Lista de Exercícios 1
complexidade de algoritmos

AE22CP

Prof. Jefferson T. Oliva

1. Exercício 10: Resolva as seguintes recorrências:

(a)

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\, n \leq 1 \\ T(n-2)+1, & se\, n > 1 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-2)+1 \\ &= T(n-2-2)+1+1 = T(n-4)+2 \\ &= T(n-4-2)+1+1+1 = T(n-6)+3 \\ &= T(n-2k)+k \end{aligned}$$

Substituindo k por $\frac{n}{2}$, temos:

$T(n) = T(0) + \frac{n}{2}$

$\boldsymbol{T(n) = \frac{n}{2} + 1}$

$\boldsymbol{O(n)}$

(b)

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\, n < 1 \\ T(n-1)+n^2, & se\, n \geq 1 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1)+n^2 \\ &= T(n-2)+(n-1)^2+n^2 \\ &= T(n-3)+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2 \\ &= T(n-4)+(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2 \\ &= T(n-k)+\sum_{i=1}^{k}(n-i)^2 \end{aligned}$$

Substituindo k por n, temos:

$T(n) = T(0) + \sum_{i=1}^{n}(n-i)^2$

$T(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(n^2 - 2ni + i^2)$

$T(n) = 1 + (n)n^2 - 2n\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i^2$

$T(n) = 1 + n^3 - 2n\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$T(n) = 1 + n^3 - (n^3+n^2) + \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}$

$T(n) = 1 + n^3 - n^3 - n^2 + \frac{(2n^3+3n^2+n)}{6}$

$T(n) = 1 - n^2 + \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

$\boldsymbol{T(n) = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 1}$

$\boldsymbol{O(n^3)}$

Continua na próxima página…

(c)

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\, n \;=\; 1 \\ \\ T(n-1) + 2n + 1, & se\, n \;>\; 1 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 2n + 1 \\ &= T(n-2) + 2n + 2(n-1) + 2 \\ &= T(n-3) + 2n + 2(n-1) + 2(n-2) + 3 \\ &= T(n-k) + 2\sum_{i=1}^{k}(k-i) + k \end{aligned}$$

Substituindo k por $n-1$, temos:

$T(n) = T(1) + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) + (n-1)$

$T(n) = 1 + (n-1) + 2 * n * (n-1) - 2\sum_{i=1}^{n-1} i$

$T(n) = 1 + (n-1) + 2n^2 - 2n - 2\frac{n(n-1)}{2}$

$T(n) = 1 + (n-1) + 2n^2 - 2n - (n^2 - n)$

$\boldsymbol{T(n) = n^2}$

$\boldsymbol{O(n^2)}$

(d)

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\, n \;=\; 1 \\ \\ T(n-1) + (n-1), & se\, n \;>\; 1 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + (n-1) \\ &= T(n-2) + (n-1) + (n-2) \\ &= T(n-3) + (n-1) + (n-2) + (n-3) \\ &= T(n-4) + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) \\ &= T(n-k) + \sum_{i=1}^{k} i \end{aligned}$$

Substituindo k por $n-1$, temos:

$T(n) = T(1) + \sum_{i=1}^{n-1} i$

$T(n) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$

$\boldsymbol{T(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1}$

$\boldsymbol{O(n^2)}$

 Continua na próxima página. . .

(e)

$$T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$$

Resolução utilizando o método Mestre:

$a = 9$
$b = 3$
$f(n) = n$
$n^{\log_3(9)} = n^2$
$f(n) \ \in \ O(n^{\log_3(9)-\epsilon}), \ \epsilon = 1$
$\boldsymbol{\theta(n^{\log_3(9)}) = \theta(n^2)}$

(f)

$$T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n + 1$$

Resolução utilizando o método Mestre:

$a = 2$
$b = 3$
$f(n) = n + 1$
$f(n) \ \in \ \Omega(n^{\log_3(2)+\epsilon}), \ \epsilon = 0,1 \ , c = \frac{3}{4}$
$af(n/b) \leq cf(n) => 2\frac{3n}{3} + 2 => \frac{2}{3}n + 2 \leq \frac{3}{4}(3n+1)$
$\boldsymbol{\Theta(f(n)) = \Theta(n)}$

(g)

$$T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + n^2$$

Resolução utilizando o método Mestre:

$a = 2$
$b = 4$
$f(n) = n^2$
$f(n) \ \in \ \Omega(n^{\log_4(2)+\epsilon})$, $\epsilon = 1$, $c = \frac{1}{8}$
$af(n/b) \leq cf(n) => 2\left(\frac{n}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{8}(n^2) => 2\frac{n^2}{16} \leq \frac{1}{8}(n^2)$
$\boldsymbol{\theta(f(n)) = \theta(n^2)}$

(h)

$$T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + 2n$$

Resolução utilizando o método Mestre:

$a = 16$
$b = 4$
$f(n) = 2n$
$f(n) \ \in \ O(n^{\log_4(16)-\epsilon}), \ \epsilon = 1$

 Continua na próxima página…

$\boldsymbol{\theta(n^{\log_4(16)}) = \theta(n^2)}$

(i)

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\, n \;=\; 1 \\ \\ 3T(n-1), & se\, n \;>\; 1 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n-1) \\ &= 9T(n-2) \\ &= 27T(n-3) \\ &= 81T(n-4) \\ &= 3^k T(n-k) \end{aligned}$$

Substituindo k por $n-1$, temos:

$T(n) = 3^{n-1}T(1)$

$\boldsymbol{T(n) = 3^{n-1}}$

$\boldsymbol{O(3^n)}$

(j)

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\, n \;=\; 0 \\ \\ nT(n-1), & se\, n \;>\; 0 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{aligned} T(n) &= nT(n-1) \\ &= n(n-1)T(n-2) \\ &= n(n-1)(n-2)T(n-3) \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)T(n-4) \\ &= T(n-k)\prod_{i=1}^{k} i \end{aligned}$$

Substituindo k por $n-1$, temos:

$T(n) = T(1)\prod_{i=1}^{n} i$

$\boldsymbol{T(n) = n!}$

$\boldsymbol{O(n!)}$

(k)

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\, n \;=\; 1 \\ \\ 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt(n), & se\, n \;>\; 1 \end{cases}$$

Resolução utilizando o método Mestre:

$a = 2$

Continua na próxima página…

$b = 4$
$f(n) = \sqrt{n}$
$f(n) \ \in \ \Theta(n^{\log_2(4)})$
$\boldsymbol{\theta(n^{\log_2(4)} \log n) = \theta(\sqrt{n} \log n)}$