Notas de Aula - AED2 – Técnicas e Análise de Algoritmos: backtracking e branch-and-bound
Prof. Jefferson T. Oliva

Nas aulas anteriores foram vistos:
- Força bruta
- Método guloso
- Divisão e conquista
- Programação dinâmica

Algoritmos força bruta testam exaustivamente todas as soluções possíveis de um problema para obter uma solução ótima. Em outras palavras, são geradas tanto soluções válidas, quanto inválidas. Por exemplo, no problema da mochila binária, seriam testadas todas as combinações possíveis de itens, desconsiderando a capacidade da mochila. Assim, para um conjunto de n itens, o custo da solução seria exponencial. Mesmo assim, apesar do custo, a solução é ótima.

Algoritmos força bruta não utiliza critérios para eliminar outras soluções que não poderão ser melhoradas. Seguindo o exemplo da mochila binária, caso uma solução extrapole a capacidade da mochila, ainda pode ser adicionado itens na solução (geração de outras soluções).

As soluções podem ser enumeradas de modo semelhante ao percurso em uma árvore que possua todas as recursões (ver slide 3).

Algoritmos força bruta não seguem regra fixa de computação
- Passos em direção à solução final são tentados e registrados
- Gera todos os possíveis candidatos à solução e verifica qual delas satisfaz o problemas
- Geralmente simples implementar
- Força bruta é comumente utilizado em problemas de tamanho limitado ou quando um algoritmo mais eficiente é desconhecido. Um exemplo clássico de aplicação de força bruta é a ordenação, onde podem ser feitas todas as comparações possíveis em uma sequência. Outro exemplo simples é a busca sequencial em dados
- Quando a simplicidade é mais importante que a velocidade de execução, força bruta é uma solução muito útil

Por fim, uma solução força bruta pode ser muito custosa, pois a "árvore de soluções" pode crescer exponencialmente. Sendo assim, duas abordagens baseadas em força bruta foram propostas para amenizar o custo computacional:
- backtracking
- branch-and-bound

Backtracking

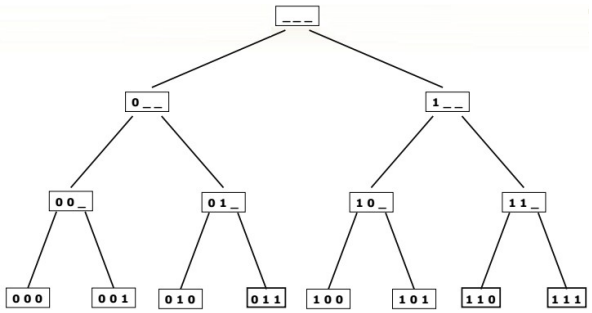
É uma abordagem que também testa todas as combinações possíveis de soluções. Diferentemente da força bruta, backtracking gera apenas soluções válidas.

Aplicado em problemas cuja solução pode ser definida a partir de uma sequência de passos (*e.g.*, como ocorre em uma "árvore de soluções").

Quando um conflito é detectado, o algoritmo dará um passo para trás (backtrack) e tentará um "outro caminho" para encontrar a solução. Assim, é verificado se uma “solução parcial” possa ser completada e soluções inválidas são eliminadas sem serem completamente analisadas.

Muitos problemas podem ser modelados por meio de uma árvore, que, neste caso, representaria todas as sequências de decisões possíveis.

Exemplo: encontrar todos os números binários de 3 bits em que a soma de 1’s seja maior ou igual 2.



Diversos problemas famosos podem ser resolvidos através do backtracking, tais como:
- Passeio do cavalo
- Mochila
- Oito rainhas
- Labirinto
- etc

Problema do labirinto (backtracking)

Dada uma matriz n x m que representa um labirinto.

Posição inicial: pi = (xi, yi)
Posição inicial: pf = (xf, yf)

O objetivo é verificar se existe um caminho entre pi e pf.

