

Студент: Ермаков А.В.

Группа: НПМбд-01-21

№ ст. билета: 1032213202

Теоретические задания 1.

1) Дайте определение кольца.

Кольцо (ring) \perp множество A , на котором заданы две бинарные операции, называемые сложение (+) и умножение (\cdot), со следующими свойствами, выполняющимися для любых $a, b, c \in A$:

- 1) $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);
- 2) $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);
- 3) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность сложения);
- 4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения);
- 5) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ и $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ (дистрибутивность);
- 6) существует такой элемент $0 \in A$, что $a + 0 = 0 + a = a$ (существование нуля);
- 7) существует такой элемент $1 \in A$, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (существование единицы);
- 8) для любого $a \in A$ существует такой элемент $b \in A$, что $a + b = b + a = 0$ (существование противоположного элемента относительно сложения).

2) Дайте определение поля.

Поле (field) кольцо K , обладающее дополнительным свойством: для любого его элемента $a \neq 0$ существует такой элемент $b \in K$, что $ab = ba = 1$.

Базовые примеры:

- 1) Множество натуральных чисел \mathbb{N} не является кольцом, поскольку не содержит 0.
- 2) Множество целых чисел \mathbb{Z} является кольцом, но не является полем.
- 3) Множество рациональных чисел \mathbb{Q} является полем.
- 4) Множество вещественных чисел \mathbb{R} является полем.

3) Элемент e кольца A называется единицей, если $ae = ea = a$. Докажите, что $e = 1$.

По свойству кольца существует такой элемент $1 \in A$, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (существование единицы), значит если $ae = ea = a$, то $e = 1$

4) Является ли реализация поля вещественных чисел в Sage кольцом? Полем?

```
In [6]: RR.is_ring()
```

```
Out[6]: True
```

```
In [7]: RR.is_field()
```

```
Out[7]: True
```

Практические задания 2.

1) Преобразуйте π^2 в десятичную дробь.

```
In [8]: RR(pi^2)
```

```
Out[8]: 9.86960440108936
```

```
In [9]: n(pi^2)
```

```
Out[9]: 9.86960440108936
```

```
In [10]: RR(pi^2)==n(pi^2)
```

```
Out[10]: True
```

2) Совпадает ли $QQ(RR(\pi))$ с числом π ? Совпадает ли $QQ(RR(1/3))$ с числом $1/3$?

```
In [11]: QQ(RR(pi))==pi
```

```
Out[11]: (245850922/78256779) == pi
```

```
In [12]: QQ(RR(pi))==n(pi)
```

```
Out[12]: True
```

In [13]: `QQ(RR(1/3))==1/3`

Out[13]: `True`

In [3]: `var('x,y')
x = y^2+3
(x^2+y^2-x*y).full_simplify()`

Out[3]: `y^4 - y^3 + 7*y^2 - 3*y + 9`

3) Как интерпретирует Sage числа, введенные с клавиатуры как $1/3$ и $1.0/3$? Совпадают ли $1/3$ и $1.0/3$ как элементы поля Q ?

In [14]: `1/3, 1.0/3`

Out[14]: `(1/3, 0.3333333333333333)`

In [15]: `1/3 == 1.0/3`

Out[15]: `True`

In [17]: `RR(1/3), RR(1.0/3)`

Out[17]: `(0.3333333333333333, 0.3333333333333333)`

In [16]: `RR(1/3) == RR(1.0/3)`

Out[16]: `True`

4) Упростите выражение

$$5 * (n - 2)^3 - 6 * (n + 3)^3 - 3 * (2 * n - 9)^3.$$

In [23]: `var('n')
(5*(n - 2)^3 - 6*(n + 3)^3 - 3*(2*n - 9)^3).simplify()`

Out[23]: `-3*(2*n - 9)^3 - 6*(n + 3)^3 + 5*(n - 2)^3`

In [27]: `(5*(n - 2)^3 - 6*(n + 3)^3 - 3*(2*n - 9)^3).full_simplify()`

Out[27]: `-25*n^3 + 240*n^2 - 1560*n + 1985`

5) Подставьте $x = \pi$ в выражение $\sin(x^2 + 2 * x) + x^3$ и вычислите его приближенно.

```
In [31]: var('x')
x=pi

RR(sin(x^2+2*x)+x^3)
```

Out[31]: 30.5759754632997

6) Подставьте $x = y^2 + 3$ в выражение $x^2 + y^2 - xy$ и упростите полученный результат.

```
In [33]: var('x,y')
x = y^2+3

(x^2+y^2-x*y).full_simplify()
```

Out[33]: $y^4 - y^3 + 7y^2 - 3y + 9$

Теоретические задания 2.

