0.1 Постановка задачи

Решается двумерная задача Дирихле для двумерного нестационарного оператора диффузии

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\mathbb{D} \operatorname{grad} u\right) = f, x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

$\Omega = [0,1]^2$.

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} d_x & d_{xy} \\ d_{xy} & d_y \end{bmatrix}$$

Задача решается дискретизацией по времени вида

$$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + Au_h = b,$$

Где верхний индекс у u отвечает за момент времени, нижний - за координату, а матрица А строится методом конечных разностей. При этом дискретизация по времени осуществляется двумя разными способами, явным и неявным, а именно:

$$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + Au_h^n = b^n, \tag{1}$$

$$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + Au_h^{n+1} = b^{n+1}, \tag{2}$$

В случае явного метода u на новом временном слое пересчитывается явно по формуле

$$u_h^{n+1} = u_h^n + (b^n - Au_h^n)\Delta t,$$

а в случае неявного метода решается система вида

$$\left(A + \frac{1}{\Delta t} I\right) u_h^{n+1} = b^{n+1} + \frac{u_h^n}{\Delta t}$$

Важно отметить, что неявный метод является абсолютно сходящимся, в то время как явный метод связь временного и пространственного шага вида

$$\Delta t \leq ch^2$$

0.2 Численный эксперимент

Эксперимент проводился для однородной задачи Дирихле с тензором диффузии

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 7.75 & 3.89711432 \\ 3.89711432 & 3.25 \end{bmatrix},$$

нулевым источником и начальным условием вида

$$u_0(x,y) = \begin{cases} 1, |x-0.5| < 0.15, |y-0.5| < 0.15, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Получившееся численные решение приложены к отчёту.