Técnicas e Análise de Algoritmos: método guloso

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

DAINF
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
CÂMPUS PATO BRANCO

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sumário

- Paradigmas de Projeto de Algoritmos
- Força-Bruta
- Método Guloso
  - Implementação de algoritmos gulosos
  - Estratégia gulosa
  - Exemplos

Paradigmas de Projeto de Algoritmos

- O projeto de algoritmos requer abordagens adequadas:
  - Dependendo da forma de tratamento do problema, o algoritmo pode ter desempenho ineficiente
  - Em certo casos, o algoritmo pode não conseguir resolver o problema em tempo viável
- Algoritmos polinomiais *vs.* exponenciais
- Problemas tratáveis *vs.* intratáveis
- P *vs.* NP
- Algoritmos recursivos *vs.* não-recursivos

Paradigmas de Projeto de Algoritmos

- Para projetar um algoritmo eficiente, é fundamental a preocupação com a sua complexidade

- Exemplo: sequência de Fibonacci
  - $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

  - Dado o valor de n, queremos obter o n-ésimo elemento da sequência

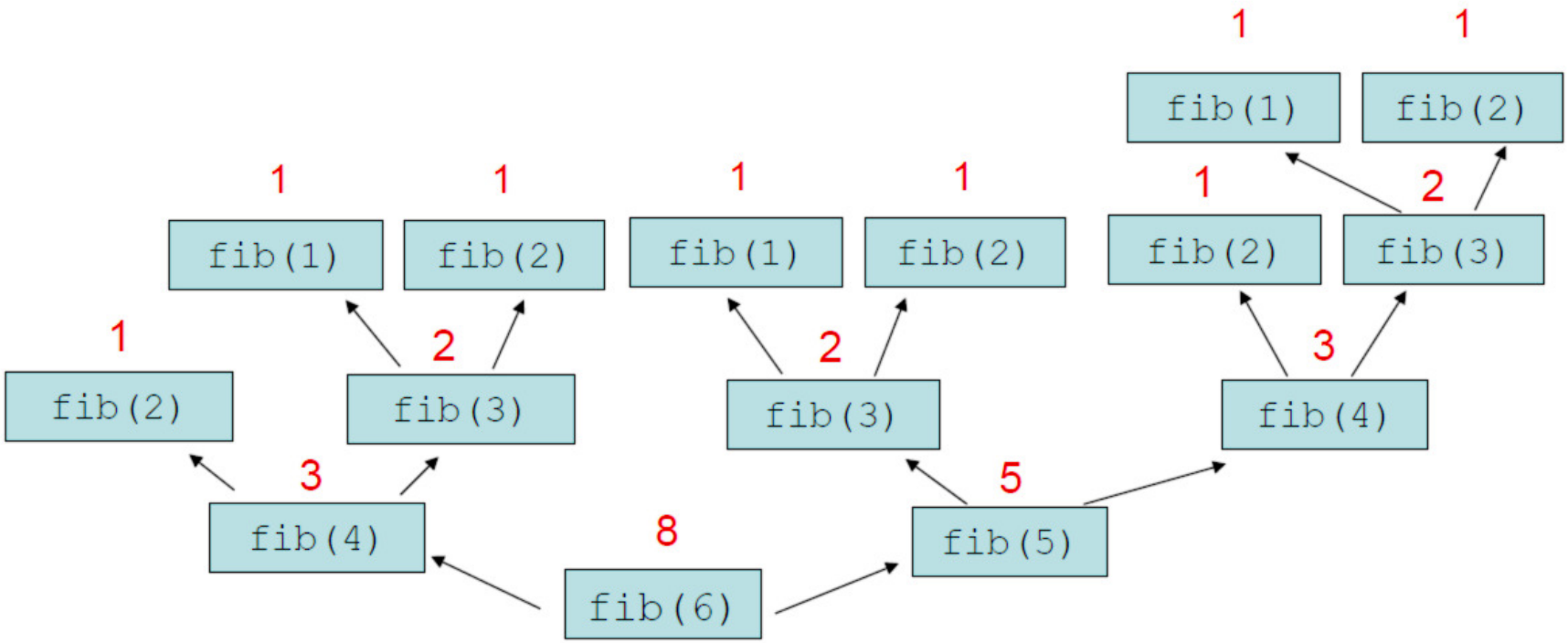
Paradigmas de Projeto de Algoritmos

- Exemplo: sequência de Fibonacci

```
long fib(int n){
 if (n <= 0)
    return 0;
 else if (n == 1)
    return 1;
  else
    return fib(n - 1) + fib(n - 2);
}
```

  - A complexidade dessa solução é na ordem de $O(2^n)$
  - Para $n = 100$, o algoritmo levaria muito tempo para executar 2^{100} operações

- Pilha de recursão para *fib*(6)



Paradigmas de Projeto de Algoritmos

- Outra implementação da sequência de Fibonacci

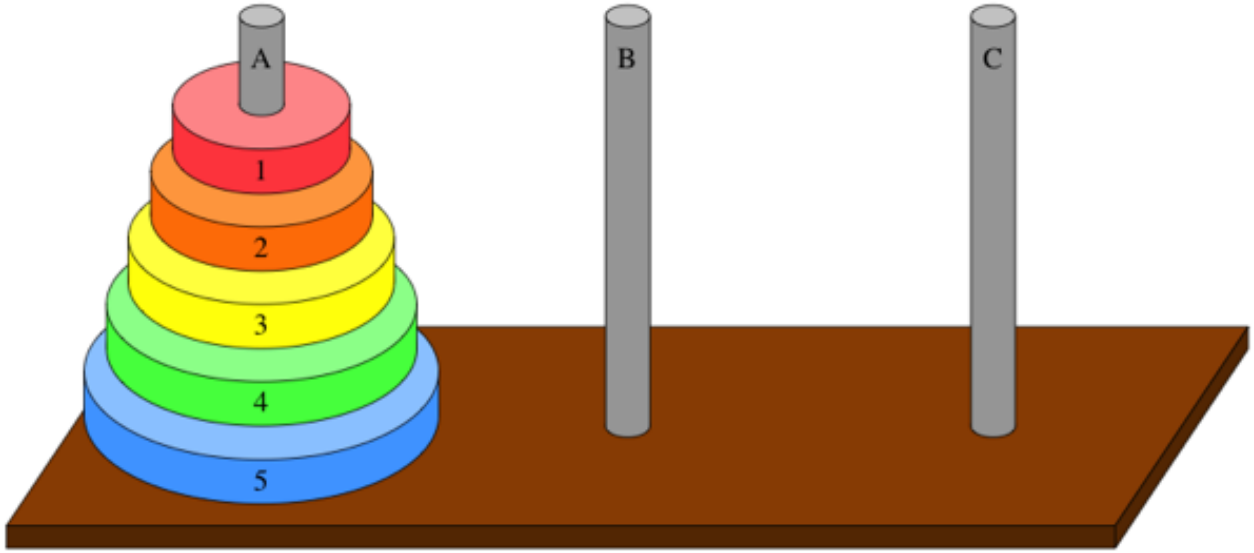
```
long fib2(int n){
  int i, atual = 1;
  int p = 0; // penúltimo
  int u = 1; // último

  if (n <= 0) return 0;

  for (i = 2; i <= n; i++){
    atual = p + u;
    p = u;
    u = atual;
 }
  return atual;
}
```