1) Дайте определение нормальной формы многочлена.

Представление многочлена в виде линейной комбинации мономов с ненулевыми коэффициентами называют нормальной формой многочлена.

Элементы полиномиального кольца $A[x_1, \dots, x_n]$, представляющие собой произведение переменных x_1, \dots, x_n называют мономами.

2) Дайте определение степени многочлена.

Степенью монома $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ называют число $\text{degree}(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}) = k_1 + \dots + k_n$.

Степенью многочлена f называют максимальную из степеней мономов, входящих в $m(f)$. Степень многочлена p обозначают как $\text{degree}(p)$.

3) Дайте определение линейного порядка и мономиального порядка.

Линейным порядком (linear order) на множестве M называют бинарное отношение \leq , определенное для любых двух элементов этого множества и удовлетворяющее следующим условиям. Для любых $a, b, c \in M$ верно

- 1) $a \leq a$ (рефлексивность);
- 2) $a \leq b$ и $b \leq c$ влечет $a \leq c$ (транзитивность);
- 3) $a \leq b$ и $b \leq a$ влечет $a = b$ (антисимметричность).

Множество, на котором задан линейный порядок, называется линейно упорядоченным. Если $a \neq b$ и $a \leq b$, то пишут $a < b$.

Напр., сравнение больше-меньше в поле R является линейным порядком.

Мономиальный порядок (monomial order) - линейный порядок на множестве M мономов полиномиального кольца, удовлетворяющий условиям. Для любых $u, v, w \in M$ верно

- 1) $u \leq v$ влечет $uw \leq vw$;
- 2) $1 \leq u$.

Мономиальный порядок можно вводить несколькими способами.

4) Опишите лексикографический порядок на мономах.

Лексикографический порядок (lexicographic order, lex) на множестве мономов кольца $A[x_1, \dots, x_n]$ - это линейный порядок, при котором $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} > x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$ означает, что существует такой номер i , что $k_1 = l_1, \dots, k_{i-1} = l_{i-1}, k_i > l_i$.

5) Опишите градуированный лексикографический порядок на мономах.

Градуированный лексикографический порядок (degree lexicographic order, deglex) на множестве мономов кольца $A[x_1, \dots, x_n]$ - это мономиальный порядок, при котором $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} > x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$ означает, что $k_1 + \dots + k_n > l_1 + \dots + l_n$ или $k_1 + \dots + k_n = l_1 + \dots + l_n$ и существует такой номер i , что $k_1 = l_1, \dots, k_{i-1} = l_{i-1}, k_i > l_i$.

6) Дайте определение старшего члена.

Старшим членом (leading term) многочлена называют первый член в его нормальной форме, этот член представляет собой произведение старшего коэффициента на старший моном.

Практические вопросы 2.

1) Найдите степень многочлена $x(x + y)(x^2 + y^2)$ кольца $Z[x, y]$.

```
In [35]: var('x,y')  
  
f = (x*(x + y)*(x^2 + y^2))  
  
ZZ[x,y](f).monomials()
```

```
Out[35]: [x^3, x*y^2, x*y]
```

```
In [36]: M = ZZ[x,y](f).monomials()  
  
[ZZ[x,y](m).degree() for m in M]
```

```
Out[36]: [3, 3, 2]
```

```
In [38]: max([ZZ[x,y](m).degree() for m in M])
```

```
Out[38]: 3
```

```
In [39]: ZZ[x,y](f).degree()
```

```
Out[39]: 3
```

2) Составьте список всех мономов, входящих в многочлен $x(x + y)(x^2 + y^2)$ кольца $Z[x, y]$.

```
In [40]: var('x,y')  
  
f = (x*(x + y)*(x^2 + y^2))  
  
ZZ[x,y](f).monomials()
```

```
Out[40]: [x^3, x*y^2, x*y]
```

3) Составьте список всех мономов, входящих в многочлен $x * (x + 2)(x^2 + 3)$ кольца $Z[x]$.

```
In [42]: f = (x*(x+2)*(x^2+3))  
ZZ[x,y](f).monomials()
```

```
Out[42]: [x^4, x^3, x^2, x]
```

