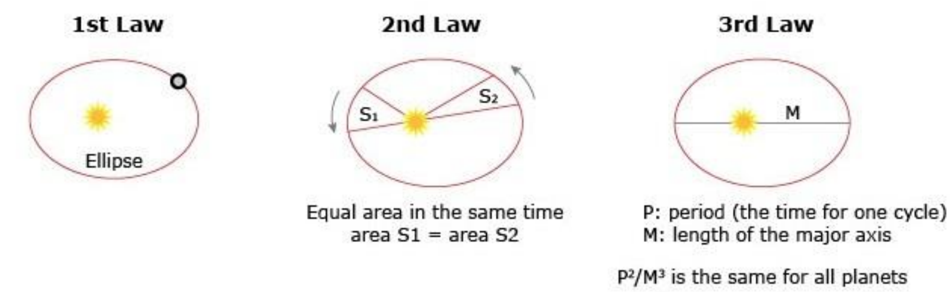
**Clase I**
**Sistemas dinámicos y elementos de la descripción de la dinámica de un problema.**

## 1. ¿Por que describir un sistema vía ecuaciones diferenciales?

La primera conversación sobre “data-driven” vrs. “dinámica” puede imaginarse (si bien nunca ocurrió como tal), entre la descripción del movimiento planetario de Kepler, y la dinámica de Newton.

**<u>La descripción Kepleriana.</u>**




© Copyright. 2013. University of Waikato. All rights reserved.

**<u>La visión de Newton</u>.**

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} 0 & \qquad\qquad\qquad en\ ausencia\ de\ interaccion\ con\ el\ universo\ (Galileo) \\ \dfrac{1}{m} \quad multiplicada\ por & (una\ forma\ funcional\ que\ de\ cuenta\ de\ la\ interaccion) \end{cases}$$

Algunas fundamentales

$$\boldsymbol{F} = \frac{-G\ m\ M}{{r_{12}}^2}\boldsymbol{e_{12}}$$

Y otras fenomenológicas, como

$$F = -kx$$

**Un sistema dinámico es:**

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in R^n,$$
$$\boldsymbol{x}(t=0) = \boldsymbol{x_0}$$

Bajo condiciones de suavidad del campo vector ($\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), d\boldsymbol{f}/d\boldsymbol{x}$ continuos en un entorno de $\boldsymbol{x}_0$), la solución es única. Esto es: cada punto del espacio de fases (***x***) tiene un único futuro. Esto es: no hay auto intersecciones en las trayectorias.

Que **NO** describe

1. Sistemas con retrasos, ej $\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - \sigma x(t-\tau)^2$
2. PDE (sistemas continuos, aunque…)

**<u>Historia (Newton):</u>**

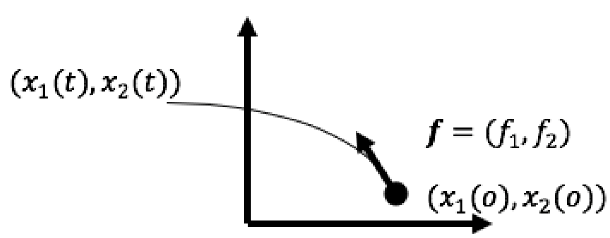
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \frac{1}{m}\vec{F}\left(x, \frac{d\vec{x}}{dt}\right).$$

El apartamiento de la velocidad constante (aceleración nula), es debido a la interacción con algún agente en el universo, y asume que esta constituido por dos cosas: como opera ese agente con una partícula similar a aquella en cuestión, de unidad de masa, y la masa de la partícula en si.

**Re escrito como un sistema dinámico:**

$$\frac{dx}{dt} = y = f_1(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = F(x, y) = f_2(x, y)$$

$$\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2), \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1, f_2)$$



## Un ejemplo de sistema lineal:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0,$$

Una fuerza de restitución, como la que derivo el archienemigo de Newton (Hooke), y una también fenomenológica, la disipativa.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=v \\ \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{1}{m}(-\beta v-kx) \end{cases},$$

