Modélisation par équations aux dérivées partielles

Chapitre 2 : Notions théoriques élémentaires sur les e.d.p.

Philippe Villedieu
Philippe.villedieu@insa-toulouse.fr

Plan

1. Généralités

2. Conditions initiales

3. Conditions aux limites

4. Notions élémentaires sur la classification des edp

Plan

1. Généralités

2. Conditions initiales

3. Conditions aux limites

4. Notions élémentaires sur la classification des edp

1. Généralités
1.1 Problèmes instationnaires

Les exemples d'edp* du cahpitre 1 sont tous de la forme suivante:

- ✓ **Inconnue u** : fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ des variables $t \in [0, T[$ (variable de temps) et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega \sqsubset \mathbb{R}^{\boldsymbol{d}}$ (variable d'espace)

- ✓ **Equation** de l'une des **deux formes génériques** suivantes :

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + A(t)[u] = f$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A(t)[u] = f$$

avec :

- ✓ $\boldsymbol{A(t)}$ **famille d'opérateurs différentiels** de $C^2(\boldsymbol{\Omega})$ dans $C^0(\boldsymbol{\Omega})$ dépendant continument de la variable $t \in [0, T[$
- ✓ f une fonction de $[0, T[\times \Omega$ à valeur dans $\mathbb{R}$

** Dans ce cours d'introduction aux aspects théoriques des edp, on n'aborde pas le cas des systèmes.*

1. Généralités

1.1 Problèmes instationnaires

Si les opérateurs A(t) sont linéaires pour tout t, l'**edp** correspondante est dite **linéaire**.

Dans ce cas, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes (analogue à celles déjà connues pour les équations différentielles):

- ✓ **L'ensemble des solutions de l'edp homogène ($\boldsymbol{f = 0}$) forme un espace vectoriel** (en général de dimension infinie).
- ✓ Si u est une solution de l'edp non-homogène, alors pour toute fonction v solution de l'edp homogène, $u + v$ est également solution de l'edp non-homogène.

Une edp possède donc en général une infinité de solution. **Pour avoir unicité de la solution, il faut imposer des conditions supplémentaires, appelées conditions initiales (en t = 0) et aux limites (pour $\mathbf{x} \in \partial\Omega$).**

1. Généralités

1.2 Problèmes stationnaires

Si l'opérateur A, la fonction f ainsi que les conditions aux limites sont indépendantes du temps t, il est possible que :

- la solution u tende vers une fonction indépendante de t, notée u^*, lorsque $t \to +\infty$
- et simultanément ses dérivées partielles par rapport à t, $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, tendent vers 0.

La solution asymptotique u^* est alors solution d'une edp plus simple que (1) ou de (2), appelée **problème stationnaire**, de la forme suivante:

$$\boxed{(3) \qquad A[u] = f}$$

Pour que cette équation possède une solution unique, il faut bien sûr lui associer des conditions aux limites comme pour (1) ou (2).

1 Généralités

1.3 Solutions à variables séparées

Si l'opérateur A est linéaire et indépendant de t si $f = 0$, on peut chercher des solution de (1) ou de (2) dites ***à variables séparées*** c'est-à-dire vérifiant pour tout t et pour tout $\mathbf{x}$: $u(t,\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})w(\mathrm{t})$

- ✓ En injectant cette expression dans (1) on trouve que : $$\frac{w'(t)}{w(t)} + \frac{A[v]}{v} = 0$$
- ✓ En injectant cette expression dans (2) on trouve que : $$\frac{w''(t)}{w(t)} + \frac{A[v]}{v} = 0$$

Dans les 2 cas, il en résulte que $\frac{A[v]}{v}$ doit être égal à une constante que l'on note λ (puisque A[v] et v ne dépendent pas du temps et que leur quotient doit être une fonction du temps seulement).

On est donc ramené pour la fonction v à résoudre un problème aux valeurs propres (voir partie 4 du cours) de la forme :

$$\boxed{(4) \quad A[v] = \lambda\, v}$$

1 Généralités

1.3 Solutions à variables séparées

La fonction w doit quant-à elle vérifier une équation différentielle linéaire, du 1er ordre ou du 2nd ordre selon qu'il s'agit du problème (1) (du type équation de la chaleur) ou du problème (2) du type équation des ondes :

$$\boxed{w' + \lambda\, w = 0}$$

Problème (1)

$$w(t) = w_0\, e^{-\lambda t}$$

Cas usuel en Physique: **les valeurs propres de A sont réelles et strictement positives.**

$$\boxed{w'' + \lambda\, w = 0}$$

Problème (2)

