

Modélisation par équations aux dérivées partielles

Chapitre 3 : Méthode des différences finies

Philippe Villedieu

Philippe.villedieu@insa-toulouse.fr

Plan

1. Introduction
2. Principes généraux de la MDF
3. Discrétisation spatiale
4. Discrétisation temporelle
5. Convergence de la MDF

1. Introduction
2. Principes généraux de la MDF
3. Discrétisation spatiale
4. Discrétisation temporelle
5. Convergence de la MDF

1. Introduction

Ce chapitre est une introduction à la **méthode des différences finies (MDF)** qui est l'une des méthodes les plus simples pour calculer à l'aide d'un ordinateur une solution approchée d'une edp (ou d'un système d'edp).

Afin de simplifier l'exposé et en particulier les notations, **nous nous limiterons à une présentation de la méthode pour un problème particulier**, mais suffisamment générique pour bien faire apparaître les idées principales.

Certaines notions fondamentales, comme les notions de **dissipation et de dispersion d'un schéma aux différences finies** seront traitées en TD et en TP.

1. Introduction

1.1 Enoncé du problème continu

Dans tout ce chapitre, le problème modèle considéré sera le suivant :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - D \Delta u = f, \quad t \in [0, T[, \mathbf{x} \in \Omega \\ (2) \quad & u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ (3) \quad & u(t, \mathbf{x}) = u_D(t, \mathbf{x}), \quad t \in [0, T[, \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ (4) \quad & \frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{x}) = u_N(t, \mathbf{x}), \quad t \in [0, T[, \mathbf{x} \in \Gamma_N \end{aligned}$$

où :

- ✓ Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^2
- ✓ $\Gamma_D \sqcup \Gamma_N = \partial\Omega$
- ✓ $\mathbf{v} = (a, b)$ est un champ de vecteurs régulier défini sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$
- ✓ D est une fonction réelle régulière définie sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$, bornée inférieurement par une constante $D_0 > 0$.
- ✓ f, u_0, u_D et u_N sont des fonctions réelles régulières

1. Introduction

1.2 Hypothèses de régularité

Pour simplifier, nous supposons que les données du problème $(\Omega, f, \mathbf{v}, D, u_0, \dots)$ sont telles que **le problème (1)-(2)-(3)-(4) possède une unique solution C^∞ sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$.**

En particulier nous supposons donc que pour tout entier p , il existe une constante $C_p > 0$ telles que toutes les dérivées partielles de la solution u , d'ordre inférieur ou égal à p , soient bornées en valeur absolue par la constante C_p . Par exemple, on a donc par définition :

$$\begin{aligned} \max_{(t,\mathbf{x}) \in [0,T] \times \bar{\Omega}} |u(t, \mathbf{x})| &\leq C_0 \leq C_1 & \max_{(t,\mathbf{x}) \in [0,T] \times \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right| &\leq C_1 \\ \max_{(t,\mathbf{x}) \in [0,T] \times \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, \mathbf{x}) \right| &\leq C_1 & \max_{(t,\mathbf{x}) \in [0,T] \times \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(t, \mathbf{x}) \right| &\leq C_1 \end{aligned}$$

Plan

1. Introduction
2. Principes généraux de la MDF
3. Discrétisation spatiale
4. Discrétisation temporelle
5. Convergence de la MDF

2. Principes généraux de la MDF

2.1 Principe de discrétisation

Pour passer d'un problème continu à un problème traitable par un ordinateur (capable uniquement de manipuler une quantité finie d'information) **il faut discrétiser le problème**, c'est-à-dire passer d'un nombre infini d'inconnues (les valeurs de u en chaque point) à un nombre fini d'inconnues.

Il existe pour cela plusieurs méthodes, les plus utilisées étant :