## Un ejemplo de un sistema no líneal:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin(\theta),$$

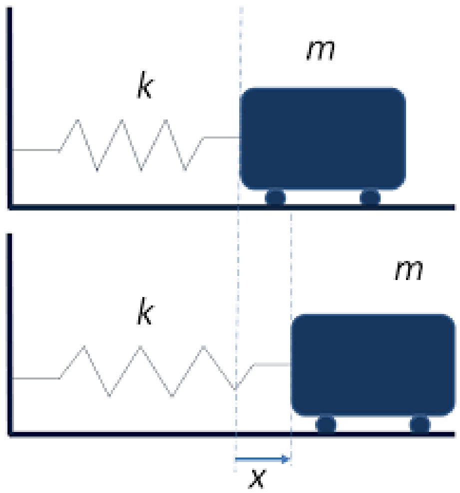
$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt}=\Omega \\ \dfrac{d\Omega}{dt}=-\dfrac{g}{l}\sin(\theta) \end{cases},$$

## Mirada "Newtoniana" a la neurociencia:

$$\begin{cases} C\dfrac{dV}{dt}=I-g_K n^4(V-E_K)-g_{Na}m^3h(V-E_{Na})-g_i(V-E_i) \\ \dfrac{dn}{dt}=\alpha_n(V)(1-n)-\beta_n(V)n \\ \dfrac{dm}{dt}=\alpha_m(V)(1-m)-\beta_m(V)m \\ \dfrac{dh}{dt}=\alpha_h(V)(1-h)-\beta_h(V)h \end{cases},$$

<u>**Ejemplo**</u>

**Espacio de configuración,** $x$ (unidimensional)




**Ecuaciones, Newton:**

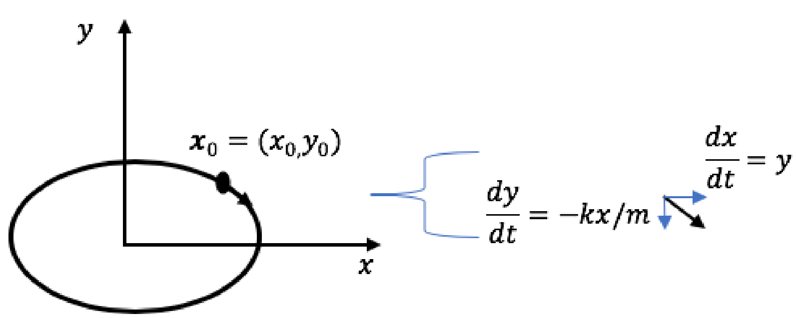
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

**Ecuaciones, como sistema dinámico:**

$$\frac{dx}{dt} = y$$

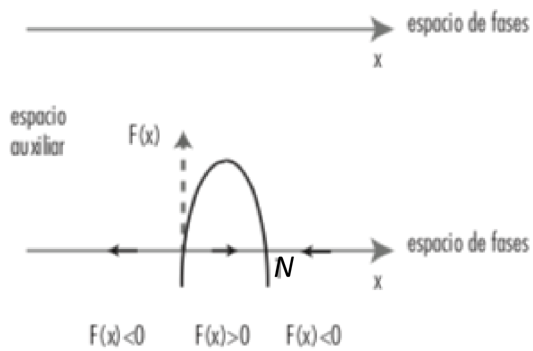
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-k}{m}\,x$$

**Espacio de fases:** $\boldsymbol{x} = (x, y)$



**<u>¿En que afecta al conjunto de soluciones esperables de un sistema dinámico que el campo vector sea no lineal?</u>**

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{N}\right).$$

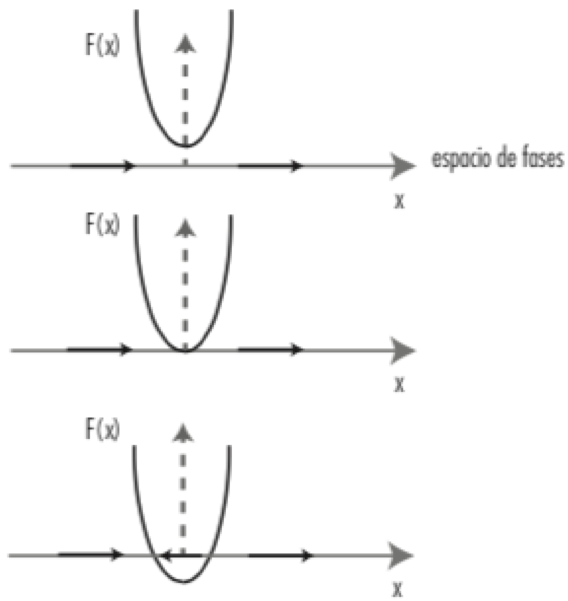



Los puntos en los cuales el campo vector se anula ($x = 0, x = N$) se conocen como **puntos fijos.** Estos constituyen nuestra primera herramienta para ordenar el comportamiento cualitativo del flujo (conjunto de trayectorias) de nuestro sistema dinámico.