$\lambda = \omega^2 > 0$

$$w(t) = w_0\, e^{-i\omega t} + w_1\, e^{i\omega t}$$

On note une différence radicale du point de vue du comportement en temps des solutions du problème (1) et des solutions du problème (2) : **solutions amorties exponentiellement pour (1) vs solutions oscillantes (appelées ondes stationnaires) pour (2).**

Plan

1. Généralités
2. Conditions initiales
3. Conditions aux limites
4. Notions élémentaires sur la classification des edp

2. Conditions initiales

2.1 Cas général

Le nombre de conditions initiales à imposer est égal au degré de l'edp par rapport à la variable t. Par conséquent:

- ✓ Pour les edp du type (1), on imposera une condition du type :

$$(3) \quad u(0,.) = u_0(.)$$

où u_0 est une fonction définie sur $\boldsymbol{\Omega}$ à valeur dans $\mathbb{R}$

- ✓ Pour les edp du type (2), on imposera des conditions du type :

$$(4) \quad u(0,.) = u_0(.) \quad \text{et} \; \frac{\partial u}{\partial t}(0,.) = u_1(.)$$

où u_0 et u_1 sont des fonctions définies sur $\boldsymbol{\Omega}$ à valeur dans $\mathbb{R}$

2. Conditions initiales
2.2 Etude d'un exemple

Considérons l'exemple simple suivant:

$$(5a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad avec\ t \in [0,T[, x \in \mathbb{R}$$

$$(5b) \quad u(0,.) = u_0(.)$$

où a est un réel quelconque et u_0 est une fonction de $C^1(\mathbb{R})$ à valeur dans $\mathbb{R}$ que l'on supposera de plus à support compact (càd nulle en dehors d'un intervalle borné).

Il est immédiat de vérifier que **la fonction $\boldsymbol{u}$ définie par: $\boldsymbol{u(t,x) = u_0(x - at)}$ est solution du problème (5).**

Montrons que c'est l'unique solution dans l'ensemble $\boldsymbol{C_c}^1([\mathbf{0},\boldsymbol{T}] \times \mathbb{R})$ des fonctions C^1 à support compact sur $[0,T] \times \mathbb{R}$.

2. Conditions initiales
2.2 Etude d'un exemple

Soit v une autre solution de (5) appartenant à $\boldsymbol{C_c}^{\mathbf{1}}([\mathbf{0},\boldsymbol{T}] \times \mathbb{R})$ et soit $w = v - u$.
w appartient également à $\boldsymbol{C_c}^{\mathbf{1}}([\mathbf{0},\boldsymbol{T}] \times \mathbb{R})$ et, en raison de la linéarité de l'edp (5a), vérifie :

$$(6a) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + a\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad avec\ t \in [0,T[, x \in \mathbb{R} \qquad\qquad (6b) \quad w(0,.) = 0$$

En multipliant l'équation (6a) par w et après quelques manipulations évidentes on obtient:

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{w^2}{2}\right) = 0$$

Pour s et A fixés, en intégrant entre 0 et s par rapport à t et entre –A et +A par rapport à x, on en déduit que :

$$\int_{-A}^{A} w^2(s,x)dx + a\int_0^s w^2(s,A)dt \ - a\int_0^s w^2(s,-A)dt \ = 0$$

Comme w est à support compact, on en déduit en choisissant A assez grand:

(8) $\boldsymbol{\int_{-A}^{A} w^2(s,x)dx \ = \ 0}$ **ce qui entraine (s et A étant quelconques) la nullité de $\boldsymbol{w}$ sur $[\mathbf{0},\boldsymbol{T}] \times \mathbb{R}$. CQFD**

2. Conditions initiales
2.3 Morale de l’exemple

Cette démonstration bien que très simple et propre à une edp particulière comporte des arguments génériques que l’on retrouve dans les questions d’unicité de nombreux problèmes issus de la physique.

✓ (7) traduit la conservation de l’énergie associée au « signal » w. $e = \frac{w^2}{2}$ s’interprète physiquement comme la densité spatiale d’énergie, $E_A = \int_{-A}^{A} w^2(s,x)dx$ comme l’énergie contenue dans l’intervalle [-A,A] et $\varphi = \text{ a } \frac{w^2}{2}$ comme le flux d’énergie en un point (c’est-à-dire la quantité d’énergie qui traverse un point par unité de temps).

✓ **(8) traduit simplement le fait que si à t = 0, l’énergie du signal w est nulle** (la fonction w est par définition identiquement nulle), l’énergie se conservant, **elle doit rester nulle aux instants ultérieurs d’où la nullité de w pour tout t > 0.**

2. Conditions initiales

2.3 Morale de l'exemple

- ✓ On s'est limité pour simplifier la démonstration au cas des solution C^1 à support compact mais le résultat d'unicité est encore vrai dans l'ensemble des solutions C^1.

