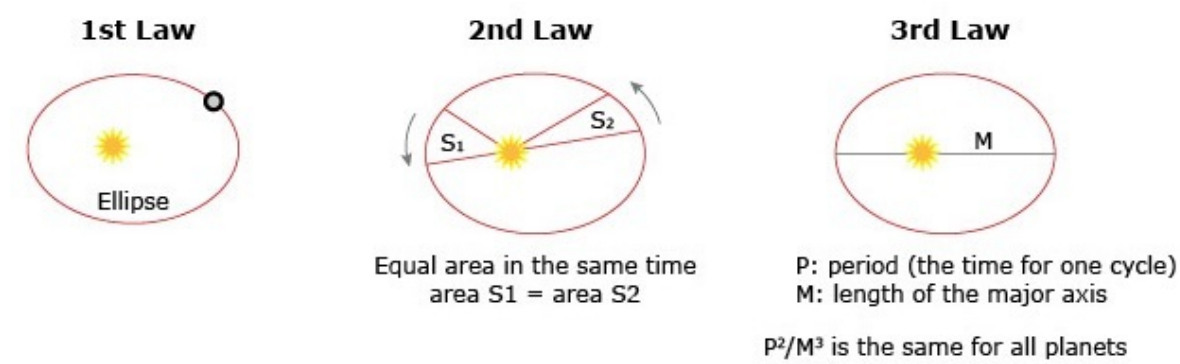
Clase X
Formas Normales

¿Por que describir un sistema vía ecuaciones diferenciales?

La primera conversación sobre “data-driven” vrs. “dinámica” puede imaginarse (si bien nunca ocurrió como tal), entre la descripción del movimiento planetario de Kepler, y la dinámica de Newton.

La descripción Kepleriana.



La visión de Newton.

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} 0 & \qquad\qquad\qquad\qquad en\ ausencia\ de\ interaccion\ con\ el\ universo\ (Galileo) \\ \dfrac{1}{m} & multiplicada\ por \quad (una\ forma\ funcional\ que\ de\ cuenta\ de\ la\ interaccion) \end{cases}$$

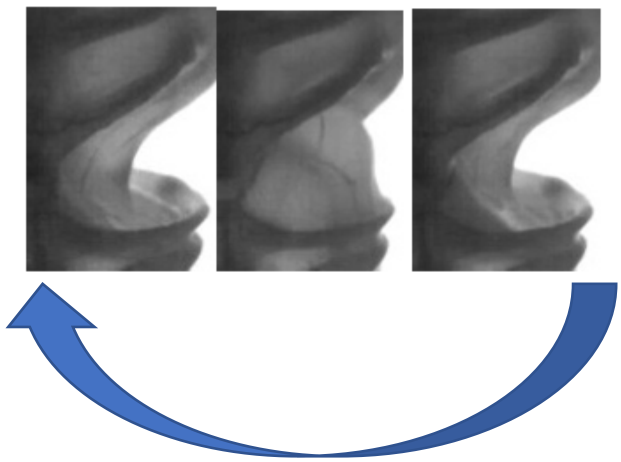
Algunas **fundamentales**

$$\boldsymbol{F} = \frac{-G\ m\ M}{{r_{12}}^2}\boldsymbol{e_{12}}$$

Y otras **fenomenológicas**, como

$$F = -kx$$

Por ejemplo, si nos proponemos entender la dinámica de esto:



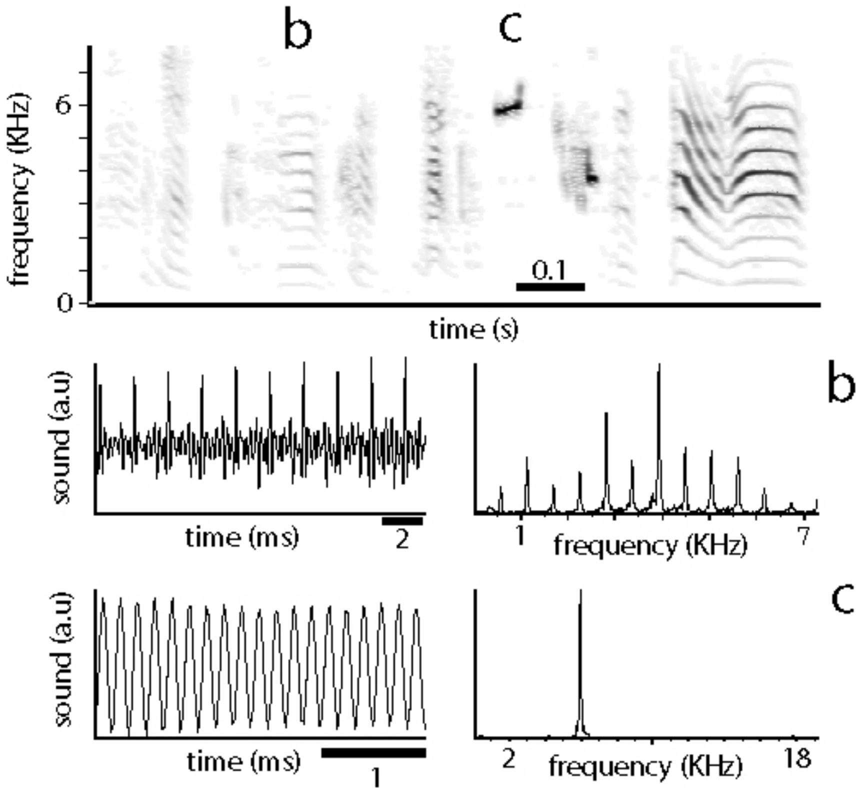
Las oscilaciones de labios siringeos en una paloma que hacen las veces de cuerdas vocales, es difícil plantear el problema desde primeros principios. Y si **ajustamos vía datos**, tendremos formas funcionales que describen precisamente la dinámica, tal vez vía la introducción de muchos términos en las ecuaciones.

¿Ahora, **como identificar las ecuaciones mas sencillas compatibles con el fenómeno**?

Numéricamente, decíamos (al ver “Sindy”) que tal vez se podía proponer una “forma rala”. ¿Por que debería existir tal cosa?

Hay una pregunta mas profunda detrás. ¿Por que “funciona” la física mas allá de los casos que involucran fuerzas fundamentales?
Tres modeladores, ante un problema, haciendo fenomenología…dan con tres modelos…
Y probablemente terminen entendiendo lo mismo