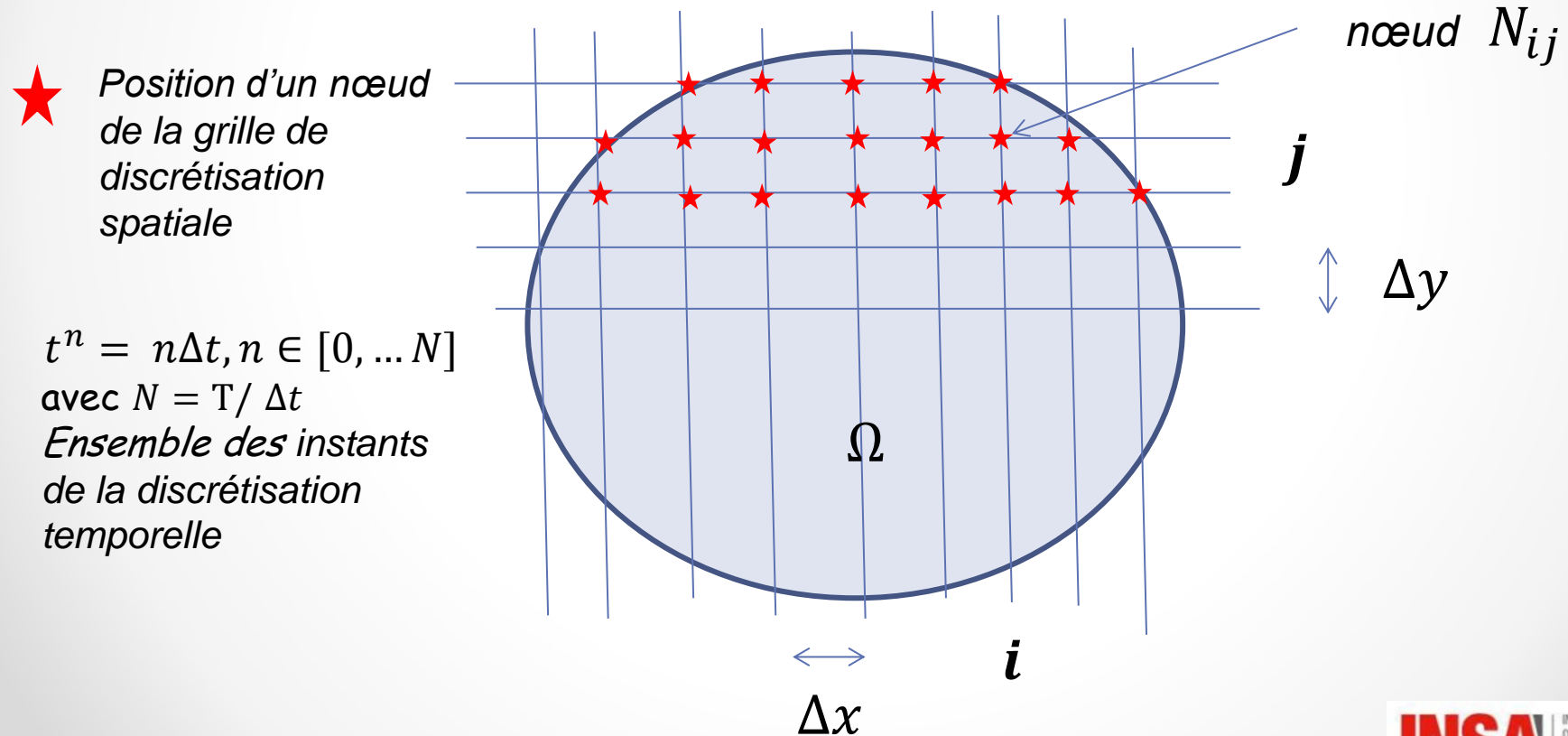
- ✓ la méthode des éléments finis (voir cours de 4A)
- ✓ la méthode des volumes finis (voir cours de 4A)
- ✓ la **méthode des différences finies**

Nous verrons également au chapitre 4 une autre méthode, appelée méthode de Monte-Carlo, basée sur un tout autre principe.

2. Principes généraux de la MDF

2.1 Principe de discrétisation

La MDF consiste à calculer une valeur approchée de la solution exacte en **un nombre fini de points** $M^n_{ij} = (n\Delta t, i\Delta x, j\Delta y) = (t^n, N_{ij})$ distribués sur une grille régulière de pas constants $\Delta t, \Delta x, \Delta y$.



2. Principes généraux de la MDF

2.1 Principe de discrétisation

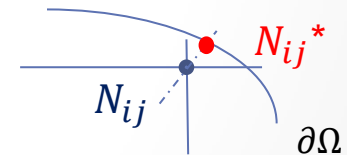
On note u_{ij}^n la valeur de la solution discrète à l'instant t^n et au nœud N_{ij} . Il faut la distinguer de $u(t^n, N_{ij})$, solution exacte en t^n, N_{ij} . On note :

- ✓ \mathfrak{N} l'ensemble des nœuds N_{ij} situés sur le bord de la grille
- ✓ \mathcal{M} l'ensemble des autres nœuds (appelés nœuds intérieurs)

La **principale limitation** de la méthode des différences finies réside dans la **prise en compte des conditions aux limites** sur une frontière quelconque.

En effet, sauf cas particulier où Ω est un polygône dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy, **les nœuds de \mathfrak{N} ne se trouvent pas sur $\partial\Omega$** . Une solution consiste à associer à tout nœud N_{ij} de \mathfrak{N} le point N_{ij}^* de $\partial\Omega$ le plus proche de N_{ij} et à remplacer, par exemple, la CL (3) par :

$$(5) \quad u_{ij}^n = u_D(t^n, N_{ij}^*)$$



(5) Introduit nécessairement une erreur du fait de la non-coïncidence entre le point N_{ij} où la CL est réellement imposée et le point N_{ij}^* où elle devrait théoriquement l'être. Il existe d'autres méthodes mais elles sont plus complexes et sortent du cadre de ce cours d'introduction.