- A complexidade deste algoritmo é de $O(n)$

- Exemplo: torre de Hanói



  - Dado três torres (A, B e C) e n discos de diâmetros diferentes
  - O disco de menor diâmetro sempre deve estar em cima do disco de maior diâmetro
  - Problema: como colocar todos os discos na torre C, utilizando a torre intermediária B, sem inverter a ordem dos diâmetros em nenhum torre?

Paradigmas de Projeto de Algoritmos

- Exemplo: torre de Hanói
  - Inicialmente, todos discos deve estar na torre A
  - Se há solução para n discos, então há solução para $n-1$ discos
  - No caso trivial de $n = 1$, a solução é simples
  - A solução para n discos é realizada em termos de $n-1$

```
void hanoi(char de, char para, char meio, int
n){
  if (n <= 1)
    printf("Disco %d:  %c => %c\n", n, de, para);
  else{
    hanoi(de, meio, para, n - 1);
    printf("Disco %d:  %c => %c\n", n, de, para);
    hanoi(meio, para, de, n - 1);
  }
}
```

- Complexidade do algoritmo *Hanoi*
  - O número mínimo de "movimentos" para conseguir transferir todos os discos da primeira estaca à terceira é $2^n - 1$, sendo n o número de discos. Logo: $O(2^n)$
  - Para solucionar um Hanói de 5 discos, são necessários 31 movimentos
  - Hanói de 7 discos: 127 movimentos
  - Hanói de 15 discos: 32.767 movimentos
  - Hanói de 32 discos: 4.294.967.295 movimentos
  - Hanói de 64 discos: 18.446.744.073.709.551.615 movimentos!

- Exemplo: problema do caixeiro viajante (PCV)

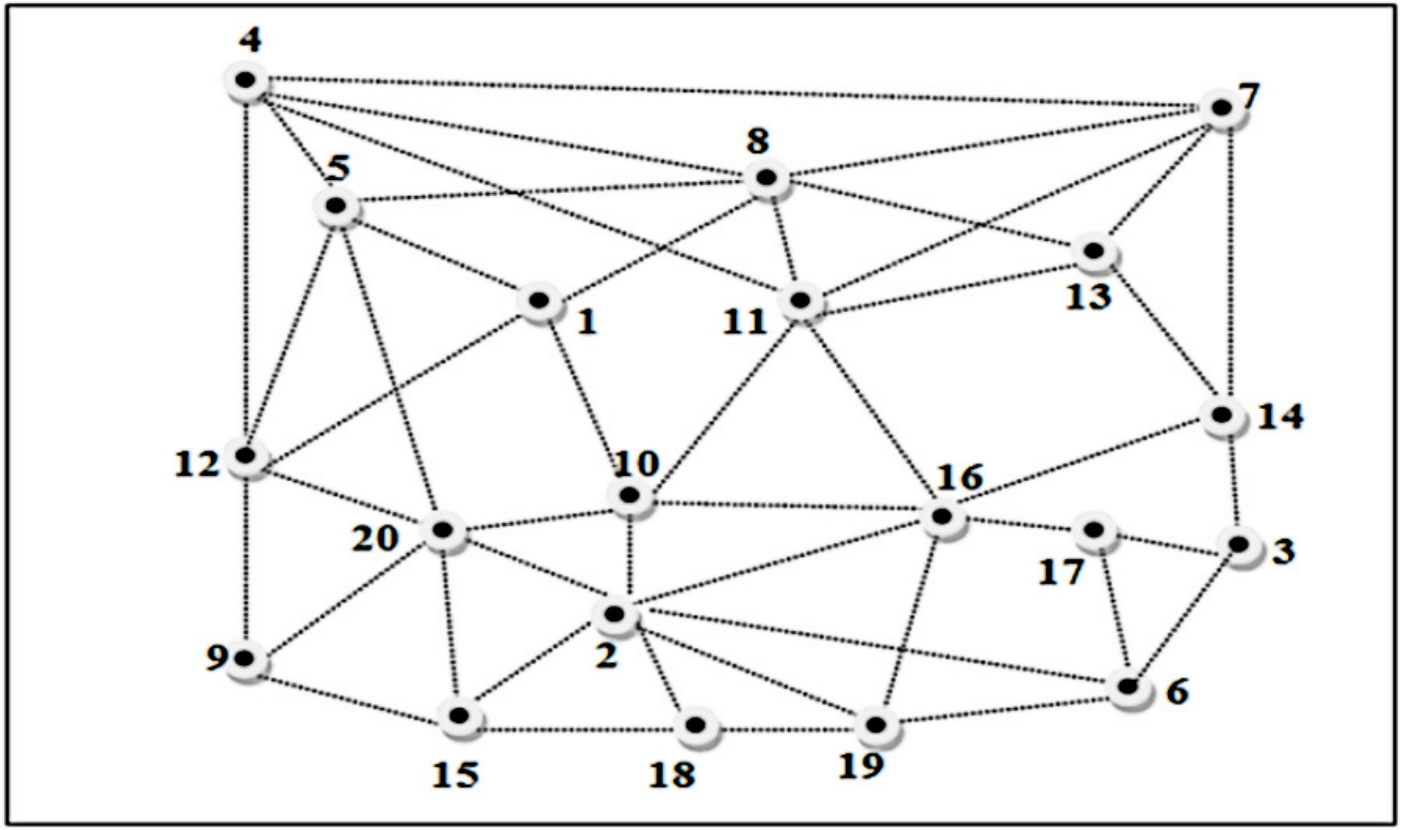


Figura 1 - Instância do PCV para 20 cidades

- Exemplo: problema do caixeiro viajante
  - Espaço de busca é um conjunto de permutação das n cidades
  - Cada permutação das n cidades caracteriza-se como uma lista ordenada que define a sequência das cidades a serem visitadas
  - A solução ótima é uma permutação que corresponda a uma *tour* (ou passeio) de caminho mínimo
  - Cada *tour* pode ser representada de $2n$ maneiras diferentes (para um modelo simétrico)
  - Considerando-se que há $n!$ formas de permutar n números, o tamanho do espaço de busca é $|S| = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$
  - Logo, a complexidade é $O(n!)$

