studocu

Giai tich - Ngân hàng đề giải tích

giải tích 1 (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông)

Scan to open on Studocu

Studocu is not sponsored or endorsed by any college or university
Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Ngân Hàng Đề Thi Giải Tích

Câu 1.A: Tính gh: $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{\ln(1-x^2)}$

giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$, Sử dụng L'hospital

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos 2x)^{1/3} - (\cos x)^{1/2}}{\ln(1-x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}(\cos 2x)^{-2/3}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 - \frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\sin x)}{-\frac{2x}{1-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}(\cos 2x)^{-2/3}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x - \frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot x}{2x/1-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{3(\cos 2x)^{2/3}}\cdot\frac{\sin 2x}{2x} - \frac{1}{2(\cos x)^{1/2}}\cdot\frac{\sin x}{x}}{2/1-x^2} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{12}$$

Câu 2.A tìm gh: $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x\cdot\cos x - \sqrt{1+2x}}{x\cdot\sin x}$

giới hạn dạng $\frac{0}{0}$, sử dụng L'hospital

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{e^x\cdot\cos x - e^x\cdot\sin x - \frac{2}{2\sqrt{1+2x}}}{\sin x + x\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x\cdot(\cos x - \sin x) - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{\sin x + x\cdot\cos x}$$

giới hạn $\frac{0}{0}$, sd L'hospital lần 2

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) + \frac{1}{(\sqrt{1+2x})^3}}{\cos x + \cos x - x\cdot\sin x}$$

$$= \lim \frac{e^x(-2\sin x) + \frac{1}{(\sqrt{1+2x})^3}}{2\cos x - x\cdot\sin x} = \frac{1}{2}$$

This document is available on studocu
Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$\boxed{\text{Câu 3.A}}$ tìm gh: $I = \lim\limits_{x\to 0^+} (\cos 2x)^{\ln x}$ $\langle$ dạng $1^{-\infty}$ $\rangle$

$$\ln I = \lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \ln \cos 2x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \cos 2x}{\frac{1}{\ln x}} \quad \langle \text{dạng } \tfrac{0}{0} \ L_1 \rangle$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin 2x}{\cos 2x} \cdot x \cdot \ln^2 x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x^2 \ln^2 x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{1/2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{-4x}{4x^4}} \quad \langle \text{dạng } \tfrac{\infty}{\infty} \ L_2 \rangle$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{-1/x^2} \quad \langle \text{dạng } \tfrac{-\infty}{-\infty}, \text{ L'hospital lần 3} \rangle$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{2x/x^4} = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 \Rightarrow I = e^0 = 1$$

$\boxed{\text{Câu 4.A}}$ cho dãy số $(x_n), (y_n)$ xđ bởi

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2} \quad y_n = x_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \ (\forall n \geq 3)$$

CMR: 2 dãy số kề nhau

Hai dãy số $(x_n), (y_n)$ kề nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0 \\ (x_n)\uparrow, (y_n)\downarrow \end{cases}$

* xét $x_n - y_n = x_n - \left(x_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}$

$$\lim_{x\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}\right) = 0$$

* CM dãy (x_n) tăng:

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$x_n = \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \cdots + \frac{1}{1+n^2}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \cdots + \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{1+(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{1}{1+(n+1)^2} > 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n$$

$\Rightarrow (x_n)$ là dãy tăng

* CM dãy (y_n) giảm: $y_n = x_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} - y_n = (x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

$$= \frac{1}{1+(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+1)^2}$$

$$= \frac{-(2n^4+4n^3+4n^2) - (n-1)^2 + 3}{[1+(n+1)^2] \cdot 2n^2(n+1)^2} = \frac{-n(n^2+4n+2)}{[1+(n+1)^2]2n^2(n+1)^2} \leq 0 \quad \forall n \geq 3$$

$>0 \ \forall n > 3$

$\Rightarrow y_{n+1} < y_n \Rightarrow (y_n)$ là dãy giảm

Vậy $(x_n), (y_n)$ là 2 dãy kề nhau

$\boxed{\text{Câu 5.A}}$

giải

+ Ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ nếu $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = A \end{cases}$

+ Nếu $m = n \Rightarrow 0 \leq x_{2n} \leq \frac{n+n}{n \cdot n} = \frac{2}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

nếu $m \neq n$, xét $m = n+1$

$$\Rightarrow 0 \le x_{2n+1} \le \frac{n+n+1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n^2+n}$$

$$\lim x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 0$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

chú ý: Dãy (x_n) có giới hạn A nếu có 1 dãy con chẵn và 1 dãy con lẻ có giới hạn A.

$\boxed{\text{Câu 6.A}}$ giải

giới hạn có dạng $\frac{\infty-\infty}{\infty}$

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{4n^2+n-1}-2n)\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2+10} + 2n(\sqrt[3]{n^3-n^2+10}-n)}{3n-5}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-1}{\sqrt{4n^2+n-1}+2n}\cdot\frac{\sqrt[3]{n^3-n^2+10}}{3n-5} + \frac{2n}{3n-5}\cdot\frac{-n^2+10}{(\sqrt[3]{n^3-n^2+10})^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2+10}+n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+2}\cdot\frac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{10}{n^3}}}{3-\frac{5}{n}} + \frac{2}{3-\frac{5}{n}}\cdot\frac{-1+\frac{10}{n^2}}{(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{10}{n^3}})^2+\sqrt[3]{4-\frac{1}{n}+\frac{10}{n^2}}+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{3} = \frac{1}{12} - \frac{2}{9} = -\frac{5}{36}$$

$\boxed{\text{Câu 7.A}}$ giải

* TXĐ: $D = (-1, 1)$
* $f(0) = m$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{e^x - e^{-x}} \quad \langle \text{dạng } \tfrac{0}{0} \rangle$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x}}{\frac{e^{2x}-1}{x\cdot e^x}}$$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$= \lim \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x}}{\frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{2}{e^x}} = \frac{1+1}{1\cdot 2} = 1$$

HS $f(x)$ liên tục tại $x=0$ nếu $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Leftrightarrow m=1$

Vậy $m=1$ thì hs $f(x)$ liên tục tại $x=0$

Câu 8.A Tính gh $I = \lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}$ (dạng $\frac{0}{0}$)

$$I = \lim \frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{1}{x}}{\frac{x}{2}\cdot 2} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}$$

do $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 1$ (giá trị hữu hạn)

$$\Rightarrow I = \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}\cdot 0\cdot 1 = 0$$

Câu 9.A tính gh $I = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(2^{1/x} - 2^{\frac{1}{x+1}}\right)$ (dạng $\infty-\infty$)

$$I = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot 2^{1/x}\left(1-2^{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot 2^{1/x}\left(1-2^{\frac{-1}{x(x+1)}}\right)$$

$$= -\lim_{x\to\infty} x^2\cdot 2^{1/x}\cdot\frac{2^{\frac{-1}{x(x+1)}}-1}{\frac{-1}{x(x+1)}}\cdot\frac{-1}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} 2^{1/x}\cdot\frac{x^2}{x(x+1)}\cdot\frac{2^{\frac{-1}{x(x+1)}}-1}{\frac{-1}{x(x+1)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2^{1/x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{2^{\frac{-1}{x(x+1)}}-1}{\frac{-1}{x(x+1)}} = 1\cdot 1\cdot\ln 2 = \ln 2$$

Câu 10.A tìm ghạn: $I = \lim \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$ (dạng $\frac{0}{0}$)

$$I \overset{(L)}{=} \frac{-x\cdot e^{-x^2/2} + \sin x}{4x^3} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2}(x^2-1)+\cos x}{12x^2}$$

$$\overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2}(-x^3+x) + 2x\cdot e^{-x^2/2} - \sin x}{24x}$$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{-x^2/2}(1-x^2)}{24} + \frac{e^{-x^2/2}}{12} - \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{24}\right]$$

$$= 0 + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

Câu 12.A

giải

+ TXĐ : $D = R$

$f(0) = A$: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\ln(1+x^2)} \overset{L'}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{\frac{2x}{1+x^2}}$

$= \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)\left(e^{x^2} + \frac{\sin x}{2x}\right)\right] = \frac{3}{2}$

HS $f(x)$ liên tục tại $x=0$ nếu $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow A = 3/2$

Câu 13A

Tìm gh: $I = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}$ (dạng $\frac{0}{0}$)

$I \overset{L'}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{\frac{\sin x + x\cos x}{2\sqrt{1+x\sin x}} + \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2}{1-x^2}}{\frac{\frac{\sin x}{x} + \cos x}{2\sqrt{1+x\sin x}} + \frac{\sin x}{x}}$

$= \frac{-2}{1+1} = -1$

Câu 14.A

Xét sự liên tục của h/s tại $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/2x}}{1+xe^{1/x}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

* TXĐ : $D = R$
* $f(0) = 0$: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/2x}}{1+x\cdot e^{1/x}} = A$

Đặt $t = \frac{1}{x}$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

TH1: $x \to 0^+ \Rightarrow t = +\infty$

$$A = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t/2}}{1+\frac{1}{t}e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t\cdot e^{t/2}}{t+e^t} \quad \langle \text{dạng } \tfrac{\infty}{\infty} \rangle$$

$$\underset{L_1}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t/2}+\frac{1}{2}t\cdot e^{t/2}}{1+e^t} \underset{L_2}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{t/2}+\frac{1}{2}e^{t/2}+\frac{1}{4}e^{t/2}}{e^t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{4}t}{e^{t/2}} \underset{L_2}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{1/4}{\frac{1}{2}e^{t/2}} = 0$$

TH2: $x \to 0^- \Rightarrow t \to -\infty$

$$A = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{t/2}}{1+\frac{1}{t}e^t} = \frac{0}{1} = 0$$

do $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$ nên $f(x)$ liên tục tại $x=0$

$\boxed{\text{Câu 15A}}$ tìm gh: $I = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\log_2(1+x\sin3x)}{2^{x^2}-1}$ $\langle$dạng $\frac{0}{0}\rangle$

$$I \underset{L}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{(1+x\sin3x)\ln2}(\sin3x+3x\cdot\cos3x)}{2x\cdot2^{x^2}\cdot\ln2}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin3x+3x\cdot\cos3x}{(1+x\sin3x)\cdot2x\cdot2^{x^2}\cdot(\ln2)^2}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{\sin3x}{3x}+\cos3x}{(1+x\cdot\sin3x)\cdot\frac{2}{3}\cdot2^{x^2}\cdot(\ln2)^2} = \frac{2}{\frac{2}{3}(\ln2)^2} = \frac{3}{(\ln2)^2}$$

$\boxed{\text{Câu 16A}}$ giải

* TXĐ: $D = \mathbb{R}$
* $f(0) = -\dfrac{a^2}{2b}$; $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} (\cos ax)^{\frac{1}{x\sin bx}} = A$

$$\ln A = \lim_{x\to0} \frac{\ln\cos ax}{x\sin bx} \underset{L_1}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{-1}{\cos ax}\cdot a\sin ax}{\sin bx+bx\cos bx}$$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-a}{\cos ax}\cdot\frac{\sin ax}{b\cdot ax}}{\frac{\sin bx}{a\cdot bx} + \frac{bx\cos bx}{abx}} = \frac{-a\cdot\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} = \frac{-a^2}{2b}$$

$$\Rightarrow A = e^{-\frac{a^2}{2b}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = e^{-\frac{a^2}{2b}} \neq f(0)$$

Vậy $f(x)$ ko liên tục tại $x=0$

Câu 17.A

Giải:

* TXD: $D=[0,1]$
* $f(0) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}$$

Do $\lim f(x) = f(0)$ nên $f(x)$ liên tục phải tại $x=0$

Câu 18A

tính gh: $I = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 3x} - \sqrt{1+x\sin 2x}}{e^{x^2}-1}$ ⟨dạng $\frac{0}{0}$⟩

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin 3x}{\sqrt{(\cos 3x)^2}} - \frac{\sin 2x + 2x\cdot\cos 2x}{2\sqrt{1+x\sin 2x}}}{2x\cdot e^{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\cos 3x)^2}} - \frac{\frac{\sin 2x}{2x}+\cos 2x}{2\sqrt{1+x\sin 2x}}\right]\cdot\frac{1}{e^{x^2}}$$

$$2\left(-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}\right)\cdot\frac{1}{1} = -\frac{5}{2}$$

Câu 11A

giải

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{e^x\cdot\sin x - x(x+1)}{x^3} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x\sin x + e^x\cos x - 2x - 1}{3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\cdot\sin x + 2e^x\cdot\cos x - e^x\cdot\sin x - 2}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x\cdot\cos x - 1}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\cdot\cos x - e^x\cdot\sin x}{3} = \frac{1}{3}$$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Phần B