2. Principes généraux de la MDF

2.2 Schéma aux différences finies

Une fois définie la solution discrète, il reste à définir la manière dont on doit calculer ses valeurs de sorte qu'elle soit une approximation de la solution exacte de (1)-(2)-(3)-(4). Pour la CI c'est évident, pour les CL nous venons de l'évoquer, il reste à voir comment remplacer (1) par un ensemble d'équations discrètes.

Le principe de la MDF consiste à utiliser la formule de Taylor-Lagrange (développement limité d'une fonction au voisinage d'un point) afin de trouver une approximation des dérivées partielles de u en chaque point M^n_{ij} en fonction des valeurs de u aux points voisins.

2. Principes généraux de la MDF

2.2 Schéma aux différences finies

Pour fixer les idées, le plus simple est de prendre un exemple.

Soit l'edp :

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

On a d'après la formule de Taylor :

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(n\Delta t, i\Delta x) = \frac{u((n+1)\Delta t, i\Delta x) - u(n\Delta t, i\Delta x)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t, i\Delta x) = \frac{u(n\Delta t, i\Delta x) - u(n\Delta t, (i-1)\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

On en déduit que la solution exacte vérifie:

$$\begin{aligned} & \frac{u((n+1)\Delta t, i\Delta x) - u(n\Delta t, i\Delta x)}{\Delta t} + a \frac{u(n\Delta t, i\Delta x) - u(n\Delta t, (i-1)\Delta x)}{\Delta x} \\ & = O(\Delta t) + O(\Delta x) \approx 0 \end{aligned}$$

2. Principes généraux de la MDF

2.2 Schéma aux différences finies

La MDF consiste à remplacer (6) par l'équation discrète suivante (valable pour tout i et pour tout n) :

$$(9) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$\approx \frac{\partial u}{\partial t}(n\Delta t, i\Delta x)$ $\approx \frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t, i\Delta x)$

(9) Peut être réécrite sous la forme d'une relation de récurrence permettant de passer des valeurs du temps t^n à celles du temps t^{n+1} :

$$(10) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

La condition initiale permet de fixer les valeurs des u_i^0 et la relation (10) (complétée par une condition aux limites en $i = i_{min}$) permet ensuite de calculer successivement les valeurs des u_i^n .

2. Principes généraux de la MDF

2.2 Schémas aux différences finies

(9) est appelé **schéma aux différences finies** pour l'équation (6). Nous verrons que :

- ✓ **Pour une même edp il existe une infinité de schémas aux différences finies possibles** puisqu'il existe une infinité de façon d'approcher une dérivée partielle par une formule de « différence divisée » du type (7) ou (8).
- ✓ **Tous les schémas aux différences finies ne convergent pas vers la solution exacte lorsque Δt , Δx et Δy tendent vers 0.** Par exemple, on verra (cf TD1) que le schéma (10) diverge si $a < 0$.
- ✓ Pour de nombreux schémas, la convergence nécessite que Δt vérifie une condition dite **de stabilité numérique**, fonction de Δx et Δy (cf TD1 et TP1).

2. Principes généraux de la MDF

2.2 Schéma aux différences finies

- ✓ Parmi les schémas qui convergent, **certains sont plus précis** que d'autres au sens où l'erreur (en un sens à préciser) entre solution discrète et solution exacte décroît comme $O(\Delta x^p + \Delta t^q)$ avec p et q plus grand.
- ✓ Le traitement des **conditions aux limites** nécessite en général d'adopter un schéma différent pour les nœuds situés sur et à proximité de la frontière.

Plan

1. Introduction

2. Principes généraux de la MDF

3. Discrétisation spatiale

4. Discrétisation temporelle

5. Convergence de la MDF

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.1 Formule de Taylor - Lagrange

Soit f une fonction réelle de classe C^k sur $I = [a, b]$. Pour tout $n < k$, pour tout $x \in]a, b[$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel $x + h \in [a, b]$, on a :

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + R_n(x, h)$$

avec :

$$R_n(x, h) = \frac{f^{(n+1)}(x + \theta h)h^{n+1}}{(n + 1)!} \quad \text{où } \theta \in [0, 1] \text{ est fonction de } x \text{ et } h$$

On en déduit la majoration suivante du reste :

$$|R_n(x, h)| \leq \frac{M}{(n + 1)!} h^{n+1}$$

avec :

$$M = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.1 Formule de Taylor - Lagrange

Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à la solution u du problème modèle (1)-(2)-(3)-(4). Pour alléger les notations, on omet la dépendance de u par rapport à la variable t .