A matriz que representa o labirinto pode conter um dos seguintes valores:
-2: a posição (x, y) representa uma parede
-1: a posição (x, y) não faz parte do caminho
i: -2: a posição (x, y) faz parte do caminho, sendo que i >= 0
Ver exemplos nos slides 11–14. Códigos-fonte nos slides 15 e 16.

```
#define MAX 10

int resolver_labirinto(int lab[MAX][MAX], int m, int n, int movX[], int movY[], int li, int ci, int lf, int cf){
        //l, c: posição de um passo no labirinto
        int l, c, i, passos 0;

        if ((li == lf) && (ci == cf)) return lab[li][ci];

        /*Todos os movimentos a partir da posição inicial são testados*/
        for (i = 0; i < 4; i++){
                // Posição do candidato a próximo passo
                l = li + movX[i];
                c = ci + movY[i];

                /*O movimento é verificado e caso seja válido, uma solução é gerada*/
                if ((l >= 0) && (l < m) && (c >= 0) && (c < n) && (lab[l][c] == -1)){
                        lab[l][c] = lab[li][ci] + 1; // atualizar a quantidade de passos na posição (l, c)

                        // Continuar o percurso no labirinto
                        passos = resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, l, c, lf, cf);
                }
        }
        return passos;
}
```

```
int main(){
	/* lab: labirinto
	n, m: número de linhas e de colunas ocupadas na matriz labirinto
	li, ci: posição inicial no labirinto
	lf, cf: posição final no labirinto
	resp: 1 se um caminho foi encontrado entre (li, ci) e (lf, cf), ou 0, caso contrário*/
	int lab[MAX][MAX], n, m, li, ci, lf, cf, resp;

	/*Movimentos válidos no labirinto Exemplo: movX[0] e movY[0] indica que o movimento é para baixo
	*/
	int movX[] = {0, 1, 0, -1}; // Movimentos no eixo x da matriz
	int movY[] = {1, 0, -1, 0}; // Movimentos no eixo y da matriz

	/*inicializar as variáveis relacionadas ao labirinto*/
	iniciar_labirinto(lab, m, n, li, ci, lf, cf);

	lab[ci][cf] = 0; // posição inicial no labirinto

	resp = resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, li, ci, lf, cf);

	if (resp > 0) imprimir_labirinto(lab, m, n);
	eles printf("Solucao nao encontrada!\n");

	return 0;
}
```

Muitas vezes pode ser desejável encontrar uma solução ótima, de acordo com algum critério de normalidade.

No problema do labirinto, por exemplo, podemos estar interessado em encontrar um caminho que contém o menor número de passos.

```
void resolver_labirinto(int lab[MAX][MAX], int m, int n, int movX[], int movY[], int li, int ci, int lf, int cf, int *min){
	int l, c, i;

	if ((li == lf) && (ci == cf)){
		if (lab[lf][cf] < *min)
			*min = lab[lf][cf];
	else{
	/*Todos os movimentos a partir da posição inicial são testados*/
		for (i = 0; i < 4; i++){
			l = li + movX[i];
			c = ci + movY[i];

			/*O movimento é verificado e caso seja válido, uma solução é gerada*/
			if ((l >= 0) && (l < m) && (c >= 0) && (c < n) && ((lab[l][c] == -1) || (lab[l][c] >
					lab[li][ci] + 1))){
				lab[l][c] = lab[li][ci] + 1;

				resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, l, c, lf, cf, min);
			}
		}
	}
}
```

Apesar do algoritmo encontrar a solução ótima, ainda todas as outras soluções são testadas.

Problema da mochila (backtracking)

Lembra do algoritmo para a solução do problema da mochila por força bruta?

```
static int mochila_fb(int c[], int p[], int n, int b, int i, int max){
   int c1, c2;
   if (i >= n){
      if (b < 0)
         return 0;
      else
         return max;
   }else{
      c1 = mochila_fb(c, p, n, b, i + 1, max);
      c2 = mochila_fb(c, p, n, b - p[i], i + 1, max + c[i]);
      return c1 > c2 ? c1 : c2;

   }
}

int mochila(int c[], int p[], int n, int b){
   return mochila_fb(c, p, n, b, 0, 0);
}
```

Na implementação apresentada acima, podemos ver que, além do custo computacional alto, também são geradas soluções inválidas, o que acarreta em desperdício de recursos.

Algumas adaptações no código evitaria a geração de soluções inválidas:
- Em vez da primeira verificação ser se *i* é maior ou igual a *n*, cuja prioridade é percorrer todos os objetos, verificar se $b < 0$. Se a mochila não pode suportar mais objetos, o algoritmo encerra a sua execução.
- Caso a nova verificação (se $b < 0$) resultar em "verdadeiro", retorne 0.
- A próxima verificação é se $i < n$: caso a resposta seja positiva, são feitas chamadas recursivas como realizadas na solução por força-bruta.
- Se as verificações acima falharem, basta retornar *max*.

Solução do problema da mochila por *backtracking*:

```
static int mochila_bkt(int c[], int p[], int n, int b, int i, int max){
   int c1, c2;
   if (b < 0)
      return 0;
   else if (i < n){
      c1 = mochila_bkt(c, p, n, b, i + 1, max);
      c2 = mochila_bkt(c, p, n, b - p[i], i + 1, max + c[i]);
      return c1 > c2 ? c1 : c2;
   }else
      return max;
}


int mochila(int c[], int p[], int n, int b){
   return mochila_bkt(c, p, n, b, 0, 0);
}
```

Passeio do cavalo (backtracking)

Dado um tabuleiro de de xadrez com *n X n* posições, onde o cavalo se movimenta conforme as regras do jogo.