Câu 1.B cho $f(x)$ liên tục trên $[0, a]$

a) CMR : $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

đặt $t = a - x$

$dt = -dx$

x	0	a
t	a	0

$$\int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(a-t)\,dt = \int_0^a f(a-t)\,dt = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

b) tính $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx$

ADCT trên ; ta có : $I = \int_0^{\pi/4} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right)dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1+\tan x}\,dx = \int_0^{\pi/4} (\ln 2 - \ln(1+\tan x))\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln 2\,dx - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx = x\cdot\ln 2\Big|_0^{\pi/4} - I \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{4}\ln 2$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

Câu 2.B CM tích phân hội tụ và tính tích phân

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x)}$$

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{(1+x^2)(1+x)}$$

Xét: $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+x)} = \dfrac{Ax+B}{1+x^2} + \dfrac{C}{1+x}$

$\Leftrightarrow 1 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B + C$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A+B=0 \\ B+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1/2 \\ B=1/2 \\ C=1/2 \end{cases}$$

This document is available on studocu
Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$\Rightarrow I = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \left(\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right]dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln(x+1)\right]\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{4}\ln(b^2+1) + \frac{1}{2}\arctan b + \frac{1}{2}\ln(b+1)\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan b + \frac{1}{4}\ln\frac{(b+1)^2}{b^2+1}\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan b + \frac{1}{4}\ln\frac{1+\frac{2}{b}+\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{b^2}}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow$ tích phân hội tụ

KL: tích phân I hội tụ và $I = \pi/4$

$\boxed{\text{Câu 3.B}}$ a) Dùng tích phân, tính gh

$$I = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1^2}{n+1} + \frac{2^2}{n+1} + \dots + \frac{n^2}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}(1^2+2^2+\dots+n^2)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{6n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{6} = 1/3$$

<Câu này đề ?>

b) tính tích phân $J = \int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$

đặt $\begin{cases} u = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\cdot dx \\ v = x+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} \\ dv = x+1 \end{cases}$$

$$J = (x+1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{x+1}{2\sqrt{x}(x+1)}\,dx$$

$$= 4\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin 0 - \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx = 4\frac{\pi}{3} - \sqrt{x}\Big|_0^3$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

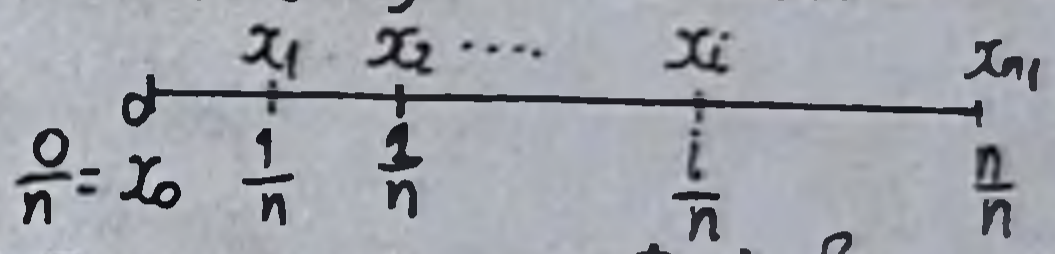
$\boxed{\text{Câu 4.B}}$ a) Dùng tích phân, tính gh:

$$I = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ trên $[0,1]$

– phân hoạch đoạn $[0,1]$ bởi các điểm chia $x_0, \dots, x_n$



trong đó: $x_0 \equiv 0$, $x_n \equiv 1$, các điểm chia cách đều nhau trên $[x_{i-1}; x_i]$ $(i=\overline{1,n})$ $\Delta_i = \frac{1}{n}$

$\xi_i = \frac{i}{n}$

– lập tổng tích phân:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\Delta_i \cdot f(\xi_i) = \Delta_1 \cdot f(\xi_1) + \Delta_2 f(\xi_2) + \cdots + \Delta_n f(\xi_n)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right) = \arctan x\Big|_0^1 = \arctan 1 = \pi/4$$

b) tính TP: $J = \int_0^1 x^3 \arctan x\, dx$

đặt $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$J = \frac{x^4}{4}\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{4}\arctan 1 - \frac{1}{4}\int_0^1\frac{(x^4-1)+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-x+\arctan x\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}+\frac{1}{6}-\frac{\pi}{16} = \frac{1}{6}$$

This document is available on studocu
Downloaded by Tr??ng Khánh (thetkenamas@gmail.com)

Câu 5.B Xét sự hội tụ của TP $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot dx$

Ta có: $I=\int_0^1\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = I_1+I_2$

* Xét I_1: ta có: $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$ liên tục trong $(0,1)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow x=0$ ko là cực điểm $\Rightarrow I_1$ là tích phân xác định

* Xét $I_2=\int_0^{+\infty}\sin^2 x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot dx$

khi $x\in[1,+\infty]$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$ khả vi, liên tục

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

$f(x)=\sin^2 x$ giới nội $(|f(x)|\le 1)$

$\Rightarrow I_2$ là TP hội tụ <dấu hiệu Dirichlet>

$\Rightarrow I$ là TP hội tụ

Câu 6B Xét sự hội tụ của TP $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x)^3}dx$

$I=\int_0^1\frac{x\ln x}{(1+x)^3}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x)^3}dx = I_1+I_2$

* Xét I_1, ta có $f(x)=\frac{x\ln x}{(1+x)^3}$ liên tục trong $(0,1)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{(1+x)^3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{(1+x)^3}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2}{3(1+x)^2\cdot x-(1+x)^3}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(1+x)^2\cdot(2x-1)}=0$ (giới nội)

$\Rightarrow x=0$ ko là cực điểm của $f(x)$

$\Rightarrow I_1$ là tích phân xác định

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Xét I_2: $f(x) = \frac{x\ln x}{(1+x)^3} < \frac{x\ln x}{x^3} = \frac{\ln x}{x^2} = g(x)$

tính: $f(x) > 0$ trên $[1;+\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\cdot dx = \lim \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\cdot dx$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\cdot dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^b + \int_1^b \frac{dx}{x^2}\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{x}\Big|_1^b\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right] = -\frac{1}{b}$$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ

hay I_2 hội tụ (dh so sánh

vậy I là tích phân hội tụ

$\boxed{\text{Câu 7.B}}$ Xét sự hội tụ của TP $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x)}dx$

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x(1+x)}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x)}dx = I_1 + I_2$$

* Xét I_1: $f(x) = \frac{\arctan x}{x(1+x)}$ liên tục trong $(0,1)$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\arctan x}{x(1+x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1+2x} = 1$$

$\Rightarrow x=0$ k° là cực điểm của $f(x)$

$\Rightarrow I_1$ là TP xác định

* Xét I_2: $f(x) = \frac{\arctan x}{x(1+x)}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ khả tích với $x\in[1,b]$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x)}\cdot x^2 = \lim_{x\to+\infty} \arctan x\cdot\frac{x}{1+x} = \frac{\pi}{2}$$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

mà $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right]$

$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ hội tụ

$\Rightarrow I_2$ hội tụ < tiêu chuẩn so sánh.

Vậy I là TP hội tụ

Câu 8.B Xét sự hội tụ của TP $I = \int_0^{+\infty} x^3 \cdot e^{-x^2} dx$

Đặt $x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

x	0	$+\infty$
t	0	$+\infty$

$I = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot x \cdot dx = \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t \cdot e^{-t} \cdot dt = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b t \cdot e^{-t} \cdot dt$

đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = e^{-t} \cdot dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -e^{-t} \end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[-t \cdot e^{-t}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-t} dt\right] = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[-be^{-b} - e^{-t}\Big|_0^b\right]$

$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[-be^{-b} - e^{-b} + 1\right] = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \frac{-b}{e^b} + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(1 - e^{-b})$

$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{e^b} + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(1 - e^{-b}) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ I là TP hội tụ

Câu 9.B Xét sự hội tụ của TP $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

$I = \int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{x^2-1}} dx + \int_2^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{x^2-1}} dx = I_1 + I_2$

+ Xét I_1: $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{x^2-1}}$ liên tục trong $(1,2)$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot \ln x}{\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}} = \frac{0}{0+\frac{1}{0}} = 0$$

$\Rightarrow x = 1$ ko là cực điểm của $f(x)$

$\Rightarrow I_1$ là TP xác định

* Xét I_2: $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{x^2-1}}$; $g(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}$. khả vi trong $[2, b]$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = 1$$

mà $J = \int_2^{+\infty} g(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}\cdot dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$

đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2\ln x}{x}\,dx \\ v = -1/x \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\ln^2 x}{x}\Big|_2^b + 2\int_2^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx\right]$$

đặt $\begin{cases} u_1 = \ln x \\ dv_1 = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = \frac{1}{x}\cdot dx \\ v_1 = -1/x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_2^b \frac{\ln x}{x^2}\cdot dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_2^b + \int_2^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln b}{b} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x}\Big|_2^b$$

$$= -\frac{\ln b}{b} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow J = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\ln^2 b}{b} + \frac{\ln^2 2}{2} + \frac{-2\ln b}{b} + \frac{2\ln 2}{2} - \frac{2}{b} + 1\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-\ln^2 b - 2\ln b - 2}{b}\right) + \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 + 1$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 + 1 + \lim_{b\to+\infty} \frac{-2\ln b\cdot\frac{1}{b} - 2\cdot\frac{1}{b}}{1}$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 + 1 + \lim_{b\to+\infty} \frac{-2}{b} + \lim_{b\to+\infty} \frac{-2\ln b}{b}$$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$= \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 + 1 + \lim_{b\to+\infty} -\frac{2}{b} = \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 + 1$

$\Rightarrow J$ hội tụ $\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ (tiêu chuẩn so sánh)

$\Rightarrow I$ là tích phân hội tụ

$\boxed{\text{Câu 10.B}}$ Xét sự hội tụ của tích phân $A = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - \cos x}\,dx$

$A = \int_0^{+1} \frac{x}{e^x - \cos x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x - \cos x}\,dx = A_1 + A_2$

* Xét A_1: $f(x) = \frac{x}{e^x - \cos x}$ liên tục trong $(0,1)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x - \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x + \sin x} = 1$

$\Rightarrow x = 0$ ko là cực điểm của $f(x)$

$\Rightarrow A_1$ là tp xác định

* Xét A_2: $f(x) = \frac{x}{e^x - \cos x}$; $g(x) = \frac{x}{e^x}$ là 2 hàm khả vi trong $[1; b]$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x - \cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{\cos x}{e^x}} = 1$

* Xét $A_3 = \int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{x}{e^x}\,dx$

đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$A_3 = \lim_{b\to+\infty} \left[-xe^{-x}\Big|_1^b + \int_1^b e^{-x}\,dx\right] = \lim_{b\to+\infty} \left[-be^{-b} + e^{-1} - e^{-x}\Big|_1^b\right]$

$= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-b}{e^b} + \frac{1}{e} - e^{-b} + e^{-1}\right] = \lim_{b\to+\infty} \frac{-b}{e^b} + \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{2}{e} - \frac{1}{e^b}\right]$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{-1}{e^b} + \frac{2}{e} = \frac{2}{e} \Rightarrow A_3$ hội tụ $\Rightarrow A_2$ hội tụ <tiêu chuẩn so sánh>

Vậy A hội tụ

$\boxed{\text{Câu 11B}}$ xét sự hội tụ của TP $B = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(e^{x^2}-e^{-x^2})}}\,dx$

đặt $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(e^{x^2}-e^{-x^2})}}$ với $x \in (0;1]$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(e^{x^2}-e^{-x^2})}} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sqrt[3]{e^{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2(e^{2x^2}-1)}} = \frac{1}{0} = \infty$

$\Rightarrow x=0$ là cực điểm $\Rightarrow$ B là tích phân suy rộng loại 2

Xét $f(x) = \frac{\sqrt[3]{e^{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2(e^{2x^2}-1)}}$ và $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2\cdot 2x^2}} > 0\ \forall x \in (0,1)$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sqrt[3]{e^{x^2}}\cdot\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[3]{e^{2x^2}-1}}$ <dạng $\frac{0}{0}$>

$= \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sqrt[3]{e^{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \pm\infty$ <vô cùng lớn TĐ>

Xét tích phân $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{2x^4}}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^1 (2x^4)^{-1/3}\,dx$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \left[2^{-1/3}\cdot \frac{x^{-1/3}}{-1/3}\Big|_\varepsilon^1\right] = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \left[-\frac{3}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{x}}\Big|_\varepsilon^1\right]$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \left[\frac{-3}{\sqrt[3]{2}} - \frac{-3}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\varepsilon}}\right] = +\infty$

$\Rightarrow \int_0^1 g(x)\,dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ phân kỳ

hay TP B đã cho phân kỳ

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

<chú ý: sd giới hạn $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$ với $f(x) \xrightarrow{x\to a} 0$>