Ejemplo de la neurociencia



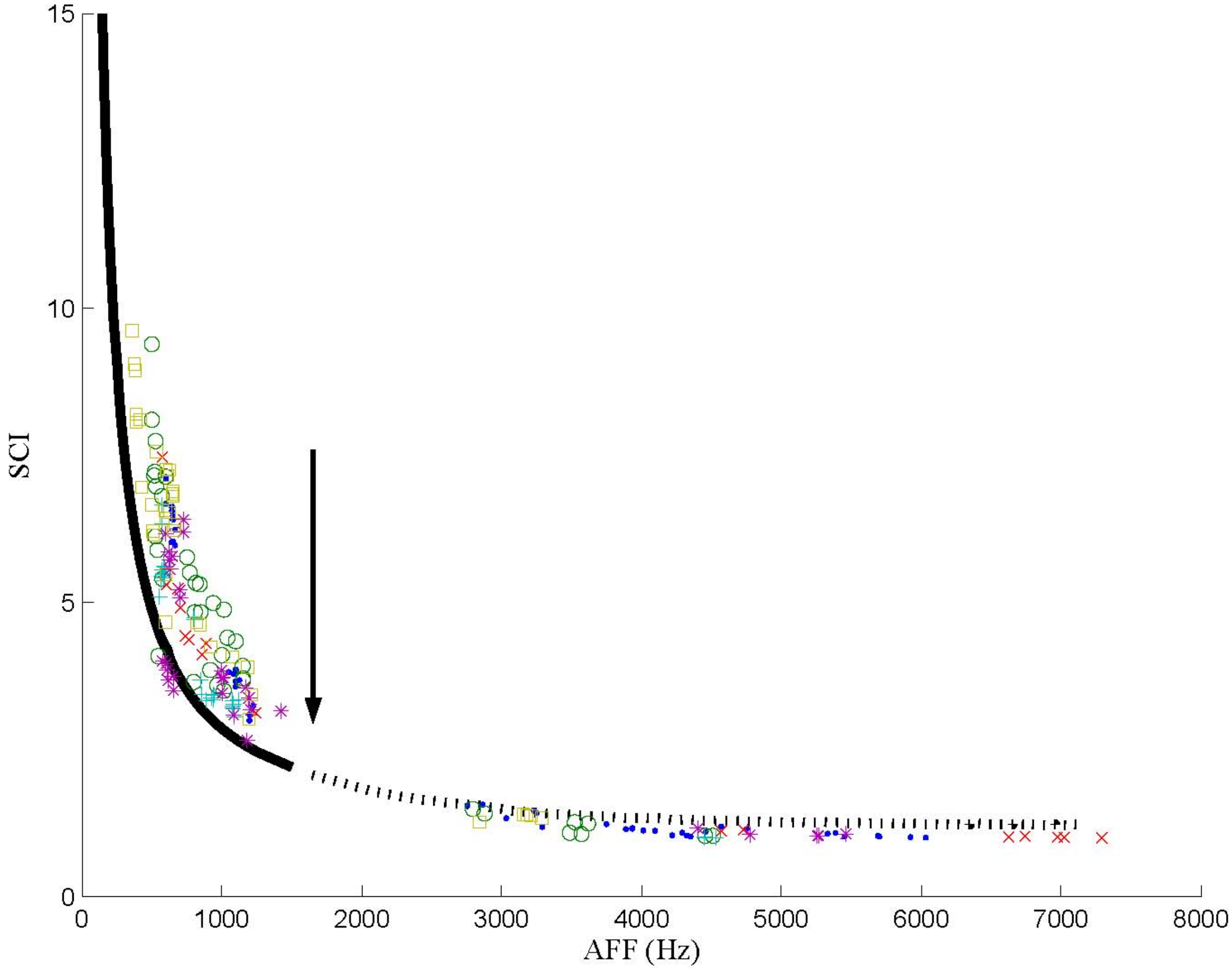
Zebra finch song

Spectrally rich notes

Almost tonal notes

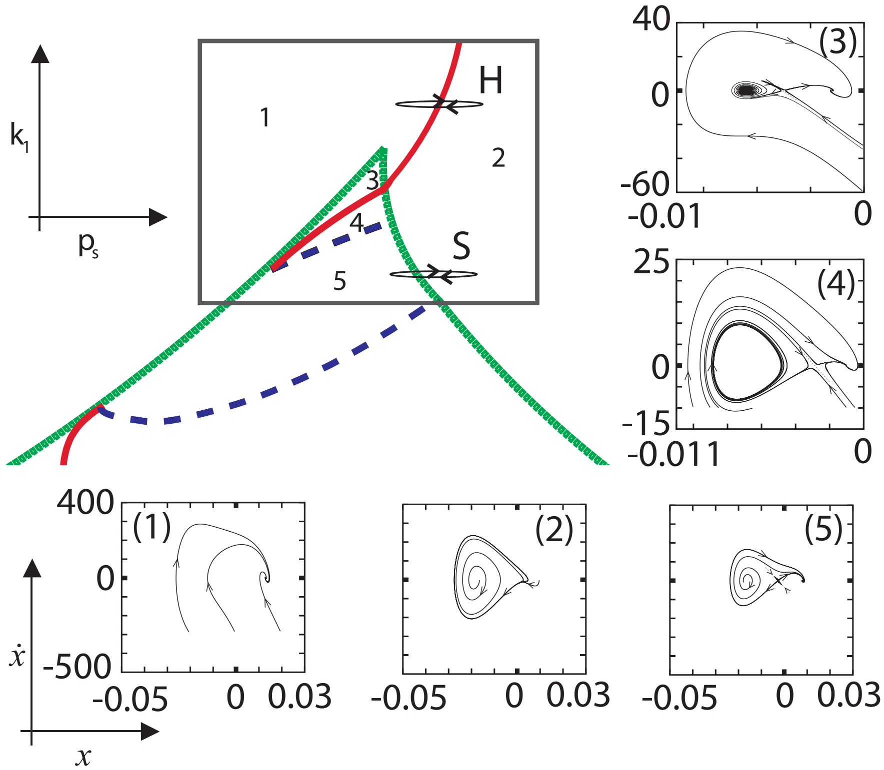
Es un canto súper diverso, con algunas silabas que son muy tonales, y otras, que tienen un rico contenido espectral.

¿Esas propiedades tímbricas, se construyen con la generación de muchos y sutiles instrucciones neuronales que afectan a una gran diversidad de aspectos morfológicos del aparato vocal?
¿Cada una, bajo el control de un área del cerebro?