Pour tout nœud intérieur N_{ij} de la grille différences finies, on obtient (en raisonnant à t et $y = j\Delta y$ fixés et en considérant u comme une fonction de x seulement):

$$(5) \quad u(N_{i+1j}) = u(N_{ij}) + \frac{\partial u}{\partial x}(N_{ij})\Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N_{ij})\Delta x^2 \\ + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(N_{ij})\Delta x^n + R_{ij}^n$$

$$(6) \quad u(N_{i-1j}) = u(N_{ij}) - \frac{\partial u}{\partial x}(N_{ij})\Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N_{ij})\Delta x^2 \\ + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(N_{ij})\Delta x^n + R_{ij}^{n'}$$

$$\text{avec:} \quad |R_{ij}^n| \leq \frac{C_{n+1}}{(n+1)!} \Delta x^{n+1} \quad \text{et} \quad |R_{ij}^{n'}| \leq \frac{C_{n+1}}{(n+1)!} \Delta x^{n+1}$$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.1 Formule de Taylor - Lagrange

De même, on obtient en faisant varier y au lieu de x :

$$(7) \quad u(N_{ij+1}) = u(N_{ij}) + \frac{\partial u}{\partial y}(N_{ij})\Delta y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(N_{ij})\Delta y^2 \\ + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial y^n}(N_{ij})\Delta y^n + E_{ij}^n$$

$$(8) \quad u(N_{ij-1}) = u(N_{ij}) - \frac{\partial u}{\partial y}(N_{ij})\Delta y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(N_{ij})\Delta y^2 \\ + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial y^n}(N_{ij})\Delta y^n + E_{ij}^{n'}$$

avec: $|E_{ij}^n| \leq \frac{C_{n+1}}{(n+1)!} \Delta x^{n+1}$ et $|E_{ij}^{n'}| \leq \frac{C_{n+1}}{(n+1)!} \Delta x^{n+1}$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.2 Approximation des dérivées partielles du 1er ordre

Pour $n=4$, en retranchant (6) de (5), on obtient:

$$u(N_{i+1j}) - u(N_{i-1j}) = 2 \frac{\partial u}{\partial x}(N_{ij}) \Delta x + \frac{2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(N_{ij}) \Delta x^3 + E_{ij}^4 - E_{ij}^{4'}$$

$$\text{avec: } |E_{ij}^4| \leq \frac{C_4}{4!} \Delta x^4 \quad \text{et} \quad |E_{ij}^{4'}| \leq \frac{C_4}{4!} \Delta x^4$$

On en déduit :

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(N_{ij}) = \frac{u(N_{i+1j}) - u(N_{i-1j})}{2 \Delta x} - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(N_{ij}) \Delta x^2 + E_{ij}$$

$$\text{avec: } |E_{ij}| \leq \frac{C_4}{4!} \Delta x^3$$

(9) Est appelée approximation centrée à 3 points de la dérivée première par rapport à x . Elle est précise à l'ordre 2 par rapport à Δx .

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.2 Approximation des dérivées partielles du 1er ordre

Pour $n=2$, on déduit directement de (5) et (6) les relations suivantes:

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(N_{ij}) = \frac{u(N_{i+1j}) - u(N_{ij})}{\Delta x} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N_{ij}) \Delta x + E_{ij}$$

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(N_{ij}) = \frac{u(N_{ij}) - u(N_{i-1j})}{\Delta x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N_{ij}) \Delta x + E'_{ij}$$

avec: $|E_{ij}| \leq \frac{C_3}{3!} \Delta x^2$ $|E'_{ij}| \leq \frac{C_3}{3!} \Delta x^2$

(10) et (11), sont appelées approximations décentrées (à 2 points) à droite, respectivement à gauche, de la dérivée première par rapport à x . Elle sont précises à l'ordre 1 seulement par rapport à Δx .

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.2 Approximation des dérivées partielles du 1er ordre

Il est également possible de trouver une approximation décentrée d'ordre 2 de la dérivée première par rapport à x . Par exemple pour une formule qui ne fait intervenir que $u(N_{ij})$, $u(N_{i-1j})$ et $u(N_{i-2j})$ il suffit de combiner les DL de $u(N_{i-1j})$ et $u(N_{i-2j})$ par rapport à $u(N_{ij})$:

$$(6) \quad u(N_{i-1j}) = u(N_{ij}) - \frac{\partial u}{\partial x}(N_{ij})\Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N_{ij})\Delta x^2 \\ + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(N_{ij})\Delta x^n + R_{ij}^n$$

$$(12) \quad u(N_{i-2j}) = u(N_{ij}) - 2 \frac{\partial u}{\partial x}(N_{ij})\Delta x + \frac{4}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N_{ij})\Delta x^2 \\ + \dots + \frac{(-2)^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(N_{ij})\Delta x^n + R_{ij}^{n'}$$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.2 Approximation des dérivées partielles du 1er ordre

