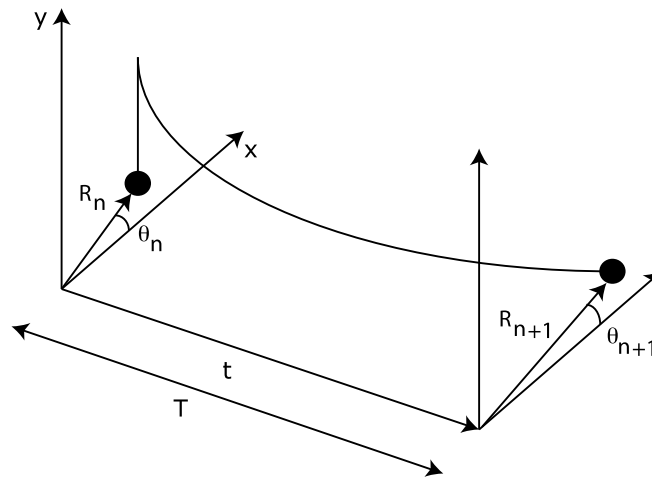


Figura 43. La evolución del sistema desde justo antes de la perturbación n -ésima, hasta justo antes de la perturbación $n+1$ -ésima. Esta dinámica incluye tanto la perturbación como la evolución del sistema en forma autónoma.

Sean los valores de las variables R_n y θ_n que describen al **sistema justo antes de perturbar por vez n -ésima al sistema**. Entonces, en el instante posterior al golpe (y suponiendo ϵ pequeño), tenemos

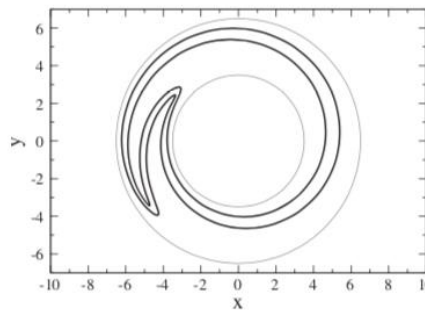
$$R_+ \approx R_n + \epsilon \sin(\theta_n)$$

$$\theta_+ \approx \theta_n + \epsilon \cos(\theta_n) / R_n$$

de donde podemos calcular el valor de las variables justo antes del coscorrón $(n+1)$ -ésimo, haciendo evolucionar estos valores mediante las fórmulas que deducimos al comienzo de la sección, que dan cómo cambian con el tiempo las variables en ausencia de perturbaciones. Esto es, usando las ecuaciones anteriores, y asumiendo que ϵ es pequeño:

$$R_{n+1} = 1 + (R_n - 1 + \epsilon \sin(\theta_n))e^{-2T}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \eta T + \epsilon \cos(\theta_n) / R_n$$



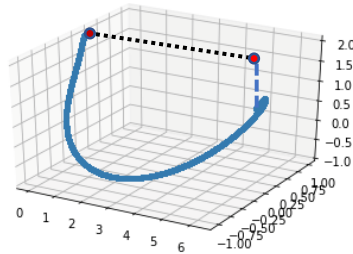
lo cual, si asumimos además que el tiempo entre coscorriones es grande, da lugar a una función (o *mapa*) que vincula la fase justo antes del golpe $n+1$, con la fase del sistema justo antes del golpe n -ésimo:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \eta T + \epsilon \cos(\theta_n)$$

¿Y qué ganamos en términos de entender la dinámica de nuestro problema por tener este mapa? De última, hemos perdido muchísima información en el camino. Hemos perdido, de hecho, toda la información que corresponde a lo que ocurre entre los “coscorriones”. Sin embargo, hemos ganado la posibilidad de dilucidar importantísimos aspectos de la dinámica, mediante la resolución de **problemas algebraicos**. Por ejemplo, ¿en qué condiciones existen soluciones periódicas del sistema?

Una condición que deberá cumplirse, si existe una solución que se repite cada un tiempo T , será que $\theta_{n+1} = \theta_n$.

In [57]: run Integracion_kicked.py



El flujo asociado a que el mapa tenga un periodo 1 (i.e., $\theta_{n+1} = \theta_n$)
 Notal que el eje x va entre 0 y 2π .

Notemos que para que esto sea posible, existe **una condición algebraica que debe poder satisfacerse:**

$$-\eta T = \epsilon \cos(\theta_n).$$

Esto pone una cota a la diferencia que puede haber entre la frecuencia natural del sistema (descrita por η) y la del forzante (descrita por la inversa de T). Para un valor dado de la perturbación, existe un rango de frecuencias del forzante en el que el sistema seguirá a la perturbación (cada periodo de la perturbación será un periodo del sistema que está siendo forzado). Más allá de un valor crítico, el sistema ya no seguirá en un ritmo 1 a 1 al forzante, **lo que constituye un apartamiento cualitativo respecto de lo que observamos en sistemas lineales forzados**. Notemos, además, que es posible que, para ciertos valores de los parámetros,