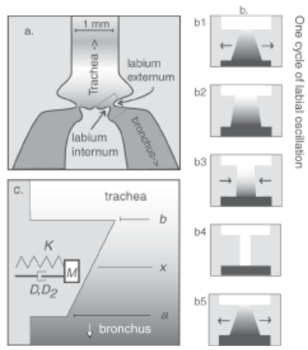
$$SCI = \left(\sum_i \omega_i\, \varepsilon_i / E\right) \Big/ AFF$$

Si analizo las ecuaciones completas del modelo del que vinimos hablando en el curso:



$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = (1/m)\left[-k(x)x - b(y)y - cx^2y + a_{lab}p_s\left(\frac{\Delta a + 2\tau\tau}{a_{01} + x + \tau y}\right)\right].$$



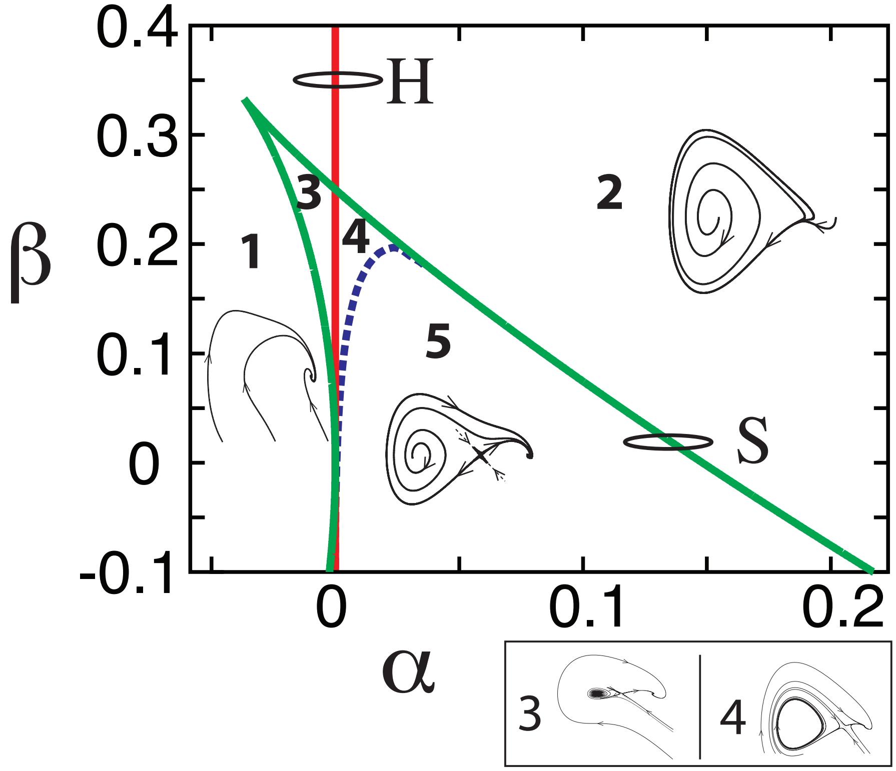
Ahora bien… que tal si les dijera que hay un modo:

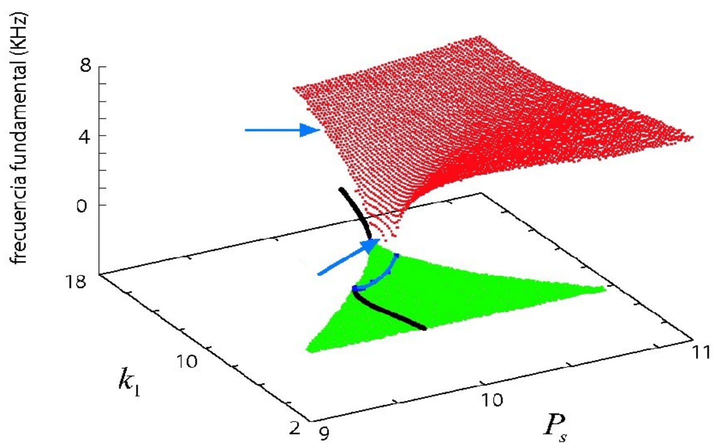
1. Algorítmico
2. Siempre aplicable
3. Que necesita solo conocer como es el sistema cerca de un entorno de un punto fijo

De llevar el sistema a uno cuyo campo vector sea un polinomio de grado r (a elección),
Con un numero mínimo de términos no lineales, y tal que sus soluciones son **equivalentes**?

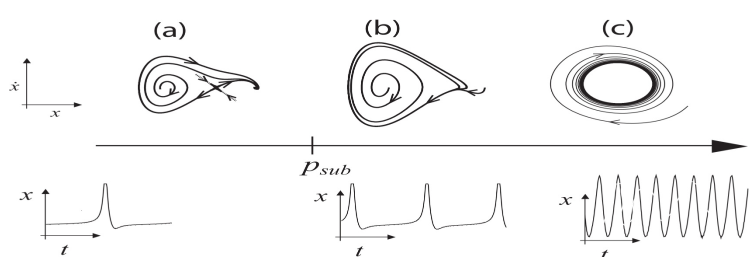
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y\\ \frac{dy}{dt} &= -\alpha(t)\gamma^2 - \beta(t)\gamma^2 x - \gamma^2 x^3 - \gamma x^2 y + \gamma^2 x^2 - \gamma x y\end{aligned}}$$

¿En que sentido son estos sistemas equivalentes?