Paradigmas de Projeto de Algoritmos

- Exemplos de outros problemas
  - Satisfatibilidade booleana
  - Oito rainhas
  - Passeio do cavalo
  - Árvore geradora mínima
  - Caminhos mínimos
  - ...

Paradigmas de Projeto de Algoritmos

- Métodos (Paradigmas) de desenvolvimento de algoritmos:
  - Força-bruta
  - Método guloso
  - Divisão e conquista
  - Programação dinâmica
  - *Backtracking*
  - *Branch and bound*

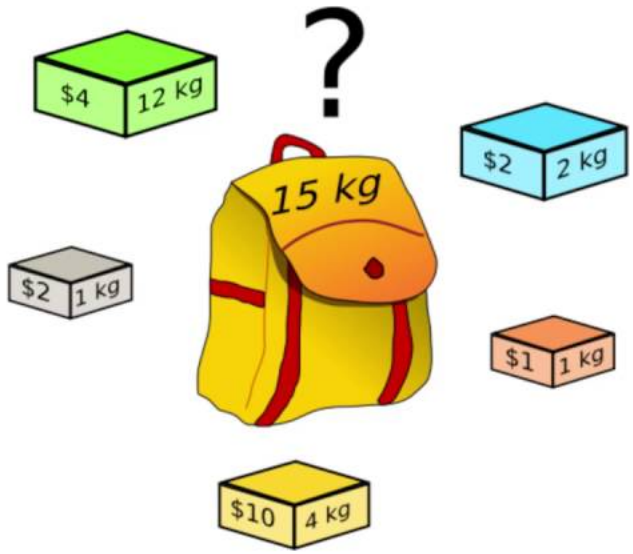
Sumário

Força-Bruta

- Também conhecida como "busca exaustiva" e "tentativa e erro"
- É a estratégia mais trivial e intuitiva para a solução de problemas
- Essa abordagem enumera todas as combinações possíveis de soluções
  - No final, é escolhida uma solução, se houver, que satisfaça o problema
  - A melhor solução é escolhida
- Entretanto, algoritmos força-bruta comumente possuem custo computacional alto
  - Muitas vezes exponenciais (*e.g.* $O(2^n)$)

Força-Bruta

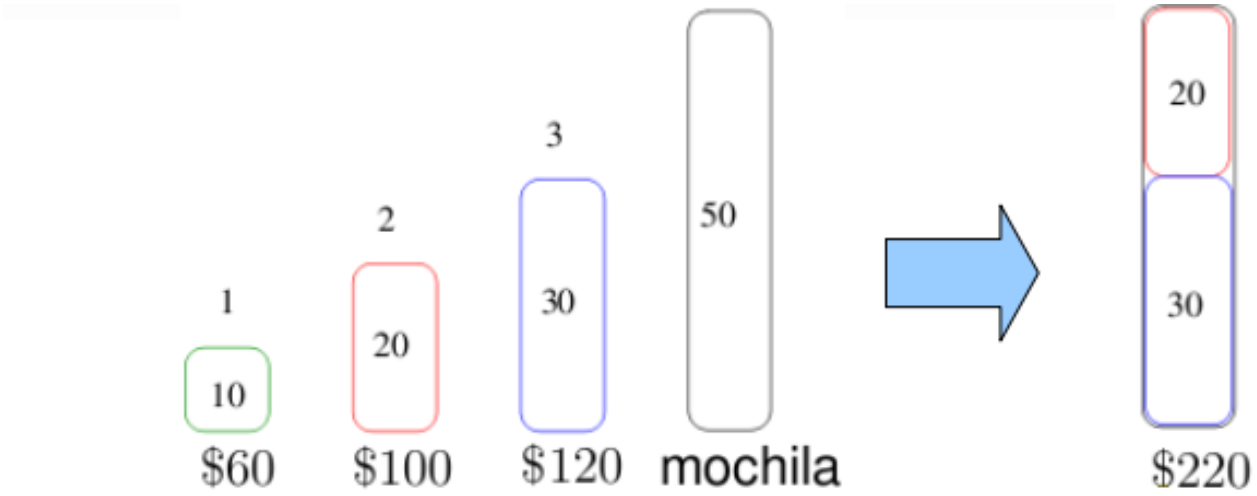
- Exemplo: problema da mochila



  - Dada uma mochila que admite um determinado peso (b) e n objetos com peso p_i e custo c_i
  - Objetivo: selecionar um subconjunto de objetos que caibam dentro da mochila de forma que o valor total dos objetos sejam maximizado

Força-Bruta

- Exemplo: problema da mochila
  - Solução ótima para um conjunto de entrada



Força-Bruta

- Implementação do algoritmo mochila

```
static int mochila_fb(int c[], int p[], int n, int b, int
i, int max){
  int c1, c2;
  if (i >= n)
    return b < 0 ?  0 :  max;
  else{
    c1 = mochila_fb(c, p, n, b, i + 1, max);
    c2 = mochila_fb(c, p, n, b - p[i], i + 1, max + c[i]);
    return c1 > c2 ?  c1 :  c2;
  }
}

int mochila(int c[], int p[], int n, int b){
  return mochila_fb(c, p, n, b, 0, 0);
}
```

- Complexidade: $O(2^n)$

Força-Bruta

- Apesar do custo computacional alto, em alguns problemas pode ser necessária a obtenção de todas as soluções possíveis
  - Detecção de padrões
  - Para amenizar o custo da força-bruta, para a enumeração de todas as soluções podem ser utilizadas as abordagens *backtracking* ou *branch-and-bound*
- Vantagens:
  - Simples implementação
  - Solução ótima
- Principal desvantagem:
  - Custo computacional pode ser proibitivo