Câu 12.B tính TPSR $I = \int_0^1 \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

* NX: $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to 0^+} -\infty \Rightarrow I$ là TPSR loại 2

$\Rightarrow I = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot dx$

đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = 2\sqrt{x} \end{cases}$

$\Rightarrow I = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \dfrac{2\sqrt{x}}{x}\,dx\right] = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left[-2\sqrt{\varepsilon}\cdot\ln\varepsilon - 2\int_\varepsilon^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}\right]$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left[-2\sqrt{\varepsilon}\cdot\ln\varepsilon - 2\cdot 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1\right] = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{-2\ln\varepsilon}{\varepsilon^{-1/2}} - \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(4 - 4\sqrt{\varepsilon})$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{-2/\varepsilon}{-\frac{1}{2}\varepsilon^{-3/2}} - 4 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} 4\varepsilon^{1/2} - 4 = -4$

Câu 13.B: Tính TPSD $I = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b \left(\dfrac{1}{(x-1)(x+1)} + \dfrac{2}{(x+1)^2}\right)\cdot dx$

$I = \int_2^{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{2}{(x+1)^2}\right)dx$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{2}{x+1}\right]\Big|_2^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b-1}{b+1} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{b+1} + \dfrac{2}{3}\right]$

$= \dfrac{1}{2}\ln 1 - \dfrac{1}{2}\ln 3^{-1} - 0 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{\ln 3}{2} + \dfrac{2}{3}$

Câu 14.B: Tính TPSR $I = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$

$I = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{\sqrt{2}}^{b} \dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$ đặt $t = x^2+1$

$dt = 2x\,dx$

x	$\sqrt{2}$	b
t	3	b^2+1

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left[\int_3^{b^2+1} \dfrac{dt}{2t^2}\right] = \lim\limits_{b\to+\infty}\left[\dfrac{-1}{2t}\Big|_3^{b^2+1}\right] = \lim\limits_{b\to+\infty}\left[\dfrac{-1}{2(b^2+1)} + \dfrac{1}{6}\right] = \dfrac{1}{6}$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 15 · B tính TPSR sau $I=\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx$

$I=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\arcsin x}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[B]$ đặt $\begin{cases} u=\arcsin x \\ dv=\frac{dx}{x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v=\ln x\end{cases}$

$\Rightarrow J=\int_\varepsilon^1 \frac{\arcsin x}{x}dx = \ln x\cdot\arcsin x\Big|_\varepsilon^1 - \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= -\ln\varepsilon\cdot\arcsin\varepsilon - k$

tính k : đặt $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t\cdot dt$

x	0	1
t	0	$\pi/2$

$\Rightarrow k=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(\sin t)}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2}\frac{\ln(\sin t)}{|\cos t|}\cdot\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,dt$

mà $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx \Rightarrow k=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,dt$

$\Rightarrow 2k=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t\cdot\cos t)\,dt = \int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)dt$

$=\int_0^{\pi/2}[\ln(\sin 2t)-\ln 2]\,dt = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt - \ln 2\cdot t\Big|_0^{\pi/2}$

$=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt - \frac{\pi}{2}\ln 2$

đặt $y=2t \Rightarrow dy=2dt \Rightarrow dt=\frac{dy}{2}$

t	0	$\pi/2$
y	0	π

$\Rightarrow 2k=\int_0^{\pi}\ln(\sin y)\frac{dy}{2} - \frac{\pi}{2}\ln 2$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln(\sin y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin y)\,dy - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}k - \frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}k'$

đặt $y=\frac{\pi}{2}=z \Rightarrow dy=dz$.

y	$\pi/2$	π
z	0	$\pi/2$

$\Rightarrow k'=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\right)dz = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos z)\,dz = k$

This document is available on studocu
Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$\Rightarrow 2k = \frac{1}{2}k - \frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}k \quad \Rightarrow k = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

$\Rightarrow J = -\ln\varepsilon \cdot \arcsin\varepsilon + \frac{\pi}{2}\ln 2$

$\Rightarrow I = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{\pi}{2}\ln 2 - \ln\varepsilon \cdot \arcsin\varepsilon\right] = \frac{\pi}{2}\ln 2 - \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln\varepsilon}{1/\arcsin\varepsilon}$

$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\arcsin^2\varepsilon\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)\cdot\arcsin\varepsilon\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 1\cdot 0\cdot 1 = \frac{\pi}{2}\ln 2$

Câu 17.B thử lại ĐL Rolle với hs trên $[1,3]$

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

tìm gtttb c (nếu có)

* ĐL Rolle: nếu $\begin{cases} f(x) \text{ xđ, liên tục trên } [a,b] \\ f(x) \text{ khả vi trong } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{cases}$

thì $\exists c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$

* Xét $f(x)$ trên $[1,3]$: $f(x)$ là hàm cơ bản

1) $f(x)$ xđ trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

2) $\exists f'(x) \Rightarrow f(x)$ khả vi trong $(1,3)$ $\Rightarrow f(x)$ " " " $[1,3] \in \mathbb{R}$

3) $f(1) = f(3) = 0$

theo định luật Rolle, $\exists c \in (1,3)$ sao cho $f'(c) = 0$

Ta có $f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$

$= 3x^2 - 12x + 11$

$\Rightarrow 3c^2 - 12c + 11 = 0 \Rightarrow$ ho $c_1 = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$, $c_2 = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$

Vậy $f(x)$ t/mãn ĐL Rolle và có gtttb c_1, c_2

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 18 B

thử lại ĐL lagrange với hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$ trên $[0,2]$

tìm gtri TB c (nếu có)

* ĐL lagrange

nếu $\begin{cases} f(x) \text{ xđ, liên tục trên } [a,b] \\ f(x) \text{ có đạo hàm hữu hạn trong } (a,b) \end{cases}$

thì $\exists c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

* xét $f(x)$ trên $[0,2]$: $f(x)$ là hàm cơ bản

1) $f(x)$ liên tục trong $[0,1]$ và $[1,2]$

xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x=1$

$f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$

Do $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$

Vậy $f(x)$ liên tục trên $[0,2]$

2) $f(x)$ khả vi trong $(0,1)$ và $(1,2)$

xét tính khả vi của $f(x)$ tại $x=1$

+) $f(x)$ liên tục tại $x=1$

+) $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ \frac{-1}{x^2} & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

$f'(1^+) = -1$, $f'(1^-) = -1 \Rightarrow f'(1^+) = f'(1^-)$

$\Rightarrow f(x)$ khả vi tại $x = 1$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Vậy $f(x)$ khả vi trong $(0,2)$

theo định lý Lagrange: $\exists c \in (0,2)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = -\dfrac{1}{2}$

+ nếu $c \in (0,1] \Rightarrow -c = -1/2 \Rightarrow c = 1/2$

+ nếu $c \in (1,2) \Rightarrow -1/c^2 = -1/2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$

Vậy $f(x)$ t/mãn ĐL Lagrange và gttb $c = 1/2$; $c = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{Câu 16.B}}$ Cho $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trái và phải tại $\forall$ điểm của (a,b) và $f(a) = f(b)$ CMR:

$\exists c \in (a,b)$ sao cho $f'(c^+) \cdot f'(c^-) \le 0$

* $f(x)$ liên tục trên $[a,b] \Rightarrow \exists f(x)_{max}, f(x)_{min}$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a,b]$ sao cho $f(x_1) < f(x) \le f(x_2)$ $\forall x \in [a,b]$

* nếu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x) = const / [a,b]$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \exists c = \dfrac{a+b}{2}$, $f'(c^+) = f'(c) = 0$

* Nếu $f(x_1) < f(x_2)$: $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \in [a,b] \Rightarrow x_1 \text{ là điểm cực tiểu} \\ x_2 \in [a,b] \Rightarrow x_2 \text{ là điểm cực đại} \end{cases}$

+ <u>TH1</u>: $x_2 \in [a,b] \Rightarrow x_2$ là điểm cực đại

$$\left.\begin{aligned} f'(x_2^+) &= \lim_{x \to x_2^+} \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} \le 0 \\ f'(x_2^-) &= \lim_{x \to x_2^-} \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} \ge 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(x_2^+) \cdot f'(x_2^-) \le 0$$

+ <u>TH2</u>: $x_1 \in [a,b] \Rightarrow x_1$ là điểm cực tiểu

$$f'(x_1^+) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1^+)}{x - x_1} \ge 0$$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$f'(x_1^-) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le 0 \Big\} \Rightarrow f'(x_1^+) \cdot f'(x_1^-) \le 0$$

$\Rightarrow$ luôn $\exists c \in [a,b]$ sao cho $f'(c^+) \cdot f'(c^-) \le 0$

PHẦN C

Câu 1. C Cho hàm số $y = x^2 \cdot e^{-x}$

a) tính $d^2y(0)$

$y' = 2x \cdot e^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + 2x)$

$y'' = -e^{-x}(-x^2+2x) + e^{-x}(-2x+2) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

$\Rightarrow d^2y = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)\, dx^2 \Rightarrow d^2y(0) = 2\, dx^2 \Rightarrow d^2y(0) = 2$

b) tính $y^{(n)}$: ADCT Leibniz, ta có

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)}$$

$\Rightarrow y^{(n)} = C_n^0 (x^2)^{(0)} \cdot (e^{-x})^{(n)} + C_n^1 (x^2)^{(1)} \cdot (e^{-x})^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)^{(2)} (e^{-x})^{(n-2)}$

$= x^2 \cdot (-1)^n \cdot e^{-x} + n \cdot 2x \cdot (-1)^{n-1} \cdot e^{-x} + n(n-1) \cdot (-1)^{n-2} \cdot e^{-x}$

$= [(-1)^n \cdot x^2 + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 2x + (-1)^{n-2} \cdot n(n-1)] \cdot e^{-x}$

CM CT $y^{(n)}$ = PP qui nạp

+ Với $n = 1 \Rightarrow y^{(1)} = (-x^2 + 2x) e^{-x} \Rightarrow$ CT đúng

+ GS CT $y^{(n)}$ đúng đến $n = k$ $(k \ge 1)$, ta có

$y^{(k)} = [(-1)^k \cdot x^2 + (-1)^{k-1} \cdot k \cdot 2x + (-1)^{k-2} \cdot 1k(k-1)] e^{-x}$

+ CM CT $y^{(n)}$ đúng với $n = k+1$

$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = [2 \cdot (-1)^k \cdot x + 2(-1)^{k-1} \cdot k] \cdot$

$- e^{-x}[(-1)^k \cdot x^2 + (-1)^{k-1} \cdot k \cdot 2x + (-1)^{k-2} \cdot 1k(k-1)]$

This document is available on studocu
Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$y^{(k+1)} = e^{-x}[-(-1)^k \cdot x^2 - (-1)^{k-1} \cdot k \cdot 2 - (-1)^{k-2} \cdot 1k(k-1) + 2(-1)^k \cdot x + 2(-1)^{k-1} \cdot k]$

$= e^{-x}[(-1)^{k+1} \cdot x^2 + (-1)^k \cdot (k+1) \cdot 2x + (-1)^{k-1} \cdot k(k+1)]$

$\boxed{\text{Câu 2.C}}$ cho hs $y = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$

a) tính $y^{(2010)}(0)$

Ta có $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-3}$

$\Rightarrow (A+B)x - 3A - B = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 1/2 \end{cases}$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x-1}$

* tính $y^{(n)}$:

$y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-1}{(x-3)^2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

$y'' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{(x-3)^3} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{(x-1)^3}$

Dự đoán $y^{(n)} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(x-3)^{n+1}} - \dfrac{1}{2} \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$ $(n \geq 1)$

CM CT $y^{(n)}$ = PP qui nạp

+) với $n=1 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-1}{(x-3)^2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow$ Ct đúng

+) GS CT $y^{(n)}$ đúng đến $n=k$ $(k \geq 1)$

$\Rightarrow y^{(k)} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(-1)^k \cdot k!}{(x-3)^{k+1}} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(-1)^k \cdot k!}{(x-1)^{k+1}}$

+ CM CT $y^{(n)}$ đúng với $n = k+1$

$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-(k+1)(x-3)^k \cdot (-1)^k \cdot k!}{(x-3)^{2k+2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-(k+1)(x-1)^k \cdot (-1)^k \cdot k!}{(x-1)^{2k+2}}$

$\Rightarrow y^{(k+1)} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)!}{(x-3)^{(k+1)+1}} - \dfrac{1}{2} \dfrac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)!}{(x-1)^{(k+1)+1}}$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