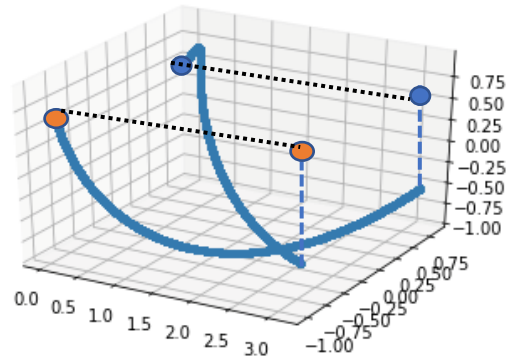
$$\theta_{n+2} = \theta_n,$$

$$\theta_{n+1} \neq \theta_n.$$

Tal solución se repetiría luego de dos periodos del forzante, sin repetirse para un tiempo menor. Tal solución se denomina de “periodo 2”, y el cambio cualitativo por el cual un sistema pasa de tener soluciones que siguen 1 a 1 al forzante (o “de periodo 1”), a tener soluciones de periodo 2 se conoce como “duplicación de periodo”. Un esquema de solución de periodo 2, en el marco

de un sistema perturbado con “coscorrones” como el de nuestra discusión es ilustrado en la Figura siguiente.

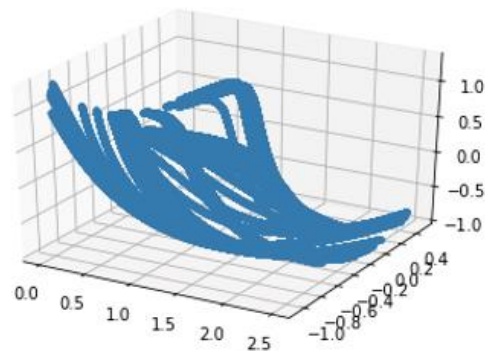
In [58]: run Integracion_kicked.py



Solución del flujo, entre 0 y $t \pmod T$, cuando $\theta_{n+2} = \theta_n$, $\theta_{n+1} \neq \theta_n$.

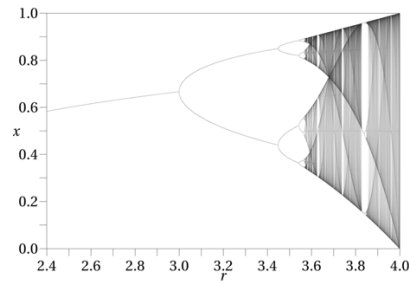
¿Cuan complicadas pueden ser las soluciones de este sistema? En dos dimensiones, la “complejidad” de una solución acotada en el espacio de fases venía seriamente condicionada por la restricción de que una trayectoria no podía auto-intersectarse (dos puntos del espacio de fases no pueden tener un futuro distinto). Pero en tres dimensiones, una trayectoria acotada puede lucir como una intrincada madeja, sin violar ninguna restricción.

In [47]: run Integracion_kicked.py



Puede ser que vía trabajos de divulgación, hayan escuchado hablar de mapas como:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$



Esta la versión caricaturizada, estudiada por Robert May, Mitch Feigenbaum, de lo que emerge al inspeccionar estroboscópicamente un Sistema no lineal forzado periódicamente.

Que importancia tuvo esta línea de trabajo:

1. Reconcilio determinismo con complejidad e imposibilidad de predecir.
2. Cambio el modo en que esperamos construir confianza o refutar un modelo.
3. Abre el camino para esperar comportamientos complejos en multiplicidad de sistemas.