Método Guloso

Método Guloso

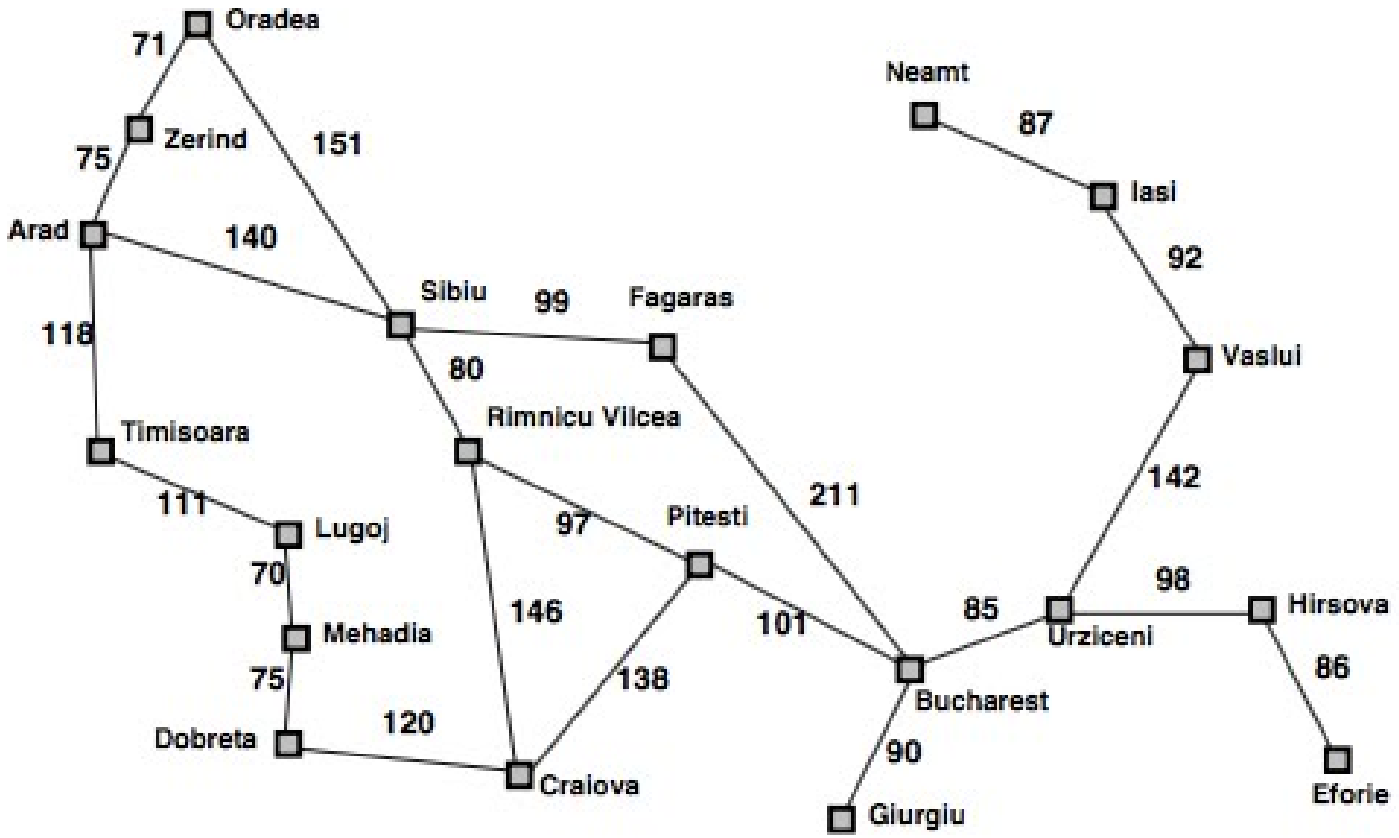
- Algoritmos gulosos são tipicamente usados para resolver problemas de otimização

Método Guloso

- Um algoritmo guloso escolhe, em cada iteração, o objeto mais apetitoso que vê pela frente
- O objeto selecionado passa a fazer parte da solução do problema
- As decisões são tomadas com base em informações disponíveis na iteração corrente, desconsiderando as consequências futuras
- Nunca reconsidera uma solução, independentemente das consequências
- Pode não produzir a melhor solução

Método Guloso

- Exemplo: encontrar o caminho mais curto entre duas cidades



Método Guloso

- Objetivo de um algoritmo guloso pode ser:
  - Minimizar
  - Maximizar

Método Guloso

Implementação de algoritmos gulosos

- Construir por etapas (iteração) uma solução ótima
- Em cada iteração:
  - Selecione um elemento conforme uma função gulosa (o melhor local)
  - Marque-o para não considerá-lo novamente nos próximos estágios
  - Examine o elemento selecionado quanto sua viabilidade
  - Decida a sua participação ou não na solução
- No final, verifique se a solução foi encontrada

- Um dos "segredos" dos algoritmos gulosos é a forma da ordenação/organização do conjunto de entrada

- Algoritmos gulosos são utilizados para resolver problemas de otimização que funcionem através de uma sequência de passos

Método Guloso

Exemplos

- Problema do troco
- Problema da mochila
- Seleção de atividades

Método Guloso

Exemplos: problema do troco

- Imagine que você trabalha no caixa de um supermercado
  - Após o pagamento da compra pelo cliente, você deve entregar o troco em moedas
  - Você gosta dessas moedas e quer entregar o menor número de moedas possíveis
- Objetivo: selecionar a menor quantidade possível de moedas para um troco de valor N

- **Descrição**: seja $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $e_1 > e_2 > ... > e_n$, um conjunto de n denominações de moedas (ou cédulas), e M um valor positivo que representa o troco

- **Problema**: fornecer o montante M com o menor número de moedas

- **Sequência de decisões**: escolher r_1, depois r_2, ...
  - $r_i = j$, tal que $e_j \leq M$ e $e_{j-1} > M$

Método Guloso

Exemplos: problema do troco

- Seja $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, e M, um valor positivo que representa o troco

- Algoritmo, supondo que E esteja ordenado de forma decrescente
  - No passo i, escolher $r_i = j$, tal que $e_j \leq M$ e $e_{j-1} > M$
  - Dividir M por e_j
  - No próximo passo, utilizar o resto da divisão ($M\%e_j$)
  - Aplicar esse processo até o troco ser zerado (resto de divisão for zero) ou todas as moedas terem sido percorridas

Método Guloso

Exemplos: problema do troco

- Suponha que um valor de 450 deve ser devolvido como troco:
  - Será que a estratégia gulosa apresentada funciona para o conjunto de moedas $E = \{100, 50, 25, 10, 5, 1\}$? Caso positivo, a resposta é ótima?
  - Será que a estratégia gulosa apresentada funciona para o conjunto de moedas $E = \{300, 250, 100, 1\}$? Caso positivo, a resposta é ótima?