This document is available on studocu
Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$\Rightarrow y^{(2010)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2010!}{(x-3)^{2011}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2010!}{(x-1)^{2011}}$$

$$y^{(2010)}(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2010!}{(-3)^{2011}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2010!}{(-1)^{2011}} = \frac{1}{2}\cdot 2010! - \frac{1}{2}\cdot\frac{2010!}{3^{2011}}$$

b) khai triển taylor tại $x_0 = 2$ tới cấp $n=3$

ADCT khai triển Taylor

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

tới cấp $n=3$ tại $x_0 = c = 2$

$$\Rightarrow f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + o(x-2)^3$$

$$= -1 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{1}\right)(x-2) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\right)\frac{(x-2)}{2}$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-1\cdot 6}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-1\cdot 6}{1}\right)\cdot\frac{(x-2)^3}{6} + o(x-2)^3$$

$$= -1 + (x-2)^2 = (x-2)^2 - 1 + o(x-2)^3$$

Câu 3.C a) cho hs $y = (x+1)^{\frac{1}{x}}$. tính $dy(1)$

* tính y': $\ln y = \frac{1}{x}\ln(x+1)$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln(x+1) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$y' = \left[-\frac{\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)}\right](x+1)^{1/x}$$

$$\Rightarrow dy = \left(-\frac{\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)}\right)(x+1)^{1/x}dx$$

$$dy(1) = \left(-\frac{\ln 2}{1} + \frac{1}{2}\right)\cdot 2^1 \Rightarrow dy(1) = 2 - 2\ln 2$$

b) CMR: $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ $(\forall x>1)$

Xét hs $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ với $x>1$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4}{x(x+1)^2}$$

do $x>1 \Rightarrow \begin{cases} x(x+1)^2 > 0 \\ (x+1)^2 - 4 > 4-4 = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm đồng biến

$\Rightarrow \forall x>1$ ta có $f(x) > f(1)$ hay $\ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} > 0$

$$\Leftrightarrow \ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$$

$\boxed{\text{Câu 4.C}}$ a) Khai triển Taylor hs tại $x=1$ tới cấp $n=3$

$$y = x + \arctan x$$

$$y' = 1 + \frac{1}{1+x^2}$$

$$y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \; ; \; y''' = \frac{-2(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)\cdot 2x(-2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

ADCT khai triển Taylor tại $x=c$

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots$$

ta có: $y(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$; $y'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $y''(1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$$y'''(1) = \frac{6-2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o(x-1)$$

$$y = \frac{1}{12}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1) + 1 + \frac{\pi}{4} + o(x-1)^3$$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

b) CMR $x > \ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2}$ $\forall x > 0$

* Xét $f(x) = x - \ln(x+1)$ $\forall x > 0$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến với $x > 0$

$\forall x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$

$\Rightarrow x - \ln(x+1) > 0 \Rightarrow x > \ln(x+1)$ (1)

* Xét $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$ $\forall x > 0$

$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1} > 0$ $\forall x > 0$

$\Rightarrow g(x)$ là hs đồng biến với $x > 0$

$\Rightarrow \forall x > 0$ ta có $g(x) > g(0)$

$\Rightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} > 0$

$\Rightarrow \ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2}$ $\forall x > 0$ (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow x > \ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2}$

$\boxed{\text{Câu 5.C}}$ a) cho $y = \frac{1}{1-x^2}$. tính $y^{2010}(0)$

* tính $y^{(n)}$. ta có

$y = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}$

$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{(1+x)^2}$

$y'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1+x)^3}$

Dự đoán $y^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$ $(n \geq 1)$

CM CT $y^{(n)}$ = PP qui nạp

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

+ với $n=1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow$ CT đúng

+ GS CT $y^{(n)}$ đúng đến $n=k$ $(k\geq 1)$

$\Rightarrow y^{(k)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^k\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$

+ CM CT $y^{(n)}$ đúng với $n=k+1$. thật vậy

$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = \frac{1}{2}\cdot\frac{-(k+1)(1-x)^k\cdot k!(-1)}{(1-x)^{2k+2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-(k+1)(1+x)^k(-1)^k\cdot k}{(1+x)^{2k+2}}$

$= \frac{1}{2}\frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+1)+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{k+1}\cdot(k+1)!}{(1+x)^{(k+1)+1}}$

* $y^{(2010)}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2010!}{(1-x)^{2011}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2010!}{(1+x)^{2011}}$

$y^{(2010)}(0) = \frac{1}{2}\cdot 2010! + \frac{1}{2}\cdot 2010! = 2010!$

b) CMR: $2x\cdot\arctan x \geq \ln(1+x^2)$ $\forall x$

* xét $f(x) = 2x\cdot\arctan x - \ln(1+x^2)$ trên $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 2\arctan x$ (trên $\mathbb{R}$)

$f''(x) = 2\cdot\frac{1}{1+x^2} > 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

+ BBT của hs $f'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$			0		
$f'(x)$	$-\pi$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	π

+ BBT của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$\Rightarrow f(x)\geq 0$

$\Rightarrow 2x\arctan x - \ln(1+x^2)\geq 0$

$\Rightarrow 2x\arctan x \geq \ln(1+x^2)$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$\boxed{\text{Câu 6.C}}$ a) cho $y = \frac{x^3}{x-1}$. tính $y^{(2010)}(0)$

* $y = \frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$

$y' = 2x + 1 + \frac{-1}{(x-1)^2}$

$y'' = 2 + \frac{2}{(x-1)^3}$; $y''' = \frac{-3\cdot 2}{(x-1)^4}$

Dự đoán $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$ $(n \geq 3)$

CM CT $y^{(n)}$ = PP quy nạp

+ Với $n = 3 \Rightarrow y^{(3)} = \frac{-3\cdot 2}{(x-1)^4} \Rightarrow$ CT đúng

+ GS CT $y^{(n)}$ đúng đến $n = k$ $(k \geq 3)$

$\Rightarrow y^{(k)} = \frac{(-1)^k \cdot k!}{(x-1)^{k+1}}$

+ CM CT $y^{(n)}$ đúng với $n = k+1$. thật vậy

$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = \frac{-(k+1)\cdot(x-1)^k \cdot (-1)^k \cdot k!}{(x-1)^{2k+2}} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)!}{(x-1)^{(k+1)+1}}$ ∎

$\Rightarrow y^{(2010)} = \frac{(-1)^{2010} \cdot 2010!}{(x-1)^{2011}} = \frac{2010!}{(x-1)^{2011}}$

$\Rightarrow y^{(2010)}(0) = \frac{2010!}{(-1)^{2011}} = -2010!$

b) viết đến $n = 4$ hàng CT Taylor tại lân cận của $x = -1$

của hs $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(2+x)$

ta có $f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3$

$+ \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-c)^4 + o(x-c)^4$

$f(-1) = -1$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+2} \Rightarrow f'(-1) = 0$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{-1}{(x+2)^2} \Rightarrow f''(-1) = -3$

$f^{(3)}(x) = \frac{-3\cdot 2}{x^4} + \frac{2}{(x+2)^3} \Rightarrow f^{(3)}(-1) = -4$

$f^{(4)}(x) = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{x^5} + \frac{-3\cdot 2}{(x+2)^4} \Rightarrow f^{(4)}(-1) = -30$

$\Rightarrow f(x) = -1 + \frac{0(x+1)}{1!} + \frac{-3(x+1)^2}{2!} + \frac{-4(x+1)^3}{3!} + \frac{-30(x+1)^4}{4!} + 0\cdot(x+1)^4$

$= -1 - \frac{3}{2}(x+1)^2 - \frac{4}{3}(x+1)^3 - \frac{5}{4}(x+1)^4 + 0(x+1)^4$

Câu 7.C Xđ A để $f(x)$ khả vi tại $x=0$. tính $f'(0)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sin x} & \text{khi } x \neq 0 \\ A & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

* TXĐ: $D = \mathbb{R}$
* Xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x=0$

$f(0) = A$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 0$

$f(x)$ liên tục tại $x=0$ nếu $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow A = 0$

* Xét đạo hàm trái, phải tại $x=0$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x\sin x} = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 0$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0 \Rightarrow f'(0^+) = f'(0^-)$

Vậy HS $f(x)$ khả vi tại $x=0 \Leftrightarrow A = 0$

b) Tính gần đúng $a = \sqrt[4]{\frac{3-0,01}{3+0,01}}$

Xét hs $f(x) = \sqrt[4]{\frac{6-x}{x}}$, chọn $x_0 = 3$; $\Delta x = 0,01$

$f'(x) = \frac{-3}{2x^2\sqrt[4]{\left(\frac{6-x}{x}\right)^3}}$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

ADCT: $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$

$a = f(3+0{,}01) \approx f(3) + f'(3)\cdot 0{,}01 \approx \sqrt[4]{1} + \frac{-1}{6}\cdot 0{,}01$

$\approx 1 - \frac{1}{600} \Rightarrow a \approx \frac{599}{600}$

$\boxed{\text{Câu 8C}}$ a) cho $y = \ln\frac{x-1}{x+1}$. tính $y^{(2010)}(\,)$

* Tính $y^{(n)}$:

$y' = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

$y''' = \frac{2\cdot 1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x+1)^3}$; $y'' = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{-1}{(x+1)^2}$

Dự đoán $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x-1)^n} - \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x+1)^n}$ $(n \geq 1)$

* CM CT $y^{(n)}$ = PP qui nạp

+ Với $n=1 \Rightarrow y' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow$ CT đúng

+ GS CT $y^{(n)}$ đúng đến $n=k$ $(k \geq 1)$

$\Rightarrow y^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{(x-1)^k} - \frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{(x+1)^k}$

+ CMCT $y^{(n)}$ đúng với $n=k+1$. thật vậy

$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = \frac{-k(x-1)^{k-1}\cdot(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x-1)^{2k}} - \frac{-k(x+1)^{k-1}\cdot(-1)^{k-1}\cdot(k-1)}{(x+1)^{2k}}$

$\Rightarrow y^{(k+1)} = \frac{(-1)^k\cdot k!}{(x-1)^{k+1}} - \frac{(-1)^k\cdot k!}{(x+1)^{k+1}}$ (đpcm)

$\Rightarrow y^{(2010)} = \frac{-2009!}{(x-1)^{2010}} - \frac{-2009!}{(x-1)^{2010}} = \frac{-2009!}{(x-1)^{2010}} + \frac{2009!}{(x-1)^{2010}}$

$\Rightarrow y^{(2010)}(2) = -2009! + 2009! = 0$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

b) tính gần đúng $a = \sqrt[3]{\frac{e^{0,01}}{0,99}}$

Xét hs $f(x) = \sqrt[3]{\frac{e^{1-x}}{x}}$. Chọn $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,01$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{e^{1-x}}{x}\right)^2}} \cdot \frac{-e^{1-x} \cdot x - e^{1-x}}{x^2}$$

ADCT: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

$\Rightarrow a = f(1 + (-0,01)) \approx f(1) + f'(1) \cdot (-0,01)$

$\Rightarrow a \approx 1 + \frac{-2}{3} \cdot (-0,01) \approx \frac{302}{300}$

Câu 9c

Xét tính khả vi của hs sau tại $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4 - x^2}{3} & \text{nếu } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{nếu } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

* TXĐ: $D = [0, 2]$

* Xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x = 1$

$f(1) = 1$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{4 - x^2}{3} = 1$

Do $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 1$

* Xét đạo hàm 1 giới hạn tại $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{3} & \text{nếu } 0 \le x < 1 \\ \frac{-1}{x^2} & \text{" } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$f'(1^+) = -1$; $f'(1^-) = -2/3$

do $f'(1^+) \ne f'(1^-)$

$\Rightarrow f(x)$ k° khả vi tại $x = 1$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$\boxed{\text{Câu 10.C}}$ a) cho $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$. tính $y^{(2010)}(2)$

* ta có: $y = -1 + \frac{2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$

$$y' = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{-1}{(1+x)^2} \; ; \; y'' = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{2}{(1+x)^3}$$

Dự đoán $y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$ $(n \geq 1)$

* CMCT $y^{(n)}$ = PP qui nạp

+ với $n=1 \Rightarrow y' = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow$ CT đúng

+ GS CT $y^{(n)}$ đúng đến $n=k$ $(k \geq 1)$

$$y^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} + \frac{(-1)^k \cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$$

+ CM CT $y^{(n)}$ đúng với $n=k+1$

$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = \frac{-(k+1)(1-x)^k \cdot k!}{(1-x)^{2k+2}} + \frac{-(k+1)(1+x)^k \cdot (-1)^k \cdot k!}{(1+x)^{2k+2}}$$

$$= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+1)+1}} + \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)!}{(1+x)^{(k+1)+1}} \quad \text{(đpcm)}$$

$$\Rightarrow y^{(2010)} = \frac{2010!}{(1-x)^{2011}} + \frac{2010!}{(1+x)^{2011}}$$

$$\Rightarrow y^{(2010)}(2) = -2010! + \frac{2010!}{3^{2011}}.$$

b) Khai triển Maclaurin hs $y = \frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}$ tới $n=3$