On remarque qu'en combinant convenablement (6) et (12) (en faisant $4 \times (6) - (12)$), on peut éliminer les termes en Δx^2 . En prenant $n=3$, on trouve:

$$\begin{aligned} 4 u(N_{i-1j}) - u(N_{i-2j}) \\ = 3 u(N_{ij}) - 2 \frac{\partial u}{\partial x}(N_{ij}) \Delta x + \frac{4}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(N_{ij}) \Delta x^3 - R_{ij}^{3'} + 4 R_{ij}^3 \end{aligned}$$

D'où la formule décentrée d'ordre 2 (à 3 points) pour $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$(13) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(N_{ij}) = \frac{u(N_{i-2j}) + 3 u(N_{ij}) - 4 u(N_{i-1j})}{2 \Delta x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(N_{ij}) \Delta x^2 + E_{ij}$$

$$\text{avec: } |E_{ij}| \leq \frac{3C_4}{4!} \Delta x^3$$

NB: en appliquant le même principe et en utilisant également un DL de $u(N_{i-3j})$, on pourrait obtenir un schéma décentré (à 4 points) d'ordre 3, et ainsi de suite ...

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.3 Approximation des dérivées partielles du 1er ordre

On a bien sûr le même type de formules pour la dérivée première par rapport à y :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(N_{ij}) = \frac{u(N_{ij+1}) - u(N_{ij})}{\Delta y} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(N_{ij}) \Delta y + E_{ij}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(N_{ij}) = \frac{u(N_{ij}) - u(N_{ij-1})}{\Delta y} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(N_{ij}) \Delta y + E'_{ij}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(N_{ij}) = \frac{u(N_{ij+1}) - u(N_{ij-1})}{2 \Delta y} - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(N_{ij}) \Delta y^2 + E''_{ij}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(N_{ij}) = \frac{u(N_{ij-2}) + 3 u(N_{ij}) - 4u(N_{ij-1})}{2 \Delta y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(N_{ij}) \Delta y^2 + E'''_{ij}$$

avec:

$$|E_{ij}| \leq \frac{C_3}{3!} \Delta x^2 \quad |E'_{ij}| \leq \frac{C_3}{3!} \Delta x^2 \quad |E''_{ij}| \leq \frac{C_4}{4!} \Delta x^3 \quad |E'''_{ij}| \leq \frac{3C_4}{4!} \Delta x^3$$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.3 Approximation des dérivées partielles du second ordre

En choisissant $n = 4$ et en additionnant (5) et (6), on obtient :

$$u(N_{i+1j}) + u(N_{i-1j}) = 2 u(N_{ij}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N_{ij})\Delta x^2 + \dots + \frac{2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(N_{ij})\Delta x^4 + R_{ij}^4 - R_{ij}^{4'}$$

On en déduit l'approximation centrée suivante pour la dérivée seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$(14) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N_{ij}) = \frac{u(N_{i+1j}) - 2 u(N_{ij}) + u(N_{i-1j}))}{\Delta x^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(N_{ij})\Delta x^2 + E_{ij}$$

$$\text{avec: } |E_{ij}| \leq \frac{2 C_5}{5!} \Delta x^3$$

De même, pour la dérivée seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, on obtient:

$$(15) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(N_{ij}) = \frac{u(N_{ij+1}) - 2 u(N_{ij}) + u(N_{ij-1}))}{\Delta y^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(N_{ij})\Delta y^2 + E'_{ij}$$

$$\text{avec: } |E'_{ij}| \leq \frac{2 C_5}{5!} \Delta x^3$$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.3 Approximation des dérivées partielles du second ordre

En faisant intervenir les nœuds $(i-2,j)$, $(i+2,j)$, $(i,j-2)$ et $(i,j+2)$, on peut obtenir une approximation centrée d'ordre 4. On peut montrer en effet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N_{ij}) = \frac{-u(N_{i+2j}) + 16u(N_{i+1j}) - 30u(N_{ij}) + 16u(N_{i-1j}) - u(N_{i-2j})}{12 \Delta x^2} + E_{ij}$$

$$\text{avec: } |E_{ij}| \leq \frac{11}{6!} C_6 \Delta x^4$$

La démonstration est laissée à titre d'exercice.

NB: quelle que soit la formule d'approximation choisie, on peut noter que la somme des coefficients a_k facteurs des $u(N_{i+kj})$ est nulle.

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.4 Schéma semi-discret en espace

Dans une première étape, on commence par discrétiser l'équation modèle (1) uniquement par rapport aux variable d'espace x et y . On note $u_{ij}(t)$ la valeur de la **solution semi-discrete** à l'instant t au nœud N_{ij} .