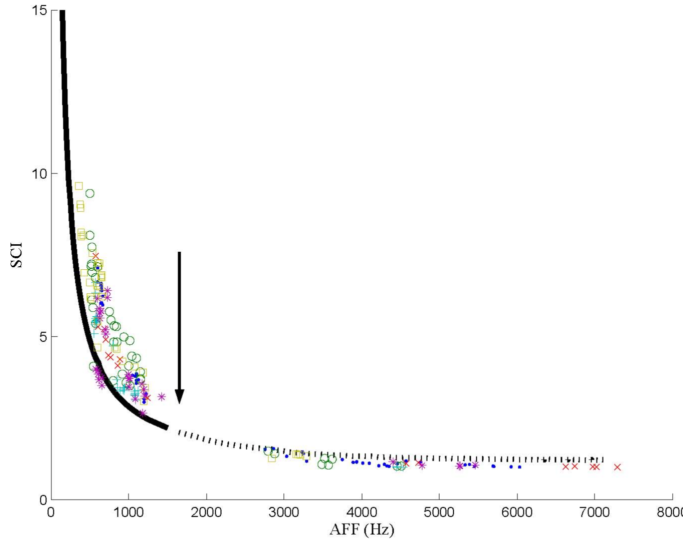




De la región 5 a 2, lo que ocurre, en detalles, es esto:



Y si calculo los contenidos espectrales de las soluciones, veo esta línea continua.



Dicho de otro modo, estas propiedades tímbricas, están determinadas no por una conspiración de parámetros que se ajustan en el cerebro de un ave, pero reflejan algo súper profundo de la biomecánica.

Y eso lo captura la forma normal de la bifurcación (este otro sistema dinámico, con un numero pequeño de términos).

¿Como se obtiene?

Sea una oscilación de relajación:

$$\frac{dA_1}{dt} = A_2$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \left(2\epsilon - {A_1}^2\right)A_2 - A_1$$

El primer termino de la segunda ecuación es una disipación (negativa si A_1 es pequeña, y positiva si A_1 es grande). El segundo termino, una restitución.

Este sistema de ecuaciones, entonces, da lugar a una oscilación de relajación, como hemos visto en la segunda clase.

Miremos el problema cerca de donde ocurrirán las bifurcaciones, esto es, cerca de $\epsilon \approx 0$. Para simplificar, definamos

$$X = A_1 + iA_2$$

Lo que da lugar a la ecuación en variable compleja:

$$\frac{dX}{dt} = -iX - \frac{1}{8}(X^3 + X^2\bar{X} - X\bar{X}^2 - \bar{X}^3)$$

Y la pregunta que nos vamos a hacer es si es posible encontrar un cambio de variables que elimine alguno de estos términos.

Proponemos un cambio de variables **implícito** (o sea, las viejas variables como una funcion de las nuevas), con todos los términos cúbicos posibles, o sea:

$$X = Z + \alpha Z^3 + \beta Z^2 \bar{Z} + \gamma Z \bar{Z}^2 + \delta \bar{Z}^3$$

Y calculo la derivada de X:

$$(1 + 3\alpha Z^2 + 2\beta Z\bar{Z} + \gamma \bar{Z}^2)\frac{dZ}{dt} + (\beta Z^2 + 2\gamma Z\bar{Z} + 3\delta \bar{Z}^2)\frac{d\bar{Z}}{dt} =$$

$$= -i(Z + \alpha Z^3 + \beta Z^2\bar{Z} + \gamma Z\bar{Z}^2 + \delta \bar{Z}^3) - \frac{1}{8}(Z^3 + Z^2\bar{Z} - Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3)$$

Y reemplazando $\frac{d\bar{Z}}{dt}$ por $i\bar{Z}$ (**ya que va a entrar vía términos cúbicos, basta considerar la aproximación lineal**), la ecuación queda:

$$\frac{dZ}{dt} = -iZ + \left(2\alpha - \frac{1}{8}\right)Z^3 + \left(-\frac{1}{8}\right)Z^2\bar{Z}$$

$$+\left(-2\gamma + \frac{1}{8}\right)Z\bar{Z}^2 + (-2\delta + \frac{1}{8})\bar{Z}^3$$

Notamos entonces, que podemos elegir α, γ, δ de modo que los términos con $Z^3, Z\bar{Z}^2, \bar{Z}^3$ se vayan, quedando

$$\frac{dZ}{dt} = -iZ - \frac{1}{8}\, Z^2\bar{Z}$$

Esta es una expresión minimal. No hay cambio de coordenada posible que elimine a este termino.