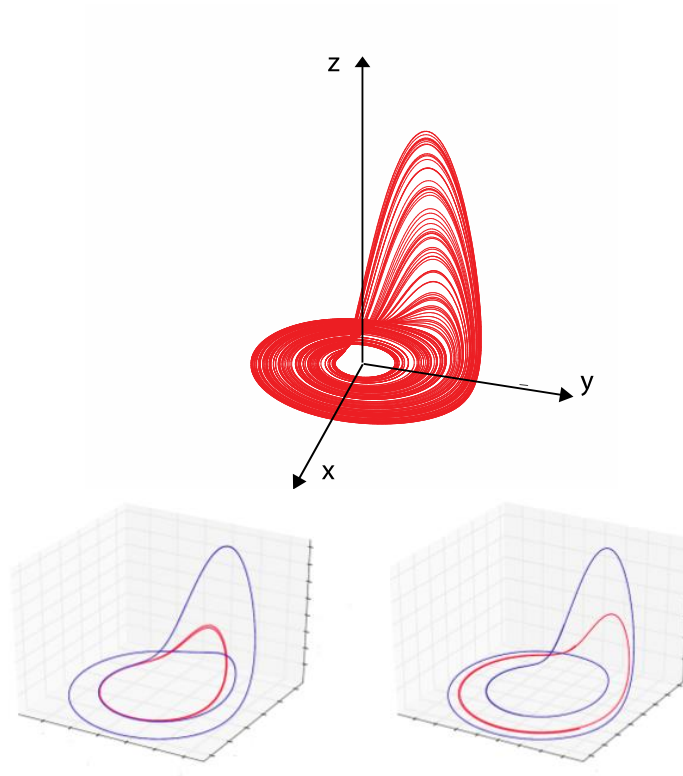
Lecturas adicionales

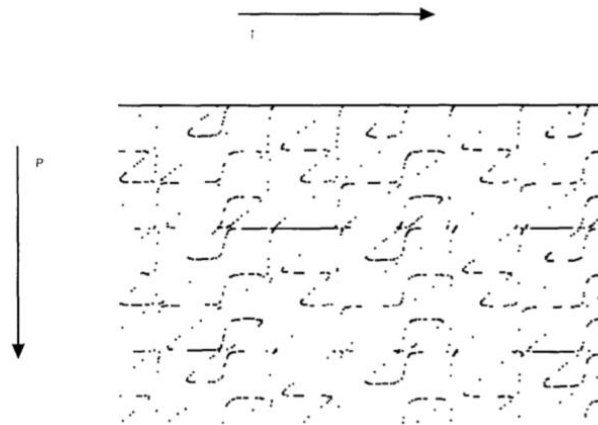
Rossler

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 0.1 y$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.1 + z(x - 14),$$



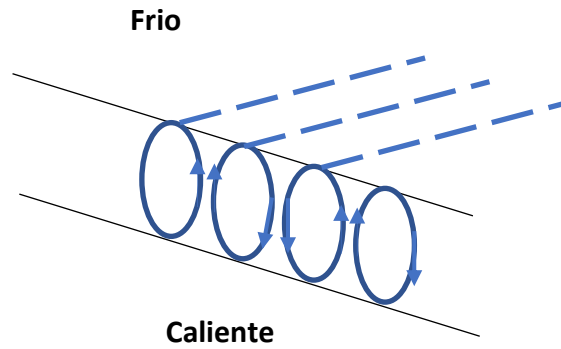


Un punto se marca negro si la distancia entre $x(i)$ y $x(i+p)$ es menor que una fracción de la amplitud de las fluctuaciones. Las líneas horizontales marcan la existencia de aproximaciones a orbitas periódicas.

	0, 1_1	1, 1_2	01, 2	011, 3_1	001, 3_2
0, 1_1	0	0	0	0	0
1, 1_2	0	0	1	1	1
01, 2	0	1	1	2	2
011, 3_1	0	1	2	2	3
001, 3_2	0	1	2	3	2

Hay un esqueleto delicado.

Lorenz



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = k \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Procedamos entonces a meter nuestras propuestas de modos:

$$\theta \sim Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - \frac{1}{2} Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{k} z\right),$$

$$\psi \sim X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)$$

Haciendo la cuenta completa:

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X)$$

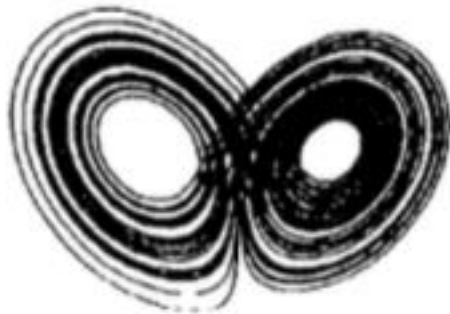
$$\frac{dY}{dt} = rX - Y - XZ$$

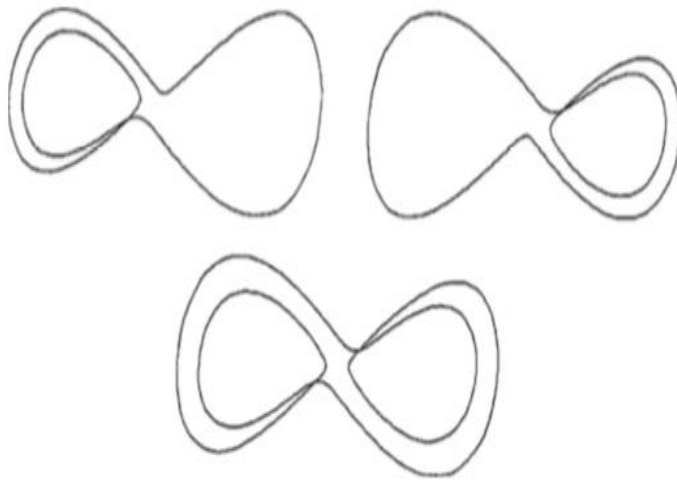
$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ$$

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(28 - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \left(\frac{8}{3}\right)z,$$





	0, 1 ₁	1, 1 ₂	01, 2	011, 3 ₁	001, 3 ₂
0, 1 ₁	0	0	0	0	0
1, 1 ₂	0	0	0	0	0
01, 2	0	0	1	1	1
011, 3 ₁	0	0	1	2	1
001, 3 ₂	0	0	1	1	2