En choisissant une approximation centrée d'ordre 2 pour chacune des dérivées partielles par rapport aux variable x et y , on est conduit (avec des notations évidentes) à l'équation suivante pour la solution semi-discrete:

$$(16) \quad \frac{du_{ij}}{dt}(t) + a_{ij}(t) \frac{u_{i+1j}(t) - u_{i-1j}(t)}{2\Delta x} + b_{ij}(t) \frac{u_{ij+1}(t) - u_{ij-1}(t)}{2\Delta y} - D_{ij}(t) \left[\frac{u_{i+1j}(t) - 2u_{ij}(t) + u_{i-1j}(t)}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij+1}(t) - 2u_{ij}(t) + u_{ij-1}(t)}{\Delta y^2} \right] = f_{ij}(t)$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - D \Delta u = f$$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.4 Schéma semi-discret en espace

- A ce stade, on a donc remplacé l'edp (1) par le système d'équations différentielles (16), qu'il va ensuite falloir discrétiser pour obtenir un schéma aux différences finies.
- Il est important de noter que **(16) n'est valable que pour les nœuds intérieurs**. Pour les nœuds situés sur le bord de la grille, **un schéma différent doit être utilisé afin de tenir compte des conditions aux limites (3) et (4) → voir suite**.

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.5 Traitement des conditions aux limites

Pour les nœuds N_{ij} situés sur la frontière de la grille, il faut utiliser une version discrétiser des équations (3) et (4).

- **Cas d'une condition de Dirichlet.** Dans ce cas, l'équation s'écrit simplement:

$$u_{ij}(t) = u_D(t, N_{ij}^*)$$

où N_{ij}^* désigne le point de la frontière Γ_D le plus proche d nœud N_{ij} considéré

- **Cas d'une condition de Neumann.** Dans ce cas, il faut se donner une approximation décentrée (vers l'intérieur de Ω) de $\frac{\partial u}{\partial n}(t, N_{ij})$ et remplacer (4) par :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}(t, N_{ij}) \right]_{discret} = u_N(t, N_{ij}^*)$$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.5 Traitement des conditions aux limites

Exemple. Si $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ avec des conditions de Neumann imposées sur les frontières $x = 0$ et $x=1$:

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y) = \alpha(t, y) \quad (ii) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1, y) = \beta(t, y)$$

Avec une approximation d'ordre 1 des dérivées, les conditions (i) et (ii) conduisent aux équations discrètes :

$$(i') \quad \frac{u_{2j}(t) - u_{1j}(t)}{\Delta x} = \alpha_j(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{1j}(t) = u_{2j}(t) - \Delta x \alpha_j(t)}$$

$$(ii') \quad \frac{u_{Ij}(t) - u_{I-1j}(t)}{\Delta x} = \beta_j(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{Ij}(t) = u_{I-1j}(t) + \Delta x \beta_j(t)}$$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.5 Traitement des conditions aux limites

Exemple (suite). Avec une approximation d'ordre 2 des dérivées, les conditions (i) et (ii) conduisent aux équations discrètes :

$$(i') \quad -\frac{3u_{1j}(t) - 4u_{2j}(t) + u_{3j}(t)}{2\Delta x} = \alpha_j(t)$$



$$u_{1j}(t) = \frac{4}{3}u_{2j}(t) - \frac{1}{3}u_{3j}(t) - \frac{2}{3}\Delta x \alpha_j(t)$$

$$(ii') \quad \frac{3u_{Ij}(t) - 4u_{I-1j}(t) + u_{I-2j}(t)}{2\Delta x} = \beta_j(t)$$



$$u_{Ij}(t) = \frac{4}{3}u_{I-1j}(t) - \frac{1}{3}u_{I-2j}(t) + \frac{2}{3}\Delta x \beta_j(t)$$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.6 Forme matricielle du schéma semi-discret

- On peut convenir de numéroté chacun des nœuds de la grille de 1 à K . On peut par exemple adopter l'ordre lexicographique, c'est-à-dire que le nœud N_{ij} aura un numéro k inférieur au numéro k' du nœud $N_{i',j'}$ si et seulement si $i \leq i'$ et $j \leq j'$.
- On note $num(i, j)$ le numéro k du nœud N_{ij} et $ind(k)$ le couple (i, j) des indices du nœud de numéro k .
- Si $k = num(i, j)$, on convient de noter $u_k(t)$ la valeur de la solution semi-discrète au nœud N_{ij} . On a donc: $u_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} u_{ind(k)}(t)$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.6 Forme matricielle du schéma semi-discret

