Técnicas e Análise de Algoritmos: *backtracking* e *branch-and-bound*

Prof. Jefferson T. Oliva

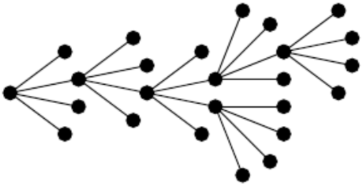
Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Sumário

- *Backtracking*
  - Labirinto
  - Mochila
  - Passeio do cavalo
- *Branch-and-Bound*
  - Labirinto
  - Mochila

Introdução

- Algoritmos força bruta testam exaustivamente todas as soluções possíveis de um problema para obter uma solução ótima
  - Não utiliza critérios para eliminar outras soluções que não poderão ser melhores que a obtida no estágio considerado
  - As soluções podem ser enumeradas de modo semelhante ao percurso em uma "árvore de soluções" que possua todas as soluções



Introdução

- Algoritmos força bruta não seguem regra fixa de computação
- Um algoritmo força bruta gera todos os possíveis candidatos da solução e verifica qual deles satisfaz o problema
  - Geralmente possui uma implementação simples
  - Encontra soluções, caso exista
  - Comumente utilizado em problemas com tamanho limitado ou quando um algoritmo mais eficiente é desconhecido
- A "árvore de soluções" pode crescer exponencialmente!

Introdução

- *Backtracking*
- *Branch-and-bound*

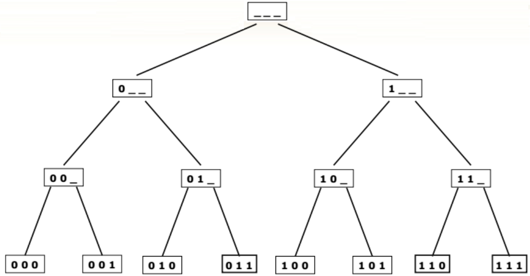
Sumário

Backtracking

Backtracking

- Explora todas (ou parte das) opções de solução, mas gera apenas soluções válidas
- Aplicado em problemas cuja solução pode ser definida a partir de uma sequência de passos
- Cada vez que um conflito é detectado, o algoritmo dará um passo para trás (*backtrack*) e tentará um "outro caminho" para encontrar a solução
- Comumente mais rápido que algoritmos força bruta, caso aplicável
  - Soluções inválidas são eliminadas sem serem completamente analisadas

- Muitos problemas podem ser modelados por uma árvore que representa todas as sequências de decisões possíveis
  - Exemplo: encontrar todos os números binários de 3 bits em que a soma de 1's seja maior ou igual a 2
  - Espaço de busca para o exemplo:



- Como reduzir o espaço de busca?

Backtracking

- Alguns problemas famosos em que o *backtracking* é utilizado:
  - Labirinto
  - Mochila
  - Passeio do cavalo

- Dada uma matriz $n \times m$ que representa um labirinto
- Dadas as posições inicial $p_i = (x_i, y_i)$ e final $p_f = (x_f, y_f)$
- O objetivo é verificar se existe um caminho entre p_i e p_f
- A matriz que representa o labirinto pode conter um dos seguintes valores:
  - -2: se a posição (x, y) representa uma parede
  - -1: se a posição (x, y) não faz parte do caminho
  - i: se a posição (x, y), tal que $i \geq 0$, faz parte do caminho

- Exemplo de labirinto 8×8, onde I é a posição final e F é a posição final

-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	I	-1	-1	-1	-1	-1	-2
-2	-2	-1	-2	-1	-1	-1	-2
-2	-1	-1	-2	-2	-2	-1	-2
-2	-1	-2	-2	-1	-1	-1	-2
-2	-1	-2	-1	-1	-1	-2	-2
-2	-1	-1	-1	-2	-1	-1	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2	F	-2

- Em uma posição no labirinto, apenas os seguintes movimentos podem ser executados
  - Direita
  - Esquerda
  - Cima
  - Baixo