- ✓ Comme la variable x prend ici ses valeurs dans $\mathbb{R}$ tout entier, il n'est pas nécessaire d'imposer de conditions aux limites pour avoir unicité de la solution. Ce n'est pas vrai sinon.

Plan

1. Généralités
2. Conditions initiales
3. Conditions aux limites
4. Notions élémentaires sur la classification des edp

3. Conditions aux limites

3.1 Généralités

Supposons maintenant que Ω est un sous-domaine borné (et de frontière régulière) de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}}$. Dans ce cas, pour que les edp (1) ou (2) possède une solution unique, il faut également imposer des conditions que doit vérifier la solution u sur la frontière $\partial\Omega$.

La question des conditions aux limites (CL) qui garantissent existence et unicité de la solution est plus complexe que celle des conditions initiales. De manière générale deux questions (pas nécessairement indépendantes) se posent:

1. **Sur quelle partie de $\partial\Omega$ doit on imposer une (ou des) CL ?**
2. **Sous quelle forme doit-on écrire la condition aux limites ?**

Dans la pratique, lorsqu'on s'intéresse à une edp modélisant un phénomène physique, la réponse à ces questions n'est pas uniquement mathématique.

Les CL font partie du modèle tout autant que l'edp. Ce sont en effet les CL qui modélisent les échanges entre le système considéré et l'exterieur du système à travers la frontière $\partial\Omega$. Ce sont donc des considérations physiques qui vont guider le choix des CL à imposer.

3. Conditions aux limites

3.2 Conditions aux limites usuelles

Si l'opérateur A(t) est au plus du second ordre par rapport aux variables $x_1, \dots, x_d$, on rencontre en général 3 types de CL :

- ✓ **Condition de Dirichlet** qui s'écrit: $u(t,x) = u_D(t,\mathbf{x}), \forall t \in [0,T[, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \sqsubset \partial\Omega$

  où u_D est une fonction donnée de$\Gamma_D$dans $\mathbb{R}$.

- ✓ **Condition de Neumann** qui s'écrit: $\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) = g_N(t,\mathbf{x}), \forall t \in [0,T[, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \sqsubset \partial\Omega$

  où g_N est une fonction donnée deΓ_N dans $\mathbb{R}$.

- ✓ **Condition de Robin** (ou de Fourier) qui s'écrit:

  $$\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) = h(t,\mathbf{x})[u_R(t,\mathbf{x}) - u(t,\mathbf{x})], \forall t \in [0,T[, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_R \sqsubset \partial\Omega$$

  où u_R et h sont des fonctions données de Γ_R dans $\mathbb{R}$**,** avec h strictement positive.

Pour un même problème, ces 3 CL peuvent être combinées en s'appliquant sur trois parties distinctes de la frontière.

3. Conditions aux limites

3.3 Différence entre probèmes du 1er et du 2nd ordre

- Pour un opérateur différentiel linéaire du second ordre du type :

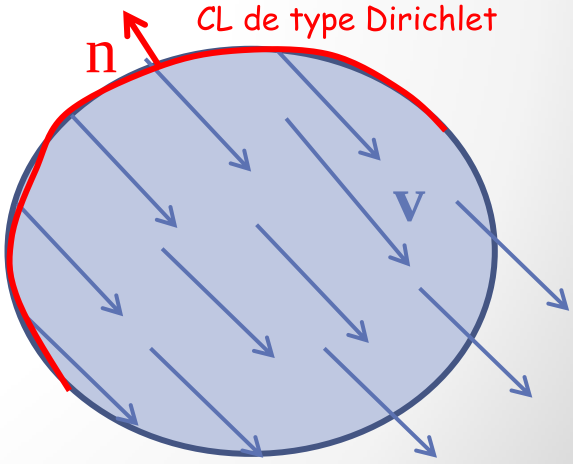
$$A[u] = \mathbf{v}.\boldsymbol{\nabla} u - div(D\ \boldsymbol{\nabla} u)$$

où $\boldsymbol{D}$ est un champ régulier de **matrices symétriques définies positives** (tenseur de diffusion) sur Ω et $\mathbf{v}$ un champ de vecteur régulier sur Ω (vitesse de convection), **il est nécessaire d'imposer une CL en tout point de la frontière.** On peut montrer que les problèmes (1) et (2) possèdent une solution unique (dans un espace fonctionnel approprié) si : $\Gamma_D \sqcup \Gamma_N \sqcup \Gamma_R = \partial\Omega$

- Pour un opérateur différentiel linéaire du premier ordre du type :

$$A[u] = \mathbf{v}.\boldsymbol{\nabla} u$$

où $\mathbf{v}$ un champ de vecteur régulier sur Ω (vitesse de convection), **il faut imposer une CL de type Dirichlet uniquement aux points de la frontière pour lesquels la vitesse est « rentrante » càd tels que : $\mathbf{v}.\mathbf{n}$ < 0.**



Exemple: équation de la chaleur 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \qquad t \in [0, +\infty[, \qquad x \in [0,1]$$

avec pour condition aux limites : $u(t,0) = u_l \quad u(t,1) = u_r$

et initiale : $u(0,x) = u_0(x)$.