Método Guloso

Exemplos: problema do troco

- Suponha que um valor de 450 deve ser devolvido como troco:
  - Será que a estratégia gulosa apresentada funciona para o conjunto de moedas $E = \{100, 50, 25, 10, 5, 1\}$? Caso positivo, a resposta é ótima?
    - A estratégia, além de funcionar, retorna uma solução ótima: cinco (quatro moedas de 100 e uma de 50)
  - Será que a estratégia gulosa apresentada funciona para o conjunto de moedas $E = \{300, 250, 100, 1\}$? Caso positivo, a resposta é ótima?
    - A estratégia funciona (encontra uma solução), mas não retorna uma solução ótima: 52 moedas (1 moeda de 300, uma de 100 e 50 de 1)
- Dependendo do câmbio (*e.g.* real), a solução gulosa é ótima

Método Guloso

Exemplos: problema do troco

- Algoritmo
  - Ordene o valor das moedas de forma decrescente
  - Começando com a primeira moeda ($i = 0$), divida o valor do troco pelo valor da moeda i (caso o valor do troco seja maior que o da moeda)
    - Adicione a parte inteira da divisão no conjunto da solução
    - Utilize o resto da divisão na próxima iteração

- Implementação do algoritmo troco mínimo

```
// Supõe-se que o vetor moedas esteja ordenado
int qtd_moedas(int moedas[], int n, int troco){
  int i, n_moedas = 0;

  for (i = 0; i < n && troco > 0; i++){
    // atualizar a quantidade de moedas de troco
    n_moedas += troco / moedas[i];

    // atualizar o valor do troco faltante
    troco = troco % moedas[i];
  }
  if (troco > 0)
    return n_moedas; // solução encontrada
  else
    return -1; // solução não encontrada
}
```

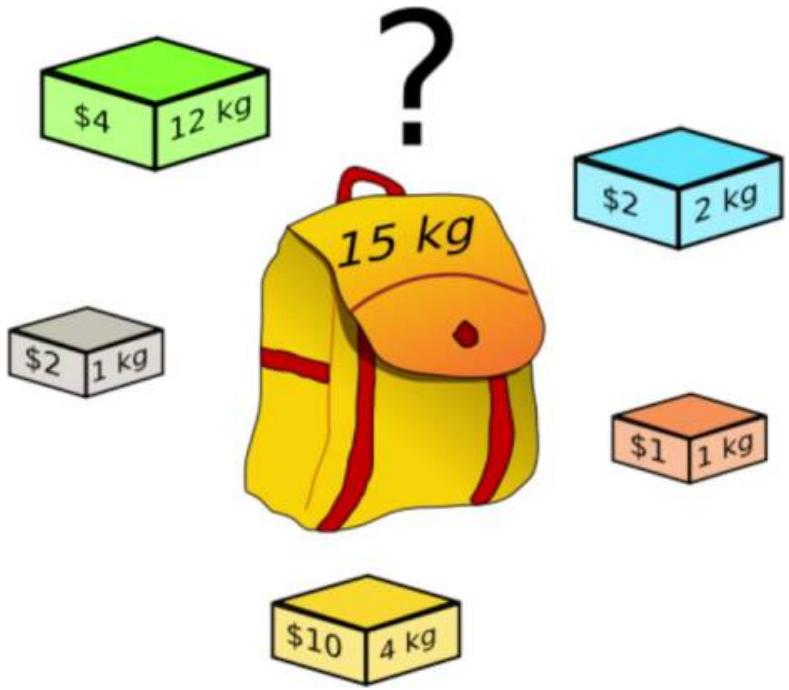
- Complexidade: $O(n)$

- Exercício: adapte o algoritmo anterior para retornar o conjunto de moedas utilizadas para o troco. Por exemplo, para $moedas = \{100, 50, 10, 5, 1\}$ e $troco = 450$ deve ser retornada a seguinte sequência: $\{100, 100, 100, 100, 50\}$.

Método Guloso

Exemplos: problema da mochila

- Dados
  - Uma mochila que admite um determinado peso
  - Um conjunto de objetos, sendo cada com um valor e um peso



Método Guloso

Exemplos: problema da mochila

- Objetivo: selecionar um subconjunto de objetos que caibam dentro da mochila de forma que o valor total dos objetos seja maximizado

- O problema da mochila é dividido em dois subproblemas distintos
  - Mochila fracionária: os objetos podem ser particionados de forma proporcional
  - Mochila binária: os objetos não podem ser particionados

Método Guloso

Exemplos: problema da mochila fracionária

- A entrada pode ser ordenada por valor/peso
- Solução gulosa é ótima
- Algoritmo
  - Ordene os itens por valor/peso de forma decrescente
  - Começando com o primeiro objeto ($i = 0$), coloque o máximo do mesmo que estiver disponível e for possível
  - Se a mochila ainda não estiver cheia, passe para o próximo item