- On note K le nombre total de nœuds de la grille, K' le nombre de nœuds intérieurs et K'' le nombre de nœuds sur la frontière ($K = K' + K''$).
- On note $\mathbf{U}(t)$ le vecteur de \mathbb{R}^K de composantes $u_1(t), \dots, u_K(t)$, contenant donc les valeurs de la solution semi-discrète **en tous les nœuds de la grille**.
- On note $\tilde{\mathbf{U}}(t)$ le vecteur de \mathbb{R}^K composé des valeurs de la solution semi-discrète pour les **nœuds intérieurs de la grille** et de zéros pour les nœuds situés sur la frontière.
- On note $\bar{\mathbf{U}}(t)$ le vecteur de \mathbb{R}^K composé des valeurs de la solution semi-discrète pour les **nœuds situés sur la frontière de la grille** et de zéros pour les nœuds à l'intérieur.
- Par définition : $\mathbf{U}(t) = \tilde{\mathbf{U}}(t) + \bar{\mathbf{U}}(t)$

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.6 Forme matricielle du schéma semi-discret

Avec ces notations, l'équation (16) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$(17) \quad \frac{d\tilde{U}}{dt}(t) = \tilde{A}(t)U(t) + \tilde{F}(t)$$

où:

- $\tilde{A}(t)$ est une matrice de dimension $K \times K$.
- (16) n'étant valable que pour les nœuds intérieurs de la grille, tous les coefficients d'une ligne de $\tilde{A}(t)$ sont nuls par définition si cette ligne a pour indice le numéro d'un nœud frontière.
- Sur la ligne d'indice k de $\tilde{A}(t)$ (avec k correspondant à un nœud intérieur) **les seuls coefficients non nuls sont les coefficients $a_{kk'}$, où k' est le numéro d'un des nœuds voisins du nœud k . La matrice $\tilde{A}(t)$ est dite creuse.**

3. Schémas de discrétisation spatiale

3.6 Forme matricielle du schéma semi-discret

De même les relations correspondant aux conditions aux limites peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$(18) \quad \bar{U}(t) = \bar{B}(t)\tilde{U}(t) + \bar{G}(t)$$

où :

- $\bar{B}(t)$ est une matrice de dimension $K \times K$
- Puisque (18) est associée à la discrétisation des conditions aux limites, **tous les coefficients d'une ligne de $\bar{B}(t)$ sont nuls par définition si cette ligne a pour indice le numéro d'un nœud intérieur.**
- $\bar{G}(t)$ est un vecteur de dimension K , associé à la discrétisation des fonctions u_D et u_N et dont les seules composantes non identiquement nulles sont celles dont l'indice correspond à un nœud frontière.

Plan

1. Introduction
2. Principes généraux de la MDF
3. Discrétisation spatiale
- 4. Discrétisation temporelle**
5. Convergence de la MDF

4. Schémas de discrétisation temporelle

4.1 Introduction

- On est ramené à la résolution numérique d'un système d'équations différentielle (17), couplé à un ensemble de relations algébriques (18).
- On peut donc utiliser tous les schémas numériques, explicites ou implicites, déjà vus dans le cours sur la résolution numérique des systèmes d'edo (Euler, Runge-Kutta, Adams-Bashforth, Adams-Moulton ...)
- On se limitera ici aux méthodes à un pas les plus simples:
 - ✓ **schémas d'Euler explicite,**
 - ✓ **schéma d'Euler implicite,**
 - ✓ **schéma de Crank-Nicolson**

4. Schémas de discrétisation temporelle

4.2 Schéma d'Euler explicite

La méthode de discrétisation la plus simple consiste à remplacer

$$(17) \frac{d\tilde{U}}{dt}(t) = \tilde{A}(t)U(t) + \tilde{F}(t)$$

par le schéma dit d'Euler:

$$(19) \frac{\tilde{U}^{n+1} - \tilde{U}^n}{\Delta t} = \tilde{A}(t^n)U^n + \tilde{F}(t^n)$$

où U^n désigne par définition le vecteur de dimension K contenant toutes les valeurs de la solution discrète à l'instant t^n . (19) est équivalent à :

$$(20) \tilde{U}^{n+1} = \tilde{U}^n + \Delta t \tilde{A}(t^n)U^n + \Delta t \tilde{F}(t^n)$$

et permet donc de calculer très facilement \tilde{U}^{n+1} à partir de U^n . Le schéma (20) (où (19)) est dit **explicite**.