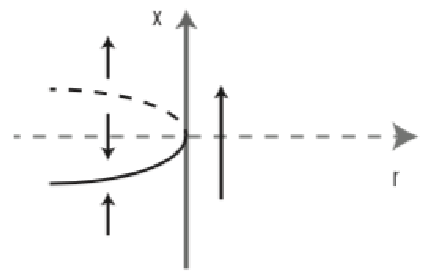
**<u>La primera signatura de que un sistema es no lineal es la coexistencia de puntos estacionarios aislados</u>**

**Bifurcaciones**

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = r + x^2 \\ r \in \mathbb{R}\end{gathered}}$$




Dependiendo del parámetro, existe un numero diferente de puntos fijos. A tal cambio cualitativo se lo conoce como **bifurcación.** Notemos que un **sistema no lineal puede tener un numero mayor que uno de puntos fijos aislados.**

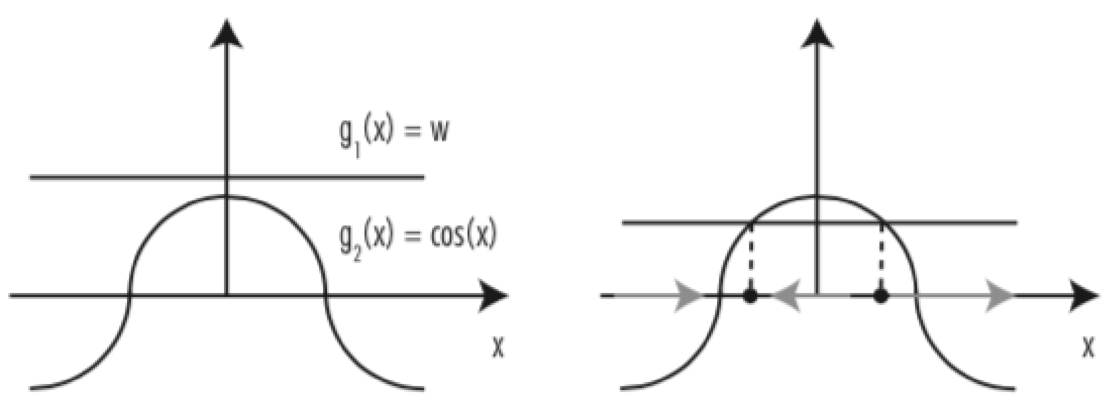



**Nodo silla en ciclo limite**

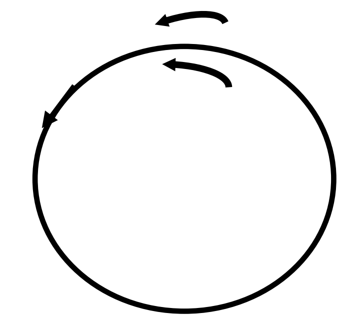
$$\frac{dr}{dt} = r(1-r)$$

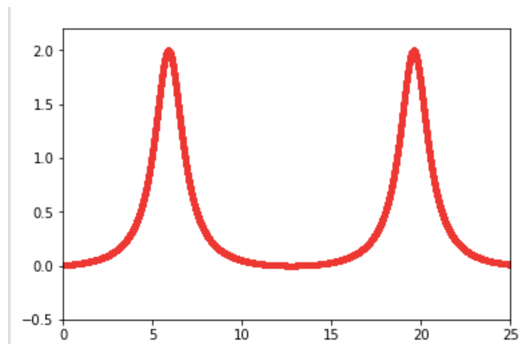
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - cos\theta$$