đặt $y = f(x) \Rightarrow f(0) = 1$

ta có: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + o(x^3)$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (x^2+1)}{1-x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$= \frac{x^3+3x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$f'''(x) = \frac{(-3x^2+3)(1-x^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x)(-x^3+3x)}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{3(1-x^2)^{5/2} + (-3x^4+9x^2)(1-x^2)^{1/2}}{(1-x^2)^3} \Rightarrow f'''(0) = 3$$

$$= 3(1-x^2)^{-1/2} + (-3x^4+9x^2)(1-x^2)^{-5/2}$$

$$f^{(3)}(x) = 3\cdot\frac{-1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x) + (-12x^3+18x)(1-x^2)^{-5/2}$$

$$- \frac{5}{2}(1-x^2)^{-7/2}\cdot(-2x)(-3x^4+9x^2)$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$$

Vậy $f(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^3)$

Câu 11.C

a) Cho $y = x^2 \cdot \sin 2x$. Tính $y^{(50)}(\pi/4)$

* Tính $y^{(n)}$. ADCT Leibnitz, ta có

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^{2(k)} \cdot \sin 2x^{(n-k)} \quad (n \geq 1)$$

$$= C_n^0 x^{2(0)} \sin^{(n)} 2x + C_n^1 \cdot x^{2(1)} \cdot \sin 2x^{(n-1)} + C_n^2 x^{2(2)} \cdot \sin 2x^{(n-2)}$$

$$= 2^n \cdot x^2 \cdot \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + n \cdot 2x \cdot 2^{n-1} \cdot \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot 2^{n-2} \cdot \sin\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2^n \cdot x^2 \cdot \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + n \cdot 2^n x \sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ n(n-1)2^{n-2} \sin\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$

CM CT $y^{(n)}$ = PP qui nạp

+ Với $n = 1 \Rightarrow y' = 2x^2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 2x \sin 2x \Rightarrow$ CT đúng

+ GS CT $y^{(n)}$ đúng đến $n = k$ $(k \geq 1)$

$$y^{(k)} = 2^k \cdot x^2 \sin\left(2x + k\frac{\pi}{2}\right) + k \cdot 2^k \cdot x \cdot \sin\left(2x + (k-1)\frac{\pi}{2}\right) + k(k-1)2^{k-2} \sin\left(2x + (k-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Downloaded by Trần Khánh (thietkenamas@gmail.com)

+ CMCT $y^{(n)}$ đúng với $n = k+1$. Thật vậy

$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = 2^k \cdot 2x \sin(2x + k\tfrac{\pi}{2}) + 2^k \cdot x^2 \cdot 2\cos(2x + k\tfrac{\pi}{2})$$

$$+ k \cdot 2^k \sin(2x + (k-1)\tfrac{\pi}{2}) + k \cdot 2^k \cdot 2\cos(2x + (k-1)\tfrac{\pi}{2}) + k(k-1) 2^{k-2} \cdot 2\cos(2x + (k-1)\tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow y^{(k+1)} = 2^{(k+1)} \cdot x^2 \sin(2x + (k+1)\tfrac{\pi}{2}) + (k+1) \cdot 2^{k+1} \cdot x \sin(2x + k\tfrac{\pi}{2})$$

$$+ (k+1)k \cdot 2^{k-1} \cdot \sin(2x + (k-1)\tfrac{\pi}{2}) \quad \boxtimes$$

$$\Rightarrow y^{(50)} = 2^{50} \cdot x^2 \sin(2x + 25\pi) + 50 \cdot 2^{50} \cdot x \cdot \sin(2x + \tfrac{49\pi}{2})$$

$$+ 50 \cdot 49 \cdot 2^{48} \cdot \sin(2x + 48\tfrac{\pi}{2})$$

$$= 2^{50} \cdot x^2 \cdot \sin(2x + \pi) + 50 \cdot 2^{50} \cdot x \cdot \sin(2x + \tfrac{\pi}{2}) + 50 \cdot 49 \cdot 2^{48} \cdot \sin 2x$$

$$= -2^{50} \cdot x^2 \cdot \sin 2x + 50 \cdot 2^{50} x \cdot \cos 2x + 50 \cdot 49 \cdot 2^{48} \sin 2x$$

$$\Rightarrow y^{50}(\pi/4) = -2^{50} \cdot \frac{\pi^2}{16} + 50 \cdot 49 \cdot 2^{48} = 50 \cdot 49 \cdot 2^{48} - 2^{46} \cdot \pi^2$$

b) CMR : $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \ \forall x > 0$

Xét hs $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$; $x > 0$

$f'(x) = -\sin x + x$

$f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$

$\Rightarrow f'(x)$ là hàm đồng biến

BBT của $f'(x)$:

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	

$\Rightarrow f'(x) > 0$

BBT của $f(x)$:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

$\Rightarrow f(x) > 0$ hay $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$

$\Rightarrow \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ (đpcm)

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 12.C

a) cho $y = x(1+\frac{1}{x})^x$, $[x>0]$. tính y'

$\ln y = \ln x(1+\frac{1}{x})^x = \ln x + \ln(1+\frac{1}{x})^x = \ln x + x\ln(1+\frac{1}{x})$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \ln(1+\frac{1}{x}) + x\,\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \ln(1+\frac{1}{x})$

$\Rightarrow y' = [\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \ln(1+\frac{1}{x})]x(1+\frac{1}{x})^x$

b) CMR: $\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. $\forall x$

Xét hs

$f(x) = \arctan x - \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x}{1+x^2}$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \sqrt{\frac{1+x^2}{1^2}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0\ \forall x$

$\Rightarrow f(x) = c$ ($c = const$)

mà $f(0) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow f(x) = 0\ \forall x$

hay $\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Câu 13.C

cho $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

a) Viết 4 số hạng đầu tiên CT Taylor của $f(x)$ tại $x=1$

CT $f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + o(x-c)^3$

+ $f(1) = 1$

+ $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} \Rightarrow f'(1) = -1/2$

+ $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2} \Rightarrow f''(1) = 3/4$

+ $f'''(x) = -\frac{15}{8}x^{-7/2} \Rightarrow f'''(1) = -\frac{15}{8}$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Vậy $f(x) = 1 + \frac{-1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 + \frac{-5}{16}(x-1)^3 + o(x-1)^3$

$= 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + o(x-1)^2$

b) tìm $c \in [1,4]$ trong CT Lagrange của $f(x)$ trên $[1,4]$

Ta có: $\begin{cases} f(x) \text{ liên tục trên } [1,4] \\ f(x) \text{ khả vi trong } [1,4] \end{cases}$

theo ĐL Lagrang: $\Rightarrow \exists c \in (1,4)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot x^{-3/2} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{4-1} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{c^3}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c^3 = 9 \Rightarrow c = \sqrt[3]{9}$

Vậy gt cần tìm $c = \sqrt[3]{9}$

$\boxed{\text{Câu 14.C}}$ cho $y = (1+x)^2 \cdot \cos 2x$

a) tính $y^{(50)}(0)$

* tính $y^{(n)}$. ADCT Leibnetz, ta có

$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1+x)^{(k)}_2 \cdot \cos^{(n-k)} 2x$

$= C_n^0 (1+x)^2 \cdot 2^n \cos(2x + n\frac{\pi}{2}) + C_n^1 \cdot 2(1+x)^{n-1} 2\cos(2x + (n-1)\frac{\pi}{2})$

$+ 2^{n-2} \cdot C_n^2 \cdot 2 \cdot \cos(2x + (n-2)\frac{\pi}{2})$

$= 2^n (1+x)^2 \cdot \cos(2x + n\frac{\pi}{2}) + 2^n n(1+x)\cos(2x + (n-1)\cdot\frac{\pi}{2})$

$+ 2^{n-2} \cdot n(n-1)\cos(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}) \quad (n \geq 1)$

$\Rightarrow y^{50} = 2^{50}(1+x)^2 \cdot \cos(2x + 25\pi) + 2^{50} \cdot 50(1+x)\cos(2x + 49\frac{\pi}{2})$

$+ 50 \cdot 49 \cdot 2^{48} \cdot \cos(2x + 48\frac{\pi}{2})$

$= 2^{50}(1+x)^2 \cdot \cos(2x + \pi) + 2^{50} \cdot 50(1+x) \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{2}) + 50 \cdot 49 \cdot 2^{48} \cdot \cos 2x$

$\Rightarrow y^{(50)}(0) = 2^{50} \cdot \cos\pi + 2^{50} \cdot 50 \cos\frac{\pi}{2} + 2^{48} \cdot \cos 0 \cdot 50 \cdot 49$

$= 2^{48} - 2^{50} \cdot 50 \cdot 49 = 2^{48}(1 - 2^2 \cdot 50 \cdot 49)$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

b) Khai triển Mac laurin tới $n=6$ của $f(x)$

Đặt $y = f(x)$ tại $x=0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \dots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + o(x^6)$$

Ta có:

+ $f(0) = 1$

+ $f'(0) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 2\cos 0 = 2$

+ $f''(0) = 4\cos\pi + 8\cos\frac{\pi}{2} + 2 = -4+2 = -2$

+ $f^{(3)}(0) = -2$

+ $f^{(4)}(0) = -28$; $f^{(5)}(0) = 72$; $f^{(6)}(0) = -306$

Vậy $f(x) = 1 + 2x + (-1)x^2 + -\frac{1}{3}x^3 + \frac{-7}{6}x^4 + \frac{3}{5}x^5 + \frac{-51}{120}x^6 + o.$

$= 1 + 2x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{6}x^4 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{51}{120}x^6 + o.x^6$

$\boxed{\text{Câu 15.C}}$

Cho $f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & \text{khi } x \le 0 \\ \ln(1+x) - x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

a) Tính $f'(0)$ Ta có:

$f'(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \le 0 \\ \frac{1}{1+x} - 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

$f'(0^+) = 0$, $f'(0^-) = 0$ $\Rightarrow f'(0) = 0$

b) CMR: $f''(0)$ k° tồn tại.

$f''(x) = \begin{cases} \cos x & \text{khi } x \le 0 \\ \frac{-1}{(1+x)^2} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

$f''(0^+) = -1$; $f''(0^-) = 1$ $\Rightarrow$ $\nexists f''(0)$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 16.C a) cho hs $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$. tính $y^{(2013)}(0)$

Ta có $y = \frac{1}{(x-1)(x-2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$

* tính $y^{(n)}$

$y' = \frac{-1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$; $y'' = \frac{2}{(x-2)^3} - \frac{2}{(x-1)^3}$

Dự đoán $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$ $(n \geq 1)$

CMCT $y^{(n)}$ = pp qui nạp (tương tự các bT trên)

$\Rightarrow y^{(2013)}(0) = -\frac{2013!}{(x-2)^{2014}} + \frac{2013!}{(x-1)^{2014}} = 2013! - \frac{2013!}{2^{2014}}$

b) CMR $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ $\forall x \in (-1,1)$

xét hs $f(x) = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x$, $\forall x \in (-1,1)$

$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{(1-x^2)}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + 2x^2/2\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{1-x^2}{1} \cdot \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\Rightarrow f(x) = c$ $(c = \text{const})$ mà $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

hay $f(x) = 0$ $\forall x \in (-1,1)$

Vậy $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ $(\forall x \in (-1,1)$ (đpcm)

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$\boxed{\text{Câu 17.C}}$ a) cho $y = \dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$. tính $y^{(2013)}(0)$

* ta có $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$

$\Rightarrow (A+B)x - 2A - B = 2x - 1$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=3 \end{cases}$

$\Rightarrow y = \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$

* $y' = 3 \cdot \dfrac{-1}{(x-2)^2} - \dfrac{-1}{(x-1)^2}$; $y'' = 3 \cdot \dfrac{2 \cdot 1}{(x-2)^3} - \dfrac{2 \cdot 1}{(x-1)^3}$

dự đoán

$y^{(n)} = 3 \cdot \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \quad (n \geq 1)$

* CM CT $y^{(n)}$ = PP quy nạp (CM tương tự các bài trên)

$\Rightarrow y^{(2013)} = 3 \cdot \dfrac{-2013!}{(x-2)^{2014}} - \dfrac{-2013!}{(x-1)^{2014}}$

$\Rightarrow y^{(2013)}(0) = 3 \cdot \dfrac{-2013!}{2^{2014}} - \dfrac{-2013!}{1} = 2013!\left(1 - \dfrac{3}{2^{2014}}\right)$

b) khai triển Maclausin tới $n=3$ của $f(x) = e^x \cos x$

+) $f(0) = 1$

+) $f'(x) = e^x \cos x(\cos x - x\sin x) \Rightarrow f'(0) = 1$

+) $f''(x) = e^x \cos x(\cos x - x\sin x)^2 + e^x \cos x(-\sin x - \sin x - x\cos x)$

$= e^x \cos x(\cos x - x\sin x)^2 + e^x \cos x(-2\sin x - x\cos x) \Rightarrow f''(0) = 1$

+) $f'''(x) = e^x \cos x(\cos x - x\sin x)^3 + 2e^x \cos x(\cos x - x\sin x) \cdot (-\sin x - \sin x - x\cos x)$.