Método Guloso

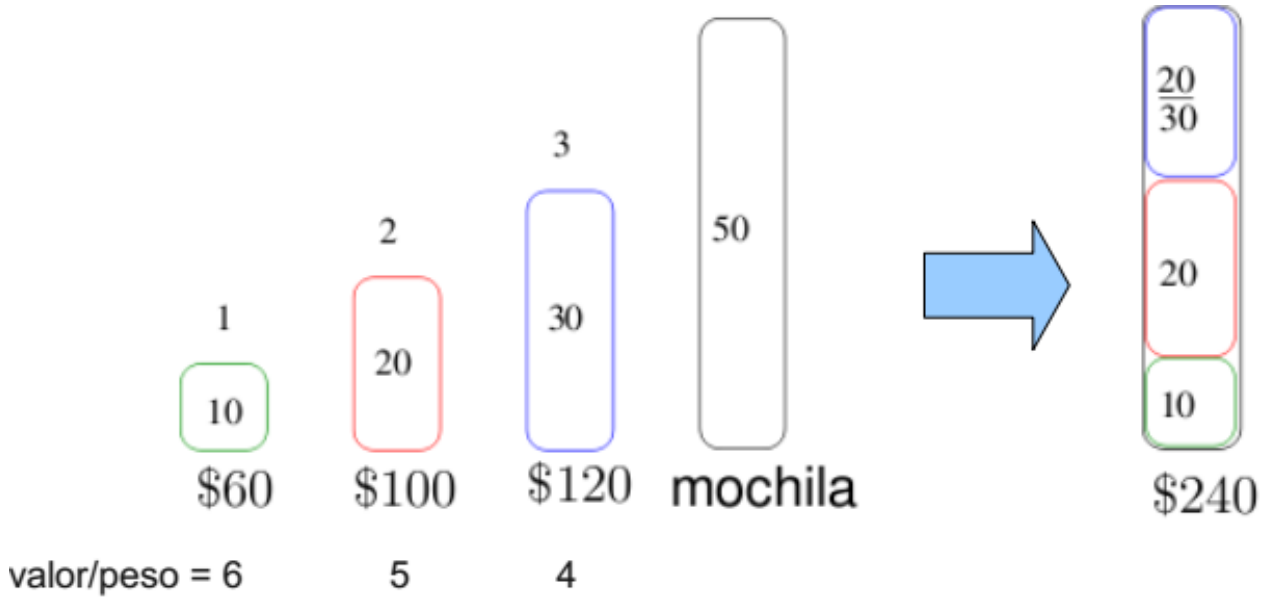
Exemplos: problema da mochila fracionária

- Exemplo

Método Guloso

Exemplos: problema da mochila fracionária

- Exemplo



- O algoritmo guloso retorna solução ótima para o problema da mochila fracionária

- Implementação do algoritmo mochila fracionária

```
int mochila_g(int p[], int c[], int n, int b){
  int i = 0;
  float valor = 0;
  // Adicionar objetos inteiros enquanto a mochila suportar
  while ((i < n) && (p[i] <= b)){
    valor += c[i]; // atualizar o valor "carregado"
    b -= p[i]; // atualizar capacidade da mochila
    i++;
  }
  // Se ainda houver algum objeto e na mochila houver
espaço, adicionar uma fração do objeto atual para que a
mochila atinja a sua capacidade máxima
  if ((b > 0) && (i < n))
    valor += (b / p[i]) * c[i];

  return valor;
}
```

- Complexidade: $O(n)$

Método Guloso

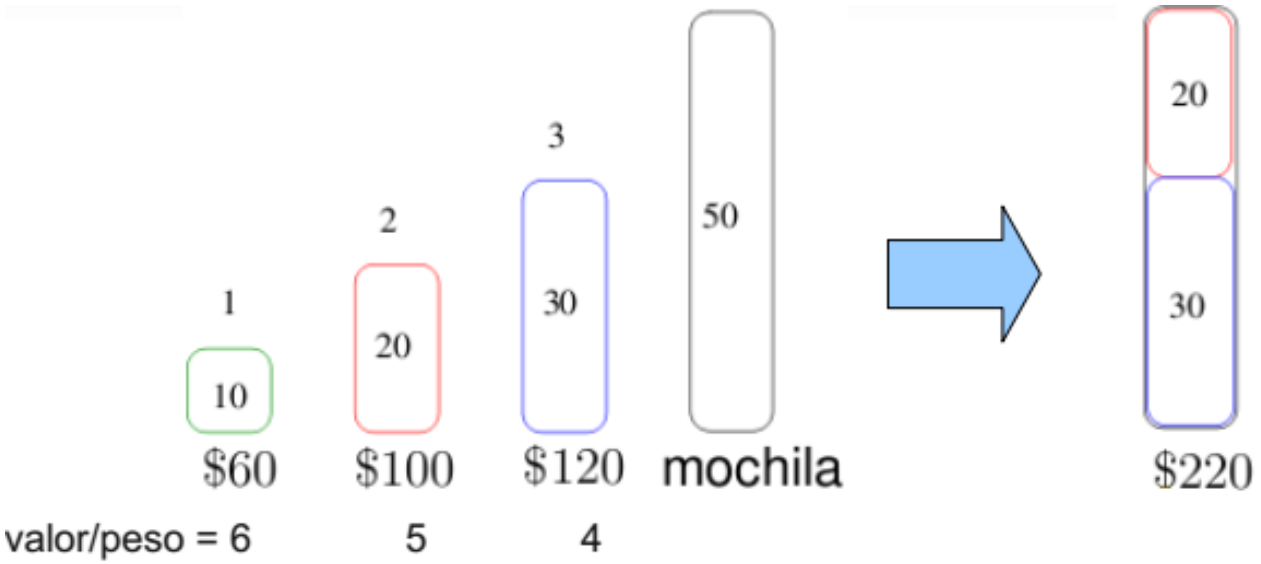
Exemplos: problema da mochila binária

- Exemplo

Método Guloso

Exemplos: problema da mochila binária

- Solução ótima do exemplo



- O algoritmo guloso pode não gerar uma solução ótima para o problema da mochila binária