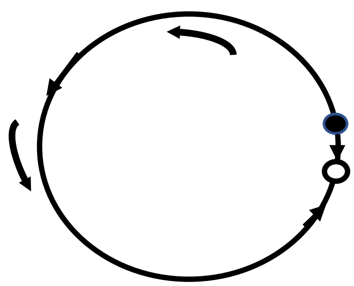
Notemos que para la parte angular,

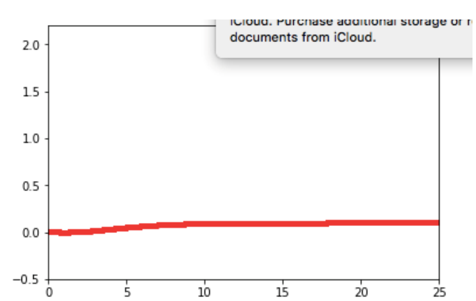


O sea, cuando $\omega > 1$, el sistema oscila. Las oscilaciones nacen con periodo infinito.







Si por algún motivo fisiológico, $\omega$ no puede crecer indefinidamente, tenemos que

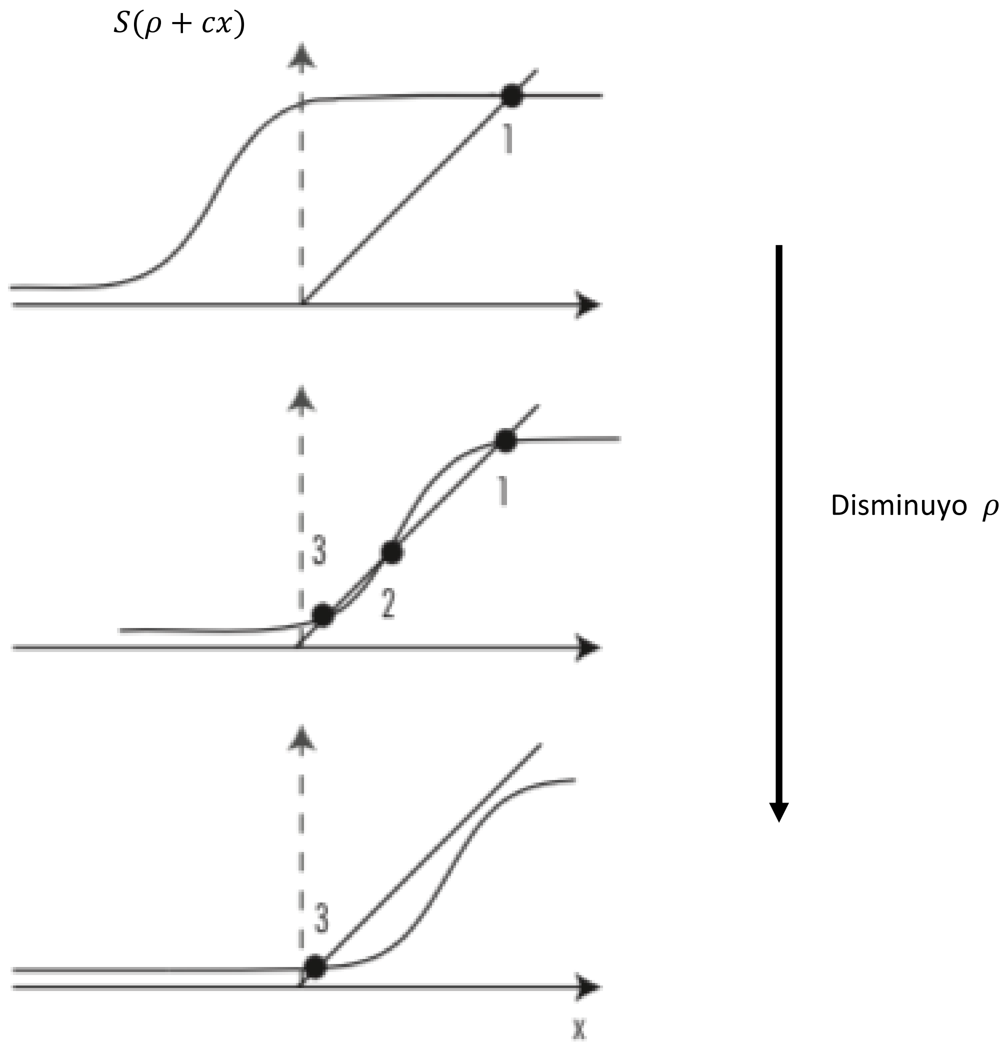
$$\omega = \omega(otros\ parametros, como\ corrientes\ externas)$$

Sera **<u>alguna función que sature</u>** para valores grandes de los parámetros.