A partir de uma posição (l, c), o algoritmo deve encontrar (caso exista), um passeio de cavalo em que todas as posições do tabuleiro sejam visitadas uma única vez.

O tabuleiro pode ser representado por uma matriz $n \times n$ que represente o histórico do passeio do cavalo, onde:
- *m[l][c] <= 0*: a posição (l, c) não foi visitada.
- *m[l][c] = i*: foi visitada no i-ésimo movimento, sendo que 1 <= i <= n*m

No exemplo abaixo, o cavalo está no centro do tabuleiro e os números são as possibilidades de deslocamento do cavalo a partir da posição atual:

Solução do problema do passeio do cavalo utilizando *backtracking*:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>

int movX[] = {-1, -2, -2, -1,  1,  2,  2,  1};
int movY[] = { 2,  1, -1, -2, -2, -1,  1,  2};


// verificar se a posição (l, c) é válida no tabuleiro
int validar_passo(int **mat, int n, int l, int c){
   return ((l >= 0) && (l < n) && (c >= 0) && (c < n) && (mat[l][c] < 0));
}


// Função que tenta encontrar uma solução para o problema do passeio do cavalo
int movimento_cavalo(int **mat, int n, int l, int c, int mov){
   int i, pc, pl;

   mat[l][c] = mov;

   // Verifica se a solução foi encontrada
   if (mov == n * n)
      return 1;

   // Testar todos os movimentos possíveis do cavalo a partir da posição (l, c)
   for (i = 0; i < 8; i++){
      pl = l + movX[i];
      pc = c + movY[i];

          // Se o passo é válido, fazer chamada recursiva para o próximo movimento
      if (validar_passo(mat, n, pl, pc)){
         if (movimento_cavalo(mat, n, pl, pc, mov + 1))
            return 1;
      }
   }

   mat[l][c] = -1;

   return 0;
}


// função para imprimir matriz
void imprimir(int **mat, int n){
   int i, j;

   for (i = 0; i < n; i++) {
      for (j = 0; j < n; j++)
         printf("%d ", mat[i][j]);

      printf("\n");
   }
}
```

```
// função para inicializar uma matriz n x n
int** iniciar_mat(int n){
    int i, j;
    int **mat = (int**) malloc(sizeof(int*) * n);

    for (i = 0; i < n; i++){
        mat[i] = (int*) malloc(sizeof(int) * n);

        for (j = 0; j < n; j++)
            mat[i][j] = -1;
    }

    return mat;
}



int main() {
    int n = 8, l = 0, c = 0;
    int **mat = iniciar_mat(n);

    mat[l][c] = 0;


    if (movimento_cavalo(mat, n, l, c, 1))
        imprimir(mat, n);


    free(mat);


    return 0;
}
```

1	10	23	64	7	4	13	18
24	63	8	3	12	17	6	15
9	2	11	22	5	14	19	32
62	25	40	43	20	31	16	51
39	44	21	58	41	50	33	30
26	61	42	47	36	29	52	55
45	38	59	28	57	54	49	34
60	27	46	37	48	35	56	53

Branch-and-Bound

Abordagem relacionada com bactracking. A principal diferença é que em branch-and-bound é definido um limite de operações com o propósito de evitar buscas em espaços menos promissores.

Branch-and-bound:
- branch: explorar opções: testar todas as ramificações de uma solução candidata parcial.

- bound: limitar a busca: limitar a busca por soluções sempre que a solução candidata parcial for considerada infrutífera.

Branch-and-bound enumera, sistematicamente, os candidatos à solução.

Assim, as soluções parciais podem ser eliminadas nas seguintes situações:
- impossibilidade de gerar uma solução válida (igual ao que ocorre em backtracking).
- incapacidade de gerar uma solução ótima (quando é impossível encontrar um valor melhor em relação ao que já foi encontrado).
→ O valor da melhor solução encontrada até então (limitante superior).
→ O custo ainda necessário para gerar uma solução a partir da candidata atual (limitante inferior).

O desempenho de uma solução branch-and-bound está fortemente relacionado à qualidade dos seus limitantes inferiores e superiores. Em outras palavras, quanto mais precisos forem estes limitantes, menos soluções parciais serão consideradas e a solução ótima será encontrada mais rapidamente.

Aplicação do branch-and-bound na solução do problema do labirinto:

```
void resolver_labirinto(int lab[MAX][MAX], int m, int n, int movX[], int movY[], int li, int ci, int lf, int cf, int *min){
        int l, c, i;

        if ((li == lf) && (ci == cf)){
                if (lab[lf][cf] < *min)
                        *min = lab[lf][cf];
        }else{
                /*Todos os movimentos a partir da posição inicial são testados*/
                for (i = 0; i < 4; i++){
                        l = li + movX[i];
                        c = ci + movY[i];

                        /*O movimento é verificado e caso seja válido, uma solução é gerada*/
                        if ((l >= 0) && (l < m) && (c >= 0) && (c < n) && ((lab[l][c] == -1) || (lab[l][c] >
                                        lab[li][ci] + 1))){
                                lab[l][c] = lab[li][ci] + 1;

                                // Aqui são definidos os limitantes
                                if (lab[l][c] + abs(l - lf) + abs(c - cf) < *min)
                                        resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, l, c, lf, cf, min);
                        }
                }
        }
}
```

Se um caminho parcial utilizou tantos passos quanto o melhor caminho já encontrado, o mesmo pode ser descartado.

Caso o número de passos do caminho parcial mais o número de passos mínimos entre a posição atual e a saída for maior ou igual ao número de passos do melhor caminho já encontrado, então esse caminho parcial também pode ser descartado.

Aplicação do branch-and-bound na solução do problema da mochila

```
static int mochila_bnb(int c[], int p[], int n, int b, int i){
   int c1, c2;

   if ((i < n) && (b > 0)){
      c1 = mochila_bnb(c, p, n, b, i + 1);

      if (b - p[i] >= 0)
         c2 = c[i] + mochila_bnb(c, p, n, b - p[i], i + 1);
      else
         c2 = 0;

      return c1 > c2 ? c1 : c2;
   }

   return 0;
}

int mochila(int c[], int p[], int n, int b){
   return mochila_bnb(c, p, n, b, 0);
}
```

Conclusão

Método guloso
→ Considera a alternativa mais promissora e não explora as outras caso a escolha resultar em uma solução
→ As decisões não são reconsideradas
→ Rápida execução
→ Simples implementação
→ Não necessita memória auxiliar
→ Pode não gerar solução ótima

Divisão e conquista
→ Fácil implementação
→ Paralelizável
→ Simplificação de problemas complexos
→ Pode necessitar memória auxiliar (caso seja utilizada recursão)
→ Pode não gerar solução ótima

Programação dinâmica
→ A implementação da solução pode ser mais complexa
→ Explora todas as alternativas de forma eficiente
→ Solução ótima, mas pode ser construída de forma lenta
→ Necessita memória auxiliar (tabela para armazenamento de resultados parciais)

Força-bruta
→ Fácil implementação
→ Tentativa e erro: gera todos os tipos de solução (incluindo as inválidas)
→ Busca exaustiva
→ Solução geralmente lenta, mas ótima
→ Pode necessitar memória auxiliar (caso utilize recursão)

Backtracking
→ Fácil implementação
→ Explora apenas as alternativas que geram soluções válidas
→ Busca exaustiva
→ Em cada passo, as decisões podem ser revogadas
→ Solução pode ser lenta
→ Solução (pode ser) ótima
→ Pode necessitar memória auxiliar (caso utilize recursão)

Branch-and-bound
→ Explora apenas as alternativas que geram soluções válidas, mas considerando limitantes
→ Solução pode ser lenta
→ Busca “semi-exaustiva”: já que há poda de soluções parciais consideradas não promissoras
→ A solução ótima pode não ser encontrada dependendo dos limitantes
→ Pode necessitar memória auxiliar (caso utilize recursão)
→ Definir limitantes pode ser difícil

Referências

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. Introduction to Algorithms. Third edition, The MIT Press, 2009.

Dias, Z. Força Bruta, Backtracking e Branch and Bound. MC102 – Algoritmos e Programação de Computadores. Slides. Ciência de Computação. IC/Unicamp, 2013.

Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S. Computer Algorithms. Computer Science Press, 1998.

Rosa, J. L. G. Paradigmas e Técnicas de Projetos de Algoritmos. SCC-201 – Introdução à Ciência da Computação II. Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2016.

Szwarcfiter, J.; Markenzon, L. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos. LTC, 2010.

Toffolo, T. Backtracking. Algoritmos e Programação Avançada. BCC402 – Algoritmos e Programação Avançada. Slides. Ciência de Computação. Decom/UFOP, 2011.

Ziviani, N. Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++. Thomson, 2007.