- Exemplo de caminho encontrado na matriz

-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	0	1	-1	-1	-1	-1	-2
-2	-2	2	-2	-1	-1	-1	-2
-2	4	3	-2	-2	-2	-1	-2
-2	5	-2	-2	-1	-1	-1	-2
-2	6	-2	10	11	12	-2	-2
-2	7	8	9	-2	13	14	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2	15	-2

- Outro exemplo de caminho encontrado na matriz

-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	0	1	2	3	4	5	-2
-2	-2	-1	-2	-1	-1	6	-2
-2	-1	-1	-2	-2	-2	7	-2
-2	-1	-2	-2	-1	9	8	-2
-2	-1	-2	-1	-1	10	-2	-2
-2	-1	-1	-1	-2	11	12	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2	13	-2

- Para este labirinto, existem várias soluções

```c
#define MAX 10

int main(){
   int lab[MAX][MAX], n, m, li, ci, lf, cf, resp;

   /*Movimentos válidos no labirinto*/
   int movX[] = {0, 1, 0, -1};
   int movY[] = {1, 0, -1, 0};

   /*inicializar as variáveis relacionadas ao labirinto:  implementar*/
   iniciar_labirinto(lab, m, n, &li, &ci, &lf, &cf);

   lab[li][ci] = 0; // posição inicial no labirinto

   resp = resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, li, ci, lf, cf);

   if (resp > 0)
     imprimir_labirinto(lab, m, n);
   else
     printf("Solucao nao encontrada!\n");
   return 0;
}
```

```
int resolver_labirinto(int lab[MAX][MAX], int m, int n, int movX[], int movY[],
         int li, int ci, int lf, int cf){
   int l, c, i, passos = 0;

   if ((li == lf) && (ci == cf)) return lab[li][ci];

   /*Todos os movimentos a partir da posição inicial são testados*/
   for (i = 0; i < 4; i++){
      l = li + movX[i];
      c = ci + movY[i];

      /*O movimento é verificado e caso seja válido, uma solução é gerada*/
      if ((l >= 0) && (l < m) && (c >= 0) && (c < n) && (lab[l][c] == -1)){
         lab[l][c] = lab[li][ci] + 1;

         passos = resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, l, c, lf, cf);

      }
   }

   return passos;
}
```

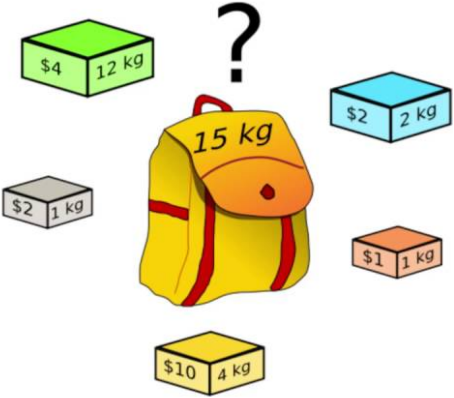
- Muitas vezes não é desejável encontrar apenas uma solução qualquer
  - Pode ser desejável encontrar uma solução ótima, de acordo com algum critério de otimalidade

- No problema do labirinto, por exemplo, podemos estar interessado em encontrar um caminho que contém o menor número de passos

- Possível adaptação no algoritmo

```
void resolver_labirinto(int lab[MAX][MAX], int m, int n, int movX[],
          int movY[], int li, int ci, int lf, int cf, int *min){
    int l, c, i;

    if ((li == lf) && (ci == cf)){
      if (lab[lf][cf] < *min)
        *min = lab[lf][cf];
    }else{
      /*Todos os movimentos a partir da posição inicial são testados*/
      for (i = 0; i < 4; i++){
        l = li + movX[i];
        c = ci + movY[i];

        /*O movimento é verificado e caso seja válido, uma solução é gerada*/
        if ((l >= 0) && (l < m) && (c >= 0) && (c < n) && ((lab[l][c] == -1) ||
               (lab[l][c] > lab[li][ci] + 1))){
          lab[l][c] = lab[li][ci] + 1;

          resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, l, c, lf, cf, min);
        }
      }
    }
}
```