4) Сравните мономы $x * y * z^3$ и $x * y^2 * z$ при лексикографическом и градуированном лексикографическом порядках на мономах.

```
In [1]: var('x,y,z')
A = PolynomialRing(QQ,[x,y,z], order = 'lex')
B = PolynomialRing(QQ,[x,y,z], order = 'deglex')
```

```
In [47]: A(x*y*z^3) > A(x*y^2*z)
```

```
Out[47]: False
```

```
In [48]: B(x*y*z^3) > B(x*y^2*z)
```

```
Out[48]: True
```

```
In [50]: B(x*y*z^3) > A(x*y^2*z)
```

```
Out[50]: True
```

5) Найдите нормальную форму многочлена $(x + 2 * y - 3 * z)^3$ при лексикографическом и градуированном лексикографическом порядках на мономах. Чем они отличаются?

```
In [19]: var('x,y,z')
f = (x+2*y-3*z)^3

A = PolynomialRing(QQ,[x,y,z], order = 'lex')
B = PolynomialRing(QQ,[x,y,z], order = 'deglex')
```

```
In [20]: A(f)
```

```
Out[20]: x^3 + 6*x^2*y - 9*x^2*z + 12*x*y^2 - 36*x*y*z + 27*x*z^2 + 8*y^3 - 36*y^2*
z + 54*y*z^2 - 27*z^3
```

```
In [21]: B(f)
```

```
Out[21]: x^3 + 6*x^2*y - 9*x^2*z + 12*x*y^2 - 36*x*y*z + 27*x*z^2 + 8*y^3 - 36*y^2*
z + 54*y*z^2 - 27*z^3
```

```
In [23]: A(f)==B(f)
```

```
Out[23]: True
```

```
In [24]: A(f).monomials()
```

```
Out[24]: [x^3, x^2*y, x^2*z, x*y^2, x*y*z, x*z^2, y^3, y^2*z, y*z^2, z^3]
```

```
In [25]: B(f).monomials()
```

```
Out[25]: [x^3, x^2*y, x^2*z, x*y^2, x*y*z, x*z^2, y^3, y^2*z, y*z^2, z^3]
```

6) Найдите главный член многочлена $(x + 2 * y - 3 * z)^3$ при лексикографическом порядке на мономах.

```
In [26]: A(f).lt()
```

```
Out[26]: x^3
```

```
In [27]: A(f).lm()
```

```
Out[27]: x^3
```

```
In [28]: A(f).lc()
```

```
Out[28]: 1
```

7) Найдите главный коэффициент многочлена $(x + 2y - 3z)^4$ при градуированном лексикографическом порядке на мономах.

```
In [32]: f = (x+2*y-3*z)^4
```

```
In [33]: B(f).lt()
```

```
Out[33]: x^4
```

```
In [34]: B(f).lm()
```

```
Out[34]: x^4
```

```
In [35]: B(f).lc()
```

```
Out[35]: 1
```

```
In [49]: B(f).monomials()
```

```
Out[49]: [x^3, x^2*y, x^2*z, x*y^2, x*y*z, x*z^2, y^3, y^2*z, y*z^2, z^3]
```


8) Многочлен $(x + y)^2 + x^2y^5$ можно рассматривать не только как элемент кольца $Q[x, y]$, но и как элемент кольца $Q[x][y]$, то есть кольца всех многочленов от y над кольцом $Q[x]$. Найдите нормальные формы многочлена $(x + 2 * y - 3 * z)^3$ как элемента колец $Q[x, y]$, $Q[x, y][z]$ и $Q[y, z][x]$. В каком случае главный коэффициент не будет рациональным числом?

In [37]: `f = (x + y)^2 + x^2*y^5`

In [40]: `QQ[x, y](f)`

Out[40]: `x^2*y^5 + x^2 + 2*x*y + y^2`

In [41]: `QQ[x][y](f)`

Out[41]: `x^2*y^5 + y^2 + 2*x*y + x^2`

In [43]: `f=(x + 2*y - 3*z)^3`

In [45]: `QQ[x,y][z](f)`

Out[45]: `-27*z^3 + (27*x + 54*y)*z^2 + (-9*x^2 - 36*x*y - 36*y^2)*z + x^3 + 6*x^2*y + 12*x*y^2 + 8*y^3`

In [46]: `QQ[y,z][x](f)`

Out[46]: `x^3 + (6*y - 9*z)*x^2 + (12*y^2 - 36*y*z + 27*z^2)*x + 8*y^3 - 36*y^2*z + 54*y*z^2 - 27*z^3`

In [47]: `QQ[x,y][z](f).coefficients()`

Out[47]: `[x^3 + 6*x^2*y + 12*x*y^2 + 8*y^3, -9*x^2 - 36*x*y - 36*y^2, 27*x + 54*y, -27]`

In [48]: `QQ[y,z][x](f).coefficients()`

Out[48]: `[8*y^3 - 36*y^2*z + 54*y*z^2 - 27*z^3, 12*y^2 - 36*y*z + 27*z^2, 6*y - 9*z, 1]`

9) Вычислите значение многочлена $x^2(x-y)$ при $x = 1/2, y = 2/3$. Какие из приведенных ниже конструкций можно использовать?