Supposons que le problème possède deux solutions régulières et soit w la différence des deux solutions. On a

$$\frac{\partial w}{\partial t} - D\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

d'où:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{w^2}{2}\right) - D\,w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

d'où: $$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{w^2}{2}dx - D\int_0^1 w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx = 0$$

3. Conditions aux limites

3.3 Différence entre probèmes du 1er et du 2nd ordre

d'où:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 w^2 dx + 2\,D\int_0^1 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx + \cancel{2\,D\frac{\partial w}{\partial x}(t,0)w(t,0)} - \cancel{2\,D\frac{\partial w}{\partial x}(t,1)w(t,1)} = 0$$

d'où:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 w^2 dx = -2\,D\int_0^1 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx \;\; \leq 0$$

d'où:

$$\int_0^1 w^2(t,x)dx \;\; \leq \int_0^1 w^2(0,x)dx = 0$$

d'où:

$$\int_0^1 w^2(t,x)dx \;= 0 \;\; pour\; tout\; t \;\geq 0 \quad CQFD$$

Plan

1. Généralités

2. Conditions initiales

3. Conditions aux limites

4. Notions élémentaires sur la classification des edp

4. Classification élémentaire des edp

- Le nombre de conditions aux limites à imposer, la régularité et le comportement des solutions des solutions des edp dépendent fortement de l'ordre et de la forme de l'équation → intérêt d'une classification des edp

- Les edp du second ordre à coefficients constants et dont l'inconnue u dépend seulement de deux variables x_1 et x_2 peuvent s'écrire sous la forme générique suivante:

$$\sum_{i,j=1,2} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1,2} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = f$$

Selon la valeur des coefficients a_{ij}, on peut classer les edp de cette forme en trois catégories:

- ✓ ***Elliptique*** *si la forme quadratique* $q(x_1,x_2) = a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2$ *est de signature (2,0) ou (0,2)*
- ✓ ***Hyperbolique*** *si elle est de signature (1,1)*
- ✓ ***Parabolique*** *si elle est de signature (1,0) ou (0,1).*

4. Classification élémentaire des edp

- Le vocabulaire choisi provient du fait que l'équation

$$a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + b_1x_1 + b_2x_2 = Cste$$

  est celle :
  - ✓ d'une **ellipse** si la signature de q est (2,0) ou (0,2),
  - ✓ d'une **hyperbole** si la signature est (1,1),
  - ✓ d'une **parabole** si la signature est (1,0) ou (0,1). (sauf si le vecteur $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ est orthogonal au noyau de la forme quadratique *q*)

- Via un changement de variables (passage dans la base propre de *q*), on peut toujours se ramener à l'une des 3 équations génériques suivantes:

Cas elliptique $\quad A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C\dfrac{\partial u}{\partial x} + D\dfrac{\partial u}{\partial y} + Eu = f \quad$ avec A > 0 et B > 0

Cas hyperbolique $\quad A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C\dfrac{\partial u}{\partial x} + D\dfrac{\partial u}{\partial y} + Eu = f \quad$ avec A > 0 et B > 0

Cas parabolique $\quad D\dfrac{\partial u}{\partial y} - A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\dfrac{\partial u}{\partial x} + Eu = f \quad$ avec D>0 et A > 0

4. Classification élémentaire des edp

- Parmi les équations classiques de la physique des milieux continus on voit que :
  - l'équation de Poisson (ou de Laplace) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$ appartient à la famille des équations elliptiques ;
  - l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$ à la famille des équations hyperboliques ;
  - l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$ à celle des équations paraboliques.
- La classification introduite ci-dessus se généralise en dimension *n* supérieure à deux. Le type elliptique correspond aux signatures (n,0) et (0,n), le type hyperbolique aux signatures (1,n-1) et (n-1,1) et le type parabolique aux signatures (0,n-1) et (n-1,0) (toujours sous la condition que $\vec{b}$ ne soit pas orthogonal au noyau de *q*).
- Lorsque les coefficients d'une edp sont variables, le type de l'edp peut changer d'un point à l'autre.