**Un ejemplo interesante: tasa de disparo de una neurona en función del input. (**Guarda con este ejemplo para el resto del curso…)

**Este modelo se vincula con el anterior si se piensa a la variable x como la tasa de disparo, y se propone una funcion sigmoidea para el campo vector, que de cuenta de la existencia de un limite en la tasa de respuesta obtenida, al aumentar los parámetros.**

$$\frac{dx}{dt} = -x + S(\rho + cx)$$
$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

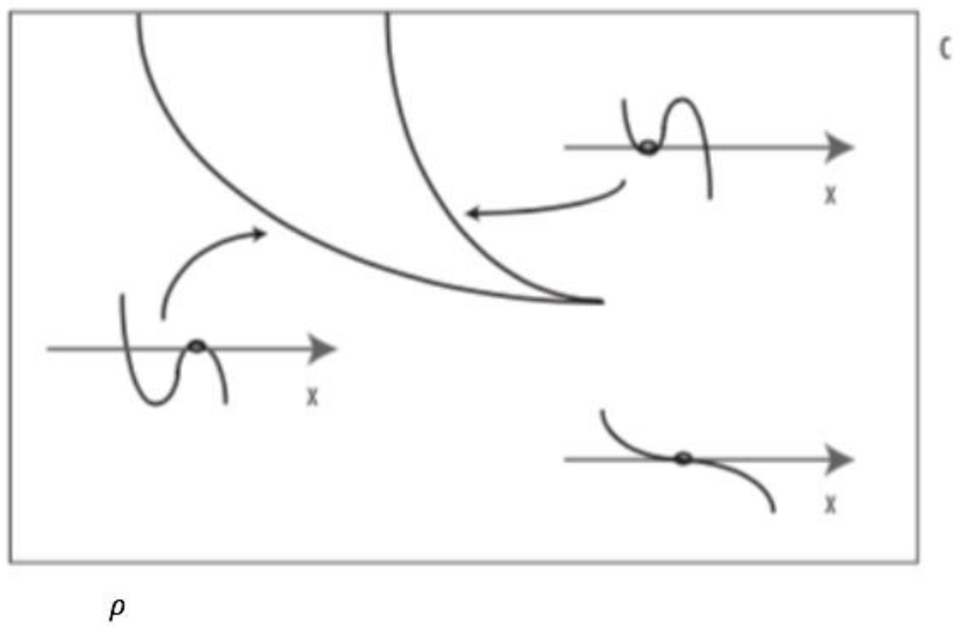



Si c es suficientemente grande, puede existir una zona con tres puntos fijos.

Si uno va haciendo decrecer, para un valor de c suficientemente grande, el $\rho$, eventualmente termina solo con el punto fijo de abajo.

Si uno empieza con un $\rho$ bien negativo, y lo va haciendo crecer, eventualmente termina con un punto fijo arriba.

Las curvas que marcan el borde de la región con tres puntos fijos, planteando condiciones para que se de la bifurcación en la que desaparecen dos puntos fijos.




**Muy importante para este curso:**

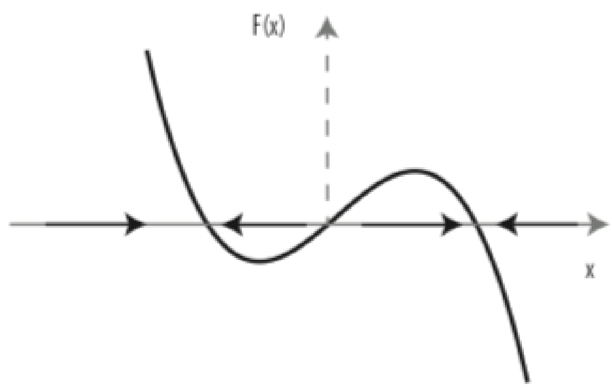
1. Si c no es lo suficientemente grande, las soluciones atractoras constituyen un continuo en funcion de los parámetros de control, **entre valores cercanos a cero, a valores cercanos. Y lo que es fundamental, existe un atractor solamente, independientemente de las condiciones iniciales, en la medida en que c sea lo suficientemente bajo como para evitar la coexistencia.**

