

1 Постановка задачи

Решается двумерная задача Дирихле для двумерного стационарного оператора диффузии

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathbb{D} \operatorname{grad} u) = f, x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$$

$\Omega = [0, 1]^2$, $D = \operatorname{diag}(d_x, d_y)$.

Задача решается методом конечных элементов на треугольной сетке. Интерполяция происходит классическими линейными базисными элементами. Интегралы по треугольникам берутся численно с помощью квадратурной формулы.

Работа с сеткой, а также решение получившейся системы происходит с помощью библиотеки INMOST.

2 Численный эксперимент

Эксперимент проводился для задач, в которых известно аналитическое решение, а именно

1. $f = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, $d_x = d_y = 1$. $u = \frac{\sin(\pi x) \sin(\pi y)}{2\pi^2}$.
2. $f = \sin(10x) \sin(10y)$, $d_x = d_y = 1$. $u = \frac{\sin(10x) \sin(10y)}{200}$.
3. $f = \sin(4x) \sin(4y)$, $d_x = 5$, $d_y = 1$. $u = \frac{\sin(4x) \sin(4y)}{16(d_x + d_y)}$.

Заметим, что во втором случае краевое значение является неоднородным. Также в третьем случае тензор диффузии является неоднородным.

Для всех трех экспериментов построены графики C-нормы и L2-нормы отклонения при сгущении сетки.

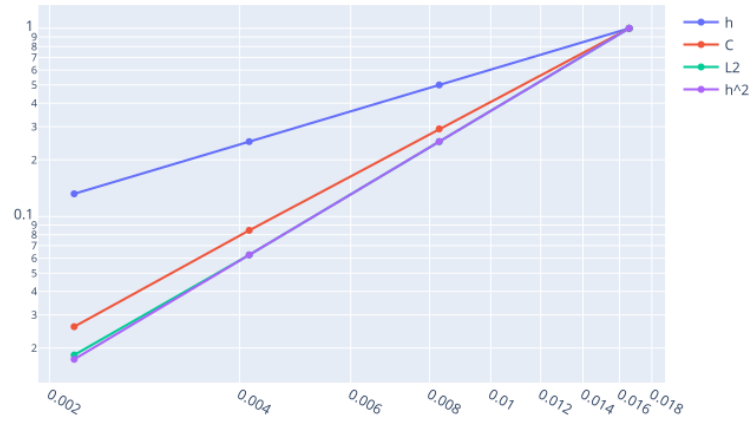


Рис. 1: $f = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, $d_x = d_y = 1$

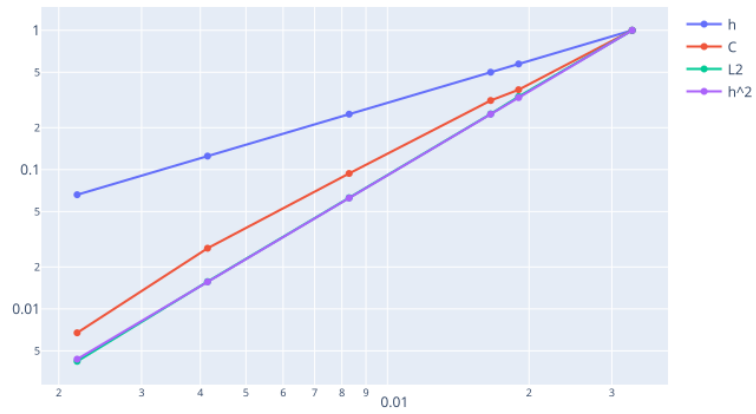


Рис. 2: $f = \sin(10x) \sin(10y)$, $d_x = d_y = 1$

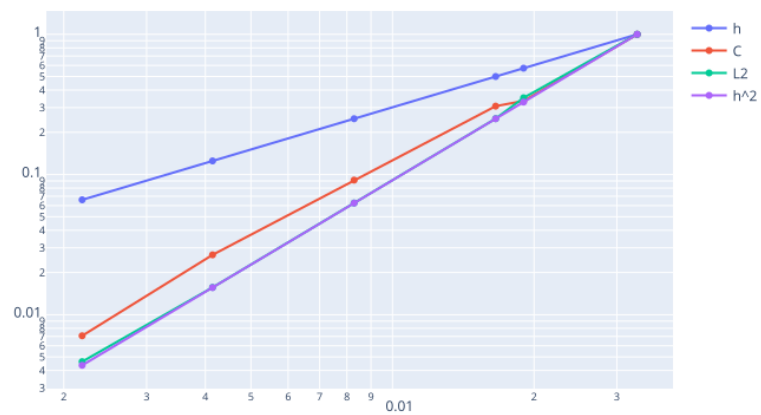


Рис. 3: $f = \sin(4\pi x) \sin(\pi y)$, $d_x = 5$, $d_y = 1$

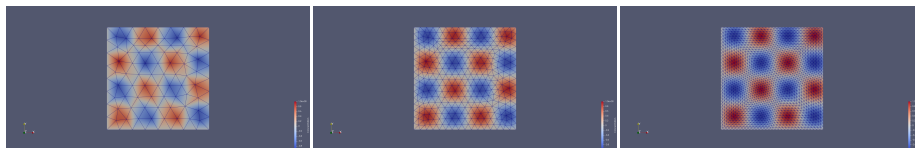


Рис. 4: u , $d = 0.15$

Рис. 5: u , $d = 0.076$

Рис. 6: u , $d = 0.003$