  - Apesar do algoritmo encontrar a solução ótima, ainda todas as outras soluções são testadas



?
$4
12 kg
$2
2 kg
15 kg
$2
1 kg
$1
1 kg
$10
4 kg

- Lembra do algoritmo para a solução do problema da mochila por força bruta?

```
static int mochila_fb(int c[], int p[], int n, int b, int
i, int max){
   int c1, c2;
   if (i >= n)
     return b < 0 ?  0 :  max;
   else{
     c1 = mochila_fb(c, p, n, b, i + 1, max);
     c2 = mochila_fb(c, p, n, b - p[i], i + 1, max +
          c[i]);
     return c1 > c2 ?  c1 :  c2;
   }
}

int mochila(int c[], int p[], int n, int b){
   return mochila_fb(c, p, n, b, 0, 0);
}
```

- Na implementação apresentada no slide anterior, podemos ver que, além do custo computacional alto, também são geradas soluções inválidas

- Algumas adaptações no código evitaria a geração de soluções inválidas
  - Em vez da primeira verificação ser se i é maior ou igual a n, verificar se $b < 0$
  - Caso a nova verificação resultar em "verdadeiro", retorne 0
  - A próxima verificação é se $i < n$: caso a resposta seja positiva, são feitas chamadas recursivas como realizadas na solução por força-bruta
  - Se as verificações acima falharem, basta retornar *max* (valor máximo acumulado)

- Solução do problema da mochila por *backtracking*

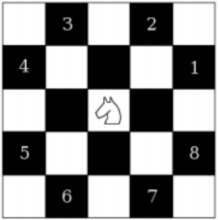
```
static int mochila_bkt(int c[], int p[], int n, int b, int
i, int max){
   int c1, c2;
   if (b < 0)
     return 0;
   else if (i < n){
     c1 = mochila_bkt(c, p, n, b, i + 1, max);
     c2 = mochila_bkt(c, p, n, b - p[i], i + 1, max +
          c[i]);
     return c1 > c2 ?  c1 :  c2;
   }else
     return max;
}

int mochila(int c[], int p[], int n, int b){
   return mochila_bkt(c, p, n, b, 0, 0);
}
```

- Dado um tabuleiro de de xadrez com $n \times n$ posições, onde o cavalo se movimenta conforme as regras do jogo

- A partir de uma posição (l, c), o algoritmo deve encontrar (caso exista), um passeio de cavalo em que todas as posições do tabuleiro sejam visitadas uma única vez

- O tabuleiro pode ser representado por uma matriz $n \times n$ que represente o histórico do passeio do cavalo, onde:
  - $m[l][c] \leq 0$: a posição (l, c) não foi visitada
  - $m[l][c] = i$: a posição (l, c) foi visitada no i-ésimo movimento, sendo que $1 \leq i \leq n^2$

- No exemplo abaixo, o cavalo está no centro do tabuleiro e os números são as possibilidades de deslocamento do cavalo a partir da posição atual:



- Solução do problema do passeio do cavalo utilizando *backtracking*:

```
// todas as 8 movimentações possíveis do cavalo a partir de uma posição
int movX[] = {-1, -2, -2, -1, 1, 2, 2, 1};
int movY[] = { 2, 1, -1, -2, -2, -1, 1, 2};

// verificar se a posição (l, c) é válida no tabuleiro
int validar_passo(int **mat, int n, int l, int c){
   return ((l >= 0) && (l < n) && (c >= 0) && (c < n) &&
         (mat[l][c] < 0));
}

// função para imprimir matriz
void imprimir(int **mat, int n);

// função para inicializar uma matriz n × n
int** iniciar_mat(int n);
```