Notemos que es un termino tal que, si pensamos que linealmente

$$Z \sim e^{-it}$$

$$Z^2 \bar{Z} \sim e^{-2it}\, e^{it} = e^{-it}$$

Mientras que los términos eliminados van como

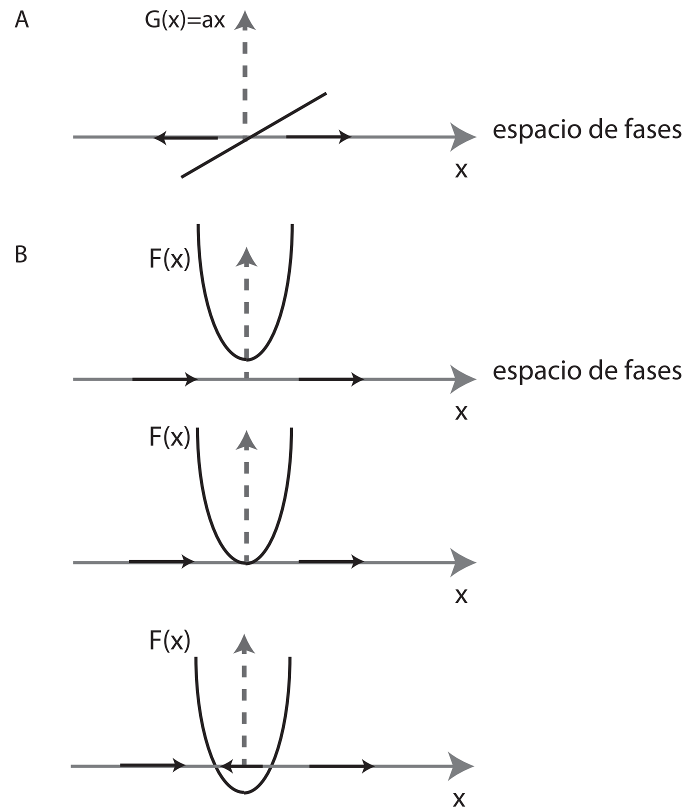
$$Z^3 \sim e^{-3it}, Z\bar{Z}^2 \sim e^{it}\ , \bar{Z}^3 \sim e^{3it}$$

Por eso decimos que el cambio no lineal de coordenadas dejo solo al termino **resonante.**

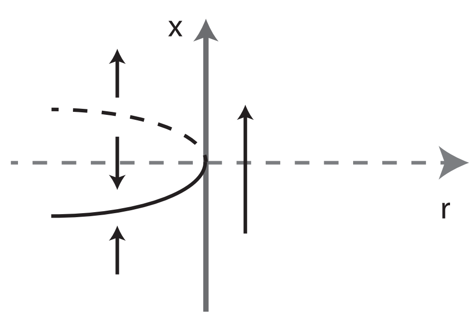
Esta estrategia ya la habíamos esbozado, cuando presentamos, para bifurcaciones en las primeras dos clases, **ecuaciones sencillas, paradigmáticas, que representaran las propiedades cualitativas de un flujo, y sus cambios ante cambios de los parámetros**. Por ejemplo:

Estudiamos esta bifurcación:

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = r + x^2 \\ r \in \mathbb{R} \end{gathered}.$$

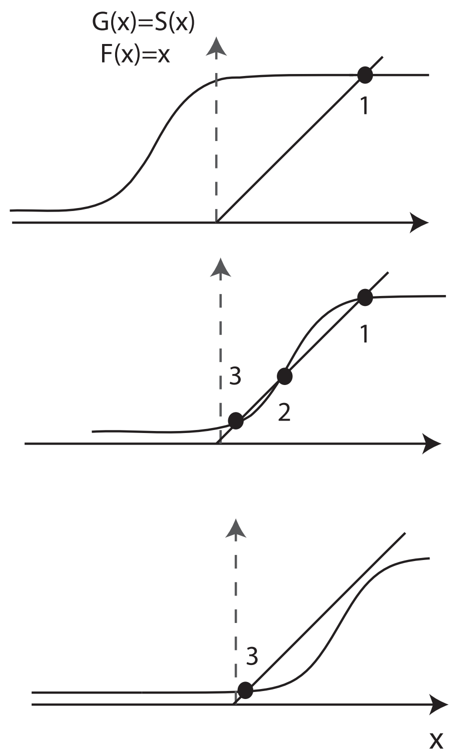


Que también representábamos, sintéticamente, de este modo:



Y reconocíamos a la misma en dos instancias al estudiar los cambios de este sistema:

$$\frac{dx}{dt} = -x + S(\rho + cx)$$
$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



En este caso, entonces, podemos reconocer **la forma funcional del campo vector que describe al sistema en el entorno de la bifurcación, desarrollando el campo vector original cerca de cada una de las bifurcaciones.**

Es decir, una ecuación sencilla, paradigmática, representaba las bifurcaciones de un campo vector mas complicado, que nunca habíamos pensado nadie habría estudiado antes de que apareciera ese problema particular.

En general, el problema puede expresarse así:

Sea el siguiente sistema dinámico:

$$\frac{dA}{dt} = LA + N_k(A, A \dots, A)$$

Donde N_k es un polinomio de orden k. Escribimos entonces un cambio de variables vía un polinomio homogéneo de grado k:

$$A = B + f_k(B)$$

Con coeficientes desconocidos a determinar. Entonces,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{dt} + \frac{\partial f_k}{\partial B}\frac{dB}{dt} = (I + \frac{\partial f_k}{\partial B})\frac{dB}{dt}$$

Y entonces

$$\frac{dB}{dt} = (I + \frac{\partial f_k}{\partial B})^{-1}\left(LB + Lf_k(B) + N_k\left(B + f_k(B), B + f_k(B) \dots, B + f_k(B)\right)\right) =$$

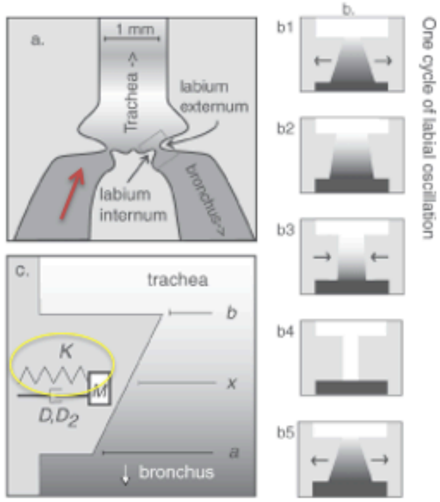
$$= (I + \frac{\partial f_k}{\partial B})^{-1}\,(LB + Lf_k(B) + N_k(B, B \dots, B))$$

$$= LB - \frac{\partial f_k}{\partial B}\,LB + Lf_k(B) + N_k(B, B \dots, B)$$

Y como los últimos tres términos son todos de orden k, el nombre del juego es usar los parámetros que definen a f_k para eliminar tantos términos de N_k como sea posible.

Estos es un mecanismo algorítmico, sistemático, de eliminar términos y obtener **representaciones ralas de campos vectores**.

Tener ecuaciones paradigmáticas para describir cambios cualitativos de flujos permite escribir ecuaciones sencillas, con pocos parámetros, capaces de describir adecuadamente una dinámica.

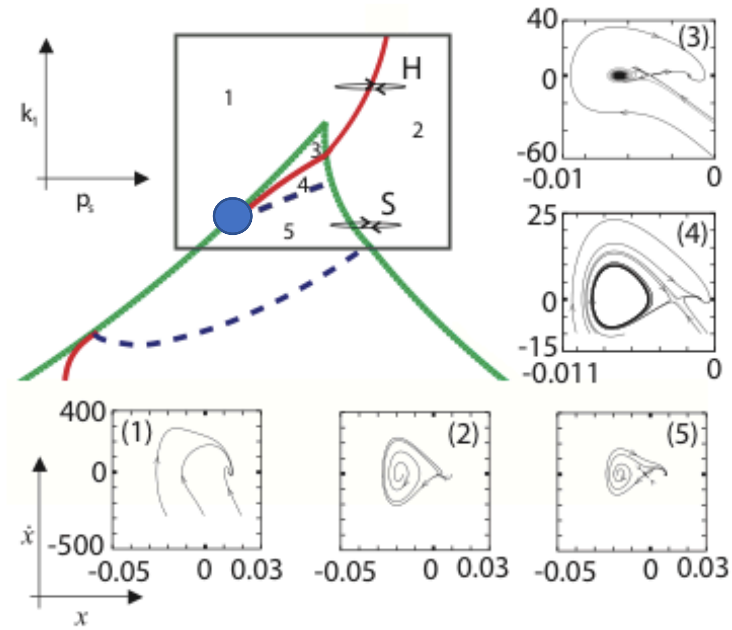


$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = (1/m)\left[-k(x)x - b(y)y - cx^2y + a_{lab}p_s\left(\frac{\Delta a + 2\tau\tau}{a_{01} + x + \tau y}\right)\right].$$