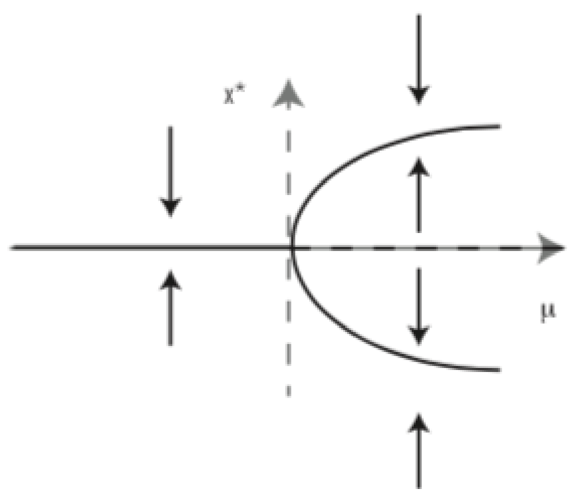
2. **De este modo, si esperamos el tiempo de decaimiento al atractor, la salida de la unidad dinámica es una funcion del parámetro, independiente de las condiciones iniciales.** Este es un elemento fundamental en el planteo de "redes neuronales". Las unidades no se piensan como dinámicas, sino como relaciones funcionales entre un input y un output.

**Lecturas adicionales**

**Otros tipos de bifurcaciones**

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3, \quad x, \mu \in R}$$



**¿Pregunta natural… cuantas? (esperemos un poco)**

**Otros elementos de la descripción: el ciclo limite.**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Notemos que podemos escribir los primeros dos términos de este modo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} + \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right)$$

de modo que si definimos

$$w = \frac{dx}{dt} + \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$

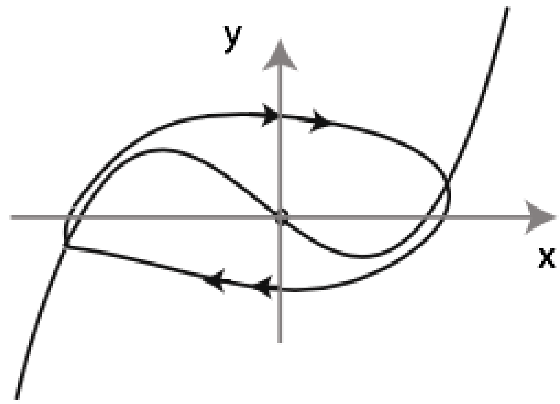
entonces la ecuación original se puede escribir como:

$$\frac{dw}{dt} = -kx$$

$$\frac{dx}{dt} = w - \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right) = \mu\left(\frac{w}{\mu} - \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right)$$

de modo que, escribiendo $y \equiv {}^{w}/_{\mu}$ ,

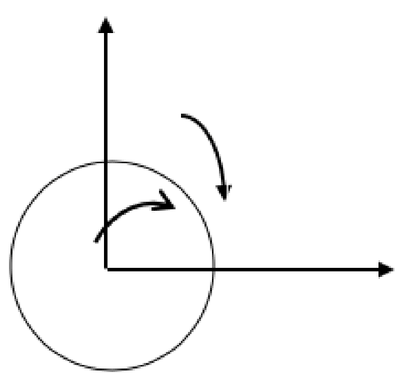
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{kx}{\mu}$$
$$\frac{dx}{dt} = \mu\left(y - \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right)$$




**Ecuaciones paradigmáticas para la aparición de un ciclo limite.**

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r)$$

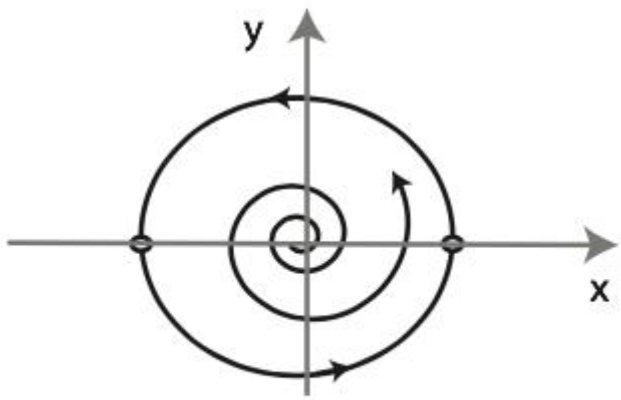
$$\frac{d\theta}{dt} = 1$$



**Y dejamos para mas adelante, si existe un modo algorítmico de llevar a una ecuación diferencial mas compleja, por medio de algún cambio de variables, a este sistema sencillo.**