4. Schémas de discrétisation temporelle

4.2 Schéma d'Euler explicite

(20) permet de mettre à jour à l'instant t^{n+1} les valeurs de la solution discrète aux nœuds intérieurs. Il reste à préciser comment mettre à jour les valeurs aux nœuds situés sur la frontière. C'est le rôle de la condition aux limites (18) que l'on discrétise en :

$$(21) \quad \bar{U}^{n+1} = \bar{B}(t^{n+1})\tilde{U}^{n+1} + \bar{G}(t^{n+1})$$

Le schéma d'Euler explicite (20)-(21) a l'avantage d'être **très simple à programmer** mais présente plusieurs inconvénients majeurs:

- **L'erreur de discrétisation est seulement d'ordre 1** par rapport à Δt .
- **Le pas de temps doit satisfaire une condition de stabilité fonction de Δx et Δy** (voir TD1) qui peut être très restrictive et rendre le calcul de la solution discrète jusqu'à un instant T donné très coûteux.

4. Schémas de discrétisation temporelle

4.3 Schéma d'Euler implicite

Pour éviter (ou limiter) les problèmes liés à la stabilité des schémas explicites, on peut utiliser un schéma implicite. Le plus simple consiste à discrétiser (16) selon:

$$(22) \frac{\tilde{U}^{n+1} - \tilde{U}^n}{\Delta t} = \tilde{A}(\tilde{t}^{n+1})U^{n+1} + \tilde{F}(\tilde{t}^{n+1})$$

(22) doit bien sûr être complété par un schéma permettant de calculer \bar{U}^{n+1} afin de tenir compte des conditions aux limites. On utilise le même que précédemment, à savoir:

$$(21) \bar{U}^{n+1} = \bar{B}(t^{n+1})\tilde{U}^{n+1} + \bar{G}(t^{n+1})$$

(22) est appelé **schéma d'Euler implicite** puisque cette fois \tilde{U}^{n+1} s'exprime en fonction de \tilde{U}^n et de U^{n+1} et ne peut donc pas être calculé explicitement en fonction de U^n .

4. Schémas de discrétisation temporelle

4.3 Schéma d'Euler implicite

On peut regrouper (21) et (22) en une seule équation qui s'écrit:

$$(23) \quad U^{n+1} = \tilde{U}^n + \Delta t \tilde{A}(t^{n+1}) U^{n+1} + \bar{B}(t^{n+1}) \tilde{U}^{n+1} + \bar{G}(t^{n+1}) + \Delta t \tilde{F}(t^{n+1})$$

Soit alors P la matrice de projection de dimension $K \times K$ telle que par définition:

$$\tilde{U}^{n+1} = P U^{n+1}$$

On peut encore écrire (23) sous la forme suivante:

$$(24) \quad [I - \Delta t \tilde{A}(t^{n+1}) - \bar{B}(t^{n+1})P] U^{n+1} = \tilde{U}^n + \bar{G}(t^{n+1}) + \Delta t \tilde{F}(t^{n+1})$$

On voit que l'on doit donc résoudre à chaque pas de temps un grand système linéaire « creux » de dimension K . Il existe pour cela des techniques spécifiques (cf cours dédié de 4^{ème} année).

4. Schémas de discrétisation temporelle

4.4 Schéma de Crank-Nicolson

- Pour les deux schémas précédents, l'erreur de discrétisation temporelle est seulement d'ordre 1. Cela vient du fait que $\frac{\tilde{U}(t^{n+1}) - \tilde{U}(t^n)}{\Delta t}$ est seulement une approximation d'ordre 1 de $\frac{d\tilde{U}}{dt}(t^n)$ et de $\frac{d\tilde{U}}{dt}(t^{n+1})$.
- Il est par contre facile de montrer que c'est une approximation d'ordre 2 de $\frac{1}{2} \frac{d\tilde{U}}{dt}(t^n) + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{U}}{dt}(t^{n+1})$.
- On peut donc facilement obtenir un schéma d'ordre 2 par rapport à Δt en combinant les schémas d'Euler explicite et implicite. Le schéma correspondant s'appelle **schéma de Crank-Nicolson**.

4. Schémas de discrétisation temporelle

4.4 Schéma de Crank-Nicolson

Le schéma de Crank-Nicolson consiste donc à discrétiser (16) selon:

$$(25) \frac{\tilde{U}^{n+1} - \tilde{U}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \tilde{A}(t^{n+1}) U^{n+1} + \frac{1}{2} \tilde{F}(t^{n+1}) + \frac{1}{2} \tilde{A}(t^n) U^n + \frac{1}{2} \tilde{F}(t^n)$$

qui peut être combinée avec la condition aux limites (21) pour donner finalement le schéma suivant:

$$(26) \left[I - \frac{\Delta t}{2} \tilde{A}(t^{n+1}) - \bar{B}(t^{n+1})P \right] U^{n+1} = \tilde{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \tilde{A}(t^n) U^n + \frac{\Delta t}{2} \tilde{F}(t^n) + \frac{\Delta t}{2} \tilde{F}(t^{n+1}) + \bar{G}(t^{n+1})$$

On voit clairement que ce schéma appartient à la classe des schémas implicites et nécessite la résolution d'un système linéaire creux à chaque pas de temps.