Método Guloso

Exemplos: seleção de atividades

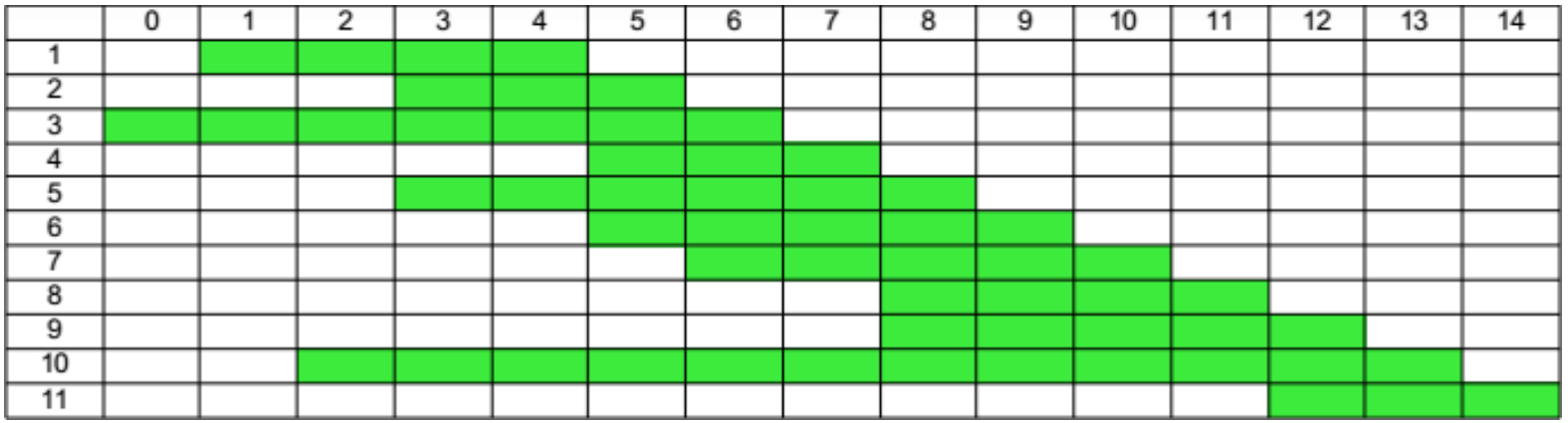
- Diversas atividades podem requerer o uso de um mesmo recurso

- Considerando aula como exemplo:
  - Cada atividade (aula) tem um horário de início e um horário de fim
  - Só existe uma sala disponível
  - Duas aulas não podem ser ministradas na mesma sala ao mesmo tempo

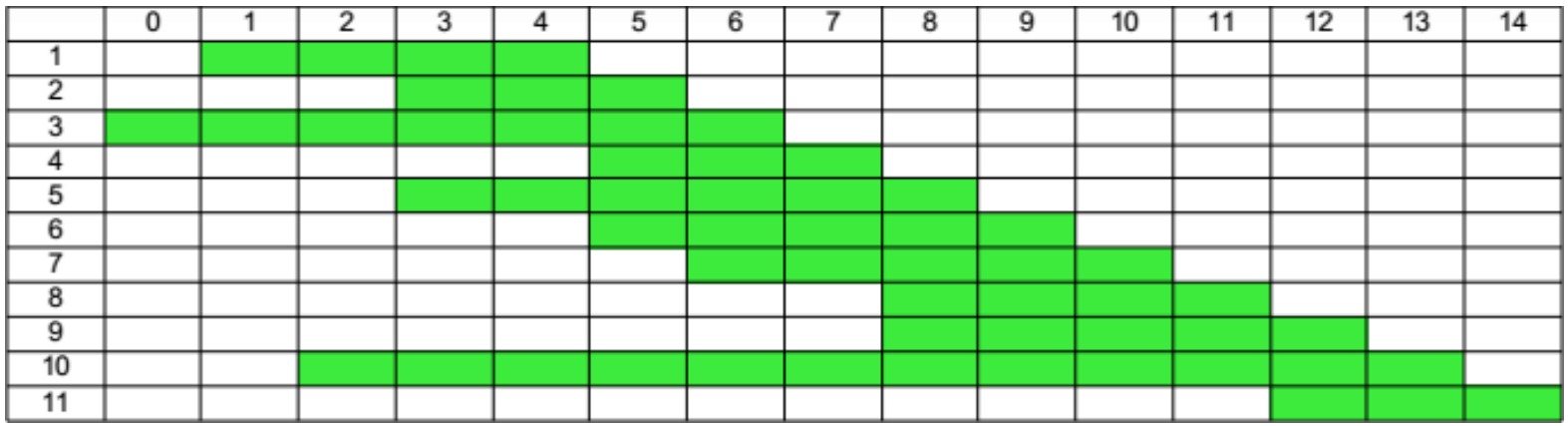
Método Guloso

Exemplos: seleção de atividades

- Exemplo para 11 atividades e 14 unidades de tempo



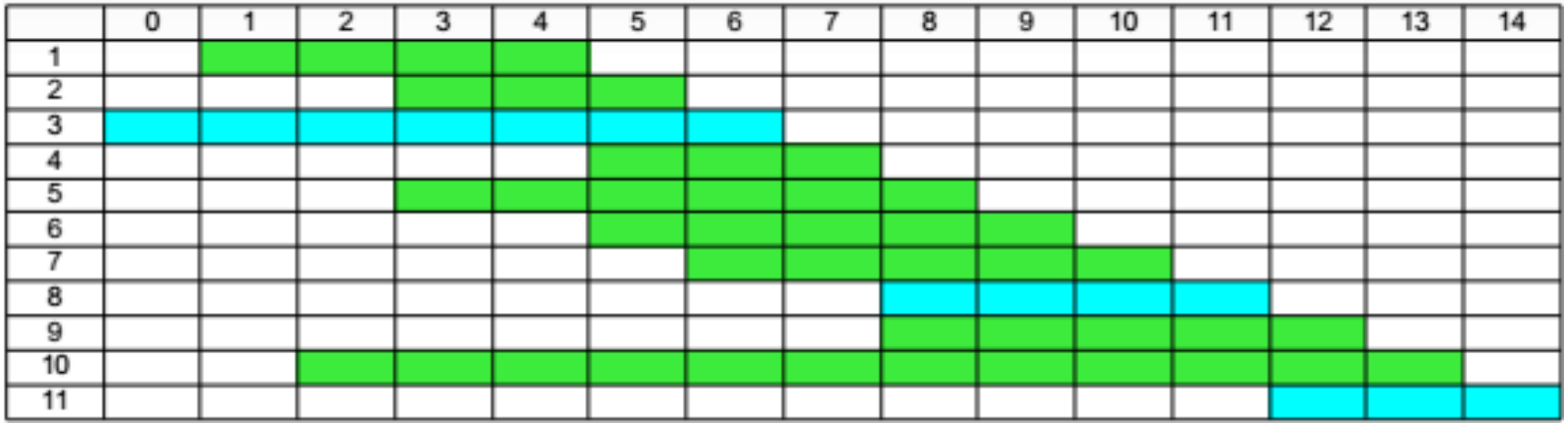
- Considerando aula como exemplo:
  - Objetivo: selecionar um conjunto máximo de atividades compatíveis
    - Sem sobreposição de tempo
    - Criação do maior grupo de atividades sem sobreposição de tempo