- Solução do problema do passeio do cavalo utilizando *backtracking*:

```
// Função que tenta encontrar uma solução para o problema do passeio do cavalo
int movimento_cavalo(int **mat, int n, int l, int c,
       int mov){
   int i, pc, pl;
   mat[l][c] = mov;
   if (mov == n * n)
     return 1;
   for (i = 0; i < 8; i++){
     pl = l + movX[i];
     pc = c + movY[i];
     if (validar_passo(mat, n, pl, pc)){
       if (movimento_cavalo(mat, n, pl, pc, mov + 1))
         return 1;
     }
   }
   mat[l][c] = -1;
   return 0;
}
```

- Solução do problema do passeio do cavalo utilizando *backtracking*:

```
int main() {
   int n = 8, l = 0, c = 0;
   int **mat = iniciar_mat(n);

   mat[l][c] = 0;

   if (movimento_cavalo(mat, n, l, c, 1))
     imprimir(mat, n);

   free(mat);

   return 0;
}
```

- Resultado após execução da função *main()*:

1	10	23	64	7	4	13	18
24	63	8	3	12	17	6	15
9	2	11	22	5	14	19	32
62	25	40	43	20	31	16	51
39	44	21	58	41	50	33	30
26	61	42	47	36	29	52	55
45	38	59	28	57	54	49	34
60	27	46	37	48	35	56	53

Branch-and-Bound

Branch-and-Bound

- Relacionada com *backtracking*
- *Branch-and-bound* é um método de exploração mais sofisticada
  - *Branch*: explora opções
  - *Bound*: limite quantitativo (tem o propósito de evitar buscas em espaços menos promissores)

Branch-and-Bound

- *Branch-and-bound* realiza enumeração sistemática dos candidatos à solução
- Candidatas (a solução) parciais são eliminadas quando ocorre uma das seguintes situações:
  - Incapacidade de gerar uma solução válida (similar ao *backtracking*)
  - Incapacidade de gerar uma solução ótima, considerando
    - O valor da melhor solução encontrada até então (limitante superior)
    - O custo ainda necessário para gerar uma solução a partir da candidata atual (limitante inferior)
- O desempenho de uma solução *branch-and-bound* está fortemente relacionado à qualidade dos seus limitantes inferiores e superiores

- Solução *backtracking*:

```
void resolver_labirinto(int lab[MAX][MAX], int m, int n, int movX[],
         int movY[], int li, int ci, int lf, int cf, int *min){
   int l, c, i;

   if ((li == lf) && (ci == cf)){
     if (lab[lf][cf] < *min)
       *min = lab[lf][cf];
   }else{
     /*Todos os movimentos a partir da posição inicial são testados*/
     for (i = 0; i < 4; i++){
       l = li + movX[i];
       c = ci + movY[i];

       /*O movimento é verificado e caso seja válido, uma solução é gerada*/
       if ((l >= 0) && (l < m) && (c >= 0) && (c < n) && ((lab[l][c] == -1) ||
              (lab[l][c] > lab[li][ci] + 1))){
         lab[l][c] = lab[li][ci] + 1;

         resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, l, c, lf, cf, min);
       }
     }
   }
}
```

- O código apresentado anteriormente pode ser alterado para que o caminho ótimo seja encontrado utilizando *branch-and-bound*

- Se um caminho parcial utilizou tantos passos quanto o melhor caminho já encontrado, o mesmo pode ser descartado
  - Caso o número de passos do caminho parcial mais a diferença entre a posição atual e a saída for maior ou igual ao número de passos do melhor caminho já encontrado, então esse caminho parcial também pode ser descartado

```
void resolver_labirinto(int lab[MAX][MAX], int m, int n, movX[], movY[],
          int li, int ci, int lf, int cf, int *min){
    int l, c, i;

    if ((li == lf) && (ci == cf)){
      if (lab[lf][cf] < *min)
        *min = lab[lf][cf];
    }else{
      /*Todos os movimentos a partir da posição inicial são testados*/
      for (i = 0; i < 4; i++){
        l = li + movX[i];
        c = ci + movY[i];

        /*O movimento é verificado e caso seja válido, uma solução é gerada*/
        if ((l >= 0) && (l < m) && (c >= 0) && (c < n) && ((lab[l][c] == -1) ||
              (lab[l][c] > lab[li][ci] + 1))){
          lab[l][c] = lab[li][ci] + 1;

          if (lab[l][c] + abs(l - lf) + abs(c - cf) < *min)
            resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, l, c, lf, cf, min);
        }
      }
    }
}
```