**Un conjunto limite, en un espacio de fases bi dimensional, un poco mas sutil**

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = sin^2\theta + (r-1)^2$$

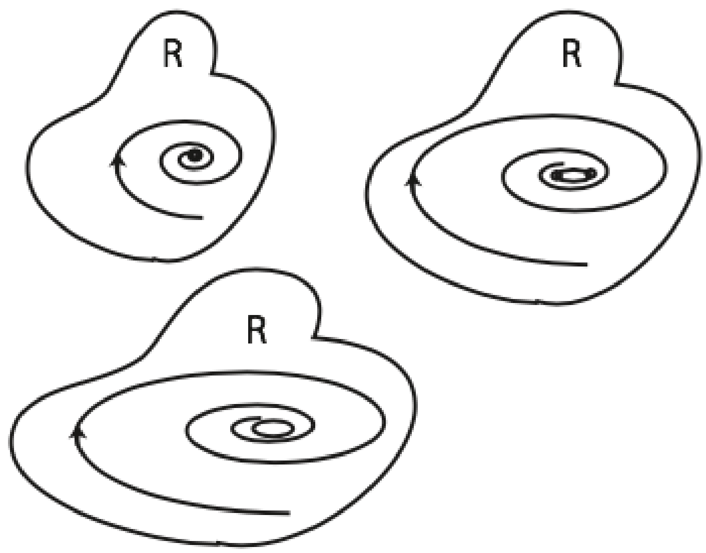



**En** $r = 1$ encontramos puntos fijos, y arcos conectores.

**Teorema de Poincare Bendixon**

Supongamos que $R$ es una región cerrada en el *plano* y consideremos un sistema dinámico que rige el comportamiento de las variables en $R$, definido por un campo vector continuo y continuamente diferenciable. Supongamos que tal campo vector no posee puntos fijos en $R$. Supongamos además que hay al menos *una* trayectoria acotada en $R$, de modo que empieza en esa región y nunca sale de ella. Entonces, *o bien la órbita es una trayectoria cerrada, o espirala a una órbita cerrada*.

La idea detrás de este teorema es que en el plano, una trayectoria no puede ser arbitrariamente compleja, ya que las autointersecciones no son posibles. De este modo, los comportamientos asintoticos están sumamente reducidos. En la figura vemos que en una región $R$ del espacio planar, una trayectoria puede espiralar a un punto o quedarse trabada en una estructura "mayor". La misma puede ser un ciclo límite o un conjunto de arcos conectores (ver Figura 23).




**Bifurcaciones que dan lugar a ciclos limite**

1. **Bifurcación de Hopf**

$$\frac{dz}{dt} = (\mu_r + i\mu_i)z - (c_r + ic_i)|z|^2 z,$$

con $z \in \mathbb{C}$.

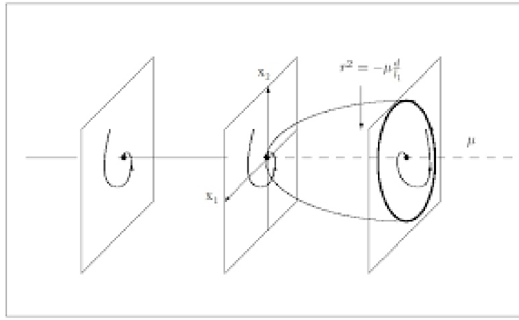
$$z = \rho e^{i\phi},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\rho}{dt}e^{i\phi} + i\rho e^{i\phi}\frac{d\phi}{dt} = i\rho e^{i\phi}(\mu_r + i\mu_i) - (c_r + ic_i)\rho^3 e^{i\phi},$$

y por lo tanto, separando parte real y parte imaginaria de la ecuación, tenemos:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu_r\rho - c_r\rho^3$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \mu_i - c_i\rho^2$$


$x_2$
$r^2 = -\mu \frac{d}{l_1}$
$\mu$
$x_1$