Método Guloso

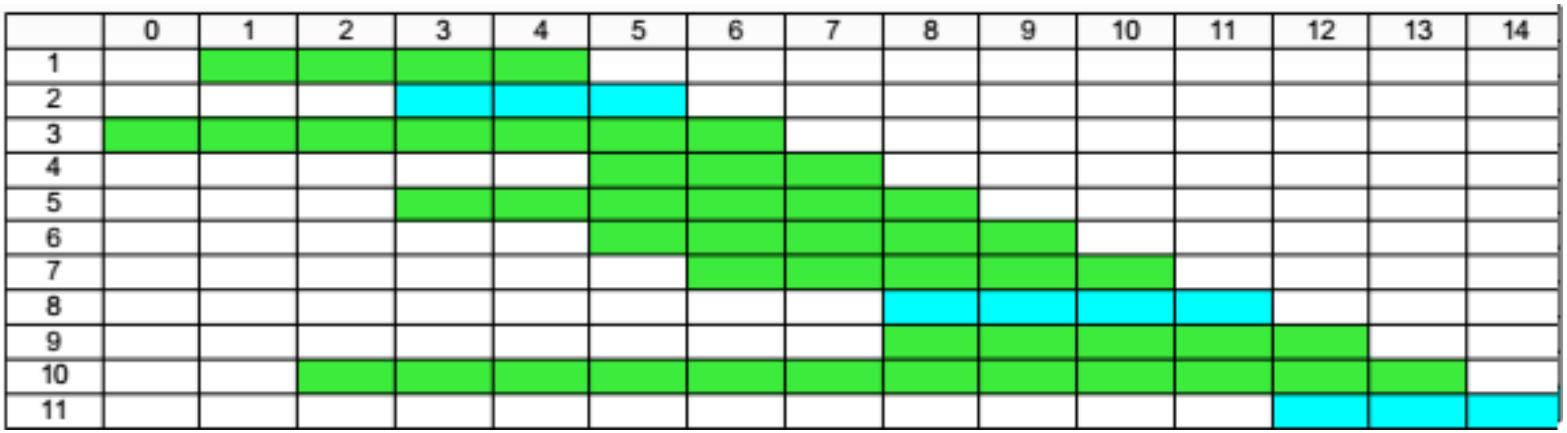
Exemplos: seleção de atividades

- Como fazer a seleção de atividades?
  - Estratégia 1: selecionar as atividades que começam primeiro



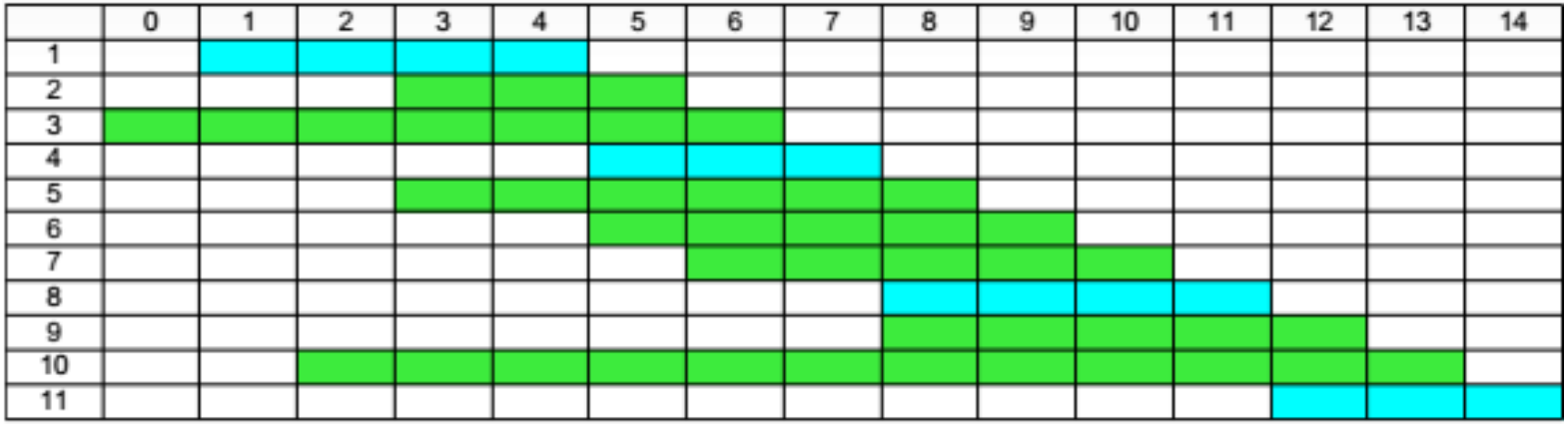
  - Solução não ótima

- Como fazer a seleção de atividades?
  - Estratégia 2: selecionar as atividades que são executadas em menos tempo



  - Solução não ótima

- Como fazer a seleção de atividades?
  - Estratégia 3: escolher as atividades que terminam primeiro



  - Solução ótima

Método Guloso

Exemplos: seleção de atividades

- Algoritmo guloso
  - Receber a lista de atividades ordenadas pelo horário de término
  - Em cada iteração, checar se a atividade atual é compatível
  - Caso a atividade seja compatível, adicione-a no conjunto solução
- **Exercício**: implemente uma solução gulosa para o problema de seleção de atividades. A função deverá receber como entrada: vetor de horário de início, vetor de horário de término, tamanho dos vetores (obs.: os vetores poderão ser de números inteiros, em vez de itens no formato hh:mm). Como saída, a função deverá retornar a quantidade de atividades alocadas.

Considerações Finais

- Outros problemas podem ser resolvidos por meio de algoritmos gulosos
  - Árvore de Huffman
  - Árvore geradora mínima
  - Busca gulosa
  - ...

Considerações Finais

- Vantagens:
  - Simples implementação
  - Rápida execução
- Desvantagens:
  - Pode não gerar soluções ótimas
  - Pode entrar em *loop* infinito

Referências I


Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Clifford, S.
Algoritmos: teoria e prática.
Elsevier, 2012.


Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.


Szwarcfiter, J.; Markenzon, L.
Estruturas de Dados e Seus Algoritmos.
LTC, 2010.


Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.