- Solução *backtracking*:

```
static int mochila_bkt(int c[], int p[], int n, int b, int i, int max){
   int c1, c2;
   if (b < 0)
     return 0;
   else if (i < n){
     c1 = mochila_bkt(c, p, n, b, i + 1, max);
     c2 = mochila_bkt(c, p, n, b - p[i], i + 1, max + c[i]);
     return c1 > c2 ?  c1 :  c2;
   }else
     return max;
}
```

- Solução *branch-and-bound*

```
static int mochila_bnb(int c[], int p[], int n, int b, int i){
   if ((i < n) && (b > 0)){
      c1 = mochila_bkt(c, p, n, b, i + 1);

      if (b - p[i] >= 0)
         c2 = c[i] + mochila_bnb(c, p, n, b - p[i], i + 1);
      else
         c2 = 0;

      return max(c1, c2);
   }

   return 0;
}

int mochila(int c[], int p[], int n, int b){
   return mochila_bnb(c, p, n, b, 0);
}
```

Conclusão

Conclusão

- Método guloso
  - Considera a alternativa mais promissora e não explora as outras caso a escolha resultar em uma solução
  - As decisões não são reconsideradas
  - Rápida execução
  - Simples implementação
  - Não necessita memória auxiliar
  - Pode não gerar solução ótima

Conclusão

- Divisão e conquista
  - Fácil implementação
  - Paralelizável
  - Simplificação de problemas complexos
  - Pode necessitar memória auxiliar (caso seja utilizada recursão)
  - Pode não gerar solução ótima

Conclusão

- Programação dinâmica
  - A implementação solução pode ser mais complexa
  - Explora todas as alternativas de forma eficiente
  - Solução ótima, mas pode ser construída de forma lenta
  - Necessita memória auxiliar (tabela para armazenamento de resultados parciais)

Conclusão

- *Força-bruta*
  - Fácil implementação
  - Tentativa e erro: gera todos os tipos de solução (incluindo as inválidas)
  - Busca exaustiva
  - Solução geralmente lenta, mas ótima
  - Pode necessitar memória auxiliar (caso seja utilizada recursão)

Conclusão

- *Backtracking*
  - Busca exaustiva
  - Explora apenas as alternativas que geram soluções válidas
  - Solução pode ser lenta
  - Solução (pode ser) ótima
  - Pode necessitar memória auxilia (caso seja utilizada recursão)

Conclusão

- *Branch-and-bound*
  - Explora apenas as alternativas que geram soluções válidas, mas considerando limitantes
  - Busca "semi-exaustiva"
  - Solução pode ser lenta
  - Pode não ser encontrada solução dependendo dos limitantes
  - Pode necessitar memória auxiliar (caso seja utilizada recursão)
  - Definir limitantes pode ser difícil

Referências I

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.

Dias, Z.
Força Bruta, Backtracking e Branch and Bound. MC102 – Algoritmos e Programação de Computadores.
Slides. Ciência de Computação. IC/Unicamp, 2013.

Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.

Rosa, J. L. G.
Paradigmas e Técnicas de Projetos de Algoritmos. SCC-201 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2016.

Referências II

Szwarcfiter, J.; Markenzon, L.
Estruturas de Dados e Seus Algoritmos.
LTC, 2010.

Toffolo, T.
Backtracking. Algoritmos e Programação Avançada. BCC402 – Algoritmos e Programação Avançada.
Slides. Ciência de Computação. Decom/UFOP, 2011.

Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.