$e^x \cos x(\cos x - x\sin x)(-2\sin x - x\cos x)$

$e^x \cos x(-2\cos x - \cos x + x\sin x)$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$= e^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)^3 + 2e^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)(-2\sin x - x\cos x)$
$+ e^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)(-2\sin x - x\cos x) + e^{x\cos x}(-3\cos x + x\sin x)$

$\Rightarrow f'''(0) = 1 - 3 = -2$

Ta có khai triển:

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$

$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$\boxed{\text{Câu 18.C}}$ a) CMR $y = x|x-1|$ có đh trái, đh phải tại $x=1$, ko có đh tại $x=1$

ta có $y = \begin{cases} x(x-1) & \text{nếu } x \geq 1 \\ x(1-x) & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$ $\quad y' = \begin{cases} 2x-1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ -2x+1 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$

Ta có $y'(1^+) = 2\cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow \exists$ đh phải tại $x=1$

$y'(1^-) = -2 \Rightarrow \exists$ đh trái tại $x=1$

do $y'(1^+) \neq y'(1^-) \Rightarrow$ ko $\exists$ đh $y'(1)$ tại $x=1$

b) khai triển Maclausin tới $n=4$ của $f(x) = \ln(\cos x)$

+ $f(0) = \ln 1 = 0$

+ $f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \Rightarrow f'(0) = 0$

+ $f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f''(0) = -1$

+ $f^{(3)}(x) = \frac{-2\cos x \cdot \sin x}{\cos^4 x} = \frac{-2\sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$

+ $f^{(4)}(x) = \frac{-2\cos x \cdot \cos^3 x - 3\cos^2 x \cdot \sin x \cdot 2\sin x}{\cos^6 x}$

$= \frac{-2\cos^2 x - 6\sin^2 x}{\cos^4 x} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -2$

This document is available on studocu
Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Ta có: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$

PHẦN D

Câu 1D * Khai triển $f(x) = x$ thành chuỗi Fourier

Đặt $g(x) = f(x) = x$ trong $(0;2)$

$g(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $2T = 2 \Rightarrow T = 1$

Ta có $g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cdot \cos\frac{k\pi x}{T} + b_k \cdot \sin\frac{k\pi x}{T}\right)$

Với: +) $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^{2T} x\,dx = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2$

+ $a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g(x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{T}\cdot dx = \int_0^2 x\cdot\cos(k\pi x)\cdot dx$

đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos(k\pi x)\,dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} \end{cases}$

$\Rightarrow a_k = x\cdot\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\cdot dx$

$= 0 + \frac{1}{(k\pi)^2}\cos(k\pi x)\Big|_0^2 = 0$

$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g(x)\sin\frac{k\pi x}{T}\,dx = \int_0^2 x\sin(k\pi x)\,dx$

đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin(k\pi x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} \end{cases}$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$\Rightarrow b_k = \frac{-x\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx$$

$$= \frac{-2}{k\pi} + \frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\Big|_0^2 = \frac{-2}{k\pi}$$

vậy $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{k\pi}\cdot\sin(k\pi x)$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\sin(\pi x) - \frac{2}{2\pi}\sin(2\pi x) - \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi x) \cdots - \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi x) - \cdots$$

* rút gọn $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

thay $x = \frac{1}{2} \in (0,2)$ vào $f(x)$ vừa khai triển ta được

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{6}\sin\frac{6\pi}{2} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi}{2} + \cdots\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{Câu 2D}}$ * khai triển hs $f(x) = x$, $x \in (0,2)$ thành chuỗi các hs cosin

xét hàm chẵn $g(x) = 1 - x$, $x \in (0,2)$

$g(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $2T = 2 \Leftrightarrow T = 1$

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{T}$$

+) $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g(x)\,dx = 2\int_0^T (1-x)\,dx = 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1$

+ $a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx = \frac{2}{T}\int_0^T g(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx$

$$= 2\int_0^1 (1-x)\cos(k\pi x)\,dx$$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

đặt $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = \cos k\pi x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = \dfrac{\sin k\pi x}{k\pi} \end{cases}$

$\Rightarrow a_k = 2(1-x)\dfrac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \dfrac{\sin k\pi x}{k\pi}\cdot dx$

$= 2\cdot \dfrac{-\cos k\pi x}{(k\pi)^2}\Big|_0^1 = \dfrac{-2\cos k\pi}{(k\pi)^2} + \dfrac{2}{(k\pi)^2}$

$\Rightarrow a_k = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ \dfrac{4}{(k\pi)^2} & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$

Vậy $g(x) = \dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{4}{(2k-1)^2\cdot\pi^2}\cdot\cos(k\pi x)$ $\Rightarrow a_k = \dfrac{4}{(2k-1)^2\cdot\pi^2}$

$\Leftrightarrow 1 - f(x) = \dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cdot\cos(k\pi x)$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{4}{(2k-1)^2\cdot\pi^2}\cdot\cos k\pi x$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\cos\pi x - \dfrac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \dots$ với $(x \in (0,2))$

* tính tổng $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$

thay $x=0$ vào $f(x)$ vừa khai triển, ta được

$f(0) = \dfrac{1}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{4}{(2k-1)^2\pi^2}$

$\Leftrightarrow 0 = \dfrac{1}{2} - \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\right] = -\dfrac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} + \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$\boxed{\text{Câu 3.D}}$ * Khai triển $f(x) = x^2$, $x \in (0,1)$ thành chuỗi Fourier của x

đặt $g(x) = f(x) = x^2$, $x \in (0,1)$

$g(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $2T = 1 \Rightarrow T = 1/2$

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cdot \frac{\cos k\pi x}{T} + b_k \cdot \frac{\sin k\pi x}{T}\right)$$

$$+ a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g(x)\,dx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 2/3$$

$$+ a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g(x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx = 2\int_0^1 x^2\cdot\cos 2k\pi x\,dx$$

đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2k\pi x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x\,dx \\ v = \dfrac{\sin 2k\pi x}{2k\pi} \end{cases}$

$$\Rightarrow a_k = 2x^2 \cdot \frac{\sin 2k\pi x}{2k\pi}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x\sin 2k\pi x}{k\pi}\,dx$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\int_0^1 x\cdot\sin(2k\pi x)\,dx$$

đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin(2k\pi x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{-\cos(2k\pi x)}{2k\pi} \end{cases}$

$$\Rightarrow a_k = \frac{2}{k\pi}\cdot x\cdot\frac{\cos(2k\pi x)}{2k\pi}\Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 1\cdot\frac{\cos(2k\pi x)}{2k\pi}\cdot dx$$

$$= \frac{1}{(k\pi)^2} + \frac{1}{(k\pi)^2}\cdot\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\Big|_0^1 = \frac{1}{(k\pi)^2}$$

$$+ b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g(x)\cdot\frac{\sin k\pi x}{T}\cdot dx = 2\int_0^1 x^2\cdot\sin(2k\pi x)\cdot dx$$

đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin(2k\pi x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x\,dx \\ v = -\dfrac{\cos 2k\pi x}{2k\pi} \end{cases}$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$\Rightarrow b_k = -2x^2 \cdot \frac{\cos 2k\pi x}{2k\pi}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{x\cos(2k\pi x)}{k\pi}\cdot dx$$

$$= -\frac{1}{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 x\cdot\cos(2k\pi x)\,dx$$

đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos(2k\pi x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi} \end{cases}$

$$\Rightarrow b_k = \frac{-1}{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\cdot x\,\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\Big|_0^1 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \frac{\sin 2k\pi x}{2k\pi}\,dx$$

$$b_k = \frac{-1}{k\pi} - \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 \sin(2k\pi x)\,dx = -\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2}\cdot\frac{\cos(2k\pi x)}{2k\pi}\Big|_0^1$$

$$= \frac{-1}{k\pi} + \frac{1}{2(k\pi)^3}(1-1) = \frac{-1}{k\pi}$$

Vậy $f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(k\pi)^2}\cdot\cos(2k\pi x) + \frac{-1}{k\pi}\cdot\sin(2k\pi x)\right]$

* tính tổng: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$1 = \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(k\pi)^2}\right)$$ thay $x=1$ vào $f(x)$ ta được.

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{2\pi^2}{3} \qquad \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

Câu 4D

giải

ta có: $\ln(2+x^2) = \ln 2\left(1+\frac{x^2}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$

$$= \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\cdot x^{2n+2}$$

nếu $\frac{x^2}{2} < 1$ hay $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

i $x = 1$, ta được

$$\ln(2+1^2) = \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\cdot 1^{2n+2}$$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Suy ra: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$

<u>ghi nhớ</u>: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \cdots \quad ; (-1<x\le 1)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n \quad ; -1<x\le 1$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\cdot x^{n+1}$

Áp dụng công thức trên thay x bởi $\frac{x^2}{2}$

$\boxed{\text{Câu 5.D}}$ giải

Ta có: $f(x) = \ln\left[3+(x+1)^2\right] = \ln\left[3\left(1+\frac{(x+1)^2}{3}\right)\right]$

$= \ln 3 + \ln\left[1+\frac{(x+1)^2}{3}\right] = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\left(\frac{(x+1)^2}{3}\right)^{n+1}$

$= \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot(x+1)^{2n+2}$

Với $\frac{(x+1)^2}{3} < 1$ hay $-\sqrt{3} < x+1 < \sqrt{3} \Leftrightarrow -1-\sqrt{3} < x < -1+\sqrt{3}$

tại $x=0$, ta được $\ln 4 = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$

Suy ra: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}} = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$

<u>kinh nghiệm:</u> Áp dụng CT khai triển của $\ln(1+x)$ thay x bởi $\frac{(x+1)^2}{3}$

This document is available on studocu
Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 6D

Bài giải

Ta có:

$$f(x) = \frac{x}{x+4} = \frac{x+4-4}{x+4} = 1 - \frac{4}{x+4} = 1 - \frac{4}{5+(x-1)}$$

$$= 1 - \frac{4}{5\left[1+\frac{x-1}{5}\right]} = 1 - \frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{5}\right)^n = 1 - \frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}\cdot(x-1)^n$$

Với $\left|\frac{x-1}{5}\right| < 1 \Leftrightarrow -5 < x-1 < 5 \Leftrightarrow -4 < x < 6$

lấy đạo hàm 2 vế, ta được

$$f'(x) = -\frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}\cdot n(x-1)^{n-1} \Leftrightarrow \frac{4}{(x+4)^2} = -\frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}\cdot n(x-1)^{n-1}$$

tại $x=0$, ta được:

$$\frac{4}{4^2} = -\frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}\cdot n\cdot(-1)^{n-1}$$

Suy ra: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{5^n} = \frac{5}{16}$

ghi nhớ: $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ với $|x|<1$

ADCT thay x bởi $\frac{x-1}{5}$

Câu 7D

Ta có:

giải

$$f(x) = (x+2-2)e^{x+2-2} = \frac{1}{e^2}(x+2-2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!} = \frac{1}{e^2}(x+2-2)e^{x+2}$$

$$= \frac{1}{e^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$$

lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$e^x + x\cdot e^x = \frac{1}{e^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\frac{(x+2)^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\frac{(x+2)^{n-1}}{n!}\right]$$

thay $x=1$, ta đc:

$$2e = \frac{1}{e^2}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{3^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{3}\cdot\frac{3^n}{n!}\right]$$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$\Leftrightarrow 2e^3 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1-\frac{2n}{3}\right)\cdot\frac{3^n}{n!} \Leftrightarrow 2e^3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{3}\cdot\frac{3^n}{n!}$

$\Leftrightarrow 6e^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)\cdot\frac{3^n}{n!} \Leftrightarrow 6e^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(n-2+5)\cdot\frac{3^n}{n!}$

$\Leftrightarrow 6e^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(n-2)\cdot\frac{3^n}{n!} + 5\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!} \Leftrightarrow 6e^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(n-2)\cdot\frac{3^n}{n!} + 5e^3$

$\Leftrightarrow e^3 = (0-2)\cdot\frac{3^0}{0!} + (1-2)\cdot\frac{3^1}{1!} + (2-2)\cdot\frac{3^2}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^n\cdot(n-2)}{n!}$

$\Leftrightarrow e^3 = -2-3+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^n(n-2)}{n!}$

suy ra: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^n(n-2)}{n!} = e^3+5$

<u>ghi nhớ</u>: $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$\Leftrightarrow e^3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