Las formas normales se desarrollan en el entorno de una singularidad lineal, y por eso el primer paso es calcular **puntos fijos**, y **linealizar.**

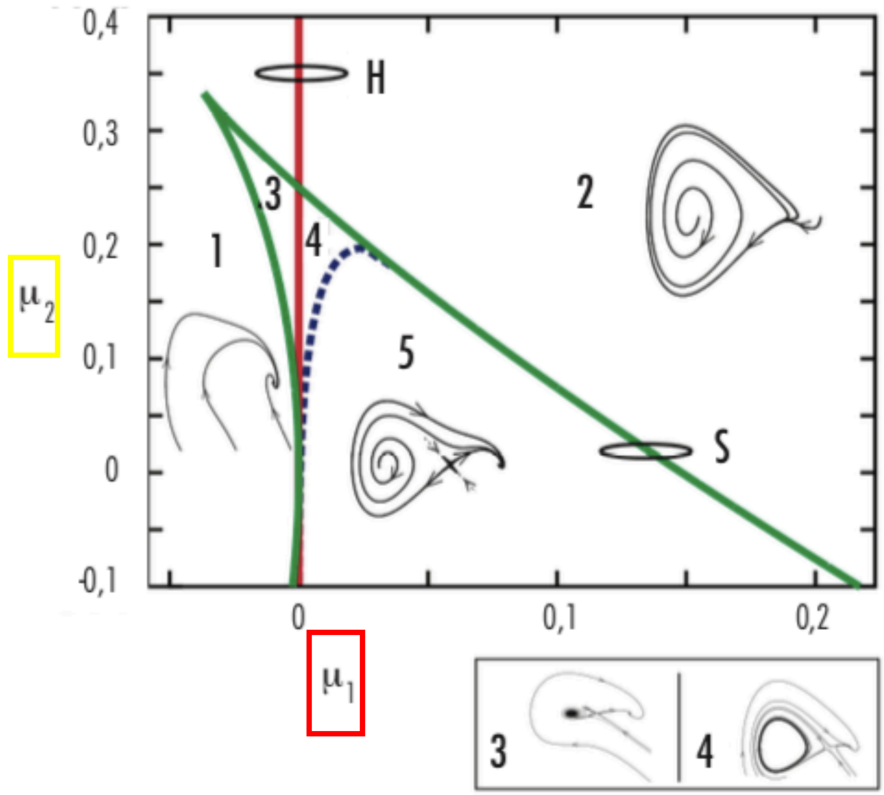
Si uno busca un punto bien singular, como en el que haya dos autovalores nulos, en el entorno pasa una gran variedad de comportamientos. En nuestro caso, se busca un punto en el espacio de parámetros en el cual un punto fijo tenga 2 autovalores nulos. Y como queremos poder incluir una situación con 3 puntos fijos, el campo vector se desarrollara a orden 3.



Llevando el sistema a la forma normal,

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\boxed{\mu_1} - \boxed{\mu_2} x - x^3 - x^2 y + x^2 - xy.$$



Notemos la sencillez de ajustar los parámetros de este sistema dinámico, respecto de lo que seria para el campo vector original.

1. Porque las variables, ambas, se derivan de una única, observable
2. Por la mínima cantidad de parámetros (rala expresión del campo vector)

De hecho, son solo dos parámetros, el γ que aparecía en la ecuación del comienzo de nuestra clase, es una escala de tiempo:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{\gamma d\tau}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{\gamma d\tau} = y$$

$$\frac{dy}{\gamma d\tau} = -\alpha - \beta x - x^3 - x^2 y + x^2 - xy$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \gamma y \equiv Y$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\gamma\alpha - \gamma\beta x - \gamma x^3 - \gamma x^2 y + \gamma x^2 - \gamma xy = -\gamma\alpha - \gamma\beta x - \gamma x^3 - x^2 Y - xY$$

$$\frac{d\gamma y}{d\tau} = \frac{dY}{d\tau} = -\gamma^2\alpha - \gamma^2\beta x - \gamma^2 x^3 - \gamma x^2 Y + \gamma^2 x^2 - \gamma xY$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= Y \\ \frac{dY}{d\tau} &= -\gamma^2\alpha - \gamma^2\beta x - \gamma^2 x^3 - \gamma x^2 Y + \gamma^2 x^2 - \gamma xY \end{aligned}}$$