- а) $(x^2*(x-y)).subs(x=1/2).subs(y=2/3)$
- б) $(x^2*(x-y)).subs(x==1/2).subs(y==2/3)$
- в) $(x^2*(x-y)).subs([x=1/2, y=2/3])$
- г) $(x^2*(x-y)).subs([x==1/2, y==2/3])$
- д) $(x^2*(x-y)).subs(\{0:1/2, 1:2/3\})$
- е) $(x^2*(x-y)).subs(\{x:1/2, y:2/3\})$
- ж) `QQx,y(x^2*(x-y)).subs(x=1/2).subs(y=2/3)`
- з) `QQx,y(x^2*(x-y)).subs(x==1/2).subs(y==2/3)`
- и) `QQx,y(x^2*(x-y)).subs([x=1/2, y=2/3])`
- к) `QQx,y(x^2*(x-y)).subs([x==1/2, y==2/3])`
- л) `QQx,y(x^2*(x-y)).subs(\{0:1/2, 1:2/3\})`
- м) `QQx,y(x^2*(x-y)).subs(\{x:1/2, y:2/3\})`

In [50]: $(x^2*(x-y)).subs(x=1/2).subs(y=2/3)$

Out[50]: $-1/24$

In [51]: $(x^2*(x-y)).subs(x==1/2).subs(y==2/3)$

Out[51]: $-1/24$

Ошибка - $(x^2 * (x - y)).subs([x = 1/2, y = 2/3])$

In [53]: $(x^2*(x-y)).subs([x==1/2, y==2/3])$

Out[53]: $-1/24$

In [54]: $(x^2*(x-y)).subs(\{0:1/2, 1:2/3\})$

Out[54]: $(x - y)*x^2$

In [55]: $(x^2*(x-y)).subs(\{x:1/2, y:2/3\})$

Out[55]: $-1/24$

In [56]: `QQ[x,y](x^2*(x-y)).subs(x=1/2).subs(y=2/3)`

Out[56]: $-1/24$

Ошибка - $QQ[x, y](x^2 * (x - y)).subs(x == 1/2).subs(y == 2/3)$

Ошибка - $QQ[x, y](x^2 * (x - y)).subs([x = 1/2, y = 2/3])$

Ошибка - $QQ[x, y](x^2 * (x - y)).subs([x == 1/2, y == 2/3])$

In [60]: `QQ[x,y](x^2*(x-y)).subs({0:1/2, 1:2/3})`

Out[60]: `-1/24`

Ошибка - $QQ[x, y](x^2 * (x - y)).subs(x : 1/2, y : 2/3)$

**10) Вычислите значение многочлена $x^2(x - 3)$ при $x = 1/2$.
Какие из приведенных ниже конструкций можно использовать?**

а) $QQx(x^2*(x-3)).subs(x=1/2)$

б) $QQx(x^2*(x-3)).subs(x==1/2)$

в) $QQx(x^2*(x-3)).subs([x=1/2])$

г) $QQx(x^2*(x-3)).subs([x==1/2])$

д) $QQx(x^2*(x-3)).subs({0:1/2})$

е) $QQx(x^2*(x-3)).subs({x:1/2})$

In [62]: `QQ[x](x^2*(x-3)).subs(x=1/2)`

Out[62]: `-5/8`

In [63]: `QQ[x](x^2*(x-3)).subs(x==1/2)`

Out[63]: `2*(0 == 0) + (-3*x^2 == (-3/4)) + (x^3 == (1/8))`

Ошибка - $QQ[x](x^2 * (x - 3)).subs([x = 1/2])$

In [65]: `QQ[x](x^2*(x-3)).subs([x==1/2])`

Out[65]: `2*(0 == 0) + (-3*x^2 == (-3/4)) + (x^3 == (1/8))`

Ошибка - $QQ[x](x^2 * (x - 3)).subs(0 : 1/2)$

Ошибка - $QQ[x](x^2 * (x - 3)).subs(x : 1/2)$