$\boxed{\text{Câu 8D}}$

<u>giải</u>

Ta có: $f(x) = \ln\left[(x+1)^2+1\right]^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+(x+1)^2\right)$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\left[(x+1)^2\right]^n}{n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(x+1)^{2n}$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x+1)^{2n+2}$ với: $-1<x+1<1$ hay $-2<x<0$

tại $x=-\frac{1}{2}$ ta được:

$\ln\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2n+2}$

$\Leftrightarrow \ln\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 4^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 4^{n+1}} = \ln\frac{5}{4}$

This document is available on studocu
Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$\boxed{\text{Câu 9D}}$ Khai triển Fourier hàm $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \in (0;1) \\ 1 & \text{" } x \in (1;2) \end{cases}$

Giải

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cdot \cos\frac{k\pi x}{T} + b_k \sin\frac{k\pi x}{T}\right)$$

Hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $2T = 2 \Leftrightarrow T = 1$

+) $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = \int_0^{2T} f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx$

$= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

+) $a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos(k\pi x)\cdot dx = \int_0^{2T} f(x)\cdot\cos(k\pi x)\,dx$

$a_k = \int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx + \int_1^2 \cos(k\pi x)\cdot dx = I_1 + I_2$

$I_2 = \int_1^2 \cos(k\pi x)\,dx = \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_1^2 = 0$

I_1: đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos(k\pi x)\,dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = x\cdot\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\cdot dx$

$= +\frac{1}{k\pi}\cdot\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^1 = \frac{(-1)^k}{(k\pi)^2} - \frac{1}{(k\pi)^2} = \begin{cases} \frac{-2}{(k\pi)^2} & \text{nếu } k = 2n-1 \\ 0 & \text{nếu } k = 2n \end{cases}$

$\Rightarrow a_k = \frac{-2}{(2k-1)^2\cdot\pi^2}$

+) $b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin(k\pi x)\,dx = \int_0^{2T} f(x)\sin(k\pi x)\cdot dx$

$= \int_0^1 x\sin(k\pi x)\cdot dx + \int_1^2 \sin(k\pi x)\,dx = J_1 + J_2$

$J_2 = -\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_1^2 = \frac{-1}{k\pi} + \frac{(-1)^k}{k\pi} = \begin{cases} \frac{-2}{k\pi} & \text{nếu } k = 2n-1 \\ 0 & \text{nếu } k = 2n \end{cases}$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$\Rightarrow J_1 = -x \cdot \frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos k\pi x}{k\pi}\,dx$$

$$= \frac{-(-1)^k}{k\pi} + \frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^2}\Big|_0^1 = \frac{-(-1)^k}{k\pi} = \begin{cases} \frac{1}{k\pi} & \text{nếu } k=2n-1 \\ \frac{-1}{k\pi} & \text{nếu } k=2n \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} \frac{-1}{k\pi} & \text{nếu } k=2n-1 \\ -\frac{1}{k\pi} & \text{nếu } k=2n \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{k\pi} = b_k$$

Vậy $f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{-2}{(2k-1)^2\pi^2}\cdot\cos(k\pi x) + \frac{-1}{k\pi}\sin(k\pi x)\right)$

$$= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{-2\cos k\pi x}{(2k-1)^2\cdot\pi^2} - \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\right]$$

$\boxed{\text{Câu 10 D}}$ tìm miền hội tụ ... $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n (x-1)^{2n+1}$

Giải

đặt $u_n(x) = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n (x-1)^{2n+1}$

Ta có: $A = \lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n+1}\cdot|x-1|^{2n+3}\cdot\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n\frac{1}{|x-1|^{2n+1}}$

$$A = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+3}\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n}\right)^n\cdot|x-1|^2$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{2n^2+3n}\right)^{(2n^2+3n)\frac{n}{2n^2+3n}}\cdot|x-1|^2$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot e^{1/2n+3}\cdot|x-1|^2 = \frac{1}{2}|x-1|^2$$

Chuỗi luỹ thừa hội tụ nếu $\frac{1}{2}|x-1|^2 < 1$

$\Leftrightarrow |x-1|^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < |x-1| < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}+1$

Vậy chuỗi luỹ thừa hội tụ trong khoảng $(1-\sqrt{2}; \sqrt{2}+1)$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$\boxed{\text{Câu 11D}}$ Khai triển Fourier $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{nếu } x \in (0;1) \\ 1 & \text{nếu } x \in (1;2) \end{cases}$

thành tổng các hàm sin

Xây dựng $f(x)$ là hàm lẻ tuần hoàn với chu kỳ $2T = 2 \Rightarrow T = 1$

* $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cdot dx = 0$

$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cdot \cos\frac{k\pi x}{T}\, dx = 0$

$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cdot \sin\frac{k\pi x}{T}\, dx = \int_0^2 f(x)\cdot \sin(k\pi x)\cdot dx$

$= \int_0^1 (1-x)\sin(k\pi x)\cdot dx + \int_1^2 \sin(k\pi x)\cdot dx = I_1 + I_2$

+ $I_2 = -\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_1^2 = \frac{-1}{k\pi} - \frac{(-1)^k}{k\pi} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k = 2n-1 \\ \frac{-2}{k\pi} & \text{nếu } k = 2n \end{cases}$

+ I_1 : Đặt $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = \sin(k\pi x)\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = -\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\cdot dx \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = -(1-x)\cdot\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos k\pi x}{k\pi}\, dx$

$= \frac{1}{k\pi} - \frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{k\pi}$

$\Rightarrow b_k = \begin{cases} \frac{1}{k\pi} & \text{nếu } k = 2n-1 \\ \frac{-1}{k\pi} & \text{nếu } k = 2n \end{cases}$

Vậy $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin k\pi x = \frac{1}{\pi}\left(\sin \pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x - \dots\right)$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 12D Tìm chuỗi hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-2}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{2n}$

Giải

đặt $u_n(x) = \frac{n}{n^2-2}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{2n}$. ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2-2}\left|\frac{2x-1}{x}\right|^{2(n+1)} \cdot \frac{n^2-2}{n} \cdot \left(\frac{x}{2x-1}\right)^{2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n^2-2n-2}{n^3+2n^2-n} \cdot \left|\frac{2x-1}{x}\right|^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} \cdot \left[\frac{2x-1}{x}\right]^2 = \left|\frac{2x-1}{x}\right|^2$$

Chuỗi luỹ thừa hội tụ nếu $\left|\frac{2x-1}{x}\right|^2 < 1$

$\Leftrightarrow -1 < \frac{2x-1}{x} < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Vậy chuỗi luỹ thừa hội tụ trong khoảng $(0;1)$

Câu 13D giải

a) xét $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)e^{(n+1)x}}{n \cdot e^{nx}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^x = e^x$

Chuỗi hàm hội tụ nếu $e^x < 1 = e^0 \Leftrightarrow x < 0$

Vậy miền xác của $f(x)$ là: $(-\infty;0)$

b) $I = \int_{-\ln 3}^{-\ln 2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot e^{nx} \cdot dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\ln 3}^{-\ln 2} n \cdot e^{nx} \cdot dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{nx}\Big|_{-\ln 3}^{-\ln 2}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-n\ln 2} - e^{-n\ln 3}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^{n\ln 2}} - \frac{1}{e^{n\ln 3}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1/2}{1-1/2} - \frac{1/3}{1-1/3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 14D

Giải

a) $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n(n-1)} : \frac{1}{n(n+1)}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{n(n+1)}{n(n-1)}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right| = 1$

$\Rightarrow$ bán kính hội tụ: $R = \frac{1}{\rho} = 1 \Rightarrow$ khoảng hội tụ: $x \in (-1;1)$

⊛ tại $x=1$ ta có chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}$. là chuỗi số dương

+) $n\to+\infty \Rightarrow \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$; mặt ≠: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ do $2>1$

$\Rightarrow$ Chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ (t/c so sánh)

⊛ tại $x=-1$. ta có chuỗi: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)n}$: chuỗi đan dấu

+ ta xét $f(n) = \frac{1}{n(n-1)} \Rightarrow f'(n) = \frac{-2n+1}{[n(n-1)]^2} < 0 \ \forall n > 2$

có $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n-1)} = 0 \\ \frac{1}{n(n-1)}: \text{đơn điệu giảm} \end{cases} \Rightarrow$ Chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ hội tụ theo T/C Dalambe

Vậy miền xác định của hs là: $x \in [-1;1]$

b) CMR $\forall x \in (-1;1)$ thì $y(1-x) = 1+x-y$

Ta có: $y = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{n(n-1)} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}$

$VP = 1+x-y = 1+x-x-\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$

$= 1 - \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)x^n = 1 - \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\cdot\frac{x^n}{n-1} + \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\cdot\frac{x}{n}$

$VT = y(1-x) = \left(1+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\cdot\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)(1-x)$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$= 1 - x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1}$$

$$= 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} + \left[\left(x + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}\right) - x\right]$$

$$VT = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a^n}{n} = VP \text{ (đpcm)}$$

$\boxed{\text{Câu 15 D}}$ $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot e^{-nx}$

a) tìm miền xđ của hs:

xét $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{n \cdot e^{-nx}} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-x} = e^{-x}$

chuỗi hàm ~~tụ~~ hội tụ nếu $e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

$\Rightarrow$ miền xđ của hs $f(x)$ là $(0; +\infty)$

b) tính tổng $\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot e^{-n}$. $\quad$ xét $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$

$g(x) = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots + e^{-nx} + \dots$

với $0 < e^{-2} < 1$ ta có $g(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

lấy đạo hàm của hàm $g(x)$, ta được.

$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-n) e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} \Leftrightarrow \frac{-e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot e^{-nx}$

cho $x = 1$ ta được: $\frac{-\frac{1}{e}}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot e^{-n}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot e^{-n} = \frac{e}{(1-e)^2}$$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

(16D → 18D này theo NH cũ)

Câu 16D Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\left(\frac{x+2}{x}\right)^n$

Giải

Đặt $U_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\cdot\left(\frac{x+2}{x}\right)^n$. ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{|(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}|}{n+2}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{|(-1)^n\sqrt{n}|}\cdot\left(\frac{x}{x+2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{+\sqrt{n+1}\cdot(n+1)}{(n+2)\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)1}\left|\frac{x+2}{x}\right| = +\left|\frac{x+2}{x}\right|$$

Chuỗi luỹ thừa hội tụ nếu $\left|\frac{x+2}{x}\right| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < \frac{x+2}{x} < 1 \Leftrightarrow x < -1$

Vậy chuỗi luỹ thừa hội tụ với $\forall x < -1$

Câu 17D Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n+3^n)x^n$.

Giải

Đặt $U_n(x) = (2^n+3^n)x^n$, ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2^{n+1}+3^{n+1})|x|^{n+1}}{(2^n+3^n)|x|^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\cdot|x| = 3|x|$$

Chuỗi luỹ thừa hội tụ nếu $3|x| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < 3x < 1 \Leftrightarrow -1/3 < x < 1/3$

Vậy chuỗi luỹ thừa hội tụ trong $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

*** Chú ý**: Xét sự hội tụ của chuỗi luỹ thừa

+ Ta xét $\lim_{n\to+\infty}\frac{|U_{n+1}(x)|}{U_n(x)} = |A|$

+ Cho $|A| < 1 \Rightarrow$ miền hội tụ

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 18D Cho hàm số $f(x) = x\cdot\cos x$, $x \in (0;\pi)$

a) Hãy triển khai Fourier theo hàm số cosin

Xét $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $2T = \pi \Rightarrow T = \pi/2 \Rightarrow$ HS $f(x)$ chẵn

+) $b_k = 0$

+ $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x\,dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$\Rightarrow a_0 = \frac{2}{\pi} x\sin x\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(-1-1) = \frac{-4}{\pi}$

+ $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\cos 2kx\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos(2k+1)x\,dx + \frac{1}{\pi}\int x\cos(2k-1)x\,dx = I_1 + I_2$

+ tính I_1: đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos(2k+1)x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{\pi} x\cdot\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}\,dx$

$I_1 = \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi(2k+1)^2}$

+ tính I_2: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos(2k-1)x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{\pi} x\,\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi(2k-1)^2}$

$\Rightarrow a_k = \frac{-2}{\pi(2k+1)^2} + \frac{-2}{\pi(2k-1)^2} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{8k^2+2}{(4k^2-1)^2}$

Vậy $f(x) = \frac{-2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{\pi}\cdot\frac{8k^2+2}{(4k^2-1)^2}\cos(2kx)$

b) tính tổng chuỗi $\sum_{n\geq 0}\frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}$

$-\pi = \frac{-2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi(\pi^2-2)}{4\pi}$

thay $x = \pi$ vào $f(x)$, ta được

This document is available on studocu
Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 6.A: Tìm giới hạn của dãy số

4

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n-1}\,\sqrt[3]{n^3-n^2+10}-2n^2}{3n-5}.$$

Câu 7.A: Xác định hằng số m để hàm số sau liên tục tại $x=0$

4

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{e^x-e^{-x}} & \text{khi } 0<|x|<1,\\ m & \text{khi } x=0.\end{cases}$$

Câu 8.A: Tìm giới hạn

5

$$I=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}}.$$

Câu 9.A: Tìm giới hạn

5

$$I=\lim_{x\to\infty}x^2\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}}\right).$$

Câu 10.A: Tìm giới hạn

5

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4}.$$

Câu 11.A: Tìm giới hạn

8

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(x+1)}{x^3}.$$

Câu 12.A: Xác định hằng số A để hàm số sau liên tục tại $x=0$

6

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)} & \text{khi } x\neq 0\\ A & \text{khi } x=0.\end{cases}$$

Câu 13.A: Tìm giới hạn

6

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}.$$

Câu 14.A: Xét sự liên tục của hàm số sau tại $x=0$.

