

0.1 Постановка задачи

Решается двумерная задача Дирихле для двумерного стационарного оператора диффузии

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathbb{D} \operatorname{grad} u) = f, x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$$

$$\Omega = [0, 1]^2, D = \operatorname{diag}(d_x, d_y).$$

Задача решается методом конечных разностей на регулярной квадратной сетке

$$w_h = ih, jh, h = \frac{1}{N}$$

с помощью пятиточечного шаблона

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &\equiv \frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &\equiv \frac{u_{i,j+1}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i,j-1}^h}{h^2}, \end{aligned}$$

Полученная система решается с помощью библиотеки INMOST.

0.2 Численный эксперимент

Эксперимент проводился для задач, в которых известно аналитическое решение, а именно

1. $f = \sin(\pi x) \sin(\pi y), g = 0, d_x = d_y = 1. u = \frac{\sin(\pi x) \sin(\pi y)}{2\pi^2}.$
2. $f = \sin(10x) \sin(10y), g = \frac{\sin(10x) \sin(10y)}{200}, d_x = d_y = 1. u = \frac{\sin(10x) \sin(10y)}{200}.$
3. $f = \sin(4\pi x) \sin(\pi y), g = 0, d_x = 5, d_y = 1. u = \frac{\sin(4\pi x) \sin(\pi y)}{(16d_x + d_y)\pi^2}.$

Для всех трех экспериментов построены графики С-нормы и среднего значение среднеквадратичного отклонения при сгущении сетки. Для второго эксперимента также построено само решение.

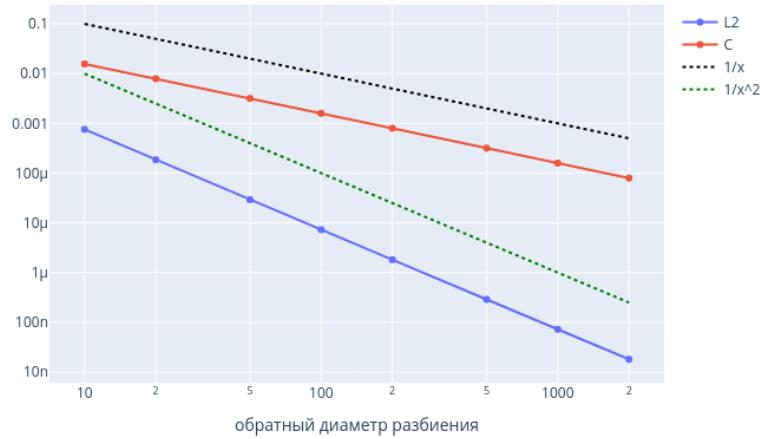


Рис. 1: $f = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, $g = 0$, $d_x = d_y = 1$

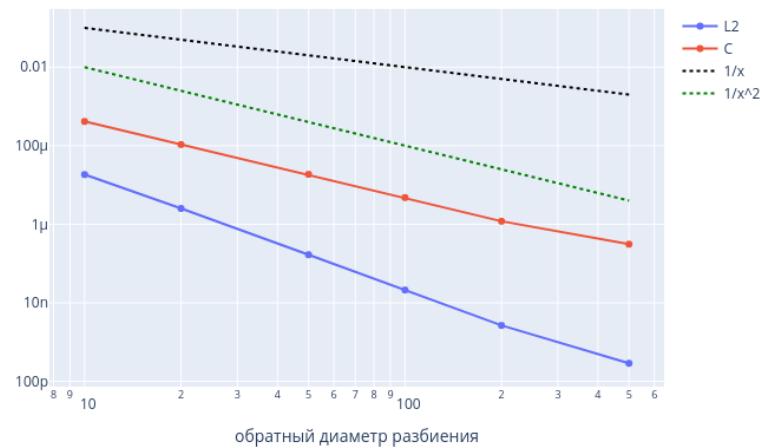


Рис. 2: $f = \sin(10x) \sin(10y)$, $g = \frac{\sin(10x) \sin(10y)}{200}$, $d_x = d_y = 1$

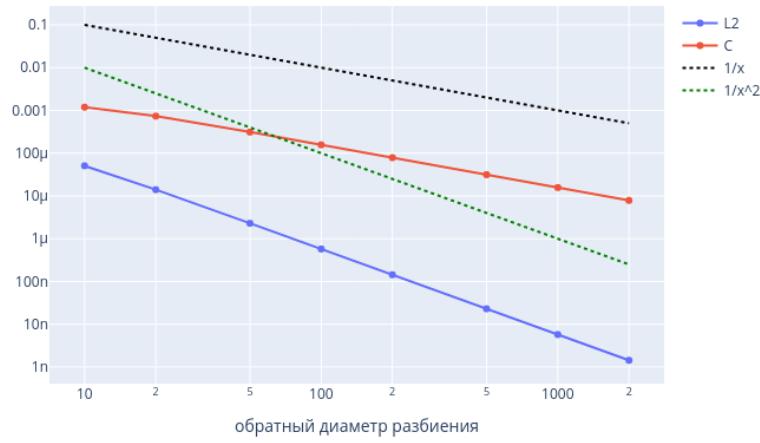


Рис. 3: $f = \sin(4\pi x) \sin(\pi y)$, $g = 0$, $d_x = 5$, $d_y = 1$

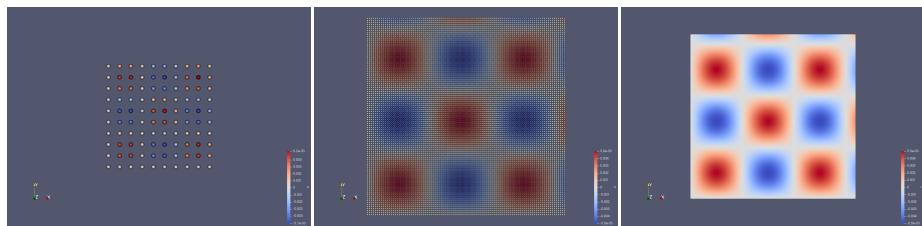


Рис. 4: u , $N = 10$

Рис. 5: u , $N = 100$

Рис. 6: u , $N = 1000$