6

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{2x}}}{1+xe^{\frac{1}{x}}} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0.\end{cases}$$

Câu 15.A: Tìm giới hạn

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+x\sin 3x)}{2^{x^2}-1}.$$

7

Câu 16.A: Cho $ab\neq 0$, xét sự liên tục của hàm số sau tại

$$f(x)=\begin{cases}(\cos ax)^{\frac{1}{x\sin bx}} & khi\ x\neq 0,\\ -\dfrac{a^2}{2b} & khi\ x=0.\end{cases}$$

Câu 17.A: Chứng minh rằng: Hàm số sau liên tục phải tại

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)} & khi\ x\in(0,1),\\ \dfrac{1}{2} & khi\ x=0.\end{cases}$$

8

Câu 18.A: Tìm giới hạn sau:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 3x}-\sqrt{1+x\sin 2x}}{e^{x^2}-1}.$$

B. <u>Câu hỏi loại 2 điểm phần B</u>

Câu 1.B: Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,a]$

a. Chứng minh

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$$

9

b. Từ đó, tính

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$$

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG
HỘI ĐỒNG RA ĐỀ THI MÔN HỌC, HỌC PHẦN

NGÂN HÀNG CÂU HỎI THI TỰ LUẬN

Môn : Giải tích 1

NGÀNH ĐÀO TẠO: CNTT, ĐTVT, KTĐT. **TRÌNH ĐỘ ĐÀO TẠO:** Cử nhân.

CẤU TRÚC ĐỀ THI:

- *Mỗi đề có 4 câu với tổng điểm bằng 10.*
- *Chọn mỗi phần 1 câu.*
- *Thời gian thi : 90 phút.*
- *Không mở tài liệu.*

A. Câu hỏi loại 2 điểm phần A

Câu 1.A: Tìm giới hạn

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 2x}-\sqrt{\cos x}}{\ln\left(1-x^2\right)}$$ 1

Câu 2.A: Tìm giới hạn

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-\sqrt{1+2x}}{x\sin x}$$ 1

Câu 3.A: Tìm giới hạn

$$I=\lim_{x\to 0^+}\left(\cos 2x\right)^{\ln x}$$ 2

Câu 4.A: Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) xác định bởi

$$x_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{1+k^2},\ y_n=x_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2},\ \forall n\geq 3.$$ 2

Chứng minh rằng: Hai dãy (x_n) và (y_n) kề nhau.

Câu 5.A: Cho dãy số (x_n) thỏa mãn

$$0\leq x_{n+m}\leq\frac{n+m}{nm},\ \forall n,m\in N^*=\{1,2,...\}.$$ 4

Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 18.B: Thử lại định lý Lagrange đối với hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & khi\ 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{x} & khi\ x>1,\end{cases}$$ trên đoạn $[0,2]$.

21

Tìm giá trị trung bình c (nếu có).

C. <u>Câu hỏi loại 3 điểm phần C</u>

Câu 1.C: Cho hàm số $y=x^2e^{-x}$

23

a. Tính $d^2y(0)$.

b. Tính đạo hàm cấp n.

Câu 2.C: Cho hàm số

$$y=\frac{1}{x^2-4x+3}$$

24

a. Tính $y^{(2010)}(0)$.

b. Khai triển Taylor tại $x_0=2$ tới cấp $n=3$.

Câu 3.C:

25

a. Cho hàm số $y=(x+1)^{\frac{1}{x}}$. Tính $dy(1)$.

b. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi x lớn hơn 1

$$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}.$$

Câu 4.C:

a. Khai triển Taylor hàm số tại $x=1$ tới cấp $n=3$ của hàm số

$$y=x+\arctan x.$$

26

Photo Huyền trang

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

b. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi x dương

$$x > \ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2}.$$

Câu 5.C:

a. Cho hàm số $y = \frac{1}{1-x^2}$. Tính $y^{(2010)}(0)$. 27

b. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi x

$$2x\arctan x \geq \ln(1+x^2)$$

Câu 6.C:

a. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{x-1}$. Tính $y^{(2010)}(0)$. 29

b. Viết 4 số hạng đầu tiên trong công thức Taylor tại lân cận của điểm $x = -1$ của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(2+x)$$

Câu 7.C:

a. Xác định hằng số A để hàm số sau khả vi tại $x = 0$ và tính $f'(0)$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{\sin x} & \text{khi } x \neq 0 \\ A & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$ 30

b. Tính gần đúng giá trị của số

$$a = \sqrt[4]{\frac{3-0,01}{3+0,01}}.$$

Câu 8.C:

a. Cho hàm số $y = \ln\frac{x-1}{x+1}$. Tính $y^{(2010)}(2)$. 21

b. Tính gần đúng giá trị của số

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 2.B: Cho

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x)}.$$ 9

a. Chứng minh tích phân hội tụ.

b. Tính I.

Câu 3.B:

a. Dùng tích phân, tìm giới hạn

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1^2}{n+1}+\frac{2^2}{n+1}+...+\frac{n^2}{n+1}\right).$$ 10

b. Tính tính phân sau:

$$J=\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx.$$

Câu 4.B: a. Dùng tích phân, tìm giới hạn

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$ 11

b. Tính tính phân sau:

$$J=\int_0^1 x^3.\arctan x\,dx.$$

Câu 5.B: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$. 12

Câu 6.B: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x)^3}dx$. 12

Câu 7.B: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x(1+x)}dx$. 13

Câu 8.B: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$. 14

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 9.B: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$. 14

Câu 10.B: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - \cos x}dx$. 16

Câu 11.B: Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(e^{x^2}-e^{-x^2})}}dx$. 17

Câu 12.B: Tính tích phân suy rộng sau: $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$ 18

Câu 13.B: Tính tích phân suy rộng sau: $I = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right)dx.$ 18

Câu 14.B: Tính tích phân suy rộng sau: $I = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx.$ 18

Câu 15.B: Tính tích phân suy rộng sau: $I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx.$ 19

Câu 16.B: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi phải và khả vi trái tại mọi điểm thuộc (a,b), và $f(a)=f(b)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c^+).f'(c^-) \le 0$. 22

Câu 17.B: Thử lại định lý Rolle đối với hàm số sau trên đoạn $[1,3]$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$ 20

Tìm giá trị trung bình c (nếu có).

Photo Huyền trang

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

$$a=\sqrt[3]{\frac{e^{0,01}}{0,99}}.$$

Câu 9.C: Xét tính khả vi của hàm số sau tại $x=1$

32

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{3} & \text{khi } 0\le x<1\\ \dfrac{1}{x} & \text{khi } 1\le x\le 2.\end{cases}$$

Câu 10.C: a. Cho hàm số $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. Tính $y^{(2010)}(2)$. 33

b. Khai triển Maclaurin hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}$ tới $n=3$.

Câu 11.C: a. Cho hàm số $y=x^2\sin 2x$. Tính $y^{(50)}(\frac{\pi}{4})$. 34

b. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $x>0$:

$$\cos x>1-\frac{x^2}{2}.$$

Câu 12.C: a. Tính y' của hàm số 36

$$y=x(1+\frac{1}{x})^x,\ x>0$$

b. Chứng minh rằng:

$$\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ \forall x.$$

Câu 13.C: Cho hàm số 36

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

a. Viết 4 số hạng đầu tiên trong công thức Taylor của hàm số trên tại lân cận của $x=1$.

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

b. Tìm giá trị trung gian $c \in [1,4]$ trong công thức Lagrange của hàm số trên đoạn $[1,4]$.

Câu 14.C: Cho hàm số

$$y = (1+x)^2 \cos 2x.$$ 37

a. Tính $y^{(50)}(0)$.

b. Khai triển Maclaurin tới $n = 6$ của hàm số trên.

Câu 15.C: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \le 0 \\ \ln(1+x) - x & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$ 38

a. Tính $f'(0)$.

b. Chứng minh $f''(0)$ không tồn tại.

Câu 16.C: 39

a. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Tính $y^{(2013)}(0)$.

b. Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi $x \in (-1,1)$

$$\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Câu 17.C: 40

a. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x^2 - 3x + 2}$. Tính $y^{(2013)}(0)$.

b. Khai triển Maclaurin tới $n = 3$ của hàm số $f(x) = e^{x \cos x}$.

Câu 18.C: 41

a. Chứng minh rằng: Hàm số $y = x|x-1|$ có đạo hàm trái và đạo hàm phải tại $x = 1$, nhưng không có đạo hàm tại $x = 1$.

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

b. Khai triển Maclaurin tới $n=4$ của hàm số $f(x)=\ln(\cos x)$.

D. Câu hỏi loại 3 điểm phần D

Câu 1.D: Khai triển hàm số $f(x)=x,\ x\in(0,2)$ thành chuỗi Fourier và rút gọn biểu thức $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ 42

Câu 2.D: Khai triển Fourier hàm số $f(x)=x,\ x\in(0,2)$ thành chuỗi ác hàm cosin và tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. 43

âu 3.D: Khai triển hàm số $f(x)=x^2,\ x\in(0,1)$ thành chuỗi ourier và tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. 45

ìu 4.D: Khai triển hàm số $f(x)=\ln(2+x^2)$ thành chuỗi lũy thừa x và tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}$. 46

1 5.D: Khai triển hàm số $f(x)=\ln(x^2+2x+4)$ thành chuỗi lũy của $(x+1)$ và tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)3^{n+1}}$ 47

6.D: Khai triển hàm số $f(x)=\frac{x}{x+4}$ thành chuỗi lũy thừa $(x-1)$ và tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$. 48

7.D: Khai triển hàm số $f(x)=xe^x$ thành chuỗi lũy thừa của $x+2)$ và tính tổng S của chuỗi số $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^n(n-2)}{n!}$. 48

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

Câu 8.D: Khai triển hàm số $f(x)=\ln\sqrt{x^2+2x+2}$ thành chuỗi Taylor ở lân cận $x=-1$ và tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)4^{n+1}}$. 49

Câu 9.D: Khai triển Fourier hàm số 50

$$f(x)=\begin{cases} x & khi\ x\in(0;1], \\ 1 & khi\ x\in(1;2]. \end{cases}$$

Câu 10.D: Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa 51

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n(x-1)^{2n+1}.$$

Câu 11.D: Khai triển Fourier hàm số 52

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & khi\ x\in(0;1], \\ 0 & khi\ x\in(1;2] \end{cases}$$

thành tổng của các hàm số sin.

Câu 12.D: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm 53

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-2}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{2n}.$$

Câu 13.D: Cho hàm số 53

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{nx}$$

a. Tìm miền xác định của hàm số.

b. Tính tích phân

$$I=\int_{-\ln 3}^{-\ln 2}f(x)dx.$$

Câu 14.D: Cho hàm số 54

$$y(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$$

Photo Hoa In ưng

Downloaded by Tr22ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)

a. Tìm miền xác định của hàm số.

b. Chứng minh rằng $\forall x \in (-1,1)$ thì $y'(1-x) = 1 + x - y$.

Câu 15.D: Cho hàm số

55

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$$

a. Tìm miền xác định của hàm số.

b. Tính tổng: $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$.

Câu 16.D:

a. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan\left(n^2+1\right)}{\sqrt{3n^3+n^2}}$.

b. Tìm miền hội tụ chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Câu 17.D:

a. Khai triển Maclaurin hàm số $f(x) = \arctan x$. Từ đó, tính tổng của chuỗi số: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

b. Tìm miền hội tụ chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x+1)^n}{(n+1)5^n}$.

Câu 18.D:

a. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{n}\right)$.

b. Tìm miền hội tụ chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x+1)^n}{(n+1)2^n}$.

Câu 19.D:

1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \tan\frac{1}{n^2})$.

2. Tìm miền hội tụ chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{4^n (n+1)^2}$.

This document is available on studocu

Downloaded by Tr??ng Khánh (thietkenamas@gmail.com)